

1

2

PROYECTO FINAL

3

INGENIERÍA INFORMÁTICA - ITBA

4

5

SIMULACIÓN Y ANIMACIÓN BIOMECÁNICA DE UN HUMANOIDE

6

7

Alumnos:

8

Enzo Altamiranda Graterol

9

ealtamir@itba.edu.ar

10

Teresa Fontanella De Santis

11

tfontane@itba.edu.ar

12

Tomás Mehdi

13

tmehd@itba.edu.ar

14

Tutor:

15

Dr. Daniel Ricardo Parisi

16

Instituto Tecnológico de Buenos Aires - ITBA

17

Departamento de Ingeniería Informática

18

Marzo 2016

Índice

19

20	Resumen	4
21	1 Introducción	4
22	2 Herramientas	5
23	2.1 Motor Físico	5
24	2.1.1 Funcionamiento	5
25	2.1.2 Modelo de fricción y su verificación	5
26	2.1.2.1 Verificación del coeficiente de fricción	6
27	2.1.2.2 Verificación del coeficiente de restitución	10
28	2.1.3 Ventajas	11
29	2.1.4 Desventajas	11
30	2.2 Librería de Algoritmos Genéticos	12
31	2.3 Código Fuente	12
32	3 Modelo Utilizado	12
33	3.1 Composición Física del Humanoide	13
34	3.2 Articulaciones	13
35	4 Actuadores	14
36	4.1 Genérico	14
37	4.2 Fourier de orden 2	14
38	4.3 Fourier de orden 9	15
39	4.4 Doble seno	15
40	5 Condiciones iniciales y de contorno	15
41	5.1 Función Partida	15
42	5.2 Fase sincronizada	16
43	6 Algoritmo Genético	16
44	6.1 Individuo	16
45	6.1.1 Parámetros	16
46	6.1.2 Valores	16
47	6.1.3 Implementación de individuos	17
48	6.1.4 Constitución del cromosoma	17
49	6.2 Fitness	18
50	6.2.1 Altura	18
51	6.2.2 Velocidad	19
52	6.2.3 Dirección	19
53	6.2.4 Simetría	19
54	6.2.5 Pies abajo	20
55	6.3 Parámetros del Algoritmo	20
56	6.3.1 Métodos de selección	20
57	6.3.2 Métodos de cruce	20
58	6.3.3 Mutación	20

59	6.3.4	Otros parámetros	20
60	7	Resultados Obtenidos	21
61	7.1	Evolución del <i>fitness</i> según tipo de individuos	21
62	7.2	Velocidad según tipo de individuos	21
63	7.3	Altura según tipo de individuos	22
64	7.4	Comparación de tipo de individuos	23
65	7.5	Video	23
66	8	Conclusiones	23
67	Referencias		23

68

Resumen

69

70 Este proyecto tiene como objetivo crear una simulación y animación de un humano
71 virtual, con las siguientes propiedades:

- 72 – Biomecánica: que tanto su estructura (peso, altura y posición de cada una de sus
73 partes) como su interacción con el entorno, respondan a comportamientos físicos
74 reales y exactos.
- 75 – Inteligencia Artificial: que aprenda a caminar por sí mismo, utilizando para ello
76 métodos de *soft computing* como Algoritmos Genéticos.

77 1. Introducción

78 Siempre ha sido de interés la simulación biomecánica de seres vivos, especialmente en las
79 ciencias naturales (zoológia, medicina, etc.).

80 Ahora bien, últimamente se ha incrementado el interés en otras áreas de aplicación, como los
81 videojuegos (creación de personajes con reacciones más reales), y la ingeniería (verbigracia: diseño
82 de espacios cerrados, con mayores medidas de seguridad).

83 Una característica muy importante de este trabajo es que el humanoide no es fruto de una
84 animación, sino un objeto compuesto de segmentos físicos, que interactúan entre sí y con el
85 entorno, por medio de las leyes físicas; agregando así realismo a la situación simulada. La otra
86 propiedad es que el bípedo aprenda por sí solo a caminar en línea recta, sin tener en su trayectoria
87 ningún obstáculo.

88 Este problema se puede abordar de diversas maneras, involucrando: redes neuronales¹, sistemas
89 de control² (*passive walkers*³)[1], algoritmos genéticos[2], entre otras. Pero varios de ellos implican
90 modelos teóricos complejos de humanoide (considerando músculos con distintos materiales, etc.).

91 En este proyecto se buscó aplicar algoritmos genéticos, y lograr la caminata usando un modelo de
92 humanoide basado en cuerpos rígidos, unidos por articulaciones, y cuyo desplazamiento depende
93 de torques aplicados a dichos cuerpos.

94 El presente informe, describe y analiza pormenorizadamente: en la sección 2, las herramientas
95 aplicadas; en la 3, el modelo del humanoide utilizado; en la 4 y 5, los diferentes tipos de actuadores
96 y funciones de partida y contorno; en la 6, el algoritmo genético; y en la 7 y 8, los resultados
97 obtenidos con sus respectivas conclusiones.

¹Una red neuronal es un paradigma de aprendizaje automático. Se trata de un sistema de interconexión de neuronas que colaboran entre sí, para producir un estímulo de salida. Dada una entrada del sistema, se produce una salida, originada por varias transformaciones intermedias.

²Un sistema de control es un dispositivo (o conjunto de) que maneja, dirige o regula el comportamiento de otros dispositivos o sistemas, para minimizar los fallos y obtener los resultados deseados.

³Un *passive walker* utiliza el movimiento natural (*swinging*) de las piernas para ahorrar energía usada por motores. Para caminar, calcula la posición de ciertos puntos (las articulaciones, mayormente).

⁹⁸ 2. Herramientas

⁹⁹ 2.1. Motor Físico

¹⁰⁰ Se le llama motor físico o *physics engine* a un “*software* capaz de realizar simulaciones de
¹⁰¹ ciertos sistemas físicos, como la dinámica del cuerpo rígido, el movimiento de un fluido y la
¹⁰² elasticidad”[3].

¹⁰³ Actualmente, existen muchos motores físicos: ya sea de código propietario (*PhysX*, *Havok*), como
¹⁰⁴ *open-source* (*Bullet Physics*, *Box2D*, *Newton*, *OGRE*). Considerando análisis relacionados [4][5],
¹⁰⁵ y el hecho de que el espacio simulado fuese en 3D, se decidió que *Bullet Physics*[6] es el más
¹⁰⁶ idóneo. Está implementado en C++ y ha sido utilizado en varios juegos (*Grand Theft Auto IV*
¹⁰⁷ y *V*, etc); en los efectos especiales de películas (*Hancock*, *Bolt*, etc.); y proyectos científicos, como
¹⁰⁸ la herramienta *open-source Tensegrity Robotics Toolkit* de la NASA⁴; entre otros.

¹⁰⁹ Si bien (como se verá más adelante) *Bullet* tiene problemas asociados con el coeficiente de restitu-
¹¹⁰ ción, posee una muy buena *performance* en la detección de colisiones, la dinámica y la resolución
¹¹¹ de *constraints*. Esto se debe, en parte, a diferentes algoritmos iterativos de orden lineal (donde
¹¹² el más importante es *Sequential Impulse*), de *caching* y también a la utilización de un modelo
¹¹³ de fricción de Coulomb aproximado [7]. Además, el motor físico brinda la posibilidad de regular
¹¹⁴ la precisión requerida en estos cálculos (sin olvidar que, con iguales recursos, a mayor precisión,
¹¹⁵ mayor capacidad de cómputo requerida y, ergo, mayor tiempo). Dado que la construcción del hu-
¹¹⁶ manoide implica definir características y restricciones de movimiento de cada una de sus partes,
¹¹⁷ lo antes mencionado fue crucial para la elección de *Bullet Physics* en este proyecto.

¹¹⁸ 2.1.1. Funcionamiento

¹¹⁹ El motor físico se encarga de la simulación de cuerpos rígidos y la interacción entre los mismos.
¹²⁰ En particular debe: calcular el resultado de colisiones, arreglar el solapamiento de los cuerpos
¹²¹ en el espacio de simulación, estimar las fuerzas producidas debido a la fricción, y mantener el
¹²² cumplimiento de restricciones que puedan existir entre los cuerpos (por ejemplo, un vínculo para
¹²³ formar una articulación). Para lograrlo, *Bullet* modela, a partir de un conjunto de ecuaciones,
¹²⁴ las distintas restricciones que deben ser respetadas.

¹²⁵ Estos modelos reciben como dato la velocidad lineal y angular de cada objeto, y las fuerzas
¹²⁶ que actúan sobre los mismos. Dada esta información, se resuelve el sistema de ecuaciones, cuya
¹²⁷ solución representa las magnitudes de las fuerzas a accionar sobre el mismo, a fin de satisfacer
¹²⁸ todas las restricciones. Para encontrar esta solución, entran en juego los distintos métodos de
¹²⁹ complejidad lineal mencionados en la subsección anterior.

¹³⁰ Este procedimiento, se lleva a cabo en cada *timestep* de la simulación; donde un *timestep* es el
¹³¹ intervalo de tiempo que transcurre entre un cálculo de magnitudes y otro. Mientras menor sea
¹³² el *timestep*, el simulador será más preciso pero también consumirá más tiempo de cómputo.

¹³³ 2.1.2. Modelo de fricción y su verificación

¹³⁴ Hay reglas físicas relacionadas con el entorno y que son muy importantes para la caminata:
¹³⁵ el modelo de fricción, con sus respectivos coeficientes de fricción y restitución.
¹³⁶ En base a los modelos físico-matemáticos que representan a cada uno de los dos fenómenos en
¹³⁷ cuestión (y que se explicarán a continuación), y pensando en posibles futuras simulaciones de

⁴<http://bulletphysics.org/Bullet/phpBB3/viewtopic.php?f=17&t=9978>

138 varios humanoides chocando e interactuando entre sí; se llevaron a cabo dos ensayos para verificar
 139 el funcionamiento del simulador físico *Bullet*.

140 2.1.2.1. Verificación del coeficiente de fricción

141 Para determinar el modelo utilizado por *Bullet* para simular las fuerzas resultantes sobre un
 142 cuerpo por acción de la fricción, se simuló un cubo, de $m_{cube} = 1kg$ y $l_{cube} = 1m$, que tiene una
 143 velocidad inicial constante (v_i) en el eje horizontal, que gradualmente se detiene por acción de
 144 la fricción, hasta llegar al reposo (Fig. 1).

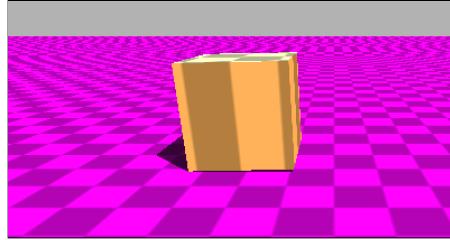


Figura 1: Visualización del sistema del cubo

145 Para esta prueba se utilizó el modelo matemático que representa la posición del cuerpo en el
 146 eje horizontal en función del tiempo t , representado por la siguiente ecuación:

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

147 En este caso, el cuerpo empieza su movimiento en el origen, por lo tanto la posición inicial (x_i)
 148 es cero. v_i es la velocidad inicial, y a , la aceleración. Debido a la fricción entre el cuerpo y el
 149 suelo, se genera una fuerza de rozamiento \mathbf{F}_{μ_d} ⁵ (ec. (2)) en la misma dirección que la velocidad
 150 del sólido y en sentido contrario.

$$-\mathbf{F}_{\mu_d} = \mu_d \mathbf{F}_N \quad (2)$$

151 donde $\mathbf{F}_N = mg$ es la fuerza normal que actúa sobre la caja de masa m por acción de la gravedad
 152 $g = 10 \frac{m}{s^2}$, y μ_d es el coeficiente de fricción dinámico.

153

154 Finalmente, se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{\mathbf{F}_{\mu_d}}{m} = \frac{-\mu_d \mathbf{F}_N}{m} = \frac{-\mu_d mg}{m} = -\mu_d g \quad (3)$$

155 Considerando las ec. (1) y (3), se puede obtener el modelo matemático que predice el movimiento
 156 de la caja:

$$x(t) = x_i + v_i t - \frac{1}{2} \mu_d g t^2 \quad (4)$$

157 El intervalo de tiempo físico (o *timestep*) utilizado es $\Delta t = \frac{1}{60}s$. El *timestep* de animación (es
 158 decir, cada cuánto tiempo se guardan en un archivo los datos logrados) es $\Delta t' = 0.1$ y el tiempo
 159 de simulación es de $s = 100\Delta t$.

160 Seguidamente, se muestran los gráficos obtenidos al correr los experimentos numéricos con los
 161 siguientes valores: $v_i = \{1, 3 \text{ y } 10\} \frac{m}{s}$ y $\mu_d = \{0.25, 0.50 \text{ y } 0.75\}$. Se compara la distancia en el
 162 eje Z de la caja en Bullet con su distancia en el mismo eje según la ec. (4).

⁵En las ecuaciones, los vectores se escriben en negrita. Y las fuerzas son vectores.



Figura 2: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 10 \frac{m}{s}$ y:
 (a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$



Figura 3: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 3 \frac{m}{s}$ y:
 (a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$

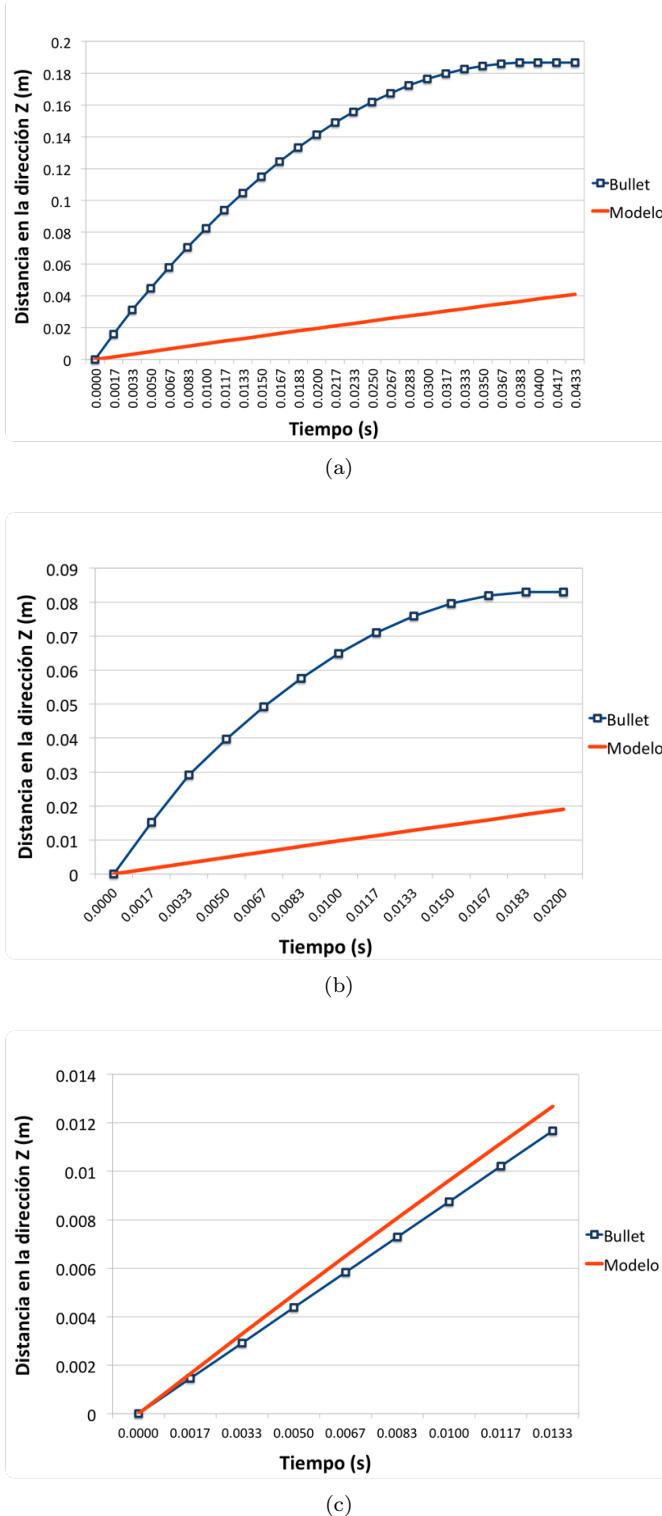


Figura 4: Resultados logrados de simular el sistema descripto en Fig. 1, usando $v_i = 1 \frac{m}{s}$ y:

(a) $\mu_d = 0.25$, (b) $\mu_d = 0.50$, y (c) $\mu_d = 0.75$

Las Fig. 2 y 3 demuestran que los resultados de las pruebas fueron favorables. Los valores obtenidos a partir de la simulación se corresponden (en mayor o menor medida) con los alcanzados a partir del modelo matemático. Esto es un indicador de que *Bullet* debe estar usando dichos modelos para ejecutar las simulaciones. Vale observar que, cuanto mayor es la velocidad inicial

167 (v_i), mayor es la similitud entre los dos casos.

168 No obstante, los gráficos que corresponden a la Fig. 4, presentan una discrepancia mayor entre
169 la simulación y el modelo. Este hecho puede deberse al mecanismo utilizado por *Bullet* para
170 resolver la fricción de un cuerpo a velocidades muy bajas.

171 **2.1.2.2. Verificación del coeficiente de restitución**

172 El segundo ensayo simula una esfera a una altura determinada sobre el suelo, que tiene una
173 velocidad v_i en el eje perpendicular al piso y que eventualmente colisiona contra el mismo. Se
174 desea comprobar que la colisión entre el cuerpo y el suelo respete que la velocidad final v_f de
175 la esfera después del choque sea proporcional a su coeficiente de restitución e dado por la ecuación:

176

$$e = \frac{v_f}{v_i} \quad (5)$$

177

178 Para efectuar la colisión con el suelo, se empleó una esfera sólida ubicada a 4 metros del suelo,
179 cuya masa y radio son $m_{sphere} = 1 \text{ kg}$ y $r_{sphere} = 1 \text{ m}$, respectivamente (ver Fig. 5). A la esfera
180 se le asigna, además, un coeficiente de restitución determinado.

181 Se eligió un ambiente sin gravedad ($g = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). De esta forma, se podrá tener en cuenta sólo la
182 velocidad inicial (v_i) y la velocidad final (v_f) para el cálculo del coeficiente de restitución (e)
183 (ver ec. (5)).

184 El intervalo de tiempo físico (o *timestep*) utilizado es $\Delta t = 0.001 \text{ s}$. El *timestep* de animación (es
185 decir, cada cuánto tiempo se guardan en un archivo los datos logrados) es $\Delta t' = 0.1$ y el tiempo
186 de simulación es de $s = 100\Delta t$. El coeficiente de fricción es $\mu = 0.75$.

187

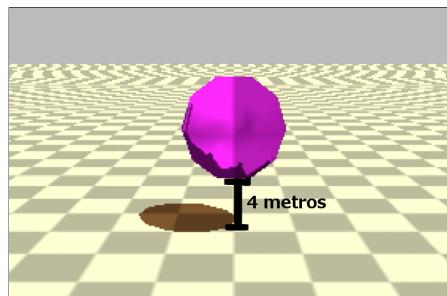


Figura 5: Visualización del sistema de la esfera

188 El ensayo tiene como parámetros de entrada: v_i (velocidad inicial) y e_{sim} (coeficiente de
189 restitución esperado). Por otro lado, se obtiene v_f (velocidad de la esfera al finalizar la simu-
190 lación); y luego se calculan e_{medida} (coeficiente de restitución obtenido a partir de la ec. (5)) y
191 ϵ_{rel} , que es el error relativo entre los coeficientes e_{sim} y e_{medida} , calculado de la siguiente manera:

192

$$\epsilon_{rel} = \frac{e_{sim} - e_{medida}}{e_{sim}} \quad (6)$$

193 Se muestra en la Tabla 1 lo arrojado por los experimentos numéricos efectuados. En ellos,
194 $v_i = \{-0.5, -3.5, -4, -5 \text{ y } -10\} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $e_{sim} = \{0.2, 0.5 \text{ y } 0.8\}$.

v_i	e_{sim}	v_f	e_{medida}	e_{rel}
$-0.5 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000249 \frac{m}{s}$	0.000498	0.997
	0.5	$0.000219 \frac{m}{s}$	0.000438	0.999
	0.8	$0.001037 \frac{m}{s}$	0.002074	0.997
$-3.5 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000057 \frac{m}{s}$	0	1
	0.5	$0.000018 \frac{m}{s}$	0	1
	0.8	$0.3 \frac{m}{s}$	0.0857	0.893
$-4 \frac{m}{s}$	0.2	$0.000473 \frac{m}{s}$	0.00012	1
	0.5	$0.000424 \frac{m}{s}$	0.00011	1
	0.8	$1.23 \frac{m}{s}$	0.3	0.625
$-5 \frac{m}{s}$	0.2	$1 \frac{m}{s}$	0.2	0
	0.5	$2.5 \frac{m}{s}$	0.5	0
	0.8	$4 \frac{m}{s}$	0.8	0
$-10 \frac{m}{s}$	0.2	$2 \frac{m}{s}$	0.2	0
	0.5	$5 \frac{m}{s}$	0.5	0
	0.8	$8 \frac{m}{s}$	0.8	0

Tabla 1: Coeficientes de restitución obtenidos de simular el sistema descrito en Fig. 5

195 Los resultados exponen una limitación del motor físico: no representa correctamente las colisiones elásticas entre esferas y cuerpos rígidos, que ocurren a velocidades bajas. Esto queda en evidencia en la Tabla 1. En cada una de ellas el error fue de casi 1. La razón por la que ocurre este hecho se debe a que *Bullet* utiliza un algoritmo de colisión que frena la velocidad de un objeto que está a punto de colisionar. Haciendo esto puede evitar que los sólidos se traspasen y de esta forma se pueden realizar cálculos de fuerza más precisos.

201 En el caso de los ensayos, las esferas poseen una velocidad muy baja, cuando están a punto de colisionar *Bullet* reduce aún más esta velocidad y eventualmente quedan con una velocidad tan baja que al chocar contra el suelo se aplica el efecto restitutivo a esta velocidad casi nula y se resuelve que la esfera debe quedar en reposo, cuando en realidad debería poseer una velocidad baja, pero no despreciable.

206 2.1.3. Ventajas

207 Las ventajas del motor físico son:

- 208 – Código abierto: mayor conocimiento sobre las fórmulas y métodos implementados en el motor.
- 209 – Soporte de la comunidad científica.
- 210 – Licencia libre.

211 2.1.4. Desventajas

212 Como toda herramienta, *Bullet* tiene aspectos negativos, entre los que se encuentran:

- 213 – Documentación poco clara y desordenada.
- 214 – Debido a que la física se aproxima usando métodos numéricos que contienen error, las simulaciones son no determinísticas.

- 216 – Utilizar una librería gráfica (como *OpenGL*) acoplada a una simulación de *Bullet* puede
217 producir resultados distintos, que si se usa un programa de visualización externo (como
218 OVITO).

219 **2.2. Librería de Algoritmos Genéticos**

220 Se utilizó la conocida librería de Algoritmos Genéticos para C++ GaLib, desarrollada por
221 Matthew Wall del MIT [8].

222 Ofrece funcionalidades como: programación paralela, diversos métodos de selección (*elite*, *rou-*
223 *lette*), estrategias de reemplazo (de padres, aleatorio, del peor), entre otras.

224 **2.3. Código Fuente**

225 Al estar *Bullet* implementado en C++, el código fuente también está desarrollado en ese
226 lenguaje. En *Bullet*, se define un *World* (o mundo físico) en donde se puede insertar, entre otras
227 cosas, cuerpos rígidos. En este caso en particular, el mundo consta de un plano (el suelo) y el
228 humanoide encima (compuesto por cuerpos rígidos y otros elementos físicos).

229 El *software* creado incluye: creación del humanoide, siendo éste capaz de desplazarse por medio
230 de actuadores (que se verán en la Sección 4); el desarrollo del algoritmo genético (la definición de
231 los individuos, la función de *fitness*, métodos de selección, etc.); visualización gráfica del mejor
232 humanoide logrado por el algoritmo genético; y la posibilidad de realizar gráficos referidos a la
233 evolución del algoritmo genético (*fitness* por cada generación, etc.).

234 Se acompañan a esta presentación: el código fuente y el manual de instalación y uso.

235 **3. Modelo Utilizado**

236 Dentro de los diversos modelos existentes ([1][2]); en este proyecto se procuró utilizar uno que
237 fuera sencillo pero representativo a la vez.

238 Se modela al cuerpo humano, con el motor *Bullet Physics*, como un conjunto de segmentos unidos
239 por articulaciones (Fig. 6). A cada uno de ellos se les aplica una fuerza en el centro de masa de
240 cada segmento (denominada Actuador). Que la caminata se produzca o no, depende del tipo de
241 actuador utilizado (la función utilizada para la fuerza), y de sus parámetros. El objetivo, entonces,
242 se reduce a encontrar dichos parámetros. Para eso se usan los algoritmos genéticos, un método
243 de Inteligencia Artificial. De este modo se obtiene, de forma análoga a la selección natural, los
244 individuos que mejor se adapten a la caminata. Tanto los actuadores como el algoritmo genético
245 se explicarán más adelante.

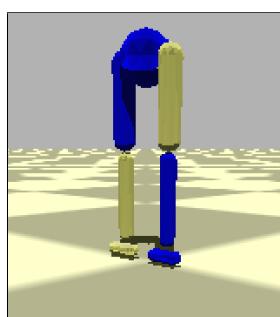


Figura 6: Humanoide diseñado

246 3.1. Composición Física del Humanoide

247 Como ya se expresó, el humanoide fue modelado en *Bullet* como un conjunto de segmentos
 248 (cuerpos rígidos), unidos por articulaciones.

249 Se dividió al cuerpo humano en: cabeza, tronco, miembro superior, pelvis y miembro
 250 inferior (muslo, pierna y pie). A los fines de este proyecto, sólo se consideraron la pelvis y el miembro
 251 inferior (ver Fig. 7).

252 A continuación se presenta la composición de cada segmento (de acuerdo a la biomecánica [9]).

253

Parte	Cantidad	Forma	Largo (en m)	Peso (en kg)	Uniones
Pelvis	1	esférico	0.08655	9.9718	Cadera
Muslo	2	esfero-cilindro	0.4015	10.3368	Cadera y Rodilla
Pierna	2	esfero-cilindro	0.4015	3.1609	Rodilla y Tobillo
Pie	2	esfero-cilindro	-	1.0001	Tobillo

Tabla 2: Segmentos del humanoide

254 3.2. Articulaciones

255 Para unir los distintos segmentos entre sí, se utilizaron articulaciones bisagra con 1 grado de
 256 libertad, en el eje X, para que los segmentos puedan moverse en dos ejes: el Z, donde ocurre la
 257 caminata, y el Y, perpendicular al piso (ver Fig. 7).

258 Asimismo, para cada caso en particular, se definieron cotas para los ángulos que pueden existir
 259 entre los segmentos. Esto es muy importante, no sólo porque se adecúa a datos biológicos, sino
 260 porque, de otro modo la caminata no podría lograrse: si los ángulos son demasiado altos, la ca-
 261 minata se produce girando las piernas por encima de la pelvis; si por el contrario, son demasiado
 262 bajos, las piernas van a estar muy rígidas, originando pocos pasos y muy cortos.

263 Por otra parte, la pelvis no puede rotar (se le impide hacerlo); y se le restringe la amplitud con
 264 la que puede moverse la cadera (de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$). Todo esto se hace porque, en caso contrario, el
 265 bípedo necesitaría un sistema de control para mantener el equilibrio, y eso excede el alcance de
 266 este trabajo.

267

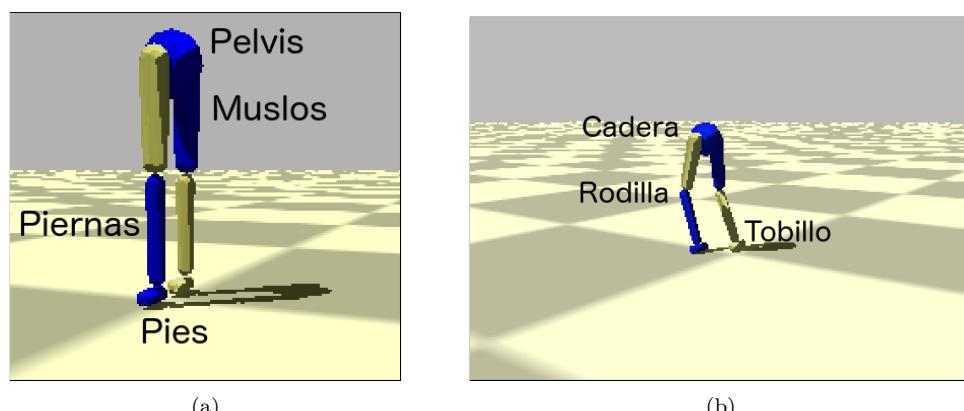


Figura 7: Humanoide diseñado: (a) segmentos, y (b) articulaciones

268 4. Actuadores

269 A cada uno de los segmentos correspondientes al muslo y la pierna del bípedo, se le aplica
 270 un torque (o actuador) en el eje X (perpendicular a la trayectoria), como se ve en Fig 8. Así,
 271 pueden moverse para arriba o para abajo (con respecto a la articulación a la que pertenecen).

272 A fin de simplificar el modelo, el humanoide tiene el mismo tipo de actuador utilizado en todos
 273 los segmentos.

274 Es necesario aclarar que la caminata producida por el humanoide es plana (en 2D y no en 3D,
 275 como debería ser en una caminata real). Esto se debe a que la trayectoria pensada para el bípedo
 276 es una línea recta, y logrando que los segmentos se muevan en un solo eje es suficiente para
 277 cumplir con dicha trayectoria. También contribuye el hecho de que el torque se aplique en una
 278 sola dimensión. Por otra parte, los actuadores definidos a continuación son periódicos, y por eso
 279 no se pueden aplicar en el eje Z de los segmentos (se necesitarían actuadores reactivos, para
 280 poder detectar cuando el humanoide se está cayendo, etc.).

281 Para indicar el módulo de dicho torque, se diseñaron diferentes funciones (todas ellas periódicas),
 282 mencionadas en las subsecciones que siguen.

283

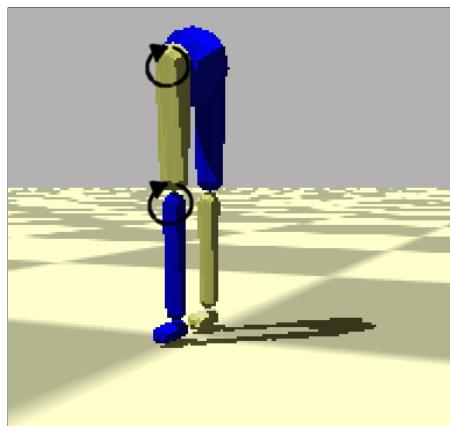


Figura 8: Aplicación de los actuadores en los segmentos del bípedo

284 4.1. Genérico

285 Es el actuador más sencillo, tanto matemática como computacionalmente.

$$f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi) + C \quad (7)$$

286 donde $f(t)$ es la función del actuador evaluada en el instante de tiempo t , A_1 y A_2 son amplitudes,
 287 ω_1 y ω_2 son frecuencias (en $\frac{1}{s}$), ϕ es la fase (en radianes), y C es un término independiente.

288 La fase ϕ es la misma en el seno y en el coseno, para evitar que se formen otro tipo de funciones
 289 no cíclicas.

290 4.2. Fourier de orden 2

291 Este actuador utiliza una serie de Fourier de dos términos.

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) + B_1 \cos(\omega t + \phi) + A_2 \sin(2\omega t + \phi) + B_2 \cos(2\omega t + \phi) + C \quad (8)$$

292 donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son amplitudes y ω es frecuencia (en $\frac{1}{s}$).

293 4.3. Fourier de orden 9

294 Es una extensión del actuador anterior, pero con 9 términos. Por ser de mayor grado, brinda
 295 una mayor precisión. Sin embargo, es más difícil de manejar computacionalmente; y, además,
 296 que sea más preciso no garantiza que con él se pueda lograr una buena caminata.

$$297 \quad f(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) + B_1 \cos(\omega t + \phi) + A_2 \sin(2\omega t + \phi) + B_2 \cos(2\omega t + \phi) \\ + A_3 \sin(3\omega t + \phi) + B_3 \cos(3\omega t + \phi) + A_4 \sin(4\omega t + \phi) + B_4 \cos(4\omega t + \phi) \\ + A_5 \sin(5\omega t + \phi) + B_5 \cos(5\omega t + \phi) + A_6 \sin(6\omega t + \phi) + B_6 \cos(6\omega t + \phi) \quad (9) \\ + A_7 \sin(7\omega t + \phi) + B_7 \cos(7\omega t + \phi) + A_8 \sin(8\omega t + \phi) + B_8 \cos(8\omega t + \phi) \\ + A_9 \sin(9\omega t + \phi) + B_9 \cos(9\omega t + \phi) + C$$

298 donde A_i y B_i con $1 \leq i \leq 9$ son amplitudes.

299 4.4. Doble coseno

300 Basada en [10], esta función periódica utiliza medio ciclo de una función sinusoidal, y medio
 301 ciclo de otra (ambas pueden tener frecuencias distintas). Esto podría tener sentido porque en una
 302 caminata, un miembro inferior primero avanza hacia adelante y luego se extiende hacia atrás, y
 303 es razonable que esos dos movimientos se produzcan a frecuencias distintas.

304 La idea es lograr una función periódica a partir de una que no lo es (ya que t es lineal). Para
 305 eso, se utiliza $\psi(t)$ (ec. (10)) que aplica una transformación a los números reales, para que se
 306 encuentren dentro del rango del ciclo completo (con las dos frecuencias). ω es la frecuencia de
 307 $f(t)$ (ec. (12)), que utiliza medio ciclo con frecuencia ω_1 y medio ciclo con frecuencia ω_2 .

$$308 \quad \psi(t) = t + \phi - \left\lfloor \frac{t + \phi}{\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2} \right\rfloor (\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2) \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \left[0, \frac{2\pi}{\omega} \right] \quad (10)$$

$$309 \quad \omega = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (11)$$

$$310 \quad 311 \quad f(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 \psi(t)) + C & \text{si } \omega_1 \psi(t) < \pi \\ A \cos(\omega_2(\psi(t) - (\pi/\omega_1) + (\pi/\omega_2))) + C & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

312 5. Condiciones iniciales y de contorno

313 Como las funciones periódicas señaladas en los actuadores, no fueron suficientes para lograr
 314 la caminata, se le adosaron las funciones que se detallan seguidamente.

315 5.1. Función Partida

316 El andar del humanoide es cíclico. Sin embargo, por la posición inicial del individuo, se requiere
 317 para el tiempo del primer paso, una función distinta a la del resto de la caminata. El tipo de
 318 función puede ser cualquiera de los actuadores vistos anteriormente (pero no necesariamente con
 319 los mismos valores de amplitud, frecuencia y fase asignados a las piernas). Empero, se utilizó la
 320 función vista en el actuador genérico.

³²¹ Por otra parte, para simplificar el modelo, se decidió que el tiempo considerado para el primer
³²² paso sea fijo, y de 0.7 segundos. Dicho valor fue extraído de forma experimental.

³²³ 5.2. Fase sincronizada

³²⁴ En una caminata, las piernas deben guardar simetría: mientras una va hacia adelante, la otra
³²⁵ va hacia atrás (y viceversa). Esto, de acuerdo con los actuadores definidos en la sección anterior,
³²⁶ implica que las funciones de movimiento de cada pierna estén desfasadas en medio ciclo ($\frac{\pi}{2}$):

$$f_i(t) = f(t) \quad (13)$$

$$f_d(t) = f(t + \frac{\pi}{2}) \quad (14)$$

³²⁸ siendo $f(t)$ la función de movimiento (o actuador) en el momento t , y f_i y f_d las funciones de la
³²⁹ pierna izquierda y derecha, respectivamente.

³³⁰ 6. Algoritmo Genético

³³¹ 6.1. Individuo

³³² La información genética de cada individuo, está compuesta por dos partes: función partida
³³³ (optativa) y los parámetros asociados a los actuadores (obligatorios).

³³⁴ 6.1.1. Parámetros

³³⁵ Tanto la función partida como los actuadores tienen como parámetros: amplitud (A o B);
³³⁶ fase (ϕ), que indica dónde comienza el paso y se mide en radianes; frecuencia (ω); y término
³³⁷ independiente (C).

³³⁸ 6.1.2. Valores

³³⁹ Cada uno de los segmentos tiene propiedades físicas distintas (masa, largo, etc.), razón por
³⁴⁰ la cual no necesariamente sus genes deban tener los mismos rangos de valores, tal como puede
³⁴¹ apreciarse en las Tablas 3 y 4.

Segmento	Tipo de gen	Mínimo	Máximo
Muslo	Amplitud	-30	30
Pierna	Amplitud	-60	60
Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10

Tabla 3: Rango de valores que puede tomar cada gen, para la función partida

Actuador	Segmento	Tipo de gen	Mínimo	Máximo
Genérico	Muslo	Amplitud	-30	30
	Pierna	Amplitud	-60	60
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Fourier de orden 2	Muslo	Amplitud	-60	60
	Pierna	Amplitud	-30	30
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	10
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Fourier de orden 9	Muslo y Pierna	Amplitud	-60	60
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.1	2
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-10	10
Doble Coseno	Muslo	Amplitud	-50	50
	Pierna	Amplitud	-30	30
	Muslo y Pierna	Frecuencia	0.01	5
	Muslo y Pierna	Fase	$-\pi$	π
	Muslo y Pierna	Término independiente	-30	30

Tabla 4: Rango de valores que puede tomar cada gen, según el tipo de actuador

³⁴³ 6.1.3. Implementación de individuos

³⁴⁴ Para favorecer el análisis de las distintas características arriba indicadas, se implementaron
³⁴⁵ varios individuos, cada uno de ellos con propiedades distintas (Tabla 5).

Individuos	Actuador	Función Partida	Fase Sincronizada
Tipo 1	Genérico	No	Sí
Tipo 2	Genérico	Sí	Sí
Tipo 3	Fourier de orden 2	Sí	Sí
Tipo 4	Fourier de orden 9	Sí	Sí
Tipo 5	Doble coseno	Sí	Sí

Tabla 5: Tipo de individuos

³⁴⁶ 6.1.4. Constitución del cromosoma

³⁴⁷ La longitud del cromosoma de un individuo depende de los actuadores y la función partida
³⁴⁸ usados. Cada uno de ellos, a su vez, tienen los parámetros presentados en la sección 6.1.1. Sus
³⁴⁹ respectivas cantidades pueden verse en la Tabla 6.

³⁵⁰ En la Tabla 7 se muestra la composición del cromosoma de cada individuo. En ella se puede
³⁵¹ observar cómo según el tipo de individuo, varía la cantidad de genes, es decir, el tamaño del
³⁵² cromosoma. Vale aclarar que la función partida se especifica para cada segmento (las dos piernas
³⁵³ y los dos muslos); en cambio, para los actuadores, sólo se definen dos (uno para las piernas y
³⁵⁴ otro para los muslos).

Actuadores	Parámetros			
	Amplitud	Frecuencia	Fase	Término independiente
Genérico	2	2	1	1
Fourier de orden 2	4	1	1	1
Fourier de orden 9	18	1	1	1
Doble coseno	1	2	1	1
Función partida	2	2	1	1

Tabla 6: Cantidad de parámetros según tipo de actuador o función partida

Parámetros	Individuos				
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5
Amplitud	12	12	16	44	8
Frecuencia	2	6	6	6	8
Fase	2	6	6	6	6
Término independiente	2	6	6	6	6
Totales	18	30	34	62	28

Tabla 7: Cantidad de parámetros según tipo de individuos

355 6.2. Fitness

356 El papel de la función de *fitness* F en un algoritmo genético es evaluar qué tan bueno es un
 357 individuo. En este caso, está definida como un producto de cinco módulos o propiedades: altura
 358 (H), velocidad (V), dirección (D), simetría (S) y pies abajo (PA):

$$F = H * V * D * S * PA \quad (15)$$

359 Los cinco tienen la misma importancia y por eso, como se verá a continuación, están definidos de
 360 forma similar (con una función exponencial y pueden valer entre 0 y 1). Con todo esto, dado que
 361 el *fitness* está pensado como un producto, basta con que uno de los módulos sea muy chico para
 362 “anular” al individuo (es decir, otorgarle un valor que tiende a cero). Sin embargo, los diferentes
 363 módulos no son completamente independientes entre sí: por ejemplo, si la altura es demasiado
 364 baja, posiblemente la velocidad y la dirección no sean adecuadas.

365

366 6.2.1. Altura

367 Es un factor relacionado con la altura del individuo en toda la simulación, y se expresa:

$$368 H = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(h_{t_n} - h_{t_0})^2}}{N} \quad (16)$$

369

370 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, h_{t_n} es la altura de la pelvis en el instante de
 371 tiempo t_n , N la cantidad pasos de simulación y C una constante $C = 5$.

372 Se calcula a partir de la diferencia entre la altura en cada instante de la simulación, con su altura
 373 inicial (la altura está definida como la posición de la pelvis en el eje Z). Cuanto mayor sea esa
 374 diferencia, más rápido el individuo cae, y por eso este módulo tiende a cero. Por el contrario,

375 valdrá uno si la diferencia es ínfima (lo que significa que el humanoide mantiene su misma altura
 376 durante la caminata).

377

378 6.2.2. Velocidad

379 Indica qué tan cercana es la velocidad del individuo con respecto a una velocidad objetivo
 380 (en este caso, es de 1.2 m/h), y se expresa de la siguiente forma:

381

$$V = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(v_{t_n} - V_O)^2}}{N} \quad (17)$$

382

383 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, v_{t_n} es la velocidad de la pelvis en el instante de
 384 tiempo t_n , y V_O la velocidad objetivo en el eje Z (el eje de la caminata).

385 Sigue una lógica y cálculo similares al factor de altura: a mayor discrepancia de la velocidad
 386 real del humanoide con V_O , menor (y más cercano a cero) es el valor arrojado por el módulo de
 387 velocidad.

388 6.2.3. Dirección

389 Señala qué tan similares son la dirección objetivo (un vector unitario, que en este caso se
 390 encuentra en el eje Z) y la dirección con la que camine el humanoide. Se calcula como sigue:

391

$$D = \frac{\sum_{n=0}^T e^{-C(\mathbf{v}_{t_n} \cdot \mathbf{V}_O - 1)^2}}{N} \quad (18)$$

392

393 donde t_0 es el tiempo inicial, t_T el tiempo final, \mathbf{v}_{t_n} el versor de la dirección del humanoide en
 394 el momento t_n y \mathbf{V}_O el versor de la dirección objetivo.

395 El producto escalar entre los versores responde a la Similitud Coseno: $\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}$, donde \mathbf{A} y
 396 \mathbf{B} son vectores que no se encuentran normalizados, y θ es el ángulo formado entre ellos. Así, si
 397 $\cos \theta = 1$, significa que los vectores están paralelos entre sí (que es el efecto buscado en el caso
 398 de la dirección).

399 Al producto escalar se le resta 1, para que el módulo sea consistente con la función exponencial
 400 utilizada y que valga 1 cuando $\theta = 0$, y 0 cuando $\theta = \pi$. Cabe aclarar que se trata al ángulo en
 401 forma simétrica, ya que, por ejemplo $\cos(-\pi/6) = \cos(\pi/6)$.

402

403 6.2.4. Simetría

404 Señala qué tan equidistantes se encuentran los pies de la cadera, a lo largo de la caminata.
 405 Aplicando solamente los módulos antes mencionados, provocaba resultados en donde una pierna
 406 quedaba más distante de la pelvis que la otra, lo que producía que el humanoide se terminara
 407 arrastrando, posiblemente afectando a la velocidad.

408 Para mayor simplicidad, la simetría S se calculó a partir de los pies (y no de las piernas). Se
 409 tomaron en cuenta sólo los ejes X y Z, porque son los relacionados a la velocidad y a la dirección,
 410 respectivamente.

$$S = \frac{\sum_{n=0}^T \frac{1}{2}[e^{-C(lf_z + rf_z)^2} + e^{-C(lf_x + rf_x)^2}]}{N} \quad (19)$$

411

412 donde lf_x y lf_z es la distancia desde el pie izquierdo hasta la pelvis en los ejes X y Z, respectivamente; y en donde rf_x y rf_z es lo mismo, pero para el pie derecho.

414

415 6.2.5. Pies abajo

416 Con los módulos señalados anteriormente, se busca que el humanoide camine con una veloci-
417 cidad y dirección determinadas, que no se caiga y que mantenga simetría mientras ejecuta sus
418 movimientos. Pero, todo esto daría, en el mejor de los casos, una caminata estilo “estrella”.

419 Sin embargo, una característica fundamental en una caminata normal es que las piernas (ergo,
420 los pies también) no sobrepasen la cadera. Si bien ésta es una propiedad negativa (expresa lo que
421 no debe tener una caminata), y se puede correr el riesgo de restringir demasiado, su ausencia da
422 resultados peores.

$$PA = \frac{\sum_{n=0}^T \frac{1}{2}(\alpha[e^{-C(lf^2)} + e^{-C(rf^2)}])}{N} \quad (20)$$

423

424 donde lf y rf son las diferencias entre la posición inicial de los pies y la altura en el momento
425 t_n de los pies izquierdo y derecho, respectivamente, y $\alpha = \max(\min(lf, rf) - hip, 0), 1$, siendo
426 lf , rf y hip las alturas del pie izquierdo, pie derecho, y la cadera (es decir, vale 0 si la altura del
427 pie izquierdo o derecho supera a la de la cadera, y 1 en otro caso).

428

429 6.3. Parámetros del Algoritmo

430 6.3.1. Métodos de selección

431 De la vasta cantidad de métodos de selección que existen, se utilizaron: **Elite** (en donde
432 se elige el individuo con mayor aptitud de la población); y **Roulette** (método estocástico, que
433 selecciona un individuo de la población total al azar, con una probabilidad proporcional a su
434 *fitness*).

435 6.3.2. Métodos de crusa

436 El método de crusa (*crossover*) utilizado es el siguiente: De dos individuos (los padres), se
437 originan dos nuevos individuos (los hijos). Se toma cada uno de los genes de los padres y se elige,
438 con una probabilidad uniforme, uno de ellos para un hijo y el otro para el otro hijo.

439 La probabilidad de que este proceso ocurra es de 0.9.

440 6.3.3. Mutación

441 En el caso de la mutación, para cada gen del individuo, se decide con cierta probabilidad si
442 se lo muta o no. En caso afirmativo, se cambia ese gen por un valor aleatorio (que esté dentro
443 de su rango definido).

444 Dicha probabilidad de mutación es de 0.3.

445 6.3.4. Otros parámetros

446 En el algoritmo genético se utilizan 1000 generaciones, de 50 individuos cada una. Además,
447 la simulación de cada individuo (necesaria para calcular el *fitness*) es de 4 segundos.

448 7. Resultados Obtenidos

449 Considerando los individuos definidos en el punto 6.1.3, se realizaron pruebas, corriendo
 450 el algoritmo genético, y evaluando el resultado obtenido posteriormente (ya sea numérica o
 451 gráficamente). A continuación se analizan distintos aspectos relevantes.

452 7.1. Evolución del *fitness* según tipo de individuos

453 Los individuos que usan actuadores de Fourier son los que producen *fitness* más bajos; el de
 454 orden 2 (individuo de tipo 3) se estanca a las pocas generaciones (al igual que el de tipo 1). El
 455 *fitness* del individuo con actuadores Fourier de orden 9 se “ameseta” progresivamente (después
 456 de 500 generaciones).

457 El individuo de tipo 1 es el individuo con *fitness* más alto, pero que se obtuvo a las pocas
 458 generaciones (es decir que es un máximo local). El individuo de tipo 2 (con actuadores genéricos
 459 y función partida) va aumentando su *fitness* progresivamente, aunque sin superar al de tipo 1.

460 Por otra parte, el individuo de tipo 5 (con actuadores doble coseno), va mejorando su *fitness*
 461 paulatinamente, lo que impide estancarse en un máximo local. Además, tiene el segundo mejor
 462 *fitness*.

463 Puede notarse que los rangos manejados en la Fig. 9 casi alcanzan el 0.7 (y no a 1, su cota
 464 superior). Esto se debe a que la función de *fitness* está definida como un producto de ciertos
 465 módulos: suponiendo que cada uno de ellos estuviera al 92 %, se tendría $0.92^5 = 0.659$.

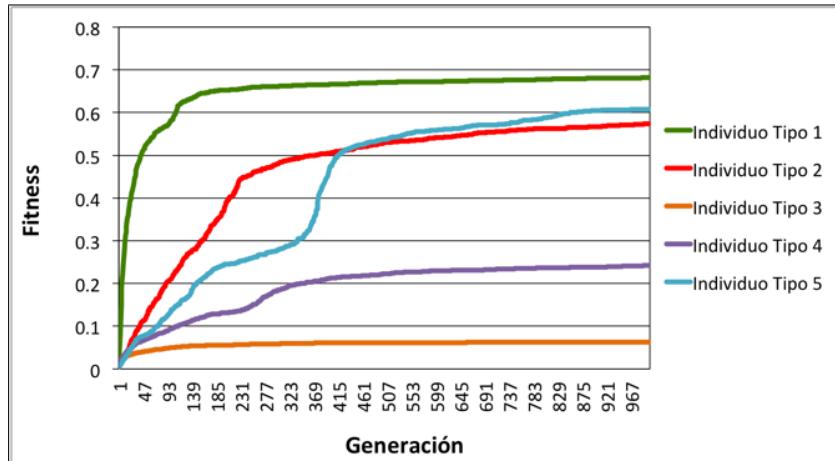


Figura 9: Evolución del *fitness* según tipo de individuos

466 7.2. Velocidad según tipo de individuos

467 A continuación, se muestra, para cada individuo, su velocidad instantánea a lo largo del
 468 tiempo.

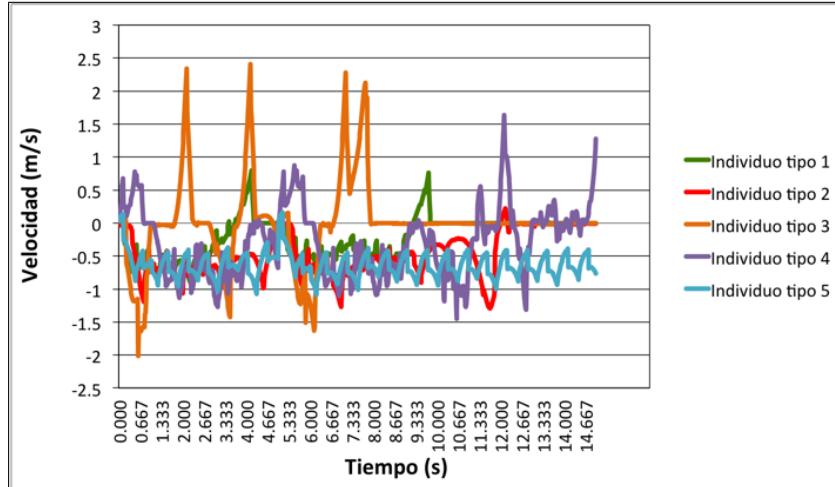


Figura 10: Velocidad según tipo de individuos

469 Como puede observarse en el caso de los individuos 3 y 4 (Fourier de orden 2 y 9, respectivamente).
 470 se producen picos altos y pronunciados en la velocidad. Eso repercute en que la velocidad
 471 media no sea $1.3 \frac{m}{s}$ (que es la velocidad objetivo), y ergo, en el módulo de velocidad del *fitness*
 472 (provocando que éste sea más bajo).
 473 En el individuo de tipo 1, también se producen picos un poco menos pronunciados, pero luego
 474 de los 10 segundos, no se registra ninguna velocidad. Eso sucede porque el humanoide queda
 475 suspendido cuando intenta caer hacia atrás.
 476 Por último, en el individuo de tipo 5, la velocidad oscila de forma cíclica, continuada y armoniosa
 477 (no hay picos altos).

478 7.3. Altura según tipo de individuos

479 Como puede identificarse en la Figura 11, la altura de los individuos es otra característica
 480 para diferenciarlos en su rendimiento.

481

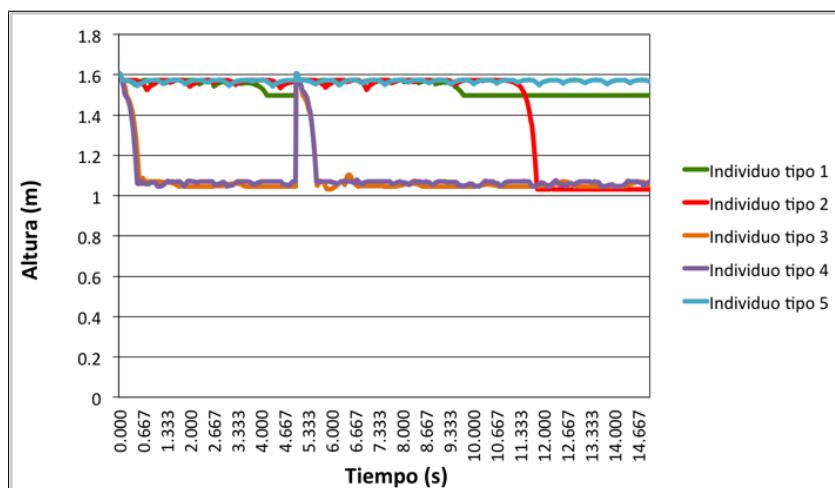


Figura 11: Altura (posición de la pelvis) según tipo de individuos

482 En efecto, los individuos de tipo 3 y 4 (que utilizan actuadores de Fourier de orden 2 y 9,

483 respectivamente), son los que caen de forma más abrupta, y aunque intentan levantarse, vuelven
484 a caer con la misma intensidad.

485 Por su parte, el individuo de tipo 1 (actuador Genérico sin función partida) mantiene su altura,
486 hasta que a los 10 segundos queda suspendido a una altura levemente menor. Esto ocurre porque
487 se cae para atrás, y las limitaciones de la cadera impiden que caiga. El individuo de tipo 2, con
488 actuadores genéricos y función partida, logra mantener la altura, hasta que cae hacia adelante, en
489 cuclillas. Considerando que cuando cae no vuelve a levantarse (ya que en ese movimiento suelen
490 emplearse los brazos y manos), tiene un comportamiento similar a una caminata real.

491 En lo que respecta al individuo de tipo 5, que utiliza como actuadores la función de doble coseno,
492 mantiene su altura de forma constante, pero con oscilaciones leves y continuadas en el tiempo.
493 De los cinco, es el que da mayor cantidad de pasos.

494 **7.4. Comparación de tipo de individuos**

495 En base a lo visto anteriormente, queda claro que los actuadores de Fourier no dieron buenos
496 resultados tanto en fitness, como en altura y velocidad.

497 Por otra parte, es necesario incluir la función partida (es decir, separar a la caminata en un
498 “primer paso”, y el ciclo), ya que si bien su ausencia puede originar *fitness* más altos, genera
499 inestabilidad a los pocos segundos (como en el individuo de tipo 1).

500 **7.5. Video**

501 Acá iría el link del video?

502 **8. Conclusiones**

503 Principalmente el generico y el doble coseno son los que mejor caminan, tanto en fitness como
504 en altura.

505 Pero son dos caminatas distintas, una un poco más natural (generico) y la otra más robotica” pero
506 estable.

507 Si hay que elegir como mejor a uno de los dos, habria que decidir entre realismo (el humanoide
508 se cae, pero es más natural), y estabilidad (no se cae nunca, pero parece un “passive walker”).

509 La funcion de fitness que se plantea (con sus módulos) indica propiedades ideales para una
510 caminata, pero que no implican realismo en la misma. Y entonces dos individuos con fitness
511 parecidos dieron como fruto caminatas muy distintas.

512 Los actuadores fueron importantísimos.

513 **Referencias**

514 [1] Marek Wojtyra, *Multibody Simulation Model of Human Walking - Warsaw University of*
515 *Technology, 2003*

516 [2] Thomas Geijtenbeek, Michiel van de Panne y A. Frank van der Stappen, *Flexible Muscle-*
517 *Based Locomotion for Bipedal Creatures, 2013*

518 [3] Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Physics_engine

- 519 [4] Andreas Gerndt y otros, *An Evaluation of Open Source Physics Engines for Use in Virtual*
520 *Reality Assembly Simulations*. Fecha de publicación: 2012
- 521 [5] Tom Erez y otros, *Simulation Tools for Model-Based Robotics: Comparison of Bullet, Havok,*
522 *MuJoCo, ODE and PhysX*
- 523 [6] Sitio web de Bullet Physics: <http://www.bulletphysics.org/>
- 524 [7] Erin Catto, *Iterative Dynamic with Temporal Coherence*. Fecha de publicación: 2005
- 525 [8] Sitio web de GaLib: <http://lancet.mit.edu/ga/>
- 526 [9] <http://www.exrx.net/Kinesiology/Segments.html>
- 527 [10] Kevin Kenny, Máximo Videla y Axel Wassington, *Proyecto Final para la obtención del título:*
528 *Ingeniero en Informática - ITBA, 2014*