

Medios materiales

1.1 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar como corrientes \mathbf{J}_M y \mathbf{g}_M ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

1.2 Medios materiales

- Dieléctricos
- Medios magnéticos $\left\{ \begin{array}{l} \text{imán inducido} \left\{ \begin{array}{l} \text{paramagnético} \\ \text{diamagnético} \end{array} \right. \\ \text{imán permanente} \quad \text{ferromagnético} \end{array} \right.$

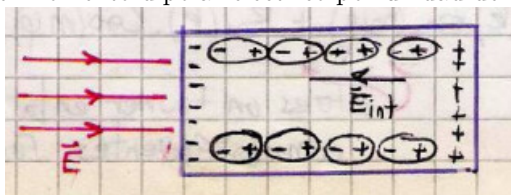
- Conductor $\begin{cases} \text{perfecto} \\ \text{buen conductor} \\ \text{mal conductor} \end{cases}$
- Plasmas (gas ionizado)

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

La polarización

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V}$$

es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.



Cuando se construye el potencial llegamos a

$$\int_V \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV = \int_V \mathbf{P} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

y esta integral por partes lleva a lo de más abajo.

Luego el potencial es, posteriormente a haber hecho partes es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

Entonces, se puede construir un vector \mathbf{D} siguiendo esta línea de razonamiento:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\phi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\phi\rho_P = 4\phi\rho_L$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

de modo que

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

y por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \quad \text{MLIH}$$

No sé qué pasaba con la parte de la integral de superficie.

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$$

donde ξ_e es la susceptibilidad eléctrica y ϵ es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_P,$$

que provienen del rotor de \mathbf{E} , la divergencia de \mathbf{D} y la divergencia de \mathbf{P} respectivamente.

Imanes inducidos

Para la Magnetización,

$$\mathbf{M} = \frac{\delta\mathbf{m}}{\delta V}$$

que es el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial

$$\delta\mathbf{A} = \frac{\delta\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

se evalúa con la misma idea que la del dipolo para polarización. Queda por incorporar el asuntete de

$$\frac{1}{c} \int_V c\mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

usando partes.

Entonces es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c} \mathbf{g}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \nabla \times \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M$$

y por la linealidad

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_M) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde χ_M es la susceptibilidad magnética y μ es la permeabilidad magnética. Si $\mu > 1$ es un medio paramagnético y $\mu < 1$ es diamagnético.

Si hay linealidad e isotropía

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}$$

donde el paréntesis es ϵ es la permitividad eléctrica. Si hay isotropía

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_L \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde \mathbf{g}_L se refiere a densidad de corriente superficial. Si esta es nula se tiene

$$\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{n2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n1} \\ H_{t2} = H_{t1} \end{cases}$$

Imán permanente

Hay magnetización \mathbf{M} aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que

$$\mathbf{M} \neq \chi_M \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu \mathbf{H}$$

El campo \mathbf{M} es fuente de campo. El asunto es que \mathbf{M} tiene el problema de la discontinuidad, pero $\mathbf{M} = 0$ fuera del medio. La relación entre \mathbf{B}, \mathbf{H} depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c} \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

si $\mathbf{J}_L = 0$ entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$

que es un potencial escalar magnético.

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$-\nabla^2 \phi_m = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$$

donde se ha definido cargas ficticias de magnetización. Se deduce una $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &\equiv -\rho_m & \mathbf{M} \cdot \hat{n} &\equiv \sigma_m \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV' \end{aligned}$$

se puede asociar

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_P.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

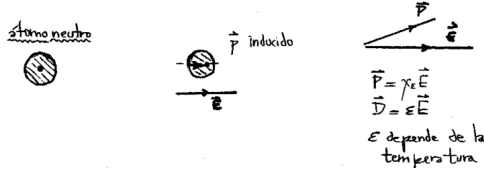


Figura 2.1

1.3 Polarización y magnetización

Suelen \mathbf{P}, \mathbf{M} depender de los campos externos, es decir $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$.

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que $\mathbf{M}_0 = 0, \mathbf{P}_0 = 0$ se da que

$$\mathbf{M} = \sum_i \sum_j \left(\left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j \right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

y ahí vemos que es un tensor,

$$\mathbf{M} = \vec{\xi}_M \mathbf{H} \quad \mathbf{P} = \vec{\xi}_e \mathbf{E}.$$

Algún detalle de contornos magnéticos

Sea

$$g_L = 0$$

entonces

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$$

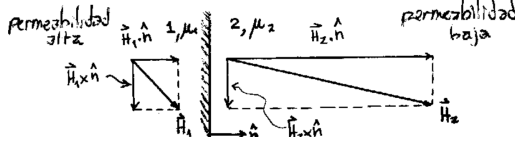


Figura 3.2

$$B_1 \cdot \hat{n} = B_2 \cdot \hat{n} \quad \mu_1 H_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 H_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1 \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1$$

En el límite $H_2 \perp$ superficie del medio y es similar al E a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente *equipotenciales*.

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{es decir} \quad D = \vec{\epsilon} E$$

Consideraciones en medios magnéticos

Fuera de un imán permanente

$$\nabla \times B = 0 = \frac{4\pi}{c} J_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$B = -\nabla \phi_m^B,$$

pero fallará en la superficie de separación donde hay J_m y por ende J_T .

Lo que sí funciona es

$$\nabla \times H = 0 = \frac{4\pi}{c} J_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$H = -\nabla \phi_m^H,$$

y

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot (\nabla \phi_m^H) = -4\pi \nabla \cdot M = 4\pi \rho_M$$

$$-\nabla^2 \phi_m^H = 4\pi \rho_M$$

una ecuación de Poisson para el potencial ϕ_m^H .

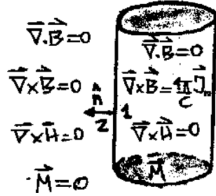


Figura 3.3

$$\begin{aligned}
 (B_2 - B_1) \cdot \hat{n} &= 0 \\
 (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1 - 4\pi M) \cdot \hat{n} &= 0 \\
 (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1) \cdot \hat{n} &= 4\pi M \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_M
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.1 Problema 5 (imán esférico)

Calculamos todo de varias maneras

Bola ①

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV = \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \hat{z}$$

Bola ②

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 4\pi \rho_m \\
 \mathbf{m} &= \int \rho_m \mathbf{x} dV = \hat{z} \int \rho_m z dV
 \end{aligned}$$

Se tienen además

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y como \mathbf{M} es constante en el interior, no hay ρ_m en el volumen. Habría que escribir bien la magnetización \mathbf{M} . Usaremos una función escalón

1.4 Consideraciones energéticas

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= q\mathbf{E} = q(-\nabla\phi) = -\nabla U \\
 \Delta U = W &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell \rightarrow \Delta U = - \int_{\Gamma} \nabla(q\phi) \cdot d\ell = -q\Delta\phi \\
 \delta U &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} & \frac{\delta U}{\delta x} &= F_t
 \end{aligned}$$

donde el subíndice es por tangencial.

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$\begin{aligned}
W_3 &= q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} \\
W_3 &= \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right) \\
W_N &= \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]
\end{aligned}$$

siendo ϕ_{ij} el potencial sobre q_i debido a q_j .

$$W_N = \sum_i^N \frac{1}{2} q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de q_i .

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material

$$\begin{aligned}
\delta W &= \frac{1}{2} \rho \delta V \phi \\
\delta W &= \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})}{4\pi} \delta V \phi \\
\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) &= \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \\
\delta W &= \frac{1}{8\pi} \delta V [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) - \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi] \\
W &= \frac{1}{8\pi} \left(\int_V \nabla \cdot (\mathbf{D} \phi) dV + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \right)
\end{aligned}$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D} \phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotroía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su ϵ . Es un proceso isotérmico. Uno asume que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ y no varía con el tiempo. En la práctica ϵ varía con la temperatura.

1.5 Interpretación termodinámica de U

El incremento de energía a T constante

$$\delta W = U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j \quad \text{con } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ tensor simétrico} \quad (5.1)$$

Pero ϵ es función de T la temperatura y entonces no podemos decir que

$$dU = dW$$

valga en general, pues también hay variación del calor (a no ser que sea un proceso isotérmico) de modo que la energía que representa (5.1) es la energía libre de Helmholtz a T constante.

$$dU = dQ - dW \quad F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT$$

pero al ser la última cero, resulta

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV - SdT$$

de modo que como el primer término es $\partial F / \partial D|_T$ resulta que

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D$$

Si es un medio isotrópico entonces $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y entonces

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = S \end{aligned}$$

luego

$$U = F + TS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[\mathbf{D} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \left[\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right] dV$$

y finalmente para medios lineales e isotrópos

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial T \epsilon}{\partial T} dV$$

y la segunda ley de la termodinámica es

$$\delta Q = T \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

con $\epsilon > 0, T > 0, \partial \epsilon / \partial T < 0$ si el ϵ decrece con T el cuerpo se enfría $\delta Q < 0$.

1.6 Teorema de Thomson

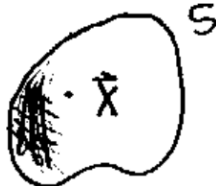


Figura 6.4

$$\delta W = \int_V \phi \delta \rho dV$$

las cargas en un conductor se redistribuirán hasta que F alcance su valor mínimo.

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\nabla \phi \cdot \delta \mathbf{D} dV) =$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta (\mathbf{D} \phi)] dV$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \sum_i^N \int_V \phi_i 4\pi \delta p_i dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \mathbf{D} \phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_i^N \phi_i \int_V \delta \rho_i dV = 0$$

y la integral de superficie la podemos dejar desvanecerse. Se suma sobre cada conductor que se halla a ϕ constante ϕ_i . La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio $\delta\rho_i = 0 \forall i$.

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca pueden llegar a un equilibrio estable. El ϕ no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región.

Sea una región donde

$$\nabla\phi|_s < 0 \Rightarrow \int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla\phi) dV = \int_V \nabla^2\phi dV = 0$$

entonces no vale lo que supusiéramos.

1.7 Esfera con magnetización uniforme

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 = \nabla \times \mathbf{M}$$

usando el ϕ_m se llega a

$$\mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}$$

donde I es por interior de esfera y afuera el ϕ_m es el de un dipolo con

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}a^3\mathbf{M}$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie (no hay multipolos subsiguientes).

En las figuras vemos las líneas de \mathbf{B} que son continuas, no nacen ni mueren, pero las de \mathbf{H} nacen y mueren en la superficie, por la $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$. \mathbf{H} es menos intenso que \mathbf{B} pues

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

de manera que en el interior \mathbf{H} y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos.

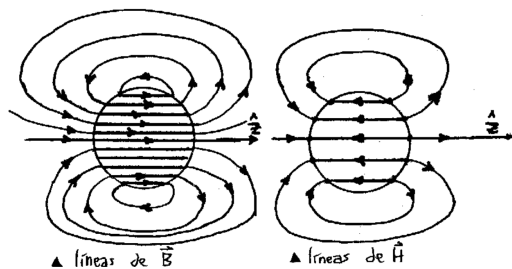


Figura 7.5

1.8 Histéresis

Los campos fundamentales son \mathbf{E}, \mathbf{B} , en realidad \mathbf{D}, \mathbf{H} se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de ρ, \mathbf{J} de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

pero para ferromagnéticos es $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$ con f no lineal. Se verifica un fenómeno de histéresis; \mathbf{B} es una función multivaluada de \mathbf{H} y f depende de la historia del material.

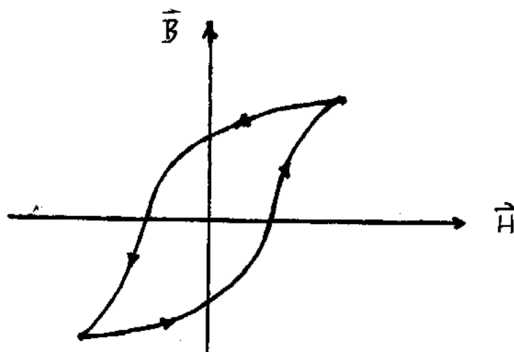


Figura 8.6

\mathbf{H} se conoce como campo desmagnetizante.

1.9 Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un B_0 uniforme tendremos

$$H_I = B_0 - \frac{4\pi}{3}M \quad B_I = B_0 + \frac{8\pi}{3}M$$

y podemos eliminar M de manera que

$$2H_I + B_I = 3B_0$$

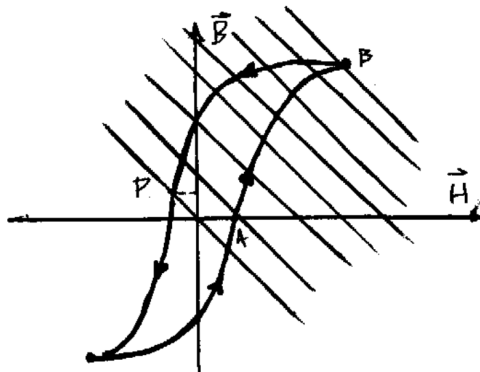


Figura 9.7

Vemos en la figura en P el punto de trabajo del imán esférico. Subimos B_0 hasta saturar la esfera y luego cuando $B_0 = 0$ nos hallamos en P. Hemos recorrido el camino ABP.

Usando la curva de histéresis relacionamos B_I, H_I y entonces

$$B_I = 3B_0 - 2H_I.$$

Un imán es tanto más estable cuando H_I es pequeño; en el caso de $M \parallel$ superficie, por ejemplo.