



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Релевантная логика

Симоненко Е.А., <[easimonenko@mail.ru](mailto:easimonenko@mail.ru)>

Санкт-Петербург, 2018



# Содержание

Мотивация

Основная идея

Семантика

Интерпретация

Семантика. Продолжение

Теория доказательств

Релевантные логические системы

Ссылки



# Мотивация

- ✓ “relevant” – относящийся к делу
- ✓ попытка избежать парадоксов материальной и строгой импликации

# Мотивация

- ✓ Материальная импликация (классическая логика и булева алгебра):

$$A \implies B \equiv \neg A \vee B$$

- ✓ Строгая импликация (модальная логика):

$$A \implies B \equiv \forall w \neg A(w) \vee B(w)$$



# Мотивация

Парадоксы материальной импликации:

✓  $p \implies (q \implies p)$

✓  $\neg p \implies (p \implies q)$

✓  $(p \implies q) \vee (q \implies p)$



# Мотивация

Парадоксы строгой импликации:

$$✓ (p \wedge \neg p) \implies q$$

$$✓ p \implies (q \implies q)$$

$$✓ p \implies (q \vee \neg q)$$



# Мотивация

Hugh McColl, 1908

Формулы противоречат интуиции: если  $A$ , то  $B$ .  
Посылка никак не относится к заключению.

## Основная идея

- ✓ В парадоксах неправильно то, что посылка и заключение затрагивают совершенно различные темы.
- ✓ Принцип общих переменных: никакая формула вида  $A \implies B$  не может быть доказана, если формулы  $A$  и  $B$  не имеют общих пропозициональных переменных; никакое умозаключение не может быть истинным, если посылка и заключение не имеют хотя бы одной общей пропозициональной переменной.





# Семантика

Семантика тернарного отношения Рутли и Мейера (Richard Routley и Robert K. Meyer).

“Тернарное” - значит отношение имеет три параметра, например:  $X$  ударил предметом  $Y$  по  $Z$ .

Эта семантика - развитие "семантики полурешеток" Аласдаира Уркухарта (Alasdair Urquhart) (Urquhart 1972).

## Семантика

Как и семантика модальной логики, семантика релевантной логики связывает отношение истинности с мирами. Но Рутли и Мейер сделали модальную логику чуть лучше, используя трехместное отношение между мирами. Это допускает миры, в которых нельзя доказать  $q \implies q$  и, как следствие, миры, где нельзя доказать  $p \implies (q \implies q)$ . Их условие истинности для импликации таково:

$B \implies C$  истинно в мире  $a$  тогда и только тогда, когда для всех миров  $b$  и  $c$ , таких, что  $Rabc$  ( $R$  - отношение возможности)  $B$  ложно в  $b$  или  $C$  истинно в  $c$ .



# Интерпретация

За последнее время было разработано три интерпретации, основанных на теориях, описывающих природу информации. Одна интерпретация тернарного отношения, принадлежащая Данну, продолжает идеи Уркухартовой семантики полурешёток. В семантике Уркухарта, вместо того, чтобы трактовать значения переменных как возможные (или невозможные) миры, они рассматриваются как фрагменты информации. В семантике полурешёток оператор " $\circ$ " принимает два операнда, и формула  $a \circ b$  означает комбинацию информации в  $a$  и  $b$ .



# Интерпретация

Семантика Рутли-Мейера не содержит никакой операции “комбинирования” миров, но мы можем получить примерно такой же результат с помощью тернарного отношения. В понимании Данна,  $Rabc$  означает, что “комбинация информационных состояний  $a$  и  $b$  содержится в информационном состоянии  $c$ .” (Dunn 1986).

# Интерпретация

Другая интерпретация предложена Джоном Барвисом (Jon Barwise) (1993) и развита у Ресталла (Restall) (1996). С этой точки зрения миры можно представить как информационно-теоретические “сайты” или “каналы”. Сайт - это контекст, в котором получена информация, а канал – это средство, через которое получена информация.

# Интерпретация

Применяя теорию каналов для интерпретации семантики Рутли-Мейера, мы считаем, что  $Rabc$  имеет следующий смысл:  $a$  – это информационно-теоретический канал между сайтами  $b$  и  $c$ . Тогда мы полагаем, что  $B \implies C$  истинно в  $a$  – это значит, что – всякий раз, когда  $a$  соединяет сайт  $b$ , на котором получают  $B$ , с сайтом  $c$ , то на сайте  $c$  получают  $C$ .



# Интерпретация

Аналогично Марес (Mares) (1997) использовал теорию информации, Дэвида Израэля и Джона Перри (Israel and John Perry (1990)). Согласно их теории, помимо другой информации мир содержит информационные связи такие, как законы природы, обычаи и т.д.

Например, Ньютонов мир содержит информацию о том, что любая материя притягивает другую материю. В терминах этой теории информации этот мир содержит информацию о том, что две материальные вещи несут информацию о том, что они притягивают друг друга.



# Интерпретация

С этой точки зрения  $Rabc$  тогда и только тогда, когда, согласно информационным связям мира  $a$ , вся информация, которую несет мир  $b$ , содержится в  $c$ . Таким образом, например, если  $a$  – Ньютонов мир, и информация о том, что  $x$  и  $y$  материальны, содержится в  $b$ , тогда информация о том, что  $x$  и  $y$  притягивают друг друга, содержится в  $c$ .





## Семантика. Продолжение

Самого со себе использования тернарного отношения не достаточно чтобы избежать парадоксов импликации. Из всего, о чем мы говорили до сих пор, неочевидно, как семантика позволяет избежать парадоксов вроде  $(p \wedge \neg p) \implies q$  и  $p \implies (q \vee \neg q)$ . Эти парадоксы избегаются через включение противоречивых и недвuzначных миров в семантику.

Под противоречивым миром понимается мир, где не действует закон противоречия  $p \wedge \neg p \equiv F$ , а под недвuzначными мир, где не действует закон исключенного третьего  $p \vee \neg p \equiv T$ .



## Семантика. Продолжение

Например, если невозможны миры, в которых истинно  $(p \wedge \neg p)$ , то, согласно нашему условию истинности для операции  $\implies$ , формула  $(p \wedge \neg p) \implies q$  также будет истинной всюду. Аналогично, если во всех мирах истинно  $(q \vee \neg q)$ , то во всех мирах истинно  $p \implies (q \vee \neg q)$ .



## Семантика. Продолжение

Это приводит нас к семантике для операции отрицания. Использование недвучных и противоречивых миров требует неклассического условия истинности для отрицания. В начале 70-х, Ричард и Вал Рутли (Richard и Val Routley) изобрели их “оператор звездочку” для трактовки отрицания. Этот оператор является оператором над мирами. Для каждого мира  $a$  существует мир  $a^*$ . И  $\neg A$  истинно в  $a$  тогда и только тогда, когда  $A$  ложно в  $a^*$ .



## Семантика. Продолжение

И снова у нас возникают трудности с интерпретацией части формальной семантики. Одна интерпретация звездочки Рутли принадлежит Данну (1993). Данн использовал бинарное отношение  $C$  для миров.  $Cab$  означает, что  $b$  совместимо с  $a$ . Тогда  $a^*$  - это максимальный мир (т.е. мир, содержащий максимум информации), из тех, что совместимы с  $a$ .



# Теория доказательств

В настоящее время существует множество подходов к теории доказательств для релевантной логики. Тут и последовательные вычисления по Грегори Минтсу и Данну (Gregory Mints (1972) и J.M. Dunn (1973)) для фрагмента (без отрицания) логики  $R$  и элегантный и очень общий подход, названный "Display Logic" Нюэля Белнапа (Nuel Belnap) (1982).



# Теория доказательств

Система естественного вывода Андерсона и Белнапа для релевантной логики  $R$  основана на системах естественного вывода Фитча (Fitch) для классической и интуиционистской логики.

# Релевантные логические системы

- ✓ Логика  $E$  релевантного следования (Андерсон, Белнап).
- ✓ Система  $R$  релевантной импликации (Андерсон, Белнап).
- ✓ Логика  $NR$  на базе логики  $R$  с оператором необходимости (Мейер).
- ✓ Логики  $NR$  и  $E$  имеют существенные различия (Максимова).
- ✓ Слабая система  $S$  (Мейер, Мартин).



## Релевантные логические системы

Среди аргументов в пользу слабых систем то, что, в отличие от  $R$  или  $E$ , многие из них разрешимы. Другое свойство слабых систем, которое делает их привлекательными, – то, что они могут быть использованы для построения наивной теории множеств. Наивная теория множеств – это теория множеств, которая включает в себя аксиому свертывания, т.е. для любой формулы  $A(y)$ ,  $\exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow A(y))$ .





# Ссылки

- ✓ [https://en.wikipedia.org/wiki/Relevance\\_logic](https://en.wikipedia.org/wiki/Relevance_logic)
- ✓ <http://psi-logic.narod.ru/psi/rele.htm>
- ✓ Сидоренко Е.А. Релевантная логика. – М.: 2000. – 243 с.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Релевантная логика

Симоненко Е.А., <[easimonenko@mail.ru](mailto:easimonenko@mail.ru)>

Санкт-Петербург, 2018