

# 锦上添花：机器学习算法助力组合优化

## ——机器学习系列报告之五

金融工程深度

因子研究一直是量化领域的重心。研究者在基于新数据新想法不断努力挖掘有效因子的同时，如何将手头上已有的因子转化为最终的投资组合也是摆在基金经理们眼前的现实问题。本篇报告的主要研究目的，是在给定最终复合因子的前提下，探索新的多头股票组合构建及优化方式，并运用机器学习算法实现具有操作意义的指数增强构建方法。

### ◆ 因子组合构建方式不多：多为线性优化

线性优化是主流的因子组合构建方式之一，它有着简单直观、优化计算复杂程度低，计算耗时极少的优点。但相应的，它的不足之处是丢弃了不同个股之间的相关性信息，同时会使得最终的优化结果中，个股集中度较大。

### ◆ 二次规划带来的边际提升有限

采用二次规划的优化方式，可以融入个股间相关性信息。但通过测试，以历史收益估计协方差矩阵的二次规划基本不能在线性优化基础上带来边际改善。而通过风格因子数据估计协方差矩阵的二次规划虽能小幅提高组合的信息比率，但波动与最大回撤也相应增大，整体带来的边际改善较为有限。同时二次规划对于参数的敏感性过高也是其痛点之一。

### ◆ 借鉴风险预算模型：运用机器学习算法克服优化难点

借鉴资产配置中的风险预算模型构建因子组合的优化问题，并运用机器学习中的循环坐标下降（CCD）与交替方向乘子（ADMM）算法，解决在有各类约束条件下的优化实现。使优化问题具有可操作性。

### ◆ 风险预算增强组合更稳定：跟踪误差小、换手低、持股更分散

以综合质量因子 EBQC 因子为例，分别比较线性优化、风险平价优化、风险预算优化下的中证 500 指数增强与沪深 300 指数增强（测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31）。其中风险预算优化中证 500 增强组合相比线性优化组合，信息比从 1.54 提升至 1.80，最大回撤由 7.7% 降至 6.4%，换手率从 48.5% 降至 41.0%，分散比率均值由 1.64 升至 1.68。风险预算优化沪深 300 增强组合相比线性优化组合，信息比从 1.49 提升至 1.61，最大回撤由 4.4% 降至 3.6%，换手率从 37.4% 降至 33.0%，分散比率均值由 1.65 升至 1.68。

### ◆ 风险提示：结果均基于模型和历史数据，模型存在失效的风险。

### 分析师

胡骥聪（执业证书编号：S0930519060002）

021-52523683

[hujicong@ebcn.com](mailto:hujicong@ebcn.com)

周萧潇（执业证书编号：S0930518010005）

021-52523680

[zhouxiaoxiao@ebcn.com](mailto:zhouxiaoxiao@ebcn.com)

刘均伟（执业证书编号：S0930517040001）

021-52523679

[liujunwei@ebcn.com](mailto:liujunwei@ebcn.com)

### 相关研究

《以质取胜：EBQC 综合质量因子详解——多因子系列报告之十七》

《沪深 300 指数增强模型构建与测试——多因子系列报告之二十三》

# 目 录

1、 主流组合优化方法.....	5
1.1、 线性优化：个股集中度高.....	5
1.2、 二次规划.....	6
1.2.1、“因子—收益”线性假设下的二次规划组合.....	7
1.2.2、 风格因子数据估计协方差矩阵的二次规划组合.....	8
2、 配置型组合优化.....	10
2.1、 借鉴资产配置模型的发展方向.....	10
2.2、 运用机器学习算法来克服难点.....	11
2.2.1、 坐标下降算法.....	12
2.2.2、 交替方向乘子算法.....	13
3、 配置型优化下指数增强效果.....	13
3.1、 中证 500 指数增强.....	14
3.2、 沪深 300 指数增强.....	16
4、 总结.....	18
5、 风险提示.....	19
附录.....	20
A. 风格因子构造方式.....	20
B. 风险预算优化问题转换.....	21
C. 标准差风险测度下 ADMM 算法：x 更新与 y 更新的具体方法.....	22

## 图目录

图 1：线性优化下的 EBQC 中证 500 指数增强净值表现.....	6
图 2：式（5）二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强信息比 .....	8
图 3：式（7）二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强信息比 .....	9
图 4：不同优化下 EBQC 因子 500 增强净值比较 .....	15
图 5：不同优化下 EBQC 因子 500 增强相对净值比较 .....	15
图 6：不同优化方式下 500 增强组合分散比率序列 .....	15
图 7：不同优化下 EBQC 因子 300 增强净值比较 .....	17
图 8：不同优化下 EBQC 因子 300 增强相对净值比较 .....	17
图 9：不同优化方式下 300 增强组合分散比率序列 .....	17

## 表目录

表 1：线性优化下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据.....	6
表 2：式（5）二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据.....	7
表 3：式（7）二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据.....	9
表 4：EBQC 因子 500 增强组合统计数据 .....	14
表 5：风险预算优化 EBQC 因子中证 500 增强分年度表现统计.....	16
表 6：EBQC 因子 300 增强组合统计数据 .....	16
表 7：风险预算优化 EBQC 因子沪深 300 增强分年度表现统计.....	18
表 8：风格因子分类及构造方式.....	20
表 9：常见约束集合的投影表达.....	23

因子研究一直是量化领域的重心。研究者在基于新数据新想法不断努力挖掘有效因子的同时，如何将手头上已有的因子转化为最终的投资组合也是摆在基金经理们眼前的现实问题。

本篇报告的主要研究目的，即在于给定最终复合因子的前提下，探索新的多头股票组合构建及优化方式，并运用机器学习算法实现具有操作意义的指数增强模型建议。

## 1、主流组合优化方法

在没有任何约束的条件下，一种简单的组合构建方式是：按因子大小排序自上而下选取固定个数的股票，等权持有。这种组合构建方式简单直观，长期效果也不错。但对于市场不同风格的暴露程度并不稳定，致使这样的组合更容易受到某些风格表现的影响。因此现在市场上更多的组合是基于一定参考基准，在一些约束条件下优化权重后构建而成的。最典型的的就是各类指数增强产品。

### 1.1、线性优化：个股集中度高

线性优化是目前主流的组合优化方式之一，它的目标函数是：

$$\text{Maximize}_w w^T \alpha \quad (1)$$

或者等价的：

$$\text{Minimize}_w -w^T \alpha \quad (2)$$

其中，

$w$ ：个股权重向量；

$\alpha$ ：个股复合因子值向量。

线性优化的优点很明显，能够以最简单直观的方式结合所需要的各种约束条件，获得最终的优化权重。同时由于仅有一次项，它的优化计算复杂度很低，计算耗时极少。但相应的，这样的优化方式相当于丢弃了不同个股之间的相关性信息，同时会使得最终的优化结果中，个股集中程度较大。

我们以构建一个中证 500 指数增强为例。这里我们使用的复合因子是 EBQC 光大综合质量因子，因子仅作为示例使用，故其构造方式不在此展开，感兴趣的读者可参考研报《以质取胜：EBQC 综合质量因子详解——多因子系列报告之十七》。具体约束条件设置与主要假设如下：

- 采用综合质量因子 EBQC 对中证 500 成分股打分，中证 500 成分股内选股；
- 约束行业偏离度不超过 10%；
- 约束市值因子暴露度不超过 5%；
- 个股权重必须处于 [0, 2%] 范围内；
- 月度调仓，费率假设为单边 0.3%；

- 样本区间为 2009-01-01 至 2019-12-31。

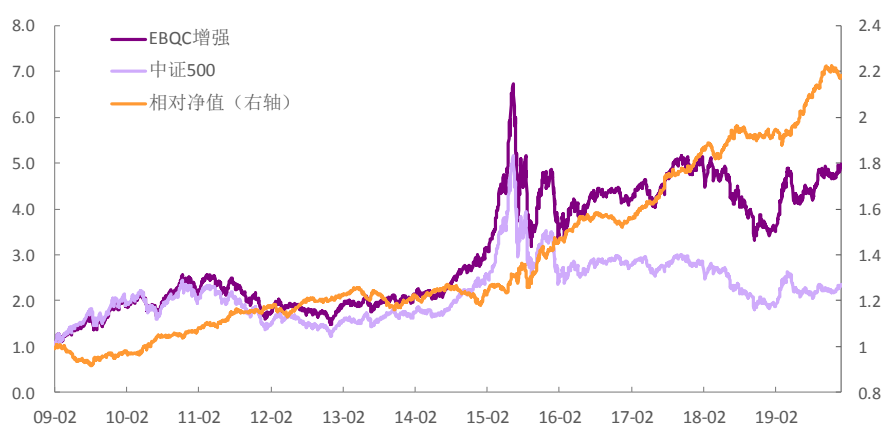
从测试结果上可以看出，在因子有较好选股能力时，简单的线性优化就能使组合有较好地收益特征。这个例子里，EBQC 中证 500 指数增强组合相对于中证 500 基准，年化超额 7.3%，信息比率 1.38，最大回撤 9.1%。

表 1：线性优化下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据

统计项	年化超额收益	相对波动	信息比率	相对最大回撤
统计值	7.28%	5.20%	1.38	-9.14%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

图 1：线性优化下的 EBQC 中证 500 指数增强净值表现



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

同时我们观察该组合的持仓与调仓信息。平均下来组合每期持仓 64.3 只股票，双边换手 56.5%。由于个股最大持仓占比受到不能超过 2% 的约束，理论上每期股票个数极限不能少于 50 只，而该组合平均每期持仓不到 65 只，且超过一半持仓接近 2% 的最大持仓限制，因此可以看出该线性优化下的组合，个股集中程度较高。

## 1.2、二次规划

除了线性优化以外，得益于马科维兹组合优化理论，二次规划是我们非常熟悉的另外一种优化方式。在均值方差优化理论中，它的目标函数是：

$$\text{Minimize}_w \frac{1}{2} w^T \Sigma w - w^T \mu \quad (3)$$

其中，

$w$ ：资产权重向量；

$\mu$ ：资产预期收益向量；

$\Sigma$ ：资产协方差矩阵。

二次规划大部分运用于资产配置中。相比于线性优化，二次规划考虑了各个资产间的相互关系。但若要将其实运用于基于现有复合因子的组合优化，最明显的问题是如何将因子值与预期收益进行转换。同时在股票池很大的时候，直接用收益率估计协方差矩阵，运算效率会有一定影响。接下来我们尝试两种二次规划组合的效果。

### 1.2.1、“因子—收益”线性假设下的二次规划组合

一种简单的转换方式是仅假设因子值跟预期收益成线性关系：

$$\alpha = \lambda * \mu \#(4)$$

其中， $\lambda$ 是比例系数。

那么上述式 (3) 则变为：

$$\text{Minimize}_w \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w - w^T \alpha \#(5)$$

这里  $\Sigma$  依然是由历史收益数据估计的协方差矩阵，这里我们由最近一年（250 日）的日收益率数据估计。基于上一小节同样的约束与假设，我们测试上述目标函数下 EBQC 中证 500 指数增强的效果。关于  $\lambda$  我们分别测试以下取值时组合的效果：

$$[10^{1.0}, 10^{1.1}, 10^{1.2}, 10^{1.3}, 10^{1.4}, \dots, 10^{2.6}, 10^{2.7}, 10^{2.8}, 10^{2.9}, 10^{3.0}] \#$$

通过测试的结果，可以看出各个参数下二次规划下组合的表现与线性优化差异不大。信息比随着参数  $\lambda$  对数的上升，先升后降，在  $\log_{10}(\lambda) = 1.6$  时达到峰值 1.41。此时与线性优化的信息比 1.38 相差也不超过 0.03。同时在持仓数量与换手率上与线性优化的结果大致相当。因此，从收益表现及持仓特征来看，二次规划并未带来明显改善。

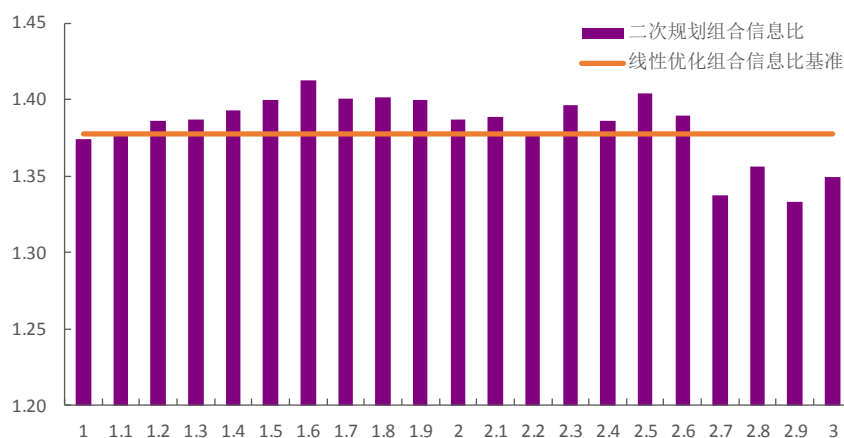
表 2：式 (5) 二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据

参数 $\log_{10}(\lambda)$	年化超额收益	相对波动	信息比率	相对最大回撤
1	7.26%	5.20%	1.37	-9.05%
1.1	7.29%	5.21%	1.38	-9.06%
1.2	7.33%	5.20%	1.39	-9.29%
1.3	7.33%	5.20%	1.39	-9.24%
1.4	7.36%	5.20%	1.39	-9.25%
1.5	7.39%	5.19%	1.40	-9.31%
1.6	7.46%	5.19%	1.41	-9.13%
1.7	7.40%	5.19%	1.40	-9.23%
1.8	7.39%	5.19%	1.40	-9.32%
1.9	7.38%	5.19%	1.40	-9.44%
2	7.30%	5.18%	1.39	-9.46%
2.1	7.30%	5.17%	1.39	-9.65%
2.2	7.22%	5.16%	1.38	-9.25%
2.3	7.36%	5.18%	1.40	-9.39%
2.4	7.28%	5.17%	1.39	-9.23%
2.5	7.37%	5.16%	1.40	-9.51%

2.6	7.32%	5.18%	1.39	-9.72%
2.7	7.02%	5.18%	1.34	-9.72%
2.8	7.12%	5.17%	1.36	-9.08%
2.9	6.98%	5.16%	1.33	-9.41%
3	7.06%	5.16%	1.35	-9.36%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

图 2：式（5）二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强信息比



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

### 1.2.2、风格因子数据估计协方差矩阵的二次规划组合

延续上一节“因子—收益”线性关系的假设，但这一次协方差矩阵不再由历史收益率数据估计，而是借由风格因子收益及股票在该风格因子的暴露数据计算而得，即：

$$\Sigma = L \Sigma_{style} L^T \quad (6)$$

其中，

$L_{n \times m}$ ：股票的因子暴露矩阵， $n$  为股票个数， $m$  为风险因子个数；

$\Sigma_{style}$ ：风格因子收益协方差矩阵， $m \times m$ 。

此时，上述式（5）变为：

$$\text{Minimize}_w \frac{\lambda}{2} w^T L \Sigma_{style} L^T w - w^T \alpha \quad (7)$$

基于同样的约束、假设与参数，我们测试上述目标函数下 EBQC 中证 500 指数增强的效果，这里我们使用了 9 大类风格因子：Beta、盈利、成长、杠杆、流动性、动量、规模、价值、波动。构建方法遵循了 Barra 的组合及赋权方式，具体使用的数据与计算方法见文末附录。

式（7）的参数测试结果显示，在用风格因子数据替代收益数据估计协方差矩阵后，二次规划组合的表现有一定提升，其信息比普遍高于线性优化组合，平均有 0.05 左右的提升。但同时，组合的相对最大回撤也更大。而且在持仓数量与换手率等特征上与线性优化的结果基本没有差异。因此在风格因子估



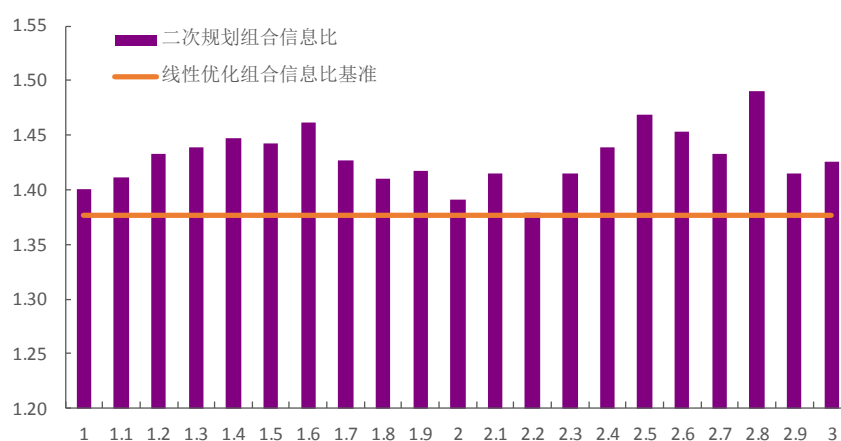
计协方差矩阵的优化体系里，组合的收益有所提升，但综合其它方面，整体提升有限。

表 3：式 (7) 二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强统计数据

参数 $\log_{10}(\lambda)$	年化超额收益	相对波动	信息比率	相对最大回撤
1	7.37%	5.17%	1.40	-9.17%
1.1	7.45%	5.19%	1.41	-9.14%
1.2	7.58%	5.19%	1.43	-9.20%
1.3	7.58%	5.17%	1.44	-9.22%
1.4	7.64%	5.18%	1.45	-9.15%
1.5	7.60%	5.17%	1.44	-9.20%
1.6	7.69%	5.16%	1.46	-9.26%
1.7	7.51%	5.17%	1.43	-9.31%
1.8	7.45%	5.19%	1.41	-9.24%
1.9	7.51%	5.20%	1.42	-9.19%
2	7.40%	5.23%	1.39	-9.21%
2.1	7.56%	5.25%	1.42	-9.19%
2.2	7.42%	5.29%	1.38	-9.27%
2.3	7.70%	5.34%	1.42	-9.64%
2.4	7.88%	5.37%	1.44	-9.60%
2.5	7.99%	5.33%	1.47	-9.74%
2.6	7.95%	5.36%	1.45	-10.23%
2.7	7.88%	5.39%	1.43	-9.77%
2.8	8.23%	5.40%	1.49	-9.40%
2.9	7.86%	5.46%	1.42	-9.97%
3	8.04%	5.53%	1.43	-9.65%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

图 3：式 (7) 二次规划下的 EBQC 中证 500 指数增强信息比



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

## 2、配置型组合优化

上一章中我们讨论了在因子组合中运用均值方差优化的效果。这一章将延续上一节的思路，继续探索其它优化方式，并指出其难点与克服的方法。

### 2.1、借鉴资产配置模型的发展方向

组合优化与资产配置的目标较为相似，都是配权问题。既然可以通过二次规划来进行组合优化，那么我们何不尝试借鉴资产配置模型的发展方向。

在资产配置模型中，均值方差优化的一个被人广为诟病的缺点，在于其对于输入的参数非常敏感，预期收益或协方差矩阵中一个微小的变动，可能会大幅改变最终优化出的权重结果。也是因为这个原因，更为参数稳定的风险预算模型（及其特例，风险平价）在如今资产配置运用中受众更广。

风险预算模型中，资产的权重最终会被优化成每个资产的风险贡献与事先给定的一个风险预算相匹配。其数学表达如下：在给定一个一致凸性的风险测度  $Risk(w)$  后，对于每一种配权  $w$ ，其风险测度可分解（Eular 分解）为：

$$Risk(w) = \sum_{i=1}^n w_i * \frac{\partial Risk(w)}{\partial w_i} \quad \#(8)$$

其中， $RC_i = w_i * \frac{\partial Risk(w)}{\partial w_i}$  即是资产  $i$  的风险贡献。该风险贡献占比要与该资产事先定好的风险预算  $RB_i$  相等， $RB_i = RC_i / Risk(w)$ ，风险预算的和为 1， $\sum_{i=1}^n RB_i = 1$ 。由于风险是非负的，这里已经默认每个资产的最小权重不得小于 0。一般而言，该组合的权重可以通过如下优化问题求得（其等价性具体推导可参见附录）：

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_w Risk(w) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i \geq c \\ \mathbf{1}^T w = 1 \\ w > \mathbf{0} \end{cases} \quad \#(9) \end{aligned}$$

进一步，上述式（9）中的权重和等于 1 这个约束可以扔掉，只需在优化最后重新将权重归一化即可。基于拉格朗日方程，上述优化问题可转化为如下优化问题：

$$\text{Minimize}_w Risk(w) - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i \quad \#(10)$$

其中  $\lambda$  为任意大于 0 的实数。

式（10）优化问题有几个优点，一个是由于多了对数障碍惩罚项（ $\sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i$ ），参数稳定性得到了极大提高。另一个就是在  $w$  严格大于 0 时，对于任意正数  $\lambda$ ，式（10）优化问题有唯一解。

那么我们可不可以将风险预算模型套用到组合优化上呢，这个想法有两个重要的难点需要克服：

1. 传统的风险预算算法运算效率在规模延展性方面较差，随着资产数量上升，计算时间指数级放大。这类算法用在资产数量 10 个左右的

大类资产配置上没什么问题，但股票组合的资产数量成百上千，优化效率急剧下降。

2. 不像在大类资产配置，优化问题中基本没什么约束条件，当我们进行组合优化时，普遍会有个股权重约束、风格约束、行业约束等各类约束条件。这些更为苛刻的约束条件，使得优化问题更为复杂化。

## 2.2、运用机器学习算法来克服难点

在上述讨论中，我们知道如果想对股票组合直接套用风险预算模型并不现实。该小节将介绍一些机器学习算法，并阐述如何借用它们来克服上述难点。

首先我们定义问题，不失一般性，我们的风险预算股票组合要满足以下数学表达：

$$\begin{cases} RB_i = \frac{RC_i}{Risk(w)}, i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{1}^T w = 1 \\ w \in \Omega \end{cases} \quad \#(11)$$

其中， $\Omega$ 为所有约束条件的集合。

实际上，如果上述问题在没有约束 $\Omega$ 时的解 $w \notin \Omega$ ，那么式(11)所描述的问题是无解的。因此在有约束时，我们的目标应该改为风险贡献占比尽可能地接近预设的风险预算。此时，式(10)的描述仍然成立，只是有了更多的约束条件。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_w Risk(w) - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i \\ & \text{s.t. } w \in \Omega \end{aligned} \quad \#(12)$$

或者等价地，写为：

$$\text{Minimize}_w \mathcal{L}(w; \lambda) = Risk(w) - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i + 1_{\Omega}(w) \quad \#(13)$$

其中， $1_{\Omega}(w)$ 是指示函数：

$$1_{\Omega}(w) = \begin{cases} 0, & w \in \Omega \\ +\infty, & w \notin \Omega \end{cases} \quad \#(14)$$

在式(13)中，对于任意大于0的参数 $\lambda$ ，优化问题都有对应的解 $w(\lambda)$ 。我们对于 $\lambda$ 选取，则选择使得 $w(\lambda)$ 的和为1的 $\lambda$ 值。该值我们可以通过二分法求得其数值解，只需确保两个 $\lambda$ 初始值分别使得 $w(\lambda)$ 的和大于1与小于1。具体算法如下：

1. 确认两个初始值 $\lambda_{min} < \lambda_{max}$ ，使得 $w(\lambda_{min}) < 1$ ， $w(\lambda_{max}) > 1$ ；
2. 取 $\lambda = \frac{\lambda_{min} + \lambda_{max}}{2}$ ，并求解 $w(\lambda) = \text{argmin}_w \mathcal{L}(w; \lambda)$ ；
3. 若 $w(\lambda) < 1$ ，则 $\lambda_{min}$ 用 $\lambda$ 更新；若 $w(\lambda) > 1$ ，则 $\lambda_{max}$ 用 $\lambda$ 更新；
4. 重复循环步骤2与3，直至 $w(\lambda)$ 的和与1之间的差距小于事先定下的收敛误差标准；
5. 以最后一次循环的 $\lambda$ 值与 $w(\lambda)$ 值作为优化问题的结果。

这里一个关键性的问题是，上述算法步骤 2 中， $w(\lambda) = \operatorname{argmin}_w \mathcal{L}(w; \lambda)$  的求解。如果求解速度很慢，那么势必会大大影响整个算法的效率。下面我们介绍一些适合该问题求解的机器学习算法。

### 2.2.1、坐标下降算法

梯度下降 (Gradient Descent) 是机器学习 (尤其是神经网络模型) 中最常用的算法之一，它每次计算出目标函数在当前点的梯度方向，并沿其反方向偏移从而获得更新值。而坐标下降 (Coordinate Descent) 是梯度下降的一个衍生变种，它每一次更新并不计算完整的梯度，而是仅在其中一个坐标方向上进行微分计算，并保持其它坐标值不变，仅沿着该坐标偏移一小步。其算法步骤如下：

对于无约束优化问题  $\operatorname{Minimize}_w f(w)$ ，其中  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

1. 获得初始值  $w = w^{(0)}$ ;
2. 选择一个方向  $i \in [1, 2, \dots, n]$ ，计算在这个方向上的梯度  $\nabla_i f(w)$ ;
3.  $w$  更新为  $w = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_i - \eta * \nabla_i f(w), w_{i+1}, \dots, w_n)$ ，其中  $\eta$  为学习速率。即除了坐标  $i$  有更新以外，其它坐标保持不变;
4. 重复循环步骤 2 与 3，直至收敛;
5. 以最后一次循环的  $w$  值作为优化问题的结果。

上述算法中，步骤 2 涉及挑选一个方向。主流的挑选方式有两种，一种是随机挑选 (Random Coordinate Descent)，一种是固定顺序的循环挑选 (Cyclical Coordinate Descent)。这两种方式并没有明显的优劣之分，从简便性角度出发，我们这里使用循环坐标下降算法 (后简称 CCD)。

由于我们是有约束的优化问题，因此在运用 CCD 的过程会额外多一步：将无约束下的更新值  $w$ ，投影到约束空间  $\Omega$  上，以投影  $w = \mathcal{P}_\Omega(w)$  作为该轮循环的更新值，算法步骤如下：

对于优化问题  $\operatorname{Minimize}_w f(w)$ ，s.t.  $w \in \Omega$ ，其中  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

1. 获得初始值  $w = w^{(0)}$ ;
2. 选择一个方向  $i \in [1, 2, \dots, n]$ ，计算在这个方向上的梯度  $\nabla_i f(w)$ ;
3.  $w$  更新为  $w = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_i - \eta * \nabla_i f(w), w_{i+1}, \dots, w_n)$ ，其中  $\eta$  为学习速率。即除了坐标  $i$  有更新以外，其它坐标保持不变;
4. 将更新后的点投影到  $\Omega$  上， $w = \mathcal{P}_\Omega(w)$ ;
5. 重复循环步骤 2、3 与 4，直至收敛;
6. 以最后一次循环的  $w$  值作为优化问题的结果。

但是这个方式能否收敛到正确的最优解，取决于约束条件与变量如何排序 (Roncalli, 2019)。因此在股票组合优化中，仅运用 CCD 算法并不足以保证获得优化后的权重。所以我们还需要配合另一个算法：交替方向乘子。

## 2.2.2、交替方向乘子算法

交替方向乘子 (Alternating direction method of multipliers, 后简称 ADMM) 是 Gabay 与 Mercier 在 1976 年引入, 是一种算子拆分技巧, 用以解决如下问题:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{(x,y)} f(x) + g(y) \\ & \text{s. t. } Ax + By = c \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $c \in \mathbb{R}^p$ 。函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  都是闭凸函数。该问题的优化算法如下 (Boyd, 2010):

1. 获得  $x^{(0)}$  与  $y^{(0)}$  的初始值, 初始化  $u^{(0)} = \mathbf{0}$ , 并确定参数  $\varphi$ ;
2. 对于每一轮循环  $k$ , 依次:
  - a) 更新  $x^{(k)} = \arg\min_x \{f(x) + \frac{\varphi}{2} \|Ax + By^{(k-1)} - c + u^{(k-1)}\|_2^2\}$
  - b) 更新  $y^{(k)} = \arg\min_y \{g(y) + \frac{\varphi}{2} \|Ax^{(k)} + By - c + u^{(k-1)}\|_2^2\}$
  - c) 更新  $u^{(k)} = u^{(k-1)} + (Ax^{(k)} + By^{(k)} - c)$
3. 在步骤 2 不断循环, 直至收敛;
4. 以最后一次循环的  $\{x, y\}$  作为优化问题的结果。

对于我们组合的优化问题, 式 (13) 可以改写成:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{(x,y)} \text{Risk}(x) - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln x_i + 1_{\Omega}(y) \\ & \text{s. t. } x - y = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $f(x) = \text{Risk}(x) - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln x_i$ ,  $g(y) = 1_{\Omega}(y)$ 。

如果我们进一步取标准差风险测度  $\text{Risk}(x) = -x^T \mu + c * \sqrt{x^T \Sigma x}$ , 那么算法步骤 2 中,  $x$  更新部分的优化问题便成为一个无约束风险预算问题, 可以通过上一小节的 CCD 算法求解。而  $y$  更新部分则成为一个投影算子  $y^{(k)} = \mathcal{P}_{\Omega}(x^{(k)} + u^{(k-1)})$ , 这一部分的求解在有多个约束条件构成凸约束空间  $\Omega$  时, 涉及到运用邻近算子 (Proximal Operator) 与 Dykstra 算法。 $x$  更新及  $y$  更新的具体优化求解过程放在文末附录。

## 3、配置型优化下指数增强效果

上一章介绍了用以优化配置型组合优化的优化算法。这一章节将实证该优化方式在指数增强组合上的效果。我们分别选取目前市场上最主流的增强指数: 中证 500 与沪深 300。比较配置型优化下指数增强的效果与线性优化的差异。

在我们之前的研报《沪深 300 指数增强模型构建与测试——多因子系列报告之二十三》中, 我们得出了对个股权重 (尤其是权重股权重) 的约束控制是沪深 300 增强表现的关键之一。因此该章节的优化测试中参考该结论, 也将设置个股相对基准权重的约束条件。具体的基本假设与约束条件如下:

- 采用综合质量因子 EBQC 对指数内成分股打分, 成分股内选股;
- 个股权重满足: 大于 0%, 小于 100%, 权重和为 1;

- 约束行业相对偏离度不超过 10%;
- 约束市值因子暴露度不超过 5%;
- 个股权重相对基准绝对偏离度不超过 1%;
- 月度调仓, 费率假设为单边 0.3%;
- 样本区间为 2009-01-01 至 2019-12-31。

其中, “个股权重相对基准绝对偏离度不超过 1%”的约束与我们第一章线性优化测试中“个股权重必须处于[0, 2%]范围内”的约束有所差别。

参与比较的具体优化方式如下:

1. 线性优化:  $\text{Minimize}_{\mathbf{w}} -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha}$ ;

2. 有约束风险平价:

$$\text{Minimize}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha} + c * \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i + 1_{\Omega}(\mathbf{y})$$

3. 有约束风险预算:

$$\text{Minimize}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha} + c * \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln x_i + 1_{\Omega}(\mathbf{y})$$

其中,  $RB_i$  的设置规则是, 对于标准化后的因子值,

- 若股票  $i$  的因子值  $\alpha_i \leq 0$ , 那么  $RB_i = \epsilon$ ,  $\epsilon$  是事先给定的近似于 0 的极小数, 为保证算法运行不能直接设为 0;
- 若股票  $i$  的因子值  $\alpha_i > 0$ , 那么  $RB_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{\alpha_j > 0} \alpha_j}$ 。

### 3.1、中证 500 指数增强

我们首先测试不同优化方式在中证 500 指数增强上的效果。组合线性优化下年化超额收益 7.0%, 信息比率 1.54, 相对最大回撤 7.7%, 平均双边换手 56.5%。这个表现相比于第一章节中的线性优化结果 (信息比率 1.38, 相对最大回撤 9.1%, 平均双边换手 48.5%) 已经有了不小提升。可见对个股权重相对与基准偏差的约束在中证 500 增强里也能有效提升组合表现。

风险平价优化组合的表现与其它优化组合差异较大, 它的相对年化波动 3.0%, 明显小于其它组合; 且换手率很低, 平均双边仅 21.2%, 同时逐年稳定性很强, 每年表现基本一致。但它在收益端明显弱于其它组合, 仅 3.0% 的年化超额。信息比仅 0.98。

风险预算优化组合收益表现与线性优化组合相当, 年化超额收益 7.0%, 但风险端优势明显, 相对年化波动 3.8%, 信息比率 1.80, 显著高于线性优化组合; 相对最大回撤 6.4%, 好于线性优化组合的 7.7%。其双边换手率平均 41.0%, 略低于线性优化组合的 48.4%。

表 4: EBQC 因子 500 增强组合统计数据

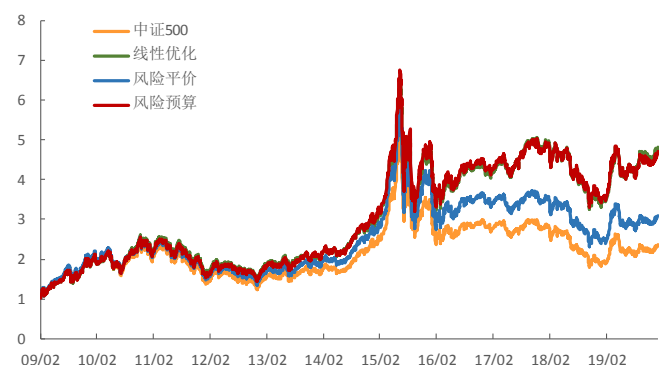
	线性优化	风险平价	风险预算
年化收益	15.2%	11.3%	15.8%
年化波动	28.5%	29.0%	28.8%
夏普比率	0.64	0.52	0.65



最大回撤	-52.2%	-61.3%	-52.5%
年化超额收益	7.0%	3.0%	<b>7.0%</b>
相对年化波动	4.4%	3.0%	<b>3.8%</b>
信息比率	1.54	0.98	<b>1.80</b>
相对最大回撤	-7.7%	-6.5%	<b>-6.4%</b>

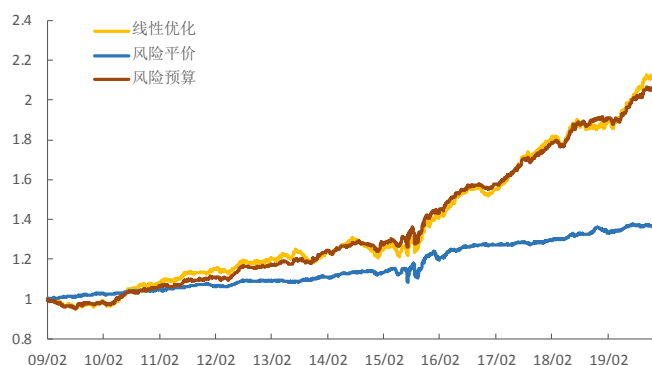
资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

图 4：不同优化下 EBQC 因子 500 增强净值比较



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

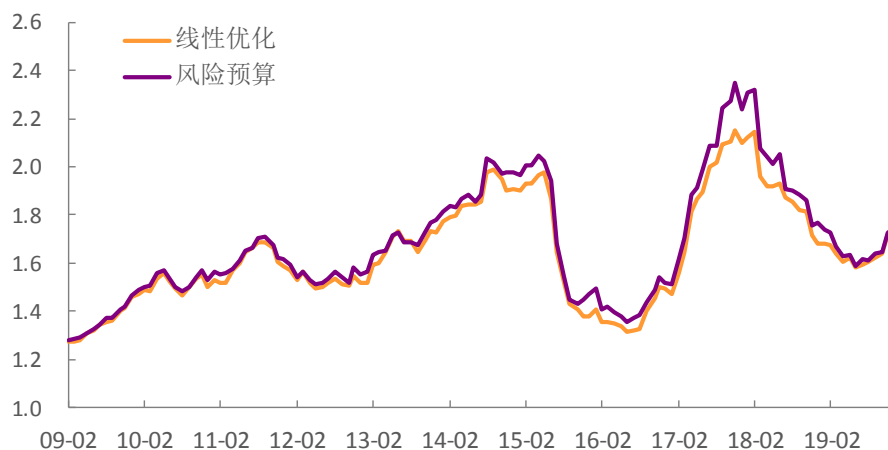
图 5：不同优化下 EBQC 因子 500 增强相对净值比较



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：基准为中证 500 指数，测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

从分散化的角度，线性优化组合平均每期持仓 93 只股票，风险平价组合平均每期持仓 395 只股票，风险预算组合平均每期持仓 240 只股票。风险平价组合的持股最为分散，这也是其收益较低的一个重要原因。风险预算组合的持股集中度较为适中。除了持股集中度，我们也可以通过分散比率这个统计量比较不同组合的分散化程度， $DR(w) = \frac{w^T \sigma}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$ ，该值越大表明组合风险越分散。从下图可以看出，风险预算优化组合的分散比率始终高于线性优化组合，其分散比率均值为 1.68，而线性优化组合分散比率均值为 1.64。结合其它收益及风险统计数据。我们最为推荐风险预算组合优化方式。

图 6：不同优化方式下 500 增强组合分散比率序列



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

风险预算优化中证 500 增强组合除了 2009 年小幅跑输基准以外，从 2010 年至今每年都跑赢中证 500 指数。2015 年组合相对基准波动较大，除此之外，每年相对波动基本保持在 3% 以内。相对最大回撤近 4 年未超过 2%。

表 5：风险预算优化 EBQC 因子中证 500 增强分年度表现统计

	年化收益	年化波动	夏普比率	最大回撤	年化超额收益	相对年化波动	信息比率	相对最大回撤
2009	74.7%	34.2%	2.18	18.1%	-1.6%	3.2%	-0.51	5.0%
2010	21.0%	28.1%	0.75	24.9%	7.5%	2.9%	2.62	1.6%
2011	-32.5%	23.9%	-1.36	36.2%	5.3%	2.3%	2.32	1.3%
2012	7.4%	23.6%	0.31	25.4%	4.3%	2.4%	1.75	1.6%
2013	24.1%	22.2%	1.09	15.7%	5.8%	2.8%	2.10	1.8%
2014	35.2%	19.4%	1.82	10.6%	1.1%	2.7%	0.41	3.9%
2015	59.8%	50.2%	1.19	52.5%	14.9%	8.6%	1.73	6.4%
2016	-6.9%	31.0%	-0.22	26.2%	7.9%	2.9%	2.71	1.5%
2017	12.5%	14.9%	0.84	12.1%	11.7%	2.8%	4.21	1.4%
2018	-28.7%	24.1%	-1.19	33.2%	8.5%	3.1%	2.75	1.7%
2019	32.4%	21.7%	1.49	17.3%	6.8%	2.9%	2.35	1.9%
Summary	15.8%	28.8%	0.65	52.5%	7.0%	3.8%	1.80	6.4%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：基准为中证 500 指数，测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

### 3.2、沪深 300 指数增强

我们也测试了不同优化方式在沪深 300 指数增强上的效果。组合线性优化下年化超额收益 4.6%，信息比率 1.49，相对最大回撤 4.4%，平均双边换手 37.4%。

与上一节的测试类似，风险平价优化组合的表现与其它优化组合差异依然很大，它在超额收益更小，年化 2.7%。信息比 1.04。它的优势部分中，相对年化波动 2.6%，换手率平均双边仅 16.9%。

风险预算优化组合年化超额收益 4.4%，稍低于线性优化组合。相对年化波动 2.7%，信息比率 1.61，相对最大回撤 3.6%，均优于线性优化组合的表现。其双边换手率平均 33.0%，略低于线性优化组合的 37.4%。

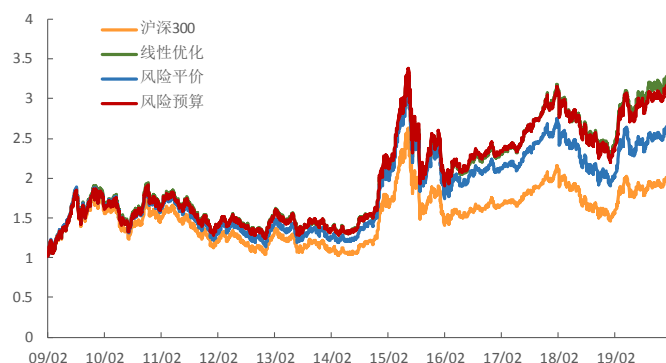
表 6：EBQC 因子 300 增强组合统计数据

	线性优化	风险平价	风险预算
年化收益	11.3%	9.7%	11.6%
年化波动	24.2%	24.5%	24.3%
夏普比率	0.56	0.50	0.57
最大回撤	-43.1%	-47.1%	-43.7%
年化超额收益	4.6%	2.7%	4.4%
相对年化波动	3.1%	2.6%	2.7%
信息比率	1.49	1.04	1.61
相对最大回撤	-4.4%	-3.9%	-3.6%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

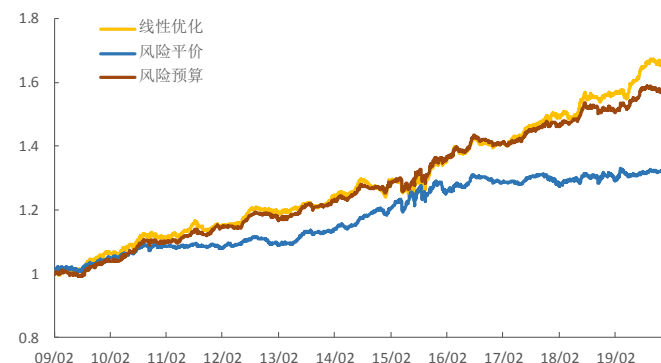


图 7：不同优化下 EBQC 因子 300 增强净值比较



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

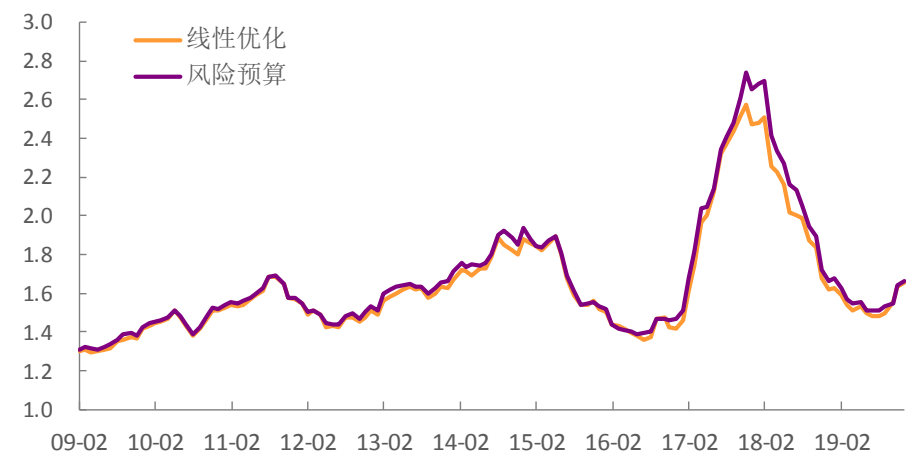
图 8：不同优化下 EBQC 因子 300 增强相对净值比较



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：基准为沪深 300 指数，测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

线性优化组合平均每期持仓 84 只股票，风险平价组合平均每期持仓 288 只股票，风险预算组合每期持仓 77 只股票。从持股集中度的角度来说，风险预算优化 300 增强组合与线性优化组合差异不大，风险预算组合持股反而更集中一些。但如果观察分散比率序列，可以看出风险预算组合的风险分散程度仍始终高于线性优化组合，其分散比率均值为 1.68，而线性优化组合分散比率均值为 1.65。

图 9：不同优化方式下 300 增强组合分散比率序列



资料来源：光大证券研究所，Wind；注：测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

风险预算优化沪深 300 增强组合从 2009 年至今每年都跑赢沪深 300 指数，且超额收益十分稳定。2015 年组合相对基准波动较大，除此之外，每年相对波动基本保持在 2.5% 以内。该组合相比线性优化组合，在稳定性与风险控制上更胜一筹。

表 7：风险预算优化 EBQC 因子沪深 300 增强分年度表现统计

	年化收益	年化波动	夏普比率	最大回撤	年化超额收益	相对年化波动	信息比率	相对最大回撤
2009	67.7%	31.6%	2.15	23.6%	4.3%	2.6%	1.68	1.9%
2010	-4.6%	24.9%	-0.19	27.8%	5.6%	2.5%	2.25	1.5%
2011	-21.8%	19.7%	-1.11	28.3%	4.5%	2.0%	2.19	1.6%
2012	11.7%	19.4%	0.60	19.3%	2.5%	1.7%	1.45	1.6%
2013	-2.7%	20.4%	-0.13	20.0%	3.0%	2.4%	1.23	1.6%
2014	45.8%	18.3%	2.50	8.8%	3.2%	1.8%	1.77	2.1%
2015	20.9%	40.6%	0.51	42.9%	8.0%	5.1%	1.58	3.6%
2016	-5.9%	23.1%	-0.26	19.2%	3.4%	2.6%	1.31	2.4%
2017	24.4%	10.1%	2.41	6.4%	4.5%	2.0%	2.24	1.2%
2018	-23.5%	20.9%	-1.13	29.0%	3.1%	2.4%	1.30	2.1%
2019	35.7%	19.2%	1.86	11.7%	3.5%	2.3%	1.55	1.3%
Summary	11.6%	24.3%	0.57	43.7%	4.4%	2.7%	1.61	3.6%

资料来源：光大证券研究所，Wind；注：基准为沪深 300 指数，测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31

## 4、总结

结合测试结果，本文重点阐述并推荐风险预算优化算法来构建约束条件下的股票组合。具体结论如下：

### ◆ 组合优化常用构建方式：线性优化缺点较明显

线性优化是目前主流的因子组合构建方式之一，它有着简单直观、优化计算复杂程度低，计算耗时极少的优点。但相应的，它的不足之处是丢弃了不同个股之间的相关性信息，同时会使得最终的优化结果中，个股集中程度较大。

### ◆ 二次规划带来的边际提升有限

采用二次规划的优化方式，可以融入个股间相关性信息。但通过测试，以历史收益估计协方差矩阵的二次规划基本不能在线性优化基础上带来边际改善。而通过风格因子数据估计协方差矩阵的二次规划虽能小幅提高组合的信息比率，但波动与最大回撤也相应增大，整体带来的边际改善较为有限。同时二次规划对于参数的敏感性过高也是其痛点之一。

### ◆ 借鉴风险预算模型：运用机器学习算法克服优化难点

借鉴资产配置中的风险预算模型构建因子组合的优化问题，并运用机器学习中的循环坐标下降 (CCD) 与交替方向乘子 (ADMM) 算法，解决在有各类约束条件下的优化实现。使优化问题具有可操作性。

### ◆ 风险预算增强组合更稳定：跟踪误差小、换手低、持股更分散

以综合质量因子 EBQC 因子为例，分别比较线性优化、风险平价优化、风险预算优化下的中证 500 指数增强与沪深 300 指数增强（测试区间为 2009-02-01 至 2019-12-31）。其中风险预算优化中证 500 增强组合相比线性优化组合，信息比从 1.54 提升至 1.80，最大回撤由 7.7% 降至 6.4%，换手率从 48.5% 降至 41.0%，分散比率均值由 1.64 升至 1.68。风险预算优化沪深 300

增强组合相比线性优化组合，信息比从 1.49 提升至 1.61，最大回撤由 4.4% 降至 3.6%，换手率从 37.4% 降至 33.0%，分散比率均值由 1.65 升至 1.68。

## 5、风险提示

报告结论均基于历史数据与模型，模型存在失效的可能，历史数据存在不被重复验证的可能。

## 附录

### A. 风格因子构造方式

在 Barra 的针对中国市场的风险因子构建中，通常将公共因子分为行业因子和风格因子两大类。行业因子是股票所属行业的哑变量，本文均一致选用中信一级行业分类。风格因子是影响股票投资组合收益的重要系统性因素，其涵盖了基本面因子、技术面因子和预期因子等多方面影响。

九大类风格因子 (Size、Beta、Momentum、Volatility、Value、Liquidity、Earnings、Growth、Leverage) 共由 20 个细分因子复合而成，遵循 Barra 的赋权方式，具体构造方式及含义见下表。

表 8：风格因子分类及构造方式

风格大类	细分因子	因子计算方式
Size (规模)	LNCAP	对数总市值
Beta (CAPM 模型 Beta)	BETA	该因子用以衡量市场性风险： $u_i = \alpha + \beta r_m + e_i$ 按照 CAPM 理论使用沪深 300 指数收益率对个股收益率进行半衰期为 60 个交易日的指数加权滚动回归，取回归模型斜率即为 beta；其中滚动回归的序列长度为 240 个交易日。
Momentum (动量)	RSTR	该因子衡量股票前期业绩持续能力：过去一段时间 T 个股累积收益率 $RSTR = \sum_{t=L}^{T+L} w_t \ln(1 + r_t)$ T=500, L=20, $w_t$ 为半衰期指数，半衰期为 120 个交易日。
Residual Volatility (波动)	Volatility = 0.74 * DASTD + 0.16 * CMRA + 0.10 * HSIGMA	
	DASTD	$DASTD = (\sum_{t=1}^T w_t (r_t - u(r))^2)^{0.5}$ $r_t$ 表示个股 t 日的收益率， $u(r)$ 表示过去 250 个交易日个股收益率均值，指数加权半衰期为 40 个交易日。
	CMRA	$CMRA = \ln(1 + \max\{Z(T)\}) - \ln(1 + \min\{Z(T)\})$ $Z(T) = \sum_{t=1}^T \ln(1 + r_t)$ $r_t$ 表示个股月收益率，T=1, 2, ..., 12.
	HSIGMA	$HSIGMA = std(e_t)$ 计算 beta 所得残差标准差
Value (价值)	BTOP	市净率倒数 = 股东权益/总市值
Liquidity (流动性)	Liquidity = 0.35 * STOM + 0.35 * STOQ + 0.30 * STOA	
	STOM	$STOM = \ln(\sum_{t=1}^{20} \frac{V_t}{S_t})$ $V_t$ 为 t 日的成交量， $S_t$ 为 t 日流通股本
	STOQ	$STOQ = \ln(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(STOM_t)), \quad T = 3$ $STOM_t$ 表示一个月 (20 日) 换手率
	STOA	$STOA = \ln(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(STOM_t)), \quad T = 12$
Earnings Yield (盈利)	Earnings = 0.68 * EPFWD + 0.21 * CETOP + 0.11 * ETOP	

Growth (成长)	EPFWD	EPFWD = est_eps (TTM) / close_price, 未来 12 个月一致预期每股收益/收盘价
	CETOP	CETOP = 过去 12 个月每股现金收益/当前收盘价
	ETOP	ETOP = 过去 12 个月净利润/当前总市值
	Growth = 0.18 * EGRLF + 0.11 * EGRSF + 0.24 * EGRO + 0.47 * SGRO	
	EGRLF	未来 1 年净利润增长率
Leverage (杠杆)	EGRSF	未来 2 年净利润复合增长率
	EGRO	过去 5 年企业营业总收入复合增长率
	SGRO	过去 5 年企业归属母公司净利润复合增长率
	Leverage = 0.38 * MLEV + 0.35 * DTOA + 0.27 * BLEV	
	MLEV	MLEV = (ME+LD) / ME, ME 总市值, LD 非流动性负债
	DTOA	DTOA = TD/TA, TD 总负债, TA 总资产
	BLEV	BLEV = (BE+LD) / BE, BE 账面权益, LD 非流动性负债

资料来源: BarraCNE5, 光大证券研究所

## B. 风险预算优化问题转换

我们将从式 (9) 开始推导, 论证该优化问题的解即满足我们需要的风险预算组合。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_w \text{Risk}(w) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i \geq c \quad \#(9) \\ w > \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

那么不难得出它的拉格朗日方程为:

$$\mathcal{L}(w; \lambda, \lambda_c) = \text{Risk}(w) - \lambda^T w - \lambda_c \left( \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i - c \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda_c \in \mathbb{R}$$

进一步求解  $\partial \mathcal{L}(w; \lambda, \lambda_c) = 0$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w; \lambda, \lambda_c)}{\partial w_i} = \frac{\partial \text{Risk}(w)}{\partial w_i} - \lambda_i - \lambda_c \frac{RB_i}{w_i} = 0$$

此时 K-T 条件为:

$$\begin{cases} \min(\lambda_i, w_i) = 0 \\ \min\left(\lambda_c, \sum_{i=1}^n RB_i * \ln w_i - c\right) = 0 \end{cases}$$

这里  $w > \mathbf{0}$ , 那么  $\min(\lambda_i, w_i) = 0$  就意味着  $\lambda_i = 0$ 。于是就有:

$$\frac{\partial \text{Risk}(w)}{\partial w_i} = \lambda_c \frac{RB_i}{w_i}$$

进一步,

$$w_i \frac{\partial \text{Risk}(w)}{\partial w_i} = \lambda_c * RB_i$$

等式两边求和, 根据式 (8) 以及  $\sum_{i=1}^n RB_i = 1$ , 则有:

$$\text{Risk}(w) = \sum_{i=1}^n w_i * \frac{\partial \text{Risk}(w)}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_c * RB_i = \sum_{i=1}^n RB_i \times \lambda_c = \lambda_c$$

替换进上式, 则有:

$$w_i \frac{\partial Risk(w)}{\partial w_i} = Risk(w) * RB_i$$

这正是风险预算的资产权重所需满足的条件。

### C. 标准差风险测度下 ADMM 算法：x 更新与 y 更新的具体方法

在标准差风险测度  $Risk(x) = -x^T \mu + c * \sqrt{x^T \Sigma x}$  下，问题如下：

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{(x,y)} f(x) + g(y) \\ & \text{s.t. } x - y = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $f(x) = -x^T \mu + c * \sqrt{x^T \Sigma x} - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln x_i$ ,  $g(y) = 1_{\Omega}(y)$ 。

#### x 更新

对于  $x^{(k)}$  的更新变为求解另一个最优化问题：

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ f(x) + \frac{\varphi}{2} \|x - y^{(k-1)} + u^{(k-1)}\|_2^2 \right\}$$

不妨设  $v^{(k-1)} = y^{(k-1)} - u^{(k-1)}$ ，那么最终的目标函数变为：

$$f^{(k)}(x) = -x^T \mu + c * \sqrt{x^T \Sigma x} - \lambda \sum_{i=1}^n RB_i * \ln x_i + \frac{\varphi}{2} \|x - v^{(k-1)}\|_2^2$$

利用 CCD 来求解上述最优化问题，对于每一个坐标方向，对其一阶偏导为：

$$\frac{\partial f^{(k)}(x)}{\partial x_i} = -\mu_i + c * \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}} - \lambda \frac{RB_i}{x_i} + \varphi (x_i - v_{x_i}^{(k)}) = 0$$

上述等式是关于  $x_i$  的一元二次方程：

$$\alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i + \gamma_i = 0$$

其中，

$$\begin{cases} \alpha_i = c \Sigma_{i,i} \\ \beta_i = c \sum_{j \neq i} \Sigma_{i,j} - \mu_i \sigma_x \\ \gamma_i = -\lambda RB_i \sigma_x \\ \sigma_x = \sqrt{x^{(k-1)T} \Sigma x^{(k-1)}} \end{cases}$$

由于  $x_i > 0$ ，因解上述一元二次方程，可得：

$$x_i = \frac{-\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 - 4\alpha_i \gamma_i}}{2\alpha_i}$$

因此，x 更新运用 CCD 算法步骤如下：

1. 获得初始值  $\tilde{x} = x^{(k-1)}$ ;
2. 沿着  $1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots$  的顺序选择下一个坐标防线  $i$ ;

3.  $\tilde{x}$  更新为  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \frac{-\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 - 4\alpha_i\gamma_i}}{2\alpha_i}, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n)$ ;
4. 重复循环步骤 2 与 3, 直至收敛;
5. 以最后一次循环的  $\tilde{x}$  值作为  $x^{(k)}$ , 完成  $x$  更新。

### y 更新

对于  $y^{(k)}$  的更新变为求解最优化问题:

$$\operatorname{argmin}_x \{g(y) + \frac{\varphi}{2} \|x^{(k)} - y + u^{(k-1)}\|_2^2\}$$

不妨设  $v^{(k-1)} = x^{(k)} + u^{(k-1)}$ , 那么最终的目标函数变为:

$$g^{(k)}(y) = 1_{\Omega}(y) + \frac{\varphi}{2} \|y - v^{(k-1)}\|_2^2$$

上式恰是邻近算子 (Proximal Operator) 的形式, 邻近算子的定义是:

$$\operatorname{prox}_f(v) = \operatorname{argmin}_x \{f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2\}$$

而如果  $f$  是指示函数,  $f(x) := 1_{\Omega}(x)$ , 其中  $\Omega$  是一个凸集。那么  $\operatorname{prox}_f(v) = \mathcal{P}_{\Omega}(v)$ 。

对于一些常见的约束集合,  $\mathcal{P}_{\Omega}(v)$  有以下表达式:

表 9: 常见约束集合的投影表达

$\Omega$	$\mathcal{P}_{\Omega}(v)$
$a^T w = b$	$v - \frac{(a^T v - b)}{\ a\ _2^2}$
$c^T w \leq d$	$v - \frac{(c^T v - d)_+}{\ c\ _2^2}$
$w^- \leq w \leq w^+$	$\begin{cases} w^-, & v < w^- \\ v, & w^- \leq v \leq w^+ \\ w^+, & v > w^+ \end{cases}$

资料来源: 光大证券研究所

而若约束集合是有多个基本约束集合的交集, 则需要借助 Dykstra's 算法来求解。对邻近算子及 Dykstra's 算法感兴趣的读者, 推荐《Proximal Algorithms》(Parikh and Boyd, 2014) 与《Dykstra's Algorithm, ADMM, and Coordinate Descent: Connections, Insights, and Extensions》(Tibshirani, 2017)。



## 行业及公司评级体系

评级	说明
买入	未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 15% 以上；
增持	未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 5% 至 15%；
中性	未来 6-12 个月的投资收益率与市场基准指数的变动幅度相差 -5% 至 5%；
减持	未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 5% 至 15%；
卖出	未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 15% 以上；
无评级	因无法获取必要的资料，或者公司面临无法预见结果的重大不确定性事件，或者其他原因，致使无法给出明确的投资评级。

**基准指数说明：**A 股主板基准为沪深 300 指数；中小盘基准为中小板指；创业板基准为创业板指；新三板基准为新三板指数；港股基准指数为恒生指数。

## 分析、估值方法的局限性说明

本报告所包含的分析基于各种假设，不同假设可能导致分析结果出现重大不同。本报告采用的各种估值方法及模型均有其局限性，估值结果不保证所涉及证券能够在该价格交易。

## 分析师声明

本报告署名分析师具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格并注册为证券分析师，以勤勉的职业态度、专业审慎的研究方法，使用合法合规的信息，独立、客观地出具本报告，并对本报告的内容和观点负责。负责准备以及撰写本报告的所有研究人员在此保证，本研究报告中任何关于发行商或证券所发表的观点均如实反映研究人员的个人观点。研究人员获取报酬的评判因素包括研究的质量和准确性、客户反馈、竞争性因素以及光大证券股份有限公司的整体收益。所有研究人员保证他们报酬的任何一部分不曾与、不与、也将不会与本报告中的具体的推荐意见或观点有直接或间接的联系。

## 特别声明

光大证券股份有限公司（以下简称“本公司”）创建于 1996 年，系由中国光大（集团）总公司投资控股的全国性综合类股份制证券公司，是中国证监会批准的首批三家创新试点公司之一。根据中国证监会核发的经营证券期货业务许可，本公司的经营范围包括证券投资咨询业务。

本公司经营范围：证券经纪；证券投资咨询；与证券交易、证券投资活动有关的财务顾问；证券承销与保荐；证券自营；为期货公司提供中间介绍业务；证券投资基金代销；融资融券业务；中国证监会批准的其他业务。此外，本公司还通过全资或控股子公司开展资产管理、直接投资、期货、基金管理以及香港证券业务。

本报告由光大证券股份有限公司研究所（以下简称“光大证券研究所”）编写，以合法获得的我们相信为可靠、准确、完整的信息为基础，但不保证我们所获得的原始信息以及报告所载信息之准确性和完整性。光大证券研究所可能将不时补充、修订或更新有关信息，但不保证及时发布该等更新。

本报告中的资料、意见、预测均反映报告初次发布时光大证券研究所的判断，可能需随时进行调整且不予通知。在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的投资建议。客户应自主作出投资决策并自行承担投资风险。本报告中的信息或所表述的意见并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。

不同时期，本公司可能会撰写并发布与本报告所载信息、建议及预测不一致的报告。本公司的销售人员、交易人员和其他专业人员可能会向客户提供与本报告中观点不同的口头或书面评论或交易策略。本公司的资产管理子公司、自营部门以及其他投资业务板块可能会独立做出与本报告的意见或建议不相一致的投资决策。本公司提醒投资者注意并理解投资证券及投资产品存在的风险，在做出投资决策前，建议投资者务必向专业人士咨询并谨慎抉择。

在法律允许的情况下，本公司及其附属机构可能持有报告中提及的公司所发行证券的头寸并进行交易，也可能为这些公司提供或正在争取提供投资银行、财务顾问或金融产品等相关服务。投资者应当充分考虑本公司及本公司附属机构就报告内容可能存在的利益冲突，勿将本报告作为投资决策的唯一信赖依据。

本报告根据中华人民共和国法律在中华人民共和国境内分发，仅向特定客户传送。本报告的版权仅归本公司所有，未经书面许可，任何机构和个人不得以任何形式、任何目的进行翻版、复制、转载、刊登、发表、篡改或引用。如因侵权行为给本公司造成任何直接或间接的损失，本公司保留追究一切法律责任的权利。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

光大证券股份有限公司版权所有。保留一切权利。

## 联系我们

上海	北京	深圳
静安区南京西路 1266 号恒隆广场 1 号 写字楼 48 层	西城区月坛北街 2 号月坛大厦东配楼 2 层 复兴门外大街 6 号光大大厦 17 层	福田区深南大道 6011 号 NEO 绿景纪元大厦 A 座 17 楼