

1

2

PROYECTO FINAL

3

INGENIERÍA INFORMÁTICA - ITBA

4

5

SIMULACIÓN Y ANIMACIÓN BIOMECÁNICA DE UN HUMANOIDE

6

7

Alumnos:

8

Enzo Altamiranda Graterol

9

ealtamir@itba.edu.ar

10

Teresa Fontanella De Santis

11

tfontane@itba.edu.ar

12

Tomás Mehdi

13

tmehd@itba.edu.ar

14

Tutor:

15

Dr. Daniel Ricardo Parisi

16

Instituto Tecnológico de Buenos Aires - ITBA

17

Departamento de Ingeniería Informática

18

Marzo 2016

Índice

19

20	Resumen	4
21	1 Introducción	4
22	2 Herramientas	5
23	2.1 Motor físico	5
24	2.1.1 Funcionamiento	5
25	2.1.2 Modelo de fricción y su verificación	5
26	2.1.2.1 Verificación del coeficiente de fricción	6
27	2.1.2.2 Verificación del coeficiente de restitución	10
28	2.1.3 Ventajas	11
29	2.1.4 Desventajas	11
30	2.2 Librería de algoritmos genéticos	12
31	2.3 Código fuente	12
32	3 Modelo utilizado	12
33	3.1 Composición física del humanoide	13
34	3.2 Articulaciones	13
35	4 Actuadores	14
36	4.1 Genérico	14
37	4.2 Fourier de orden 2	14
38	4.3 Fourier de orden 9	15
39	4.4 Doble seno	15
40	5 Condiciones iniciales y de contorno	15
41	5.1 Función partida	15
42	5.2 Fase sincronizada	16
43	6 Algoritmo genético	16
44	6.1 Individuo	16
45	6.1.1 Parámetros	16
46	6.1.2 Valores	16
47	6.1.3 Implementación de individuos	17
48	6.1.4 Constitución del cromosoma	17
49	6.2 Fitness	18
50	6.2.1 Altura	18
51	6.2.2 Velocidad	19
52	6.2.3 Dirección	19
53	6.2.4 Simetría	19
54	6.2.5 Pies abajo	20
55	6.3 Parámetros del algoritmo	20
56	6.3.1 Métodos de selección	20
57	6.3.2 Métodos de cruce	20
58	6.3.3 Mutación	20

59	6.3.4	Otros parámetros	20
60	7	Resultados obtenidos	21
61	7.1	Evolución del <i>fitness</i> según tipo de individuos	21
62	7.2	Velocidad según tipo de individuos	21
63	7.3	Altura según tipo de individuos	22
64	7.4	Comparación de tipo de individuos	23
65	7.5	Video	23
66	8	Conclusiones	23
67	Referencias		24

68

Resumen

69

70 Este proyecto tiene como objetivo crear una simulación y animación de un humano
71 virtual, con las siguientes propiedades:

- 72 – Biomecánica: que tanto su estructura (peso, altura y posición de cada una de sus
73 partes) como su interacción con el entorno, respondan a comportamientos físicos
74 reales y exactos.
- 75 – Inteligencia artificial: que aprenda a caminar por sí mismo, utilizando para ello
76 métodos de *soft computing* como algoritmos genéticos.

77

1. Introducción

78 Siempre ha sido de interés la simulación biomecánica de seres vivos, especialmente en las
79 ciencias naturales (zoológía, medicina, etc.).

80 Ahora bien, últimamente se ha incrementado el interés en otras áreas de aplicación, como los vi-
81 deojuegos (creación de personajes con reacciones más reales), y la ingeniería (verbigracia: diseño
82 de espacios cerrados, con mayores medidas de seguridad).

83 Una característica muy importante de este trabajo es que el humanoide no es fruto de una anima-
84 ción, sino un objeto compuesto de segmentos físicos, que interactúan entre sí y con el entorno,
85 por medio de las leyes físicas; agregando así realismo a la situación simulada. La otra propiedad
86 es que el bípedo aprenda por sí solo a caminar en línea recta, sin tener en su trayectoria ningún
87 obstáculo.

88 Este problema se puede abordar de diversas maneras, involucrando: redes neuronales¹, sistemas
89 de control² (*passive walkers*³)[1], algoritmos genéticos[2], entre otras. Pero varios de ellos impli-
90 can modelos teóricos complejos de humanoide (considerando músculos con distintos materiales,
91 etc.).

92 En este proyecto se buscó aplicar algoritmos genéticos, y lograr la caminata usando un modelo
93 de humanoide basado en un conjunto de segmentos (cuerpos rígidos), unidos entre sí por articu-
94 laciones, cuyo desplazamiento depende de torques aplicados a dichos cuerpos, y sus parámetros
95 se ajustan a partir de la evolución del algoritmo.

96 El presente informe, describe y analiza pormenorizadamente: en la sección 2, las herramientas
97 aplicadas; en la 3, el modelo del humanoide utilizado; en la 4 y 5, los diferentes tipos de actuado-
98 res y funciones de partida y contorno; en la 6, el algoritmo genético; y en la 7 y 8, los resultados
99 obtenidos con sus respectivas conclusiones.

¹Una red neuronal es un paradigma de aprendizaje automático. Se trata de un sistema de interconexión de neuronas que colaboran entre sí, para producir un estímulo de salida. Dada una entrada del sistema, se produce una salida, originada por varias transformaciones intermedias.

²Un sistema de control es un dispositivo (o conjunto de) que maneja, dirige o regula el comportamiento de otros dispositivos o sistemas, para minimizar los fallos y obtener los resultados deseados.

³Un *passive walker* utiliza el movimiento natural (*swinging*) de las piernas para ahorrar energía usada por motores. Para caminar, calcula la posición de ciertos puntos (las articulaciones, mayormente).

¹⁰⁰ 2. Herramientas

¹⁰¹ 2.1. Motor físico

¹⁰² Se llama motor físico o *physics engine* a un “*software* capaz de realizar simulaciones de
¹⁰³ ciertos sistemas físicos, como la dinámica del cuerpo rígido, el movimiento de un fluido y la
¹⁰⁴ elasticidad”[3].

¹⁰⁵ Actualmente, existen muchos motores físicos: ya sea de código propietario (*PhysX*, *Havok*), como
¹⁰⁶ *open-source* (*Bullet Physics*, *Box2D*, *Newton*, *OGRE*). Considerando análisis relacionados [4][5],
¹⁰⁷ y el hecho de que el espacio simulado fuese en 3D, se decidió que *Bullet Physics*[6] es el más
¹⁰⁸ idóneo. Está implementado en C++ y ha sido utilizado en varios juegos (*Grand Theft Auto IV*
¹⁰⁹ y *V*, etc); en los efectos especiales de películas (*Hancock*, *Bolt*, etc.); y proyectos científicos, como
¹¹⁰ la herramienta *open-source Tensegrity Robotics Toolkit* de la NASA⁴; entre otros.

¹¹¹ Si bien (como se verá más adelante) *Bullet* tiene problemas asociados con el coeficiente de restitu-
¹¹² ción, posee una muy buena *performance* en la detección de colisiones, la dinámica y la resolución
¹¹³ de *constraints*. Esto se debe, en parte, a diferentes algoritmos iterativos de orden lineal (donde
¹¹⁴ el más importante es *Sequential Impulse*), de *caching* y también a la utilización de un modelo
¹¹⁵ de fricción de Coulomb aproximado [7]. Además, el motor físico brinda la posibilidad de regular
¹¹⁶ la precisión requerida en estos cálculos (sin olvidar que, con iguales recursos, a mayor precisión,
¹¹⁷ mayor capacidad de cómputo requerida y, ergo, mayor tiempo). Dado que la construcción del hu-
¹¹⁸ manoide implica definir características y restricciones de movimiento de cada una de sus partes,
¹¹⁹ lo antes mencionado fue crucial para la elección de *Bullet Physics* en este proyecto.

¹²⁰ 2.1.1. Funcionamiento

¹²¹ El motor físico se encarga de la simulación de cuerpos rígidos y la interacción entre los mismos.
¹²² En particular debe: calcular el resultado de colisiones, arreglar el solapamiento de los cuerpos
¹²³ en el espacio de simulación, estimar las fuerzas producidas debido a la fricción, y mantener el
¹²⁴ cumplimiento de restricciones que puedan existir entre los cuerpos (por ejemplo, un vínculo para
¹²⁵ formar una articulación). Para lograrlo, *Bullet* modela, a partir de un conjunto de ecuaciones,
¹²⁶ las distintas restricciones que deben ser respetadas.

¹²⁷ Estos modelos reciben como dato la velocidad lineal y angular de cada objeto, y las fuerzas
¹²⁸ que actúan sobre los mismos. Dada esta información, se resuelve el sistema de ecuaciones, cuya
¹²⁹ solución representa las magnitudes de las fuerzas a accionar sobre el mismo, a fin de satisfacer
¹³⁰ todas las restricciones. Para encontrar esta solución, entran en juego los distintos métodos de
¹³¹ complejidad lineal mencionados en la subsección anterior.

¹³² Este procedimiento, se lleva a cabo en cada *timestep* de la simulación; donde un *timestep* es el
¹³³ intervalo de tiempo que transcurre entre un cálculo de magnitudes y otro. Mientras menor sea
¹³⁴ el *timestep*, el simulador será más preciso pero también consumirá más tiempo de cómputo.

¹³⁵ 2.1.2. Modelo de fricción y su verificación

¹³⁶ Hay reglas físicas relacionadas con el entorno y que son muy importantes para la caminata:
¹³⁷ el modelo de fricción, con sus respectivos coeficientes de fricción y restitución.
¹³⁸ En base a los modelos físico-matemáticos que representan a cada uno de los dos fenómenos en
¹³⁹ cuestión (y que se explicarán a continuación), y pensando en posibles futuras simulaciones de

⁴<http://bulletphysics.org/Bullet/phpBB3/viewtopic.php?f=17&t=9978>

140 varios humanoides chocando e interactuando entre sí; se llevaron a cabo dos ensayos para verificar
 141 el funcionamiento del simulador físico *Bullet*.

142 2.1.2.1. Verificación del coeficiente de fricción

143 Para determinar el modelo utilizado por *Bullet* para simular las fuerzas resultantes sobre un
 144 cuerpo por acción de la fricción, se simuló un cubo, de $m_{cube} = 1kg$ y $l_{cube} = 1m$, que tiene una
 145 velocidad inicial constante (v_i) en el eje horizontal, que gradualmente se detiene por acción de
 146 la fricción, hasta llegar al reposo (Fig. 1).

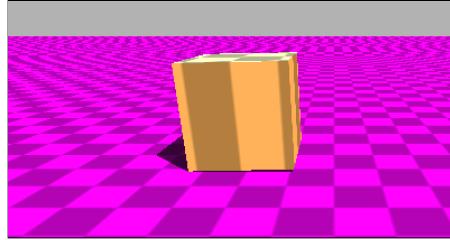


Figura 1: Visualización del sistema del cubo

147 Para esta prueba se utilizó el modelo matemático que representa la posición del cuerpo en el eje
 148 horizontal en función del tiempo t , representado por la siguiente ecuación:

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

149 En este caso, el cuerpo empieza su movimiento en el origen, por lo tanto la posición inicial (x_i)
 150 es cero. v_i es la velocidad inicial, y a , la aceleración. Debido a la fricción entre el cuerpo y el
 151 suelo, se genera una fuerza de rozamiento \mathbf{F}_{μ_d} ⁵ (ec. (2)) en la misma dirección que la velocidad
 152 del sólido y en sentido contrario.

$$-\mathbf{F}_{\mu_d} = \mu_d \mathbf{F}_N \quad (2)$$

153 donde $\mathbf{F}_N = mg$ es la fuerza normal que actúa sobre la caja de masa m por acción de la gravedad
 154 $g = 10 \frac{m}{s^2}$, y μ_d es el coeficiente de fricción dinámico.

155

156 Finalmente, se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{\mathbf{F}_{\mu_d}}{m} = \frac{-\mu_d \mathbf{F}_N}{m} = \frac{-\mu_d mg}{m} = -\mu_d g \quad (3)$$

157 Considerando las ec. (1) y (3), se puede obtener el modelo matemático que predice el movimiento
 158 de la caja:

$$x(t) = x_i + v_i t - \frac{1}{2} \mu_d g t^2 \quad (4)$$

159 El intervalo de tiempo físico (o *timestep*) utilizado es $\Delta t = \frac{1}{60}s$. El *timestep* de animación (es
 160 decir, cada cuánto tiempo se guardan en un archivo los datos logrados) es $\Delta t' = 0.1$ y el tiempo
 161 de simulación es de $s = 100\Delta t$.

162 Seguidamente, se muestran los gráficos obtenidos al correr los experimentos numéricos con los
 163 siguientes valores: $v_i = \{1, 3 \text{ y } 10\} \frac{m}{s}$ y $\mu_d = \{0.25, 0.50 \text{ y } 0.75\}$. Se compara la distancia en el
 164 eje Z de la caja en Bullet con su distancia en el mismo eje según la ec. (4).

⁵En las ecuaciones, los vectores se escriben en negrita.



Figura 2: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 10 \frac{m}{s}$ y:
 (a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$



Figura 3: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 3 \frac{m}{s}$ y:
 (a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$

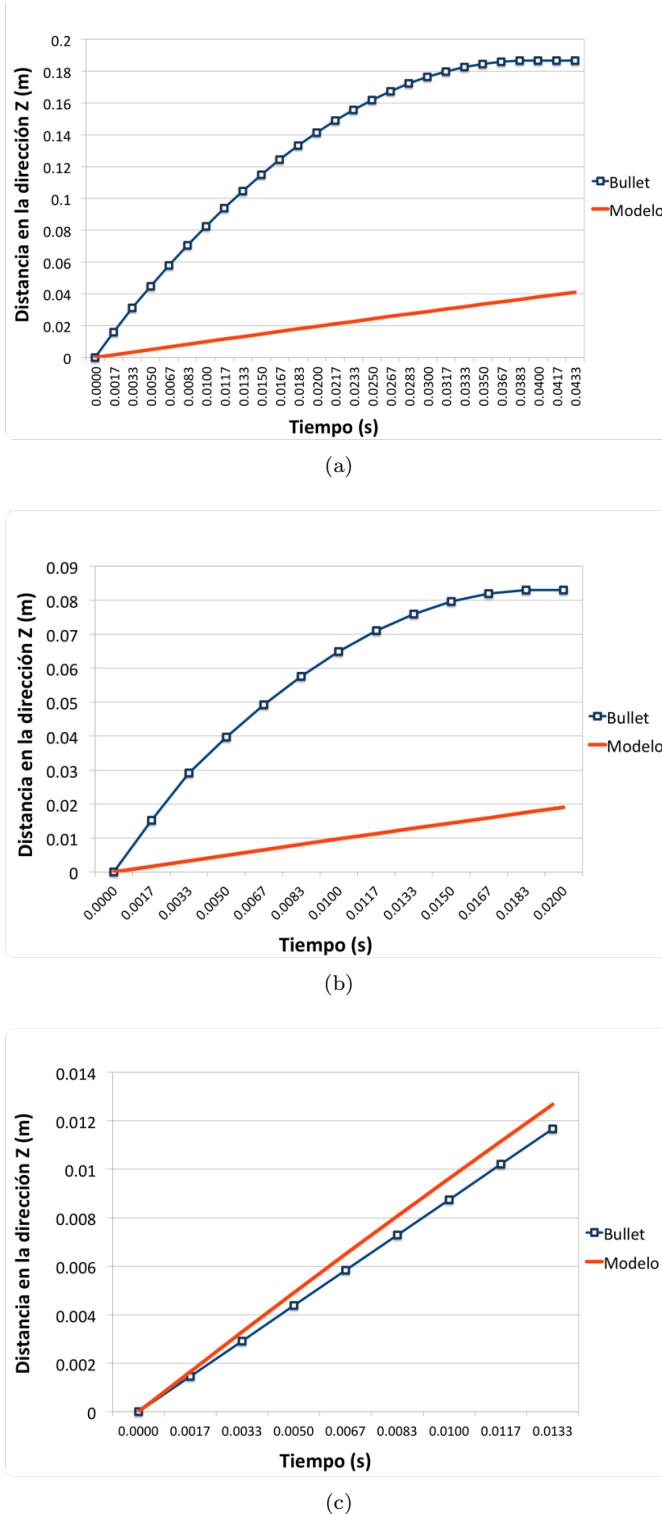


Figura 4: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 1 \frac{m}{s}$ y:

(a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$

Las Fig. 2 y 3 demuestran que los resultados de las pruebas fueron favorables. Los valores obtenidos a partir de la simulación se corresponden (en mayor o menor medida) con los alcanzados a partir del modelo matemático. Esto es un indicador de que *Bullet* debe estar usando dichos modelos para ejecutar las simulaciones. Vale observar que, cuanto mayor es la velocidad inicial

169 (v_i), mayor es la similitud entre los dos casos.

170 No obstante, los gráficos que corresponden a la Fig. 4, presentan una discrepancia mayor entre
171 la simulación y el modelo. Este hecho puede deberse al mecanismo utilizado por *Bullet* para
172 resolver la fricción de un cuerpo a velocidades muy bajas.

173 **2.1.2.2. Verificación del coeficiente de restitución**

174 El segundo ensayo simula una esfera a una altura determinada sobre el suelo, que tiene una
175 velocidad v_i en el eje perpendicular al piso y que eventualmente colisiona contra el mismo. Se
176 desea comprobar que la colisión entre el cuerpo y el suelo respete que la velocidad final v_f de
177 la esfera después del choque sea proporcional a su coeficiente de restitución e dado por la ecuación:

178

$$e = \frac{v_f}{v_i} \quad (5)$$

179

180 Para efectuar la colisión con el suelo, se empleó una esfera sólida ubicada a 4 metros del suelo,
181 cuya masa y radio son $m_{sphere} = 1 \text{ kg}$ y $r_{sphere} = 1 \text{ m}$, respectivamente (ver Fig. 5). A la esfera
182 se le asigna, además, un coeficiente de restitución determinado.

183 Se eligió un ambiente sin gravedad ($g = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). De esta forma, se podrá tener en cuenta sólo la
184 velocidad inicial (v_i) y la velocidad final (v_f) para el cálculo del coeficiente de restitución (e)
185 (ver ec. (5)).

186 El intervalo de tiempo físico (o *timestep*) utilizado es $\Delta t = 0.001 \text{ s}$. El *timestep* de animación (es
187 decir, cada cuánto tiempo se guardan en un archivo los datos logrados) es $\Delta t' = 0.1$ y el tiempo
188 de simulación es de $s = 100\Delta t$. El coeficiente de fricción es $\mu = 0.75$.

189

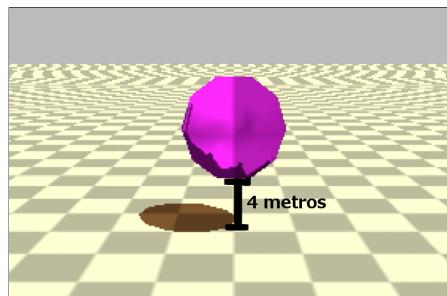


Figura 5: Visualización del sistema de la esfera

190 El ensayo tiene como parámetros de entrada: v_i (velocidad inicial) y e_{sim} (coeficiente de restitu-
191 ción esperado). Por otro lado, se obtiene v_f (velocidad de la esfera al finalizar la simulación); y
192 luego se calculan e_{medida} (coeficiente de restitución obtenido a partir de la ec. (5)) y ϵ_{rel} , que es
193 el error relativo entre los coeficientes e_{sim} y e_{medida} , calculado de la siguiente manera:

194

$$\epsilon_{rel} = \frac{e_{sim} - e_{medida}}{e_{sim}} \quad (6)$$

195 En la Tabla 1 se puede observar lo arrojado por los experimentos numéricos que se efectuaron;
196 usando: $v_i = \{-0.5, -3.5, -4, -5\} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $e_{sim} = \{0.2, 0.5 \text{ y } 0.8\}$.

v_i	e_{sim}	v_f	e_{medida}	ϵ_{rel}
$-0.5 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000249 \frac{m}{s}$	0.000498	0.997
	0.5	$0.000219 \frac{m}{s}$	0.000438	0.999
	0.8	$0.001037 \frac{m}{s}$	0.002074	0.997
$-3.5 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000057 \frac{m}{s}$	0	1
	0.5	$0.000018 \frac{m}{s}$	0	1
	0.8	$0.3 \frac{m}{s}$	0.0857	0.893
$-4 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000473 \frac{m}{s}$	0.00012	1
	0.5	$0.000424 \frac{m}{s}$	0.00011	1
	0.8	$1.23 \frac{m}{s}$	0.3	0.625
$-5 \frac{m}{s}$	0.2	$1 \frac{m}{s}$	0.2	0
	0.5	$2.5 \frac{m}{s}$	0.5	0
	0.8	$4 \frac{m}{s}$	0.8	0
$-10 \frac{m}{s}$	0.2	$2 \frac{m}{s}$	0.2	0
	0.5	$5 \frac{m}{s}$	0.5	0
	0.8	$8 \frac{m}{s}$	0.8	0

Tabla 1: Coeficientes de restitución obtenidos (e_{medida}) de simular el sistema descripto en Fig. 5

197 Los resultados exponen una limitación del motor físico: no representa correctamente las colisiones
 198 elásticas entre esferas y cuerpos rígidos, que ocurren a velocidades bajas. Esto queda en evidencia
 199 en la Tabla 1. En cada una de ellas el error fue de casi 1. La razón por la que ocurre este hecho
 200 se debe a que *Bullet* utiliza un algoritmo de colisión que frena la velocidad de un objeto que está
 201 a punto de colisionar. Haciendo esto puede evitar que los sólidos se traspasen y de esta forma se
 202 pueden realizar cálculos de fuerza más precisos.

203 En el caso de los ensayos, las esferas poseen una velocidad muy baja, cuando están a punto de
 204 colisionar *Bullet* reduce aún más esta velocidad y eventualmente quedan con una velocidad tan
 205 baja que al chocar contra el suelo se aplica el efecto restitutivo a esta velocidad casi nula y se
 206 resuelve que la esfera debe quedar en reposo, cuando en realidad debería poseer una velocidad
 207 baja, pero no despreciable.

208 2.1.3. Ventajas

209 Las ventajas del motor físico son:

- 210 – Código abierto: mayor conocimiento sobre las fórmulas y métodos implementados en el motor.
 211 – Soporte de la comunidad científica.
 212 – Licencia libre.

213 2.1.4. Desventajas

214 Como toda herramienta, *Bullet* tiene aspectos negativos, entre los que se encuentran:

- 215 – Documentación poco clara y desordenada.
 216 – Debido a que la física se aproxima usando métodos numéricos que contienen error, las simu-
 217 laciones son no determinísticas.

- 218 – Utilizar una librería gráfica (como *OpenGL*) acoplada a una simulación de *Bullet* puede
219 producir resultados distintos, que si se usa un programa de visualización externo (como
220 OVITO).

221 **2.2. Librería de algoritmos genéticos**

222 Se utilizó la conocida librería de algoritmos genéticos para C++ GaLib, desarrollada por
223 Matthew Wall del MIT [8].

224 Ofrece funcionalidades como: programación paralela, diversos métodos de selección (*elite*, *rou-*
225 *lette*), estrategias de reemplazo (de padres, aleatorio, del peor), entre otras.

226 **2.3. Código fuente**

227 Al estar *Bullet* implementado en C++, el código fuente también está desarrollado en ese
228 lenguaje. En *Bullet*, se define un *World* (o mundo físico) en donde se puede insertar, entre otras
229 cosas, cuerpos rígidos. En este caso en particular, el mundo consta de un plano (el suelo) y el
230 humanoide encima (compuesto por cuerpos rígidos y otros elementos físicos).

231 El *software* creado incluye: creación del humanoide, siendo éste capaz de desplazarse por medio
232 de actuadores (que se verán en la Sección 4); el desarrollo del algoritmo genético (definición
233 de los individuos, función de *fitness*, métodos de selección, etc.); visualización gráfica del mejor
234 humanoide logrado por el algoritmo genético; y la posibilidad de realizar gráficos referidos a la
235 evolución del algoritmo genético (*fitness* por cada generación, etc.).

236 Se acompañan a esta presentación: el código fuente y el manual de instalación y uso.

237 **3. Modelo utilizado**

238 Dentro de los diversos modelos existentes ([1][2]), en este proyecto se procuró utilizar uno que
239 fuera sencillo pero representativo a la vez.

240 Se modela al cuerpo humano, con el motor *Bullet Physics*, como un conjunto de segmentos unidos
241 entre sí por articulaciones (Fig. 6). A cada uno de ellos se les aplica un torque en el centro de
242 masa de cada segmento (denominado actuador). Que la caminata se produzca o no, depende
243 del tipo de actuador empleado (la función utilizada para el torque), y de sus parámetros. El
244 objetivo es encontrar dichos parámetros. Para eso se usan los algoritmos genéticos, un método
245 de inteligencia artificial. De este modo se obtiene, de forma análoga a la selección natural, los
246 individuos que mejor se adapten a la caminata. Tanto los actuadores como el algoritmo genético
247 se explicarán más adelante.

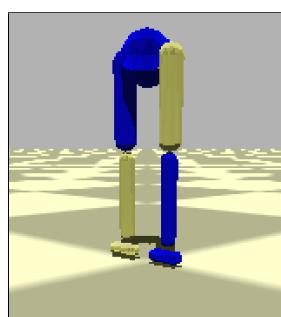


Figura 6: Humanoide diseñado

248 3.1. Composición física del humanoide

249 Como ya se expresó, el humanoide fue modelado en *Bullet* como un conjunto de segmentos
 250 (cuerpos rígidos), unidos entre sí por articulaciones.

251 Se dividió al cuerpo humano en: cabeza, tronco, miembro superior (brazo, antebrazo y mano),
 252 pelvis y miembro inferior (muslo, pierna y pie).

253 A los fines de este proyecto, sólo se consideraron pelvis y miembro inferior (ver Fig. 7(a)).

254 La Tabla 2 presenta la composición de cada uno de los segmentos del humano virtual (de acuerdo
 255 a la biomecánica [9]).

256

Parte	Cantidad	Forma	Largo (en m)	Peso (en kg)	Uniones
Pelvis	1	esférico	0.08655	9.9718	Cadera
Miembro inferior	Muslo	esfero-cilindro	0.4015	10.3368	Cadera y Rodilla
	Pierna	esfero-cilindro	0.4015	3.1609	Rodilla y Tobillo
	Pie	esfero-cilindro	-	1.0001	Tobillo

Tabla 2: Composición de cada segmento del humanoide

257 3.2. Articulaciones

258 Para unir los distintos segmentos entre sí, se utilizaron articulaciones bisagra con 1 grado de
 259 libertad, en el eje X, para que los segmentos puedan moverse en dos ejes: el Z, donde ocurre la
 260 caminata, y el Y, perpendicular al piso (ver Fig. 7(b)).

261 A su vez, para cada caso en particular, se definieron cotas para los ángulos que pueden existir entre
 262 los segmentos. Esto es muy importante, no sólo porque se adecúa a datos biológicos, sino porque,
 263 de otro modo la caminata no podría lograrse: si los ángulos son demasiado altos, la caminata se
 264 produce girando las piernas por encima de la pelvis; si por el contrario, son demasiado bajos, las
 265 piernas van a estar muy rígidas, originando pocos pasos y muy cortos.

266 Asimismo, la pelvis no puede rotar (se le impide hacerlo); y se restringe la amplitud con la
 267 que puede moverse la cadera (de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$). Esto se realiza porque, en caso contrario, el bípedo
 268 necesitaría un sistema de control para mantener el equilibrio, y eso excede el alcance de este
 269 trabajo.

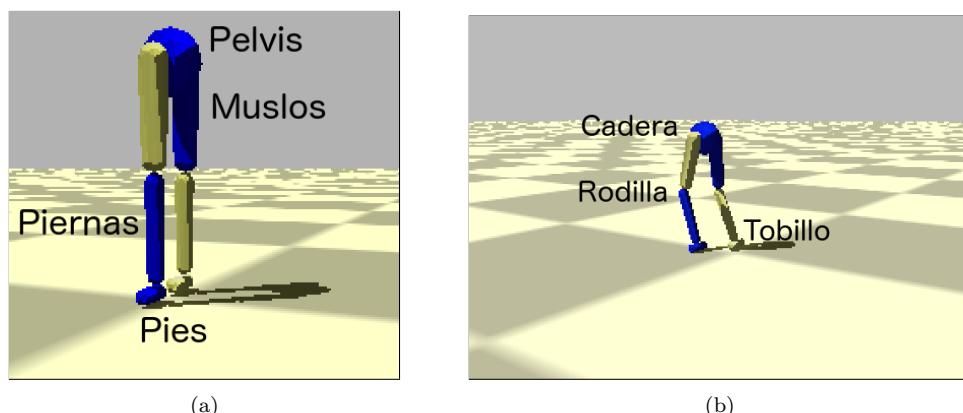


Figura 7: Humanoide diseñado: (a) segmentos, y (b) articulaciones

270 4. Actuadores

271 A cada uno de los segmentos correspondientes al muslo y la pierna del bípedo, se le aplica
 272 un torque (o actuador) en el eje X (perpendicular a la trayectoria), como se ve en Fig 8. Así,
 273 pueden moverse para arriba o para abajo (con respecto a la articulación a la que pertenecen).
 274 A fin de simplificar el modelo, el humanoide tiene el mismo tipo de actuador utilizado en todos
 275 los segmentos.

276 Es necesario aclarar que la caminata producida por el humanoide es plana (en 2D y no en 3D,
 277 como debería ser en una caminata real). Esto se debe a que la trayectoria pensada para el bípedo
 278 es una línea recta, y logrando que los segmentos se muevan en un solo eje es suficiente para
 279 cumplir con dicha trayectoria. También contribuye el hecho de que el torque se aplique en una
 280 sola dimensión. Por otra parte, los actuadores definidos a continuación son periódicos, y por eso
 281 no se pueden aplicar en el eje Z de los segmentos (se necesitarían actuadores reactivos, para
 282 poder detectar cuando el humanoide se está cayendo, etc.).

283 Para indicar el módulo de dicho torque, se diseñaron diferentes funciones (todas ellas periódicas),
 284 mencionadas en las subsecciones que siguen.

285

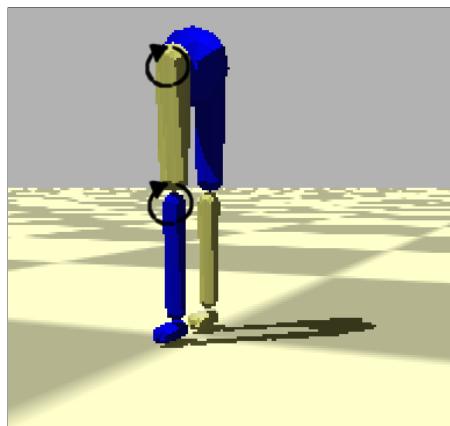


Figura 8: Aplicación de los actuadores en los segmentos del bípedo

286 4.1. Genérico

287 Es el actuador más sencillo, tanto matemática como computacionalmente.

$$f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi) + C \quad (7)$$

288 donde $f(t)$ es la función del actuador evaluada en el instante de tiempo t , A_1 y A_2 son amplitudes,
 289 ω_1 y ω_2 son frecuencias (en $\frac{1}{s}$), ϕ es la fase en radianes, y C es un término independiente.

290 La fase ϕ es la misma en el seno y en el coseno, para evitar que se formen otro tipo de funciones
 291 no cíclicas.

292 4.2. Fourier de orden 2

293 Este actuador utiliza una serie de Fourier de dos términos.

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) + B_1 \cos(\omega t + \phi) + A_2 \sin(2\omega t + \phi) + B_2 \cos(2\omega t + \phi) + C \quad (8)$$

294 donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son amplitudes y ω es frecuencia (en $\frac{1}{s}$).

295 4.3. Fourier de orden 9

296 Es una extensión del actuador anterior, pero con 9 términos. Por ser de mayor grado, brinda
 297 una mayor precisión. Sin embargo, es más difícil de manejar computacionalmente; y, además,
 298 que sea más preciso no garantiza que con él se pueda lograr una buena caminata.

$$299 \quad f(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) + B_1 \cos(\omega t + \phi) + A_2 \sin(2\omega t + \phi) + B_2 \cos(2\omega t + \phi) \\ + A_3 \sin(3\omega t + \phi) + B_3 \cos(3\omega t + \phi) + A_4 \sin(4\omega t + \phi) + B_4 \cos(4\omega t + \phi) \\ + A_5 \sin(5\omega t + \phi) + B_5 \cos(5\omega t + \phi) + A_6 \sin(6\omega t + \phi) + B_6 \cos(6\omega t + \phi) \quad (9) \\ + A_7 \sin(7\omega t + \phi) + B_7 \cos(7\omega t + \phi) + A_8 \sin(8\omega t + \phi) + B_8 \cos(8\omega t + \phi) \\ + A_9 \sin(9\omega t + \phi) + B_9 \cos(9\omega t + \phi) + C$$

300 donde A_i y B_i con $1 \leq i \leq 9$ son amplitudes.

301 4.4. Doble coseno

302 Basada en [10], esta función periódica utiliza medio ciclo de una función sinusoidal, y medio
 303 ciclo de otra (ambas pueden tener frecuencias distintas). Esto podría tener sentido porque en una
 304 caminata, un miembro inferior primero avanza hacia adelante y luego se extiende hacia atrás, y
 305 es razonable que esos dos movimientos se produzcan a frecuencias distintas.

306 La idea es lograr una función periódica a partir de una que no lo es (ya que t es lineal). Para
 307 eso, se utiliza $\psi(t)$ (ec. (10)) que aplica una transformación a los números reales, para que se
 308 encuentren dentro del rango del ciclo completo (con las dos frecuencias). ω es la frecuencia de
 309 $f(t)$ (ec. (12)), que utiliza medio ciclo con frecuencia ω_1 y medio ciclo con frecuencia ω_2 .

$$310 \quad \psi(t) = t + \phi - \left\lfloor \frac{t + \phi}{\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2} \right\rfloor (\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2) \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \left[0, \frac{2\pi}{\omega} \right] \quad (10)$$

$$311 \quad \omega = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (11)$$

$$312 \quad 313 \quad f(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 \psi(t)) + C & \text{si } \omega_1 \psi(t) < \pi \\ A \cos(\omega_2(\psi(t) - (\pi/\omega_1) + (\pi/\omega_2))) + C & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

314 5. Condiciones iniciales y de contorno

315 Como las funciones periódicas señaladas en los actuadores, no fueron suficientes para lograr
 316 la caminata, se le adosaron las funciones que se detallan seguidamente.

317 5.1. Función partida

318 El andar del humanoide es cíclico. Sin embargo, por la posición inicial del individuo, se requiere
 319 para el tiempo del primer paso, una función distinta a la del resto de la caminata. El tipo de
 320 función puede ser cualquiera de los actuadores vistos anteriormente (pero no necesariamente con
 321 los mismos valores de amplitud, frecuencia y fase asignados a las piernas). Empero, se utilizó la
 322 función vista en el actuador genérico.

³²³ Por otra parte, para simplificar el modelo, se decidió que el tiempo considerado para el primer
³²⁴ paso sea fijo, y de 0.7 segundos. Dicho valor fue extraído de forma experimental.

³²⁵ 5.2. Fase sincronizada

³²⁶ En una caminata, las piernas deben guardar simetría: mientras una va hacia adelante, la otra
³²⁷ va hacia atrás (y viceversa). Esto, de acuerdo con los actuadores definidos en la sección anterior,
³²⁸ implica que las funciones de movimiento de cada pierna estén desfasadas en medio ciclo ($\frac{\pi}{2}$):

$$f_i(t) = f(t) \quad (13)$$

$$f_d(t) = f(t + \frac{\pi}{2}) \quad (14)$$

³³⁰ siendo $f(t)$ la función de movimiento (o actuador) en el momento t , y f_i y f_d las funciones de la
³³¹ pierna izquierda y derecha, respectivamente.

³³² 6. Algoritmo genético

³³³ 6.1. Individuo

³³⁴ La información genética de cada individuo, está compuesta por dos partes: función partida
³³⁵ (optativa) y los parámetros asociados a los actuadores (obligatorios).

³³⁶ 6.1.1. Parámetros

³³⁷ Tanto la función partida como los actuadores tienen como parámetros: amplitud (A o B);
³³⁸ fase (ϕ), que indica dónde comienza el paso y se mide en radianes; frecuencia (ω); y término
³³⁹ independiente (C).

³⁴⁰ 6.1.2. Valores

³⁴¹ Cada uno de los segmentos tiene propiedades físicas distintas (masa, largo, etc.), razón por
³⁴² la cual no necesariamente sus genes deban tener los mismos rangos de valores, tal como puede
³⁴³ apreciarse en las Tablas 3 y 4.

³⁴⁴

Segmento	Tipo de gen	Mínimo	Máximo
Muslo	Amplitud	-30	30
Pierna	Amplitud	-60	60
Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10

Tabla 3: Rango de valores que puede tomar cada gen, para la función partida

Actuador	Segmento	Tipo de gen	Mínimo	Máximo
Genérico	Muslo	Amplitud	-30	30
	Pierna	Amplitud	-60	60
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Fourier de orden 2	Muslo	Amplitud	-60	60
	Pierna	Amplitud	-30	30
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Fourier de orden 9	Muslo y Pierna	Amplitud	-60	60
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.1	2
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Doble Coseno	Muslo	Amplitud	-50	50
	Pierna	Amplitud	-30	30
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	5
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-30	30

Tabla 4: Rango de valores que puede tomar cada gen, según el tipo de actuador

345 6.1.3. Implementación de individuos

346 Para favorecer el análisis de las distintas características arriba indicadas, se implementaron
 347 varios individuos, cada uno de ellos con propiedades distintas (Tabla 5).

Individuos	Actuador	Función Partida	Fase Sincronizada
Tipo 1	Genérico	No	Sí
Tipo 2	Genérico	Sí	Sí
Tipo 3	Fourier de orden 2	Sí	Sí
Tipo 4	Fourier de orden 9	Sí	Sí
Tipo 5	Doble coseno	Sí	Sí

Tabla 5: Tipo de individuos

348 6.1.4. Constitución del cromosoma

349 Los distintos actuadores y la función partida tienen los parámetros presentados en la sección
 350 6.1.1. Sus respectivas cantidades pueden verse en la Tabla 6.

351 En la Tabla 7 se muestra la composición del cromosoma de cada individuo, que depende de
 352 los actuadores y la función partida usados. En ella se puede observar cómo según el tipo de
 353 individuo, varía la cantidad de genes, es decir, la longitud del cromosoma. Vale aclarar que la
 354 función partida se especifica para cada segmento (las dos piernas y los dos muslos); en cambio,
 355 para los actuadores, sólo se definen dos (uno para las piernas y otro para los muslos).

Actuador	Parámetros			
	Amplitud	Frecuencia	Fase	Término independiente
Genérico	2	2	1	1
Fourier de orden 2	4	1	1	1
Fourier de orden 9	18	1	1	1
Doble coseno	1	2	1	1
Función partida	2	2	1	1

Tabla 6: Cantidad de parámetros según tipo de actuador y función partida

Parámetros	Individuos				
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5
Amplitud	12	12	16	44	8
Frecuencia	2	6	6	6	8
Fase	2	6	6	6	6
Término independiente	2	6	6	6	6
Totales	18	30	34	62	28

Tabla 7: Cantidad de parámetros según tipo de individuos

356 6.2. Fitness

357 El papel de la función de *fitness* F en un algoritmo genético es evaluar qué tan bueno es un
 358 individuo. En este caso, está definida como un producto de cinco módulos o propiedades: altura
 359 (H), velocidad (V), dirección (D), simetría (S) y pies abajo (PA):

$$F = H * V * D * S * PA \quad (15)$$

360 Los cinco tienen la misma importancia y por eso, como se verá a continuación, están definidos de
 361 forma similar (con una función exponencial y pueden valer entre 0 y 1). Con todo esto, dado que
 362 el *fitness* está pensado como un producto, basta con que uno de los módulos sea muy chico para
 363 “anular” al individuo (es decir, otorgarle un valor que tiende a cero). Sin embargo, los diferentes
 364 módulos no son completamente independientes entre sí: por ejemplo, si la altura es demasiado
 365 baja, posiblemente la velocidad y la dirección no sean adecuadas.

366

367 6.2.1. Altura

368 Es un factor relacionado con la altura del individuo en toda la simulación, y se expresa:

$$H = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(h_{t_n} - h_{t_0})^2}}{N} \quad (16)$$

370

371 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, h_{t_n} es la altura de la pelvis en el instante de
 372 tiempo t_n , N la cantidad pasos de simulación y C una constante $C = 5$.

373 Se calcula a partir de la diferencia entre la altura en cada instante de la simulación, con su altura
 374 inicial (la altura está definida como la posición de la pelvis en el eje Z). Cuanto mayor sea esa
 375 diferencia, más rápido el individuo cae, y por eso este módulo tiende a cero. Por el contrario,

376 valdrá uno si la diferencia es ínfima (lo que significa que el humanoide mantiene su misma altura
 377 durante la caminata).

378

379 6.2.2. Velocidad

380 Indica qué tan cercana es la velocidad del individuo con respecto a una velocidad objetivo
 381 (en este caso, es de 1.2 m/h), y se expresa de la siguiente forma:

382

$$V = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(v_{t_n} - V_O)^2}}{N} \quad (17)$$

383

384 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, v_{t_n} es la velocidad de la pelvis en el instante de
 385 tiempo t_n , y V_O la velocidad objetivo en el eje Z (el eje de la caminata).

386 Sigue una lógica y cálculo similares al factor de altura: a mayor discrepancia de la velocidad
 387 real del humanoide con V_O , menor (y más cercano a cero) es el valor arrojado por el módulo de
 388 velocidad.

389 6.2.3. Dirección

390 Señala qué tan similares son la dirección objetivo (un vector unitario, que en este caso se
 391 encuentra en el eje Z) y la dirección con la que camine el humanoide. Se calcula como sigue:

392

$$D = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(\mathbf{v}_{t_n} \cdot \mathbf{V}_O - 1)^2}}{N} \quad (18)$$

393

394 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, \mathbf{v}_{t_n} el versor de la dirección del humanoide en
 395 el momento t_n y \mathbf{V}_O el versor de la dirección objetivo.

396 El producto escalar entre los versores responde a la Similitud Coseno: $\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}$, donde \mathbf{A} y
 397 \mathbf{B} son vectores que no se encuentran normalizados, y θ es el ángulo formado entre ellos. Así, si
 398 $\cos \theta = 1$, significa que los vectores están paralelos entre sí (que es el efecto buscado en el caso
 399 de la dirección).

400 Al producto escalar se le resta 1, para que el módulo sea consistente con la función exponencial
 401 utilizada y que valga 1 cuando $\theta = 0$, y 0 cuando $\theta = \pi$. Cabe aclarar que se trata al ángulo en
 402 forma simétrica, ya que, por ejemplo $\cos(-\pi/6) = \cos(\pi/6)$.

403

404 6.2.4. Simetría

405 Este indicador marca qué tan equidistantes se encuentran los pies de la cadera, a lo largo de la
 406 caminata. Aplicando solamente los módulos antes mencionados, provocaba resultados en donde
 407 una pierna quedaba más distante de la pelvis que la otra, lo que producía que el humanoide se
 408 terminara arrastrando, posiblemente afectando a la velocidad.

409 Para mayor simplicidad, la simetría S se calculó a partir de los pies (y no de las piernas). Se
 410 tomaron en cuenta sólo los ejes X y Z, porque son los relacionados a la velocidad y a la dirección,
 411 respectivamente.

$$S = \frac{\sum_{n=0}^T \frac{1}{2}[e^{-C(lf_z + rf_z)^2} + e^{-C(lf_x + rf_x)^2}]}{N} \quad (19)$$

412

413 donde lf_x y lf_z es la distancia desde el pie izquierdo hasta la pelvis en los ejes X y Z, respecti-
414 vamente; y en donde rf_x y rf_z es lo mismo, pero para el pie derecho.

415

416 6.2.5. Pies abajo

417 Con los módulos señalados anteriormente, se busca que el humanoide camine con una velo-
418 cidad y dirección determinadas, que no se caiga y que mantenga simetría mientras ejecuta sus
419 movimientos. Pero, todo esto daría, en el mejor de los casos, una caminata estilo “estrella”.
420 Sin embargo, una característica fundamental en una caminata normal es que las piernas (ergo,
421 los pies también) no sobrepasen la cadera. Si bien ésta es una propiedad negativa (expresa lo que
422 no debe tener una caminata), y se puede correr el riesgo de restringir demasiado, su ausencia da
423 resultados peores.

$$PA = \frac{\sum_{n=0}^T \frac{1}{2}(\alpha[e^{-C(lf^2)} + e^{-C(rf^2)}])}{N} \quad (20)$$

424

425 donde lf y rf son las diferencias entre la posición inicial de los pies y la altura en el momento
426 t_n de los pies izquierdo y derecho, respectivamente, y $\alpha = \max(\min(lf, rf) - hip, 0), 1$, siendo
427 lf , rf y hip las alturas del pie izquierdo, pie derecho, y la cadera (es decir, vale 0 si la altura del
428 pie izquierdo o derecho supera a la de la cadera, y 1 en otro caso).

429

430 6.3. Parámetros del algoritmo

431 6.3.1. Métodos de selección

432 De la vasta cantidad de métodos de selección que existen, se utilizaron: ***Elite*** (en donde
433 se elige el individuo con mayor aptitud de la población); y ***Roulette*** (método estocástico, que
434 selecciona un individuo de la población total al azar, con una probabilidad proporcional a su
435 *fitness*).

436 6.3.2. Métodos de crusa

437 El método de crusa (*o crossover*) utilizado es el siguiente: De dos individuos (los padres), se
438 originan dos nuevos individuos (los hijos). Se toma cada uno de los genes de los padres y se elige,
439 con una probabilidad uniforme, uno de ellos para un hijo y el otro para el otro hijo.
440 La probabilidad de que este proceso ocurra es de 0.9.

441 6.3.3. Mutación

442 En el caso de la mutación, para cada gen del individuo, se decide con cierta probabilidad si
443 se lo muta o no. En caso afirmativo, se cambia ese gen por un valor aleatorio (que esté dentro
444 de su rango definido).

445 Dicha probabilidad de mutación es de 0.3.

446 6.3.4. Otros parámetros

447 En el algoritmo genético se utilizan 1000 generaciones, de 50 individuos cada una. Además,
448 la simulación de cada individuo (necesaria para calcular el *fitness*) es de 4 segundos.

449 7. Resultados obtenidos

450 Considerando los individuos definidos en el punto 6.1.3, se realizaron pruebas, corriendo
 451 el algoritmo genético, y evaluando el resultado obtenido posteriormente (ya sea numérica o
 452 gráficamente). A continuación se analizan distintos aspectos relevantes.

453 7.1. Evolución del *fitness* según tipo de individuos

454 Los individuos que usan actuadores de Fourier son los que producen *fitness* más bajos; el de
 455 orden 2 (individuo de tipo 3) se estanca a las pocas generaciones (al igual que el de tipo 1). El
 456 *fitness* del individuo con actuadores Fourier de orden 9 se “ameseta” progresivamente (después
 457 de 500 generaciones).

458 El individuo de tipo 1 es el individuo con *fitness* más alto, pero que se obtuvo a las pocas
 459 generaciones (es decir que es un máximo local). El individuo de tipo 2 (con actuadores genéricos
 460 y función partida) va aumentando su *fitness* progresivamente, aunque sin superar al de tipo 1.

461 Por otra parte, el individuo de tipo 5 (con actuadores doble coseno), va mejorando su *fitness*
 462 paulatinamente, lo que impide estancarse en un máximo local. Además, tiene el segundo mejor
 463 *fitness*.

464 Puede notarse que los rangos manejados en la Fig. 9 casi alcanzan el 0.7 (y no a 1, su cota
 465 superior). Esto se debe a que la función de *fitness* está definida como un producto de ciertos
 466 módulos: suponiendo que cada uno de ellos estuviera al 92 %, se tendría $0.92^5 = 0.659$.

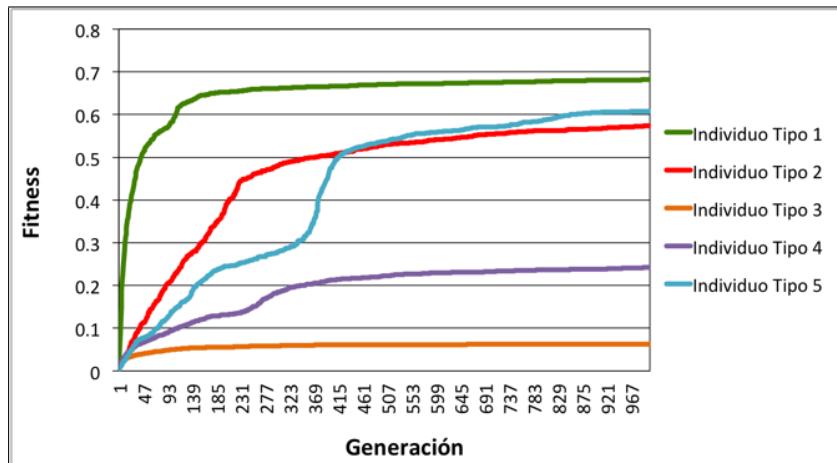


Figura 9: Evolución del *fitness* según tipo de individuos

467 7.2. Velocidad según tipo de individuos

468 A continuación, se muestra, para cada individuo, su velocidad instantánea a lo largo del
 469 tiempo.

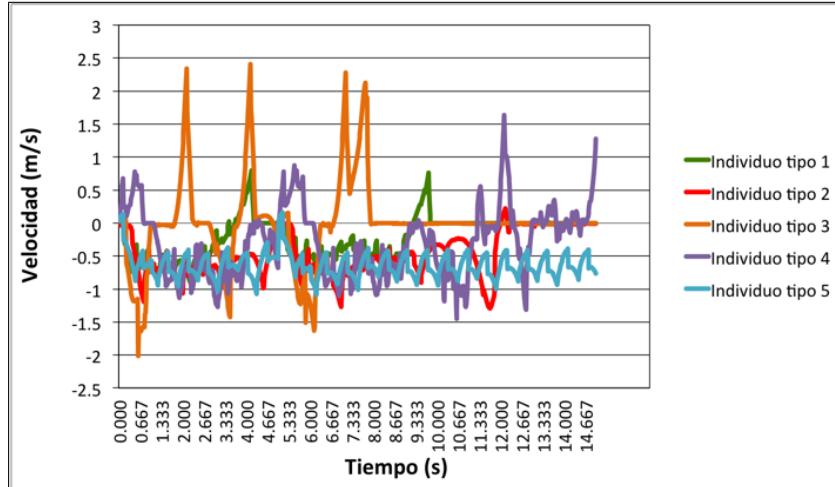


Figura 10: Velocidad según tipo de individuos

470 Como puede observarse en el caso de los individuos 3 y 4 (Fourier de orden 2 y 9, respectivamente),
 471 se producen picos altos y pronunciados en la velocidad. Eso repercute en que la velocidad media no
 472 sea $1.3 \frac{m}{s}$ (que es la velocidad objetivo), y ergo, en el módulo de velocidad del *fitness* (provocando
 473 que éste sea más bajo).

474 En el individuo de tipo 1, también se producen picos un poco menos pronunciados, pero luego
 475 de los 10 segundos, no se registra ninguna velocidad. Eso sucede porque el humanoide queda
 476 suspendido cuando intenta caer hacia atrás.

477 La velocidad del individuo de tipo 2 oscila de forma irregular, pero no tiene picos demasiado
 478 elevados.

479 Por último, en el individuo de tipo 5, la velocidad oscila de forma cíclica, continuada y armoniosa
 480 (no hay picos altos).

481 7.3. Altura según tipo de individuos

482 Como puede identificarse en la Figura 11, la altura de los individuos es otra característica
 483 para diferenciarlos en su rendimiento.

484

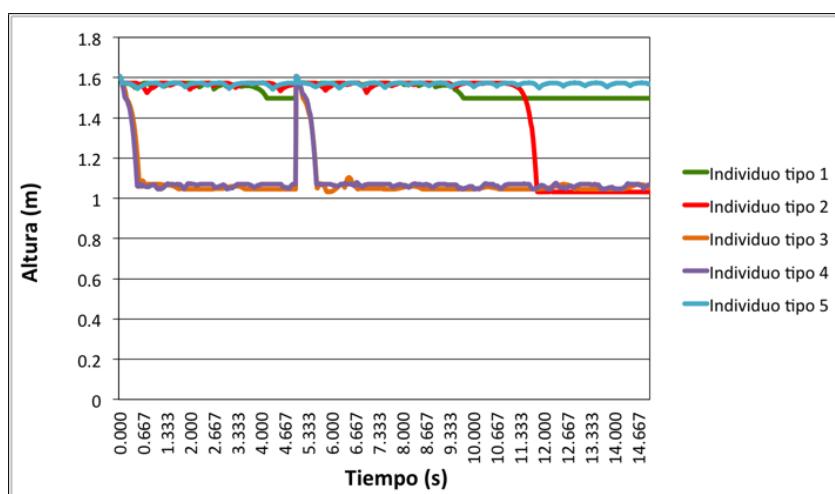


Figura 11: Altura (posición de la pelvis) según tipo de individuos

485 En efecto, los individuos de tipo 3 y 4 (que utilizan actuadores de Fourier de orden 2 y 9,
486 respectivamente), son los que caen de forma más abrupta, y aunque intentan levantarse, vuelven
487 a caer con la misma intensidad.
488 Por su parte, el individuo de tipo 1 (actuador Genérico sin función partida) mantiene su altura,
489 hasta que a los 10 segundos queda suspendido a una altura levemente menor. Esto ocurre porque
490 se cae para atrás, y las limitaciones de la cadera impiden que caiga. El individuo de tipo 2, con
491 actuadores genéricos y función partida, logra mantener la altura, hasta que cae hacia adelante, en
492 cuclillas. Considerando que cuando cae no vuelve a levantarse (ya que en ese movimiento suelen
493 emplearse los brazos y manos), tiene un comportamiento similar a una caminata real.
494 En lo que respecta al individuo de tipo 5, que utiliza como actuadores la función de doble coseno,
495 mantiene su altura de forma constante, pero con oscilaciones leves y continuadas en el tiempo.
496 De los cinco, es el que da mayor cantidad de pasos.

497 7.4. Comparación de tipo de individuos

498 En base a lo visto anteriormente, queda claro que los actuadores de Fourier no dieron buenos
499 resultados tanto en fitness, como en altura y velocidad.
500 Por otra parte, es necesario incluir la función partida (es decir, separar a la caminata en un
501 “primer paso”, y el ciclo), ya que si bien su ausencia puede originar *fitness* más altos, genera
502 inestabilidad a los pocos segundos (como en el individuo de tipo 1).
503 El individuo de tipo 5 logra un movimiento cíclico y repetitivo, que deriva en una caminata *ad*
504 *infinitum*, pero con el costo de que sea “robótica”(muy parecida a lo visto con un *passive walker*).

505 7.5. Video

506 Para una mejor visualización de los distintos individuos obtenidos, y de su evolución a lo
507 largo de las generaciones del algoritmo genético, se acompaña video.

508 **Acá va el link del video**

509 8. Conclusiones

510 Junto con las ideas esbozadas en la sección anterior. Algo que vale la pena notar es que los
511 actuadores que mejores resultados dieron, fueron aquellos en donde se empleaba dos frecuencias
512 ω en vez de una.
513 Lo ocurrido con el individuo de tipo 1 (genérico y sin función partida), que es el que tiene
514 un *fitness* más alto, pero que no produce una caminata acorde, posiblemente se deba a que el
515 tiempo de simulación empleado en el algoritmo genético, fuera corto. Principalmente el genérico
516 y el doble coseno son los que mejor caminan, tanto en fitness como en altura.
517 Pero son dos caminatas distintas, una un poco más natural (genérico) y la otra más robotica” pero
518 estable.
519 Si hay que elegir como mejor a uno de los dos, habría que decidir entre realismo (el humanoide
520 se cae, pero es más natural), y estabilidad (no se cae nunca, pero parece un “passive walker”).
521 La función de fitness que se plantea (con sus módulos) indica propiedades ideales para una
522 caminata, pero que no implican realismo en la misma. Y entonces dos individuos con fitness
523 parecidos dieron como fruto caminatas muy distintas.
524 Los actuadores fueron importantísimos.

Referencias

- 525 [1] Marek Wojtyra, *Multibody Simulation Model of Human Walking - Warsaw University of*
527 *Technology, 2003*
- 528 [2] Thomas Geijtenbeek, Michiel van de Panne y A. Frank van der Stappen, *Flexible Muscle-*
529 *Based Locomotion for Bipedal Creatures, 2013*
- 530 [3] Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Physics_engine
- 531 [4] Andreas Gerndt y otros, *An Evaluation of Open Source Physics Engines for Use in Virtual*
532 *Reality Assembly Simulations. Fecha de publicación: 2012*
- 533 [5] Tom Erez y otros, *Simulation Tools for Model-Based Robotics: Comparison of Bullet, Havok,*
534 *MuJoCo, ODE and PhysX*
- 535 [6] Sitio web de Bullet Physics: <http://www.bulletphysics.org/>
- 536 [7] Erin Catto, *Iterative Dynamic with Temporal Coherence. Fecha de publicación: 2005*
- 537 [8] Sitio web de GaLib: <http://lancet.mit.edu/ga/>
- 538 [9] <http://www.exrx.net/Kinesiology/Segments.html>
- 539 [10] Kevin Kenny, Máximo Videla y Axel Wassington, *Proyecto Final para la obtención del título:*
540 *Ingeniero en Informática - ITBA, 2014*