

## Capítulo 1

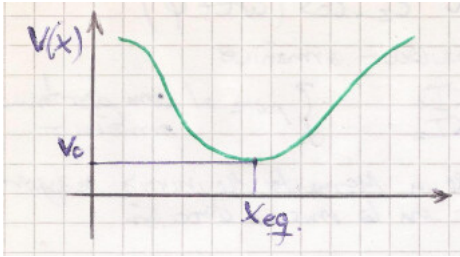
---

# Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio. Esto desarrollará un método sistemático para tratar todo tipo de problemas con muchos grados de libertad pero en forma aproximada.

### 1.0.1 Idea para un grado de libertad

Para un grado de libertad la idea es que



en un potencial  $V(x)$  con un mínimo, es decir que cumple

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0, \frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$$

para algún  $x_{eq}$ , en la expresión de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (1)$$

se aproxima el potencial según<sup>1</sup>

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2, \quad (2)$$

y si definimos  $k \equiv d^2 V/dx^2|_{x_{eq}}$  se llega a

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V_0 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2,$$

que derivada con respecto al tiempo resulta en

$$m \ddot{x} + k(x - x_{eq}) = 0,$$

la cual no es otra cosa que una ecuación de oscilador armónico, cuya solución general es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  y  $\varphi$  está asociada a la energía  $E$ . Ver Apéndice X para la resolución de oscilador armónico.

El problema físico tiene dos constantes aunque la resolución presenta cuatro (dos complejos, con parte real e imaginaria).

Nótese que el desarrollo del potencial a orden dos equivale a una fuerza linealizada, merced a que  $m\ddot{x} = -dV/dx$ .

**Un apéndice más: oscilador armónico con término no homogéneo (usar 76R carpeta).  
Acá habría que llegar a despejar quién es  $\varphi$ .**

### 1.0.2 Varias variables

En el caso de un potencial  $V(x_1, \dots, x_n)$  hay que hallar las raíces del mismo y luego desarrollar en torno a los puntos de equilibrio. Se empieza desde

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_{eq}} = 0,$$

y habría que desarrollar

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} (x - x_i)(x - x_j)$$

No obstante, el problema se puede enfocar mejor en términos de las coordenadas generalizadas. Entonces, el potencial es

$$V(q_1, \dots, q_n) \approx V(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

<sup>1</sup>Nótese que esta es la expansión de Taylor en la cual el término lineal está justamente ausente porque la derivada primera en el punto es nula.

y la energía cinética,

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \approx \frac{1}{2} \left( m(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial m}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \dots \right) \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

[Esta expresión hay que revisarla y reubicarla!]

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde  $m_{ij}$  son los coeficientes de las coordenadas generalizadas y se desarrollarán en serie en torno al equilibrio (caracterizado por un supraíndice 0), es decir,

$$m_{ij} \approx m_{ij}(q_i^0, \dots, q_n^0) + \sum_k \left. \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right|_{q^0} (q_k - q_k^0).$$

Estamos considerando que la energía cinética es  $T = T_2$ , pero cabría pensar que existe un  $T_0(q_1, \dots, q_n)$  y se lo sumaríamos en ese caso al potencial  $V$ . En el lagrangiano que consideraremos no está presente  $T_1$ ; queremos un potencial que no depende de las velocidades.

#### EJEMPLO 0.1 Sobre el término $T_1$

Para el caso de una masa fija, enhebrada en varilla que gira con velocidad angular  $\omega$ , el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

con energía

$$T = T_0 + T_2 = \frac{2}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{2} m \dot{r}^2$$

donde  $\dot{\varphi} = \omega$  el último término no depende de la velocidad pero sí de la posición. Es como un potencial que genera la fuerza ficticia.

Haciendo la aproximación consistente resulta

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (\eta_i)(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}|_{q_i^0} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

con  $V_{ij} \equiv \partial^2 V / (\partial q_i \partial q_j)|_{q_i^0}$ ,  $m_{ij} = m_{ij}|_{q_i^0}$ , ambos simétricos, y donde se ha definido  $\eta_i = q_i - q_i^0$ , que es un apartamento típico de la posición de equilibrio. Notemos que  $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$ . Nótese también que el término lineal en la aproximación de  $m_{ij}$  al verse multiplicado por el producto  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  es ya de orden cúbico por lo cual debe descartarse para ser consistentes con las aproximaciones hechas en el potencial.

**Esta aproximación y formalismo sirve para un mínimo y un sistema que hace pequeños apartamentos respecto de ese mínimo.**

Con esta nomenclatura puede escribirse el *lagrangiano de pequeñas oscilaciones*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^t \mathbb{V} \boldsymbol{\eta}$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{d}{d\dot{\eta}_k} (\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\eta_i \eta_j) = 0$$

son  $n$  ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = 0 \quad k = (1, \dots, n).$$

Esto es un oscilador armónico para cada partícula. Se puede pensar en todas las partículas unidas por resortes acoplados.

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

de frecuencia  $\omega$ , idéntica para todas las partículas, tomando al final del proceso  $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$  como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 m_{kj} + V_{kj}) A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

lo cual me hará buscar un polinomio característico  $P^n[\omega^2]$  de orden  $n$  en  $\omega^2$ . Así se tendrán  $n$  valores para  $\omega^2$  con  $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$  y  $\omega_s^2 \geq 0$ , que serán las autofrecuencias o frecuencias propias  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ .

Para cada  $\omega$  se tiene una solución

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \quad s = 1, \dots, N$$

pero el movimiento general será una combinación de todas las frecuencias,

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}.$$

En general, dado un  $V = V(q_i)$  puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con  $\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j|_{q_i^0}$  o bien cambiar variable  $\eta = q_i - q_i^0$  y quedarse con los términos cuadráticos en  $\eta_i \eta_j$ . Para la energía cinética  $T = T(q, \dot{q})$  puede ser más fácil evaluar  $m_{ij}(q_i)|_{q_i^0}$  y quedarnos con los términos cuadráticos en  $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ .

Veamos la solución para una frecuencia dada,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) A_j^s = 0$$

y como usamos una raíz  $\omega_s$  se tendrá una ecuación linealmente dependiente que tiremos. Serán ahora  $N - 1$  ecuaciones,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) \frac{A_j^s}{A_1^s} = 0$$

y definimos el cociente  $a_j^s \equiv A_j^s / A_1^s$  al pasar dividiendo la amplitud del modo cuya frecuencia estamos considerando. Entonces

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) a_j^s = -V_{k1} - \omega_s^2 m_{k1} \quad k = 1, \dots, N - 1$$

Entonces como  $N - 1$  ecuaciones no homogéneas tienen solución real, entonces  $a_j$  es un cociente real y todo los  $A_j^j$  tienen que tener la misma fase. [mmm?] La fase viene determinada por las condiciones iniciales.

Veamos ahora que las frecuencias son reales. Para ello se multiplica por el complejo conjugado y se suma

$$\begin{aligned} \sum_k A_k^{s*} \sum_j V_{kj} A_j^s &= \omega_s^2 \sum_k A_k^{s*} \sum_j m_{kj} A_j^s \\ \sum_k A_k^s \sum_j V_{kj} A_j^{s*} &= \omega_s^{2*} \sum_k A_k^s \sum_j m_{kj} A_j^{s*} \end{aligned}$$

Acá sería bueno poner explícitamente hasta donde llega la sumatoria y explicitar qué  $\omega$  se usa.

y usando la simetría de  $m_{kj}$ ,  $V_{kj}$  se restan estas ecuaciones y se obtiene

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_s^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s$$

y como la doble sumatoria es no nula se sigue que las frecuencias son reales. Incluso se puede despejar

$$\omega_s^2 = \frac{\sum_k \sum_j A_k^{s*} V_{kj} A_j^s}{\sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s}$$

Ambos, numerador y denominador son definidos positivos. Si el numerador fuese negativo para alguna dirección, eso significa que en esa dirección será un máximo (sería una especie de punto silla); pequeñas oscilaciones no valdrá en esa dirección.

Por otra parte, si se consideran dos frecuencias diferentes

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_p^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^p$$

entonces lo que debe ser nulo es la doble sumatoria. Entonces, en la *métrica* dada por  $m_{jk}$   $A_j$  y  $A_k$  son perpendiculares. Para determinar el  $A_1$  (que era el parámetro que permanecía indeterminado) impongo

$$A^{tp*} M A^p = 1$$

y los  $A_j$  se *consideran* reales pues todos tienen la misma fase y son los modos normales. Se está pidiendo que de uno la norma en la métrica dada por  $M$ .

Si la raíz del polinomio  $P^n$  tiene multiplicidad  $k$ , se tienen  $k$  ecuaciones linealmente dependientes y hay que arrojar al cesto de la basura  $k$  ecuaciones.

Si construyo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots \\ A_2^1 & & \\ \dots & & \end{pmatrix},$$

donde cada columna de esta matriz es un autovector. Entonces se ve que esta matriz *diagonaliza* a  $M$ , i.e.

$$A^t M A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \dots & & \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

Asimismo, como

$$V A = \omega^2 M A,$$

eso conduce a que

$$A^t V A = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 & \\ \dots & & \end{pmatrix}.$$

Hay que repasar esto.

### EJEMPLO 0.2 Lo de las matrices

Si  $A^{p*} M A^s = 0$  con  $p \neq s$  entonces  $M$  está definiendo una métrica pues si  $M = \mathbb{1}$  entonces

$$A^{p*} \mathbb{1} A^s = A^{p*} A^s = 0,$$

lo cual significa que  $A^{p*}$  y  $A^s$  son perpendiculares.

## 1.0.3 Expresión vectorial

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega_s t} \\ A_2 e^{i\omega_s t} \\ \dots \\ A_N e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia  $\omega_s$ , siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia  $\omega_s$ .

Luego, es

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \dots + c_N \boldsymbol{\eta}^N$$

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ \dots \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

entonces  $\mathbf{A}^s$  es un modo normal de frecuencia  $s$ .

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \dots \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total ( $j$  es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

siendo el  $\dagger$  el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por  $\mathbb{T}$  de la unidad)

$$A^t \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

lo cual significa que  $A$  diagonaliza a  $\mathbb{T}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & \dots & & \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$A^t \mathbb{V} A = \omega^2 A^t \mathbb{T} A = \omega^2 \mathbb{1}$$

### 1.0.4 Un cambio de coordenadas

Se puede incluso realizar un cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{\eta} = A \boldsymbol{\xi}$$

tal que

$$A^{n \times n} \boldsymbol{\xi}^{n \times 1} \quad (A \boldsymbol{\xi})^t = \boldsymbol{\xi}^{t \times n} A^{n \times n}$$

y que se llaman coordenadas normales. Se resuelve el problema en estas coordenadas  $\boldsymbol{\xi}$  y luego se regresa a las originales  $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{T} A \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} A^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{V} A \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \omega^2 \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \xi_i^2 \omega_i^2$$

Los autovectores son los modos normales. Son  $N$  osciladores armónicos independientes. Se pasa de un problema de muchas partículas interactuantes a uno de  $N$  partículas que no interactúan.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

y son  $N$  ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

de modo que si  $\omega^2 = \omega_i^2$  entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}.$$

**Hay que consolidar este material disperso y confuso!**

$$\xi_\ell(t) = C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

y entonces

$$\eta_1(t) = \sum_\ell A_1^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

$$\eta_2(t) = \sum_\ell A_2^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

...

$$\eta_N(t) = \sum_\ell A_N^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

que son soluciones con  $\omega_i \neq 0$ . Son  $\eta$  coordenadas normales y  $\xi$  coordenadas colectivas [no es al revés?].

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\xi$  (un grado de libertad es una  $\omega$ ) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a  $\omega_s$ . Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\eta$ , un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las  $\omega$ .

Si  $\omega = 0$  es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_j t} + A_j(Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la  $\omega = 0$ . Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \eta = A^\dagger \mathbb{T} A \xi$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \eta = \mathbb{1} \xi$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscila con una frecuencia única (son  $N$  osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

$$A^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

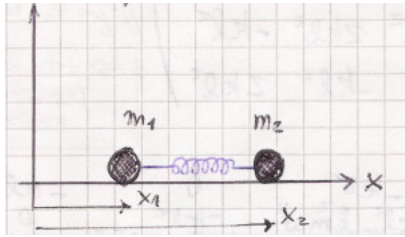
donde tienen la misma fase los  $A_j^s$  para toda frecuencia  $\omega_s$

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$A = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

### 1.0.5 Coordenadas colectivas y normales



Las ecuaciones de Newton del sistema son

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)$$

que verifican

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

y entonces

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1 - \ell_0)$$

Definiendo  $x_2 - x_1 = x_{rel}$  se pasa de un problema de dos partículas acopladas  $(x_1, x_2)$  a otro de dos partículas desacopladas; una oscila y la otra se traslada,

$$\mu \ddot{x}_{rel} + k(x_{rel} - \ell_0) = 0 \quad \ddot{x}_{cm} = 0$$

y  $x_{rel}, x_{cm}$  son coordenadas colectivas, pero no corresponden a un movimiento real de un sistema. Tendré dos problemas separados que pueden, dado el caso, excitarse por separado.

En el caso de  $N$  osciladores, si hay algún  $\omega_i = 0$  se tendrá

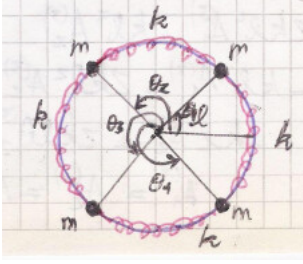
$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \dot{\xi}_i^2$$

y como  $\ddot{\xi}_i = 0$  entonces  $\xi(t) = At + B$  es solución y

$$\eta_N(t) = \sum_{\ell} A_{\ell} C_{\ell} \cos(\omega_{\ell} t + \varphi_{\ell}) + \sum_k A_k^k (Bt + D)$$

donde el primer término es por  $\omega_{\ell} \neq 0$  y el segundo por  $\omega_k = 0$ .

#### EJEMPLO 0.3 Aro fijo con bolas engarzadas



El lagrangiano correspondiente a este *setup* es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_4^2] m\ell^2 - \frac{1}{2} k\ell^2 [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + (\theta_4 - \theta_3)^2 + (\theta_1 - \theta_4)^2]$$

Este lagrangiano, como está, ya es de pequeñas oscilaciones. En efecto,  $\theta_2^0 = \theta_1^0$  de modo que  $\theta_2 - \theta_1 = \eta_2 - \eta_1 = \theta_2 - \theta_2^0 + \theta_1^0 - \theta_1$ . Luego,

$$V = \begin{pmatrix} 2k\ell^2 & -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 2k\ell^2 & -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 \end{pmatrix}$$

donde los ceros reflejan la inexistencia de resorte entre dichas partículas. Entonces

$$V - \omega^2 M = \begin{pmatrix} 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que calcular el determinante de esta matriz  $V - \omega^2 M$ , que luego de desarrollar y usar el método que más le gusta al diligencioso lector permite arribar a

$$P(\omega) = \det(V - \omega^2 M) = m\ell^2\omega(2k\ell^2 - m\ell\omega^2)^2(m\ell\omega^2 - 4k\ell^2),$$

cuyas raíces son:

$$\omega_1^2 = 2 \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2 \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = 0 \quad \omega_4^2 = 4 \frac{k}{m}$$

En este ejemplo se conserva el momento angular, de manera que hubiese sido razonable obtener una frecuencia nula asociada como de hecho apareció en  $\omega_3$ . Resolvamos ahora ese modo. Será

$$\begin{aligned} 2k\ell^2 A_1^3 - k\ell^2 A_2^3 - k\ell^2 A_4^3 &= 0, \\ -k\ell^2 A_1^3 + 2k\ell^2 A_2^3 - k\ell^2 A_3^3 &= 0, \\ -k\ell^2 A_2^3 + 2k\ell^2 A_3^3 - k\ell^2 A_4^3 &= 0 \end{aligned}$$

y resulta  $A_1^3 = A_2^3 = A_3^3 = A_4^3$ .

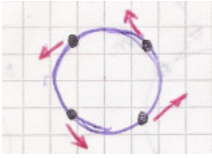
Entonces

$$\mathbf{A}^3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde  $a = 1/(2\ell\sqrt{m})$  y se da

$$\mathbf{A}^{3\dagger} \mathbf{M} \mathbf{A}^3 = \mathbb{1}$$

Este es el modo normal de  $\omega_3^2 = 0$ , que se ve dibujado bajo estas líneas



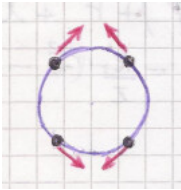
Para la frecuencia  $\omega_4$  es

$$\begin{aligned} -2k\ell^2 A_1^4 - k\ell^2 A_2^4 - k\ell^2 A_4^4 &= 0, \\ k\ell^2 A_1^4 - 2k\ell^2 A_2^4 - k\ell^2 A_3^4 &= 0, \\ -k\ell^2 A_2^4 - 2k\ell^2 A_3^4 - k\ell^2 A_4^4 &= 0 \end{aligned}$$

de manera que

$$\mathbf{A}^4 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde  $a = 1/(2\ell\sqrt{m})$ . El dibujo asociado será



Para las frecuencias mellizas  $\omega_1, \omega_2$  es

$$\begin{aligned} -k\ell^2 A_1^1 - k\ell^2 A_3^1 &= 0, \\ -k\ell^2 A_2^1 - k\ell^2 A_4^1 &= 0, \end{aligned}$$

o bien

$$A_1 = A_3 = 0 \quad A_2 = A_4,$$

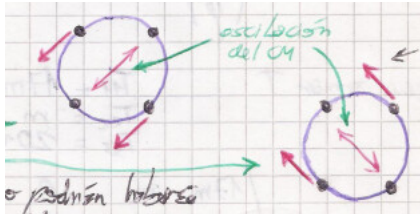
y

$$A_2 = A_4 \quad A_1 = -A_3$$

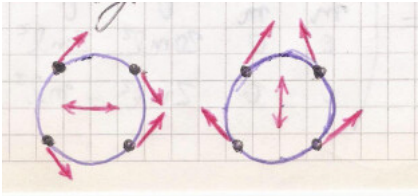
y consecuentemente

$$\mathbf{A}^1 = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

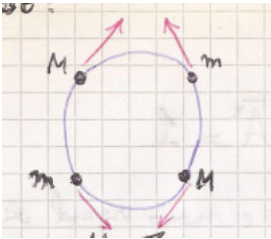
con  $a = 1/(\ell\sqrt{2m})$ . Los dibujos siguientes ilustran los movimientos esperados



Con respecto a lo de aquí arriba son situaciones físicas iguales (si cambio masas no será la misma situación). La introducción de  $M$  y  $m$  (ver figurillas siguientes) rompe la degeneración y serán modos normales pero de diferente frecuencia. Pero podría haberse elegido, ver bajo estas líneas,

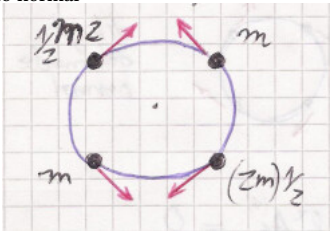


Para el caso siguiente



esta configuración no conserva el momento angular.

Si tomamos  $M = 2m$  entonces podemos considerar momento angular nulo y obtengo un modo normal



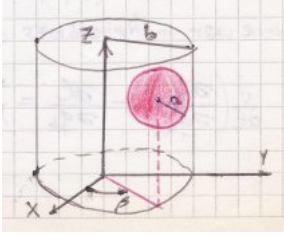
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Oscilaciones viscosas

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j + B_{ij} \dot{\eta}_j = 0$$

no se puede convertir en osciladores independientes.

$$\det \{ \mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B} \} = 0$$

**EJEMPLO 1.1 Problema 14 Método de Lagrange**

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m ((b-a)^2 \dot{\beta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta) - mgz$$

y como la velocidad  $\mathbf{v}_p$  es nula, se tiene

$$\mathbf{v}_p = 0 = \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times a \hat{\varphi}$$

que lleva a

$$0 = (b-a) \dot{\beta} \hat{\beta} + \dot{z} \hat{z} + [\omega_\rho \hat{\rho} + \omega_\beta \hat{\beta} + \omega_z \hat{z}] \times a \hat{\rho}$$

$$0 = (b-a) \dot{\beta} \hat{\beta} + \dot{z} \hat{z} + a \omega_z \hat{\beta} - a \omega_\beta \hat{z}$$

La condición de rodadura es

$$\begin{cases} (b-a) \dot{\beta} + a \omega_z = 0 \\ \dot{z} - a \omega_\beta = 0 \end{cases}$$

y como la velocidad en cartesianas es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}$ , la conversión a los ejes del problema es

$$\hat{\rho} = \cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y} \quad \hat{\beta} = -\sin \beta \hat{x} + \cos \beta \hat{y}$$

o bien

$$\hat{x} = \cos \beta \hat{\rho} - \sin \beta \hat{\beta} \quad \hat{y} = \sin \beta \hat{\rho} + \cos \beta \hat{\beta}$$

entonces

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_\rho \hat{\rho} + \omega_\beta \hat{\beta} + \omega_z \hat{z}$$

donde

$$\omega_\rho = \Omega_x \cos \beta + \Omega_y \sin \beta \quad \omega_\beta = \Omega_y \cos \beta + \Omega_x \sin \beta$$

Luego de algún álgebra

$$\omega_\rho = \dot{\psi} \sin \theta \sin(\varphi - \beta) + \dot{\theta} \cos(\varphi - \beta)$$

$$\omega_\beta = -\dot{\psi} \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \dot{\theta} \sin(\varphi - \beta)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

Pero como

$$(b-a) \dot{\beta} + a \dot{\varphi} + a \dot{\psi} \cos \theta = 0,$$

$$\dot{z} - a \dot{\theta} \sin(\varphi - \beta) + a \dot{\psi} \sin \theta \cos(\varphi - \beta) = 0,$$

conviene utilizar multiplicadores de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \sum_{\ell=1}^2 \lambda_\ell a_{\ell k}$$

lo cual lleva a

$$m(b-a)^2 \ddot{\beta} = \lambda_1 (b-a) \quad m \ddot{z} + mg = \lambda_2$$

$$I\ddot{\varphi} + I\frac{d}{dt}(2\dot{\psi}\cos\theta) = a\lambda_1$$

Haciendo gradiente en los vínculos,

$$\lambda_1([b-a]\delta\beta + a\delta\varphi + a\cos\theta\delta\psi) = 0$$

$$\lambda_2(\delta z - a\sin(\varphi - \theta)\delta\theta + a\sin\theta\cos(\varphi - \beta)\delta\psi) = 0$$

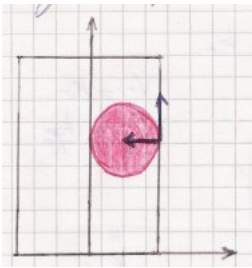
y entonces

$$I\ddot{\theta} + I\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta = -a\lambda_2\varphi\sin(\varphi - \beta)$$

$$I\ddot{\psi} + I\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta) = \lambda_1 a\cos\theta + \lambda_2\varphi\sin\theta\cos(\varphi - \theta)$$

Tenemos siete ecuaciones con siete incógnitas. Una sugerencia para resolverlo alternativamente es a través de las ecuaciones de Newton,

$$m\dot{\mathbf{V}}_{cm} = \mathbf{f} + \mathbf{N} \quad I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{t}$$



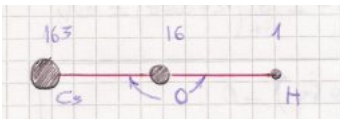
$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \hat{\beta}\hat{\beta} \times \boldsymbol{\omega}$$

lo cual nos debería conducir a algo de la forma

$$(I + ma^2)\ddot{\omega}\varphi + \dot{\varphi}I\omega_\varphi = 0$$

y sale que  $\omega_p = \dot{\varphi}\omega_\varphi$  siendo  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{z}$  constantes.

### EJEMPLO 1.2 Problema de la molécula diatómica



Acá hay que escribir el potencial con cuidado,

$$V = V_\alpha(\alpha) + V_{Cso}(r) + V_{OH}(r'),$$

donde

$$V_\alpha(\alpha) = \frac{k\ell^2}{2}(\pi - \alpha)^2$$

y  $\ell$  es un  $r, r'$  de equilibrio.

$$V_{Cso}(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

$$V_{OH}(r') = \frac{V_{Cso}(r')}{15}$$



y según se ve ya está separado el mismo. Calculamos las derivadas del potencial,

$$V_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = k\ell^2$$

y de

$$\frac{\partial V_{Cso}}{\partial r}(r) = 0$$

sale un  $r_{eq}$  que cumple  $r_{eq} = \sigma 2^{1/12} \equiv \ell$  y luego

$$V_{Cso}''|_{eq} = 24\epsilon \left[ \frac{26}{r^2} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \frac{7}{r^2} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] = k_r$$

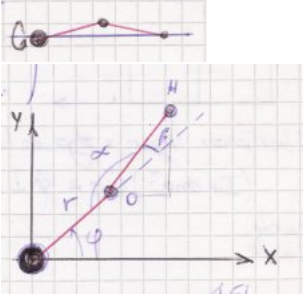
donde los términos con  $\sigma$  equivalen a  $4\ell^2$  y  $2\ell^2$ . Además,

$$V_{rr} = k_r \quad V_{r'r'} = \frac{k_r}{15}$$

Esto define

$$V = \begin{pmatrix} V_{\alpha\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{r'r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

En general tenemos más grados de libertad que tres. Ubicamos el centro de masa en el Cesio por ser muy masivo. Entonces pierdo tres grados de libertad y me quedan seis. Ignoro rotación, y otra cosa más [ $\ell$ ?]



Restan cuatro grados de libertad  $r, \varphi, r', \beta$ .

$$\dot{X}_0^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\mathbf{X}_0 = r \cos(\varphi) \hat{x} + r \sin(\varphi) \hat{y}$$

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{X}_0 + r' \cos(\varphi + \beta) \hat{x} + r' \sin(\varphi + \beta) \hat{y}$$

y el cuadrado es

$$\dot{X}_H^2 = \dot{X}_0^2 + \dot{r}'^2 + r'^2 (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2$$

$$2\dot{r}\dot{r}'[\cos \varphi \cos(\beta + \varphi) + \sin \varphi \sin(\beta + \varphi)] +$$

$$2rr'[\sin(\beta + \varphi) \sin \varphi (\dot{\beta} + \dot{\varphi})\dot{\varphi} + \cos(\beta + \varphi) \cos \varphi \dot{\varphi}(\dot{\beta} + \dot{\varphi})] +$$

$$2\dot{r}\dot{r}'[\cos(\beta + \varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \sin(\beta + \varphi)](\dot{\beta} + \dot{\varphi}) +$$

$$2r\dot{r}'[\dot{\varphi} \cos \varphi \sin(\beta + \varphi) - \dot{\varphi} \sin \varphi \cos(\beta + \varphi)] \quad (1.1)$$

donde los últimos dos se *mueren* al aproximar. Finalmente el lagrangiano de pequeñas oscilaciones resulta en

$$\mathcal{L} = \frac{17}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}'^2 + r'^2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})) + \frac{m}{2}(2\dot{r}r' + 2\ell^2(\dot{\beta} + \dot{\varphi})\dot{\varphi}) - \frac{k_r r^2}{2} - \frac{k_{r'} r'^2}{2} - \frac{k_\beta \beta^2}{2}$$

en donde los  $r^2$  y  $r'^2$  son ambos  $\ell^2$ .