Eigenschaften von Folgen

Bestimmen Sie, soweit vorhanden, Monotonieeigenschaften, Schranken, Häufungspunkte und Grenzwert für die Folge

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 2}$$

1.Schritt Monotonie bestimmen:

Berechne 5 Glieder um sich ein Bild zu machen:

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{3 * 1^2 + 2 * 1 + 1}{5 * 1^2 - 2} = \frac{6}{3}$$

$$a_2 = \frac{3 * 2^2 + 2 * 2 + 1}{5 * 2^2 - 2} = \frac{17}{18}$$

$$a_3 = \frac{3 * 3^2 + 2 * 3 + 1}{5 * 3^2 - 2} = \frac{34}{43}$$

$$a_4 = \frac{3 * 4^2 + 2 * 4 + 1}{5 * 4^2 - 2} = \frac{57}{78}$$

Abgesehen vom Glied a_0, scheint die Folge monoton zu fallen, was nun überprüft wird. Es gibt hierfür mehrere Möglichkeiten, aber am sinnvollsten ist es, den Quotienten (oft sinnvoll wenn Exponentialfunktionen dabei sind) oder die Differenz zweier Folgeglieder (oft sinnvoll wenn nur Potenzen von n auftauchen) berechnen.

Quotient (Vorzeichen für monoton steigend umdrehen, hier für fallend):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Differenz (Vorzeichen für monoton steigend umdrehen, hier für fallend):

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

Berechne mit der Differenz:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq a_n \\
\frac{3(n+1)^2+2(n+1)+1}{5(n+1)^2-2} &\leq \frac{3n^2+2n+1}{5n^2-2} \\
(3n^2+8n+6)(5n^2-2) &\leq (3n^2+2n+1)(5n^2+10n+8) \\
15n^4+40n^3+24n^2-16n-12 &\leq 15n^4+40n^3+49n^2+26n+8 \\
-25n^2-42n-20 &\leq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist offensichtlich für alle $n \in N$, womit die Folge streng monoton fallend ist. Dieser Weg ist nur ein mögliches Beispiel, letztlich ist es total egal, wie man es zeigt, aber es muss eine Begründung vorliegen.
Die ersten Glieder auszurechnen ist keine Begründung, sondern dient lediglich dazu, sich zu überlegen, welche Monotonie denn überprüft wird.

2.Schritt Schranken bestimmen:

Als obere bzw. untere Schranke werden die Werte einer Folge bezeichnet, über bzw. unter welchen man keinen Wert aus der Folge findet, egal für welches n. Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ beispielsweise ist streng monoton fallend für alle n. Den größten Wert den sie annimmt ist damit der erste $a_1 = 1$. Als obere Schranke kommen nun alle Werte größer oder gleich 1 in Frage, eine Schranke muss von der Folge selbst nicht angenommen werden. $S = 5$, $S = 124812$ oder $S = 1$ sind alles obere Schranken, wobei letztere als kleinste obere Schranke natürlich die aussagekräftigste ist. Da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, und nie negative Werte annimmt, ist die größte untere Schranke $S = 0$, jeder kleinere Wert wäre jedoch auch eine untere Schranke.
In unserem Beispiel findet man eine untere er Schranke von $S = -\frac{1}{2}$, da die Folge für die meisten Glieder (hier alle, also außer dem ersten) nicht negativ wird. Da die Folge für $n > 0$ streng monoton fallend ist, haben wir mit $a_1 = \frac{6}{3}$ auch sofort die kleinste obere Schranke gefunden.

3.Schritt Grenzwert bestimmen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{3+0+0}{5-0} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Der Grenzwert der Folge ist somit $\frac{3}{5} = 0.6$. Hat man einen Grenzwert einer Folge gefunden, muss man sich über Häufungspunkte keine Gedanken mehr machen, denn jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt. Nur in den Fällen, in denen man keinen findet, muss man sich nochmal separat überlegen, ob trotzdem Häufungspunkte existieren.

Es ist nicht immer nötig, alles dermaßen ausführlich aufzuschreiben, wie ich das vorgemacht habe, allerdings müssen die gegebenen Antworten begründet sein. Dies kann durch kleine mathematische Beweise, Skizzen oder auch durch Worte sein, aber es muss ersichtlich werden, mit welcher Begründung die gegebene Antwort zustande kam. Ein richtiges Ergebnis ohne Weg ist leider nichts Wert.