

# Fuerzas centrales

## 1.1 Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que depende únicamente de la distancia entre dos puntos, lo cual matemáticamente se expresa como

$$\mathbf{F}(r) = F(r) \hat{r}, \quad F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Entonces la parte cinética del lagrangiano se puede escribir en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2 \right)$$

El momento angular  $\mathbf{L}$  se conserva puesto que  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$ . Como es  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times m \dot{\mathbf{x}} = cte$  entonces se sigue que  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que  $\theta = \pi/2$  y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r).$$

Como  $\phi$  es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2 \dot{\phi}$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular, información que puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[ \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo  $V_{eff}$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pero es más sencillo utilizar la conservación de la energía que explícitamente tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

desde la cual se puede integrar directamente la trayectoria  $r = r(t)$  según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)},$$

aunque suele ser más útil la trayectoria en el espacio físico  $r = r(\phi)$  o bien  $\phi = \phi(r)$ .

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = L \quad \longrightarrow \quad mr^2 \frac{d\phi}{dr} \dot{r} = L$$

luego

$$\begin{aligned} \dot{r} d\phi &= \frac{L}{mr^2} dr \\ \int d\phi &= \int \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)}} dr \end{aligned}$$

En el gráfico bajo estas líneas ilustramos muchas de las características de la física del problema de fuerzas centrales.

## 1.2 Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

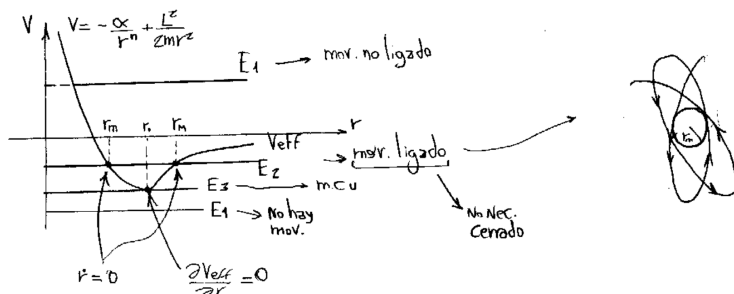


Figura 1.1

$$d\phi = \frac{L}{mr^2} dt \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}(\dot{r})$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{dr}{dt} \right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

y acá probamos el conveniente cambio de variables

$$U = \frac{1}{r} \quad dU = -\frac{1}{r^2} dr \quad \frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -U^2 \frac{dr}{d\phi}$$

$$U^2 L \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{L}{m} \frac{dU}{d\phi} \right\} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 = F(1/U)$$

$$-\frac{U^2 L^2}{m} \frac{d^2 U}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 = F(1/U)$$

$$-\frac{U^2 L^2}{m} \left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = F(1/U)$$

o bien

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2}.$$

En el caso del potencial de Kepler será

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{Km}{L^2},$$

es decir que el miembro derecho es una constante. Sale fácil entonces.

### 1.3 Velocidad areolar

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

De la figura puede verse que

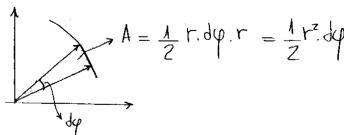


Figura 3.2

$$A = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = cte.$$

### 1.4 Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler

Tenemos

$$\int d\phi = \int \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr \quad \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2} \quad U = 1/r$$

que es simétrica respecto a  $\phi$  y  $-\phi$ . Esto determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\phi = 0) = U_0 \quad \left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0$$

lo cual significa que  $U_0$  es un extremo (punto apsidal).

Calculemos ahora el ángulo que recorre una oscilación completa,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

Si  $\Delta\phi = 2q$  siendo  $q = (m/n)\pi$  son  $m, n \in \mathbb{Z}$  entonces

$$\Delta\phi = 2 \frac{m}{n} \pi$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$$

y esto significaría que la órbita se cierra.

La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + \left( U - \frac{km}{L^2} \right) = 0$$

o bien

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2} + \beta = 0$$

entonces

$$\beta = A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$U = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

y habría que usar  $r_m, r_M$  para evaluar  $A$ .

Con respecto a las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \sigma^2 = a^2 - b^2$$

$$b = a\sqrt{1 - (\sigma/a)^2}$$

Por otro lado,

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 4\sigma r \cos(\pi - \phi)$$

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r \cos(\phi)$$

y definiendo  $\sigma/a \equiv \varepsilon$  resulta

$$a - r = \varepsilon(\sigma + r \cos(\phi))$$

y esto es una elipse.

Entonces en resumen, las leyes de Kepler son

**Acá hay que hacer un laburo muy importante.**

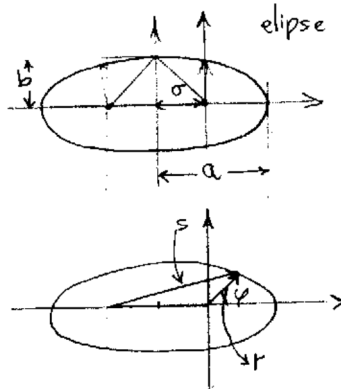


Figura 4.3

1. Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esto es común de los potenciales del tipo

$$V \propto 1/r$$

2. El radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$A = \frac{1}{2} r^2 d\phi \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{L}{2m} (\text{cte.})$$

- 3.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \tau \quad a = \frac{L\tau}{2\pi mb}$$

pero como  $km/L^2 = a/b^2$  es

$$B = L \sqrt{\frac{a}{km}}$$

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \tau^2$$

y esto es independiente de la masa del planeta.

Trabajamos más con la elipse,

$$r_M + r_m = 2a$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad E - \frac{L^2}{2m}U^2 - kU = 0$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{\frac{2mkE}{L^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2mkE}{L^2}\right)^2 + \frac{8mE}{L^2}}}{2}$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{mEk}{L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2}{mEk^2}} \right)$$

y acá constatamos que representa una elipse; es decir que las órbitas son elípticas.

## 1.5 Vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \times \mathbf{L} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - k \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}r - \frac{dr}{dt}\mathbf{r}}{r^2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)$$

pero como  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$  resulta lo que resulta.

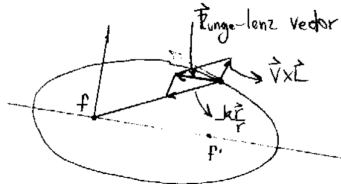
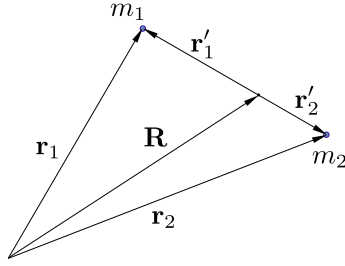


Figura 5.4

## 1.6 Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente

Consideramos el siguiente sistema de coordenadas,

$$r \equiv |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad \dot{r} \equiv |\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1|$$



**Figura 6.5** Sistema coordinado para la reducción del problema de dos cuerpos al de uno equivalente.

donde el sistema centro de masas es

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad M \mathbf{V}_{cm} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$0 = m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2$$

que provocan

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}'_1$$

dando unas  $r$  relativas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}'_1.$$

Luego, como la energía se conserva (el  $V_{cm} = cte.$ ) podemos escribir

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} \dot{\mathbf{r}}_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1}{M} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$

y el

$$e = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$



donde este último  $\mathbf{r}$  es un vector distancia relativa. Es un problema equivalente para la partícula centro de masas.

$$e = \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r)$$

Diremos que la *distancia relativa* describe una elipse. Las trayectorias reales en el espacio físico son dos elipses confocales. Por supuesto dejan de cumplirse las leyes de Kepler en este caso.

## 1.7 Dispersión

Consideramos la dispersión de un haz de partículas de cierta energía cinética por un centro dispersor, ver ilustración.

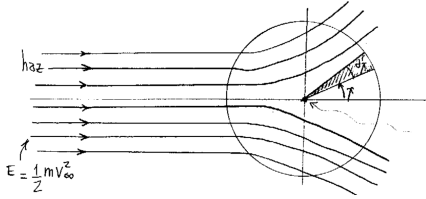


Figura 7.6

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

donde  $dN$  es el número de partículas dispersadas entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  y  $n$  es el número de partículas emitidas por tiempo y por área. De esta forma  $d\sigma$  tiene unidades de área.

Consideramos  $d$  centro dispersor con simetría esférica (cilíndrica basta). Usamos como suposiciones que todo lo que emerge entre  $\rho + d\rho - \rho$  es dispersado entre  $\chi + d\chi - \chi$ , y que se conservan tanto  $E$  como  $\mathbf{L}$ .

El anillo se dispersa en un sector esférico. Entonces podemos establecer las siguientes conclusiones para el anillo entre  $\rho + d\rho - \rho$ , a saber

$$A = \pi((\rho + d\rho)^2 - \rho^2) \quad \longrightarrow \quad A \approx 2\pi\rho d\rho,$$

entonces

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho d\rho I}{I}$$

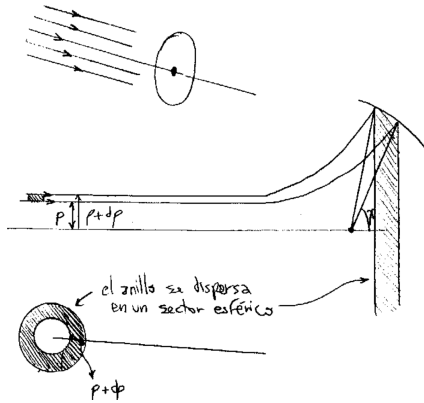


Figura 7.7

donde  $\rho$  es el parámetro de impacto y  $I$  el número de partículas por unidad de tiempo y área. Finalmente

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Como se conservan la energía y el momento angular

$$E = \frac{1}{2}mV_{\infty}^2 \quad L = m\rho V_{\infty}^2$$

En general se desconoce  $V(r)$ .

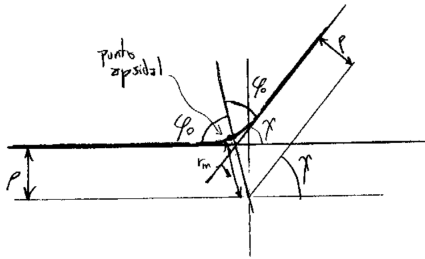


Figura 7.8

Se puede calcular el ángulo  $\phi_0$  de acuerdo a

$$\chi = \pi - 2\phi_0,$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0(\rho)$$

e invertimos desde la última ecuación.

Veamos el caso de una esfera maciza. En general los cuerpos duros equivalen a un potencial del tipo

$$V = \begin{cases} \infty & \text{cuerpo} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

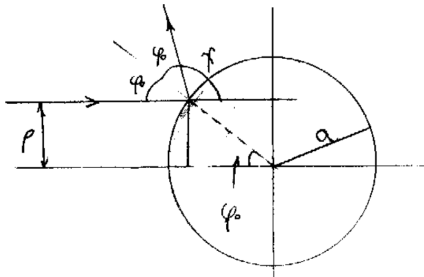


Figura 7.9

$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

$$\sin(\varphi_0) = \frac{\rho}{a} \quad d\rho = -a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)$$

y entonces

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) d\chi$$

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\pi - \chi) d\chi = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi$$

y como hay que integrar  $\chi$  de 0 a  $\pi$

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi = \pi a^2$$

$$\sigma = \pi a^2$$

En el caso de los cuerpos duros la sección eficaz es la sombra de los mismos.

**Sobre el ángulo sólido**

$$\Omega = \text{Area}/r^2$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

$$\Omega = 4\pi$$

**para la esfera.**

## 1.8 Dispersión por dos cuerpos

Consideramos el caso de un cuerpo que se fracciona en dos (creo?) Desde

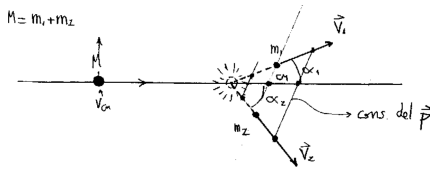


Figura 8.10

el centro de masa

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

definimos una velocidad relativa

$$\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right).$$

Con respecto a la energía,

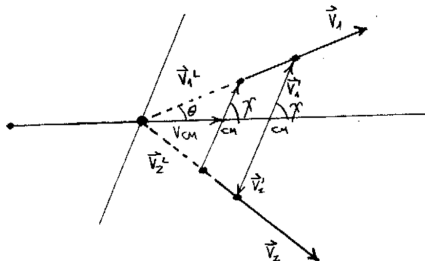


Figura 8.11

$$\frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + e_{int} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 + e_{int1} + e_{int2} + \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = e_{int} - e_{int1} - e_{int2} = \Delta e$$

y pasando todo en términos de la velocidad relativa

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \Delta e$$

entonces

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta e}{\mu}}.$$

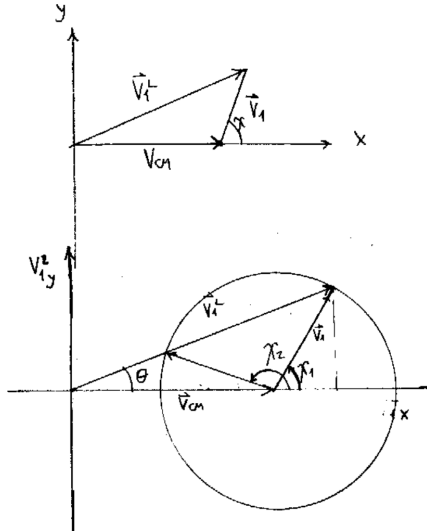


Figura 8.12

El problema es evidentemente plano.

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{V}_1' \quad \rightarrow \quad (\mathbf{V}_1^L - \mathbf{V}_{cm}) = \mathbf{V}_1'$$

$$V_1^{L^2} - V_{cm}^2 - 2\mathbf{V}_1^L \cdot \mathbf{V}_{cm} = V_1'^2$$

$$V_{1x}^{L^2} + V_{1y}^{L^2} - V_{cm}^2 - 2V_{1x}^L V_{cm} = V_1'^2$$

$$(V_{1x}^L - V_{cm})^2 + V_{1y}^{L^2} = V_1'^2$$

que es una circunferencia.

$$\tan(\theta) = \frac{V_1 \sin(\chi)}{V_{cm} + V_1 \cos(\chi)}$$

Esto tiene dos raíces  $\chi_{1,2}$  si  $V_{cm} > V_1$ .

Si  $V_{cm} > V_1$  hay una sola  $V$  de las partículas.

Si  $V_{cm} < V_1$  hay partículas emitidas hacia atrás vistas desde L.

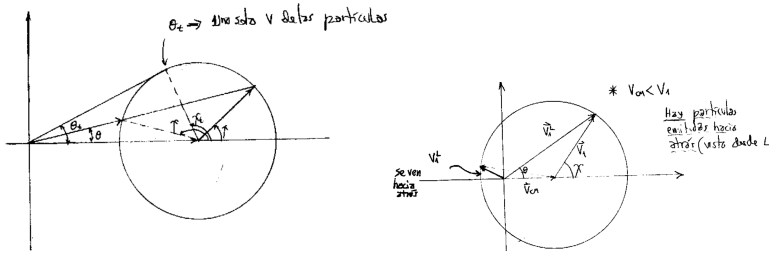


Figura 8.13

Si pensamos en una distribución isótropa de partículas, desde el centro de masa

$$e = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

$$V_L^2 = V_1^2 + V_{cm}^2 - 2V_1 V_{cm} \cos(\pi - \chi)$$

a iguales  $V_1, V_{cm}$  se tienen variables  $V_L, \chi$ , entonces

$$dV_L^2 = -2V_1 V_{cm} \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{dV_L^2}{2V_1 V_{cm}} = \sin(\chi) d\chi$$

$$d\sigma = 2\pi \rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{d(V_L^2)}{4V_1 V_{cm}} = \frac{1}{2} \frac{d(1/2 m_1 V_L^2)}{m_1 V_1 V_{cm}}$$

## 1.9 Scattering

Tenemos dos suposiciones básicas:

- Interacción elástica.
- Conservación de energía y de momento.

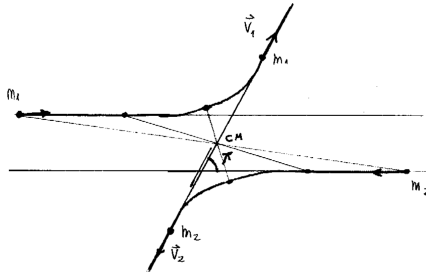


Figura 9.14

Desde el centro de masa se tienen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0 \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$$

donde los últimos son las posiciones y velocidades relativas.

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}^2 + V(r)$$

$$m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = 0 \quad m_1 \mathbf{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{V}_2.$$

En términos de las velocidades relativas

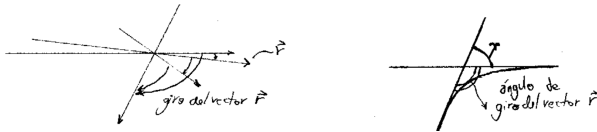


Figura 9.15

$$\mathbf{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{V} \quad \mathbf{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}$$

Se puede escribir la energía cinética del siguiente modo

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1-in}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2-in}^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1-cm}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2-cm}^2$$

$$T - \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 \equiv t = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}^2$$

$$V_1^L = V_{cm} - \frac{m_2}{M} V \quad V_2^L = V_{cm} - \frac{m_1}{M} V$$

$$p_1^L = m_1 V_{cm} - \mu V = m_1 \frac{P}{M} - \mu V$$

$$p_2^L = m_2 V_{cm} + \mu V = m_2 \frac{P}{M} + \mu V$$

Donde

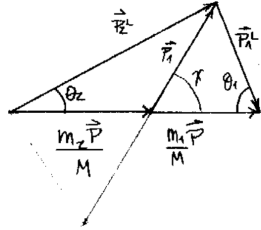


Figura 9.16

$$\begin{aligned} V_{cm} + V_1 &= V_1^L \\ p_2^L &= \frac{m_2}{M} P + \mu V \hat{n} \quad p_1^L = \frac{m_1}{M} P - \mu V \hat{n} \\ \frac{m_2}{M} P + \frac{m_1}{M} P &= P = p_2^L + p_1^L \\ \tan(\theta_2) &= \frac{P_1 \sin(\chi)}{(m_2/M)P + P_1 \cos(\chi)} \end{aligned}$$

## 1.10 Dispersión por potenciales infinitos

La idea es que sabiendo  $\rho$  (parámetro de impacto) quiero saber qué ángulo  $\chi$  se desvían las partículas incidentes.

$$\phi_0 + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad 2\phi_0 + \alpha + \beta = \pi \quad \phi_0 + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \beta \quad 2\alpha = 2\beta = \chi$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \tan(\beta) = \tan\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho/dz}{dz/d\theta}$$

con  $\theta$  variable paramétrica. Donde  $\rho = \rho(z)$  es la función que da la curva roja (el perfil del cuerpo dispersor).



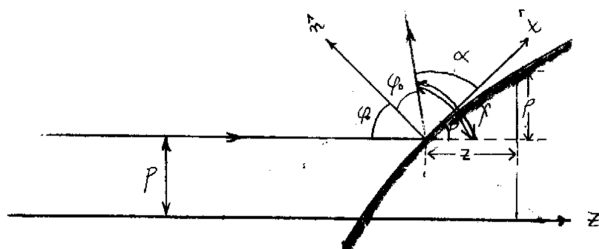


Figura 10.17