

Technische Universität Berlin

Fachbereich Mathematik

# **Mathe für Physiker III**

**Online-Ergänzungen zum Semesterapparat der MfP3 im WS14/15**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Woche 1: Einfache Differenzialgleichungen</b>	<b>4</b>
1.1	Warm-Up . . . . .	4
1.2	Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	4
1.3	Trennung der Variablen . . . . .	6
1.3.1	Die konstanten Lösungen . . . . .	7
1.3.2	Die nicht-konstanten Lösungen: Trennung der Variablen . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Woche 2: DGL's erster Ordnung</b>	<b>10</b>
2.1	Warm-Up . . . . .	10
2.2	Exakte DGLs und Integrierende Faktoren . . . . .	10
2.2.1	Exakte DGL . . . . .	11
2.2.2	Integrierende Faktoren . . . . .	12
2.3	Eine nützliche Transformation . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Woche 3: Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz</b>	<b>15</b>
3.1	Warm-Up . . . . .	15
3.1.1	Kommentare zum Warm-Up . . . . .	15
3.1.2	Merkzettel für Aufgabe 1 Übung 3 . . . . .	16
3.2	Gegenbeispiele Finden . . . . .	17
3.2.1	Beweis der nicht-gleichmäßigen Konvergenz ohne Verwendung des Satzes . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Woche 4: DGL's höherer Ordnung</b>	<b>19</b>
4.1	Warm-Up . . . . .	19
4.2	DGLs höherer Ordnung und DGL-Systeme . . . . .	20
4.3	Der Harmonische Oszillator . . . . .	21
4.4	Wie der Exponentialansatz schief geht . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Woche 5: DGL-Systeme</b>	<b>24</b>
5.1	Warm-Up Woche 5 . . . . .	24
5.2	Kommentare zum Warm-Up Woche 5 . . . . .	24
5.2.1	DGL-Systeme . . . . .	24
5.3	Matrixexponentiale . . . . .	26
5.4	Lineare Unabhängigkeit von Funktionen . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Woche 6: Inhomogene DGL's</b>	<b>30</b>
6.1	Warm-Up . . . . .	30

6.2	Inhomogene Differentialgleichungen . . . . .	30
6.3	Variation der Konstanten . . . . .	31
6.4	Inhomogene DGLs - Ansatz vom Typ der Rechten Seite . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Woche 7: Variationsrechnung</b>	<b>35</b>
7.1	Warm Up . . . . .	35
7.2	Die Euler-Lagrange Gleichung . . . . .	35
7.2.1	Eine geschwinde Herleitung . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Woche 8: Mehrdimensionale Integration</b>	<b>36</b>
8.1	Warm-Up . . . . .	36
8.2	Mehrdimensionale Integration . . . . .	37
8.2.1	Rechtecke als Integrationsbereiche . . . . .	37
8.3	Funktionsgraphen als Ränder . . . . .	38
8.4	Jordan Nullmengen . . . . .	41
<b>9</b>	<b>Woche 9: Volumenintegrale</b>	<b>43</b>
9.1	3-D Volumenelemente . . . . .	43
9.2	Integrale für Ratsuchende . . . . .	44
<b>10</b>	<b>Woche 10: Oberflächenintegrale</b>	<b>46</b>
10.1	Warm-Up . . . . .	46
10.2	Parametrisierte Flächen . . . . .	46
10.3	Oberflächenintegrale . . . . .	48
<b>11</b>	<b>Woche 11: Flächen und skalare Oberflächenintegrale</b>	<b>50</b>
11.1	Warm-Up . . . . .	50
11.2	Flächen und skalare Oberflächenintegrale . . . . .	51
11.2.1	Der Integralsatz von Gauß . . . . .	53
<b>12</b>	<b>Woche 12</b>	<b>53</b>
12.1	Warm-Up . . . . .	54
12.2	Der Integralsatz von Stokes . . . . .	54
12.3	Die Greensche Formel und Gaußsche Flächenformel . . . . .	55
12.3.1	Das zweidimensionale Problem im 3-D . . . . .	56
<b>13</b>	<b>Woche 13</b>	<b>58</b>
13.1	Warm-Up . . . . .	58
<b>14</b>	<b>Lösungen der Warm-Ups</b>	<b>59</b>

# 1 Woche 1: Einfache Differenzialgleichungen

## 1.1 Warm-Up

Markiere die richtigen Aussagen.

Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell diffbar. Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$  und  $f_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_M(x) = f(x)$  für alle  $x \in M$ . Sei  $a \in M$ . Dann gilt:

- ☐  $f_M$  nimmt ihr (globales) Maximum an.
- ☐ Falls  $f$  ein globales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f_M$ .
- ☐ Falls  $f$  ein lokales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f_M$ .
- ☐ Falls  $f_M$  ein globales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f$ .
- ☐ Falls  $f_M$  ein lokales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f$ .
- ☐ Falls  $f_M$  ein globales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = 0$
- ☐ Falls  $f_M$  ein globales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\text{grad } g(a) = 0$
- ☐ Falls  $f_M$  ein lokales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\text{grad } g(a) = 0$
- ☐ Falls  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so nimmt  $f_M$  ein lokales Maximum im Punkt  $a$  an.

## 1.2 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Für stetige Funktionen einer Veränderlichen ist bekannt, dass sie auf kompakten Mengen Maximum und Minimum annehmen. Ist diese Menge ein kompaktes Intervall  $[a, b]$ , so werden die kritischen Punkte einer differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch Null-Setzen der Ableitung und Lösen der resultierenden Gleichung gefunden. Um die globalen Extrema zu finden, *müssen* die Intervallgrenzen  $a, b$  hinzugezogen werden, da sich auf dem Rand Funktionswerte ergeben können, die größer als die eventuell gefundenen lokalen Maxima sind, oder kleiner als die gefundenen lokalen Minima.

In mehr Dimensionen als einer ist das Einsetzen aller Randpunkte eines kompakten Definitionsbereichs in die Funktion und das Vergleichen der resultierenden Funktionswerte im Allgemeinen nicht mehr möglich. Jedoch gilt, dass in einem Extrempunkt  $p$  auf dem Rand der Gradient der untersuchten Funktion  $f$  parallel zum Gradienten der den Rand beschreibenden Funktion  $g$  sein muss, das heißt

$$\text{grad}_p f = \lambda \text{grad}_p g$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  heißt *Lagrange-Multiplikator*. Diese für ein Extremum notwendige Bedingung lässt sich umformulieren zu  $\text{grad}_p (f - \lambda g) = 0$ , was genau die notwendige Bedingung für die kritischen Punkte  $(p, \lambda)$  der Funktion  $L(p, \lambda) = f(p) - \lambda g(p)$  eine Dimension „höher“ ist. Die Funktion  $L$  heißt *Lagrange-Funktion*, ist aber nicht zu verwechseln mit der gleichnamigen Funktion aus der analytischen Mechanik. Lösen des Gleichungssystems liefert dann die kritischen Punkte, Einsetzen dieser die Extrema.

## Beispiel

Sei

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 3 \right\}$$

und sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}.$$

Gesucht sind die globalen Extrema von  $f$  auf  $D$ . Die Funktion  $f$  nimmt ihr globales Maximum und Minimum an, da der Definitionsbereich  $D$  eine kompakte Menge ist. Die lokalen Extrema von  $f$  werden gefunden durch Lösen der Gleichung  $\text{grad}_p f = 0$ , also

$$\begin{aligned} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ 4\left(y + \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ablesen der Lösung liefert  $p = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Insbesondere ist  $p \in D$ , andernfalls käme es als kritischer Punkt von  $f$  nicht in Frage. Es ist  $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ , was ein Minimum sein muss, da die quadratischen Terme von  $f$  für alle  $(x, y) \neq (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  positive Beiträge liefern. Das globale Minimum ist damit gefunden. Da keine weiteren kritischen Punkte existieren muss sich das globale Maximum auf dem Rand befinden. Dieses wird mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren bestimmt. Der Rand von  $D$  wird beschrieben durch die Nullstellen der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 3$$

das heißt es ist

$$\partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0 \right\}$$

Die Lagrange-Funktion für dieses Problem ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 3\right) \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x^2 - x + (2 - \lambda)y^2 + 2y + 3\lambda + 3
\end{aligned}$$

Das Sortieren nach Potenzen von  $x, y$  ist zweckdienlich für die Bestimmung des Gradienten von  $L$ , der im nächsten Schritt gleich Null gesetzt wird, um die kritischen Punkte zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2(2 - \lambda)y + 2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -\frac{x^2}{2} - y^2 + 3 = 0
\end{aligned}$$

Die Berechnung der partiellen Ableitung nach  $\lambda$  ist nicht nötig, da  $f$  und  $g$  nicht von  $\lambda$  abhängen ist immer

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(f - \lambda g) = -g$$

Umstellen der ersten beiden Gleichungen des Gleichungssystems liefert

$$x = \frac{1}{2 - \lambda} = -y$$

und einsetzen in die Zwangsbedingung  $g = 0$ , unter Verwendung, dass  $x = -y$ , also  $x^2 = y^2$ ,

$$\frac{x^2}{2} + y^2 - 3 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 - 3 = \frac{3}{2} \frac{1}{(2 - \lambda)^2} - 3 = 0$$

oder äquivalent

$$\frac{1}{2 - \lambda} = \pm\sqrt{2}$$

Da nur nach den globalen Extrema gefragt ist, ist es nicht nötig den Lagrange-Multiplikator zu berechnen. Die hier angegebene Form ist günstiger, da sich so ablesen lässt, dass  $p_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  und  $p_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  die kritischen Punkte sind.

### 1.3 Trennung der Variablen

Differentialgleichungen  $y' = F(x, y)$  erster Ordnung, für die sich die Ableitung  $y'$  als Produkt zweier Funktionen schreiben lässt, von denen die eine *nur von*  $x$  und die andere *nur von*  $y$

abhängt, lassen sich mit Hilfe des Verfahrens der *Trennung der Variablen* lösen.

**Das Set-Up:**

Gegeben sei eine DGL  $y' = F(x, y)$  erster Ordnung von der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

mit zwei integrierbaren Funktionen  $f, g$ .

### 1.3.1 Die konstanten Lösungen

Die Suche nach konstanten Lösungen wird gelegentlich unterschlagen. Dann kann Verwunderung aufkommen, wenn eine Maschine, die nach einer bestimmten DGL operiert, gelegentlich ebenfalls nichts tut. Die konstanten Lösungen sind genau die Nullstellen von  $g$ , das heißt existiert ein  $y_0 \in \mathbb{R}$  mit  $g(y_0) = 0$ , so ist  $y(x) = y_0$  Lösung der DGL. Diese Nullstellenbetrachtung gilt natürlich auch für allgemeinere DGLs, ist hier aber besonders zu beachten, da mit Trennung der Variablen keine konstanten Lösungen gefunden werden können.

### 1.3.2 Die nicht-konstanten Lösungen: Trennung der Variablen

Sei nun  $g(y) \neq 0$ . Dann lassen sich die Variablen *separieren*, das heißt die DGL sich schreiben als

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

Ist nun  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$ , das heißt  $H' = \frac{1}{g}$ , so lässt sich die linke Seite schreiben als  $\frac{1}{g(y)}y' = H'(y)y' = \frac{d(H \circ y)}{dx}$  wobei im letzten Schritt die Kettenregel verwendet wurde. Bezeichnet  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so lässt sich die DGL  $y' = f(x)g(y)$  also schreiben als

$$\frac{dF}{dx} = f(x) = \frac{1}{g(y)}y' = \frac{d(H \circ y)}{dx}$$

woraus folgt, dass  $H(y(x)) = F(x) + c$ , mit einer Integrationskonstante  $c \in \mathbb{R}$ . Auflösen nach  $y$  liefert nun die (nicht-triviale) Lösung der DGL.

### Trennung der Variablen: Das Kochrezept

Gegeben sei die DGL 1. Ordnung  $y' = f(x)g(y)$ . Die Schritte zum Finden der Lösung sind die folgenden:

1. Überprüfe, ob die DGL erster Ordnung ist. Nur für solche DGLs kommt Trennung der Variablen in Frage. Schreibe die Funktionen  $f(x)$  und  $g(y)$  auf, um dich der Möglichkeit der Trennung zu vergewissern.
2. Bestimme die Menge  $N_g = \{y \in \mathbb{R} \mid g(y) = 0\}$ . Für alle  $y_0 \in N_g$  ist  $y(x) = y_0$  eine Lösung.
3. Zur Bestimmung der nicht-konstanten Lösungen finde eine Stammfunktion  $H$  von  $1/g$  und eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .
4. Löse die Gleichung  $H(y(x)) = F(x) + c$  nach  $y(x)$  auf.
5. Mache eine Probe! Setze die gefundene Lösung  $y(x)$  in die Differentialgleichung ein und überprüfe ihre Korrektheit.

Die Probe ist natürlich fakultativ, sollte aber aus Sicherheitsgründen immer gemacht werden.

### Beispiel

Gegeben sei die Differentialgleichung  $y' = \frac{x^2}{y}$ . Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die rechte Seite ist von der Form  $f(x)g(y)$ , mit  $f(x) = x^2$  und  $g(y) = 1/y$ . Die Variablen lassen sich also trennen. Da  $g$  keine Nullstellen besitzt, gibt es keine konstanten Lösungen.

Eine Stammfunktion  $H$  von  $1/g(y) = y$  ist  $H(y) = \frac{1}{2}y^2$ . Eine Stammfunktion  $F$  von  $f(x) = x^2$  ist  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ . Auflösen der Gleichung

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + c$$

liefert

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c}$$

Streng genommen müsste in der letzten Gleichung unter der Wurzel natürlich  $2c$  stehen statt  $c$ . Da die Konstante aber beliebig ist, ändert die Beibehaltung von  $c$  nichts an der Tatsache, dass  $y$  Lösung der DGL ist. Die Probe liefert

$$y'(x) = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c}} 2x^2 = \frac{x^2}{\pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c}} = \frac{x^2}{y(x)}$$

Der Wert der Konstanten wird - genau wie das Vorzeichen der Lösung - bestimmt durch eine *Anfangsbedingung* oder *Randbedingung*, die notwendig für die *Eindeutigkeit* der Lösung sind. So hat zum Beispiel schon die einfachste DGL  $y' = 0$  keine eindeutige Lösung. Jede konstante Funktion  $y(x) = c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  ist Lösung.



## Noch ein Beispiel

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xy' = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. **Doch Achtung: Die linke Seite ist nicht von der Form “ $y' =$ ”.** Es muss vorher durch  $x$  geteilt werden. Damit jedoch der Wert  $y(0)$  der Lösung  $y$  in  $x = 0$  nicht verloren geht, wird eine Fallunterscheidung nötig.

Fall 1. In diesem Fall lässt sich durch  $x$  teilen und die DGL nimmt die Form an

$$y' = \frac{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

Sie ist erster Ordnung und lässt sich trennen, denn es ist  $f(x) = 1/x$  und  $g(y) = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Die Funktion

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ist die Ableitung des Arcus-Sinus, also  $H(y) = \arcsin(y)$ . Eine Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x) = 1/x$  ist  $F(x) = \ln(x)$ . Auflösen von

$$\arcsin(y(x)) = \ln(x) + c$$

nach  $y$  liefert

$$y(x) = \sin(\ln(x) + c)$$

Eine Funktion, die in  $x = 0$  eine Singularität besitzt, was in diesem Fall zu erwarten war.

Fall 2. Ist  $x = 0$  so folgt

$$(1 - y^2(0))^{\frac{1}{2}} = 0$$

Dies entspricht aber genau der Suche nach den konstanten Lösungen, das heißt die Lösungen  $y$  mit  $y' = 0$ . Ablesen liefert  $y(x) = \pm 1$  als weitere Lösungen der DGL.

Obwohl die DGL für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist, sind es nicht alle Lösungen. Die Bestimmung möglichst großer Definitionsbereiche für bestimmte Lösungen oder die Frage, wie der Definitionsbereich beschaffen sein muss, dass die Lösung *eindeutig* ist, wird Gegenstand späterer Untersuchungen sein.

## 2 Woche 2: DGL's erster Ordnung

### 2.1 Warm-Up

Markiere die richtigen Aussagen.

Eine DGL der Form  $g(x, y)y' + f(x, y) = 0$  ist exakt, falls

- ☐  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$
- ☐  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$
- ☐ eine Funktion  $F(x, y)$  existiert mit  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial y} = g$ .
- ☐ eine Funktion  $F(x, y)$  existiert mit  $\frac{\partial F}{\partial y} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ .
- ☐ es ein  $M(x, y)$  gibt, sodass  $\frac{\partial M}{\partial x} g + M \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} f + M \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Markiere die richtigen Aussagen.

Betrachte das AWP  $y' = f(x, y)$  mit  $y(0) = 1$ . Es gilt:

- ☐ Das AWP besitzt (mind.) eine Lösung.
- ☐ Die Lösung des AWP ist eindeutig.
- ☐ Das AWP besitzt eine Lösung, wenn  $f$  stetig ist.
- ☐ Das AWP besitzt eine eindeutige Lösung, wenn  $f$  stetig ist.

### 2.2 Exakte DGLs und Integrierende Faktoren

**Erinnerung:** Das Differential  $dF$  einer differenzierbaren Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$   $\mapsto F(x_1, \dots, x_n)$  ist definiert als

$$dF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k$$

Dabei ist es zweckdienlich (und richtig), sich die Differentiale  $dx_k$  der Koordinaten  $\{x_k\}$  als Basis eines Vektorraums vorzustellen, der den *Zeilenvektor*  $dF$  beinhaltet. Das Differential

einer skalaren Funktion  $F$  ist genau die Jacobi-Matrix von  $F$ , beziehungsweise der transponierte Gradient.

Diese „Definition“ erklärt nicht, was das Differential eigentlich *ist*. An dieser Stelle genügt es jedoch zu wissen, dass aus  $dF = 0$  folgt, dass  $F$  konstant sein muss. Ist nämlich  $dF = 0$ , so folgt aus der linearen Unabhängigkeit der  $dx_k$ , dass die  $\frac{\partial F}{\partial x_k}$  alle Null sein müssen. Betrachte nun eine Differentialgleichung 1. Ordnung von der Form

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

Mit  $y' = \frac{dy}{dx}$  und durch multiplizieren mit dem Koordinatendifferential  $dx$  wird das zu

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

Das motiviert die Definition.

## 2.2.1 Exakte DGL

### Definition: Exakte DGL

Sei

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

eine DGL 1. Ordnung. Existiert eine Funktion  $F$  mit  $dF = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ , so heißt die DGL *exakt*.

Die Lösung  $y(x)$  der DGL ist dann implizit gegeben als Lösung der Gleichung  $F(x, y) = c$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  die Integrationskonstante ist.

Eine notwendige (und hinreichende) Bedingung für Exaktheit ist also die Existenz einer Funktion  $F(x, y)$  mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= g(x, y)\end{aligned}$$

Ist  $F$  zweimal stetig partiell differenzierbar auf einem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich (im einfachsten Fall ganz  $\mathbb{R}^2$ ), so gilt der Satz von Schwarz, nach dem beim zweimaligen partiellen Differenzieren die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle spielt, also  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ . Einsetzen der Bedingung liefert dann als hinreichende Bedingung für Exaktheit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

## Beispiel

Gegeben sei  $2xy + (x^2 + 2)y' = 0$ . Es ist also  $f(x, y) = 2xy$  und  $g(x, y) = x^2 + 2$ . Für die benötigten partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 2x\end{aligned}$$

Die DGL ist also exakt. Gesucht ist nun eine Funktion  $F$  mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 2xy \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x^2 + 2\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von  $2xy$  bezüglich  $x$  ist der Kandidat  $F_\Psi(x, y) = x^2y + \Psi(y)$ , wobei  $\Psi$  eine Funktion ist, die nur von  $y$  abhängt und statt der üblichen Integrationskonstante verwendet werden muss, da beim partiellen Differenzieren nach einer Variablen alle anderen Veränderlichen konstant gehalten werden. Der  $\Psi$ -Term fällt bei partieller Differentiation nach  $x$  weg. Partielle Differentiation nach  $y$  liefert

$$\frac{\partial F_\Psi}{\partial y}(x, y) = x^2 + \Psi'(y)$$

Vergleich mit der Forderung  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2$  liefert  $\Psi'(y) = 2$ , also  $\Psi(y) = 2y$ . Das gesuchte  $F$  ist dann  $F(x, y) = x^2y + 2y$ . Auflösen von  $F(x, y) = c$  nach  $y$  liefert

$$y(x) = \frac{c}{x^2 + 2}$$

Es ist zu beachten, dass  $y(x) = 0$  eine weitere Lösung der DGL ist. An dieser Stelle wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich diese DGL auch mit Trennung der Variablen lösen lässt und dies als zusätzliche Übung getan werden sollte.

## 2.2.2 Integrierende Faktoren

Ist eine gegebene DGL  $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$  nicht exakt, so gibt es vielleicht eine nicht-verschwindende Funktion  $M(x, y)$ , sodass die modifizierte (und äquivalente) DGL

$$M(x, y)f(x, y) + M(x, y)g(x, y)y' = 0$$

exakt ist. Damit dass so ist, muss nach der oben gefundenen hinreichenden Bedingung für die gemischten partiellen Ableitungen gelten

$$\frac{\partial(Mf)}{\partial y} = \frac{\partial(Mg)}{\partial x}$$

beziehungsweise äquivalent dazu

$$\frac{\partial M}{\partial y} f + M \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} g + M \frac{\partial g}{\partial x}$$

Das ist eine partielle DGL für  $M$ , die schlimmstenfalls noch schwieriger als die ursprüngliche DGL zu lösen ist. Da aber nur eine einzige Lösung benötigt wird, hilft das oft schon weiter. Ein häufig verwendeter Trick ist, eine Lösung  $M$  zu finden, die nur von einer Veränderlichen abhängt statt von zwei, also für die eine partielle Ableitung verschwindet.

### Beispiel

Gegeben sei die DGL  $y' + 3y + x^2 = 0$ . Hier ist Trennung der Variablen nicht möglich. Die DGL ist auch nicht exakt, da  $g(x, y) = 1$  konstant ist (und damit alle partiellen Abl. gleich Null) und  $f(x, y) = 3y + x^2$  nicht. Die DGL

$$f \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} g + M \frac{\partial g}{\partial x}$$

für den integrierenden Faktor  $M$  wird mit  $f$  und  $g$  zu

$$(3y + x^2) \frac{\partial M}{\partial y} + 3M = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Der komplizierte erste Term trägt nichts bei, falls es eine Lösung gibt mit  $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$ . Für diese muss gelten

$$M' = 3M$$

was zum Beispiel für  $M(x, y) = e^{3x}$  gilt. Es ist ein integrierender Faktor gefunden und die Lösung der DGL wird wie im Beispiel oben gefunden durch Lösen des Systems

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= e^{3x}(3y + x^2) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= e^{3x} \end{aligned}$$

## 2.3 Eine nützliche Transformation

Bei Differentialgleichungen erster Ordnung  $y' = F(x, y)$  kommt das Verfahren Trennung der Variablen immer dann zum Einsatz, wenn sich die Funktion  $F$  schreiben lässt als Produkt zweier Funktionen jeweils einer Veränderlichen, es also Funktionen  $f, g$  gibt, sodass  $F(x, y) = f(x)g(y)$ . Ist die rechte Seite jedoch als eine Summe gegeben, lässt sich das Verfahren scheinbar nicht anwenden. Dass dem nicht immer so ist, wird hier gezeigt.

**Satz:**

Sei  $y' = F(x, y)$  eine DGL erster Ordnung. Ist  $F(x, y) = f(ax + by + c)$ , für eine integrierbare Funktion  $f$  und reelle Zahlen  $a, b, c$ , so erlaubt die Substitution

$$g(x) = g(x, y(x)) = ax + by(x) + c$$

eine Trennung der Variablen in der DGL

$$g' = a + bf(g)$$

Ist  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{a+bf}$  mit Inverser  $\Phi^{-1}$ , und  $d \in \mathbb{R}$  eine Integrationskonstante, so ist die Lösung von  $y' = f(ax + by + c)$  gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{b} \left( \Phi^{-1}(x + d) - ax - c \right)$$

Die DGL  $y' = F(x, y)$  lässt sich in Differentialen (siehe 2.2) schreiben als  $dy = Fdx$ . Für das Differential der Funktion  $g(x, y) = ax + by + c$  gilt dann

$$\begin{aligned} dg &= a dx + b dy \\ &= a dx + b F dx \\ &= (a + bF) dx \\ &= (a + bf(g)) dx \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile  $F(x, y) = f(g(x, y)) = f(g)$  verwendet wurde. Teilen durch  $dx$  liefert die DGL

$$g' = a + bf(g)$$

und Trennung der Variablen

$$\frac{1}{a + bf(g)} dg = dx$$

Ist  $\Phi$  Stammfunktion des Terms auf der rechten Seite, so gilt  $\Phi(g) = x + d$ , mit einer Integrationskonstante  $d \in \mathbb{R}$ . Auflösen nach  $y$ , mit  $g = ax + by + c$  liefert die gesuchte Lösung.

**Beispiel**

Gegeben sei

$$y' = (x + y)^2$$

Es ist also  $f(g) = g^2$  und  $g = x + y$ , und die modifizierte DGL lautet

$$g' = 1 + g^2$$

Stammfunktion  $\Phi$  von  $\frac{1}{1+g^2}$  ist  $\Phi(g) = \arctan(g)$ . Es ist also  $\arctan(g) = x + d$ , mit einer Integrationskonstanten  $d \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt  $g = x + y = \tan(x + d)$ , also

$$y(x) = \tan(x + d) - x$$

Die Probe liefert

$$y'(x) = 1 + \tan^2(x + d) - 1 = \tan^2(x + d) = (y + x)^2$$

## 3 Woche 3: Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

### 3.1 Warm-Up

Markiere die richtigen Aussagen.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- ☐ Die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert punktweise, das heißt  $\lim_n f_n(x)$  existiert für alle  $x \in [a, b]$ .
- ☐ Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  stetige Funktionen sind, ist die Grenzfunktion stetig.
- ☐ Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

- ☐ Die Folge  $\{f_n\}$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $x \in [a, b]$  und für alle  $n \geq N$  gilt  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

#### 3.1.1 Kommentare zum Warm-Up

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- Die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert punktweise, das heißt  $\lim_n f_n(x)$  existiert für alle  $x \in [a, b]$ .

*Gegenbeispiel: Betrachte verschiedene konstante Funktionen, erzeuge Folge reeller Zahlen mit mehr als einem Häufungspunkt, zum Beispiel  $f_{2k}(x) = 1$ ,  $f_{2k+1}(x) = -1$  für alle  $x \in [a, b]$ .*

- Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  stetige Funktionen sind, ist die Grenzfunktion stetig.

*Dies gilt nur wenn die Konvergenz gleichmäßig ist.*

- Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

*Dies gilt ebenfalls nur wenn die Konvergenz gleichmäßig ist.*

- Die Folge  $\{f_n\}$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $x \in [a, b]$  und für alle  $n \geq N$  gilt  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

*Dies ist die Definition.*

### 3.1.2 Merktzettel für Aufgabe 1 Übung 3

In Hausaufgabe 1 soll gezeigt werden, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist. Die Definition von gleichmäßiger Konvergenz findet sich im (siehe 3.1.1). Bei allen Beweisen ist es dienlich, sich vorher eine Strategie zu überlegen, wie von den Voraussetzungen, also hier

- Gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge
- Stetigkeit der Funktionen

auf die zu zeigende Aussage, also

- Stetigkeit der Grenzfunktion

zu schließen ist.

Um die Stetigkeit auf ganz  $I$  zu zeigen, reicht Stetigkeit in einem beliebigen  $x \in I$  aus. Diese wird entweder mit dem Folgenkriterium oder dem  $\epsilon - \delta$ -Kriterium gezeigt. Das Folgenkriterium ist hier eine gute Wahl. Werden nun die Stichpunkte oben genauer auf Gemeinsamkeiten untersucht, lässt sich feststellen, dass sich alle Eigenschaften, die gegebenen und die gesuchte, als Betragsterme schreiben lassen. Damit ist eine Strategie klar. Es wird mit den üblichen Hilfsmitteln, wie Null Addieren und Dreiecksungleichung, operiert. Der Merktzettel:



### Merkzettel

Sei  $x \in I$  beliebig,  $\{x_k\}$  eine Folge mit  $x_k \rightarrow x$ .

Bekannt:

- $|f_n(x) - f(x)|$  wird beliebig klein wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $\{f_n\}$ .
- $|f_n(x_k) - f_n(x)|$  wird beliebig klein wegen der Stetigkeit der  $f_n$ .

Zu zeigen:

- $|f(x_k) - f(x)|$  wird beliebig klein.

Beliebig klein muss noch zu „kleiner als jedes vorgegebene  $\epsilon > 0$ “ decodiert werden.

### Vordruck zum Abschreiben

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  und  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $\{f_n\}$  konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist zu zeigen, dass  $f$  stetig ist. Sei  $x \in I$ , und  $\{x_k\}$  eine Folge mit  $x_k \rightarrow x$ . Die Funktion  $f$  ist stetig, wenn gilt, dass  $f(x_k) \rightarrow f(x)$ . Es ist also zu zeigen, dass ...

## 3.2 Gegenbeispiele Finden

Dass Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen stetiger Funktionen stetig sind, soll in Aufgabe 1 bewiesen werden. Punktweise Konvergenz reicht nicht aus. Dies wird gezeigt durch Angabe eines Gegenbeispiels. Wie lässt sich ein solches finden? Ein möglicher Gedankengang:

Benötigt wird eine Folge  $\{f_n\}$  stetiger Funktionen  $f_n$ , die punktweise aber nicht gleichmäßig gegen eine nicht stetige Grenzfunktion  $f$  konvergiert. Bei der Konstruktion dieser Folge wollen wir ausnutzen, dass Terme der Form  $nx$  für  $x = 0$  die Abhängigkeit der Folge von  $n$  „ausschalten“, die Folge also eine konstante Folge wird. Dies soll die Unstetigkeitsstelle der Grenzfunktion werden.

### Versuch 1

Die einfachste Wahl für die  $f_n$  ist dann  $f_n(x) = nx$ . Diese Funktionen sind für alle  $n$  stetig. Jedoch konvergiert die Folge nicht einmal punktweise, denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f_n(x) = nx$  ( $x$  ist jetzt fest!) eine unbeschränkte Folge reeller Zahlen.

Dieser erste Versuch zeigt, dass wir eine Funktionen benötigen, die für festes  $x$  konvergente Folgen reeller Zahlen liefern. Ein Bruch mit  $nx$  im Nenner funktioniert vielleicht.

## Versuch 2

Sei  $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ . Dann ist für jedes  $x \neq 0$  die Folge  $f_n(x) = \frac{1}{nx}$  eine Nullfolge. Doch in  $x = 0$ , wo wir die Unstetigkeitsstelle der Grenzfunktion erzeugen wollen, sind die  $f_n$  auch alle nicht stetig.

Die Nullfolgen für alle  $x$  sind schon nah dran. Finden wir eine Funktionenfolge, sodass  $nx$  im Nenner steht und dieser nicht Null werden kann, sodass die Stetigkeit erhalten bleibt, sind wir fertig. Da jedoch  $nx$  für negative  $x$  auch negativ wird, bringt uns der Ansatz  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$  nicht weiter. Was nicht negativ werden kann ist aber  $nx^2$ , und was keine Unstetigkeitsstelle hat, ist  $1 + nx^2$ .

## Versuch 3: Ein Gegenbeispiel

Sei  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ . Dann ist für jedes  $x \neq 0$  die Folge  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$  eine Nullfolge, und für  $x = 0$  gilt  $f_n(0) = 1$ , was gegen 1 konvergiert. Die Folge  $\{f_n\}$  konvergiert also punktweise gegen die in Null nicht stetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Gleichmäßige Konvergenz kann nicht vorliegen, da Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen stetiger Funktionen stetig sind.

Die Verwendung des Satzes zum Beweis der nicht-gleichmäßigen Konvergenz hat Stil und ist der Sinn von Beweisen solcher Sätze. Dass eben nicht jedes Mal alles "per Hand" nachgeprüft werden muss. Besonders neugierigen Augen sei dies hier trotzdem vorgeführt.

### 3.2.1 Beweis der nicht-gleichmäßigen Konvergenz ohne Verwendung des Satzes

Dieser Beweis besteht im Wesentlichen die Berechnung eines Supremums. Sei

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

die Folge punktweise konvergenter Funktionen mit Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Es ist zu zeigen, dass ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

Wir wählen also  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und berechnen das Supremum. Zunächst einmal gilt für den Betrags-Term

$$\left| \frac{1}{1 + nx^2} - f(x) \right| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1 + nx^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

da  $f(0) = 1$ . Das Supremum ist also echt größer Null. Es ist sogar gleich 1, da  $x$  beliebig klein werden kann (und  $n$  zwar beliebig, aber fest ist). Das Supremum wird nicht angenommen, ist also kein Maximum, jedoch ist jede obere Schranke des Terms  $\frac{1}{1+nx^2}$  größer gleich 1. Um das zu zeigen nehmen wir an, dass es eine Schranke  $0 < M < 1$  gibt, also  $\frac{1}{1+nx^2} \leq M$ . Heimliches Auflösen und Negieren der Ungleichung nach  $x$  verrät uns, dass die Schranke verletzt wird, wenn  $x$  so gewählt wird, dass  $x^2 < \frac{1-M}{nM}$  (Hier wird die Bedingung  $M < 1$  wichtig, sonst geht das nicht). Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} 1 + nx^2 &< 1 + n \left( \frac{1-M}{nM} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{M} - 1 \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

und damit  $\frac{1}{1+nx^2} > M$ , was ein Widerspruch ist. Dies war der formale Weg, zu zeigen, dass sich  $x$  "klein genug" wählen lässt, um jede kleinere Schranke als 1 zu verletzen. Das Supremum ist also für alle  $n$  gleich 1, kann damit insbesondere nicht wie für gleichmäßige Konvergenz erforderlich gegen Null konvergieren.

## 4 Woche 4: DGL's höherer Ordnung

### 4.1 Warm-Up

*Makiere die richtige Aussage*

Sei  $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ :

- ☐ Die DGL ist  $n$ -ter Ordnung.
- ☐ Die DGL ist linear.
- ☐ Falls  $x(t)$  eine Lösung der DGL ist, so ist  $x_i(t) = x^{(i-1)}(t)$  für  $i = 1, \dots, n-1$  Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= f(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

- ☐ Die DGL ist autonom.

- Falls die DGL autonom und  $x(t)$  eine Lösung ist, so ist auch  $x(t - t_0)$  eine Lösung für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ .
- Sei zusätzlich gefordert, dass  $x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ . Dann hat das AWP eine eindeutige Lösung.

## 4.2 DGLs höherer Ordnung und DGL-Systeme

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung,  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , lässt sich in ein System von  $n$  DGLs 1. Ordnung umwandeln, indem die Ableitungen  $y^{(k)}$  zu Koordinaten eines Vektorraums umgedeutet werden. Diese werden dann einmal abgeleitet, und die resultierenden DGLs erster Ordnung als Vektoren notiert werden, ähnlich wie bei Gleichungssystemen bekannt aus der linearen Algebra. Ein möglicher Weg ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

kompakt notiert  $y_k = y^{(k-1)}, k = 1, \dots, n$ . Dann folgt  $y'_k = y^{(k)} = y_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$  und für  $k = n$  ist  $y'_n = y^{(n)} = F(x, y_1, \dots, y_n)$ , das heißt in der Abbildungsvorschrift von  $F$  werden die Ableitungen durch die mit ihnen assoziierten Koordinaten ersetzt. Ausführlich

$$\begin{aligned} y'_1 &= y' = y_2 \\ y'_2 &= y'' = y_3 \\ y'_3 &= y''' = y_4 \\ &\vdots \\ y'_n &= y^{(n)} = F(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Vektoriell notiert

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ F(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite der Gleichung wird dabei als ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^n$  interpretiert. So erlauben zum Beispiel DGLs 2. Ordnung eine Skizzierung als Vektorfeld im  $\mathbb{R}^2$ .

## Beispiel

Die Beispiele <sup>4.2.1</sup> illustrieren, dass sich eine DGL höherer Ordnung  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  mit einer Matrix  $D_F$  identifizieren lässt, sofern die Abbildung  $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist. In diesem Fall ist  $F(x, \cdot)$  ein Zeilenvektor  $(a_1(x), \dots, a_n(x))$  mit von  $x$  abhängigen Komponenten  $a_k(x)$ , und es ist  $F(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n a_k(x)y_k$ . Ist die DGL autonom, also  $F$  nicht explizit von  $x$  abhängig, so sind die Funktionen  $a_k(x)$  konstant,  $a_k(x) = a_k$ , und  $F(x, y_1, \dots, y_n) = F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n a_k y_k$ . In diesem Fall heißt die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k y^{(k-1)}$$

lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Die vektorielle Form wird zu

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_k y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Ableitung des Vektors  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ist also nur eine lineare Transformation  $D_F \mathbf{y}$  des Vektors selbst. Der Spezialfall  $n = 1$  liefert die bekannte DGL  $y' = a \cdot y$ . Dies motiviert den *Exponential-Ansatz*

$$y_k = e^{\lambda x} v_k, k = 1, \dots, n,$$

mit  $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Damit wird die DGL  $\mathbf{y}' = D_F \mathbf{y}$  zu

$$\mathbf{y}' = (e^{\lambda x} v)' = \lambda e^{\lambda x} v = \lambda \mathbf{y} = D_F \mathbf{y}$$

und damit zu einer Eigenwertgleichung für die Matrix  $D_F$ .

## 4.3 Der Harmonische Oszillator

Der (eindimensionale) harmonische Oszillator wird beschrieben durch die allgemeine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, notiert als

$$m y'' + a y' + b y = 0$$

Umwandeln in ein System von 2 DGLs der Ordnung 1 erfordert umstellen nach  $y''$ . Da die DGL von der Ordnung 2 sein soll, muss  $m \neq 0$  sein, es darf also durch  $m$  geteilt werden. Dann ist

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

<sup>4.2.1</sup><http://www.youtube.com/watch?v=ouoWYhW-uec>

Die Bezeichnungen für die Koeffizienten stammen aus der Physik. Der  $y'$ -Term ist ein Dämpfungsterm, die Konstante  $\omega$  eine Frequenz. Dass diese als Quadrat auftaucht und der Dämpfungsterm mit 2 multipliziert wird, hat rechnerische Vorteile.

Umschreiben in ein DGL-System mit  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  und  $y'' = -\omega^2 y - 2\delta y'$  liefert

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 y_1 - 2\delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D\mathbf{y}$$

Die Eigenwerte von  $D$  sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P_D(\lambda)$  von  $D$ .

$$P_D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

Vor der Lösung dieser einfachen quadratischen Gleichung noch ein paar allgemeine Gedanken zu Polynomen 2. Grades und den möglichen Ausgängen. In Abhängigkeit von den Werten für  $\delta$  und  $\omega^2$  gibt es drei Fälle, die für die Eigenwerte eintreten können. Entweder es gibt zwei verschiedene reelle Eigenwerte. Oder es gibt einen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2 (was dann schief gehen kann, steht bei 4.4). Oder es gibt zwei komplexe Eigenwerte, die komplex konjugiert zueinander sind. Für Polynome mit reellen Koeffizienten gilt nämlich, dass für jede komplexe Nullstelle  $z$  auch die komplex konjugierte Zahl  $\bar{z}$  eine Nullstelle ist. Daher kann es für solche Polynome zweiten Grades nicht vorkommen, dass eine Nullstelle reell und die zweite Nullstelle komplex ist.

Zurück zum eigentlichen Problem:

Für die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  der DGL  $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$  gilt

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

Die drei oben geschilderten Fälle sind nun äquivalent zu den drei Fällen, die wegen des Wurzelterms unterschieden werden müssen.

Fall 1.  $\delta^2 > \omega^2$  Dies ist der Fall zweier verschiedener reeller Nullstellen. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + c_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} \\ &= e^{-\delta x} (c_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2}x} + c_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2}x}) \end{aligned}$$

Da  $\sqrt{\delta^2 - \omega^2} < \delta$ , geht die Lösung exponentiell schnell gegen Null. Daher heißt dieser Fall *Kriechfall*.

Fall 2.  $\delta^2 = \omega^2$  Dies ist der Fall der doppelten Nullstelle, der sogenannte *aperiodische Grenzfall*. Das soll in Hausaufgabe 2 genauer untersucht werden.

Fall 3.  $\delta^2 < \omega^2$  Dies ist der Fall des Paares komplex konjugierter Nullstellen  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ . Mit  $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$  schreibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(-\delta + i\omega_d)x} + c_2 e^{(-\delta - i\omega_d)x} \\ &= e^{-\delta x} (c_1 e^{i\omega_d x} + c_2 e^{-i\omega_d x}) \end{aligned}$$

Doch **Achtung!** Diese Lösung ist komplex-wertig, die DGL jedoch, wie alle ihre Lösungen reell-wertig. Um die Lösung als Linearkombination reeller Partikulärlösungen zu schreiben, werden die Real- und Imaginärteile der komplexen Partikulärlösungen  $y_{\pm} = e^{(-\delta \pm i\omega_d)x}$  betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} \Re(y_+) &= e^{-\delta x} \Re(e^{i\omega_d x}) = e^{-\delta x} \cos(\omega_d x) \\ \Im(y_+) &= e^{-\delta x} \sin(\omega_d x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re(y_-) &= e^{-\delta x} \Re(e^{-i\omega_d x}) = e^{-\delta x} \cos(-\omega_d x) = \Re(y_+) \\ \Im(y_-) &= e^{-\delta x} \sin(-\omega_d x) = -\Im(y_+) \end{aligned}$$

Die Real- und Imaginärteile der komplexen Lösungen sind nicht nur nicht linear unabhängig, sondern sogar, bis auf Vorzeichen gleich. Dass sie die DGL ebenfalls lösen sei freiwillige Hausaufgabe. Da Sinus und Cosinus linear unabhängig sind, ist die allgemeine Lösung also

$$y(x) = e^{-\delta x} (c_1 \cos(\omega_d x) + c_2 \sin(\omega_d x))$$

## 4.4 Wie der Exponentialansatz schief geht

Betrachte die DGL

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Der Exponentialansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  liefert die (korrekte!) charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Die binomische Formel liefert die doppelte Nullstelle  $\lambda = -1$ . Die allgemeine Lösung der DGL ist nach dem Exponentialansatz dann

$$y(x) = ce^{-x}$$

Das kann aber nicht sein. Da die DGL von der Ordnung 2 ist, müssen zwei unabhängige Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung auftauchen. Der Versuch  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$  ist nicht ausreichend, denn  $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} = (c_1 + c_2) e^{-x} = ce^{-x}$ . Die beiden vermeintlichen Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  können zu einer Konstante zusammengefasst werden.

Das Zusammenfassen von Integrationskonstanten zu einer einzigen Konstante ist immer dann möglich, wenn linear abhängige Partikulärlösungen linear kombiniert werden. Die Lösung  $y(x) = ce^{-x}$  ist lediglich eine spezielle Lösung, eine zweite, linear unabhängige, muss noch gefunden werden.

## 5 Woche 5: DGL-Systeme

### 5.1 Warm-Up Woche 5

*Markiere die richtigen Aussagen.*

Sei  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix.

- ☐ Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert genau dann, wenn  $M$  diagonalisierbar ist.
- ☐ Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert.
- ☐ Das AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  hat eine eindeutige Lösung.
- ☐ Die Lösung des AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  ist  $x(t) = e^{tM}x_0$ .
- ☐ Falls alle Einträge in  $M$  reell sind, so hat  $M$  nur reelle Eigenwerte.
- ☐ Wenn  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann treten die komplexen Eigenwerte nur in komplex konjugierten Paaren auf.

### 5.2 Kommentare zum Warm-Up Woche 5

#### 5.2.1 DGL-Systeme

Sei  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix.

- Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert genau dann, wenn  $M$  diagonalisierbar ist.

*Falsch. Ein Gegenbeispiel ist zum Beispiel in Hausaufgabe 1 zu zeigen.*

- Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert.



*Richtig.* Sei  $\|\cdot\|$  eine Matrix-Norm auf  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Es ist zu beachten, dass eine Matrix-Norm immer submultiplikativ ist, das heißt für alle  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ . Für den Reihenrest gilt dann

$$\begin{aligned} \left\| e^M - \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\| \frac{M^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|M\|^k}{k!} \end{aligned}$$

was der Reihenrest der reellen Exponentialreihe zum Wert  $\|M\|$  ist, der gegen Null geht.

- Das AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  hat eine eindeutige Lösung.

Das folgt aus der Linearität von  $M$  und dem **Satz von Picard-Lindelöf** 5.2.1.1.

- Die Lösung des AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  ist  $x(t) = e^{tM}x_0$ .

*Richtig.* Verifizieren durch Einsetzen.

- Falls alle Einträge in  $M$  reell sind, so hat  $M$  nur reelle Eigenwerte.

*Falsch.* Ein Gegenbeispiel  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sollte jeder selbstständig konstruieren können.

- Wenn  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann treten die komplexen Eigenwerte nur in komplex konjugierten Paaren auf.

Ist  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so ist das charakteristische Polynom  $P_M(\lambda)$  von  $M$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dass für ein Polynom  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  mit  $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n$  gilt, dass aus  $p(z_0) = 0$  folgt, dass  $p(\bar{z}_0) = 0$ , folgt aus den Rechenregeln für die komplexe Konjugation und aus  $\overline{a_k} = a_k$ .

### 5.2.1.1 Satz von Picard-Lindelöf

#### **Satz von Picard-Lindelöf**

Wenn  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \partial_2 f, \dots, \partial_{n+2} f &: U \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

stetig sind, dann gibt es zu jedem  $(t_0, \vec{x}_0) \in U$  ein  $h > 0$ , sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= f(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0 \end{aligned}$$

auf dem Intervall  $(t_0 - h, t_0 + h)$  genau eine Lösung hat.

## 5.3 Matrixexponentiale

Das Matrixexponential  $e^M$  einer quadratischen Matrix  $M$  ist von Bedeutung für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, denn die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{x} = Mx, x(t_0) = x_0$  ist gegeben durch  $x(t) = e^{tM}x_0$ . Das Exponential einer Matrix ist definiert durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

**Definition: Matrixexponential** Sei  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann ist das *Matrixexponential*  $e^M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definiert durch den Grenzwert der Reihe

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Diese Reihe konvergiert für alle quadratischen Matrizen. Einen Beweis dafür gibt es in den Kommentaren zum Warm-Up Woche 5 (siehe 5.2).

### Beispiel

Für Diagonalmatrizen  $D$  ist das Exponential  $e^D$  ebenfalls eine Diagonalmatrix, denn es ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Beispielklasse für Matrixexponentiale bilden die nilpotenten Matrizen. Da für eine nilpotente Matrix  $A$  mit Nilpotenzgrad  $n$  gilt, dass  $A^k = 0$  für alle  $k \geq n$ , bricht die Exponentialreihe ab und wird zu einer einfachen Summe.

**Definition: Nilpotente Matrix** Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt *nilpotent*, wenn ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $A^k = 0$ . Die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A^k = 0$  heißt *Nilpotenzgrad* von  $A$

Ist  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $k$ , so ist  $k \leq n$ .

### Beispiel

Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}$  nilpotent. Dann ist der Nilpotenzgrad gleich 2, also  $A^2 = 0$ . Daher ist

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^1 \frac{A^k}{k!} = E + A$$

wobei  $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Einheitsmatrix ist.

Zur Berechnung der Matrixexponentiale kann es also nützlich sein, Matrizen zu zerlegen in Summen von Matrizen, die einfachere Exponentiale besitzen. Dabei ist aber eine wichtige Rechenregel zu beachten:

### Matrixexponential einer Summe

Seien  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , mit  $AB = BA$ . Dann gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Ohne die Vertauschbarkeit der beiden beteiligten Matrizen gilt dies nicht! Ist natürlich eine der Matrizen diagonal, so lässt sich der Satz anwenden. Diagonale Matrizen vertauschen mit allen Matrizen.

## 5.4 Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Lineare Unabhängigkeit von Funktionen ist ein zentraler Begriff der Funktionalanalysis und Theorie der linearen Differentialgleichungen. Der Lösungsraum eines DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten ist nämlich immer ein Vektorraum, die allgemeine Lösung eine Linearkombination von Basisvektoren, die nun Funktionen sind und keine  $n$ -Tupel von Zahlen mehr.

### Definition: Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Sei  $I$  ein offenes Intervall. Die Funktionen  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißen linear unabhängig, falls aus  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$  folgt, dass  $\lambda_k = 0, k = 1, \dots, n$ .

Es ist zu beachten, dass die linke Seite der Gleichung  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$  nicht die Zahl 0 ist, sondern der Nullvektor, im Allgemeinen die Funktion, die identisch Null ist. Aber wie in der Linearen Algebra des  $\mathbb{R}^n$  sind Funktionen, die sich als Linearkombination anderer Funktionen schreiben lassen, linear abhängig. Denn sind nicht alle Koeffizienten  $\lambda_k$  gleich Null, so lässt sich die Gleichung  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$  nach einer der beteiligten Funktionen  $f_j$  auflösen.

## Beispiel

Die Funktionen  $f(x) = \cos(x)$  und  $g(x) = \sin(x)$  sind linear unabhängig. Die Gleichung  $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$ , f.a.  $x \in \mathbb{R}$  ist äquivalent zu  $\lambda \sin(x) = -\mu \cos(x)$  und für alle  $x \neq \frac{k}{2} + \pi, k \in \mathbb{Z}$  ist dann  $\lambda \tan(x) = -\mu$  woraus folgt, dass  $\lambda = 0$  und damit  $\mu = 0$  sein muss, da der Tangens nicht konstant ist.

Es ist zu beachten, dass im Fall  $x = \frac{k}{2} + \pi, k \in \mathbb{Z}$  nur folgt  $\lambda = 0$  und  $\mu$  beliebig sein kann, da der Cosinus verschwindet. Doch um lineare Unabhängigkeit zu zeigen, reicht es ein  $x$  aus dem Definitionsbereich zu finden, für das aus "Linearkombination lgeich Null" folgt, dass die Koeffizienten Null sein müssen. Ein wichtiges Kriterium ist der Wronski-Test.

### Wronski-Test

Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{C}$  seien  $(n-1)$ -mal differenzierbare Funktionen.

Falls die Determinante der *Wronski-Matrix*  $W_t = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  für ein  $t_0$  ungleich Null ist, so sind die  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig.

Ist die Determinante nämlich für ein  $t_0$  ungleich Null, so ist  $W_{t_0}$  bijektiv und damit folgt aus  $W_{t_0} v = 0$  sofort  $v = 0$ . Sei  $v \in \mathbb{C}^n, v_i = \lambda_i$ , dann folgt aus

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \dots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) & \dots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t_0) \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'(t_0) \\ \ddots \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

sofort  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Damit sind die  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig.

## Beispiel

Betrachte wieder Sinus und Cosinus. Die Wronski-Determinante ist  $\begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = -\sin^2(x) - \cos^2(x) = -1$  also insbesondere ungleich Null für alle  $x$ .

\*

Beispiel Betrachte  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t, g(t) = t^2$ . Die Wronski-Determinante ist  $\begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$  also ungleich Null für alle  $x \neq 0$ . Die beiden Monome sind linear unabhängig. Desweiteren lässt sich zeigen, dass jede Basis des Raums  $\mathbb{P}_{\leq n}$  der Polynome vom Grad kleiner gleich  $n$ , linear unabhängig im Funktionensinne ist.

Die Umkehrung des Wronski-Tests gilt im Allgemeinen nicht, also aus linearer Unabhängigkeit folgt nicht die Invertierbarkeit der Wronski-Matrix.

## Beispiel

Gegenbeispiele finden sich zum Beispiel für Funktionen, die auf disjunkten Intervallen verschwinden, also zum Beispiel  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x^2 & , -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & , 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 0 & , -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind differenzierbar und linear unabhängig, denn

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \begin{cases} \lambda x^2 & , -1 \leq x \leq 0 \\ \mu x^2 & , 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

was nur dann Null für alle  $x$  wird (die Nullfunktion eben!), wenn  $\lambda = \mu = 0$ .

Die Wronski-Matrix jedoch hat für jede Wahl von  $x$  eine Spalte, die Null wird, ist also nicht invertierbar.

# 6 Woche 6: Inhomogene DGL's

## 6.1 Warm-Up

Markiere die richtigen Aussagen:

Seien  $a_{i,j}, b_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen für  $i, j, k = 1, \dots, n$  und  $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j}$  und  $b(t) = (b_k(t))_k$ . Betrachte das AWP  $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ ,  $x(0) = x_0$ .

- ☐ Für jedes  $x_0$  hat das AWP genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.
- ☐ Für jedes  $x_0$  hat das AWP höchstens eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.
- ☐ Falls  $x_1, \dots, x_n$  auf  $I$  definierte Lösungen des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  sind, dann sind die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  für alle  $t \in I$  linear unabhängig.
- ☐ Falls  $x_1, \dots, x_n$  auf  $I$  definierte Lösungen des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  sind, dann existiert  $t \in I$  sodass die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig sind.
- ☐ Seien  $x_H$  und  $x_P$  Lösungen des homogenen bzw. des inhomogenen Systems. Dann ist  $x_H + x_P$  eine Lösung des inhomogenen Systems.
- ☐ Seien  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = b(t)$$

Dann ist  $\sum_i c_i(t)x_i(t)$  eine Lösung des inhomogenen Systems.

## 6.2 Inhomogene Differentialgleichungen

Im folgenden werden nur lineare Differentialgleichungen betrachtet. Für diese hat die Lösungsmenge immer eine lineare Struktur ähnlich den linearen Gleichungssystemen. Die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen Gleichung ist gegeben durch eine Linearkombination von Basisvektoren des Lösungsraums. Die allgemeine Lösung  $y$  der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch die Summe aus einer Partikulärlösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung  $y_h$  der homogenen Gleichung,  $y = y_p + y_h$ .

## 6.3 Variation der Konstanten

Ist  $y_1, \dots, y_n$  Lösungsbasis der linearen DGL  $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$ , so ist die allgemeine Lösung gegeben durch  $y_h = \sum_{k=1}^n c_k y_k$ , mit Integrationskonstanten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Wird eine Inhomogenität  $b$  eingeschaltet, wird eine Partikulärlösung  $y_p$  von  $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = b(x)$  benötigt.

Der Idee von Variation der Konstanten liegt nun zu Grunde, dass der Ansatz  $y_p(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x)$  mit Koeffizientenfunktionen  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  eine Partikulärlösung liefert, falls sich die  $c_k(x)$  und deren Ableitungen nach Einsetzen in die DGL genau zu  $b$  "kompensieren".

### Beispiel

Die Idee wird klarer für den einfachsten nicht-trivialen Fall  $n = 1$ . Die DGL hat dann die Form  $y' + a(x)y = b(x)$ . Die Lösungsbasis besteht aus einem Element  $y$ , die allgemeine Lösung  $y_h$  der homogenen DGL ist von der Form  $y_h = cy$ . Um eine Partikulärlösung mittels Variation der Konstanten zu erhalten, wird die Konstante  $c$  durch eine Funktion  $c(x)$  ersetzt, und der Ansatz  $y_p(x) = c(x)y(x)$  in die inhomogene DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_p' + a(x)y_p &= (c(x)y(x))' + a(x)c(x)y(x) \\ &= c'(x)y(x) + c(x)y'(x) + a(x)c(x)y(x) \\ &= c'(x)y(x) + c(x)\underbrace{(y' + ay)}_{=0} \\ &= b(x) \end{aligned}$$

Der Ansatz  $y_p = cy$  ist also genau dann Lösung, wenn  $c'y = b$ . Dies lässt sich für alle  $x$  mit  $y(x) \neq 0$  nach  $c'$  auflösen und integrieren.

Das so gefundene Prinzip lässt sich auf beliebige Ordnung verallgemeinern und mit Hilfe der Umwandlung in ein DGL-System beweisen.

**Satz: Variation der Konstanten** Sei  $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = b(x)$  eine lineare DGL mit Inhomogenität  $b$ ,  $y_1, \dots, y_n$  eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung. Notiere

$$\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}, \quad W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Ist  $\vec{c}$  Lösung der Gleichung  $W\vec{c}' = \vec{b}$ , so ist  $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$  eine Partikulärlösung der DGL.

Für den Beweis wird  $y_p$  einfach eingesetzt. Es ist zu beachten, dass für jede Lösungsbasis  $y_1, \dots, y_n$  die Wronski-Matrix  $W$  invertierbar ist. Daher ist  $\vec{c}' = W^{-1}\vec{b}$ , also  $c_k(x)$  gegeben durch eine Stammfunktion der  $k$ -ten Komponente von  $W^{-1}\vec{b}$ . Da  $\vec{b}$  nur in der letzten Komponente von Null verschieden ist, ist  $W^{-1}\vec{b}$  gleich  $b$  mal der letzten Spalte von  $W^{-1}$ .

## Beispiel

Betrachte die DGL

$$y'' + 2y' + y = e^x + xe^x$$

Die Lösungsbasis des homogenen Problems ist gegeben durch die Funktionen  $y_1(x) = e^{-x}$ ,  $y_2(x) = xe^{-x}$ , da  $\lambda = -1$  doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Die Wronski-Matrix ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$W^{-1}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte davon multipliziert mit  $b(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$  liefert für die Variation der Konstanten

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(1+x)e^{2x} \\ 1+xe^{2x} \end{pmatrix}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2e^{2x} \\ \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} \end{pmatrix}$$

Damit ist die gesuchte Partikulärlösung  $y_p = c_1y_1 + c_2y_2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{1}{2}x^2e^{2x}e^{-x} + \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}xe^{-x} \\ &= \frac{1}{4}xe^x \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung  $y = y_p + y_h$  durch

$$y = \frac{1}{4}xe^x + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

mit Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 6.4 Inhomogene DGLs - Ansatz vom Typ der Rechten Seite

Im Beispiel 6.3 zum Verfahren der Variation der Konstanten wird eine Partikulärlösung gefunden, die aus nur einem Term der Inhomogenität selbst besteht. Wäre es möglich gewesen, diese zu raten? Im Fall von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also den *linearen autonomen Systemen*, ist das systematisch möglich. Vorausgesetzt natürlich, die Inhomogenität besitzt keinen Summanden, der Partikulärlösung des homogenen Problems ist.

Gibt es eine Partikulärlösung, die Terme ähnlich der Inhomogenität beinhaltet, entstehen beim Einsetzen des Ansatzes in die DGL durch das Ableiten neue Terme, die vom Ansatz "kompensiert" werden müssen.



## Beispiel

Dass Ansatz vom Typ der rechten Seite nicht heißt Ansatz gleich der Inhomogenität, sondern schon simple Beispiele. Betrachte

$$y' + y = \sin x$$

Der Ansatz  $y_A(x) = \sin x$ , also genau der Inhomogenität, liefert einen Widerspruch,  $y_A$  kann also keine Lösung sein (außer natürlich auf der Nullstellenmenge des Cosinus, aber wir suchen Lösungen, die mindestens auf einem Intervall definiert sind). Der Ansatz  $y_A(x) = \sin x + \cos x$  liefert

$$y'_A + y_A = \cos x - \sin x + \sin x + \cos x = 2 \cos x$$

Die "richtigen" Terme  $\sin x$  heben sich auf. Damit das nicht geschieht, wird eine Linearkombination  $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$  angesetzt, mit zwei noch zu bestimmenden Unbekannten  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} y'_p + y_p &= a \cos x - b \sin x + a \sin x + b \cos x \\ &= (a - b) \sin x + (a + b) \cos x \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich dieser rechten Seite mit der rechten Seite der DGL liefert ein (lineares!) Gleichungssystem für  $a$  und  $b$ .

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

und damit  $a = -b = 1/2$ . Es ist also

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

eine Partikulärlösung.

Dass es im Allgemeinen nicht reicht, nur die Inhomogenität als Partikulärlösung anzusetzen, ist jetzt klar. Dass mit dem Sinus der Cosinus in den Ansatz muss, weist darauf hin, dass die Ableitungen der Funktionen auf der rechten Seite ebenfalls eine Rolle spielen. Sie spielen die Kompensatoren für die neuen Terme, die beim Einsetzen in die DGL entstehen. Reichen die ersten Ableitungen? Wenn nein, wie viele Ableitungen müssen in den Ansatz, damit er zum Erfolg führt? Auch diese Fragen lassen sich durch ein simples Beispiel klären.

## Beispiel

Betrachte

$$y' + y = x^3$$

Der Ansatz  $y_p = ax^3$  führt ins Nichts. Der Ansatz  $y_p = ax^3 + bx^2$  ebenso:

$$\begin{aligned} (ax^3 + bx^2)' + ax^3 + bx^2 &= 3ax^2 + 2bx + ax^3 + bx^2 \\ &= ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx \end{aligned}$$

mit dem resultierenden, nicht lösbaeren Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a &= 1 \\3a + b &= 0 \\b &= 0\end{aligned}$$

Setzen wir einfach gleich mit einer Linearkombination *aller* Ableitungen an,  $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}(ax^3 + bx^2 + cx + d)' + ax^3 + bx^2 + cx + d &= 3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx + d \\&= ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c + d\end{aligned}$$

mit GLS

$$\begin{aligned}a &= 1 \\3a + b &= 0 \\2b + c &= 0 \\c + d &= 0\end{aligned}$$

und Lösungen  $a = 1, b = -3, c = 6, d = -6$ . Die Partikulärlösung vom Typ der rechten Seite ist also

$$y_p = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$$

Im Allgemeinen sind also alle Ableitungen, die zu linear unabhängigen Termen führen, nötig, um den Ansatz vom Typ der rechten Seite zum Erfolg zu führen. Naheliegend ist der Ansatz vom Typ der rechten Seite besonders bei Inhomogenitäten, die nur wenige linear unabhängige Ableitungen haben, also Exponentialfunktion, trigonometrische und Hyperbelfunktionen.

# 7 Woche 7: Variationsrechnung

## 7.1 Warm Up

Markiere die richtigen Aussagen.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $C^2([t_0, t_1], U)$  die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von  $[t_0, t_1] \rightarrow U$ . Sei  $S : C^2([t_0, t_1], U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ , wobei  $L : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  genügend oft diffbar. Sei  $x : [t_0, t_1] \rightarrow U$  eine zweimal stetig diffbare Funktion.

- ☐  $S$  ist ein Funktional.
- ☐ Die Funktion  $L$  ist eine Lagrange-Funktion.
- ☐  $x$  heißt kritische Kurve bezüglich  $S$  bei Variation mit festgehaltenen Endpunkten, falls für alle Funktionen  $h \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  mit  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  gilt  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} S[x + \epsilon h] = 0$
- ☐  $x \in C^2([t_0, t_1], U)$
- ☐ Sei  $x$  eine Funktion, die  $S$  minimiert. Dann gilt  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
- ☐ Sei  $x$  eine Funktion, für die gilt  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ . Dann wird  $S$  durch  $x$  minimiert.
- ☐ Für  $x$  gilt  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} S[x + \epsilon h] = 0$  für alle  $h \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  mit  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  genau dann, wenn  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ .

## 7.2 Die Euler-Lagrange Gleichung

Beim Thema Variationsrechnung beschränken wir uns auf die Euler-Lagrange Gleichung  $\delta S = 0$  für Funktionale der Form  $S = \int_a^b L(x, \dot{x}, t) dt$ , wobei die  $x$  Kurven im  $\mathbb{R}^n$  sind und die *Lagrange-Funktion*  $L$  ein differenzierbares Funktional auf der Menge der Orte, der Geschwindigkeiten und der Zeit. Es sei  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  eine Lagrange-Funktion. Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen für  $L$ ?

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Die beiden Antworten unterscheiden sich nur um die Stelle der Zeitableitung. Die richtige Antwort lässt sich durch eine physikalische Einheitenbetrachtung erschließen. Die Lagrange-Funktion wird jeweils partiell nach den Koordinaten  $q_i, \dot{q}_i$  des Phasenraums differenziert. Nach dem Ort  $q_i$  abzuleiten heißt die physikalische Einheit (hier: Energie) durch Meter zu teilen. Nach der Geschwindigkeit  $\dot{q}_i$  abzuleiten heißt, durch Meter pro Sekunde zu teilen, also die resultierende Einheit ist Energie mal Sekunde durch Meter. Ableiten nach der Geschwindigkeit liefert also an Einheit Sekunde zu viel. Daher muss dieser Term noch durch Sekunde geteilt werden, also nach der Zeit abgeleitet.

### 7.2.1 Eine geschwinde Herleitung

Wird für die Variation  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}L(x + \epsilon h, \dot{x} + \epsilon \dot{h})$  eines Funktionals  $L$  die Schreibweise  $\delta L$  eingeführt, so lässt sich die ausgeführte Variation schreiben als ein Differential. Dies verkürzt die Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung und lässt sie sich so leichter merken.

#### Beispiel

Es bezeichne  $C_0^2[0, T] = \{x \in C^2[0, T] \mid x(0) = x(T) = 0\}$ . Betrachte das Funktional

$$J : C_0^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(x) = \int_0^T (x^2 + k\dot{x}^2 + tx) dt$$

Mit der Lagrange-Funktion  $L(x, \dot{x}, t) = x^2 + k\dot{x}^2 + tx$  lautet die Lagrange Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial (x^2 + k\dot{x}^2 + tx)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (x^2 + k\dot{x}^2 + tx)}{\partial x} \\ &= \frac{d}{dt} 2k\dot{x} - (2x + t) \\ &= 2k\ddot{x} - 2x - t = 0 \end{aligned}$$

Es ist also  $k\ddot{x} - x = t/2$  zu lösen. Der homogene Teil der DGL ist ein harmonischer Oszillator mit Eigenwerten  $\pm 1/k$ . Eine Partikulärlösung des inhomogenen Problem liefert ein Ansatz vom Typ der rechten Seite, oder einfach ablesen,  $y_p = -t/2$ . Es sind nun nur noch die Integrationskonstanten aus den Bedingungen  $x(0) = x(T) = 0$  zu bestimmen.

## 8 Woche 8: Mehrdimensionale Integration

### 8.1 Warm-Up

*Markiere die richtigen Aussagen.*

Sei  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- ☐ Wenn  $f$  beschränkt ist, ist  $f$  Riemann-integrierbar.
- ☐ Wenn  $f$  nicht beschränkt ist, ist  $f$  nicht Riemann-integrierbar.
- ☐ Wenn  $f$  stetig ist, dann ist  $f$  Riemann-integrierbar auf  $R$ .
- ☐ Wenn  $f$  nicht stetig ist, dann ist  $f$  nicht Riemann-integrierbar.
- ☐ Wenn  $f$  beschränkt ist und höchstes in endlich vielen Punkten unstetig ist, dann ist  $f$  auf  $R$  Riemann-integrierbar.
- ☐ Die Funktion  $f$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $f$  auf  $R$  beschränkt ist und für alle  $\epsilon > 0$  eine Unterteilung  $(x_j)_j, (y_k)_k$  von  $R$  existiert, so dass  $O(f, (x_j)_j, (y_k)_k) - U(f, (x_j)_j, (y_k)_k) < \epsilon$ .

## 8.2 Mehrdimensionale Integration

Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher wird analog zum eindimensionalen Fall definiert. Zu jedem vorgegebenen Fehler  $\epsilon > 0$  soll es eine Unterteilung des Integrationsbereiches der Feinheit  $\delta > 0$  geben, sodass Ober- und Untersumme der Funktion zu dieser Unterteilung um nicht mehr als  $\epsilon$  voneinander abweichen.

### 8.2.1 Rechtecke als Integrationsbereiche

Über Rechtecke wird dann einfach nacheinander „eindimensional“ integriert, mit den anderen Veränderlichen festgehalten, ähnlich wie bei der partiellen Ableitung.

**Satz:**

Sei  $R = [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, und sei für jedes  $y \in [c, d]$  die Funktion

$$f(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, y)$$

auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar. Dann ist die Funktion

$$J : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

auf  $[c, d]$  Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d J(y) dy$$

### Beispiel

Da für stetige Funktionen auch alle Einschränkungen stetig sind, hängt der Wert des Integrals nicht von der Reihenfolge der Integration ab. Gesucht ist der Wert des Integrals von  $f(x, y) = \cos(x + y)$  über dem Rechteck  $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ . Es ist

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{\pi/2} \cos(x + y) dx \right) dy \\&= \int_0^\pi \left( \sin(x + y) \Big|_0^{\pi/2} \right) dy \\&= \int_0^\pi (\cos(y) - \sin(y)) dy \\&= \sin(y) \Big|_0^\pi + \cos(y) \Big|_0^\pi \\&= 0 - 2 = -2\end{aligned}$$

Wird die Integrationsreihenfolge vertauscht, ergibt sich analog

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) dy \right) dx \\&= \int_0^{\pi/2} \left( \sin(x + y) \Big|_0^\pi \right) dx \\&= \int_0^{\pi/2} (-2 \sin(x)) dx \\&= 2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} \\&= 0 - 2 = -2\end{aligned}$$

## 8.3 Funktionsgraphen als Ränder

Für Integrationsbereiche, die kein Rechteck sind, sondern durch Funktionen berandet werden, ist die Integrationsreihenfolge wichtig.

**satz**

Seien  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen mit  $\alpha \leq \beta$ . Ist

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

so gilt für das Integral einer integrierbaren Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  über  $B$

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Beispiel**

Der Term  $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$  in Klammern beschreibt für festes  $x$  die Stammfunktion der Abbildung  $y \mapsto f(x, y)$ , in den Grenzen  $\alpha(x)$  und  $\beta(x)$ .

Seien  $a, b > 0$ . Gesucht ist der Schwerpunkt<sup>8.3.1</sup>  $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$  der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq b, y^2 \leq ax, y \geq 0\}$$

also die drei Integrale

$$\begin{aligned} A(M) &= \iint_M dx dy \\ x_s &= \frac{1}{A(M)} \iint_M x dx dy \\ y_s &= \frac{1}{A(M)} \iint_M y dx dy \end{aligned}$$

Die Menge  $M$  ist in der Vertikalen durch die Geraden  $x = 0$  und  $x = b$  berandet. Die horizontalen Ränder werden beschrieben durch die Ränder des Bereiches definiert durch  $y^2 \leq ax$  und  $y \geq 0$ . Aufgelöst nach  $y$  also  $0 \leq y \leq \sqrt{ax}$ . Es ist also  $\alpha(x) = 0$  und  $\beta(x) = \sqrt{ax}$ , also

<sup>8.3.1</sup>Sei  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine Fläche mit Flächeninhalt  $A(F) = \iint_F dx dy \neq 0$ . Der Schwerpunkt  $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist definiert durch  $x_s = \frac{1}{A(F)} \iint_F x dx dy$  und  $y_s = \frac{1}{A(F)} \iint_F y dx dy$

$$\begin{aligned}
A(M) &= \int_0^b \left( \int_0^{\sqrt{ax}} dy \right) dx = \int_0^b \left( y \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx = \int_0^b \sqrt{ax} dx = \frac{2}{3} \sqrt{ab} b \\
x_s &= \frac{3}{2\sqrt{abb}} \int_0^b \left( \int_0^{\sqrt{ax}} x dy \right) dx = \frac{3}{2\sqrt{abb}} \int_0^b x \left( \int_0^{\sqrt{ax}} dy \right) dx \\
&= \frac{3}{2\sqrt{bb}} \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{3}{5} b \\
y_s &= \frac{3}{2\sqrt{abb}} \int_0^b \left( \int_0^{\sqrt{ax}} y dy \right) dx = \frac{3}{2\sqrt{abb}} \int_0^b \left( \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx \\
&= \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{bb}} \int_0^b x dx = \frac{3}{8} \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von  $M$  ist also

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} b \\ \frac{3}{8} \sqrt{ab} \end{pmatrix}$$

### Für drei Variablen analog

Sei  $K$  der Durchdringungskörper der beiden Zylinder im  $\mathbb{R}^3$ , definiert durch

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad x^2 + z^2 \leq 1$$

Um das Volumen von  $K$  zu berechnen, müssen die Grenzfunktionen, die das Integrationsgebiet beranden, angegeben werden. Für die Ungleichungen gilt

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 \leq 1 &\iff -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\
x^2 + z^2 \leq 1 &\iff -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

also ist

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

und damit das Volumen  $V(K)$  von  $K$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iiint_K dx dy dz = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \right) dy \right) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \\
&= 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 4 \left( x \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 \right) \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$



## 8.4 Jordan Nullmengen

Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ , die sich von endlich vielen Rechtecken mit beliebig kleinem Gesamtflächeninhalt überdecken lassen, heißen Jordan-Nullmengen<sup>8.4.1</sup>.

### Beispiele

1. Endliche Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  sind Jordan-Nullmengen.

**Beispiel:**

Seien  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$  und  $M = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$  eine endliche Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  kann jedes der  $x_i$  überdeckt werden von einem Quadrat mit Seitenlänge kleiner als  $\sqrt{\varepsilon/n}$ . Die  $\delta$ -Vollkugeln bezüglich der Supremums-Norm sind genau Quadrate der Seitenlänge  $2\delta$ , also Flächeninhalt  $4\delta^2$ . Es ist  $\{R_i\}$  mit

$$R_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_i\|_\infty \leq \delta \right\}$$

eine Überdeckung von  $M$  durch Rechtecke mit Gesamtflächeninhalt

$$\sum_{i=1}^n A(R_i) = \sum_{i=1}^n 4\delta^2 = 4n\delta^2 < \varepsilon$$

für

$$\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4n}}$$

Das obere Beispiel zeigt auch, dass die Geometrie der verwendeten Überdeckung nicht wichtig ist, es also egal ist, ob die Überdeckung durch Rechtecke oder Kreisflächen stattfindet.

2. Endliche Vereinigungen von Jordan-Nullmengen sind Jordan-Nullmengen.

**Beispiel:**

Seien  $J_1, \dots, J_n \subset \mathbb{R}^2$  Jordan-Nullmengen. Dann ist  $\bigcup_{k=1}^n J_k$  Jordan-Nullmenge. Zu zeigen ist, dass für beliebiges  $\varepsilon > 0$  eine endliche Überdeckung von  $\bigcup_{k=1}^n J_k$  durch Rechtecke mit Gesamtflächeninhalt kleiner  $\varepsilon$  existiert. Die Idee ist hier natürlich, die endlichen Überdeckungen der einzelnen  $J_k$  zu verwenden, da deren Vereinigung dann eine Überdeckung der Vereinigung der  $J_k$  ist, und sie so klein zu wählen, dass der Gesamtflächeninhalt kleiner  $\varepsilon$  wird.

Sei also  $\varepsilon > 0$ . Zu gegebenem  $\delta > 0$  sei  $\{R_i^{(k)}\}$  Überdeckung durch Rechtecke für die Jordan-Nullmenge  $J_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , mit Gesamtflächeninhalt  $\sum_i A(R_i^{(k)}) < \delta$ . Dann ist  $\{\bigcup_{k=1}^n R_i^{(k)}\}$  eine Überdeckung durch Rechtecke von  $\bigcup_{k=1}^n J_k$  mit Gesamtflächeninhalt

$$\sum_{k=1}^n \sum_i A(R_i^{(k)}) < n\delta < \varepsilon$$

<sup>8.4.1</sup> Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Die Menge  $M$  heißt *Jordan-Nullmenge* des  $\mathbb{R}^2$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  endliche viele Rechtecke  $\{R_i\}_{i=1, \dots, n}$  mit Flächeninhalten  $\{A(R_i)\}_{i=1, \dots, n}$  existieren, die  $M$  überdecken und für die gilt  $\sum_{i=1}^n A(R_i) < \varepsilon$

falls  $\delta < \epsilon/n$  gewählt wird.

3. Auch unendliche Mengen können Jordan-Nullmengen sein. Die Menge aller Folgenglieder einer konvergenten Folge ist eine Jordan-Nullmenge.

**Beispiel:**

Sei  $\{a_k\}$  eine konvergente Folge im  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist die Menge  $M = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  Jordan-Nullmenge. Da die Folge konvergiert, liegen für jedes  $\delta > 0$  fast alle (also alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der  $\delta$ -Kugel  $B_\delta(a)$  um den Grenzwert  $a$ , können also mit einem Quadrat der Seitenlänge  $2\delta$  und somit Flächeninhalt  $4\delta^2$  überdeckt werden. Für  $\delta < \sqrt{\epsilon}/2$  ist das kleiner als jedes  $\epsilon > 0$  und somit Jordan-Nullmenge. Die endlich vielen Folgenglieder außerhalb dieser Menge sind Jordan-Nullmenge, und die Vereinigung dieser beiden Jordan-Nullmengen wieder Jordan-Nullmenge.

**Achtung:**

Die  $\delta$ -Kugel selbst, für festes  $\delta > 0$ , ist keine Jordan-Nullmenge. Schließlich hat sie einen endlichen festen Flächeninhalt und kann somit nicht durch endlich viele Rechtecke beliebig kleinen Gesamtflächeninhalts überdeckt werden. Aber für jedes  $\epsilon > 0$  existiert eben ein  $\delta = \delta(\epsilon)$ , sodass die  $\delta$ -Kugel Überdeckung von fast allen Folgengliedern ist, mit Flächeninhalt klein genug.

4. Unbeschränkte Mengen hingegen können nie Jordan-Nullmengen sein. Sie lassen sich nicht mit endlich vielen Rechtecken überdecken. Existierte eine solche Überdeckung, so ließe sich daraus ein "großes" Rechteck konstruieren, das die Menge überdeckt. Rechtecke sind beschränkte Mengen und beschränkte Mengen haben keine unbeschränkten Teilmengen.

**Beispiel:**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  unbeschränkt. Angenommen es existiert eine endliche Überdeckung  $\{R_i\}$  von  $M$  durch Rechtecke  $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ . Dann ist das Rechteck

$$R_M = [\min_i \{a_i\}, \max_i \{b_i\}] \times [\min_i \{c_i\}, \max_i \{d_i\}]$$

eine Überdeckung von  $M$  und kann als beschränkte Menge keine unbeschränkten Teilmengen enthalten. Deshalb kann keine endliche Überdeckung durch Rechtecke existieren und  $M$  nicht Jordan-Nullmenge sein.

## 9 Woche 9: Volumenintegrale

*Markiere die richtigen Aussagen:*

Sei  $B, \tilde{B}, U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig diffbar und  $J(\phi)$  die Jacobi-Matrix von  $\phi$ .

- ☐  $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $B$  abbildet.
- ☐  $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \det(J(\phi)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $\tilde{B}$  abbildet.
- ☐  $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \det(J(\phi)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $B$  abbildet.

*Markiere die richtigen Aussagen:*

Sei  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Funktion.

- ☐  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .
- ☐ Falls  $f$  stetig,  $\partial_2 f$  existiert und stetig ist, gilt  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .
- ☐ Falls  $f$  Riemann-integrierbar ist,  $\partial_2 f$  existiert und Riemann-integrierbar ist, gilt  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .

### 9.1 3-D Volumenelemente

Der Term  $dV = |\det J(\phi)| dU$  aus der Transformationsformel heißt auch Volumenelement.

**Beispiel: Zylinderkoordinaten**

Sei  $R \geq 0$ , und sei  $\tilde{B} \subset [0, R] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  offen. Gegeben sei die Transformation

$$\phi : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \phi(r, t, z) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

Dann ist die Jacobi-Matrix  $J(\phi)$  von  $\phi$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\det J(\phi) &= \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 t + r \sin^2 t = r\end{aligned}$$

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten lautet also

$$dV = r dr dt dz$$

### Beispiel: Kugelkoordinaten

Sei  $R \geq 0$ , und sei  $\tilde{B} \subset [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  offen. Gegeben sei die Transformation

$$\phi : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \phi(r, u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \sin v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos v \end{pmatrix}$$

Dann ist die Jacobi-Matrix  $J(\phi)$  von  $\phi$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\det J(\phi) &= \begin{vmatrix} \cos u \sin v & -r \sin u \sin v & r \cos u \cos v \\ \sin u \cos v & r \cos u \sin v & r \sin u \cos v \\ \cos v & 0 & -r \sin v \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin v\end{aligned}$$

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten lautet also

$$dV = r^2 \sin v dr du dv$$

## 9.2 Integrale für Ratsuchende

### Beispiel:

Wir berechnen das Integral

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Dazu wird nur partielle Integration benutzt und zwei wichtige Ableitungen

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auf geht's!

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$$

eine Stammfunktion ist.

*Häufiger anzutreffen ist eine allgemeinere Variante.*

### Beispiel:

Sei  $R > 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= R \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} dx \\
&= R^2 \int \sqrt{1 - t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} R^2 (\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}) \\
&= \frac{1}{2} R^2 \left( \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

eine Stammfunktion.

Mit etwas Geometrie lässt sich die Formel aufhübschen.

Sei  $-R \leq x \leq R$ . Dann existiert ein Winkel  $\alpha$ , sodass  $x/R = \sin \alpha$  und es gilt

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} R^2 \left( \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} R^2 \left( \alpha + \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right) \\
&= \frac{1}{2} R^2 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \\
&= \frac{1}{4} R^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)
\end{aligned}$$

Die folgenden Videos behandeln Beispielaufgaben für die Anwendung der Transformationsformel:

- Die Transformationsformel mit Polarkoordinaten <sup>9.2.1</sup>

<sup>9.2.1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=hmBQcLl1DsA>

- Die Transformationsformel für eine Drehung im Raum <sup>9.2.2</sup>

## 10 Woche 10: Oberflächenintegrale

### 10.1 Warm-Up

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Funktion.

- ☐  $\phi$  ist eine Parametrisierung der Fläche  $\phi(B)$ .
- ☐  $\phi(B)$  ist eine Fläche falls  $\phi(x, y) = (x, y, x + y)$  und  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ .
- ☐  $\phi(B)$  ist eine Fläche falls  $\phi(x, y) = (x, 0, 0)$  und  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  kompakt,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der glatten Fläche  $\phi(B) =: F$  und  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die Massenverteilung von  $F$  beschreibt.

- ☐ Die Oberfläche von  $F$  ist  $\iint_B \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$ .
- ☐ Die Gesamtmasse von  $F$  ist  $\iint_B f(u, v) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$ .
- ☐ Die Gesamtmasse von  $F$  ist  $\iint_B f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$ .

### 10.2 Parametrisierte Flächen

Wie bei den Kurvenintegralen, bei denen skalare Funktionen entlang parametrisierter Kurven im  $\mathbb{R}^n$  integriert werden, lassen sich solche Funktionen auch über parametrisierte Flächen integrieren. Die Rolle des Geschwindigkeitsvektors an einen Punkt der Kurve im Kurvenintegral übernimmt nun der Normalenvektor an einen Punkt der Fläche. Zunächst eine Wiederholung zu parametrisierten Flächen. Wir beschränken uns dabei auf den  $\mathbb{R}^3$ .

Eine parametrisierte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , die sich durch eine gutartige Funktion zweier Veränderlicher in den  $\mathbb{R}^3$  parametrisieren lässt. Was "gutartig" genau heißt, klärt die Definition der *Parametrisierung*.

<sup>9.2.2</sup><https://www.youtube.com/watch?v=1Sw7z1bqDcQ>

**Definition: Parametrisierung**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  kompakt, und  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Funktion. Ist zusätzlich

1. der Rand  $\partial B$  von  $B$  eine Vereinigung endlich vieler glatter Kurven im  $\mathbb{R}^2$ ,
2.  $\phi : B \setminus \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv, und
3. die partiellen Ableitungen  $\partial_u \phi, \partial_v \phi$  für alle  $(u, v) \in B \setminus \partial B$  linear unabhängige Vektoren

so heißt  $\phi$  Parametrisierung der Fläche  $F = \phi(B)$ .

Die lineare Abhängigkeit der partiellen Ableitungen  $\partial_u \phi, \partial_v \phi$  sichert, dass die Fläche auch immer eine Fläche ist und nicht an einem Punkt eine Dimension "verliert". Dadurch spannen  $\partial_u \phi$  und  $\partial_v \phi$  an jedem Punkt  $(x, y, z) = \phi(u, v) \in F$  einen zwei-dimensionalen Tangentialraum auf. Eine *parametrisierte Fläche* im  $\mathbb{R}^3$ , oder einfach *Fläche* (wir werden keine anderen Flächen betrachten), ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , für die es eine Parametrisierung gibt.

**Definition: Fläche**

Eine Menge  $F \subset \mathbb{R}^3$  heißt (parametrisierte) Fläche, falls es eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  gibt und eine Parametrisierung  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\phi(B) = F$ .

Eine Fläche ist also eine Menge, die sich auf glatte Weise durch zwei Parameter beschreiben lässt. Zu jedem Punkt  $(x, y, z) \in F$  gibt es zwei Parameter  $(u, v) \in B$  (eine Fläche hat zwei Freiheitsgrade!), mit  $\phi(u, v) = (x, y, z)$ .

**Beispiel**

Sei  $M$  der Mantel eines Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, 0 \leq z \leq H\}$$

mit Radius  $R$  und Höhe  $H$ . Es ist also

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = R, 0 \leq z \leq H\}$$

Von den Koordinatentransformationen ist bekannt, dass Zylinderkoordinaten jedem  $r, \varphi, z$  einen Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  zuordnen, der auf einer Zylinderschale vom Radius  $r$  liegt. Mit der Wahl  $r = R$  und der Einschränkung von  $z$  auf das Intervall  $[0, H]$  ist eine Parametrisierung des Zylindermantels  $M$  gegeben durch

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t, z) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

und damit  $\phi(B) = M$ . Der Definitionsbereich von  $\phi$  ist kompakt und durch ein Rechteck berandet (also insbesondere durch endlich viele glatte Kurven, 4 hier). Im Inneren des Definitionsbereichs ist  $\phi$  injektiv. Es gilt zwar  $\phi(0, z) = \phi(2\pi, z)$  für alle  $z$ , aber diese Punkte liegen auf dem Rand. Als Einschränkung einer Koordinatentransformation (diese muss eine Jacobi-Matrix mit **nicht** verschwindender Determinante haben) müssen die partiellen Ableitungen (zwei der drei Spalten der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation) linear unabhängig sein. Damit ist  $\phi$  eine Parametrisierung von  $M$ . Achtung: Es ist nicht  $M = \partial Z$  der Rand des Zylinders  $Z$ , da dieser noch aus den Deckeln zu  $z = 0$  und  $z = H$  besteht. Für diese Kreisscheiben müssen eigene Parametrisierungen angegeben werden.

### Beispiel

Unter bestimmten Voraussetzungen sind Graphen von skalaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Flächen im  $\mathbb{R}^3$ .

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2, f : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Graph  $G_f$  von  $f$  ist gegeben durch  $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, z = f(x, y)\}$ . Ein Kandidat für eine Parametrisierung von  $G_f$  ist dann

$$\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

Damit  $\phi$  Parametrisierung ist, muss mindestens gelten, dass  $B$  kompakt und durch endlich viele glatte Kurven berandet ist, ebenso muss  $f$  stetig differenzierbar sein. Jedoch ist  $\phi$  immer injektiv, und die partiellen Ableitungen

$$\partial_u \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{pmatrix}, \partial_v \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{pmatrix}$$

sind für alle  $(u, v)$  linear unabhängig.

### Beispiel

Kreiskegel:  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{z}{2}, 0 \leq z \leq 2\}$

## 10.3 Oberflächenintegrale

Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion über eine parametrisierte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist nun analog zum Kurvenintegral einer Funktion über eine Kurve definiert, mit dem Normalenvektor an Stelle des Geschwindigkeitsvektors.



**Definition: Oberflächenintegral, Oberfläche**

Sei  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der Fläche  $F = \phi(B)$ , und sei  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $F$  definierte Funktion. Dann ist

$$\iint_F f \, dA = \iint_B f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du \, dv$$

das *Oberflächenintegral* von  $f$  über  $F$ . Mit  $f = 1$  ist  $A(F) = \iint_F dA$  die *Oberfläche* von  $F$ .

**Beispiel**

Die Oberfläche des Zylindermantels aus dem obigen Beispiel lässt sich nun berechnen.

Sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = R, 0 \leq z \leq H\} \text{ und}$$

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t, z) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von  $M$ . Es ist dann

$$\partial_t \phi = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit der Normalenvektor  $n$

$$n = \partial_t \phi \times \partial_z \phi = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\|n\| = R$ . Daraus folgt

$$A(M) = \iint_M dA = \int_0^{2\pi} \int_0^H R \, dz \, dt = 2\pi \cdot R \cdot H,$$

also Umfang mal Höhe.

Ebenso die Oberfläche eines parametrisierten Graphen Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit Parametrisierung  $\phi$  des Graphen  $G_f$  von  $f$ . Der Normalenvektor  $n$  ist gegeben durch

$$n = \partial_u \phi \times \partial_v \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Länge  $\|n\| = \sqrt{1 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2}$ . Die Oberfläche des Graphen von  $f$  ist also gegeben durch

$$A(G_f) = \iint_{G_f} dA = \iint_B \sqrt{1 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2} \, du \, dv$$

Die folgenden Videos erläutern das Vorgehen bei der Oberflächenintegration einer gegebenen Funktion über den Rand eines Kegels. Für die Zerlegung des Randes in parametrisierbare Oberflächenteile muss man sich Zeit nehmen.<sup>10.3.1</sup> Der Rest ist nur eine Frage der Übung. Zu guter Letzt noch der Spezialfall der Berechnung des Flächeninhalts des Zylinderrands<sup>10.3.2</sup>.

# 11 Woche 11: Flächen und skalare Oberflächenintegrale

## 11.1 Warm-Up

*Markiere die richtigen Aussagen:*

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der glatten Fläche  $F = \phi(B)$ , und  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig.

- ☐  $\iint_F \vec{v} d\vec{O} = \iint_F \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle dO$ , wobei  $\vec{u}$  der Einheitsnormalenvektor auf  $F$  ist.
- ☐  $\iint_F \vec{v} d\vec{O} = \iint_F \vec{v}(\phi(u, v)) \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\| dO$ .
- ☐  $\iint_F \vec{v} d\vec{O}$  ist unabhängig von der Parametrisierung.
- ☐  $\operatorname{div} \vec{v} = \sum_i \partial_i v_i$

*Markiere die richtigen Aussagen*

Sei  $B \subset \mathbb{R}^3$  kompakt und  $\partial B$  eine glatte Fläche. Dann gilt:

$$\iint_{\partial B} \vec{v} d\vec{O} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz$$

- ☐ immer.
- ☐ falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $B$  stetig differenzierbar ist.
- ☐ falls für die Parametrisierung von  $B$  und  $\partial B$  gilt, dass die Normale aus  $B$  hinaus zeigt.
- ☐ falls für die Parametrisierung von  $B$  und  $\partial B$  gilt, dass die Normale in  $B$  hinein zeigt.

<sup>10.3.1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=h1I9WJEMkb8>

<sup>10.3.2</sup><https://www.youtube.com/watch?v=iMpbIYxKqIM>

## 11.2 Flächen und skalare Oberflächenintegrale

Um Vektorfelder an Stelle von skalaren Funktionen über Flächen zu integrieren wird genau wie bei der Integration von Vektorfeldern entlang Kurven die skalare Multiplikation durch ein Skalarprodukt ersetzt. Der vektorwertige Teil des Integranden muss skalar werden, damit das Integral ein Skalar wird. Statt also mit dem Betrag des Normalenvektors zu Multiplizieren, wird das Vektorfeld skalar mit dem Einheits-Normalenvektor multipliziert.

### Definition: Flussintegral, Einheitsnormalenvektor

Sei  $F = \phi(B)$  eine glatte Fläche und  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung von  $F$ , und sei  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Menge, die  $F$  enthält. Dann ist das *Flussintegral von  $\vec{v}$  über  $F$*  (oder der *Fluss von  $\vec{v}$  durch  $F$* )

$$\begin{aligned}\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &:= \iint_F \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dO \\ &= \iint_B \vec{v}(\phi(u, v)) \cdot \partial_u \phi \times \partial_v \phi \, du \, dv\end{aligned}$$

Dabei ist der *Einheitsnormalenvektor*  $\vec{n}$  von  $F$  gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{\|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\|}$$

Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,  $M = (u \ v \ w)$  die Matrix mit den Vektoren  $u, v, w$  als Spalten. Eine manchmal nützliche Identität ist dann  $u \cdot v \times w = \det M$

### Kochrezept: Flussintegral

Sei  $F$  eine glatte Fläche und  $\vec{v}$  ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Menge, die  $F$  enthält. Das *Flussintegral von  $\vec{v}$  über  $F$*  wird dann mit den folgenden Schritten berechnet:

- Finde eine Parametrisierung  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  von  $F$ .
- Berechne  $f(u, v) = \vec{v}(\phi(u, v)) \cdot \partial_u \phi \times \partial_v \phi$
- Berechne das zweidimensionale Integral  $\iint_B f(u, v) \, du \, dv$

Im Falle geschlossener Flächen vereinbaren wir, dass die Parametrisierungen so gewählt werden, dass der Normalenvektor nach außen zeigt. Lässt sich keine Parametrisierung für die gesamte Fläche  $F$  finden, so muss sie zerlegt werden in Teile  $F_1, \dots, F_k$ ,  $F = \bigcup_i F_i$ , die sich parametrisieren lassen und für die gilt, dass die Schnittmengen  $F_i \cap F_j$  Jordan-Nullmengen

sind. Dann ist das Integral  $\iint F_i \cap F_j$  über die Überlappungen gleich Null und es gilt wie üblich, dass das Integral über  $F$  gleich der Summe der Integrale über die Teilstücke  $F_i$  ist,

$$\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} = \sum_{i=1}^k \iint_{F_i} \vec{v} \cdot d\vec{O}$$

### Beispiel

Sei  $\vec{v}(x, y, z) = (xy^2, y^3, y)$ , und  $Z$  ein Zylinder vom Radius  $r$  und der Höhe  $h$  um die  $z$ -Achse. Der Rand  $\partial Z$  von  $Z$  besteht aus dem Zylindermantel  $M$  und den beiden Deckeln  $K_h$  bei  $z = h$  und  $K_0$  bei  $z = 0$ , also  $\partial Z = M \cup K_h \cup K_0$ .

#### Abkürzende Beobachtung:

Da  $\vec{v}$  nicht von  $z$  abhängt, könnte gelten, dass der Fluss von  $v$  durch die Deckel jeweils denselben Wert hat. Doch ist zu beachten, dass die Parametrisierungen der Deckel so gewählt werden müssen, dass der Normalenvektor an jedem Punkt des Randes von  $Z$  nach außen, also vom Körper weg zeigt. Auf einer Seite fließt etwas herein und auf der anderen wieder heraus. Es gilt also für die Einheitsnormalenvektoren  $\vec{n}_h$  von  $K_h$  und  $\vec{n}_0$  von  $K_0$ , dass  $\vec{n}_h = -\vec{n}_0$ , und damit

$$\iint_{K_h} \vec{v} \cdot d\vec{O} = - \iint_{K_0} \vec{v} \cdot d\vec{O}$$

und damit insbesondere

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iint_M \vec{v} \cdot d\vec{O} + \iint_{K_h} \vec{v} \cdot d\vec{O} + \iint_{K_0} \vec{v} \cdot d\vec{O} \\ &= \iint_M \vec{v} \cdot d\vec{O} \end{aligned}$$

Eine Parametrisierung von  $M$  ist  $\phi : [0, 2\pi] \times [0, h]$ ,  $\phi(t, z) = (r \cos t, r \sin t, z)$  mit (nach außen weisendem) Normalenvektor  $\partial_t \phi \times \partial_z \phi = (r \cos t, r \sin t, 0)$ . Damit ist der Integrand  $f(t, z) = \vec{v}(\phi(t, z)) \cdot \partial_t \phi \times \partial_z \phi$  gegeben durch

$$f(t, z) = r^2 \sin t \begin{pmatrix} r^2 \cos t \sin t \\ r^2 \sin^2 t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = r^4 \sin^2 t$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &= r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^h \sin^2 t \, dz \, dt \\ &= r^4 h \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \\ &= \pi h r^4 \end{aligned}$$

## 11.2.1 Der Integralsatz von Gauß

Der Integralsatz von Gauß setzt Oberflächen- und Volumenintegrale in einen Zusammenhang.

### Satz: Der Integralsatz von Gauß

Sei  $B \subset \mathbb{R}^3$  ein kompakter Bereich, dessen Rand  $\partial B$  eine Fläche ist, die aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht. Die Parametrisierung sei so gewählt, dass der Normalenvektor überall aus  $B$  heraus weist. Sei  $\vec{v}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von  $B$ . Dann gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz$$

Für Divergenz-freie Felder, also solche ohne Quellen oder Senken (zum Beispiel Rotationsfelder) folgt dann, dass das Integral über jede geschlossene Fläche immer Null sein muss. Was reinfließt, fließt auch wieder raus. Bei Flussintegralen über geschlossene Flächen ist es also immer sinnvoll, zuerst die Divergenz des zu integrierenden Vektorfeldes zu berechnen.

### Beispiel

Sei wie oben  $\vec{v}(x, y, z) = (xy^2, y^3, y)$ , und  $Z$  ein Zylinder vom Radius  $r$  und der Höhe  $h$  um die  $z$ -Achse. Dieser ist kompakt und von endlich vielen glatten Flächen (nämlich 3, s.o.) berandet. Da  $\vec{v}$  stetig differenzierbar ist, lässt sich der Satz von Gauß anwenden. Die Divergenz von  $\vec{v}$  ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \vec{v} = \partial_x(xy^2) + \partial_y y^3 + \partial_z y = 4y^2$$

Das resultierende Volumenintegral lässt sich am leichtesten in Zylinderkoordinaten berechnen. Für das Volumenelement  $dx \, dy \, dz$  (siehe 9.1)  $dx \, dy \, dz = r \, dr \, dt \, dz$ , und somit

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint_Z \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz \\ &= 4 \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r^3 \sin^2 t \, dr \, dt \, dz \\ &= \pi h r^4 \end{aligned}$$

Ein Flussintegral über einen Hohlzylinder <sup>11.2.1</sup>

Dasselbe Integral, berechnet mit Hilfe des Satzes von Gauß <sup>11.2.2</sup>

<sup>11.2.1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=o-rN-iQAp7Y>

<sup>11.2.2</sup>[https://www.youtube.com/watch?v=ngPmw\\_Jpc9g](https://www.youtube.com/watch?v=ngPmw_Jpc9g)

# 12 Woche 12

## 12.1 Warm-Up

**Markiere die richtigen Aussagen:**

Sei  $F \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit stückweise glatter Randkurve  $\partial F$  und  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld. (Die Konvention für die Orientierung von Randkurven vorausgesetzt, ) gilt:

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

- ☐ immer (die Gleichheit heißt Satz von Stokes)
- ☐ falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $F$  stetig ist.
- ☐ falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $F$  stetig differenzierbar ist.

**Markiere die richtigen Aussagen:**

Die Konvention für Orientierung von Randflächen ist:

- ☐ Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^2$  liegt das Gebiet rechts, wenn man die Randkurve im positiven Sinn durchläuft.
- ☐ Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^2$  liegt das Gebiet links, wenn man die Randkurve im positiven Sinn durchläuft.
- ☐ Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit vorgegebenem Normalenvektor liegt bei positivem Umlaufsinn des Randes die Fläche links, wenn man von der Seite guckt, in die der Normalenvektor zeigt.

## 12.2 Der Integralsatz von Stokes

Der Satz von Stokes setzt Kurvenintegrale von Vektorfeldern über geschlossene Kurven mit dem Flussintegral der Rotation des Vektorfeldes über einen von der Kurve berandeten Bereich in Zusammenhang.

### Satz von Stokes

Sei  $F$  eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit stückweise glatter Randkurve  $\partial F$ . Sei  $\vec{v}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von  $F$ . Dann gilt

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Eine solche Formel anzuwenden ist nicht schwer, von Vorteil ist sie immer besonders dann, wenn ein Kurvenintegral eines *rotationsfreien* Vektorfelds über eine geschlossene Kurve zu berechnen ist, zum Beispiel eines Gradientenfeldes. Die stetige Differenzierbarkeit des Vektorfeldes ist dabei die entscheidende Voraussetzung wie das folgende Beispiel zeigt.

### Beispiel

Es sei  $R \subset \mathbb{R}^3$  der Einheitskreis in der  $x - y$ -Ebene, und  $\vec{v}$  das Vektorfeld mit

$$v(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Wegintegral  $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist schnell im Kopf berechnet, beschreibt  $\vec{v}$  auf  $S$  genau die normierten Tangentialvektoren an den Kreis. Daher ist der Wert des Integrals gerade der Umfang, also  $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ . Für die Rotation von  $\vec{v}$  gilt jedoch  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ , also für jede Fläche  $F$

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0$$

Nach dem Satz von Stokes müsste aber für jede Fläche  $F$  mit  $\partial F = S$  gelten, dass die beiden Integrale gleich sein. Um das Wegintegral  $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$  zu berechnen lässt sich der Satz von Stokes nicht anwenden. Egal, welche Fläche durch die Kurve  $S$  berandet wird (das muss übrigens nicht die Kreisscheibe sein, es kann auch ein Kegelmantel oder eine ganz abstrakte Fläche sein, die ein Loch genau in der Form und an der Stelle von  $S$  hat), sie schneidet die  $z$ -Achse. Doch in keiner Umgebung der  $z$ -Achse ist das Vektorfeld  $\vec{v}$  stetig differenzierbar.

## 12.3 Die Greensche Formel und Gaußsche Flächenformel

Für ebene Flächen ist es möglich, mit Hilfe der Greenschen Formel nur aus der Randkurve der Fläche deren Flächeninhalt zu bestimmen. Die Greensche Formel folgt aus dem Satz von Stokes, indem das zweidimensionale Problem als Problem im  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst wird. Die Idee ist, für eine Fläche  $F$  das Oberflächenintegral  $A(F) = \iint_F dx dy$  als das Flussintegral eines Rotationsfeldes  $\operatorname{rot} v$  durch  $F$  aufzufassen, für das gilt  $\operatorname{rot} v \cdot n = 1$ . Dann ist nämlich nach dem Satz von Stokes

$$A(F) = \iint_F dx dy = \iint_F \operatorname{rot} v \cdot d\vec{O} = \int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

der Flächeninhalt bestimmbar aus dem Wegintegral über den Rand  $\partial F = \gamma$  von  $F$ .

### 12.3.1 Das zweidimensionale Problem im 3-D

Sei  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  ein ebenes Vektorfeld, und  $F \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine ebene Fläche mit Randkurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Betrachte nun  $v$  als Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$  und  $F$  als Menge im  $\mathbb{R}^3$  mit Randkurve  $\tilde{\gamma}$ :

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das vektorielle Flächenelement  $dO$  von  $F$  ergibt sich aus der Parametrisierung. Dabei wird die ebene Fläche  $F$  am besten "durch sich selbst"parametrisiert,

$$\phi : F \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist das vektorielle Flächenelement gegeben durch

$$dO = \partial_x \phi \times \partial_y \phi \, dx \, dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy$$

Die Rotation des Vektorfelds zeigt immer parallel zur z-Achse:

$$\text{rot } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix}$$

Es ist also  $\text{rot } v \cdot dO = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \, dx \, dy$

#### Der Satz von Stokes und die Greensche Formel

Der Satz von Stokes erlaubt es, das Flussintegral des Rotationsvektorfelds durch die Fläche  $F$  in ein Kurvenintegral über den Rand von  $F$  zu überführen. Es ist also

$$\iint_F \text{rot } v \cdot dO = \int_{\gamma} v \cdot ds$$

Mit der Definition des Kurvenintegrals wird der Term  $v \cdot ds = v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$  und die Greensche Formel ist hergeleitet.

#### Greensche Formel

Sei  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  ein ebenes Vektorfeld, und  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine ebene Fläche mit Randkurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Dann gilt

$$\iint_F \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_a^b \left( v_1(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma_1}{dt} + v_2(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma_2}{dt} \right) dt$$



Mit Hilfe dieser Formel lassen sich sehr genau die Flächeninhalte von Zeichnungen mit Hilfe mechanischer Messgeräte, sogenannter Planimeter bestimmen. Diese vermessen den Rand und bestimmen dann den Flächeninhalt.

### Beispiel

Sei  $v(x, y) = (0, x, 0)$  und  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine ebene Fläche mit Randkurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Dann ist  $\partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 1$  und damit der Flächeninhalt  $A(F)$  von  $F$  gegeben durch

$$A(F) = \iint_F dx \, dy = \int_a^b \gamma_1(t) \dot{\gamma}_2(t) \, dt$$

Andere Vektorfelder, deren (2-d-)Rotation gleich 1 ist, liefern ebenso den Flächeninhalt, aber mit einer anderen rechten Seite, die, abhängig von der Beschaffenheit der Randkurve, günstiger sein kann. In den Hausaufgaben sind zwei weitere solche Identitäten zu zeigen.

# 13 Woche 13

## 13.1 Warm-Up

Potential und Vektorpotential

*Markiere die richtigen Aussagen*

Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld.

- ☐ Wenn  $\vec{v}$  ein Potential hat, dann gilt  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ .
- ☐ Wenn  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$  gilt, dann hat
- ☐ Wenn  $D$  einfach zusammenhängend und  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , dann hat  $\vec{v}$  ein Potential.
- ☐ Wenn  $\vec{v}$  ein Potential hat, dann gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .
- ☐ Wenn  $\vec{v}$  ein Vektorpotential hat, dann gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .
- ☐ Wenn  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , dann hat  $\vec{v}$  ein Vektorpotential.
- ☐ Wenn  $\vec{v}$  ein Vektorpotential hat, dann ist der Fluss durch jede geschlossene Fläche gleich 0.

# 14 Lösungen der Warm-Ups

## Woche 1

Markiere die richtigen Aussagen.

Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell diffbar. Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$  und  $f_M : M \rightarrow \mathbb{R}, f_M(x) = f(x)$  für alle  $x \in M$ . Sei  $a \in M$ . Dann gilt:

- $f_M$  nimmt ihr (globales) Maximum an.
- Falls  $f$  ein globales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f_M$ .
- Falls  $f$  ein lokales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f_M$ .
- Falls  $f_M$  ein globales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f$ .
- Falls  $f_M$  ein lokales Maximum in  $a$  annimmt, dann gilt das auch für  $f$ .
- Falls  $f_M$  ein globales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = 0$
- Falls  $f_M$  ein globales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\text{grad } g(a) = 0$
- Falls  $f_M$  ein lokales Maximum im Punkt  $a$  annimmt, so gilt  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\text{grad } g(a) = 0$
- Falls  $\text{grad } f_M(a) = \lambda \text{ grad } g(a)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so nimmt  $f_M$  ein lokales Maximum im Punkt  $a$  an.

## Woche 2

Markiere die richtigen Aussagen.

Eine DGL der Form  $g(x, y)y' + f(x, y) = 0$  ist exakt, falls

- $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$
- $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$
- eine Funktion  $F(x, y)$  existiert mit  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial y} = g$ .
- eine Funktion  $F(x, y)$  existiert mit  $\frac{\partial F}{\partial y} = f$  und  $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ .

- es ein  $M(x, y)$  gibt, sodass  $\frac{\partial M}{\partial x} g + M \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} f + M \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Markiere die richtigen Aussagen.

Betrachte das AWP  $y' = f(x, y)$  mit  $y(0) = 1$ . Es gilt:

- Das AWP besitzt (mind.) eine Lösung.
- Die Lösung des AWP ist eindeutig.
- Das AWP besitzt eine Lösung, wenn  $f$  stetig ist.
- Das AWP besitzt eine eindeutige Lösung, wenn  $f$  stetig ist.

### Woche 3

Markiere die richtigen Aussagen.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- Die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert punktweise, das heißt  $\lim_n f_n(x)$  existiert für alle  $x \in [a, b]$ .
- Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  stetige Funktionen sind, ist die Grenzfunktion stetig.
- Falls die Funktionenfolge  $\{f_n\}$  konvergiert und alle  $f_n$  Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

- Die Folge  $\{f_n\}$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $x \in [a, b]$  und für alle  $n \geq N$  gilt  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

### Woche 4

Makiere die richtige Aussage

Sei  $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ :

- Die DGL ist  $n$ -ter Ordnung.
- Die DGL ist linear.
- Falls  $x(t)$  eine Lösung der DGL ist, so ist  $x_i(t) = x^{(i-1)}(t)$  für  $i = 1, \dots, n-1$  Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= f(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

- Die DGL ist autonom.
- Falls die DGL autonom und  $x(t)$  eine Lösung ist, so ist auch  $x(t - t_0)$  eine Lösung für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ .
- Sei zusätzlich gefordert, dass  $x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ . Dann hat das AWP eine eindeutige Lösung.

## Woche 5

Markiere die richtigen Aussagen.

Sei  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix.

- Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert genau dann, wenn  $M$  diagonalisierbar ist.
- Die Matrixpotenzreihe  $e^M$  konvergiert.
- Das AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  hat eine eindeutige Lösung.
- Die Lösung des AWP  $\dot{x} = Mx, x(0) = x_0$  ist  $x(t) = e^{tM}x_0$ .
- Falls alle Einträge in  $M$  reell sind, so hat  $M$  nur reelle Eigenwerte.
- Wenn  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann treten die komplexen Eigenwerte nur in komplex konjugierten Paaren auf.

## Woche 6

Markiere die richtigen Aussagen:

Seien  $a_{i,j}, b_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen für  $i, j, k = 1, \dots, n$  und  $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j}$  und  $b(t) = (b_k(t))_k$ . Betrachte das AWP  $\dot{x} = A(t)x + b(t), x(0) = x_0$ .

- Für jedes  $x_0$  hat das AWP genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.
- Für jedes  $x_0$  hat das AWP höchstens eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.
- Falls  $x_1, \dots, x_n$  auf  $I$  definierte Lösungen des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  sind, dann sind die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  für alle  $t \in I$  linear unabhängig.
- Falls  $x_1, \dots, x_n$  auf  $I$  definierte Lösungen des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  sind, dann existiert  $t \in I$  sodass die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig sind.
- Seien  $x_H$  und  $x_P$  Lösungen des homogenen bzw. des inhomogenen Systems. Dann ist  $x_H + x_P$  eine Lösung des inhomogenen Systems.

- Seien  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = b(t)$$

Dann ist  $\sum_i c_i(t)x_i(t)$  eine Lösung des inhomogenen Systems.

## Woche 7

Markiere die richtigen Aussagen.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $C^2([t_0, t_1], U)$  die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von  $[t_0, t_1] \rightarrow U$ . Sei  $S : C^2([t_0, t_1], U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ , wobei  $L : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  genügend oft diffbar. Sei  $x : [t_0, t_1] \rightarrow U$  eine zweimal stetig diffbare Funktion.

- $S$  ist ein Funktional.
- Die Funktion  $L$  ist eine Lagrange-Funktion.
- $x$  heißt kritische Kurve bezüglich  $S$  bei Variation mit festgehaltenen Endpunkten, falls für alle Funktionen  $h \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  mit  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  gilt  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} S[x + \epsilon h] = 0$
- $x \in C^2([t_0, t_1], U)$
- Sei  $x$  eine Funktion, die  $S$  minimiert. Dann gilt  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
- Sei  $x$  eine Funktion, für die gilt  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ . Dann wird  $S$  durch  $x$  minimiert.
- Für  $x$  gilt  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} S[x + \epsilon h] = 0$  für alle  $h \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  mit  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  genau dann, wenn  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ .

## Woche 8

Markiere die richtigen Aussagen.

Sei  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- Wenn  $f$  beschränkt ist, ist  $f$  Riemann-integrierbar.
- Wenn  $f$  nicht beschränkt ist, ist  $f$  nicht Riemann-integrierbar.
- Wenn  $f$  stetig ist, dann ist  $f$  Riemann-integrierbar auf  $R$ .
- Wenn  $f$  nicht stetig ist, dann ist  $f$  nicht Riemann-integrierbar.
- Wenn  $f$  beschränkt ist und höchstes in endlich vielen Punkten unstetig ist, dann ist  $f$  auf  $R$  Riemann-integrierbar.
- Die Funktion  $f$  ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $f$  auf  $R$  beschränkt ist und für alle  $\epsilon > 0$  eine Unterteilung  $(x_j)_j, (y_k)_k$  von  $R$  existiert, so dass  $O(f, (x_j)_j, (y_k)_k) - U(f, (x_j)_j, (y_k)_k) < \epsilon$ .

## Woche 9

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B, \tilde{B}, U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig diffbar und  $J(\phi)$  die Jacobi-Matrix von  $\phi$ .

- $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $B$  abbildet.
- $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \det(J(\phi)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $\tilde{B}$  abbildet.
- $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{B}} f(\phi(u, v)) \det(J(\phi)) \, du \, dv$  falls  $\phi : \tilde{B} \rightarrow B$  surjektiv und (im Inneren) injektiv auf  $B$  abbildet.

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Funktion.

- $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .
- Falls  $f$  stetig,  $\partial_2 f$  existiert und stetig ist, gilt  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .
- Falls  $f$  Riemann-integrierbar ist,  $\partial_2 f$  existiert und Riemann-integrierbar ist, gilt  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_2 f(x, y) \, dx$ .

## Woche 10

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Funktion.

- $\phi$  ist eine Parametrisierung der Fläche  $\phi(B)$ .
- $\phi(B)$  ist eine Fläche falls  $\phi(x, y) = (x, y, x + y)$  und  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ .
- $\phi(B)$  ist eine Fläche falls  $\phi(x, y) = (x, 0, 0)$  und  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  kompakt,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der glatten Fläche  $\phi(B) =: F$  und  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die Massenverteilung von  $F$  beschreibt.

- Die Oberfläche von  $F$  ist  $\iint_B \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$ .
- Die Gesamtmasse von  $F$  ist  $\iint_B f(u, v) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$ .
- Die Gesamtmasse von  $F$  ist  $\iint_B f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$ .

## Woche 11

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der glatten Fläche  $F = \phi(B)$ , und  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig.

- $\iint_F \vec{v} \, d\vec{O} = \iint_F \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \, dO$ , wobei  $\vec{u}$  der Einheitsnormalenvektor auf  $F$  ist.
- $\iint_F \vec{v} \, d\vec{O} = \iint_F \vec{v}(\phi(u, v)) \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\| \, dO$ .
- $\iint_F \vec{v} \, d\vec{O}$  ist unabhängig von der Parametrisierung.
- $\operatorname{div} \vec{v} = \sum_i \partial_i v_i$

Markiere die richtigen Aussagen

Sei  $B \subset \mathbb{R}^3$  kompakt und  $\partial B$  eine glatte Fläche. Dann gilt:

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \, d\vec{O} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz$$

- immer.
- falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $B$  stetig differenzierbar ist.
- falls für die Parametrisierung von  $B$  und  $\partial B$  gilt, dass die Normale aus  $B$  hinaus zeigt.
- falls für die Parametrisierung von  $B$  und  $\partial B$  gilt, dass die Normale in  $B$  hinein zeigt.

## Woche 12

Markiere die richtigen Aussagen:

Sei  $F \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit stückweise glatter Randkurve  $\partial F$  und  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld. (Die Konvention für die Orientierung von Randkurven vorausgesetzt, ) gilt:

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

- immer (die Gleichheit heißt Satz von Stokes)
- falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $F$  stetig ist.
- falls  $\vec{v}$  auf einer offenen Umgebung von  $F$  stetig differenzierbar ist.

Markiere die richtigen Aussagen:

Die Konvention für Orientierung von Randflächen ist:



- Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^2$  liegt das Gebiet rechts, wenn man die Randkurve im positiven Sinn durchläuft.
- Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^2$  liegt das Gebiet links, wenn man die Randkurve im positiven Sinn durchläuft.
- Bei einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit vorgegebenem Normalenvektor liegt bei positivem Umlaufsinn des Randes die Fläche links, wenn man von der Seite guckt, in die der Normalenvektor zeigt.

## Woche 13

### Potential und Vektorpotential

*Markiere die richtigen Aussagen*

Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld.

- Wenn  $\vec{v}$  ein Potential hat, dann gilt  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ .
- Wenn  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$  gilt, dann hat
- Wenn  $D$  einfach zusammenhängend und  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , dann hat  $\vec{v}$  ein Potential.
- Wenn  $\vec{v}$  ein Potential hat, dann gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .
- Wenn  $\vec{v}$  ein Vektorpotential hat, dann gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .
- Wenn  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , dann hat  $\vec{v}$  ein Vektorpotential.
- Wenn  $\vec{v}$  ein Vektorpotential hat, dann ist der Fluss durch jede geschlossene Fläche gleich 0.

## Quelle

[1] <http://educationzen.github.io/eduZ00/>