

---

# CURSO BÁSICO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 3: Física Teórica 2 [Mecánica Cuántica]

---

E.F. Lavia

versión 0.1

5 de septiembre de 2020

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	El experimento de Stern-Gerlach . . . . .	1
1.1.1	Polarización de luz . . . . .	3
1.1.2	El formalismo . . . . .	5
1.2	Algebra? . . . . .	6
1.2.1	Operadores . . . . .	8
1.2.2	Sandwichs . . . . .	8
1.2.3	Producto externo . . . . .	9
1.3	Bases . . . . .	11
1.3.1	Autokets y autovalores . . . . .	11
1.3.2	Combinación lineal de autoestados . . . . .	13
1.3.3	Operadores y matrices . . . . .	14
1.3.4	Cambio de base . . . . .	15
1.3.5	Representación diagonal . . . . .	17
1.3.6	Representaciones canónicas . . . . .	17
1.4	Sistemas de spín 1/2 . . . . .	19
1.4.1	Cambio de base . . . . .	21
1.4.2	Mediciones y probabilidades . . . . .	22
1.4.3	Valor de expectación . . . . .	23
1.4.4	Conmutadores . . . . .	23
1.4.5	Degeneración . . . . .	24
1.4.6	Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	27
1.4.7	Operador de dispersión . . . . .	28
1.4.8	Espectro continuo . . . . .	30
1.4.9	Midiendo y otras representaciones. Función de onda	31
1.4.10	Operador de traslación . . . . .	33
1.4.11	$\mathbf{p}$ en la representación $\mathbf{x}$ . . . . .	37
1.4.12	Cambio entre representaciones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ . . . . .	38
1.4.13	Corchetes de Poisson versus conmutadores . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Dinámica cuántica</b>	<b>41</b>

2.1	Casos sencillos de solución de $U(t, t_o)$ . . . . .	43
2.1.1	Soluciones útiles . . . . .	44
2.1.2	Evolución de valores de expectación . . . . .	45
2.1.3	Relaciones de conmutación . . . . .	46
2.1.4	La ecuación de Schrödinger . . . . .	47
2.1.5	Representación de Heisenberg . . . . .	49
2.1.6	Teorema de Ehrenfest . . . . .	54
<b>3</b>	<b>El oscilador armónico</b>	<b>57</b>
3.0.1	El estado fundamental $\langle 0 \rangle$ . . . . .	59
3.0.2	Interferencia en experimento de Young . . . . .	64
3.0.3	Cambio de cero del potencial . . . . .	66
3.0.4	Caso del EM y la invariancia de gauge . . . . .	68
3.1	El propagador . . . . .	70
3.2	Integrales de camino de Feynmann . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Introducción al momento angular (rotaciones)</b>	<b>79</b>
4.0.1	No conmutatividad de las rotaciones clásicas . . . . .	80
4.1	Rotaciones cuánticas . . . . .	81
4.1.1	Angulos de Euler . . . . .	82
4.1.2	Autoestados y autovalores de $J$ . . . . .	83
4.1.3	La normalización de $J_{\pm}$ . . . . .	85
4.1.4	Elementos de matriz de $J^2, J_z, J_{\pm}$ . . . . .	86
4.1.5	Elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$ . . . . .	86
4.1.6	Forma explícita del operador $\mathcal{D}(R)$ . . . . .	87
4.2	Formalismo de spinores de Pauli . . . . .	87
4.2.1	Aplicación a las rotaciones . . . . .	88
4.2.2	Ejemplo . . . . .	89
4.2.3	Rotaciones en sistemas con $j = 1$ . . . . .	89
4.3	Momento angular orbital . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Armónicos esféricos como matrices de rotación</b>	<b>94</b>
5.1	Suma de momentos angulares . . . . .	95
5.1.1	Dos momentos de spín $1/2$ . . . . .	95
5.1.2	Cambio entre bases . . . . .	96
5.2	Teoría formal de suma de momentos angulares . . . . .	97
5.2.1	Restricciones para la no nulidad de los coeficientes . . . . .	98
5.2.2	Relación de recurrencia . . . . .	99
5.2.3	Suma de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{S}$ . . . . .	100
5.3	Operadores vectoriales . . . . .	100
5.4	Operadores tensoriales . . . . .	101

<b>6</b>	<b>Teorema de Wigner-Eckart</b>	<b>103</b>
6.0.1	Reglas de selección . . . . .	104
6.1	Ejemplos de elementos matriciales de tensores . . . . .	104
6.1.1	Teorema de proyección . . . . .	105
6.1.2	Aplicación del teorema de proyección . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Simetrías en mecánica cuántica</b>	<b>106</b>
7.0.1	Simetría de paridad . . . . .	107
7.0.2	Función de onda bajo paridad . . . . .	108
7.0.3	Teorema . . . . .	109
7.0.4	Reglas de selección de paridad $\Pi$ . . . . .	110
7.1	Inversión temporal (reversión de movimiento) . . . . .	110
7.1.1	Operadores ante $\hat{\Theta}$ . . . . .	112
7.1.2	Función de onda . . . . .	114
7.1.3	Reversión de movimiento sobre $\mathbf{J}$ . . . . .	115
7.1.4	Reversión para sistemas de spin 1/2 . . . . .	115
7.1.5	Teorema . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Métodos perturbativos</b>	<b>117</b>
8.1	Resolución . . . . .	118
8.1.1	Caso degenerado . . . . .	121
8.2	Efecto Stark . . . . .	121
8.2.1	Corrimiento de la energía a orden 2 (con degeneración) . . . . .	123
8.3	Estructura fina del átomo de hidrógeno . . . . .	123
<b>9</b>	<b>Partículas idénticas</b>	<b>126</b>
9.0.1	Permutación . . . . .	127
9.1	Postulado de simetrización . . . . .	129
9.1.1	Principio de exclusión de Pauli . . . . .	129
9.1.2	Sistema de dos electrones de spin 1/2 . . . . .	129
9.2	El átomo de helio . . . . .	131
<b>10</b>	<b>Picture de interacción y perturbación dependiente del tiempo</b>	<b>133</b>
10.0.1	Evolución de los coeficientes . . . . .	135
10.0.2	Método perturbativo (dependiente del tiempo) . . . . .	135
10.0.3	Transiciones entre autoestados del hamiltoniano $H_0$ . . . . .	136
10.0.4	Ejemplo: potencial constante encendido abruptamente . . . . .	137
10.1	Scattering: orden 1 . . . . .	138
10.2	El método variacional . . . . .	139
10.2.1	Scattering a orden dos y OFPT . . . . .	139
10.2.2	Perturbación armónica . . . . .	140

10.3	Despoblamiento de estados iniciales . . . . .	141
10.3.1	Scattering sección eficaz . . . . .	142
<b>11</b>	<b>Introducción a la mecánica cuántica relativista</b>	<b>145</b>
11.0.1	La ecuación de Klein-Gordon . . . . .	146
11.0.2	La ecuación de Dirac . . . . .	147
11.0.3	Ejemplo: partícula libre quieta . . . . .	148
11.0.4	Energías negativas . . . . .	149
<b>A</b>	<b>Tensor de Levi-civita</b>	<b>151</b>

## Capítulo 1

---

# Introducción

Este capítulo es una introducción al formalismo. Recordemos que el curso se basó fuertemente en el libro de Jon Jun Sakurai [bien escrito?]. La mecánica cuántica relativista desemboca en la teoría de campos. Decir quizás que hay que, de alguna manera, olvidar todo lo anterior de la física clásica (hasta nuevo aviso) porque esto conviene pensarlo de otra manera, será más abstracto. Los sistemas, que serán muy sencillos, tendrán propiedades muy particulares, que luego se conectarán con la física clásica en el límite apropiado. La mecánica cuántica relativista añade más información además de corregir la clásica.

## 1.1 El experimento de Stern-Gerlach

Un horno emite átomos de plata (Ag) neutros con un electrón  $e$  en la última órbita que le da el spin al átomo como un todo. Al salir del horno los átomos tienen su spin orientado en cualquier dirección. Ver figura. El momento magnético del átomo que sale del horno es

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e c} \mathbf{S}$$

donde acá está metido el magnetón de Bohr

$$\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e c}.$$

La fuerza  $f_z$  que le ejerce el campo  $\mathbf{B}$  a estos átomos es

$$f_z \propto -\mu_z$$



Figura 1.1

de modo que el dispositivo SG mide y filtra por  $S_z(\mu_z)$ . Si el espín es un ente clásico es de esperar un patrón como el sombreado en azul, pero se obtienen dos manchas; con la correspondencia mostrada bajo estas líneas

Uso átomos de plata que son neutros eléctricamente así no tengo efecto Hall.



Figura 1.2

Entonces el espín no es un ente *continuo*: está cuantizado y sólo puede tomar dos valores. Llamamos a estos estados

$$(S_z, +) \quad (S_z, -)$$

Luego, un aparato de SG filtra o selecciona ciertos átomos. Podemos combinarlos.

Con el dispositivo segundo orientado en  $\hat{x}$  obtenemos mitad de átomos en  $(S_z, +)$  y mitad en  $(S_z, -)$ . La única es que en realidad lo que sucede es que  $(S_z, +)$  se compone de  $(S_x, +)$  y  $(S_x, -)$ .

Acá abajo sale  $(S_z, -)$  pero para que ello sea posible  $(S_x, +)$  se debe componer de  $(S_z, +)$  y  $(S_z, -)$ . Pero esto no es posible porque al segundo aparato no entró jamás  $(S_z, -)$ . Se filtró antes.

Los spines en  $S_x, S_z$  son incompatibles entre sí. Al seleccionar  $(S_z, +)$  en el segundo SG se destruye la información previa sobre  $S_z$ . No podemos ya garantizar que  $S_z$  sea nula. El tercer experimento da al traste con

Al medir uno la información cuántica del otro se pierde.

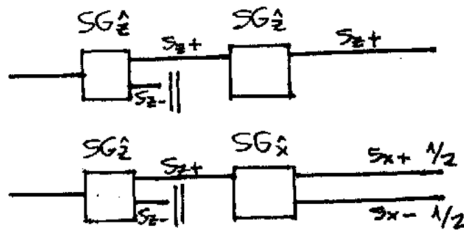


Figura 1.3

la idea de que podamos pensar en espín como un ente vectorial en 3D. Mediante una analogía con polarización de luz vemos que es necesario meter al espín en un espacio vectorial de dimensión 2 pero con coeficientes complejos.

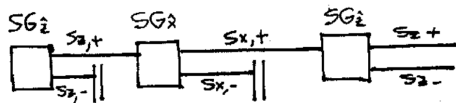


Figura 1.4

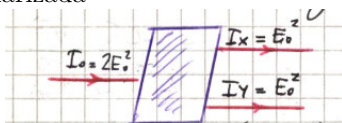
Estos esquemas de las últimas figuras operan como polarizadores; permiten separar las partículas seleccionando por espín.

### 1.1.1 Polarización de luz

Consideremos una onda electromagnética en la dirección de  $\hat{z}$ , polarización en  $\hat{x}$ ,

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} \quad \mathbf{E} = E_0 \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}$$

y la polarización en  $\hat{y}$ . Si incidimos en un cristal birrefringente con luz polarizada





se tienen dos estados. Este sistema es similar a lo que se vio previamente. A la salida tengo dos estados. Lo que entrará será

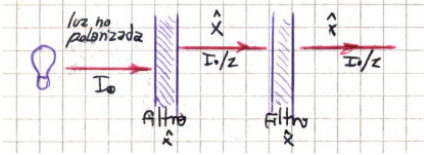
$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} + \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

y la analogía me lleva a que polarización de luz en  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  equivalen a  $S_z^+$  y  $S_z^-$ , respectivamente. Repetimos los experimentos, pero ahora con luz.

Matemáticamente el filtro en  $\hat{x}$  es un ente que lo que hace es proyectar la luz entrante en  $\hat{x}$ .

Los tres casos entonces corresponden a:

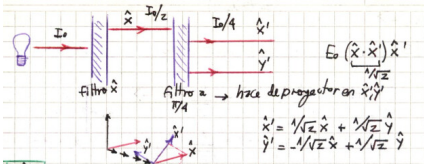
1



No hay efecto neto. Opera como un filtro en  $\hat{x}$  del modo  $(\mathbf{E} \cdot \hat{x}) \hat{x}$  y lo que sale es  $E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)}$

2

En este caso el filtro a  $\pi/4$  lo que hace es proyectar en  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$



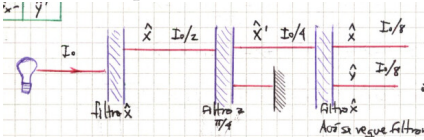
Se tienen a la salida  $E_0(\hat{x} \cdot \hat{x}') \hat{x}$  donde

$$\hat{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \quad \hat{y}' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y},$$

de manera que  $S_x^+$  equivale a  $\hat{x}'$  y  $S_x^-$  equivale a  $\hat{y}'$ .

3

Aquí se ve que filtrar dos veces es incompatible con el electromagnetismo. A la salida se tiene  $E_0(\hat{x}' \cdot \hat{x}) \hat{x}$ , de modo que aparece una componente que no estaba presente.



Entonces

$$\mathbf{E} = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos((kz - \omega t)) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos((kz - \omega t)) \right) = E_0 \left( \frac{\hat{x} \pm i \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

de manera que con un cristal birrefringente que separe izquierda-derecha en luz polarizada circular puedeo continuar la equivalencia  $S_y^+ \equiv \text{right}$  y  $S_y^- \equiv \text{left}$  y tenemos seis estados pero son solo dos los independientes.

Hacen falta vectores complejos para describir sistemas cuánticos. Ya en este sencillo caso de analogía luz-spin vemos que la descripción completa del problema no puede hacerse en términos de vectores con coeficientes reales. Necesitamos un espacio complejo.

El problema del spin es sencillo porque es discreto y de dos estados.

La amplitud de probabilidad será algo como

$$A \sim \hat{i} \cdot \hat{j}$$

donde  $j$  es el filtro. Luego la probabilidad es

$$P = |A|^2 = (\hat{i} \cdot \hat{j})(\hat{i} \cdot \hat{j})^*.$$

Para operar construiremos un formalismo.

### 1.1.2 El formalismo

El formalismo para la mecánica cuántica incluirá

- Estados
- Productos entre estados (propiedades matemáticas)
- Operadores, que llevan a observables
- Postulados de la mecánica cuántica

Para el caso del spin se definen

$$S = \frac{1}{2} \quad S_z^+, S_z^-$$

y se definen los kets  $|\rangle$  que tendrán toda la información. Inventados por P.A.M. Dirac. No son otra cosa que vectores con coeficientes complejos. La base de polarización (estados) será

$$|S_z; +\rangle \quad |S_z; -\rangle$$

y entonces  $|S_x; +\rangle$  es una combinación lineal de 1,2 anteriores. Así

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

$$|S_x; -\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

$$|S_y; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

$$|S_y; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

aunque probar esto no es ninguna boludez.

## 1.2 Álgebra?

El ket contiene toda la información cuántica del estado. Da el estado físico del sistema. Cumplen las siguientes propiedades

- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$  la suma de kets es un ket
- $c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c$  con  $c \in \mathbb{C}$
- $c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle = |\gamma\rangle$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- $c|\alpha\rangle, |\alpha\rangle$  representan el mismo estado cuántico

Se define un espacio de *Bra* dual al de "kets" al que se va mediante "dual conjugado"

$$\begin{aligned} |a\rangle, |a'\rangle &\Leftrightarrow \langle a|, \langle a'| \\ |a\rangle + |b\rangle &\Leftrightarrow \langle a| + \langle b| \quad c|a\rangle \Leftrightarrow c^* \langle a| \\ c_a|a\rangle + c_b|b\rangle &\Leftrightarrow c_a^* \langle a| + c_b^* \langle b| \end{aligned}$$

Se define también un producto interno según

$$(\langle\alpha|)(|\beta\rangle) \equiv \langle\alpha|\beta\rangle$$

que no es otra cosa que un número complejo. Se puede hacer entonces una equivalencia con los vectores estándar del álgebra del siguiente modo

$$\text{ket} \sim \text{vector columna} \quad |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bra} \sim \text{vector fila} \quad \langle x| = (1 \ 0)$$

y habiendo definido esta base escribimos, por ejemplo

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |y\rangle$$

$$\langle a|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y del mismo modo

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle y| \right) (|x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La trasposición opera como en álgebra, transmutando de ket a bra y viceversa.

$$\hat{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\hat{x}')^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0)$$

El producto interno tiene las siguientes propiedades:

1.  $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$  luego  $\langle \alpha | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$
2.  $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$  métrica definida positiva
3.  $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle \perp |\beta\rangle$
4.  $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$  con  $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} |\alpha\rangle$  todo ket no nulo es normalizable

La primera propiedad busca que podamos darle significado probabilístico. El producto  $\langle \alpha | \alpha \rangle$  da la norma al cuadrado.

### **EJEMPLO 2.1 Veamos que el estado de spin $S_x^+$ está normalizado**

Para ello escribimos su expresión en términos de los estados  $S_z$  y aplicamos dual conjugado. Luego,

$$\langle S_x, + | S_x, + \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, + | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, - | \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} | S_z, + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | S_z, - \rangle \right)$$

$$\langle S_x, + | S_x, + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, + | S_z, + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, + | S_z, - \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, - | S_z, + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z, - | S_z, - \rangle = 1$$

Recordemos que en la formulación de mecánica cuántica que se utilizó en anteriores cursos, F4, se tenían funciones de onda que se pueden ver como una notación relacionada con kets y bras a través del producto interno.

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \int d^3x \phi_\beta^*(\mathbf{x}) \phi_\alpha(\mathbf{x})$$

### 1.2.1 Operadores

A cada observable lo representaremos por un operador. Hay operadores que no vienen de observables.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \quad \langle\alpha|\hat{A} = \langle\gamma|$$

un operador sobre un ket da otro ket y sobre un bra da otro bra. Notemos que en este último caso opera a izquierda. Por el momento se trabajará con operadores lineales.

La transformación entre operadores se da con

$$\hat{X}|a\rangle \Leftrightarrow \langle a|\hat{X}^\dagger$$

donde  $\dagger$  (daga) significa el traspuesto conjugado; cambia el sentido hacia donde actúa el operador y conjuga. Se da que si

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger \Rightarrow \hat{X} \text{ es hermítico}$$

En mecánica cuántica todos los observables serán representados por operadores hermíticos.

Se dan

- $\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}$  no conmutativo
- $\hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}) = (\hat{X}\hat{Y})\hat{Z} = \hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$  asociativo
- $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$
- $\hat{0}|\alpha\rangle = 0 \quad \forall |\alpha\rangle ; \hat{0} \equiv \text{operador nulo}$
- $\hat{X}(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1\hat{X}|\alpha\rangle + c_2\hat{X}|\beta\rangle$

de modo que en cuántica los observables se representan mediante operadores hermíticos.

### 1.2.2 Sandwichs

Coloquialmente encerrar un operador operando sobre un ket (bra) con un bra (ket). Se obtiene un escalar

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = (\langle\beta|)(X|\alpha\rangle) = \langle\beta|\gamma\rangle = \langle\gamma|\beta\rangle^* = (\langle\alpha|X|\beta\rangle)^*$$

donde usamos que  $|\gamma\rangle$  es un ket y por dual conjugado  $\langle\gamma| = \langle\alpha|\hat{X}^\dagger$  y extraemos como conclusión

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = (\langle\alpha|X|\beta\rangle)^*,$$

y de manera equivalente

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = (\langle \beta | X^\dagger)(|\alpha\rangle) = \langle \Gamma | \alpha \rangle = \langle \alpha | \Gamma \rangle^* = (\langle \alpha | X^\dagger | \beta \rangle)^*$$

donde usamos que  $\langle \Gamma |$  es un bra y por dual conjugado  $|\Gamma\rangle = \hat{X} |\beta\rangle$ . El formalismo parece ser consistente. El operador opera sobre un ket/bra y multiplica al otro.

**Las mediciones se pensarán como proyectar sobre autoestados.**

### 1.2.3 Producto externo

Es un nuevo tipo de producto entre vectores.

$$|\beta\rangle \langle \alpha| \equiv (|\beta\rangle)(\langle \alpha|)$$

$$(|\beta\rangle \langle \alpha|) |\gamma\rangle = |\beta\rangle \langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \alpha | \gamma \rangle |\beta\rangle,$$

de modo que es un operador pues al aplicar sobre un ket obtengo otro ket (notemos que  $\langle \alpha | \gamma \rangle$  es un escalar). Podemos pensar que

$$\Lambda_\alpha \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

es un nuevo operador, el proyector, que actúa rotando un  $|\gamma\rangle$  en la dirección de  $|\beta\rangle$ . Notemos

$$\Lambda_\alpha^2 = |\alpha\rangle \langle \alpha| |\alpha\rangle \langle \alpha| = |\alpha\rangle \langle \alpha| = \Lambda_\alpha$$

puesto que  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ , de manera que aplicar dos veces un proyector no cambia nada. El proyector  $\Lambda_\alpha$  sobre un ket  $|\beta\rangle$  selecciona la parte de  $|\beta\rangle$  en la dirección de  $|\alpha\rangle$ . Nos dice cuanto de  $|\beta\rangle$  está en la dirección de  $|\alpha\rangle$ . Luego,

$$\sum_i^N \Lambda_i = \sum_i^N |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$$

la suma de todos los proyectores del espacio en el que estamos es la identidad de ese espacio. Decimos que  $\{|i\rangle\}$  es un conjunto completo.

#### EJEMPLO 2.2 Traspuesto de un producto externo

Queremos ver que si  $X = |\beta\rangle \langle \alpha|$ , entonces  $X^\dagger = |\alpha\rangle \langle \beta|$ . Hacemos operar sobre estados arbitrarios, y sabiendo que valen

$$\langle a | X | b \rangle = \langle b | X^\dagger | a \rangle^* \quad \langle a | X | b \rangle^* = \langle b | X^\dagger | a \rangle$$

se tiene, reemplazando la definición de  $X$ ,

$$\langle a | (|\beta\rangle \langle \alpha|) | b \rangle^* = \langle b | (|\beta\rangle \langle \alpha|)^\dagger | a \rangle$$

$$\langle a | \beta \rangle^* \langle \alpha | b \rangle^* = \langle \beta | a \rangle \langle b | \alpha \rangle = \langle b | \alpha \rangle \langle \beta | a \rangle = \langle b | (|\beta\rangle \langle \alpha|) | a \rangle$$

y comparando este último resultado con el de la línea anterior, vemos que se verifica

$$|\alpha\rangle \langle \beta| = (|\beta\rangle \langle \alpha|)^\dagger.$$

**EJEMPLO 2.3 Ejemplo sencillo 2D**

Consideramos versores en el plano, vectores columna,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que en sus versiones dagueadas pasan a ser vectores fila

$$\hat{X}^\dagger = (1 \ 0) \quad \hat{Y}^\dagger = (0 \ 1)$$

Luego, los productos que podemos hacer corresponden a las operaciones matriciales de vector por vector, resultando en número o matriz dependiendo del orden

$$\hat{X}^\dagger \hat{X} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \hat{X} \hat{X}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde instamos al lector a que note la diferencia de dimensión en los resultados. En la notación de Dirac estos versores serían  $|x\rangle, |y\rangle$  y sus correspondientes bras. Luego,

$$\langle x | x \rangle = \langle y | y \rangle = 1, \quad \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = 0$$

y las matrices serían los proyectores

$$P_x \equiv |x\rangle \langle x|, \quad P_y \equiv |y\rangle \langle y|.$$

Para un estado arbitrario  $|\alpha\rangle = \alpha_x |x\rangle + \alpha_y |y\rangle$ , si uso el proyector  $P_x$  se tendrá

$$P_x |\alpha\rangle = (|x\rangle \langle x|)(\alpha_x |x\rangle + \alpha_y |y\rangle)$$

$$P_x |\alpha\rangle = \alpha_x |x\rangle \langle x | x \rangle + \alpha_y |x\rangle \langle x | y \rangle = \alpha_x |x\rangle.$$

Del mismo modo se obtiene  $P_y |\alpha\rangle = \alpha_y |y\rangle$ . Si sumo ambos proyectores obtengo la identidad

$$(P_x + P_y) |\alpha\rangle \equiv I |\alpha\rangle = |\alpha\rangle,$$

y vemos que la identidad no hace nada.

Los kets  $|\alpha\rangle$  *viven* en un espacio vectorial de Hilbert con dimensión  $N$ , donde  $N$  lo dicta el número de posibles estados de cada sistema físico. Una partícula de spín 1/2 sólo tiene dos estados: up y down.

Hay otro producto más, entre dos bras o dos kets, que se llama producto tensorial y se representa como

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \quad \langle\alpha| \otimes \langle\beta|$$

que es un producto entre kets de espacios de Hilbert diferentes; el resultado no es ni un bra ni un ket. Digamos que es una notación.

$$\langle\alpha|\beta\rangle^* \equiv DC\{|\beta\rangle\} DC\{\langle\alpha|\}$$

## 1.3 Bases

Dado un sistema físico representado por un espacio vectorial  $\mathcal{H}$  de dimensión  $N$  existirá una base (también de dimensión  $N$ ) que será un conjunto de estados tal que cualquier estado de ese sistema físico puede representarse como combinación lineal de ese conjunto,

$$\{|i\rangle\} \text{ base} \Rightarrow |\alpha\rangle = \sum_i^N c_i |i\rangle$$

siendo  $|\alpha\rangle$  un estado cualquiera. Es práctico utilizar bases ortonormales,

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

que es la delta de Kronecker.

Así, los kets se definen normalizados, dado un ket

$$|\phi\rangle = a |1\rangle + b |2\rangle + c |3\rangle$$

se lo normaliza con

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\langle \phi | \phi \rangle} |\phi\rangle$$

lo que significa que

$$|\psi\rangle = a' |1\rangle + b' |2\rangle + c' |3\rangle \quad |a'|^2 + |b'|^2 + |c'|^2 = 1$$

Si tenemos un ket normalizados,  $|\phi\rangle = a |1\rangle + b |2\rangle$  y su bra  $\langle\phi| = a^* \langle 1| + b^* \langle 2|$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle\phi|\phi\rangle &= (a^* \langle 1| + b^* \langle 2|)(a |1\rangle + b |2\rangle) = \\ &= a^* a \langle 1 | 1 \rangle + b^* a \langle 2 | 1 \rangle + a^* b \langle 1 | 2 \rangle + b^* b \langle 2 | 2 \rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{aligned}$$

### 1.3.1 Autokets y autovalores

Si  $\hat{A} |a\rangle = c |a\rangle$  entonces  $|a\rangle$  es autoket de  $\hat{A}$  con autovalor  $c$ . Se suelen etiquetar los autoestados  $|a'\rangle, |a''\rangle$  de modo que

$$\hat{A} |a'\rangle = a' |a'\rangle$$

lo cual lleva al problema espectral

$$(\hat{A} - a' \mathbb{1}) |a'\rangle = 0$$



entonces los operadores tendrán representación matricial, que cambiará según la base utilizada. Vamos viendo que en general sólo se sabe cómo opera un operador sobre kets. La operación sobre los bras la obtenemos usando dual conjugado.

Lo siguiente debiera ser amparado por un título como “propiedades de operadores hermíticos”.

Deducimos entonces que

1. Los autovalores de un operador hermítico son reales y los autokets correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales.
2. Los autokets de un operador son base completa del espacio de kets.

Como ejemplo de A citemos

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad \text{DC} \quad \langle a'|A^\dagger = \langle a'|A = \langle a'|a'^*$$

de manera que

$$\begin{aligned} \langle a'|A|a'\rangle &= \langle a'|(A|a'\rangle) = a' \\ (\langle a'|A|a'\rangle)^* &= (\langle a'|)(A|a'\rangle)^* = (\langle a'|A^\dagger)(|a'\rangle) \\ &= \langle a'|A|a'\rangle = a' \quad \Rightarrow \quad a' = a'^*. \end{aligned}$$

Me gusta más la otra forma, que es meter otro  $a''$  así

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\langle a''|a'\rangle \quad \langle a''|A^\dagger|a'\rangle = a''^*\langle a''|a'\rangle$$

de manera que como

$$(a' - a''^*)\langle a''|a'\rangle = 0,$$

si  $|a'\rangle = |a\rangle$  entonces  $a' = a'^*$  y los autovalores son reales. En cambio si  $|a'\rangle \neq |a''\rangle$  se tiene  $a' \neq a''$  entonces  $\langle a''|a'\rangle = 0$  y los autoestados del operador son perpendiculares. Ya está abajo esto.

Para el caso de B se postula así. Si esto vale entonces

$$|\alpha\rangle = \sum_i^N |a_i\rangle \langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i^N c_i |a_i\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle$$

pues

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \sum_{i,j}^N \langle a_j|c_j^*c_i|a_i\rangle = \sum_i^N |c_i|^2 = 1$$

y además

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle \Rightarrow A(|a'\rangle - |a''\rangle) = a'|a'\rangle - a''|a''\rangle$$

$$\langle a'' | A | a' \rangle = a' \langle a'' | a' \rangle \quad \langle a' | A | a'' \rangle = a'' \langle a' | a'' \rangle$$

y ahora conjugando

$$\langle a'' | A | a' \rangle^* = a' \langle a'' | a' \rangle^* \quad \langle a'' | A | a' \rangle = a'' \langle a'' | a' \rangle$$

donde usamos que  $a''^* = a''$  y restando

$$(a' - a'') \langle a'' | a' \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle a'' | a' \rangle = 0 \quad \text{si} \quad a' \neq a''$$

O sea, hemos probado que los autovectores correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales.

### 1.3.2 Combinación lineal de autoestados

Podemos escribir

$$\langle a'' | a' \rangle = \delta_{a' a''}$$

que es la delta de Kronecker. Postulo que forman una base completa, y que un estado  $|\alpha\rangle$  se puede escribir en función de la base  $|a_i\rangle$  de esta forma

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'} |a'\rangle.$$

Ahora quisiéramos ver quién es el coeficiente  $C_{a'}$ . Para ello multipliquemos por un bra arbitrario

$$\langle a_j | \alpha \rangle = \sum_{i=1}^N C_i \underbrace{\langle a_j | a_i \rangle}_{\delta_{ij}} = C_j,$$

de modo que es

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \sum_{i=1}^N \langle a_i | \alpha \rangle |a_i\rangle$$

o bien, en términos del operador  $\Lambda$  [?],

$$|\alpha\rangle = \left( \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i| \right) |\alpha\rangle$$

de modo que si la base es completa debe ser

$$\sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i| \equiv \mathbb{1}.$$

Todos estos resultados surgen de suponer que los autoestados son una base completa. Es análogo a la proyección de un vector en un sistema coordinado:  $\mathbf{V} = \sum_i (\mathbf{V} \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_i$ .

Asimismo, considerando la normalización de estados

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = \langle \alpha | \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

o bien

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = \sum_{a'} C_{a'}^* C_{a'} = \sum_{a'} |C_{a'}|^2.$$

### 1.3.3 Operadores y matrices

Un operador se puede representar matricialmente como

$$X = \sum_{a'}^N \sum_{a''}^N |a''\rangle \langle a'' | X | a'\rangle \langle a' | = \sum_{a'}^N \sum_{a''}^N (\langle a'' | X | a'\rangle) |a''\rangle \langle a' |$$

donde hemos explotado el hecho de que en el medio aparece un escalar (?), siendo

$$X_{ij} = \langle a_i | X | a_j \rangle$$

un elemento de matriz. Y notemos que  $|a''\rangle \langle a' |$  es un ente de  $N \times N$ . Si la base es de dimensión 3 se tendrá por ejemplo,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

de manera que existe una identificación entre cosas del álgebra básica y este mundo de operadores y estados. Si  $X$  es hermitico por ejemplo, entonces su matriz es simétrica conjugada.

$$\langle a_i | X | a_j \rangle^* = (\langle a_j | X^\dagger | a_i \rangle) = \langle a_j | X | a_i \rangle$$

y entonces

$$\langle a_j | X | a_i \rangle^* = \langle a_i | X | a_j \rangle$$

de modo que

$$X_{ji}^* = X_{ij} \quad X_{ij}^{t*} = X_{ij} \quad X_{ij}^\dagger = X_{ij}$$

y vemos bien el significado de *daguar*. En este caso la matriz tiene traza real y seis elementos independientes

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^* & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^* & X_{21}^* & X_{31}^* \\ X_{12}^* & X_{22}^* & X_{32}^* \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33}^* \end{pmatrix}$$

La traza será

$$\text{tr } (A) = \sum_{i=1}^N \langle a_i | A | a_i \rangle.$$

### 1.3.4 Cambio de base

Para cambiar de base metemos un uno ( $\mathbb{1}$ ) escrito como suma de proyectores,

$$X |b_j\rangle = \mathbb{1} X |b_j\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | X |b_j\rangle = \sum_{i=1}^N C_{ij} |a_i\rangle$$

siendo  $C_{ij}$  la matriz del cambio de base. Se puede escribir

$$|b_j\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | b_j\rangle$$

y se ve que  $\langle a_i | b_j\rangle$  son los elementos de la matriz que cambia de base.

#### EJEMPLO 3.1 Ejercicio 2

Tenemos la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , o sea un espacio de Hilbert de dimensión 2. Se considera ortonormal de manera que

$$\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1 \quad \langle + | - \rangle = 0$$

Luego, se tiene

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|)$$

Los elementos de matriz serán

$$(S_x)_{11} = \langle + | (S_x) | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle + | (|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|) | + \rangle = 0,$$

dado que ambos miembros dan  $\langle + | - \rangle$ . Asimismo,

$$S_x |+\rangle = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|) |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

y

$$S_x |-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle.$$

Matricialmente

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$S_x |+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**EJEMPLO 3.2 Ejercicio 6**

Tenemos un espacio de kets generado por  $\{|a'\rangle\}$  ortogonales, siendo  $A$  hermítico, de manera que los  $a$  son reales.

i) Queremos probar que  $\Pi_{a'}(A - a'\mathbb{1})$  es el operador nulo. Luego, supongamos que

$$\Pi_{a'}(A - a'\mathbb{1}) \equiv O$$

y entonces verificará

$$\langle a' | O | a'' \rangle = O_{a'a''} = 0.$$

Tomemos

$$\Pi_{a'}(A - a'\mathbb{1})|a''\rangle = \Pi_{a'}A|a''\rangle - a'\mathbb{1}|a''\rangle = \Pi_{a'}(|a''\rangle + a'|a''\rangle)$$

pero lo que opera sobre el ket es nulo.

Por otra parte, como  $(A - a_n\mathbb{1})|a''\rangle$  se puede escribir

$$(A - a_{n_2}\mathbb{1})(A - a_{n_1}\mathbb{1})|a''\rangle(a'' - a_n)$$

y sigue pasadno de modo que al final se obtiene

$$|a''\rangle \Pi_{a'}(a'' - a').$$

ii) Y ahora, qué significa el siguiente operador

$$\Pi_{a' \neq a''} \frac{(A - a''\mathbb{1})}{(a' - a'')}$$

Aplicamos a un ket  $|a\rangle$ ,

$$\Pi_{a' \neq a''} \frac{(A - a''\mathbb{1})}{(a' - a'')}|a\rangle = \Pi_{a' \neq a''} \frac{(a - a'')}{(a' - a'')}|a\rangle$$

y será nulo sí y sólo si  $a \neq a''$ , de manera que es una construcción de la delta de Kronecker,

$$\Pi_{a' \neq a''} \frac{(A - a''\mathbb{1})}{(a' - a'')} = \delta_{aa'}|a'\rangle$$

Es un proyector de todos los elementos en  $|a'\rangle$  lo que siempre da cero para los de la base salvo cuando es  $a' = a$ .

**EJEMPLO 3.3 Ejercicio 8**

Consideramos  $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$  donde  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  o sea un vector de operadores y el versor es el usual de esféricas en términos de los ángulos.

$$\hat{n} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta).$$

**EJEMPLO 3.4 Ejercicio 11**

Consideremos la matriz  $M$  hermítica y la base  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  que tendrá por ello autovalores reales y autovectores ortogonales.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores saldrán de

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

que dará  $\lambda = 0, 1, -1$ . Los autovectores salen de resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

y haciendo  $v_2^{(1)} = 0$  se tiene  $v_1^{(1)} = -v_3^{(1)}$  y luego

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con  $\langle v^{(1)} | v^{(1)} \rangle = 1$  y así siguiendo con los otros vectorcillos, resulta

$$A = [v^{(1)} v^{(2)} v^{(3)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 1.3.5 Representación diagonal

Un operador tiene representación diagonal cuando está representado en la base de sus autokets

$$\begin{aligned} A &= \sum_i^N \sum_j^N |a_i\rangle \langle a_i| A |a_j\rangle \langle a_j| = \sum_i^N \sum_j^N a_j |a_i\rangle \langle a_i| a_j\rangle \langle a_j| = \\ &= \sum_{i,j}^N \delta_{ij} a_j |a_i\rangle \langle a_j| = \sum_i^N a_i \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son sus autovalores. Es destacable que es conveniente utilizar como bases los autoestados de ciertos operadores.

### 1.3.6 Representaciones canónicas

Podemos representar una base como vectores canónicos

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \quad |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \quad |a_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \langle a_1 | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} + \langle a_2 | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} + \dots + \langle a_n | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \langle a_2 | \alpha \rangle \\ \dots \\ \dots \\ \langle a_n | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

y por DC se tiene

$$\langle \alpha | = ( \langle \alpha | a_1 \rangle \quad \langle \alpha | a_2 \rangle \quad \dots \quad \langle \alpha | a_n \rangle )$$

y

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = \left( \overbrace{\quad}^{1 \times N} \right) \left( \overbrace{\quad}^{N \times 1} \right) = \square$$

que es un escalar. El producto entre otros dos estados arbitrarios

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | a_i \rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \sum_i^N \langle \beta | \underbrace{|a_i\rangle \langle a_i|}_{\Lambda_{a_i}} | \alpha \rangle = \square$$

otra vez un escalar.

Para un operador  $X$  se tiene la siguiente representación

$$X = \sum_i^N \sum_j^N |a_i\rangle \langle a_i | X | a_j \rangle \langle a_j| = \sum_i^N \sum_j^N \langle a_i | X | a_j \rangle |a_i\rangle \langle a_j|$$

y esto último es una matriz. Aquí el  $\hat{X}$  es una matriz y  $\langle a_i | \hat{X} | a_j \rangle \equiv X_{ij}$  son sus elementillos (escalares). En conclusión,

$$X = \sum_i^N \sum_j^N X_{ij} |a_i\rangle \langle a_j|,$$

donde

$$|a_i\rangle \langle a_j| = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} (0 \dots 1 \dots 0).$$

Para un operador que actúa sobre un estado, dando otro estado, se tiene

$$\langle a_i | \gamma \rangle = \langle a_i | X | \alpha \rangle = \sum_{a_j} \langle a_i | X | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle$$

que es el producto de una matriz por un vector

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | \gamma \rangle \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Para el producto externo será

$$|\beta\rangle \langle \alpha| = \sum_{a', a''} |a''\rangle \langle a'' | \beta \rangle \langle \alpha | a' \rangle \langle a' |$$

y este producto de brakets es la versión matricial del operador

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | \beta \rangle \langle a_1 | \alpha \rangle^* & \langle a_1 | \beta \rangle \langle a_2 | \alpha \rangle^* & \dots \\ \langle a_2 | \beta \rangle \langle a_1 | \alpha \rangle^* & \langle a_2 | \beta \rangle \langle a_2 | \alpha \rangle^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

En la base en la cual un operador es diagonalizable resulta sencilla su matriz:

$$A = \sum_{a', a''} |a''\rangle \langle a'' | A | a' \rangle \langle a' | = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'},$$

en términos del proyector.

Los elementos usados en el formalismo (bras, kets, etc.) pueden pensarse como vectores (fila o columna) y matrices.

## 1.4 Sistemas de spin 1/2

Hay dos estados posibles de spin,

$$|S_z; +\rangle = |S_z = \hbar/2\rangle \equiv |+\rangle \quad |S_z; -\rangle = |S_z = -\hbar/2\rangle \equiv |-\rangle$$

de manera que la dimensión del espacio vectorial es 2. Entonces, la identidad será

$$\mathbb{1} = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|$$

Luego, en la representación de  $S_z$  se tiene

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \quad S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle,$$

**Acá hay que diseñar unos +, - que habiten dentro de los brakets pues estos se ven feo.**



que viene de que el operador es

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|).$$

Luego,

$$S_+ \equiv \hbar |+\rangle \langle +| \quad S_- \equiv \hbar |-\rangle \langle -|$$

donde  $S_- = S_+^\dagger$  son operadores de subida y de bajada. que actuarán subiendo/bajando el spin o dando el ket nulo. Así,

$$S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle \quad S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle \quad S_+ |+\rangle = S_- |-\rangle = 0$$

En la representación vectorial serán

$$|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que los proyectores

$$\Lambda_+ = |+\rangle \langle +| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_- = |-\rangle \langle -| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los operadores  $\pm$  serán

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$S_+ |-\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar |+\rangle.$$

Finalmente,

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_x; +\rangle \pm |S_x; -\rangle).$$

### 1.4.1 Cambio de base

Dados dos conjuntos  $\{|a'\rangle\}, \{|b'\rangle\}$  base ortonormales y completos existe un  $\widehat{U}$  unitario tal que :

$$U^+U = UU^+ = \mathbb{1} \quad \text{con} \quad |b_i\rangle = U |a_i\rangle$$

Este operador de cambio de base será

$$U = \sum_{\ell} |b_{\ell}\rangle \langle a_{\ell}|$$

y actuando sobre un elemento de la base  $a$ ,

$$U |a_i\rangle = \sum_{\ell} |b_{\ell}\rangle \langle a_{\ell} | a_i\rangle = |b_i\rangle$$

Este operador  $U$  cumple la función de pasar entre bases

$$\underbrace{|a_{\ell}\rangle}_{\text{vieja base}} \longrightarrow \underbrace{|b_{\ell}\rangle}_{\text{nueva base}}$$

o bien

$$|\text{nueva base}\rangle = U |\text{vieja base}\rangle .$$

Notemos que

$$UU^{\dagger} = \sum_{k,\ell} |a^k\rangle \langle b^k | b^{\ell}\rangle \langle a^{\ell}| = \sum_k |a^k\rangle \langle a^k| = \mathbb{1}$$

donde del segundo al tercer miembro se pasa por la ortogonalidad de la base  $b$ .

Veamos cómo transforma un ket genérico, usando que

$$\langle a^k | U | a^{\ell}\rangle = \langle a^k | \sum_j |b^j\rangle \langle a^j | a^{\ell}\rangle = \langle a^k | b^{\ell}\rangle .$$

Un ket arbitrario se escribirá como una combinación lineal de la base  $a$ , es decir,

$$|\alpha\rangle = \sum_{\alpha'} |a'\rangle \langle a' | \alpha\rangle$$

de modo que

$$\langle b_k | \alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle b_k | a_{\ell}\rangle \langle a_{\ell} | \alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle a_k | U^+ | a_{\ell}\rangle \langle a_{\ell} | \alpha\rangle = \langle a_k | U^+ | \alpha\rangle$$

e identificamos

$$\langle b^k | a^{\ell}\rangle = \langle a_k | U^+ | a_{\ell}\rangle$$

que nos convierte de

$$|\text{nueva base}\rangle = U^\dagger |\text{vieja base}\rangle.$$

Esta es la relación consistente con la anterior en términos de  $U$  [?].

Por otra parte, considerando otro operador  $X$

$$\langle b_i | X | b_j \rangle = \sum_{\ell, m} \langle b_i | a_\ell \rangle \langle a_\ell | X | a_m \rangle \langle a_m | b_j \rangle,$$

o bien,

$$\langle b_i | X | b_j \rangle = \sum_{\ell, m} \langle a_i | U^\dagger | a_\ell \rangle \langle a_\ell | X | a_m \rangle \langle a_m | U | a_j \rangle$$

lo cual implica que

$$X_{|b\rangle} = U^\dagger X_{|a\rangle} U,$$

que es una transformación de similitud.

**En matrices se puede poner como:**

$$X'_{kl} = U_{km}^\dagger X_{mn} U_{nl}.$$

### 1.4.2 Mediciones y probabilidades

En mecánica cuántica medir es filtrar; de todos los autoestados posibles se selecciona uno de ellos. La medición perturba al sistema. Se miden variables dinámicas asociadas a observables. Como los autoestados de un observable  $\hat{A}$  son una base completa  $\{|a_i\rangle\}$  entonces un sistema se hallará en una combinación lineal de autoestados de  $\hat{A}$ , o al menos eso puede pensarse.

antes de medir	Medición de $\hat{A}$	luego de medir
sistema en CL de autestados de $\hat{A}$		Salta a un autoestado de $\hat{A}$
sistema en autoestado de $\hat{A}$		Continúa en autoestado de $\hat{A}$

Puede verse pictóricamente la medición así:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |a'\rangle$$

el proceso de medición hace saltar  $|\alpha\rangle$  hacia  $|a'\rangle$ , siendo el resultado de la medida el autovalor  $a'$ . Antes de medir no puedo saber a qué estado saltará y tampoco en qué estado se hallaba. Si antes de medir se hallaba en un autoestado, continúa manteniéndose allí

$$|a'\rangle \longrightarrow |a'\rangle$$

Lo que se puede determinar es la probabilidad de que se halle en cierto autoestado  $a'$  de acuerdo con

$$\text{Prob}_{|a'\rangle} \equiv |\langle a' | \alpha \rangle|^2.$$

Si  $P = 1$  se halla en  $|a'\rangle$  antes de saltar, si  $P = 0$  no se halla en  $|a'\rangle$  antes de saltar. Este valor de Prob es mayor igual a cero y se verifica

$$\sum_{a'} \text{Prob}_{a'} = 1$$

si la probabilidad está correctamente normalizada.

Notamos que se puede escribir

$$P = \langle a' | \alpha \rangle \langle \alpha | a' \rangle = \langle \alpha | \Lambda_{a'} | \alpha \rangle$$

**La base que diagonaliza a un operador es la de sus autoestados.**

### 1.4.3 Valor de expectación

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

c el valor de expectación siempre se refiere a un estado en particular.

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$$

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} \langle \alpha | a' \rangle a'' \delta_{a' a''} \langle a'' | \alpha \rangle = \sum_{a''} a'' |\langle \alpha | a'' \rangle|^2$$

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} = a'' \text{Prob}_{|a''\rangle}$$

Esto último tiene el sentido de una especie de promedio ponderado. Hasta repetir el cansancio el experimento el resultado tenderá a este valor de expectación.

### 1.4.4 Conmutadores

Dados dos operadores  $A, B$ , se definen, el conmutador

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

y el anticonmutador

$$\{A, B\} \equiv AB + BA,$$

y se dice que dos observables conmutan si  $[A, B] = 0$ . Se dice que son compatibles si  $[A, B] = 0$  y incompatibles si se da la contrario,  $[A, B] \neq 0$ .

**TEOREMA:**

Sean dos observables compatibles y no degenerados, entonces los autoestados  $\{|a'\rangle\}$  de  $A$  lo son también de  $B$ . Es decir que  $A$  y  $B$  tienen base de autoestados en común.

demostración:

$$\langle a' | AB - BA | a'' \rangle = 0$$

$$a' \langle a' | B | a'' \rangle - \langle a' | B | a'' \rangle a'' = (a' - a'') \langle a' | B | a'' \rangle = 0$$

entonces

$$\langle a' | B | a'' \rangle = 0$$

y  $B$  es diagonal en  $\{|a'\rangle\}$ . Luego, se ve que escribiendo  $B$  en términos de esta base y aplicando sobre un estado de la misma

$$B | a'' \rangle = \sum | a' \rangle \langle a' | B | a' \rangle \langle a' | a'' \rangle = \langle a'' | B | a'' \rangle | a'' \rangle$$

por lo tanto la base de  $A$  diagonaliza a  $B$ , pero los autoestados tienen todos sus autovalores diferentes.

Los autoestados son iguales pero no los autovalores; con lo cual se utilizará la notación  $|a', b'\rangle$  donde

$$A | a', b' \rangle = a' | a', b' \rangle \quad B | a', b' \rangle = b' | a', b' \rangle$$

Si dos operadores no conmutan entonces no hay base común para ambos. Para ver que se debe cumplir esto supongamos que sí hay base común. Entonces, se tendrán

$$AB | a', b' \rangle = b' A | a', b' \rangle = b' a' | a', b' \rangle$$

$$BA | a', b' \rangle = a' B | a', b' \rangle = a' b' | a', b' \rangle$$

y estos dos renglones son iguales puesto que números escalares sí conmutan. Luego,

$$AB | \rangle = BA | \rangle$$

y entonces como esto significa que conmutan y partimos de la presunción en contrario, con lo cual este absurdo surge de asumir base en común; no la tienen. Por ende no los puedo medir con precisión. La medida del segundo afecta a la medición del primero.

### 1.4.5 Degeneración

Puede darse que haya varios  $g$  autoestados correspondientes a un mismo autovalor  $a'$ ; entonces se dice que hay degeneración de orden  $g$  para el autoestado  $|a'\rangle$

$$A | a' \rangle = a' | a' \rangle \quad ; i = 1, 2, \dots, g$$

y  $A$  tendrá una matriz de  $m \times n$  bloques. En este caso no se puede decir que la base de  $A$  diagonalice a  $B$ .

**Mejorar la matriz que está un asco**

$$A = \begin{pmatrix} a' \mathbb{1} & 0 & & \\ 0 & a'' \mathbb{1} & & \\ & & a''' & \\ & & & a^I V \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Los  $|a'_i\rangle$  no dan información sobre los bloques correspondientes en la matriz de  $B$ . Necesito un conjunto de operadores que haga romper la degeneración para expresar unívocamente el estado del sistema. Se llama CCOC. Necesito que conmuten entre sí para que las mediciones tengan sentido. Un Conjunto Completo de Observables que Conmutan.

Handwritten diagram showing matrix  $A$  with blocks  $a' \mathbb{1}$ ,  $a'' \mathbb{1}$ , and  $a'''$  on the diagonal, and matrix  $B$  with shaded blocks. Red arrows connect the blocks in  $A$  to the shaded blocks in  $B$ . Text annotations include "Con degeneración no puedo concluir" and "bloques".

Si no conmutan entonces son incompatibles; la medición de uno hace saltar al sistema a un autoestado del otro y como no son comunes pierde sentido el concepto de medir. No tiene sentido la medición de algo si por el hecho de medir cambiamos lo que queremos medir. Al ser incompatibles sus mediciones se afectan mutuamente.

Los autovalores de algunos operadores podrán tener degeneración pero una combinación de los autovalores del CCOC,  $|a'b'c'...\rangle$ , determina el estado de forma única.

Dado un set CCOC,  $\{A, B, C, D\}$ , se etiquetarán  $|K'\rangle \equiv |a'b'c'd'\rangle$  los autoestados, que es una variable colectiva. Se cumplirán

$$\langle K | K' \rangle = \delta_{KK'} = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \dots$$

$$\sum_{K'} |K'\rangle \langle K'| = \mathbb{1}$$

Las únicas cosas que tiene sentido medir en MC son las variables asociadas a operadores en un CCOC.

Sean  $A, B$  compatibles sin degeneración, y consideremos la siguiente notación pictórica donde arriba digo qué mido y abajo qué obtengo. Entonces

$$|\alpha\rangle \xRightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle \xRightarrow[b']{\text{Mido B}} |a'b'\rangle \xRightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle$$

Veo que midiendo alternadamente uno y otro no salgo del autoestado  $|K'\rangle$ .

En cambio si  $A, B$  son compatibles pero con degeneración en el autoestado  $a'$  [?] se tiene

$$|\alpha\rangle \xRightarrow[a']{\text{Mido A}} \sum_{i=1}^g C_{a'}^{(i)} |a'b'(i)\rangle \xRightarrow[b'(j)]{\text{Mido B}} C_{a'}^{(j)} |a'b'(j)\rangle \xRightarrow[a'(j)]{\text{Mido A}} C_{a'}^{(j)} |a'b'(j)\rangle$$

Al medir A y obtener  $a'$  no tengo determinado el estado del sistema (medir A no me da información). Me hallaré en una CL de autoestados correspondientes al autovalor degenerado  $a'$ . Al medir luego B selecciono uno de los  $|a'b'\rangle$  degenerados, el correspondiente a  $b'(j)$  pues B no está degenerado. Puedo volver a medir A pues el autoestado en que ha caído el sistema permanece incólume.

## Operadores y observables

Entonces siendo  $A$  un operador se dice que es un observable si el operador es hermítico, con lo cual sus autovalores serán reales, y si el conjunto de sus autoestados es una base. Usando la notación  $|a, i\rangle$  para indicar un autoestado y su degeneración, se tiene una descomposición espectral

$$A = \sum_{a,i} a |a, i\rangle \langle a, i|$$

que se puede asociar a una matriz como

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & & \\ & 2 & & \\ \dots & & 2 & \\ & & & 3 \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A = 1 |1, 1\rangle \langle 1, 1| + 2 (|2, 1\rangle \langle 2, 1| + |2, 2\rangle \langle 2, 2|) + \dots$$

El espacio de los operadores es  $N$ , finito. En el caso de  $N \rightarrow \infty$  hay que sumar algunas restricciones (me pregunto si tiene que ver con alguna

regularización para evitar infinitos). Se dice que  $A$  es normal si verifica  $[A, A^\dagger] = 0$ .

### 1.4.6 Postulados de la mecánica cuántica

1. El estado de un sistema, a tiempo fijo, lo definimos con un ket  $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$  (un vector en un espacio vectorial de Hilbert) y con  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ 
  - Dualidad (ir de  $|\ \rangle \leftrightarrow \langle \ |$ )
  - Superposición lineal
  - Productos
2. Asociamos a propiedades físicas (observables) operadores hermíticos  $\hat{A}$  que operan sobre los kets. Los autokets  $|a\rangle$  verifican :

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

y  $\{|a\rangle\}$  es base del espacio de kets. El operador se puede expresar como

$$A = \sum_{a,i} a |a, i\rangle \langle a, i|$$

3. Al medir una cantidad física representada por el observable  $\hat{A}$  obtenemos siempre un autovalor  $a'$ . Luego de medir, el estado del sistema es  $|a\rangle$ . Suponiendo un estado  $|\Psi\rangle$ , sobre el cual se mide  $A$  (obteniéndose  $a$ ), se tendrá que inmediatamente después el estado de  $|\Psi'\rangle$  según

$$|\Psi\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido } A} |\Psi'\rangle = P_a |\Psi\rangle = |a\rangle \langle a | \Psi \rangle = (\langle a | \Psi \rangle) |a\rangle$$

Llevé al sistema a un autoestado de  $\hat{A}$ . Ahora quizás deba ahora normalizar, es decir

$$|\Psi'\rangle_{\text{norm}} = \frac{\langle a | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle \Psi' | \Psi' \rangle}} |a\rangle$$

donde  $\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \langle \Psi | P_a P_a | \Psi \rangle = \langle \Psi | P_a | \Psi \rangle$ , siendo la última igualdad porque  $P_a$  es un proyector y su cuadrado es él mismo. El esquema de arriba representa la frase “proyectar sobre la base de autoestados”.

Dos posibilidades al medir. Si la probabilidad la nomenclamos como  $P(a)$  que es la probabilidad de medir el estado  $a$ , entonces

**No confundir la notación para proyector con la de probabilidad.**



- Sin degeneración:

$$P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2$$

- Con degeneración:

$$P(a) = \sum_i |\langle a, i | \psi \rangle|^2$$

4. Las transformaciones espaciales se generan por  $\mathbf{p}$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

5. La evolución temporal la realiza  $H$  (el hamiltoniano), que nos llevará a la ecuación de Schrödinger.

6. Rotaciones espaciales  $(\mathbf{L}, \mathbf{S})$  que son el momento angular y el spin. Pero el spin no tiene un análogo clásico.

**Extrañamente el punto 4 estaba vacío. Raro.**

### 1.4.7 Operador de dispersión

Se define la dispersión del operador  $A$  de acuerdo con

$$\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle A \rangle \mathbb{1}$$

la dispersión será nula cuando el sistema se halle en un autoestado del operador  $\hat{A}$ . Será no nula en caso contrario, cuando no se halle en un autoestado. Luego la dispersión cualitativamente nos dice “qué tan lejos” del autoestado nos hallamos.

$$\begin{aligned} \langle (\Delta A)^2 \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle \mathbb{1})^2 \rangle = \langle A^2 - 2A \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \\ &= \langle A^2 \rangle - 2A \langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned}$$

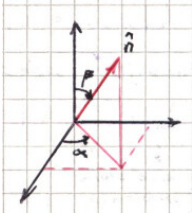
y la relación de dispersión generalizada

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

se probará [?].

#### EJEMPLO 4.1 Ejercicio 9 guía 1

Espacio de spines de dimensión 2. Base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Consideramos un versor angular con ángulos  $\alpha, \beta$  según se ilustra aquí abajo.



Del ejercicio 8 se sabe que

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{n}; +\rangle = \cos(\beta/2) |+\rangle + \sin(\beta/2) e^{i\alpha} |-\rangle$$

Luego, como  $\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\mathbf{S} \cdot \hat{n}; \pm\rangle = \pm \hbar/2 |\mathbf{S} \cdot \hat{n}; \pm\rangle$  se tiene

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |\langle S_x; + | \mathbf{S} \cdot \hat{n}; + \rangle|^2$$

donde usando que

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

nos conduce a

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2} |\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2) e^{i\alpha}|^2$$

y usando  $\alpha = 0, \beta = \gamma$  resultan en

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \sin \gamma).$$

En la parte b) se pide hallar  $\Delta S_x^2 = \langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2$ . Para ello usamos los hallazgos del ejercicio 2.

$$S_x = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|]$$

y luego

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} [|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|] = \frac{\hbar^2}{4} \mathbb{1}$$

Entonces,

$$\langle S_x^2 \rangle = [\cos(\gamma/2) \langle +| + \sin(\gamma/2) \langle -|] S_x^2 [\cos(\gamma/2) |+\rangle + \sin(\gamma/2) |-\rangle]$$

Se puede ver que

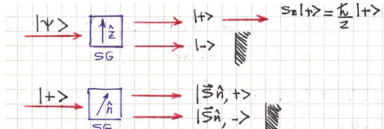
$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \gamma,$$

de manera que lo buscado es

$$(\Delta S_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \cos^2 \gamma.$$

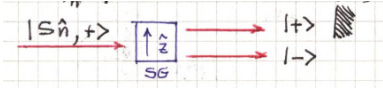
## EJEMPLO 4.2 Ejercicio 10

Se tiene la situación ilustrada en las figuras bajo estas líneas



Por otra parte, la probabilidad será

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right)_{\hat{n}} = |\langle S_n, + | + \rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$



Consiguientemente,

$$P\left(\frac{-\hbar}{2}\right)_{\hat{n}} = |\langle - | \mathbf{S} \cdot \hat{n}, + \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

y la intensidad final

$$I_f = I_0 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

### EJEMPLO 4.3 Ejercicio 12

Consideramos una base  $\{|a', b'\rangle\}$  ortonormal de autoestados de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . La idea es que  $[A, B] = C$  si  $C|\Psi\rangle = 0 \forall |\Psi\rangle$ . Entonces lo aplicamos a algo

$$(AB - BA)|\Psi\rangle = c|\Psi\rangle$$

$$A|a'b'\rangle = a'|a'b'\rangle \quad B|a'b'\rangle = b'|a'b'\rangle$$

### 1.4.8 Espectro continuo

Queremos pasar al continuo este formalismo. Pensamos en una única variable  $x$ , tal que

$$x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

y los kets de la base son los canónicos. En un rango  $[a, b]$  descomponemos una función  $f_N(x)$  en esta base

$$|f_N\rangle = f_N(x_1)|x^{(1)}\rangle + f_N(x_2)|x^{(2)}\rangle + \dots + f_N(x_N)|x^{(N)}\rangle,$$

o bien

$$|f_N\rangle = \sum_{i=1}^N f_N(x_i)|x^{(i)}\rangle$$

y queremos pasar al continuo utilizando  $N \rightarrow \infty$  y  $\Delta x \rightarrow 0$  con la constraint de que  $N\Delta x \rightarrow cte$ .

Hay observables con espectro de autovalores continuo. Nos podemos construir la siguiente tabla para comparar ambos escenarios.

Espectro discreto	Espectro continuo
$A  a'\rangle = a'  a'\rangle$	$Y  y'\rangle = y'  y'\rangle$
$\mathbb{1} = \sum_{a'}^N  a'\rangle \langle a' $	$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty}  y'\rangle \langle y'  dy'$
$\langle a'   a'' \rangle = \delta_{a' a''}$	$\langle y'   y'' \rangle = \delta(y' - y'')$
$\sum_{a'}^N \langle a'   a'' \rangle \langle a''   = \langle a'  $	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'' \langle y'   y'' \rangle \langle y''   = \langle y'  $
$\sum_{a'}^N  a'\rangle \langle a'   \alpha \rangle =  \alpha\rangle$	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'  y'\rangle \langle y'   \alpha \rangle =  \alpha\rangle$
$\sum_{a'}^N  \langle a'   \alpha \rangle ^2 = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'  \langle y'   \alpha \rangle ^2 = 1$
$\langle \beta   \alpha \rangle = \sum_{a'}^N \langle \beta   a' \rangle \langle a'   \alpha \rangle$	$\langle \beta   \alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy' \langle \beta   y' \rangle \langle y'   \alpha \rangle$

Debemos notar aquí que la delta correspondiente al caso discreto es la de Kronecker, mientras que la del caso continuo es la de Dirac.

### 1.4.9 Midiendo y otras representaciones. Función de onda

El operador que da la posición es  $\hat{x}$  de acuerdo con  $\hat{x} |x'\rangle = x' |x'\rangle$ . Se supone que es un conjunto completo. La representación de un cierto estado es

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle,$$

i.e. combinación lineal de todos los estados  $x'$  entre  $-\infty$  y  $\infty$ . No obstante puede ser que al medir, la física del instrumento o de la medida nos restrinja a una zona  $x \pm \Delta$ , de modo que

$$|\alpha\rangle = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle,$$

donde

$$\langle x' | \alpha \rangle dx'$$

es la densidad de probabilidad de hallar a la partícula entre  $(x - \Delta, x + \Delta)$  (en un  $dx$  en torno de  $x'$ ) y

$$|\langle x' | \alpha \rangle|^2$$

Acá ya vamos viendo que hay bases de posición, spin, momento, etc.

es la amplitud de probabilidad. En el formalismo de Schrödinger la densidad de probabilidad es la función de onda

$$\Psi_\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle$$

siendo este el vínculo entre la representación de Dirac y la función de onda, que nos permite ir de una a otra representación. La probabilidad de hallar al sistema en  $\alpha$  será

$$|\Psi_\alpha(x)|^2 = \Psi_\alpha(x) \Psi_\alpha^*(x) = |\langle x | \alpha \rangle|^2.$$

Asimismo,

$$\langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}.$$

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \int dx' \langle \beta | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle = \int dx' \Psi_\beta^*(x) \Psi_\alpha(x)$$

Para un elemento de matriz se tiene

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \langle \beta | x'' \rangle \langle x'' | A | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle$$

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \Psi_\beta^*(x'') \langle x'' | A | x' \rangle \Psi_\alpha(x')$$

y si  $A = f(\hat{x})$  entonces  $f(\hat{x}) | x' \rangle = f(x') | x' \rangle$  y

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \Psi_\beta^*(x'') f(x') \delta(x'' - x') \Psi_\alpha(x')$$

y entonces

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int dx' \Psi_\beta^*(x') f(x') \Psi_\alpha(x').$$

En forma análoga tenemos la representación de momento;

$$\hat{p} | p' \rangle = p' | p' \rangle \quad \langle p' | p'' \rangle = \delta(p' - p'') \quad |\alpha\rangle = \int dp' | p' \rangle \langle p' | \alpha \rangle$$

$$\Phi_\alpha(p') = \langle p' | \alpha \rangle.$$

En el anterior curso de física donde se hizo algo de mecánica cuántica (F4) todo se llevó a cabo en la representación de posición. El formalismo de Dirac permite movernos cómodamente entre cualesquiera de estas representaciones.

Para la generalización a 3 dimensiones se usan operadores vectoriales, que no son otra cosa que tres operadores escalares.

$$\mathbf{x} |\mathbf{x}'\rangle = \mathbf{x}' |\mathbf{x}'\rangle ,$$

así  $y |\mathbf{x}'\rangle = y' |\mathbf{x}'\rangle = y' |x', y', z'\rangle$  con

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|$$

y la delta de Dirac es

$$\langle \mathbf{x}'' | \mathbf{x}' \rangle = \delta^3(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') = \delta(x'' - x') \delta(y'' - y') \delta(z'' - z')$$

### 1.4.10 Operador de traslación

Este operador realiza una traslación infinitesimal. Se le pedirá

$$T_{(dx')} |\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle$$

siendo este requerimiento intuitivamente adecuado para una traslación. Nótese que  $dx'$  no es un operador, es el parámetro de la traslación.

Sobre un ket genérico será

$$T_{(dx')} |\alpha\rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle .$$

Cumplirá las propiedades

- Unitariedad:

$$T^\dagger T = T T^\dagger = \mathbb{1}$$

para que no varíe la probabilidad ante un cambio de coordenadas.

- Aditividad:

$$T_{(dx')} T_{(dx'')} = T_{(dx' + dx'')}$$

porque vale en mecánica clásica.

- Existencia de inverso:

$$T_{(dx')}^{-1} = T_{(-dx'')}$$

- Existencia de la identidad, el que no hace nada. Límite a  $\mathbb{1}$

$$T_{(dx')} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad dx' \rightarrow 0$$

**Tenía anotado en relación con la unitariedad el asunto de la conservación de la probabilidad.**

Se propone un<sup>1</sup>

$$T_{(dx')} = \mathbb{1} - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'$$

con  $\mathbf{K}$  un operador vectorial hermítico (notemos que  $\tau$  no es hermítico). Para ver quién es éste operador se considera

$$T_{(dx')}^\dagger = \mathbb{1} + i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}',$$

y luego, a orden lineal, es  $T_{(dx')}T_{(dx')}^\dagger \approx 1$  y

$$T_{(dx')}T_{(dx)} = 1 - i\mathbf{K} \cdot (d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}) = T_{(dx'+dx)}$$

Comparando con mecánica clásica, y viendo que allí  $\mathbf{p}$  origina las traslaciones, entonces identificamos  $\mathbf{K}$  con  $\mathbf{p}$ . Se postuló que

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\hbar}\mathbf{p},$$

y se ha visto a posteriori que esto funcionar.

Entonces pedimos que  $\mathbf{p}$  cuántico origine las traslaciones

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \quad T_{(dx')} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{P} \cdot d\mathbf{x}'$$

y así

$$T_{(dx')}|p'\rangle = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{P} \cdot d\mathbf{x}'\right)|p'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}p'dx\right)|p'\rangle$$

el autovalor no es real, pues  $T$  no es hermítico.

Partiendo del conmutador

$$xT_{(dx')} - T_{(dx')}x = dxT_{(dx')}$$

entonces

$$[x, T_{(dx')}] = dxT$$

y con  $dx \sim 0$  a orden uno (esto significa que tiramos los términos cuadráticos en  $dx$ ). Usando la anterior

$$[x, 1 - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'] = -i[x_i, K_j dx'_j] = -i[x_i, K_j]dx'_j = dx'_j$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{dx'_i}{dx'_j} = -i[x_i, K_j] = \delta_{ij}$$

Hay que ver el carácter vectorial de estas cosas.  $dx$  es vectorial en realidad, pero no un operador.

En la carpeta el conmutador da sin la  $T$ , así que acá parece estar mal.

<sup>1</sup>Es una especie de expansión de Taylor.

lo que conduce a

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij},$$

que es la incompatibilidad de posición y momento.

Pero las traslaciones en diferentes direcciones conmutan

$$[T_{(d\mathbf{x}')} , T_{(d\mathbf{x}'')} ] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0$$

$$T_{(d\mathbf{x}')} |\mathbf{p}'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \mathbf{P}' \cdot d\mathbf{x}\right) |\mathbf{p}'\rangle$$

donde recordamos que como el operador no es hermítico el autovalor no es necesariamente real.

Sumando infinitas traslaciones infinitesimales tenemos una traslación finita,

$$T_{(\Delta x')} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} p \frac{\Delta x'}{N}\right)^N = e^{-i/\hbar p \Delta x'}$$

que en tres dimensiones será

$$T_{(\Delta \mathbf{x}')} = e^{-i/\hbar \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}'},$$

donde se hace  $dx' \equiv \Delta x'/N$  para el paso al continuo.

#### EJEMPLO 4.4 Ejercicio 15

Las partes a), b), c) están hechas en el libro de Sakurai. La dispersión resulta  $\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  lo que es fácil de ver haciendo explícitamente la operación para un estado  $\psi$ . Se considera

$$\Delta A = A - \langle A \rangle_\psi.$$

Si A, B son observables, entonces

$$\langle \Delta A^2 \rangle_\psi \langle \Delta B^2 \rangle_\psi \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle_\psi|^2.$$

#### EJEMPLO 4.5 Ejercicio 16

Tenemos  $\langle \Delta S_x^2 \rangle = \langle \Delta S_x^2 \rangle - \langle \Delta S_x \rangle^2$  con  $|\psi\rangle = |+\rangle$  y escribimos  $S_x$  en la base de autoestados

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +|),$$

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} (|+\rangle \langle +| + |- \rangle \langle -|) = \frac{\hbar^2}{4} \mathbb{1}$$

y como es un Stern-Gerlach en  $\hat{x}$  y le mandamos partículas en  $\hat{z}$ ,

$$\langle S_x \rangle = \langle + | S_x | + \rangle = 0 \quad \langle S_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$



y de la misma manera

$$\langle S_y \rangle = 0 \quad \langle S_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

Si queremos ahora probar la relación de incerteza generalizada, será

$$\frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4} |\langle S_z \rangle|^2 = \frac{\hbar^4}{16},$$

y luego

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle_{|+\rangle} \langle (\Delta S_y)^2 \rangle_{|+\rangle} = \frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle_{|+\rangle}|^2,$$

vemos que se verifica la igualdad en la relación de incerteza.

#### EJEMPLO 4.6 Ejercicio 15 parte d)

Se tiene

$$\langle x' | \alpha \rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} e^{i \langle p \rangle x' / \hbar - (x' - \langle x \rangle)^2 / (4d^2)}$$

y se pide

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

Son los valores medios

$$\langle x \rangle = \langle \alpha | x | \alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \alpha | x | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle dx' = \int_{-\infty}^{\infty} x' \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle dx'$$

y

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \alpha | p | \alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p' \langle \alpha | p' \rangle \langle p' | \alpha \rangle dp' = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p' \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | p' \rangle \langle p' | x'' \rangle \langle x'' | \alpha \rangle dp' dx' dx'' \end{aligned}$$

donde hemos introducido identidades, continuas, en estados de posición. Reacomodando las integraciones,

$$\langle p \rangle = \int \int dx' dx'' \frac{\psi^*(x') \psi(x'')}{2\pi\hbar} \int dp' p' e^{ip/\hbar(x' - x'')}$$

y haciendo aparecer explícitamente una derivada espacial (ayudados por la exponencial)

$$\langle p \rangle = \int \int dx' dx'' \frac{\psi^*(x') \psi(x'')}{2\pi\hbar} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \int dp' e^{ip/\hbar(x' - x'')}.$$

Luego, como la expresión de la delta de Dirac es

$$\delta(x' - x'') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' e^{ip'/\hbar(x' - x'')}$$

se tiene

$$\langle p \rangle = \int \int dx' dx'' \frac{\hbar}{i} \psi^*(x') \psi(x'') \delta(x' - x'') = \int dx' \psi^*(x') \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi(x').$$

### 1.4.11 $p$ en la representación $x$

Parece que la ecuación

$$[x, T_{(dx')}] = dx',$$

que se escribió anteriormente, no es exacta. La carpeta no da más información al respecto. Se verifica en realidad que

$$[x, T_{(dx')}] |x'\rangle = dx' T_{(dx')} |x'\rangle,$$

y usando la equivalencia de  $T$  a orden  $dx'^2$ , podemos escribir

$$\left(1 - i \frac{p \Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \int dx' T_{(dx')} |x'\rangle \langle x' | \alpha\rangle$$

o bien, a primer orden siempre,

$$T_{(\Delta x)} |\alpha\rangle = \int dt' T |x'\rangle \langle x' | \alpha\rangle = \int dt' |x' + \Delta x\rangle \langle x' | \alpha\rangle = \int dt' |x'\rangle \langle x' - \Delta x | \alpha\rangle$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \approx \frac{-\langle x' - \Delta x | \alpha\rangle + \langle x' | \alpha\rangle}{\Delta x}$$

y entonces

$$-\frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x + \langle x' | \alpha\rangle = \langle x' - \Delta x | \alpha\rangle$$

de manera que

$$T |\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \left( \langle x' | \alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x \right) = \int dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha\rangle - \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar} p \Delta x\right) |\alpha\rangle = |\alpha\rangle - \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

$$\frac{i}{\hbar} p \Delta x |\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

y así

$$p |\alpha\rangle = -i\hbar \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle$$

de modo que usando este resultado se tienen

$$\langle x'' | p | \alpha\rangle = -i\hbar \int dx' \langle x'' | x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle$$

**Ahora se entiende el entuerto con la  $T$  que sobraba.**

$$\begin{aligned}\langle x'' | p | \alpha \rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'' | \alpha \rangle \\ \langle \beta | p | \alpha \rangle &= \int dx' \langle \beta | x' \rangle (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle \\ \langle \beta | p | \alpha \rangle &= \int dx' \Psi_{\beta}^*(x') (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \Psi_{\alpha}(x')\end{aligned}$$

de lo que se deduce

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

que es el resultado más importante de la sección. En la representación de  $x$ , el operador  $p$  es proporcional a la derivada.

### 1.4.12 Cambio entre representaciones $x$ y $p$

Supongamos ahora que  $\alpha$  es un autoestado de  $p$ .

$$\langle x' | \hat{p} | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle,$$

esta es la función de onda. Asimismo,

$$\langle x' | \hat{p}^n | \alpha \rangle = -(i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \langle x' | \alpha \rangle.$$

Para dos estados

$$\langle \alpha | \hat{p} | \beta \rangle = \int dx' \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | \hat{p} | \beta \rangle = \int dx' \psi_{\alpha}^*(x') \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \right) \psi_{\beta}(x').$$

**Esto es un menudeo,  
meter prosa entre medio.**

Entonces, se puede transformar entre  $x$  y  $p$

$$\langle x' | \hat{p} | p' \rangle = -i\hbar \int dx'' \langle x' | x'' \rangle \frac{\partial}{\partial x''} \langle x'' | p' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | p' \rangle$$

y entonces,

$$p' \langle x' | p' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | p' \rangle,$$

que es una ecuación diferencial para  $\langle x' | p' \rangle$ . Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\langle x' | p' \rangle} \partial \langle x' | p' \rangle &= \int \frac{ip'}{\hbar} \partial x' \\ \log \langle x' | p' \rangle &= \frac{ip'x'}{\hbar} + Cte.\end{aligned}$$

Ahora escribimos la delta e integramos,

$$\int dp' \langle x' | p' \rangle \langle p' | x'' \rangle = \langle x' | x'' \rangle = \delta(x - x')$$

$$\int dp' e^{ip'/\hbar(x'-x'')} |N|^2 = \delta(x - x')$$

donde usamos la integral del handbook ver Apéndice I X

$$|N| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

$$\langle x' | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip'x'/\hbar}$$

Entonces, los autoestados de  $p$  son ondas libres. Toda esta información la obtuvimos de suponer que  $p$  es el generador de las traslaciones. Con este escalar podemos cambiar entre representaciones. Usando esto podemos ver que  $\Psi_\alpha(x')$  y  $\Phi_\alpha(p')$  son transformadas de Fourier la una de la otra.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{iap(x-x')} = \frac{2\pi}{a} \delta(x - x')$$

Suponiendo que queremos pasar entre representaciones dado un ket  $|\alpha\rangle$ , tenemos

$$\psi_\alpha(x') = \langle a' | \alpha \rangle \quad \langle p' | \alpha \rangle = \phi_\alpha(x')$$

y el cambio siempre implica escribir un “uno” apropiadamente,

$$\langle a' | \alpha \rangle = \int dp' \langle x' | p' \rangle \langle p' | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp' e^{ip'x'/\hbar} \phi_\alpha(p') = \psi_\alpha(x')$$

y entonces, consecuentemente,

$$\phi_\alpha(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' e^{ip'x'/\hbar} \psi_\alpha(x').$$

Notemos que la mecánica cuántica que desarrollamos ya sabe que  $\phi$  y  $\psi$  son transformadas de Fourier entre sí, sin utilizar la ecuación de Schrödinger.

#### EJEMPLO 4.7 Ejercicio 18

$S_y$  es un operador complejo. Luego

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, dependiendo de la base que se utilice resultará

$$S_y|_{\text{base}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**EJEMPLO 4.8 Ejercicio 20**

Se define  $f(A)$  de modo que si  $f(x) = \sum_j c_j x^j$  entonces se toma

$$f(A) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j A^j,$$

luego, si nos hallamos en autoestado de  $A$  estaremos entonces en autoestados de  $f(A)$ .

Si es  $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ , será

$$A^j|a'\rangle = A^{j-1}A|a'\rangle = A^{j-1}a'|a'\rangle = a'^j|a'\rangle.$$

El elemento de matriz

$$\langle b''|f(A)|b'\rangle = \sum_{a'} \langle b''|f(A)|a'\rangle \langle a'|b'\rangle = \sum_{a'} f(a') \langle b''|a\rangle \langle a'|b'\rangle$$

y los dos últimos brackets son los datos conocidos. La parte b) es igual pero para el caso continuo.

**1.4.13 Corchetes de Poisson versus conmutadores**

Hay una equivalencia entre corchetes de Poisson y conmutadores, a saber:

$$[A, B]_{\text{classic}} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]$$

o

$$[A, B]_{\text{classic}} = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

Esta relación fue planteada por Dirac, quien vio que se podían deducir algunas cosas de la mecánica cuántica desde la mecánica clásica pasando de corchetes a conmutadores.

## Capítulo 2

---

### Dinámica cuántica

Queremos ver la evolución temporal de los kets. Para ello utilizaremos cierta convención. Un ket dependerá del tiempo lo cual se indicará con

$$|\alpha, t_0, t\rangle,$$

notación que refiere al estado  $\alpha$  que partió en  $t_0$  al tiempo  $t$ . Luego  $|\alpha, t = t_0\rangle \equiv |\alpha\rangle$ . Pictóricamente

$$|\alpha, t_0\rangle \xrightarrow[\text{evoluciona}]{} |\alpha, t_0, t\rangle$$

Emplearemos para ello un operador de evolución temporal  $U_{(t,t_0)}$  al cual le pediremos que realice la evolución según

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U |\alpha, t_0\rangle$$

Entonces, un elemento de matriz  $\langle b | U_{(t,t_0)} | a \rangle$  implica la probabilidad (amplitud) de que se tenga componente de  $b$  en el tiempo  $t$  del sistema que estamos considerando. El operador de evolución tendrá las propiedades

- Unitariedad

$$\langle \alpha, t_0, t | \alpha, t_0, t \rangle = 1 \quad \forall t$$

$$\langle \alpha, t_0 | U^\dagger U | \alpha, t_0 \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$$

para conservación de la probabilidad. Tiene que ser unitario.

- Linealidad

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0$$

- Límite a  $\mathbb{1}$  (identidad)

$$U_{(t,t_0)} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad t \rightarrow t_0$$

o bien

$$U_{(t_0+dt,t_0)} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad dt \rightarrow 0$$

Una forma más general de escribir un  $U$  unitario es  $U = e^{i\eta A}$ . De aquí se ve más fácil que como  $e^{i\eta A} e^{-i\eta A^\dagger} = 1$  una transformación unitaria infinitesimal es  $U = 1 + i\eta A$  y  $-dt/\hbar = \eta$ .

Se propone entonces (infinitesimalmente) un

$$U_{(t+dt,t)} = \mathbb{1} - i \Omega dt$$

con  $\Omega$  hermítico. Comparando con clásica vemos que  $H$  origina la evolución temporal, entonces identificamos  $\Omega$  con  $H$ , del modo  $\Omega = H/\hbar$  así que

$$U_{(t+dt,t)} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H dt.$$

**El hamiltoniano  $H$  es un operador ahora.**

De esta forma

$$U_{(t+dt,t_0)} = U_{(t+dt,t)} U_{(t,t_0)} = \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H dt \right) U_{(t,t_0)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{U_{(t+dt,t_0)} - U_{(t,t_0)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H U_{(t,t_0)}$$

y entonces

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H U$$

que es la ecuación para  $U_{(t,t_0)}$ . No podemos utilizar los métodos que usamos anteriormente porque en  $U = N e^{i \int dt' H(t)/\hbar}$  [depende del tiempo?]. Supongamos que es  $H \sim \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}(\theta)$ , se tiene en  $t = 0$  es  $\mathbf{r}(t) = \hat{z}$  y en  $t = 5$  seg. es  $\mathbf{r}(t) = \hat{y}$ . Tenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_{(t,t_0)} |\alpha, t_0\rangle = H U_{(t,t_0)} |\alpha, t_0\rangle,$$

que nos conduce a la ecuación de Schrödinger para kets

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle$$

donde el inconveniente es que  $H = H(t)$ .

El concepto se ilustra en la figura siguiente

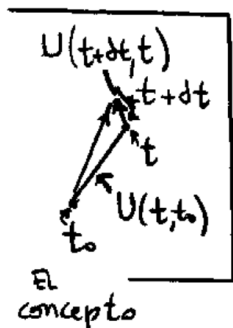


Figura 0.1

## 2.1 Casos sencillos de solución de $U(t, t_0)$

- Supongamos  $H \neq H(t)$ , entonces

$$U(t, t_0) = e^{-i/\hbar H(t-t_0)}$$

- Sea  $H = H(t)$ , entonces

$$U(t, t_0) = e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t H(t') dt'}$$

y la integral puede hacerse una vez conocida la expresión de  $H(t)$ .

- Sea  $H = H(t)$  con  $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$  entonces

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \times \\ \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n)$$

y esta es la serie de Dyson (del físico Freeman Dyson(.).) Esta es la solución formal general para el caso 3.

El problema que suscita es debido a que si  $H$  a diferentes tiempos no conmuta no podemos poner la exponencial en serie de potencias. En realidad  $\exp(\square)$  tiene sentido sólo si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \square^n$$



tiene sentido; es decir, si no surgen ambigüedades al tomar la potencia  $n$ -ésima del operador  $\square$ .

Para el caso 1 (pensamos una especie de serie de Taylor, que es un modo general de encarar este tipo de problemas de cosas no bien definidas) es simplemente

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} = 1 - i\frac{H}{\hbar}(t-t_0) + \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{H\Delta t}{\hbar}\right)^2 + \dots + \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{H\Delta t}{\hbar}\right)^n,$$

y por otra parte

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H - i\frac{H^2}{\hbar^2} \Delta t + \dots$$

y término a término coinciden; entonces probamos que la solución vale.

Para el caso 2, donde los hamiltonianos a diferentes tiempos conmutan entre sí, es decir  $[H(t_1), H(t_2)] = 0$  la solución es

$$U(t, t_0) = e^{i/\hbar \int_{t_0}^t H(t') dt'}$$

Esto no es una boludez. Al desarrollar Taylor la exponencial surge un problema

Si no conmutan los operadores no sé cómo armar el cuadrado.

$$A^2 = A(t)A(t'') \text{ o bien } A^2 = A(t'')A(t)$$

$$\left(\int H(t')dt'\right) \left(\int H(t'')dt''\right) \neq \left(\int H(t'')dt''\right) \left(\int H(t')dt'\right)$$

puesto que al operar es

$$\int dt' dt'' H(t')H(t'') \neq \int dt' dt'' H(t'')H(t')$$

pues  $[H(t'), H(t'')] \neq 0$ . En el caso 2  $(\int_{t_0}^t H(t')dt')^n$  no tiene problemas puesto que está provista la conmutatividad.

### 2.1.1 Soluciones útiles

La solución que sirve es

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U(t, t_0) |\alpha\rangle$$

La idea es escribir el  $|\alpha\rangle$  del sistema y hallar un operador que conmute con el hamiltoniano y en cuya base escribo  $|\alpha\rangle$ ,

$$|\alpha\rangle = \sum C_{a'} |a'\rangle \quad H |\alpha\rangle = \sum E_{a'} C_{a'} |a'\rangle$$

**El operador  $\square$  no se deja poner sombreros, quiere andar con la cabeza descubierta**

y trabajaremos con una solución útil ahora.

Primeramente conseguimos un  $\hat{A}$  tal que  $[A, H] = 0$  y entonces (estoy considerando  $H \neq H(t)$ )

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle,$$

luego

$$U(t, t_0) |\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

con  $\hat{H}$  y  $\hat{A}$  conmutan se tiene

$$\hat{H} |a'\rangle = E_{a'} |a'\rangle \quad \hat{A} |a'\rangle = a' |a'\rangle$$

Entonces operamos con el  $H$  para

$$U(t, t_0) = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' |$$

y así (quiero saber cómo trabaja en el tiempo  $|\alpha\rangle$ ), le aplico el operador evolución

$$U(t, t_0) |\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle = \sum_{a''} \sum_{a'} c_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a''\rangle \langle a'' | a' \rangle$$

o bien

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} c_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle,$$

de manera que comparando con

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle |a'\rangle$$

El coeficiente es el mismo pero le hemos sumado una fase  $\exp(-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar)$  que no es global.

### 2.1.2 Evolución de valores de expectación

Recordemos primeramente que los autoestados no evolucionan. Luego

$$|\alpha\rangle = |a'\rangle \quad \rightarrow \quad |\alpha, t\rangle = |a', t\rangle = e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle$$

La fase es global y no tiene sentido físico (no cambia el valor de expectación, por ejemplo) Es considerar una autoestado [?]. La podemos descartar (setear igual a uno)

$$\langle a', t | B | a', t \rangle = \langle a' | e^{i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} B e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} | a' \rangle = \langle a' | B | a' \rangle$$

El valor de expectación de un operador respecto a un autoestado no varía. Se simplifican las fases y en el valor de expectación no me entero de ellas. Para un estado que no es necesariamente autoestado

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t \rangle = \langle a'' | \sum_{a''} \langle a'' | \alpha \rangle^* e^{i\frac{E_{a''}}{\hbar}(t-t_0)} B \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} | a' \rangle$$

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t \rangle = \sum_{a', a''} C_{a''}^* C_{a'} e^{i\frac{E_{a''} - E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} \langle a'' | B | a' \rangle$$

donde  $(E_{a''} - E_{a'})/\hbar$  es la llamada frecuencia de Bohr y vemos que la fase global depende de los índices de las sumatorias; entonces habrá términos de interferencia.

$$C_{a''}^* = \langle \alpha, t_0 | a'' \rangle \quad C_{a'} = \langle a' | \alpha, t_0 \rangle$$

El valor de expectación de un operador respecto a un estado general tiene una fase no global que produce términos de interferencia.

Sólo en el caso en que  $B$  conmute con  $H$  ( $B$  diagonal) se dará que la fase no interviene, porque pierdo una sumatoria merced a una delta de Kronecker que aparece.

### 2.1.3 Relaciones de conmutación

Algunas propiedades de los conmutadores

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, B \cdot C] = B[A, C] + [A, B]C$$

Identidad de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

**Acá no es boca + caballo  
puesto que no conmutan.**

$$i\hbar[A, B]_{\text{classic}} = [A, B]$$

donde  $[\cdot, \cdot]_{\text{classic}}$  es el corchete de Poisson. Las relaciones de conmutación fundamentales son

$$[x_i, x_j] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

a las que podemos sumar

$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \quad [p, G(x)] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial x}$$

El primero se hace de la manera usual; tomando una serie de potencias para  $f$ . Consideremos por ejemplo

$$[x, p^2] = p[x, p] + [x, p]p = 2i\hbar p.$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

### 2.1.4 La ecuación de Schrödinger

Habíamos llegado a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle,$$

donde supusimos que el hamiltoniano no depende del tiempo, y es el clásico. Caso típico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Puedo meter un bra  $\langle x' |$  que no depende del tiempo y entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' | \alpha, t_0, t \rangle = \langle x' | H | \alpha, t_0, t \rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(x', t) = \langle x' | \frac{p^2}{2m} + V(x) | \alpha, t_0, t \rangle$$

de manera que resulta la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(x', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_\alpha(x', t) + V(x) \Psi_\alpha(x', t).$$

Ahora la función de onda depende del tiempo.

Si suponemos que  $|\psi\rangle$  es autoestado de  $H$  entonces

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(t_0)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi(t_0)\rangle,$$

**Acá usamos que sabemos cómo operan  $p$  y  $p^2$ .**

y entonces el lhs de la ecuación de Schrödinger pasa a ser  $E\Psi_\alpha(x', t)$ . Si no fuera autoestado, sino combinación lineal de autoestados, entonces podemos escribir

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha, t_0\rangle = \sum_m e^{-iHt/\hbar} |m\rangle \langle m | \alpha, t_0 \rangle.$$

**Anoté que en la página de la materia están los postulados en un pdf. Notemos que  $p = -i\hbar\nabla$ .**

### EJEMPLO 1.1 Ejercicio guía 2

Parte a)

$$H = -\frac{e}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -\frac{eB}{mc} S_z = -\omega S_z$$

donde suponemos que el campo es en  $\hat{z}$ . Entonces

$$[H, S_z] = 0 \quad [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

como es nulo el conmutador, tienen una base común de autokets. Será  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  y se pueden escribir

$$S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle \quad H |\pm\rangle = -mp \frac{\omega\hbar}{2} |\pm\rangle.$$

Parte b)

En  $t = 0$  es

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

de modo que

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\omega t/2} |+\rangle + e^{-i\omega t/2} |-\rangle \right]$$

Parte c)

Quiero medir en un instante posterior

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right)_{\hat{x}} = |\langle S_x; + | \alpha; t \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2}) \right|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

y consecuentemente

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right)_{\hat{y}} = \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

de manera que como hay solamente dos estados posibles la probabilidad suma 1.

Parte d)

Se tiene

$$\langle S_x \rangle = \langle \alpha(t) | S | \alpha(t) \rangle$$

con la expresión para  $|\alpha(t)\rangle$ . Se puede hacer directamente o utilizando la probabilidad, que ya fue calculada previamente. La idea es que como

$$\langle A \rangle = \sum_a a |\langle a | \alpha \rangle|^2,$$

entonces

$$\frac{\hbar}{2} \left( \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right)$$

y luego  $\langle S_x \rangle = \hbar/2 \cos(\omega t)$ . Para  $S_y$  se puede operar con las matrices de Pauli, pues  $S_y = \hbar/2 \sigma_y$  con

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

**Una fase global sale de todo el ket y muere en el valor absoluto.**

En general hay que descomponer en autoestados, como  $|+\rangle = (10)^t$  y el  $|-\rangle = (01)^t$  de manera que  $\langle S_x \rangle = \hbar/2 \sin(\omega t)$ . Por otra parte, como tengo un medio de probabilidad up y down, será  $\mathbf{S}_z = 0$ .

Parte e)

Sea  $n(t)$  tal que  $\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\alpha, t\rangle = |\alpha, t\rangle$ . Del ejercicio 8 tomamos

$$\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle$$

y

$$|\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} |-\rangle$$

de modo que

$$|\alpha, t\rangle = \frac{e^{i\omega t/2}}{\sqrt{2}} [|+\rangle + e^{-i\omega t} |-\rangle] \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-i\omega t} |-\rangle)$$

donde me olvido de la exponencial afuera porque es una fase global y no aporta a la probabilidad. Comparamos el resultado final con lo del ejercicio 8 y por inspección obtenemos que  $\beta = \pi/2$  y  $\alpha = -\omega t$ .

### 2.1.5 Representación de Heisenberg

Los kets y los operadores no tienen sentido físico, pero sí los valores de expectación

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle,$$

puesto que son lo que se mide. Entonces cualquier física podrá modificar los primeros pero debe conservar los valores de expectación. Así tenemos dos representaciones posibles:

Schrödinger	Heisenberg
$ \alpha\rangle \rightarrow U  \alpha\rangle$	$ \alpha\rangle \rightarrow  \alpha\rangle$
$A \rightarrow A$	$A \rightarrow U^\dagger A U$
$ a'\rangle \rightarrow  a'\rangle$	$ a'\rangle \rightarrow U^\dagger  a'\rangle$

Así vemos que en Schrödinger los kets evolucionan y los operadores permanecen fijos; al igual que los autoestados. En cambio en Heisenberg los kets no evolucionan pero sí lo hacen los operadores y los autoestados.

Deben notarse que:

1. Los productos internos no cambian con el tiempo

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | U^\dagger U | \alpha \rangle$$

2. Los valores de expectacion son los mismos en ambos esquemas

$$\langle \alpha, t | A | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, t | U^\dagger A U | \alpha, t \rangle = \begin{cases} \langle A \rangle^{(H)} \\ \langle A \rangle^{(S)} \end{cases}$$

de lo cual se deduce que

$$\langle A \rangle^{(S)} = \langle A \rangle^{(H)} \quad A(t)^H = U(t)^\dagger A^S U(t)$$

El operador  $\hat{A}$  en Schrödinger no depende explícitamente del tiempo. La idea es que le “pegamos” a los operadores la evolución temporal de los kets.

$$(\langle \alpha, t_0 | U^\dagger) A^{(S)} (U | \alpha, t_0 \rangle) = \langle \alpha, t_0 | U^\dagger A^{(S)} U S | \alpha, t_0 \rangle$$

pero a  $t = t_0$  las representaciones coinciden,

$$|\alpha, t_0, t_0 \rangle^{(S)} = |\alpha \rangle^{(H)}$$

y se separan a medida que el tiempo transcurre. Se tiene

$$U(t, t_0) = U(t) = e^{iHt/\hbar},$$

donde este  $H$  no depende del tiempo.

### EJEMPLO 1.2 Ejemplito

Con el operador de traslación sería algo como

$$|\alpha \rangle^{(S)} \rightarrow \left[ 1 - \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar} \right] |x \rangle^{(S)}$$

$$\mathbf{X}^{(S)} \rightarrow \mathbf{X}^{(S)}$$

Representación de âpple (manzana?)

$$|\alpha \rangle^{(A)} \rightarrow |\alpha \rangle^{(A)}$$

$$\mathbf{X}^{(A)} \rightarrow U^\dagger \mathbf{X}^{(A)} U = \left[ 1 + \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar} \right] \mathbf{X} \left[ 1 - \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar} \right] = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$$

y para ambas representaciones es

$$\langle \mathbf{X} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{X} \rangle + \langle d\mathbf{X} \rangle$$

### EJEMPLO 1.3 Ejercicio 21

Punto a)

$$[x, f(p_x)]_{\text{Poisson}} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x} \frac{\partial F(p_x)}{\partial x} = \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x}.$$

Punto b) donde  $x, p_x$  son operadores. Entonces hay que evaluar

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}],$$

y como conocemos el conmutador de  $x, p_x$  se utiliza una serie de potencias, es decir

$$[x, f(p_x)] = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial p_x^n} [x, p_x^n],$$

y

$$[x, p_x^n] = [x, p_x p_x^{n-1}] = p_x [x, p_x^{n-1}] + [x, p_x] p_x^{n-1} = p_x [x, p_x^{n-1}] + i\hbar p_x^{n-1},$$

y aplicando inducción matemática se ve que llegamos a

$$[x, p_x^n] = i\hbar n p_x^{n-1},$$

de modo que

$$[x, f(p_x)] = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial p_x^n} i\hbar n p_x^{n-1} = \sum_n [\dots] = i\hbar \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x}$$

puesto que es el desarrollo en serie de la derivada. Finalmente,

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}] = -a e^{ip_x a/\hbar}.$$

Punto c) se tiene que  $e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle$  es autoestado de  $\hat{x}$ , donde  $\hat{x} |x'\rangle = x' |x'\rangle$ . Luego, usando el resultado anterior

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}] |x'\rangle = -a e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle,$$

de lo cual se deduce, expandiendo, que

$$\hat{x} e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle = (x' - a) e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle,$$

o bien

$$\hat{x} |x'\rangle = (x' - a) |x'\rangle,$$

de manera que el operador  $e^{ip_x a/\hbar}$  es el operador de traslación pues

$$e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle = |x' - a\rangle.$$

## La ecuación de Heisenberg

Queremos llegar a una ecuación para trabajar en la representación de Heisenberg.

$$A^H = U^\dagger A^S U \quad \frac{\partial A^H}{\partial t} = \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} A^S U + U^\dagger A^S \frac{\partial U}{\partial t} + U^\dagger A^S \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H U; \quad \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{-i\hbar} U^\dagger H$$

$$(H U)^\dagger = U^\dagger H^\dagger = U^\dagger H$$

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar} U^\dagger H A^S U + U^\dagger \underbrace{\frac{\partial A^S}{\partial t}}_{=0} U + U^\dagger A^S \frac{1}{i\hbar} H U$$



pues  $A^S$  no depende explícitamente del tiempo (si )

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} (U^\dagger H U U^\dagger A^S U - U^\dagger A^S U U^\dagger H U) = \frac{1}{i\hbar} (-H A + A H)$$

y llegamos a la ecuación de Heisenberg

$$\frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H^{(H)}]$$

si  $A^{(H)}$  conmuta con el  $H^{(H)}$ , entonces  $A^{(H)}$  es una cantidad conservada (una constante de movimiento). En ese caso el operador no depende del tiempo y entonces  $A^{(H)} = A^{(S)}$ .

## Evolución de autoestados

$$A^S |a'\rangle^S = a' |a'\rangle^S,$$

aplico un  $U^\dagger$  a ambos lados y entonces

$$U^\dagger A^S U U^\dagger |a'\rangle^S = a' U^\dagger |a'\rangle^S$$

los  $a'$  no dependen de la representación porque tienen significado físico. Entonces los  $|a'\rangle$  evolucionan

$$A^H (U^\dagger |a'\rangle^S) = a' (U^\dagger |a'\rangle^S)$$

$$\begin{aligned} |a', t\rangle^H &= U^\dagger |a'\rangle^S & \frac{\partial}{\partial t} (|a', t\rangle^H) &= \frac{\partial}{\partial t} (U^\dagger |a'\rangle^S) \\ \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle^H &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger |a'\rangle^S &= -\frac{1}{i\hbar} H U^\dagger |a'\rangle^S \end{aligned}$$

puesto que recordemos, nota importante,

$$H^H = U^\dagger H^S U = U^\dagger U H^S = \mathbb{1} H^S = H^S$$

entonces  $H$  es el mismo en ambas puesto que  $\hat{U} = \hat{U}(\hat{H})$  y  $[U, H] = 0$ .

De esta forma los autoestados evolucionan al revés

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle^H = -H |a', t\rangle^H$$

Podemos ver de otro modo la equivalencia, usando el proyector para el operador de Schrödinger,

$$A^S = \sum_{a'} a' |a'\rangle^S \langle a'|^S$$

y entonces  $A^H$  será

$$A^H = U^\dagger \sum_{a'} A^S |a'\rangle \langle a'| U = \sum_{a'} a' U^\dagger |a'\rangle \langle a'| U$$

pero

$$A^H = \sum_{a'} A^H |a', t\rangle \langle a', t| \equiv \sum_{a'}$$

y luego se tiene que

$$A^H = \sum_{a'} a' |a', t\rangle \langle a', t| \equiv \sum_{a'} a' (U^\dagger |a'\rangle) (\langle a'| U),$$

donde por inspección resulta

$$|a', t\rangle = U^\dagger |a'\rangle^S.$$

	Schrödinger	Heisenberg
$ \alpha\rangle$	evolucionan	no evolucionan
$A$	no evolucionan	evolucionan
$ a'\rangle$	no evolucionan	evolucionan

## Coefficientes

Los coeficientes en Schrödinger y en Heisenberg son

$$C_{a'}^S(t) = {}^S \langle a' | \alpha, t_0, t \rangle^S = {}^S \langle a' | (U | \alpha, t_0 \rangle)$$

$$C_{a'}^H(t) = {}^H \langle a', t | \alpha, t_0 \rangle^H = ({}^S \langle a' | U) | \alpha, t_0 \rangle.$$

Entonces en Schrödinger es

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha, t_0, t \rangle = \sum_{a'} \overbrace{\langle a' | \alpha, t_0, t \rangle}^{C_{a'}(t)} |a'\rangle$$

mientras que en Heisenberg es

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} |a', t\rangle \langle a', t | \alpha, t_0 \rangle = \sum_{a'} \overbrace{\langle a', t | \alpha, t_0 \rangle}^{C_{a'}(t)} |a', t\rangle$$

Los coeficientes en las expresiones son iguales como corresponde a todo magnitud que tiene sentido físico, pues  $|c_a(t)|^2$  es la probabilidad. El coeficiente es el mismo en ambas representaciones.

Tampoco  $a'$  puede depender de la representación porque tiene sentido físico.

### 2.1.6 Teorema de Ehrenfest

Para una partícula libre, es  $H = p^2/(2m)$  y

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[P_i, H] = 0,$$

el momento lineal se conserva. Se tiene

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}[x_i, \frac{p_i^2}{2m}] = \frac{p_i}{m}$$

de manera que  $p(t) = p(0)$  es constante de movimiento,

$$x^{(H)} = x(0) + \frac{p(0)}{m}t$$

y se tiene (el operador  $x$  aumenta con el tiempo en la representación de Heisenberg)

$$[x(t), x(0)] = -\frac{i\hbar}{m}t$$

que es decir que es un operador que no conmuta a  $t$  diferentes. La dispersión aumenta cuadráticamente en el tiempo

$$\langle (\Delta X_i)^2 \rangle_t - \langle (\Delta X_i)^2 \rangle_{t=0} \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

Esto vale para cualquier estado que utilice para calcular los valores medios.

Para una partícula sometida a potencial

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = \frac{1}{i\hbar}[p, V(x)] = \frac{1}{i\hbar} \left( -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

de modo que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

tenemos una ecuación newtoniana. Entonces,

$$p = m \frac{dx}{dt} \quad \frac{dp}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

donde estamos usando

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [A^H, H]$$

Es necesario remarcar que relaciones como  $[x, p] = i\hbar$  son para operadores en la picture de Schrödinger, donde los operadores no cambian en el tiempo. Estamos en efecto haciendo  $[x(0), p(0)] = i\hbar$

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha, t_0 \left| m \frac{d^2x}{dt^2} \right| \alpha, t_0 \right\rangle &= - \left\langle \alpha, t_0 \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \alpha, t_0 \right\rangle \\ m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \alpha, t_0 | x^H | \alpha, t_0 \rangle &= - \left\langle \alpha, t_0 \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \alpha, t_0 \right\rangle \end{aligned}$$

y entonces el teorema de Ehrenfest es

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x^{(s)} \rangle = - \left\langle \frac{\partial V^{(s)}}{\partial x} \right\rangle$$

los valores de expectación son iguales en ambas representaciones. Claramente no podía depender de la representación porque los valores medios son cosas físicas. Se ve también que el  $\hbar$  desaparece debido a que el centro del paquete se mueve aproximadamente en forma clásica y se toma el valor medio.

#### EJEMPLO 1.4 Ejercicio 24

Parte a). Integramos

$$\int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \hat{x} | \alpha \rangle = \int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle x' = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' e^{-ip'x'/\hbar} \langle x' | \alpha \rangle x'$$

y expresando en términos de la derivada

$$\int dx' \frac{\partial}{\partial p'} \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\hbar}{-i} \langle x' | \alpha \rangle$$

o bien

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \left[ \int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle \right]$$

Como

$$\langle \beta | x | \alpha \rangle = \int dp' \langle \beta | p' \rangle i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | \alpha \rangle = \int dp' \psi_\beta(p')^* i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi_\alpha(p')$$

se deduce que

$$x \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial p}.$$

Parte b). El significado físico de  $e^{i\hat{x}C/\hbar}$  donde  $C$  es alguna constante. Por la expansión en serie se tiene

$$e^{i\hat{x}C/\hbar} |x'\rangle = e^{ixC/\hbar} |x'\rangle$$

de manera que la itnegración

$$\int dx' e^{i\hat{x}C/\hbar} |x'\rangle \langle x' | p'\rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{e^{i\hat{x}(C+p')/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} =$$

o bien

$$\int dx' |x'\rangle \langle x' | C + p'\rangle = |C + p'\rangle .$$

## Capítulo 3

---

### El oscilador armónico

Clásicamente la cosa venía de una partícula sometida a un potencial

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para el oscilador armónico cuántico 1D el hamiltoniano y energía son

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

donde  $\omega^2$  es la constante del resorte cuántico. Este problema puede resolverse usando un nuevo operador  $\hat{a}$  (operadores de aniquilación y creación)

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + i \frac{p}{m\omega} \right) \quad \text{con} \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$

que es suma de  $\hat{x}, \hat{p}$  pero que no es hermítico. Cumple que

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad aa^\dagger = \frac{H}{\hbar\omega} - 1 \quad H = \hbar\omega \left( aa^\dagger + \frac{1}{2} \right),$$

donde se define el operador número  $\hat{N} \equiv a^\dagger a$  que al verificar  $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$  tienen base de autoestados en común  $\{|n\rangle\}$ . En efecto

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad \hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

siendo  $n$  el número de cuantos de energía. Se cumplen además

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = -[a, a^\dagger a] = -(a^\dagger[a, a] + [a, a^\dagger]a) = -a$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = -[a^\dagger, a^\dagger a] = -(a^\dagger[a^\dagger, a] + [a^\dagger, a]a^\dagger) = a^\dagger$$

Queremos ver que le hace  $a^\dagger$  a un autoestado  $|n\rangle$  y luego  $a$  sobre el mismo.

$$Na^\dagger |n\rangle = ([N, a^\dagger] + a^\dagger N) |n\rangle = a^\dagger |n\rangle + a^\dagger n |n\rangle$$

$$\hat{N}(a^\dagger |n\rangle) = (n+1)(a^\dagger |n\rangle)$$

Entonces, como no hay degeneración y tenemos  $N|n'\rangle = n'|n'\rangle$  entonces

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle,$$

y procediendo de modo idem para  $a|n\rangle$  será

$$a|n\rangle = c_2 |n-1\rangle$$

Luego,

$$a^\dagger |n\rangle = c_1 |n+1\rangle \xrightarrow{DC} \langle n+1| c_1^* = \langle n| a$$

$$a|n\rangle = c_2 |n-1\rangle \xrightarrow{DC} \langle n-1| c_2^* = \langle n| a^\dagger$$

y entonces

$$\langle n| N |n\rangle = n \langle n| n\rangle = n = \langle n| a^\dagger a |n\rangle = \langle n-1| c_2^* c_2 |n-1\rangle = |c_2|^2 \langle n-1| n-1\rangle$$

$$n = \langle n| aa^\dagger - 1 |n\rangle = -1 + \langle n| aa^\dagger |n\rangle = -1 + \langle n+1| c_1^* c_1 |n+1\rangle = -1 + |c_1|^2 \langle n+1| n+1\rangle$$

siendo

$$|c_2| = \sqrt{n} \quad |c_1| = \sqrt{n+1}$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

y entonces de esta forma  $\hat{a}^\dagger$  es el operador de creación de cuantos y  $\hat{a}$  el de aniquilación. Estos operadores permiten ir saltando de niveles de energía y pasar entre estados definidos estos por el número de cuantos. Nótese que  $\hat{a}$  es operador de aniquilación cuando actúa sobre kets; sobre bras los crea.

Del producto interno se tiene

$$(\langle n| a^\dagger)(a |n\rangle) \geq 0$$

lo cual conduce a  $n \geq 0$ .

### 3.0.1 El estado fundamental $\langle 0 \rangle$

$$a |n\rangle \xrightarrow{DC} \langle n| a^\dagger$$

y desde el postulado para productos internos,

$$(\langle n| a^\dagger)(a |n\rangle) \geq 0 \quad n \langle n| n\rangle \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$$

entonces  $n$  cabalga por los naturales. Si hacemos

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^2 |n\rangle = \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle \quad aa^2 |n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)} |n-3\rangle \dots$$

en algún momento (dado que  $n \geq 0$ ) se llega a  $|n=0\rangle$ , entonces  $E_0 = \hbar\omega/2$

y

$$|0\rangle \equiv \text{El fundamental}$$

y no se puede bajar más,

$$\hat{a} |0\rangle = 0.$$

Por otra parte, con el  $\hat{a}^\dagger$  se puede llegar a cualquier estado

$$a^\dagger |0\rangle = \sqrt{1} |1\rangle, \quad a^{\dagger 2} |0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2} |2\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3} |3\rangle$$



**Figura 0.1**

Se tienen todos los valores de energía a partir de uno solo,

$$\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = |n\rangle \quad E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Las matrices de  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  sólo tienen una diagonal corrida de elementoss

$$\langle n' | a | n \rangle = \sqrt{n} \langle n' | n-1 \rangle = \sqrt{n} \delta_{n', n-1}$$

$$\langle n' | a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \langle n' | n+1 \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1}$$



Es decir, que pictóricamente serían algo como

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & \dots & & & \\ 0 & \dots & & & \sqrt{n} \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & & \dots \\ \dots & & & & \\ \dots & & & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Los elementos de las matrices

$$\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$

$$\langle n' | p | n \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (-\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$

no pueden ser matrices diagonales porque no conmutan con el hamiltoniano.

También puede verse que

$$\langle x \rangle = \langle n | x | n \rangle = 0 \quad \langle p \rangle = \langle n | p | n \rangle = 0,$$

lo cual difiere de lo que esperaríamos clásicamente. Es más, se tienen también

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (1)$$

y consecuentemente

$$\langle 0 | x^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad \langle 0 | p^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

de manera que resulta

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_{|0\rangle} \langle (\Delta p)^2 \rangle_{|0\rangle} = \frac{\hbar^2}{4}$$

el estado fundamental es el de incerteza mínima. Esto es así porque estamos en el fundamental y es un pack gaussiano.

Veamos ahora la forma que tiene la función de onda. A tiempo cero. Siendo  $\Psi_n(x') = \langle x' | n \rangle$  quiero evaluar  $\Psi_0(x') = \langle x' | 0 \rangle$  y ver que como

$$\langle x' | a | 0 \rangle = 0$$

tengo

$$0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left\langle x' \left| x + \frac{ip}{m\omega} \right| 0 \right\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[ x' \langle x' | 0 \rangle + \frac{i}{m\omega} \langle x' | p | 0 \rangle \right]$$

$$x' \langle x' | 0 \rangle + \frac{i}{m\omega} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \langle x' | 0 \rangle = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} x' \langle x' | 0 \rangle &= -\frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | 0 \rangle \\ -\int \frac{m\omega}{\hbar} x' dx' &= \int \frac{d\langle x' | 0 \rangle}{\langle x' | 0 \rangle} \Rightarrow \langle x' | 0 \rangle = \kappa e^{-m\omega x'^2/(2\hbar)} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0 | x' \rangle \langle x' | 0 \rangle dx' = \int_{-\infty}^{\infty} |\kappa|^2 e^{-m\omega x'^2/\hbar} dx' = |\kappa|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \\ |\kappa| &= \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}} \end{aligned}$$

donde usamos el conocido resultado  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi/a}$ , llegamos al llamado pack gaussiano.

$$\langle x' | 0 \rangle = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(x'/x_0)^2}$$

El estado fundamental tiene incerteza mínima y debe corresponder a un paquete gaussiano.

Se ven que

$$\langle x' | 1 \rangle = \langle x' | a^\dagger | 0 \rangle$$

y lo escribo en función de  $x$  y  $p$  que sé cómo operan sobre  $x'$ . Entonces

$$\langle x' | 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left( x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right) \langle x' | 0 \rangle$$

y se puede demostrar que vale

$$\langle x' | n \rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \frac{1}{x_0^{n+1/2}} \left( x' - x_0^2 \frac{d}{dx'} \right)^n e^{-1/2(x'/x_0)^2}.$$

Los operadores  $a, a^\dagger$  son útiles para la resolución de problemas discretos. En el oscilador armónico las energías son discretas, hasta el infinito, y están equiespaciadas  $\hbar\omega$ .

Notemos que  $\hat{a}^\dagger$  crea sobre ket y aniquila sobre bra, mientras que  $\hat{a}$  aniquila sobre ket y crea sobre bra,

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \Rightarrow \langle n| a = \langle n+1| \sqrt{n+1}$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \Rightarrow \langle n| a^\dagger = \langle n-1| \sqrt{n}$$

Esto ya se dijo en otra parte y está descolgado aquí.

### EJEMPLO 0.1 Ejercicio 8

Tiene muchos resultados de la teoría que no repetiré aquí. Para evaluar  $\langle m | \hat{x} | n \rangle$  se lo escribe en términos de  $a, a^\dagger$ , luego se opera. Vemos que  $\langle m | \hat{x} | n \rangle$  y  $\langle m | \hat{p} | n \rangle$  no son diagonales en esta base y que los elementos diagonales son nulos.

El cálculo de  $\langle m | \hat{x}^2 | n \rangle$  es directo pero engorroso. Se puede ver que usando la expresión de  $x^2$  en términos de  $a, a^\dagger$  dada por la (1) se puede ver que vale n

$$\langle m | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ \sqrt{n(n+1)}\delta_{m,n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + 2(n+1)\delta_{mn} \right]$$

$$\langle m | \hat{p}^2 | n \rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2} \left[ -(2n+1)\delta_{mn} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} \right]$$

Entonces tenemos

$$\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1) \quad \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$

y con esto se puede verificar el teorema del virial. Para autoestados de  $H$  se da que

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

y usando lo obtenido arriba

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} (2n+1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

y se ve que el signo de igualdad vale para el  $n=0$ , el fundamental.

La función de onda del fundamental será  $\langle x' | 0 \rangle$  y podemos usar que

$$\langle x' | a | 0 \rangle = \left\langle x' \left| \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right) \right| 0 \right\rangle \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = 0$$

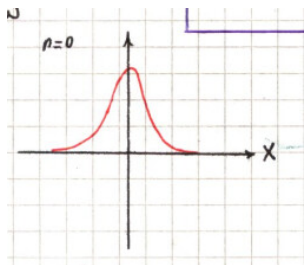
lo que resulta en

$$x' \langle x' | 0 \rangle + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \langle x' | 0 \rangle = 0,$$

que es una ecuación diferencial para la función de onda cuya solución se puede escribir, definiendo  $x_0 \equiv \hbar/(m\omega)$ ,

$$\langle x | 0 \rangle = \frac{1}{\hbar^{1/4} \sqrt{x_0}} e^{-1/2(x'/x_0)^2}$$

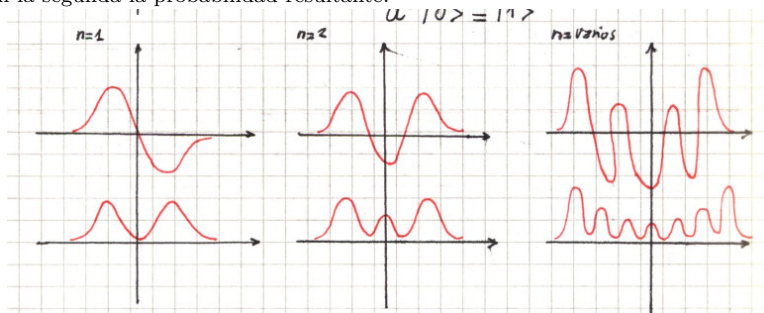
una gaussiana centrada en el origen.



El siguiente estado lo generamos con el operador de creación,

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle$$

de manera que en la pic de abajo podemos ver en la primer fila las funciones de onda y en la segunda la probabilidad resultante.



Veamos ahora la evolución temporal en la representación de Heisenberg. Todos los operadores dependen del tiempo, luego

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [p, H] = -m\omega^2 x \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [x, H] = \frac{p}{m}$$

y asimismo,

$$\left[ p, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right] = \frac{m\omega^2}{2} [p, x^2] = \frac{m\omega^2}{2} (-2i\hbar)$$

Es conveniente hacer una transformación canónica  $x, p \rightarrow a, a^\dagger$ , luego

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a \quad \frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger$$

siendo el conmutador

$$[a, H] = \hbar\omega [a, a^\dagger a] = \hbar\omega (a^\dagger [a, a] + [a, a^\dagger] a)$$

con

$$a(t) = a(0) e^{-i\omega t} \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0) e^{i\omega t}$$

Poniendo  $a, a^\dagger$  en términos de  $x, p$  con

$$x(t) + i \frac{p(t)}{m\omega} = x(0) e^{i\omega t} + i \frac{p(0)}{m\omega} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) - i \frac{p(t)}{m\omega} = x(0) e^{i\omega t} - i \frac{p(0)}{m\omega} e^{-i\omega t}$$

y equating ambas

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) \cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega} \sin(\omega t) \\p(t) &= -m\omega x(0) \sin(\omega t) + p(0) \cos(\omega t).\end{aligned}$$

Esto también se puede calcular con el operador evolución, a través de

$$x(t) = e^{iH/\hbar t} x e^{-iH/\hbar t},$$

aunque es un camino mucho más *painful*. Facilitamos un poco con el **lema de Baker-Hausdorff** que dice que

$$e^{[iG\lambda]} \hat{A} e^{-[iG\lambda]} = \hat{A} + i\lambda[G, A] + \frac{i^2\lambda^2}{2!}[G, [G, A]] + \dots + \frac{i^2\lambda^n}{n!}[G, [G, [G, \dots[G, A]]]]$$

con  $G$  hermitico y  $\lambda$  real.

El primer término es  $x$  luego se tienen

$$\begin{aligned}2) \quad [H, x(0)] &= -\frac{i\hbar p(0)}{m} \\3) \quad [H, [H, x(0)]] &= [H, -\frac{i\hbar p(0)}{m}] = -[H, p(0)] \frac{i\hbar}{m} = \hbar^2 m x(0) \\4) \quad [H, [H, [H, x(0)]]] &= [H, -i\hbar^2 x(0)] = [H, x(0)] \hbar^2\end{aligned}$$

amasando todo esto se llega a

$$x(t) = x(0) + \left[ \frac{p(0)}{m} \right] t - \frac{1}{2!} t^2 \omega^2 x(0) - \frac{1}{3!} \frac{t^3 \omega^2 p(0)}{m} + \dots$$

y con un poco de buena vista se pueden identificar en esta serie las expresiones de

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \\ \cos(\omega t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n\end{aligned}$$

Faltaría ver la evolución de los valores medios  $\langle n | x(t) | n \rangle = 0$  y  $\langle n | p(t) | n \rangle = 0$ , pero se quedan en cero por ser estacionarios [?]. Las oscilaciones solamente aparecerán en estados que son combinación lineal de autoestados de energía.

### 3.0.2 Interferencia en experimento de Young

Consideremos la situación depicted en la figura bajo estas líneas, que es reminiscente de la del experimento de Young aunque la fuente no necesariamente es de luz.

Uso  $\hat{H}$  de partículas libres y que  $|\alpha\rangle$  es el generado por la fuente. Suponemos que en  $t = 0$  al pasar por las aberturas se da

$$\frac{1}{2} |\alpha\rangle = |\alpha_1\rangle = |\alpha_2\rangle$$

y luego para  $t > 0$  se tiene

$$|\tilde{\alpha}_1\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha_1\rangle = e^{-iE_\alpha t/\hbar} |\alpha_1\rangle$$



Figura 0.2

$$|\tilde{\alpha}_2\rangle = e^{-iE_\alpha t/\hbar} |\alpha_2\rangle$$

En la pantalla debe verse la interferencia de los dos estados solapados. La diferencia de caminos es la que genera la interferencia, y usando que los tiempos son  $t_i = d_i/v$  se da

$$|\tilde{\alpha}\rangle = |\tilde{\alpha}_1\rangle + |\tilde{\alpha}_2\rangle = e^{-iE_\alpha \frac{d_1}{v}/\hbar} |\alpha_1\rangle + e^{-iE_\alpha \frac{d_2}{v}/\hbar} |\alpha_2\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{2} e^{-iE_\alpha \frac{d_1}{v}/\hbar} \left[ 1 + e^{-iE_\alpha \frac{d_2-d_1}{v}/\hbar} \right] |\alpha_1\rangle$$

y si definimos

$$\beta = E_\alpha \frac{d_2 - d_1}{v} / \hbar,$$

resulta entonces

$$\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = \frac{1}{4} |1 + e^{-iE_\alpha \frac{d_2-d_1}{v}/\hbar}|^2 = \frac{1}{4} ((1 + \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\beta).$$

Esto sería la intensidad si de radiación electromagnética se tratase.

Al partir el estado  $|\alpha_1\rangle$  y volver a unirlos en  $|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle$  vemos una intensidad que depende de la diferencia de camino.

### 3.0.3 Cambio de cero del potencial

Consideramos una partícula sometida a potencial externo. El potencial es una maquinación matemática conveniente para el concepto más físico de fuerza. Es un caso particular de cambio de gauge.

En mecánica clásica la física de un problema no se ve afectada por un cambio de gauge. Si movemos el cero de potencial, la situación física es la misma. Veamos qué sucede en mecánica cuántica.

$$|\alpha, t, t_0\rangle = e^{-i(p^2/2m+V(x))(t-t_0)/\hbar} |\alpha, t_0\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}, t, t_0\rangle = e^{-i(p^2/2m+V(x)+V_0)(t-t_0)/\hbar} |\alpha, t_0\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}, t, t_0\rangle = e^{-iV_0(t-t_0)/2} |\alpha, t, t_0\rangle$$

y entonces vemos que  $|\tilde{\alpha}, t\rangle$  y  $|\alpha, t\rangle$  difieren en una fase, de manera que los valores de expectación (las magnitudes físicas) no cambian (con  $V_0$  constante). El efecto fue meter una fase.

Si el potencial es tal que  $V_0 = V_0(t)$  entonces

$$|\tilde{\alpha}, t, t_0\rangle = e^{-i \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt} |\alpha, t, t_0\rangle.$$



Figura 0.3

Consideremos ahora un experimento ideal (pensado). Dentro de los cilindros hay campo nulo siempre. Se varia el  $V$  abriendo y cerrando la llave a la entrada y a la salida; se varía el cero de potencial pero no el campo. Se cambia la fase de las partículas inferiores respecto de las superiores, entonces habrá interferencia en  $O$ .

Clásicamente no hay variación, pero cuánticamente

$$\Delta \text{fase} = -\frac{i}{\hbar} e \int_{t_1}^{t_2} V_1(t) - V_2(t) dt = -\frac{i}{\hbar} e \Delta V$$

Notemos que con el límite  $\hbar \rightarrow 0$  el efecto desaparece [no será el otro límite o hay algo mal?].

Lo que realmente cuenta es la diferencia de potencial  $\Delta V$ , la cual sí tiene sentido físico porque es independiente de la medida y porque pueden escribirse los campos en función de aquella.

### EJEMPLO 0.2 Caso gravitatorio

Clásicamente la masa inercial con la gravitatoria se cancelan,

$$m\ddot{x} = -m\nabla\phi_g$$

y esto lleva a que la aceleración sea  $g$ , luego la gravedad es algo geométrico porque no depende de la masa. Cuánticamente,

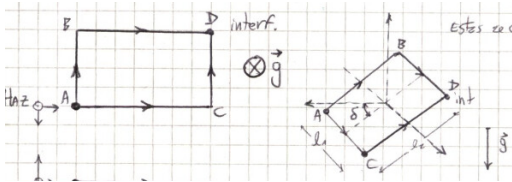
$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + m\phi_g \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

la masa no se simplifica. Aún así

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -g.$$

### EJEMPLO 0.3 Experimento Colella/Overhauser/Werner

Esto viene de un artículo de Physical Review Letters. Se utilizan partículas neutras: neutrones. Consideramos el setup siguiente



La diferencia de altura es  $\Delta h = \ell_2 \sin \delta$  pero en la derecha se tiene que  $\overline{BD}$  está a mayor altura que  $\overline{AC}$  que está más baja. Luego, la longitud de onda Compton

$$v = \frac{p}{m} = \frac{1}{m} \frac{2m\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar}{m\lambda_c}$$

y entonces

$$e^{-i/\hbar m g \ell_x \sin \delta \ell_1 / v}$$

de manera que

$$\phi_{ABC} - \phi_{ACD} = \frac{m^2 g \ell_1 \ell_2 \lambda_c \sin \delta}{\hbar^2}$$

se tiene un fenómeno puramente cuántico (aparece  $\hbar$ ) y depende de la masa.



### 3.0.4 Caso del EM y la invariancia de gauge

Recordemos algunos resultados del electromagnetismo.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Si el cuadvivector de momento es  $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$  y el de cuadri potencial es  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  se veía que el reemplazo

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

era covariante. Luego, el hamiltoniano covariante era

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + e\phi \quad (2)$$

En el formalismo de Heisenberg

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i, H] = \frac{p_i - eA_i/c}{m}$$

puesto que  $p$  y  $A$  no conmutan. Los momentos son justamente  $\pi_i = p_i - e/cA_i$ . Luego,

$$[p_i, p_j] = 0 \quad [\pi_i, \pi_j] = \frac{i\hbar e}{c} \epsilon_{ilk} B_k$$

La invariancia de gauge hace que

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

que es un cambio que deja los campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  invariantes. Si la función  $\Lambda \neq \Lambda(\mathbf{x})$  entonces el cambio es como un cambio de cero del potencial, pues

$$\phi \rightarrow \phi + \lambda(t) \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}.$$

La mecánica cuántica incluye la invariancia de gauge de modo que los valores de expectación, que es lo físico, no se alteran. El cambio de fase implicado por la transformación de gauge no pasa a los valores de expectación.

Considerando la versión operacional del hamiltoniano (2) y la ecuación de Schrödinger,

$$H |\alpha, t_0, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle$$

Ahora quiero hacer una transformación de gauge para ver si obtengo las mismas mediciones. Reemplazando los operadores  $p$  y  $A$  por los transformados según el cambio de gauge se obtiene (luego veremos la justificación, creámoslo por ahora)

$$|\tilde{\alpha}, t_0, t\rangle = e^{ie\Lambda(x,t)/(\hbar c)} |\alpha, t_0, t\rangle$$

y a esta fase la denominaremos  $\hat{g}(x, t)$  (un operador?) luego, la transformación de gauge implica

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle \rightarrow \langle \tilde{\alpha} | x | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | g^\dagger x g | \alpha \rangle$$

y como conmutan,

$$\langle \alpha | x g^\dagger g | \alpha \rangle = \langle \alpha | x | \alpha \rangle$$

donde el último paso es por la unitariedad. Luego, el  $x$  no cambia por una transformación de gauge.

Veamos qué le pasa al momento conjugado  $\pi$ , teniendo en cuenta que el momento lineal mecánico  $p$  no varía pero sí el potencial  $A$ , i.e.

$$\langle \alpha | \pi | \alpha \rangle \rightarrow \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\pi} | \tilde{\alpha} \rangle = \left\langle \tilde{\alpha} \left| p - \frac{e\tilde{A}}{c} \right| \tilde{\alpha} \right\rangle$$

Luego,

$$\left\langle \tilde{\alpha} \left| g^\dagger \left( p - \frac{eA}{c} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right) g \right| \tilde{\alpha} \right\rangle$$

donde hay que recordar que  $p$  tiene metida la derivada respecto de  $x$  y  $A, \Lambda$  son sólo dependientes de  $x, t$  y conmutan con  $g(x, t)$ . Se ve que resulta todo el operador  $p - e/cA$  y la transformación cumple además que  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle$  de forma que se ha demostrado lo que se propusiera antes. Tenemos

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( p - \frac{eA}{c} - \frac{e\nabla\Lambda}{c} \right)^2 + e\phi - \frac{e}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right] e^{ie\Lambda/(\hbar c)} |\alpha, t_0, t\rangle = e^{ie\Lambda/(\hbar c)} \left( -\frac{e}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\alpha, t_0, t\rangle \quad (3)$$

donde se ve que valen varias cosas

$$gg^\dagger \left( p - \frac{eA}{c} - \frac{e\nabla\Lambda}{c} \right) g = g \left( p - \frac{eA}{c} \right)$$

Con esto debería ser suficiente para confirmar el resultado [confirmarlo]. La mecánica cuántica es, entonces, invarian de gauge al igual que lo que sucedía en mecánica clásica.

### EJEMPLO 0.4 Experimento de Aharonov y Bohm

Vemos en la figura que las partículas no interactúan con el campo  $\mathbf{B}$  y el circuito es un solenoide infinito. Hay campo magnético dentro pero es nula afuera. Tengo, no obstante, potencial  $\mathbf{A}$  en todas partes.



Luego, resulta que hay interferencia en  $D$  sin campo  $\mathbf{B}$  por la diferencia de fases originada por el potencial  $\mathbf{A}$ .

La fase es

$$-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{e}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) dt = \frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}.$$

Recordemos que el lagrangiano de la situación<sup>1</sup> [?]

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A}$$

Quisiéramos ver cuál es la diferencia de fase entre los dos caminos ABD y ACD, que será

$$\frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{ABD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \int_{ACD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) = \frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{ABD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \int_{DCA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) = \frac{ie}{\hbar c} \int_{cerrada} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

que conduce a

$$\frac{ie}{\hbar c} \int_{cerrada} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{ie}{\hbar c} \phi_B \neq 0$$

es decir que hay efecto de interferencia. Notemos que el rotor sigue siendo invariante de gauge [?].

Físicamente el campo  $\mathbf{B}$  no interactúa con el haz de partículas, con lo cual parecería una interacción del potencial con las partículas.

## 3.1 El propagador

Físicamente representa la probabilidad de transición entre autoestados por el paso del tiempo,  $|x'\rangle_{t_0} \rightarrow |x''\rangle_t$ . La idea es que si en  $t = 0$  el estado del sistema es un autoestado  $|x'\rangle$ , interesará ver cuál es la probabilidad de hallarse en  $|x''\rangle$  en  $t$ . El propagador se define como:

$$\langle x'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | x' \rangle \equiv K(x', t; x, t_0),$$

<sup>1</sup>Hay un lagrangiano para cada momento, como para ahora que me estoy tomando una copa de vino.

pero veamos cómo aparece en el curso de un cálculo. Consideremos

$$\begin{aligned}\langle x'' | \alpha, t_0, t \rangle &= \langle x'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | \alpha, t_0 \rangle, \\ \langle x'' | \alpha, t_0, t \rangle &= \int dx' \langle x'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | x' \rangle \langle x' | \alpha, t_0 \rangle.\end{aligned}$$

Entonces la función de onda se escribe

$$\Psi_\alpha(x'', t) = \int dx' K(x'', t; x', t) \Psi_\alpha(x', t).$$

Podemos pensar que el propagador lleva o “propaga” la función de onda desde  $t_0$  a  $t$ . Se puede escribir:

$$K(x', t; x, t_0) = \sum_{a'} \langle x'' | a' \rangle \langle a' | x' \rangle e^{-iE_a(t-t_0)/\hbar}$$

y metemos un observable  $\hat{A}$  donde  $[A, H] = 0$  y  $A |a'\rangle = a |a'\rangle$ .

El propagador depende del potencial, pero no de la función de onda inicial. Se debe cumplir que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} K(x', t; x, t_0) = \delta^3(x'' - x')$$

$$K(x'', t; x, t_0) = \langle x'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | a' \rangle \langle a' | x' \rangle = \sum_{a'} \Psi_{|a'\rangle}(x'', t) \langle a' | x' \rangle$$

$$K(x'', t; x, t_0) = \sum_{a'} c_{a'}(x') \Psi_{|a'\rangle}(x'', t)$$

y entonces el propagador es una función de Green que satisface

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x'') - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x', t; x, t_0) = -i\hbar \delta^3(x'' - x') \delta(t - t_0)$$

con  $K(x'', t; x', t_0) = 0$  si  $t < 0$  que es la condición de contorno.

### EJEMPLO 1.1 El propagador de la partícula libre

Escribimos el propagador como integral en el momento de acuerdo con

$$\begin{aligned}K(x'', t; x, t_0) &= \int dp' \langle x'' | e^{-ip^2(t-t_0)/2m\hbar} | p' \rangle \langle p' | x' \rangle = \\ &= \int dp' e^{-ip'^2(t-t_0)/2m\hbar} \langle x'' | p' \rangle \langle p' | x' \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' e^{-ip'^2(t-t_0)/2m\hbar} e^{-ip'(x'-x'')/\hbar}\end{aligned}$$

y entonces el propagador de una partícula libre es

$$K(x'', t; x, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} e^{i \frac{m(x'' - x')^2}{2\hbar(t - t_0)}}$$

También se puede escribir el propagador en la representación de Heisenberg,

$$\langle x'' | e^{-iH(t-t_0)/\hbar} | x' \rangle = \langle x'' | e^{-iHt/\hbar} e^{iHt_0/\hbar} | x' \rangle = \langle x'', t | x', t_0 \rangle$$

y entonces

$$K(x'', t; x', t_0) = \langle x'', t | x', t_0 \rangle,$$

el propagador es la probabilidad de transición de pasar entre puntos  $x'$  y  $x''$ .

El propagador tiene que cumplir la propiedad del operador evolución, esto es la propiedad de composición (como el  $U(t, t_0)$ ), es decir:

$$K(x'', t; x, t_0) = K(x'', t; x, t_1) K(x'', t_1; x, t_0) \quad t > t_1 > t_0,$$

lo cual se puede ver explícitamente considerando

$$\langle x'' | e^{-iH/h(t-t_1+t_1-t_0)} | x' \rangle = \int dx_1 \langle x'' | e^{-iH(t-t_1)/h} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(t_1-t_0)/h} | x' \rangle$$

de lo cual vemos

$$\langle x'' | e^{-iH/h(t-t_1+t_1-t_0)} | x' \rangle = \langle x'', t | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x', t_0 \rangle.$$

## 3.2 Integrales de camino de Feynmann

Consideramos una partícula yendo de  $(x_1, t_1)$  a  $(x_N, t_N)$ . Dividimos el tiempo

$$\delta t = \frac{t_N - t_1}{(N - 1)}$$

y queremos ver la amplitud de transición desde el estado 1 al  $N$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \dots \\ &\dots \int dx_2 \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \end{aligned}$$

Se puede pensar como que estamos sumando sobre todos los posibles caminos entre  $(x_1, t_1)$  y  $(x_N, t_N)$  fijos. En mecánica clásica teníamos un solo camino, el que minimizaba la acción  $S$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta S = 0$$

pero en cambio en mecánica cuántica todos los caminos aportan (e interfieren entre sí). En un libro de Dirac, Feynmann lee

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \text{ corresponde a } e^{i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}/\hbar dt}$$



Figura 2.4

y entonces propone

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \approx \sum_{\text{caminos}} e^{i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{\text{clasico}}(x, \dot{x}) / \hbar dt}$$

Definiremos

$$S_{(n, n-1)} \equiv \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt$$

Luego para considerar la suma sobre todos los segmentillos a lo largo de un camino tendremos

$$\prod_{n=2}^N e^{i/\hbar S(n, n-1)} = e^{i/\hbar \sum_{n=2}^N S(n, n-1)} = e^{iS(N, 1)/\hbar}$$

y hay que considerar TODOS los posibles caminos (cada uno de los cuales aporta un  $e^{iS/\hbar}$ )

$$\propto \sum_{\text{caminos}} e^{i/\hbar S(N, 1)}$$

cuando  $\hbar \rightarrow 0$  las trayectorias contribuyen con una cantidad que oscila loca y violentamente. Tienden a la cancelación para caminos alejados. Por el  $\hbar \sim 0$  la fase es grande y entonces se cancelan. Esto no ocurre cerca del camino (real) que cumple

$$\delta S(N, 1) = 0$$

Para trayectorias cercanas la  $\Delta phase$  no es grande y hay interferencia constructiva. Para un  $\delta t$  infinitesimal cualquier trayectoria puede verse como una línea recta y es

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = N e^{iS(n,n-1)/\hbar}$$

$$\begin{aligned} S(n, n-1) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) dt \\ &\approx \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \frac{m}{2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\delta t^2} - V\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right) \right) dt \end{aligned}$$

donde la última expresión es a orden 1 en el tiempo y en la posición (pues  $\delta t \sim 0$ ).

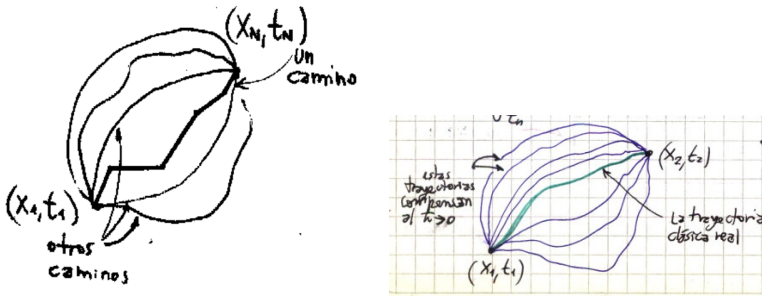


Figura 2.5

Consideremos, por ejemplo, una partícula libre, entonces  $V = 0$  de modo que resolviendo se obtiene

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = N e^{im(x_n - x_{n-1})^2 / 2\hbar\delta t},$$

que no es otra cosa que el propagador de una partícula libre. La normalización  $N$  se puede evaluar tomando

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} N e^{im(x_n - x_{n-1})^2 / 2\hbar\delta t} = \delta(x_n - x_{n-1})$$

y usando el resultado de que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} e^{imy^2 / (2\hbar)\delta t} = \delta(y),$$

se obtiene

$$N = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}.$$

La normalización no depende del potencial  $V$  en el lagrangiano.

Veamos cómo se comporta para un  $\Delta t$  finito será

$$\begin{aligned} \langle x_n, t_n | x_1, t_1 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{i2\pi \hbar \delta t} \right)^{(N-1)/2} \int dx_{n-1} \int dx_{n-2} \dots \\ &\quad \int dx_2 \prod_{n=2}^N e^{iS(n, n-1)/\hbar} \end{aligned}$$

y defino una integral de medida dada por toda la sucesión de integraciones anidadas en la anterior expresión, denominada como  $\int_{x_1}^{x_n} D[x(t)]$  de suerte que resulta

$$\langle x_n, t_n | x_1, t_1 \rangle = \int_{x_1}^{x_n} D[x(t)] e^{i \int_{t_1}^{t_n} \mathcal{L}(x, \dot{x})/\hbar dt}$$

siendo esta última la integral de camino de Feynmann. La acción es una fase aquí. Las integrales on los caminos cuánticos y por ello esto tiene toda la información del sistema cuántico.

En base a las integrales de camino, Feynman desarrolla una formulación equivalente de la mecánica cuántica que utiliza los conceptos de:

1. Superposición
2. Composición de la transición
3. Límite clásico con  $\hbar \rightarrow 0$

Estas integrales contienen toda la información del sistema cuántico, aunque no sea sencillo extraerla.

### EJEMPLO 2.1 Integral de camino para partícula libre

Para una partícula libre la expresión se puede evaluar,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{i2\pi \hbar \delta t} \right)^{(N-1)/2} \int dx_{n-1} \int dx_{n-2} \dots \int dx_2 \prod_{n=2}^N e^{i \frac{m}{2\hbar} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} \Delta t} \\ e^{i \frac{m}{2\hbar \Delta t} \sum_{j=2}^N (x_j - x_{j-1})^2} \\ (x_N - x_{N-1})^2 + (x_{N-1} - x_{N-2})^2 + \dots + ()^2 + ()^2 \end{aligned}$$

Al final del día esta cuenta da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar (N-1) \delta t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{im(x_N - x_{N-1})^2 / (2(N-1)\hbar \delta t)}$$

donde el límite fue  $(N-1)\Delta t \rightarrow (t_N - t_1)$ .



Consideremos un propagador de  $(x', 0) \rightarrow (x', t)$

$$G(t) = \int dx' K(x', t; x', 0) = \int dx' \langle x' | e^{-iHt/\hbar} | x' \rangle$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{a'} \int dx' \langle x' | e^{-iHt/\hbar} | a' \rangle \langle a' | x' \rangle = \\ &\quad \sum_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar} \int dx' \langle x' | a' \rangle \langle a' | x' \rangle \\ G(t) &= \sum_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar} \int dx' |\langle x' | a' \rangle|^2 = \sum_{a'} e^{-iE_{a'}t/\hbar} \end{aligned}$$

que es reminiscencia de la función de partición de mecánica estadística. Tomando Laplace-Fourier

$$\tilde{G}(E) = -i \int dE \frac{G(t)}{\hbar} e^{iEt/\hbar} = \sum_{a'} \frac{1}{E - E_{a'}}$$

y el espectro de autoenergías son los polos de  $\tilde{G}(E)$ . O, dicho de otra manera, los polos de la función  $G$  propagador integrada en  $x$  y luego de haberle hecho Fourier, son la autoenergías.

La expresión

$$\langle x, t | x_1, t_1 \rangle \equiv \text{Integral de camino de Feynmann}$$

satisface la ecuación de Schrödinger y es una alternativa a la formulación de la cuántica usual.

### EJEMPLO 2.2 Ejercicio 17

Se llaman estados coherentes del oscilador armónico a aquellos

$$\hat{a} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle,$$

es decir, los autovalores del operador  $a$ . Consideramos

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$$

de manera que

$$a |\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} a \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda a^\dagger}{k!} \right)^k |0\rangle$$

y como  $(a^\dagger)^k |0\rangle = \sqrt{k!} |k\rangle$  además de que  $(a^\dagger)^{k-1} |0\rangle = \sqrt{(k-1)!} |k-1\rangle$  entonces se puede ver que finalmente

$$a |\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda a^\dagger}{K!} \right)^K |K\rangle$$

o bien

$$a|\lambda\rangle = \lambda(e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |K\rangle)$$

y todo lo entre paréntesis se puede considerar el ket  $|\lambda\rangle$  de manera que (hemos considerado  $K \equiv k - 1$ ) se ve que

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

es un autoket.

La parte c) requiere

$$e^{-ip\ell/\hbar} |0\rangle$$

luego

$$a e^{-ip\ell/\hbar} |0\rangle = a e^{(a-a^\dagger)\ell\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}} |0\rangle$$

y como el conmutador para cualquier función de esta diferencia es

$$[a, f(a^\dagger - a)] = \frac{\partial f(a^\dagger - a)}{\partial(a^\dagger - a)}$$

de lo cual se puede deducir que

$$a e^{-ip\ell/\hbar} |0\rangle = \ell \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-ip\ell/\hbar} |0\rangle.$$

La parte b) en cambio

$$|\lambda\rangle = e^{-ip\ell/\hbar} |0\rangle$$

y

$$\begin{aligned} \langle\psi|x|\psi\rangle &= x_0 & T(\ell)|\psi\rangle \\ \langle\psi|T^\dagger(\ell)xT(\ell)|\psi\rangle &= x_0 + \ell \end{aligned}$$

y considerando una doble integración

$$\int \int \langle\psi|x'\rangle \langle x'|T^\dagger(\ell)xT(\ell)|x''\rangle \langle x''|\psi\rangle dx' dx''$$

colapsando la delta en  $x''$ , se tien

$$\int dx' \langle x' + \ell | \psi \rangle \langle x' | \psi \rangle$$

que se puede dividir para ver que

$$\langle\psi|x|\psi\rangle + \ell$$

y entonces el valor medio se desplaza.

En el caso de  $p$ ,

$$\langle\psi|T^\dagger(\ell)pT(\ell)|\psi\rangle = \langle\psi|T^\dagger(\ell)T(\ell)p|\psi\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle.$$

### EJEMPLO 2.3 Ejercicio 19

Acá consideraremos la evolución de estados coherentes  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ . Los valros medios del hamiltoniano serán

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \left( \alpha^* \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

y se ve que se cumple  $\langle H \rangle \gg \hbar\omega$  sí y sólo sí  $|\alpha| \gg 1$ .

Para el operador  $p$  se tiene

$$\langle p \rangle = \left\langle \alpha \left| \left( \frac{a - a^\dagger}{i} \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \right) \right| \alpha \right\rangle$$

**Corregir porque la potencia  $k$  o  $K$  no abarca al  $k!$  o  $K!$ .**

$$\langle p \rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha - \alpha^*).$$

Para el operador  $x$  se tiene

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*).$$

Luego, para el hamiltoniano se tiene

$$\frac{1}{2m} \langle p \rangle^2 + \frac{m\omega^2}{2} \langle x \rangle^2 = \hbar\omega(\alpha\alpha^*)$$

que es aproximadamente  $\langle H \rangle$  si se verifica que  $|\alpha| \gg 1$ .

Para la parte b) tenemos

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | \alpha \rangle$$

y donde si se usan las expresiones en términos del estado de vacío,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle$$

Luego, procedemos

$$a e^{iHt} |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar} \sqrt{n} |n-1\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle$$

y como

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

se puede separar la parte temporal exponencial y resulta

$$a e^{iHt} |\alpha\rangle = \alpha e^{-i\omega t} e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle$$

donde

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iE_{n-1} t/\hbar} |n-1\rangle \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \langle 0 | \alpha \rangle$$

y finalmente

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha(0).$$

Entonces, volviendo a los operadores  $p$  y  $x$  tenemos

$$\langle p \rangle(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} [\alpha(t) - \alpha^*(t)] = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} 2\text{Im}(\alpha_0) \sin(\omega t)$$

$$\langle x \rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\text{Re}(\alpha_0) \cos(\omega t)$$

# Introducción al momento angular (rotaciones)

El operador  $\hat{L}$  será el encargado de realizar las rotaciones. Por el álgebra visto en la mecánica clásica sabemos que, dado un vector  $\mathbf{v}$  y una matriz ortogonal  $R$  se tiene

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} \quad \text{con} \quad |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$$

y

$$|\mathbf{v}|^2 = V^t V = (V^t R^t)(RV) \quad \text{pues} \quad R^t R = R R^t = \mathbb{1}$$

puesto que es una matriz ortogonal. Luego se cumplen

$$\text{clausura} \quad (R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = \mathbb{1}$$

el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal (aquella que cumple  $R^t R = \mathbb{1}$ )

$$\text{asociatividad} \quad R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3$$

$$\exists \text{ identidad} \quad R\mathbb{1} = \mathbb{1}R = R$$

$$\exists \text{ inversa} \quad R R^{-1} = R^{-1} R = \mathbb{1} \quad \text{con} \quad R^{-1} \equiv R^t$$

Esto define un grupo de matrices ortogonales que realiza rotaciones y se denomina  $SO(3)$ .

### 4.0.1 No conmutatividad de las rotaciones clásicas

Las rotaciones finitas no conmutan. Luego, el grupo de las rotaciones será un grupo abeliano

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

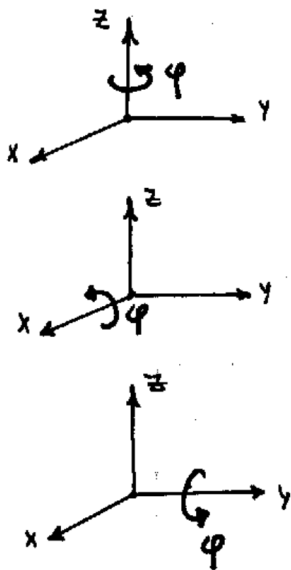


Figura 0.1

Si reemplazamos  $\cos(\epsilon) \approx 1 - \epsilon^2/2$  y  $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$  hasta orden dos. Se puede ver que las rotaciones, en torno a ejes diferentes, sólo conmutan a

orden uno ( $\epsilon$ ) de manera que una rotación infinitesimal  $d\varphi$  conmuta pero una rotación finita  $\varphi$  no lo hace.

## 4.1 Rotaciones cuánticas

Para las rotaciones cuánticas se pedirá

$$D(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{1} - i \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} d\phi,$$

rotación infinitesimal o bien

$$D(\hat{n}, \theta) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n} / \hbar \theta},$$

para rotación finita. Donde  $\hat{D}$  es el operador de las rotaciones y  $\hat{J}$  es un momento angular general. Se postula de esta forma para que  $\hat{D}$  cumpla las mismas propiedades que  $R$  y la relación de conmutación

$$R_x R_y - R_y R_x = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$D(\hat{x}, \epsilon) D(\hat{y}, \epsilon) - D(\hat{y}, \epsilon) D(\hat{x}, \epsilon) = D(\hat{z}, \epsilon^2) - D(\mathbb{1})$$

de modo que la cuenta lleva a

$$J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z$$

la cual generalizando se llega a

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

que son las relaciones de conmutación generales para momento angular  $\hat{J}$ .

Para sistemas de espín 1/2 es

$$D(\hat{n}, \phi) \equiv e^{-i/\hbar \mathbf{S} \cdot \hat{n}}$$

Se puede ver que ante rotaciones cuánticas  $D(\hat{n}, \phi)$  los valores de expectación transforman como vectores

$$\begin{pmatrix} \langle S'_x \rangle \\ \langle S'_y \rangle \\ \langle S'_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\hat{x}, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

En general  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  se transforma como vector y entonces  $\hat{J}$  es un operador vectorial. Para espín 1/2 es

$$|\alpha\rangle = \langle + | \alpha \rangle |+\rangle + \langle - | \alpha \rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = e^{-iS_z \phi/\hbar} \langle +|\alpha\rangle |+\rangle + e^{-iS_z \phi/\hbar} \langle -|\alpha\rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = \langle +|\alpha\rangle e^{-i\phi/2} |+\rangle + e^{i\phi/2} \langle -|\alpha\rangle |-\rangle$$

Si  $\phi = 2\pi$  (cosa que debiera dejar al ket incólume) se tiene

$$D(\hat{z}, 2\pi) |\alpha\rangle = -\langle +|\alpha\rangle |+\rangle - \langle -|\alpha\rangle |-\rangle = -|\alpha\rangle$$

Luego, esto es una muestra del carácter no-clásico del spin; una vuelta completa le cambia el signo al ket pero notemos cuidadosamente que el valor de expectación – que es algo físico – no varía. Esto muestra que el ket no puede tener sentido físico.

### 4.1.1 Angulos de Euler

Se define una serie de rotaciones

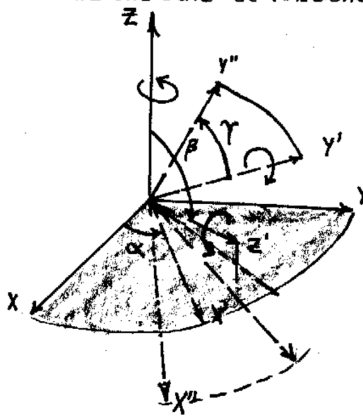
$$1. R_z(\alpha) \quad 2. R_{y'}(\beta) \quad 3. R_{z'}(\gamma)$$

lo cual equivale a

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$$

$$e^{-iJ_{z'}\gamma/\hbar} e^{-iJ_{y'}\beta/\hbar} e^{-iJ_z\alpha/\hbar} |\psi\rangle$$

Pero desconozco cómo operar en los ejes móviles  $z', y'$



**Figura 1.2** Los ángulos de Euler son una caracterización de una rotación general en 3D.

$$\begin{aligned}
R_{y'}(\beta) &= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) \\
R_{z'}(\gamma) &= R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) \underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta) R_{y'}(\beta)}_{\mathbb{1}} R_z(\alpha) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) R_z(\gamma) R_z(\alpha) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)
\end{aligned}$$

Rotación equivalente a [1] pero para ejes fijos, puesto que en mecánica cuántica sabemos rotar en torno a ejes fijos.

Los ángulos de Euler son la caracterización de una rotación general en 3D.

Entonces nuestra rotación en 3D cuántica será:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_z(\alpha) D_y(\beta) D_z(\gamma) = e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar}$$

### 4.1.2 Autoestados y autovalores de J

Partimos de

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijR}J_R$$

y

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad [J^2, J] = 0$$

siendo la última muy importante y probándose por evaluación directa.

Lleva a

$$[J^2, J_i^n] = 0 \quad \text{con } i = x, y, z \quad n \in \mathbb{N}$$

Se eligen  $J^2, J_z$  como observables que conmutan

$$J^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle \quad J_z |a, b\rangle = b |a, b\rangle$$

siendo  $a$  autovalor de  $J^2$  y  $b$  de  $J_z$ .

Definiremos los operadores de subida y de bajada

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm J_y$$

que verifican

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm} \quad [J_{\pm}, J^2] = 0$$

Entonces se tiene

$$J^2(J_{\pm} |a, b\rangle) = J_{\pm} J^2 |a, b\rangle = a J_{\pm} |a, b\rangle \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b\rangle$$



$$(J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z) |a, b\rangle = \pm \hbar J_{\pm} |a, b\rangle$$

$$J_z (J_{\pm} |a, b\rangle) = (b \pm \hbar) (J_{\pm} |a, b\rangle) \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_+ |a, b\rangle = c_+ |a, b + \hbar\rangle \quad J_- |a, b\rangle = c_- |a, b - \hbar\rangle$$

sube el  $J_z$  en una unidad de  $\hbar$  o bien baja el  $J_z$  en una unidad de  $\hbar$ .

$$J_+ J_- = J_x^2 + i J_y J_x - i J_x J_y + J_y^2, \quad J_- J_+ = J_x^2 - i J_y J_x + i J_x J_y + J_y^2$$

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+), \quad J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

$$\langle a, b | J^2 - J_z^2 | a, b \rangle = 1/2 \langle a, b | J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+ | a, b \rangle$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = 1/2 [\langle a, b | J_+ J_+^\dagger | a, b \rangle + \langle a, b | J_+^\dagger J_+ | a, b \rangle]$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = |J_+^\dagger | a, b \rangle|^2 \geq 0, \quad \Rightarrow a \geq b^2$$

hay cota para  $b$ .

$$J_+ |a, b_M\rangle = 0$$

Como no puede seguir subiendo debe dar el ket nulo

$$J_- J_+ |a, b_M\rangle = 0$$

pero

$$J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y] = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |a, b_M\rangle = 0$$

$$(a - b_M^2 - \hbar b_M) |a, b_M\rangle = 0$$

$$a = b_M(b_M - \hbar)$$

$$J_- |a, b_m\rangle = 0$$

y como no puede seguir bajando debe dar el ket nulo

$$J_+ J_- |a, b_m\rangle = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |a, b_m\rangle = (a - b_m^2 + \hbar b_m) |a, b_m\rangle = 0$$

$$b_M(b_M + \hbar) = b_m(b_m - \hbar)$$

tiene solución  $b_M - b_m = -\hbar$  si  $b_M + b_m \neq 0$  pero esto es absurdo de manera que  $b_M = b_m$ . Entonces

$$-b_m = b_M \quad \Rightarrow \quad -b_M \leq b \leq b_M$$

Luego,

$$|a, b_m\rangle \longrightarrow |a, b_M\rangle$$

y como  $J_+$  sube de  $a$  un  $\hbar$  será

$$b_M = b_m + n\hbar$$

y entonces

$$b_M = \frac{n\hbar}{2} = \frac{n}{2}\hbar = j\hbar$$

y se da que  $j$  es entero o semientero.

Definiremos

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j\hbar \leq b \leq j\hbar$$

pero como  $b/\hbar = m$

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j \leq m \leq j$$

$$m = (-j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j) \quad 2j+1 \text{ valores de } m$$

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

### 4.1.3 La normalización de $J_{\pm}$

$$J_+ |j, m\rangle = c_+ |j, m+1\rangle \quad J_-^\dagger = J_+$$

$$\langle j, m | J_- J_+ | j, m \rangle = \langle j, m | J_+^\dagger J_+ | j, m \rangle = |c_+|^2$$

$$\langle j, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar^2 m = |c_+|^2$$

$$c_+ = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = \langle j, m | J_-^\dagger J_- | j, m \rangle = |c_-|^2$$

$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 = |c_-|^2$$

$$c_- = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$J_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle \quad J_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle$$

#### 4.1.4 Elementos de matriz de $J^2, J_z, J_+$

Asumiendo normalización de  $|j, m\rangle$  se tiene

$$\langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{m'm}$$

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{m'm}$$

#### 4.1.5 Elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

Ahora queremos ver cual es la forma de los elementos de matriz de  $\mathcal{D}(R)$

$$\mathcal{D}(R) = e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar}$$

siendo que  $\mathcal{D}(R)$  tiene por efecto rotar el sistema físico. Lo primero que hay que notar es que

$$\langle j', m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle \propto \delta_{jj'}$$

porque  $[J^2, J_i] = 0$  y entonces  $[J^2, J_i^n] = 0$  y

$$\mathcal{D}(R) = f(J_i) \longrightarrow [J^2, \mathcal{D}(R)] = 0$$

y

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)} = \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle$$

es una matriz para cada  $j$  fijo con  $\{(2j+1) \times (2j+1) = \text{dimensión}\}$

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

pero las rotaciones no cambian el  $j$ ,  $\mathcal{D}(R)$  conecta estados con la misma  $j$  y  $\mathcal{D}(R) \in (2j+1) \times (2j+1)$

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

La matriz de  $\mathcal{D}(R)$  (no caracterizada por un único  $j$ ) puede ponerse en forma diagonal por bloques:

$$\mathcal{D}(R) = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} j' \\ j'' \\ j''' \end{matrix}$$

con cada bloque de  $(2j+1) \times (2j+1)$ , pero siendo cada bloque irreducible. Las matrices de rotación con  $j$  fijo forman un grupo.  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$  son los elementillos de la matriz.

$$|j, m\rangle \xrightarrow[\text{Rotación}]{} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

donde el  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$  es la amplitud de hallar al  $|j, m\rangle$  rotado en  $|j, m'\rangle$

#### 4.1.6 Forma explícita del operador $\mathcal{D}(R)$

Los ángulos de Euler permitieron caracterizar la rotación más general. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)} &= \langle j, m' | e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar} | j, m \rangle \\ \mathcal{D}_{m'm}^{(j)} &= e^{-i(-m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle j, m' | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j, m \rangle}_{d_{m'm}^{(j)}} \end{aligned}$$

siendo el primer factor una fase. En los  $d_{m'm}^{(j)}$  está la dificultad de la cuenta.

## 4.2 Formalismo de spinores de Pauli

Apropiado para trabajar con sistemas de espín 1/2. Estos sistemas son casos particulares de momento angular,

$$j = 1/2 \quad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

y se definen los spinores  $\chi_{\pm}$  como

$$|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ \quad |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \langle + | \alpha \rangle \\ \langle - | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \alpha | = ( \langle + | \alpha \rangle \quad \langle - | \alpha \rangle )$$

Para espín 1/2 podemos tomar  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  por la analogía de las relaciones de conmutación. A su vez

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad \text{con} \quad \vec{\sigma} \equiv ( \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z )$$

que es una especie de vector

$$\vec{\sigma} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Luego esta equivalencia provee expresión de los operadores  $S_i$  en términos de matrices de  $2 \times 2$ , así:

$$\frac{i}{2}[J_- - J_+] = J_y = S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

siendo que los  $J_y$  y  $S_y$  actúan sobre kets y el  $\sigma$  sobre spinores.

Las matrices de Pauli cumplen las propiedades básicas siguientes

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad \sigma_i^\dagger = \sigma_i$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\varepsilon_{ijR}\sigma_R \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij}$$

$$\sigma_i^n = \begin{cases} \mathbb{1} & n \text{ par} \\ \sigma_i & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$|+\rangle \equiv |j=1/2, m=1/2\rangle \quad |-\rangle \equiv |j=1/2, m=-1/2\rangle$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

### 4.2.1 Aplicación a las rotaciones

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n}\phi/\hbar} = e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\phi/2}$$

pero

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} & n \text{ impar} \\ \mathbb{1} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\phi/2} = 1 - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^3 \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 - \dots$$

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\phi/2} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

es el operador de rotación para sistemas de spin 1/2 (donde  $\mathbb{1} \in 2 \times 2$ ).

Con esta expresión podemos evaluar  $d_{m'm}^{j=1/2}(\beta)$

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

donde hemos usado los resultados

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

En el caso general el operador de rotación para sistemas de spin  $1/2$  lucirá:

$$\begin{array}{cc} |+\rangle & |-\rangle \\ \mathcal{D}^{j=1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

### 4.2.2 Ejemplo

$$d^{1/2}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_+ + \chi_-) = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = |S_x; +\rangle$$

Este resultado es intuitivamente lógico.

### 4.2.3 Rotaciones en sistemas con $j = 1$

Ahora tenemos

$$j = 1 \quad m = -1, 0, 1$$

recordando  $J_y$  en términos de escaleras

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

de modo que

$$\begin{array}{ccc} |1\ 1\rangle & |1\ 0\rangle & |1\ -1\rangle \\ J_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar}\beta + (-i)^2 \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2 \frac{1}{2!} + (-i)^3 \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar}\beta - \frac{1}{2!} \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2 - \frac{i}{3!} \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) & n \text{ impar} \\ \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos(\beta)) - i \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin(\beta) = d^{j=1}(\beta)$$

acá lo vemos como operador (es notación),  $d_{m'm}^{j=1}(\beta)$  simboliza la matriz

$$\begin{array}{ccc} |1 \ 1\rangle & |1 \ 0\rangle & |1 \ -1\rangle \\ d^{j=1}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \cos(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) \end{pmatrix} \begin{array}{l} |1 \ 1\rangle \\ |1 \ 0\rangle \\ |1 \ -1\rangle \end{array} \end{array}$$

### 4.3 Momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

verifica el álgebra de  $\mathbf{J}$ ,

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Consideremos ahora una rotación en torno a  $z$ , en un  $\delta\phi$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{iL_z\delta\phi}{\hbar}\right) |x', y', z'\rangle &= 1 - \frac{iP_y}{\hbar}(x\delta\phi) + \frac{iP_x}{\hbar}(y\delta\phi) |x', y', z'\rangle \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar}(P_yx\delta\phi - P_xy\delta\phi)\right] |x', y', z'\rangle \end{aligned}$$

esto es una traslación en  $\hat{x}, \hat{y}$ ,

$$(1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi) |x', y', z'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$$

Esta traslación es debida a una rotación infinitesimal en  $\delta\phi$  torno a  $z$  entonces genera las rotaciones clásicas en torno a  $z$ .

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle x', y', z' | \alpha \rangle \xrightarrow[\text{Rotamos en } z]{} \left\langle x', y', z' \left| 1 - \frac{iL_z \delta\phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = \langle x' + y' \delta\phi, y' - x' \delta\phi, z' | \alpha \rangle$$

y en coordenadas esféricas,

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \xrightarrow[\text{Rotamos en } z]{} \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$$

Podemos hallar una expresión para  $L_z$  en esféricas:

$$\left\langle r, \theta, \phi \left| 1 - \frac{L_z \delta\phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle \approx \langle \phi | \alpha \rangle - \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \delta\phi$$

identificamos

$$\left\langle \mathbf{r} \left| -\frac{iL_z}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \mathbf{r} | \alpha \rangle$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

operador  $L_z$  en esféricas.

Esta construcción usa que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \approx \frac{\langle \phi + \delta\phi | \alpha \rangle - \langle \phi | \alpha \rangle}{\delta\phi} = \frac{\langle \phi | \alpha \rangle - \langle \phi - \delta\phi | \alpha \rangle}{\delta\phi}$$

y luego se despeja de la última  $\langle \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$ .

Usando

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+)$$

se llega a

$$\langle r, \theta, \phi | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}] \right] \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle$$

$$L^2 = -\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \phi}^2$$

donde  $\nabla_{\theta, \phi}^2$  es la parte angular del laplaciano en coordenadas esféricas. Esto puede obtenerse también partiendo de

$$L^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$$



Sea un  $H$  de partícula, sin spín, sujeta a potencial simétricamente esférico. Sabemos que la función de onda  $\Psi_\alpha(\mathbf{r}')$  es separable en coordenadas esféricas, entonces:

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = (\langle r | \otimes \langle \theta, \phi |)(|n, l, m \rangle) = \langle r | n, l, m \rangle \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

Cuando el  $H$  es esféricamente simétrico (como en un potencial central) se tiene

$$[H, L_z] = [H, L^2] = 0$$

Trabajaremos solamente en la parte angular  $|\theta, \varphi\rangle \equiv |\hat{n}\rangle$

$$\langle \hat{n} | \ell, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\hat{n})$$

que es la amplitud de hallar  $|\ell, m\rangle$  en la dirección  $\hat{n}$ .

Podemos vincular ahora los armónicos esféricos con los autoestados de  $L_z, L^2$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

de manera que

$$\langle \hat{n} | L_z | \ell, m \rangle = m\hbar \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

y entonces

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto e^{im\phi}.$$

$$L^2 |\ell, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

y de modo ídem

$$\langle \hat{n} | L^2 | \ell, m \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

$$(-\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \phi}^2 + l(l+1)\hbar) \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = 0$$

Entonces, con la ortogonalidad

$$\longrightarrow \langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

y con la completitud

$$\longrightarrow \int d\Omega |\hat{n}\rangle \langle \hat{n}| = 1$$

de manera que llegamos a

$$\int d\Omega \langle l', m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad \int d\Omega Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

Podemos hallar una expresión para

$$\langle \hat{n} | L_+ | l, l \rangle = 0$$

$$-i\hbar e^{i\phi} \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle \hat{n} | l, l \rangle = 0 \Rightarrow Y_l^m(\theta, \phi) = c_l e^{il\phi} \sin^l \theta$$

Luego usamos  $L_-$  para hallar sucesivamente los demás  $Y_\ell^m$

$$\frac{\langle \hat{n} | L_- | l, m \rangle}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \langle \hat{n} | l, m-1 \rangle$$

y por este camino se llega a

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos^{l-m} \theta)} (\sin \theta)^{2l}$$

con

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)(Y_l^m(\theta, \phi))^* \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

En el caso de momento angular orbital  $\ell$  no puede ser semientero porque entonces  $m$  sería semientero y en una vuelta de  $2\pi$

$$e^{im2\pi} = -1$$

entonces  $\psi$  no será univaluada

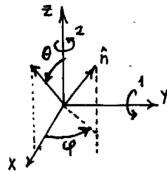
Además,

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iL_z 2\pi/\hbar} | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle \quad (\text{no hay signo menos})$$

# Armónicos esféricos como matrices de rotación

Se pueden hallar autoestados de dirección  $|\hat{n}\rangle$  rotando el  $|\hat{z}\rangle$ ,

$$\hat{n} = \mathcal{D}(R) |\hat{z}\rangle$$



**Figura 0.1**

Necesitamos aplicar  $\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(\alpha = \varphi, \beta = \theta, \gamma = 0)$

$$|\hat{n}\rangle = \sum_{m,\ell} \mathcal{D}(R) |\ell, m\rangle \langle \ell, m | \hat{z}\rangle$$

$$\langle \ell, m' | \hat{n}\rangle = \sum_{m,\ell} \langle \ell, m' | \mathcal{D}(R) | \ell, m\rangle \langle \ell, m | \hat{z}\rangle$$

pero como la  $\mathcal{D}(R)$  no conecta  $\ell$  diferentes, se tiene

$$\langle \ell, m' | \hat{n}\rangle = \sum_m \mathcal{D}_{m'm}^\ell(R) \langle \ell, m | \hat{z}\rangle$$

$$Y_\ell^{m'*}(\theta, \varphi) = \sum_m \mathcal{D}_{m'm}^\ell(R) Y_\ell^{m*}(\theta = 0, \varphi_{\text{indet}})$$

pero como  $\theta = 0$ ,  $Y_\ell^m = 0$  con  $m \neq 0$  se tiene

$$\langle \ell, m | \hat{z} \rangle = Y_\ell^{m*}(\theta = 0, \varphi_{\text{indet}}) \delta_{m0}$$

$$\langle \ell, m | \hat{z} \rangle = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

$$Y_\ell^{m'*}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{m'0}^\ell(\alpha = \varphi, \beta = \theta, \gamma = 0)$$

la matriz de rotación en este caso es un armónico esférico.

La  $\Psi$  tiene la misma simetría que el potencial.

## 5.1 Suma de momentos angulares

### 5.1.1 Dos momentos de spín 1/2

Sean dos estados de spín 1/2

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \equiv \mathbf{S}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbf{S}_2$$

en cada espacio valen las relaciones usuales de conmutación

$$[S_{1/2i}, S_{1/2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_{1/2k}, \quad [S_{1i}, S_{2j}] = 0$$

donde el último indica que operadores de espacios diferentes conmutan.

Un estado general es

$$|S_1, m_1\rangle \otimes |S_2, m_2\rangle \equiv |S_1, S_2; m_1, m_2\rangle$$

Hay cuatro estados

$$\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & m_1 & m_2 \\ |1/2, 1/2; & 1/2, & 1/2\rangle \\ |1/2, 1/2; & 1/2, & -1/2\rangle \\ |1/2, 1/2; & -1/2, & -1/2\rangle \\ |1/2, 1/2; & -1/2, & 1/2\rangle \\ S_1 & S_2 & S_{1z} & S_{2z} \end{array}$$

que corresponden a los operadores  $S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}$  que conmutan (son un CCOC).

Podemos elegir otras base de operadores que comutan que será:  $S_1^2, S_2^2, S, S_z$ , de modo que el estado general será

$$|S_1, S_2; S, m\rangle$$

Así tendremos

$$\begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \quad S \quad m \\ \text{Triplete} \left\{ \begin{array}{l} |1/2, 1/2; 1, 1\rangle \\ |1/2, 1/2; 1, 0\rangle \\ |1/2, 1/2; 1, -1\rangle \end{array} \right. \\ \text{Singlete} \left\{ \begin{array}{l} |1/2, 1/2; 0, 0\rangle \end{array} \right. \\ S_1^2 \quad S_2^2 \quad S^2 \quad S_z \end{array}$$

y recordemos que  $m_1 + m_2 = m$  y  $s_1 + s_2 = s$

$$S^2 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \quad S_z^2 = (S_{1z} + S_{2z})^2 = S_{1z}^2 + S_{2z}^2 + 2S_{1z} \cdot S_{2z}$$

Dada la repetición de  $S_1, D_2$  se suelen identificar a las bases solamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \{|m_1, m_2\rangle\} \\ \{|S, m\rangle\} \end{array} \right.$$

Además la base  $\{|m_1, m_2\rangle\}$  se puede poner como

$$+ \equiv +1/2 \quad - \equiv -1/2$$

### 5.1.2 Cambio entre bases

Podemos hallar a ojo que

- $|++\rangle = |1, 1\rangle$
- $|--\rangle = |1, -1\rangle$

de manera que la única forma de tener  $m = 1$  es con los dos spines up y la única forma de tener  $m = -1$  es con los dos spines down.

Se hallan los otros con el operador de bajada

$$S_- \equiv S_{1-} + S_{2-}$$

y si descompongo  $S_-$  en  $S_{1-}$  y  $S_{2-}$  para operar en  $\langle s, m \rangle$  se tiene

$$S_- |++\rangle = S_{1-} |++\rangle + S_{2-} |++\rangle = S_{1-} \otimes \mathbb{1}_2 |++\rangle + \mathbb{1}_1 \otimes S_{2-} |++\rangle = \hbar |+-\rangle + \hbar |+-\rangle$$

y ahora si opero con  $S_-$ ,

$$S_- |11\rangle = \sqrt{2}\hbar |10\rangle$$

- $|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + Ket+-)$

Luego

$$|00\rangle = a|+-\rangle + b| -+\rangle$$

y puedo usar ortonormalidad

$$\langle 10 | 00 \rangle = 0 = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \text{con } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

- $|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

## 5.2 Teoría formal de suma de momentos angulares

Sea de sumar dos momentos angulares  $J_1, J_2$ . Las relaciones de conmutación son

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k} \quad [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k} \quad [J_{1k}, J_{2l}] = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbf{J}_2 \equiv \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

El momento total  $\mathbf{J}$  cumple que

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} \quad J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$$

donde vemos que

$$[J_{1/2}^2, J^2] = 0 \quad [J_z, J^2] = 0 \quad [J_{1/2}^2, J_{1/2,z,+,-}] = 0$$

pero

$$[J^2, J_{1z}] \neq 0 \quad [J^2, J_{2z}] \neq 0$$

Esto deja dos opciones para elegir un CCOC

$J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$	$J_1^2, J_2^2, J^2, J_z$
$ j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$	$ j_1, j_2; j, m\rangle$
base desacoplada	base acoplada

Se puede pasar de una base a otra con una identidad  $\mathbb{1}$  apropiada

$$|j_1, j_2; j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m\rangle$$

$$1. |j_1, j_2; j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2}^j |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$$

con  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  y  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$

$$|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sum_{j, m} |j_1, j_2; j, m\rangle \langle j_1, j_2; j, m | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$$

$$2. |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sum_{j, m} C_{m_1 m_2}^{j*} |j_1, j_2; j, m\rangle$$

con  $-j \leq m \leq j$  y con  $j \rightarrow \infty$ .

Donde los  $C_{m_1 m_2}^j$  son los coeficientes de Clebsh-Gordan. En 2 la  $\sum$  sería en  $j \rightarrow \infty$ , pero veamos la relacion que hace algunos  $C_{m_1 m_2}^j = 0$ . Ante todo abreviaremos suprimiendo los índices  $j_1, j_2$  con lo cual

$$C_{m_1 m_2}^j = \langle m_1, m_2 | j, m\rangle$$

### 5.2.1 Restricciones para la no nulidad de los coeficientes

$$(J_z - J_{1z} - J_{2z}) |j, m\rangle = (m\hbar - J_{1z} - J_{2z}) |j, m\rangle = 0$$

$$\langle m_1, m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) |j, m\rangle = 0 \quad \hbar(m - m_1 - m_2) \langle m_1, m_2 | j, m\rangle = 0$$

entonces

$$\langle m_1, m_2 | j, m\rangle \neq 0 \iff m = m_1 + m_2$$

A su vez, en la suma de  $J_1$  y  $J_2$  resultan los  $j$  acotados por una desigualdad triangular

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Asimismo los  $C_{m_1 m_2}^j$  se toman reales, entonces

$$C_{m_1 m_2}^{j*} = C_{m_1 m_2}^j$$

y juntando todo se tiene

$$\langle m_1, m_2 | j, m\rangle \neq 0 \iff m = m_1 + m_2,$$

o lo que es equivalente

$$\langle j, m | m_1, m_2 \rangle \iff |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Ambas bases tienen la misma dimensión

$$\sum = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Recordemos que cada  $j$  tiene  $2j + 1$  estados posibles (los  $m$  correspondientes a cada  $j$ ) ( $|m| \leq j$ ). Si sumamos  $j_1 = 1, j_2 = 3/2$  tendremos

$$\dim = 2 \oplus 4 \oplus 6 = 3 \otimes 4 = 12$$

$$j = 1/2, 3/2, 5/2 \quad m_1 = -1, 0, 1$$

$$j = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2 \quad m_2 = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$$

Podemos ver a ojo que

$$|j = 5/2, m = 5/2\rangle = |m_1 = 1, m_2 = 3/2\rangle$$

$$|j = 5/2, m = -5/2\rangle = |m_1 = -1, m_2 = -3/2\rangle$$

luego con el  $J_-, J_+$  podemos construirnos los siguientes (utilizando ortonormalidad)

$$\langle j', m' | j, m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j', m' | m_1, m_2 \rangle \langle m_1, m_2 | j, m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

$$\sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j, m \rangle^2 = 1$$

siendo esto último la ortonormalidad.

### 5.2.2 Relación de recurrencia

$$J_{\pm} |j, m\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m'_1, m'_2} |m'_1, m'_2\rangle \langle m'_1, m'_2 | j, m \rangle$$

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle = \sum_{m'_1, m'_2} \langle m'_1, m'_2 | j, m \rangle (J_{1\pm} |m'_1, m'_2\rangle + J_{2\pm} |m'_1, m'_2\rangle)$$

y metiendo un bra  $\langle m_1, m_2 |$  se llega a la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle m_1, m_2 | j, m \pm 1 \rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle m_1 \mp 1, m_2 | j, m \rangle + \\ &\quad \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle m_1, m_2 \mp 1 | j, m \rangle \end{aligned}$$



### 5.2.3 Suma de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{S}$

Sea suma  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$ , entonces

$$j_1 = l \quad j_2 = S = 1/2 \quad m_1 = m_l \quad m_2 = m_s = \pm 1/2$$

$$|l - 1/2| \leq j \leq l + 1/2 \quad j = \begin{cases} l - 1/2 \\ l + 1/2 \end{cases}$$

$$m = m_l \pm 1/2 \quad m_l = m + 1/2, m - 1/2 \quad m_s = 1/2, -1/2$$

y luego  $\dim = (2l + 1) \otimes 2 = 4l + 2$ . Habrá sólo cuatro  $C_{m_1 m_2}^j$  no nulos, que serán

$$\langle m + 1/2, -1/2 | l - 1/2, m \rangle$$

$$\langle m + 1/2, -1/2 | l + 1/2, m \rangle$$

$$\langle m - 1/2, 1/2 | l - 1/2, m \rangle$$

$$\langle m - 1/2, 1/2 | l + 1/2, m \rangle$$

donde vemos que los coeficientes linean sólo los estados con  $j = \ell - 1/2$  y  $j = \ell + 1/2$  y podemos construir una matriz de  $2 \times 2$  para este caso.

Esto tórnase práctico para acoplamiento spin-órbita

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} |l, s; j, m\rangle = \frac{1}{2} (j(j+1)\hbar^2 - l(l+1)\hbar^2 - s(s+1/2)\hbar^2) |l, s; j, m\rangle$$

$$= \frac{1}{2} (j(j+1) - l(l+1) - 3/4) \hbar^2 |l, s; j, m\rangle$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} |l, s; j, m\rangle = \begin{cases} \frac{l\hbar^2}{2} |l, s; j, m\rangle & \text{si } j = l + 1/2 \\ -\frac{(l+1)\hbar^2}{2} |l, s; j, m\rangle & \text{si } j = l - 1/2 \end{cases}$$

## 5.3 Operadores vectoriales

Queremos analizar como transforma un operador vectorial  $\hat{v}$  bajo rotaciones en mecánica cuántica. En mecánica clásica,

$$V_i = R_{ij} V_j \quad \text{con } R \text{ matriz diagonal}$$

En mecánica cuántica tenemos que al rotar

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}(R) |\alpha\rangle$$

Pediremos entonces que  $\langle V \rangle$  transforme como un vector y eso lleva a que

$$\langle \alpha | V_i | \alpha \rangle_R = \langle \alpha | \mathcal{D}^\dagger(R) V_i \mathcal{D}(R) | \alpha \rangle = R_{ij} \langle \alpha | V_j | \alpha \rangle$$

$$\mathcal{D}(R)^\dagger V_i \mathcal{D}(R) = R_{ij} V_j \quad ()$$

y calculando la expresión anterior (1) llegamos a que debe valer

$$[V_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijR} V_R$$

que es la manera de transformar de un operador vectorial. Podemos probar un caso simple de una rotación infinitesimal en  $\hat{z}$  y ver que vale.

## 5.4 Operadores tensoriales

En mecánica clásica

$$T_{ij} = R_{ii'} R_{jj'} T_{i'j'}$$

que es un tensor de rango dos. Esto es un tensor cartesiano. Su problema es que no es irreducible, entonces puede descomponerse en objetos que transforman diferente ante rotaciones. Sea la díada  $U_i V_j$ , tensor de rango dos, que puede escribirse como

$$UV = \frac{1}{3} \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} + \frac{1}{2} (U_i V_j - U_j V_i) + \left[ \frac{1}{2} (U_i V_j + U_j V_i) - \frac{1}{3} \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} \right]$$

Hemos reducido el tensor cartesiano en tensores irreducibles. Podemos asociar esta descomposición con las multiplicidades de objetos con momento angular  $\ell = 0, \ell = 1, \ell = 2$

escalar  $\longrightarrow \ell = 0$  singlete (un elemento independiente)

vector  $\longrightarrow \ell = 1$  triplete (tres elementos independientes)

tensor de traza nula  $\longrightarrow \ell = 2$  quintuplete (cinco elementos independientes)

Se define

$T_q^{(k)}$  tensor esférico de rango  $k$  y número magnético  $q$

Un tensor esférico transforma como

$$\mathcal{D}(R)T_{q'}^{(k)}\mathcal{D}(R)^\dagger = \mathcal{D}(R)T_{q'}^{(k)} \quad (2)$$

Tendremos

$$T_0^{(0)} \quad (\text{escalar}) \text{ tensor esférico de rango } 0 \quad (\ell = 0)$$

$$(T_1^{(1)}, T_0^{(1)}, T_{-1}^{(1)}) \quad (\text{vector}) \text{ tensor esférico de rango } 1 \quad (\ell = 1)$$

En muchos casos se puede escribir un tensor esférico como armónico esférico

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m(\hat{n}) \xrightarrow{\text{paso}} \hat{n} \longrightarrow \vec{v} \quad Y_\ell^m(\vec{v}) \equiv Y_k^q(\vec{v}) = T_q^{(k)}$$

$$\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \longrightarrow \mathbf{v} = (rn_x, rn_y, rn_z)$$

$$\hat{n} = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_z \longrightarrow T_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} V_z$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{n_x \pm i n_y}{\sqrt{2}} \longrightarrow T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{V_x \pm i V_y}{\sqrt{2}}$$

Calculando en (2), cosa que podemos hacer para, por ejemplo, una rotación infinitesimal, llegamos a las relaciones de conmutación para tensores.

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \quad [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp 1)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

### Teorema de Wigner-Eckart

Es importante para el cálculo de transiciones evaluar elementos de matriz de operadores tensoriales. Los elementos matriciales de operadores tensoriales respecto de autoestados de momento satisfacen

$$\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \langle jk; mq | jk; j' m' \rangle \frac{\langle \alpha' j' | T^{(k)} | \alpha j \rangle}{(2j+1)}$$

un coeficiente que no depende de  $q, m, m'$ . El coeficiente que aparece primero es el coeficiente de Clebsh-Gordan de sumar momentos  $jk$  con  $m_1 = m, m_2 = q, m + q = m'$ .

La regla de selección se construye

$$\langle \alpha', j', m' | [J_z, T_q^{(k)}] - \hbar q T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \langle [J_z T_q^{(k)} - T_q^{(k)} J_z - \hbar q T_q^{(k)}] | \rangle$$

$$\langle \alpha', j', m' | 0 | \alpha, j, m \rangle = (\hbar m' - \hbar m - \hbar q) \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

$$0 = \hbar(m' - m - q) \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

$$\text{si } m' \neq m + q \longrightarrow \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = 0$$

Una idea de la demostración del teorema

$$\langle \alpha', j', m' | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | \alpha, j, m \rangle = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha', j', m' | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

$$\sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)} \langle \alpha', j', m' \pm 1 | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle -$$

$$\sqrt{(j' \mp m')(j' \pm m' + 1)} \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \pm 1 \rangle =$$

$$\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha', j', m' | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

Es la misma relación de recurrencia que la de los coeficientes de Clebsh-Gordan, si reemplazamos

$$m' = m \quad j = j_1 \quad m = m_1 \quad j' = j \quad k = j_2 \quad q = m_2$$

Como ambas relaciones son lineales, sus resultados serán proporcionales. Se puede asociar

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 \pm 1 | j_1, j_2; j, m \rangle \propto \langle \alpha', j', m' | T_{q\pm 1}^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

$$\langle j_1, k; m, q \pm 1 | j, k; j', m' \rangle \propto \langle \alpha', j', m' | T_{q\pm 1}^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

Logramos la igualdad metiendo una constante independiente de  $m', q, m$ .

### 6.0.1 Reglas de selección

Como se tiene a  $\langle | T_q^{(k)} | \rangle$  proporcional a los coeficientes de Clebsh-Gordan, serán válidas las mismas reglas de selección

$$m' = m + q \quad |j - k| \leq j' \leq j + k$$

## 6.1 Ejemplos de elementos matriciales de tensores

Sea un escalar (tensor de rango cero)

$$\langle \alpha' j' m' | T_0^{(0)} | \alpha j m \rangle \propto \langle j 0; m 0 | j 0; j' m' \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}$$

$$q = 0 \quad k = 0 \quad m + q = m' \rightarrow m = m'$$

$$|j - 0| \leq j' \leq j + 0 \rightarrow j = j'$$

No varían  $j, m$  en los estados No conecta estados con  $j, m$  diferentes un escalar.

Sea un vector (tensor de rango uno):

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(1)} | \alpha j m \rangle \propto \langle j 1; m q | j 1; j' m' \rangle$$

$$q = 1, 0, -1 \quad k = 1 \quad m + \{1, 0, -1\} = m' \rightarrow m - m' = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$|j - 1| \leq j' \leq j + 1 \quad -1 \leq j' - j \leq 1 \rightarrow j - j' = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

Conecta estados que están separados por un  $j$  y un  $m$ .

### 6.1.1 Teorema de proyección

Consideremos lo que sucede en el teorema de Wigner-Eckart si  $j = j'$  y se lo aplicamos a un operador vectorial  $T_q^{(k=1)} \equiv V_q$

$$\langle \alpha' j m' | V_q | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle j m' | J_q | j m \rangle$$

Como caso especial, si  $\alpha' = \alpha$  estoy en un subespacio donde coinciden los números cuánticos, se tiene

$$\mathbf{V} = \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \mathbf{J}$$

### 6.1.2 Aplicación del teorema de proyección

Sea un  $H_0$  esféricamente simétrico  $[H_0, \mathbf{J}] = 0$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  y  $J^2 = (L + S)^2$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{r} \quad |E, \ell, s, j, m\rangle \quad 2j+1 \text{ degenerados}$$

que equivale a un  $CCOC : H, L^2, S^2, J^2, J_z$  donde cada autovalor dentro del ket es el que corresponde a estos operadores.

Si meto un campo  $B$  en  $\hat{z}$  tendré

$$H \equiv H_0 + H_1 = H_0 - \frac{\mu_B B}{\hbar} (L_z + 2S_z)$$

lo cual debería romper la degeneración.

$$L_z + 2S_z = \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{L} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} J_z + 2 \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{L} \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} J_z$$

pero no puedo poner este nuevo operador, que mete el campo B, en el CCOC directamente, entonces uso teorema de proyección.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{L} = L^2 + \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = S^2 + \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

Entonces tengo todo expresado en función de  $J_z$  que sí forma parte de mi CCOC.

## Capítulo 7

---

### Simetrías en mecánica cuántica

En mecánica clásica tenemos el teorema de Noether

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} (p_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial p_i = cte.$$

Y  $\mathcal{H}, \mathcal{L}$  no cambian con la transformación  $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (p_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial p_i = cte.$$

En mecánica cuántica definiremos un operador unitario  $\$$  asociado a traslación/rotación. Pensemos en una transformación infinitesimal dada por  $\$$

$$\$ = 1 - i \frac{\varepsilon}{\hbar} G \quad G \equiv \text{generador hermítico (de la transf.)}$$

Sea el  $H$  invariante frente a  $\$$ , entonces

$$S^\dagger H S = H \quad \rightarrow \quad [H, \$] = 0 \quad \rightarrow \quad [H, G] = 0 \rightarrow \frac{dG}{dt} = 0 \rightarrow G \text{ es cte. de movimiento}$$

Esto significa que el autovalor no varía con el tiempo, Como  $[H, G] = 0$  se tiene (si no hay degeneración)

$$G |n\rangle = k |n\rangle \quad \text{pues} \quad H(G |n\rangle) = E_n(k |n\rangle)$$

invariancia frente a traslaciones  $G = \mathbf{p}$  e invariancia frente a rotaciones  $G = \mathbf{J}$ .

### 7.0.1 Simetría de paridad

Transforma un RHS en LHS. Es decir que hace

$$\mathbf{x} \longrightarrow -\mathbf{x}$$

y solicitaremos un operador unitario llamado paridad que verifique

$$|\alpha\rangle \longrightarrow \Pi |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$$

si  $\Pi$  es unitario y  $\Pi^2 = \mathbb{1}$  entonces es hermítico. Queremos que refleje el

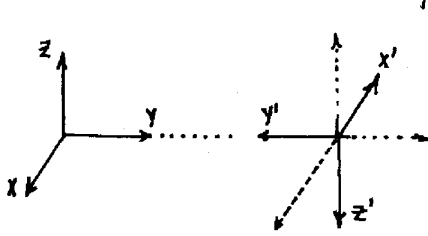


Figura 0.1

$\langle \hat{x} \rangle$

$$\langle \alpha' | \mathbf{x} | \alpha' \rangle = -\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle$$

$$\langle \alpha | \Pi^\dagger \mathbf{x} \Pi | \alpha \rangle = -\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle \rightarrow \Pi^\dagger \mathbf{x} \Pi = -\mathbf{x}$$

y entonces

$$\{\mathbf{x}, \Pi\} = 0,$$

anticonmuta con  $\mathbf{x}$ . Debido a ello

$$\Pi |\mathbf{x}'\rangle = |-\mathbf{x}'\rangle \quad \Pi^2 \equiv \mathbb{1}$$

lo cual dice que los autovalores son  $\pm 1$  y  $\Pi$  es unitario y hermítico. Como  $\hat{\Pi}$  no depende del tiempo

$$\Pi^\dagger \mathbf{p} \Pi = \Pi^\dagger \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Pi = \frac{d}{dt} (\Pi^\dagger \mathbf{p} \Pi) = \frac{d-\mathbf{x}}{dt} \rightarrow \{\mathbf{p}, \Pi\} = 0$$

y vemos que anticonmuta con  $\mathbf{p}$ .  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  son operadores impares. En cambio  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  es un operador par, entonces

$$[\mathbf{L}, \Pi] = 0 \quad [\mathbf{J}, \Pi] = 0$$



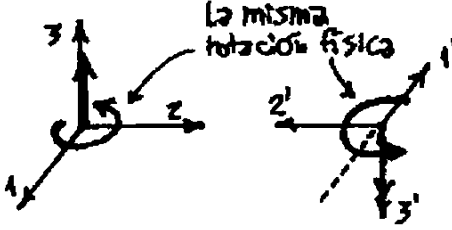


Figura 0.2

Que conmuta con  $\mathbf{J}$  puede verse de pedirle que

$$[\Pi, \mathcal{D}(R)] = 0 \longrightarrow [\Pi, \mathbf{J}] = 0,$$

cosa que vale en mecánica clásica, entonces

$$R(\text{paridad}) R(\text{rotación}) = R(\text{rotación}) R(\text{paridad})$$

$$\Pi^\dagger \square \Pi = \begin{cases} +\square & \text{par vector axial (pseudovector)} \\ -\square & \text{impar vector polar} \end{cases}$$

$$\Pi^\dagger \square \Pi = \begin{cases} +\square & \text{par escalar} \\ -\square & \text{impar pseudoescalar} \end{cases}$$

$$\Pi^\dagger \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \Pi = \Pi^\dagger \mathbf{S} \Pi \cdot \Pi^\dagger \mathbf{x} \Pi = \mathbf{S} \cdot (-\mathbf{x}) = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$$

y  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$  es un pseudoescalar.

### 7.0.2 Función de onda bajo paridad

$$\Psi_\alpha(x') = \langle x' | \alpha \rangle = \langle x' | \Pi | \alpha \rangle = \langle x' | \alpha' \rangle = \langle -x' | \alpha \rangle$$

y entonces la función de onda de un estado al que se le aplicó paridad será

$$\Psi_{\alpha'}(x') = \Psi_\alpha(-x')$$

Sea  $|\alpha\rangle$  autoestado de paridad, entonces

$$\Pi |\alpha\rangle = \pm |\alpha\rangle$$

los autovalores serán  $\pm 1$

$$\langle x' | \alpha' \rangle = \pm \langle x' | \alpha \rangle = \langle -x' | \alpha \rangle$$

$$\Psi_{\alpha}(-x') = \begin{cases} +\Psi_{\alpha}(x') & \text{función de onda par} \\ -\Psi_{\alpha}(x') & \text{función de onda impar} \end{cases}$$

no toda función de onda tiene paridad bien definida.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} &\longrightarrow (r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \phi + \pi) \\ \langle x' | \alpha, \ell, m \rangle &= R_{\alpha}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \rightarrow \text{con } \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \text{ será} \\ Y_{\ell}^m(\pi - \theta, \phi + \pi) &= (-1)^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \\ \Pi | \alpha, \ell, m \rangle &= (-1)^{\ell} | \alpha, \ell, m \rangle \end{aligned}$$

Como  $[\mathbf{L}, \hat{\Pi}] = 0$  un autoestado de  $\mathbf{L}$  es autoestado de  $\hat{\Pi}$ .

### 7.0.3 Teorema

Sea  $[H, \pi] = 0$  y  $|n\rangle$  autoestados no degenerados de  $H$

$\Rightarrow |n\rangle$  es autoestado de  $\Pi$ .

La demostración

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\Pi}{2}\right) |n\rangle = \frac{\Pi^2 \pm \Pi}{2} |n\rangle = \Pi \left(\frac{\pm 1 + \Pi}{2}\right) |n\rangle = \pm \Pi \frac{1 \pm \Pi}{2} |n\rangle$$

y entonces es autoestado de paridad con autovalor  $\pm 1$ .

$$H \frac{1}{2} (1 \pm \Pi) |n\rangle = \frac{1}{2} E_n |n\rangle \pm \frac{E_n}{2} \Pi |n\rangle = E_n \left[ \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\Pi}{2}\right) \right]$$

y es autoestado de  $H$ , de manera que

$$\left(\frac{1 \pm \Pi}{2}\right) |n\rangle = |n\rangle \Rightarrow |n\rangle \text{ es autoestado de paridad}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |n\rangle \pm \frac{\Pi}{2} |n\rangle &= |n\rangle \\ \pm \frac{\Pi}{2} |n\rangle &= + \frac{|n\rangle}{2} \Rightarrow \Pi |n\rangle = \pm |n\rangle \end{aligned}$$

Un caso donde falla el teorema

$$[H, \Pi] = 0 \quad \text{con} \quad H = \frac{p^2}{2m}$$

pero  $|p'\rangle$  no es autoestado de  $\Pi$  por la degeneración  $|p'\rangle, |-p'\rangle$  son ambos correspondientes al autovalor  $p'^2/2m$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} |p'\rangle = \frac{p'^2}{2m} |p'\rangle \quad \frac{\hat{p}^2}{2m} |-p'\rangle = \frac{p'^2}{2m} |-p'\rangle$$

$$\Pi |p'\rangle = |-p'\rangle$$

y  $|p'\rangle$  no es autoestado de  $\Pi$ .

### 7.0.4 Reglas de selección de paridad $\Pi$

Sean  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  autoestados de paridad

$$\Pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle \quad \Pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta |\beta\rangle$$

siendo para el caso impar

$$\langle\beta|\square|\alpha\rangle = -\langle\beta|\Pi^\dagger\square\Pi|\alpha\rangle = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|\square|\alpha\rangle,$$

y en el caso par

$$\langle\beta|\square|\alpha\rangle = \langle\beta|\Pi^\dagger\square\Pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|\square|\alpha\rangle$$

Si el operador  $\square$  es impar (como  $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ ) entonces  $\varepsilon_\alpha = 1, \varepsilon_\beta = -1$  o bien  $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = 1$ .

Si el operador  $\square$  es par (como  $\mathbf{L}, \mathbf{S}$ ) entonces  $\varepsilon_\alpha = 1, \varepsilon_\beta = 1$  o bien  $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = -1$ .

- Operadores impares solo conectan estados de paridad opuesta
- Operadores pares solo conectan estados de la misma paridad

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

entonces

$$\int \int dx' dx'' \langle\beta|x''\rangle \langle x''|\mathbf{x}|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle = 0$$

y como es  $\langle x''|\mathbf{x}|x'\rangle = x'\delta(x' - x'')$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \langle\beta|x'\rangle x' \langle x'|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \Psi_\beta^*(x') x' \Psi_\alpha(x')$$

## 7.1 Inversión temporal (reversión de movimiento)

En mecánica clásica sería *pasar la película hacia atrás*

$$t \longrightarrow -t$$

En sistemas sin fuerzas disipativas se tiene

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

siendo  $x(t)$  y  $x(-t)$  soluciones de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  pues si  $t \rightarrow -t$  se tiene

$$m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

dado que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(-t)}{dt^2}$$

En mecánica cuántica tendremos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V \right) \Psi(x, t)$$

y si hacemos el cambio  $t \rightarrow -t$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, -t)}{\partial t} = -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V \right) \Psi(x, t)$$

se ve que  $\Psi(x, -t)$  no es solución de Schrödinger.

Pero notemos que  $\Psi^*(x, -t)$  cumple la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^*(x, -t)}{\partial t} = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial t}$$

Entonces necesitamos un operador que respete esta característica. Necesitaré el producto interno conjugado

$$\Psi_\alpha(x') = \langle x' | \alpha \rangle \quad \Psi_\alpha^*(x') = \langle x' | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | x' \rangle$$

El operador involucrado no será unitario

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \hat{\Theta} |\alpha\rangle \quad |\tilde{\beta}\rangle = \hat{\Theta} |\beta\rangle$$

Si  $\hat{\Theta}$  unitario se conserva el producto interno

$$\langle \hat{\beta} | \hat{\alpha} \rangle = \langle \beta | \hat{\Theta}^\dagger \hat{\Theta} | \alpha \rangle = \langle \beta | \mathbb{1} | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle$$

Pediremos antiunitariedad y antilinealidad al operador  $\hat{\Theta}$

$$\langle \hat{\beta} | \hat{\alpha} \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$$

$$\hat{\Theta}[C_\alpha |\alpha\rangle + C_\beta |\beta\rangle] = C_\alpha^* \hat{\Theta} |\alpha\rangle + C_\beta^* \hat{\Theta} |\beta\rangle$$

siendo lo primero la antiunitariedad y lo segunda la antilinealidad.

Todo operador antiunitario y antilineal puede escribirse como producto

$$\Theta = UK$$

donde  $U$  es unitario y  $K$  la conjugación compleja.  $K$  no cambia los autoestados, porque en base canónica un autoestado tiene un solo elemento (1) que no es nulo.

$$K(C|\alpha\rangle) = CK|\alpha\rangle = C^*K(\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle) = C^*(\sum_{a'}\langle a'|\alpha\rangle^*K|a'\rangle) = C^*(\sum_{a'}\langle a'|\alpha\rangle^*|a'\rangle)$$

Veamos que  $UK$  es antiunitario

$$|\hat{\alpha}\rangle = UK|\alpha\rangle = \sum_{a'}\langle a'|\alpha\rangle^*U|a'\rangle \quad |\hat{\beta}\rangle = UK|\beta\rangle = \sum_{a''}\langle a''|\beta\rangle^*U|a''\rangle$$

$$\langle\hat{\beta}| = \sum_{a''}\langle a''|\beta\rangle\langle a''|U^\dagger$$

entonces

$$\langle\hat{\beta}|\hat{\alpha}\rangle = \sum_{a''}\langle a''|\beta\rangle\langle a''|U^\dagger\sum_{a'}\langle a'|\alpha\rangle^*U|a'\rangle$$

$$\sum_{a',a''}\langle a''|\beta\rangle\langle a'|\alpha\rangle^*\langle a''|U^\dagger U|a'\rangle = \sum_{a'}\langle a'|\beta\rangle\langle a'|\alpha\rangle^* = \sum_{a'}\langle\beta|a'\rangle^*\langle a'|\alpha\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

y entonces  $UK$  es antinunitario.

Notemos que no se define  $\hat{\Theta}^\dagger$  actuando sobre bras. La demostración anterior esperó a quitarse de encima  $\hat{K}$  para hacer dual conjugado al  $|\hat{\beta}\rangle$ .

### 7.1.1 Operadores ante $\hat{\Theta}$

Usaremos la notación

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \hat{\Theta}|\alpha\rangle$$

donde hay que tener en cuenta

$$\Theta^\dagger\Theta = \mathbb{1}$$

pues  $\Theta^\dagger$  no está definido.

Sería razonable esperar que

$$\langle\hat{\alpha}|\mathbf{p}|\hat{\alpha}\rangle = -\langle\alpha|\mathbf{p}|\alpha\rangle \quad \langle\hat{\alpha}|\mathbf{x}|\hat{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$$

Sea  $\hat{\mathcal{O}}$  un operador hermítico

$$\langle\alpha|\mathcal{O}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\gamma\rangle$$

$$\langle \hat{\alpha} | \hat{\gamma} \rangle^* = \langle \alpha | \gamma \rangle \Rightarrow \langle \hat{\alpha} | \hat{\gamma} \rangle = \langle \gamma | \alpha \rangle$$

y como  $\langle \hat{\alpha} | \Theta | \gamma \rangle = \langle \hat{\alpha} | \Theta \mathbb{0} | \alpha \rangle$ . Luego metemos un  $\Theta^{-1}\Theta = 1$

$$\langle \hat{\alpha} | \Theta \mathbb{0} \Theta^{-1} \Theta | \alpha \rangle = \langle \hat{\alpha} | \Theta \mathbb{0} \Theta^{-1} | \hat{\alpha} \rangle = \langle \alpha | \mathbb{0} | \alpha \rangle$$

Notamos que no se aplica  $\Theta$  sobre bra alguno y tenemos  $\Theta$  no unitario. Entonces requeriremos

$$\Theta \hat{p} \Theta^{-1} = -\hat{p} \quad \Theta \hat{j} \Theta^{-1} = -\hat{j}$$

$$\hat{\Theta} \hat{p} = -\hat{p} \hat{\Theta} \Rightarrow \{\hat{\Theta}, \hat{p}\} = 0$$

como para  $\mathbf{p}, \mathbf{J}$  operadores impares

$$\Theta \hat{x} \Theta^{-1} = \hat{x}$$

$$\hat{\Theta} \hat{x} = -\hat{x} \hat{\Theta} \Rightarrow [\hat{\Theta}, \hat{x}] = 0$$

y  $\mathbf{x}$  operador par.

Los operadores pares conmutan con  $\Theta$ ,

$$\Theta |x'\rangle = |x'\rangle \quad \Theta |p'\rangle = |-p'\rangle$$

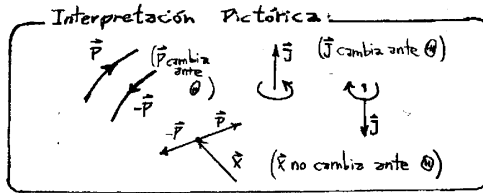


Figura 1.3

Hamiltoniano ante reversión de movimiento. Veamos la reversión de un sistema en estado  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha, t + \delta t\rangle = \left( \mathbb{1} - i \frac{\delta t}{\hbar} H \right) |\alpha\rangle$$

Si el hamiltoniano es invariante ante reversión temporal debería ser lo mismo

$$\underline{U}_{+\delta t} |\alpha\rangle = \underline{U}_{-\delta t} |\alpha\rangle$$

es decir que estamos pidiendo que se obtenga el mismo estado

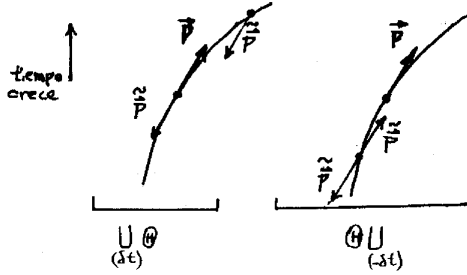


Figura 1.4

- Si revertimos el movimiento y evolucionamos  $\delta t$ .
- Si evolucionamos hacia atrás  $-\delta t$  y revertimos el movimiento.

Veamos que vale lo anterior, pensando que si vale se tiene

$$\left(1 - i\frac{\delta t}{\hbar}H\right)\Theta|\alpha\rangle = \Theta\left(1 + i\frac{\delta t}{\hbar}H\right)|\alpha\rangle$$

$$-i\frac{\delta t}{\hbar}H\Theta|\alpha\rangle = \Theta i\frac{\delta t}{\hbar}H|\alpha\rangle$$

$$-iH\Theta|\alpha\rangle = \Theta(iH|\alpha\rangle)$$

$$[H, \Theta] = 0$$

Si  $\Theta$  era unitario teníamos la relación de anticonmutación  $\{H, \Theta\} = 0$  lo cual lleva a absurdos. Si  $\{H, \Theta\} = 0$

$$\Theta^{-1}\frac{p^2}{2m}\Theta = -\frac{p^2}{2m} < 0 \text{ partícula libre con energía negativa } H \text{ debe ser par frente a } \Theta$$

### 7.1.2 Función de onda

Sea en  $t = 0$  un sistema en el estado  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int dx' \langle x' | \alpha \rangle |x'\rangle$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \int dx' \langle x' | \alpha \rangle^* \Theta|x'\rangle = \int dx' \langle x' | \alpha \rangle^* |x'\rangle$$

$$\Psi_\alpha(x') \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Psi_\alpha^*(x')$$

Esto era lo que *vimos* en la ecuación de Schrödinger.

### 7.1.3 Reversión de movimiento sobre $\mathbf{J}$

$\Theta |\mathbf{J}\rangle$  no tiene sentido porque  $J_x, J_y, J_z$  no conmutan entre ellos. Analizaremos  $|\ell, m\rangle$

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) \longrightarrow \Theta \longrightarrow Y_\ell^m(\theta, \phi)^* = Y_\ell^{-m}(\theta, \phi)(-1)^m$$

$$\Theta \ell, m \equiv (-1)^m \ell, -m$$

Lo que hace  $\Theta$  es invertir la componente de  $\hat{z}$  y alterar la fase. Se ve que

$$\Theta^2 = \mathbb{1}$$

### 7.1.4 Reversión para sistemas de spin 1/2

Sea un estado general up de spin  $|\hat{n}; +\rangle$ , que se obtiene con dos rotaciones

$$\hat{S} \cdot \hat{n} |\hat{n}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\hat{n}; +\rangle$$

entonces

$$e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}S_z} e^{-i\frac{\beta}{\hbar}S_y} |+\rangle \equiv |\hat{n}; +\rangle$$

$$\Theta |\hat{n}; +\rangle = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}S_z} e^{-i\frac{\beta}{\hbar}S_y} = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}S_z} e^{-i\frac{\beta}{\hbar}S_y} \eta |-\rangle$$

$$\Theta |\hat{n}; +\rangle = \eta |\hat{n}; -\rangle$$

pero

$$|\hat{n}; -\rangle = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}S_z} e^{-i\frac{\beta}{\hbar}S_y} |+\rangle$$

dado que

$$e^{-i\frac{\pi}{\hbar}S_y} |+\rangle = |-\rangle$$

$$\Theta |\hat{n}; +\rangle = \eta e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}S_z} e^{-i\frac{\beta}{\hbar}S_y} e^{-i\frac{\pi}{\hbar}S_y} |+\rangle$$

$$\Theta = \eta e^{-i\frac{\pi}{\hbar}S_y} \text{ (Para sistemas de spin } 1/2\text{)}$$

donde

$$\Theta |+\rangle = \eta_+ |-\rangle \quad \Theta |-\rangle = \eta_- (-|+\rangle)$$

y como

$$\Theta^2 = -\mathbb{1}$$

$$\Theta^2(c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle) = \Theta(c_+^* \eta_+ |-\rangle + c_-^* \eta_- |+\rangle) = -c_+ \eta^* \eta |+\rangle - c_- \eta^* \eta |-\rangle = -(c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle)$$

luego

$$\Theta |j, m\rangle = i^{2m} |j, -m\rangle = (-1)^m |j, -m\rangle$$

para todo  $j$  entero o semientero.



### 7.1.5 Teorema

Sea  $H$  invariante ante  $\Theta$  y los  $|n\rangle$  no degenerados, entonces la auto-función de energía puede hacerse real tomando una fase apropiada.

Demostración

$$H\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle = E_n\Theta|n\rangle \longrightarrow \Theta|n\rangle = \delta|n\rangle$$

$$\Psi_n = \langle \mathbf{x} | n \rangle \longrightarrow \Psi_{\tilde{n}} = \langle \mathbf{x} | \tilde{n} \rangle = \langle n | \mathbf{x} \rangle = \Psi_n(\mathbf{x})^*$$

y esto por ser antinunitario  $\Theta$

$$\Psi_{\tilde{n}} = \langle \mathbf{x} | \Theta | n \rangle = \delta \langle \mathbf{x} | n \rangle = \delta \Psi_n(\mathbf{x})$$

sea  $\delta = 1$  entonces

$$\Psi_n^* = \Psi_n \longrightarrow \Psi_n(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$$

Si le aplico al sistema transformaciones dadas por operadores que conmutan con el  $H$  no lo sacamos del autoestado en que se encuentra con el paso del tiempo. En ese sistema solo será razonable medir variables representadas por esos operadores; puesto que de lo contrario estamos alterando el sistema y nos es imposible saber donde ha quedado.

## Capítulo 8

---

### Métodos perturbativos

Se basan en

$H = H_0 + \lambda V$      $\lambda \ll 1$   $\lambda$  es un parámetro para controlar la perturbación

con  $H_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$  (el problema sin perturbar)

$$H |n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |n(\lambda)\rangle$$

que sería la solución exacta. Como esto es hartocomplicado podemos desarrollar en serie

$$E_n(\lambda) \approx E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2$$
$$|n(\lambda)\rangle \approx |0_n\rangle + \lambda |1_n\rangle + \lambda^2 |2_n\rangle$$

siendo  $n$  autoestado correspondiente y  $(0), (1), (2)$  los órdenes del desarrollo perturbativo. Luego,

$$(H_0 + \lambda V) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |i_n\rangle \right] = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j E_n^{(j)} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |i_n\rangle \right)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} H_0 \lambda^i |i_n\rangle + \lambda V \lambda^i |i_n\rangle = \sum_{i,j} \lambda^j E_n^j \lambda^i |i_n\rangle$$

y aproximando los primeros términos

$$H_0 |0_n\rangle + H_0 \lambda |1_n\rangle + H_0 \lambda^2 |2_n\rangle + V \lambda |0_n\rangle + V \lambda^2 |1_n\rangle + \dots =$$
$$E_n^0 |0_n\rangle + E_n^0 \lambda |1_n\rangle + E_n^0 \lambda^2 |2_n\rangle + E_n^1 \lambda |0_n\rangle + E_n^1 \lambda^2 |1_n\rangle + E_n^1 \lambda^3 |2_n\rangle + E_n^2 \lambda^2 |0_n\rangle$$

ahora igualamos orden a orden y resulta

$$\lambda^0 \dots H_0 |0_n\rangle = E_n^0 |0_n\rangle$$

$$\lambda^1 \dots H_0 |1_n\rangle + V |0_n\rangle = E_n^0 |1_n\rangle + E_n^1 |0_n\rangle$$

$$\lambda^2 \dots H_0 |2_n\rangle + V |1_n\rangle = E_n^0 |2_n\rangle + E_n^2 |0_n\rangle + E_n^1 |1_n\rangle$$

Pediremos una normalización a cada orden y considerando  $\langle 0_n | n(\lambda) \rangle \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} (\langle 0_n | + \lambda \langle 1_n | + \lambda^2 \langle 2_n |) (|0_n\rangle + \lambda |1_n\rangle + \lambda^2 |2_n\rangle) = \\ \langle 0_n | 0_n \rangle + \lambda \langle 1_n | 0_n \rangle + \lambda^2 \langle 2_n | 0_n \rangle \\ \lambda \langle 0_n | 1_n \rangle + \lambda^2 \langle 1_n | 1_n \rangle + \lambda^3 \langle 2_n | 1_n \rangle \\ \lambda^2 \langle 0_n | 2_n \rangle + \lambda^3 \langle 1_n | 2_n \rangle + \lambda^4 \langle 2_n | 2_n \rangle \\ \hline \lambda^0 \quad \lambda^1 \qquad \qquad \qquad \lambda^2 \quad \lambda^3 \end{array}$$

$$\langle 0_n | 0_n \rangle = 1$$

$$\langle 0_n | 0_n \rangle + \langle 1_n | 0_n \rangle + \langle 0_n | 1_n \rangle = 1 \longrightarrow \langle 1_n | 0_n \rangle = -\langle 0_n | 1_n \rangle$$

$$\langle 0_n | 0_n \rangle + \langle 1_n | 0_n \rangle + \langle 0_n | 1_n \rangle + \langle 2_n | 0_n \rangle + \langle 1_n | 1_n \rangle + \langle 0_n | 2_n \rangle = 1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

En un mismo autoestado  $(n)$  los órdenes diferentes  $(i)$  no son necesariamente ortogonales.

## 8.1 Resolución

A orden cero será

$$(H_0 - E_n^0) |0_n\rangle = 0 \quad \text{y se define} \quad |0_n\rangle \equiv |\varphi_n q\rangle$$

y  $|0_n\rangle$  es dato porque es el estado no perturbado. A orden uno tenemos

$$\langle \varphi_n | H_0 - E_n^0 | 1_n \rangle + \langle \varphi_n | V - E_n^1 | 0_n \rangle = 0$$

$$E_n^1 = \langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle$$

y la energía hasta orden uno es

$$E_n = E_n^0 + \lambda \langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle$$

Veamos el autoestado a orden uno. Podemos poner (no hay degeneración)

$$|1_n\rangle = \sum_p (\langle \varphi_p | 1_n \rangle) |\varphi_p\rangle$$

y sea  $p \neq n$

$$\langle \varphi_p | H_0 - E_n^0 | 1_n \rangle + \langle \varphi_p | V - E_n^1 | 0_n \rangle = 0$$

$$(E_p^0 - E_n^0) \langle \varphi_n | 1_n \rangle + \langle \varphi_p | V | 0_n \rangle = E_n^1 \langle \varphi_p | 0_n \rangle = 0$$

lo que significa que a un mismo orden (cero) diferentes autoestados son ortogonales.

$$\langle \varphi_p | 1_n \rangle = \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0}$$

Sea  $p = n$  entonces

$$\langle \varphi_n | 1_n \rangle = \langle 0_n | 1_n \rangle = 0$$

ya lo vimos antes, en la normalización

$$|n(\lambda)\rangle = |0_n\rangle + \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\varphi_p\rangle$$

autoestado hasta orden uno. A orden dos tenemos

$$(H_0 - E_n^0) |2_n\rangle + (V - E_n^1) |1_n\rangle - E_n^2 |0_n\rangle = 0$$

$$\langle \varphi_n | H_0 - E_n^0 | 2_n \rangle + \langle \varphi_n | V - E_n^1 | 1_n \rangle - \langle \varphi_n | E_n^2 | 0_n \rangle = 0$$

$$\langle \varphi_n | V | 1_n \rangle = E_n^2 \underbrace{\langle \varphi_n | 0_n \rangle}_{=1} + E_n^1 \underbrace{\langle \varphi_n | 1_n \rangle}_{=0}$$

$$E_n^2 = \langle \varphi_n | V | 1_n \rangle$$

$$E_n^2 = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} \langle \varphi_n | V | \varphi_p \rangle$$

$$E_n^2 = \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_p^0}$$

que es la energía a orden dos. Veamos el autoestado a orden dos

$$|2n\rangle = \sum_p (\langle \varphi_p | 2_n \rangle) |\phi_p\rangle$$

sea  $p \neq n$

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi_p | H_0 - E_n^0 | 2_n \rangle + \langle \varphi_p | V - E_n^1 | 1_n \rangle = \langle \varphi_p | E_n^2 | 0_n \rangle \\
& (H_0 - E_n^0) \langle \varphi_p | 2_n \rangle + \langle \varphi_p | V | 1_n \rangle - E_n^1 \langle \varphi_p | 1_n \rangle = E_n^2 \underbrace{\langle \varphi_p | 0_n \rangle}_{=0} \\
& \langle \varphi_p | 2_n \rangle = \frac{E_n^1 \langle \varphi_p | 1_n \rangle}{E_p^0 - E_n^0} - \frac{\langle \varphi_p | V | 1_n \rangle}{E_p^0 - E_n^0} \\
& \sum_k \frac{\langle \varphi_n | V | 1_n \rangle}{E_p^0 - E_n^0} \langle \varphi_p | \varphi_q \rangle \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} + \frac{1}{E_n^0 - E_p^0} \left\langle \varphi_p \left| V \sum_k \frac{\langle \varphi_k | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} \right| \varphi_k \right\rangle \\
& \langle \varphi_p | 2_n \rangle = \frac{\langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle \langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{(E_p^0 - E_n^0)(E_n^0 - E_p^0)} + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | V | \varphi_n \rangle}{(E_n^0 - E_p^0)(E_n^0 - E_k^0)}
\end{aligned}$$

Sea  $p = n$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\langle 0_n | 0_n \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle 1_n | 0_n \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0_n | 1_n \rangle}_{=0} + \langle 2_n | 0_n \rangle + \langle 1_n | 1_n \rangle + \langle 0_n | 2_n \rangle = 1 \\
& \langle 2_n | 0_n \rangle + \langle 0_n | 2_n \rangle = -\langle 1_n | 1_n \rangle \\
& \langle 0_n | 2_n \rangle = -\frac{1}{2} \langle 1_n | 1_n \rangle \\
& -\frac{1}{2} \langle 1_n | 1_n \rangle = \sum_k -\frac{1}{2} \langle 1_n | 0_k \rangle \langle 0_k | 1_n \rangle \\
& -\frac{1}{2} \langle 1_n | 1_n \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \varphi_k | V | \varphi_n \rangle|^2}{(E_n^0 - E_k^0)^2} = \langle 0_n | 2_n \rangle \\
& |2_n\rangle = \sum_{p \neq n} -\frac{V_{nn} V_{pn}}{(E_p^0 - E_n^0)^2} |\varphi_p\rangle + \sum_{p \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{V_{pk} V_{kn}}{(E_n^0 - E_p^0)(E_n^0 - E_k^0)} |\varphi_p\rangle - \frac{1}{2} \sum_p \sum_{k \neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{(E_n^0 - E_k^0)^2} |\varphi_p\rangle
\end{aligned}$$

y el autoestado hasta orden dos

$$|n(\lambda)\rangle = |0_n\rangle + \sum_{p \neq n} \frac{V_{pn}}{\Delta E_{np}^0} |2_n\rangle + |2_n\rangle$$

con la energía hasta orden dos

$$E_n = E_n^0 + \lambda \langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle + \lambda^2 \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle|^2}{(E_n^0 - E_p^0)^2}$$

### 8.1.1 Caso degenerado

Sea que hay degeneración de orden  $g$  en el autoestado  $N$  ( a orden cero)

$$H_0 |\varphi_n^k\rangle = E_N^0 |\varphi_N^k\rangle \quad k = 1, 2, \dots, g$$

Suponemos existe combinación lineal

$$|0_N^j\rangle = \sum_k a_k^j |\varphi_N^k\rangle$$

para escribir un estado degenerado en función de los otros.

$$\begin{aligned} (H_0 - E_N^0) |1_N^j\rangle + (V - E_N^{1j}) |0_N^j\rangle &= 0 \\ \underbrace{\langle 0_N^j | H_0 - E_N^0 | 1_N^j \rangle}_{=0} + \langle 0_N^j | V - E_N^{1j} | 0_N^j \rangle &= 0 \\ \sum_k \langle 0_N^j | (V - E_N^{1j}) a_k^j | \varphi_N^k \rangle &= 0 \\ \sum_k a_k^j \langle 0_N^j | V - E_N^{1j} | 0_N^j \rangle &= 0 \\ \sum_k a_k^j \langle 0_N^j | V | 0_N^j \rangle = \sum_k a_k^j \langle 0_N^j | E_N^{1j} | 0_N^j \rangle \\ \sum_k a_k^j \langle 0_N^j | V | 0_N^j \rangle = \sum_k a_k^j E_N^{1j} \delta_{ik} = a_k^j E_N^{1j} \end{aligned}$$

Esto último es una ecuación de autovalores y autovectores de la forma:

$$(\mathbb{V} - E_N^{1j} \mathbb{1}) \mathbf{a} = 0 \quad \det(\mathbb{V} - E_N^{1j} \mathbb{1}) = 0$$

nos dará los corrimientos de la energía a primer orden y los autoestados  $|1_n^j\rangle$  serán los autovectores del problema.

## 8.2 Efecto Stark

Sea un átomo de H con  $|n, \ell, m\rangle$  sin spín y con  $n = 2$ . Será

$$0 \leq \ell < n \quad -\ell \leq m \leq \ell \quad \ell = 0, 1 \quad m = -1, 0, 1$$

Tengo cuatro estados

$$\begin{cases} |200\rangle \\ |211\rangle \\ |210\rangle \\ |21-1\rangle \end{cases}$$

todos con la misma energía  $\epsilon_2$ . Metemos un campo eléctrico en  $\hat{z}$  y entonces  $V = -ez|\mathbf{E}|$ . Luego

$$\langle n\ell'm' | V | n\ell m \rangle = -e|\mathbf{E}| \langle n\ell'm' | z | n\ell m \rangle$$

$\hat{z}$  es impar ante paridad y entonces vincula estados de paridad diferente, y entonces

$$\langle n\ell m | z | n\ell m \rangle = 0$$

$$\langle n\ell m' | z | n\ell m \rangle = 0$$

diagonal nula y con  $m' \neq m$  a igual  $\ell$  tiene la misma paridad

$$\Pi |2, \ell = 1, m\rangle = -|2, \ell = 1, m\rangle \quad \text{impares}$$

$$\Pi |2, \ell = 0, 0\rangle = -|2, \ell = 0, 0\rangle \quad \text{par}$$

Solo hay un elemento no nulo correspondiente al producto par-impar. Se tendrá

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma|\mathbf{E}| \\ 0 & 0 & \gamma|\mathbf{E}| & 0 \end{pmatrix}$$

Puedo diagonalizar y obtengo

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma|\mathbf{E}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma|\mathbf{E}| \end{pmatrix}$$

En este caso no se rompe la degeneración por completo.

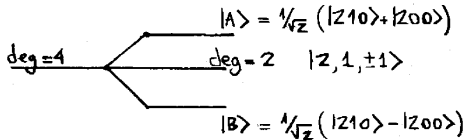


Figura 2.1

### 8.2.1 Corrimiento de la energía a orden 2 (con degeneración)

Sea que a orden uno se rompe toda la degeneración

$$(H_0 - E_N^0) |2_N^j\rangle + (V - E_N^{1j}) |1_N^j\rangle - E_N^{2j} |0_N^j\rangle = 0$$

Entonces la corrección a segundo orden de la energía será:

$$\langle 0_N^j | H_0 - E_N^0 | 2_N^j \rangle + \langle 0_N^j | V - E_N^{1j} | 1_N^j \rangle = E_N^{2j}$$

$$\langle 0_N^j | V | 1_N^j \rangle = E_N^{2j}$$

pues  $\langle 0_N^j | 0_N^j \rangle = 0$  pero

$$|1_N^j\rangle = \sum_{k, i \neq 1} b_k^i |\varphi_k^i\rangle + \sum_i b_N^i |\varphi_N^i\rangle$$

$$\langle 0_N^j | 1_N^j \rangle = 0 = \sum_{k, i \neq 1} b_k^i \langle 0_N^j | 0_K^i \rangle + \sum_i b_N^i \langle 0_N^j | 0_N^i \rangle$$

falta desarrollo ... [info en mis originaales]

$$E_N^{2j} = \sum_{p \neq N} \frac{|\langle 0_N^j | V | 0_p^i \rangle|^2}{E_N^0 - E_p^0}$$

donde  $N$  es un estado degenerado y la suma es entre los  $i$  posibles.

## 8.3 Estructura fina del átomo de hidrógeno

La solución tradicional del átomo de H usa el potencial coulombiano. Esto desemboca en las funciones  $|n, \ell, m\rangle$ , sin embargo la introducción de ajuste como *perturbaciones* rompe algo la degeneración.

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad E_n = -\frac{\alpha^2 m_e^2 c^2}{2n^2} \quad a_0 = \hbar^2 / (m_e c^2)$$

$$v/c = p/(mc) = \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx 1/137$$

donde  $a_0$  es el radio de Bohr,  $\alpha$  es la constante de estructura fina . Tenemos

a) Corrección cinemática (relativista)

$$E = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} = m_e c^2 \sqrt{1 + p^2 / (m_e^2 c^2)} \approx m_e c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_e^2 c^2} + \frac{3}{8} \frac{p^4}{m_e^4 c^4} \right)$$



$$E \approx m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e} + \frac{3p^4}{8m_e^3 c^2}$$

y esta corrección va como  $W_{mv}/H_0 \sim \alpha^2$ .

b) Acoplamiento spín-órbita Se puede pensar considerando un  $e^-$  en reposo con un protón orbitando que genera un  $\mathbf{B}_{eff}$

$$W_{so} = \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{R^3} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{eff}$$

y la corrección va como  $W_{mv}/H_0 \approx \alpha^2$ .

c) Término de Darwin o de contacto

$$W_D = \frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \nabla^2 V(r)$$

que va como  $W_D/H_0 \approx \alpha^2$ .

Hay otras correcciones hiperfinas que provienen del spín del electrón y del spín del protón. Pero van como  $\alpha^2/2000$ . Si consideramos el sistema con

$$n = 2 \quad \ell = 0, 1 \quad m_\ell = 1, 0, -1 \quad m_s = 1/2, -1/2$$

serán ocho estados  $\langle n, \ell, m_\ell, m_s \rangle$  (base completa).

$$W = \underbrace{W_{mv}}_{\sim p^4} + \underbrace{W_{so}}_{\sim \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}} + \underbrace{W_D}_{\sim |\mathbf{r}|}$$

y  $W$  es par ante  $\Pi$  y sólo habrá elementos de matriz  $\neq 0$  que sean de la misma paridad.

$$\begin{array}{cc} 2s & 2p \\ 2s \left( \begin{array}{c} [2 \times 2] \\ [6 \times 6] \end{array} \right) & 2p \end{array}$$

$|2s\rangle$  es par ( $\ell = 0$ ) y  $|2p\rangle$  es impar ( $\ell = 1$ ) y entonces  $|2s\rangle, |2p\rangle$  no están conectados.

De manera que hay ocho estados  $|n = 2, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle$  que al calcular esta perturbación  $W$  resultan

El cálculo para las correcciones hiperfinas no condice la experiencia. Se necesita aquí mecánica cuántica relativista. Los dos primeros niveles tienen la misma  $\Delta E$  porque en MCR se ve que

$$E = E(n, j)$$

es decir que no depende directamente de  $\ell, s$ .

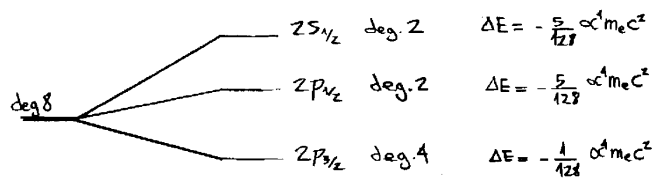


Figura 3.2

Un sketch de los métodos perturbativos

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & E & & & & \\ & & & E & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & E & \\ & & & & & & E_3 \\ & & & & & & & E_4 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & V_3 & & & & \\ & & & V_4 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & V_{nn} \end{pmatrix}$$

En  $H$  tenemos un bloque de energías degeneradas y se diagonalizará el bloque correspondiente en la matriz del potencial perturbativo  $V$ .

### Partículas idénticas

Más apropiado sería partículas indistinguibles. Si en algún punto del espacio se solapan las funciones de onda (interfieren) de dos partículas del mismo tipo cosa de que tengan misma masa, carga, etc. (dos electrones por ejemplo) no podemos distinguir cual es cual. Sean dos estados  $|k'\rangle, |k''\rangle$  con  $k^{(i)}$  índice colectivo. En la zona de interferencia es

$$|k'\rangle_1 \otimes |k'\rangle_2 \quad \text{o} \quad |k''\rangle_1 \otimes |k''\rangle_2$$

donde ambos estados son ortogonales y los subíndices numéricos identifican a la partícula.

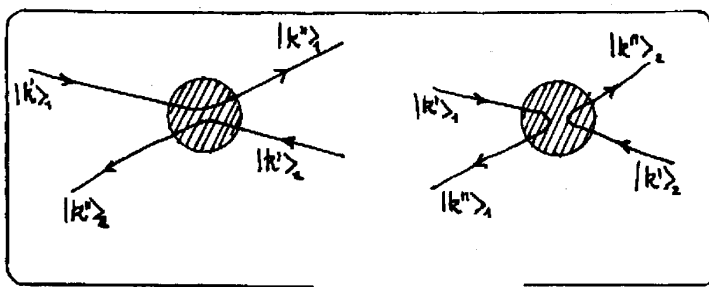


Figura 0.1

Entonces un estado general será

$$|K\rangle = c_1 |k'\rangle_1 \otimes |k''\rangle_2 + c_2 |k''\rangle_1 \otimes |k'\rangle_2$$

con  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Esta es la “degeneración de intercambio”.

### 9.0.1 Permutación

Definimos este operador como

$$P_{12}(|k'\rangle_1 \otimes |k''\rangle_2) = |k''\rangle_1 \otimes |k'\rangle_2$$

$$P_{12} = P_{21} \quad P_{12}^2 = \mathbb{1} \quad P_{12}^\dagger = P_{12} \quad P_{12}P_{12}^\dagger = 1 \quad \text{autovalores: } \pm 1$$

Su función es la de intercambiar etiquetas, no el orden de las partículas.

Sean operadores  $\hat{A}_1, \hat{A}_2$  que actúan sobre las partículas 1,2; es decir

$$\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \hat{A}_2 \equiv \mathbb{1}_1 \otimes \hat{A}_2$$

$$\hat{A}_1 |a'\rangle |a''\rangle = a' |a'\rangle |a''\rangle \quad \hat{A}_2 |a'\rangle |a''\rangle = a'' |a'\rangle |a''\rangle$$

$$\begin{aligned} P_{12}A_1P_{12}^{-1}P_{12}|a'\rangle |a''\rangle &= P_{12}a'|a'\rangle_1|a''\rangle_2 = a'|a''\rangle_1|a'\rangle_2 \\ &= P_{12}A_1P_{12}^{-1}|a''\rangle_1|a'\rangle_2 = a'|a''\rangle_1|a'\rangle_2 \\ &= A_2|a''\rangle_1|a'\rangle_2 = a'|a''\rangle_1|a'\rangle_2 \end{aligned}$$

y

$$P_{12}\hat{A}_1P_{12}^{-1} = \hat{A}_2, \quad P_{21}A_1 - A_2P_{12} = 0$$

Luego  $\hat{A}$  es simétrico si  $[\hat{P}_{12}, \hat{A}_{12}] = 0$ . Sea  $[\hat{P}_{12}, \hat{H}] = 0$  entonces es  $P_{12}$  constante de movimiento y

$$P_{12}|\alpha\rangle = \pm |\alpha\rangle$$

Sea

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + v(|x_1 - x_2|) + V_e(\mathbf{x}_1) + V_e(\mathbf{x}_2)$$

donde si las partículas son idénticas es  $m_1 = m_2 \equiv m$  y defino dos estados

$$|k'k''\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k'\rangle_1|k''\rangle_2 + |k''\rangle_1|k'\rangle_2) \quad |k'k''\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k'\rangle_1|k''\rangle_2 - |k''\rangle_1|k'\rangle_2)$$

con

$$P_{12}| \rangle_s = + | \rangle_s \quad P_{12}| \rangle_a = - | \rangle_a$$

Puedo introducir operadores de simetrización y antisimetrización

$$\hat{S}_{12} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + \hat{P}_{12})$$

$$\hat{A}_{12} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - \hat{P}_{12})$$

que verifican

$$S^2 = S, \quad A^2 = A, \quad SA = AS = 0, \quad [S, A] = 0$$

$$\hat{S}_{12}(c_1 |k'\rangle |k''\rangle + c_2 |k''\rangle |k'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 + c_2)(|k'\rangle |k''\rangle + |k''\rangle |k'\rangle)$$

es simétrico y

$$\hat{A}_{12}(c_1 |k'\rangle |k''\rangle + c_2 |k''\rangle |k'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 - c_2)(|k'\rangle |k''\rangle - |k''\rangle |k'\rangle)$$

es antisimétrico. En general se complica bastante con más de dos partículas

$$P_{ij}(|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 \dots |k^i\rangle_i \dots |k^j\rangle_j \dots) = (|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 \dots |k^j\rangle_i \dots |k^i\rangle_j \dots)$$

pués tenemos

$$[P_{ij}, P_{k\ell}] \neq 0 \quad \text{en general}$$

Las permutaciones para tres partículas pueden descomponerse

$$P_{123} = P_{12}P_{13}$$

$$P_{123} |k'\rangle |k''\rangle |k'''\rangle = P_{12} |k'''\rangle |k''\rangle |k'\rangle = |k''\rangle |k'''\rangle |k'\rangle$$

Con tres partículas hay  $3!$  estados; uno totalmente simétrico  $|\rangle_s$ , uno totalmente antisimétrico  $|\rangle_a$  y cuatro sin simetría definida. En estados simétricos serán

$$|k'k''k'''\rangle_{s/a} = \frac{1}{\sqrt{6}} (|k'k''k'''\rangle + |k''k'''\rangle + |k'''\rangle \pm |k''k'k'''\rangle \pm |k'k'''\rangle \pm |k'''\rangle)$$

donde el  $|\rangle_a$  tiene el signo  $(-)$  en las permutaciones anticíclicas y el  $(+)$  en las cíclicas. Existe un determinante de Slater como método mnemotécnico de obtener los estados  $|\rangle_a$ .

$$|\Psi\rangle_a = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} |k'\rangle & |k''\rangle & |k'''\rangle \\ |k'\rangle & |k''\rangle & |k'''\rangle \\ |k'\rangle & |k''\rangle & |k'''\rangle \end{vmatrix}$$

La obtención de estos estados corresponde a aplicar

$$A_{123} = \frac{1}{\sqrt{3!}} (\mathbb{1} + P_{231} + P_{312} - P_{212} - P_{132} - P_{321})$$

$$(\mathbb{1} + P_{23}P_{21} + P_{31}P_{32} - P_{21}P_{23} - P_{13}P_{12} - P_{32}P_{31})$$

Si dos  $k^{(i)}$  coinciden ya no hay estado antisimétrico posible.

## 9.1 Postulado de simetrización

Permitirá romper la degeneración de intercambio. Postulamos que toda partícula es de uno de dos tipos de acuerdo a su simetría

Sistemas de N part. idénticas	N	simetrica	BE	entero
	N	antisimetrica	FD	semientero

En la naturaleza no ocurren simetrías mixtas.

### 9.1.1 Principio de exclusión de Pauli

Para fermiones supongamos sistema de dos partículas idénticas

$$|\Psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 - |k''\rangle_1 |k'\rangle_2)$$

y entonces si  $k' = k''$  se tiene que

$$|\Psi\rangle_a = 0.$$

No es posible tener dos fermiones con iguales números cuánticos. Por el contrario los bosones sí pueden tener iguales números cuánticos.

### 9.1.2 Sistema de dos electrones de spin 1/2

Sistema de dos electrones de spin 1/2. Son fermiones. Sea que  $[H, S] = 0$  con  $S = S_1 + S_2$ . Se tendrá

$$|\Psi\rangle^{sist} = |\Psi\rangle^{spa} \otimes |\Psi\rangle^{spin}$$

Como  $|\Psi\rangle^{sist}$  es simétrica tendremos

$$P_{12} |\Psi\rangle^{sist} = -|\Psi\rangle^{sist}$$

$$P_{12} |\Psi\rangle^{sist} = P_{12} |\Psi\rangle^{spa} \otimes P_{12} |\Psi\rangle^{spin}$$

Para dos electrones con spin 1/2 se tiene  $j_1 + j_2$  entonces  $0 \leq j \leq 1$  de modo que  $|m_1| \leq j_1$  y  $|m_2| \leq j_2$  entonces  $0 \leq S \leq 1$  y  $|m_{s_1}| \leq s_1$  y  $|m_{s_2}| \leq s_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{array} \right\} \text{triplete } s = 1 \quad \text{Estados simétricos}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\} \text{ singlete } s = 0 \quad \text{Estados antisimétricos}$$

Entonces

$$\begin{aligned} s = 0 & \Rightarrow |\Psi\rangle^{spa} \text{ es simétrica} \\ s = 1 & \Rightarrow |\Psi\rangle^{spa} \text{ es antisimétrica} \end{aligned}$$

Vistos desde el CM de los electrones

$$P_{12} = \Pi$$

y entonces

$$P_{12} |n\ell m\rangle = (-1)^\ell |n\ell m\rangle$$

$$\ell \text{ par} \rightarrow |\Psi\rangle^{spa} = P_{12} |\Psi\rangle^{spa} \quad \ell \text{ impar} \rightarrow -|\Psi\rangle^{spa} = P_{12} |\Psi\rangle^{spa}$$

Necesitaré  $\ell$  par con  $s = 0$  entonces  $\ell + s = j$  par. En cambio, si  $\ell$  impar con  $s = 1$  entonces  $\ell + s = j$  par. Dos electrones sólo se acoplan a momento total  $j$  par.

Sean los siguientes estados

$$|\Psi\rangle_{sa} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k'\rangle |k''\rangle \pm |k''\rangle |k'\rangle)$$

$$|\Psi_F\rangle_{sa} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a'\rangle |a''\rangle \pm |a''\rangle |a'\rangle)$$

y la probabilidad será

$$\begin{aligned} \text{Prob} &= |{}_{sa}\langle\Psi|\Psi\rangle_{sa}|^2 = \left| \frac{1}{2} ({}_1\langle a'|{}_2\langle a''| \pm {}_1\langle a''|{}_2\langle a'|) (|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 \pm |k''\rangle_1 |k'\rangle_2) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} |\langle a'| \langle a''| |k'\rangle |k''\rangle \pm \langle a''| \langle a'| |k'\rangle |k''\rangle \pm \langle a'| \langle a''| |k''\rangle |k'\rangle \pm \langle a''| \langle a'| |k''\rangle_1 |k'\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} |2 \langle a' | k'\rangle \langle a'' | k''\rangle \pm 2 \langle a'' | k'\rangle \langle a' | k''\rangle|^2 \\ &= \left| \underbrace{\langle a' | k'\rangle \langle a'' | k''\rangle}_{\text{término directo}} \pm \underbrace{\langle a'' | k'\rangle \langle a' | k''\rangle}_{\text{término de intercambio}} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob} &= |{}_{sa}\langle\Psi|\Psi\rangle_{sa}|^2 = |\langle a' | k'\rangle \langle a'' | k''\rangle|^2 + |\langle a'' | k'\rangle \langle a' | k''\rangle|^2 \\ &\quad \pm 2\mathcal{R}e \left( \underbrace{\langle a' | k'\rangle \langle a' | k''\rangle^* \langle a'' | k''\rangle \langle a'' | k'\rangle^*}_{\text{Interferencia}} \right) \end{aligned}$$

Vemos que aparece una interferencia que será importante solamente si hay solapamiento. En el caso de no solaparse o con partículas clásicas solo el primer término es de importancia.

## 9.2 El átomo de helio

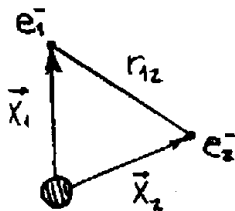


Figura 2.2

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

y si el último término es  $\sim 0$  decimos que en ese caso  $H$  está desacoplado

$$\Psi = \Psi_1 \otimes \Psi_2$$

$$[H, S] = 0 \quad S = S_1 + S_2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$S$  es constante de movimiento y para la  $|\psi_{spin}\rangle$  se tiene

$$S = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{singlete}$$

$$S = 1 \quad \begin{aligned} &|\uparrow\uparrow\rangle \\ &|\downarrow\downarrow\rangle \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad \text{triplete}$$

Sea  $e_1^- |100\rangle$  y  $e_2^- |n\ell m\rangle$

$$|\Psi\rangle_{He} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle |n\ell m\rangle \pm |n\ell m\rangle |100\rangle) |\Psi_{spin}\rangle$$

de modo que con  $S = 0$  será

$$|\Psi\rangle_{He} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle |n\ell m\rangle + |n\ell m\rangle |100\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$



y en cambio con  $S = 1$

$$|\Psi\rangle_{He} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle |n\ell m\rangle - |n\ell m\rangle |100\rangle) \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{cases}$$

Podemos pensar en teoría de perturbaciones ahora y calcular

$$E_{He} = E_{100} + E_{n\ell m} + \Delta E$$

donde

$$\Delta E = \left\langle \Psi \left| \frac{e}{r_{12}} \right| \Psi \right\rangle$$

y el término en el *sandwich* lo considero una perturbación.

$$\Delta E = \langle \Psi^{spin} |^{\dagger} \frac{1}{2} (\langle 100 | \langle n\ell m | \pm \langle n\ell m | \langle 100 |) \frac{e}{r_{12}} (|100\rangle |n\ell m\rangle \pm |n\ell m\rangle |100\rangle) | \Psi^{spin} \rangle$$

$$\Delta E = \langle 100 | \langle n\ell m | \frac{e}{r_{12}} | 100 \rangle | n\ell m \rangle \pm \langle n\ell m | \langle 100 | \frac{e}{r_{12}} | 100 \rangle | n\ell m \rangle$$

que se puede escribir más resumidamente como

$$\Delta E = I \pm J$$

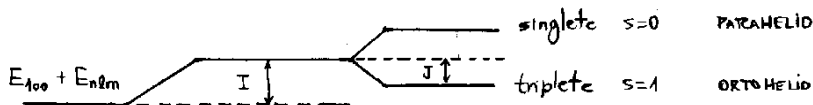


Figura 2.3

Esta separación de los niveles en  $\pm J$  se debe al carácter de fermión de las partículas.

# Picture de interacción y perturbación dependiente del tiempo

Puédese escribir perturbaciones dependientes del tiempo

$$H = H_0 + V(t)$$

con  $|n\rangle$  no dependiente del tiempo. Se estudiarán transiciones entre autoestados del  $H_0$  (que son estacionarios). Un autoestado permanece en el tiempo como tal pero con fase oscilante

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0, t\rangle_s &= e^{-iH/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle_s \\ &= e^{-iH/\hbar(t-t_0)} e^{-iV(t)/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle \\ &= \sum_n e^{-iH_0/\hbar t} e^{-iV(t)/\hbar t} |n\rangle \langle n | \alpha, t_0\rangle \\ &= \sum_n e^{-iE_n^0/\hbar t} |n\rangle e^{-iV(t)/\hbar t} \langle n | \alpha, t_0\rangle \\ e^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s &= \sum_n \underbrace{e^{-iV(t)/\hbar t} \langle n | \alpha, t_0\rangle}_{C_n(t)} |n\rangle = |\alpha, t_0, t\rangle_I \end{aligned}$$

es decir

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I = e^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s$$

Aquí se puede pensar que

- $C_n(t)$  evoluciona por  $V(t)$

- $e^{-iE_n^0 t/\hbar}$  evoluciona por  $H_0$

Esto introduce la *picture* de interacción de Dirac; en la cual los estados evolucionan con  $V(t)$ .

	Dirac	Schrödinger	Heisenberg
estados $ \alpha\rangle$	evolucionan con $V(t)$	evolucionan con $H$	fijos
operadores	evolucionan con $H_0$	fijos	evolucionan con $H$
base $ a'\rangle$	fijos	fijos	evolucionan

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_s = H |\alpha, t_0, t\rangle_s$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I) = H e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$i\hbar e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V(t) e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V(t) |\alpha, t_0, t\rangle_I,$$

que es la ecuación de evolución de los kets. Pediremos asimismo que

$${}_s \langle A_s \rangle_s = {}_I \langle A_I \rangle_I$$

$${}_I \langle \alpha, t_0, t | A_I | \alpha, t_0, t \rangle_I = {}_s \langle \alpha, t_0, t | e^{-iH_0 t/\hbar} A_I e^{iH_0 t/\hbar} | \alpha, t_0, t \rangle_s = {}_s \langle \alpha, t_0, t | A_s | \alpha, t_0, t \rangle_s =$$

Y los operadores evolucionan según

$$A_I = e^{iH_0 t/\hbar} A_s e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I, H_0]$$

que es igual que la ecuación de Heisenberg pero con  $\hat{H}_0$  en lugar de  $H$ . Los kets base permanecen fijos, porque así lo hacen en Schrödinger, en realidad oscila su fase; entonces

$$|n, t_0, t\rangle_s = e^{-iHt/\hbar} |n, t_0\rangle_s$$

$$|n, t_0, t\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} |n, t_0\rangle_s = e^{-iVt/\hbar} |n, t_0\rangle_s = e^{iH_0 t/\hbar} |n, t_0\rangle_s$$

$$|n, t_0, t\rangle_I = e^{iE_0 t/\hbar} |n, t_0, t\rangle_s$$

### 10.0.1 Evolución de los coeficientes

$$\begin{aligned}
 |\alpha, t_0, t\rangle_I &= \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha, t_0, t\rangle_I = \sum_n C_n(t) |n\rangle \\
 C_n(t) &= e^{iVt/\hbar} \langle n | \alpha, t_0\rangle_s \\
 \langle n | \alpha, t_0, t\rangle_I &= C_n(t)
 \end{aligned}$$

con  $|n\rangle, |m\rangle$  autoestados de  $H_0$ , le pego un  $\langle n|$  a la ecuación de evolución de kets,

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \alpha, t_0, t\rangle_I &= \langle n | V_I(t) | \alpha, t_0, t\rangle_I \\
 &= \sum_m \langle n | V_I(t) | m\rangle \langle m | \alpha, t_0, t\rangle_I \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) &= \sum_m C_m(t) \langle n | V_I(t) | m\rangle \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) &= \sum_m C_m(t) \langle n | V_s | m\rangle e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) &= \sum_m C_m(t) V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t}
 \end{aligned}$$

donde  $V_{nm}(t) \equiv \langle n | V(t) | m\rangle$  y  $\omega_{nm} \equiv (E_n - E_m)/\hbar$ . Esta es la ecuación que cumplen los coeficientes, donde  $|C_n(t)|^2$  es la probabilidad de hallar al sistema en el autoestado  $|n\rangle$ . Es decir

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dots \\ \dot{c}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} e^{i\omega_{12}} & \dots \\ V_{21} e^{i\omega_{21}} & V_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix}$$

que puede ser de difícil solución.

### 10.0.2 Método perturbativo (dependiente del tiempo)

Pensaremos en una serie perturbativa

$$C_n(t) = C_n(t)^{(0)} + C_n(t)^{(1)} + C_n(t)^{(2)} + \dots$$

El evolucionador temporal en la picture de interacción cumple

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U_I(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle_I$$

que viene de

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0)$$

con  $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$  la cual resolviendo nos hace llegar a

$$U_I(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') U_I(t', t_0) dt'$$

y esto lleva a la serie de Dyson:

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) = & \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int V_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t V_I(t') \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') dt'' + \dots \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' \dots \int_{t_0}^{t^{n-1}} dt^n V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^n) \end{aligned}$$

### 10.0.3 Transiciones entre autoestados del hamiltoniano $H_0$

$$|i, t_0 = 0, t\rangle_I = U_I(t, 0) |i\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | U_I(t) | i\rangle$$

y como se viera oportunamente

$$|i, t\rangle_I = \sum_n C_n(t) |n\rangle = \sum_n (\langle n | U_I(t) | i\rangle) |n\rangle$$

La amplitud de transición será

$$C_n(t) = \langle n | U_I(t) | i\rangle$$

con  $|i\rangle, |n\rangle$  autoestados de  $H_0$ . Sea  $\tilde{C}_n(t) = \langle n | U_s(t) | i\rangle$  y busquemos una expresión

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0, t\rangle_I &= e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_s \\ &= e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle_s \\ |\alpha, t_0, t\rangle_I &= e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} |\alpha, t_0\rangle_I = U_I(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle_I \\ e^{iH_0 t/\hbar} \hat{U}_S e^{-iH_0 t_0/\hbar} &= \hat{U}_I \end{aligned}$$

y notemos que  $\hat{U}$  no obedece la ley de transformación de operadores.

$$C_n(t) = \langle n | e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} | i\rangle$$

$$C_n(t) = e^{-i/\hbar[E_n^{(0)}t - E_i^{(0)}t_0]} \langle n | U_S(t, t_0) | i \rangle = e^{-i/\hbar[E_n^{(0)}t - E_i^{(0)}t_0]} \tilde{C}_n(t) \\ \Rightarrow |C_n(t)|^2 = |\tilde{C}_n(t)|^2.$$

Para transiciones entre autoestados de  $H_0$  los coeficientes dan la misma probabilidad (evaluados con el evolucionador de Dirac que con el de Schrödinger). Vamos a las transiciones a los tres

- orden 0

$$C_n^{(0)}(t) = \langle n | 1 | i \rangle = \delta_{ni}$$

- orden 1

$$C_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}} V_{ni}(t') dt' \quad V_{ni} \equiv \langle n | V(t) | i \rangle$$

- orden 2

$$C_n^{(2)}(t) = \sum_m \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{it'/\hbar(E_n - E_m)} V_{nm}(t') e^{it''/\hbar(E_m - E_i)} V_{mi}(t'')$$

y entonces la probabilidad de ir desde  $|ket i \rangle \rightarrow |i\rangle$ , hasta orden dos, sería

$$P_{i \rightarrow n}^{(2)} = |C_n^{(0)}(t) + C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t)|^2$$

### 10.0.4 Ejemplo: potencial constante encendido abruptamente

Notemos que  $V \neq V(t)$ . Dependerá de cualquier otra cosa.

$$C_n^0(t) = 0$$

$$C_n^1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i/\hbar(E_n - E_i)t'} V_{ni} dt' = \frac{V_{ni}}{(E_n - E_i)} (1 - e^{i\omega_{ni}t})$$

$$|C_n^1(t)|^2 = \frac{4|V_{ni}|^2}{|E_n - E_i|^2} \sin^2 \left( \frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right)$$

Es máxima la probabilidad cuando  $\Delta E \rightarrow 0$ . En ese caso las transiciones son a estados de la misma energía. A tiempo largo la probabilidad es no nula para aquellos estados

$$t \sim \frac{2\pi}{|\omega_{ni}|}$$

Hay probabilidad de transición  $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$  apreciable con  $\Delta E \sim 0$ .

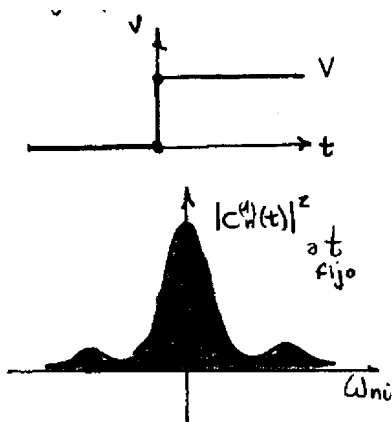


Figura 0.1

## 10.1 Scattering: orden 1

Este último ejemplo puede aplicarse a colisiones elásticas. Prendemos y apagamos un potencial que es el masacote al cual impactamos. De entrada ha partículas libres y de salida (lejos de  $V$ ) partículas libres. Entonces  $E_n - E_c \sim 0$  y consideraremos lo que sucede a tiempos largos. Interesará la probabilidad total de transicionear a estados de energía similares a  $E_i$ . Por ello se considera

$$\sum_{\substack{n \\ E_n \sim E_i}} |C_n^1(t)|^2 \longrightarrow \int dE_n \rho(E_n) |C_n^1(t)|^2$$

donde el integrando es el número de estados dentro de un intervalo de energías  $(E, E + dE)$ . En tiempos muy largos la expresión [1] tiende a una

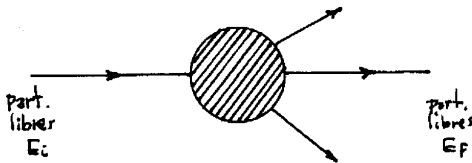


Figura 1.2

delta de Dirac y se integra fácil,

$$\lim \int dE \rho(E_n) |C_n^1(t)|^2 = \left( \frac{2\pi}{\hbar} \right) |\bar{V}_{ni}|^2 \rho(E_n) \Big|_{E_n \sim E_i}$$

La probabilidad de transición es proporcional a  $t$ . Se suele definir una tasa de transición (probabilidad de transición por unidad de tiempo)

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{E_n \sim E_i}^n |C_n^{(1)}|^2 \right) = \left( \frac{2\pi}{\hbar} \right) |\bar{V}_{ni}|^2 \rho(E_n) = \omega_{i \rightarrow n}^{(1)}$$

que es la regla de oro de Fermi.

## 10.2 El método variacional

Se puede usar para aproximar la energía del estado fundamental (el estado de energía mínima)

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{n,m} \langle \psi | n \rangle \langle n | H | m \rangle \langle m | \psi \rangle = \sum_{n,m} E_n \langle \psi | n \rangle \langle n | m \rangle \langle m | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{n,m} E_n C_n^* \langle n | m \rangle C_m = \sum_n E_n |C_n|^2$$

$$\sum_n E_n |C_n|^2 \geq \sum_n E_0 |C_n|^2 = E_0 \sum_n |C_n|^2 = E_0 \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

y usamos

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle n | \psi \rangle |n\rangle \quad \langle \psi | = \sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n |$$

para arribar a

$$\frac{\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle}{\langle \psi_n | \psi_n \rangle} \geq E_0.$$

### 10.2.1 Scattering a orden dos y OFPT

Continuando con el orden dos de scattering por un  $V \neq V(t)$  se tiene:

$$\omega_{i \rightarrow n}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \overline{V_{ni} + \sum_{m \neq i} \frac{V_{nm} V_{mi}}{(E_i - E_m)}} \right|^2 \rho(E_n) \Big|_{E_n \sim E_i}$$

Para obtener los siguientes términos dentro del  $||^2$  podemos emplear un ardid gráfico conocido como *Old Fashioned Perturbation Theory*

Fíjese que en los estados intermedios estados virtuales  $|m\rangle, |j\rangle$  no se conserva la energía. Son propagadores.



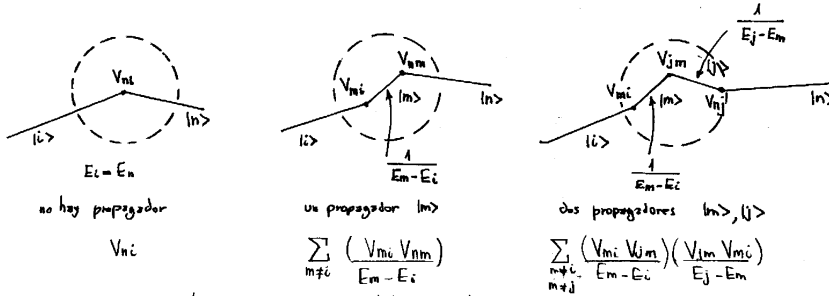


Figura 2.3

## 10.2.2 Perturbación armónica

Sea un potencial armónico y hermítico

$$V(t) = \mathbb{V} e^{i\omega t} + \mathbb{V}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad \mathbb{V} \neq \mathbb{V}(t)$$

quiero ver probabilidad de transición a orden uno,

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t (V_{ni} e^{i\omega t'} + V_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_{ni} t'} dt'$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar} \left[ V_{ni} \int_0^t e^{i(\omega + \omega_{ni})t'} dt' + V_{ni}^\dagger \int_0^t e^{i(-\omega + \omega_{ni})t'} dt' \right]$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar} \left[ V_{ni} \frac{e^{i(\omega + \omega_{ni})t} - 1}{i(\omega + \omega_{ni})} + V_{ni}^\dagger \frac{e^{i(-\omega + \omega_{ni})t} - 1}{i(-\omega + \omega_{ni})} \right]$$

$$C_n(t)^1 = \frac{V_{ni}}{\hbar} \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_{ni})t}}{(\omega + \omega_{ni})} + \frac{V_{ni}^\dagger}{\hbar} \frac{1 - e^{i(-\omega + \omega_{ni})t}}{(-\omega + \omega_{ni})}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_n(t)^1 = \frac{1}{\hbar} [V_{ni} \delta(\omega_{ni} + \omega) + V_{ni}^\dagger \delta(\omega_{ni} - \omega)]$$

Luego será nulo sólo si

$$\omega_{ni} = -\omega \quad \rightarrow \quad \frac{E_n - E_i}{\hbar} = -\omega \quad E_n = E_i - \hbar\omega$$

$$\omega_{ni} = -\omega \quad \rightarrow \quad \frac{E_n - E_i}{\hbar} = \omega \quad E_n = E_i + \hbar\omega$$

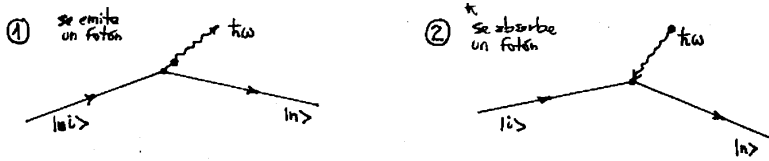


Figura 2.4

Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_n(t)^1$$

representa la probabilidad de emitir o absorber fotones en una interacción. Se puede asociar que  $V$  crea fotones y  $V^\dagger$  destruye fotones. Para un átomo se tiene

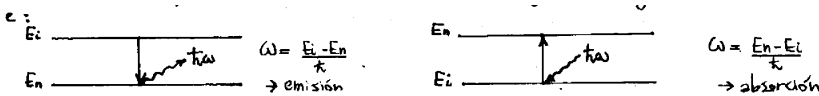


Figura 2.5

## 10.3 Desdoblamiento de estados iniciales

Queremos ver con cual  $v$  se desdoblán los  $|i\rangle$ . Para ello me construyo un potencial *suave*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} V(t) = e^{\eta t} \mathbb{V}, \quad \mathbb{V} \text{cte.}$$

donde  $\eta$  es un parámetro regularizador.

$$C_n(t)^1 = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{ni} e^{\eta t'} e^{i\omega_{ni} t'} dt'$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{\eta t} e^{i\omega_{ni} t}}{\eta + i\omega_{ni}} \quad |C_n(t)^1|^2 = \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \frac{e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2}$$

$$\frac{d}{dt} |C_n(t)^1|^2 = 2\eta \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \frac{e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2}$$

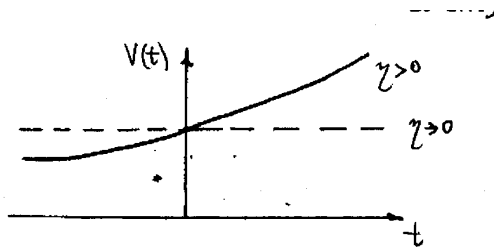


Figura 3.6

y tomando el límite  $\eta \rightarrow 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} |C_n(t)|^2 = 2 \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_{ni}^2 \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega_{ni}^2 = 0 \end{cases}$$

y llegamos a la regla de oro de Fermi,

$$\frac{d}{dt} |C_n(t)|^2 = 2 \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{ni}) \pi$$

### 10.3.1 Scattering sección eficaz

$|k\rangle, |k'\rangle$  son autoestados de momento (partículas libres),

$$|k| = |k'|$$

se conserva la energía. Consideraremos la aproximación más baja (aproximación de Born).

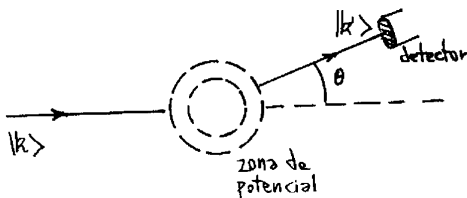


Figura 3.7

$$\omega = \int \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E' - E) |\langle k' | V | k \rangle|^2 \rho(E') dE'$$

queremos calcular la densidad de estados de energía entre  $(E, E + dE)$ . Pensamos en una partícula libre en una caja  $1D$  de longitud  $L$ .

$$N e^{ik_x x/\hbar}, \quad \text{con } k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$$

pidiendo normalización unitaria  $\langle k | k \rangle = 1$  se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x/\hbar}$$

con  $L \rightarrow \pm\infty$  son  $n_x, k_x$  continuas.

$$dk_x = \frac{2\pi}{L} dn_x \quad \rightarrow \quad dn_x = \frac{L}{2\pi} dk_x$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 n^2 \quad \rightarrow \quad n^2 = \frac{L^2}{(2\pi)^2} k^2$$

$$dE = \frac{\hbar^2}{m} k dk \quad \rightarrow \quad dn = \frac{L}{2\pi} \frac{m}{\hbar^2 k} dE$$

$$n^2 dn d\Omega = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{mk}{\hbar^2} dE d\Omega$$

donde  $n^2 dn d\Omega$  es la densidad de estados de energía  $(E, E + dE)$  en  $d\Omega$

$$n^2 dn d\Omega = \rho(E') dE'$$

Con esto sale la integral obteniéndose

$$\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{L^3}{(2\pi)^2} \frac{m}{\hbar^3} |\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle|^2 k' d\Omega$$

Esta es la probabilidad de transición entre los impulsos  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ . Es el número de partículas en la unidad de tiempo por unidad de área

$$\text{seccion eficaz} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\# \text{ de part en } d\Omega \text{ en la unidad de t}}{\# \text{ de part incidentes en la unidad de t por unidad de área}}$$

Un elemento de matriz  $\langle k' | V | k \rangle$  será

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int dx' \langle \mathbf{k}' | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{x}' \frac{1}{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}'),$$

la transformada de Fourier del potencial es, amén de constantes, la am-

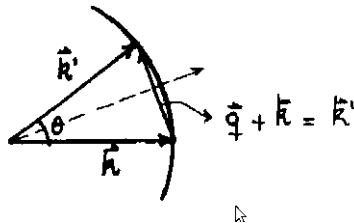


Figura 3.8

plitud a primer orden

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin(\theta/2) \quad \text{con } k = k'$$

Entonces para cualquier potencial esféricamente simétrico se puede hacer la integral

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \left( \frac{2m}{4\pi\hbar} \right)^2 \int d^3x' V(x) e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{x}'} \right|^2$$

y expresamos todo en función de  $q = q(\theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr \right|^2$$

Utilizando un potencial de Yukawa primero y tomando el límite para llegar al de Coulomb tenemos la sección eficaz de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2m^2 e^4}{\hbar^4} \frac{1}{16k^4 \sin^4(\theta/2)}$$

hay que tomar el potencial de Yukawa y luego el límite porque el de Coulomb diverge de entrada

# Introducción a la mecánica cuántica relativista

Consideremos una partícula libre por el momento

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla$$

en relatividad la primera expresión no sirve pero la segunda y la tercera sí.

$$P_\mu = i\hbar \partial_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad p_\mu = (E/c, -\mathbf{p}) \quad x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \equiv \partial_\mu \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \equiv \partial^\mu$$

y Schrödinger para la partícula libre es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (1)$$

y entonces podemos hacer la cuenta

$$\psi^* \times (1) \rightarrow i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi$$

y conjugando la ecuación,

$$\psi \times (1)^* \rightarrow -i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^*$$

y restando ambas expresiones se obtiene

$$i\hbar \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$i\hbar \frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \right) = 0$$

que es una analogía de la conservación de la carga en electrodinámica. Recordemos que la conservación de la carga era  $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Tenemos entonces una especie de conservación de la probabilidad. Note que  $\psi^* \psi = |\psi|^2 \geq 0$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} = H \quad \text{con } H\psi = E\psi$$

Pero esto se pone muy complicado debido a la raíz

### 11.0.1 La ecuación de Klein-Gordon

Conserva el cuadrado para no complicar demasiado los reemplazos. Entonces

$$H^2 = E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi \quad (2)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad -\partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

siendo el operador  $\square^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$  el dalembertiano.

$$\left( \square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

y procediendo de modo ídem al caso anterior,

$$\psi^* \cdot (2) = -\hbar^2 \psi^* \partial_t^2 \psi = -\hbar^2 c^2 \psi^* \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi^* \psi$$

$$\psi \cdot (2)^* = -\hbar^2 \psi \partial_t^2 \psi^* = -\hbar^2 c^2 \psi \nabla^2 \psi^* + m^2 c^4 \psi \psi^*$$

y restando ambas ecuaciones tenemos

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = \hbar^2 c^2 \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{i}{c^2} [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*] \right) + i \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = 0$$

El problema es que no puede asegurarse que esta  $\rho \equiv i/c^2 [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*]$  sea definida positiva, lo cual sería necesario para seguir una coherencia.

$$\psi = N e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

$$\partial_t \psi = -N \frac{iE}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

$$\rho = \frac{i}{c^2} \left( N^* e^{-i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} (-N) \frac{iE}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} - N e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} N^* \frac{E}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} e^{i\pi/2} \right)$$

$$\rho = -\frac{i}{c^2} \left( 2|N|^2 \frac{iE}{\hbar} \right) < 0 \quad \text{si} \quad E > 0$$

para una onda plana. Necesito considerar  $E < 0$  pues  $E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$  y la base debe ser completa.

La densidad  $\rho$  es positiva si tuviese  $E < 0$  pero esto causa el problema de tener materia inestable, pues nunca se alcanza el fundamental. Acá muere en este atolladero la ecuación de Klein-Gordon.

### 11.0.2 La ecuación de Dirac

Dirac parte de pedir una ecuación lineal en el impulso  $\mathbf{p}$

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

usando  $H\psi = E\psi$  y  $H^2 = E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$  y con  $\beta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}$  operadores.

$$H^2 = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)$$

$$H^2 = c^2 \alpha_i p_i \alpha_\ell p_\ell + c^3 \alpha_i p_i \beta m + \beta mc^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^4$$

$$H^2 = c^2 \alpha_i \alpha_\ell p_i p_\ell + c^3 m p_i \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_{=0} + \beta^2 m^2 c^4$$

$$H^2 = c^2 \underbrace{\left( \frac{\alpha_i \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_i}{2} \right)}_{\delta_{i\ell}} p_i p_\ell + m^2 c^4 \underbrace{\beta^2}_{=1}$$

$$\alpha_i \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_i = 2\delta_{i\ell} \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \beta^2 = 1$$

Como se ve, estos no pueden ser simples escalares. Dirac pide



- $\alpha, \beta$  hermíticos
- $\beta^2 = 1$   $\alpha^2 = 1$  autovalores  $\pm 1$
- traza nula

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad \rightarrow \quad \beta \alpha_i \beta = -\beta^2 \alpha_i = -\alpha_i$$

$$Tr(\alpha_i) = -Tr(\beta \alpha_i \beta) = -Tr(\beta \beta \alpha_i)$$

- dimensión par

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz es de  $2 \times 2$ .

Entonces

$$H\vec{\psi} = i\hbar \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}, \quad H \in 4 \times 4, \vec{\psi} \in 4 \times 1, \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_k \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + mc^2 \beta \psi \quad (3)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i\hbar c \sum_k \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \alpha_k + mc^2 \psi \alpha_k \beta$$

$$\psi^\dagger \cdot (3) - (3)^\dagger \cdot \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi^\dagger \alpha_k \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + c \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi^\dagger \alpha_k \psi) = 0$$

Y si  $\rho \equiv \psi^\dagger \psi$  ahora tenemos una densidad de probabilidad como requiere la naturaleza.

### 11.0.3 Ejemplo: partícula libre quieta

Sea una partícula libre en reposo,

$$\mathbf{p} = 0 \quad H = \beta mc^2$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones, dos con energía positiva y dos con energía negativa

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = mc^2 \psi_i \quad i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -mc^2 \psi_i$$

$$\psi_1 = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_3 = e^{imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como aún tenemos degeneración de orden dos, necesitaremos un operador que conmute con el  $H$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad [H, \vec{\Sigma}] = 0$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \psi_1, E = mc^2, \Sigma_3 = 1 & \quad \psi_2, E = mc^2, \Sigma_3 = -1 \\ \psi_3, -E = mc^2, \Sigma_3 = 1 & \quad \psi_4, -E = mc^2, \Sigma_3 = -1 \end{aligned}$$

Podemos identificar

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$$

$$\text{si } p \neq 0 \Rightarrow [H, \boldsymbol{\Sigma}] = 2ic\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}$$

### 11.0.4 Energías negativas

Como  $E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$  hay  $E < 0$  y además un *gap* de ancho  $2mc^2$  entre ellas. Las  $E < 0$  harían que la materia jamás alcance un estado fundamental y por ende jamás se estabilice. Dirac piensa que los estados de  $E < 0$  están todos llenos. No decaen más electrones allí dentro. Es el mar de Dirac. Iluminando ese vacío se lo puede excitar.

Podemos hacer saltar a la zona positiva una carga ( $-e$ ) dejando un hueco positivo (equivalente a una carga  $+e$ ). Es una creación e pares  $\gamma \rightarrow e^- e^+$ , sin embargo el proceso inverso  $e^- e^+ \rightarrow \gamma$  de aniquilación de pares ocurre prontamente. Se observó experimentalmente.

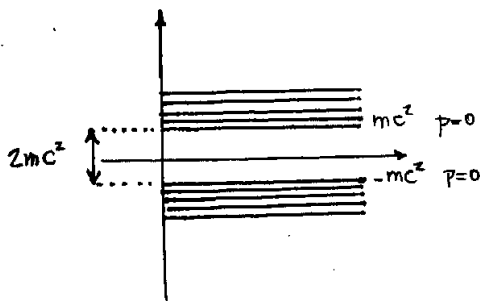


Figura 0.1

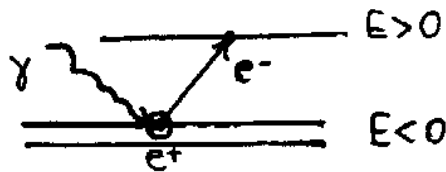


Figura 0.2

## Apéndice A

---

### Tensor de Levi-civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \pm 1 & i, j, k \text{ diferentes} \\ 0 & \text{Si algún par es igual} \end{cases}$$

y el signo es de acuerdo a si la permutación es par o impar.

**ID I X** Siendo  $\mathbf{A}$  un vector generico y  $\phi$  un campo escalar,

$$\int dp e^{ipa(x-x')} = \frac{2\pi}{a} \delta(x-x').$$