



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN
EL MODELADO DE MATERIA OSCURA GALÁCTICA

MARINA ESTÉVEZ ALMENZAR

Trabajo Fin de Grado

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Tutores

Óscar Sánchez Romero

Pedro A. García Sánchez

FACULTAD DE CIENCIAS

E.T.S. INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE TELECOMUNICACIÓN

Granada, a 10 de diciembre de 2018

ÍNDICE GENERAL

1. BREVE RESUMEN Y PALABRAS CLAVE	3
2. SUMMARY AND KEY WORDS	4
3. OBJETIVOS	7
4. INTRODUCCIÓN	8
4.1. Contextualización: Modelado de la masa de una galaxia	8
4.1.1. Curvas de rotación	8
4.1.2. Campo gravitatorio generado por una masa puntual	9
4.1.3. Masa y gravedad de un cuerpo extendido	10
4.1.4. Modelado de la masa de materia oscura	12
4.2. Descripción del problema, síntesis y fuentes	16
 I. PARTE MATEMÁTICA	18
5. AJUSTE Y REDUCCIÓN PARAMÉTRICA	19
6. PROPIEDADES DE LA MINIMIZACIÓN EN TÉRMINOS DE LA ESCALA ESPACIAL	26
 II. PARTE INFORMÁTICA	33
7. ALGORITMO DE REDUCCIÓN DEL INTERVALO DE BÚSQUEDA	34
8. ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN φ	44
 III. CONCLUSIONES Y VÍAS FUTURAS	52
9. CONCLUSIONES	53
10. VÍAS FUTURAS	56
 IV. APÉNDICES	57
A. CÁLCULO DE $W^s(r)$ PARA CADA PERFIL DE MATERIA OSCURA	58
B. DATOS DE LA GALAXIA DDO43	60
C. RESULTADOS OBTENIDOS	61

BREVE RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

En este trabajo se presenta y desarrolla un problema de optimización presente actualmente en el campo de la Astrofísica. Dada una galaxia, se plantea el ajuste de su curva de rotación con el fin de determinar la cantidad de materia oscura que hay en dicha galaxia, con la mejor exactitud posible. Desde el punto de vista matemático, se nos presenta un problema de minimización de un funcional que, inicialmente, depende de más de un parámetro, y se expresa como un problema de mínimos cuadrados ponderado. Mediante un proceso de optimización anidada, y en virtud de las buenas propiedades matemáticas de uno de estos parámetros, conseguiremos reducir el espacio paramétrico, facilitando así el problema. Desde el punto de vista informático, será necesario desarrollar algoritmos que se adapten al problema. Se nos plantea la búsqueda del mínimo de una función, sin tener asegurada su existencia, en un espacio que inicialmente es infinito. En base a las propiedades del problema habrá que acotar convenientemente el espacio y buscar el mínimo en el mismo de forma eficiente.

Palabras clave:

- Galaxia
- Modelización
- Optimización convexa
- Optimización no convexa
- Algoritmo no determinístico

SUMMARY AND KEY WORDS

The study of galaxies through photometry and spectral distribution allows us to identify the visible components that form a galaxy. They are, according to their morphology, a stellar bulb and a stellar and/or gaseous disk. The dynamics of the components that form a galaxy can be measured through the so-called rotation curve, which, as we will see later, measures how the rotational speed of a particle that rotates around a galaxy varies. This variation depends on the distance between the particle and the center of the galaxy. The study based on these observed rotational speeds uncovered a mismatch between the expected rotation curve, based on the identification of visible components through light, and the rotation curve obtained by observing the rotational velocities of different particles. This paradox is what motivates the proposal of the existence of a non-visible galactic component: the dark matter. Thus, the modeling of the mass of a galaxy, and in particular the modeling of dark matter, gains a great importance in the field of Astrophysics. In dark matter modeling, there are different models proposed in the literature, most of them phenomenological, that will be presented in this work. The models we are going to use are characterized by two free parameters, and their variation will allow us to adjust the expected rotation curve to the observed rotation curve, so that the amount of dark matter present in a galaxy can be determined. These physical foundations will be further developed in Chapter 4, where the main consulted sources have been [MG10], [BT11], [New18], [DF16] for the physical foundations and [GGI72], [Bur95] and [Nav96] for the dark matter halo models. In Chapter 5 we will define the “distance” between the observable rotation curve and the expected rotation curve, which will be expressed as a weighted scalar product that will take into account:

- the observed velocities V_i of N particles at different radii from the center of the galaxy, with different uncertainties σ_i ,
- the velocities generated by the visible components of the galaxy, $V_b(r_i)$, known for each radii r_i , determined by observations of light emissions,
- the velocities generated by the galactic dark matter component $V_{halo}(r_i)$, which will be based on the theoretical halo model.

The difference between V_i and $V(r_i) = \sqrt{V_b^2(r_i) + V_{halo}^2(r_i)}$ will determine the adjustment of the expected rotation curve to the observed rotation curve, and in turn will estimate the amount of dark matter in the galaxy. This difference will be defined as

a function that we will denote as χ^2 and express as a least squares problem weighted by the uncertainty σ_i . We will get a convenient vector notation that will facilitate the development of the work. Then, we will formally define the adjustment problem: the minimization of the function χ^2 , which will depend on the two free parameters mentioned above, denoted as s and ρ_0 . We will show that by means of a nested optimization process, the problem is significantly simplified, since for the minimization of χ^2 taking s as a fixed (but arbitrary) parameter there are numerous numerical methods that assure convergence to the minimum, thanks to the convexity of $\chi^2(s, \cdot)$. In this way we will be able to reduce the parametric space of our problem, being able to redefine it as $\varphi(s) := \chi^2(s, \rho_0(s))$. The main source consulted for the development of this chapter has been [SRGCMA18].

Chapter 6 is devoted to study the asymptotic properties of our new function $\varphi(s)$. These limits will help us to determine a space that contains the minimum of this function and that allows an efficient exploration of it. This need arises from the idea of looking for the value of s that minimizes $\varphi(s)$ by means of this exploration, constructing a non-deterministic algorithm. It is therefore important that the space to explore, in which our problem is defined, is a compact space. The study of the asymptotic behavior of $\varphi(s)$ will allow us to deduce that, given certain conditions, its limits will exist when $s \rightarrow 0$ and when $s \rightarrow \infty$, and we can determine its value. This will allow us, by setting an analytical criterion of convenient convergence, to define the optimal search interval that contains the minimum of $\varphi(s)$. We can also ensure the existence of that minimum at the time we find a value of s so that $\varphi(s)$ is less than the lower of its limits. However, we will see that this does not always happen. The main source consulted for the development of this chapter was [SRGCMA18].

Chapter 7 explains in detail the algorithm that determines the optimal search interval of the minimum, specifying the possible movements in the exploration according to the situation of the point we are exploring and its neighboring points. The optimal conditions that determine the stop criterium of the algorithm are detailed, just as two other additional stop conditions: one based on the number of iterations of the algorithm to escape from it in case the optimal conditions are not being reached, and another one that determines whether the convergence of φ is too slow to wait for any of the optimal conditions to be reached, in which case the algorithm's stoppage is also forced. There is another acceleration condition of the algorithm that allows introducing a "jump" of random length, although controlled, given appropriate conditions. After carrying out the evaluations of this algorithm for 23 dwarf galaxies with 3 different dark matter halo models, the obtained results are studied and, based on these observations, we propose an improvement that solves the cases of slow convergence of $\varphi(s)$ when $s \rightarrow \infty$, and therefore it will suppose the reduction of the search interval for these cases, in which the interval obtained is too broad. It will be carefully studied how this proposed improvement affects both in cases of slow convergence and in cases of rapid convergence and a comparison of the results obtained before and after including the improvement will be elaborated. The main sources consulted for the development of this chapter have been [com18] and [dt18].

Chapter 8 explains in detail the minimization algorithm of the function φ . It starts by dividing the interval obtained in the previous algorithm and then performing the search for the minimum value of $\varphi(s)$ in each of those subintervals. Once all of them have been explored, we take the minimum found value and assume that it is the minimum of φ . The exploration mechanism will be explained in detail in the chapter. After performing the algorithm evaluations for 23 dwarf galaxies with 3 different halo models, an improvement based on the observations of the results will be proposed again. This proposal will consist in trying not to explore again those zones that have already been explored in the algorithm of search interval minimization explained above. This will allow us, in short, to reduce the search interval again, so that the exploration of φ for its minimization is done in a more exhaustive way, with the goal of obtaining a better result. The main sources consulted for the development of this chapter have been [com18] and [dt18].

Key words:

- Galaxy
- Modeling
- Convex optimization
- Non-convex optimization
- Non-deterministic algorithm

OBJETIVOS

En un principio se planteó abordar este proyecto de forma general, tratando el problema real específico de Astrofísica sobre el ajuste de curvas de rotación como un primer ejemplo de un planteamiento matemático generalizado con determinadas propiedades que permiten una fácil reducción del espacio paramétrico al aplicar un proceso de optimización anidada. No obstante, la gran cantidad de datos sobre el problema de Astrofísica y el gran trabajo que me ha conllevado entender y trabajar un ámbito que no había estudiado antes ha hecho que merezca la pena ofrecer este enfoque particular. Además, el problema práctico se ha convertido a lo largo del desarrollo del trabajo en un vínculo constante entre lo estudiado desde el enfoque matemático y lo estudiado desde el enfoque informático. Así pues, planteamos estudiar el problema para un tipo concreto de galaxias: las galaxias enanas. La idea fue estudiar la reducción del espacio paramétrico de un funcional que “midiese” la distancia entre dos deducciones de la cantidad de materia oscura presente en las galaxias basadas en dos cosas distintas: las observaciones a través de la fotometría y las mediciones de velocidades de partículas que giran en torno a estas galaxias. Se planteó que, una vez reducido el espacio paramétrico, se realizaría el ajuste de las curvas de rotación (la minimización de este funcional de distancia), acudiendo a distintos modelos matemáticos denominados perfiles de materia oscura, y se estudiarían las propiedades del proceso de minimización que más tarde nos desvelarían la existencia de dos tipos de minimizaciones distintas presentes en el proceso: una minimización de un funcional convexo, la cual nos facilitará parte del problema, y una minimización de un funcional no convexo. Es entonces cuando surge la idea de desarrollar un algoritmo no determinístico que permita aproximar la solución de este segundo problema. Consecuentemente, este desarrollo vendría acompañado de distintas mejoras a aplicar que asegurasen la posibilidad de alcanzar el menor valor posible en la exploración de la función distancia, de manera eficiente. Así pues, los aspectos formativos previos más utilizados en el desarrollo de la parte matemática de este proyecto han sido, principalmente, los obtenidos en las asignaturas de análisis numérico y modelado matemático. El desarrollo de la parte informática se basa en los conocimientos obtenidos en asignaturas donde se aborda el estudio de problemas de optimización y búsqueda, así como la identificación de la complejidad computacional de los mismos.

INTRODUCCIÓN

4.1 CONTEXTUALIZACIÓN: MODELADO DE LA MASA DE UNA GALAXIA

4.1.1 *Curvas de rotación*

La existencia de la materia oscura surge como una posible explicación a la paradoja de las curvas de rotación galácticas. Una curva de rotación es un gráfico que muestra cómo varía la velocidad rotacional de una partícula (por ejemplo, una estrella) en función de la distancia a la que se encuentra dicha partícula del centro de la galaxia. De acuerdo con las leyes de Newton, la velocidad rotacional de una partícula que se encuentra fuera de una galaxia debe decrecer de forma continua cuanto mayor es la distancia al centro de la misma. Sin embargo las observaciones muestran que lo que ocurre es que esta velocidad se vuelve más o menos constante (véase la Figura 1). Una posible explicación a esta paradoja se basa en afirmar que la materia observable de la galaxia, la materia bariónica, está rodeada de una gran cantidad de masa que no podemos observar: la materia oscura.

Así, el modelado de la masa de una galaxia adquiere un gran interés a la hora de desarrollar la teoría de la existencia de materia no visible. Este modelado es posible gracias al hecho de que el potencial gravitacional que generan las partículas bariónicas y la materia oscura afecta a las componentes gaseosa y estelar de la galaxia. A través del estudio de la luz de la galaxia se puede medir la cantidad de materia bariónica existente, y mediante el ajuste de la curva de rotación que podríamos esperar obtener a la curva de rotación observada (que depende del campo gravitatorio generado por la materia de la galaxia al completo) se puede identificar la cantidad de materia oscura que compone la galaxia.

A continuación se presentan algunas propiedades matemáticas del campo gravitatorio generado por un cuerpo, y la forma de parametrizarlo.

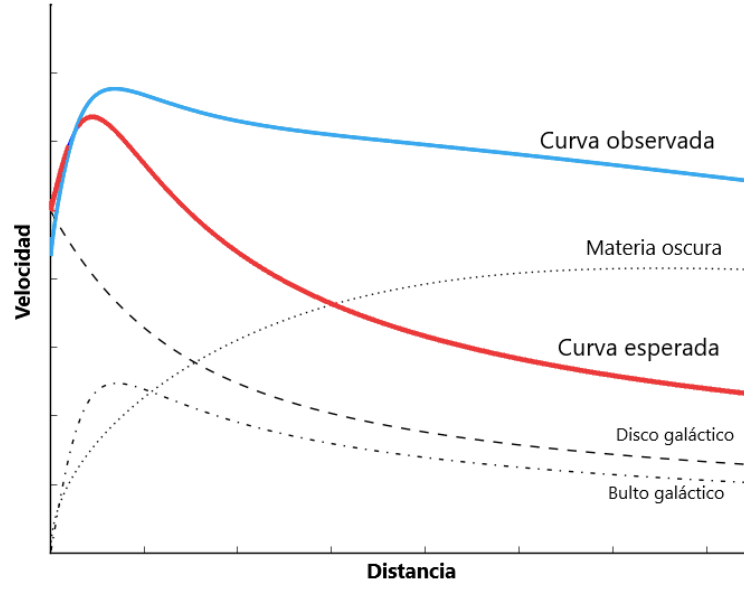


Figura 1: Curva de rotación. El eje de abcisas representa la distancia a la que se encuentra la partícula, y el eje de ordenadas representa la velocidad a la que esta gira en torno a la galaxia. Esta gráfica está basada en la aproximación de Matthew Newby para la Vía Láctea: [New18].

4.1.2 Campo gravitatorio generado por una masa puntual

Como consecuencia de la Ley de gravitación universal de Newton, el campo gravitatorio de aceleración que actúa en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y que es generado por una masa puntual M situada en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ es

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}),$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{p}|$ es la distancia entre los puntos p y x , y G es la constante de gravitación universal. A lo largo de la memoria se usará la **letra negrita** para indicar magnitud vectorial. El campo $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ está bien definido y es derivable en cada punto $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$, en cuyo caso se puede expresar como el gradiente de una función escalar,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}),$$

donde

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|}$$

se conoce como el potencial gravitacional. Observemos que, siempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$,

$$\nabla_x \left(\frac{\mathbf{p} - \mathbf{x}}{r^3} \right) = \nabla_x \left(\frac{\mathbf{p} - \mathbf{x}}{|\mathbf{p} - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{p} - \mathbf{x}|^3} + \frac{3|\mathbf{p} - \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{x}|^5} = 0, \quad (1)$$

donde ∇ es el operador de divergencia. Por tanto, siendo $W \subset \mathbb{R}^3$ un volumen con la superficie orientada S como frontera, considerando que $\mathbf{p} \notin W$, podemos aplicar el teorema de la divergencia y afirmar que el flujo de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a través de S puede expresarse como

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = \int_W \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) dx,$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a S apuntando hacia el exterior de W . Se tiene entonces, aplicando (1), que el flujo de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a través de S es cero. Pero si $\mathbf{p} \in W$, dada la singularidad en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{p}$, no podemos aplicar dicho teorema. Expresamos entonces el flujo de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a través de S como sigue:

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_B} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS_B + \int_{S_r} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS_r,$$

donde S_B es la frontera de $W - B(\mathbf{p}, r)$, con $B(\mathbf{p}, r)$ la bola de centro \mathbf{p} y radio $r = |\mathbf{x} - \mathbf{p}|$, y S_r es la frontera de $B(\mathbf{p}, r)$, es decir, la esfera de radio r centrada en \mathbf{p} . Ahora \mathbf{n} es, en cada caso, el vector normal unitario a la superficie correspondiente. Podemos ahora aplicar el teorema de la divergencia en el primer sumando de la expresión anterior y ver que

$$\int_{S_B} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS_B = \int_{W-B(\mathbf{p}, r)} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) dx = 0.$$

Entonces nos queda que

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_r} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS_r,$$

de donde podemos deducir que las posibles deformaciones de la superficie S que mantienen a \mathbf{p} en su interior no cambian el flujo que la atraviesa. Así, podemos calcular dicho flujo usando la esfera S_r , con vector normal $\mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})/r$:

$$\int_{S_r} -\frac{GM}{r^3} (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} dS_r = \int_{S_r} -\frac{GM}{r^2} dS_r = -4\pi r^2 \frac{GM}{r^2} = -4\pi GM.$$

4.1.3 Masa y gravedad de un cuerpo extendido

Para describir el campo gravitatorio generado por un cuerpo extendido es conveniente abandonar el modelo matemático de masa puntual y adoptar una distribución de masa continua. Entendemos por cuerpo extendido un cuerpo cuya masa no está contenida en un conjunto de medida nula.

Definición 1. Definimos como

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \mathbf{p} &\mapsto \rho(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

a la función de densidad de masa, que valdrá cero en aquéllos puntos de \mathbb{R}^3 donde no haya masa. Por simplicidad, consideraremos que $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$. Así, la masa total del cuerpo viene dada por

$$M = \int_W \rho(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (2)$$

donde $W \subseteq \mathbb{R}^3$ es el cerrado que contiene la distribución de la masa.

Así, el campo gravitatorio en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ generado por un cuerpo extendido contenido en W y cuya densidad de masa es ρ se escribe como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_W \frac{G\rho(\mathbf{p})}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{x}) d\mathbf{p}.$$

Nota. En este punto podríamos plantearnos que el cuerpo extendido podría moverse, en cuyo caso tendría sentido que la densidad de masa dependiese también de una variable temporal, siempre y cuando satisficiera alguna ecuación de conservación de la masa como las estudiadas en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología. No obstante, en este trabajo consideraremos que estas densidades son estacionarias en tiempo.

El potencial gravitacional de un cuerpo extendido puede definirse, de forma análoga, como la integral de volumen:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_W \frac{G\rho(\mathbf{p})}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} d\mathbf{p}. \quad (3)$$

En efecto,

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \nabla \int_W \frac{G\rho(\mathbf{p})}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} d\mathbf{p} = \int_W \nabla \frac{G\rho(\mathbf{p})}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} d\mathbf{p} = \int_W \frac{G\rho(\mathbf{p})}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{p}) d\mathbf{p} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Observemos que en (2), la masa total de un cuerpo extendido se define como una integral de Riemann, que corresponde con la idea intuitiva de dividir el cuerpo en N bloques distintos $B_i \subset W$ y medir aproximadamente la densidad de masa M_i de cada bloque, con $i \in \{1, \dots, N\}$, de forma que

$$M = \sum_{i=1}^N M_i; \quad M_i = \int_{B_i} \rho(\mathbf{p}) d\mathbf{p}.$$

Hacer tender $N \rightarrow \infty$ se corresponde con la idea intuitiva de reducir cada bloque B_i al punto $\mathbf{p}_i \in W$, donde se sitúa la masa puntual $M_{\mathbf{p}_i} = \rho(\mathbf{p}_i)$, de forma que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \rho(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{\infty} M_{\mathbf{p}_i}.$$

Además, aplicando el principio de superposición, podemos asegurar que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{GM_{\mathbf{p}_i}}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i),$$

y por tanto

$$\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \nabla_x \left(\frac{GM_{\mathbf{p}_i}}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) \right) = \sum_{i=1}^N -4\pi GM_{\mathbf{p}_i}.$$

Haciendo tender $N \rightarrow \infty$ nos queda que

$$\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Esta ecuación se conoce como la forma diferencial de la ley de Gauss para la gravedad, y nos será útil más adelante. Tenemos entonces que si x está fuera de W (donde no hay masa) entonces, aplicando el teorema de la divergencia, $\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$. Si $x \in W$ entonces $\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G \rho(\mathbf{x})$. Esto nos permite expresar la masa total de un cuerpo extendido mediante el flujo de su campo gravitatorio a través de la frontera de W , la superficie orientada S :

$$M = \int_W \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{4\pi G} \int_W \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{4\pi G} \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS.$$

4.1.4 Modelado de la masa de materia oscura

Asumimos entonces que nuestra galaxia es un cuerpo extendido de masa M definida por una función densidad como en (2) que está contenida en $W \subseteq \mathbb{R}^3$. Si consideramos una partícula situada en $x \in W$, hemos deducido la forma diferencial de la ley de Gauss para la gravedad, véase (4), donde aparece el campo gravitatorio que se experimenta en x y que es generado por la galaxia. También hemos visto que este campo es conservativo, pues se expresa como $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, donde ϕ viene definida en (3). Con estas dos observaciones llegamos a la ecuación de Poisson para la gravedad:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (5)$$

donde ∇^2 representa el operador laplaciano $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \equiv (\nabla \cdot \nabla) \phi(\mathbf{x}) = -\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$, es decir, la divergencia del gradiente de $\phi(\mathbf{x})$.

De aquí en adelante asumiremos una distribución de masa esférica para la galaxia y una trayectoria circular para las partículas que giran en torno a la misma. Realmente, la mayoría de las galaxias están muy lejos de ser esféricamente simétricas (ver Figuras 2 y 3). Pero esta suposición se suele hacer como una primera aproximación. Mostraremos



Figura 2: Galaxia espiral



Figura 3: Galaxia irregular

el mecanismo de reducción bajo esta suposición para no complicar la notación, aunque

también es aplicable bajo otro tipo de simetrías. Igualmente ocurre con las trayectorias de giro alrededor de las galaxias: las supondremos circulares. En este punto conviene adelantar que no todas las componentes de las galaxias se supondrán esféricamente simétricas, como detallaremos más adelante. Newton probó dos resultados fundamentales que simplifican significativamente el uso de distribuciones de masa esféricas.

Primer teorema de Newton. *Un cuerpo que está en el interior de un conjunto delimitado por una superficie esférica no experimenta fuerza gravitacional de dicha superficie.*

Segundo teorema de Newton. *La fuerza gravitacional que experimenta un cuerpo que está fuera de un conjunto delimitado por una superficie esférica es la misma que la que experimentaría si la materia de dicha superficie estuviese concentrada en un único punto en el centro de la esfera.*

Estos dos resultados son ampliamente conocidos como los *Shell Theorems* de Newton en el campo de la mecánica clásica. Puede encontrarse una demostración detallada de los mismos en [DF16].

Así, nos encontramos en la situación de que un cuerpo gira describiendo una órbita circular en una distribución esférica de masa, es decir, la galaxia. Podemos interpretar esta galaxia como un conjunto de mallas esféricas concéntricas y deducir, en base al primer resultado anterior, que las mallas esféricas que están fuera del círculo que describe la trayectoria del cuerpo no ejercen fuerza gravitacional sobre el mismo y que por tanto no afectan a su movimiento. En cuanto a las mallas esféricas que quedan dentro del círculo, podemos usar el segundo resultado y considerar un único punto de masa en el centro, con masa igual a la suma de las masas de las esferas. De esta forma podemos considerar que sobre el cuerpo que gira en la galaxia actúa un campo gravitatorio que podemos escribir como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{GM(r)}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}), \quad (6)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ es la posición del cuerpo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ es el centro de las esferas concéntricas, donde hemos situado la nueva masa puntual $M(r)$, siendo esta la suma de las masas de las esferas concéntricas que quedan dentro del círculo de radio $r = |\mathbf{x} - \mathbf{p}|$ que describe la trayectoria del cuerpo. Nótese que, al ser esta distancia igual en cualquier punto de la trayectoria circular del cuerpo, el módulo del campo gravitatorio es constante.

Observemos ahora que, en base a lo estudiado en la asignatura de Mecánica Celeste, la componente tangencial del campo gravitatorio se anula al estar considerando una trayectoria circular, por lo que el campo gravitatorio \mathbf{g} dado en (6) coincide con su componente normal o centrípeta, es decir:

$$\mathbf{g} = g_n \mathbf{e}_n = \frac{V^2(r)}{r} \mathbf{e}_n, \quad (7)$$

donde $V(r)$ es la velocidad circular del cuerpo y \mathbf{e}_n es el vector normal unitario de la trayectoria del cuerpo. Tomando módulo en esta última expresión y en (6), obtenemos la igualdad

$$V^2(r) = \frac{GM(r)}{r}. \quad (8)$$

Esta expresión nos muestra que la velocidad circular en el radio r es una medida directa de la masa total contenida dentro de ese radio.

En este punto es importante describir de forma breve la composición de las galaxias. Sus tres principales componentes son el **disco**, compuesto a su vez principalmente de estrellas jóvenes, gas y polvo, el **bulbo** galáctico, compuesto principalmente de estrellas viejas, y el **halo**, principalmente dominado por la materia oscura. Las componentes disco (gas y estrellas) y bulbo conforman la llamada **materia bariónica**, que es la materia observable o visible. Teniendo esto en cuenta podemos considerar la fuerza de atracción que genera la galaxia como una suma de fuerzas ejercidas por cada una de sus componentes, e igualmente para la velocidad circular, que puede reescribirse en términos de las velocidades asociadas a las diferentes componentes galácticas

$$V^2(r) = V_{bulbo}^2(r) + V_{gas}^2(r) + V_{estelar}^2(r) + V_{halo}^2(r), \quad (9)$$

donde V_{bulbo} es la velocidad debida al bulbo galáctico, V_{gas} es la debida a la distribución gaseosa del disco, $V_{estelar}$ es la debida a la distribución estelar del disco y V_{halo} es la debida a la materia oscura del halo. La posibilidad de expresar la velocidad circular como suma de las velocidades asociadas a las diferentes componentes se basa en el principio de superposición. Podemos considerar los distintos campos gravitatorios generados por las masas de las distintas componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{bulbo}(\mathbf{x}) &= \frac{GM_{bulbo}(r)}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}), \\ \mathbf{g}_{gas}(\mathbf{x}) &= \frac{GM_{gas}(r)}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}), \\ \mathbf{g}_{estelar}(\mathbf{x}) &= \frac{GM_{estelar}(r)}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}), \\ \mathbf{g}_{halo}(\mathbf{x}) &= \frac{GM_{halo}(r)}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}), \end{aligned}$$

de forma que el campo gravitatorio se puede escribir como la suma de los anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_{bulbo}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{gas}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{estelar}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{halo}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{G(M_{bulbo}(r) + M_{gas}(r) + M_{estelar}(r) + M_{halo}(r))}{r^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

De esta forma, tomando módulo y combinando con la ecuación (7), nos queda que

$$\begin{aligned} V^2(r) &= \frac{GM_{bulbo}(r)}{r} + \frac{GM_{gas}(r)}{r} + \frac{GM_{estelar}(r)}{r} + \frac{GM_{halo}(r)}{r} \\ &= V_{bulbo}^2(r) + V_{gas}^2(r) + V_{estelar}^2(r) + V_{halo}^2(r). \end{aligned}$$

Así, diferenciaremos entre la velocidad debida a la materia bariónica (el bulbo galáctico, la materia gaseosa y la materia estelar) y la velocidad debida a la materia oscura. Notaremos por V_b a la suma de las contribuciones de materia visible, $V_b^2 = V_{bulbo}^2 + V_{gas}^2 + V_{estelar}^2$. Esta velocidad se deduce de M_b , la masa total de la componente bariónica, que se calcula

en base al llamado ratio masa-luminosidad. Esta medida ofrece una proporción entre la luz emitida por la galaxia y su materia visible. En adelante supondremos que la componente bariónica está fijada por un ratio masa-luminosidad, y nos centraremos en la velocidad circular debida a la materia oscura.

Para calcularla se pueden considerar algunos de los modelos fenomenológicos propuestos en la literatura: el perfil isotermo (ISO, [GGI72]), el perfil de Burkert (BUR, [Bur95]), el perfil de Navarro-Frenk-White (NFW, [Nav96]), el perfil de Einasto (EIN) y el perfil de densidad más general, Hernquist (HERN). Estos modelos están caracterizados por dos o tres parámetros libres (densidad central, escala radial y los llamados índices de forma). La idea esencial es considerar la materia bariónica fijada anteriormente para determinar la velocidad debida a esta, y ajustar el modelo de materia oscura de forma que se aproxime lo mejor posible a la velocidad observada. En definitiva; ajustar la curva de rotación esperable a la curva de rotación observable (véase Figura 1) variando los parámetros libres de dicho modelo.

Estos modelos cuentan con perfiles de densidad de materia oscura que están definidos por un perfil de densidad esféricamente simétrico, adoptando la forma

$$\rho_{halo}(r) = \rho_0 \rho(sr), \quad (10)$$

donde ρ_0 es una constante positiva que representa la densidad central, s es el inverso de un radio de escala y ρ es un perfil de densidad normalizado. Los modelos que vamos a considerar están definidos por los siguientes perfiles de materia oscura:

$$\begin{aligned} \rho_{ISO}(r) &= \frac{\rho_0}{(1 + (rs)^2)}, \\ \rho_{BUR}(r) &= \frac{\rho_0}{(1 + rs)(1 + (rs)^2)}, \\ \rho_{NFW}(r) &= \frac{\rho_0}{rs(1 + rs)^2}, \\ \rho_{EIN}(r; n) &= \rho_0 \exp[-(rs)^{\frac{1}{n}}], \\ \rho_{HERN}(r; \alpha, \beta, \gamma) &= \rho_0 \frac{1}{(rs)^\alpha (1 + (sr)^\beta)^\gamma}. \end{aligned}$$

En cualquiera de estos casos, las velocidades de rotación debidas a la materia oscura se obtienen usando (8) y, en base a la definición de distribución de masa continua vista en la Sección 4.1.3, definiendo la masa de halo encerrada en la esfera de radio $r > 0$, $M(r)$, como

$$M(r) = \int_W \rho_{halo} dW \quad (11)$$

donde W es el volumen encerrado por una esfera de radio r y ρ_{halo} está definido por (10). Para obtener una expresión más simple de $M(r)$ aplicamos un cambio a coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x_1 = z \sin \theta \cos \phi, \\ x_2 = z \sin \theta \sin \phi, \\ x_3 = z \cos \theta, \end{cases}$$

obteniendo que

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 \rho(s z) z^2 \sin \theta \, dz \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \rho_0 \, d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^r \rho(s z) z^2 \, dz = \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^r z^2 \rho(s z) \, dz. \end{aligned}$$

Por tanto

$$M(r) = 4\pi \rho_0 \int_0^r z^2 \rho(s z) \, dz = 4\pi \int_0^r z^2 \rho_{halo}(z) \, dz, \quad (12)$$

que será la expresión de la masa de halo que usemos de aquí en adelante.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA, SÍNTESIS Y FUENTES

A continuación, en el Capítulo 5 definiremos la “distancia” entre la curva de rotación observable y la curva de rotación esperable, que se expresará como un problema de mínimos cuadrados ponderados y que notaremos como χ^2 . Nuestro principal objetivo a lo largo del proyecto será estudiar las propiedades de este problema para poder resolver su minimización de la manera más exacta y eficiente posible. Esta “distancia” tendrá en cuenta:

- Las velocidades V_i observadas de N partículas a diferentes radios r_i del centro de la galaxia, con distintas incertidumbres σ_i ,
- las velocidades generadas por las componentes visibles de la galaxia $V_b(r_i)$ conocidas para cada radio r_i , determinadas mediante las observaciones de las emisiones de luz,
- las velocidades generadas por la componente de materia oscura galáctica $V_{halo}(r_i)$, que se basarán en el modelo de halo teórico escogido.

La minimización de la función χ^2 dependerá de los dos parámetros libres de los perfiles de halo de materia oscura, s y ρ_0 (ver (10)). Demostraremos que mediante un proceso de optimización anidada, el problema se simplifica significativamente, pues para la minimización de χ^2 tomando s como un parámetro fijo (pero arbitrario) existen numerosos métodos numéricos que aseguran la convergencia al mínimo, dada la convexidad de $\chi^2(s, \cdot)$. De esta forma conseguiremos reducir el espacio paramétrico de nuestro problema, pudiendo redefinirlo como $\varphi(s) := \chi^2(s, \rho_0(s))$.

El Capítulo 6 está dedicado a estudiar las propiedades asintóticas de nuestra nueva función $\varphi(s)$, con el fin de determinar un espacio que contenga al mínimo de esta función y que permita una exploración eficiente del mismo. Esta necesidad surge del planteamiento de, posteriormente, buscar el valor de s que minimiza $\varphi(s)$ mediante dicha exploración, construyendo un algoritmo no determinístico. Es por tanto importante que el espacio a explorar, en el que está definido nuestro problema, sea compacto. El estudio del comportamiento asintótico de $\varphi(s)$ nos permitirá deducir que, cuando se den ciertas condiciones, existirán sus límites cuando $s \rightarrow 0$ y cuando $s \rightarrow \infty$, y podremos determinar su valor. Esto nos permitirá, fijando un criterio analítico de convergencia conveniente, definir el

intervalo de búsqueda óptimo que contenga al mínimo de $\varphi(s)$. Además podremos asegurar la existencia de dicho mínimo en el momento que encontremos un valor de s de forma que $\varphi(s)$ sea menor que el menor de sus límites. No obstante, veremos que esto no siempre ocurre.

En el Capítulo 7 se explica con detalle el algoritmo que determina el intervalo óptimo de búsqueda del mínimo, especificando los movimientos a realizar en la exploración en función de la situación del punto que estemos explorando y de sus puntos vecinos. Se detallan las condiciones óptimas que determinan la parada del algoritmo y otras dos condiciones de parada adicionales: una basada en el número de iteraciones del algoritmo para escapar del mismo en caso de que no se estén alcanzando las condiciones óptimas, y otra que determina si la convergencia de φ es demasiado lenta como para esperar a que se alcance alguna de las condiciones óptimas, en cuyo caso también se fuerza la escapada del algoritmo. Existe otra condición de aceleración del algoritmo que permite introducir un “salto” de longitud aleatoria, aunque controlada, dadas unas condiciones oportunas. Tras realizar las evaluaciones de este algoritmo para 23 galaxias enanas con 3 modelos de halo de materia oscura distintos (ISO, BUR y NFW), se estudian los resultados obtenidos y en base a estas observaciones se propone una mejora que solventa los casos de convergencia lenta de $\varphi(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$, y que por lo tanto supondrá la reducción del intervalo de búsqueda para estos casos, en los que el intervalo obtenido es demasiado amplio. Se estudiará detenidamente cómo afecta esta mejora propuesta tanto en los casos de convergencia lenta como en los casos de convergencia rápida y se elaborará una comparación de los resultados obtenidos antes y después de incluir la mejora.

En el Capítulo 8 se explica con detalle el algoritmo de minimización de la función φ , que comienza haciendo una división del intervalo obtenido en el algoritmo anterior para luego realizar la búsqueda del mínimo valor de $\varphi(s)$ en cada uno de esos subintervalos. Una vez explorados todos ellos, nos quedamos con el mínimo valor encontrado y asumimos que es el mínimo de φ . El mecanismo de exploración se explicará con detalle en el capítulo. Tras realizar las evaluaciones del algoritmo para 23 galaxias enanas con 3 modelos de halo distintos (ISO, BUR y NFW), se volverá a proponer una mejora basada en las observaciones de los resultados. Esta propuesta consistirá en procurar no explorar de nuevo aquellas zonas que ya han sido exploradas en el algoritmo de reducción del intervalo de búsqueda explicado anteriormente. Esto nos permitirá, en definitiva, volver a reducir el intervalo de búsqueda, de forma que la exploración de φ para su minimización se realice de una forma más exhaustiva, con la intención de obtener un mejor resultado.

Los datos que a lo largo del trabajo se presentarán son el resultado de los distintos algoritmos que se exponen, en una máquina con **procesador 2,3 GHz Intel Core i5** y memoria **RAM de 16 GB 2133 MHz LPDDR3**.

Los algoritmos anteriormente mencionados se han desarrollado en Python, y pueden encontrarse en el repositorio de Github [GCM-TFG](#), junto con un tutorial que puede ejecutarse en binder.

Parte I

PARTE MATEMÁTICA

AJUSTE Y REDUCCIÓN PARAMÉTRICA

La curva de rotación observable está formada por un conjunto de N velocidades V_i a diferentes radios r_i con incertidumbres $\sigma_i > 0$. Estas velocidades son datos obtenidos de las mediciones y por tanto se consideran conocidas. La velocidad rotacional debida a las componentes bariónicas, $V_b(r_i)$, también es conocida para cada radio r_i , ya que, como hemos mencionado anteriormente, ésta se deduce de la masa total de la componente bariónica, que se calcula en base al ratio masa-luminosidad que hemos considerado fijo. Por tanto la velocidad debida al halo de materia oscura debe deducirse de los ajustes a la curva de rotación observada. El procedimiento de ajuste consistirá en minimizar la función χ^2 dada por

$$\chi^2 = \frac{1}{N - \nu} \sum_{i=1}^N \frac{(V_i - V(r_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (13)$$

donde $V(r_i) = \sqrt{V_b^2(r_i) + V_{halo}^2(r_i)}$ y $V_{halo}(r_i)$ está determinada por las ecuaciones (8), (10) y (12) una vez considerado un modelo de halo teórico en particular, quedando para el ajuste ρ_0 y s . Denotamos por ν el número de parámetros libres considerados por el modelo de halo teórico: $\nu = 2$ para ISO, BUR y NFW, $\nu = 3$ para EIN y $\nu = 5$ para HERN. En cualquier caso siempre será necesario que $\nu < N$.

El proceso de reducción que se propone a continuación se apoya en la linealidad de los perfiles de densidad respecto de ρ_0 (ver (10)). Este mismo procedimiento puede ser aplicado a cualquier modelo que dependa linealmente de sus parámetros de ajuste. Algunos modelos normalizados dependerán de parámetros de ajuste adicionales de forma no lineal, en cuyo caso, para poder aplicar el método, consideraremos que dichos parámetros están fijos.

Adaptaremos las ideas clásicas de aproximación por mínimos cuadrados para reducir la dimensión del espacio paramétrico usando las llamadas ecuaciones normales. Para ello empezamos reescribiendo la función χ^2 en términos del producto escalar pesado en \mathbb{R}^N ,

$$\chi^2 = \langle \mathbf{V} - V(r), \mathbf{V} - V(r) \rangle_\sigma \quad (14)$$

donde hemos adoptado la notación vectorial $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_N)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$, $V(\mathbf{r}) = (V(r_1), \dots, V(r_N))$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ y el producto escalar pesado definido como

$$\langle u, v \rangle_\sigma = \sum_{i=1}^N \frac{u_i v_i}{(N - \nu) \sigma_i^2} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N \quad (15)$$

donde los valores N , ν y σ_i dan lugar a los pesos $(N - \nu)^{-1} \sigma_i^{-2} > 0$. En lo que sigue entenderemos que la evaluación de una función escalar en un vector representa la evaluación componente a componente. Notamos

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = (u_i v_i), \quad \mathbf{u}^{\circ p} = (u_i^p), \quad \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{w}} = \left(\frac{u_i}{w_i} \right),$$

para cualesquiera $p \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, siempre que $w_i \neq 0$ (de forma que $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$, $\mathbf{u}^{\circ p}$, $\mathbf{u}/\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$), para así considerar los productos y los cocientes entre vectores como operaciones elemento a elemento.

Las propiedades estándar del producto escalar pesado justifican que podemos escribir

$$\chi^2 = \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_\sigma + \langle V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma - 2 \langle \mathbf{V}, V(\mathbf{r}) \rangle_\sigma + \langle V_{halo}^{\circ 2}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma, \quad (16)$$

donde $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ y $V_\star(\mathbf{r}) = (V_\star(r_1), \dots, V_\star(r_N))$ donde \star se refiere a la materia bariónica o a la materia oscura. En efecto, si partimos de (14) y aplicamos las propiedades del producto escalar llegamos a (16):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V} - V(\mathbf{r}), \mathbf{V} - V(\mathbf{r}) \rangle_\sigma &= \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_\sigma - 2 \langle \mathbf{V}, V(\mathbf{r}) \rangle_\sigma + \langle V(\mathbf{r})^2, \mathbf{e} \rangle_\sigma \\ &= \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_\sigma - 2 \langle \mathbf{V}, V(\mathbf{r}) \rangle_\sigma + \langle V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + V_{halo}^{\circ 2}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma \\ &= \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_\sigma - 2 \langle \mathbf{V}, V(\mathbf{r}) \rangle_\sigma + \langle V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma + \langle V_{halo}^{\circ 2}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma. \end{aligned}$$

Ha de tenerse en cuenta que V_{halo} depende únicamente de ρ_0 y de s , por lo que χ^2 también. Ésto será muy útil más adelante. Una vez expuesta la notación vectorial necesaria, veamos el problema de minimización con el que vamos a tratar.

Definición 2. Dados \mathbf{r} , \mathbf{V} , $V_b(\mathbf{r})$ y el perfil de densidad de halo ρ dado por (10), consideramos el siguiente problema de ajuste

$$\min \{ \chi^2(s, \rho_0) \mid \rho_0 \in [0, \infty), s \in (0, \infty) \}. \quad (17)$$

A continuación probaremos la equivalencia de este problema con un problema de ajuste reducido en el que es posible considerar un único parámetro de ajuste. Para ello nos será útil notar

$$W^s(r) = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r z^2 \rho(sz) dz \quad (18)$$

que nos permite expresar

$$V_{halo}^2 = \rho_0 W^s(r).$$

El cálculo de $W^s(r)$ para los perfiles ISO y BUR se muestra en el Apéndice A.

Teorema 1. *Supongamos que nuestro conjunto de datos (V_i, r_i, σ_i) satisface las condiciones siguientes*

- I. $r > 0$,
- II. *para cualquier $r > 0$, $W^s(r)$ es finito y estrictamente positivo,*
- III. $V \geq 0$ *no es idénticamente nula,*
- IV. $V_b(r) \geq 0$.

Entonces el problema de ajuste dado por la ecuación (17) es equivalente al problema

$$\min \left\{ \varphi(s) := \chi^2(s, \rho_0(s)) \mid s \in (0, \infty) \right\}, \quad (19)$$

donde la función $\rho_0(s)$ viene determinada por la Proposición 1 a continuación.

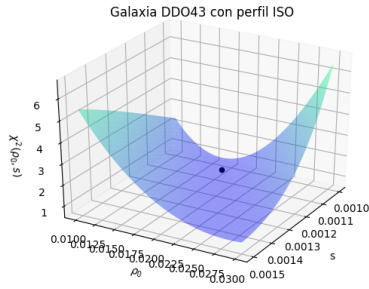
La idea principal en la demostración de esta equivalencia consiste en reescribir el problema (17) como

$$\min \left\{ \min \{ \chi^2(s, \rho_0) \mid \rho_0 \in [0, \infty) \} \mid s \in (0, \infty) \right\}$$

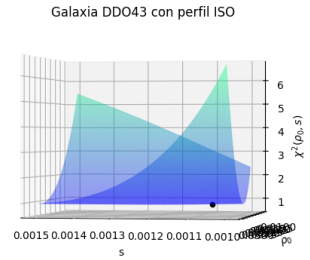
y probar la existencia de una única función $\rho_0(s)$ tal que, para cualquier $s > 0$, se tiene que

$$\min \{ \chi^2(s, \rho_0) \mid \rho_0 \in [0, \infty) \} = \chi^2(s, \rho_0(s)).$$

A continuación se representa gráficamente un ejemplo de este planteamiento para una galaxia concreta, la galaxia DDO43. En adelante, usaremos los resultados de esta galaxia en concreto para la visualización de distintas gráficas que nos puedan servir de ejemplo. También a modo de ejemplo, en el Apéndice B puede encontrarse el formato de los datos de esta galaxia, que coincide con el del resto de galaxias.

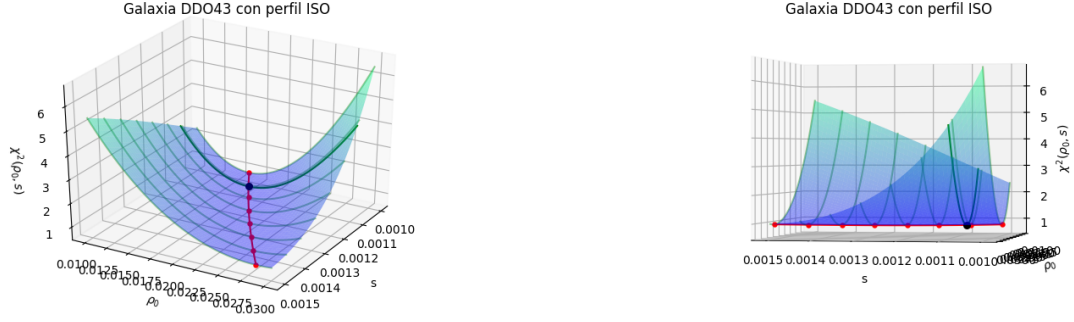


(a) Representación de $\chi^2(s, \rho_0)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura ISO.



(b) Representación de $\chi^2(s, \rho_0)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura ISO desde un ángulo distinto.

Figura 4: El punto negro representa la solución de (17).



(a) Representación de $\chi^2(s, \rho_0)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura ISO.

(b) Representación de $\chi^2(s, \rho_0)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura ISO desde un ángulo distinto.

Figura 5: El punto negro representa la solución de (17). Las curvas verdes representan $\chi^2(s, \cdot)$ para ocho valores distintos de s . La curva roja representa la sucesión de mínimos de $\chi^2(s, \cdot)$ para $s \in (0, \infty)$, que proyectada sobre el plano $\rho_0 \equiv 0$ es la función $\varphi(s)$.

En particular, el Teorema 1 prueba que una vez que se fijan el modelo de halo y el radio de escala, no aparecen degeneraciones (entenderemos que una degeneración se da cuando obtenemos ajustes muy similares partiendo de parámetros iniciales muy distintos). Es más, esta nueva función $\rho_0(s)$ puede calcularse fácilmente. Lo veremos en la Proposición 1.

Se puede comprobar que la segunda hipótesis del Teorema 1 se satisface para todos los modelos de halo considerados en el Capítulo 4 dadas las propiedades de los perfiles de densidad asociados.

Proposición 1. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1. Entonces, para cualquier $s > 0$, la función $\chi^2(s, \cdot) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su mínimo valor en un único punto $\rho_0 = \rho_0(s)$. Es más, si fijamos $s \in \mathbb{R}^+$, entonces*

1. $\rho_0(s) = 0$ si y sólo si

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{W^s(\mathbf{r})}{V_b(\mathbf{r})} \right\rangle_\sigma \leq \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma. \quad (20)$$

2. Si (20) no se cumple, entonces $\rho_0(s) > 0$ es la única solución de la ecuación normal

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{W^s(\mathbf{r})}{\left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + \rho_0 W^s(\mathbf{r})\right)^{\frac{1}{2}}} \right\rangle_\sigma = \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma. \quad (21)$$

Es más, si $V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, se cumple que

$$\rho_0(s) = \left(\frac{\left\langle \mathbf{V}, (W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}} \right\rangle_\sigma}{\langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma} \right)^2 \quad \forall s > 0; \quad (22)$$

en caso contrario se cumple que

$$0 < \rho_0(s) < \left(\frac{\left\langle \mathbf{V}, (W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}} \right\rangle_\sigma}{\langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma} \right)^2. \quad (23)$$

Este es el principal resultado de nuestro análisis. El procedimiento definido nos permite fijar las posibles degeneraciones que podrían aparecer al intentar ajustar el modelo de materia oscura a la curva de rotación observada. Hagamos algunas observaciones sobre la Proposición 1:

- La velocidad debida a la materia bariónica, $V_b(\mathbf{r})$ podría desaparecer en alguna componente (por ejemplo, $V_b(r_i) = 0$ para algún $r_i \in \mathbf{r}$), en cuyo caso, el término $\frac{W^s(\mathbf{r})}{V_b(\mathbf{r})}$ de la ecuación (20) no tiene sentido. En este caso, asumimos que la ecuación (20) no se cumple.
- El primer punto de la proposición anterior implica que si se cumple la ecuación (20), el mejor ajuste se obtiene cuando el halo de materia oscura con parámetro de escala s es ignorado. De hecho, si la ecuación (20) se cumple $\forall s > 0$ entonces el mejor ajuste se alcanza cuando no se considera la materia oscura.
- En el caso de que se cumpla la situación descrita en el segundo punto, $\chi^2(\cdot, s)$ cuenta con propiedades matemáticas que aseguran que los métodos numéricos clásicos de cálculo de raíces proporcionan una rápida y buena aproximación de $\rho_0(s)$.

Probemos entonces la Proposición 1.

Demostración. La minimización de (17) es equivalente a la minimización de los últimos dos sumandos de (16), ya que son los únicos términos que dependen del modelo de halo en cuestión.

Puesto que $V(\mathbf{r}) = (V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + V_{halo}^{\circ 2}(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}}$ y $V_{halo}^{\circ 2}(\mathbf{r}) = \rho_0 W^s(\mathbf{r})$, podemos escribir

$$g(\rho_0; s) = -2 \left\langle \mathbf{V}, (V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + \rho_0 W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}} \right\rangle_\sigma + \rho_0 \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma. \quad (24)$$

Podemos probar que $g(\cdot; s)$ es una función continua y estrictamente convexa verificando

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} g(\rho_0; s) = -2 \langle \mathbf{V}, V_b \rangle_\sigma, \quad \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} g(\rho_0; s) = \infty,$$

ya que para cualquier $\rho_0 > 0$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho_0^2}(\rho_0; s) = \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{V}, \frac{(W^s(\mathbf{r}))^{\circ 2}}{(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + \rho_0 W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{3}{2}}} \right\rangle_\sigma > 0.$$

Así, $g(\cdot, s)$ alcanza su mínimo valor en $\rho_0 = 0$, o bien en la única raíz de la ecuación normal

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\rho_0; s) = -\left\langle \mathbf{V}, \frac{W^s(\mathbf{r})}{(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + \rho_0 W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_{\sigma} + \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma} = 0, \quad (25)$$

que puede reescribirse de forma equivalente como en (21). Si no existe contribución bariónica entonces la ecuación (21) puede resolverse de forma explícita, obteniendo la expresión (22). Por otro lado, si $V_b^2(\mathbf{r})$ no es idénticamente nula, entonces $\frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\cdot; s)$ es una función estrictamente creciente verificando

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\rho_0; s) = -\left\langle \mathbf{V}, \frac{W^s(\mathbf{r})}{V_b(\mathbf{r})} \right\rangle_{\sigma} + \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma} \quad (26)$$

y

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\rho_0; s) = \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma}.$$

siendo este último valor estrictamente positivo. Supongamos que se da la desigualdad estricta en (20). Entonces el límite dado en (26) es estrictamente positivo y por tanto $\frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\cdot; s)$ no se anula. Pero si en (20) se da la igualdad o la desigualdad contraria, tendremos que $\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\rho_0; s) \leq 0$ y como consecuencia $\frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\cdot; s)$ se anulará para algún $\rho_0(s) \geq 0$. De hecho, $\rho_0(s) = 0$ si y sólo si se da la desigualdad de (20), lo que prueba el primer apartado de la proposición. La acotación superior de $\rho_0(s)$ dada en (23) cuando no hay contribución bariónica que no se anula se deduce fácilmente de

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_0}(\rho_0; s) \geq -\left\langle \mathbf{V}, \frac{W^s(\mathbf{r})}{(\rho_0 W^s(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_{\sigma} + \langle W^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle_{\sigma} \quad (27)$$

que se deduce de (25). Cabe destacar que cuando algún término de $V_b^{\circ 2}(\mathbf{r})$ se anula, la derivada de $g(\cdot, s)$ en $\rho_0 = 0$ puede irse a menos infinito. Pero esto no cambia nuestros argumentos: el mínimo de $g(\cdot, s)$ está localizado estrictamente dentro de su dominio de definición, y gracias a la continuidad de $g(\cdot, s)$ en $\rho_0 = 0$ podemos restringirnos a trabajar con $\rho_0 > \epsilon > 0$. \square

Hemos visto que para cada $s > 0$ existe un único punto $\rho_0(s)$ tal que

$$\min\{\chi^2(s, \rho_0) \mid \rho_0 \in [0, \infty)\} = \chi^2(s, \rho_0(s)),$$

lo que hace que sea trivial probar la equivalencia

$$\min\{\chi^2(s, \rho_0) \mid \rho_0 \in [0, \infty), s \in (0, \infty)\} \equiv \min\{\varphi(s) \mid s \in (0, \infty)\}.$$

Tiene sentido entonces preguntarnos por las propiedades de φ . A continuación, a modo de ejemplo, se representa gráficamente para los datos de la galaxia DDO43 con el perfil de densidad ISO. Como podemos observar, φ parece adoptar un comportamiento asintótico estable cuando $s \rightarrow 0$ y cuando $s \rightarrow \infty$. Estudiar este aparente comportamiento será nuestro objetivo en el capítulo siguiente.

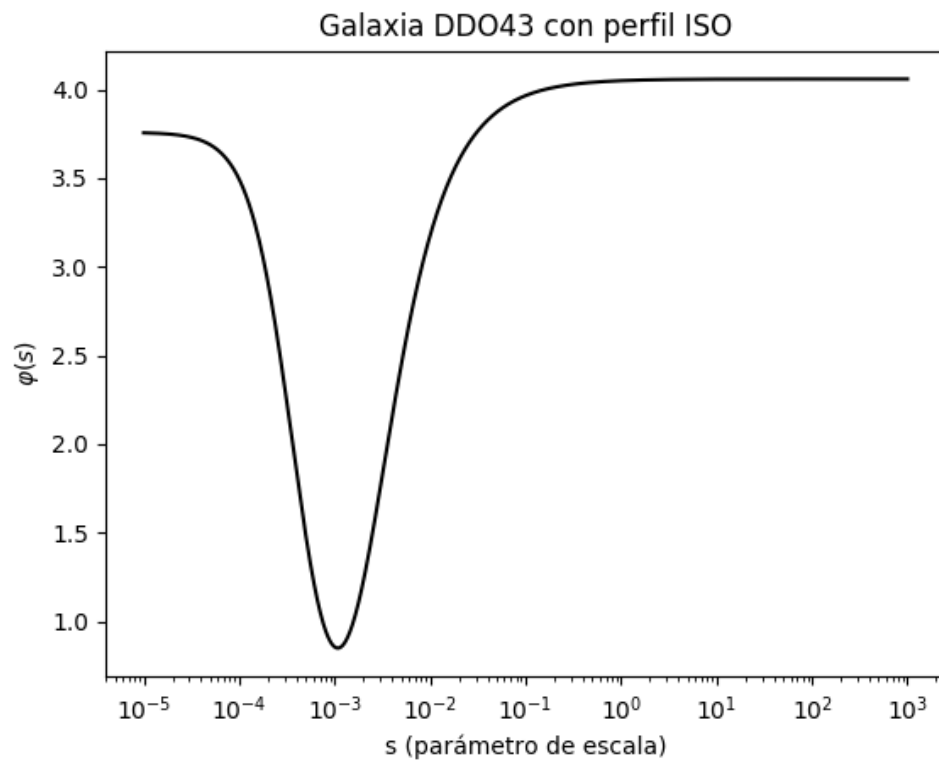


Figura 6: Representación de φ para la galaxia DDO43 con el perfil de densidad ISO.

PROPIEDADES DE LA MINIMIZACIÓN EN TÉRMINOS DE LA ESCALA ESPACIAL

En este capítulo se analizarán algunas propiedades asintóticas de la función $\varphi(s)$ definida en (19). Esto nos permitirá obtener un intervalo finito que contendrá al valor óptimo de s , de forma que el proceso de búsqueda del mínimo de φ será computable. Para ello probaremos la existencia de los límites de $\varphi(s)$ cuando $s \rightarrow 0$ y cuando $s \rightarrow \infty$ para todos los perfiles de materia oscura presentados en la Sección 4.1.4. De hecho los valores de estos límites pueden calcularse en función de las propiedades asintóticas de los perfiles mencionados. A lo largo de esta sección asumiremos que las cantidades son adimensionales. Un ejemplo de este proceso de adimensionalización es el siguiente: tomamos las unidades $\bar{V} = 1 \text{ km/s}$ para la velocidad, $\bar{M} = 1 M_{\odot}$ para la masa (donde M_{\odot} representa la masa solar), $\bar{r} = 1 \text{ kpc}$ para la distancia (donde kpc indica kilopársec, siendo un kilopársec 3262 años luz, que son $3'086 \times 10^{16} \text{ km}$). Así, podremos escribir la versión adimensional de la ecuación (8) en términos de un parámetro no dimensional que notaremos \tilde{G} . Puesto que

$$G = \frac{V^2(r)r}{M(r)},$$

definimos

$$\tilde{G} := \frac{G\bar{M}}{\bar{V}^2\bar{r}} = \frac{V^2(r)\bar{M}r}{\bar{V}^2M(r)\bar{r}} \approx 43'0079063 \times 10^{-1}.$$

Empezamos por tanto estudiando los modelos ISO, BUR y EIN para el caso $s \rightarrow 0$. Puesto que los perfiles de densidad normalizados para estos modelos son

$$\begin{aligned}\rho_{ISO}(rs) &= \frac{1}{1 + (rs)^2}, \\ \rho_{BUR}(rs) &= \frac{1}{(1 + rs)(1 + (rs)^2)}, \\ \rho_{EIN}(rs; n) &= \exp \left[- (rs)^{\frac{1}{n}} \right],\end{aligned}$$

es sencillo y directo comprobar que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \rho_{ISO}(rs) &= 1, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \rho_{BUR}(rs) &= 1, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \rho_{EIN}(rs; n) &= 1.\end{aligned}$$

Para el caso del modelo NFW, conviene escribir

$$\rho_{NFW}(rs) = \frac{1}{rs(1+rs)^2} = \frac{1}{rs} - \frac{rs+2}{(1+rs)^2},$$

de forma que cuando $s \rightarrow 0$, el límite de ρ_{NFW} estará caracterizado por el término $\frac{1}{rs}$, pudiendo entonces expresar

$$\rho_{NFW}(rs) \approx \frac{1}{rs} + o\left(\frac{1}{rs}\right),$$

donde entendemos que $f(x) \approx g(x)$ para $x \rightarrow x_0$ cuando $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Entendemos también que $f(x) = o(g(x))$ es equivalente a decir que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Para el modelo HERN podemos deducir de forma similar. Escribimos

$$\rho_{HERN}(rs; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(rs)^\alpha (1 + (rs)^\beta)^\gamma} = \frac{1}{(rs)^\alpha} + \frac{H(rs; \alpha, \beta, \gamma)}{(1 + (rs)^\beta)^\gamma},$$

donde podemos expresar H como

$$H(rs; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1 - (1 + (rs)^\beta)^\gamma}{(rs)^\alpha}.$$

A continuación tomamos $h = (rs)^\beta$ y expresamos el desarrollo de Taylor de $(1+h)^\gamma$ como

$$(1+h)^\gamma = 1 + \frac{\gamma}{2}h + K,$$

donde K es una constante. Nos queda entonces que

$$1 - (1 + (rs)^\beta)^\gamma = -\frac{\gamma}{2}(rs)^\beta + K \approx (rs)^\beta \quad \text{para } s \rightarrow 0.$$

Por tanto $H(rs; \alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{1}{(rs)^{\alpha-\beta}}$ cuando $s \rightarrow 0$. Puesto que $\frac{1}{(rs)^{\alpha-\beta}} = o\left(\frac{1}{(rs)^\alpha}\right)$, podemos expresar

$$\rho_{HERN}(rs; \alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{1}{(rs)^\alpha} + o\left(\frac{1}{(rs)^\alpha}\right).$$

A la vista de lo observado en cada caso, podemos establecer una regla general y afirmar que, para cada uno de los perfiles de densidad de halo que se han presentado, su límite cuando $s \rightarrow 0$ estará caracterizado por un exponente líder δ , tomando la forma

$$\rho(rs) \approx (rs)^\delta + o((rs)^\delta), \quad (28)$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} \delta &= 0 && \text{para ISO, BUR, EIN,} \\ \delta &= -1 && \text{para NFW,} \\ \delta &= -\alpha && \text{para HERN.} \end{aligned}$$

El límite cuando $s \rightarrow \infty$ dependerá de si el perfil de halo tiene masa infinita o finita. Diremos que un perfil ρ tiene masa finita si se cumple que

$$M(\infty) = 4\pi \int_0^\infty z^2 \rho(z) dz = M < \infty. \quad (29)$$

Se puede comprobar que el perfil EIN tiene masa finita, e igualmente ocurre con el perfil HERN para valores adecuados de α , β y γ (por ejemplo, $\alpha + \beta\gamma > 3$).

El modelo ISO tiene masa infinita, así que en este caso observemos que, para $r \rightarrow \infty$, podemos escribir

$$\int_0^r \frac{z^2 \rho_0}{1 + (zs)^2} dz \approx \frac{\rho_0}{s^2} \int_0^r 1 dz = \frac{r \rho_0}{s^2}.$$

De forma análoga, para $r \rightarrow \infty$, para el perfil BUR escribimos

$$\int_0^r \frac{z^2 \rho_0}{(1 + zs)(1 + (zs)^2)} dz \approx \rho_0 \int_0^r \frac{1}{z} dz = \rho_0 \log(r).$$

Por último, el caso del perfil NFW coincide con el anterior; para $r \rightarrow \infty$, nos queda que

$$\int_1^r \frac{z^2 \rho_0}{zs(1 + zs)^2} \approx \rho_0 \int_1^r \frac{1}{z} dz = \rho_0 \log(r).$$

A la vista de estos resultados en cada caso podemos, de nuevo, establecer una regla general y afirmar que, para cada uno de estos perfiles con masa infinita, el límite cuando $s \rightarrow \infty$ estará caracterizado por una constante positiva $\omega \leq 3$, pudiendo escribir

$$\int_1^r z^2 \rho(z) dz \approx K \int_1^r z^2 \frac{1}{z^\omega} dz \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (30)$$

donde K es una constante. Así, tendremos que

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \quad \text{para ISO,} \\ \omega &= 3 \quad \text{para BUR y NFW.} \end{aligned}$$

Recogemos estos resultados en la siguiente tabla:

Modelo	$s \rightarrow 0$	$s \rightarrow \infty$
ISO	$\delta = 0$	$\omega = 2$
BUR	$\delta = 0$	$\omega = 3$
NFW	$\delta = -1$	$\omega = 3$
EIN(n)	$\delta = 0$	masa finita
HERN(α, β, γ)	$\delta = -\alpha$	masa finita ($\alpha + \beta\gamma > 3$)

Tabla 1: Propiedades asintóticas para los modelos de halo considerados

Las conclusiones que se han obtenido en los distintos casos pueden trasladarse a la expresión de $W^s(r)$ para obtener información sobre sus propiedades asintóticas con $s \rightarrow 0$ y $s \rightarrow \infty$. Si observamos (18) y (12) podemos comprobar fácilmente que

$$W^s(r) = \frac{G}{r\rho_0} M(r),$$

y que por tanto

$$\frac{W^s(r)}{4\pi G} = \frac{M(r)}{4\pi r\rho_0} = \frac{1}{r} \int_0^r z^2 \rho(sz) dz. \quad (31)$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $u = sz$ podemos expresar

$$\frac{W^s(r)}{4\pi G} = \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} u^2 \rho(u) du.$$

Por la ecuación (28) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{W^s(r)}{4\pi G} &= \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^2 \rho(z) dz \approx \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^2 (z^\delta + o(z^\delta)) dz \\ &= \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^{2+\delta} dz + \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^2 o(z^\delta) dz = \frac{s^\delta r^{2+\delta}}{3+\delta} + \int_0^{sr} o(z^{2+\delta}) dz \\ &= \frac{s^\delta r^{2+\delta}}{3+\delta} + \frac{1}{rs^3} o\left(\frac{(sr)^{3+\delta}}{3+\delta}\right) = \frac{1}{3+\delta} \left[s^\delta r^{2+\delta} + o(s^\delta r^{2+\delta}) \right] \\ &= \frac{s^\delta}{3+\delta} r^{2+\delta} + o(s^\delta) \quad \text{cuando } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Cuando $s \rightarrow \infty$, diferenciamos en función de si el perfil de densidad tiene masa finita o infinita, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{W^s(r)}{4\pi G} &= \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^2 \rho(z) dz \\ &\approx \frac{M}{rs^3} && \text{por la ecuación (29), o bien} \\ &\approx \frac{K}{rs^3} \log(rs) \approx \frac{K}{rs^3} \log(s) && \text{por la ecuación (30) para } \omega = 3, \text{ o} \\ &\approx \frac{K}{3-\omega} s^{-\omega} r^{2-\omega} && \text{por la ecuación (30) para } \omega < 3, \end{aligned}$$

donde K es una constante y M viene definida por (29). Para el caso de ISO y BUR, podemos obtener el valor exacto de K aprovechando los cálculos realizados en el Apéndice A. Obtenemos que $K = 1$ para ISO y $K = \frac{1}{2}$ para BUR, y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{W^s(r)}{4\pi G} &= \frac{1}{rs^3} \int_0^{sr} z^2 \rho(z) dz \\ &\approx \frac{1}{2rs^3} \log(s) && \text{para BUR} \\ &\approx \frac{1}{s^2} && \text{para ISO.} \end{aligned}$$

De esta forma, recuperando la ecuación (31), podemos decir que las anteriores expresiones pueden resumirse en

$$\frac{W^s(r)}{4\pi G} = \frac{1}{r} \int_0^r z^2 \rho(sz) dz \approx \mu(s)g(r),$$

adoptando también su forma vectorial

$$\frac{W^s(\mathbf{r})}{4\pi G} = \frac{1}{\mathbf{r}} \circ \int_0^{\mathbf{r}} z^2 \rho(sz) dz \approx \mu(s)g(\mathbf{r}), \quad (32)$$

donde $g(\mathbf{r})$ toma distintos valores dependiendo de si $s \rightarrow 0$ o si $s \rightarrow \infty$. De nuevo, recogemos estos nuevos datos en la siguiente tabla:

$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$	
$\delta \leq 0$	masa finita	$\omega \leq 3$
$g(\mathbf{r}) = g_0(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^{\circ(2+\delta)}$	$g(\mathbf{r}) = g_\infty(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^{\circ(-1)}$	$g(\mathbf{r}) = g_\infty(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^{(2-\omega)}$

Tabla 2: Propiedades asintóticas para los modelos de halo considerados

Una vez desarrolladas las propiedades asintóticas de los perfiles ISO, BUR y NFW, las usaremos en el resultado que viene a continuación, que nos asegura la existencia los límites de φ en 0 y en ∞ y nos permite obtener su valor.

Lema 1. ■ *Si un perfil de densidad de materia oscura normalizado verifica, o bien (29), o bien (30), entonces $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$ existe y viene dado por la siguiente expresión*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = \langle \mathbf{V} - V_\infty^{lim}(\mathbf{r}), \mathbf{V} - V_\infty^{lim}(\mathbf{r}) \rangle_\sigma.$$

Aquí, $V_\infty^{lim}(\mathbf{r}) = (V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_\infty(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}}$, con g_∞ dada en la Tabla 2 y X dada por la raíz de

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{g_\infty(\mathbf{r})}{(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_\infty(\mathbf{r}))^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_\sigma = \langle g_\infty(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma, \quad (33)$$

en caso de que tenga sentido, o $X = 0$ si

$$\langle g_\infty(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_\sigma \geq \left\langle \mathbf{V}, \frac{g_\infty(\mathbf{r})}{V_b(\mathbf{r})} \right\rangle_\sigma. \quad (34)$$

■ *Si un perfil de densidad de materia oscura normalizado verifica (28), entonces $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)$ existe y viene dado por la siguiente expresión*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \langle \mathbf{V} - V_0^{lim}(\mathbf{r}), \mathbf{V} - V_0^{lim}(\mathbf{r}) \rangle_\sigma.$$

Aquí, $V_0^{lim}(\mathbf{r}) = \left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_0(\mathbf{r})\right)^{\circ 2}$, con g_0 dada en la Tabla 2 y X dada por la raíz de

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{g_0(\mathbf{r})}{\left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_0(\mathbf{r})\right)^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_{\sigma} = \langle g_0(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma}, \quad (35)$$

en caso de que tenga sentido, o $X = 0$ si

$$\langle g_0(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma} \geq \left\langle \mathbf{V}, \frac{g_0(\mathbf{r})}{V_b(\mathbf{r})} \right\rangle_{\sigma}. \quad (36)$$

Demostración. Veamos el caso de $s \rightarrow \infty$; la demostración para $s \rightarrow 0$ es equivalente. Empezamos notando que, por la ecuación (20), $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_0(s) = 0$ si y sólo si se cumple la ecuación (34). Si no se cumple la ecuación (20), entonces sabemos que $\rho_0(s)$ se define en términos de la ecuación (21). Tomando límite para $s \rightarrow \infty$ en este caso nos queda que

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s)g_{\infty}(\mathbf{r})}{\left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + 4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))g_{\infty}(\mathbf{r})\right)^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_{\sigma} = \langle 4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s)g_{\infty}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma},$$

que se puede reescribir como

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{g_{\infty}(\mathbf{r})}{\left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + 4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))g_{\infty}(\mathbf{r})\right)^{\circ \frac{1}{2}}} \right\rangle_{\sigma} = \langle g_{\infty}(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle_{\sigma}.$$

Puesto que el lado derecho de la igualdad no depende de s , $\lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))$ existe. Es inmediato obtener el valor de este límite, ya que $4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))$ debe coincidir con X , la única raíz de la ecuación (33), es decir, $4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))g_{\infty}(\mathbf{r}) = Xg_{\infty}(\mathbf{r})$. Además, por (32) nos queda que

$$4\pi G \lim_{s \rightarrow \infty} (\rho_0(s)\mu(s))g_{\infty}(\mathbf{r}) = \lim_{s \rightarrow \infty} 4\pi G \rho_0(s) \frac{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} z^2 \rho(sz) dz}{\mathbf{r}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \rho_0(s) W^s(\mathbf{r}).$$

Recordemos que $V_{halo}^2(\mathbf{r}) = \rho_0(s)W^s(\mathbf{r})$, por lo que podemos escribir

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V_{halo}^2(\mathbf{r}) = Xg_{\infty}(\mathbf{r}). \quad (37)$$

Puesto que $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle \mathbf{V} - V(\mathbf{r}), \mathbf{V} - V(\mathbf{r}) \rangle_{\sigma}$ con $V(\mathbf{r}) = (V_b^2(\mathbf{r}) + V_{halo}^2(\mathbf{r}))^{\frac{1}{2}}$, podemos concluir que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = \langle \mathbf{V} - \left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_{\infty}(\mathbf{r})\right)^{\circ \frac{1}{2}}, \mathbf{V} - \left(V_b^{\circ 2}(\mathbf{r}) + Xg_{\infty}(\mathbf{r})\right)^{\circ \frac{1}{2}} \rangle_{\sigma}. \quad \square$$

Este resultado nos permitirá obtener un intervalo finito $[s_0, s_{\infty}]$ que se usará como el intervalo de búsqueda del valor óptimo de s . Para encontrar dicho intervalo usaremos el criterio de convergencia

$$\frac{|\varphi(s_0) - \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)|}{\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)} < tol$$

para el extremo inferior del intervalo y

$$\frac{|\varphi(s_\infty) - \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)|}{\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)} < tol$$

para el extremo superior del intervalo. Aquí tol es una cierta tolerancia predeterminada. Notemos que podremos asegurar la existencia de un valor óptimo de s si encontramos algún $s_\star > 0$ tal que

$$\varphi(s_\star) < \min \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s), \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) \right\}. \quad (38)$$

No obstante, no siempre podremos hacerlo. A continuación se muestran las gráficas de φ correspondientes a las galaxias haro36 y DDO210, para las cuales no existe el mínimo de φ .

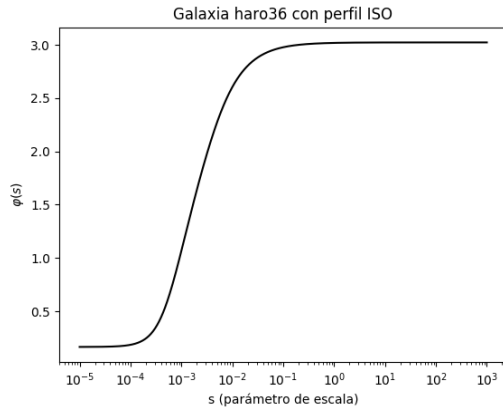


Figura 7: Representación de φ para la galaxia Haro 36 con el perfil de densidad ISO.

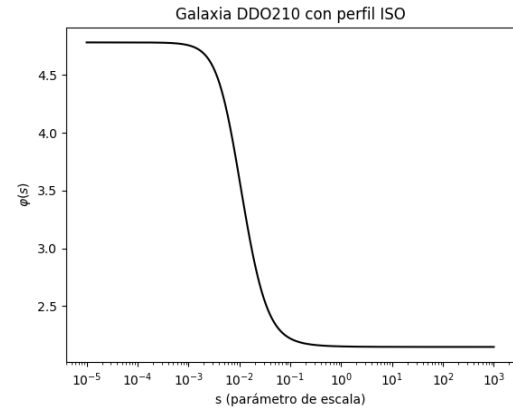


Figura 8: Representación de φ para la galaxia DDO210 con el perfil de densidad ISO.

Parte II

PARTE INFORMÁTICA

ALGORITMO DE REDUCCIÓN DEL INTERVALO DE BÚSQUEDA

El algoritmo de reducción del intervalo de búsqueda propuesto aprovecha los valores límite de φ en 0 y en ∞ para establecer un criterio analítico de convergencia. Establecida una cierta tolerancia tol , estudiamos para qué valores de s obtenemos que

$$\frac{|\varphi(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)|}{\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)} \leq tol \quad (39)$$

y para qué valores de s obtenemos

$$\frac{|\varphi(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)|}{\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)} \leq tol. \quad (40)$$

Partimos del intervalo de búsqueda inicial $[10^{-3}, 10^3]$, que se ha considerado óptimo para el tamaño medio de las galaxias a estudiar. Modificaremos este intervalo cambiando sus extremos hasta, o bien conseguir que cumplan unas condiciones óptimas, o bien alcanzar algunas de las condiciones de parada del algoritmo descritas más abajo.

- **Condición óptima para el extremo inferior del intervalo.** Un cierto número de valores uniformemente distribuidos a la derecha de dicho extremo no cumplen (40), mientras que la misma cantidad de valores igualmente distribuidos a la izquierda sí cumplen (40).
- **Condición óptima para el extremo superior del intervalo.** Un cierto número de valores uniformemente distribuidos a la izquierda de dicho extremo no cumplen (39), mientras que esa cantidad de valores igualmente distribuidos a la derecha sí cumplen (39).

Además de estudiar la condición que cumple el punto candidato a extremo inferior o exterior del intervalo, es importante considerar algunos puntos situados a la derecha y a la izquierda del mismo, ya que el punto candidato puede no ser un extremo adecuado a pesar de cumplir (39) o (40), como puede observarse en la Figura 9.

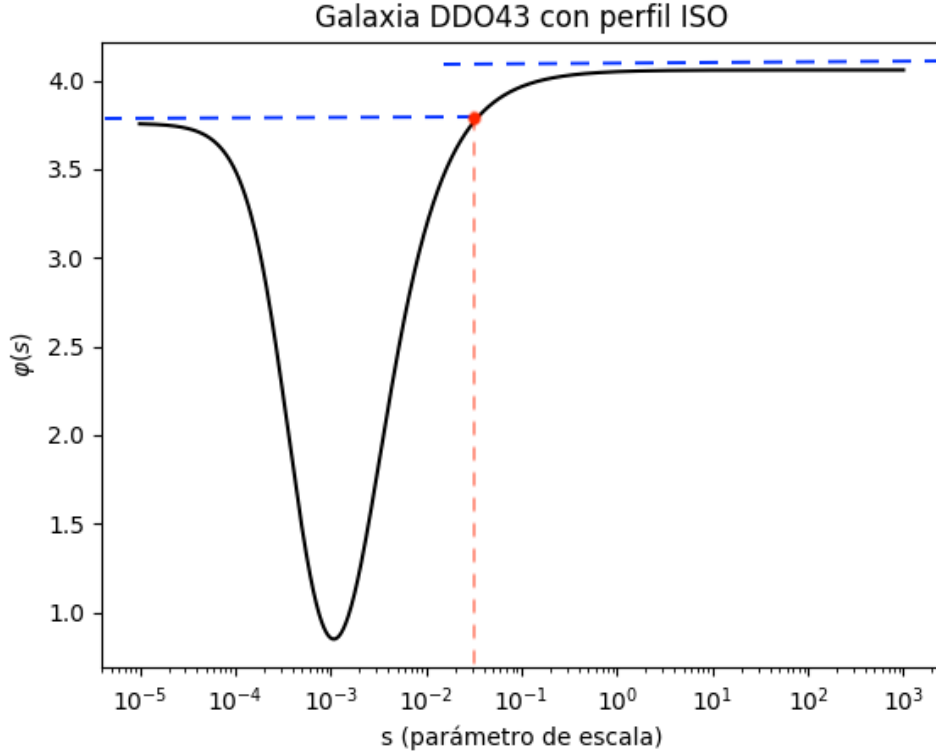


Figura 9: Representación de φ para la galaxia DDO43 con el perfil de densidad ISO. Si durante el algoritmo de reducción del intervalo el punto rojo llegase a considerarse como un candidato a extremo inferior y no se estudiase la situación de los puntos a la derecha y a la izquierda del mismo, sino que sólo se comprobase si el punto rojo cumple (40), entonces terminaríamos tomando dicho punto como el extremo inferior del intervalo de búsqueda.

Así, fijada la posición de inicio (10^3 para el extremo superior del intervalo, 10^{-3} para el extremo inferior del intervalo), el método consistirá en evaluar puntos a la derecha y a la izquierda de dicha posición y cambiarla según la situación que se dé. En el caso del extremo superior del intervalo:

- Si tanto los valores a la derecha como los valores a la izquierda cumplen (39), entonces nos moveremos hacia la izquierda.
- Si tanto los valores a la derecha como los valores a la izquierda no cumplen (39), entonces nos moveremos hacia la derecha.
- Si se cumple la condición óptima explicada anteriormente, entonces fijaremos temporalmente ese valor como extremo superior del intervalo. A continuación comprobaremos que un cierto número de valores situados a la derecha siguen cumpliendo (39). En caso de que sí, habremos encontrado el extremo superior del intervalo. En caso contrario, seguiremos moviéndonos hacia la derecha.

En el caso del extremo inferior del intervalo:

- Si tanto los valores a la derecha como los valores a la izquierda cumplen (40), entonces nos moveremos hacia la derecha.
- Si tanto los valores a la derecha como los valores a la izquierda no cumplen (40), entonces nos moveremos hacia la izquierda.
- Si se cumple la condición óptima explicada anteriormente, entonces fijaremos temporalmente ese valor como extremo inferior del intervalo. A continuación comprobaremos que un cierto número de valores situados a la izquierda siguen cumpliendo (40). En caso de que sí, habremos encontrado el extremo inferior del intervalo. Sino, seguiremos moviéndonos hacia la izquierda.

Además de las condiciones óptimas descritas anteriormente existen otras dos condiciones de parada en el algoritmo:

- **Número máximo de iteraciones.** Si se alcanza un número máximo de iteraciones en la búsqueda de alguno de los extremos del intervalo, el algoritmo interrumpe el proceso y devuelve el último valor considerado.
- **Sucesión de valores cercanos entre sí y próximos al límite.** Si se alcanza un número elevado de valores cercanos entre sí y próximos al límite, pero sin llegar a cumplir (39) o (40) (según el caso), eso significará que la convergencia es muy lenta. El algoritmo interrumpirá el proceso y devolverá el último valor considerado. Por defecto consideramos que dos valores a y b son cercanos si $|a - b| < tol$, con tol una tolerancia prefijada. Consideraremos que un valor c está próximo al límite $\lim_{s \rightarrow x} \varphi(s)$ si $|c - \lim_{s \rightarrow x} \varphi(s)| < 1 + tol$.

También se ha implementado una **condición de aceleración del algoritmo** en la línea de la segunda condición de parada de las comentadas arriba. Si ocurre que se da una sucesión de valores cercanos entre sí y muy próximos al límite, entonces el algoritmo hará un salto de longitud aleatoria (pero controlada) en la dirección correspondiente. Entendemos que un valor c está muy próximo al límite $\lim_{s \rightarrow x} \varphi(s)$ si $|c - \lim_{s \rightarrow x} \varphi(s)| < 1$. En la Figura 10 puede verse un ejemplo de la exploración φ teniendo en cuenta las condiciones anteriormente planteadas.

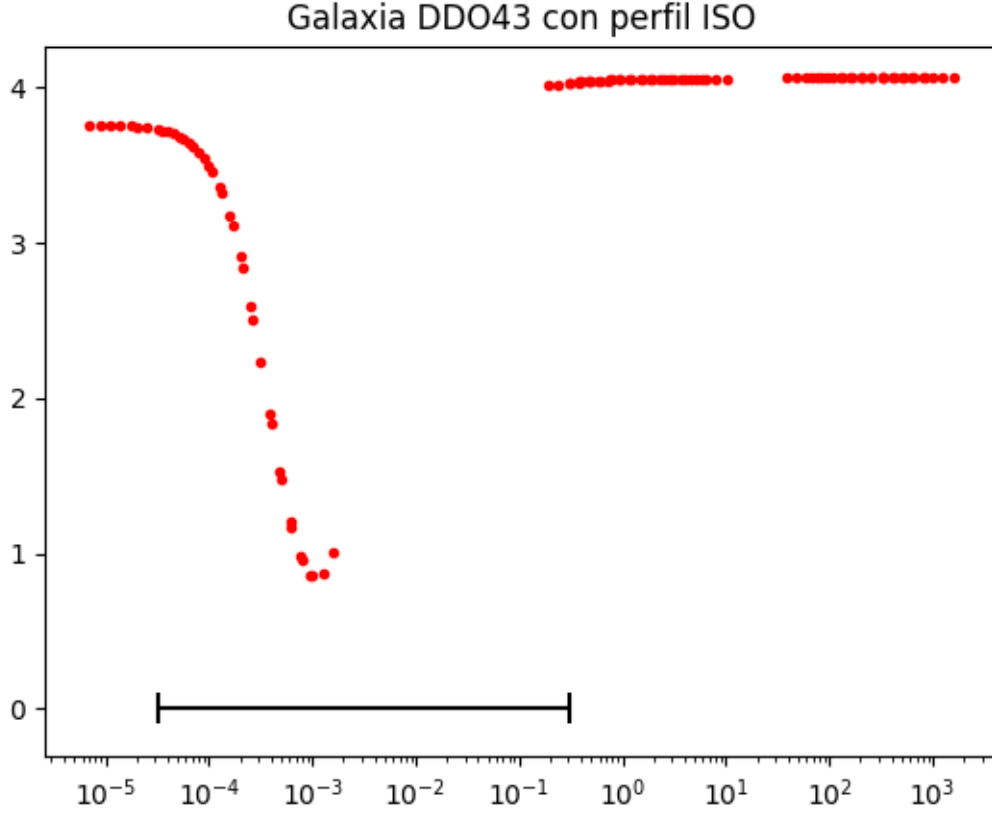


Figura 10: Exploración de φ para la reducción del intervalo de búsqueda con la galaxia DDO43 para el perfil ISO. Los puntos rojos representan los puntos explorados durante este proceso y la línea negra indica el intervalo de búsqueda óptimo, que para este caso es $[3,202161430656187 \times 10^{-5}, 0,3029537744795053]$.

En la Tabla 3 se presentan algunas aproximaciones de los intervalos de búsqueda del mínimo de $\varphi(s)$ deducidos para algunas galaxias, para los modelos ISO, BUR y NFW. Para la mayoría de las galaxias estudiadas el tamaño de dicho intervalo asciende notablemente en el caso de los perfiles BUR y NFW, tal y como puede observarse en la Tabla 3. Esto tiene su explicación en la expresión de $W^s(\mathbf{r})$ para dichos modelos. Ambas expresiones tienen una tendencia logarítmica en s , lo que hace que la convergencia de $\varphi(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$ sea más lenta (ver Figura 11). Tendría sentido entonces plantearnos adoptar un criterio analítico de convergencia distinto (menos estricto que (39)) para los modelos BUR y NFW. Por ejemplo:

$$\frac{|\varphi(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)|}{2 \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)} \leq tol \quad (41)$$

Galaxia	Perfil	Intervalo de búsqueda	Longitud del intervalo
DDO43	ISO	$\approx [3'20216 \times 10^{-5}, 0'30295]$	$\approx 0'302922$
	BUR	$\approx [3'54153 \times 10^{-6}, 2'87004 \times 10^{16}]$	$\approx 2'87004 \times 10^{16}$
	NFW	$\approx [1'843378 \times 10^{-6}, 2'97517 \times 10^{16}]$	$\approx 2'97517 \times 10^{16}$
DDO210	ISO	$\approx [0,001, 0,288102]$	$\approx 0'2871$
	BUR	$\approx [0,000318, 2,178687 \times 10^{17}]$	$\approx 2,178687 \times 10^{17}$
	NFW	$\approx [5,628496 \times 10^{-5}, 2,367668 \times 10^{17}]$	$\approx 2,367668 \times 10^{17}$
DDO216	ISO	$\approx [0'000168, 1'111638]$	$\approx 1'11147$
	BUR	$\approx [3'202161 \times 10^{-5}, 1'356376 \times 10^{40}]$	$\approx 1'356376 \times 10^{40}$
	NFW	$\approx [3'472855 \times 10^{-6}, 1'108454 \times 10^{40}]$	$\approx 1'108454 \times 10^{40}$
haro29	ISO	$\approx [3'202161 \times 10^{-5}, 0'590907]$	$\approx 0'59087$
	BUR	$\approx [3'4728549 \times 10^{-6}, 4'03854 \times 10^{35}]$	$\approx 4'03854 \times 10^{35}$
	NFW	$\approx [1'05278 \times 10^{-6}, 4'347161 \times 10^{35}]$	$\approx 4'347161 \times 10^{35}$

Tabla 3: Aproximaciones de los intervalos de búsqueda deducidos y la longitud de los mismos para las galaxias DDO43, DDO210, DDO216 y haro29, para los modelos ISO, BUR y NFW. La mayor parte del resto de galaxias estudiadas presentan situaciones similares: intervalos de búsqueda del mínimo muy grandes para los perfiles BUR y NFW.

Como hemos dicho, no todas las galaxias de las 23 estudiadas presentan grandes intervalos de búsqueda para los perfiles BUR y NFW. Las galaxias DDO53, DDO168, ic1613 y NGC1569 pueden considerarse como las excepciones de este caso (ver Tabla 4). Sin embargo, la mejora propuesta en (41) afecta mínimamente a aquellas galaxias con perfiles cuya $\varphi(s)$ tenga una convergencia rápida cuando $s \rightarrow \infty$, ya que esto implica que las condiciones (39) y (41) se alcanzan para valores de s cercanos entre sí, como puede verse en la Figura 12. En la Figura 13 puede observarse que para galaxias con perfiles con convergencia lenta de $\varphi(s)$, la nueva condición (41) supone una gran mejora. Esto justifica que sea razonable poder aplicar el nuevo criterio analítico de convergencia propuesto a las 23 galaxias que estamos estudiando.

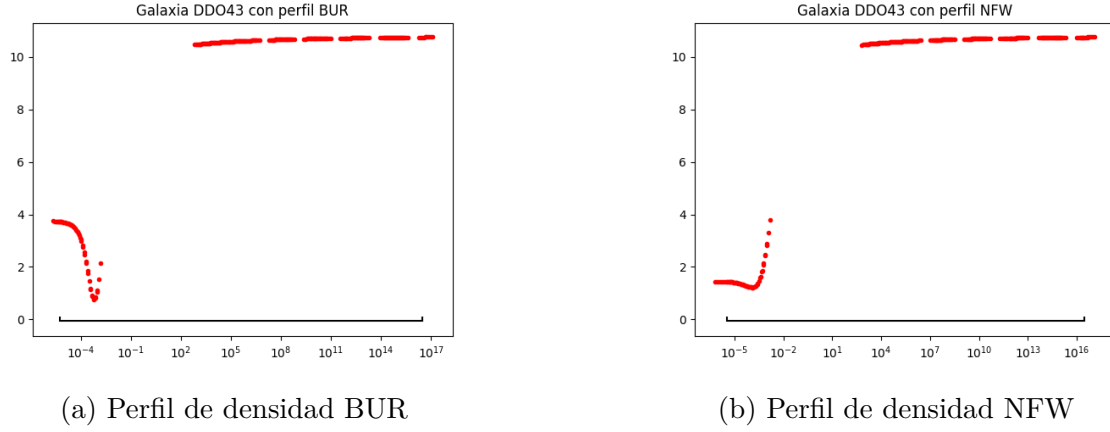
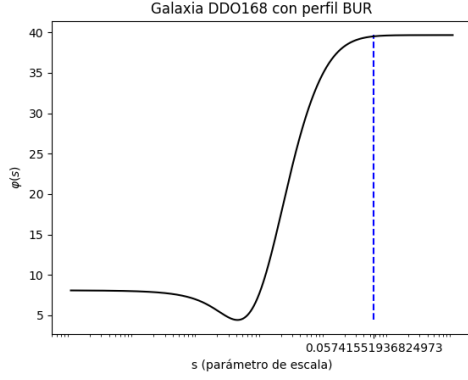


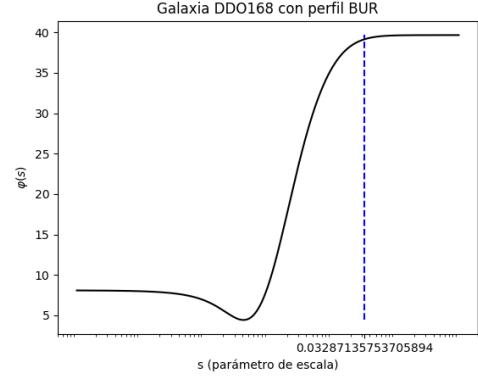
Figura 11: Exploración de φ para la reducción del intervalo de búsqueda con la galaxia DDO43 para los perfiles de densidad BUR y NFW. Los puntos rojos representan los puntos explorados durante este proceso y la línea negra indica el intervalo de búsqueda óptimo.

Galaxia	Perfil	Intervalo de búsqueda	Longitud del intervalo
DDO53	ISO	$\approx [1'6805163 \times 10^{-4}, 2'024857 \times 10^{-1}]$	$\approx 0,20231764837$
	BUR	$\approx [3'2021614 \times 10^{-5}, 1'844323 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,018411208386$
	NFW	$\approx [1,7389373 \times 10^{-5}, 1'170762 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,011690230627$
DDO168	ISO	$\approx [3,20216 \times 10^{-5}, 3'0295377 \times 10^{-1}]$	$\approx 0,3029217484$
	BUR	$\approx [5'295022 \times 10^{-6}, 5'741552 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,057410224978$
	NFW	$\approx [9,1497998 \times 10^{-6}, 5'676692 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,0567577702002$
ic1613	ISO	$\approx [1'6805163 \times 10^{-4}, 3'2498791 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,03233073937$
	BUR	$\approx [5'6284956 \times 10^{-5}, 2'044624 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,020389955044$
	NFW	$\approx [3'202161 \times 10^{-5}, 2'09715986 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,02093957699$
NGC1569	ISO	$\approx [3'1755591 \times 10^{-4}, 3'8959553 \times 10^{-3}]$	$\approx 0'003578$
	BUR	$\approx [1'680516 \times 10^{-4}, 1'8538078 \times 10^{-3}]$	$\approx 0'001686$
	NFW	$\approx [2'70008208 \times 10^{-5}, 4'543954 \times 10^{-4}]$	$\approx 0,0004273945792$

Tabla 4: Aproximaciones de los intervalos de búsqueda deducidos y la longitud de los mismos para las galaxias DDO53, DDO168, ic1613 y NGC1569, para los modelos ISO, BUR y NFW.

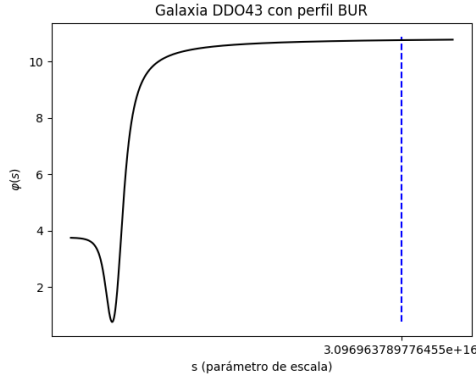


(a) Representación de $\varphi(s)$ para la galaxia DDO168 con perfil de densidad de materia oscura BUR, aplicando el criterio analítico de convergencia (39).

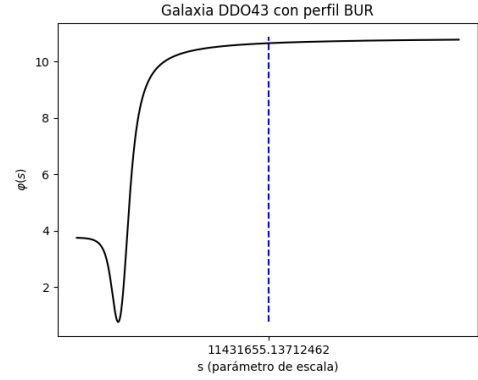


(b) Representación de $\varphi(s)$ para la galaxia DDO168 con perfil de densidad de materia oscura BUR, aplicando el criterio analítico de convergencia (41).

Figura 12: La galaxia DDO168 presenta una convergencia rápida de $\varphi(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$ para el perfil de densidad BUR. En este caso la condición (39) se cumple para $s \approx 0,0574155$, mientras que la condición (41) se cumple para $s \approx 0,0328714$. De forma similar ocurre para el perfil NFW.



(a) Representación de $\varphi(s)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura BUR, aplicando el criterio analítico de convergencia (39).



(b) Representación de $\varphi(s)$ para la galaxia DDO43 con perfil de densidad de materia oscura BUR, aplicando el criterio analítico de convergencia (41).

Figura 13: La galaxia DDO43 presenta una convergencia lenta de $\varphi(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$ para el perfil de densidad BUR. En este caso la condición (39) se cumple para $s \approx 3,969638 \times 10^{16}$, mientras que la condición (41) se cumple para $s \approx 1,143165514 \times 10^{17}$. De forma similar ocurre para el perfil NFW.

Así pues, adoptando el criterio analítico de convergencia planteado en (41), repetimos las evaluaciones y comparamos los resultados. En la Tabla 5 y en la Figuras 14 podemos ver con detalle las mejoras que se perciben con este nuevo criterio.

Galaxia	Perfil	Intervalo de búsqueda	Longitud del intervalo
DDO43	BUR	$\approx [5'649703 \times 10^{-6}, 1'14316551 \times 10^7]$	$\approx 1,14317 \times 10^7$
	NFW	$\approx [3,54153 \times 10^{-6}, 1,583455451 \times 10^7]$	$\approx 1,58346 \times 10^7$
DDO210	BUR	$\approx [5'86717 \times 10^{-4}, 7,9971164 \times 10^7]$	$\approx 7,99712 \times 10^7$
	NFW	$\approx [9'998523 \times 10^{-5}, 8'5967762 \times 10^7]$	$\approx 8,59678 \times 10^7$
DDO216	BUR	$\approx [5'6284956 \times 10^{-5}, 4'633304 \times 10^{23}]$	$\approx 4,633304 \times 10^{23}$
	NFW	$\approx [9'1498 \times 10^{-6}, 7'734575 \times 10^{23}]$	$\approx 7,73457 \times 10^{23}$
haro29	BUR	$\approx [5'295022 \times 10^{-6}, 1'385175 \times 10^{31}]$	$\approx 1,385175 \times 10^{31}$
	NFW	$\approx [1'843378 \times 10^{-6}, 2'181655 \times 10^{31}]$	$\approx 2,181655 \times 10^{31}$

Tabla 5: Aproximaciones de los intervalos de búsqueda deducidos y la longitud de los mismos para las galaxias DDO43, DDO210, DDO216, haro29 y NGC1569, para los modelos ISO, BUR y NFW, con el nuevo criterio de convergencia (41).

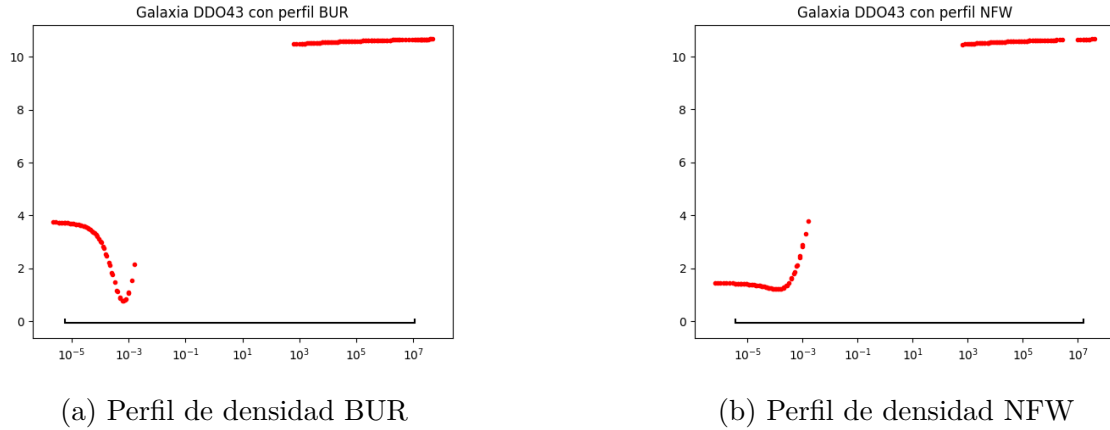


Figura 14: Exploración de φ para la reducción del intervalo de búsqueda con la galaxia DDO43 para los perfiles de densidad BUR y NFW, con el nuevo criterio de convergencia (41). Los puntos rojos representan los puntos explorados durante este proceso y la línea negra indica el intervalo de búsqueda óptimo.

Asimismo, en la Tabla 6 podemos observar que, como habíamos predicho, las galaxias que antes no presentaban grandes intervalos de búsqueda para BUR y NFW no han sufrido grandes variaciones con el nuevo criterio de convergencia. Para las 23 galaxias

consideradas se observa un cambio importante en los tiempos de ejecución del algoritmo de reducción del intervalo. Esto queda reflejado en la Tabla 7.

Galaxia	Perfil	Intervalo de búsqueda	Longitud del intervalo
DDO53	BUR	$\approx [3'20216 \times 10^{-5}, 1'107075 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,011039$
	NFW	$\approx [1'73894 \times 10^{-5}, 7'02763 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,07026$
DDO168	BUR	$\approx [5'29502 \times 10^{-6}, 3'287136 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,032866$
	NFW	$\approx [9'1498 \times 10^{-6}, 3'280763 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,032798$
ic1613	BUR	$\approx [5'6285 \times 10^{-5}, 1'00156 \times 10^{-2}]$	$\approx 0,0099593$
	NFW	$\approx [3'202161 \times 10^{-5}, 6'16022 \times 10^{-3}]$	$\approx 0,006128$
NGC1569	BUR	$\approx [1'68052 \times 10^{-4}, 1'85381 \times 10^{-3}]$	$\approx 0,01686$
	NFW	$\approx [2'70008 \times 10^{-5}, 4'54395 \times 10^{-4}]$	$\approx 0,0004274$

Tabla 6: Aproximaciones de los intervalos de búsqueda deducidos y la longitud de los mismos para las galaxias DDO53, DDO168, ic1613 y NGC1569, para los modelos ISO, BUR y NFW, adoptando el nuevo criterio de convergencia propuesto en (41).

Galaxia	Perfil	Algoritmo de reducción del intervalo sin mejora (seg.)	Algoritmo de reducción del intervalo con mejora (seg.)
DDO43	BUR	0,07899594306945801	0,03591322898864746
	NFW	0,06569886207580566	0,03275895118713379
DDO46	BUR	0,15923213958740234	0,11411094665527344
	NFW	0,13525390625	0,09125971794128418
DDO126	BUR	0,047077178955078125	0,02414226531982422
	NFW	0,04311513900756836	0,01782703399658203
DDO210	BUR	0,06384682655334473	0,027906179428100586
	NFW	0,062406063079833984	0,03078007698059082
DDO216	BUR	0,1656332015991211	0,09999585151672363
	NFW	0,1338028907775879	0,08595705032348633
haro29	BUR	0,16242313385009766	0,1435542106628418
	NFW	0,1331477165222168	0,11806106567382812
UGC8508	BUR	0,12939071655273438	0,061801910400390625
	NFW	0,11740803718566895	0,05767703056335449

Tabla 7: Comparación de tiempos de ejecución del algoritmo de reducción del intervalo con el criterio de convergencia propuesto en (39) y con el propuesto en (41).

Con estas mejoras de tiempo de ejecución del algoritmo de reducción del intervalo de búsqueda se alcanza una ganancia considerable en tiempo de ejecución de todo el proceso de ajuste (incluyendo el algoritmo de minimización de φ). En definitiva, para **23 galaxias** y para **3 modelos por galaxia** (ISO, BUR y NFW) el proceso de reducción del intervalo de búsqueda **sin la mejora aplicada** se ejecuta en **20.64665913581848 segundos**, mientras que **con la mejora** propuesta se ejecuta en **18.466861724853516 segundos**.

Nota. Recordemos que estas ejecuciones se han realizado en una máquina con procesador 2,3 GHz Intel Core i5 y memoria RAM de 16 GB 2133 MHz LPDDR3.

ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN φ

El algoritmo de minimización de la función φ empieza dividiendo el intervalo de búsqueda en un número determinado de subintervalos del mismo tamaño. Esta división se realiza en escala logarítmica dadas las características de los datos que manejamos.

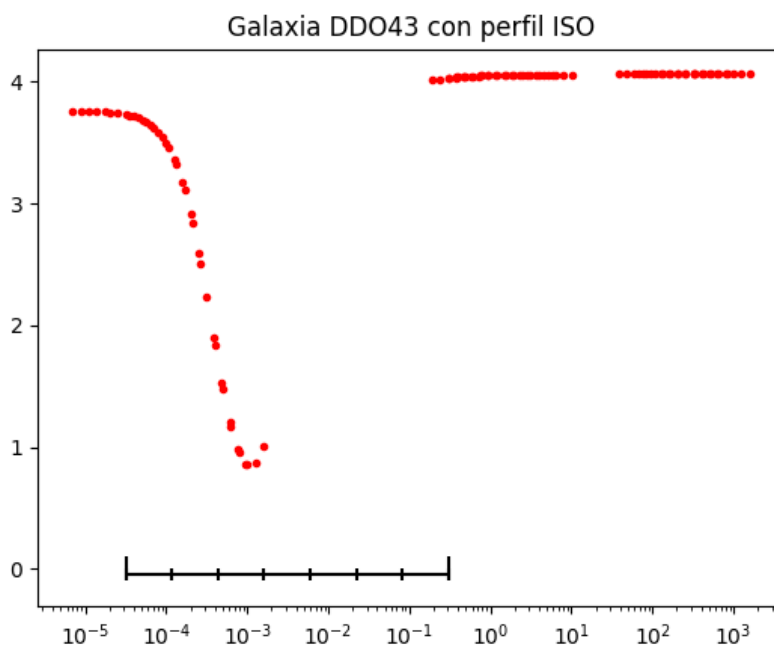


Figura 15: División del intervalo de búsqueda en 7 subintervalos.

Esta división se basa en el paradigma *divide y vencerás*. Ahora, para cada subintervalo se ejecutará un mismo algoritmo con el fin de encontrar el mínimo valor de ese subintervalo, para luego comparar todos los valores mínimos encontrados y escoger el más pequeño, el que tomaremos como mínimo de φ . Dicho algoritmo consiste en buscar el punto medio del subintervalo, m , para luego escoger dos valores aleatorios, uno a la derecha del punto medio, d , y otro a la izquierda, i , ambos dentro del subintervalo. A continuación se comparan los valores de φ para i , m y d y se procede de la siguiente forma:

- Si $\varphi(i) < \varphi(m) < \varphi(d)$ entonces exploraremos la parte del subintervalo que queda a la izquierda de m : nuestro subintervalo pasará a tener como extremo superior el valor m y repetiremos el proceso.
- Si $\varphi(i) > \varphi(m) > \varphi(d)$ entonces exploraremos la parte del subintervalo que queda a la derecha de m : nuestro subintervalo pasará a tener como extremo inferior el valor m y repetiremos el proceso.
- En cualquier otro caso recurriremos de nuevo al paradigma *divide y vencerás* y dividiremos el subintervalo en dos. Diremos que m se encuentra en situación de **fork**. Repetimos el proceso para los dos nuevos subintervalos. Esta acción de volver a dividir el subintervalo estará controlada de forma que sólo pueda realizarse un número determinado de veces por cada subintervalo, para así evitar un bucle infinito.

Este proceso se repetirá en el subintervalo hasta que se cumpla que la distancia entre el valor de φ evaluada en el punto medio de la iteración actual y el valor de φ evaluada en el punto medio de la iteración anterior es menor que una tolerancia prefijada tol , es decir, hasta que $|\varphi(s_n) - \varphi(s_{n-1})| < tol$ con n el índice de la iteración actual. Cuando se cumpla esta condición pasaremos a repetir todo el proceso con el subintervalo siguiente. Una vez explorados todos los subintervalos, compararemos los mínimos encontrados en cada uno de ellos y devolveremos el valor más pequeño.

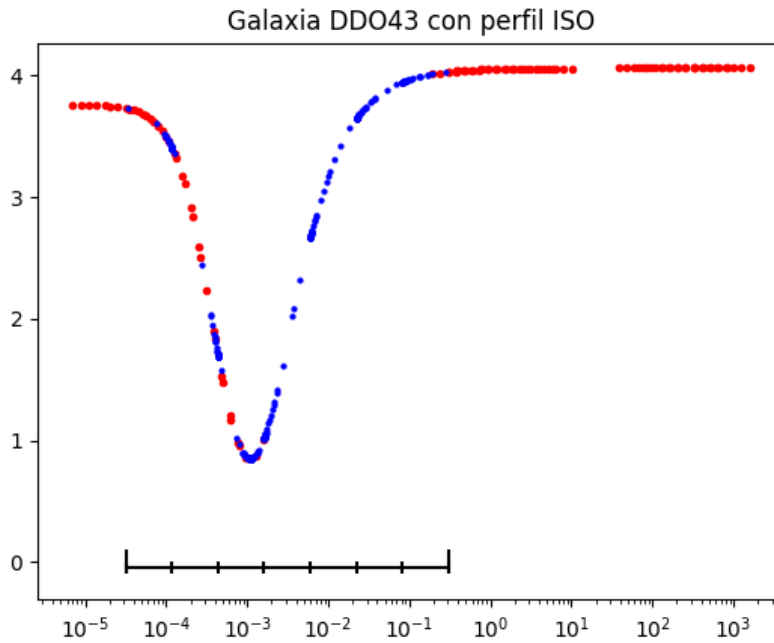


Figura 16: Exploración de φ durante el algoritmo de minimización. Los puntos rojos representan los puntos explorados durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda. Los puntos azules representan los puntos explorados durante el proceso de minimización de φ .

A continuación mostramos las exploraciones de φ para las galaxias DDO46, DDO216 y F564_v3 para los perfiles ISO, BUR y NFW. Si nos fijamos en los puntos rojos (exploración de φ durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda) y en los puntos azules (exploración de φ durante el proceso de minimización de la propia función) podremos ver que en muchos casos parte de la exploración de φ para su minimización se hace sobre zonas ya exploradas en el proceso de reducción del intervalo. Visto gráficamente: hay puntos azules “pisando” puntos rojos, principalmente en la determinación del extremo superior del intervalo de búsqueda para los perfiles BUR y NFW.

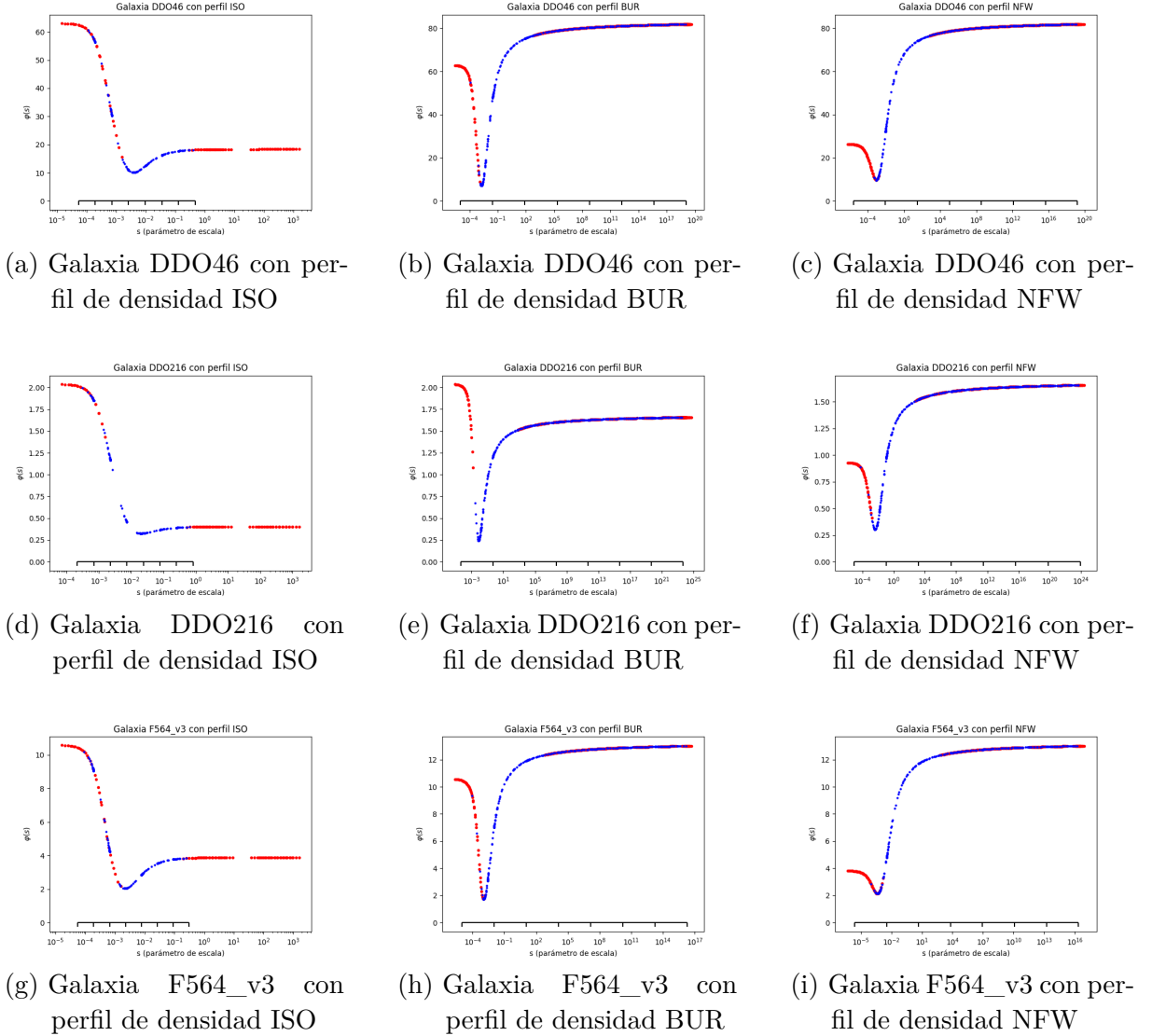


Figura 17: Exploración de φ durante el algoritmo de minimización para las galaxias DDO46, DDO216 y F564_v3, con los perfiles ISO, BUR y NFW. Los puntos rojos representan la exploración hecha previamente durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda. Los puntos azules representan los puntos explorados durante el proceso de minimización de φ .

Así pues, cabe plantearse establecer una nueva mejora que nos permita ahorrarnos en el algoritmo de minimización de φ aquellas exploraciones que ya se han realizado en el algoritmo de reducción del intervalo de búsqueda. Dicha mejora consistirá en guardar, durante la exploración del intervalo de búsqueda, dos valores: el valor mínimo encontrado en la búsqueda del extremo inferior del intervalo y el valor mínimo encontrado en la búsqueda del extremo superior del intervalo. Estos dos valores, que notaremos **minInf** y **minSup**, respectivamente, nos servirán para, en caso de cumplir ciertas condiciones, reducir el espacio a explorar en el proceso de minimización de φ . Notaremos por **s_{INF}** y **s_{SUP}** a aquéllos valores tales que $\varphi(\mathbf{s}_{INF}) = \mathbf{minInf}$ y $\varphi(\mathbf{s}_{SUP}) = \mathbf{minSup}$. Para establecer las condiciones que nos permitirán usar **minInf** y **minSup** para reducir el espacio de exploración de φ , usaremos los valores deducidos anteriormente de $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s)$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$:

■ Para **minInf**:

- Si $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) > \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$ comprobamos si se cumple que

$$| \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) - \mathbf{minInf} | \leq | \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) - \mathbf{minInf} |.$$

En caso de que sí, tomaremos **minInf** como el extremo inferior del intervalo de exploración de φ . En caso contrario, tomaremos el valor que ya habíamos deducido en el algoritmo de reducción del intervalo.

- Si $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) < \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$ comprobamos si se cumple que

$$| \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) - \mathbf{minInf} | \leq 0,1.$$

En caso de que sí, tomaremos **minInf** como el extremo inferior del intervalo de exploración de φ . En caso contrario, tomaremos el valor que ya habíamos deducido en el algoritmo de reducción del intervalo.

■ Para **minSup**:

- Si $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) > \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$ comprobamos si se cumple que

$$| \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) - \mathbf{minSup} | \leq 0,1.$$

En caso de que sí, tomaremos **minSup** como el extremo superior del intervalo de exploración de φ . En caso contrario, tomaremos el valor que ya habíamos deducido en el algoritmo de reducción del intervalo.

- Si $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) < \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)$ comprobamos si se cumple que

$$| \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) - \mathbf{minSup} | \leq | \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) - \mathbf{minSup} |.$$

En caso de que sí, tomaremos **minSup** como el extremo superior del intervalo de exploración de φ . En caso contrario, tomaremos el valor que ya habíamos deducido en el algoritmo de reducción del intervalo.

Teniendo en cuenta esta nueva mejora, volvemos a evaluar y observamos las diferencias con las evaluaciones anteriores. A continuación mostramos las exploraciones de φ para las

mismas galaxias que antes (DDO46, DDO216 y F564_v3, para los perfiles ISO, BUR Y NFW). Como puede observarse, el intervalo de exploración de φ para su minimización se ha reducido considerablemente, y de forma que el mínimo de φ sigue estando contenido en el mismo en virtud de las condiciones impuestas anteriormente. En la Tabla 8 pueden observarse con más detalle las consecuencias de la mejora propuesta para las galaxias DDO46, DDO216 y F564_v3. Para el resto de galaxias se obtienen resultados similares.

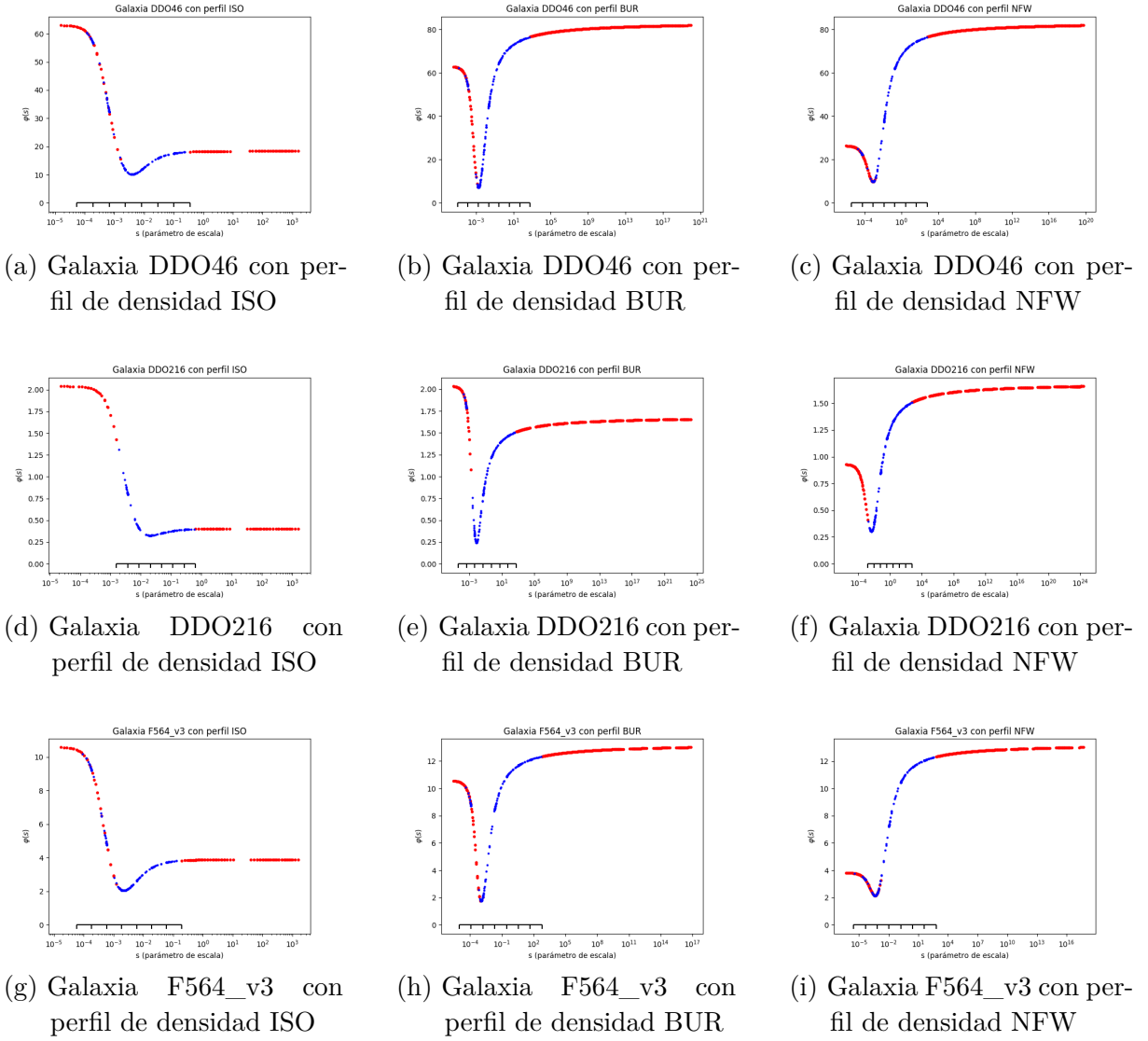


Figura 18: Exploración de φ durante el algoritmo de minimización para las galaxias DDO46, DDO216 y F564_v3, con los perfiles ISO, BUR y NFW, una vez aplicada la mejora propuesta arriba. Los puntos rojos representan la exploración hecha previamente durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda. Los puntos azules representan los puntos explorados durante el proceso de minimización de φ .

Galaxia	Perfil	Intervalo deducido en la reducción del intervalo de búsqueda	Intervalo nuevo tras aplicar la mejora
DDO46	ISO	$\approx [5'443 \times 10^{-5}, 0'569]$	$\approx [5,443 \times 10^{-5}, 0'359 \times 10^{-5}]$
	BUR	$\approx [1'022 \times 10^{-5}, 1'701 \times 10^{19}]$	$\approx [1'022 \times 10^{-5}, 6'31 \times 10^2]$
	NFW	$\approx [3,896 \times 10^{-6}, 1,924 \times 10^{19}]$	$\approx [3,896 \times 10^{-6}, 6'31 \times 10^2]$
DDO216	ISO	$\approx [1'445 \times 10^{-4}, 1'018]$	$\approx [1'585 \times 10^{-3}, 0'642]$
	BUR	$\approx [4'365 \times 10^{-5}, 4'990 \times 10^{23}]$	$\approx [4'365 \times 10^{-5}, 6'31 \times 10^2]$
	NFW	$\approx [1'222 \times 10^{-5}, 5'601 \times 10^{23}]$	$\approx [1'585 \times 10^{-3}, 6'31 \times 10^2]$
F564_v3	ISO	$\approx [5'774 \times 10^{-5}, 3'066 \times 10^{-1}]$	$\approx [5'774 \times 10^{-5}, 1'935 \times 10^{-1}]$
	BUR	$\approx [9'201 \times 10^{-6}, 2'430 \times 10^{16}]$	$\approx [9'201 \times 10^{-6}, 6'31 \times 10^2]$
	NFW	$\approx [2'9 \times 10^{-6}, 2,149 \times 10^{16}]$	$\approx [2,9 \times 10^{-6}, 6'31 \times 10^2]$

Tabla 8: Comparación del intervalo inicial que habíamos deducido en la reducción del intervalo de búsqueda con el intervalo resultante a considerar una vez aplicada la mejora propuesta arriba, para los modelos ISO, BUR y NFW.

A continuación, en la Tabla 9, podemos ver reflejado que la mejora propuesta arriba ha supuesto una pequeña reducción en los tiempos de ejecución del algoritmo de minimización de φ : el tiempo de ejecución de todo el proceso de ajuste, incluyendo el del algoritmo de reducción del intervalo de búsqueda con su respectiva mejora, era de **18.987512826919556 segundos** antes de aplicar esta última mejora, mientras que con la mejora aplicada el tiempo es de **18.187479972839355 segundos**, para la evaluación de las **23 galaxias con 3 modelos por galaxia**. Esta mejora en tiempo puede no parecer importante, pero debemos tener en cuenta que si evaluásemos un número mayor de galaxias, y si aumentásemos también el número de modelos a aplicar por galaxia, con la posibilidad de que alguno de esos modelos tenga más de dos parámetros de ajuste, entonces esta mejora supondría una mayor diferencia en los tiempos de ejecución. En cualquier caso, lo más interesante de esta mejora no es la reducción de tiempo de ejecución del algoritmo, sino la mejora de la precisión en el mínimo encontrado. Como podemos ver en la Figura 18, el intervalo de búsqueda del mínimo se ha reducido considerablemente, pero la división de dicho intervalo es la misma que tomábamos antes de la mejora (véase Figura 17) en cuanto a número de divisiones se refiere. Esto implica que ahora la búsqueda del mínimo es más exhaustiva, lo que explica que la precisión del mínimo encontrado haya mejorado. En la Tabla 10 puede observarse esta mejora.

Nota. Recordemos que estas ejecuciones se han realizado en una máquina con procesador 2,3 GHz Intel Core i5 y memoria RAM de 16 GB 2133 MHz LPDDR3.

Galaxia	Perfil	Algoritmo de minimización de φ sin mejora (seg.)	Algoritmo de minimización de φ con mejora (seg.)
DDO43	ISO	0,23424816131591797	0,216721773147583
	BUR	0,2715740203857422	0,27403903007507324
	NFW	0,2571690082550049	0,23491978645324707
DDO46	ISO	0,21255707740783691	0,2378859519958496
	BUR	0,2982349395751953	0,2942500114440918
	NFW	0,3357813358306885	0,2488689422607422
DDO126	ISO	0,26026177406311035	0,2075059413909912
	BUR	0,2614870071411133	0,2516951560974121
	NFW	0,25862908363342285	0,2500631809234619
DDO210	ISO	0,17087411880493164	0,12200117111206055
	BUR	0,2385540008544922	0,2193310260772705
	NFW	0,2523159980773926	0,18547892570495605
DDO216	ISO	0,1725471019744873	0,15831708908081055
	BUR	0,28344297409057617	0,21391081809997559
	NFW	0,29323887825012207	0,25536489486694336
haro29	ISO	0,1717839241027832	0,1620812416076660
	BUR	0,32340312004089355	0,30339717864990234
	NFW	0,32845020294189453	0,24493193626403809
UGC8508	ISO	0,1548171043395996	0,15859198570251465
	BUR	0,2496650218963623	0,2420201301574707
	NFW	0,21971702575683594	0,25722694396972656

Tabla 9: Comparación de tiempos de ejecución del algoritmo de minimización de φ sin la mejora aplicada anteriormente y con la mejora aplicada.

Galaxia	Perfil	Mínimo encontrado con el algoritmo de minimización de φ sin mejora	Mínimo encontrado con el algoritmo de minimización de φ con mejora
DDO43	ISO	0,84948653	0,84948653
	BUR	0,76780142	0,7678015
	NFW	1,22046185	1,22046182
DDO46	ISO	10,14738337	10,14738337
	BUR	7,07844743	7,07844743
	NFW	9,74726024	9,7472602
DDO126	ISO	0,40359817	0,40359817
	BUR	0,33911324	0,33911324
	NFW	0,99333085	0,99333085
DDO210	ISO	2,16398571	2,14577495
	BUR	1,81744193	1,81744193
	NFW	1,86974668	1,86974668
DDO216	ISO	0,32494097	0,32494097
	BUR	0,24542265	0,24542265
	NFW	0,30155651	0,3015565
haro29	ISO	0,48145442	0,48145442
	BUR	0,35210596	0,35209281
	NFW	0,39843606	0,39843606
UGC8508	ISO	0,18728046	0,18627488
	BUR	0,18770216	0,18665874
	NFW	3,84639092	3,82455858

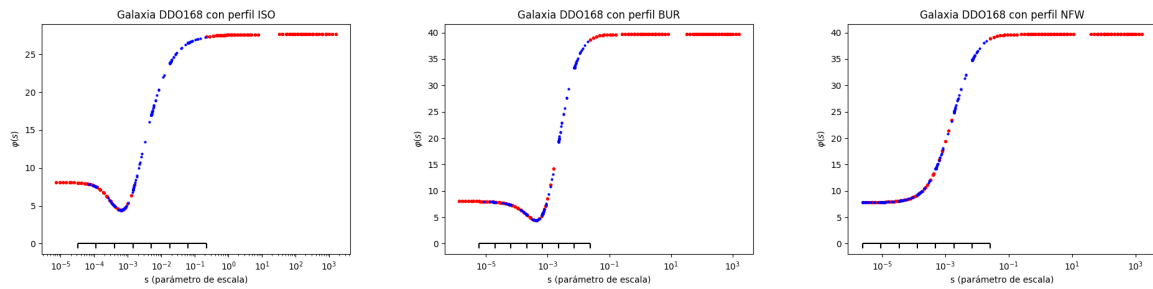
Tabla 10: Comparación de los mínimos de φ encontrados sin la mejora aplicada anteriormente y con la mejora aplicada. Excepto para el caso de la galaxia DDO43 con el perfil de halo BUR, en todos los demás casos el mínimo encontrado con la mejora aplicada es igual o mejor al encontrado antes de aplicar la mejora. El color rojo de los números indica que no se puede asegurar la existencia del límite, pues para ninguno de los puntos explorados se ha dado la condición que vimos en (38). El valor que se muestra es por tanto el valor de φ evaluado en alguno de los extremos del intervalo de búsqueda.

Parte III

CONCLUSIONES Y VÍAS FUTURAS

CONCLUSIONES

Recordamos ahora la condición que vimos en (38), que nos permitía asegurar la existencia del mínimo de la función $\varphi(s)$, y recordamos también las Figuras 7 y 8, que nos sugerían que la condición mencionada no siempre se da y que, por tanto, no siempre podremos asegurar la existencia del mínimo de $\varphi(s)$. En efecto, esto ha ocurrido en algunas galaxias. Por ejemplo, para la galaxia DDO168 hemos podido asegurar la existencia del mínimo, y lo hemos aproximado, para los perfiles ISO y BUR, mientras que para el perfil NFW no.



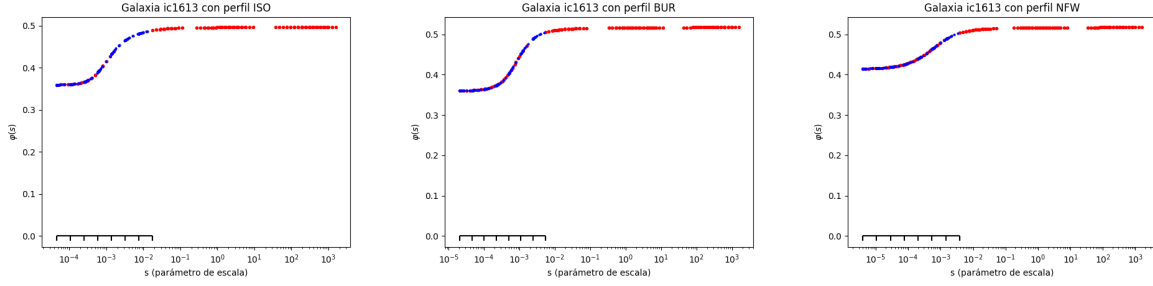
(a) Galaxia DDO168 con perfil de densidad ISO (b) Galaxia DDO168 con perfil de densidad BUR (c) Galaxia DDO168 con perfil de densidad NFW

Figura 19: Exploración de φ durante el para la galaxia DDO168, con los perfiles ISO, BUR y NFW, una vez aplicadas las mejoras propuestas a lo largo del trabajo. Los puntos rojos representan la exploración hecha durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda. Los puntos azules representan los puntos explorados durante el proceso de minimización de φ .

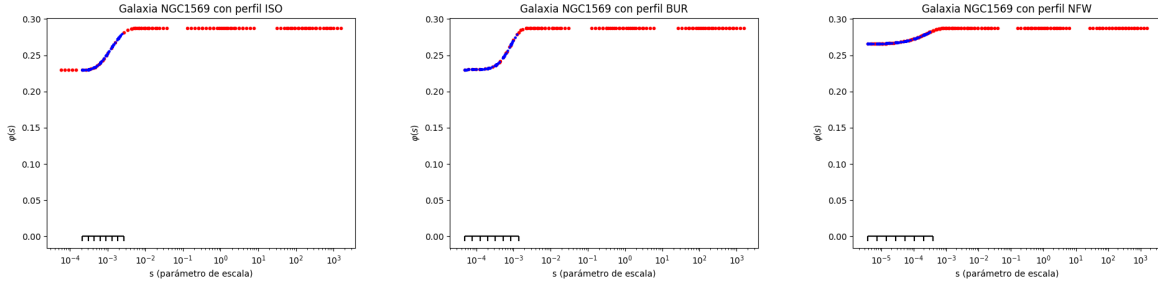
De la misma forma, para la galaxia ic10 el perfil NFW tampoco nos ha permitido asegurar la existencia del mínimo de φ . Para la galaxia UGC8508 sólo hemos podido asegurar esta existencia con el perfil BUR. En definitiva, de las 23 galaxias exploradas:

- Para 12 galaxias hemos podido asegurar la existencia del mínimo de φ con los tres perfiles; ISO, BUR y NFW.
- Para 9 galaxias hemos podido asegurar dicha existencia con al menos uno de los tres perfiles estudiados.

- Para 2 galaxias, ic1613 y NGC1569, ninguno de los tres perfiles estudiados nos ha permitido asegurar la existencia del mínimo de φ .



(a) Galaxia ic1613 con perfil de densidad ISO (b) Galaxia ic1613 con perfil de densidad BUR (c) Galaxia ic1613 con perfil de densidad NFW



(d) Galaxia NGC1569 con perfil de densidad ISO (e) Galaxia NGC1569 con perfil de densidad BUR (f) Galaxia NGC1569 con perfil de densidad NFW

Figura 20: Exploración de φ durante el para las galaxias ic1613 y NGC1569, con los perfiles ISO, BUR y NFW, una vez aplicadas las mejoras propuestas a lo largo del trabajo. Los puntos rojos representan la exploración hecha durante el proceso de reducción del intervalo de búsqueda. Los puntos azules representan los puntos explorados durante el proceso de minimización de φ .

En estos casos, los astrofísicos se limitan a decir que el ajuste no tiene sentido físico. Se puede demostrar la existencia de un mejor ajuste en el límite, pero esto ya escapa de este trabajo.

Podríamos decir que los objetivos que se plantearon en un principio han sido alcanzados, pues el espacio paramétrico de nuestro problema ha sido convenientemente reducido y el ajuste de las curvas de rotación (en definitiva, la minimización de $\varphi(s)$) se ha realizado acudiendo a distintos perfiles de materia oscura: ISO, BUR, NFW, EIN y HERN de manera teórica e ISO, BUR y NFW de manera práctica. Así, la reducción paramétrica se ha basado en la fácil resolución del problema de minimización convexo presente en el proceso de minimización anidada, mientras que la otra parte, la del problema de minimización no convexo, ha sido resuelta mediante la implementación de un algoritmo no determinístico formado fundamentalmente por dos procesos: el proceso de reducción del intervalo de búsqueda y el proceso de minimización de $\varphi(s)$ en dicho intervalo. La ejecución de estos

procesos, la recogida de los datos resultantes y la observación y el estudio de los mismos nos ha permitido plantear algunas mejoras que, a la vista de los datos resultantes de la nuevas ejecuciones, han resultado ser favorables, pues nos han permitido reducir aún más, de forma controlada, el espacio de búsqueda y nos han permitido también realizar una búsqueda más exhaustiva en las zonas cercanas al mínimo. Además de todos los datos recogidos en las tablas que se han ido mostrando a lo largo del trabajo, en el Apéndice C podemos ver dos tablas más. En ambas se escoge, para cada galaxia, el perfil de materia oscura que mejor se adapta en función de dos cosas distintas: en la Tabla 12 se selecciona el perfil que haya permitido encontrar el valor más cercano al mínimo de φ , mientras que en la Tabla 13 se selecciona el perfil que haya permitido encontrar un valor cercano al mínimo de φ en el menor tiempo posible. Ambas tablas nos muestran que, en definitiva, las mejoras propuestas anteriormente no suponen un gran cambio en cuanto al valor del mínimo de φ propuesto. En la mayoría de los casos, si comparamos los mínimos obtenidos sin las mejoras aplicadas con los mínimos obtenidos con las mejoras aplicadas, en ambas tablas se observa que los valores son muy similares, incluso idénticos. En cambio, si comparamos los tiempos de ejecución, sí se observa un cambio notable (principalmente si pensamos en la suma de los tiempos de ejecución para cada galaxia). Podríamos decir por tanto que las mejoras propuestas no nos han servido para mejorar la precisión del mínimo de φ , pero sí para reducir el tiempo que tardamos en estimarlo.

Esto último resulta especialmente interesante si se tiene en cuenta que nosotros hemos trabajado con 23 galaxias y con 3 perfiles de densidad por cada galaxia, cada uno de ellos con dos parámetros libres. Podemos ahora imaginar que si repitiésemos el proceso para un conjunto de galaxias más numeroso, y aplicando, además de estos 3 perfiles, algunos más como EIN o HERN (presentados en 4.1.4 y estudiados en 6), con tres y cinco parámetros libres, respectivamente, entonces la mejora en tiempo de ejecución sería mucho más notable.

VÍAS FUTURAS

Por lo comentado anteriormente, un buen siguiente paso sería aplicar los procesos aquí expuestos para los perfiles de densidad de materia oscura EIN y HERN y ver qué resultados se obtienen al trabajar con espacios paramétricos de dimensión superior a dos. También sería interesante comprobar si con alguno de estos dos perfiles seríamos capaces de asegurar la existencia del mínimo de φ para las galaxias ic1613 y NGC1569.

Llegados a este punto, cabe preguntarse si los resultados que nos permite obtener este proceso son útiles para resolver uno de los problemas propuestos en la Astrofísica: la clasificación de galaxias.

Si nos fijamos en los datos del Apéndice B, podemos ver que para la galaxia DDO43 se han recogido datos correspondientes a nueve partículas que giran en torno a dicha galaxia con nueve radios distintos. La observación de estas partículas para la recogida de estos datos, como podemos suponer, es costosa, por lo que podría ser buena idea aplicar el problema de *selección de características* a este caso. Las distintas características podrían ser rangos de valores del radio de las partículas, de forma que se plantearía el problema de seleccionar cuáles de esos rangos aportan más información a la hora de calcular la cantidad de materia oscura de la galaxia, y de cuáles de esos rangos se podría llegar a prescindir. De esta forma, la observación de partículas galácticas podría llegar a ser menos costosa, pues los astrofísicos tendrían una idea de a qué distancia del centro de la galaxia tendrían que buscar.

Parte IV

APÉNDICES

CÁLCULO DE $W^s(r)$ PARA CADA PERFIL DE MATERIA OSCURA

■ ISO:

$$\begin{aligned} W^s(r) &= \frac{4\pi G}{r} \int_0^r z^2 \frac{1}{1+(zs)^2} dz = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2((zs)^2+1)} \right) dz = \\ &= \frac{4\pi G}{r} \left(\frac{r}{s^2} - \frac{1}{s^2} \int_0^r \frac{1}{(zs)^2+1} dz \right), \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = sz$ nos queda

$$W^s(r) = \frac{4\pi G}{r} \left(\frac{r}{s^2} - \frac{1}{s^3} \int_0^{rs} \frac{1}{u^2+1} dz \right) = 4\pi G \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{rs^3} \arctan(rs) \right).$$

■ BUR:

$$\begin{aligned} W^s(r) &= \frac{4\pi G}{r} \int_0^r z^2 \frac{1}{(1+zs)(1+(zs)^2)} \\ &= \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{1+zs} + \frac{1-zs}{1+(zs)^2} \right) dz = \\ &= \frac{2\pi G}{r} \int_0^r \left(\frac{z^2}{1+zs} + \frac{z^2}{1+(zs)^2} - \frac{z^3 s}{1+(zs)^2} \right) dz = \\ &= \frac{2\pi G}{r} \left(\int_0^r \left(\frac{z^2}{1+zs} \right) dz + \int_0^r \left(\frac{z^2}{1+(zs)^2} \right) dz - \int_0^r \left(\frac{z^3 s}{1+(zs)^2} \right) dz \right) = \\ &= \frac{2\pi G}{r} \left(\int_0^r \left(\frac{z^2}{1+zs} \right) dz + \frac{r}{s^2} - \frac{1}{s^3} \arctan(rs) - \int_0^r \left(\frac{z^3 s}{1+(zs)^2} \right) dz \right), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el resultado visto para ISO. Ahora resolvemos:

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{z^2}{1+zs} dz &= \int_0^r \left(\frac{1}{s^2(zs+1)} + \frac{z}{s} - \frac{1}{s^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{s} \log(zs+1) \right]_0^r + \frac{1}{s} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^r - \frac{r}{s^2} \\ &= \frac{2 \log(rs+1) + (rs)^2 - 2rs}{2s^3}, \end{aligned}$$

y por último resolvemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^r \left(\frac{z^3 s}{1 + (zs)^2} \right) dz &= \frac{s}{2} \int_0^{r^2} \frac{u}{1 + us^2} du \\
 &\quad (\text{donde hemos hecho el cambio de variable } u = z^2) \\
 &= \frac{s}{2} \int_0^{r^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(1 + us^2)} \right) du \\
 &= \frac{1}{2s} \left(\left[u \right]_0^{r^2} - \int_0^{r^2} \frac{1}{1 + us^2} du \right) \\
 &= \frac{r^2}{2s} - \frac{1}{2s} \left[\frac{\log(1 + us^2)}{s^2} \right]_0^{r^2} \\
 &= \frac{r^2}{2s} - \frac{\log(1 + (rs)^2)}{2s^3}.
 \end{aligned}$$

Por tanto nos queda que

$$\begin{aligned}
 W^s(r) &= \frac{2\pi G}{r} \left(\frac{2\log(rs + 1) + \log(1 + (rs)^2) - 2\arctan(rs)}{2s^3} \right) \\
 &= \pi G \left(\frac{2\log(rs + 1) + \log(1 + (rs)^2) - 2\arctan(rs)}{rs^3} \right).
 \end{aligned}$$

DATOS DE LA GALAXIA DDO43

r_i (kpc)	$V(r_i)$ (km/s)	V_{adc} (km/s)	σ_i (km/s)	$V_{bulbo}(r_i)$ (km/s)	$V_{disco}(r_i)$ (km/s)
0.47000000	7.9899998	8.5600004	2.8900001	3.079999	7.9233832
0.93000001	18.290001	19.000000	2.3900001	5.3200002	10.877500
1.4000000	24.590000	25.629999	2.2500000	8.6199999	13.724067
1.8600000	28.820000	30.209999	2.0699999	14.120000	16.533300
2.3299999	32.959999	34.570000	2.2700000	16.370001	17.932373
2.7900000	33.830002	35.630001	2.5100000	16.719999	18.472954
3.2600000	36.070000	37.840000	2.6700001	17.110001	18.817810
3.7200000	36.490002	38.259998	2.8199999	17.610001	19.172636
4.1900001	31.090000	33.220001	2.8199999	18.420000	19.617340

Tabla 11: Caption



RESULTADOS OBTENIDOS

Galaxia	Algoritmos sin mejora			Algoritmos con mejora		
	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)
DDO43	BUR	0.76780142	0.348437071	BUR	0.76780145	0.2767870426
DDO46	BUR	7.07844743	0.45286393	BUR	7.07844743	0.35313797
DDO47	BUR	4.70178977	0.3472938538	BUR	4.70178977	0.3529610634
DDO52	BUR	0.06946357	0.4635267258	BUR	0.06946278	0.3322458267
DDO53	ISO	1.45953572	0.19329834	ISO	1.45953572	0.190107822
DDO70	BUR	2.37526422	0.262390137	BUR	2.37526422	0.261831760
DDO87	BUR	0.23682195	0.413766861	BUR	0.23682195	0.333666801
DDO101	NFW	0.18088417	0.42257285	NFW	0.18088453	0.39974618
DDO126	BUR	0.33911324	0.2686252594	BUR	0.33911324	0.265426874
DDO133	BUR	1.18841853	0.3902699947	BUR	1.18841853	0.275897026
DDO154	BUR	0.13579907	0.30900407	BUR	0.13579907	0.26047802
DDO168	BUR	4.41766509	0.27026486397	BUR	4.41766473	0.2672920227
DDO210	BUR	1.81744193	0.29865193	BUR	1.81744193	0.28342509
DDO216	BUR	0.24542265	0.484679937	BUR	0.24542265	0.3969249725
F564_v3	BUR	1.74269695	0.436730862	BUR	1.74269695	0.32645297050
haro29	BUR	0.35210596	0.4393978119	BUR	0.35209281	0.4368479252

Galaxia	Algoritmos sin mejora			Algoritmos con mejora		
	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)
haro36	BUR	0.16708064	0.242430925	BUR	0.1655375	0.283898830
ic10	ISO	0.0872183129	0.186721087	ISO	0.08721831	0.182880163
NGC2366	BUR	0.172500492	0.2849202156	BUR	0.172500492	0.267672062
NGC3738	BUR	1.585979296	0.390339136	BUR	1.5859793	0.317931175
UGC8508	BUR	0.18770216	0.343519926	BUR	0.18665874	0.400344133

Tabla 12: En esta tabla se muestra el perfil de densidad de materia oscura que ha permitido obtener el menor valor de φ para cada galaxia, y el tiempo que tarda en obtenerlo, aplicando los algoritmos explicados con y sin las mejoras propuestas. En esta tabla faltan las galaxias ic1613 y NGC1569, ya que para estas galaxias no se ha podido asegurar la existencia del mínimo de φ con ninguno de los perfiles estudiados. Por ejemplo, para la galaxia UGC8508, la existencia del mínimo de φ sólo se ha podido asegurar para el perfil BUR.

Galaxia	Algoritmos sin mejora			Algoritmos con mejora		
	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)
DDO43	ISO	0.84948653	0.27357173	ISO	0.84948653	0.251245022
DDO46	ISO	10.14738337	0.223637819	ISO	10.14738338	0.209197044
DDO47	ISO	4.73055012	0.2547950745	ISO	4.730550196	0.24987793
DDO52	ISO	0.096694202	0.241623878	ISO	0.096694199	0.22922516
DDO53	ISO	1.45953573	0.1932983398	ISO	1.45953573	0.190107822
DDO70	ISO	2.4022272	0.217460155	ISO	2.402227199	0.232990265
DDO87	ISO	0.24256875	0.2893717289	ISO	0.24256874	0.26276398
DDO101	ISO	0.18394332	0.205680847	ISO	0.18394332	0.210142851
DDO126	ISO	0.403598179	0.223315001	NFW	0.99333085	0.24088907
DDO133	ISO	1.48536827	0.232775927	ISO	1.48536827	0.25741506
DDO154	ISO	0.15761113	0.219228029	ISO	0.15761113	0.18155885
DDO168	ISO	4.42779093	0.24403191	ISO	4.42779129	0.24857688
DDO210	BUR	1.81744193	0.298651934	NFW	1.86974668	0.250895977
DDO216	ISO	0.32494097	0.20831895	ISO	0.32494097	0.168304205

Galaxia	Algoritmos sin mejora			Algoritmos con mejora		
	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)	Perfil	mín $\varphi(s)$	Tiempo (seg.)
F564_v3	ISO	2.04204515	0.29434586	ISO	2.04204515	0.22984290
haro29	ISO	0.48145442	0.2086029	ISO	0.48145447	0.1978297
haro36	BUR	0.16708064	0.24243093	BUR	0.1655375	0.28389883
ic10	ISO	0.08721831	0.186721087	ISO	0.08721831	0.182880163
NGC2366	NFW	1.05379018	0.2606868744	ISO	0.329780788	0.25704622
NGC3738	ISO	1.758230237	0.25852728	ISO	1.75822965	0.2111797
UGC8508	BUR	0.1884235	0.343519926	BUR	0.18641655	0.400344133

Tabla 13: En esta tabla se muestra el perfil de densidad de materia oscura que ha permitido obtener el menor tiempo de ejecución para cada galaxia, y el valor mínimo de φ en ese caso, aplicando los algoritmos explicados con y sin las mejoras propuestas. En esta tabla faltan las galaxias ic1613 y NGC1569, ya que para estas galaxias no se ha podido asegurar la existencia del mínimo de φ con ninguno de los perfiles estudiados. Por ejemplo, para la galaxia UGC8508, la existencia del mínimo de φ sólo se ha podido asegurar para el perfil BUR.

AGRADECIMIENTOS

A mis tutores Óscar Sánchez Romero y Pedro A. García Sánchez, por su seguimiento, apoyo y consejo en el desarrollo de este trabajo.

A Iván, Pimen y Sergio, por acompañarme en esta carrera.

A mi familia y a Jaime, por no dejar que me rinda.

BIBLIOGRAFÍA

- [BT11] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic dynamics*, volume 20. Princeton university press, 2011.
- [Bur95] Andreas Burkert. The structure of dark matter halos in dwarf galaxies. *The Astrophysical Journal Letters*, 447(1):L25, 1995.
- [com18] SciPy community. Numpy documentation, 2018.
- [DF16] Giovanni Di Fratta. The newtonian potential and the demagnetizing factors of the general ellipsoid. *Proc. R. Soc. A*, 472(2190):20160197, 2016.
- [dt18] Matplotlib development team. Matplotlib documentation, 2018.
- [GGI72] James E Gunn and J Richard Gott III. On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution. *The Astrophysical Journal*, 176:1, 1972.
- [MG10] Andrea Milani and Giovanni Gronchi. *Theory of orbit determination*. Cambridge University Press, 2010.
- [Nav96] Julio F Navarro. The structure of cold dark matter halos. In *Symposium-international astronomical union*, volume 171, pages 255–258. Cambridge University Press, 1996.
- [New18] Matthew Newby. Milkyway@home science, 2018.
- [SRGCMA18] O. Sánchez, B. Ruiz-Granados, J. Calvo, and J. Méndez-Abreu. Preprint: On galaxy components modelling: degeneracy analysis via parameter space dimension reduction. 2018.