

Capítulo 1

Método de separación de variables

Al resolver una PDE (partial differential equation) se termina en general en un problema de Sturm-Liouville, que lleva a autovalores y autofunciones.

Un problema regular de Sturm-Liouville está representado por una ecuación del tipo

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{df}{dx} \right] + [q(x) + \lambda p(x)]f = 0,$$

donde $p(x)$ es una función peso que define la ortogonalidad (muchas veces vale 1). Las condiciones de contorno en el intervalo (a, b) serán

$$f(a) + \frac{df}{dx}(a) = \quad \quad f(b) + \frac{df}{dx}(b) =$$

En el (a, b) las condiciones de ortogonalidad se leen

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) p(\xi) d\xi = 0 \quad n \neq m$$

Asimismo, si están normalizadas, se puede escribir

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) p(\xi) d\xi = \delta_{nm}$$

Luego, cualquier f (well behaved) en el (a, b) se puede poner como

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^N a_n U_n(x)$$

Entonces

$$M_N = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N U_n(x') \right|^2 dx,$$

y esta expresión es mínima cuando los a_n son

$$a_n = \int_a^b U_n^*(x') f(x') p(x') dx'$$

Entonces,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x')$$

es correcto porque la serie converge. Luego, integrando en x'

$$f(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') f(x') p(x') dx' \right] U_n(x)$$

y donde

$$f(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) \right] f(x') p(x') dx'$$

es claro que esto debe tener comportamiento de delta de Dirac, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

es la llamada condición de clausura.

1.1 Separación en coordenadas cartesianas

Separamos los problemas en regiones donde vale $\nabla^2 \phi = 0$ entonces las fronteras tendrán la $\rho(\mathbf{x}')$ en general en forma de σ, λ .

Para coordenadas cartesianas la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

que intentaremos resolver a partir de un *ansatz*

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

lo que conduce a

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Para que esta solución valga, cada término tiene que ser una constante, entonces primeramente

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$$

lleva a

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2,$$

y

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2,$$

conduce a

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

donde cada una de estas ecuaciones es una versión simplificada de Sturm-Liouville. En estos casos particulares son osciladores armónicos; uno en cada dirección. Luego suponiendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R} > 0$ será $\gamma \in \mathbb{R}$ y la solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} e^{\pm i\alpha_m x} e^{\pm i\beta_n y} e^{\pm i\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z}.$$

donde $A_{m,n}$ es una constante general. Las condiciones de contorno permitirán fijar las constantes y entonces la solución tendrá diversas formas.

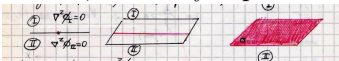
Según la conveniencia del problema particular será

$$e^{\pm \gamma x_i} = \cosh(\gamma x_i) + \sinh(\gamma x_i)$$

$$e^{\pm i k x_i} = \cos(k x_i) + i \sin(k x_i)$$

Algunos tips

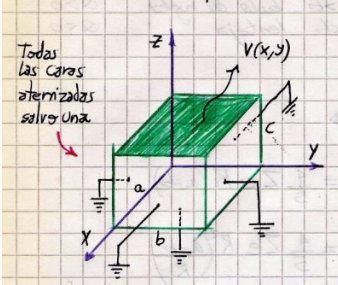
Queremos resolver la ecuación de Poisson, en el caso de cargas tipo (puntuales, lineales y superficiales)



podemos resolver $\nabla^2 \phi = 0$ que es más sencilla y separamos en dos regiones ① y ② donde me preocupo solamente por Laplace. Si las fuentes son más complejas que esto nos remitiremos a la función de Green.

EJEMPLO 1.1 Potencial en una caja

En este caso interesa el potencial V dentro de la caja. El exterior está fuera del ámbito de la resolución.



Se plantea para el potencial

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta} [A_{\alpha} \sin(\alpha x) + B_{\alpha} \cos(\alpha x)] [C_{\beta} \sin(\beta y) + D_{\beta} \cos(\beta y)] \times [E_{\gamma} \sinh(\gamma z) + F_{\gamma} \cosh(\gamma z)]$$

Utilizando que el potencial es nulo en los contornos indicados (ver figura) resulta

$$\begin{aligned} \phi(0, 0, 0) = 0 & \quad \rightarrow \quad F_{\gamma} = 0 \\ B_{\alpha} = 0 & \quad D_{\beta} = 0 \end{aligned}$$

Tal vez poner que esto es por las tapas laterales.

Entonces, juntando todas las constantes en una única constante A el potencial será la suma siguiente

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \sinh(\gamma z)$$

donde dada la relación $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ este índice se ha absorbido junto a los otros dos de manera que solo es una doble sumatoria.

Para satisfacer las condiciones de potencial nulo en $x = a$ y en $y = b$ se deben cumplir

$$\alpha = n \frac{\pi}{a} \quad \beta = m \frac{\pi}{b}$$

para todo natural n, m . Luego

$$\gamma = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

Entonces, cambiando los índices de la sumatoria a

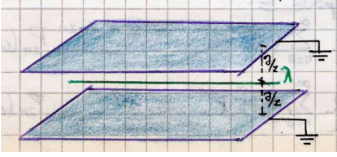
$$\phi(x, y, z) = \sum_{n, m} A_{nm} \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{b} y\right) \sinh\left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} z\right)$$

Finalmente sobre la tapa superior será $\phi(x, y, c) = V(x, y)$ de manera que, mediante un cálculo rutinario llegamos a

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{b} y\right) dy dx.$$

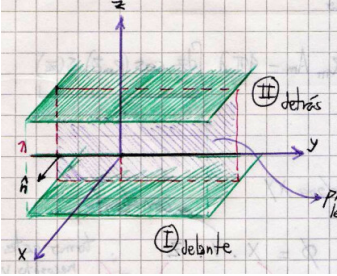
EJEMPLO 1.2 Problema 2

El problema a resolver está en el sketch de abajo



Queremos que no haya carga en las regiones en las cuales se subdividirá el espacio nos ocuparemos del laplaciano.

El sistema coordinado a utilizar está mostrado abajo



La densidad de carga se puede escribir según

$$\rho(\mathbf{x}) = \lambda \delta(x) \delta(z) = \sigma \delta(z)$$

donde hemos definido una densidad σ . La solución será de la forma

$$\Phi = X Y Z,$$

donde Y será una constante porque el problema no depende de y . Como las funciones trigonométricas se anulan en puntos y Z necesita esto se eligen

$$Z \propto \cos(k_z z), \sin(k_z z)$$

y $X \propto e^{-Kx}$ porque el potencial podría ir decreciendo en x –aunque es infinito–. Donde $K = k_z$ y $k_y = 0$. Hay una simetría en xy de reflexión, entonces el potencial es par. Luego, para la base de funciones usaré funciones pares (cosenos). Luego,

$$\phi(z = \pm a/2) = 0,$$

por ser planos conductores a tierra. Entonces hacer que se cumpla

$$\cos(\pm a/2K) = 0,$$

necesita $k_n = (2n + 1)\pi/a$ (nos alcanza con \mathbb{N} más el cero). La base de funciones será

$$\phi_I = \sum A_n^I e^{-K_n x} \cos(K_n z) \quad x > 0$$

$$\phi_{II} = \sum A_n^{II} e^{K_n x} \cos(K_n z) \quad x < 0$$

Ahora pediremos condiciones en la superficie de separación, la continuidad del potencial

$$\phi_I(x = 0) = \phi_{II}(x = 0)$$

Entonces, para el campo resultan

$$\sum_n A_n^I \cos(k_n z) = \sum_n A_n^{II} \cos(k_n z)$$

es decir $A_n^I = A_n^{II} \equiv A$, y para las derivadas del potencial

$$-\frac{\partial \phi_I}{\partial x} - \left(-\frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} \right) = 4\pi\lambda\delta(z)|_{x=0}$$

$$2 \sum_n k_n A_n \cos(k_n z) = 4\pi\lambda\delta(z)$$

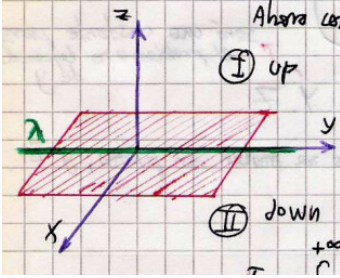
Para despejar el coeficiente se utilizan las propiedades de ortogonalidad, tomando el producto escalar en ambos miembros de la anterior ecuación,

$$ak_m A_m = 4\pi\lambda \int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_m z) \delta z dz$$

y como la integral da uno,

$$A_n = \frac{4\lambda}{2n+1}$$

Ahora considero el plano xy .



Se propone una fórmula

$$\phi = XYZ,$$

donde X es una e^{ikx} , Y es una constante y para Z se toma $\sinh(k|z - a/2|)$ porque un solo cero es necesario. Entonces tenemos prescripciones para cada zona que son

$$\phi_I = \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(k|z - a/2|) A_k^I e^{ikx} dk$$

$$\phi_{II} = \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(k|z - a/2|) A_k^{II} e^{ikx} dk$$

Entonces, de la evaluación de los contornos

$$\phi_I(z=0) = \phi_{II}(z=0)$$

surgen

$$A_k^I = A_k^{II} \equiv A_k$$

y asimismo

$$-2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk - 2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk = 4\pi\lambda\delta(x)$$

lo cual nos lleva a

$$-2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk = 4\pi\lambda\delta(x),$$

y multiplico por $\int e^{-ik'x} dx$ lo cual lleva a

$$A_k = \frac{-\lambda}{k' \cosh(ka/2)},$$

El período es a pues hay nodos en $\pm a/2$. Se multiplica por coseno y se integra.

Usaremos la expresión de la delta en Fourier:

$$2\pi\delta(k - k') = \int e^{i(k-k')x} dx$$

y volviendo todo a k sin primar

$$\phi = -\lambda \int dk e^{ikx} \frac{\sinh(k|z - a/2|)}{k' \cosh(ka/2)}$$

Para este caso obtenemos para el potencial una integral, contrariamente a lo que teníamos para el otro caso donde aparecía una serie.

Queremos ver la relación entre ambas,

$$\sinh(k|z - a/2|) = \sum_n A_n \cos(k_n z)$$

Sacamos de una tabla la forma del A , que es

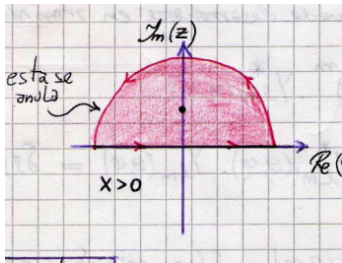
$$A_n = -\frac{4k}{a} \frac{\cosh(ka/2)}{(k^2 + k_n^2)}$$

y obtenemos, a menos de una constante,

$$\int \frac{e^{ikx}}{(k^2 + k_n^2)} dx$$

Por residuos se tiene

$$\int \frac{e^{ikx}}{(k - ik_n)(k + ik_n)} \text{Res}(f, \text{den.})$$



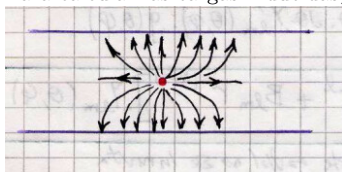
Usamos residuos para evaluar la integral. Vemos que da

$$\frac{2\pi i e^{-k_n}}{2ik_n}$$

En el caso de $x > 0$ se tendrá

$$\phi = 4\lambda \sum_n \frac{\cos(k_n z)}{2n + 1} e^{-k_n x}$$

Para calcular las cargas inducidas, véase figurin bajo estas líneas, será



$$\left. \frac{\partial \phi^{II}}{\partial z} \right|_{z=-a/2} = 4\pi \sigma_{\text{ind}}$$

donde

$$\sigma = \frac{\lambda e^{\pi|x|}}{a(1 + e^-)}$$

y entonces

$$\int \sigma dx = \frac{Q^{\text{ind}}}{L} = -\frac{\lambda}{2}$$

Lo que sucede en las direcciones x , y son condiciones periódicas de potencial que requieren dos ceros.

1.2 Separación en coordenadas esféricas

Para coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

proponiéndose la separación

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) Q(\varphi)$$

resulta en

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}$$

Procediendo como en el caso anterior, se tiene primeramente

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -\alpha^2,$$

un oscilador armónico en φ de manera que

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi},$$

donde en principio $\alpha \in \mathbb{R}$ pero podemos ir más lejos y como

$$\cos \alpha\varphi = \cos(\alpha\varphi \pm 2\pi)$$

se sigue que $\alpha \in \mathbb{Z}$ y podemos llamarlo $m^2 \equiv \alpha^2 \in \mathbb{Z}$. Estamos suponiendo que tenemos un recinto de integración que abarca todo el rango de φ de 0 a 2π . Debe tenerse presente que esta solución no sirve si la distribución no abarca todo el intervalo angular mencionado.

Luego,

$$-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \beta^2,$$

Las coordenadas convenientes dependerán de los contornos. Recordemos que siempre la cosa es resolver la ecuación más sus BC.

que merced al cambio de variables $x = \cos \theta$, que implica $d/d\theta = -\sin \theta d/dx$ lleva la ecuación anterior a la forma

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[\beta^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0,$$

la cual es claramente un problema de Sturm-Liouville. Con respecto a r se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \beta^2$$

donde un nuevo cambio de variables $R(r) = U(r)/r$ conduce a

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\beta^2 U}{r^2} = 0$$

Si el problema tiene simetría azimutal ($m = 0$) se tendrá¹:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \beta^2 P = 0, \quad (2.1)$$

la cual tiene un punto singular en $x^2 = 1$ que corresponde al coseno en 0 o en π (el eje polar). Este problema se evita con

$$\beta^2 = \ell(\ell + 1), \quad \ell \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

porque la serie sólo se mueve entre $z \in (-1, 1)$ y entonces con la condición (2.2) las funciones que salen de la ecuación (2.1) no presentan singularidades. La serie que da P se corta. Son los polinomios de Legendre. Tenemos una nueva restricción entonces que es el eje polar $-1 < z < 1$. Se reescribe la (2.1) como

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \ell(\ell + 1)P = 0.$$

Las funciones P son los polinomios de Legendre P_ℓ que forman un conjunto completo y son ortogonales entre sí. Se pueden construir con la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [x^2 - 1]^\ell,$$

donde se cumple $P_\ell(x = 1) = 1$ y además las condiciones de ortogonalidad son

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}$$

¹Si $m = 0$ significa sencillamente que no depende del ángulo φ , o sea que hay simetría de revolución.

Se ve [?]

$$(\ell + 1)P_{\ell+1} - (2\ell + 1)xP_{\ell} + \ell P_{\ell-1} = 0$$

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx} - x \frac{dP_{\ell}}{dx} - (\ell + 1)P_{\ell} = 0$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_{\ell}}{dx} - \ell x P_{\ell} + \ell P_{\ell-1} = 0$$

y

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} U = 0$$

de manera que su solución será del tipo

$$U(r) = Ar^{\ell+1} + BR^{-\ell}.$$

siendo

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)Q(\varphi)$$

un armónico esférico.

si usamos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ de modo que $\alpha \in \mathbb{Z}$ y entonces $\alpha = m$, con simetría azimutal es $m = 0$ (rotación en φ),

$$Q = G\varphi + H \quad G, H \text{ ctes.}$$

Para las otras funciones será

$$R(r) = A_{\ell}r^{\ell} + B_{\ell}R^{-\ell-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_{\ell}P_{\ell}^m(\cos(\theta)) + D_{\ell}Q_{\ell}^m(\cos(\theta))$$

siendo P_{ℓ}^m polinomio de Legendre, que verifica la fórmula de Rodrigues

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell}\ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} [x^2 - 1]^{\ell}$$

con $P_{\ell}(\cos(\theta))$ polinomio de Legendre de primera especie, y $Q_{\ell}(\cos(\theta))$ de segunda especie. Los $\{P_{\ell}\}$ son un conjunto completo y ortogonal en $-1 \leq x \leq 1$ o bien en $0 \leq \theta \leq \pi$.

Los $\{Q_{\ell}^m(\cos(\theta))\}$ tienen problemas en $\theta = 0, \theta = \pi$ (eje z) de manera que si está el eje z no podemos usar Q_{ℓ}^m ; en estos problemas sólo podemos usar $P_{\ell}^m(\cos(\theta))$. Luego, la solución total será

$$\phi(r, \theta, \phi) = [R(r)][\Theta(\theta)][Q(\varphi)],$$

o bien

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{\ell}r^{\ell} + B_{\ell}r^{-\ell-1}] [C_{\ell}P_{\ell}^m + D_{\ell}Q_{\ell}^m] [E_m \cos(m\phi) + F_m \sin(m\phi)]$$

y en el caso particular $m = 0$

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}] [C_{\ell} P_{\ell}^m + D_{\ell} Q_{\ell}^m] [G_0 \phi + H_0]$$

Las constantes $A_{\ell}, B_{\ell}, C_{\ell}, D_{\ell}, E_m, F_m$ se ajustan con el $\phi(r \rightarrow \infty)$, $\phi(r \rightarrow 0)$, $\phi(z = 1)$ y $\phi(z = -1)$.

Lo que permite esquivar el problema del punto singular en $x \equiv \cos(\theta) = 1$ es

$$\beta^2 = \ell(\ell + 1) \quad -\ell < m < \ell \quad \alpha^2 = m^2$$

Recordemos las sumas de series

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} z^{\ell} \quad |z| < 1,$$

el polinomio asociado de Legendre

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} [1 - x^2]^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} [x^2 - 1]^{\ell}$$

que cumple

$$P_{\ell}(1) = 1 \quad P_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell} \quad \forall \ell$$

con

$$\int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx = \frac{2}{2\ell + 1}$$

siendo la ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} P_{\ell'}^m(\cos(\theta)) P_{\ell}^m(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \delta_{\ell\ell'}$$

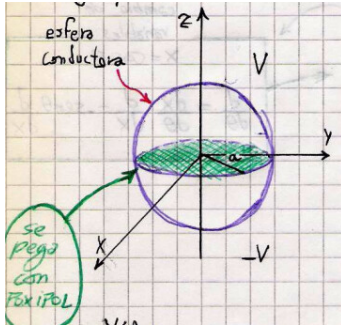
$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^m(x) P_{\ell}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

En esféricas las constantes de separación están asociadas

$$R(r) \text{ con } \ell \quad \Theta(\theta) \text{ con } \ell, m \quad Q(\phi) \text{ con } m$$

EJEMPLO 2.1 Problema de separación esférica

Ya este problema, ver figura, tiene simetría de revolución. Entonces será $m = 0$



$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}] P_{\ell} \cos \theta \quad (2.3)$$

En dos secciones diferentes se tendrá

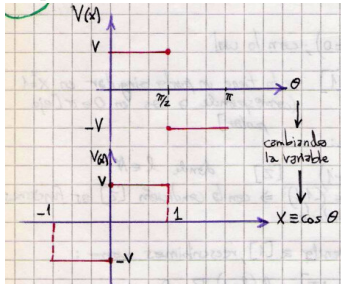
$$r > a \quad \varphi_I(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-(\ell+1)} P_{\ell} \cos \theta$$

$$r < a \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell} \cos \theta$$

Entonces, cada potencial tiende al valor $V(x)$

$$\varphi_I(r, \theta)_{r=a} \rightarrow V(x) \quad \varphi_{II}(r, \theta)_{r=a} \rightarrow V(x)$$

El escalón refleja la imparidad, de manera que sólo aparecerán términos impares. Ahora queremos desarrollar el escalón en polinomios de Legendre



El gráfico de arriba tiene también el cambio de variables $x \equiv \cos \theta$,

$$\frac{V(x)}{V} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} P_{\ell}$$

con ℓ impar. El coeficiente

$$c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\ell}(x) dx = (2\ell+1) \int_0^1 P_{\ell}(x) dx,$$

y usando la fórmula de Rodrigues

$$c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2^{\ell} \ell!} \int_0^1 \frac{d^{\ell}(x^2-1)^{\ell}}{dx^{\ell}} dx$$

se viene

$$c_\ell = \left(\frac{-1}{2}\right)^{(\ell-1)/2} \frac{(2\ell+1)(\ell-2)!!}{2((\ell+1)/2)!}$$

donde el doble factorial es sobre los impares. Hemos hallado los coeficientes. Reemplazando para los primeros

$$c_1 = 3/2 \quad c_3 = -7/8 \quad c_5 = 11/16,$$

Entonces

$$A_\ell = V a^{-\ell} c_\ell \quad B_\ell = V a^{\ell+1} c_\ell$$

1.3 Detalles sobre solución de problemas de potencial

Si el potencial es par en una coordenada, entonces uso funciones pares (cosenos). La continuidad del potencial

$$\phi_I(x=0) = \phi_{II}(x=0) =$$

y salto en el campo

$$\left. \frac{\partial \phi_I}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0} = -4\pi\sigma|_{x=0}$$

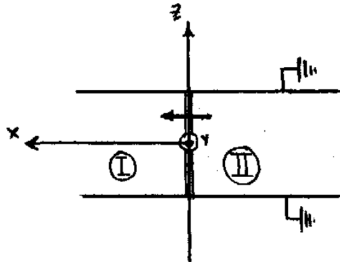


Figura 3.1

Si tengo condiciones periódicas en la coordenada irán senos y cosenos trigonométricos, entonces se discretizan m, n y tengo $\sum_n \sum_m$ una serie de Fourier.

Si tengo condiciones no periódicas en la coordenada irán seno, coseno hiperbólicos entonces tengo $\int dk$ integral de Fourier.

En general tomo

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

pudiéndose discretizar los k 's luego. Se considera $\alpha^2 \equiv k_{e_1}^2$ y así siguiendo con las otras dos.

Sobre la ecuación de salto en el campo aplicamos ortogonalidad y despejamos coeficientes en función de σ .

Detalle: el salto en el campo se hace siguiendo la normal, como se ilustra abajo

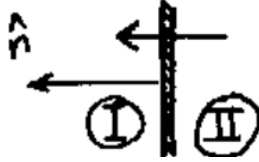


Figura 3.2

$$E_I^{\hat{n}} - E_{II}^{\hat{n}} = 4\pi\sigma \quad -\frac{\partial\phi_I}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{II}}{\partial x} = 4\pi\sigma$$

Para $k_{e_1}^2$ en el caso discreto

$$\sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_m e_1) + \sin(k_m e_1)$$

pero en el continuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ike_1} dk$$

usamos $\exp(ike_1)$ para que la integral converja en lugar de $(\cos(ke_1) + \sin(ke_1))$.

1.3.1 Desarrollo distancia entre puntos

Es útil el desarrollo

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell}} P_{\ell}(\cos(\gamma))$$

en polinomios de Legendre para el ángulo entre vectores en coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas, donde $\gamma = \gamma(\theta, \phi)$ es el ángulo entre vectores, que surge del teorema del coseno.

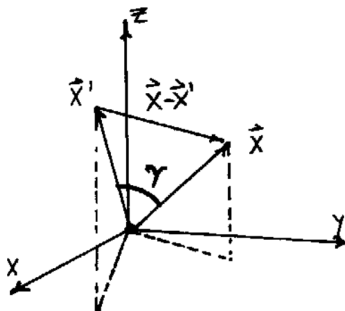
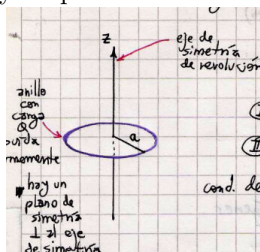


Figura 3.3

1.3.2 Prolongación analítica

Consiste en *prolongar* una solución restringida por ejemplo en el eje polar a todo el resto del espacio pegándole los polinomios de Legendre.

Como ejemplo vemos un anillo con carga Q distribuida uniformemente. Hay un plano de simetría perpendicular al eje de simetría.

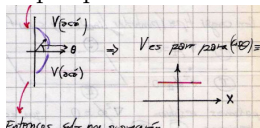


A partir de la prescripción (2.3)

$$r > a \quad \varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} r^{-(2n+1)} P_{2n}(\cos \theta)$$

$$r < a \quad \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta)$$

y hay que ver las condiciones de contorno. Me quedará con los coeficientes pares porque es simétrico el potencial por la simetría en θ ,



y por ello sólo me aparecerán coeficientes pares. Los potenciales están evaluados en el eje polar que son dos ángulos theta,

$$\varphi_1(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} r^{-(2n+1)} \quad \varphi_2(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n}$$

una serie de potencias para el potencial $V(\mathbf{x} = \hat{z})$ de un anillo (que es un caso ya resuelto en F3).

Luego, multiplicando esta serie de potencias por los polinomios de Legendre tendremos el V para todo el espacio. El cálculo elemental da

$$\varphi(\mathbf{x})(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{Q}{r\sqrt{1 + a^2/r^2}}$$

Entonces

$$\varphi_1(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \frac{Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

Ahora para todo el espacio es

$$\varphi_1(r > a) = \frac{Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} r^{-2n} P_{2n}(\cos \theta)$$

$$\varphi_2(r < a) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \theta)$$

En notación compacta

$$\varphi(\mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta).$$

Lo ponemos en serie (pasamos un cálculo de F3 a una serie)

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(0) \quad r > a$$

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}} P_\ell(0) \quad r < a$$

A partir de aquí están los barruntos de las notas de final. Habría que consolidar con lo transcripto desde la carpeta.

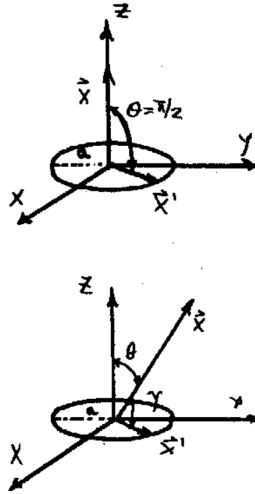


Figura 3.4

y $P_\ell(0)$ tiene términos pares solamente (los impares son nulos).

Entonces

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{a^{2n}} P_{2n}(0)$$

con

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n n!}$$

por lo tanto para todo el espacio será

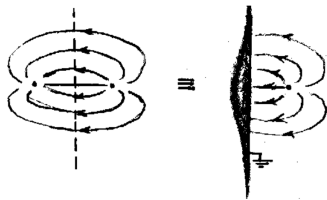


Figura 3.5

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\sin(\theta)) \quad r < a$$

El hecho de que sólo vivan ℓ pares viene porque ϕ es par pues hay simetría de reflexión en el plano xy , lo que sucede de $(0, \pi/2)$ es igual a lo que sucede de $(\pi/2, \pi)$.

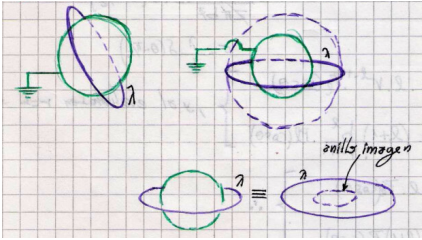
Los problemas con simetría de revolución en torno a \hat{z} pueden ser resueltos con el método de prolongación analítica. La idea central es que si dos soluciones del potencial coinciden en un conjunto de puntos (como ser el eje azimutal) entonces deben ser la misma solución.

1.3.3 Comentario multipolos

Estos dos problemas son equivalentes, pero multipolarmente tienen desarrollos diferentes. El problema es que el metal a tierra tendrá carga hasta el infinito y entonces no podemos tener un radio de convergencia.

EJEMPLO 3.1 Problema esfera y aro

La situación del problema puede verse en la ilustración dada por el figurín siguiente

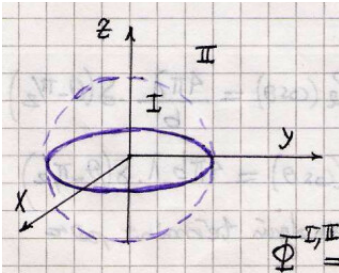


La situación física que se observa es que habrá simetría azimutal, dado que la distribución es la misma para todo ángulo φ . Entonces será $m = 0$. Además, como el eje polar forma parte de la solución también se descartará Q_ℓ^m dado que se necesita regularidad en $-1, 1$.

Entonces, el candidato es

$$\phi^{I,II} = \sum_{\ell} (A_{\ell}^{I,II} r^{\ell} + B_{\ell}^{I,II} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde hemos establecido las dos regiones ilustradas aquí abajo



Luego, requeriremos regularidad en $r \rightarrow \infty$ para ϕ^{II} y en $r = 0$ para ϕ^I lo cual conduce a

$$A_{\ell}^{II} = 0 \quad B_{\ell}^I = 0$$

Entonces

$$\phi^I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = \sum_{\ell} B_{\ell}^{II} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

y del contorno en b se tiene

$$\begin{aligned} \phi^I(r=b) &= \phi^{II}(r=b) = A_{\ell}^I b^{-\ell-1} = B_{\ell}^{II} b^{-\ell-1} \equiv \frac{C_{\ell}}{b} \\ \phi^I &= \frac{1}{b} \sum_{\ell} C_{\ell} \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = \frac{1}{r} \sum_{\ell} C_{\ell} \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

El análisis de $\rho(r, \theta, \varphi)$ tal que $\int \rho dV = q$ en principio nos dice que no dependerá de φ y tendremos una forma

$$\rho = f(\theta)\delta(r-b) \quad \rho = \alpha(r, \theta)\delta(\theta - \pi/2)\delta(r-b)$$

la cual por integración

$$\rho = \frac{q}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(\theta - \pi/2)\delta(r-b)$$

lo cual conduce a una

$$\sigma = \frac{\lambda}{b} \delta(\theta - \pi/2)$$

Las derivadas del potencial serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^I}{\partial n} &= \frac{\partial \phi^I}{\partial r} = \frac{1}{b} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell-1} b P_{\ell}(\cos \theta) \\ \frac{\partial \phi^{II}}{\partial n} &= \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell + 1 \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell+1} b^{-1} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

y al evaluarlas en $r=b$

$$\left. \frac{\partial \phi^I}{\partial r} \right|_b = \frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell P_{\ell}(\cos \theta) \quad \left. \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} \right|_b = -\frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} (\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \phi^{II}}{\partial n} - \frac{\partial \phi^I}{\partial n} \right) \Big|_b &= \frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{4\pi\lambda}{b} \delta(\theta - \pi/2) \\ \sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) &= 4\pi\lambda b \delta(\theta - \pi/2) \end{aligned}$$

y ahora necesitaríamos encontrar C_{ℓ} para lo cual multiplicaremos ambos miembros y haremos uso de las condiciones de ortogonalidad de los polinomios [ver ecuaciones tal y tal]

$$\sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) \int_0^{\pi} \sin \theta P_{\ell'}(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta) d\theta = 4\pi\lambda b \int_0^{\pi} \sin \theta P_{\ell'}(\cos \theta) \delta(\theta - \pi/2) d\theta$$

que resulta en

$$C_{\ell'} (2\ell' + 1) \frac{2}{2\ell' + 1} = 4\pi\lambda b P_{\ell'}(0)$$

y de lo cual se desprende que ahora podemos escribir

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_{\ell} \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_{\ell} \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta)$$

En este caso el $\sin \theta$ podría no estar [¿?].

Luego,

$$P_{\ell+1}(x)(\ell+1) - (2\ell+a)xP_{\ell}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

y para sucesivos

$$P_{\ell+1}(0)(\ell+1) + \ell P_{\ell-1}(0) = 0 \quad P_{\ell+2}(0)(\ell+2) + (\ell+1)P_{\ell}(0) = 0$$

$$P_{\ell+2}(0) = -\frac{(\ell+1)}{(\ell+2)} P_{\ell}(0)$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_0(0) = 1 \quad P_1(0) = 0$$

y se ve que los P_{ℓ} que aportarán serán los pares, de manera que

$$P_2(0) = -\frac{1}{2} \quad P_4(0) = \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \quad P_6(0) = \left(-\frac{5}{6}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

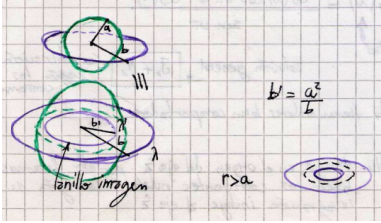
$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

tras lo cual

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta)$$

$$\phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta)$$

Ahora se mete a tierra la esfera por imágenes, ver ilustración siguiente



Con ello

$$\lambda = \frac{dq}{b \, d\theta} \quad \lambda' = \frac{dq'}{b' \, d\theta}$$

y

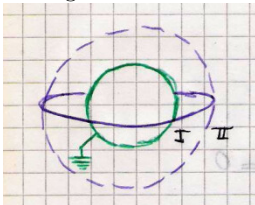
$$\lambda' = -\frac{b}{a} \lambda.$$

Deberíamos obtener, si hacemos la superposición,

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r^{4n+1} - a^{4n+1}}{r^{2n+1} b^{2n}} \right) P_{2n}(\cos \theta)$$

$$\phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b^{4n+1} - a^{4n+1}}{r^{2n+1} b^{2n}} \right) P_{2n}(\cos \theta)$$

También se puede llegar directamente a la resolución por separación de variables en la configuración



Es similar de entrada

$$\phi^{I,II} = \sum_{\ell} (A_{\ell}^{I,II} r^{\ell} + B_{\ell}^{I,II} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta).$$

1.4 Armónicos esféricos

Considérese el problema de Sturm-Liouville siguiente

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[e(e+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $-1 \leq x \leq 1$. Como $\ell \geq 0$ y $-\ell \leq m \leq \ell$ se tendrán

$$P_{\ell m} = (-1)^m (1-x)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} (1-x)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^{\ell}$$

y entonces

$$P_{\ell, -m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell m}(x)$$

con $\phi_m = e^{im\varphi}$. La condición de ortogonalidad nos dice que

$$\int_{-1}^1 P_{\ell' m}(x) P_{\ell m}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell \ell'}$$

y de lo cual deducimos que

$$P_{\ell m}(x) \phi_m(x).$$

Estas expresiones se presentan en forma conjunta y normalizada. Son los armónicos esféricos.

$$Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

Los armónicos esféricos son un conjunto ortonormalizado en

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Se verifica también

$$Y_{\ell, -m}(\theta, \varphi) = (-1) Y_{\ell, m}^*(\theta, \varphi).$$

La ortonormalidad es

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) Y_{\ell', m'}^*(\theta, \varphi) d\theta = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}$$

En la carpeta tenía x en lugar de $\cos(\theta)$.

mientras que la completitud

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta'))$$

nos dice que solo es diferente de cero esta suma cuando los ángulos primados y sin primar son iguales. Entonces una función f cualquiera $\in L^2$ se puede expresar en armónicos esféricos,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

donde

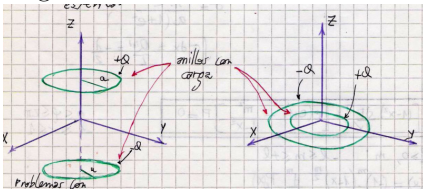
$$A_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) f(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) d\theta,$$

y como el potencial es L^2 , entonces en coordenadas esféricas es

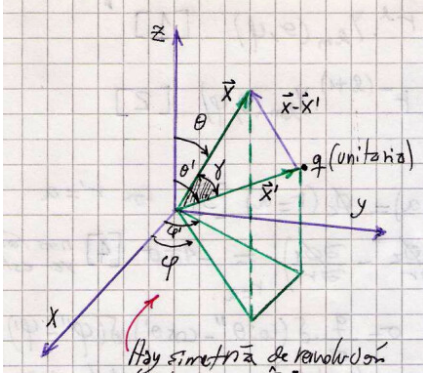
$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_{\ell,m} r^{\ell} + B_{\ell,m} r^{-(\ell+1)}] Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

donde la parte radial no se ha inmutado. Esta es la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, que será la solución general para un problema de potencial en dichas coordenadas.

El figurín siguiente muestra anillos con carga, según se indica, centrados en un sistema de coordenadas. Son problemas con simetría de revolución en torno al eje \hat{z} y permiten ser resueltos con el método de la prolongación analítica.



Ahora consideraremos la siguiente figura



y la evaluación del potencial

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}] P_{\ell}(\cos \gamma)$$

Claramente hay simetría de revolución si la carga q se hallase sobre el eje z . En este caso el problema no puede depender de φ y ello se ve en que $P_{\ell}(1) = 1$ para todo ℓ .

La siguiente figurita explicita lo que sucede

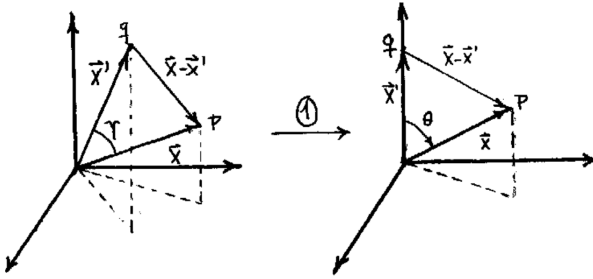


Figura 4.6 Figurin

Se ve que si q está en \hat{z} entonces la simetría de revolución implica que γ se transforma en el θ de esféricas. Si, además, γ es nulo entonces se tiene simetría de revolución en torno al eje determinado por la recta que contiene a ambos puntos.

Con respecto al inverso de la distancia recíproca resulta

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}}$$

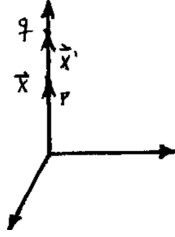


Figura 4.7

donde $|\mathbf{x}| = r$ y $|\mathbf{x}'| = r'$. Así

$$\left. \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right|_{\gamma=0} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}} = \frac{1}{|r - r'|}$$

Esto define dos zonas ① $r' > r$ y ② $r' < r$. Serán $\phi_1 = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell}$ y $\phi_2 = \sum_{\ell} B_{\ell} r^{-(\ell+1)}$. Entonces, si $r' < r$ será

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r(1 - r'/r)} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}}$$

en cambio si es $r' > r$

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r'(1 - r/r')} = \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}}$$

de manera que

$$\left. \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right|_{\gamma=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

donde $r_{<}$ y $r_{>}$ son el mayor y el menor r para cada región. Con esta notación se puede escribir una única fórmula. Además podemos pensar en $1 = P_{\ell}(1) \forall \ell$ que también es $1 = P_{\ell}(\cos 0)$, lo cual nos lleva a

$$\left. \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right|_{\gamma=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos 0)$$

que es la descomposición en polinomios de Legendre del ϕ de una carga unitaria en \hat{z} y evaluado en \hat{z} .

Hacemos de esta manera prolongación analítica,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

y decimos que será el ϕ de una carga unitaria en cualquier parte (descompuesto en polinomios de Legendre). Aquí $\gamma = \gamma(\theta, \varphi)$ de modo que $\cos \gamma$ será una función muy complicada de los ángulos esféricos, en efecto,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Se separará el espacio en las dos regiones definidas previamente, y entonces tendremos

$$r < r' : \quad \phi_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.1)$$

$$r > r' : \quad \phi_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.2)$$

Con estas prescripciones aplicaremos las condiciones de contorno: el potencial será nulo en el infinito, en la superficie será continuo y no habrá divergencias en el interior de la esfera.

$$\begin{aligned} \phi_1(r=a) &= \phi_2(r=a) \\ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= -4\pi\sigma \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde esta última σ cumple que²

$$\int \sigma dS = q \quad \sigma = \frac{q}{a^2} \delta(\cos \theta'' - \cos \theta') \delta(\varphi'' - \varphi')$$

Luego, usando la relación para la δ anterior se tienen

$$\sigma = \frac{q}{a^2} Y_{\ell,m}(\theta'', \varphi'') Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

y evaluando

$$\phi_1(r'=a) = \phi_2(r'=a)$$

se tiene $D_{\ell m} = A_{\ell m} a^{2\ell+1}$ puesto que las ecuaciones (4.1) y (4.2) son iguales término a término ya que los armónicos independientes son linealmente independientes.

²Es una delta de Dirac adecuada para que se cumpla lo que se tiene que cumplirse

Utilizando la (4.3) con la σ definida se llega a que

$$\sum_{\ell, m} [D_{\ell m}(\ell + 1)a^{-(\ell+2)} + A_{\ell m}\ell a^{\ell-1}] Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \frac{4\pi q}{a^2} \sum_{\ell, m} Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell, m}(\theta, \varphi).$$

Otra vez usando que son funciones linealmente independientes, se tiene

$$\frac{D_{\ell m}^{\ell+1}}{a^{\ell+2}} + A_{\ell m}\ell a^{\ell-1} = \frac{4\pi q}{a^2} Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi')$$

Ya tenemos los coeficientes y entonces podemos expresar el potencial ϕ descompuesto en armónicos esféricos como

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi')$$

que es el potencial de una carga puntual unitaria con armónicos esféricos. Con esta expresión debiera hacerse más sencilla la integral de Poisson, pero no tanto porque como sumamos sobre ℓ y m la expresión es simétrica por los índices.

El polinomio P_{ℓ} en función del $\cos \gamma$ se puede escribir utilizando el *teorema de adición* de los armónicos esféricos ha sido usado

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi')$$

Ahora, si reemplazamos en la integral de Poisson se tiene

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi') \right] dV',$$

que se puede cosmetizar como

$$\phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[\int_{V'} \rho(\mathbf{x}') Y_{\ell, m}^*(\theta', \varphi') r_{<}^{\ell} dV' \right] \frac{Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)}{r_{>}^{\ell+1}},$$

definiéndose el corchete como $q_{\ell m}$ coeficiente multipolar de orden ℓ, m , así

$$\phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)}{r_{>}^{\ell+1}},$$

es el desarrollo multipolar para el potencial ϕ .

Entonces, definiendo

$$\phi_{\ell m}(\mathbf{x}) = 4\pi \frac{q_{\ell m}}{2\ell + 1} \frac{Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)}{r_{>}^{\ell+1}}$$

se tiene para el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) = -\nabla \sum_{\ell, m} \phi_{\ell m}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell, m} \mathbf{E}_{\ell m}(\mathbf{x})$$

que es una suma de campos multipolares

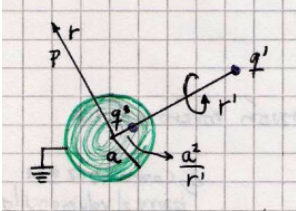
$$\mathbf{E}_{\ell m}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi_{\ell m}(\mathbf{x}).$$

EJEMPLO 4.1 Green en términos de armónicos esféricos para el problema de la esfera y la carga

Para una esfera y una carga puntual frente a ella (ver sección XXX y cartoon bajo estas líneas) se tenía bajo condiciones de Dirichlet,

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|}$$

donde el primer término tiene ya un desarrollo en armónicos esféricos según se vio [conectar]. El segundo término, en cambio, tiene eje de simetría de revolución y puede resolverse usando *prolongación analítica*.



$$\frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

y habría que hacer una expansión de Taylor de esto. Con $\gamma = 0$ se tiene

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|}$$

Vemos esto para chequear que la serie converja $xx' > a^2$

$$\frac{a}{xx'(1 - a^2/(xx'))} = \frac{a}{xx'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{xx'} \right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell+1}}{(xx')^{\ell+1}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(|\mathbf{x}|)$$

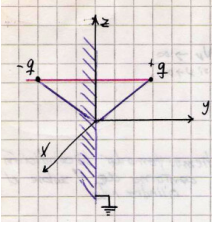
y para $x, x' > a$

$$\frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell+1}}{(xx')^{\ell+1}} \frac{1}{2^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

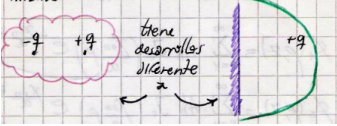
y lo de adentro $[i?]$ es Green en armónicos esféricos para la esfera. Esto tiene que valer cero sobre la esfera $G_D(|\mathbf{x}| = a, |\mathbf{x}'| = a) = 0$.

Para el problema interno debemos alterar el radio de convergencia porque cambian las relaciones entre xx' y a .

Observación interesante para el problema de una superficie a potencial nulo (una chapa, por ejemplo). Veamos ilustración más abajo.



Si desarrollamos ambos problemas multipolarmente en el problema equivalente (calculo que esto quise ilustrar con la figurilla de abajo) la expresión no es la misma.



El problema es que la chapa tiene carga hasta el infinito y entonces no podemos tener un radio de convergencia.

1.4.1 Relación de los multipolos esféricos y los cartesianos

El operador gradiente en coordenadas esféricas es Apéndice XXX. Entonces

$$E_r^{\ell m} = \frac{4\pi(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+2}} q_{\ell m}$$

$$E_\theta^{\ell m} = \frac{-2\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+2}} \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} q_{\ell m}$$

$$E_\varphi^{\ell m} = \frac{-4\pi}{2\ell+1} \frac{im}{r^{\ell+2} \sin \theta} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) q_{\ell m}$$

De aquí, reemplazando sale la relación entre desarrollos

$$q_{00} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{00} = Y_{00}^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\ell = 1 \quad \begin{cases} q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(p_x - ip_y) \\ q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(p_x + ip_y) \\ q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z \end{cases} \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \, e^{i\varphi}$$

$$(-1)^m q_{\ell m}^* = q_{\ell, -m}$$

$$\begin{cases} q_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Q_{33} \\ q_{21} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{13} - iQ_{23}) \\ q_{22} = -\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \end{cases} \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

donde en estas últimas expresiones los índices numéricos representan las coordenadas de acuerdo con $1, 2, 3 \equiv x, y, z$.

1.5 Separación de variables en cilíndricas

Se propone

$$\phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$$

de modo que el laplaciano en cilíndricas (ver Apéndice XXX) conduce a

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{Q\rho^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Entonces el último término será constante de la forma

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2,$$

donde la naturaleza de k dependerá también de las condiciones de contorno del problema (en conexión con lo del k negativo que se dirá luego). Entonces podemos escribir

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \rho^2 k^2 = 0.$$

y hacemos

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -\nu^2$$

donde la constante se toma negativa por la condición de que Q sea periódica en 2π . [Acá yo diría que la periodicidad hace que la constante ν sea entera]. Se tienen, en suma

$$Q \propto e^{\pm i\nu\phi} \quad Z \propto e^{\pm kz}.$$

Prosiguiendo, esto conduce a

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + R \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) = 0,$$

la cual haciendo un reemplazo $x = k\rho$ lleva a

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) R = 0,$$

que ahora tiene forma de Sturm-Liouville.

Las soluciones serán funciones de Bessel de primera y segunda especie,

$$J_\nu(x) \quad N_\nu(x),$$

donde las de segunda especie se definen a partir de las de primera según

$$N_\nu(k\rho) \equiv \frac{J_\nu(k\rho) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin(\nu\pi)}$$

la cual se suele llamar función de Neumann.

En general J_ν y $J_{-\nu}$ no son independientes, pero J_ν y N_ν sí lo son de manera que la combinación lineal

$$J_\nu + N_\nu$$

es una buena solución general (luego hay que introducir los contornos).

La función J_ν tiene valores bien comportados siempre mientras que N_ν , en cambio, diverge en el origen del eje \hat{z} . Si la región de integración incluye dicho eje, entonces los coeficientes asociados a la función de Neumann deben anularse.

También se suelen definir

$$H_\nu^{(1)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) + iN_\nu(k\rho)$$

$$H_\nu^{(2)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) - iN_\nu(k\rho)$$

que son las funciones de Bessel de tercera especie o bien Hankel de primera y segunda especie respectivamente.

Todas las funciones cilíndricas verifican las siguientes relaciones de recurrencia

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_{\nu}(x)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_{\nu}}{dx}(x)$$

donde Ω es cualquiera de las funciones cilíndricas.

Algunos valores asintóticos serán de utilidad. Con $x \ll 1$ se tiene

$$J_{\nu} \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \quad \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$N_{\nu} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + 0.57...] & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} & \nu \neq 0 \end{cases}$$

donde Γ es la función gamma generalizada que verifica [¿?] $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ cuando n es un natural.

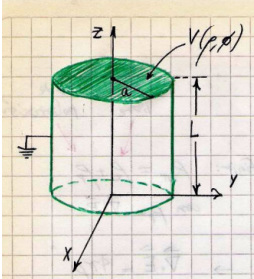
Para el límite $x \gg 1$ y $x \gg \nu$ se dan

$$J_{\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad N_{\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

donde los factores senoidales implican un comportamiento oscilante.

EJEMPLO 5.1 Cilindro a tierra con tapa a potencial

El figureti siguiente ilustra la distribución



Se tienen

$$\phi|_{\rho=a} = 0 \quad \phi|_{z=0} = 0$$

condiciones que conducen, respectivamente, a que

$$J_m(ka) = 0 \quad Z(z) \propto \sinh(k_{mn}z)$$

donde $k_{mn}a \equiv x_{mn}$ etiqueta ceros de Bessel. El primer subíndice es el orden de Bessel y el segundo el orden del cero. Esta será la forma en que se enumerarán los ceros.

El potencial tendrá la pinta

$$\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m,n} c_{mn} e^{im\phi} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z)$$

donde las funciones de Neumann se retiraron puesto que no son finitas en $\rho = 0$. Evaluando sobre la tapa se tiene $\phi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$. La ortogonalidad para ϕ y ρ involucra las siguientes dos integrales

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'},$$

$$\int_0^a \rho J_{m'}(k_{m'n}\rho) J_{m'}(k_{mn'}\rho) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(k_{m'n'}a)]^2 \delta_{nn'},$$

las cuales aplicadas conducen a

$$C_{m'n'} 2\pi \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(k_{m'n'}a)]^2 = \int_0^{2\pi} e^{-im'\phi} d\phi \int_0^a \rho J_{m'}(k_{m'n}\rho) J_{m'}(k_{mn'}\rho) V(\rho, \phi) d\rho$$

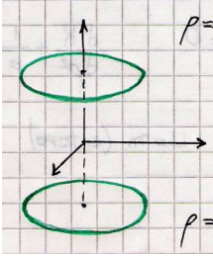
que como es todo primado en m puede expresarse con m a secas.

EJEMPLO 5.2 Problema de aros

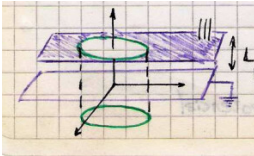
Este problema de aros no tiene simetría azimutal pero aún así la variable va de 0 a 2π . Las densidades de carga de los aros superior e inferior son, respectivamente,

$$\rho = \lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a) \delta(z - L/2) \quad \rho = -\lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a) \delta(z + L/2)$$

La observación principal aquí es que k sin “enes” es un k continuo.



El espacio será separado de la manera ilustrada en la figurilla siguiente, para generar un problema equivalente. Se redefine $L/2 \rightarrow L$ para no arrastrar un molesto dos.



Se tendrán

$$\begin{aligned} R(\rho) &\sim J_m(k\rho) \\ Q(\phi) &\sim e^{\pm im\phi} \text{ o bien } \cos(m\phi) + \sin(m\phi) \\ Z(z) &\sim \begin{cases} Z^I(z) \sim e^{-kz} \\ Z^{II}(z) \sim \sinh(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

La densidad de carga será

$$\sigma = \frac{\rho}{\delta(z-L)} = \lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a)$$

que conduce a

$$\begin{aligned} \phi^I &= \int dk \sum_m J_m(k\rho) [A_m^I \cos(m\phi) + B_m^I \sin(m\phi)] e^{-kz} \\ \phi^{II} &= \int dk \sum_m J_m(k\rho) [A_m^{II} \cos(m\phi) + B_m^{II} \sin(m\phi)] \sinh(kz) \end{aligned}$$

Como se dijo, k es continuo cuando no está discretizado el contorno. La continuidad del potencial en el borde establece que

$$\phi^I|_{z=L} = \phi^{II}|_{z=L},$$

mientras que la discontinuidad de las derivadas lleva a

$$-\frac{\partial \phi^I}{\partial z} - \left(-\frac{\partial \phi^{II}}{\partial z} \right) = 4\pi\sigma = 4\pi\lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a).$$

La única posibilidad es que $m = n$ y $A_m^{I,II} = 0$ para todo m . Se puede ver analíticamente

$$\begin{aligned} \phi^I &= \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^I \sin(n\phi) e^{-kz} \\ \phi^{II} &= \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^{II} \sin(n\phi) \sinh(kz) \end{aligned}$$

y emparejando será

$$B_{kn}^I e^{-kL} = B_{kn}^{II} \sinh(kL)$$

y además como

$$\int_0^\infty J_n(k\rho) J_n(k'\rho) d\rho = \frac{\delta(k - k')}{k},$$

el contorno ha resultado escrito así

$$\begin{aligned} \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^I e^{-kL} + \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^{II} \cosh(kL) &= 4\pi\lambda_0 \delta(\rho - a) \\ \int dk k B_{kn}^I e^{-kL} \int d\rho \rho J_n(k'\rho) J_n(k\rho) + \\ \int dk k B_{kn}^{II} \cosh(kL) \int d\rho \rho J_n(k'\rho) J_n(k\rho) &= 4\pi\lambda_0 J_n(k'a) \end{aligned}$$

que conduce, luego de retirar las primas, a

$$B_{kn}^{II} (\sinh kL + \cosh kL) = 4\pi\lambda_0 a J_n(ka)$$

Se ve que si $z \rightarrow \infty$ entonces $e^{-kz} \rightarrow 0$ salvo para $k = 0$. Luego,

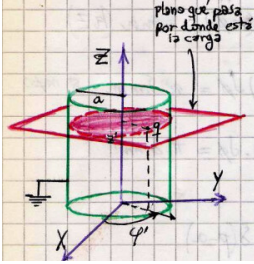
$$\phi^I(z \rightarrow \infty) = \int J_n(k\rho) e^{-kz} \sin(n\phi) B_{k=0,n} dk$$

y esta integral se halla en los handbooks.

Estas las condiciones de ortogonalidad para el seno y coseno, que seguramente tengo tipeadas en otro lado. Mejor referir a ese lado.

Función de Green para el cilindro

Tenemos una carga y ponemos un plano que pasa por donde está la carga. La picture de abajo depictea la situación.



La densidad de carga puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{\rho} q \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z')$$

y se pueden plantear: plano en z' , plano en ϕ' y cilindro en r' (esto último dará origen a funciones especiales de Bessel). Con objeto de tener Laplace en el interior, se tiene una densidad de carga $\rho = \sigma \delta(z - z')$ que da origen a

$$\sigma = \frac{q}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi')$$

Entonces

$$\Phi(\varphi) \sim e^{\pm im\phi} \quad R(\rho) \sim J_n(k_{mn}\rho)$$

$$Z(z) = \begin{cases} Z^I(z) = \sinh(k_{mn}[z - L]) \\ Z^{II}(z) = \sinh(k_{mn}z) \end{cases}$$

$$\phi^{I,II} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{I,II} J_{|m|}(k_{|m|}\rho) \begin{cases} \sinh(k_{|m|n}(z - L)) \\ \sinh(k_{|m|n}z) \end{cases}$$

donde m y $-m$ no serán ortogonales. La continuidad llevará a

$$A_{mn}^I \sinh(k_{mn}(z' - L)) = A_{mn}^{II} \sinh(k_{mn}z') \quad z = z'$$

mientras que la discontinuidad en las derivadas

$$-\sum_{m,n} A_{mn}^I e^{im\phi} J_n(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) + \sum_{m,n} A_{mn}^{II} e^{im\phi} J_n(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}z') = 4\pi\sigma$$

La ortogonalidad, en cambio permite

$$\begin{aligned}
 & - \sum_n A_{mn}^I J_m(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) + \\
 & \sum_n A_{mn}^{II} J_m(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}z') = 4\pi\delta(\rho - \rho') \\
 & \int d\phi e^{-im\phi} \delta(\phi - \phi') \\
 & \int_0^a \rho J_m(k_{mn}\rho) J_m(k_{mn'}\rho) d\rho = \delta_{nn'} \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_{mn}a)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_{mn}a)]^2 (-A_{mn}^I k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) + \\
 & A_{mn}^{II} k_{mn} \cosh(k_{mn}z')) = e^{-im\phi} 4\pi J_m(k_{mn}\rho')
 \end{aligned}$$

y finalizaremos con este comentario: Jackson lo resolvió.

Ceros de la función de Bessel

Las funciones de Bessel tienen infinitos ceros,

$$J_\nu(x_{\nu n}) = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \nu \text{ fijo}$$

siendo $x_{\nu n}$ un cero de J_ν . Así

$$\sqrt{\rho} J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \quad 0 \leq \rho \leq a$$

con $\nu \geq 0$ fijo es un conjunto ortonormal completo en el intervalo $[0, a]$ siendo a el radio del cilindro.

Luego, se cumple la siguiente ortogonalidad

$$\int_0^a \rho J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'}.$$

donde ρ es el factor de peso. Entonces se puede desarrollar cualquier función L^2 en el $[0, a]$ en términos de ceros de Bessel. Entonces la expansión

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{x_{\nu n}} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \quad f(a) = 0$$

donde n numera los ceros de la función de Bessel. Así, los coeficientes son

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_{\nu}(x_{\nu n} \rho/a) d\rho$$

Los ceros de las derivadas de las funciones de Bessel (derivadas con respecto a su argumento) también dan un conjunto completo de autofunciones.

Cambio de signo de la constante de separación

Un asunto interesante es el signo de la constante k . Si suponemos que es imaginaria se tendría

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = (-ik)^2 = -k^2$$

lo cual conduce a ecuaciones de oscilador armónico en Z, Q para las cuales

$$Z = e^{\pm ikz} \quad Q = e^{\pm i\nu\phi}$$

Esto siempre suponiendo que todo el rango $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ está accesible. Sucederá esto cuando las condiciones en las tapas sean periódicas. Se modificará Sturm-Liouville de acuerdo con

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - R \left(k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) = 0$$

y mediante $x \equiv k\rho$, será

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0$$

lo cual nos lleva a la solución de Bessel modificadas, y, consecuentemente a las funciones de Bessel modificadas

$$I_{\nu}(k\rho) = (-i)^{-\nu} J_{\nu}(ik\rho)$$

$$K_{\nu}(k\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_{\nu}^{(1)}(ik\rho),$$

donde son respectivamente las de primera y segunda especie y vemos que tienen argumento imaginario. Las soluciones serán las mismas que antes solamente que con argumento imaginario.

Como en el caso anterior, son convenientes algunas expresiones asintóticas. Para $x \ll 1$ y $x \ll \nu$ se tiene

$$I_{\nu} \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu}$$

En la carpeta no usé el argumento $k\rho$, sino el x . Habría que consolidar la notación.

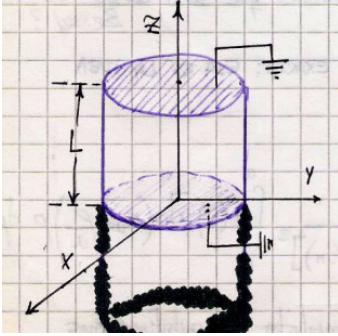
$$K_\nu \rightarrow \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.57\dots\right] & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases}$$

Para el límite $x \gg 1$ y $x \gg \nu$ se dan

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

EJEMPLO 5.3 Problema 3.6[8](9) de Jackson primera[segunda](tercera) edición

Se ve un cilindro donde las tapas están a potencial $V = 0$ mientras los laterales tienen un potencial $V = V(\phi, z)$. Las condiciones de contorno según \hat{z} son periódicas, entonces el parámetro de separación debe tomarse imaginario puro como se vio antes. Estaremos utilizando funciones modificadas de Bessel.



El potencial dentro de este cilindro verificará $\nabla^2 V = 0$. El potencial debería entonces poder escribirse como una combinación lineal del tipo

$$\phi = \sum_{\nu, k} [A_{\nu k} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu k} \cos(\nu\varphi)] [C_{\nu k} \sin(kz) + D_{\nu k} \cos(kz)] [E_{\nu k} I_\nu(k\rho) + F_{\nu k} K_\nu(k\rho)]$$

y luego como $\phi(z = 0) = 0$ implica que $D_{\nu k} = 0$, luego como $\sin(\rho, \varphi, z = L) = 0$ se tendrá $k = n\pi/L$. Como en el eje z no hay cargas, pero las funciones $K_{\nu k}$ divergen allí estamos obligados a tomar $F_{\nu k} = 0$. Con toda esta información y redefiniendo constantes resulta

$$\phi = \sum_{\nu, k} [A_{\nu n} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu n} \cos(\nu\varphi)] \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) I_\nu\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

Dado el dato del problema $\phi(a, \varphi, z) = V(\phi, z)$ debe ser

$$V = \sum_{\nu, k} [A_{\nu n} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu n} \cos(\nu\varphi)] \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) I_\nu\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

que es una serie doble de Fourier donde los coeficientes serán

$$A_{m\rho} = \frac{2}{\pi L I_m(\pi a \rho / L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz V(\phi, z) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\rho\pi z}{L}\right)$$

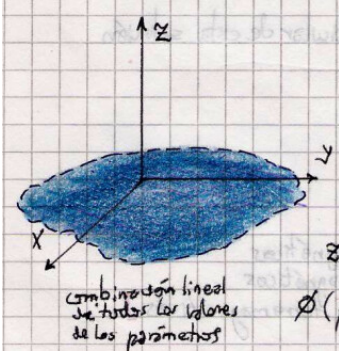
$$B_{m\rho} = \frac{2}{\pi L I_m(\pi a \rho / L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz V(\phi, z) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\rho\pi z}{L}\right)$$

EJEMPLO 5.4 Otro problema

Se conoce el potencial en el plano, será $V(\rho, \varphi)$ donde se supone que $V \rightarrow 0$ con $\rho \rightarrow \infty$ y también con $z \rightarrow \infty$. No hay restricciones en φ , y el rango de ρ es el natural entre $[0, \infty)$. No hay condiciones periódicas de ningún tipo. Entonces se usarán funciones de Bessel usuales.

La solución será una combinación lineal de todos los valores de los parámetros, y para $z \geq 0$

$$\phi(\rho, \varphi, z) = [A_\nu I_\nu(k\rho) + B_\nu N_\nu(k\rho)] [\sin(\nu\varphi) + \cos(\nu\varphi)] e^{-kz}$$



$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)]$$

de modo que

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)]$$

que involucra un Fourier en la variable φ con coeficientes de función k . Entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k'\rho) A_m(k') dk'$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k'\rho) B_m(k') dk'$$

La ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k)$$

y usando la completitud para la integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \int_0^{\infty} \rho J_m(k\rho) V(\rho, \varphi) d\rho = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho J_m(k'\rho) J_m(k\rho) A_m(k') dk' d\rho$$

$$\int_0^{\infty} A_m(k') dk' \int_0^{\infty} \rho J_m(k'\rho) J_m(k\rho) d\rho = \frac{A_m(k)}{k}$$

de tal modo que los coeficientes serán

$$A_m(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) J_m(k\rho) \sin(m\varphi) d\varphi$$

$$B_m(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) J_m(k\rho) \cos(m\varphi) d\varphi$$

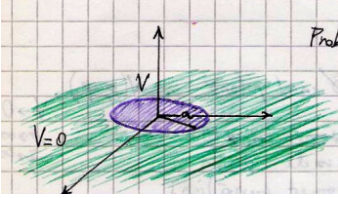
Finalmente el potencial es

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty dk e^{-kz} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)] \quad (5.1)$$

que para el valor especial $\varphi = 0$ resulta en

$$\phi(\rho, 0, z) = \int_0^\infty dk e^{-kz} J_0(k\rho) B_0(k) \cos(m\varphi).$$

El problema del Jackson ilustrado en esta figuretta es un caso particular del anterior.



Es el nunca bien ponderado disco a potencial fijo. Es un potencial azimutalmente simétrico, de manera que será $m = 0$. Las expresiones son otra vez (5.1) reducido al único término $m = 0$.

El valor para el eje \hat{z} calculable por otros medios es

$$\phi(z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (5.2)$$

y el coeficiente B_0 es

$$B_0(k) = \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho) J_0(k\rho) d\varphi = kV \int_0^a J_0(k\rho) d\rho$$

haciendo un cambio de variables $x \equiv k\rho$ y mirando en una tabla de integrales

$$B_0 = \frac{V}{k} \int_0^{ka} x J_0(x) dx = \frac{V}{k} ka J_1(ka)$$

donde se ha usado el resultado

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

Entonces,

$$\phi(\rho, z) = Va \int_0^\infty J_0(k\rho) J_1(ka) e^{-kz} dk$$

que para el eje \hat{z} es

$$\phi(0, z) = Va \int_0^\infty J_0(0) J_1(ka) e^{-kz} dk$$

Parece que esas dos últimas ecuaciones refieren a este problema más que al anterior. Aquí la carpeta parece ser *misleading*.

y como $J_0(0) = 1$ estos nos lleva a

$$\phi(0, z) = Va \int_0^\infty J_1(ka) e^{-kz} dk$$

Otra vez miramos el handbook y tomamos

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{[\sqrt{a^2 + b^2} - a]^n}{b^n \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad n > 1. \quad (5.3)$$

Usando este resultado,

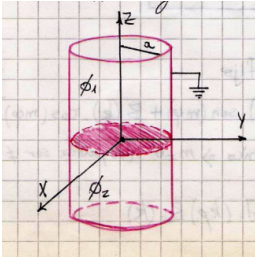
$$\int_0^\infty J_1(ka) e^{-kz} dk = \frac{z^2 + a^2 - z}{a\sqrt{z^2 + a^2}},$$

de manera que el potencial en el eje \hat{z} es efectivamente el anticipado en (5.2). Tomando $n = 0$, $a = z$, $b = \rho$ en la expresión de la integral (5.3) se tiene

$$\int_0^\infty J_0(x\rho) e^{-xz} dx = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{1}{R}$$

que es el potencial de una carga puntual unitaria situada en el origen dado en coordenadas cilíndricas.

Ahora encerramos la carga unitaria por un cilindro infinito a tierra de radio a . Veamos el figurín para entender un poco.



Se tendrán ciertas condiciones más o menos obvias,

$$z = 0 \quad \phi_1 = \phi_2 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 4\pi\sigma$$

El problema tiene, además, simetría azimutal, y entonces

$$\phi(\rho, z) = R(\rho) Z(z)$$

$$R(\rho) = A_\nu J_\nu(k\rho) + B_\nu N_\nu(k\rho)$$

pero B_ν debe ser nulo porque $N_\nu \rightarrow \infty$ si $\nu = 0$. Luego,

$$Z(z) = E_k e^{kz} + F_k e^{-kz}$$

Considerando la condición de contorno de V nulo sobre el cilindro resultan

$$\phi_1(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\rho \chi_{0n}}{a}\right) e^{-\chi_{0n} z/a}$$

$$\phi_2(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n J_0\left(\frac{\rho \chi_{0n}}{a}\right) e^{\chi_{0n} z/a}$$

Ahora habría que expresar la delta de Dirac de la carga (que consideraremos q).

$$\int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sigma d\varphi = q$$

de lo cual resulta

$$\sigma = \frac{q}{2\pi} \delta(\rho)$$

Desde las condiciones de contorno resultan $A_n = A_n'$ y el valor dado por la de la derivada normal. Luego el lector podría seguirlo [tal vez yo lo tenga que seguir, je.]

Las $I_\nu(k\rho)$ tendrán problemas en $\rho \rightarrow \infty$ y $K_\nu(k\rho)$ problemas en $\rho = 0$ (en el eje \hat{z}). Si atravesamos densidades de carga en \hat{z} entonces usamos Bessel

$$Z = e^{\pm kz} \Rightarrow J_\nu^{(1)}(k\rho); N_\nu^{(2)}(k\rho)$$

pero bajo condiciones periódicas en \hat{z} se usan Bessel modificadas

$$Z = e^{\pm ikz} \Rightarrow I_\nu^{(1)}(k\rho); K_\nu^{(2)}(k\rho)$$

y esto último se da por ejemplo en tapas del cilindro. La función de Bessel de primera especie se puede expresar como serie según

$$J_\nu^{(1)}(k\rho) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

Esgrachos+

Para k sea $\phi(\rho = a) = 0$ entonces

$$J_\nu(ka) = 0 \Rightarrow ka = x_{\nu n} \Rightarrow J_\nu(x_{\nu n} \rho / a)$$

y $k = \frac{x_{\nu n}}{a}$ si $0 \leq \rho \leq a$ y si está acotado en ρ entonces es discreto y se suma $\sum_{n=1}^{\infty}$ y $\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}$ si $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y si no está acotado en ρ entonces usamos

$$\int_0^\infty dk$$

y la completitud

$$\int_0^\infty x J_\nu(kx) J_\nu(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

y k en general será función de $n \in \mathbb{N}$ por condición periódica en tapas (en \hat{z}) o en cilindros (en $\hat{\rho}$).

$$\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\nu k} \begin{Bmatrix} J_\nu(k\rho) \\ I_\nu(k\rho) \end{Bmatrix} + B_{\nu k} \begin{Bmatrix} N_\nu(k\rho) \\ K_\nu(k\rho) \end{Bmatrix}] [C_k \begin{Bmatrix} e^{\pm kz} \\ e^{\pm ikz} \end{Bmatrix}] [D_{k\nu} e^{\pm i\nu\phi}]$$

donde $k = k(n)$ y usamos $\sin(kz) + \cos(kz)$ si hay discretización.

Escrachos++

Donde los primeros dos términos conducen a la ecuación de Bessel, el tercero es igual a $-\nu^2$ y el cuarto a k^2 . Sacamos

$$Z = e^{\pm kz}$$

$$Q = e^{\pm i\nu\phi}$$

donde si $0 \leq \phi \leq 2\pi$ entonces $\nu \in \mathbb{Z}$. Si en cambio la variable ϕ no corre entre 0 a 2π se dará que $\nu \notin \mathbb{Z}$.

$\nu \in \mathbb{Z}$	$\nu \notin \mathbb{Z}$
$J_\nu(k\rho)$	$J_\nu(k\rho)$
$J_{-\nu}(k\rho)$	$N_\nu(k\rho)$

donde

$$N_\nu(k\rho) \equiv \frac{J_\nu(k\rho) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin(\nu\pi)}$$

siendo $J_\nu(k\rho)$ la función de Bessel de primera especie, $N_\nu(k\rho)$ la función de Bessel de segunda especie (Neumann). $N_\nu(k\rho)$ tiene problemas en el origen de modo que no sirve si el dominio incluye al eje \hat{z} , en cambio $J_\nu(k\rho)$ tiene problemas en $\rho \rightarrow \infty$.