

Capítulo 1

Medios materiales

Digamos, un poco *sketchi* que los medios se pueden agrupar, según sus propiedades según el siguiente esquema.

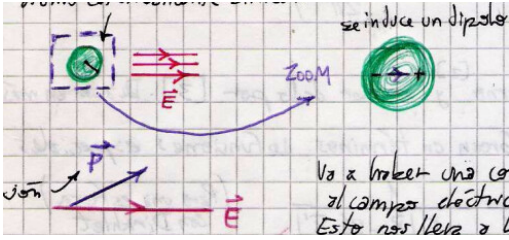
- Dieléctricos
- Medios magnéticos $\left\{ \begin{array}{l} \text{imán inducido} \left\{ \begin{array}{l} \text{paramagnético} \\ \text{diamagnético} \end{array} \right. \\ \text{imán permanente} \quad \text{ferromagnético} \end{array} \right.$
- Conductor $\left\{ \begin{array}{l} \text{perfecto} \\ \text{buen conductor} \\ \text{mal conductor} \end{array} \right.$
- Plasmas (gas ionizado)

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

1.1 Campos estáticos en medios materiales

En la picture de acá abajo tenemos un átomo esféricamente simétrico, un medio y un vector de polarización. Entonces vemos en la vista zoom cómo se induce un dipolo

Esta subsección tal vez mejor sería que fuera llamada “polarización eléctrica”.



Habrá una componente dipolar paralela al campo eléctrico externo. Esto nos lleva a la constante dieléctrica del medio (dependerá decrecientemente de la temperatura).

Supondremos que las propiedades macroscópicas para dos campos se satisfacen para los campos vistos microscópicamente

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla \times \mathcal{E} = 0$$

El campo macro \mathbf{E} será un promedio estadístico de su versión microscópica

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathcal{E}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}) d^3\chi,$$

donde χ es una coordenada que barre el volumencillo ΔV . Como vale la linealidad, se tiene $\nabla \times \mathcal{E} = 0$ que conduce a $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ de manera que $\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. El vector \mathbf{D} no cumple esto último.

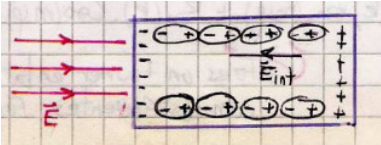
Se construye así

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle,$$

donde la polarización

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V}$$

es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.



Luego, un *cacho* de potencial ϕ será

$$\delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta V' + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta V'$$

de manera que el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \int \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

Ahora el último término se puede escribir como

$$\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = - \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

y considerando integración por partes en esta última

$$\int_{V'} \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que se pueden consolidar en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\rho_L(\mathbf{x}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] dV',$$

donde el volumen V' abarca todas las fuentes (incluso las de polarización). Entonces considerando que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P,$$

se puede definir una densidad de carga total

$$\rho_T = \rho_L + \rho_P.$$

Entonces, el potencial se escribe como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

De esta forma se puede construir un vector \mathbf{D} siguiendo esta línea de razonamiento:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_T = 4\pi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

y pasando de miembros

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho_P = 4\pi\rho_L$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

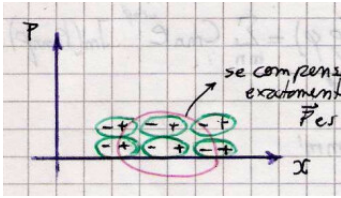
de modo que

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

donde \mathbf{D} es el llamado vector desplazamiento y estas expresiones valen para todo medio.

En la situación depicted en la figurilla siguiente

Hay que hacer partes con sumo detalle aquí y justificar que el surface term se arroja a los chanchos.



se tendrá una compensación exacta si \mathbf{P} es uniforme, de manera que $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. En caso contrario existirá una ρ_P no nula en el interior.

escrachos

Luego el potencial es, posteriormente a haber hecho partes es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

Por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

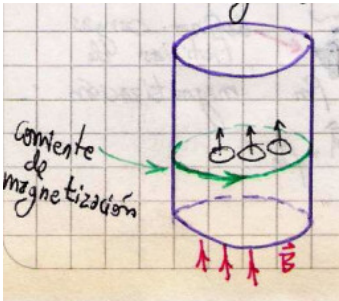
donde ξ_e es la susceptibilidad eléctrica y ϵ es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_P,$$

que provienen del rotor de \mathbf{E} , la divergencia de \mathbf{D} y la divergencia de \mathbf{P} respectivamente.

1.1.1 Magnetismo en la materia

Los dipolos magnéticos inducidos son de dirección opuesta al campo externo \mathbf{B} (diamagnetismo). Aquellas sustancias con momento magnético permanente se orientan en la dirección del campo \mathbf{B} (paramagnético).



No sé qué pasaba con la parte de la integral de superficie.

Esta sección fue antes “imanes inducidos”.

Microscópicamente se tiene un campo \mathbf{b} que verifica $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ de manera que el campo total será un promedio en la región, i.e.

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{b}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi,$$

donde ΔV es microscópicamente grande pero macroscópicamente chico. La linealidad permite que la divergencia de \mathbf{B} sea nula de modo que existe \mathbf{A} tal que su rotor es \mathbf{B} . Entonces,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}_i) \langle \mathbf{m}_i \rangle$$

donde N_i es un tipo de moléculas y $\langle \mathbf{m}_i \rangle$ es un momento magnético medio. La sumatoria vale para ciertos tipos de moléculas [¿?].

Por otro lado la magnetización se puede interpretar/definir como

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta V},$$

que es el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial

$$\delta \mathbf{A} = \frac{\delta \mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

se evalúa con la misma idea que la del dipolo para polarización. Queda por incorporar el asuntete de

$$\frac{1}{c} \int_V c \mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

usando partes.

El potencial vector puede escribirse como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c \mathbf{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] dV',$$

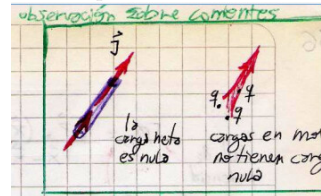
y con el trick usual la segunda integral se convierte a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c \nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV'$$

mientras que con la definición de las corrientes total y de magnetización es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Tenía este figurín por allí. Sería bueno ver si es una idea importante.



que vale para toda región donde haya corrientes libres (o desplazamientos microscópicos de carga) más medios magnetizados.

Tenemos, por otra parte, la otra construcción

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que debiéramos consolidar de alguna manera. Cuando tenemos volumen y superficie son pertinentes:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c} \mathbf{g}_m$$

Para la ecuación del rotor tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \nabla \times \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M$$

donde \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético.

Por la linealidad

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_M) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde χ_M es la susceptibilidad magnética y μ es la permeabilidad magnética. Si $\mu > 1$ es un medio paramagnético y $\mu < 1$ es diamagnético.

Si hay linealidad e isotropía

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}$$

donde el paréntesis es ε es la permitividad eléctrica. Si hay isotropía

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

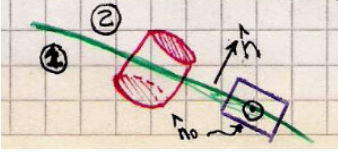
Se puede hacer un parangón con \mathbf{D} según se vio para sustancias polarizadas.

Condiciones de contorno con medios

Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_L \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde \mathbf{g}_L se refiere a densidad de corriente superficial.



Aplicando teorema de Stokes sobre el rotor de \mathbf{H} para el circuitito diminuto se tiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{n} dS = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\ell$$

pero como

$$\frac{d\ell}{d\ell} = d\hat{\ell} = \hat{n}_0 \times \hat{n}$$

y será (tendiendo a cero la superficie del circuitito)

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{n}_0 \times \hat{n}) d\ell = d\ell \hat{n}_0 \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)]$$

Como la orientación de \hat{n}_0 es arbitraria los dos miembros son iguales y entonces

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_L$$

que nos dice que el componente tangencial de \mathbf{H} no es continuo cuando circula por el borde una \mathbf{g}_L .

Si esta es nula se tiene

$$\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{n2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n1} \\ H_{t2} = H_{t1} \end{cases}$$

1.1.2 Imán permanente

Hay magnetización \mathbf{M} aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que

$$\mathbf{M} \neq \xi_M \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu \mathbf{H}$$

El campo \mathbf{M} es fuente de campo. El asunto es que \mathbf{M} tiene el problema de la discontinuidad, pero $\mathbf{M} = 0$ fuera del medio. La relación entre \mathbf{B}, \mathbf{H} depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c} \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

si $\mathbf{J}_L = 0$ entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$

que es un potencial escalar magnético.

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$-\nabla^2 \phi_m = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$$

donde se ha definido cargas ficticias de magnetización. Se deduce una $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &\equiv -\rho_m & \mathbf{M} \cdot \hat{n} &\equiv \sigma_m \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV' \end{aligned}$$

se puede asociar

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_P.$$

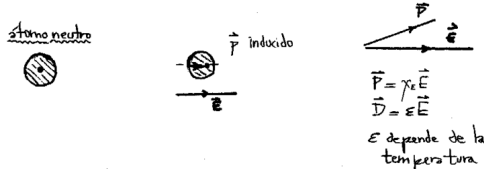


Figura 1.1

1.2 Polarización y magnetización de medios

La polarización y la magnetización suelen depender de los campos externos, es decir $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$. Una sustancia lineal admite un desarrollo del tipo

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que $\mathbf{M}_0 = 0$, $\mathbf{P}_0 = 0$ se da que

$$\mathbf{M} = \sum_i \sum_j \left(\left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j \right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

y ahí se ve explícitamente que tienen que ser tensores,

$$\mathbf{M} = \vec{\xi}_M \mathbf{H} \quad \mathbf{P} = \vec{\xi}_e \mathbf{E}.$$

Estos tensores son, respectivamente, los tensores de susceptibilidad magnética y eléctrica. En el caso en que sean escalares (isotropía [¿?]) la susceptibilidad eléctrica solo puede tomar valores positivos mientras que la magnética puede tomar también valores negativos.

Medios magnéticos de muy alta permeabilidad

Consideremos un caso especial donde

$$g_L = 0.$$

Entonces

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{n} \quad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1$$

En el límite $\mathbf{H}_2 \perp$ superficie del medio y es similar al \mathbf{E} a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente equipotenciales.

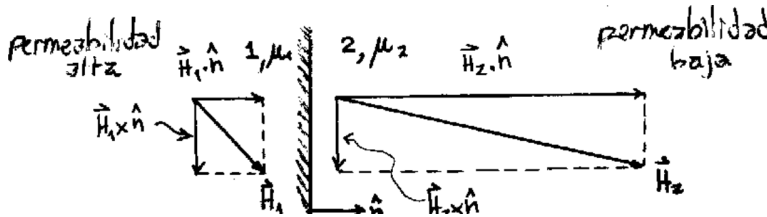


Figura 2.2

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{es decir} \quad \mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$$

Consideraciones en medios magnéticos

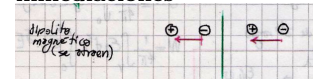
Fuera de un imán permanente

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$\mathbf{B} = -\nabla \phi_m^B,$$

Esto estaba en las inmediaciones



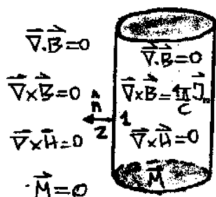


Figura 2.3

pero fallará en la superficie de separación donde hay \mathbf{J}_m y por ende \mathbf{J}_T .
Lo que sí funciona es

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m^H,$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla(\nabla \phi_m^H) = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} = 4\pi \rho_M$$

$$-\nabla^2 \phi_m^H = 4\pi \rho_M$$

una ecuación de Poisson para el potencial ϕ_m^H .

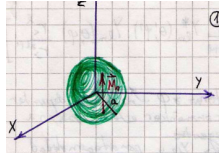
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1 - 4\pi \mathbf{M}) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1) \cdot \hat{n} = 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_M$$

EJEMPLO 2.1 Problema 5 (imán esférico)

Calculamos todo de varias maneras



Bola ①

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV = \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \hat{z}$$

Bola ②

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$$

$$\mathbf{m} = \int \rho_m \mathbf{x} dV = \hat{z} \int \rho_m z dV$$

Se tienen además

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y como \mathbf{M} es constante en el interior, no hay ρ_m en el volumen. Habría que escribir bien la magnetización \mathbf{M} . Usaremos una función escalón

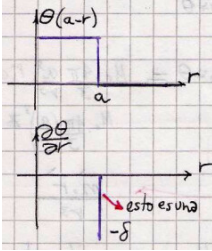
Consideramos una función escalón Θ de tal manera que

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \Theta(a - r)$$

donde

$$M_0 \hat{z} = M_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \Theta(a - r)$$

según puede verse en el figurín bajo estas líneas (se ve solo el tetón).



Entonces,

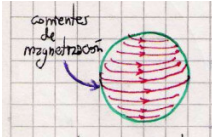
$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \cos \theta \Theta(a - r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta \Theta(a - r)] \right) = -M_0 \cos \theta \delta(r - a)$$

donde $M_0 \cos \theta = \sigma_M$ resultado que es consistente con la cuenta de $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$.

Finalmente,

$$\mathbf{m} = \int \rho_m z dV = M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a a^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi M_0 a^3 \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \hat{z}$$

Bola ③. Se ilustra en la postal siguiente



Desde

$$\mathbf{J}_m = c \nabla \times \mathbf{M}$$

se deduce

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= c \mathbf{M} \times \hat{n} = c M_0 \hat{z} \times \hat{r} = c M_0 \sin \theta \hat{\varphi} \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}_m dV = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\ell = \frac{I \text{ Area}}{c} \hat{z} \end{aligned}$$

y hemos obtenido el resultado de \mathbf{m} como área por corriente.

Para el anillito mostrado en el cartón



$$d\mathbf{m} = \frac{\text{seccion}}{c} du = \frac{1}{c} \pi a^2 \sin^2 \theta a \mathbf{g}_m d\theta$$

o bien, integrando,

$$\mathbf{m} = \hat{z} \int_0^\pi M_0 \pi a^3 \sin^3 \theta d\theta = \hat{z} \left(\frac{4\pi}{3} a^3 M_0 \right)$$

con lo cual el potencial resulta

$$\phi_M = \int \frac{\rho_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

o en full splendor

$$\phi_M = \int \int M_0 \cos \theta \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right] a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Aquí hay simetría en torno a de manera que el problema no puede depender de esta coordenada. Los armónicos esféricos pasan a ser los polinomios de Legendre. Puedo ver que $\cos \theta$ es un armónico Y_{10} y por ortogonalidad se va toda la doble sumatoria y sobreviven solamente $\ell = 1, m = 0$.

$$\text{Valen } \cos \theta = Y_{10} \sqrt{4\pi/3}.$$

Usando esta información tenemos

$$\phi_M = M_0 a^2 \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} Y_{10}^*(\theta, \varphi) = M_0 \frac{4\pi}{3} a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

solución que es válida en todo el espacio.

$$\phi_M = \begin{cases} M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{r}{a^2} \cos \theta & r < a \\ M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{a}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde el último caso $r > a$ se puede escribir como

$$M_0 \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 z = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Recordemos que si $r > a$ es $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ mientras que para $r < a$ es $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$.

Si introducimos este imán pelota en un medio tengo una alteración en el contorno. Aquí hay que usar separación de variables.

$$\phi_I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\phi_{II} = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}^{II}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde en I se ha tirado una parte de la solución porque diverge en cero, mientras que en II se tira en cambio la parte que corresponde.

Los contornos salen de evaluar

$$\phi_I(a, \theta) = \phi_{II}(a, \theta)$$

lo cual conduce a

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^I}{a^{2\ell+1}}$$

En el caso de los campos \mathbf{B} se tendrá $B_{nII} = B_{nI}$ que conduce a $[\dot{c}]?$

$$\mu H_{nI} = H_{nII} + 4\pi M_{nI}$$

donde el lhs no se puede plantear en un imán permanente y el rhs implica que para plantear esto mismo en el caso II necesito conocer M pero conozco μ .

$$-\mu \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 4\pi M_0 \cos \theta = 4\pi \sigma_M$$

donde esta última ecuación es casi una de contorno como para el campo \mathbf{E} pero ojo que está el μ . Viene de que $\mathbf{H} = -\nabla \phi$. Luego,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\mu(\ell+1) \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{\ell+2}} + \ell a^{\ell-1} A_{\ell}^I \right] P_{\ell}(\cos \theta) = 4\pi \sigma_M$$

y ahora se aplica ortogonalidad multiplicando por $P_{\ell'}$ e integrando, entonces

$$c_{\ell} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} = \frac{4\pi M_0}{2\ell'+1} \delta_{\ell 1} \quad 2\mu \frac{B_1}{a^3} + A_1 = 4\pi M_0$$

y de estas dos ecuaciones se obtienen los coeficientes

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^I}{a^{2\ell+1}}$$

sumados a

$$4\pi M_0 = (1+2\mu)A \quad A_1 = \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \quad B_1 = \frac{4\pi M_0 a^3}{1+2\mu}$$

Finalmente,

$$\phi = \begin{cases} \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} r \cos \theta & r < a \\ \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde otra vez la última expresión, para $r > a$, tiene la forma $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ donde $\mathbf{m} = 4\pi M_0 a^3 \hat{z}/(1+2\mu)$.

Un momento dipolar magnético diferente al inicial es porque hubo momento inducido

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\text{ind}} &= \mathbf{m}_T - \mathbf{m} = \left(\frac{4\pi a^3}{1+2\mu} M_0 - \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \right) \hat{z} \\ \mathbf{m}_{\text{ind}} &= \left(\frac{1-\mu}{1+2\mu} \right) \frac{8\pi}{3} a^3 M_0 \hat{z} \end{aligned}$$

1.2.1 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Supongo que integrando esto en volumen y usando partes se arriba a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Entonces, usando la identidad **ID 3** del apéndice se convierte en

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar que el término de volumen se debe a una corriente de magnetización \mathbf{J}_M y el de superficie a una corriente superficial \mathbf{g}_M , de modo que se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

El término de superficie puede ser fácil si se conoce \mathbf{M} sobre la superficie. Este componente se puede dejar de lado si se toma una región de integración que engloba a toda la distribución.

Las unidades de \mathbf{g}_M tienen que ser de corriente sobre longitud ($q/(t\ell)$) o bien i/ℓ .

Me falta descascar esta expresión, pero tendría que ser la expresión anterior luego de cosmética y tirar el término de superficie. Veremos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

1.2.2 Campo externo sobre distribución

Se quiere ver la maquinaria matemática para evaluar el efecto de un campo externo sobre una configuración de carga. Recuérdesse que un campo homogéneo no hace fuerza sobre un dipolo. El punto de partida es la integral del potencial

$$W = \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3x$$

y el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla \phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi(0) + \dots$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \mathbf{E}_j(0) + \dots$$

Implantando esta expansión en la integral previa,

$$W = \phi(0) \int \rho(\mathbf{x}) d^3x - \mathbf{E}(0) \cdot \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x - \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \mathbf{E}_j(0)$$

Esto puede ser el kid de lo que no entendía y de esos dibujillos en la carpeta



$$W = q\phi - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \mathbf{E}_j$$

Tomando el gradiente, con su signo, $\mathbf{F} = -\nabla W$ y entonces

$$F_k = -\partial_k W = -q \partial_k \phi + p_i \partial_k E_i + \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \partial_j E_k$$

entonces $\partial_k E_j = \partial_j E_k$ puesto que el carácter irrotacional del campo externo hace que puedan intercambiarse los índices en la expresión. El primer término del rhs es $q\mathbf{E}$.

1.3 Consideraciones energéticas

Aquí la idea es construir la configuración carga a carga. Evaluando el trabajo de generar el potencial total. Recordemos [i?]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(-\nabla\phi) = -\nabla U$$

$$\Delta U = W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell \rightarrow \Delta U = - \int_{\Gamma} \nabla(q\phi) \cdot d\ell = -q\Delta\phi$$

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} \quad \frac{\delta U}{\delta x} = F_t$$

donde el subíndice es por tangencial.

Se empieza con $W_1 = 0$. Luego

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2} (W_2^a + W_2^b) = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right)$$

$$W_N = \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

siendo ϕ_{ij} el potencial sobre q_i debido a q_j . Entonces,

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de q_i . La versión continua será, evidentemente,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material. Se quiere ver que trabajo W debe hacerse para modificarlo en un $\Delta\rho$.

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \delta V \phi,$$

o bien

$$\Delta(\delta W) = \delta q \phi = \delta \rho dV \phi.$$

Se integra en todo el volumen,

$$\delta W = \int \delta \rho \phi dV.$$

que satisface $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$ de modo que

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})}{4\pi} \delta V \phi$$

o bien

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \phi dV.$$

y usando identidades (la de siempre -ponerla en Apéndice- o partes)

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \left(\int \nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) dV - \int \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dV \right)$$

Ahora se presupone que se integra en todo el espacio. La superficie en el infinito tiene ϕ, \mathbf{D} tendiendo a cero y me olvido de esa integral. Entonces, reemplazando el gradiente del potencial por el campo, se tiene

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \right) dV$$

y esto es el trabajo necesario para formar la configuración en presencia de medios materiales. Resquechos de la otra deducción [habría que consolidar] siguen a continuación:

$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) = \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D}$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta V [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) - \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi]$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \left(\int_V \nabla \cdot (\mathbf{D} \phi) dV + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \right)$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D} \phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotroía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su ϵ . Es un proceso isotérmico. Uno asume que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ y no varía con el tiempo. En la práctica ϵ varía con la temperatura.

1.3.1 Medios anisótropos

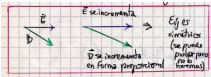
Consideremos un medio lineal anisótropo

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

con el tensor de segundo rango ε_{ij} . En este caso

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_{ij} E_i \delta E_j \quad W = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_{ij} dV \int_0^E E_i \delta E_j$$

en la cual el campo \mathbf{E} desde cero a su valor final es paralelo a si mismo en todo momento.



Entonces

$$\frac{\delta E_i}{\cos \alpha_i} = \frac{\delta E_j}{\cos \alpha_j}$$

$$\delta E_j = a_{ij} \delta E_i$$

¿Qué será el a contravariante?

con $a_{ij} = \cos \alpha_j / \cos \alpha_i$. Entonces $E_j = a_{ij}E_i = a^{ij}E_i$ y

$$\int_0^E E_i \delta E_j = a^{ij} \int_0^E E_i \delta E_i = \frac{1}{2} a^{ij} E_i^2$$

de modo que también

$$\int_0^E E_i \delta E_j = \frac{1}{2} E_i E_j,$$

y entonces

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV.$$

Esta expresión vale para medios lineales isótropos o no homogéneos o no homogéneos. Es decir, es bastante general. Traemos cargas desde el infinito pensando que el medio material no cambia su constante (temperatura constante), por ello indirectamente hemos supuesto un proceso isotérmico. Este trabajo ha incrementado la función libre de Helmholtz.

1.4 Interpretación termodinámica de U

El incremento de energía a T constante

$$\delta W = U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j \quad \text{con } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ tensor simétrico} \quad (4.1)$$

Pero ϵ es función de T la temperatura y entonces no podemos decir que

$$dU = dW$$

valga en general, pues también hay variación del calor (a no ser que sea un proceso isotérmico) de modo que la energía que representa (4.1) es la energía libre de Helmholtz a T constante.

$$dU = dQ - dW \quad F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT$$

pero al ser la última cero, resulta

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV - SdT$$

de modo que como el primer término es $\partial F / \partial D|_T$ resulta que

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D$$

Si es un medio isotrópico entonces $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y entonces

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = S \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} U = F + TS &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV \\ U &= \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[\mathbf{D} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \left[\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right] dV \end{aligned}$$

y finalmente para medios lineales e isotrópicos

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial T \epsilon}{\partial T} dV$$

y la segunda ley de la termodinámica es

$$\delta Q = T.dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

con $\epsilon > 0, T > 0, \partial \epsilon / \partial T < 0$ si el ϵ decrece con T el cuerpo se enfría $\delta Q < 0$.

1.5 Teorema de Thomson

$$\delta W = \int_V \phi \delta \rho dV$$

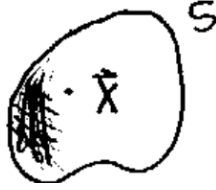


Figura 5.4

las cargas en un conductor se redistribuirán hasta que F alcance su valor mínimo.

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\nabla \phi \cdot \delta \mathbf{D} dV) =$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta(\mathbf{D}\phi)] dV$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \sum_i^N \int_V \phi_i 4\pi \delta p_i dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \mathbf{D}\phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_i^N \phi_i \int_V \delta \rho_i dV = 0$$

y la integral de superficie la podemos dejar desvanecerse. Se suma sobre cada conductor que se halla a ϕ constante ϕ_i . La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio $\delta \rho_i = 0 \forall i$.

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca pueden llegar a un equilibrio estable. El ϕ no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región.

Sea una región donde

$$\nabla \phi|_s < 0 \Rightarrow \int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \int_V \nabla^2 \phi dV = 0$$

entonces no vale lo que supusiéramos.

1.6 Esfera con magnetización uniforme

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 = \nabla \times \mathbf{M}$$

usando el ϕ_m se llega a

$$\mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}$$

donde I es por interior de esfera y afuera el ϕ_m es el de un dipolo con

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}a^3\mathbf{M}$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie (no hay multipolos subsiguientes).

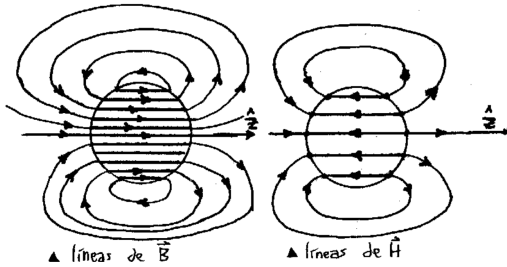


Figura 6.5

En las figuras vemos las líneas de \mathbf{B} que son continuas, no nacen ni mueren, pero las de \mathbf{H} nacen y mueren en la superficie, por la $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$. \mathbf{H} es menos intenso que \mathbf{B} pues

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

de manera que en el interior \mathbf{H} y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos.

1.7 Histéresis

Los campos fundamentales son \mathbf{E}, \mathbf{B} , en realidad \mathbf{D}, \mathbf{H} se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de ρ, \mathbf{J} de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

pero para ferromagnéticos es $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$ con f no lineal. Se verifica un fenómeno de histéresis; \mathbf{B} es una función multivaluada de \mathbf{H} y f depende de la historia del material.

\mathbf{H} se conoce como campo desmagnetizante.

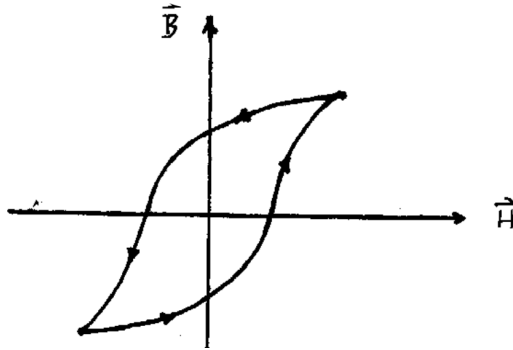


Figura 7.6

1.8 Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un B_0 uniforme tendremos

$$H_I = B_0 - \frac{4\pi}{3}M \quad B_I = B_0 + \frac{8\pi}{3}M$$

y podemos eliminar M de manera que

$$2H_I + B_I = 3B_0$$

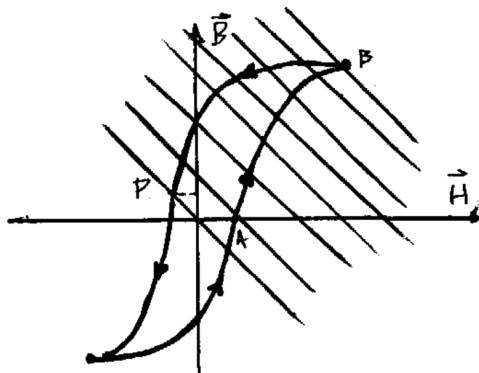


Figura 8.7

Vemos en la figura en P el punto de trabajo del imán esférico. Subimos

B_0 hasta saturar la esfera y luego cuando $B_0 = 0$ nos hallamos en P. Hemos recorrido el camino ABP.

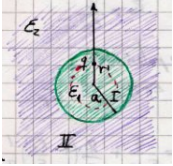
Usando la curva de histéresis relacionamos B_I, H_I y entonces

$$B_I = 3B_0 - 2H_I.$$

Un imán es tanto más estable cuando H_I es pequeño; en el caso de $M \parallel$ superficie, por ejemplo.

EJEMPLO 8.1 Problema 6. Separación de variables con medios

El setup cuyo campo queremos calcular se muestra en el figurín siguiente



Por separación de variables podríamos plantear tres regiones. Podemos usar la solución de la ecuación de Poisson, que para medios homogéneos resulta

$$\nabla^2 \phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho$$

Se tendrán

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi^I = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \nabla^2 \phi^{II} = 0 \end{cases}$$

y de la zona I conozco una solución (una carga puntual). Luego,

$$\phi^I = \frac{q}{\varepsilon_1 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F^I(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \text{con} \quad \nabla^2 F^I = 0$$

$$\phi^{II} = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$F^I = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Por teorema de expansión se tiene

$$\frac{q}{\varepsilon_1 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell} \frac{q}{\varepsilon} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

La continuidad de ϕ en $r = a$ lleva a que $r' < a = r$ entonces $r_{<} = r$ y $r_{>} = a$ de modo que

$$\begin{aligned} \frac{q}{\varepsilon} \sum_{\ell} \left(\frac{r'^{\ell}}{a^{\ell+1}} + A_{\ell} a^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta) &= \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \frac{q}{\varepsilon_1} \left(\frac{r'^{\ell}}{a^{\ell+1}} + A_{\ell} a^{\ell} \right) &= \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+1}} \end{aligned}$$

Esta última es la Eq. 1. Luego tendremos

$$D_n^{II} - D_n^I = 4\sigma_L = 0,$$

lo cual conduce a

$$\varepsilon_2 \left. \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_1 \left. \frac{\partial \phi^I}{\partial r} \right|_{r=a}$$

que evaluadas son

$$\varepsilon_1 \sum_{\ell} \frac{q}{\varepsilon_1} \left(-\frac{r'^{\ell}(\ell+1)}{a^{\ell+2}} + \ell A_{\ell} a^{\ell-1} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = \varepsilon_2 \sum_{\ell} -\frac{B_{\ell}(\ell+1)}{a^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{q}{\varepsilon_1} \frac{r'^{\ell}(\ell+1)}{a^{\ell+2}} + \ell A_{\ell} a^{\ell-1} \right) = \varepsilon_2 \frac{B_{\ell}(\ell+1)}{a^{\ell+2}}$$

que es la Eq. 2. La solución será

$$B_{\ell} = \frac{(2\ell+1)qr'^{\ell}}{\varepsilon_1 \ell + \varepsilon_2(\ell+1)} \quad A_{\ell} = \frac{q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1} \frac{(\ell+1)}{\varepsilon_1 \ell + \varepsilon_2(\ell+1)} \frac{r'^{\ell}}{a^{2\ell+1}}$$

$$B_0 = \frac{q}{\varepsilon_2} \quad A_0 = -\frac{q}{\varepsilon_2 a} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

Si $r' = 0$ tendríamos una solución razonable simétrica y nos quedarían solamente los coeficientes A_0, B_0 . En efecto se tendría

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi^I = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \frac{q}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{1}{a} \\ \nabla^2 \phi^{II} = \frac{q}{\varepsilon_2 r} \end{cases}$$

Para evaluar la carga de polarización se debe usar

$$E_n^{II} - E_n^I = 4\pi\sigma_T = 4\pi\sigma_P,$$

o bien

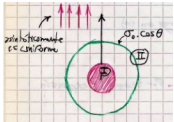
$$\frac{D_n^{II}}{\varepsilon_2} - \frac{D_n^I}{\varepsilon_1} = 4\pi\sigma_P$$

También se puede usar

$$\sigma_P = -(P_n^{II} - P_n^I).$$

EJEMPLO 8.2 Problema 7

La ilustración es por demás elocuente.



Se pueden plantear tres regiones y Laplace o bien plantear dos regiones

$$\phi^{II} = \phi_{\text{poisson}} + F^{II} \quad \phi^I = F^I$$

$$\phi_{\text{poisson}} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

y usando el desarrollo del denominador,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

$$F^{II} = \sum_{\ell} \left(\frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} + B_{\ell} r^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = \sum_{\ell} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta$$

$$F^I = \sum_{\ell} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta).$$

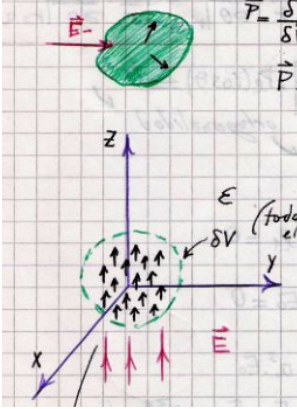
Parece haber un error en el despeje. Copio la carpeta tal cual. Veremos.

EJEMPLO 8.3 Problema 9

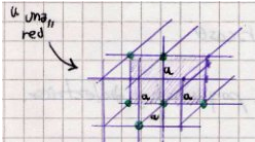
La polarización se interpreta más o menos así

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V} = \frac{N}{V} \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle$$

aunque puede existir una relación para moléculas en particular, del tipo $\langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = \gamma \mathbf{E}$, donde este último campo eléctrico es el que actúa sobre una molécula. No será necesariamente igual al externo. Globalmente, sabemos que $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$.



Qué campo eléctrico siente una molécula en el origen debido a sus vecinos presentes en el δV . Pensamos en una red con moléculas equiespaciadas, algo como lo ilustrado abajo



$$\mathbf{x}' = ia \hat{x} + ja \hat{y} + ka \hat{z}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \approx -\nabla \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{ijk} \right)$$

donde el paréntesis es el potencial de cada una de las moléculas, y así

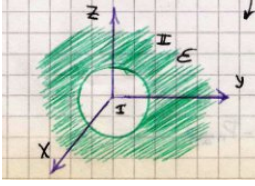
$$\mathbf{E} \approx -\nabla \left(\sum_{i,j,k} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right)$$

donde $\mathbf{x} = 0$ en este caso. Pero esto es

$$\mathbf{E} \approx \nabla \left[\sum_{i,j,k} \frac{p_x ia + p_y ja + p_z ka}{a^3(i^2 + j^2 + k^2)^{3/2}} \right] = 0,$$

y es nulo porque sumo desde $-\infty$ a ∞ y los índices positivos y negativos ... [i ?].

Ahora queremos ver el efecto del resto del medio, y esto se resuelve del modo usual.



Es decir que se proponen

$$\phi^{II} = \sum_{\ell} \left(\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} + A_{\ell}^{II} r^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\phi^I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta).$$

Luego, proponiendo continuidad en $r = a$ resultan

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}}{a^{2\ell+1}} - E_0 \delta_{1\ell} \quad A_{\ell}^{II} = -E_0 \delta_{\ell 1}$$

A partir de la igualdad $D_n^I = D_n^{II}$ surge

$$-\varepsilon \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} = -\frac{\partial \phi^I}{\partial r}.$$

Como

$$\sum_{\ell=0} \left[\ell A_{\ell}^I a^{\ell-1} - \varepsilon \ell A_{\ell}^{II} a^{\ell-1} + \varepsilon(\ell+1) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} \right] P_{\ell}(\cos \theta) = 0,$$

y tras usar la ortogonalidad de los P_{ℓ} ,

$$(\ell a^{\ell-1} + \varepsilon(\ell+1)) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} + (\varepsilon-1)\ell E_0 \delta_{1\ell} = 0$$

de modo que para $\ell = 1$ es

$$A_1^I = -\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1} a^3 E_0 B_1 = -\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} a^3 E_0$$

Sobrevive solamente el término $\ell = 1$ de manera que

$$\phi^I = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1} r E_0 \cos \theta$$

$$\phi^{II} = -r E_0 \cos \theta - \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} r E_0 \cos \theta \left(\frac{a}{r} \right)^3$$

El campo eléctrico es mayor en la región vacía porque no hay dieléctrico.

$$E = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1} = \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} E_0 + E_0$$

Trabajando en la condición de juntura,

$$\frac{\partial \phi^{II}}{\partial n} - \frac{\partial \phi^I}{\partial n} = -4\pi \sigma_P$$

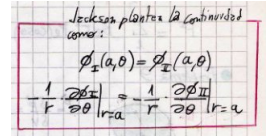
y usando las expresiones anteriores se llega a

$$\sigma_P = -\frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} E_0 \cos \theta = P_n^I - P_n^{II},$$

pero en el último miembro la polarización en la región I es nula. Entonces, usando que $\cos \theta = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Tomé la siguiente nota que pego aquí:



o bien

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V} \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = n\gamma (\mathbf{E} + 4\pi/3 \mathbf{P})$$

que macroscópicamente equivale a $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$. De estas últimas dos se puede despejart

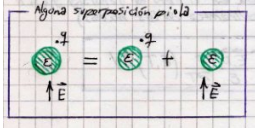
$$\chi_e = \frac{n\gamma}{1 - n\gamma 4\pi/3}$$

que es la ecuación de Clausius-Mossotti. Como $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ se da

$$\gamma = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

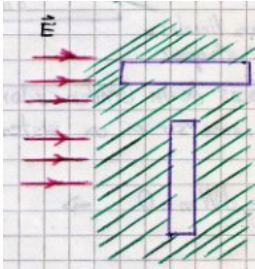
el cual depende de la temperatura.

Un grafiqúin fuera de tema:



EJEMPLO 8.4 Problema 8

Explica la determinación del ε .



No alcanzo a ver bien las ecuaciones definidas, pero

$$E_2 - E_1 = 4\pi\sigma_P$$

y

$$\sigma_P = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} E_{\text{medio}}.$$