

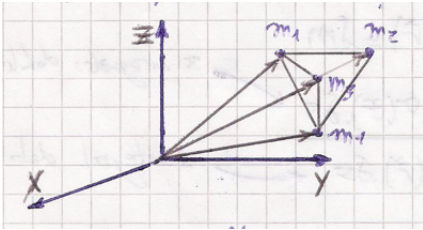
Capítulo 1

Cuerpos rígidos

1.1 Cuerpos rígidos

Se pueden pensar como un sistema que interactúa a través de fuerzas de vínculo que están asociadas a la *condición de rigidez*. Los vínculos constituyen la condición de rigidez,

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = d_{ij} \quad i \neq j \quad (1.1)$$



Se asocia entonces al conjunto discreto de partículas. Entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2,$$

con la condición de rigidez de las N partículas.

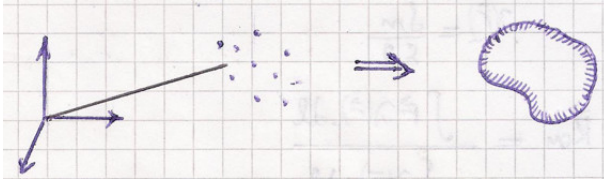
Luego se hace el pasaje del discreto al continuo, a través de la idea

$$\delta m = \rho(\mathbf{x}) \delta V.$$

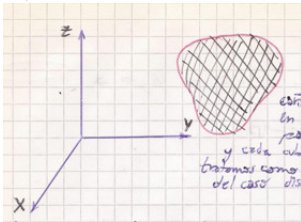
Las partículas están tan próximas que se puede pensar en una distribución continua de masa donde la masa de cada partícula se transforma en la masa de N

cubitos pequeños, entonces

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \mathbf{R} = \frac{\int \rho \mathbf{x}_i dV}{\int \rho dV}$$



Se corta al cuerpo rígido en cubos (se particiona) y cada cubito se trata como las m_i del caso discreto.



Como el volumen V del cuerpo es constante, se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty, \delta V \rightarrow 0} \delta V N = V$$

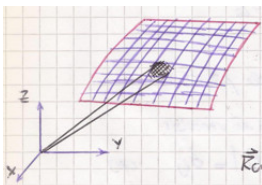
y el centro de masa cumple

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i \mathbf{x}_i \rho(\mathbf{x}_i) \delta V}{\sum_i \rho(\mathbf{x}_i) \delta V} \rightarrow \frac{\int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV}{\int \rho dV},$$

donde debemos notar que el numerador tiene el carácter vectorial porque son tres integrales triples.

Otros cuerpos rígidos son los que tienen una o dos dimensiones despreciables (una lámina o un alambre, respectivamente) que se pueden modelar considerando distribuciones de masa superficiales o longitudinales,

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\delta m}{\delta S}, \quad \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\delta m}{\delta \ell}$$



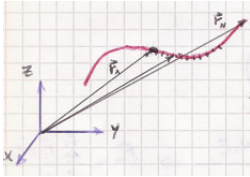
En relatividad restringida no existen cuerpos rígidos; a este nivel no nos preocupamos de ello. Buscaremos escribir el lagrangiano de cada tipo de cuerpo.

Para el caso 2D, será

$$\mathbf{R} = \frac{\int_S \mathbf{x} \sigma x dS}{\int_S \sigma x dS},$$

y correspondientemente en el caso 1D

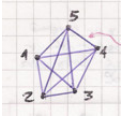
$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{x} \lambda x d\ell}{\int \lambda x d\ell}.$$



Obviamente las abreviaturas ρ, σ, λ son una convención nuestra. Prestar atención a las unidades.

1.1.1 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Consideremos un cuerpo rígido de 5 grados de libertad como el de la figura,



Vemos que de entrada son $(N2)$ ecuaciones de vínculo (nro combinatorio) de manera que en este caso se tendrían $3 \times 5 - 10 = 5$ grados de libertad. Pero esto está mal; estas ecuaciones sucede que no son independientes.

Chequear lo del combinatorio y el resultado 10. No lo veo así fácil de una.

Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones (1.1)

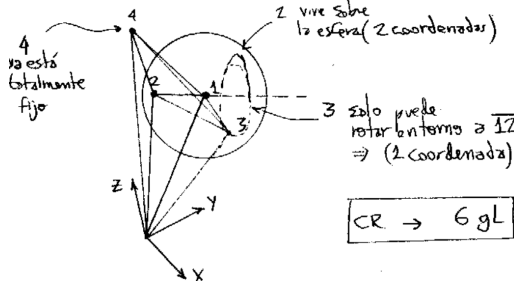
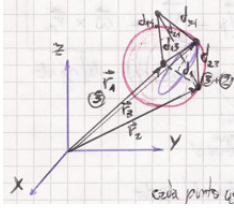
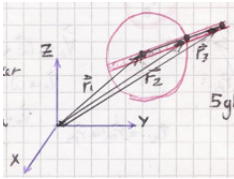


Figura 1.1



Examinando el dibujo de la figura sobre estas líneas vemos [¿?] que el segundo punto estará a distancia d_1 de cualquier punto sobre la esfera (necesito dos coordenadas más). Para el punto 3 necesito un ángulo (una coordenada). Al agregar los siguientes puntos no se requieren nuevas coordenadas; cada punto que agrego viene con la distancia a todos los otros. Entonces, en tres dimensiones un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad.

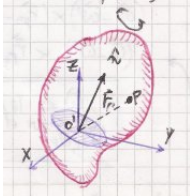
Si las condiciones de rigidez son lineales resultan cinco grados de libertad.



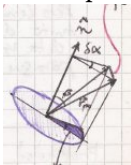
En un cuerpo lineal no tiene sentido la rotación del tercer punto x_3 , entonces ahí se *pierde* una coordenada.

1.1.2 Velocidad de un cuerpo rígido

Lo único que pueden hacer los puntos de un cuerpo rígido, respecto de otro punto del mismo, es rotar puesto que el módulo de la distancia debe permanecer constante.



Con respecto a este gráfico superior, la construcción mostrada significa que



$$\delta r_{p_0} = r_{p_0} \sin(\beta) \delta \alpha = |\delta \mathbf{r}_{p_0}|$$

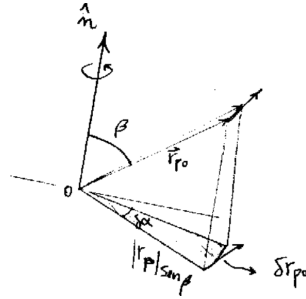


Figura 1.2

Luego, el módulo de la velocidad es

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta r_{p0}}{\delta t} = r_{p0} \sin(\beta) \frac{\delta \alpha}{\delta t},$$

o bien

$$v_{p0} = \dot{\alpha} r_{p0} \sin(\beta)$$



Dadas las direcciones mostradas en la figura de arriba se ve que la fórmula es el módulo de un producto vectorial entre $\dot{\alpha} \equiv \omega$ y r_p y como el resultado es perpendicular a r_p y al vector \hat{n} se tiene $\omega = \omega \hat{n}$.

pero $v_{p0} \perp \hat{n}$ y $v_{p0} \perp r_{p0}$ de manera que

$$v_{p0} = \Omega \times r_{p0},$$

es la velocidad de rotación. Pero necesito ir a un sistema inercial para poder definir una velocidad que sirva para el cálculo del lagrangiano.

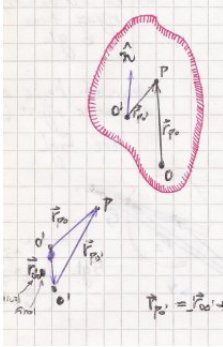
Luego, para ir a un sistema inercial le sumo la V de algún punto del rígido (el origen O) medido desde un sistema inercial. Entonces, el campo de velocidad del cuerpo rígido es

$$v_p = v_O + \Omega \times r_{p0}.$$

de manera que la velocidad en un punto p es la suma entre el producto vectorial visto y la velocidad del origen no inercial O .

La velocidad en el RHS es la medida desde un sistema inercial; tiene que quedar claro eso!

1.1.3 Unicidad de la velocidad de rotación



Desde dos puntos arbitrarios del rígido O y O' , tomados como origen de un sistema no inercial de coordenadas, se puede escribir la velocidad de otro punto P como

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0}$$

siendo $\boldsymbol{\Omega}'$ la $\boldsymbol{\Omega}$ como se ve desde el sistema O'

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la vista desde el sistema O .

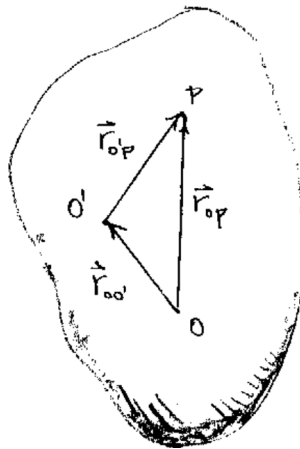


Figura 1.3

$$\mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y descomponiendo de acuerdo con el dibujo resulta

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{O'p} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_{00'} - \mathbf{r}_{0p}) + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = 0$$

$$(\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}_{0'p} = 0.$$

Pero como $\mathbf{r}_{0'p}$ es cualquier punto del cuerpo rígido, debe darse que el paréntesis es nulo, de lo cual se deduce que $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$. Entonces, $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma para cualquier punto del cuerpo rígido.

Notemos la siguiente propiedad que emerge del producto escalar;

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{0p})$$

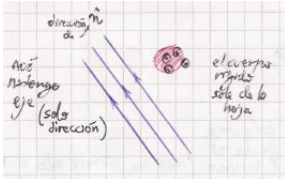
$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0$$

lo cual se cumple para todo punto p perteneciente al cuerpo rígido. Si es $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$ entonces serán $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_0$ y $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_p$.

Si desde un sistema inercial vemos que $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{v}_p$ entonces para todos los puntos del cuerpo $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular a cualquier punto.

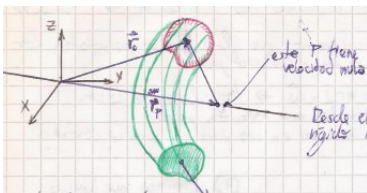
Si en un instante dado $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular a \mathbf{V}_p entonces $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{V}_{p'}$ para todo punto del cuerpo rígido.

Si en un instante dado un punto es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ entonces todos los puntos lo son. El cuerpo está sufriendo una rotación pura. Los puntos se mueven en una dirección o se mueven en la contraria.



La propiedad que acabamos de analizar garantiza que hay una rotación en torno algún eje; otra historia diferente es encontrarlo.

1.1.4 Eje instantáneo de rotación



Si p es tal que $\mathbf{V}_p = 0$ entonces

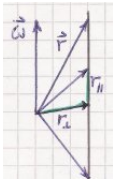
$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p0} \quad (1.2)$$

donde \mathbf{V}_0 es una velocidad desde un sistema inercial. Desde el sistema inercial el cuerpo rígido realiza una rotación pura, puesto que veo al punto O rotar en torno a algún eje. Es decir que el punto P determina un eje.

$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel) = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\perp$$

y esto define un eje instantáneo de rotación.

Como vale (1.2) se da que cualquiera de los \mathbf{r} de la figurilla debajo



verifica la condición predicha. Solo interesa la parte perpendicular. En este caso el cuerpo tiene un eje instantáneo de rotación.

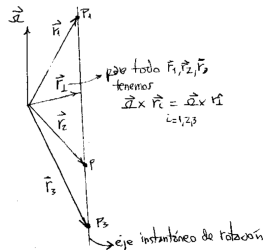


Figura 1.4

Se puede hallar un origen O tal que verifique

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_0^\perp + \mathbf{v}^\parallel + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{p0}$$

El movimiento más general de un cuerpo rígido es de traslación y de rotación combinados.

1.2 Ángulos de Euler

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial, 123 tiene origen en el centro de masa del cuerpo.

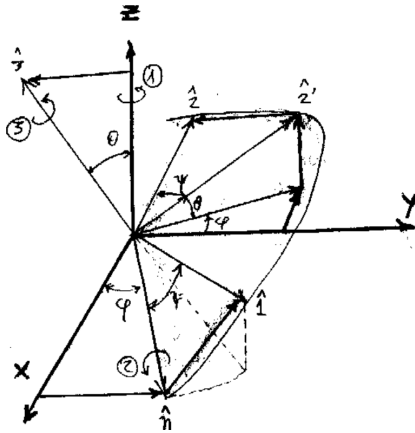


Figura 2.5

$$A_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\psi} \hat{3}$$

y expresando \hat{z} , \hat{n} en $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi)] \hat{1} + [\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi)] \hat{2} + [\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}] \hat{3}$$

Ahora estamos interesados en el momento angular.

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i)$$

que están en el sistema 123.

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega})]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i \left[\boldsymbol{\Omega} \sum_j^3 (x_j^{2i}) - \mathbf{r}_i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

y la componente k -ésima será

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[\Omega_k \sum_j^3 (x_j^{2i}) - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[\sum_j^3 \delta_{kj} \Omega_j r_i^2 - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_j^3 \sum_i^N m_i [\delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i] \Omega_j = \sum_j^3 I_{kj} \Omega_j$$

o vectorialmente

$$\mathbf{L}_{spin} = \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}$$

siendo \mathbf{I} el tensor de inercia. Explícitamente:

$$I_{kj} = \sum_i^N m_i [\delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i]$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Sean 1,2,3 los ejes principales, entonces \mathbf{I} es diagonal y

$$\mathbf{L}_{spin} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}$$

y se puede escribir

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{in} \square = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \square + \boldsymbol{\Omega} \times \square$$

que es válida pra sistemas rotantes (no aquellos que rotan y se trasladan). En este caso $\boldsymbol{\Omega}$ es la del sistema rotante (en un cuerpo rígido es la $\boldsymbol{\Omega}$ del cuerpo rígido).

Se puede escribir también

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{in} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm}$$

siendo la derivada de un sistema XYZ, y \mathbf{T} el torque del cuerpo rígido referido al centro de masa y medido desde el sistema XYZ (inercial). Entonces

$$\mathbf{T}_{cm} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \mathbf{L}_{spin} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{L}_{spin})$$

y

$$\mathbf{T}_{cm} = I \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times (I \boldsymbol{\Omega}).$$

I visto desde XYZ es $I = I(t)$ e I desde 123 es constante.

$$\mathbf{T}_{cm} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\Omega}_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1 \Omega_1 & I_2 \Omega_2 & I_3 \Omega_3 \end{vmatrix}$$

De este sistema resultan,

$$\begin{aligned} T_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 \\ T_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 \\ T_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Euler. Las mismas requieren I en ejes principales, $\boldsymbol{\Omega}$ en 1,2,3 (en función de ϕ, θ, ψ). Es $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad de rotación del sistema cuerpo rígido (rotante) respecto a un sistema XYZ fijo en el centro de masa y coincidente con X'Y'Z' (inercial) a todo tiempo. Salvo la traslación del centro de masa, este sistema XYZ será inercial.

Todo este tratamiento de ecuaciones de Euler es para el caso $\mathbf{L}_{spin} \equiv \mathbf{L}_{cm}^{sist}$, de manera que no me importan las traslaciones del centro de masa.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{XYZ} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{123} \mathbf{L}_{spin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_{spin}$$

1.3 Energía cinética del cuerpo rígido

Queremos escribir la energía cinética de un cuerpo rígido explícitamente en términos del momento de inercia I .

Los vínculos del cuerpo rígido son holónomos, entonces podemos usar el lagrangiano Lag [?]

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

donde la última \mathbf{r}_i está referida al centro de masa (posiciones de los puntos del cuerpo rígido referidas al centro de masa).

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm}^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i))$$

pero es fácil ver que el término de cruza es cero dado que

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = M \mathbf{R}_{cm} \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0$$

puesto que $M \mathbf{R}_{cm}$ es nulo para un sistema no inercial. Luego

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

que utilizando la identidad vectorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

pasa a

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\Omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2)$$

pero veamos el último paréntesis en detalle,

$$\left(\sum_j \sum_k \Omega_j \Omega_j \Omega_k^i x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

insertando una delta de Kronecker

$$\left(\sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

y reetiquetando

$$\left(\sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_j \sum_k \Omega_j x_j^i \Omega_k x_k^i \right)$$

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k [\delta_{jk} (r^i)^2 - x_j^i x_k^i]$$

Curso de indicial y Einstein convention.

Reacomodando un poco,

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j \left(\sum_i^N m_i [\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i x_k^i] \right) \Omega_k$$

y surge explícito que aparece un ente matricial. Podemos escribir entonces

$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j I_{jk} \Omega_k$$

y como lo último es una forma cuadrática podemos escribir de manera más elegante en términos de la matriz Ω ,

$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^t I \boldsymbol{\Omega},$$

donde la t supraíndice es por traspuesto.

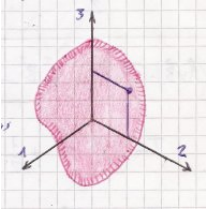
Recordemos que el tensor de inercia tiene en su diagonal los momentos de inercia mientras que los términos fuera de la misma son los productos de inercia. La expresión siguiente, con la delta de Kronecker, engloba los dos casos.

$$I_{ik} = \sum_q m_q (\delta_{ik}(x_q)^2 - x_i^q x_k^q)$$

y el paso al continuo nos deja los momentos de inercia,

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}) [\delta_{ik} r^2 - x_i x_k] dV$$

donde por supuesto es $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.



El cambio de sistema se hace de acuerdo a

$$I'_{ik} = \sum_{\ell s} a_{i\ell} I_{\ell s} a_{ks}$$

y en componentes,

$$\sum_q m_q (\delta_{ik} r_q'^2 - x_i' x_k') = a_{i\ell} a_{ks} \sum_q m_q (\delta_{\ell s} r_q^2 - x_\ell x_s)$$

donde en el miembro izquierdo es $i \neq k$, y el derecho $\ell \neq s$

$$-\sum_q m_q x'_i x'_k = -\sum_q m_q a_{i\ell} x_\ell a_{ks} x_s$$

entonces

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

siendo el triángulo superior valores repetidos. El tensor de inercia es simétrico por su definición. De los nueve componentes son independientes seis. Matemáticamente

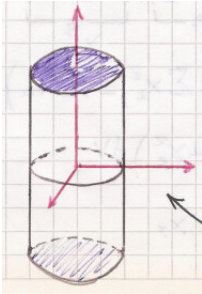
$$I_{ik} = I_{ki}.$$

Eligiendo convenientemente los ejes se puede llevar todo tensor simétrico a una forma diagonal. En ese caso

$$I' = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}$$

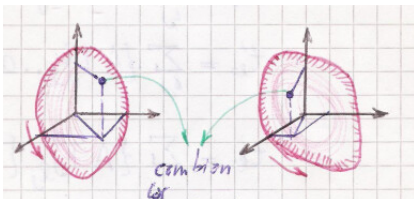
Los I'_{ik} son los momentos principales de inercia (aquellos que están calculados sobre *ejes principales de inercia*).

Cuando el cuerpo rígido tiene simetría pueden hallarse a ojo los ejes principales de inercia. Como por ejemplo un cilindro:

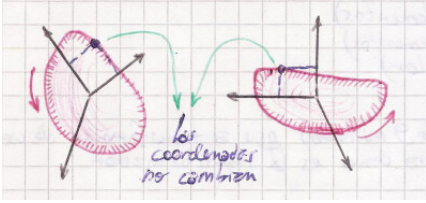


Sin embargo, los componentes del tensor dependen del tiempo debido a su movimiento,

Hay un tema acá con el tiempo t y con la diagonalización.



Entonces defino un sistema fijo al cuerpo. Para el cálculo de I se usa un sistema fijo al cuerpo rígido. Si usamos un sistema inercial, será $I_{ik} = I_{ik}(t)$ lo cual no es conveniente.



y ahora tengo $x \neq x(t)$ pero tengo cambiantes los ejes respecto al sistema inercial. Tomaremos 123 referido al sistema que rota y XYZ referido al sistema que se traslada. Necesitaré luego proyectar la rotación en el sistema inercial en los ejes que se trasladan sobre el cuerpo.

Es conveniente elegir 123 con origen en el centro de masa y partícipes del movimiento del cuerpo rígido (clavados al mismo). Asimismo conviene elegir XYZ referidos al sistema inercial coincidentes pero trasladados al centro de masa. Así los I_{ik} resultan características geométricas del cuerpo.

Finalmente, resulta

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$$

donde I son los momentos principales de inercia. Para obtener esta expresión necesito elegir bien el sistema coordinado en el cuerpo rígido.

Los momentos principales de inercia están tabulados para diversos cuerpos geométricos.

1.3.1 tensores -reubicar-

Ante un cambio de coordenadas un vector transforma

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V},$$

donde \mathbf{A} es una matriz ortogonal. La idea es que no cualquier terna es un vector. Un tensor tiene la propiedad de transformarse

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j a_{\ell i} a_{s j} t_{ij}$$

o bien (haciendo énfasis en el producto matricial)

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j a_{\ell i} t_{ij} a_{s j}.$$

Si recuperamos desde esta notación de sumatoria la estructura matricial notamos que

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j [AT]_{\ell j} a_{sj}$$

donde el factor a_{sj} no se puede sumar así como está. Trasponiéndolo sí se puede, y en efecto

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j [AT]_{\ell j} [A]_{js},$$

de tal manera que la ley de transformación de un tensor de rango 2 es

$$T' = ATA^t.$$

1.4 La peonza simétrica

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2$$

donde son

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin(\theta) \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}$$

y debemos destacar que $\psi = 0$ no es vínculo sino solo comodidad pues $\dot{\psi} \neq 0$ y es independiente. Los vínculos pueden escribirse

$$\theta_e = \theta$$

$$\phi_e + \frac{3}{2}\pi = \phi \longrightarrow \dot{\phi}_e = \dot{\phi}$$

$$r^2 = a^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 + z_{cm}^2$$

y las coordenadas

$$x = a \sin(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = a \sin(\theta) \sin(\phi_e)$$

$$y = a \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = -a \sin(\theta) \cos(\phi_e)$$

$$z = a \cos(\theta)$$

y la velocidad

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2\dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2$$

y el lagrangiano finalmente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(a^2\dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

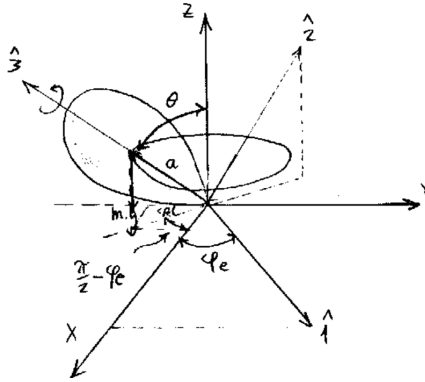


Figura 4.6

pero por la simetría $I_1 = I_2 \equiv I$ de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(Ma^2 + I)(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mga\cos(\theta)$$

y los primeros dos términos representan una rotación pura si tomo

$$(Ma^2 + I) \equiv I'$$

donde I' es otro momento de inercia.

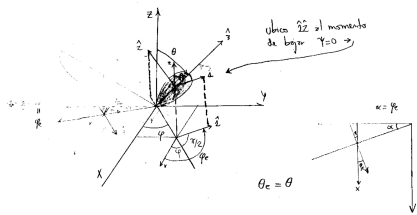


Figura 4.7

Luego hay unos interesantes comentarios sobre la ubicación de los ejes. El famoso “bajo ejes”.

$$T = T_{trasl} + T_{rot} + T_{acopl}$$

y el último es nulo si elegimos el origen común $O=O'$ = centro de masa.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{cm} + \Omega \times \mathbf{r}$$

También es $T_{acopl} = 0$ si $V_0 = 0$ (aquí también se anula T_{trasl}).

1.5 Teorema de Steiner

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} - \mathbf{a}$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} x_s^2 - x_i^s x_j^s)$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} (\mathbf{U}_s - \mathbf{a})^2 - (U_i^s - a_i)(U_j^s - a_j))$$

Trasladamos el punto (con el sistema de ejes paralelo al del centro de masa) sin

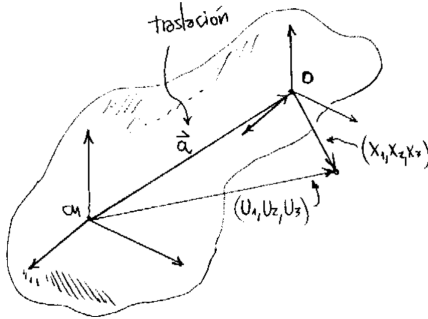


Figura 5.8

rotarlo. Eso es importante.

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s [\delta_{ij} (U_s^2 + a^2 - 2Ua) - (U_i^s U_j^s + a_i a_j - a_i U_j^s - a_j U_i^s)]$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) - \sum_s^N m^s \delta_{ij} 2U^s a + \sum_s^N m^s (a_i U_j^s + a_j U_i^s)$$

pero las dos últimas sumatorias son nulas, y

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) = I_{ij}^{cm} + M(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j)$$

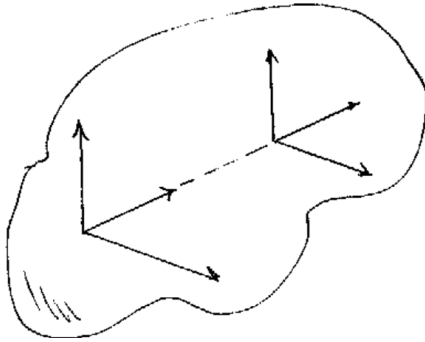


Figura 5.9

Esto sale de

$$\sum_s^N m^s \delta_{ij} U^s a = \delta_{ij} a \sum_s^N m^s U^s = 0$$

puesto que es nula la suma en s . Porque

$$0 = \sum_s^N m^s U^s = \sum_s^N m^s (U_1^s \hat{1} + U_2^s \hat{2} + U_3^s \hat{3})$$

pero como es vectorial vale para cada coordenada

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s a$$

La moraleja es que trasladar en un solo eje conserva la diagonalidad del tensor de inercia.

1.6 Sistemas no inerciales

Habría que pasar los r a x .

Ω es la velocidad angular del sistema no inercial. $\ddot{\mathbf{R}}$ es la aceleración del sistema no inercial. Ambas se miden sólo desde el sistema inercial.

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

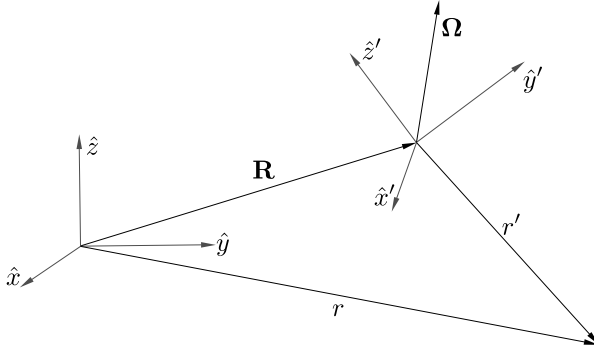


Figura 6.10 Sistemas rotantes.

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in}$$

si despejamos la derivada respecto del sistema primado,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} - \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in}$$

y usamos

$$\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

va resultando

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} \right) \right|_{in} &= \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} - \left. \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right|_{in} - \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \right|_{in} \\ \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} &= \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{in} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in} \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{in} &= \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{noin} & \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} &= - \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{noin} \\ \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right|_{noin} + \left(\boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} \right) &= \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \left[\left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \right] \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left[\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \right] \\ \boldsymbol{\alpha}'|_{noin} &= \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') - \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}'|_{noin} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$$

Vale la pena aclarar la deducción,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

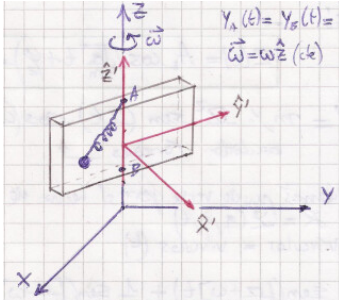
pero si es $\mathbf{R} = 0$ se tiene $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ y entonces

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

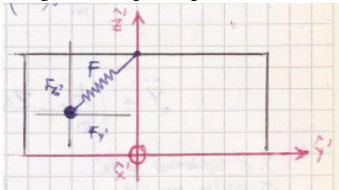
donde el sistema no inercial es el rotante.

EJEMPLO 6.1 Sistema rotante con resorte divertido

El sistema físico está mostrado en la ilustración bajo estas líneas.



El siguiente esquema permite ver la descomposición de fuerzas



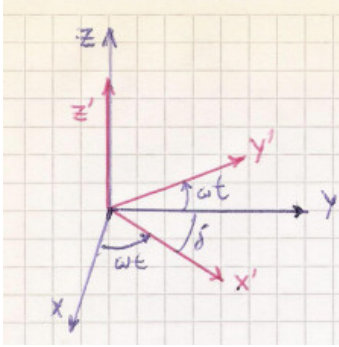
$$Y_A(t) = Y_B(t) = Y_0 \sin(\Omega t) \hat{y} \quad \omega = \omega \hat{z}$$

siendo ω una constante.

$$F'_y = -ky' \hat{y}' \quad F'_z = k(z'_0 - z) \hat{z}'$$

y la aceleración es

$$m\mathbf{a}' = -ky' \hat{y}' + k(z'_0 - z) \hat{z}' + y_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \hat{y} - 2m\omega \hat{z}' \times (\omega \hat{z}' \times [y' \hat{y}' + z' \hat{z}']) - 2m\omega \hat{z}' \times (\dot{y}' \hat{y}' + \dot{z}' \hat{z}')$$



$$\hat{y} = (\hat{y} \cdot \hat{x}')\hat{x}' + (\hat{y} \cdot \hat{y}')\hat{y}' + \underbrace{(\hat{y} \cdot \hat{z}')}_{=0}\hat{z}' = \sin(\omega t)\hat{x}' + \cos(\omega t)\hat{y}'$$

y como $\delta = \pi/2 - \omega t$ se tiene

$$\cos \delta = \cos(\pi/2 - \omega t) = \sin(\omega t)$$

Luego,

$$\hat{y}') \quad m\ddot{y}' = -ky' + 2m\omega^2 y' + my_0\Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

$$\hat{z}') \quad m\ddot{z}' = k(z'_0 - z')$$

$$\hat{x}') \quad 0 = F_v + 2m\omega\dot{y}' + my_0\Omega^2 \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$$

donde la última componente no me interesa. De las componentes \hat{y}' , \hat{z}' surge la solución (que es del tipo oscilador armónico)

$$\ddot{z}' + \frac{k}{m}z' = \frac{k}{m}z'_0$$

de manera que

$$z(t) = A_z \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_z\right) + z'_0.$$

$$\ddot{y}' + \left(\frac{k}{m} - 2\omega^2\right)y' = my_0\Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

donde se ve que es un oscilador forzado. Si el sistema está forzado, entonces no se conserva la energía.

Pero además puede verse por el hecho de que el lagrangiano depende del tiempo a través de los vínculos. Es decir que tenemos vínculos dependientes del tiempo.

$$\sin(\Omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin([\Omega + \omega]t) + \frac{1}{2} \sin([\Omega - \omega]t)$$

Propongo una solución particular

$$y_{part} = A_+ \cos([\Omega + \omega]t) + B_+ \sin([\Omega + \omega]t) + A_- \cos([\Omega - \omega]t) + B_- \sin([\Omega - \omega]t)$$

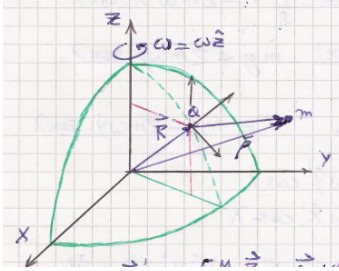
Luego de hacer el álgebra correspondiente se llega a los valores de las amplitudes que son

$$A_+ = \frac{y_0\Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega + \omega)^2]} \quad A_- = \frac{y_0\Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega - \omega)^2]} \quad B_+ = 0 \quad B_- = 0$$

Puede haber resonancia si el denominador se hace muy chico. Juntando todo,

$$y'(t) = y'_h(t) + y'_{part}(t)$$

$$y'(t) = A_{\parallel} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - 2\omega^2} + \varphi_H \right) + \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega + \omega)^2]} \cos([\Omega + \omega]t) + \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega - \omega)^2]} \cos([\Omega - \omega]t)$$

EJEMPLO 6.2 Problema 7 –retitular luego–


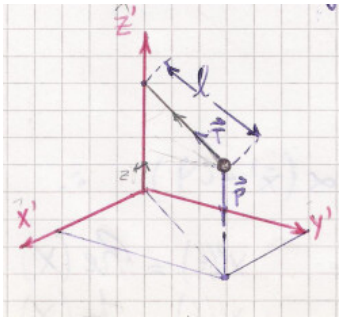
Consideramos un cuerpo libre,

$$\dot{\omega} = 0 \quad \mathbf{A} = \mathbf{R} = \omega \times (\omega \times \mathbf{R})$$

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}$$

Entonces la aceleración es

$$\mathbf{a}' = -\underbrace{\frac{GMm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}}_{\text{Esto da } \mathbf{g}} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) - 2\omega \times \dot{\mathbf{x}}' - \omega \times (\omega \times \mathbf{x}')$$



Y las fuerzas

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{x}' + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}')\mathbf{y}' + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}')\mathbf{z}' = -\frac{T}{\ell} \hat{x}' + -\frac{T}{\ell} \hat{y}' + \frac{T}{\ell} (\ell - z)\hat{z}'$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m(\omega \times \dot{\mathbf{x}}') - m(\omega \times [\omega \times \mathbf{x}'])$$

Si se tiene $|\omega| \ll \Omega$, se puede despreciar ω y entonces se simplifica a

$$\hat{x}') \quad m\ddot{x}' = -\frac{T}{\ell} x' + 2m\omega \dot{y}' \cos \lambda$$

$$\hat{y}') \quad m\ddot{y}' = -\frac{T}{\ell} y' - 2m\omega (\dot{x}' \cos \lambda + \dot{z}' \sin \lambda)$$

$$\ddot{z}') \quad m\ddot{z}' = \frac{T(\ell - z)}{\ell} - mg + 2m\omega\dot{y}' \sin \lambda$$

Ahora aproximo con pequeñas oscilaciones y tengo z aproximadamente constante, luego $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ de tal manera que se puede despejar del sistema anterior

$$T = mg - 2m\omega\dot{y}' \sin \lambda$$

e incorporándola en las otras dos, se tiene

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{\ell}x' + 2\omega\dot{y}' \cos \lambda$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{\ell}y' - 2\omega\dot{x}' \cos \lambda$$

Definiendo $g/\ell \equiv K^2$ y $\alpha \equiv \omega \cos \lambda$ las dos anteriores lucen como

$$\ddot{x}' = -K^2\dot{x}' + 2\alpha\dot{y}' \quad \ddot{y}' = -K^2\dot{y}' - 2\alpha\dot{x}',$$

es decir que se tiene un sistema acoplado. Para desacoplarlo se puede utilizar números complejos de la forma siguiente, definiendo una variable compleja

$$X = x' + iy'$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \ddot{x}' + i\ddot{y}' = -K^2(x' + iy') - 2i\alpha(x' + iy'), \\ \ddot{X} &= -K^2X - 2i\alpha\dot{X} \end{aligned}$$

donde entonces el vínculo con la solución del problema es

$$x'(t) = \Re \mathfrak{e}(x) \quad y'(t) = \Im \mathfrak{m}(x)$$

Resolviendo para condiciones inicales

$$x'_0 = 0, \quad \dot{x}'_0 = 0 \quad y'_0 = A, \quad \dot{y}'_0 = 0$$

se tienen

$$x'(t) = A \cos(\sqrt{g/\ell}t) \sin(\omega \cos \lambda t)$$

$$y'(t) = A \cos(\sqrt{g/\ell}t) \cos(\omega \cos \lambda t)$$

Se puede ver entonces que no se conserva el plano de oscilación del péndulo sino que va rotando.

1.7 Lagrangiano de un sistema no inercial que se traslada

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v + v')^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2}mv'^2 - U(\mathbf{r}) - U$$

pero el primer término se tira puesto que equivale a un término df/dt que cumple

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}mv^2 \quad f = \frac{1}{2}m\frac{v^3}{3} + K$$

y además

$$m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r}' + \frac{d}{dt} (m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})$$

y el último término acá lo tiramos porque equivale a un df_2/dt .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv'^2 - m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}'} = m \cdot \dot{\mathbf{v}} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{d\mathbf{r}'} = 0$$

$$m\mathbf{a} = -\frac{dU}{d\mathbf{r}'} - m\mathbf{A}$$

donde el último término es la aceleración del sistema inercial y el primero el producto $m\mathbf{a}'$. Expresamos $v = v(V, v')$ con lo cual aparecen en el \mathcal{L} las fuerzas ficticias y expreso T en función de coordenadas que se hallan sobre un sistema no inercial.

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right) \Big|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right)$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{rot} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \Big|_{rot} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

1.8 Sistemas rotantes

Considero dos sistemas, XYZ inercial y X'Y'Z' rotante (no inercial).

$$\mathbf{U}' = \mathbf{A}\mathbf{U}$$

donde \mathbf{A} es la matriz del cambio de coordenadas (una transformación ortogonal) y \mathbf{U} es una descripción desde el XYZ y \mathbf{U}' una descripción desde el X'Y'Z'.

Haremos unas derivadas utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU_x}{dt} \hat{x} + \frac{dU_y}{dt} \hat{y} + \frac{dU_z}{dt} \hat{z}$$

donde es $U = U(x, y, z)$, pero ahora si es $U = U(x', y', z')$ se tiene en cambio

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + U'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y}' + U'_y \frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z}' + U'_z \frac{d\hat{z}'}{dt}$$

Pero $X'Y'Z'$ es un sistema ortogonal y sus versores cumplen condiciones de ortogonalidad entonces

$$\hat{x}' \cdot \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \hat{z}' = 1$$

$$\hat{x}' \cdot \hat{y}' = \hat{x}' \cdot \hat{z}' = \hat{y}' \cdot \hat{z}' = 0$$

Ahora tenemos que hacer las variaciones de las dos ecuaciones precedentes. De la primera

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \delta \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \delta \hat{z}' = 0 \quad (8.1)$$

y de la segunda

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' + \hat{y}' \cdot \delta \hat{x}' = 0 \quad \hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' = 0 \quad \hat{y}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{y}' = 0 \quad (8.2)$$

Asimismo, una variación $\delta \hat{x}'$ arbitraria puede escribirse como

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xx} \hat{x}' + \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

donde es $\delta \alpha_{xx} = 0$ debido al primer miembro de (8.1). Notemos que $\delta \alpha_{xy}$ significa una variación en \hat{x}' proyectada en \hat{y}' . Del mismo modo escribimos

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

donde ya hemos anulado las que sabemos son nulas por el mismo argumento. Usando (8.2) se tiene también

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta \hat{x}'$$

que pasan respectivamente a

$$\hat{x}' \cdot \delta \alpha_{zx} = -\hat{z}' \cdot \delta \alpha_{xz} \quad \hat{x}' \cdot \delta \alpha_{yx} = -\hat{y}' \cdot \delta \alpha_{xy}$$

Pero las variaciones son tres (¿?)

$$\delta \alpha = (\delta \alpha_x, \delta \alpha_y, \delta \alpha_z).$$

La delta de un versor tiene componentes en los otros tres versores (no en el mismo versor)

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

pero proyectando

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{zx} = -\delta \alpha_{xz}$$

$$\hat{y}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{y}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{zy} = -\delta \alpha_{yz}$$

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{yx} = -\delta \alpha_{xy}$$

Con las siguientes definiciones

$$\delta \alpha_{zx} \equiv \delta \alpha_y \quad \delta \alpha_{yz} \equiv \delta \alpha_x \quad \delta \alpha_{xy} \equiv \delta \alpha_z$$

estamos autorizados a escribir

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_z \hat{y}' - \delta \alpha_y \hat{z}'$$

$$\delta \hat{y}' = -\delta \alpha_z \hat{x}' + \delta \alpha_x \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_y \hat{x}' - \delta \alpha_x \hat{y}'$$

La rotación infinitesimal puede verse como un vector

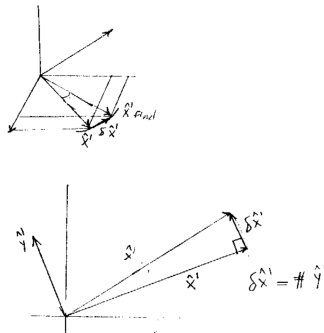


Figura 8.11

$$\delta \alpha = \delta \alpha_x \hat{x} + \delta \alpha_y \hat{y} + \delta \alpha_z \hat{z}$$

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}$$

donde hemos hecho $\Omega_i = \delta \alpha_i / \delta t$, es decir que identificamos las componentes del vector velocidad angular. En términos de las nuevas variables

$$\frac{\delta \hat{x}'}{\delta t} = \Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}'$$

$$\frac{\delta \hat{y}'}{\delta t} = -\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}'$$

$$\frac{\delta \hat{z}'}{\delta t} = \Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}'$$

Entonces, juntando todo

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z}' + U'_x (\Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}') + U'_y (-\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}') + U'_z (\Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}'),$$

y acomodando según los versores tenemos

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[\frac{dU'_x}{dt} - U'_y \Omega_z + U'_z \Omega_y \right] \hat{x}' + \left[\frac{dU'_y}{dt} + U'_x (\Omega_z - U'_z \Omega_x) \right] \hat{y}' + \left[\frac{dU'_z}{dt} + U'_y \Omega_x - U'_x \Omega_y \right] \hat{z}'$$

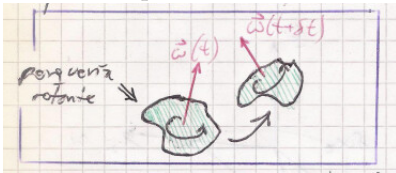
Los términos asociados a la velocidad angular *entran* como un producto vectorial de manera que podemos colapsar la notación en

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{in} \mathbf{U} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}.$$

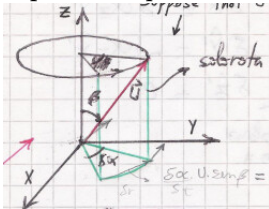
Recordemos que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}' = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ U'_x & U'_y & U'_z \end{vmatrix}.$$

Pero $\boldsymbol{\Omega}$ es un vector que puede variar en el tiempo. El eje de rotación puede variar en el tiempo,



Suponiendo que \mathbf{U} solo rota



$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} U \sin \beta = \Omega U \sin \beta = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$$

Me gustaba la identificación

$\left. \frac{d}{dt} \right|_{X'Y'Z'}$ el primer gran término en la derivada total del vector \mathbf{U} .

Un observador rotante vería $dU/dt|_{rot} = 0$ porque no cambian las componentes. Él sería partícipe del movimiento de \mathbf{U} y como la velocidad de rotación de \mathbf{U} es $\boldsymbol{\Omega}$ entonces \mathbf{U} se ve quieta.

EJEMPLO 8.1 Rotación en \hat{z}

Consideremos una rotación en torno a \hat{z}' de manera que como $\delta\hat{z}' = 0$ entonces $\delta\alpha_x = \delta\alpha_y = 0$

Luego, se tienen

$$\delta\hat{x}' = \delta\alpha_z\hat{y}' \quad \delta\hat{y}' = -\delta\alpha_z\hat{x}'$$

y entonces debe ser

$$\delta\alpha_z \equiv \omega_z.$$

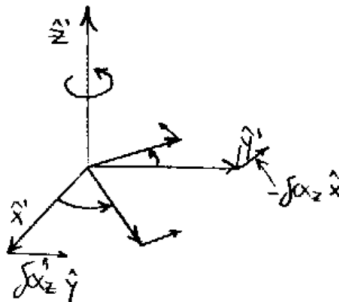
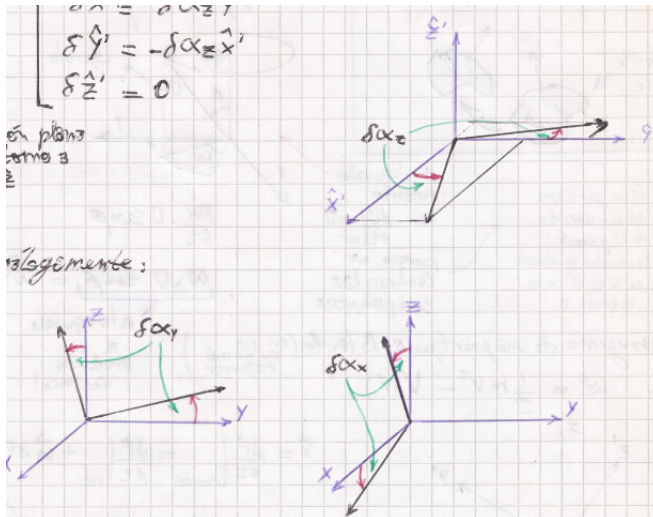


Figura 8.12



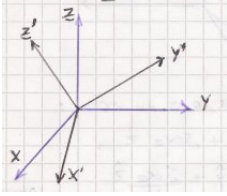
¿Este gráfico y el anterior son lo mismo?

1.8.1 Lagrangiano en un sistema rotante

Dado el lagrangiano usual de partícula sometida a potencial V ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - V(\mathbf{x}),$$

queremos ver qué forma adopta en un sistema rotante como el de ejes primados



La velocidad verifica

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ puesto que los orígenes de ambos sistemas coinciden. Entonces,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - V(\mathbf{r})$$

donde luego de hacer el álgebra del cuadrado resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - V(\mathbf{x})$$

donde los últimos tres términos puede agruparse en un potencial efectivo $U = U(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ tal que

$$U = -m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V(\mathbf{x}).$$

Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - U(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Esto es el lagrangiano que escribiría un observador del sistema rotante. Allí se puede pensar que aparece un potencial U dependiente de la velocidad que es fuente de todas las fuerzas, ficticias y reales.

$$V_{\text{coriolis}} = -m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$$

$$V_{\text{centrifugo}} = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V(\mathbf{x})$$

La fuerza, puesto que es un potencial que depende de la velocidad, se obtiene a partir de

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right).$$

Si la velocidad de rotación es baja, $\Omega \sim 0$ a primer orden el lagrangiano de una partícula libre en un sistema rotante es

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - m \mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}),$$

puesto que el potencial centrífugo es cuadrático en la velocidad angular. Para una partícula libre sometida a un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \frac{q}{2c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x})$$

Esto es el teorema de Larmor y

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q}{2mc} \mathbf{B}$$

es la llamada frecuencia de Larmor.

Podemos definir un operador

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{inercial} \square = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rotante} \square + \boldsymbol{\omega} \times \square,$$

y entonces

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \left(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \left[\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \right] \right)$$

$$m \mathbf{a}_{cm} = -2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \mathbf{F}$$

con $d\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$

El cuadrado argumento del operador debiera ser un ente en negrita -vectorial-.

1.9 El tensor de inercia

Siendo I el tensor de inercia buscamos soluciones a

$$I \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

o bien en componentes

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j = \lambda v_i \quad (9.1)$$

que se trabaja así

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j - \lambda v_i = \sum_{j=1}^3 (I_{ij} - \delta_{ij} \lambda) v_j = 0$$

lo cual en extenso corresponde al siguiente sistema de tres ecuaciones

$$(I_{11} - \lambda)v_1 + I_{12}v_2 + I_{13}v_3 = 0$$

$$I_{21}v_1 + (I_{22} - \lambda)v_2 + I_{23}v_3 = 0$$

$$I_{31}v_1 + I_{32}v_2 + (I_{33} - \lambda)v_3 = 0$$

Ahora multiplicamos la ecuación (9.1) y su conjugada compleja (denotada por $*$) por $\sum_i v_i$ y $\sum_i v_i^*$, respectivamente, para obtener

$$\sum_i v_i \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^* = \lambda^* \sum_i v_i^* v_i$$

$$\sum_i v_i^* \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j = \lambda \sum_i v_i v_i^*$$

Ahora si resto ecuación a ecuación tenemos

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij} v_j^* - v_i^* I_{ij} v_j) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

podemos cambiar de índices en el segundo sumando del miembro izquierdo puesto que los índices están sumados y son por ello mudos (*dummies*),

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij} v_j^* - v_j^* I_{ji} v_i) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

pero si usamos la propiedad de simetría del tensor de inercia $I_{ij} = I_{ji}$ entonces

$$0 = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

de modo que como v es arbitrario se tiene la importante conclusión de que $\lambda^* = \lambda$. Los autovalores del tensor de inercia son reales.

Si es por ejemplo λ^s uno de los autovalores se pueden despejar

$$(v_1^s, v_2^s(v_1), v_3^s(v_1)) e^{i\phi}$$

pero como la fase es la misma para todos me quedo con los módulos (los cuales definirán las direcciones). Pido

$$v_1^{s2} + v_2^s(v_1)^2 + v_3^s(v_1)^2 = 1$$

o dicho de otro modo que la norma sea uno.

Sean $\lambda^p \neq \lambda^s$ entonces

$$\sum_i v_i^p \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^s = \lambda^s \sum_i v_i^p v_i^s$$

$$\sum_i v_i^s \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^p = \lambda^p \sum_i v_i^s v_i^p$$

y restando ecuación a ecuación y cambiando subíndices como hiciéramos oportunamente,

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i^p I_{ij} v_j^s - v_i^s I_{ij} v_j^p) = (\lambda^s - \lambda^p) \sum_i v_i^p v_i^s$$

luego como es nulo el miembro izquierdo resulta que

$$\sum_i v_i^p v_i^s = 0$$

de modo que son ortogonales v^p y v^s . Los autovectores son ortogonales.

$$I\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}^t I\mathbf{v} = \mathbf{v}^t \lambda\mathbf{v},$$

pero como la norma de \mathbf{v} es unitaria, es

$$\mathbf{v}^t I\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^t \mathbf{v} = \lambda$$

Si armo una matriz $V = (v^s v^p v^q)$ será en todo su esplendor

$$V^t I V = \begin{pmatrix} v_1^s & v_2^s & v_3^s \\ v_1^p & v_2^p & v_3^p \\ v_1^q & v_2^q & v_3^q \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} v_1^s & v_1^p & v_1^q \\ v_2^s & v_2^p & v_2^q \\ v_3^s & v_3^p & v_3^q \end{pmatrix}$$

o bien

$$V^t I V = \lambda I$$

donde entendemos el 1 como una matriz identidad. Entonces $\lambda^s, \lambda^p, \lambda^q$ son los momentos principales de inercia

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^q \end{pmatrix}$$

Vale que, además,

$$\lambda^s = \sum_{ij} v_i^s I_{ij} v_j^s > 0$$

puesto que es una forma cuadrática.

Para el objeto debajo de estas líneas rotando en $2\pi/3$ tengo la misma situación física (eje de simetría de orden tres), entonces tengo eje principal de inercia allí.

La idea es que si pienso en planos siempre se hacen nulos los productos de inercia rotacionales.

Para la siguiente figura el plano de simetría es eje principal, luego es eje principal de inercia.

1.10 Movimiento de un cuerpo asimétrico

$$\mathbf{L}_{spin} = I\boldsymbol{\Omega}$$

y como la energía se conserva es

$$E = T + V$$

$$E = T_{trasl} + T_{rot} + V(R_{cm})$$

donde cada una se conserva separadamente.

Usaremos una notación en la cual el subíndice refiere a referido a y el supraíndice a de qué puntos/puntos

$$\mathbf{L}|_0^{sist} = \mathbf{L}_{orb}|_0^{cm} + \mathbf{L}_{spin}|_{cm}^{sist}$$

$$\left. \frac{d\mathbf{L}^{orb}}{dt} \right|_{in} = \boldsymbol{\tau}_0^{cm} = \mathbf{R}_{cm} \times \mathbf{F} = \mathbf{R}_{cm} \times -Mg\hat{z} \neq 0$$

de tal manera que el $\mathbf{L}^{orb} \equiv \mathbf{L}_0^{cm}$ no se conserva.

El que se conserva es \mathbf{L}^{spin} pues pensamos la $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ aplicada en el centro de masa que es el origen y que tiene $\mathbf{R}_{cm} = 0$.

$$\mathbf{L}^{spin} = L_1\hat{1} + L_2\hat{2} + L_3\hat{3} = I_1\Omega_1\hat{1} + I_2\Omega_2\hat{2} + I_3\Omega_3\hat{3}$$

y podemos escribir

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

$$T_{rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

$$1 = \frac{L_1^2}{2I_1 T_{rot}} + \frac{L_2^2}{2I_2 T_{rot}} + \frac{L_3^2}{2I_3 T_{rot}}$$

Entonces, si se da que $I_3 > I_2 > I_1$ se tiene

$$L_{spin}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad L^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2$$

donde como se conservan $T_{rot} \equiv T$ y $L_{spin} \equiv L$

$$2T = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

de la primera deducimos un elipsoide de semiejes en L_i y de la segunda una esfera de radio L en L_i .

Esto está super oscuro. No sé qué se quiso decir, tal vez se halle explicado mejor en la carpeta.

$$2I_3 T > 2I_2 T > 2I_1 T$$

$$L^2 > 2I_3 T \quad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 > \frac{I_3}{I_1} L_1^2 + \frac{I_3}{I_2} L_2^2 + L_3^2$$

$$L_1^2 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) + L_2^2 \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) > 0$$

pero esto no vale. Asimismo tampoco vale que

$$L^2 < 2I_1 T$$

y resulta

$$2I_3 T > L^2 > 2I_1 T$$

entonces L_{spin} (su punta) se mueve en la intersección de una esfera y un elipsoide. Estos movimientos son periódicos.

La peonza tiene movimientos estables para la rotación en torno a \hat{x}_1, \hat{x}_3 pero inestables en torno a \hat{x}_2 . El movimiento puede resolverse mediante ecuaciones de Euler. Es estable rotar en torno al mayor o menor momento de inercia lo que generará un movimiento oscilatorio para Ω ($\omega^2 > 0$), en cambio es inestable rotar en torno al momento de inercia intermedio, lo cual generará un movimiento armónico para Ω ($\omega^2 < 0$).

Con L constante si $L \parallel \Omega$ entonces ambos son constantes (corresponde a una rotación). Se consigue con Ω en la dirección del eje principal. Si $L \nparallel \Omega$ entonces Ω oscila en torno a L .

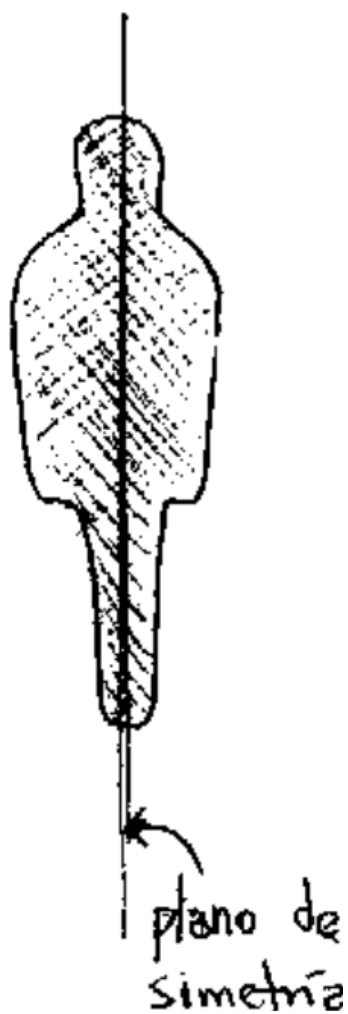


Figura 9.13

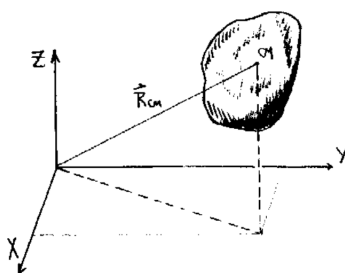


Figura 10.14

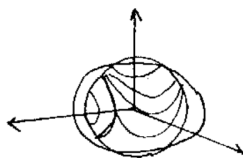


Figura 10.15

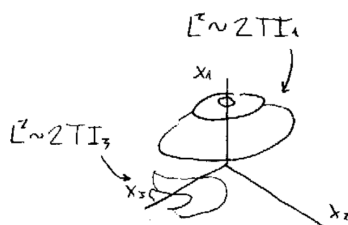


Figura 10.16