

# CÁLCULO.

## Boletín I. Repaso de nociones básicas.

1. Calcula o simplifica cuando sea posible

$$a) \frac{5 + \frac{8}{3}}{\frac{7}{5} + 1} - 2$$

$$b) \frac{5^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}}$$

$$c) 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{3}$$

$$d) 3^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}}$$

$$e) 3^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}$$

$$f) \ln(\mathbf{e})$$

$$g) \ln(\mathbf{e}^2)$$

$$h) \ln(0)$$

$$i) \ln(-1)$$

$$j) \ln(2)$$

$$k) \mathbf{e}^0$$

$$\ell) \mathbf{e}^{-1}$$

$$m) \mathbf{e}^{\ln(1)}$$

$$n) \mathbf{e}^{\ln(\mathbf{e})}$$

$$\tilde{n}) \mathbf{e}^{\ln(\mathbf{e}^3)}$$

$$o) \ln \sqrt{2^3}$$

$$p) \frac{\ln(5x)}{\ln\left(\frac{5}{x}\right)}$$

$$q) \frac{\ln(5+x)}{\ln(5-x)}$$

$$r) \ln(\mathbf{e}^2) \mathbf{e}^{\ln(5+x) - \ln(5x)}$$

$$s) \ln \left( \frac{x^2 - 1}{x^3} \right)^3$$

$$t) (3^5)^2$$

$$u) 3^{5+2}$$

$$v) 3^5 3^2$$

$$w) (3^2)^5$$

$$x) (5^{1/2})^{3/2}.$$

2. Racionaliza

$$a) \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$$

$$b) \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$$

3. Si  $a > 0$  entonces:

- $|x| = a$  significa que  $x = \dots$  o  $x = \dots$
- $|x| < a$  significa que  $\dots$
- $|x| \geq a$  significa que  $\dots$

4. El siguiente conjunto de puntos  $A = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 5 < 7\}$ , es:

$$a) A = (4, +\infty)$$

$$b) A = (-\infty, 4)$$

$$c) A = (0, 4)$$

$$d) A = (-\infty, 12)$$

5. Calcula los siguientes conjuntos de puntos:

- (a)  $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 6\}$ ,
- (b)  $C = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 5 < 7, x^2 - 3x + 2 > 6\}$ ,
- (c)  $D = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq 2 - 5x \leq 12\}$ ,
- (d)  $E = \{x \in \mathbb{R} / 4 < (x+3)^2\}$ .

6. Una solución de la ecuación  $(x-3)^4 + \sqrt{x+1} + (x-82) = 0$  es:

$$a) \ x = 1, \quad b) \ x = 0, \quad c) \ x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \quad d) \ x = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

7. Para la ecuación  $x(x-3) = 1$ , las soluciones son:

$$(a) \ x = 1 \text{ y } [x-3 = 1 \implies x = 4]$$

$$(b) \ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(c) \ x = 0 \text{ y } x = 3.$$

8. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$(a) \ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = 3,$$

$$(b) \ \sqrt{x-3} + 5 = x,$$

$$(c) \ (x-3)(x^2 - 4x + 4) = 0,$$

$$(d) \ e^{x-3} = 30,$$

$$(e) \ 3^x = 81,$$

$$(f) \ 9^{2x+1} = 27,$$

$$(g) \ 10^{5x} = 1000,$$

$$(h) \ e^{x^2-1} = 9,$$

$$(i) \ \ln(x-3) = 5,$$

$$(j) \ \ln(x+2) + \ln(x-2) = 1,$$

$$(k) \ \log_3(x^2) - \log_3(2x) = 2.$$

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$(a) \ |2x-4| = 6$$

$$(b) \ |7x-3| = -2$$

$$(c) \ |2x+4| = |5x-2|$$

10. ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones son polinomios?

$$a) \ f_1(x) = x^2 + 6x^{-3}$$

$$b) \ f_2(x) = x^{\frac{2}{3}} - 6x^3$$

$$c) \ f_3(x) = \frac{x^4 + 6x^3}{x^2 + 6x - 7}$$

$$d) \ f_4(x) = x^4 + 6x^3$$

11. Relación entre grados y radianes:

- (a) ¿Cuál es la relación entre los ángulos  $45^\circ$  y  $\pi$  radianes?
- (b) ¿Cuánto vale en radianes  $30^\circ$ ?
- (c) Convierte  $75^\circ$  a radianes.
- (d) Convierte  $\frac{17}{12}\pi$  radianes a grados.

Los ángulos se darán **SIEMPRE** en *radianes*

12. Completa la siguiente tabla con los valores correspondientes:

Ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Seno								
Coseno								
Tangente								
Cotangente								
Secante								
Cosecante								

13. Calcula, sin usar calculadora,

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

14. Determina el ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$  tal que

- (a)  $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,
- (b)  $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ .

15. Usando las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos,

- $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ ,
- $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$ ,

calcula o demuestra, según convenga:

(a)  $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)},$

(b)  $\sin\left(2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right),$

(c)  $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)},$

$$(d) \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)},$$

$$(e) \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}.$$

16. Ecuación de la recta.

- (a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(2, -1)$  y tiene pendiente 3.
- (b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(1, -1)$  y  $(2, 3)$ .
- (c) Sin calcular la ecuación, responde a la siguiente pregunta: ¿puede una recta pasar por los puntos  $(0, 2)$ ,  $(2, 1)$  y  $(4, -1)$ ?
- (d) Escribe la ecuación de **una** recta paralela a la recta  $y = x$ .
- (e) Escribe la ecuación de **la** recta paralela a la recta  $y = x$  que pasa por el punto  $P = (2, -1)$ .
- (f) Escribe la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto  $(3, \frac{7}{2})$ .
- (g) Escribe la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto  $(-1, \frac{5}{3})$ .
- (h) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1, 4)$  y es perpendicular a la recta de ecuación  $2y - 5x + 7 = 0$ .
- (i) Calcula la ecuación de la recta que pasa por  $(-1, -1)$  y es paralela a la que pasa por los puntos  $(0, 1)$  y  $(5, 0)$ .
- (j) Si la capacidad pulmonar cae del 100% a los 20 años hasta el 40% a la edad de 80 años, y se supone una relación lineal, obtén esa relación lineal y calcula la edad a la que corresponde un 25% de capacidad pulmonar.

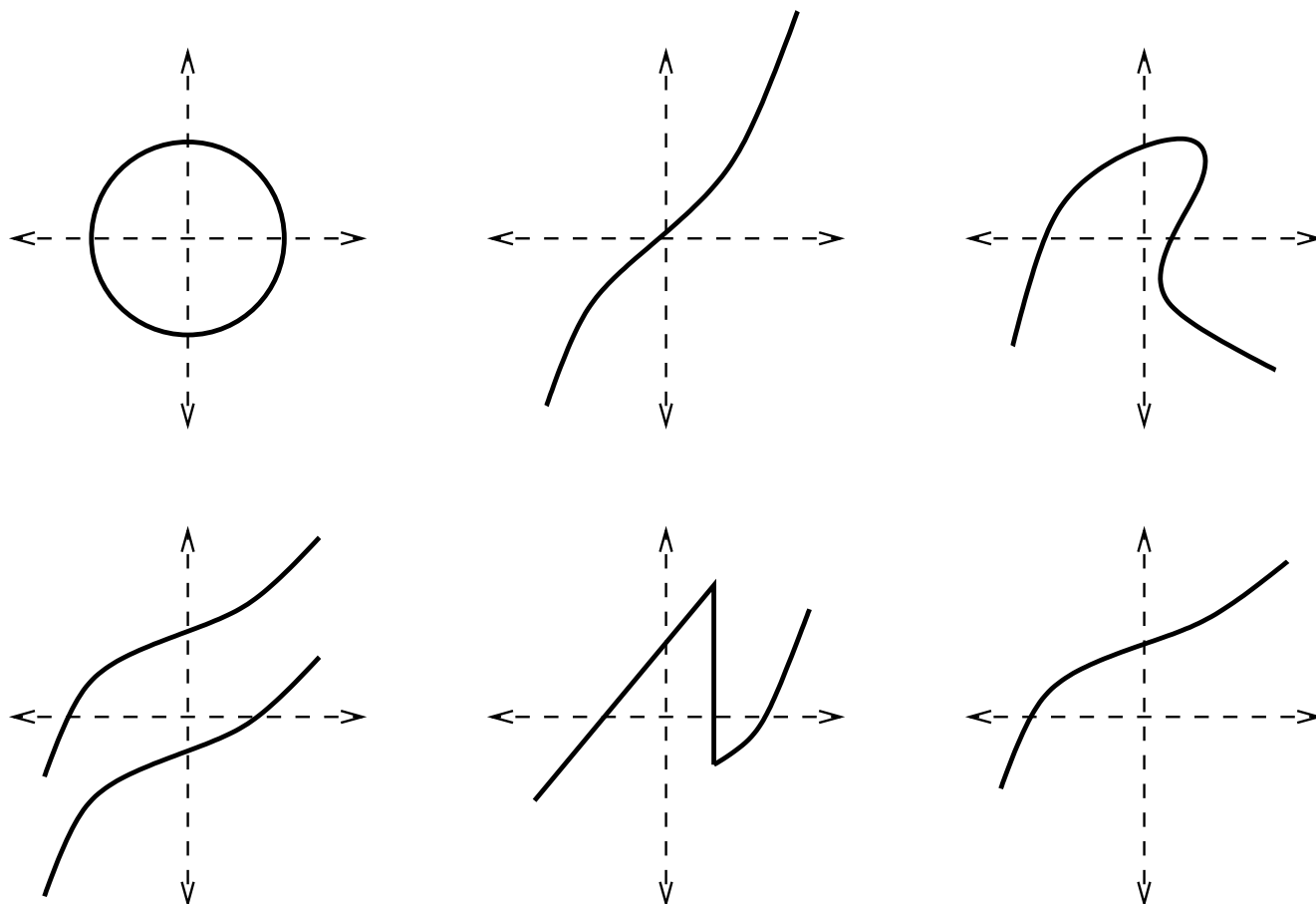
17. Calcula la ecuación de las circunferencias:

- (a) de centro  $(0, 0)$  y radio 2
- (b) de centro  $(1, 2)$  y radio 3
- (c) de centro  $(-1, 2)$  y radio 4.

18.  $y = 3x^2$  es una

- |                    |               |
|--------------------|---------------|
| a) circunferencia, | b) recta,     |
| c) parábola,       | d) hipérbola. |

19. ¿Cuáles de los siguientes dibujos podrían representar el gráfico de una función? ¿Por qué?



20. Analiza si cada una de las funciones siguientes son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

- (a)  $f_1(x) = 3x - x^2$ ,
- (b)  $f_2(x) = 2x^3 - x$ ,
- (c)  $f_3(x) = \frac{1}{2}x^4 + e^{x^2} + 5$ ,
- (d)  $f_4(x) = \frac{\tan(x) + \sin(x)}{\cos(x^2)}$ ,
- (e)  $f_5(x) = \frac{\cos(2x) - \sin(x)}{x^2 \cos(x)}$ ,
- (f)  $f_6(x) = \frac{x^4 \sin^3(x)}{\tan(x)}$ ,
- (g)  $f_7(x) = |x|(x+1)^2$ ,
- (h)  $f_8(x) = \frac{x^4 - \cos(x)}{x^2 - \sin(x)}$ .

21. ¿Qué propiedad gráfica caracteriza a una función par? ¿Y a una impar?

22. El coste  $C$  de enviar un paquete por una empresa de transporte depende del peso  $p$  en gramos, como sigue:

$$C(p) = \begin{cases} 0.8 & \text{si } p \in [0, 10) \\ 1 + 0.2p & \text{si } p \in [10, 20) \\ 1 + 0.1p & \text{si } p \in [20, 30) \\ p^2 & \text{si } p \in [30, \infty) \end{cases}$$

Dibuja la gráfica, indicando el dominio y el rango, y analiza el crecimiento de la función.

23. Sean  $f(x) = \frac{6x}{x^2-9}$  y  $g(x) = \sqrt{3x}$ .

Primero calcula  $(f \circ g)(12)$ , luego  $(f \circ g)(x)$  y, por último, encuentra el dominio de  $f \circ g$ .

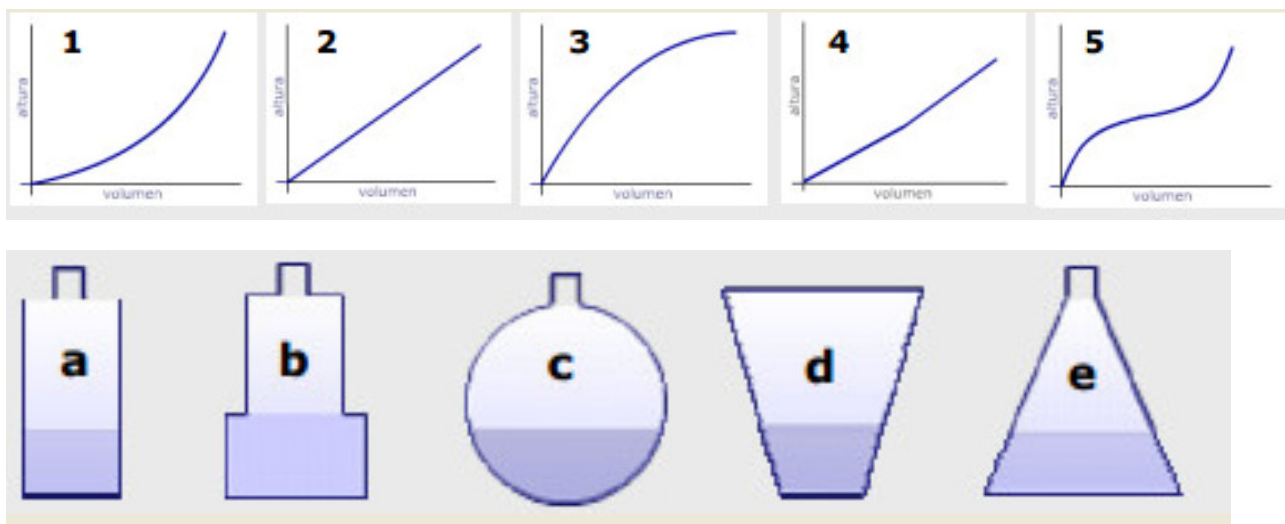
24. El agua de un charco de forma circular se evapora lentamente por el efecto del sol. Después de  $t$  minutos el radio del charco mide  $\frac{18}{2t+3}$  cm. Expresa el área  $A$  del charco en función del tiempo. Relaciona lo que has hecho con el concepto de composición de funciones.
25. Se sabe que el número  $n$  de ordenadores de sobremesa de los laboratorios de una facultad de Informática se incrementa cada curso académico, en función del número  $x$  de alumnos admitidos en la facultad, según la fórmula

$$n(x) = 10 + 0.05x.$$

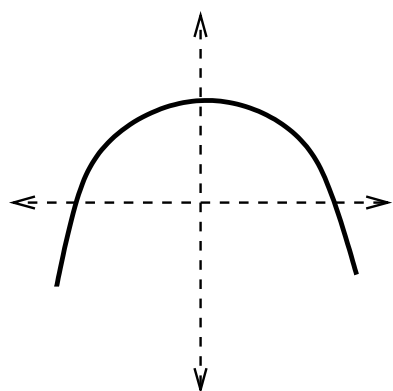
También se sabe que el número  $x$  de alumnos admitidos en cada curso académico depende del número  $a$  de alumnos de bachillerato científico-tecnológico que han aprobado selectividad, según la fórmula

$$x(a) = 100 + \sqrt{\frac{a}{12}}.$$

- (a) Expresa el número de ordenadores en función del número de aprobados en selectividad.
  - (b) Estima el número de ordenadores que tendría que comprar la facultad el próximo curso si aprobasen la selectividad 4800 alumnos de bachillerato científico-tecnológico.
  - (c) Halla la fórmula que calcula el número de aprobados conociendo el número de admitidos en la facultad.
26. Asocia cada una de las cinco gráficas con el proceso de llenado de cada uno de los recipientes.



27. ¿Existe la inversa de la función de la figura? ¿Por qué?



28. Comprobar que las funciones siguientes son inversas:

$$f(u) = \frac{u-1}{u+1}, \quad g(u) = \frac{u+1}{1-u}.$$

29. Calcula, en caso de existir, la inversa de las siguientes funciones:

- (a)  $f_1(x) = x^3 + 5$ ,
- (b)  $f_2(x) = \sin(2x - 7)$ ,
- (c)  $f_3(x) = e^{2x}$ ,
- (d)  $f_4(x) = \frac{1}{5} + e^x$ ,
- (e)  $f_5(x) = \sqrt{2x - 3}$ ,
- (f)  $f_6(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ ,
- (g)  $f_7(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ .

30. Si la longitud de un animal  $t$  días después de su nacimiento es  $\ell(t) = \frac{300}{1 + 9(0.8)^t}$  mm, ¿cuánto midió al nacer? Obtén una cota superior de su tamaño máximo.

31. Se sabe que las ganancias (o pérdidas) en miles de euros por la venta de cierto artículo, que depende del número,  $x$ , de ventas del mismo, viene dado por

$$y(x) = x^2 - 199x - 200.$$

- Determina cuál es la ganancia si se venden 250 artículos.
- Determina cuántos artículos se deben vender para obtener 19800 euros de ganancia.
- Determina a partir de qué cantidad de ventas se empieza a obtener ganancia.
- Dibuja la gráfica de la función ganancias/pérdidas e interprétala.

32. Un panadero desea mezclar harina de centeno, a 10 euros el kilo, con harina de trigo, a 24 euros el kilo, con el fin de obtener 100 kilos de harina de mezcla que venderá a 18 euros el kilo. ¿Cuántos kilos de harina de centeno y cuántos de harina de trigo debe mezclar?

33. Se conoce como *ventana normanda* a aquella en forma de rectángulo rematado por un semicírculo. Su nombre se debe a la arquitectura de estilo románico de los normandos caracterizada por arcos redondeados, en especial en puertas y ventanas (un claro ejemplo es la fachada de la iglesia abacial de Saint-Étienne sita en Caen).

Si el perímetro de una ventana normanda es 5.5 metros, expresa el área de la ventana como función del ancho  $x$  de la misma.

34. Responde a las siguientes cuestiones:

- (a) Halla un número racional y otro irracional situados entre  $3^{500}$  y  $3^{500} + 1$ .
- (b) Encuentra un número real  $\alpha$  tal que  $\alpha^2$  sea irracional y  $\alpha^4$  sea racional.
- (c) Encuentra dos números irracionales tales que su suma y su producto sean racionales.
- (d) (*Ex. febrero 2004*) Dada  $f(x) = 2^x - 3$ , ¿cuál es el dominio de  $f^{-1}$ ?

*Respuesta:*  $(-3, \infty)$ .

35. Calcula el resultado de elevar al cuadrado las siguientes expresiones:

a)  $6 + a$

b)  $6 - a$

c)  $-6 + a$

d)  $-6 - a$