нашли хорошую монетку, при бросании которой в среднем в половине случаев выпадает герб, а в половине — решетка.

1. Проверьте, что после k бросаний определен лишь отрезок длины 2^{-k}, в котором лежит точка A.

2. По Алешиному способу хозяин монетки не выявлен, если часть, указанная монеткой, содержащая по определению точку A, содержит также одну из «критических» точек $^1/_3$ или $^2/_3$. Выпишите последовательности, соответствующие этим точкам. Найдите, в какой части случаев (после k бросаний) мы все еще рискуем оказаться в одной из указанных точек. (Доказав, что выпадание монетки по строго определенному закону маловероятно, мы избавимся от первого Бориного возражения.)

3. Проверьте, что Витин способ можно описать в Алешиной терминологии так. Мы определяем с помощью монетки число A, но отрезок (0, 1) распределяем более хитро:

Алеша:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{12}{16}, \frac{13}{16}\right), \left(\frac{60}{64}, \frac{61}{64}\right), \ldots$$

Боря:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{13}{16}, \frac{14}{16}\right), \left(\frac{61}{64}, \frac{62}{64}\right), \ldots$$

Витя:

$$\left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{14}{16}, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{62}{64}, \frac{63}{64}\right), \ldots$$

При таком разбиении отрезка (0, 1) возникает много «критических» точек, как Витя предлагал их распределять?

4. Докажите, что доля случаев, в которых один из школьников после $2k$ бросаний монетки получает монетку (по Витиному способу), равна сумме длин тех «его» частей отрезка (0,1), в которых может оказаться точка A после $2k$ бросаний.

5. Докажите, что Витин способ выбора владельца монетки справедлив.

6. Используя задачу 1, обобщите задачу 4 для Алешиного способа в предположении, что после $2k$ бросаний владелец монетки определен.

7. Докажите, что Алешин способ справедлив.

8. Используя задачу 4, найдите долю случаев, в которых после $2k$ бросаний владелец монетки не определен

а) по Алешиному способу;

б) по Витиному способу.

Какой из способов рациональнее? Ответив на этот вопрос, вы ответите и на второе Борино возражение.

ДВЕ ИГРЫ

Игра в пешки

Имеется прямоугольная клетчатая доска размером $m \times n$ и пешки: m белых и m черных. В начальной позиции пешки расположены на доске так, что в каждой вертикали имеется ровно одна белая и одна черная пешка, причем белая пешка должна быть расположена выше черной пешки (рис. 1).

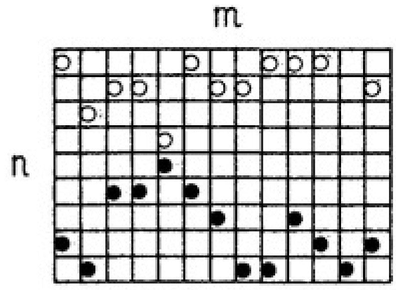

Рис. 1.

Играют двое. За ход разрешается одну любую (свою) пешку передвинуть по вертикали на любое (ненулевое) число клеток доски вперед или назад. Перескакивать через пешки противника или занимать клетки, в которых они расположены, не разрешается. Выигрывает тот, кто запер своего соперника, не оставив ему возможности произвести очередной ход. (На рисунке 2 изображен проигрыш черных.) И, наконец, последнее правило: белые начинают.

Определите, при каких начальных позициях выигрывают белые вне зависимости от стратегии черных, а при каких — черные.

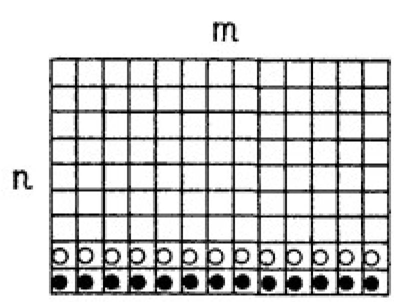

Рис. 2.

(Продолжение см. на стр. 41)