

ELIAS SALOMÃO HELOU NETO

**ALGORITMOS INCREMENTAIS COM  
APLICAÇÕES EM TOMOGRAFIA  
COMPUTADORIZADA**

*Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica da Universidade Estadual de Campinas como requisito  
parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.*

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Rodolfo De Pierro

CAMPINAS

2009

# ALGORITMOS INCREMENTAIS COM APLICAÇÕES EM TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

*Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por ELIAS SALOMÃO HELOU NETO e aprovada pela comissão julgadora.*

*Campinas, 19 de maio de 2009*



---

Prof. Dr. Álvaro Rodolfo De Pierro

*Orientador*

## BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Álvaro Rodolfo De Pierro;  
Prof. Dr. Nir Cohen;  
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa;  
Prof. Dr. Hae Yong Kim;  
Prof. Dr. Sergio Shiguemi Furui;  
Prof. Dr. Antônio José da Silva Neto.

*Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.*

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Helou Neto, Elias Salomão
H369a Algoritmos incrementais com aplicações em tomografia computadorizada / Elias Salomão Helou Neto -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.
Orientador : Álvaro Rodolfo De Pierro
Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
1.Tomografia computadorizada. 2.Métodos iterativos (Matemática). 3.Amostragem compressiva. 4.Otimização matemática. I. De Pierro, Álvaro Rodolfo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Incremental algorithms with applications to computerized tomography

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Computerized tomography. 2. Iterative methods.  
3.Compressive sampling. 4. Mathematical optimization.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Álvaro Rodolfo De Pierro (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Nir Cohen (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Hae Yong Kim (USP)  
Prof. Dr. Sergio Shiguemi Furuie (USP)  
Prof. Dr. Antonio José da Costa Neto (UERJ)

Data da defesa: 23/04/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 23 de abril de 2009 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). ÁLVARO RODOLFO DE PIERRO**



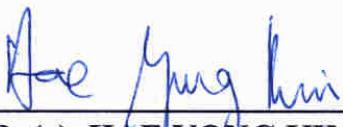
---

**Prof(a). Dr(a). NIR COHEN**



---

**Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA**



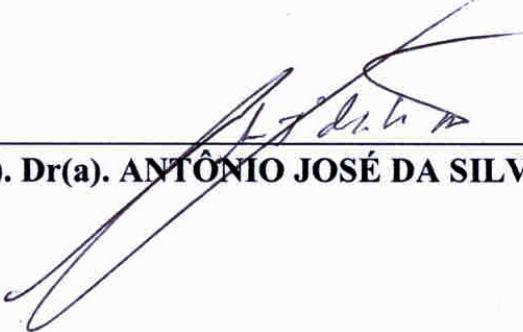
---

**Prof(a). Dr(a). HAE YONG KIM**



---

**Prof(a). Dr(a). SERGIO SHIGUEMI FURUIE**



---

**Prof.(a). Dr(a). ANTÔNIO JOSÉ DA SILVA NETO**

*Dedico este trabalho às minhas filhas Maria Clara, um raio de luz em nossas vidas, e Alice, cuja chegada aguardamos ansiosamente.*

# RESUMO

O problema de viabilidade convexa é um campo fértil de pesquisa que deu origem a uma grande quantidade de algoritmos iterativos, tais como POCS, ART, Cimmino e uma miríade de variantes. O motivo para tal interesse é o amplo leque de aplicabilidade que algoritmos gerais para a solução de problemas desse tipo podem alcançar. Dentre tais aplicações encontra-se a reconstrução de imagens em tomografia, caso que geralmente apresenta uma estrutura especial de esparsidade e tamanhos gigantescos. Também bastante estudados por seu interesse prático e teórico são problemas envolvendo a minimização irrestrita de funções convexas. Aqui, novamente, a variada gama de aplicações torna impossível mencionar uma lista minimamente abrangente. Dentre essas a tomografia é, outra vez, um exemplo de grande destaque.

No presente trabalho desenvolvemos uma ponte que permite o uso de uma variedade de métodos para viabilidade em conjunto com algoritmos de otimização para obter a solução de problemas de otimização convexa com restrições. Uma teoria geral de convergência é apresentada e os resultados teóricos são especializados em métodos apropriados para problemas de grande porte.

Tais métodos são testados em experimentos numéricos envolvendo reconstrução de imagens tomográficas. Esses testes utilizam-se da teoria de amostragem compressiva desenvolvida recentemente, através da qual conseguimos obter resultados sem par na reconstrução de imagens tomográficas a partir de uma amostragem angular altamente esparsa da transformada de Radon. Imagens obtidas a partir de

dados simulados são recuperadas perfeitamente com menos de 1/20 das amostras classicamente necessárias. Testes com dados reais mostram que o tempo de uma leitura SPECT pode ser reduzido a até 1/3 do tempo normalmente utilizado, sem grande prejuízo para as reconstruções.

# ABSTRACT

The convex feasibility problem is a research field which has originated a large variety of iterative algorithms, such as POCS, ART, Cimmino and a myriad of variants. The reason for such interest is the wide array of applicability that general algorithms for this kind of problem may reach. Among such applications there is tomographic image reconstruction, instance that generally presents a special sparsity structure and huge sizes. Also widely studied because its practical and theoretical interests are problems involving unconstrained minimization of convex functions. Here, again, the huge array of applications makes it impossible to mention even a minimal list. Among these, once more, tomography is a major example.

In the present work we have developed a bridge that allows the use of a variety of methods for feasibility in conjunction with optimization algorithms in order to obtain the solution for convex optimization problems with restrictions. A general convergence theory is presented and the theoretical results are specialized into methods useful for large scale problems.

These methods are tested in experiments involving tomographic image reconstruction. Such tests make use of the recently developed compressive sensing theory, through which we have been able to obtain unmatched results in tomographic image reconstruction from highly sparse angular sampling from the Radon transform. Images obtained from simulated data are perfectly reconstructed using less than 1/20 from the classically needed. Tests with real data show that the time of a SPECT scan can be reduced to 1/3 of the usual, without too much image deterioration.

# LISTA DE FIGURAS

1	Geometria da transformada de Radon no plano . . . . .	23
2	Transformada de Radon do <i>phantom</i> de Shepp-Logan . . . . .	23
3	Tomografia por Transmissão . . . . .	24
4	Tomografia por Emissão . . . . .	24
5	Reconstrução por retroprojeção filtrada . . . . .	45
6	Projeções e projeções filtradas . . . . .	45
7	Efeito do ruído na reconstrução por retroprojeção filtrada . . . . .	46
8	Retroprojeção filtrada com altas freqüências cortadas . . . . .	46
9	Comparação entre os operadores Incremental e Agregado . . . . .	80
10	Exemplo de variações do operador de viabilidade . . . . .	88
11	Comparação entre operadores de otimalidade . . . . .	94
12	Efeito da diminuição do número de vistas . . . . .	109
13	Reconstruções por ART e por mínima variação total . . . . .	109
14	Projeções do modelo cardíaco . . . . .	110
15	Sinogramas do modelo cardíaco . . . . .	111
16	Reconstruções do modelo cardíaco por FBP . . . . .	112
17	Reconstruções do modelo cardíaco por FBP . . . . .	113
18	Reconstruções do modelo cardíaco por FBP . . . . .	114
19	Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV . . . . .	115
20	Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV . . . . .	116

---

21 Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV . . . . .	117
22 Geometria da transformada de Radon de imagens discretas . . . . .	137

# LISTA DE ALGORITMOS

1	Retroprojeção filtrada . . . . .	41
2	ART . . . . .	50
3	POCS . . . . .	52
4	Cimmino . . . . .	53
5	EM . . . . .	55
6	OS-EM . . . . .	56
7	RAMLA . . . . .	57
8	BSREM . . . . .	58
9	OS-SPS . . . . .	59
10	Projeção de Imagem Discreta . . . . .	141
11	Sinal . . . . .	142
12	Ajusta . . . . .	142
13	Linha . . . . .	142
14	Coluna . . . . .	142

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	A Transformada de Radon . . . . .	20
1.1.1	Transformada de Radon Atenuada . . . . .	22
1.2	Tomografia Computadorizada . . . . .	25
1.2.1	Tomografia por Transmissão . . . . .	26
1.2.2	Tomografia por Emissão . . . . .	27
1.3	A Transformada de Radon no Espaço de Fourier . . . . .	31
1.3.1	Transformada de Fourier . . . . .	31
1.3.2	Teorema da Fatia de Fourier . . . . .	32
1.4	Retroprojeção Filtrada . . . . .	33
1.5	Retroprojeção Filtrada Discreta . . . . .	36
1.5.1	Transformada Finita de Fourier . . . . .	36
1.5.2	Discretizando a Projeção Filtrada . . . . .	40
1.5.3	O Algoritmo . . . . .	41
1.6	Usando o Algoritmo de Retroprojeção Filtrada . . . . .	43
1.7	Discretizando o Problema de Tomografia . . . . .	47
1.7.1	Tomografia como Problema Inverso . . . . .	48
1.8	Métodos Iterativos . . . . .	49
1.8.1	Técnica de Reconstrução Algébrica – ART . . . . .	50

1.8.2	ART Para Sistemas Inconsistentes . . . . .	51
1.8.3	Projeção sobre Convexos – POCS . . . . .	52
1.8.4	Cimmino . . . . .	53
1.8.5	Algoritmo EM . . . . .	54
1.8.6	OS-EM . . . . .	55
1.8.7	RAMLA . . . . .	56
1.8.8	BSREM . . . . .	58
1.8.9	OS-SPS . . . . .	58
1.9	Discussão . . . . .	59
<b>2</b>	<b>MÉTODOS DE SUBGRADIENTES INCREMENTAIS</b>	<b>61</b>
2.1	Teoria Geral . . . . .	64
2.1.1	Tamanhos de Passo Decrescentes . . . . .	65
2.1.2	Tamanhos de Passo do Tipo Polyak . . . . .	72
2.2	Os Algoritmos . . . . .	73
2.2.1	Operadores de Optimalidade . . . . .	73
2.2.2	Operadores de Viabilidade . . . . .	81
2.2.3	Variações . . . . .	86
2.3	Testes Numéricos . . . . .	90
2.3.1	O Problema . . . . .	90
2.3.2	Os Métodos . . . . .	91
2.3.3	Resultados . . . . .	93
2.4	Discussão . . . . .	96
<b>3</b>	<b>RECONSTRUÇÃO A PARTIR DE POUCAS PROJEÇÕES</b>	<b>99</b>
3.1	Amostragem Compressiva: a Mágica da $\ \cdot\ _1$ . . . . .	99
3.1.1	Um Experimento Estimulante . . . . .	100

3.1.2	Teoria . . . . .	102
3.2	Testes com Dados Reais . . . . .	104
3.3	Discussão . . . . .	107
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>119</b>
<b>A TRANSFORMADA DE RADON DE ELIPSES</b>		<b>129</b>
A.1	Propriedades Básicas . . . . .	129
A.2	A Transformada de uma Elipse . . . . .	132
<b>B TRANSFORMADA DE RADON DE IMAGENS DISCRETAS</b>		<b>135</b>
B.1	Representação Discreta de Imagens . . . . .	135
B.2	Transformada de Radon de Imagens Discretas . . . . .	137

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Os resultados expostos na presente tese compõem duas partes relativamente independentes, mas com um elo em comum entre si: a tomografia computadorizada como aplicação. O capítulo 2 é dedicado a um estudo teórico de uma nova classe bastante geral de algoritmos para otimização convexa. Tal classe contém diversos métodos, dentre os quais alguns que vêm sendo utilizados em reconstrução tomográfica de imagens e versões generalizadas desses. Essa parte tem um interesse primariamente teórico, mas apresenta alguns resultados numéricos obtidos com casos especiais dos algoritmos expostos. Eles servem tanto para dar uma idéia do comportamento típico dos métodos apresentados como para suavizar a transição para a próxima parte do texto.

No capítulo 3 discutimos a aplicação da que recentemente se tornou conhecida como “teoria de amostragem compressiva” em tomografia por emissão. Os resultados são extremamente positivos, indicando que uma drástica redução no tempo de aquisição de uma leitura tomográfica é possível. Nesse capítulo não são encontrados desenvolvimentos teóricos inéditos, mas o potencial da nova aplicação é bastante grande. Essa parte também valida numericamente os resultados obtidos no capítulo anterior pois a maioria das reconstruções é obtida por meio de um algoritmo que é um caso particular deles.

Antes de iniciar a exposição dos resultados originais, entretanto, uma breve apresentação do assunto se faz necessária. Tal é o papel do restante desta introdução. Nela discutimos os fundamentos matemáticos da tomografia computadorizada, apresentamos algumas técnicas tomográficas comuns e chegamos a uma fórmula analítica para a solução do problema mais básico. O algoritmo de retroprojeção filtrada é apresentado com um nível razoável de detalhe. Depois discutimos métodos iterativos utilizados na solução de problemas em tomografia e correlacionamos eles entre si de uma forma que procura mostrar o desenvolvimento que culminou nos resultados teóricos que compõem o núcleo do próximo capítulo.

## 1.1 A TRANSFORMADA DE RADON

A formulação matemática do problema mais trivial em tomografia computadorizada tem uma solução analítica conhecida desde 1917, quando a mesma foi publicada por Johann Radon. Para detalhes o leitor pode verificar as notas bibliográficas em [51, seção II.7]. A presente seção é dedicada a uma apresentação dos princípios básicos da modelagem matemática; uma solução analítica será obtida em seções posteriores.

O problema matemático fundamental que modela a obtenção de imagens através das técnicas de tomografia computadorizada remonta a recuperar uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a partir do conhecimento de suas integrais de linha ao longo de retas. Mais especificamente, queremos determinar  $f$  dada a seguinte função de  $(\theta, t)$ :

$$\mathcal{R}[f](\theta, t) := \int_{\mathbb{R}} f(t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}) ds. \quad (1.1)$$

Também podemos denotar  $\mathcal{R}_\theta[f](t) := \mathcal{R}[f](\theta, t)$  ou, quando não houver ambigüidade com relação a  $f$ ,  $p_\theta(t) := \mathcal{R}_\theta[f](t)$ . A função  $p_\theta = \mathcal{R}_\theta[f]$  é conhecida como uma *projeção* de  $f$ .

A aplicação  $f \mapsto \mathcal{R}[f]$  é conhecida como *transformada de Radon* ou simplesmente TR, aqui no caso especial do plano. Para três ou mais dimensões a transformada de

Radon é generalizada através de integrais sobre hiperplanos, mas para a reconstrução de imagens tomográficas tridimensionais ainda teremos os dados fornecidos como integrais através de retas. Por esse motivo a transformação que leva uma função ao conjunto de suas integrais de linha é conhecida como *transformada dos raios x* ou *transformada da tomografia*, enquanto “transformada de Radon” refere-se a integrais sobre hiperplanos.

Como nos concentraremos no caso bidimensional, onde ambos conceitos coincidem, podemos utilizar os dois termos indistintamente. Além de razões históricas, contribui para a preferência do termo “transformada de Radon” o fato do conhecimento da transformada dos raios x implicar, por integração, o conhecimento da TR e, portanto, saber inverter essa última é um problema mais fundamental do que o de inverter a transformada da tomografia.

Para compreendermos melhor o significado geométrico da definição da transformada de Radon, vejamos um exemplo. Podemos apresentar  $f$  como uma imagem se exibirmos o seu valor em cada um dos pontos do plano de acordo com uma escala de tons de cinza (ou de cores), assim como na figura 1. Nesse exemplo usamos o *phantom de Shepp-Logan*, uma imagem artificial composta por uma soma de funções indicadoras de elipses (veja uma descrição em [43]). A barra à direita na figura não faz parte do *phantom*, mas serve para orientar sobre a escala utilizada. Ainda podemos ver, sobrepostos à imagem, os eixos  $t$ ,  $x$ ,  $y$  e parte do caminho de integração para um dado par  $(\theta, t')$ , que aparece como o segmento de reta tracejado. Comparando os eixos e segmentos do desenho com a definição fica fácil compreender os papéis de  $\theta$  e  $t'$  em  $\mathcal{R}[f](\theta, t')$ : o ângulo  $\theta$  determina a inclinação do eixo  $t$  com relação à horizontal e a integral da função é efetuada sobre a reta perpendicular a esse eixo que passa por  $t = t'$ . Para completar, na parte superior da figura apresenta-se um gráfico de  $\mathcal{R}_\theta[f](t)$  como função de  $t$ . O gráfico foi girado de forma que ambos eixos  $t$  tenham direções coincidentes, assim as influências das diversas características da imagem na transformada ficam evidenciadas.

Da definição (1.1, pg. 20) é óbvio que  $\mathcal{R}[f]$  é  $2\pi$ -periódica em  $\theta$ . Além disso, não é difícil chegarmos à conclusão de que  $\mathcal{R}[f](\theta + \pi, -t) = \mathcal{R}[f](\theta, t)$ , de forma que vemos que a informação além da faixa  $\theta \in [0, \pi]$  é redundante para o conhecimento da TR. Na figura 2 podemos ver a transformada de Radon do *phantom* de Shepp-Logan; esse tipo de representação de  $\mathcal{R}[f]$  como uma imagem no plano  $\theta \times t$  é conhecida como *sinograma*. Para ilustrar a propriedade de “reflexão” da transformada mostramos o intervalo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Note a linha pontilhada passando pela projeção mostrada na figura 1.

A transformada de Radon pode ser utilizada para encontrar retas em imagens e variações dela são usadas para a detecção paramétrica de figuras geométricas. Para nós, entretanto, essa transformada não é um instrumento, mas sim a forma como os dados do problema são apresentados. Para sermos capazes de reconstruir a função, devemos poder partir da figura 2 e chegar à imagem mostrada na figura 1, ou seja, desejamos formas de calcular a inversa  $\mathcal{R}^{-1}$ .

### 1.1.1 TRANSFORMADA DE RADON ATENUADA

Algumas modalidades de tomografia computadorizada não são modeláveis pela TR. Nesses casos pode ser útil introduzir a *transformada de Radon atenuada*:

$$\mathcal{R}^g[f](\theta, t) := \int_{\mathbb{R}} f(t\vartheta + s\vartheta') e^{-\int_{[s, \infty]} g(t\vartheta + r\vartheta') dr} ds, \quad (1.2)$$

onde  $\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  e  $\vartheta' = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ . Não discutiremos soluções analíticas para a inversão da TR atenuada, as quais apenas recentemente foram desenvolvidas [46, 54]. Ao invés disso limitaremos-nos a estudar uma fórmula para a inversão da TR e voltaremos diretamente a nossa atenção para os algoritmos iterativos, que possuem uma gama de aplicabilidade muito maior do que a dos métodos analíticos.

Na próxima seção discutimos aspectos básicos de alguns dos exemplos mais comuns de aplicações das duas transformadas descritas nesta seção em tomografia. Nesses métodos a aquisição dos dados corresponde, ao menos de maneira aproximada, à aplicação da TR (ou TR atenuada) na imagem desejada.

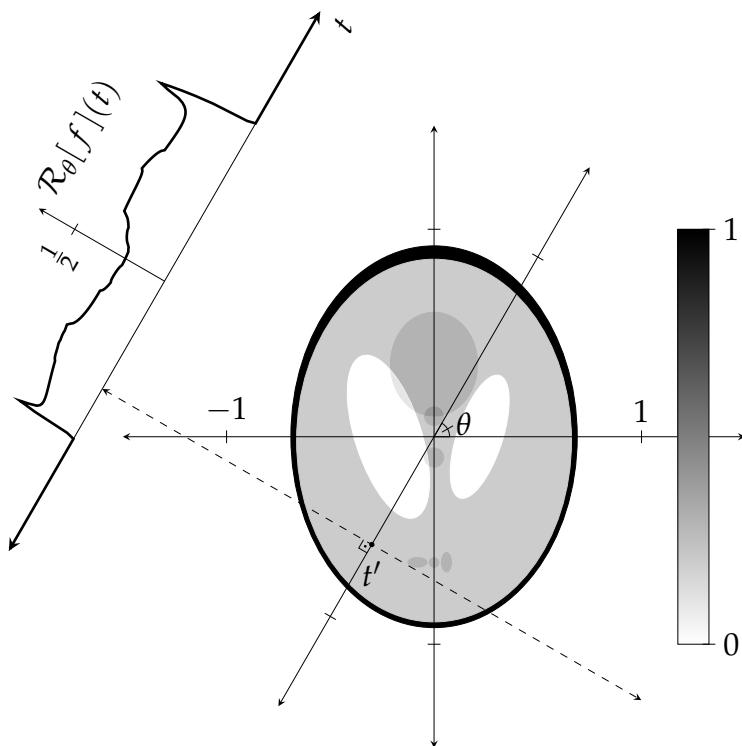


FIGURA 1 – Geometria da transformada de Radon no plano. A linha tracejada representa o caminho de integração de  $\mathcal{R}[f](\theta, t')$ . Também pode ser visto o gráfico da projeção  $\mathcal{R}_\theta[f]$  posicionado de acordo com o ângulo em que ela foi tomada.

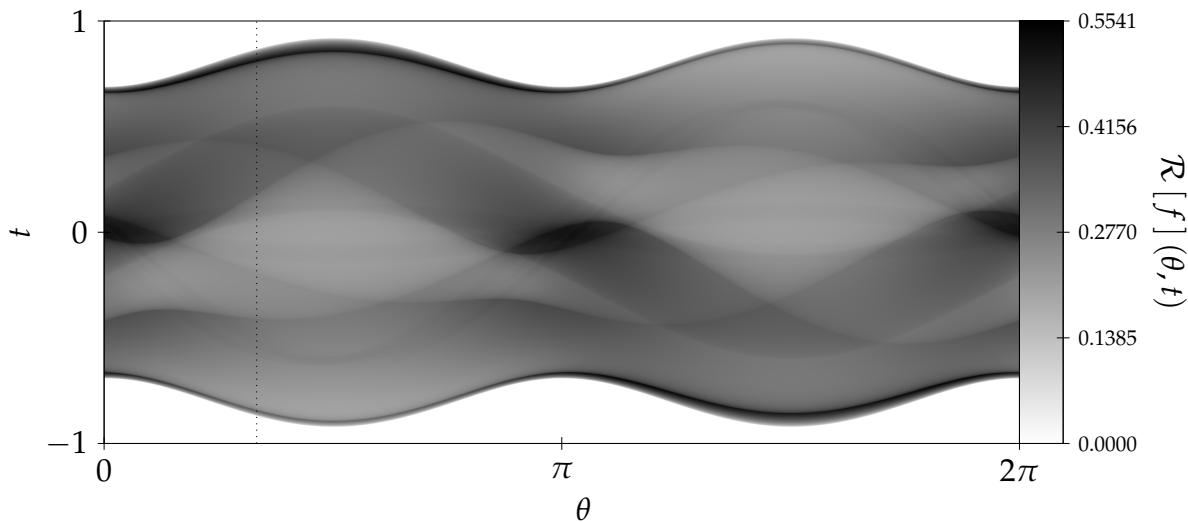


FIGURA 2 – Transformada de Radon do *phantom* de Shepp-Logan. Este é o sinograma da TR do *phantom* de Shepp-Logan, calculado com o auxílio de (A.2, pg. 133) e (A.1, pg. 129). A linha pontilhada mostra a projeção da figura 1.

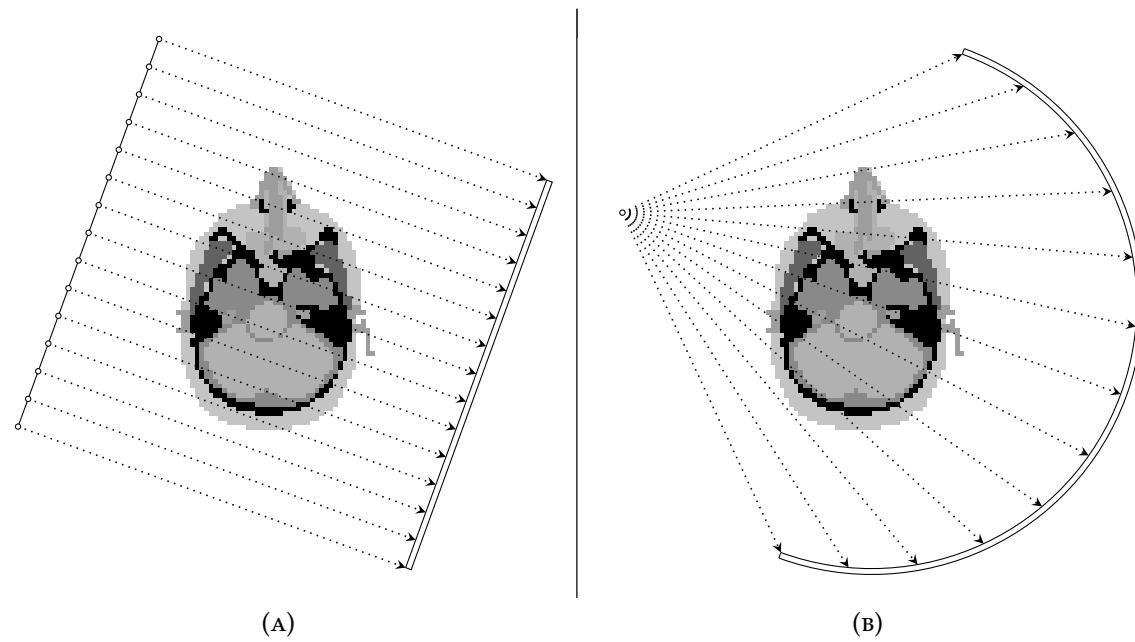


FIGURA 3 – Tomografia por Transmissão: (A) Exemplo de leitura por feixes paralelos; (B) Feixes divergentes.

---

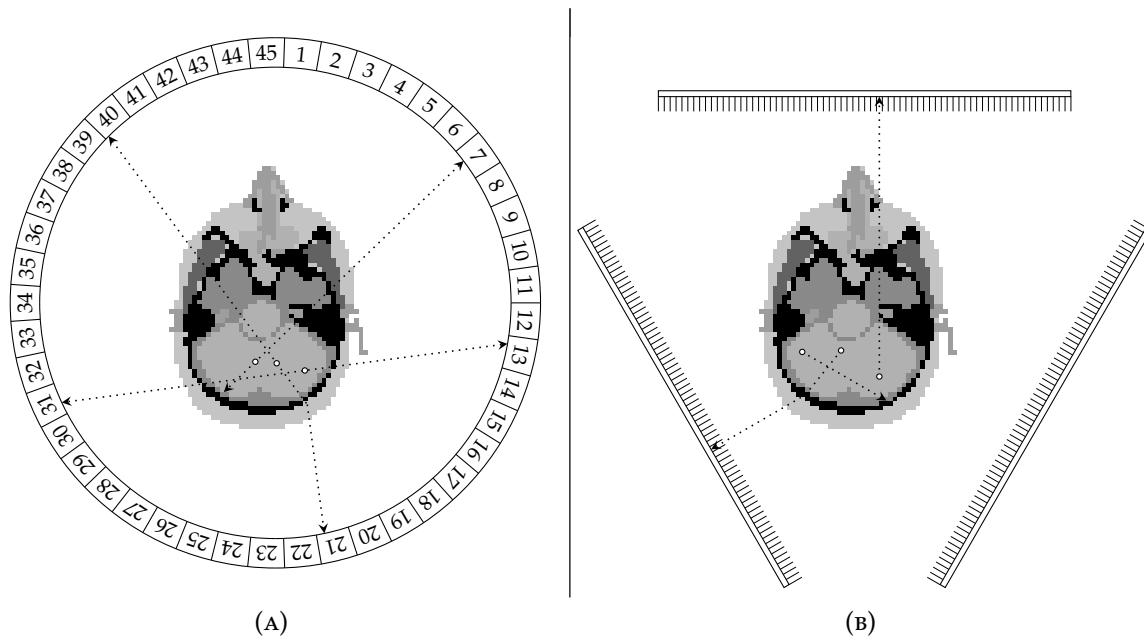


FIGURA 4 – Tomografia por Emissão: (A) Exemplo de leitura PET; (B) Esquema de leitura SPECT.

---

## 1.2 TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

Atualmente é comum para diversos fins de diagnóstico médico submetermo-nos a radiografias. Esse tipo de exame é capaz de mostrar estruturas internas do corpo do paciente de forma praticamente não invasiva e relativamente barata. A imagem radiográfica, técnica com óbvia utilidade médica, foi a primeira aplicação prática dos raios x, tendo sido popularizada imediatamente após a descoberta desses últimos em 1895 pelo físico alemão Wilhelm Conrad Röntgen.

Os raios x são capazes de atravessar a matéria, mas quanto maior o número atômico do elemento químico percorrido pelo raio maior é a taxa de absorção da radiação pelo meio. Dessa forma, numa radiografia, quando o raio atravessa meios mais leves chega mais intenso ao filme sensível do que quando passa por elementos de grande número atômico. Aí reside o potencial da técnica, já que diferentes compostos terminam por aparecer com intensidades diversas na imagem registrada no filme. Ossos são ótimos exemplos de órgãos que podem ser estudados facilmente dessa maneira porque atenuam muito mais a radiação do que os tecidos mais macios ao seu redor e essa característica é responsável por destacá-los na imagem obtida.

A imagem radiográfica apresenta a contribuição de todos os objetos que absorvem a radiação presentes entre o emissor de raios x e o filme sensível, o que torna a visualização de objetos diáfanos rodeados por outros mais densos difícil. Uma pergunta surge então naturalmente: caso fosse possível obter radiografias a partir de um número suficiente de ângulos, conseguiríamos reconstruir matematicamente a taxa de atenuação em todos os pontos no interior do objeto? A resposta, felizmente, é sim e essa é a idéia por trás da *tomografia computadorizada*. No restante desta seção e na próxima, entretanto, ainda não nos preocuparemos com a reconstrução, mas sim com o processo de aquisição dos dados e a modelagem do mesmo.

O termo *tomografia*, por si só, designa originalmente qualquer técnica não destrutiva destinada a obter imagens do interior de um objeto de estudo dado. O método utilizado (com raios x) antes do advento da tomografia computadorizada baseava-se

em princípios simples de geometria projetiva para eliminar influências de fora do plano de interesse, mas foi suplantado por técnicas de reconstrução matemática tão logo os computadores ficaram baratos e poderosos o suficiente para dar conta da carga computacional demandada pela aplicação. Hoje em dia “tomografia” é quase sinônimo de “tomografia computadorizada” e é com esse sentido que utilizamos o termo daqui por diante.

### 1.2.1 TOMOGRAFIA POR TRANSMISSÃO

A mais antiga técnica de tomografia computadorizada é aquela baseada nos raios x. As medidas tomadas por um tomógrafo desse tipo consistem nas intensidades detectadas de um feixe de raios x que atravessa o objeto de estudo em diversas posições e direções. O que interessa dessas medidas são, na realidade, as razões entre as intensidades detectadas e as dos feixes emitidos, pois elas nos fornecem as exponenciais negativas dos valores das integrais do coeficiente de atenuação linear ao longo das trajetórias dos raios x. A partir de um conjunto de dados desse tipo somos capazes de reconstruir matematicamente tal coeficiente nos pontos interiores do objeto, conforme veremos mais adiante.

De um modo geral, quando a leitura tomográfica consiste em transmitir algum sinal através do objeto de estudo para assim obter informação sobre a integral da quantidade de interesse ao longo do caminho percorrido pelo sinal, falamos em *tomografia por transmissão*. Em particular, o exemplo que mencionamos no parágrafo anterior é conhecido como *tomografia por raios x*. Nesse caso específico, o caminho percorrido pelo sinal enviado é uma reta. Muitas outras modalidades tomográficas também usam sinais que percorrem uma linha reta, o que lhes torna tratável através da transformada de Radon.

Com relação ao modelo físico, se denotarmos a intensidade emitida por  $I_e$  e a detectada por  $I_d$ , temos, de forma simplificada, para a tomografia por raios x:

$$\log \frac{I_e}{c I_d} = \mathcal{R}[f](\theta, t),$$

onde  $c$  é uma constante relacionada à distância emissor/detector e  $\mathcal{R}[f]$  é a transformada de Radon (1.1, pg. 20), figura 1. Em seções posteriores apresentaremos algoritmos eficientes que nos permitem aproximar  $f$  a partir de amostras de  $\mathcal{R}[f]$ .

A forma de amostragem utilizada numa leitura de tomografia por transmissão pode trazer importantes consequências práticas. Vejamos os exemplos ilustrados na figura 3, onde dois esquemas para a construção de um tomógrafo por transmissão podem ser vistos. No da esquerda são necessários diversos emissores direcionais, ou um único que se mova. A primeira hipótese encarece o aparelho enquanto a segunda prolonga o tempo de um exame. Esse tipo de geometria de aquisição é conhecido como leitura por *feixes paralelos*. Além disso, uma leitura completa compreende medidas efetuadas a diversos ângulos distintos e isso significa que todo o aparato de emissores e detectores (ou o objeto de estudo, o que pode ser muito inconveniente) deve ser girado por algum sistema mecânico.

O esquema à direita, entretanto, exibe uma solução mais engenhosa: ali vemos um único emissor capaz de iluminar toda uma região em formato de leque e um conjunto de detectores apropriadamente dispostos para captar as intensidades incidentes. Dessa forma a necessidade de emissores extras foi eliminada sem acréscimo para a duração do exame. Além do mais, todos os elementos estão dispostos em um círculo, facilitando a construção de um conjunto que gire para a aquisição dos dados. Essa geometria é conhecida como leitura por *feixes divergentes* e é a utilizada nos tomógrafos por raios x atuais.

### 1.2.2 TOMOGRAFIA POR EMISSÃO

Métodos de tomografia por transmissão costumam ter como objetivo estudar a constituição física de um objeto. Em aplicações médicas da tomografia por raios x, por exemplo, a anatomia de órgãos internos pode ser investigada pois eles possuem, entre si, coeficientes de atenuação diferentes e isso nos permite identificá-los em imagens obtidas por essa técnica. Em outros casos, porém, nosso interesse em um exame tomográfico pode ir além da anatomia. Em muitas circunstâncias o

metabolismo pode ter maior interesse, em outros casos podemos desejar acompanhar a dinâmica de um medicamento *in vivo*.

A idéia da *tomografia por emissão* é a de detectar eventos ocorridos no interior do objeto de estudo. Tais eventos costumam ser indicador de algum tipo de atividade e devem emitir sinais detectáveis de fora do objeto. Em aplicações médicas, as emissões são causadas por decaimento radioativo de algum marcador introduzido no paciente. A maioria dos elementos possui algum equivalente químico radioativo que, ao decair, emite radiação detectável por equipamentos apropriados. Se tais substitutos radioativos forem introduzidos em compostos que sabidamente tomam parte em algum processo metabólico que desejamos acompanhar, o conhecimento da sua distribuição dentro do paciente pode ser de extrema valia. Dois exemplos de modalidades tomográficas utilizam-se desse expediente: a *tomografia por emissão de pósitrons*, conhecida como PET e a *tomografia por emissão de fóton único*, ou SPECT.

Na PET, como indicado pelo nome, a radiação emitida pelo marcador é um pósitron. Essa partícula interage, após viajar alguns milímetros, com um elétron em uma reação onde ambos aniquilam-se dando origem a dois fótons viajando em direções (aproximadamente) opostas com uma energia bem definida. Se dispusermos detectores em volta do objeto de estudo, conforme ilustrado na figura 4A, poderemos detectar (quase) simultaneamente um par de fótons e deduzir a região do espaço onde ocorreu a emissão do pósitron. Na figura, essa situação é exemplificada pela coincidência detectada no par (13, 31) de detectores. O fato da detecção não ser exatamente simultânea abre a possibilidade de utilizarmos o tempo entre as excitações dos detectores como informação durante a reconstrução. Essa informação também pode ser útil no caso de mais de duas detecções (quase) simultâneas.

Outros efeitos estão presentes em uma leitura de PET. O mais evidente é o causado pela atenuação, como exemplificado pela detecção isolada ocorrida no elemento de número 7, na figura 4A. Esse efeito é responsável pela diminuição da relação sinal/ruído da PET, mas pode ser modelado de forma simples se alguma informação extra sobre a imagem for fornecida — geralmente uma leitura de tomografia por

transmissão. Outro efeito físico, o espalhamento, pode causar emparelhamentos errôneos, tais como o dos detectores (21, 40). Porém, uma vez que a energia dos fótons emitidos em uma aniquilação elétron-pósitron é bem determinada (511 KeV) e a partícula espalhada perde energia, é fácil detectar erros como esse e modelar o fenômeno junto com a atenuação.

Muitas das emissões em uma leitura PET são ignoradas porque geram pares em que ao menos um dos fótons não está em rota de colisão com o arranjo de detectores. Isso acarreta um menor número de detecções, o que diminui a qualidade dos dados. Uma solução parcial para o problema é utilizar diversos anéis de detectores arranjados como um cilindro e considerar as coincidências entre detectores de diversos anéis na reconstrução; tal expediente diminui as perdas de coincidências, contribuindo para uma diminuição do ruído estatístico. Pode-se transformar matematicamente uma reconstrução de PET tridimensional em uma série de reconstruções no plano mantendo o nível de qualidade e minimizando o custo computacional [29].

Desconsiderando a largura da tira que une dois detectores quaisquer podemos assumir que o número de detecções contadas em cada par é proporcional à integral da concentração de radioisótopo ao longo da reta que liga o par de detectores, exceto por um fator devido à atenuação. Se  $f$  for a concentração desejada e  $g$  o coeficiente de atenuação linear do objeto de estudo temos:

$$n_{i,k} e^{\mathcal{R}[g](\theta_{i,k}, t_{i,k})} = \mathcal{R}[f](\theta_{i,k}, t_{i,k}),$$

onde  $n_{i,k}$  é o número de coincidências detectadas no par  $(i, k)$ ,  $g$  representa o coeficiente de atenuação linear do objeto e  $f$  é a função que desejamos reconstruir. A exponencial do lado esquerdo da equação é facilmente obtida através de uma leitura por transmissão (muitos tomógrafos PET embutem a funcionalidade de um tomógrafo por raios X e são conhecidos como PET-CT), nos deixando com um problema idêntico ao de tomografia por transmissão. A dificuldade aqui é o menor controle sobre a geração do sinal utilizado, o que invariavelmente resulta em uma aquisição de dados menos precisa do que a obtida por métodos como a tomografia por raios X.

Por fim, apresentamos a SPECT, cujo princípio de funcionamento é similar ao da PET. A diferença é que, ao invés de emitir um pósitron, os radioisótopos utilizados geram um raio gama ao decair. Esse fóton será detectado por câmeras posicionadas em torno do paciente, como no esquema da figura 4B. Essas câmeras possuem colimadores que permitem apenas a passagem de fótons vindos de uma determinada direção, fornecendo assim a informação necessária para que a reconstrução seja possível. Tal expediente acaba por resultar em um desperdício de fótons. Se comparada à SPECT, a PET possui a vantagem de capturar todas as emissões não atenuadas que geram fótons no plano do anel de detectores, ao passo que na SPECT, grande parte dos fótons com trajetórias coplanares à câmera é desperdiçada. Esse esquema também torna impossível realizar uma leitura verdadeiramente tridimensional de SPECT; tudo que podemos obter é uma seqüência de fatias bidimensionais.

Os mesmos efeitos de espalhamento e atenuação da PET manifestam-se na SPECT (veja ilustração na figura 4B), mas no segundo caso a matemática torna-se mais sutil do que no modelo da PET. A razão para isso é que a atenuação não é constante ao longo de um possível caminho de integração, já que fótons emitidos em pontos mais distantes do detector possuem uma chance maior de sofrer atenuação. Já não é mais possível separar a atenuação e ficar com uma transformada de Radon simples, é necessário valermos-nos da transformada de Radon atenuada,  $\mathcal{R}^g[f]$ , definida em (1.2, pg. 22):

$$n_{\theta,t} = \mathcal{R}^g[f](\theta, t),$$

onde  $n_{\theta,t}$  é o número de fótons contados na posição  $t$  com a câmera no ângulo  $\theta$ ,  $g$  é o mapa de atenuação e  $f$  é a função a ser reconstruída. Deve ser notado que, mesmo dado  $g$ , a reconstrução analítica de  $f$  a partir de  $\mathcal{R}^g[f]$  é um problema mais complexo do que o de inverter  $\mathcal{R}[f]$ , cuja solução foi publicada somente em 2002 [46, 54]. Antes desses resultados, apenas métodos iterativos, baseados na discretização da transformada, costumavam ser aplicados para reconstrução com  $g$  conhecido. Existem, por outro lado, métodos para reconstrução sem o conhecimento

de  $g$  [13] que, em princípio, funcionam para PET e SPECT, mas os procedimentos são numericamente instáveis e dependem de ajuste fino de parâmetros para funcionar.

Por todos os motivos recém-discutidos, uma tomografia por emissão de pósitrons possui uma precisão maior do que uma por emissão de fóton único. Porém, a última técnica ainda é bastante popular por utilizar aparelhagem de custo menor e por permitir o uso de radioisótopos de meia-vida mais longa, tornando possível a instalação de tomógrafos mais distantes de centros produtores de radiofármacos.

## 1.3 A TRANSFORMADA DE RADON NO ESPAÇO DE FOURIER

Nesta seção apresentamos um simples e interessante resultado que relaciona uma projeção com a imagem no espaço de Fourier. A transformada de Fourier de uma projeção é igual a uma “fatia” da transformada de Fourier da imagem, o que permite o desenvolvimento de fórmulas de inversão para a transformada de Radon.

### 1.3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Aproveitamos para nos recordar da *transformada de Fourier*  $\mathcal{F}[f]$  (ou  $\hat{f}$ ) de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{F}[f](\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

A partir daqui denotaremos  $i := \sqrt{-1}$ . A *transformada inversa de Fourier*  $\mathcal{F}^{-1}[f]$  da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é definida de forma semelhante:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\omega) e^{ix\omega} d\omega.$$

Se denotarmos por  $\langle x | z \rangle$  o produto interno entre  $x, z \in \mathbb{R}^n$ , o par transformada/inversa pode ser definido para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \boldsymbol{\omega} | x \rangle} dx.$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\boldsymbol{\omega}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle x | \boldsymbol{\omega} \rangle} dx.$$

Também nos referimos a  $\mathcal{F}[f]$  como a representação de  $f$  no espaço de Fourier ou no espaço da freqüência.

Sob hipóteses adequadas sobre a função  $f$ , a transformada inversa de Fourier recupera a função original de forma que  $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}] = f$ . Não discutiremos tais hipóteses aqui em sua maior generalidade. Ao invés disso assumiremos, quando necessário, que  $f, \widehat{f} \in L^1_{\mathbb{R}^n}$ , caso em que a propriedade de inversão é válida, pois nossos propósitos são meramente ilustrativos.

Bastante importante é a representação de convoluções no espaço de Fourier. Definimos  $f * g$ , a convolução de  $f$  com  $g$ , como a seguinte integral:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt.$$

Se avaliarmos  $\widehat{f * g}$  teremos:

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) e^{-i\omega(x-t)} g(x - t) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(x-t)} g(x - t) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} g(x) dx dt \\ &= (\widehat{f}\widehat{g})(\omega). \end{aligned}$$

Portanto, no espaço de Fourier convoluções tornam-se simplesmente produtos.

### 1.3.2 TEOREMA DA FATIA DE FOURIER

Após essas preliminares podemos enunciar e demonstrar o conhecido

**TEOREMA 1.3.1** (da fatia de Fourier, da projeção). *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \in L^1_{\mathbb{R}^2}$ , então*

$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

*Demonstração.* Denotemos  $\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ . Começamos por recordar a definição de  $\widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$ :

$$\widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}.$$

Agora efetuamos uma rotação no sistema de coordenadas através da mudança de variáveis  $\mathbf{x} = \mathbf{M}_\theta \mathbf{t}$  onde  $\mathbf{M}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ :

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{M}_\theta \mathbf{t}) e^{-i\langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{M}_\theta \mathbf{t} \rangle} d\mathbf{t}.$$

Notemos que  $\langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{M}_\theta \mathbf{t} \rangle = \omega t_1$ , de forma que temos:

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}) e^{-i\omega t_1} dt. \quad (1.3)$$

Podemos, por outro lado, avaliar  $\widehat{p}_\theta$ :

$$\begin{aligned} \widehat{p}_\theta(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} p_\theta(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}) dt_2 e^{-i\omega t_1} dt_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}) e^{-i\omega t_1} dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Diante da hipótese de que  $f \in L^1_{\mathbb{R}^2}$ , fica claro que a integral em (1.3) existe e pode, pelo teorema de Fubini, (veja, por exemplo, [45, pg. 359]) ser avaliada pela seqüência de integrações unidimensionais acima, de onde concluímos que  $\widehat{p}_\theta(\omega) = \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ .  $\square$

O conhecimento de  $p_\theta(\omega)$  para qualquer par  $(\theta, \omega)$  permite, portanto, que conheçamos  $\widehat{f}$  em qualquer ponto. Utilizando a transformada inversa de Fourier é então possível reconstruir a imagem. Métodos que reconstroem a imagem preenchendo as amostras necessárias no espaço da freqüência por interpolação das amostras radiais fornecidas para depois utilizar a transformada inversa de Fourier são conhecidos como *métodos de Fourier* e têm a reputação de apresentarem uma reconstrução de qualidade inferior à dos algoritmos que apresentaremos na seção a seguir. Por essa razão não discutiremos tais métodos aqui, se houver interesse o leitor pode se dirigir a [52] para maiores detalhes.

## 1.4 RETROPROJEÇÃO FILTRADA

Uma outra maneira de inverter a TR via sua representação de Fourier é escrever  $\mathcal{F}^{-1}[f]$  em coordenadas polares. Dessa forma o teorema da projeção pode ser

aplicado diretamente sem necessidade de interpolação no espaço da freqüência, passo que introduz a maior parte dos problemas observados nas reconstruções obtidas pelos métodos de Fourier.

Agora já temos condições de propor uma fórmula para a inversão da transformada de Radon que será utilizada no *algoritmo de retroprojeção filtrada* logo a seguir. A expressão “retroprojeção filtrada” será também expressa pela sigla FBP, advinda do termo em inglês *filtered backprojection*.

**PROPOSIÇÃO 1.4.1** (retroprojeção filtrada). *Suponha que  $f, \hat{f} \in L^1_{\mathbb{R}^2}$ . Então vale a seguinte fórmula:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,\pi]} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \hat{p}_\theta(\omega) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\omega d\theta. \quad (1.4)$$

*Demonstração.* Começamos escrevendo a fórmula de inversão de Fourier em coordenadas polares. Para tanto utilizamos a mudança de variáveis  $\omega(\omega, \theta) = (\begin{smallmatrix} \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \end{smallmatrix})$ , da qual o determinante jacobiano é  $\omega$  [56, teorema 8.28]:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\omega) e^{i\langle x | \omega \rangle} d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+} |\omega| \hat{f}(\omega(\omega, \theta)) e^{i\langle x | \omega(\omega, \theta) \rangle} d\theta d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+} |\omega| \hat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\theta d\omega. \end{aligned}$$

Agora utilizamos o teorema da fatia de Fourier para obter:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+} |\omega| \hat{p}_\theta(\omega) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\theta d\omega.$$

Como  $p_{\theta+\pi}(t) = p_\theta(-t)$ , temos que  $\hat{p}_{\theta+\pi}(\omega) = \hat{p}_\theta(-\omega)$  e podemos reescrever a integral:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,\pi] \times \mathbb{R}} |\omega| \hat{p}_\theta(\omega) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\theta d\omega.$$

Uma vez que  $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{R}^2}$ , vemos que  $|\omega| \hat{p}_\theta(\omega) \in L^1_{[0,\pi] \times \mathbb{R}}$  e, portanto, a integração pode ser dividida em uma seqüência de operações unidimensionais para concluirmos:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,\pi]} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \hat{p}_\theta(\omega) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\omega d\theta. \quad \square$$

Na fórmula acima a integração interna pode ser reconhecida como uma operação de filtragem, ou seja, uma multiplicação no espaço de Fourier (é o que basta para nossos propósitos). Por isso definimos a *projeção filtrada*, a qual denotaremos por  $P(\theta, t)$  ou  $P_\theta(t)$ :

$$P_\theta(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \hat{p}_\theta(\omega) e^{it\omega} d\omega.$$

Se denotarmos  $\Omega(\omega) := |\omega|$  teremos uma forma mais compacta para essa definição:

$$P_\theta(t) = \mathcal{F}^{-1} [\Omega \hat{p}_\theta] (t).$$

A fórmula de *retroprojeção filtrada* (1.4) pode ser dada então por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi]} P_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta. \quad (1.5)$$

Note que o caminho de integração para  $\mathcal{R}[f](\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)$  passa por  $x$  e a integral acima representa a soma de  $P_\theta$  avaliada nos pares  $(\theta, t)$  cujas integrações em  $\mathcal{R}[f](\theta, t)$  passam por  $x$ . Essa operação é conhecida como *retroprojeção* (daí o nome dado à fórmula acima) e é importante o suficiente para merecer uma notação própria:

$$\mathcal{R}^*[f](x) := \int_{[0,\pi]} f(\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta.$$

A notação  $*$  é devida ao fato da retroprojeção ser o operador adjunto da transformada de Radon no sentido de que

$$\int_{[0,\pi] \times \mathbb{R}} \mathcal{R}[f](\theta, t) g(\theta, t) d\theta dt = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \mathcal{R}^*[g](x) dx.$$

Sob tal notação temos uma forma mais compacta da fórmula de inversão:

$$f(x) = \mathcal{R}^*[P](x).$$

Essa fórmula pode ser considerada como um caso especial da seguinte identidade [51, teorema II.1.3]:

$$\mathcal{R}^*[g]*f = \mathcal{R}^*[g*\mathcal{R}[f]].$$

Portanto, se escolhermos a função  $g$  de forma que  $\mathcal{R}^*[g]$  aproxime-se da distribuição  $\delta$  (a identidade da convolução), teremos  $\mathcal{R}^*[g*\mathcal{R}[f]] \approx f$ . Essa nova

interpretação nos permite variar o filtro que desejamos utilizar na reconstrução. Para uma discussão acerca das possibilidades comumente encontradas veja [52].

## 1.5 RETROPROJEÇÃO FILTRADA DISCRETA

Em aplicações práticas as projeções serão conhecidas apenas em um número limitado de ângulos  $\theta_k$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$  e cada uma dessas projeções  $p_{\theta_k}$  será novamente amostrada nos pontos  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ . Assim precisamos de alguma fórmula de quadratura

$$\int_{[0,\pi]} P_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta \approx \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k P_{\theta_k}(x_1 \cos \theta_k + x_2 \sin \theta_k)$$

para aproximar a retroprojeção.

Não nos preocuparemos aqui em buscar os coeficientes ou pontos de amostragem mais precisos e utilizamos, a título de exemplo, a regra do retângulo. Logo, se supusermos que  $\theta_k = k\Delta_\theta$  com  $\Delta_\theta = \pi/m$ , a fórmula de retroprojeção filtrada (1.5, pg. 35) nos dá a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\theta_k}(x_1 \cos \theta_k + x_2 \sin \theta_k) \Delta_\theta \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\theta_k}(x_1 \cos \theta_k + x_2 \sin \theta_k). \end{aligned}$$

Nessa fórmula, apenas a retroprojeção foi calculada de forma inexata, mas a amostragem em  $t$  deverá ser considerada ao tentarmos calcular  $P_\theta$ . É o que faremos a seguir, logo depois de introduzirmos a transformada finita de Fourier.

### 1.5.1 TRANSFORMADA FINITA DE FOURIER

Neste ponto torna-se oportuna uma discussão acerca da *transformada finita de Fourier* de  $f$  (a qual chamaremos também de TFF), denotada por  $\mathbf{F}f$  ou  $\widehat{\mathbf{f}}$ . Como sugerido pela primeira notação, a aplicação  $\mathbf{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é uma aplicação linear (essencialmente uma matriz, apesar da notação diferenciada para destacar a sua

importância). Já a notação  $f$  sugere que as componentes  $f_k$  do vetor  $f$  devam representar amostras de valores da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ou seja,  $f_k = f(t_k) = f(t_0 + k\Delta_t)$ . Assim, a TFF serviria, sob determinadas condições, como uma aproximação para a transformada de Fourier de  $f$ , mas isso não é necessário;  $f$  pode ser qualquer vetor em  $\mathbb{C}^n$  que (especialmente quando interpretado como um sinal discreto no tempo) podemos utilizar o par TFF/TIFF como uma ferramenta para extrair informações sobre ele ou efetuar transformações úteis no mesmo.

Um dos principais motivos da popularidade das transformadas finitas de Fourier é a existência de um algoritmo, conhecido como *transformada rápida de Fourier* (ou simplesmente **FFT**, do inglês *fast Fourier transform*), tornado popular por Cooley e Tukey em 1965 [25], mas cujo princípio era já conhecido por Gauss, que reduz o custo do cálculo de  $O(n^2)$  para  $O(n \log n)$  tornando as operações extremamente eficientes do ponto de vista computacional.

Outra vantagem é que nos dias de hoje dificilmente será necessário se dar ao trabalho de implementar um algoritmo de **FFT**, pois há diversas bibliotecas e pacotes disponíveis nos mais variados ambientes computacionais que executam as operações de forma eficiente. Algumas dessas implementações são comerciais enquanto outras são distribuídas livremente e acompanhadas de código fonte. Utilizamos em nossos testes a biblioteca **FFTW3** [35] que figura entre as mais rápidas e flexíveis, além de aderir aos princípios do *software livre*.

Seja  $w_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ , então finalmente definimos a transformada finita de Fourier:

$$\hat{f}_l := \sum_{k=0}^{n-1} f_k w_n^{kl}.$$

A *transformada inversa finita de Fourier* de  $f$  (ou simplesmente **TIFF**), a ser denotada por  $\mathbf{F}^{-1}f$  ou  $\tilde{f}$  é semelhantemente simples:

$$\tilde{f}_k := \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f_l w_n^{-lk}.$$

É uma questão de manipular essas definições algebraicamente para verificar que  $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}f = f$ :

$$(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F})_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{(i-j)k}.$$

Essa soma vale 1 se  $i = j$  e, caso contrário:

$$(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F})_{i,j} = \frac{1}{n} \frac{w_n^{(i-j)n} - 1}{w_n^{i-j} - 1} = 0.$$

Isto mostra que a notação é adequada, ou seja,  $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = I$ . Além disso é útil notar que  $\mathbf{F}^{-1} = 1/n\mathbf{F}^*$ .

A transformada de Fourier relaciona-se com a *convolução periódica* ou *convolução circular*:

$$(f * g)_l := \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_{[l-k]_n},$$

em que  $[x]_n \in \{0, \dots, n-1\}$  é o resto positivo da divisão inteira de  $x \in \mathbb{N}$  por  $n$ . A relação entre essa convolução e sua representação sob TFF é similar a que existe entre suas versões contínuas:

$$f * g = \mathbf{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}),$$

onde passamos a denotar por  $f \cdot g$  o produto por componentes, ou seja,  $(f \cdot g)_k = f_k g_k$ . Isto é equivalente a

$$\mathbf{F}(f * g) = \mathbf{F}f \cdot \mathbf{F}g.$$

Para ver porque tal igualdade vale começemos com

$$(\mathbf{F}(f * g))_l = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_i g_{[k-i]_n} w_n^{lk}$$

e notemos que

$$i + [k-i]_n \equiv k \pmod{n}$$

para continuarmos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}(f * g))_l &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_i g_{[k-i]_n} w_n^{l(i+[k-i]_n)} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} f_i \sum_{k=0}^{n-1} g_{[k-i]_n} w_n^{li} w_n^{l[k-i]_n} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} f_i w_n^{li} \sum_{k=0}^{n-1} g_{[k-i]_n} w_n^{l[k-i]_n} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} f_i w_n^{li} \sum_{j=0}^{n-1} g_j w_n^{lj}.
 \end{aligned}$$

Como a TFF aproxima o valor da transformada de Fourier contínua? Para responder a essa pergunta devemos imaginar o que faríamos para calcular a integral envolvida na definição de  $\mathcal{F}[f]$  se nos fossem dadas amostras da função apenas. A abordagem mais simples seria semelhante à adotada para aproximar a retroprojeção utilizada alguns parágrafos acima, ou seja, aproximar a integral utilizando a regra do retângulo. Se interpretarmos a TFF de tal forma revelaremos alguns fatores de escala que farão diferença na operação de filtragem:

$$\frac{w_n^{lt_0/\Delta_t}}{\Delta_t} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{n} \frac{l}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} f(t) w_n^{\frac{t-t_0}{\Delta t} l} dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} f_k w_n^{kl} = \hat{f}_l.$$

A constante  $w_n^{lt_0/\Delta_t}/\Delta_t$  pode ser desconsiderada quando a aplicação da TFF for utilizada para uma operação de filtragem uma vez que a aplicação da TIFF cancelará esse fator, porém o fato de que, a menos deste coeficiente,  $\hat{f}_l$  aproxima  $\hat{f}$  na freqüência  $2\pi l/(n\Delta_t)$  é importante ao multiplicarmos no espaço de Fourier pois os filtros, qualquer um não trivial, são funções não constantes da freqüência.

Também é importante que os  $\hat{f}_l$  com  $l > \lfloor n/2 \rfloor$  sejam interpretados como aproximações de  $\hat{f}(\omega)$  para a primeira metade do intervalo  $[-\pi/\Delta_t, \pi/\Delta_t]$ , pois em geral não podemos, amostrando a um intervalo regular  $\Delta_t$ , conhecer as componentes de freqüências superiores a  $\pi/\Delta_t$  e, por outro lado, se denotarmos  $r = l - n/2$ , temos,

graças à  $2\pi i$ -periodicidade da exponencial complexa:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_l &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}kl} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i[(2\pi/n)kl - 2\pi k]} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}k(l-n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}k(n/2+r-n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}k(r-n/2)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i[-\pi + (2\pi/n)r]k}.\end{aligned}$$

### 1.5.2 DISCRETIZANDO A PROJEÇÃO FILTRADA

Agora prosseguimos para a descrição de nossa aproximação para  $P_\theta$ , denotada por  $\mathbf{P}^\theta$ , que será dada por:

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{P}^\theta := \left( \mathbf{F}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \overline{\mathbf{p}^\theta} \right)_{0:n-1},$$

onde, com  $d = 2n - 1$ ,  $\overline{\mathbf{p}^\theta} \in \mathbb{R}^d$  guarda as amostras  $\overline{p_k^\theta} = p_k^\theta = p_\theta(t_0 + k\Delta_t)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  e  $\overline{p_k^\theta} = 0$ ,  $k = n, \dots, d-1$  e  $\mathbf{W}$  é uma matriz diagonal<sup>1</sup> com componentes  $W_{k,k} = 2\pi k / (d\Delta_t)$  para  $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$  e  $W_{k,k} = W_{d-k,d-k}$  daí por diante. Ou seja, multiplicamos apropriadamente os elementos da transformada finita das amostras e depois invertemos para obter aproximações das amostras  $P_\theta(t_k)$ , que serão dadas pelas componentes correspondentes de  $\mathbf{P}^\theta$ . O completamento com zeros até a dimensão  $2n - 1$  é necessário pois estamos calculando uma aproximação para uma convolução contínua utilizando TFFS e precisamos eliminar a interferência circular que seria causada se não modificássemos a seqüência.

Note que afirmamos que  $\mathbf{P}^\theta \in \mathbb{R}^n$ , o que é garantido pela simetria do filtro utilizado. De fato,  $f \in \mathbb{R}^d$  se e somente se a sua transformada  $\widehat{f}$  respeita a condição de simetria Hermitiana  $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{d-k}^*$  ( $a^*$  é o complexo conjugado de  $a$ ). Uma vez que  $W_{k,k} \widehat{f}_k = W_{d-k,d-k}^* \widehat{f}_{d-k}^*$ , podemos garantir que  $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{W} \widehat{f} \in \mathbb{R}^d$ . Essa simetria pode ser utilizada para reduzir à metade o custo computacional e de armazenamento desta seqüência de operações, o que efetivamente fizemos em nossos experimentos. Ainda

---

<sup>1</sup>Eliminamos, por uma questão de clareza, a dependência em  $d$  e  $\Delta_t$  da notação  $\mathbf{W}$ .

outra forma de eliminar cálculos desnecessários seria utilizando o fato das últimas componentes do vetor  $\bar{\mathbf{p}}^\theta$  sendo transformado serem nulas, mas esse expediente não foi utilizado em nossas implementações.

### 1.5.3 O ALGORITMO

Podemos então enunciar o nosso algoritmo:

**Entrada:**  $x \in \mathbb{R}^2$ ;  $\mathbf{p}^{\theta_k} \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ ;

$$\mathbf{P}^{\theta_k} = \left( \mathbf{F}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \bar{\mathbf{p}}^{\theta_k} \right)_{0:n-1};$$

**Saída:**  $f_{\text{FBP}}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \mathcal{I}[\mathbf{P}^{\theta_k}] (x_1 \cos \theta_k + x_2 \sin \theta_k) \approx f(x)$ ;

#### ALGORITMO 1 – Retroprojeção filtrada

Note que deixamos em aberto os pesos a serem utilizados na regra de quadratura, mas em nossos experimentos utilizamos sempre  $\alpha_k = \pi / \Delta_\theta$ , ou seja, a regra do retângulo. Além disso, o operador  $\mathcal{I}$  não foi definido. Trata-se de um operador de interpolação que aproxima o valor de  $h(t)$  dado um vetor  $\mathbf{h}$  com amostras  $h_k = h(t_k)$ , aproximação que denotamos por  $\mathcal{I}[\mathbf{h}](t)$ . Em todos os testes que realizamos usamos interpolação linear por partes, mas qualquer outro tipo poderia ser utilizado (splines de grau mais elevado, por exemplo).

O leitor atento percebeu que utilizamos três aproximações diferentes (todas muito simples, aliás) para partir de (1.5, pg. 35) e chegar a um algoritmo prático, mas deixamos de validá-lo com estimativas para o erro  $\|f_{\text{FBP}} - f\|$  que pode ser causado por elas. Para um tratamento adequado desse assunto recomendamos a referência [51] pois tais detalhes fogem ao nosso objetivo.

Da maneira como fazemos no algoritmo 1, se desejarmos reconstruir  $n \times n$  amostras de uma imagem utilizando-nos de  $O(n)$  projeções (proporção razoável de acordo com [51]) o número de operações na retroprojeção será da ordem de  $O(n^3)$ . Por outro lado, se cada projeção for, por sua vez, amostrada em  $O(n)$  posições, a

operação de filtragem terá um custo de apenas  $O(n^2 \log n)$  operações. Assim, a retroprojeção é dominante no tempo de execução do algoritmo 1 e eleva o custo total da reconstrução para  $O(n^3)$  operações.

Como métodos de Fourier mantêm o custo  $O(n^2 \log n)$ , esse é um ponto negativo do algoritmo de retroprojeção filtrada. Portanto não é surpresa alguma que esforços tenham sido despendidos para desenvolver esquemas que aliassem a precisão do algoritmo de FBP com a velocidade dos métodos de Fourier. Estaria fora do escopo da presente tese entrar em detalhes, mas é necessário ao menos mencionar as principais abordagens porque algumas delas podem ter utilidade em métodos iterativos, que são o nosso tema central.

Os esquemas que parecem obter maior sucesso são baseados em técnicas rápidas de TFF não uniformes, que se aproveitam dos algoritmos de FFT para calcular eficientemente a transformada finita de Fourier em freqüências irregularmente distribuídas. As primeiras páginas de [34] fornecem uma introdução acessível e esclarecedora à teoria geral e o artigo apresenta um algoritmo de reconstrução que utiliza uma transformada não uniforme para reduzir o erro da interpolação no domínio de Fourier. A referência [33] não chega a apresentar reconstruções, mas utiliza-se de uma abordagem diferente para obter métodos similares aos de [34] para o cálculo das FFT não uniformes. Ambos os esquemas podem ser utilizados para o cálculo da retroprojeção em  $O(n^2 \log n)$  operações.

Outros métodos rápidos foram desenvolvidos para o cálculo da retroprojeção sem a necessidade de utilizar FFT não uniformes. Por exemplo temos o método multinível de [11] e em [4] o autor reescreve a retroprojeção como convoluções em coordenadas log-polares e utiliza algoritmos de FFT comuns para avaliar essas operações eficientemente. Para nós, de especial interesse pode ser o último sistema porque parece permitir o cálculo da projeção ou retroprojeção de apenas uma parcela dos ângulos, propriedade fundamental para uma bem sucedida classe de algoritmos iterativos de reconstrução (métodos incrementais ou de subconjuntos ordenados). Tal não é verdade com relação aos métodos de [33, 34], conforme constatado em [50, 70].

Também precisamos mencionar que o algoritmo que foi desenvolvido nesta seção é apropriado para uma geometria de feixes paralelos. Uma adaptação para feixes divergentes pode ser realizada partindo da fórmula (1.5, pg. 35), mas não nos aprofundaremos no assunto. O leitor encontrará os detalhes em [43, capítulo 3].

## 1.6 USANDO O ALGORITMO DE RETROPROJEÇÃO FILTRADA

Nesta seção discutiremos exemplos de uso do algoritmo de retroprojeção filtrada e algumas dificuldades que podem ser encontradas em sua aplicação. Como imagem de teste utilizamos uma versão discreta do *phantom* de Shepp-Logan que foi obtida amostrando o *phantom* nos pontos centrais de cada um dos *pixels* duma grade retangular de 1024 por 1024 elementos como as descritas na seção B.1; essa imagem pode ser vista à esquerda na figura 5. Outra característica comum aos testes que realizamos na presente seção é que calculamos as amostras da transformada de Radon da imagem discreta utilizando o algoritmo B.2. Essa abordagem foi preferida sobre a opção de amostrar a transformada de Radon do *phantom* diretamente (o que seria simples por se tratar de uma soma de funções indicadoras de elipses) porque é mais flexível e é a abordagem que se presta a algoritmos iterativos.

Para o primeiro experimento amostramos a transformada de Radon dessa imagem em 3217 ângulos igualmente espaçados entre 0 e  $\pi$ . Cada uma dessas projeções foi, por sua vez, amostrada em 1024 posições entre  $-1$  e  $1$  (uma imagem dessa transformada pode ser vista à esquerda na figura 6). Essas amostras cobrem toda a área que desejamos reconstruir e satisfazem as condições de que a taxa de amostragem em  $t$  seja igual à da imagem e em  $\theta$  seja  $\pi$  vezes maior, de acordo com a primeira linha de [51, tabela III.1]. Ainda de acordo com essa tabela, podemos ver que o esquema de amostragem utilizado aqui não é ótimo, mas serve para nossos propósitos ilustrativos.

O resultado, após termos eliminado os valores negativos, pode ser visto à direita na figura 5. A reconstrução final é muito semelhante à original e exibe claramente

todos os detalhes do *phantom*. Nesse experimento utilizamos, apenas de forma ilustrativa, uma amostragem ideal, difícil de ser realizada na prática. A imagem de teste, entretanto, não possui detalhes pequenos o suficiente para que efetivamente precisemos de tantas amostras. Nos próximos experimentos utilizamos uma amostragem mais realista para mostrar que a reconstrução pode ser realizada com menos vistas e, depois, para estudar o efeito do ruído estatístico na reconstrução.

Podemos ver, à esquerda na figura 7, que uma reconstrução obtida utilizando-se de 256 projeções entre 0 e  $\pi$ , cada uma, por sua vez, amostrada em 256 posições entre -1 e 1 já é muito boa. Por outro lado, se simularmos o caso de tomografia por emissão de pósitrons desconsiderando efeitos tais como atenuação, espalhamento e outros e utilizando apenas o modelo estatístico para emissão de radiação [67] com uma contagem de aproximadamente  $5 \cdot 10^6$  detecções vemos, à direita na figura 7, que a imagem resultante fica bastante prejudicada.

Uma parte desse efeito é devida ao fato do ruído estatístico costumar ter, no espaço de Fourier, componentes de altas freqüências e o uso do filtro  $|\omega|$  amplificar tais componentes além do nível original. Isso ocasiona o aparecimento dos artefatos de alta freqüência que podem ser vistos na imagem. Esses elementos espúrios, que conferem um aparênciam granulosa à imagem, chegam a obscurecer os detalhes do interior do *phantom* e reduzem muito a utilidade da imagem.

Podemos tentar remediar essa situação aplicando uma estratégia de zerar as freqüências mais altas para que o algoritmo não amplifique o ruído excessivamente. Na figura 8 a imagem à esquerda foi reconstruída a partir dos mesmos dados usados na imagem à direita na figura 7, mas, durante a operação de filtragem, as freqüências acima de  $0.4\pi/\Delta_t$  (valor obtido por tentativa e erro) foram zeradas. O resultado é uma imagem menos granulosa que se assemelha mais à imagem original do que a reconstrução obtida com o algoritmo “puro”.

Esse resultado motiva um outro experimento. Se mantivermos o número de detecções, mas diminuirmos o número de amostras tomadas em cada projeção teremos mais detecções em cada amostra e, ao mesmo tempo, não teremos grande

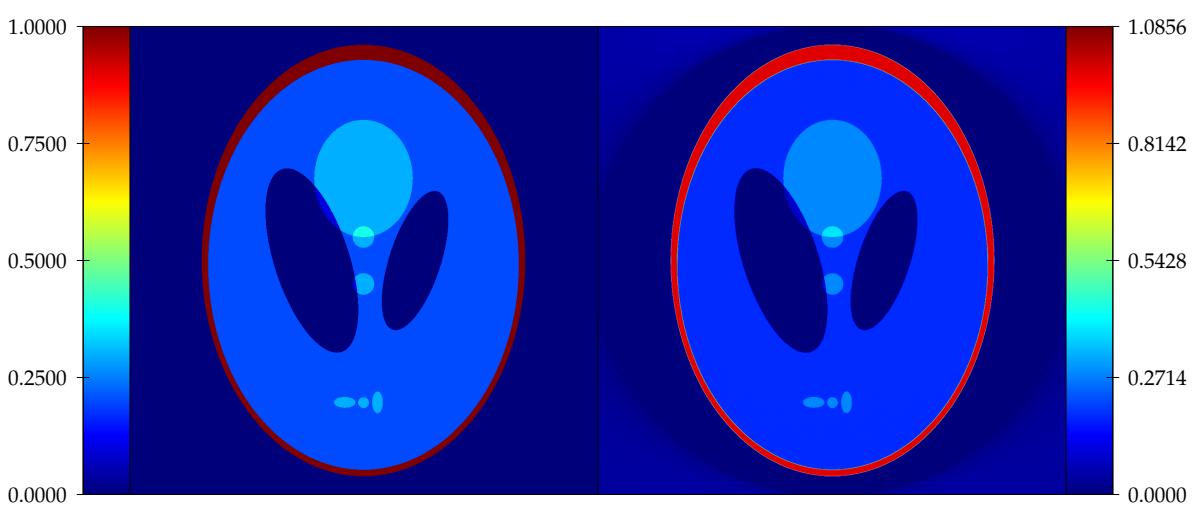


FIGURA 5 – À esquerda: imagem original composta de  $1024 \times 1024$  pixels. À direita: reconstrução por retroprojeção filtrada (algoritmo 1 com  $\alpha_k = \pi/\Delta_\theta$  e  $\mathcal{I}$  linear por partes) com amostragem de 3217 ângulos igualmente espaçados entre 0 e  $\pi$  e 1024 posições entre  $-1$  e  $1$  (veja os dados na figura 6). A reconstrução teve os valores inferiores a zero truncados.

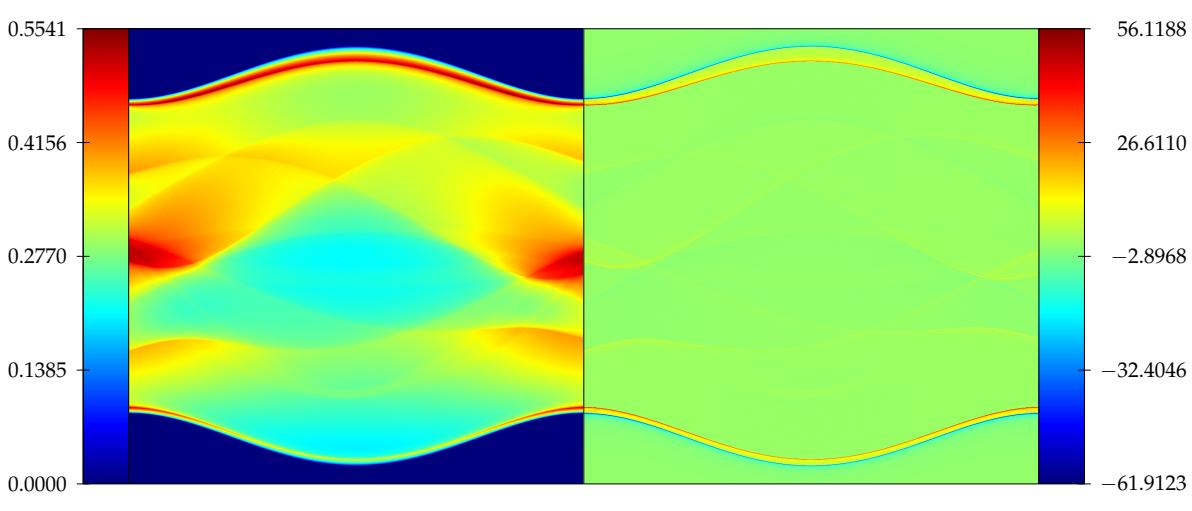


FIGURA 6 – À esquerda: representação no plano  $\theta \times t$  da transformada de Radon do *phantom* de Shepp-Logan amostrado nos pontos centrais de uma grade retangular (detalhes na seção B.1) de  $1024 \times 1024$  pixels. Essa é a transformada exata, a menos de erros de arredondamento, da imagem discreta mostrada à esquerda na figura 5 conforme calculada pelo algoritmo B.2. A transformada foi amostrada em 3217 ângulos igualmente espaçados em  $[0, \pi)$  e 1024 posições igualmente espaçadas em  $[-1, 1]$ . À direita: aparência dos dados após filtragem das projeções conforme o esquema da subseção 1.5.2.

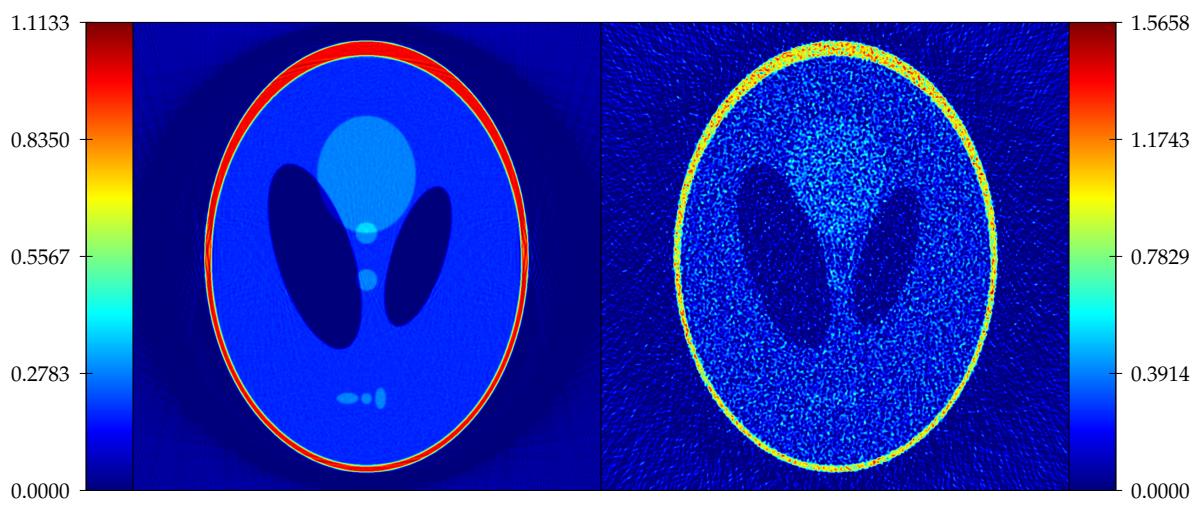


FIGURA 7 – À esquerda: reconstrução realizada a partir de 256 projeções em ângulos igualmente espaçados em  $[0, \pi]$  e 256 posições amostradas regularmente em  $[-1, 1]$  para cada projeção. À direita: imagem reconstruída a partir das mesmas amostras com ruído de Poisson  $\mathcal{R}[f] + \epsilon$ . Os dados com ruído foram  $(\mathcal{R}[f] + \epsilon)(\theta_k, t_l) = X_{k,l}/c$  onde  $X_{k,l} \sim \text{Poisson}(\mathcal{R}[f](\theta_k, t_l)c)$  com  $c = 5 \cdot 10^6 / \sum_k \sum_l \mathcal{R}[f](\theta_k, t_l)$ . Ambas as reconstruções tiveram os valores negativos truncados.

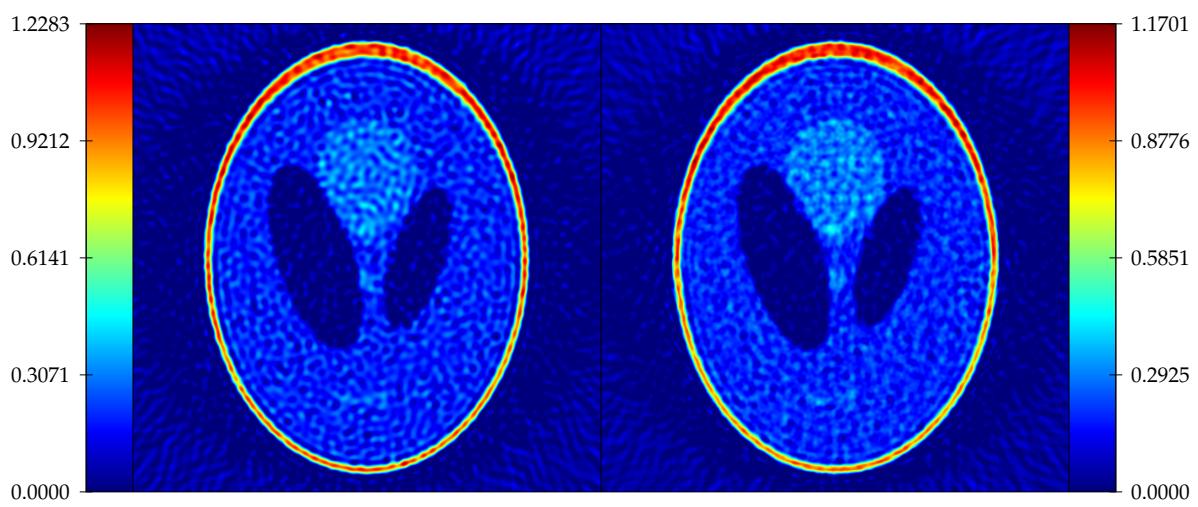


FIGURA 8 – À esquerda: reconstrução utilizando uma freqüência de corte igual a  $0.4\pi/\Delta_t$ , ou seja, durante a operação de filtragem todas as freqüências acima da faixa  $|\omega| \leq 0.4\pi/\Delta_t$  foram zeradas ao invés de multiplicadas por  $|\omega|$ . Os dados utilizados foram os mesmos da imagem à direita na figura 7. À direita: imagem reconstruída utilizando 256 projeções amostradas em 128 pontos com dados gerados de forma semelhante aos utilizados na reconstrução à esquerda e freqüência de corte igual a  $0.8\pi/\Delta_t$ . Novamente foram eliminados os valores negativos obtidos em ambas as reconstruções.

prejuízo na resolução radial uma vez que as freqüências altas estão mesmo sendo eliminadas na reconstrução. Na imagem à direita da figura 8 temos a reconstrução obtida com 256 projeções amostradas em 128 pontos e freqüência de corte igual a  $0.8\pi/\Delta_t$  e podemos ver que é apenas marginalmente superior à anterior.

Os testes que apresentamos mostram que o efeito de erros nas medidas pode ser bastante prejudicial na reconstrução por retroprojeção filtrada, mas o algoritmo é efetivo quando as projeções são tomadas de forma precisa. Esse é o caso na tomografia por raios x e isso explica a popularidade do método e seu uso ser muito difundido nos tomógrafos comerciais desse tipo. Quando o ruído estatístico não pode ser negligenciado modelos mais precisos devem ser levados em consideração e a possibilidade de se utilizar métodos de transformadas é prejudicada porque há uma grande dificuldade de se incorporar mais informação na reconstrução. Esse é o principal motivo pelo qual os métodos iterativos, assunto que discutiremos a seguir, obtiveram tamanha popularidade em tomografia computadorizada.

## 1.7 DISCRETIZANDO O PROBLEMA DE TOMOGRAFIA

A transformada de Radon é linear, ou seja,  $\mathcal{R}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{R}[f] + \beta\mathcal{R}[g]$ . Isso significa que em dimensão finita ela pode ser representada por uma matriz, que denotaremos por  $R$ . Sob essa interpretação o problema de reconstrução de imagens em tomografia reduz-se a um sistema linear

$$Rx = b,$$

onde  $x$  é a imagem desejada e  $b$  contém as amostras da TR coletadas. Devido às enormes dimensões usuais do problema e à esparsidade inerente à natureza da matriz do sistema, o uso de métodos diretos para a solução desse problema é inviável. Não é o tamanho a única preocupação na solução do problema acima, outras questões inerentes à matemática da tomografia são de muita importância e as abordaremos rapidamente no restante dessa seção.

### 1.7.1 TOMOGRAFIA COMO PROBLEMA INVERSO

Dependendo da forma de aquisição dos dados, em alguns casos existirão muitas soluções para o sistema enquanto em outros não haverá solução qualquer. Além disso, tão preocupante quanto o número de soluções pode ser o mal-condicionamento do problema; normalmente essa não é uma questão grave, mas sob determinadas circunstâncias a matriz  $R$  pode ter um número de condição muito alto (por exemplo num problema de ângulo limitado). Essas características tornam o sistema acima potencialmente um problema *mal-posto* ou *problema inverso* [32] e isso não é devido à discretização, mas um problema inerente à suavização imposta pela TR. Em outras palavras, são grandes as chances de que uma das seguintes propriedades seja falsa:

- Para todo conjunto de dados existe uma solução;
- A solução sempre é única;
- A solução depende continuamente dos dados.

No caso linear discreto, as duas primeiras propriedades implicam a terceira, mas se a matriz  $R$  for muito mal condicionada de pouca valia será essa continuidade.

Para contornar tais dificuldades a solução do problema de tomografia pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \arg \min & \quad g(\mathbf{x}) + \gamma r(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.:} & \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Aqui  $g(\mathbf{x})$  é uma função que forçará consistência da solução aos dados. Geralmente  $g$  pode ser escrita como  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{R}\mathbf{x}, \mathbf{b})$  com  $f$  tal que

$$f(\mathbf{x}, z) = f_z^* \Leftrightarrow \mathbf{x} = z, \tag{1.7}$$

onde  $f_z^*$  é o valor mínimo de  $f$  para um dado  $z$ . A introdução dessa função serve para resolver o problema da inexistência de soluções quando  $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é impossível.

A simples introdução de  $f$  pode resolver o problema da inexistência de soluções e também a questão da multiplicidade delas. Mas, devido a (1.7), não podemos esperar que somente esse expediente garanta a estabilidade da solução; tal é a razão do termo  $\gamma r(x)$  em (1.6). Ou seja, a função  $r$  tem a finalidade de estabilizar o problema, geralmente favorecendo soluções mais suaves, e o parâmetro  $\gamma > 0$  serve para controlar o quanto dessa característica será imposto à reconstrução. Essa estratégia é conhecida como *regularização* do problema e  $r$  é conhecido como *funcional regularizador*. Além do funcional regularizador, precisamos de uma estratégia para a escolha de  $\gamma$ , geralmente denotada por  $\gamma(\delta, b)$  onde  $\delta$  é o nível de ruído nas medidas, ou seja,  $\|b - Rx^*\| = \delta$ ,  $b$  são os dados do problema e  $x^*$  é a solução real, ou seja, a imagem que gerou os dados. Não discutiremos tais detalhes aqui, para mais sobre a regularização de problemas inversos veja [32]. Por fim, o conjunto  $X$  impõe restrições que podem enriquecer o modelo utilizado incluindo informação *a priori* sobre a solução. Por exemplo, em tomografia é comum que  $x \in \mathbb{R}_+^n$  e essa restrição pode ser incluída no problema.

## 1.8 MÉTODOS ITERATIVOS

Com o problema (1.6) em mãos a necessidade de algoritmos iterativos torna-se mais evidente, pois, a não ser nos casos mais simples, a sua solução não pode ser obtida analiticamente. A partir de agora passamos a descrever alguns dos mais comuns algoritmos iterativos utilizados em tomografia computadorizada. Cada subseção a seguir dedica-se a um desses métodos, descrevendo, por meio de  $g$ ,  $r$  e  $X$ , o problema que o algoritmo resolve, explicitando a iteração do método e discutindo aspectos práticos de sua utilização. A lista não pretende ser exaustiva, mas manter-se representativa apenas das classes mais populares de algoritmos, além de tentar seguir uma linha histórica ligando os métodos. Além disso, sempre que possível, relacionamos os algoritmos com os resultados de convergência do próximo capítulo para que a compreensão da teoria seja facilitada através de exemplos.

Note que é muito comum que a função  $f$  em (1.6) possa ser decomposta em uma soma de funções simples da forma  $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i, z_i)$ ; essa característica estimulou o surgimento de uma bem sucedida classe de algoritmos baseada na decomposição da função objetivo, assunto do próximo capítulo. Sejam  $f_z := f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  e  $\phi_i(\mathbf{x}) := f_i(x, b_i)$ , então um último comentário a esse respeito é que temos:

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T \nabla f_b(\mathbf{R}\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_{[i,:]}^T \phi'_i(\mathbf{R}_{[i,:]} \mathbf{x}).$$

Daí podemos deduzir a importância do cálculo dos produtos  $\mathbf{R}\mathbf{x}$  e  $\mathbf{R}^T\mathbf{x}$  em um algoritmo para a solução do problema (1.6, pg. 48). Em particular, métodos baseados na decomposição da função objetivo provavelmente precisarão de rotinas para a avaliação eficiente de  $\mathbf{R}_{[i,:]} \mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \alpha \mathbf{R}_{[i,:]}^T$ . Conforme poderemos ver nas subseções a seguir, esse efetivamente é o caso para diversos algoritmos utilizados em tomografia.

### 1.8.1 TÉCNICA DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICA – ART

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) \equiv c$ ,  $r(\mathbf{x}) \equiv c$  e  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \neq \emptyset$ .

**ITERAÇÃO:** Seja  $\{\lambda_k\} \subset [\delta, 2 - \delta]$  para algum  $\delta \in (0, 1)$ . As iterações do algoritmo são dadas por:

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\{\lambda_k\}$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$  calculado a partir de:

$$\mathbf{x}_{k,0} = \mathbf{x}_k;$$

$$\mathbf{x}_{k,i} = \mathbf{x}_{k,i-1} + \lambda_k \frac{b_i - \mathbf{R}_{[i,:]} \mathbf{x}_{k,i-1}}{\|\mathbf{R}_{[i,:]}\|^2} \mathbf{R}_{[i,:]}^T \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k,m}.$$

### ALGORITMO 2 – ART

**COMENTÁRIO:** Observe que, se  $\lambda_k \equiv 1$ , ART é simplesmente uma seqüência de projeções sobre os hiperplanos definidos pelas equações do sistema, mas valores de  $\lambda_k$  bem menores costumam ser mais apropriados [52]. Tal parâmetro possui grande influência sobre o desempenho do algoritmo e deve ser escolhido cuidadosamente. Também importante é a ordenação dos dados para processamento, veja as referências [39, 52] para detalhes.

Com relação à convergência, notamos que ART não é mais do que um caso especial do operador  $\mathcal{V}$  (2.27, pg. 83) com  $g_i = d_{\{x|R_{[i,:]}x=b_i\}}$ , onde  $d_X(x)$  é a distância de  $x$  ao conjunto  $X$ . Dessa forma, a proposição 2.2.3 (veja comentário logo abaixo da demonstração), garante que o operador satisfaz as condições necessárias para que a proposição 2.1.9 possa ser aplicada e garantir a convergência do algoritmo.

Na prática algum critério de parada deve ser adotado, usualmente baseado em  $\sum_{i=1}^m d_{X_i}(x_k)$  ou, talvez, uma aproximação  $\sum_{i=1}^m d_{X_i}(x_{k,i-1})$ , a qual pode ser computada aproveitando-se dos cálculos utilizados nas iterações. Outra opção, válida para todos os métodos a seguir, é interpretar um critério de parada como uma regularização e utilizar estratégias para estimar um bom valor para o número de iterações; algumas sugestões podem ser encontradas em [32, 58]. Daqui por diante assumimos que o usuário dispõe de um critério apropriado ao seu problema.

### 1.8.2 ART PARA SISTEMAS INCONSISTENTES

**PROBLEMA:** Dado  $b$ , seja  $X_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid R_{[i,:]}x = b_i\}$ . Então

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m d_{X_i}^2(x), \quad r(x) \equiv c \quad \text{e} \quad X = \mathbb{R}^n.$$

**ITERAÇÃO:** Com  $\lambda_k \rightarrow 0^+$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$  as iterações são dadas pelo algoritmo 2.

**COMENTÁRIO:** Agora ART é apenas um caso do método do (sub)gradiente incremental (2.15, pg. 74) sem restrições. Dessa forma os resultados do próximo capítulo podem ser utilizados aqui. Em particular, supondo que (2.16, pg. 74) valha (isso

ocorre se, por exemplo,  $\{x_k\}$  for limitada), temos  $\rho_k = O(\lambda_k)$ . Uma vez que o problema é irrestrito, se impusermos  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$ , o teorema 2.1.8 garante que, para algum  $x^* \in X^*$ , temos  $x_k \rightarrow x^*$ .

### 1.8.3 PROJEÇÃO SOBRE CONVEXOS – POCS

PROBLEMAS:

1.  $g(x) \equiv c, r(x) \equiv c$  e  $X = \bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset;$
2.  $g(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m d_{X_i}^2(x), r(x) \equiv c$  e  $X = \mathbb{R}^n.$

No restante deste capítulo todas as funções e conjuntos não explicitamente declarados são convexos. Isso se aplica aos conjuntos  $X_i$  acima.

ITERAÇÕES: Utilizando, respectivamente aos casos acima, os tamanhos de passo dados por

1.  $\{\lambda_k\} \subset [\delta, 2 - \delta]$  para algum  $\delta \in (0, 1);$
2.  $\lambda_k \rightarrow 0^+$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty.$

As iterações do algoritmo são dadas por:

**Entrada:**  $x_0 \in \mathbb{R}^n; \{\lambda_k\};$

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  calculado a partir de:

$$x_{k,0} = x_k;$$

$$x_{k,i} = x_{k,i-1} + \lambda_k (\mathcal{P}_{X_i}(x_{k,i-1}) - x_{k,i-1}) \quad i = 1, \dots, m;$$

$$x_{k+1} = x_{k,m}.$$

**COMENTÁRIO:** POCS é exatamente a generalização necessária de ART se quisermos substituir os hiperplanos por conjuntos convexos arbitrários (desde que saibamos projetar sobre eles). Também não mudam os resultados sobre convergência.

É útil salientar que sempre podemos, de acordo com o argumentado na seção 2.2, criar versões seqüenciais por blocos de conjuntos ou mesmo métodos totalmente paralelos a partir do esquema de POCS. O caso plenamente paralelo, entretanto, possui uma propriedade que o torna mais interessante, conforme veremos a seguir.

#### 1.8.4 CIMMINO

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m d_{X_i}^2(\mathbf{x}), \quad r(\mathbf{x}) \equiv c \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \mathbb{R}^n.$

**ITERAÇÃO:** Dada a seqüência  $\{\lambda_k\} \subset [\delta, 2 - \delta]$  onde  $\delta \in (0, 1]$ :

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n; \quad \{\lambda_k\};$

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$  calculado a partir de:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{X_i}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k \right).$$

#### ALGORITMO 4 – Cimmino

**COMENTÁRIO:** Cimmino é melhor comportado do que os algoritmos vistos anteriormente, pois converge mesmo no caso inconsistente sem que seja necessário tamanhos de passo tendendo a zero [21]. Essa propriedade não é alcançada pela nossa teoria porque, dentre muitas interpretações, Cimmino pode ser visto como o método do gradiente para uma função “boa”, mas os resultados que discutimos nesta tese lidam com algoritmos inexatos para funções não diferenciáveis. A teoria que apresentaremos no próximo capítulo somente garante a convergência do método no caso em que  $\bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset$  (ou com o tamanho de passo tendendo a zero).

Nada disso impede que o método seja útil em nosso esquema. Cimmino pode ser utilizado no passo de viabilidade em (2.4, pg. 64) e nos permitir encontrar ótimos de funções dentro do conjunto de minimizadores da soma do quadrado das distâncias. Ou seja, um incipiente exemplo de otimização em dois níveis. Os detalhes teóricos não parecem impor dificuldades, mas carecem de uma análise mais cuidadosa, assunto que certamente será abordado em futuras pesquisas. Talvez seja possível obter generalizações para restrições consistindo de otimizadores de funções convexas arbitrárias.

### 1.8.5 ALGORITMO EM

Finalmente saímos do campo dos mínimos quadrados para começar a discutir modelos mais apropriados para o problema em mãos. Desde que introduzimos a discretização da TR ficou claro que a matriz R poderia incorporar detalhes relativos à geometria do tomógrafo e até mesmo sobre o modelo físico subjacente ao método tomográfico em questão, mas chegou a hora de aplicarmos o conhecimento do caráter estatístico por natureza da emissão radioativa para obter melhores reconstruções. Essa é uma tarefa a ser realizada pela função  $g$ , que servirá como uma medida estatística da qualidade de uma imagem.

Este e os próximos três algoritmos que apresentaremos não se encaixam na teoria que será desenvolvida no próximo capítulo, mas são importantes o suficiente para merecer uma menção aqui. A teoria de convergência apropriada a cada caso pode ser encontrada nas referências citadas ao longo das descrições.

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) = -L(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{R}_{[i,:]} \mathbf{x} - b_i \log(\mathbf{R}_{[i,:]} \mathbf{x}) \right)$ ,  $r(\mathbf{x}) \equiv c$  e  $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^n$ . Note que

$$-\nabla L(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 1 - \frac{b_1}{\mathbf{R}_{[1,:]} \mathbf{x}} \\ 1 - \frac{b_2}{\mathbf{R}_{[2,:]} \mathbf{x}} \\ \vdots \\ 1 - \frac{b_m}{\mathbf{R}_{[m,:]} \mathbf{x}} \end{pmatrix}.$$

**ITERAÇÃO:** Seja

$$D(x) = \text{diag} \left\{ \frac{x_1}{\sum_{i=1}^m R_{[i,1]}}, \frac{x_2}{\sum_{i=1}^m R_{[i,2]}}, \dots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^m R_{[i,n]}} \right\},$$

o algoritmo EM é descrito então pelas seguintes iterações:

**Entrada:**  $x_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  calculado a partir de:

$$x_{k+1} = x_k + D(x_k) \nabla L(x_k).$$

#### ALGORITMO 5 – EM

**COMENTÁRIO:** A função  $L(x)$  aqui é, exceto por uma constante, o negativo do logaritmo da probabilidade da imagem  $x$  ter gerado os dados  $b$  de acordo com o modelo de Poisson para a emissão de radiação [59]. As iterações do algoritmo EM (de *expectation-maximization*) convergem monotonicamente para um ótimo da função objetivo (para um demonstração de convergência veja [67] e referências lá contidas).

Esse método foi o utilizado pelos proponentes do modelo estatístico para PET, mas pode ser adaptado para SPECT de forma imediata. Porém, o algoritmo EM se mostrou demasiado lento para aplicações rotineiras, geralmente exigindo um número muito grande de iterações para atingir a convergência. Tal dificuldade era especialmente incômoda em vista da tecnologia computacional disponível à época e gerou uma demanda por algoritmos rápidos para o modelo estatístico.

#### 1.8.6 OS-EM

**PROBLEMA:**  $g(x) \equiv c, r(x) \equiv c$  e  $X = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Rx = b\} \neq \emptyset$ .

**ITERAÇÃO:** Sejam  $I_1, \dots, I_s$  tais que  $\bigcup_{i=1}^s I_i = \{1, \dots, m\}$  e  $i \neq j \Rightarrow I_i \cap I_j = \emptyset$ . Definimos agora as funções

$$L_l(x) := \sum_{i \in I_l} \left( b_i \log(R_{[i,:]} x) - R_{[i,:]} x \right)$$

e os fatores de escala

$$D_l(\mathbf{x}) = \text{diag} \left\{ \frac{x_1}{\sum_{i \in I_l} R_{[i,1]}}, \frac{x_2}{\sum_{i \in I_l} R_{[i,2]}}, \dots, \frac{x_n}{\sum_{i \in I_l} R_{[i,n]}} \right\}.$$

Então as iterações de os-EM são dadas por:

---

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ ;  $I_1, \dots, I_s$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$  calculado a partir de:

$$\mathbf{x}_{k,0} = \mathbf{x}_k;$$

$$\mathbf{x}_{k,l} = \mathbf{x}_{k,l-1} + D_l(\mathbf{x}_{k,l-1}) \nabla L_l(\mathbf{x}_{k,l-1});$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k,s}.$$


---

#### ALGORITMO 6 – OS-EM

**COMENTÁRIO:** os-EM, do inglês *ordered subsets expectation-maximization*, é substancialmente mais rápido do que o algoritmo EM, mas não converge quando o sistema é inconsistente, exceto em circunstâncias excepcionais que não são comuns na prática [42]. O mais importante legado de os-EM, entretanto, foi a introdução em tomografia de um algoritmo seqüencial baseado em uma função não quadrática. Ainda que a convergência somente ocorresse no caso consistente, quando a função objetivo sendo otimizada tem pouca importância, o primeiro passo estava dado.

#### 1.8.7 RAMLA

A forma da iteração de os-EM serviu de inspiração para RAMLA, um método semelhante, porém convergente. RAMLA é utilizado em alguns tomógrafos comerciais, geralmente como forma alternativa de inversão dos dados (FBP sendo o padrão na maioria dos casos).

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) = -L(\mathbf{x})$ ,  $r(\mathbf{x}) \equiv c$  e  $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^n$ .

**ITERAÇÃO:** Seja  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{++}$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$  e generalizemos ligeiramente o fator de escala utilizado no algoritmo EM. Com  $p_i > 0$ :

$$D(\mathbf{x}) = \text{diag}\left\{\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_2}{p_2}, \dots, \frac{x_n}{p_n}\right\}.$$

As iterações definindo RAMLA são dadas pela seguinte fórmula:

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ ;  $\{\lambda_k\}$ ;  $I_1, \dots, I_s$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$  calculado a partir de:

$$\mathbf{x}_{k,0} = \mathbf{x}_k;$$

$$\mathbf{x}_{k,l} = \mathbf{x}_{k,l-1} + \lambda_k D(\mathbf{x}_{k,l-1}) \nabla L_l(\mathbf{x}_{k,l-1});$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k,s}.$$

#### ALGORITMO 7 – RAMLA

**COMENTÁRIO:** RAMLA [14], acrônimo para a expressão *row-action maximum likelihood algorithm*, mantém a velocidade inicial de OS-EM, mas é assintoticamente convergente no sentido que  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f^*$  mesmo quando o sistema é inconsistente (veja detalhes técnicos em [38]). Note que apesar de não estar explícito, as restrições sobre os subconjuntos dos dados são as mesmas que impusemos para OS-EM.

RAMLA é, basicamente, um método do gradiente incremental pré-multiplicado por um fator de escala, bem como OS-EM. Duas diferenças fundamentais, entretanto, separam os dois métodos: a primeira é a introdução de um tamanho de passo tendendo a 0 e a segunda é que o fator de escala em RAMLA é constante dentre as subiterações. Como OS-EM utiliza fatores diferentes para cada subconjunto dos dados, o uso de  $\lambda_k \rightarrow 0$  garantiria a convergência para uma solução de máxima verossimilhança ponderada, diferente da buscada pelo modelo estatístico para tomografia por emissão.

## 1.8.8 BSREM

Agora passamos a discutir métodos para o modelo regularizado. Começamos com um algoritmo relativamente recente, deixando alguns predecessores de lado. Para um panorama interessante dos métodos disponíveis à época veja [28].

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x})$ ,  $r(\mathbf{x})$  convexa e  $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^n$ .

**ITERAÇÃO:** Seja  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{++}$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ :

---

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ ;  $\{\lambda_k\}$ ;  $I_1, \dots, I_s$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$  calculado a partir de:

$$\mathbf{x}_{k,0} = \mathbf{x}_k;$$

$$\mathbf{x}_{k,l} = \mathbf{x}_{k,l-1} + \lambda_k \mathbf{D}(\mathbf{x}_{k,l-1}) \nabla L_l(\mathbf{x}_{k,l-1});$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k,s} - \lambda_k \gamma \mathbf{D}(\mathbf{x}_{k,s}) \nabla r(\mathbf{x}_{k,s}).$$


---

## ALGORITMO 8 – BSREM

**COMENTÁRIO:** O algoritmo BSREM [28], de *block sequential regularized expectation maximization*, é apenas uma versão especial do algoritmo mais geral, cuja convergência fora já demonstrada em [14] sob hipóteses um tanto fortes sobre a seqüência  $f(\mathbf{x}_k)$ . Assumindo  $\{\lambda_k\} \in l^2$  (e mais uma hipótese simples), as condições eram passíveis de remoção para o caso específico de RAMLA, ou seja, com a função objetivo  $L(\mathbf{x})$  [38]. No caso regularizado, entretanto, tais hipóteses não podem ser retiradas, a não ser, por exemplo, com uma alteração específica da função objetivo (que não altera o otimizador) e uma adaptação no fator de escala  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ , conforme [3].

## 1.8.9 OS-SPS

**PROBLEMA:**  $g(\mathbf{x}) = -L(\mathbf{x})$ ,  $r(\mathbf{x})$  convexa e  $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^n$ .

**ITERAÇÃO:** Sejam  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{++}$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$ , D uma matriz diagonal definida positiva e  $B$  uma “caixa” sobre a qual a projeção  $\mathcal{P}_B(x)$  seja facilmente computável:

---

**Entrada:**  $x_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ ;  $\{\lambda_k\}$ ;

**Saída:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  calculado a partir de:

$$x_{k,0} = x_k;$$

$$x_{k,l} = \mathcal{P}_B \left( x_{k,l-1} + \lambda_k D \left( \nabla L_l(x_{k,l-1}) - \frac{\gamma}{s} \nabla r(x_{k,l-1}) \right) \right);$$

$$x_{k+1} = x_{k,s}.$$


---

#### ALGORITMO 9 – OS-SPS

**COMENTÁRIO:** os-sps vem de *ordered subsets-separable paraboloidal surrogates*. Em [3] encontramos uma sugestão para o fator D que justifica o nome do algoritmo e uma fórmula para determinar  $B$  de forma que o ótimo esteja contido nesse conjunto. O algoritmo comprovadamente convergente usa, na realidade, uma versão modificada da log-verossimilhança para garantir a limitação do gradiente da função objetivo. Uma vez que o fator de escala é constante ao longo das iterações, a teoria que desenvolveremos a seguir pode ser aplicada para estudar a convergência do algoritmo. De fato, os criadores do método adaptam resultados de [53] que são casos particulares dos nossos para garantir as propriedades assintóticas do método.

## 1.9 DISCUSSÃO

Esta introdução apresentou a transformada de Radon, relacionando-a ao problema de tomografia computadorizada através de algumas das modalidades tomográficas comumente utilizadas hoje. Além de apresentar o problema, duas abordagens distintas para a solução do mesmo foram discutidas: uma baseada nas

propriedades da TR no espaço de Fourier, da qual derivamos um método direto e outra baseada em métodos de otimização convexa. Essa última alternativa mostra-se obviamente mais flexível. Inclusive pudemos ver também que alguns algoritmos exibidos aqui com o problema de tomografia em mente são claramente de maior generalidade e representam contribuições genuínas para o campo da otimização convexa, especialmente em problemas de tamanho grande e altamente esparsos.

Mas além de servir como análise da literatura relevante, o presente capítulo procurou pavimentar o caminho para o próximo assunto que abordaremos. Tal meta foi perseguida através do relacionamento de alguns dos algoritmos apresentados com os resultados de convergência que apresentaremos no capítulo a seguir e, como pudemos ver, diversos dos métodos são casos especiais do nosso esquema geral. Devido à sua maior generalidade, entretanto, nossos resultados podem ser mais fracos do que aqueles obtidos com um método específico em mente. Isso é especialmente verdade com ART, onde mais pode ser dito sobre o ponto limite do algoritmo do que alcança nossa teoria [52]. O leitor está instado a buscar as referências mencionadas em cada caso para certificar-se de que não há resultados teóricos mais específicos do que os nossos para o método em questão. As referências também devem ser consultadas para experimentos numéricos com os métodos apresentados. Não reproduzimos experimentos desse tipo aqui porque os próximos dois capítulos apresentam imagens reconstruídas com algoritmos iterativos em número suficiente.

## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS DE SUBGRADIENTES

### INCREMENTAIS PARA OTIMIZAÇÃO

### CONVEXA: UMA ABORDAGEM UNIFICADA

Considere o problema matemático de encontrar um  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \arg \min & \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p f_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.:} & \quad \mathbf{x} \in X, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde as  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são convexas e  $X$  é convexo e fechado. A fim de resolver (2.1), um algoritmo geral para funções não necessariamente diferenciáveis conhecido como subgradiente incremental foi proposto por Solodov e Zavriev em [63]. Para um dado conjunto convexo fechado  $X$  e definindo  $\mathcal{P}_X$  como a projeção convexa sobre  $X$ , uma iteração  $k$  do seu algoritmo é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k,0} &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k,l} &= \mathbf{x}_{k,l-1} - \lambda_k \mathbf{f}_{k,l} \quad l = 1, \dots, p \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathcal{P}_X(\mathbf{x}_{k,p}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seja  $\partial f(\mathbf{x})$  o subdiferencial (que nunca é vazio, veja [40]) de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em  $\mathbf{x}$ :

$$\partial f(\mathbf{x}) := \left\{ \mathbf{f} \mid f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \right\}. \quad (2.3)$$

Então, na formulação (2.2, pg. 61) e daqui por diante:

$$\mathbf{f}_{k,l} \in \partial f_l(\mathbf{x}_{k,l-1}).$$

Uma variação deste algoritmo foi analisada por Nedić e Bertsekas em [53]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k,0} &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k,l} &= \mathcal{P}_X \left( \mathbf{x}_{k,l-1} - \lambda_k \mathbf{f}_{k,l} \right) \quad l = 1, \dots, p \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k,p}. \end{aligned}$$

E uma abordagem um tanto quanto diferente é seguida pelo método do gradiente incremental agregado, introduzido em [10] para funções não necessariamente convexas, mas Lipschitz diferenciáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k,0} &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{d}_{k,l} &= \mathbf{d}_{k,l-1} - \mathbf{f}_{k-1,l} + \mathbf{f}_{k,l} \\ \mathbf{x}_{k,l} &= \mathbf{x}_{k,l-1} - \lambda_k \frac{1}{p} \mathbf{d}_{k,l} \quad l = 1, \dots, p \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k,p}. \end{aligned}$$

Há uma vasta literatura abordando algoritmos de gradiente/subgradiente incrementais para funções objetivo não-convexas e convexas (suaves ou não) [3, 8, 9, 10, 14, 28, 36, 37, 38, 42, 44, 48, 49, 53, 62, 63, 64, 66]. Métodos incrementais surgiram naturalmente em campos tais como redes neurais (por vezes sob o nome de *backpropagation*) [36, 37, 48, 49] e em reconstrução de imagens em tomografia (onde são conhecidos como métodos de subconjuntos ordenados) [3, 14, 28, 38, 42]. O sucesso desta abordagem nestes problemas é devido à rápida convergência inicial de métodos incrementais, que é especialmente importante dado o tamanho dos problemas que normalmente surgem em tais aplicações. Esse tipo de aceleração é não

---

assintótica, mas compreendida no sentido de muitos problemas inversos, quando “rápido” significa uma chegada ligeira à região onde o ruído torna-se dominante (veja [58]).

Apesar dos métodos incrementais terem encontrado ampla aplicabilidade, ainda não há um algoritmo do tipo capaz de lidar com um conjunto factível “complicado”. Daqueles mencionados no parágrafo acima que podem levar em conta um conjunto factível  $X$ , todos precisam avaliar a projeção sobre  $X$ , a qual pode, por si mesma, ser uma tarefa computacionalmente cara (veja, por exemplo, a comparação entre alguns métodos em [18] para o caso onde  $X$  é uma intersecção de conjuntos convexos mais simples). De fato, mesmo o problema mais fraco da *viabilidade convexa* há tempos motiva uma grande quantidade de pesquisa [1, 2, 5, 6, 7, 19, 22, 57] graças à sua vasta gama de aplicações.

O intuito do presente capítulo é reunir algoritmos incrementais e métodos para a viabilidade convexa a fim de resolver um problema de otimização convexa bastante geral. Em busca deste objetivo analisaremos um algoritmo prototípico cuja iteração consiste em duas etapas: um *passo de otimalidade*, o qual, ao menos aproximadamente, direciona a iteração na direção do minimizador (não necessariamente numa direção de descida), seguido de um *passo de viabilidade* que leva a iteração no sentido do conjunto factível. O ponto central é que no passo de otimalidade podemos utilizar subgradientes com erros ( $\epsilon$ -subgradientes) e que projeções aproximadas são permitidas no passo de viabilidade, dando origem a uma variedade de métodos através da combinação de otimizadores irrestritos com algoritmos para a viabilidade. A intenção é mover-se na direção do ótimo enquanto o problema da viabilidade é resolvido ao invés de precisar resolver subproblemas exatamente a cada passo do algoritmo.

A idéia de utilizar projeções aproximadas para resolver o problema de otimização (2.1, pg. 61) não é, evidentemente, nova. Podemos mencionar as referências [23, 47] para aplicações em recuperação de imagens e os artigos mais teóricos [30, 68, 69]. Alternativamente, métodos baseados em minimizações sobre superconjuntos mais

simples do conjunto factível foram tentados [20, 24] e também métodos baseados em dualidade [27]. Nossa abordagem é, entretanto, a primeira a permitir projeções aproximadas com gradientes incrementais e fornece um elo útil entre métodos de  $\epsilon$ -subgradiente e projeções aproximadas.

A organização do capítulo é a seguinte: na próxima seção é descrito um esquema geral apresentando os operadores de otimalidade e de viabilidade, definidos pelas suas propriedades (2.5) e (2.6), e (2.7) mais uma propriedade de ponto fixo, respectivamente. Os resultados de convergência para os métodos definidos por estes operadores são apresentados sob hipóteses realistas. Duas estratégias para o tamanho de passo são discutidas.

Na seção 2.2 são considerados algoritmos derivados de dois casos especiais do operador de otimalidade: um para o subgradiente incremental e outro para o subgradiente incremental agregado e suas propriedades de convergência são consideradas assumindo a limitação dos subgradientes, utilizada para mostrar que eles satisfazem as condições exigidas. Depois disso ver-se-á que projeções do subgradiente seqüenciais por blocos são casos especiais do operador de viabilidade geral e as provas serão especializadas para estes casos. O comportamento típico dos métodos é exibido através de exemplos apropriadamente simples.

## 2.1 TEORIA GERAL

Esta seção apresenta o esquema abstrato no qual diversos algoritmos, incrementais ou não, podem ser incluídos. Neste esquema, um algoritmo para resolver (2.1, pg. 61) é escrito, de forma geral, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1/2} &= \mathcal{O}_f(\lambda_k, \mathbf{x}_k); \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathcal{V}_X(\mathbf{x}_{k+1/2}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Onde  $\mathcal{V}$  é o “operador de viabilidade” e  $\mathcal{O}$  o “operador de otimalidade”. Daqui por diante será denotado:

$$f^* := \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{e} \quad X^* := \{x \in X \mid f(x) = f^*\}.$$

Por definição o operador de otimalidade satisfaz, com  $X$  e  $f$  fixos, para  $\lambda_k \geq 0$ :

$$\|\mathcal{O}_f(\lambda_k, x_k) - x\|^2 \leq \|x_k - x\|^2 - \alpha \lambda_k (f(x_k) - f(x)) + \lambda_k \rho_k \quad (2.5)$$

ao menos para todo  $x \in X$ , onde  $\alpha > 0$  e  $\rho_k \rightarrow 0^+$ . Também assume-se que exista  $\gamma > 0$  tal que

$$\|x_k - \mathcal{O}_f(\lambda_k, x_k)\| \leq \lambda_k \gamma. \quad (2.6)$$

Quanto ao operador de viabilidade  $\mathcal{V}$ , impõe-se que para todo  $\delta > 0$  exista  $\varepsilon_\delta > 0$  tal que para qualquer  $x_{k+1/2}$  com  $d_X(x_{k+1/2}) \geq \delta$  e  $x \in X$  tenha-se

$$\|\mathcal{V}_X(x_{k+1/2}) - x\|^2 \leq \|x_{k+1/2} - x\|^2 - \varepsilon_\delta, \quad (2.7)$$

e que todo  $x_{k+1/2} \in X$ , que sempre será considerado não vazio, seja um ponto fixo de  $\mathcal{V}_X$ , i.e., que  $x_{k+1/2} \in X \Rightarrow \mathcal{V}_X(x_{k+1/2}) = x_{k+1/2}$ .

### 2.1.1 TAMANHOS DE PASSO DECRESCENTES

Na presente subseção os resultados de convergência para tamanhos de passo decrescentes são apresentados. Comecemos definindo

$$[x]_+ := \max\{0, x\}, \quad \mathcal{P}_X(x) := \arg \min_{z \in X} \|z - x\| \quad \text{e} \quad d_X(x) := \|x - \mathcal{P}_X(x)\|.$$

Além disso, neste capítulo será assumido que a seqüência  $\{x_k\}$  foi gerada por (2.4).

**PROPOSIÇÃO 2.1.1.** *Se  $\{d_X(x_k)\}$  é limitado,  $\lambda_k \rightarrow 0^+$  e tanto (2.6) quanto (2.7) valem, então  $d_X(x_k) \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Primeiro note que com  $\gamma$  dado por (2.6) nós temos, utilizando a definição da função distância e a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d_X^2(\mathbf{x}_{k+1/2}) &\leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k - \mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)\|^2 \\ &\leq (\|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}_k\| + d_X(\mathbf{x}_k))^2 \\ &\leq (\lambda_k \gamma + d_X(\mathbf{x}_k))^2 \\ &\leq d_X^2(\mathbf{x}_k) + \lambda_k M, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde  $M = \sup\{\lambda_k\}\gamma^2 + 2\gamma \sup\{d_X(\mathbf{x}_k)\}$ . Seja  $\delta$  qualquer número positivo e suponha que  $k$  é grande o suficiente tal que

$$\lambda_k \gamma < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_k M < \frac{\varepsilon_{\delta/2}}{2}, \tag{2.9}$$

com  $\varepsilon_{\delta/2}$  dado por (2.7, pg. 65). Agora, se  $d_X(\mathbf{x}_k) > \delta$  então temos  $d_X(\mathbf{x}_{k+1/2}) > \delta/2$  graças a (2.6, pg. 65) e portanto, utilizando as propriedades (2.7, pg. 65) e (2.8):

$$\begin{aligned} d_X^2(\mathbf{x}_{k+1}) &\leq d_X^2(\mathbf{x}_{k+1/2}) - \varepsilon_{\delta/2} \\ &\leq d_X^2(\mathbf{x}_k) + \lambda_k M - \varepsilon_{\delta/2} \\ &\leq d_X^2(\mathbf{x}_k) - \frac{\varepsilon_{\delta/2}}{2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Uma vez que isto vale para todo  $\mathbf{x}_k$  tal que  $d_X(\mathbf{x}_k) > \delta$  é claro que há infinitos  $k$ s para os quais  $d_X(\mathbf{x}_k) \leq \delta$ . Seja  $k_0$  tal que  $d_X(\mathbf{x}_{k_0}) < \delta$  e para  $k \geq k_0$  valha (2.9). Assim, para tais valores grandes de  $k$  temos um dos dois casos abaixo:

$d_X(\mathbf{x}_k) < \delta$ : Este caso implica, graças a (2.7, pg. 65), (2.6, pg. 65) e (2.9), que  $d_X(\mathbf{x}_{k+1}) < 3\delta/2$ ;

$d_X(\mathbf{x}_k) \geq \delta$ : Agora temos, graças a (2.10),  $d_X(\mathbf{x}_{k+1}) < d_X(\mathbf{x}_k)$ .

Estas duas possibilidades significam que, para  $k \geq k_0$ ,  $d_X(\mathbf{x}_k) < 3\delta/2$ . Uma vez que  $\delta > 0$  era arbitrário isto demonstra a afirmação.  $\square$

**PROPOSIÇÃO 2.1.2.** *Suponhamos que a seqüência  $\{\lambda_k\}$  satisfaça*

$$\lambda_k \rightarrow 0^+, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty. \tag{2.11}$$

Então, se (2.5, pg. 65) e (2.7, pg. 65) valem, temos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) \leq f^*.$$

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que a proposição seja falsa, i.e., que existam  $\delta > 0$  e  $k_0$  tais que, para todo  $k > k_0$ ,  $f(\mathbf{x}_k) - f^* \geq \delta$ . Em tal caso sempre existirá  $\mathbf{x}_\delta^* \in X$  tal que  $f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_\delta^*) \geq \delta/2$ . Agora, (2.7, pg. 65) seguida por (2.5, pg. 65) nos dá, para todo  $\mathbf{x} \in X$ :

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - \alpha \lambda_k (f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) + \lambda_k \rho_k. \quad (2.12)$$

Utilizando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\delta^*$  obtém-se

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_\delta^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\delta^*\|^2 - \lambda_k (\alpha \delta / 2 - \rho_k).$$

Escolhendo  $k_1 \geq k_0$  tal que para  $k > k_1$  valha  $\rho_k < \alpha \delta / 4$  vê-se que:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_\delta^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\delta^*\|^2 - \lambda_k \alpha \delta / 4.$$

A contradição então segue-se da hipótese  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ .  $\square$

Uma hipótese extra pode melhorar este resultado.

**PROPOSIÇÃO 2.1.3.** *Se, além das hipóteses da proposição 2.1.2,  $[f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - f(\mathbf{x}_k)]_+ \rightarrow 0$ , então*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f^*.$$

*Demonstração.* Primeiro notemos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) &= f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - (f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - f(\mathbf{x}_k)) \\ &\geq f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - [f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - f(\mathbf{x}_k)]_+ \\ &\geq f^* - [f(\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)) - f(\mathbf{x}_k)]_+. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando limites é claro que  $\liminf f(\mathbf{x}_k) \geq f^*$ . Juntamente com a proposição 2.1.2 isto leva ao resultado desejado.  $\square$

**COROLÁRIO 2.1.4.** Se  $\{d_X(x_k)\}$  é limitada,  $[f(\mathcal{P}_X(x_k)) - f(x_k)]_+ \rightarrow 0$  e as hipóteses (2.5, pg. 65), (2.6, pg. 65), (2.7, pg. 65) e (2.11) valem, temos

$$d_X(x_k) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*.$$

*Demonstração.* Conseqüência das proposições 2.1.1 e 2.1.3. □

**TEOREMA 2.1.5.** Se, além das condições do corolário anterior, o conjunto ótimo  $X^*$  for limitado, então

$$d_{X^*}(x_k) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*.$$

*Demonstração.* Seja  $\delta > 0$  e dividamos em dois casos:

$f(x_k) > f^* + \delta$ : Neste caso (2.12, pg. 67) nos dá

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \alpha\lambda_k(f(x_k) - f(x^*)) + \lambda_k\rho_k \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \lambda_k(\alpha\delta + \rho_k). \end{aligned}$$

Se assumirmos que  $k$  é grande o suficiente tal que  $\rho_k < \alpha\delta/2$  concluímos que

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \lambda_k\alpha\delta/2.$$

Devido a  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$  isto significa que cairemos infinitas vezes no próximo caso;

$f(x_k) \leq f^* + \delta$ : Definamos primeiro:

$$\eta_k := [f(\mathcal{P}_X(x_k)) - f(x_k)]_+ \quad \text{e} \quad X_\delta^* := \{x^* \in X \mid f(x^*) \leq f^* + \delta\}.$$

Se fizermos  $d(\delta) := \max_{x \in X_\delta^*} d_{X^*}(x)$ , então a limitação de  $X_\delta^*$  (a qual, para todo  $\delta > 0$ , é uma conseqüência da limitação de  $X^*$ ) e a continuidade de  $f$  podem ser usadas para verificarmos que para  $\delta \geq 0$ :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} d(\delta + \eta) = d(\delta).$$

Note que  $\mathcal{P}_X(x_k) \in X_{\delta+\eta_k}^*$ , o que nos dá  $d_{X^*}(\mathcal{P}_X(x_k)) \leq d(\delta + \eta_k)$ . Por outro lado, utilizando-nos da desigualdade triangular e da não-expansividade da projeção temos:

$$\begin{aligned}
d_{X^*}(x_k) &= \|x_k - \mathcal{P}_{X^*}(x_k)\| \\
&= \|x_k - \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k) + \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k) - \mathcal{P}_{X^*}(x_k)\| \\
&\leq \|x_k - \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k)\| + \|\mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k) - \mathcal{P}_{X^*}(x_k)\| \\
&\leq \|x_k - \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k)\| + \|\mathcal{P}_X(x_k) - x_k\| \\
&= \|x_k - \mathcal{P}_X(x_k) + \mathcal{P}_X(x_k) - \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k)\| + d_X(x_k) \\
&\leq \|x_k - \mathcal{P}_X(x_k)\| + \|\mathcal{P}_X(x_k) - \mathcal{P}_{X^*}\mathcal{P}_X(x_k)\| + d_X(x_k) \\
&= d_{X^*}(\mathcal{P}_X(x_k)) + 2d_X(x_k) \leq d(\delta + \eta_k) + 2d_X(x_k).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Se lembrarmos de (2.7, pg. 65) e (2.6, pg. 65) vemos que:

$$\begin{aligned}
d_{X^*}(x_{k+1}) &\leq \|x_{k+1} - \mathcal{P}_{X^*}(x_k)\| \\
&\leq \|x_{k+1/2} - \mathcal{P}_{X^*}(x_k)\| \\
&\leq d_{X^*}(x_k) + \lambda_k \gamma.
\end{aligned}$$

Agora (2.13) leva a

$$d_{X^*}(x_{k+1}) \leq d(\delta + \eta_k) + 2d_X(x_k) + \lambda_k \gamma.$$

Uma vez que  $\lambda_k \rightarrow 0^+$ , a proposição 2.1.1 assegura que  $d_X(x_k) \rightarrow 0$ . Além disso,  $\eta_k \rightarrow 0^+$  garante  $d(\delta + \eta_k) \rightarrow d(\delta)$ . Porque o segundo caso acima ocorre infinitas vezes é fácil ver que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d_{X^*}(x_k) \leq d(\delta).$$

E esta relação demonstra o teorema pois vale para todo  $\delta > 0$  e  $\lim_{\delta \rightarrow 0} d(\delta) = 0$ .  $\square$

Com relação à hipótese  $[f(\mathcal{P}_X(x_k)) - f(x_k)]_+ \rightarrow 0$ , pode-se mostrar facilmente que ela vale se existir uma seqüência limitada  $\{\tilde{f}_k\}$  onde  $\tilde{f}_k \in \partial f(\mathcal{P}_X(x_k))$  e também  $d_X(x_k) \rightarrow 0$ . Condições de limitação sobre os subdiferenciais como essa são comuns neste contexto então, dada a proposição 2.1.1, o próximo passo é assegurar a limitação de  $\{d_X(x_k)\}$ .

**PROPOSIÇÃO 2.1.6.** *Se as relações (2.5, pg. 65), (2.6, pg. 65), (2.7, pg. 65) valem e existe  $f_l$  tal que  $f(\mathbf{x}_k) \geq f_l$ , então existe  $\lambda > 0$  tal que com  $\lambda \geq \lambda_k \geq 0$  a seqüência  $\{d_X(\mathbf{x}_k)\}$  é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $\delta > 0$ . Suponha que  $d_X(\mathbf{x}_k) \geq \delta$  e que temos  $\lambda\gamma \leq \delta/2$ , onde  $\gamma$  vem de (2.6, pg. 65). Isto significa que  $d_X(\mathbf{x}_{k+1/2}) \geq \delta/2$  o que, devido a (2.7, pg. 65), implica que para algum  $\mathbf{x} \in X$  fixo:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}\|^2 - \varepsilon_{\delta/2}.$$

Agora considere (2.5, pg. 65):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - \alpha\lambda_k(f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) + \lambda_k\rho_k \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - \alpha\lambda_k(f_l - f(\mathbf{x})) + \lambda_k\rho_k \\ &= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 + \lambda_k(\alpha(f(\mathbf{x}) - f_l) + \rho_k) \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 + \lambda_kM. \end{aligned}$$

Onde  $M = \alpha(f(\mathbf{x}) - f_l) + \sup\{\rho_k\}$ . Assim, se  $\lambda$  for tal que  $\lambda\gamma < \delta/2$  e  $\lambda M < \varepsilon_{\delta/2}/2$  teremos

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - \frac{\varepsilon_{\delta/2}}{2}.$$

Esta relação mostra que deveremos ter  $d_X(\mathbf{x}_k) < \delta$  infinitas vezes. Além disso, em particular,  $d_X(\mathbf{x}_k) \geq \delta$  implica em  $d_X(\mathbf{x}_{k+1}) \leq d_X(\mathbf{x}_k)$ .

Note que as condições sobre o operador de viabilidade asseguram que, para todo  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}\|$ . Portanto, utilizando também (2.6, pg. 65) obtemos:

$$\begin{aligned} d_X(\mathbf{x}_{k+1}) &\leq \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)\| \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)\| \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathcal{P}_X(\mathbf{x}_k)\| + \lambda_k\gamma \\ &= d_X(\mathbf{x}_k) + \lambda_k\gamma. \end{aligned}$$

Desta forma, se  $d_X(\mathbf{x}_k) < \delta$  então  $d_X(\mathbf{x}_{k+1}) < \delta + \lambda_k\gamma$  e se  $d_X(\mathbf{x}_k) > \delta$  então  $d_X(\mathbf{x}_{k+1}) < d_X(\mathbf{x}_k)$ . Isto mostra a limitação de  $\{d_X(\mathbf{x}_k)\}$ .  $\square$

O seguinte corolário é uma aplicação simples da proposição acima. A idéia é utilizar uma hipótese ligeiramente mais forte sobre a seqüência  $\{\lambda_k\}$  a fim de poder aplicar a proposição 2.1.1.

**COROLÁRIO 2.1.7.** *Se  $\lambda_k \rightarrow 0^+$ , as relações (2.5, pg. 65), (2.6, pg. 65), (2.7, pg. 65) valem e existe  $f_l$  tal que  $f(x_k) \geq f_l$  então  $d_X(x_k) \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $k_0$  tal que  $k > k_0$  implique que  $\lambda_k \leq \lambda$  com  $\lambda$  conforme fornecido pela proposição anterior. Desta forma a proposição assegura a limitação da seqüência  $\{d_X(x_k)\}_{k \geq k_0}$ , assegurando assim a limitação de toda a seqüência. Agora aplique a proposição 2.1.1 para obter o resultado desejado.  $\square$

Até agora não fornecemos nenhum resultado garantindo a convergência de toda a seqüência  $\{x_k\}$ . O próximo resultado vai nessa direção impondo condições extras sobre  $\{\rho_k\}$  e  $\{[f^* - f(x_k)]_+\}$ .

**TEOREMA 2.1.8.** *Suponha que  $\{d_X(x_k)\}$  seja limitada e que, além das hipóteses (2.5, pg. 65), (2.6, pg. 65), (2.7, pg. 65) e (2.11, pg. 66), tenhamos  $X^* \neq \emptyset$  e:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \{\alpha [f^* - f(x_k)]_+ + \rho_k\} \leq \infty.$$

*Então, para algum  $x^* \in X^*$ , temos:*

$$x_k \rightarrow x^*.$$

*Demonstração.* Denotemos  $s_k^z := \|x_k - z\|^2$  e  $\sigma_k := \lambda_k \{\alpha [f^* - f(x_k)]_+ + \rho_k\}$ . Seja  $z \in X^*$  e note que (2.7, pg. 65) seguida de (2.5, pg. 65) implica que  $s_{k+1}^z \leq s_k^z + \sigma_k$ , logo:

$$s_k^z \leq s_0^z + \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i \leq s_0^z + \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i.$$

Como  $s_k^z \geq 0$ , isso implica que  $\{s_k^z\}$  é, como consequência,  $\{x_k\}$  são limitadas. Seja, portanto,  $x^*$  um ponto de acumulação de  $\{x_k\}$ , digamos  $x_{l_k} \rightarrow x^*$ . O número  $n_k = \max_{l_i < k} l_i$  está bem definido para  $k$  grande o suficiente, bem como  $n_k \rightarrow \infty$  e

$\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}^*$ . Dessa forma, se aplicarmos limites em

$$s_k^{x^*} \leq s_{n_k}^{x^*} + \sum_{i=n_k}^{k-1} \sigma_i \leq s_{n_k}^{x^*} + \sum_{i=n_k}^{\infty} \sigma_i,$$

vemos que  $s_k^{x^*} \rightarrow 0$ , o que demonstra o resultado.  $\square$

### 2.1.2 TAMANHOS DE PASSO DO TIPO POLYAK

Deixar a escolha do tamanho de passo para o usuário favorece a flexibilidade, mas evita uma discussão sobre como fornecer concretamente uma sequência  $\{\lambda_k\}$  adequada. Se nós, entretanto, refinarmos a propriedade (2.5, pg. 65) e supusermos que o valor ótimo  $f^*$  seja conhecido, é possível fornecer uma escolha apropriada para os tamanhos de passo, de acordo com o resultado a seguir.

**PROPOSIÇÃO 2.1.9.** *Suponha que as relações (2.5, pg. 65), (2.6, pg. 65) e (2.7, pg. 65) valham e que exista  $\beta > 0$  tal que, para  $\lambda_k \geq 0$ ,  $\rho_k \leq \lambda_k \beta$ . Seja então  $\lambda_k = \nu_k(\alpha/\beta)[f(\mathbf{x}_k) - f^*]_+$  com  $\nu_k \in [\sigma, 1 - \sigma]$  onde  $\sigma \in (0, 1/2]$ . Então, para algum  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ :*

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}^*.$$

*Demonstração.* Graças a (2.5, pg. 65),  $\rho_k < \lambda_k \beta$  e à definição de  $\lambda_k$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - \alpha \lambda_k (f(\mathbf{x}_k) - f^*) + \lambda_k^2 \beta \\ &= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - \nu_k(1 - \nu_k) \frac{\alpha^2}{\beta} ([f(\mathbf{x}_k) - f^*]_+)^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - \mu ([f(\mathbf{x}_k) - f^*]_+)^2, \end{aligned}$$

onde  $\mu = \sigma(1 - \sigma)\alpha^2/\beta$ . Uma vez que  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}^*\|$  (o que é assegurado pelas propriedades do operador de viabilidade) podemos escrever:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - \mu ([f(\mathbf{x}_k) - f^*]_+)^2. \quad (2.14)$$

Em particular, temos  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$ .

Isso, é claro, implica que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é limitada, e também  $\{d_X(\mathbf{x}_k)\}$ . Por outro lado, a relação de monotonicidade (2.14) assegura que  $\lambda_k \rightarrow 0^+$ . Agora,  $[f(\mathbf{x}_{k_l}) - f^*]_+ \rightarrow 0$

por sua vez implica que  $\limsup f(\mathbf{x}_k) \leq f^*$ , por outro lado a continuidade de  $f$ , a limitação de  $\{\mathbf{x}_k\}$  e  $d_X(\mathbf{x}_k) \rightarrow 0$  (conseqüência da proposição 2.1.1) implicam que  $\liminf f(\mathbf{x}_k) \geq f^*$ . Portanto temos  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f^*$ .

Levando em consideração que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é limitada e que  $f$  é contínua,  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f^*$  e  $d_X(\mathbf{x}_k) \rightarrow 0$  implicam que  $d_{X^*}(\mathbf{x}_k) \rightarrow 0$ , i.e., que todo ponto de acumulação da seqüência  $\{\mathbf{x}_k\}$  pertence a  $X^*$ . Se supusermos que há dois pontos de acumulação diferentes podemos facilmente derivar uma contradição do fato que  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$ . Portanto, toda a seqüência converge.  $\square$

## 2.2 Os ALGORITMOS

Nesta seção são efetivamente apresentados operadores satisfazendo as condições impostas na seção anterior. São fornecidos dois operadores incrementais de otimalidade, os quais já foram mencionados, e dois operadores de viabilidade baseados em projeções aproximadas.

### 2.2.1 OPERADORES DE OTIMALIDADE

A condição (2.5, pg. 65) tem como objetivo incluir métodos de  $\epsilon$ -subgradientes da seguinte forma. Lembremo-nos da definição do  $\epsilon$ -subdiferencial [26, 40, 60], para  $\epsilon > 0$ , de  $f$  em  $\mathbf{x}$ :

$$\partial_\epsilon f(\mathbf{x}) := \{f \mid f(z) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f \mid z - \mathbf{x} \rangle - \epsilon\}.$$

Então note que se  $\mathbf{f}_k \in \partial_{\epsilon_k} f(\mathbf{x}_{k-1})$  teremos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{f}_k - \mathbf{x}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - 2\lambda_k(f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) + \lambda_k^2 \|\mathbf{f}_k\|^2 + 2\lambda_k \epsilon_k \\ &= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - 2\lambda_k(f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) + \lambda_k \rho_k, \end{aligned}$$

com  $\rho_k = \lambda_k \|\mathbf{f}_k\| + 2\epsilon_k$ . Portanto, se  $\epsilon_k, \lambda_k \rightarrow 0$ , a condição (2.5, pg. 65) é satisfeita.

Comecemos considerando o operador de otimalidade subgradiente incremental  $\mathcal{I} : (\lambda_k, \mathbf{x}_k) \mapsto \bar{\mathbf{x}}$ , onde  $(\lambda_k, \mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$  é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k,0} &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k,l} &= \mathcal{P}_{\mathbf{Y}} \left( \mathbf{x}_{k,l-1} - \lambda_k \mathbf{f}_{k,l} \right) \quad l = 1, \dots, p \\ \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_{k,p},\end{aligned}\tag{2.15}$$

com  $\mathbf{f}_{k,l} \in \partial f_l(\mathbf{x}_{k,l-1})$  e  $\mathbf{Y} \supset \mathbf{X}$ .

**PROPOSIÇÃO 2.2.1.** *Suponha que a hipótese de limitação do subgradiente*

$$\|\mathbf{f}\| \leq C_l, \quad \forall \mathbf{f} \in \partial f_l(\mathbf{x}_k) \cup \partial f_l(\mathbf{x}_{k,l-1}), \quad l = 1, \dots, p, k = 0, 1, \dots \tag{2.16}$$

*valha. Então o operador  $\mathcal{I} : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$  satisfaaz tanto (2.5, pg. 65) com  $\alpha = 2$  e  $\rho_k \leq \lambda_k (\sum_{l=1}^p C_l)^2$  como (2.6, pg. 65) com  $\gamma = \sum_{l=1}^p C_l$ .*

*Demonstração.* O lema 2.1 em [53] estabelece que

$$\|\mathcal{I}(\lambda_k, \mathbf{x}_k) - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - 2\lambda_k (f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) + \lambda_k^2 \left( \sum_{l=1}^p C_l \right)^2,$$

que é a primeira parte. Por outro lado, uma vez que a projeção é não expansiva, temos, graças a (2.15):

$$\|\mathbf{x}_{k,l} - \mathbf{x}_{k,l-1}\| \leq \lambda_k \|\mathbf{f}_{k,l}\|$$

e a soma de  $l = 1$  a  $l = p$  seguida pela aplicação da hipótese (2.16) leva a  $\|\mathcal{I}(\lambda_k, \mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k\| \leq \lambda_k \sum_{l=1}^p C_l$ .  $\square$

A condição  $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$  na definição de  $\mathcal{I}$  não deve ser um problema pois assumimos que a projeção sobre  $\mathbf{Y}$  seja simples e, portanto, pode ser incluída após o operador de viabilidade para assegurar que  $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbf{Y}$ .

Consideremos agora o operador chamado de subgradiente incremental agregado, o qual é definido como  $\mathcal{A} : (\lambda_k, \mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \mapsto \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{Y}$ , com  $\hat{\mathbf{x}}$  dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k,0} &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k,l} &= \mathcal{P}_{\mathbf{Y}} \left( \mathbf{x}_{k,l-1} - \frac{\lambda_k}{p} \mathbf{d}_{k,l} \right), \quad l = 1, \dots, p \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_{k,p},\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{d}_{k,l} = \mathbf{d}_{k,l-1} - f_{k-1,l} + f_{k,l}$  com  $f_{k,l} \in \partial f_l(\mathbf{x}_{k,l-1})$  e  $\mathbf{d}_{k,0} = \sum_{l=1}^p f_{k-1,l}$ . Note que  $\mathbf{d}_{k,0}$  sempre satisfará esta última imposição para  $k \geq 1$  se a seqüência  $\{\mathbf{x}_k\}$  for gerada por (2.4, pg. 64) com  $\mathcal{O}_f = \mathcal{A}$  e uma estratégia de inicialização adequada.

Deve-se notar que, diferentemente do que ocorre com o operador incremental, a aplicação do operador incremental agregado faz referência a iterações anteriores do algoritmo. Isto significa que a magnitude da diferença  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|$  será importante no erro da aproximação para o subgradiente fornecida pelo método. Uma consequência deste fato na análise é que o comportamento do operador de viabilidade deve ser levado em consideração em  $\rho_k$  e, por causa disso, os resultados são um pouco mais fracos do que aqueles obtidos para o operador  $\mathcal{I}$ . Por exemplo, não se pode garantir que  $\rho_k = O(\lambda_k)$  somente com a condição (2.7, pg. 65).

**PROPOSIÇÃO 2.2.2.** *Suponha que (2.16) valha. Então o operador  $\mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$  conforme definido acima satisfaz (2.5, pg. 65) com  $\alpha = 2$  e*

$$\rho_k = (4 + 1/p)\bar{\lambda}_k C^2 + 8Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}),$$

onde  $C = \sum_{l=1}^p C_l$  e  $\bar{\lambda}_k = \max\{\lambda_k, \lambda_{k-1}\}$  para  $k > 0$ . Ele também satisfaz (2.6, pg. 65) com  $\gamma = C$ .

*Demonstração.* Começamos pela segunda parte. Considere a diferença entre duas subiterações tendo em vista a não expansividade da projeção e a limitação do subgradiente (2.16):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x}_{k,l}\|^2 &\leq \left\| \mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x}_{k,l-1} + \frac{\lambda_k}{p} \mathbf{d}_{k,l} \right\|^2 \\ &= \frac{\lambda_k}{p} \|\mathbf{d}_{k,l}\|^2 \leq \frac{\lambda_k}{p} \sum_{l=1}^p C_l. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Somando para  $l = 1, \dots, p$  temos o resultado desejado.

Seja  $\mathbf{x} \in X \subset Y$ , então podemos, novamente utilizando a não expansividade da projeção:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_{k,l} - \mathbf{x}\|^2 &= \left\| \mathcal{P}_Y \left( \mathbf{x}_{k,l-1} - \frac{\lambda_k}{p} \mathbf{d}_{k,l} \right) - \mathbf{x} \right\|^2 \\ &\leq \left\| \mathbf{x}_{k,l-1} - \frac{\lambda_k}{p} \mathbf{d}_{k,l} - \mathbf{x} \right\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x}\|^2 - 2 \frac{\lambda_k}{p} \langle \mathbf{d}_{k,l} | \mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x} \rangle + \frac{\lambda_k^2}{p^2} \|\mathbf{d}_{k,l}\|^2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Desenvolvendo o produto interno no segundo termo:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{d}_{k,l} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^l \mathbf{f}_{k,j} + \sum_{j=l+1}^p \mathbf{f}_{k-1,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle + \sum_{j=l+1}^p \left\langle \mathbf{f}_{k-1,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Observando cada uma das somatórias acima separadamente:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle &= \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,j-1} \right\rangle + \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x}_{k,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,j-1} \right\rangle + \sum_{j=1}^l \|\mathbf{f}_{k,j}\| \|\mathbf{x}_{k,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,j-1} \right\rangle + \sum_{j=1}^l C_j \|\mathbf{x}_{k,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\|,\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida por (2.16, pg. 74). Usando (2.17, pg. 75) podemos inferir que  $\|\mathbf{x}_{k,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\| \leq \lambda_k C(l-j)/p \leq \lambda_k C$ , portanto:

$$\sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle \leq \sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,j-1} \right\rangle + \lambda_k C \sum_{j=1}^l C_j.$$

Lembrando que  $\mathbf{f}_{k,j} \in \partial f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})$  e valendo-se da definição (2.3, pg. 62) de subdiferencial obtemos:

$$\sum_{j=1}^l \left\langle \mathbf{f}_{k,j} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \right\rangle \leq \sum_{j=1}^l (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})) + \lambda_k C \sum_{j=1}^l C_j.\tag{2.20}$$

E para a última parte da soma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle &= \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1,j-1} \rangle \\
 &\quad + \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x}_{k-1,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle \\
 &\leq \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1,j-1} \rangle \\
 &\quad + \sum_{j=l+1}^p C_j \|\mathbf{x}_{k-1,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\|. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, de acordo com a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}_{k-1,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\| &\leq \|\mathbf{x}_{k-1,j-1} - \mathbf{x}_{k-1/2}\| + \|\mathbf{x}_{k-1/2} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,l-1}\| \\
 &\leq \frac{p-j+1}{p} \lambda_{k-1} C + 2d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) + \frac{l-1}{p} \lambda_k C.
 \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade, o último e o primeiro termos vêm de (2.17, pg. 75) enquanto o termo central é consequência do fato que, graças a (2.7, pg. 65), tanto  $\mathbf{x}_{k-1/2}$  quanto  $\mathbf{x}_k$  pertencem a uma bola com centro em  $\mathcal{P}_X(\mathbf{x}_{k-1/2})$  e raio igual a  $d_X(\mathbf{x}_{k-1/2})$ . Portanto:

$$\|\mathbf{x}_{k-1,j-1} - \mathbf{x}_{k,l-1}\| \leq \bar{\lambda}_k \frac{p+l-j}{p} C + 2d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \leq \bar{\lambda}_k C + 2d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}).$$

Voltando a (2.21) teremos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle &\leq \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1,j-1} \rangle + \sum_{j=l+1}^p C_j (\bar{\lambda}_k C + 2d_X(\mathbf{x}_{k-1/2})) \\
 &= \sum_{j=l+1}^p \langle f_{k-1,j} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1,j-1} \rangle + \bar{\lambda}_k C^2 + 2C d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \\
 &\leq \sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) + \bar{\lambda}_k C^2 + 2C d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \cdot \vec{x}
 \end{aligned}$$

Utilizando este resultado junto com (2.20) em (2.19):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}_{k,l} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle &\leq \sum_{j=1}^l (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})) \\ &+ \sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) + \bar{\lambda}_k C^2 + 2Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Consideremos agora a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^l (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})) + \sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^l (f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})) + \sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) \end{aligned} \quad (2.23)$$

e analisemos cada um dos dois últimos termos do lado direito em separado. Denotando  $\mathbf{g}_{k,j} \in \partial f_j(\mathbf{x}_k)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l (f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{x}_{k,j-1})) &\leq \sum_{j=1}^l \langle \mathbf{g}_{k,j} | \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,j-1} \rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^l \|\mathbf{g}_{k,j}\| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,j-1}\| \leq \sum_{j=1}^l C_j \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,j-1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^l C_j \lambda_k \frac{j-1}{p} C \leq \lambda_k C \sum_{j=1}^l C_j, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde nós utilizamos sucessivamente a definição do subdiferencial (2.3, pg. 62), a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a hipótese (2.16, pg. 74) e (2.17, pg. 75). Continuando de forma semelhante teremos:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) \\ &\leq \sum_{j=l+1}^p \langle \mathbf{g}_{k,j} | \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1,j-1} \rangle \leq \sum_{j=l+1}^p \|\mathbf{g}_{k,j}\| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1,j-1}\| \\ &\leq \sum_{j=l+1}^p C_j \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1,j-1}\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=l+1}^p (f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{x}_{k-1,j-1})) \\ & \leq \sum_{j=l+1}^p C_j \left( \lambda_{k-1} \frac{p-j+1}{p} C + 2d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \right) \\ & \leq \lambda_{k-1} C^2 + 2Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}). \end{aligned}$$

O resultado acima junto com (2.24), quando substituído em (2.23) e (2.22) leva a:

$$\langle \mathbf{d}_{k,l} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k,l-1} \rangle \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k) + 2\bar{\lambda}_k C^2 + 4Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}).$$

Finalmente, utilizando este resultado e a hipótese (2.16, pg. 74) em (2.18, pg. 76) obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k,l} - \mathbf{x}\|^2 & \leq \|\mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x}\|^2 - 2\frac{\lambda_k}{p} \langle \mathbf{d}_{k,l} | \mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x} \rangle + \frac{\lambda_k^2}{p^2} C^2 \\ & \leq \|\mathbf{x}_{k,l-1} - \mathbf{x}\|^2 - 2\frac{\lambda_k}{p} (f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) \\ & \quad + \frac{\lambda_k}{p} \left( 4\bar{\lambda}_k C^2 + 8Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) + \frac{\lambda_k}{p} C^2 \right). \end{aligned}$$

Somando sobre  $l = 1, \dots, p$  obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\lambda_k, \mathbf{x}_k) - \mathbf{x}\|^2 & \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 - 2\lambda_k (f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x})) \\ & \quad + \lambda_k \left( (4 + 1/p)\bar{\lambda}_k C^2 + 8Cd_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Notemos que, diferentemente do operador  $\mathcal{I}$ , onde  $\lambda_k \rightarrow 0$  assegura  $\rho_k \rightarrow 0$ , para o método agregado  $\mathcal{A}$  também precisamos da limitação de  $\{d_X(\mathbf{x}_k)\}$ . A razão para isto é o fator  $d_X(\mathbf{x}_{k-1/2})$  no segundo termo da fórmula para  $\rho_k$ . Para ver que a limitação é uma condição suficiente, note que sob esta hipótese podemos utilizar a proposição 2.1.1 para obter  $d_X(\mathbf{x}_k) \rightarrow 0$ . Isto claramente implica  $d_X(\mathbf{x}_{k-1/2}) \rightarrow 0$  porque  $\|\mathbf{x}_{k-1/2} - \mathbf{x}_{k-1}\| \leq \lambda_{k-1} C$ . Esta hipótese extra sobre o operador não deve ser encarada como uma limitação uma vez que esta propriedade é assumida em nossos resultados principais de convergência. Entretanto, as proposições 2.1.2 e 2.1.3

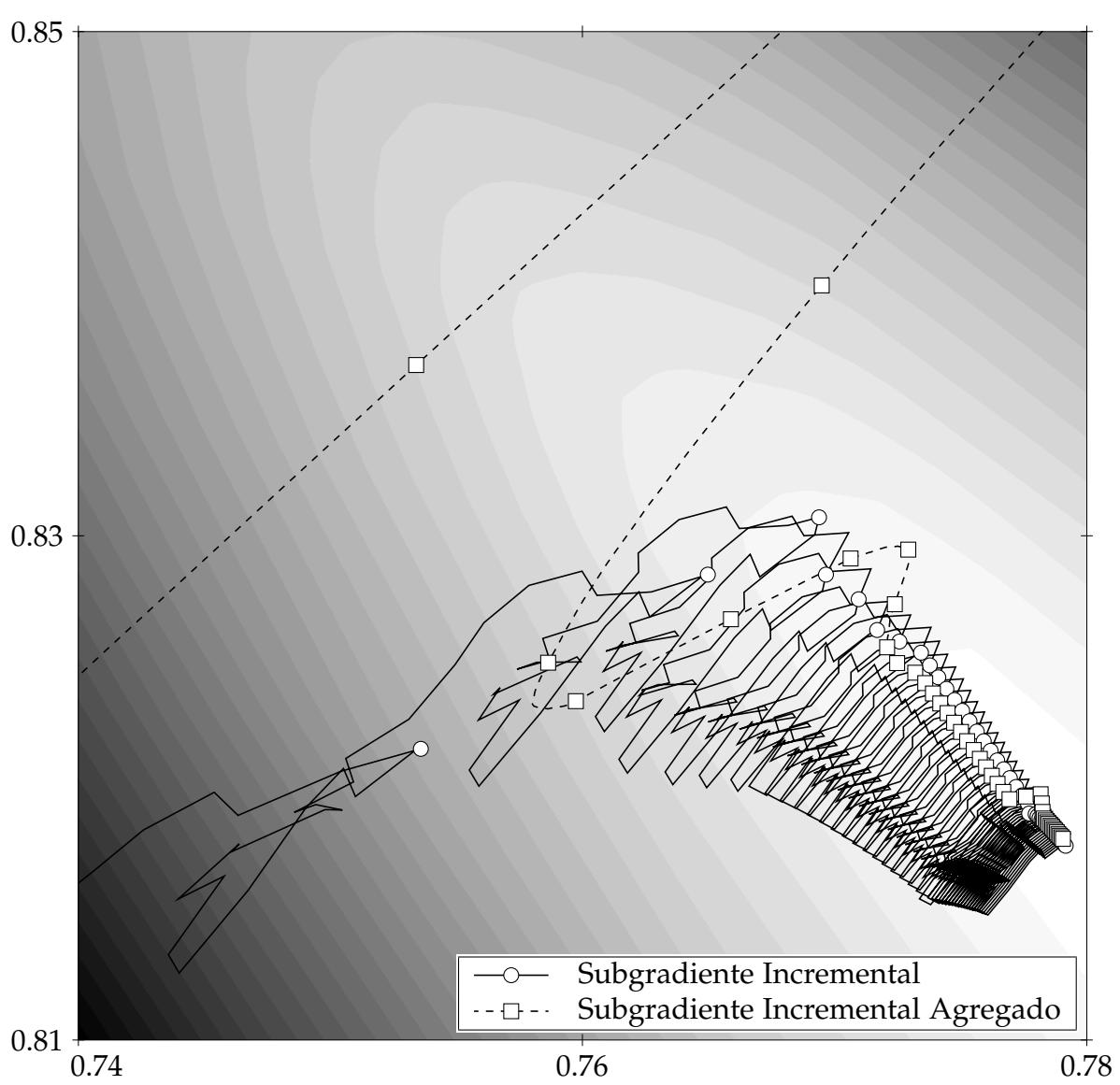


FIGURA 9 – Comparação entre os operadores de Subgradiente Incremental e de Subgradiente Incremental Agregado em um problema sem restrições. Conjuntos de nível da função objetivo são exibidos numa escala de cinza. A seqüência de parâmetros de relaxação seguiu  $\lambda_k = 0.5/(\|f\|\sqrt{k+1})$  onde  $f \in \partial f(x_0)$  (veja no texto uma descrição de  $f$  e da inicialização do operador  $\mathcal{A}$ ).

precisam desta hipótese extra para valer neste caso. Outra dessemelhança é que  $\rho_k$  não é  $O(\lambda_k)$  e, como consequência, os resultados da seção 2.1.2 não se aplicam aqui.

A figura 9 nos fornece uma idéia visual do comportamento dos operadores descritos nesta seção. Os caminhos tomados pelos dois métodos (incremental e incremental agregado) para um problema irrestrito são mostrados. Ainda que não seja possível extrair conclusões quantitativas a partir de um único exemplo, algo pode ser dito sobre o comportamento qualitativo dos operadores. Comparando as trajetórias pode-se ver que os subiterandos da versão agregada possuem, de certa forma, mais “inércia” enquanto a versão incremental pura possui subiterandos muito mais “leves” que tendem a oscilar mais.

Para gerar a figura foi utilizado  $p = 25$  com cada  $f_i$  definido como:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{12} \|\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{x} - \mathbf{b}_{i,j}\|_1,$$

onde cada uma das matrizes  $\mathbf{A}_{i,j}$  tem entradas uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$  e  $\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{z}_{i,j}$  com  $\mathbf{z}_{i,j}$  uniformemente distribuído em  $[0.75, 0.85] \times [0.75, 0.85]$ . O operador  $\mathcal{A}$  foi iniciado com  $\mathbf{d}_{0,0} \in \partial f(\mathbf{x}_0)$  e  $\mathbf{f}_{-1,l} = \mathbf{d}_{0,0}/p$  para  $l = 1, \dots, p$ .

### 2.2.2 OPERADORES DE VIABILIDADE

Cosideraremos agora um exemplo de operador de viabilidade que utiliza-se de tamanhos de passo do tipo Polyak. Versões extrapoladas, ponderadas e por blocos são facilmente derivadas a partir da forma original do operador. Começamos fornecendo uma representação do conjunto factível  $X \neq \emptyset$  como uma intersecção de conjuntos de nível de funções convexas:

$$X = \bigcap_{i=1}^r \text{lev}(g_i),$$

onde  $\text{lev}(g_i) := \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$  e as funções  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são convexas. Todo conjunto convexo  $X$  pode facilmente ser representado desta maneira, digamos com  $r = 1$  e  $g_1(\mathbf{x}) = d_X(\mathbf{x})$ . Tais casos triviais são úteis quando o cálculo da projeção

é simples, pois a projeção sobre  $X$  equivale a  $\mathcal{S}_{d_X}^1$  (veja no parágrafo a seguir a definição de  $\mathcal{S}$ ).

Agora apresentamos o principal ingrediente de nosso operador, que utiliza a direção do subgradiente com um tamanho de passo escolhido apropriadamente. A idéia é a mesma dos tamanhos de passo tipo Polyak utilizados na seção 2.1.2 acima para o operador de otimalidade quando  $f^*$  é conhecido. Definimos o operador  $\mathcal{S}_g^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}_g^\nu(x) := \begin{cases} x - \nu \frac{[g(x)]_+}{\|g\|^2} g & \text{se } g \neq 0; \\ x & \text{c. c.,} \end{cases} \quad (2.25)$$

onde  $\nu \in (0, 2)$  e  $g \in \partial g(x)$ . Esta é uma versão  $\nu$ -relaxada da projeção sobre o conjunto

$$\{z \mid g(x) + \langle g \mid z - x \rangle \leq 0\}$$

e é freqüentemente chamada de *projeção do subgradiente* (do inglês *subgradient projection*) [7, 22, 68, 69], mas o termo também é utilizado para referir-se a um algoritmo de minimização em [60, pg. 29].

A propriedade mais importante da aplicação acima é a monotonicidade de Fejér com relação a  $\text{lev}(g)$ . Para ser mais preciso, sejam  $z \notin \text{lev}(g)$  e  $x \in \text{lev}(g)$ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_g^\nu(z) - x\|^2 &= \|z - x\|^2 - 2\nu \frac{g(z)}{\|g\|^2} \langle g \mid z - x \rangle + \nu^2 \frac{g^2(z)}{\|g\|^2} \\ &\leq \|z - x\|^2 - 2\nu \frac{g(z)}{\|g\|^2} (g(z) - g(x)) + \nu^2 \frac{g^2(z)}{\|g\|^2} \\ &\leq \|z - x\|^2 - 2\nu \frac{g^2(z)}{\|g\|^2} + \nu^2 \frac{g^2(z)}{\|g\|^2} \\ &= \|z - x\|^2 - (2 - \nu)\nu \frac{g^2(z)}{\|g\|^2}. \end{aligned}$$

De fato, para  $z \in \text{lev}(g)$  temos  $\mathcal{S}_g^\nu(z) = z$  e portanto, para todo  $z$  e para  $x \in \text{lev}(g)$  temos:

$$\|\mathcal{S}_g^\nu(z) - x\|^2 \leq \|z - x\|^2 - (2 - \nu)\nu \frac{[g(z)]_+^2}{\|g\|^2}. \quad (2.26)$$

Nosso operador  $\mathcal{V}$  é definido como a aplicação seqüencial de  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{V} := \mathcal{S}_{g_r}^{\nu_r} \circ \mathcal{S}_{g_{r-1}}^{\nu_{r-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{g_1}^{\nu_1}. \quad (2.27)$$

Nesta definição assumimos que existe  $\sigma \in (0, 1]$  tal que  $\nu_i \in [\sigma, 2 - \sigma]$  para todo  $i$ , mas, para cada  $i$  fixo,  $\nu_i$  não precisa ser o mesmo em todos os passos. Para uso posterior denotaremos:

$$\mathbf{s}_{k,0} := \mathbf{x}_{k+1/2} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_{k,i} := \mathcal{S}_{g_i}^{\nu_i}(\mathbf{s}_{k,i-1}), \quad i = 1, \dots, r.$$

Denotemos ainda por  $\mathbf{g}_{k,i} \in \partial g_i(\mathbf{s}_{k,i-1})$  o subgradiente utilizado na avaliação de  $\mathcal{S}_{g_i}^{\nu_i}(\mathbf{s}_{k,i-1})$ .

O operador  $\mathcal{V}$  definido desta forma é útil no contexto da teoria recém proposta, conforme indica o resultado a seguir.

**PROPOSIÇÃO 2.2.3.** *Suponha que a seqüência  $\{\mathbf{x}_{k+1/2}\}$  seja tal que para toda subseqüência  $\{\mathbf{x}_{l_k+1/2}\}$  tenhamos*

$$[g_i(\mathbf{s}_{l_k,i-1})]_+ \rightarrow 0 \Rightarrow d_{\text{lev}(g_i)}(\mathbf{s}_{l_k,i-1}) \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.28)$$

e

$$\max_{i=1, \dots, r} \{d_{\text{lev}(g_i)}(\mathbf{x}_{l_k+1/2})\} \rightarrow 0 \Rightarrow d_X(\mathbf{x}_{l_k+1/2}) \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Além disso suponha que exista uma constante positiva  $D$  tal que

$$\|\mathbf{g}_{k,i}\| \leq D \quad i = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots \quad (2.30)$$

Então, dado  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon_\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in X$  e  $\mathbf{x}_{k+1/2}$  com  $d_X(\mathbf{x}_{k+1/2}) \geq \delta$  temos:

$$\|\mathcal{V}(\mathbf{x}_{k+1/2}) - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}\|^2 - \varepsilon_\delta.$$

*Demonstração.* Primeiro notemos que, já que  $(2 - \nu_i)\nu_i \geq (2 - \sigma)\sigma =: \mu > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \in X$  podemos aplicar (2.26) sucessivas vezes para obter

$$\|\mathcal{V}(\mathbf{x}_{k+1/2}) - \mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_{k+1/2} - \mathbf{x}\|^2 - \mu \sum_{i=1}^r \frac{[g_i(\mathbf{s}_{k,i-1})]_+^2}{\|\mathbf{g}_{k,i}\|^2}.$$

Isto significa que  $d_X(x_k) > 0 \Rightarrow \|x_{k+1/2} - x\|^2 - \|\mathcal{V}(x_{k+1/2}) - x\|^2 > 0$ .

Fixemos  $\delta > 0$  e suponhamos que existe  $k_0$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow d_X(x_{k+1/2}) < \delta$ , daí teremos simplesmente

$$\epsilon_\delta = \min_{\substack{k < k_0 \\ d_X(x_{k+1/2}) > \delta}} \mu \sum_{i=1}^r \frac{[g_i(s_{k,i-1})]_+^2}{\|g_{k,i}\|^2} > 0.$$

Agora concentremo-nos no caso em que há infinitos termos  $d_X(x_{k+1/2}) > \delta$  e suponhamos, por contradição, que o resultado não valha. Então existirão  $\delta > 0$ , uma seqüência  $\{z_k\} \subset X$  e uma subseqüência  $\{x_{l_k+1/2}\}$  satisfazendo  $d_X(x_{l_k+1/2}) \geq \delta$  tais que

$$\|\mathcal{V}(x_{l_k+1/2}) - z_k\|^2 - \|x_{l_k+1/2} - z_k\|^2 \rightarrow 0.$$

Esta segunda possibilidade implica que

$$\frac{[g_i(s_{l_k,i-1})]_+^2}{\|g_{l_k,i}\|^2} \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.31)$$

Note então que

$$\|s_{l_k,i} - s_{l_k,i-1}\| = \nu_i \frac{[g_i(s_{l_k,i-1})]_+}{\|g_{l_k,i}\|} \|g_{l_k,i}\| = \nu_i \frac{[g_i(s_{l_k,i-1})]_+}{\|g_{l_k,i}\|}.$$

Portanto,  $\|s_{l_k,i} - s_{l_k,i-1}\| \rightarrow 0$ , o que implica que  $\|s_{l_k,i} - x_{l_k+1/2}\| \rightarrow 0$ . Agora, baseados nas hipóteses (2.28, pg. 83) e (2.30, pg. 83), a partir de (2.31) inferimos que  $d_{\text{lev}(g_i)}(s_{l_k,i-1}) \rightarrow 0$  e portanto  $d_{\text{lev}(g_i)}(x_{l_k+1/2}) \rightarrow 0$  para todo  $i$  de 1 até  $r$ . Utilizando então a hipótese (2.29, pg. 83) podemos ver que  $d_X(x_{l_k+1/2}) \rightarrow 0$ , o que contradiz  $d_X(x_{l_k+1/2}) \geq \delta$  e isto demonstra o resultado.  $\square$

A proposição acima é mais útil do que parece. Não é difícil mostrar que se  $\{x_{k+1/2}\}$  é limitado e  $\{s_{k,i-1}\} \subset \text{int}(\text{dom}(g_i))$  então as condições (2.28, pg. 83), (2.29, pg. 83) e (2.30, pg. 83) valem. Por exemplo, se  $\mathcal{V}$  for utilizado num esquema de tamanho de passos do tipo Polyak, como descrito na seção 2.1.2 a limitação de  $\{x_{k+1/2}\}$  é automaticamente garantida, o que também ocorre se  $\mathcal{V}$  incluir uma

projeção num conjunto limitado (uma caixa, por exemplo) como último passo em seu cálculo. O seguinte resultado estabelece ainda outra, mais facilmente verificável (porém mais forte), condição que assegura que as propriedades necessárias para  $\mathcal{V}$  sejam respeitadas.

**PROPOSIÇÃO 2.2.4.** *Se, para algum  $I$ , o conjunto  $\text{lev}(g_I)$  é limitado e todas as seqüências  $\{g_{k,i}\}$  são também limitadas, então  $\mathcal{V}$  satisfaz (2.7, pg. 65).*

*Demonstração.* O fato de  $\text{lev}(g_I)$  ser limitado implica que todo conjunto de nível de  $g_I$  também é limitado. Uma consequência é que existem  $M$  e  $\varsigma$  tais que, para qualquer  $x^* \in X$ ,  $\|x - x^*\| > M \Rightarrow g_I(x) > \varsigma$ . Portanto, se  $\|s_{k,I-1} - x^*\| > M$ , utilizando (2.26, pg. 82) junto com a limitação de  $\{g_{k,I}\}$  obteremos

$$\|s_{k,I-1} - x^*\| > M \Rightarrow \|s_{k,I} - x^*\|^2 < \|s_{k,I-1} - x^*\|^2 - \epsilon \quad (2.32)$$

para algum  $\epsilon > 0$ .

Então sejam  $x^* \in X$  qualquer e

$$\Delta = \max \left\{ M, \sup_{x,z \in X} \|x - z\| \right\}$$

e dividamos em dois casos:

$d_X(x_{k+1/2}) > 3\Delta$ : Aqui podemos pensar em duas possibilidades. A primeira que consideramos é  $d_X(s_{k,I-1}) \leq \Delta$ . Daí teríamos, graças a (2.26, pg. 82) seguida da definição de  $\Delta$  e de  $d_X(x_{k+1/2}) > 3\Delta$ :

$$\|\mathcal{V}(x_{k+1/2}) - x^*\| \leq \|s_{k,I-1} - x^*\| \leq 2\Delta \leq \|x_{k+1/2} - x^*\| - \Delta.$$

Agora basta elevar ao quadrado e usar  $\|x_{k+1/2} - x^*\| > 3\Delta$  que teremos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}(x_{k+1/2}) - x^*\|^2 &\leq \|x_{k+1/2} - x^*\|^2 - 2\Delta\|x_{k+1/2} - x^*\| + \Delta^2 \\ &\leq \|x_{k+1/2} - x^*\|^2 - 5\Delta^2. \end{aligned}$$

A outra possibilidade é  $d_X(s_{k,I-1}) > \Delta$ , mas aí (2.26, pg. 82) e (2.32) mostram que o resultado também vale:

$$\|\mathcal{V}(x_{k+1/2}) - x^*\|^2 \leq \|s_{k,I-1} - x^*\|^2 \leq \|s_{k,I-1} - x^*\|^2 - \epsilon \leq \|x_{k+1/2} - x^*\|^2 - \epsilon;$$

$d_X(x_{k+1/2}) \leq 3\Delta$ : Neste ponto notamos que, exatamente como na proposição 2.2.3, podemos desconsiderar o caso em que há finitos  $x_{k+1/2}$  com  $d_X(x_{k+1/2}) > \delta$ . Suponhamos então, por contradição, que exista  $\delta > 0$  tal que haja uma subseqüência  $\{x_{l_k+1/2}\}$  com  $d_X(x_{l_k+1/2}) \leq 3\Delta$  e  $d_X(x_{l_k+1/2}) \geq \delta$ , mais uma seqüência  $\{z_k\} \subset X$  tais que

$$\|x_{l_k+1/2} - z_k\|^2 - \|\mathcal{V}(x_{l_k+1/2}) - z_k\|^2 \rightarrow 0.$$

É fácil, utilizando (2.25, pg. 82), (2.31, pg. 84) e a limitação de  $\{g_{k,i}\}$ , ver que isto leva a

$$\|s_{k,i} - s_{k,i-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 0} [g_i(s_{k,i-1})]_+ = 0.$$

Como  $\{x_{l_k+1/2}\}$  é limitada, podemos assumir que ela convirja (caso contrário basta utilizarmos uma subseqüência convergente dela no restante do argumento), digamos  $x_{l_k+1/2} \rightarrow x^*$ . Desta forma, o primeiro limite acima implica  $s_{l_k,i} \rightarrow x^*$  e, por continuidade, o segundo leva a  $x^* \in X$ , mas isto contradiz  $d_X(x_{l_k+1/2}) \geq \delta$ .

Unindo os dois casos temos a demonstração.  $\square$

### 2.2.3 VARIAÇÕES

A natureza estritamente seqüencial do operador  $\mathcal{V}$  apresentado acima pode ser uma desvantagem para computação paralela. Felizmente é fácil derivar versões seqüenciais por blocos (ou mesmo plenamente paralelas) simplesmente reescrevendo o conjunto factível de uma forma equivalente. Primeiro escolhemos  $s$  subconjuntos  $I_j \subset \{1, \dots, r\}$  tais que  $\cup_{j=1}^s I_j = \{1, \dots, r\}$ . Então construímos as funções  $G_j$  com  $j$  variando de 1 até  $s$ . Cada uma destas funções é definida da seguinte forma:

$$G_j(x) = \sum_{i \in I_j} \omega_{i,j} [g_i(x)]_+,$$

onde  $\omega_{i,j} > 0$ . Agora é óbvio que

$$\bigcap_{i=1}^r \text{lev}(g_i) = \bigcap_{j=1}^s \text{lev}(G_j),$$

portanto podemos utilizar as funções  $G_j$  ao invés das funções originais  $g_i$  no operador de viabilidade. É fácil ver que se as funções  $g_i$  satisfazem as condições da proposição 2.2.3 ou da proposição 2.2.4 o mesmo também poderá ser dito das funções  $G_j$ . Além disso, pode-se facilmente calcular um subgradiente de  $G_j$  dados subgradientes de  $g_i$  para todo  $i \in I_j$ :

$$\sum_{\substack{i \in I_j \\ g_i(x) > 0}} \omega_{i,j} g_i \in \partial G_j(x),$$

onde  $g_i \in \partial g_i(x)$ .

Outra forma de se obter uma versão paralela do operador é através de uma formalização em um espaço produto, aproximadamente como feito em [55]. O leitor interessado encontra em [22] um apanhado interessante sobre o assunto. Esta referência é muito ilustrativa e exibe de uma forma geométrica e intuitiva diversos operadores que podem ser utilizados dentro do nosso esquema.

A fim de dar uma idéia do comportamento das diversas versões de nosso operador de viabilidade, na figura 10 vê-se a trajetória seguida após sucessivas aplicações do operador  $\mathcal{V}$ . O conjunto factível é a intersecção dos conjuntos definidos por  $\{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid g_i(x) \leq 0\}$  para  $i \in \{1, 2\}$  com

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 7 \left( x_1 e^{-1/x_1} + x_2 e^{-1/x_2} \right) + \|x\|_\infty - 2.6; \\ g_2(x) &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} \right\| - 0.5. \end{aligned}$$

A partir deste experimento por si só não podemos traçar nenhuma comparação quantitativa entre as variantes — nem é o intuito aqui —, mas os efeitos benéficos da sobrerrelaxação já tornam-se notáveis. Em muitos casos a subrelaxação pode ser mais útil, como por exemplo com ART [52].

Os parágrafos anteriores mostraram como, de forma simples, podemos paralelizar o operador  $\mathcal{V}$ . Também é possível utilizar os operadores de otimalidade e de viabilidade em paralelo. Conforme apresentado em (2.4, pg. 64), a aplicação dos operadores é seqüencial, mas não é preciso ser assim, conforme mostraremos a

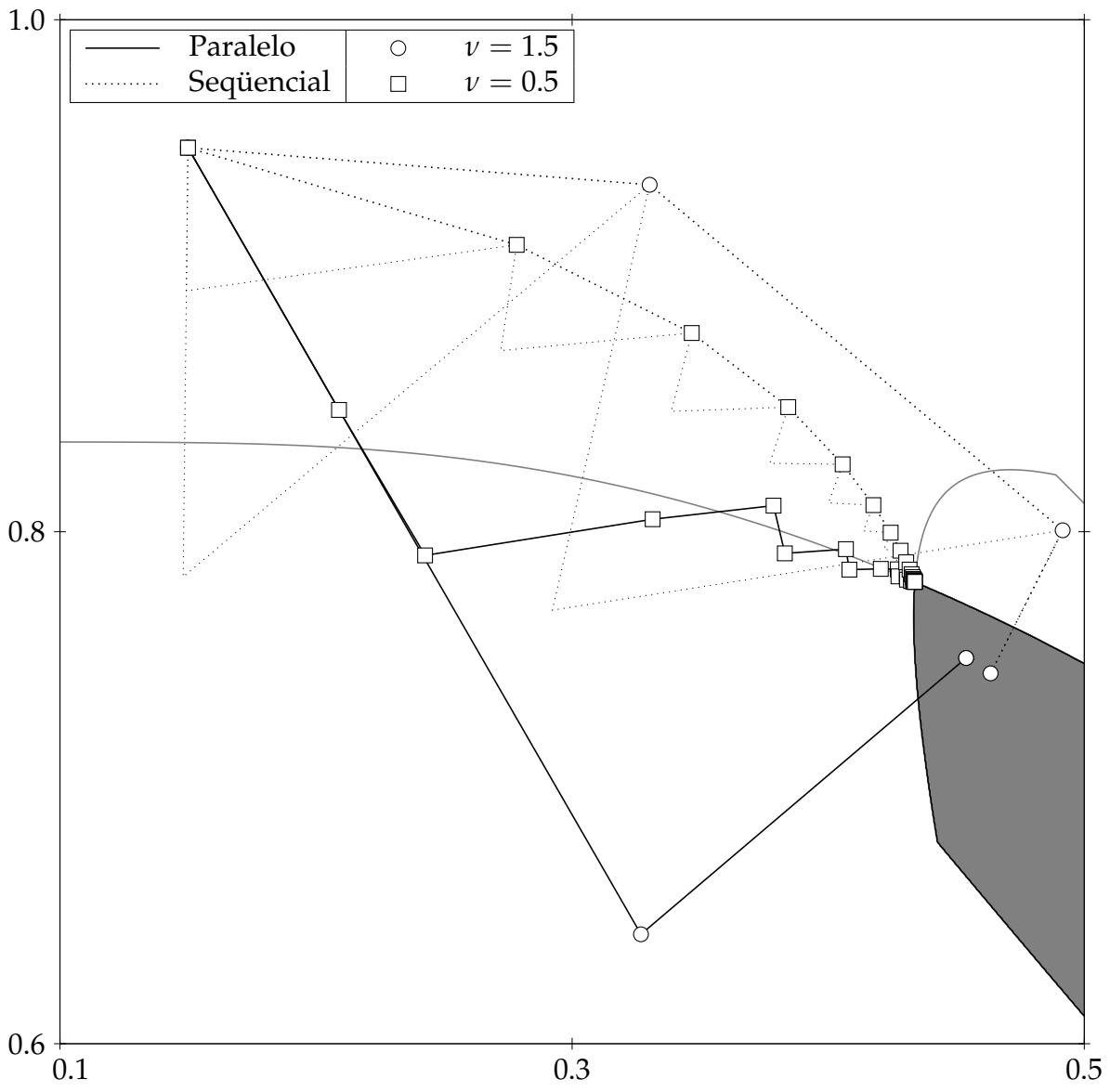


FIGURA 10 – Exemplo de variações do operador  $\mathcal{V}$ . Neste problema de viabilidade simples apenas duas restrições foram impostas; parte do conjunto factível é exibido em cinza. Linhas contínuas representam os caminhos percorridos pelas versões paralelas enquanto as pontilhadas são para as seqüenciais (as linhas mais finas exibem as subiterações). Os círculos marcam as posições atingidas pelas variantes sobre relaxadas, quadrados representam iterações sub-relaxadas.

seguir. Suponha que procuramos resolver o seguinte problema

$$\mathbf{x} \in \arg \min f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a.: } \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Utilizando o algoritmo (2.4, pg. 64) diretamente, as iterações teriam a forma  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{V}_\mathbf{X}(\mathcal{O}_f(\lambda_k, \mathbf{x}_k))$ . Entretanto, reescrevendo o problema da forma equivalente

$$\mathbf{x} \in \arg \min f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a.: } \mathbf{z} \in \mathbf{X};$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z},$$

obtemos uma versão paralela (e possivelmente com um fator de escala) da seguinte forma. Primeiro denotemos  $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(D^{1/2}\mathbf{x})$ , onde  $D$  é uma matriz hermitiana definida positiva, então note que, se  $\mathcal{O}_{\bar{f}}$  satisfaz (2.5, pg. 65) para  $\bar{f}$ , então

$$\left\| D^{1/2} \mathcal{O}_{\bar{f}}(\lambda, D^{-1/2}\mathbf{x}) - \mathbf{z} \right\|_{D^{-1}}^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{D^{-1}}^2 - \alpha\lambda(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})) + \lambda\rho(\lambda),$$

onde  $\|\mathbf{x}\|_{D^{-1}} = \sqrt{\langle \mathbf{x} | D^{-1}\mathbf{x} \rangle}$ . Denotemos por  $\mathbf{x}$  o vetor  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  no espaço produto  $\mathbf{X} = \mathbf{X} \times \mathbf{X}$  dotado do produto interno  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}_1 | D^{-1}\mathbf{z}_1 \rangle + \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z}_2 \rangle$ . Faça  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1)$  e defina  $\bar{\mathcal{O}}_f(\lambda, \mathbf{x})$  como  $(D^{1/2} \mathcal{O}_{\bar{f}}(\lambda, D^{-1/2}\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2)$  temos então, na norma definida pelo produto interno de  $\mathbf{X}$ :

$$\|\bar{\mathcal{O}}_f(\lambda, \mathbf{x}) - \mathbf{z}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - \alpha\lambda(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})) + \lambda\rho(\lambda).$$

Note que para os operadores de otimalidade apresentados neste capítulo a aplicação de  $\bar{\mathcal{O}}_f$  é a mesma de  $\mathcal{O}_f$ , exceto que a direção de atualização é pré-multiplicada por  $D$ . Defina agora o operador de viabilidade  $\bar{\mathcal{V}}$  como a aplicação do operador original em  $\mathbf{x}_1$  seguida pela projeção sobre  $\mathbf{X}^d$ , o conjunto diagonal definido como  $\mathbf{X}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2\}$ , i.e.,  $\bar{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) := \mathcal{P}_{\mathbf{X}^d}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2)$ . Sempre que  $\mathcal{V}$  for um operador de viabilidade do tipo de (2.27, pg. 83),  $\bar{\mathcal{V}}$  também o será. Mais que isso, não é difícil mostrar que se (2.7, pg. 65) vale para  $\mathcal{V}$  então também vale para  $\bar{\mathcal{V}}$ .

## 2.3 TESTES NUMÉRICOS

Esta seção dedica-se a uma validação numérica do ferramental descrito neste capítulo. Com este intuito propomos o problema de reconstrução de imagens a partir de poucas vistas e comparamos o desempenho dos operadores incremental e incremental agregado em sua solução.

### 2.3.1 O PROBLEMA

Consideramos a tarefa de reconstruir uma imagem a partir de poucas vistas, ou seja, resolver um problema do tipo:

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de Radon,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é a solução que desejamos encontrar,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  contém os dados, ou seja,  $\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{x}^*$  onde  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_+^n$  é a imagem original e  $m \ll n$ . Assumimos também que a imagem  $\mathbf{x}^*$  a ser reconstruída possua amplas áreas constantes, como é freqüentemente o caso em exames tomográficos. Essa ligeira hipótese final será justamente o detalhe que nos permitirá reconstruir a imagem com alta precisão a partir de um número limitado de projeções.

Retornaremos a este assunto com mais detalhes no próximo capítulo, por enquanto basta dizer que há motivos para crer que uma solução do seguinte problema pode ser uma boa estimativa para a imagem desejada:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 \\ \text{s.a.: } & g(\mathbf{x}) = TV(\mathbf{x}) - \tau \leq 0 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde a *variação total*  $TV : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  é definida como

$$TV(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i-1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j-1})^2}$$

com condições de contorno  $x_{0,j} = x_{i,0} = 0$  e  $\tau = TV(\mathbf{x}^*)$  é a variação total da imagem que gerou os dados.

Note que estamos utilizando informação extra sobre a variação total da imagem que geralmente não está disponível através de leituras tomográficas, mas ela não é realmente necessária. Uma abordagem mais direta é possível, conforme veremos no capítulo a seguir. O problema (2.33) apresentado acima somente será usado aqui por possuir características mais adequadas para a apresentação dos algoritmos que discutimos: uma função objetivo convexa composta por diversas parcelas não diferenciáveis e uma restrição sob a forma da intersecção de dois conjuntos de nível de funções convexas e por funcionar tão bem como a abordagem mais direta nos casos em que essa última é bem sucedida.

### 2.3.2 Os MÉTODOS

Os algoritmos que compararemos têm a forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1/2} &= \mathcal{O}_f(\lambda_k, \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathcal{P}_{\mathbb{R}_+^n}(\mathcal{S}_g^\nu(\mathbf{x}_{k+1/2})),\end{aligned}\tag{2.34}$$

onde  $\mathcal{O}$  é ou o operador incremental agregado  $\mathcal{A}$  ou o incremental  $\mathcal{I}$ . Os parâmetros livres são  $\mathbf{x}_0$ , que nós fizemos igual à imagem obtida por amostragem da solução obtida por FBP (algoritmo 1) e depois projetada em  $\mathbb{R}_+^n$ ,  $\nu$ , que fixamos em 1.5 e a seqüência  $\{\lambda_k\}$ . Essa última foi determinada pela fórmula

$$\lambda_k = (1 - \rho c_k) \frac{\lambda_0}{\alpha k^s + 1},$$

onde a seqüência  $c_k$  começa com  $c_0 = 0$  e os termos seguintes são dados por:

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{x}_{k-1/2} - \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1/2} \rangle}{\|\mathbf{x}_{k-1/2} - \mathbf{x}_{k-1}\| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1/2}\|}.$$

Cada  $c_k$  é o cosseno do ângulo entre as direções tomadas pelos operadores de otimização e de viabilidade na iteração anterior. Dessa maneira, o fator  $(1 - \rho c_k)$  serve como uma forma de prevenção de oscilação.

Quanto aos outros parâmetros,  $\lambda_0$  valeu  $p\|\mathbf{R}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|_1/\|\mathbf{f}_0\|_2^2$  ( $\mathbf{f}_0$  é um subgradiente da função objetivo em  $\mathbf{x}_0$  e  $p$  é o número de parcelas em que dividimos a soma), inspirado nos passos de Polyak. Assim, os parâmetros livres restantes (além da escolha do operador de otimalidade) são  $\rho$ ,  $p$ ,  $\alpha$  e  $s$ , a partir dos quais a seqüência  $\{\lambda_k\}$  (e daí  $\{\mathbf{x}_k\}$ ) é determinada.

Para que valham os resultados de convergência precisamos ter  $\lambda_k \rightarrow 0^+$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ . Uma vez que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,  $c_k \in [-1, 1]$  podemos assegurar essas propriedades se os parâmetros livres satisfizerem  $\rho \in [0, 1)$ ,  $\alpha > 0$  e  $s \in (0, 1]$ . Naturalmente,  $p$  é um inteiro positivo.

Com relação ao algoritmo falta apenas<sup>1</sup> descrevermos a inicialização do operador  $\mathcal{A}$ . Utilizamos na primeira iteração a seguinte atualização:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{0,i} &= \mathbf{d}_{0,i-1} + \mathbf{f}_{0,i} \\ \mathbf{x}_{0,i} &= \mathbf{x}_{0,i-1} - \frac{\lambda_0}{i} \mathbf{d}_{0,i},\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{d}_{0,0} = \mathbf{0}$  e, obviamente,  $i$  varia de 1 até  $p$ .

O subgradiente da função objetivo é fácil de ser calculado. Primeiro considere a função  $\|\mathbf{x}\|_1$ , a qual possui o subdiferencial

$$g \in \partial \|\mathbf{x}\|_1 \Leftrightarrow g_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0; \\ u_i & \text{se } x_i = 0; \\ -1 & \text{c.c.,} \end{cases}$$

com  $u_i \in [-1, 1]$ . Em particular,  $\mathbf{sign}(\mathbf{x}) \in \partial \|\mathbf{x}\|_1$ , onde  $\mathbf{sign}(\mathbf{x})$  é o caso especial em que  $u_i = 0$ . Portanto, utilizando [40, teorema VI.4.2.1], sabemos que

$$\mathbf{R}^T \mathbf{sign}(\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \in \partial \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1$$

e esse é o subgradiente que utilizamos em nossa implementação. Note que o subdiferencial é uniformemente limitado por  $\mathbf{R}^T \mathbf{1}$ , assegurando que ambos operadores de

---

<sup>1</sup>A ordem de processamento das parcelas é um fator importante na aplicação do método. Em todos os testes ordenamos as vistas conforme a seqüência perpendicular proposta em [39].

otimalidade satisfaçam as condições (2.6, pg. 65) e (2.5, pg. 65) com  $\rho_k \rightarrow 0$  desde que  $\lambda_k \rightarrow 0^+$ .

Também precisamos de um subgradiente para  $TV$ . Sempre que bem definidas, as parcelas do subgradiente  $t$  são

$$\begin{aligned} t_{i,j} = & \frac{2x_{i,j} - x_{i,j-1} - x_{i-1,j}}{\sqrt{(x_{i,j} - x_{i,j-1})^2 + (x_{i,j} - x_{i-1,j})^2}} \\ & + \frac{x_{i,j} - x_{i,j+1}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (x_{i,j+1} - x_{i-1,j+1})^2}} \\ & + \frac{x_{i,j} - x_{i+1,j}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (x_{i+1,j} - x_{i+1,j-1})^2}}. \end{aligned}$$

Quando um ou mais dos denominadores é nulo, as frações correspondentes são zeradas. Para ver que este vetor realmente pertence a  $\partial TV(x)$  basta considerar cada uma das parcelas da função separadamente e somar os resultados.

A projeção pode ser considerada como um caso especial do operador  $S_g^\nu$  com  $\nu = 1$  e  $g = d_{\mathbb{R}_+^q}$ . Portanto, o passo de viabilidade em 2.34 é do tipo apresentado na subseção 2.2.2. Como o subgradiente de  $d_X(x)$  vale  $(x - \mathcal{P}_X(x)) / \|x - \mathcal{P}_X(x)\|$  quando  $x \notin X$ , ambas as funções  $TV$  e  $d_{\mathbb{R}_+^q}$  satisfazem 2.30. Além disso, graças às condições de contorno constantes utilizadas na definição da variação total, os conjuntos de nível de  $TV$  são limitados, o que permite a aplicação da proposição 2.2.4 para assegurar que o operador satisfaça a condição (2.7, pg. 65).

Note que, uma vez que  $\|\mathbf{R}x - \mathbf{b}\| \geq 0$ , tudo está ajustado de forma que o corolário 2.1.7 possa ser aplicado. Já que  $\partial\|\mathbf{R}x - \mathbf{b}\|_1$  é limitado,  $d_X(x_k) \rightarrow 0 \Rightarrow [f(\mathcal{P}_X(x_k)) - f(x_k)]_+ \rightarrow 0$  e, portanto, o teorema 2.1.5 assegura a convergência do algoritmo.

### 2.3.3 RESULTADOS

Nosso objetivo é comparar a evolução das iterações (2.34, pg. 91) com as duas opções de operadores de otimalidade que propusemos. Utilizamos 24 projeções amostradas em 256 pontos para reconstruir o *phantom* de Shepp-Logan discretizado

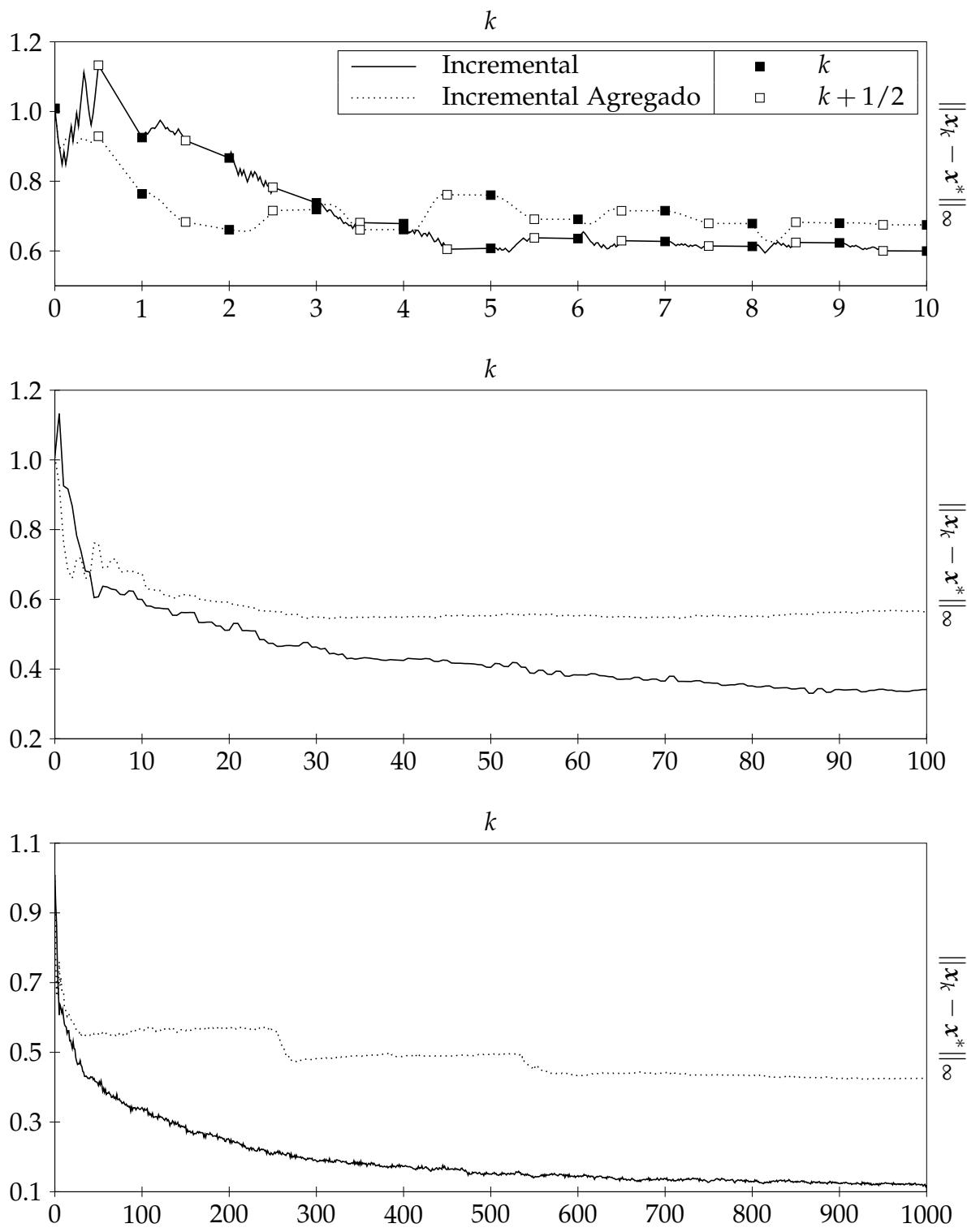


FIGURA 11 – Execuções do algoritmo (2.34, pg. 91) com os operadores incremental e incremental agregado. Os parâmetros utilizados foram  $\rho = 1 - 10^{-3}$ ,  $p = 24$ ,  $\alpha = 1$  e  $s = 1/2$ .

---

Incremental	Agregado	$p / \rho / s / \alpha$
0.38438	0.57108	6 / 0.999 / 0.50 / 1
0.35157	0.55134	12 / 0.999 / 0.50 / 1
0.34142	0.56430	24 / 0.999 / 0.50 / 1
0.32110	0.62379	12 / 0.500 / 0.50 / 1
0.34887	0.65714	12 / 0.000 / 0.50 / 1
0.33591	0.69446	12 / 0.999 / 0.25 / 1
0.49239	0.53249	12 / 0.999 / 1.00 / 1
0.54718	0.56460	12 / 0.999 / 1.00 / 2
0.60389	0.57041	12 / 0.999 / 1.00 / 4
0.62254	0.59058	12 / 0.999 / 1.00 / 6

---

TABELA 1 – Resultados de um procedimento de otimização seqüencial simples sobre os parâmetros para o método agregado. Valores exibidos são  $\|x_{100} - x^*\|_\infty$ .

em  $256 \times 256$  pixels através do problema (2.33, pg. 90). Escolhemos um conjunto típico de parâmetros (veja descrição no comentário abaixo da figura 11) e rodamos o algoritmo uma vez com cada operador. A figura 11 mostra o resultado em três escalas diferentes: o gráfico de cima exibe as dez primeiras iterações, incluindo todas as subiterações. Ele revela um comportamento que é similar ao encontrado no exemplo da figura 9, onde pudemos ver que o operador agregado possui iterados muito mais “pesados”. Ele prossegue como se a iteração atual fosse um corpo de grande massa sendo direcionado por uma série de pequenos empurrões, o que faz com que seja difícil seguir os “cantos” da função objetivo, como fica claro pela figura 9. Esse comportamento não era tão ruim no caso bidimensional da seção anterior, mas em dimensões mais elevadas causará mais problemas porque a chance de surgirem “quinas” é muito maior e há mais direções para manobrar. De fato, os outros dois gráficos exibidos na figura 11 mostram como o operador agregado sofre sob tais circunstâncias.

A fim de descobrir se esse tipo de resultado comparativo era efeito da escolha particular de parâmetros que utilizamos, rodamos ambos os algoritmos para diversas combinações de parâmetros da seguinte forma: começamos com um conjunto de parâmetros escolhido de forma arbitrária e variamos  $p$  através de uma gama discreta de valores razoáveis (para  $p$ , por exemplo, os valores possíveis foram 6, 12 e 24) testando ambos os algoritmos para cada um desses valores. Após os testes, o valor de  $p$  que levou o algoritmo agregado ao melhor desempenho é fixado (no caso tivemos  $p = 12$ ) e então o valor de  $\rho$  é otimizado da mesma forma e assim sucessivamente para  $s$  e  $\alpha$ , nessa seqüência. O resultados podem ser vistos na tabela 1, onde fica claro que mesmo quando os parâmetros são ajustados para favorecer o operador agregado, o algoritmo incremental ainda apresenta um desempenho superior, ao menos para esse problema em particular.

Também deve-se notar que as iterações do método agregado são mais caras do ponto de vista computacional por duas razões: primeiro porque requer mais atualizações (a direção deve ser atualizada e também o iterado) e segundo, no caso específico de tomografia, a economia que pode ser obtida pela atualização somente das componentes diferentes de zero quando cada subiteração utiliza apenas uma linha da matriz  $R$  é perdida porque não há esparsidade em  $d_{k,i}$ , mas pode haver bem poucos elementos não nulos em  $f_{k,i}$ . Nos experimentos que exibimos essa última questão não preocupou porque não chegamos a usar um nível de incrementalidade suficiente para que  $f_{k,i}$  fosse esparso, mas o primeiro problema causou um acréscimo notável de demanda computacional ao processo iterativo.

## 2.4 DISCUSSÃO

No presente capítulo apresentamos uma teoria que fornece um elo entre métodos de  $\epsilon$ -subgradientes e algoritmos para viabilidade convexa. O esquema proposto permite uma variedade de operadores em cada um dos dois passos nos quais consiste o algoritmo, conferindo uma grande flexibilidade ao esquema. Exemplos

concretos foram exibidos para mostrar a utilidade dos resultados em problemas de alto potencial de aplicabilidade.

É interessante notar que o esquema, quando utilizado com  $\mathcal{V}$  de (2.27, pg. 83), guarda relações com um método incremental para o problema irrestrito de minimizar  $f(\mathbf{x}) + \gamma \sum_i [g_i(\mathbf{x})]_+$  (mesmo quando não utilizamos um operador de otimização incremental). A vantagem do nosso método é que o valor de  $\gamma$  para que o problema sem restrições seja equivalente ao restrito não precisa ser calculado explicitamente, isso também evita problemas de instabilidade numérica que podem ocorrer quando  $\gamma$  precisa ser muito grande.

A flexibilidade da teoria apresentada permite que outras aplicações interessantes sejam desenvolvidas. Por exemplo, parece ser possível mostrar que Cimmino é um operador de viabilidade aceitável no esquema proposto e então obter métodos para a minimização de uma função restrita ao conjunto de ótimos da função de proximidade discutida na subseção 1.8.4. A abordagem talvez possa ser generalizada através da interpretação de Cimmino como um método do gradiente, resultando num algoritmo de mais ampla utilidade para otimização em dois níveis.

## CAPÍTULO 3

# RECONSTRUÇÃO A PARTIR DE POUCAS PROJEÇÕES

Neste capítulo concentraremos nossos esforços em mostrar a efetividade de métodos iterativos para reconstrução de imagens em tomografia. Não se trata, entretanto, de uma exibição de reconstruções obtidas com os diversos algoritmos existentes. De forma diametralmente oposta, desenvolveremos a primeira aplicação em tomografia por emissão da nova teoria de *amostragem compressiva* [16, 17, 31] (ou cs, vindo do termo equivalente em inglês), que forma um ferramental poderoso e de amplo alcance prático. O problema específico que desejamos atacar aqui é a reconstrução de imagens a partir de uma amostragem angular bastante espaçada da TR, cuja solução possui reflexo imediato no tempo de aquisição de um exame tomográfico.

### 3.1 AMOSTRAGEM COMPRESSIVA: A MÁGICA DA $\|\cdot\|_1$

Para introduzir as idéias consideraremos um problema de simples entendimento. Suponhamos que há um vetor de quantidades desconhecidas  $x \in \mathbb{R}^n$  que desejamos descobrir a partir de medidas. Assumimos que cada uma destas medidas seja um funcional linear em  $x$ , de forma que o problema matemático a ser resolvido seria, de

fato, um sistema linear que denotamos por  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde cada uma das componentes do vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  é uma das medidas. Imaginemos ainda que relativamente poucas medidas estejam disponíveis, ou seja,  $m \ll n$ . Em geral não há muita esperança de recuperar o vetor  $\mathbf{x}$  que gerou os dados, uma vez que o número de possíveis soluções é tipicamente infinito e não há uma forma genérica de escolher uma dentre elas. A presença de múltiplas soluções exige o conhecimento de alguma informação *a priori* sobre o problema para que possamos direcionar a reconstrução à vizinhança da solução correta.

Em muitos casos acontece da solução desejada ser *esparsa*, ou seja, o vetor  $\mathbf{x}$  possui poucas componentes diferentes de zero. Tal esparsidade pode aparecer de formas mais sutis, como quando  $\mathbf{x}$  representa uma imagem típica em tomografia, com amplas áreas constantes e apenas um pequeno número de pontos de descontinuidade. Também há casos de esparsidade aproximada em que os componentes próximos de zero são abundantes, como os que surgem de expansões em coeficientes *wavelets*. É justamente nos casos esparsos que podemos aplicar a teoria de cs. Antes, porém, de nos aprofundarmos nos conceitos e resultados teóricos relevantes passemos a um interessante exemplo numérico.

### 3.1.1 UM EXPERIMENTO ESTIMULANTE

Em [16] é exibida uma reconstrução do *phantom* de Shepp-Logan a partir de um número limitado de amostras no espaço de Fourier. A motivação para o experimento é o problema de tomografia, via o teorema da fatia de Fourier. Apesar da reconstrução obtida ser impressionante dado o pequeno número de amostras, a utilidade em tomografia não é imediata devido a uma imprecisão na transposição do teorema da fatia de Fourier do caso contínuo para o caso discreto e à dificuldade em aplicar a mesma abordagem a modelos mais complexos. A amostragem compressiva já é muito útil, entretanto, em reconstrução por ressonância magnética, onde a representação das medidas no espaço de Fourier é mais imediata. Resultados impressionantes podem ser encontrados em [65].

Exibimos aqui uma versão modificada do experimento, já clássico, apresentado em [16]; nossa alteração consiste em trocar a matriz do sistema de Fourier para Radon. Como a transformada de Radon é linear, podemos, no caso de dimensão finita<sup>1</sup>, representá-la por uma matriz e o problema de reconstrução reduz-se ao sistema linear

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{b}.$$

Na equação acima,  $\mathbf{b}$  contém os dados obtidos por amostragem da transformada de Radon de  $\mathbf{x}$ . O número de linhas da matriz é determinada pela amostragem utilizada, enquanto cada coluna corresponde a um *pixel* da imagem. A discretização utilizada foi a descrita no apêndice B. A imagem de teste foi o *phantom* de Shepp-Logan discretizado sob uma resolução de  $512 \times 512$  pixels. Se amostrássemos a TR em 512 projeções em ângulos igualmente espaçados, cada qual por sua vez amostrada em 512 posições equidistantes cobrindo  $[-1, 1]$  teríamos um problema padrão, apenas moderadamente mal condicionado, que poderia ser resolvido por técnicas usuais (como é esparsa e muito grande métodos iterativos são geralmente utilizados).

Utilizando FBP obtemos, a partir de 512 projeções igualmente espaçadas, a reconstrução exibida à esquerda na figura 12. Por outro lado, diminuindo o número de ângulos para apenas 22 o resultado degrada-se severamente, como podemos ver na imagem à direita na mesma figura. Uma vez que o número de projeções coletadas tem influência direta no tempo de duração de um exame tomográfico, um método matemático para eliminar tais problemas com a reconstrução é de interesse imediato.

Nossa abordagem (seguindo as idéias principais de [16]) é resolver o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & TV(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.:} \quad & \mathbf{Rx} = \mathbf{b}; \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

---

<sup>1</sup>Ou seja, quando a função a ser transformada pertence a um espaço de dimensão finita e amostramos a TR em um número finito de pontos

Aqui  $TV$  é a *variação total*, funcional definido como:

$$TV(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_{i,j} - x_{i-1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j-1})^2},$$

onde utilizamos as condições de contorno  $x_{0,j} = x_{i,0} = 0$ . O algoritmo utilizado para resolver esse problema foi do tipo descrito no capítulo anterior, com um operador de otimalidade não incremental e utilizando ART como operador de viabilidade.

Note que a variação total pode ser vista como a norma  $\|\cdot\|_1$  de um vetor complexo obtido por uma transformação linear do vetor  $\mathbf{x}$ . É sob esta interpretação que o problema (3.1, pg. 101) irá se encaixar no ferramental teórico que discutiremos na próxima seção. Por enquanto concentremo-nos na reconstrução obtida, que pode ser vista à direita na figura 13. Como podemos ver, todos os artefatos foram eliminados e a imagem é praticamente indistinguível da original mesmo utilizando menos que 1/23 dos dados classicamente necessários.

### 3.1.2 TEORIA

Sejam  $T \subset \{1, \dots, n\}$  e  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Denotemos por  $|T|$  o número de elementos de  $T$  e por  $\mathbf{A}_{[:,T]} \in \mathbb{R}^{m \times |T|}$  a matriz composta pelas colunas de  $\mathbf{A}$  correspondentes aos elementos de  $T$ . Assim podemos definir a *constante de isometria s-restrita* [15] como o menor valor  $\delta_s$  para o qual

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{A}_{[:,T]} \mathbf{x}\|^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|^2$$

para todos os subconjuntos  $T$  com  $|T| \leq s$  e qualquer  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|T|}$ . A constante de isometria  $s$ -restrita indica o quanto subconjuntos de no máximo  $s$  colunas de  $\mathbf{A}$  se comportam como um sistema ortonormal e é um conceito central em amostragem compressiva. Como um exemplo simples pode-se mostrar facilmente [15, lema 1.2] que se  $\delta_{2s} < 1$  então qualquer  $\mathbf{x}^*$  tal que  $\|\mathbf{x}^*\|_0 \leq s$  (onde  $\|\mathbf{x}\|_0 := |\{i \mid x_i \neq 0\}|$ ) e  $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$  é a única solução do problema:

$$\min \quad \|\mathbf{x}\|_0$$

$$\text{s.a.: } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

A resolução de um problema combinatório como esse é difícil (entretanto minimizadores locais já podem ser úteis, veja [65]). Consideremos então a alternativa:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.a.: } & Ax = b, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde a função objetivo passa a ser  $\|\cdot\|_1$  ao invés de  $\|\cdot\|_0$ . Isso diminui em muito a complexidade computacional do cálculo da solução porque, dentre outros motivos, trata-se de uma função convexa. Mais que isso, esse problema ainda reconstrói uma imagem esparsa exatamente, conforme o seguinte resultado [15, teorema 1.3]:

**TEOREMA 3.1.1.** *Seja  $s$  tal que  $\delta_s + \delta_{2s} + \delta_{3s} < 1$ , então o único minimizador de (3.2) é a solução  $x^*$  de  $Ax^* = b$  com  $\|x^*\|_0 \leq s$ .*

Obviamente a utilidade dos resultados acima depende de forma crucial da construção de matrizes que satisfaçam as propriedades sobre as constantes de isometria restrita com um valor de  $s$  elevado. Uma lista contendo alguns casos conhecidos pode ser encontrada em [17]. Exemplos incluem matrizes com entradas gaussianas i.i.d. e matrizes construídas a partir de linhas selecionadas aleatoriamente de matrizes ortonormais, após renormalização das colunas. Os resultados geralmente asseguram que a propriedade de isometria valerá para uma matriz assim construída com uma dada (alta) probabilidade. Não sabemos se algum resultado do tipo vale para matrizes de Radon, mas o experimento da subseção anterior é um indicador interessante da possibilidade de uma resposta a essa dúvida ser positiva.

Apresentamos agora um último resultado que leva em consideração fatores como esparsidade aproximada e erro nas medidas. Sejam  $x^*$  a solução que desejamos reconstruir e  $c$  tal que  $\|Ax^* - c\| \leq \epsilon$ . Denotemos por  $x^{*,s}$  o vetor tal que  $\|x^{*,s}\|_0 = s$  e que contém as  $s$  maiores componentes em valor absoluto de  $x^*$ . Agora podemos apresentar o seguinte resultado [17, teorema 1.2]:

TEOREMA 3.1.2. Suponha que  $s$  seja tal que  $\delta_{3s} + \delta_{4s} < 2$  então a solução  $\mathbf{x}^\circ$  do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.a.:} \quad & \|\mathbf{Ax} - \mathbf{c}\| \leq \epsilon \end{aligned} \tag{3.3}$$

satisfaz

$$\|\mathbf{x}^\circ - \mathbf{x}^*\| \leq C_s \epsilon + D_s \frac{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*,s}\|_1}{\sqrt{s}}.$$

De acordo com os autores, para valores “razoáveis” de  $\delta_{4s}$  as constantes  $C_s$  e  $D_s$  são bem comportadas.

## 3.2 TESTES COM DADOS REAIS

Com a discussão acima em mente surge a idéia de aplicar as ferramentas de amostragem compressiva para reduzir o número de projeções necessárias numa leitura de tomografia sem prejudicar a imagem obtida; essa redução na aquisição levaria a uma diminuição proporcional no tempo de duração do exame. A presente seção dedica-se a testar a aplicação de problemas como (3.3) na obtenção de imagens de SPECT com esse intuito.

Aqui, devido à forma como a esparsidade se apresenta, a função objetivo utilizada foi  $TV(\mathbf{x})$  ao invés de  $\|\mathbf{x}\|_1$ . Além disso também forçamos explicitamente a não negatividade da reconstrução resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & TV(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.:} \quad & \|\mathbf{Rx} - \mathbf{c}\|^2 \leq \epsilon^2; \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para encontrar uma solução utilizamos um algoritmo do tipo descrito no capítulo anterior. Sejam  $\mathbf{t}_k \in \partial TV(\mathbf{x}_k)$  e  $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Rx} - \mathbf{c}\|^2 - \epsilon^2$  então as iterações são dadas por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}_+^n}(\mathcal{S}_g^\nu(\mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{t}_k)).$$

É fácil mostrar, graças à limitação dos conjuntos de nível de  $TV$  e de  $\partial TV$ , que a seqüência  $\{x_k\}$  é limitada se  $\lambda_k \rightarrow 0^+$ . Essa limitação pode ser utilizada para garantir a convergência do algoritmo, os detalhes são de menor interesse.

Nos testes a seguir os dados (gentilmente fornecidos por Roberto Isoardi, da *Fundación Escuela de Medicina Nuclear* em Mendoza, Argentina) utilizados foram obtidos a partir de uma leitura de SPECT. O objeto de estudo foi um modelo físico artificial que apresenta uma região de baixa atividade, simulando um possível dano ao músculo cardíaco. Foram coletadas 30 projeções ao longo de  $174^\circ$ , os dados podem ser vistos na figura 14. Tais imagens, de  $64 \times 64$  pixels cada, são a representação pictória do número de fótons detectados em cada posição do sensor da câmera durante um período de 20 segundos. Graças aos colimadores, essas contagens de fótons representam estimativas diretas de amostras das transformadas de Radon atenuadas de 64 secções transversais da região estudada.

Ao reconstruir as imagens é útil reordenar os dados para resolver uma série de problemas bidimensionais da seguinte forma: seja  $k$  a fatia que desejamos reconstruir, então a  $i$ -ésima coluna do sinograma a ser utilizado é obtida da  $k$ -ésima linha da  $i$ -ésima das imagens mostradas na figura 14. Por exemplo, os 30 sinogramas centrais obtidos assim são exibidos na figura 15. Como não foram efetuadas medidas por transmissão nós desconsideramos a atenuação e, nos experimentos a seguir, reconstruímos os dados como se fossem amostras da TR.

O primeiro método de reconstrução utilizado foi FBP com uma freqüência de corte de 70% da freqüência de Nyquist, para o qual os resultados podem ser vistos na figura 16. A partir daí estudamos a influência da redução no número de projeções adquiridas na qualidade das imagens diminuindo a quantidade dos dados efetivamente utilizados na reconstrução. Fizemos testes a partir de metade e de um terço dos dados, sempre começando com a projeção a  $0^\circ$  e seguindo a ângulos igualmente espaçados. Como pode ser notado nas figuras 17 e 18 a redução no número de vistas gera artefatos radiais que partem das áreas de maior intensidade na figura e comprometem severamente a qualidade da imagem. Ainda que a região

de baixa intensidade que simula um possível dano ao músculo cardíaco possa ser indentificada nas reconstruções, outros elementos que poderiam, eventualmente, ser de importância clínica são eliminados ou gravemente distorcidos em algumas das imagens obtidas.

A segunda bateria de testes resolveu o problema 3.4 para calcular a reconstrução. Aqui precisamos determinar um valor apropriado para o parâmetro  $\epsilon$ . Da mesma forma como com o algoritmo de FBP, escolhemos uma fatia (a de número 32) e buscamos, por tentativa e erro, um valor aceitável para  $\epsilon$ . Os valores para as outras reconstruções foram obtidos pela fórmula

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon \|\mathbf{b}_{d,i}\|}{\|\mathbf{b}_{d,32}\| \sqrt{d}},$$

onde  $\mathbf{b}_{d,i}$  é o conjunto de dados utilizados para reconstruir a fatia  $i$  e  $d$  é o fator de dizimação aplicado aos dados no teste em questão, ou seja, utilizando todos os dados  $d = 1$ , metade  $d = 2$  e para um terço  $d = 3$ . O sucesso nas outras reconstruções mostra que essa regra heurística que pressupõe um crescimento linear do erro com o valor da norma dos dados funciona bem para nossos propósitos. O denominador  $\|\mathbf{b}_{d,32}\| \sqrt{d}$  é utilizado ao invés de simplesmente  $\|\mathbf{b}_{1,32}\|$  porque esse segundo valor poderia não ser conhecido se as medidas efetuadas tivessem sido apenas as utilizadas na reconstrução (apesar de que em tal caso  $\epsilon$  não poderia ter sido ajustado ao sinograma  $\mathbf{b}_{1,32}$  de qualquer maneira). O fato dessa regra ser bem sucedida implica que procedimentos computacionalmente caros para o cálculo de  $\epsilon$  a partir dos dados são necessários apenas para uma fatia, pois o valor daí obtido pode ser aproveitado nas outras reconstruções.

As reconstruções com os dados completos são vistas na figura 19 e as obtidas com os dados parciais são exibidas nas figuras 20 e 21. As imagens são superiores às obtidas com FBP pois os artefatos radiais são praticamente eliminados e as reconstruções obtidas com menos amostras assemelham-se muito com aquelas que utilizaram-se do conjunto completo de dados.

### 3.3 DISCUSSÃO

Neste capítulo apresentamos uma nova forma de reconstrução de imagens em tomografia inspirada na teoria de amostragem compressiva que foi desenvolvida recentemente [15, 16, 17]. O método apresentou resultados estimulantes, mas testes mais aprofundados são necessários para uma validação mais convincente do esquema. Por exemplo, o objeto de estudo utilizado nos testes com dados reais era excessivamente simples e os efeitos da atenuação nesse *phantom* são muito menos acentuados do que poderíamos esperar em uma situação clínica normal, onde o coração fica cercado de ossos e outros órgãos. Experimentos utilizando o conhecimento da atenuação seriam de interesse para estudar o comportamento do método nesses casos.

Também é interessante nos perguntarmos acerca das propriedades necessárias sobre a constante de isometria para a validade dos teoremas de amostragem compressiva: elas realmente valeriam para matrizes do tipo da TR ou da TR atenuada? Essa questão não parece ter, até agora, uma resposta na literatura. Podemos esperar uma resposta positiva, ao menos aproximadamente e para a transformada sem atenuação, tendo em vista os experimentos exibidos aqui e a relação que existe entre a transformada de Fourier e a de Radon, conforme expressa no teorema da fatia de Fourier 1.3.1.

Outra questão é relativa à utilização da norma  $\|\cdot\|_0$  como função objetivo. Ainda que apenas minimizadores locais sejam obtidos, pode ser uma alternativa ainda mais efetiva, conforme recentes resultados para ressonância magnética parecem indicar [65]. Como, para uma mesma matriz, a relação  $\delta_{2s} < 1$  é atingida com valores maiores de  $s$  do que a relação  $\delta_{3s} + \delta_{4s} < 2$ , é bem possível que a minimização da norma 0 leve a uma redução ainda maior no número de vistas necessárias para uma reconstrução precisa.

A investigação das questões que surgem a partir desses nossos primeiros experimentos formam um interessante campo para futura pesquisa, cuja utilidade prática

pode ser de amplo alcance pois o domínio da técnica levaria à possibilidade de, através de uma simples atualização de *software*, permitir que tomógrafos de SPECT sejam capazes de obter imagens a partir de exames mais curtos. Isso obviamente acabaria por reduzir os custos desses exames, tornando-os mais viáveis economicamente.

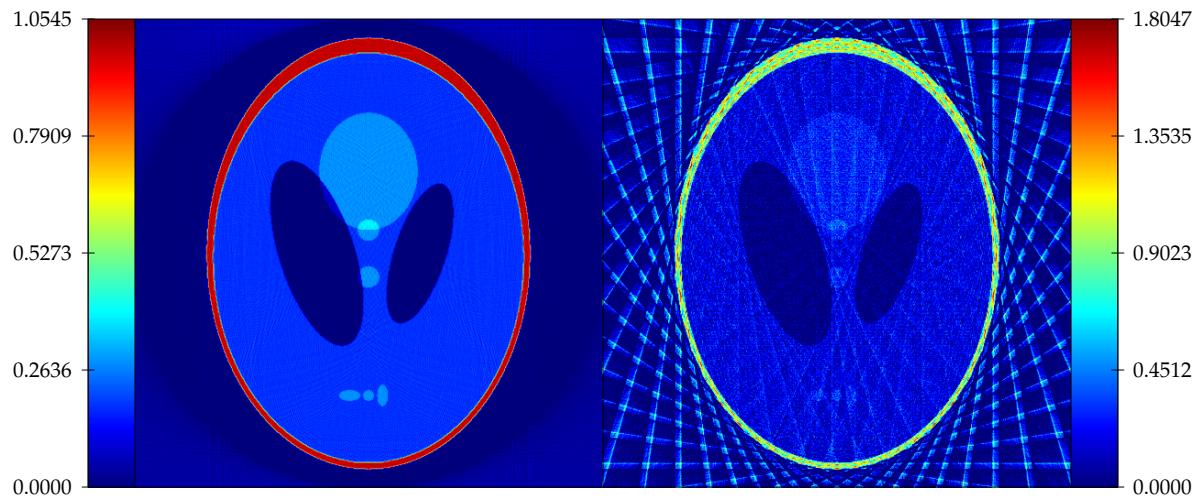


FIGURA 12 – Efeito da diminuição do número de vistas: à esquerda temos uma reconstrução por FBP utilizando uma quantidade suficiente de dados enquanto a imagem da direita exibe a reconstrução obtida pelo mesmo algoritmo quando amostramos apenas 22 ângulos.

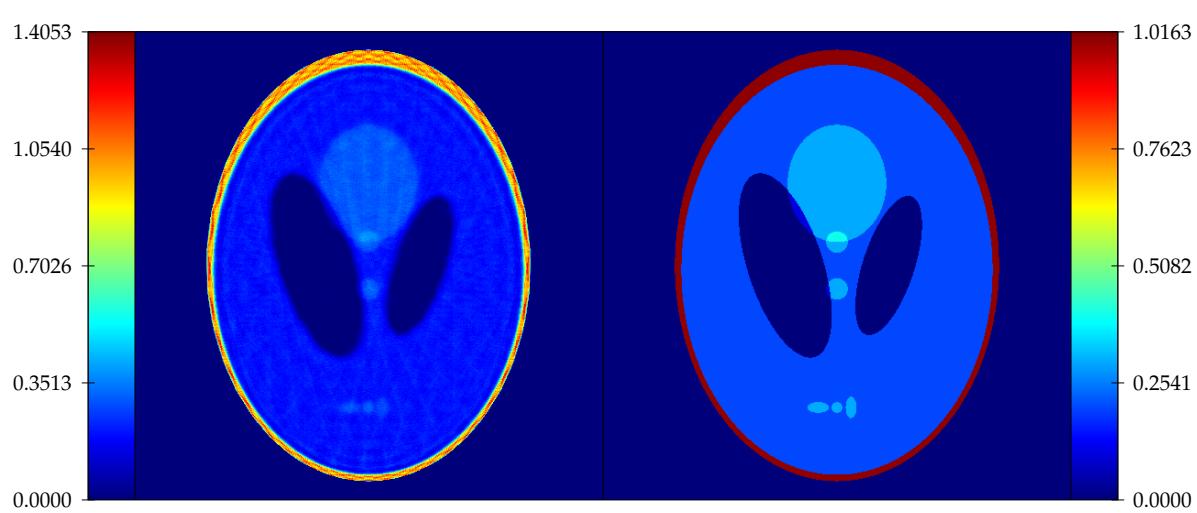


FIGURA 13 – À esquerda: imagem obtida por ART. À direita: reconstrução por mínima variação total utilizando os mesmos 22 ângulos. A imagem não apresenta artefatos.

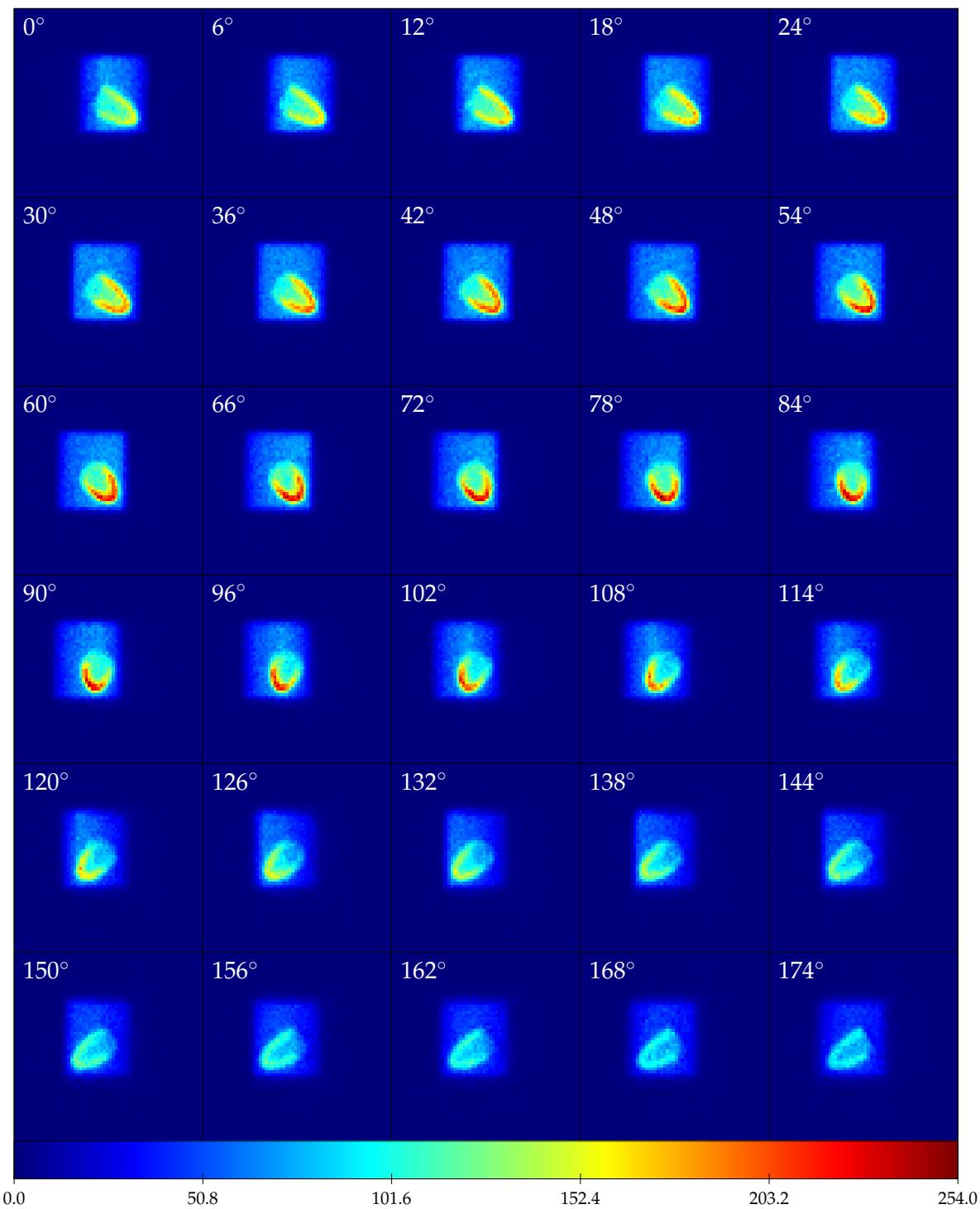


FIGURA 14 – Projeções do modelo cardíaco: cada uma destas imagens mostra o número de fótons detectados em cada posição do sensor da câmera do tomógrafo durante um período de 20 segundos. O objeto de estudo utilizado foi um modelo cardíaco artificial.

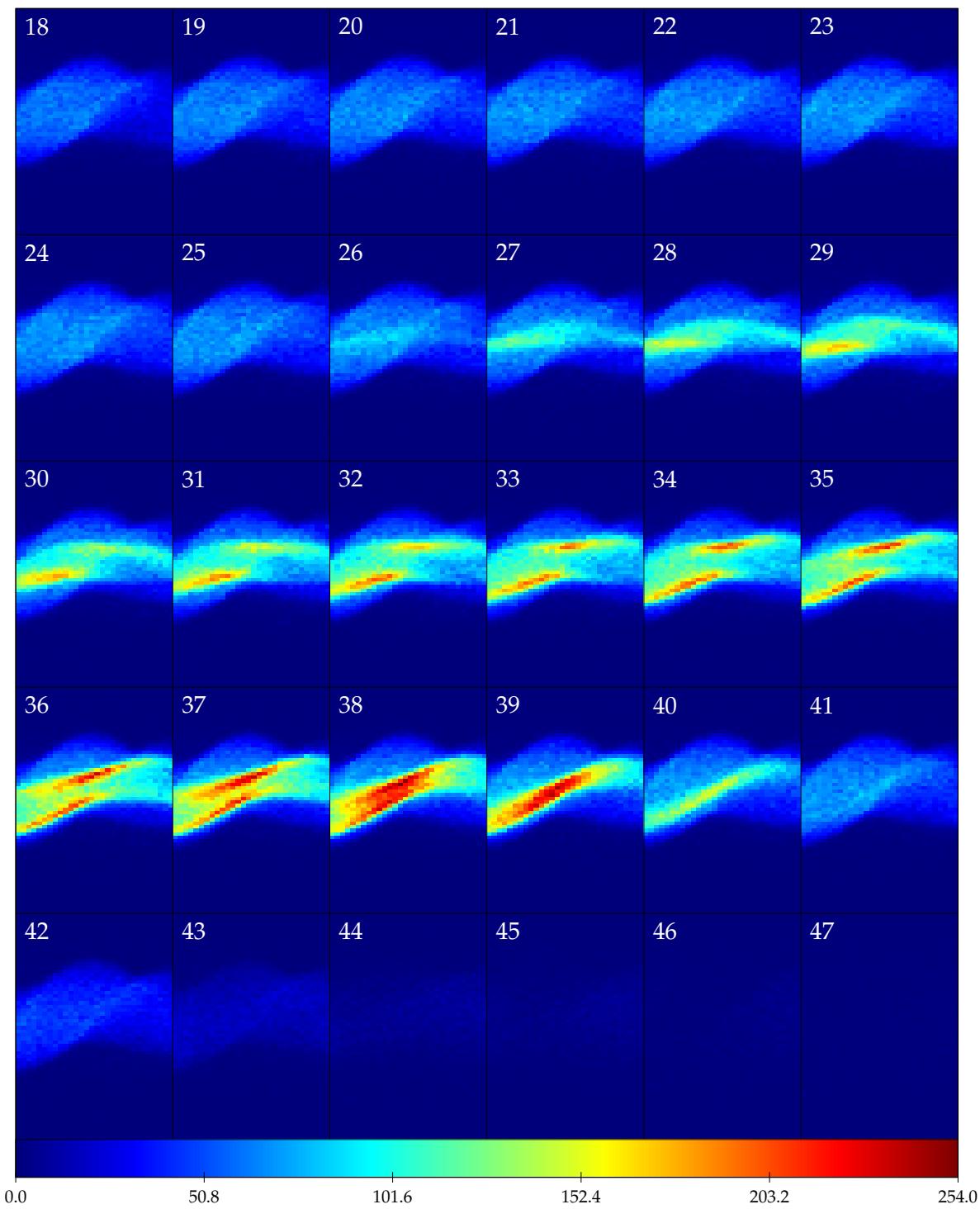


FIGURA 15 – Sinogramas do modelo cardíaco: estas imagens mostram 30 dos 64 sinogramas que podem ser obtidos por reordenação dos dados exibidos na figura 14. Cada um representa a TR atenuada de uma secção do objeto de estudo.

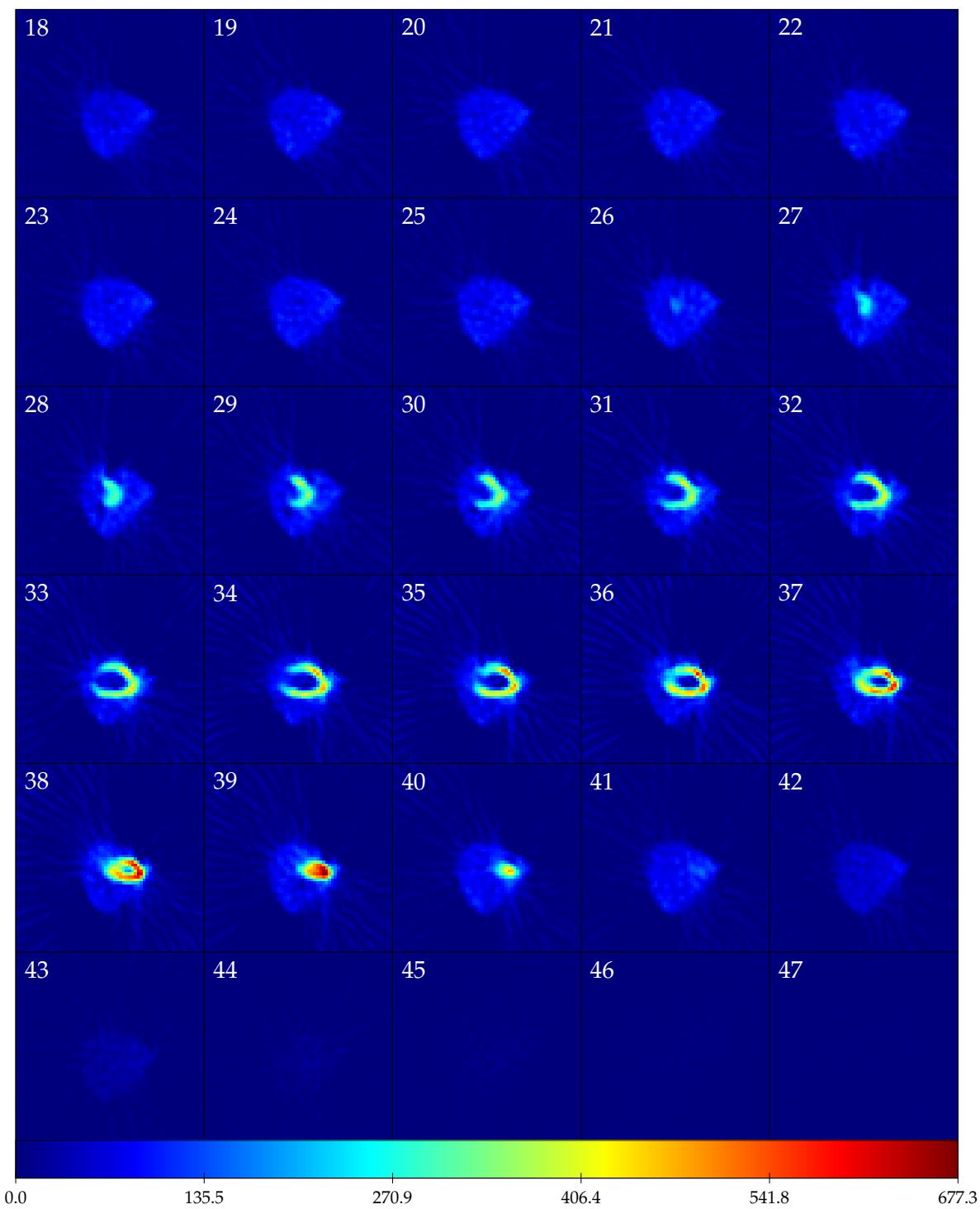


FIGURA 16 – Reconstruções do modelo cardíaco por FBP: imagens obtidas aplicando o algoritmo de retroprojeção filtrada aos sinogramas exibidos na figura 15.

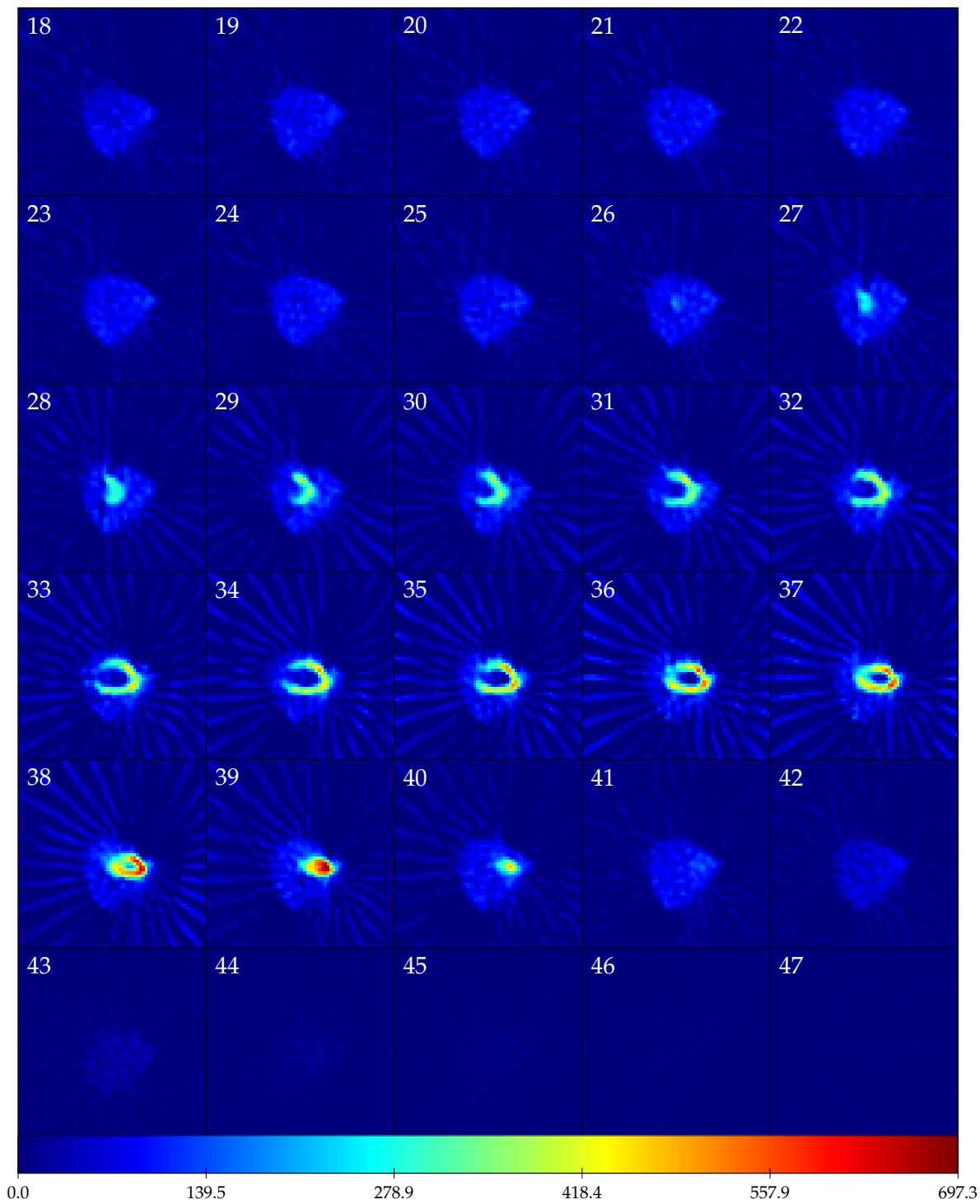


FIGURA 17 – Reconstruções do modelo cardíaco por FBP: aqui apenas metade das projeções disponíveis para cada imagem foi utilizada.

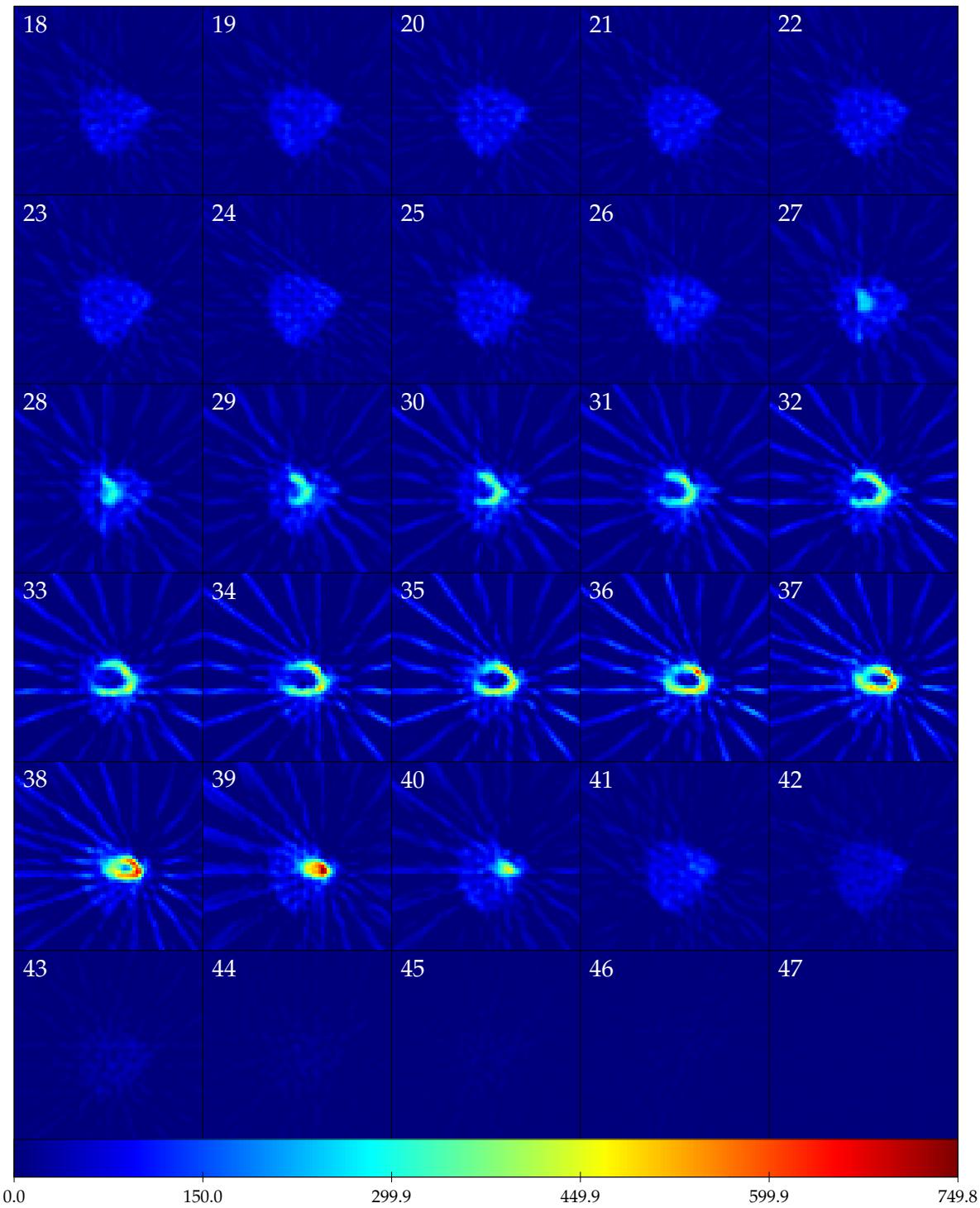


FIGURA 18 – Reconstruções do modelo cardíaco por FBP: aqui apenas um terço das projeções disponíveis para cada imagem foi utilizada.

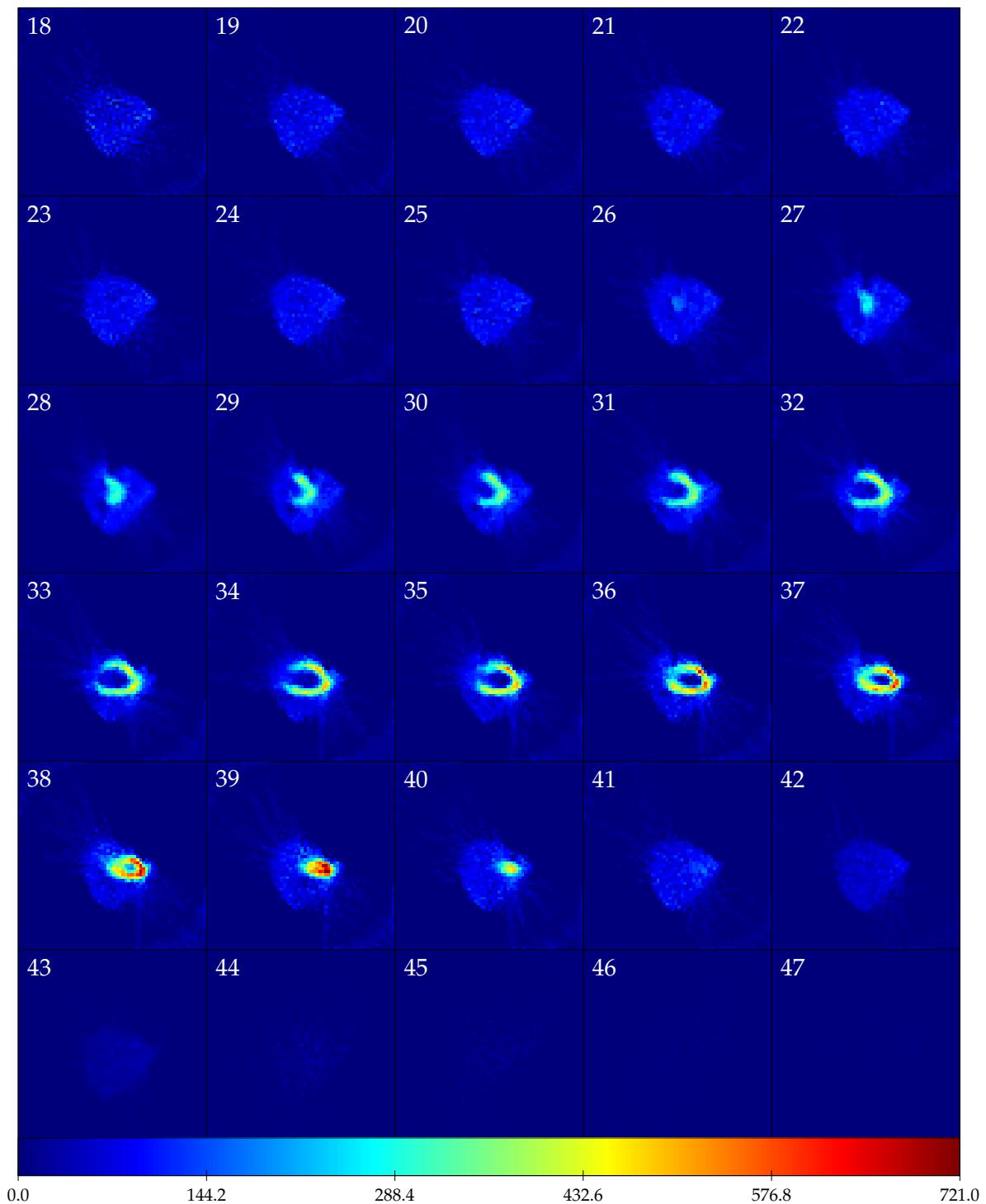


FIGURA 19 – Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV: estas imagens foram obtidas através da minimização da variação total.

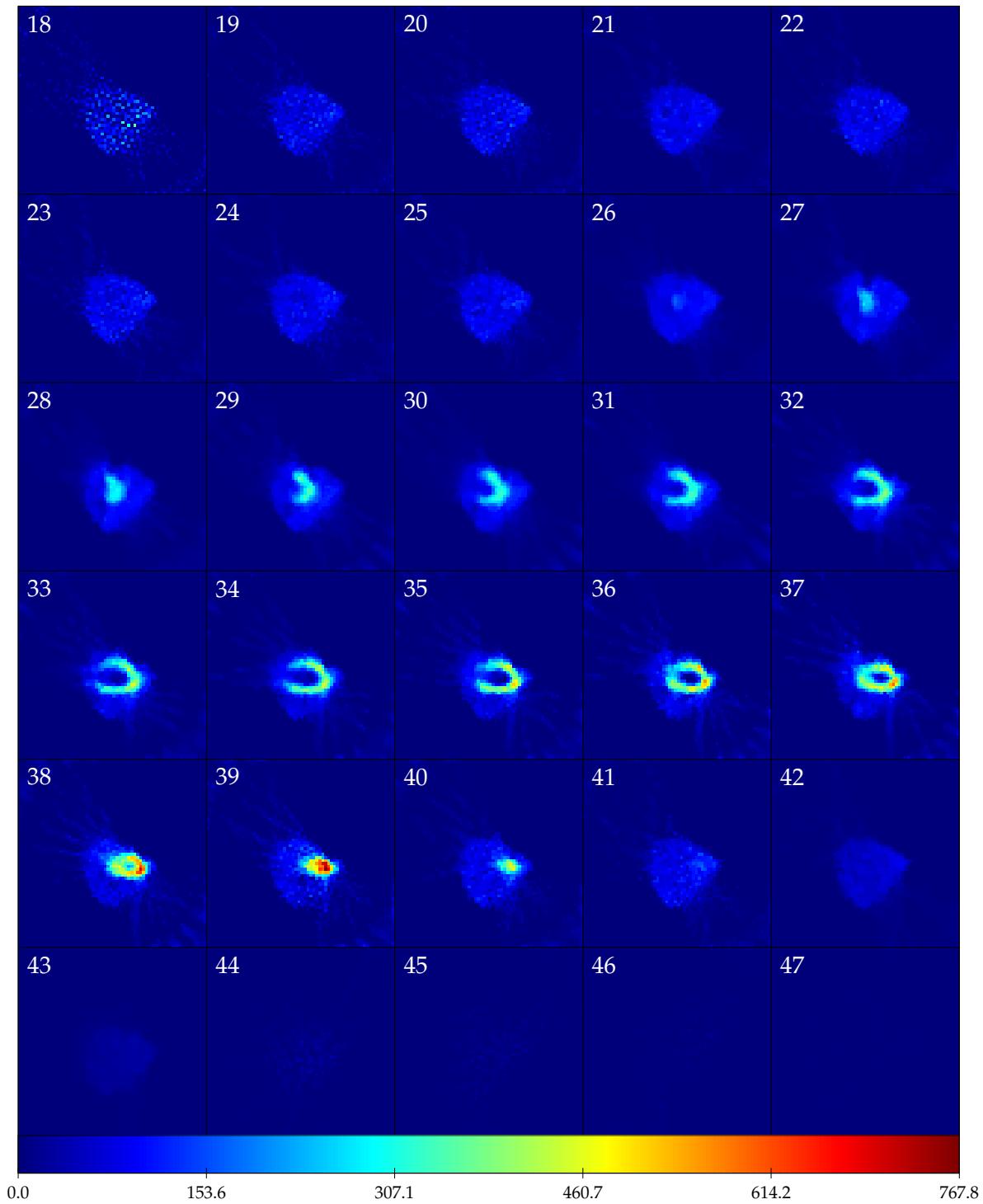


FIGURA 20 – Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV: aqui apenas metade das projeções disponíveis para cada imagem foi utilizada.

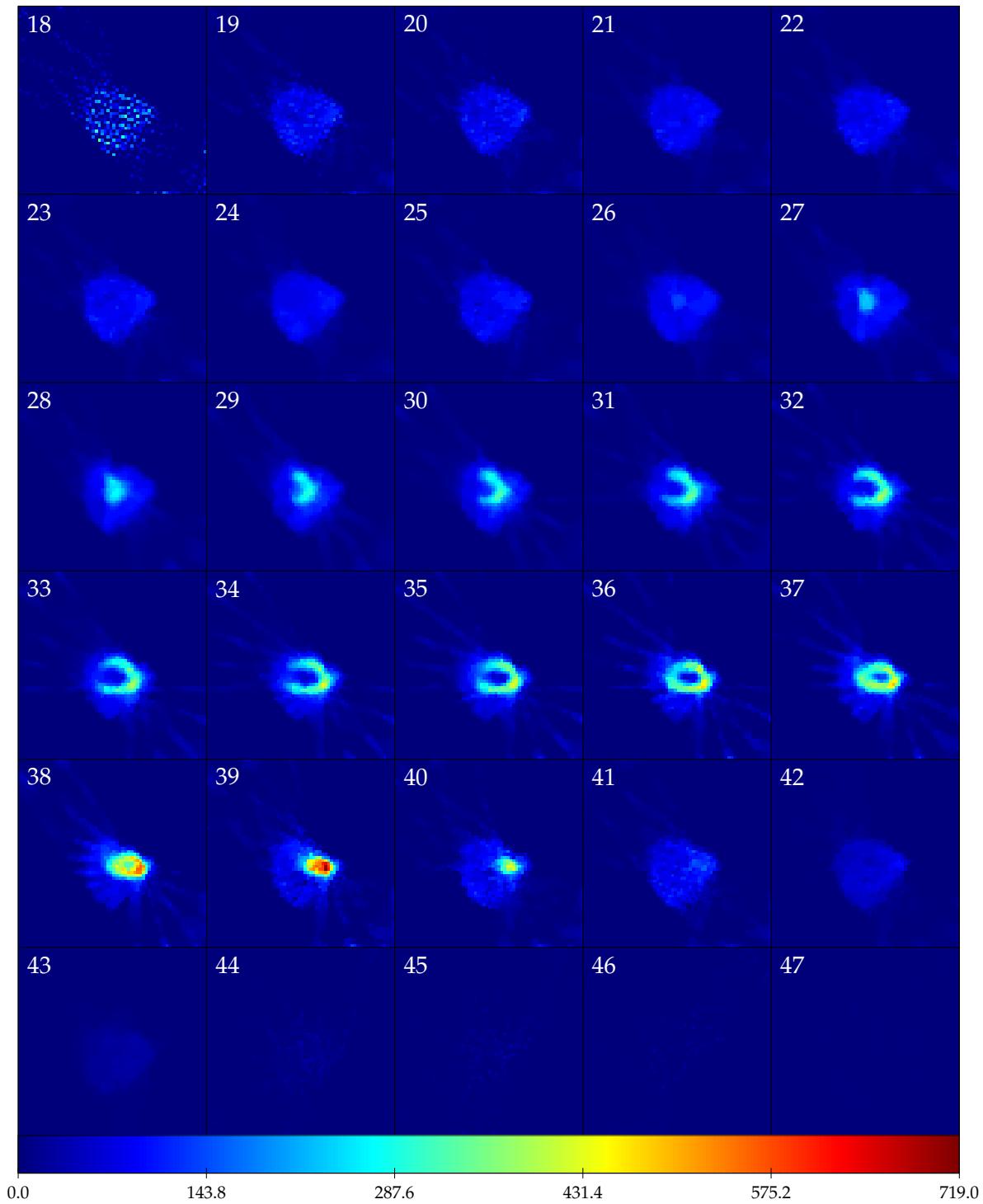


FIGURA 21 – Reconstruções do modelo cardíaco por MINTV: aqui apenas um terço das projeções disponíveis para cada imagem foi utilizada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RON AHARONI e YAIR CENSOR. Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems. *Linear Algebra and its Applications*, 120:165–175, 1989. doi:10.1016/0024-3795(89)90375-3. Citado na página 63.
- [2] RON AHARONI, ABRAHAM BERMAN e YAIR CENSOR. An interior points algorithm for the convex feasibility problem. *Advances in Applied Mathematics*, 4(4):479–489, 1983. doi:10.1016/0196-8858(83)90019-2. Citado na página 63.
- [3] SANGTAE AHN e JEFFREY A. FESSLER. Globally convergent image reconstruction for emission tomography using relaxed ordered subsets algorithms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(5):613–626, 2003. doi:10.1109/TMI.2003.812251. Citado nas páginas 58, 59 e 62.
- [4] FREDRIK ANDERSSON. Fast inversion of the Radon transform using log-polar coordinates and partial back-projections. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(3):818–837, 2005. doi:10.1137/S0036139903436005. Citado na página 42.
- [5] HEINZ H. BAUSCHKE. The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202(1):150–159, 1996. doi:10.1006/jmaa.1996.0308. Citado na página 63.
- [6] HEINZ H. BAUSCHKE e JONATHAN M. BORWEIN. On projection algorithms for solving convex feasibility problems. *SIAM Review*, 38(3):367–426, 1996. doi:10.1137/S0036144593251710. Citado na página 63.

- [7] HEINZ H. BAUSCHKE, PATRICK L. COMBETTES e SERGE G. KRUK. Extrapolation algorithm for affine-convex feasibility problems. *Numerical Algorithms*, 41(3):239–274, 2005. doi:10.1007/s11075-005-9010-6. Citado nas páginas 63 e 82.
- [8] DIMITRI P. BERTSEKAS. A new class of incremental gradient methods for least squares problems. *SIAM Journal on Optimization*, 7(4):913–926, 1997. doi:10.1137/S1052623495287022. Citado na página 62.
- [9] DIMITRI P. BERTSEKAS e JOHN N. TSITSIKLIS. Gradient convergence in gradient methods with errors. *SIAM Journal on Optimization*, 10(3):627–642, 2000. doi:10.1137/S1052623497331063. Citado na página 62.
- [10] DORON BLATT, ALFRED O. HERO e HILLEL GAUCHMAN. A convergent incremental gradient method with a constant step size. *SIAM Journal on Optimization*, 18(1):29–51, 2007. doi:10.1137/040615961. Citado na página 62.
- [11] ACHI BRANDT, JORDAN MANN, MATVEI BRODSKI e MEIRAV GALUN. A fast and accurate multilevel inversion of the Radon transform. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(2):437–462, 2000. doi:10.1137/S003613999732425X. Citado na página 42.
- [12] J. E. BRESENHAM. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1):25–30, 1965. URL <http://www.research.ibm.com/journal/sj/041/ibmsjIVRIC.pdf>. Citado na página 138.
- [13] ANDREI V. BRONNIKOV. Reconstruction of attenuation map using discrete consistency conditions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(5):451–462, 2000. doi:10.1109/42.870255. Citado na página 31.
- [14] JOLYON BROWNE e ÁLVARO R. DE PIERRO. A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihoods in emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(5):687–699, 1996. doi:10.1109/42.538946. Citado nas páginas 57, 58 e 62.

- [15] EMMANUEL J. CANDÈS E TERENCE TAO. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203–4215, 2005. doi:10.1109/TIT.2005.858979. Citado nas páginas 102, 103 e 107.
- [16] EMMANUEL J. CANDÈS, JUSTIN K. ROMBERG E TERENCE TAO. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509, 2006. doi:10.1109/TIT.2005.862083. Citado nas páginas 99, 100, 101 e 107.
- [17] EMMANUEL J. CANDÈS, JUSTIN K. ROMBERG E TERENCE TAO. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1207–1223, 2006. doi:10.1002/cpa.20124. Citado nas páginas 99, 103 e 107.
- [18] YAIR CENSOR. Computational acceleration of projection algorithms for the linear best approximation problem. *Linear Algebra and its Applications*, 416(1):111–123, 2006. doi:10.1016/j.laa.2005.10.006. Citado na página 63.
- [19] YAIR CENSOR, ÁLVARO R. DE PIERRO E MAROUN ZAKNOON. Steered sequential projections for the inconsistent convex feasibility problem. *Nonlinear Analysis*, 59(3):385–405, 2004. doi:10.1016/j.na.2004.07.018. Citado na página 63.
- [20] PATRICK L. COMBETTES. Strong convergence of block-iterative outer approximation methods for convex optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(2):538–565, 2000. doi:10.1137/S036301299732626X. Citado na página 64.
- [21] PATRICK L. COMBETTES. Inconsistent signal feasibility problems: Least-squares solutions in a product space. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11):2955–2966, 1994. doi:10.1109/78.330356. Citado na página 53.
- [22] PATRICK L. COMBETTES. Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(4):493–506, 1997. doi:10.1109/83.563316. Citado nas páginas 63, 82 e 87.

- [23] PATRICK L. COMBETTES E JIAN LUO. An adaptive level set method for nondifferentiable constrained image recovery. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(11):1295–1304, 2002. doi:10.1109/TIP.2002.804527. Citado na página 63.
- [24] PATRICK L. COMBETTES E JEAN-CHRISTOPHE PESQUET. Image restoration subject to a total variation constraint. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(9):1213–1222, 2004. doi:10.1109/TIP.2004.832922. Citado na página 64.
- [25] JAMES W. COOLEY E JOHN W. TUKEY. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301, 1965. URL <http://www.jstor.org/stable/2003354>. Citado na página 37.
- [26] RAFAEL CORREA E CLAUDE LEMARÉCHAL. Convergence of some algorithms for convex minimization. *Mathematical Programming*, 62:261–275, 1993. doi:10.1007/BF01585170. Citado na página 73.
- [27] ÁLVARO R. DE PIERRO E ALFREDO N. IUSEM. A relaxed version of Bregman’s method for convex programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 51(3):421–440, 1986. doi:10.1007/BF00940283. Citado na página 64.
- [28] ÁLVARO R. DE PIERRO E MICHEL EDUARDO BELEZA YAMAGISHI. Fast EM-like methods for maximum “a posteriori” estimates in emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(4):280–288, 2001. doi:10.1109/42.921477. Citado nas páginas 58 e 62.
- [29] MICHEL DEFRISE, P. E. KINAHAN, D. W. TOWNSEND, C. MICHEL, M. SIBOMANA E D. F. NEWPORT. Exact and approximate rebinning algorithms for 3-D PET data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(2):145–158, 1997. doi:10.1109/42.563660. Citado na página 29.
- [30] FRANK DEUTSCH E ISAO YAMADA. Minimizing certain convex functions over the intersection of the fixed point sets of nonexpansive map-

- pings. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 19(1 & 2):33–56, 1998. doi:10.1080/01630569808816813. Citado na página 63.
- [31] DAVID L. DONOHO. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306, 2006. doi:10.1109/TIT.2006.871582. Citado na página 99.
- [32] HEINZ W. ENGL, MARTIN HANK e ANDREAS NEUBAUER. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 2000. Citado nas páginas 48, 49 e 51.
- [33] JEFFREY A. FESSLER e BRADLEY P. SUTTON. Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(2):560–574, 2003. doi:10.1109/TSP.2002.807005. Citado na página 42.
- [34] KARSTEN FOURMONT. Non-equispaced fast Fourier transforms with applications to tomography. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(5):431–450, 2003. doi:10.1007/s00041-003-0021-1. Citado na página 42.
- [35] MATTEO FRIGO e STEVEN G. JOHNSON. The design and implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, 93(2):216–231, 2005. doi:10.1109/JPROC.2004.840301. Citado na página 37.
- [36] ALEXEI A. GAIVORONSKI. Convergence properties of backpropagation for neural nets via theory of stochastic gradient methods. Part 1. *Optimization Methods and Software*, 4(2):117–134, 1994. doi:10.1080/10556789408805582. Citado na página 62.
- [37] LUIGI GRIPPO. A class of unconstrained minimization methods for neural network training. *Optimization Methods and Software*, 4(2):135–150, 1994. doi:10.1080/10556789408805583. Citado na página 62.
- [38] ELIAS S. HELOU Nt. e ÁLVARO R. DE PIERRO. Convergence results for scaled gradient algorithms in positron emission tomography. *Inverse Problems*, 21(6):1905–1914, 2005. doi:10.1088/0266-5611/21/6/007. Citado nas páginas 57, 58 e 62.

- [39] GABOR T. HERMAN e LORRAINE B. MEYER. Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(3):600–609, 1993. doi:10.1109/42.241889. Citado nas páginas 51 e 92.
- [40] JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY e CLAUDE LEMARÉCHAL. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Volumes 305 e 306 de *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Citado nas páginas 62, 73 e 92.
- [41] STEFAN HORBELT, MICHAEL LIEBLING e MICHAEL UNSER. Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(4):363–376, 2002. doi:10.1109/TMI.2002.1000260. Citado na página 136.
- [42] H. MALCOLM HUDSON e RICHARD S. LARKIN. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4):601–609, 1994. doi:10.1109/42.363108. Citado nas páginas 56 e 62.
- [43] AVINASH C. KAK e MALCOLM SLANEY. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE press, 1988. Citado nas páginas 21 e 43.
- [44] KRZYSZTOF C. KIWIEL. Convergence of approximate and incremental subgradient methods for convex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 14(3):807–840, 2004. doi:10.1137/S1052623400376366. Citado na página 62.
- [45] A. N. KOLMOGOROV e S. V. FOMIN. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications Inc, 1975. Citado na página 33.
- [46] LEONID A. KUNYANSKY. A new SPECT reconstruction algorithm based on the Novikov explicit inversion formula. *Inverse Problems*, 17(2):293–306, 2001. doi:10.1088/0266-5611/17/2/309. Citado nas páginas 22 e 30.
- [47] JIAN LUO e PATRICK L. COMBETTES. A level-set subgradient projection algorithm for non-differentiable signal restoration with multiple constraints.

In *Proceedings of 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP'00*, Volume 1, pages 225–228. IEEE, 2000. doi:10.1109/ICASSP.2000.861924. Citado na página 63.

- [48] ZHI-QUAN LUO e PAUL TSENG. Analysis of an approximate gradient projection method with applications to the backpropagation algorithm. *Optimization Methods and Software*, 4(2):85–101, 1994. doi:10.1080/10556789408805580. Citado na página 62.
- [49] OLVI L. MANGASARIAN e MIKHAIL V. SOLODOV. Serial and parallel backpropagation convergence via nonmonotone perturbed minimization. *Optimization Methods and Software*, 4(2):103–116, 1994. doi:10.1080/10556789408805581. Citado na página 62.
- [50] SAMUEL MATEJ, JEFFREY A. FESSLER e IVAN G. KAZANTSEV. Iterative tomographic image reconstruction using Fourier-based forward and back-projectors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(4):401–412, 2004. doi:10.1109/TMI.2004.824233. Citado na página 42.
- [51] FRANK NATTERER. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986. Citado nas páginas 20, 35, 41 e 43.
- [52] FRANK NATTERER e FRANK WÜBBELING. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001. Citado nas páginas 33, 36, 51, 60 e 87.
- [53] ANGELIA NEDIĆ e DIMITRI P. BERTSEKAS. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 12(1):109–138, 2001. doi:10.1137/S1052623499362111. Citado nas páginas 59, 62 e 74.
- [54] ROMAN G. NOVIKOV. An inversion formula for the attenuated x-ray transformation. *Arkiv för Matematik*, 40(1):145–167, 2002. doi:10.1007/BF02384507. Citado nas páginas 22 e 30.

- [55] G. PIERRA. Decomposition through formalization in a product space. *Mathematical Programming*, 28(1):96–115, 1984. doi:10.1007/BF02612715. Citado na página 87.
- [56] WALTER RUDIN. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970. Citado na página 34.
- [57] LÚCIO T. SANTOS. A parallel subgradient projections method for the convex feasibility problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 18(3):307–320, 1987. doi:10.1016/0377-0427(87)90004-5. Citado na página 63.
- [58] REGINALDO J. SANTOS E ÁLVARO R. DE PIERRO. A cheaper way to compute generalized cross-validation as a stopping rule for linear stationary iterative methods. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 12:1–17, 2003. Citado nas páginas 51 e 63.
- [59] L. A. SHEPP E Y. VARDI. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2):113–122, 1982. doi:10.1109/TMI.1982.4307558. Citado na página 55.
- [60] NAUM Z. SHOR. *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Volume 3 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Citado nas páginas 73 e 82.
- [61] ROBERT L. SIDDON. Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array. *Medical Physics*, 12(2):252–255, 1985. doi:10.1118/1.595715. Citado na página 139.
- [62] MIKHAIL V. SOLODOV. Incremental gradient algorithms with stepsizes bounded away from zero. *Computational Optimization and Applications*, 11(1):23–35, 1998. doi:10.1023/A:1018366000512. Citado na página 62.
- [63] MIKHAIL V. SOLODOV E S. K. ZAVRIEV. Error stability properties of generalized gradient-type algorithms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(3):663–680, 1998. doi:10.1023/A:1022680114518. Citado nas páginas 61 e 62.

- [64] EIICHI TANAKA e HIROYUKI KUDO. Subset-dependent relaxation in block-iterative algorithms for image reconstruction in emission tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 48(10):1405–1422, 2003. doi:10.1088/0031-9155/48/10/312. Citado na página 62.
- [65] JOSHUA TRZASKO e ARMANDO MANDUCA. Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic  $\ell_0$ -minimization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28(1):106–121, 2009. doi:10.1109/TMI.2008.927346. Citado nas páginas 100, 103 e 107.
- [66] PAUL TSENG. An incremental gradient(-projection) method with momentum term and adaptive stepsize rule. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):506–531, 1998. doi:10.1137/S1052623495294797. Citado na página 62.
- [67] Y. VARDI, L. A. SHEPP e L. KAUFMAN. A statistical model for positron emission tomography. *Journal of the American Statistical Association*, 80(389):8–20, 1985. URL <http://www.jstor.org/pss/2288030>. Citado nas páginas 44 e 55.
- [68] ISAO YAMADA e NOBUHIKO OGURA. Adaptive projected subgradient method for asymptotic minimization of sequence of nonnegative convex functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 25(7):593–617, 2005. doi:10.1081/NFA-200045806. Citado nas páginas 63 e 82.
- [69] ISAO YAMADA e NOBUHIKO OGURA. Hybrid steepest descent method for variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 25(7):619–655, 2005. doi:10.1081/NFA-200045815. Citado nas páginas 63 e 82.
- [70] YINGYING ZHANG-O'CONNOR e JEFFREY A. FESSLER. Fourier-based forward and back-projectors in iterative fan-beam tomographic image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(5):582–589, 2006. doi:10.1109/TMI.2006.872139. Citado na página 42.

## APÊNDICE A

# TRANSFORMADA DE RADON DE ELIPSES

O objetivo deste apêndice é avaliar a transformada de uma elipse<sup>1</sup> a partir do caso mais simples de um círculo centrado na origem. Estes resultados são úteis para testar implementações do algoritmo descrito no apêndice B.

### A.1 PROPRIEDADES BÁSICAS

Nesta seção ressaltamos algumas propriedades da transformada de Radon que podem ser deduzidas diretamente de sua definição. O intuito é reunir algumas fórmulas que, em conjunto, permitam avaliar a TR de um objeto mais complexo a partir da expressão de  $\mathcal{R}[f]$  para uma função  $f$  mais simples.

A propriedade de maiores consequências da TR é a sua linearidade

$$\mathcal{R}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{R}[f] + \beta \mathcal{R}[g], \quad (\text{A.1})$$

que segue imediatamente da definição (1.1, pg. 20). Agora consideraremos algumas transformações na função  $f$  e suas implicações em  $\mathcal{R}[f]$ .

---

<sup>1</sup>Para ser mais exato, avaliaremos a transformada da função indicadora da região delimitada por uma elipse, mas evitamos o transtorno de repetir toda essa expressão dizendo simplesmente que calculamos a TR de uma elipse.

**PROPOSIÇÃO A.1.1** (mudança de escala). *Seja  $D = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$  com  $\alpha\beta \neq 0$  e  $g(x) = f(Dx)$  então:*

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \mathcal{R}[f] \left( \theta', \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} t \right).$$

Onde  $\theta' = \arctan(\alpha/\beta \tan \theta)$  se  $\cos \theta \neq 0$  e  $\theta' = \theta$  caso contrário.

*Demonstração.* Desconsideraremos o caso  $\cos \theta = 0$  a princípio. Avaliamos  $\mathcal{R}[g](x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g](x) &= \int_{\mathbb{R}} g \left( t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} g \left( \begin{pmatrix} t \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta \\ t \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta \end{pmatrix} \right) ds = \int_{\mathbb{R}} f \left( \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta - \alpha s \operatorname{sen} \theta \\ \beta t \operatorname{sen} \theta + \beta s \cos \theta \end{pmatrix} \right) ds. \end{aligned}$$

Um momento de reflexão nos mostra que se pretendemos escrever  $\mathcal{R}[g](\theta, t) = c\mathcal{R}[f](\theta', t')$  o ângulo não poderá ser o mesmo, exceto se a razão  $\alpha/\beta$  for igual a 1. De fato, pela geometria da integral somos levados a utilizar um ângulo tal que  $\tan \theta' = \alpha/\beta \tan \theta$ , ou seja,  $\theta' = \arctan(\alpha/\beta \tan \theta)$  serviria. Agora vejamos que esta escolha para  $\theta'$  realmente é apropriada:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g](\theta, t) &= \frac{1}{\beta \cos \theta} \int_{\mathbb{R}} f \left( \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta - s \frac{\alpha \operatorname{sen} \theta}{\beta \cos \theta} \\ \beta t \operatorname{sen} \theta + s \end{pmatrix} \right) ds = \frac{1}{\beta \cos \theta} \int_{\mathbb{R}} f \left( \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta - s \frac{\operatorname{sen} \theta'}{\cos \theta'} \\ \beta t \operatorname{sen} \theta + s \end{pmatrix} \right) ds \\ &= \frac{1}{\beta \cos \theta} \int_{\mathbb{R}} f \left( \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta' \\ \beta t \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta' \end{pmatrix} \right) ds. \end{aligned}$$

Esta integral não contém mais os termos  $\alpha$  e  $\beta$  multiplicando a variável de integração. Agora, é claro que existem  $\alpha'$  e  $\beta'$  tais que  $\operatorname{sen} \theta' = \alpha' \operatorname{sen} \theta$  e  $\cos \theta' = \beta' \cos \theta$ . Se nos lembarmos da definição de  $\theta'$  veremos que normalizando para obter  $\operatorname{sen}^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1$  temos

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \quad \text{e} \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}.$$

Desta forma:

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \int_{\mathbb{R}} f \left( \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta' \\ \beta t \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta' \end{pmatrix} \right) ds.$$

Resta o problema de determinar um  $t'$  apropriado. Em geral não é possível encontrarmos  $t'$  tal que  $\alpha t \cos \theta = t' \cos \theta'$  e  $\beta t \operatorname{sen} \theta = t' \operatorname{sen} \theta'$ , mas isto não é

necessário porque apenas a componente de  $\begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta \\ \beta t \sin \theta \end{pmatrix}$  perpendicular ao caminho de integração é importante. Para ver isto, primeiro denotemos  $\vartheta' = \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix}$  e  $\vartheta'^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \theta' \\ \cos \theta' \end{pmatrix}$ . Para qualquer  $t \in \mathbb{R}^2$  temos  $t = t_{\vartheta'} \vartheta' + t_{\vartheta'^\perp} \vartheta'^\perp$ . Sob esta notação, fazendo-se  $t = \begin{pmatrix} \alpha t \cos \theta \\ \beta t \sin \theta \end{pmatrix}$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g](\theta, t) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \int_{\mathbb{R}} f(t_{\vartheta'} \vartheta' + (t_{\vartheta'^\perp} + s) \vartheta'^\perp) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \int_{\mathbb{R}} f(t_{\vartheta'} \vartheta' + s \vartheta'^\perp) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \mathcal{R}[f](\theta', t_{\vartheta'}). \end{aligned}$$

Basta agora encontrarmos uma expressão apropriada para  $t_{\vartheta'}$ :

$$\begin{aligned} t_{\vartheta'} &= \langle t \mid \vartheta' \rangle = \alpha t \cos \theta \cos \theta' + \beta t \sin \theta \sin \theta' = t \cos \theta' \left( \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'} \right) \\ &= t \cos \theta' \left( \alpha \cos \theta + \alpha \sin \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = t \alpha \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= t \alpha \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} = t \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Para terminar a prova precisamos considerar o caso  $\cos \theta = 0$ , mas aqui o cálculo é bem mais simples porque temos:

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\begin{pmatrix} -s \\ t \end{pmatrix}\right) ds = \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} -\alpha s \\ \beta t \end{pmatrix}\right) ds = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} -s \\ \beta t \end{pmatrix}\right) ds = \frac{1}{\alpha} \mathcal{R}[f](\theta, \beta t). \quad \square$$

**PROPOSIÇÃO A.1.2** (translação). *Seja  $g(x) = f(x - y)$  então*

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \mathcal{R}[f](\theta, t - y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta).$$

*Demonstração.* Avaliemos  $\mathcal{R}[g](\theta, t)$  denotando  $\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  e  $\vartheta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g](\theta, t) &= \int_{\mathbb{R}} f(t\vartheta + s\vartheta^\perp - y) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f((t - y_\vartheta)\vartheta + (s - y_{\vartheta^\perp})\vartheta^\perp) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f((t - y_\vartheta)\vartheta + s\vartheta^\perp) ds = \mathcal{R}[f](\theta, t - y_\vartheta). \end{aligned}$$

Isto mostra a afirmação pois  $y_\vartheta = \langle y \mid \vartheta \rangle = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO A.1.3** (rotação). *Seja  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  então, se  $g(x) = f(M_\alpha x)$  então*

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \mathcal{R}[f](\theta + \alpha, t).$$

*Demonstração.* É óbvio que a imagem  $g$  é a mesma que  $f$  girada  $\alpha$  radianos na direção anti-horária, portanto a afirmação faz sentido. O único ponto a se notar é que  $M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha}$ :

$$\begin{aligned} M_\theta M_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha & -\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha & -\sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = M_{\theta+\alpha}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \int_{\mathbb{R}} g(M_\theta(s)) ds = \int_{\mathbb{R}} f(M_\alpha M_\theta(s)) ds = \int_{\mathbb{R}} f(M_{\theta+\alpha}(s)) ds. \quad \square$$

Note que a SVD de qualquer matriz  $A$  fornece uma decomposição da forma  $M_\alpha D M_\beta$ . Não entraremos em detalhes, mas esta decomposição fornece, graças às três proposições acima, uma forma de calcular a TR de  $g(x) = f(Ax + y)$  para qualquer  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  não-singular se  $\mathcal{R}[f]$  for fornecida.

## A.2 A TRANSFORMADA DE UMA ELIPSE

Partimos para o cálculo da TR de uma elipse avaliando a transformada de um círculo. Começamos por  $\mathcal{R}[f]$  quando  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq 1; \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja  $g(x) = f(M_{-\theta}x)$ , então, pela proposição A.1.3,  $\mathcal{R}[f](\theta, t) = \mathcal{R}[g](0, t)$ . Por outro lado,  $\|M_\theta x\| = \|x\|$  como podemos facilmente observar pelo fato de que

$M_\theta M_\theta^* = I$ . Assim,  $g(x) = f(x)$  e, portanto  $\mathcal{R}[f](\theta, t) = \mathcal{R}[f](0, t)$ , o que não é surpresa dada a simetria do círculo. Desta forma:

$$\mathcal{R}[f](\theta, t) = \mathcal{R}[f](0, t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds.$$

Se  $|t| > 1$  então  $t^2 + s^2 > 1$  e a integral se anula. Caso contrário:

$$\mathcal{R}[f](\theta, t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds = \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} ds = 2\sqrt{1-t^2}.$$

Agora lembramos que qualquer elipse pode ser descrita como uma mudança de escalas seguida de uma rotação e de um deslocamento de um círculo centrado na origem. A equação de tal elipse será dada por  $\|D_{a,b}M_{-\gamma}(x - y)\| = 1$  onde  $D_{a,b} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$  e  $a$  e  $b$  são, respectivamente, os tamanhos dos semi-eixos horizontal e vertical. Nossos parâmetros descrevendo a elipse são, portanto,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$  e vemos que a região delimitada por ela tem como função característica  $g(x) = f(D_{a,b}M_{-\gamma}(x - y))$ . Procedemos notando que a aplicação, em seqüência, das proposições A.1.2, A.1.3 e A.1.1 nos permite escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[g](\theta, t) &= \mathcal{R}[f(D_{a,b}M_{-\gamma}\cdot)](\theta, t - y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \\ &= \mathcal{R}[f(D_{a,b}\cdot)](\theta - \gamma, t - y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2(\theta-\gamma)}{a^2} + \frac{\cos^2(\theta-\gamma)}{b^2}}} \mathcal{R}[f] \left( 0, \frac{t - y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta}{ab \sqrt{\frac{\sin^2(\theta-\gamma)}{a^2} + \frac{\cos^2(\theta-\gamma)}{b^2}}} \right). \end{aligned}$$

E esta é a expressão para a transformada de Radon da elipse  $g$ . Denotando

$$m(\theta) = \left( \frac{\sin^2(\theta-\gamma)}{a^2} + \frac{\cos^2(\theta-\gamma)}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ e } t'(\theta, t) = \frac{m(\theta)}{ab} (t - y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta)$$

podemos summarizar:

$$\mathcal{R}[g](\theta, t) = \begin{cases} 2m(\theta) \sqrt{1 - [t'(\theta, t)]^2} & \text{se } |t'(\theta, t)| \leq 1; \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$



## APÊNDICE B

# TRANSFORMADA DE RADON DE IMAGENS DISCRETAS

### B.1 REPRESENTAÇÃO DISCRETA DE IMAGENS

Para processarmos uma imagem digitalmente precisamos trabalhar com uma representação dela em um espaço de dimensão finita. Cada elemento de uma base para este espaço será denominado de *pixel*<sup>1</sup>, o valor de cada um dos coeficientes da expansão da imagem na base de *pixels* é comumente chamado de o valor do *pixel* correspondente na imagem.

Um algoritmo para o cálculo da transformada de Radon deve ser, portanto, capaz de traduzir os valores dos coeficientes da representação da imagem em uma dada base para os valores das integrais de linha sobre a imagem de forma eficiente. A base de funções utilizada terá uma grande importância, como veremos, na complexidade computacional do algoritmo e pode influenciar na qualidade resultante da imagem. Por simplicidade utilizaremos uma base de *pixels* quadrados, mas outras poderiam ser utilizadas. Por exemplo, uma discussão sobre o uso de *b-splines* no cálculo da

---

<sup>1</sup>O termo *pixel* vem do inglês *picture element*.

transformada de radon pode ser encontrada em [41], junto com uma versão do algoritmo de FBP também baseada em aproximação por *splines*.

Suporemos que a imagem em consideração tem suporte compacto, ou seja, que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  cujo valor determina a intensidade da imagem em cada ponto seja tal que  $\|x\| > M \Rightarrow f(x) = 0$  para algum  $M$  grande o suficiente. Indo além, mas sem perda de generalidade, podemos assumir que a norma é  $\|\cdot\|_\infty$  e que  $M$  vale menos que 1, de forma que a parte não nula da imagem estaria confinada ao quadrado semi-aberto  $[-1, 1] \times (-1, 1]$ .

Tal quadrado concentrará a discretização. Fixamos a resolução vertical  $m$  e a horizontal  $n$  e dividimos o quadrado em uma grade regular de  $mn$  retângulos de largura  $\Delta_x := 2/n$  e altura  $\Delta_y := 2/m$  onde assumimos que a função tem um valor constante. Se indexarmos estes retângulos partindo do canto superior esquerdo, o retângulo  $I_{i,j}$  corresponderia ao conjunto

$$I_{i,j} = [-1 + j\Delta_x, -1 + (j+1)\Delta_x] \times [1 - (i+1)\Delta_y, 1 - i\Delta_y].$$

A base de funções de nossa discretização é então definida pelo seguinte conjunto de funções:

$$B^{(m,n)} := \{\chi_{I_{i,j}}, i = 0, \dots, m-1, j = 0, \dots, n-1\}$$

com

$$\chi_C(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C \\ 0 & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

a função indicadora do conjunto  $C$ .

Note que um ponto  $(x, y) \in [-1, 1] \times (-1, 1]$  pertencerá ao retângulo  $I_{i,j}$  se e somente se  $x \in [-1 + j\Delta_x, -1 + (j+1)\Delta_x]$  e  $y \in [1 - (i+1)\Delta_y, 1 - i\Delta_y]$ . A primeira condição equivale a  $(1+x)/\Delta_x \in [j, j+1]$ , ou seja,  $\text{floor}((1+x)/\Delta_x) = j$ , enquanto a segunda é equivalente a  $(1-y)/\Delta_y \in [i, i+1]$ , que pode ser escrita como  $\text{floor}((1-y)/\Delta_y) = i$ . Portanto, resulta que

$$(x, y) \in I_{\text{floor}\left(\frac{1-y}{\Delta_y}\right), \text{floor}\left(\frac{1+x}{\Delta_x}\right)}. \quad (\text{B.1})$$

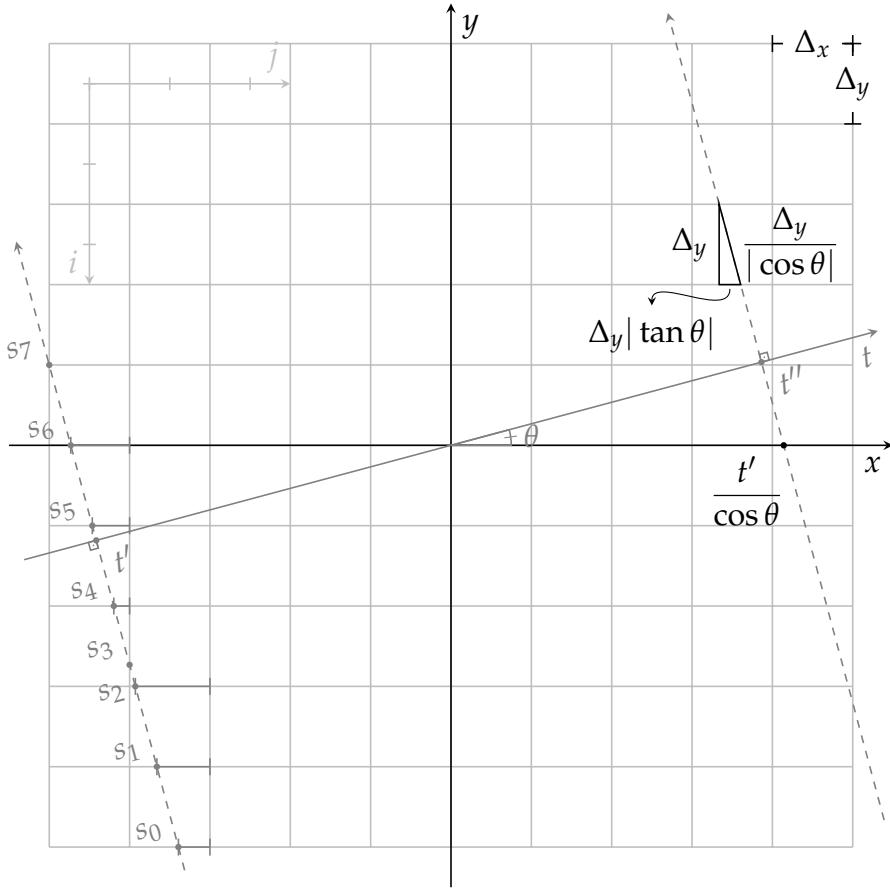


FIGURA 22 – Geometria da transformada de Radon de imagens discretas.

## B.2 TRANSFORMADA DE RADON DE IMAGENS DISCRETAS

Aqui determinaremos um algoritmo para o cálculo exato da transformada de Radon de uma imagem discreta ou para o cálculo aproximado a partir de amostras de uma imagem contínua. A discretização é a descrita na seção anterior, de forma que  $f = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} \chi_{I_{i,j}}$  para um conjunto apropriado de coeficientes  $c_{i,j}$ .

Primeiro notamos que, devido à hipótese de que  $f$  tem suporte compacto, existe um intervalo  $[s_0, s_k]$  tal que

$$\mathcal{R}[f](\theta, t') = \int_{s_0}^{s_k} f(t' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}) ds.$$

E poderíamos utilizar uma partição  $s_0, s_1, \dots, s_k$  para escrever essa integral como uma soma:

$$\mathcal{R}[f](\theta, t') = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(t'(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}) + s(\frac{-\sin \theta}{\cos \theta})) ds.$$

Se nos voltarmos à figura 22 podemos ver que uma escolha adequada para a partição pode resultar numa soma simplificada onde os integrandos são constantes em cada parcela e teremos simplesmente:

$$\mathcal{R}[f](\theta, t') = \sum_{i=0}^{k-1} (s_{i+1} - s_i) m_i.$$

Nessa fórmula,  $m_i$  seria determinado a partir do coeficiente correto  $c_{i,j}$  cujos índices poderiam ser calculados, por exemplo, utilizando a fórmula (b.1, pg. 136).

O algoritmo que será apresentado prossegue somando cada uma dessas parcelas, mas evita o cálculo explícito dos valores  $s_i$  ao determinar os coeficientes  $c_{i,j}$  relevantes utilizando um parâmetro de controle semelhante ao utilizado no algoritmo de Bresenham [12]. A idéia é determinar qual a direção em que os *pixels* mudam mais rapidamente, que será chamada de *direção rápida*, e seguir sempre um *pixel* nessa direção; apenas quando necessário, seguimos também na outra direção. Por exemplo, na figura 22 os únicos pixels por onde passa o caminho de integração são<sup>2</sup>  $\{(9,1), (8,1), (7,1), (7,0), (6,0), (5,0), (4,0)\}$ . Nesse caso a direção rápida é, portanto, a vertical, de forma que a cada passo sempre nos movemos um pixel nessa direção e a cada um desses passos, acrescentamos  $\Delta_y \tan \theta$  ao parâmetro  $\epsilon$  (a representação gráfica de  $\epsilon$  na figura 22 são as barras horizontais entre os pontos  $s_i$  e a coluna imediatamente anterior) que é iniciado com a distância entre o ponto inicial e a coluna imediatamente anterior a ele (o ponto  $s_0$  na figura 22). Assim, quando o valor de  $\epsilon$  ultrapassar  $\Delta_x$  é hora de movimentarmo-nos na direção lenta e fazemos  $\epsilon$  valer  $\epsilon - \Delta_x$  e continuamos o processo até percorrer todos os *pixels* por onde passa o caminho de integração.

---

<sup>2</sup>Aqui os pixels são representados pelos seus índices de linha e coluna  $(i, j)$ , cuja enumeração inicia em 0.

O processo descrito no parágrafo acima mostra como podemos percorrer os pixels corretos, falta avaliar  $s_i - s_{i-1}$ , mas esse valor é simplesmente  $\Delta_y / |\cos \theta|$  a maior parte do tempo, as exceções ficam por conta dos casos em que temos que nos movimentar na direção lenta. Nesses casos nós eventualmente vamos precisar efetuar um cálculo do tipo

$$\frac{\epsilon}{\Delta_y |\tan \theta|} \frac{\Delta_y}{|\cos \theta|} = \frac{\epsilon}{|\sin \theta|}.$$

Como os cálculos são efetuados em aritmética de precisão finita é possível que pequenos erros sejam muito amplificados quando  $\sin \theta \approx 0$ . Para contornar esse problema podemos utilizar o seguinte expediente: primeiro definimos o fator  $\alpha = (\Delta_x - \epsilon_a) / \epsilon$ , onde  $\epsilon_a$  é o valor de  $\epsilon$  antes da atualização e podemos usar a expressão

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{\Delta_y}{|\cos \theta|}.$$

No cálculo de  $\alpha$  pode facilmente acontecer de  $\epsilon$  ser muito menor do que  $\Delta_x - \epsilon_a$ , o que também pode levar a erros grotescos de arredondamento. Aqui, porém, quando isso acontecer, a fração  $\alpha / (1 + \alpha)$  se aproximará rapidamente de 1, suavizando as eventuais imprecisões.

A descrição em pseudo-código do algoritmo pode ser vista na listagem B.2 (note que utilizamos 4 subfunções descritas nas listagens 11–14) que pode servir como base para uma implementação. Diversos detalhes ignorados na descrição acima são importantes na implementação e a listagem fornecida preenche essas lacunas. É necessário comentar que existe um algoritmo eficiente para o cômputo da TR de uma imagem discretizada conhecido como *algoritmo de Siddon* [61]. Seria interessante compararmos o método aqui proposto com tal algoritmo, mas essa comparação foge ao escopo da presente tese.

**Entrada:**  $k, l, m, n, \theta[k], t[l], a[m][n]$ ;

**Saída:**  $p[l][k]$ ;

$$\Delta_x = 2/n; \Delta_y = 2/m; r = m/n;$$

**para** ( $c_\theta = 0; c_\theta < k; ++c_\theta$ ) **faça**

$$\sigma = \text{sen}(\theta[c_\theta]); \xi = \cos(\theta[c_\theta]); \Delta_i = -\text{Sinal}(\xi);$$

**se** ( $\sigma == 0$ ) **então**

$$\text{se } (\Delta_i > 0) \text{ então } \{ i_i = 0; i_f = m; \} \text{ senão } \{ i_i = m - 1; i_f = -1; \};$$

**para** ( $c_t = 0; c_t < l; ++c_t$ ) **faça**

$$x_i = -\Delta_i t[c_t];$$

**se** ( $x_i \geq -1$ )  $\&\&$  ( $x_i < 1$ ) **então**

$$j = \text{floor}((1 + x_i)/\Delta_x);$$

**para** ( $i = i_i; i \neq i_f; i += \Delta_i$ ) **faça**  $\{ p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\Delta_y; \}$

Vá para próximo  $c_\theta$ ;

$$\tau = \tan(\theta[c_\theta]); \tilde{\tau} = |\tau|; \Delta_j = -\text{Sinal}(\sigma);$$

**se** ( $\tilde{\tau} \leq r$ ) **então**

$$\gamma = \Delta_j/\tau; \Delta = \tilde{\tau}\Delta_y; \tilde{\xi} = |\xi|; \delta = \Delta_y/\tilde{\xi};$$

**para** ( $c_t = 0; c_t < l; ++c_t$ ) **faça**

$$y_i = t[c_t]/\sigma; y_f = y_i - \gamma; y_i += \gamma;$$

$$y_i = \text{Ajusta}(y_i, -1, 1); y_f = \text{Ajusta}(y_f, -1, 1);$$

**se** ( $y_i == y_f$ ) **então** { Vá para próximo  $c_t$ ; };

$$i = \text{Linha}(y_i, \Delta_y, \Delta_i); i_f = \text{Linha}(y_f, \Delta_y, -\Delta_i);$$

**se** ( $|y_i| \neq 1$ ) **então**

$$\text{se } (\Delta_j > 0) \text{ então } \{ j = 0; \} \text{ senão } \{ j = n - 1; \};$$

$$\varepsilon = |\Delta_i + y_i|; \varepsilon -= (\text{ceil}(\varepsilon/\Delta_y) - 1)\Delta_y; p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\varepsilon/\tilde{\xi};$$

$$\varepsilon \times= \tilde{\tau}; i += \Delta_i;$$

**senão**

$$x_i = t[c_t]/\xi - y_i\tau; j = \text{Coluna}(x_i, \Delta_x, \Delta_j);$$

$$\varepsilon = |\Delta_j + x_i|; \varepsilon -= \text{floor}(\varepsilon/\Delta_x)\Delta_x;$$

**se** ( $|i - i_f| > 1$ ) **então**

$$i_f -= \Delta_i;$$

**para** ( $; i \neq i_f; i += \Delta_i$ ) **faça**

$$\varepsilon_a = \varepsilon; \varepsilon += \Delta;$$

**se** ( $\varepsilon \leq \Delta_x$ ) **então**  $\{ p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\delta; \}$

**senão**

$$\varepsilon -= \Delta_x; \alpha = (\Delta_x - \varepsilon_a)/\varepsilon; \tilde{\delta} = \delta(\alpha/(1 + \alpha));$$

$$p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\tilde{\delta}; j += \Delta_j; p[c_t][c_\theta] += a[i][j](\delta - \tilde{\delta});$$

$$i_f += \Delta_i;$$

$$i_f += \Delta_i;$$

**para** ( $; i \neq i_f; i += \Delta_i$ ) **faça**

$$\varepsilon_a = \varepsilon; \varepsilon += \Delta;$$

**se** ( $\varepsilon \leq \Delta_x$ ) **então**  $\{ p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\delta; \}$

**senão**

$$\varepsilon -= \Delta_x; \alpha = (\Delta_x - \varepsilon_a)/\varepsilon; \tilde{\delta} = \delta(\alpha/(1 + \alpha));$$

$$p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\tilde{\delta}; j += \Delta_j;$$

**se** ( $(j \geq 0) \&\& (j < n)$ ) **então**  $\{ p[c_t][c_\theta] += a[i][j](\delta - \tilde{\delta}); \}$

**senão** { Vá para próximo  $c_t$ ; };

**senão se** ( $\xi = 0$ ) **então**

Continua na página 141.

*Continuação da página 140.*

```

senão se (  $\xi == 0$  ) então
    se (  $\Delta_j > 0$  ) então {  $j_i = 0; j_f = n;$  } senão {  $j_i = n - 1; j_f = -1;$  };
    para (  $c_t = 0; c_t < l; ++c_t$  ) faça
         $y_i = -\Delta_j t[c_t];$ 
        se ( (  $y_i > -1$  ) && (  $y_i \leq 1$  ) ) então
             $i = \text{floor}((1 - y_i)/\Delta_y);$ 
            para (  $j = j_i; j \neq j_f; j += \Delta_j$  ) faça {  $p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\Delta_x;$  };
    senão
         $\gamma = \Delta_i \tau; \Delta = \Delta_x/\tilde{\tau}; \tilde{\sigma} = |\sigma|; \delta = \Delta_x/\tilde{\sigma};$ 
        para (  $c_t = 0; c_t < l; ++c_t$  ) faça
             $x_i = t[c_t]/\xi; x_f = x_i + \gamma; x_i -= \gamma;$ 
             $x_i = \text{Ajusta}(x_i, -1, 1); x_f = \text{Ajusta}(x_f, -1, 1);$ 
            se (  $x_i == x_f$  ) então { Vá para próximo  $c_t;$  };
             $j = \text{Coluna}(x_i, \Delta_x, \Delta_j); j_f = \text{Coluna}(x_f, \Delta_x, -\Delta_j);$ 
            se (  $|x_i| \neq 1$  ) então
                se (  $\Delta_i > 0$  ) então {  $i = 0;$  } senão {  $i = m - 1;$  };
                 $\varepsilon = |x_i - \Delta_j|; \varepsilon -= (\text{ceil}(\varepsilon/\Delta_x) - 1)\Delta_x; p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\varepsilon/\tilde{\sigma};$ 
                 $\varepsilon /= \tilde{\tau}; j += \Delta_j;$ 
            senão
                 $y_i = t[c_t]/\sigma - x_i/\tau; i = \text{Linha}(y_i, \Delta_y, \Delta_i);$ 
                 $\varepsilon = |y_i - \Delta_j|; \varepsilon -= \text{floor}(\varepsilon/\Delta_y)\Delta_y;$ 
            se (  $|j - j_f| > 1$  ) então
                 $j_f -= \Delta_j;$ 
                para ( ;  $j \neq j_f; j += \Delta_j$  ) faça
                     $\varepsilon_a = \varepsilon; \varepsilon += \Delta;$ 
                    se (  $\varepsilon \leq \Delta_y$  ) então {  $p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\delta;$  }
                    senão
                         $\varepsilon -= \Delta_y; \alpha = (\Delta_y - \varepsilon_a)/\varepsilon; \tilde{\delta} = \delta(\alpha/(1 + \alpha));$ 
                         $p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\tilde{\delta}; i += \Delta_i; p[c_t][c_\theta] += a[i][j](\delta - \tilde{\delta});$ 
                 $j_f += \Delta_j;$ 
            para ( ;  $j \neq j_f; j += \Delta_j$  ) faça
                 $\varepsilon_a = \varepsilon; \varepsilon += \Delta;$ 
                se (  $\varepsilon \leq \Delta_y$  ) então {  $p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\delta;$  }
                senão
                     $\varepsilon -= \Delta_y; \alpha = (\Delta_y - \varepsilon_a)/\varepsilon; \tilde{\delta} = \delta(\alpha/(1 + \alpha));$ 
                     $p[c_t][c_\theta] += a[i][j]\tilde{\delta}; i += \Delta_i;$ 
                    se ( (  $i \geq 0$  ) && (  $i < m$  ) ) então {  $p[c_t][c_\theta] += a[i][j](\delta - \tilde{\delta});$  }
                    senão { Vá para próximo  $c_t;$  };

```

**Entrada:**  $x$ ;**Saída:**  $s$ ;**se** ( $x \leq 0$ ) **então**|  $s = 1$ ;**senão**|  $s = -1$ ;

---

ALGORITMO 11 – Sinal**Entrada:**  $x, \Delta_x, \Delta_j$ ;**Saída:**  $j$ ;**se** ( $\Delta_j \geq 0$ ) **então**|  $j = \text{floor} \left( \frac{1+x}{\Delta_x} \right)$ ;**senão**|  $j = \text{ceil} \left( \frac{1+x}{\Delta_x} \right) - 1$ ;

---

ALGORITMO 14 – Coluna**Entrada:**  $x, l, u$ ;**Saída:**  $x$ ;**se** ( $x > u$ ) **então**|  $x = u$ ;**senão**| **se** ( $x < l$ ) **então**  
| |  $x = l$ ;

---

ALGORITMO 12 – Ajusta**Entrada:**  $y, \Delta_y, \Delta_i$ ;**Saída:**  $i$ ;**se** ( $\Delta_i \geq 0$ ) **então**|  $i = \text{floor} \left( \frac{1-y}{\Delta_y} \right)$ ;**senão**|  $i = \text{ceil} \left( \frac{1-y}{\Delta_y} \right) - 1$ ;

---

ALGORITMO 13 – Linha

# ÍNDICE REMISSIVO

- amostragem compressiva, 99
- ART, 50
- BSREM, 58
- Cimmino, 53
- constante de isometria  $s$ -restrita, 102
- convolução, 32
- convolução circular, 38
- convolução periódica, 38
- CS, 99
- EM, 54
- espaço
  - da freqüência, 32
  - de Fourier, 32
- FBP, 34
- feixes divergentes, 27
- feixes paralelos, 27
- filtered backprojection*, 34
- Fourier
  - espaço de, 32
  - métodos de, 33
- transformada de, 31
- transformada finita de, 36, 37
- transformada inversa de, 31
- transformada inversa finita de, 37
- funcional regularizador, 49
- mal-posto, 48
- OS-EM, 55
- OS-SPS, 58
- phantom* de Shepp-Logan, 21
- pixel*, 135
- problema inverso, 48
- projeção, 20
- Röntgen, Wilhelm Conrad, 25
- Radon
  - transformada de, 20
- raios x, 25
  - transformada dos, 21
- RAMLA, 56
- regularização, 49
- retroprojeção, 35

- retroprojeção filtrada, 33, 34  
    algoritmo de, 41  
    discreta, 36  
    fórmula de, 35
- sinograma, 22
- spline*, 135
- subgradiente incremental, 74
- subgradiente incremental agregado, 74
- tomografia, 25  
    computadorizada, 25  
    por emissão, 28  
    por emissão de fóton único, 28  
    por emissão de pósitrons, 28  
    por raios x, 26  
    por transmissão, 26  
    transformada da, 21
- TR, 20
- transformada  
    da tomografia, 21  
    de Fourier, 31  
    de Radon, 20  
    de Radon Atenuada, 22  
    dos raios x, 21  
    finita de Fourier, 36, 37  
    inversa de Fourier, 31  
    inversa finita de Fourier, 37  
    rápida de Fourier, 37
- TV*, 90, 102