УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Релевантная логика

Симоненко Е.А., <easimonenko@mail.ru>

Санкт-Петербург, 2018

Содержание

Мотивация

- “relevant” – относящийся к делу
- попытка избежать парадоксов материальной и строгой импликации

Мотивация

- Материальная импликация (классическая логика и булева алгебра):

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

- Строгая импликация (модальная логика):

$$A \to B \equiv \forall w \; \neg A(w) \vee B(w)$$

Мотивация

Парадоксы материальной импликации:

- $p \to (q \to p)$
- $\neg p \to (p \to q)$
- $(p \to q) \lor (q \to p)$

Мотивация

Парадоксы строгой импликации:

- $(p \wedge \neg p) \to q$
- $p \to (q \to q)$
- $p \to (q \vee \neg q)$

Мотивация

Hugh McColl, 1908

Формулы противоречат интуиции: если A, то B.

Посылка никак не относится к заключению.

Основная идея

- В парадоксах неправильно то, что посылка и заключение затрагивают совершенно различные темы.
- Принцип общих переменных: никакая формула вида $A \to B$ не может быть доказана, если формулы A и B не имеют общих пропозициональных переменных; никакое умозаключение не может быть истинным, если посылка и заключение не имеют хотя бы одной общей пропозициональной переменной.

Релевантные логические системы

- Логика E релевантного следования (Андерсон, Белнап).
- Система R релевантной импликации (Андерсон, Белнап).
- Логика NR на базе логики R с оператором необходимости (Мейер).
- Логики NR и E имеют существенные различия (Максимова).
- Слабая система S (Мейер, Мартин).

Релевантные логические системы

Среди аргументов в пользу слабых систем то, что, в отличие от R или E, многие из них разрешимы. Другое свойство слабых систем, которое делает их привлекательными,– то, что они могут быть использованы для построения наивной теории множеств. Наивная теория множеств – это теория множеств, которая включает в себя аксиому свертывания, т.е. для любой формулы $A(y)$, $\exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow A(y))$.

Логика S

Язык:

- пропозициональные переменные
- скобки
- связка (импликация)

Логика S

Аксиомы:

- префиксация: $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- суффиксация: $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

Логика S

Правила:

- транзитивность: $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
- суффиксация: $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$
- префиксация: $B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

Логика T-W

Логика T-W является логикой S с дополнительной аксиомой identity:

$$A \to A$$

.

Мартин доказал, что аксиома identity не является теоремой в логике S. Это является следствием того, что по теореме Мартина, если $A \to B$ и $B \to A$ доказуемы, то A и B являются одной и той же формулой.

Семантика

Семантика тернарного отношения Рутли и Мейера (Richard Routley и Robert K. Meyer).
“Тернарное” - значит отношение имеет три параметра, например: X ударил предметом Y по Z.
Эта семантика - развитие "семантики полурешеток"Аласдаира Уркухарта (Alasdair Urquhart) (Urquhart 1972).

Семантика

Как и семантика модальной логики, семантика релевантной логики связывает отношение истинности с мирами. Но Рутли и Мейер сделали модальную логику чуть лучше, используя трехместное отношение между мирами. Это допускает миры, в которых нельзя доказать $q \to q$ и, как следствие, миры, где нельзя доказать $p \to (q \to q)$.

Семантика

Условие истинности для импликации таково:
$B \to C$ истинно в мире a тогда и только тогда, когда для всех миров b и c, таких, что $Rabc$ (R - отношение возможности) B ложно в b или C истинно в c.

Интерпретация

За последнее время было разработано три интерпретации, основанных на теориях, описывающих природу информации:

- интерпретация Данна
- интерпретация Барвиса и Ресталла
- интерпретация Мареса

Интерпретация

Интерпретация тернарного отношения, принадлежащая *Данну*, продолжает идеи Уркухартовой семантики полурешёток. В семантике Уркухарта, вместо того, чтобы трактовать значения переменных как возможные (или невозможные) миры, они рассматриваются как фрагменты информации. В семантике полурешёток оператор "o" принимает два операнда, и формула $a\ o\ b$ означает комбинацию информаций в a и b.

Интерпретация

Семантика Рутли-Мейера не содержит никакой операции “комбинирования” миров, но мы можем получить примерно такой же результат с помощью тернарного отношения. В понимании Данна, $Rabc$ означает, что “комбинация информационных состояний a и b содержится в информационном состоянии c.” (Dunn 1986).

Интерпретация

Интерпретация Джона Барвиса (Jon Barwise) (1993) иРесталла (Restall) (1996):
С этой точки зрения миры можно представить как информационно-теоретические “сайты” или “каналы”. Сайт - это контекст, в котором получена информация, а канал – это средство, через которое получена информация.

Интерпретация

Применяя теорию каналов для интерпретации семантики Рутли-Мейера, мы считаем, что $Rabc$ имеет следующий смысл: a – это информационно-теоретический канал между сайтами b и c. Тогда мы полагаем, что $B \to C$ истинно в a – это значит, что всякий раз, когда a соединяет сайт b, на котором получают B, с сайтом c, то на сайте c получают C.

Интерпретация

Интерпретация Мареса (Mares) (1997):
Используется теория информации по Дэвиду Израэлю и Джону Перри (Israel and John Perry (1990)). Согласно их теории, помимо другой информации мир содержит информационные связи такие, как законы природы, обычаи и т.д. С этой точки зрения $Rabc$ тогда и только тогда, когда, согласно информационным связям мира a, вся информаций, которую несет несет мир b, содержится в c.

Интерпретация

Например, Ньютонов мир содержит информацию о том, что любая материя притягивает другую материю. В терминах этой теории информации этот мир содержит информацию о том, что две материальные вещи несут информацию о том, что они притягивают друг друга. Таким образом, например, если a – Ньютонов мир, и информация о том, что x и y материальны, содержится в b, тогда информация о том, что x и y притягивают друг друга, содержится в c.

Семантика. Продолжение

Самого со себе использования тернарного отношения не достаточно чтобы избежать парадоксов импликации. Из всего, о чем мы говорили до сих пор, не очевидно, как семантика позволяет избежать парадоксов вроде $(p \wedge \neg p) \to q$ и $p \to (q \vee \neg q)$. Эти парадоксы избегаются через включение *противоречивых* и *недвузначных* миров в семантику. Под противоречивым миром понимается мир, где не действует закон противоречия $p \wedge \neg p \equiv F$, а под недвузначным – мир, где не действует закон исключенного третьего $p \vee \neg p \equiv T$.

Семантика. Продолжение

Например, если невозможны миры, в которых истинно $(p \wedge \neg p)$, то, согласно нашему условию истинности для операции $\to$, формула $(p \wedge \neg p) \to q$ также будет истинной всюду. Аналогично, если во всех мирах истинно $(q \vee \neg q)$, то во всех мирах истинно $p \to (q \vee \neg q)$.

Семантика. Продолжение

Это приводит нас к семантике для операции отрицания. Использование недвузначных и противоречивых миров требует неклассического условия истинности для отрицания. В начале 70-х, Ричард и Вал Рутли (Richard и Val Routley) изобрели их “оператор звездочку” для трактовки отрицания. Этот оператор является оператором над мирами. Для каждого мира a существует мир $a*$. И $\neg A$ истинно в a тогда и только тогда, когда A ложно в $a*$.

Семантика. Продолжение

И снова у нас возникают трудности с интерпретацией части формальной семантики. Одна интерпретация звездочки Рутли принадлежит Данну (1993). Данн использовал бинарное отношение C для миров. Cab означает, что b совместимо с a. Тогда $a*$ - это максимальный мир (т.е. мир, содержащий максимум информации), из тех, что совместимы с a.

Теория доказательств

В настоящее время существует множество подходов к теории доказательств для релевантной логики. Тут и последовательные вычисления по Грегори Минтсу и Данну (Gregory Mints (1972) и J.M. Dunn (1973)) для фрагмента (без отрицания) логики R и элегантный и очень общий подход, названный "Display Logic"Нюэля Белнапа (Nuel Belnap) (1982).

Теория доказательств

Система естественного вывода Андерсона и Белнапа для релевантной логики R основана на системах естественного вывода Фитча (Fitch) для классической и интуиционистской логики.

Ссылки

- http://psi-logic.narod.ru/psi/rele.htm
- https://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/index.html
- https://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/logics.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Relevance_logic
- Сидоренко Е.А. Релевантная логика. – М.: 2000. – 243 с.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Релевантная логика

Симоненко Е.А., <easimonenko@mail.ru>

Санкт-Петербург, 2018