

## Capítulo 1

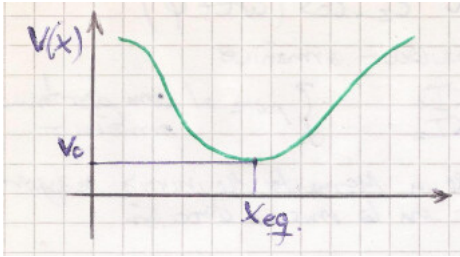
---

# Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio. Esto desarrollará un método sistemático para tratar todo tipo de problemas con muchos grados de libertad pero en forma aproximada.

### 1.0.1 Idea para un grado de libertad

Para un grado de libertad la idea es que



en un potencial  $V(x)$  con un mínimo, es decir que cumple

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0, \frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$$

para algún  $x_{eq}$ , en la expresión de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (1)$$

se aproxima el potencial según<sup>1</sup>

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2, \quad (2)$$

y si definimos  $k \equiv d^2 V/dx^2|_{x_{eq}}$  se llega a

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V_0 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2,$$

que derivada con respecto al tiempo resulta en

$$m \ddot{x} + k(x - x_{eq}) = 0,$$

la cual no es otra cosa que una ecuación de oscilador armónico, cuya solución general es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  y  $\varphi$  está asociada a la energía  $E$ . Ver Apéndice X para la resolución de oscilador armónico.

El problema físico tiene dos constantes aunque la resolución presenta cuatro (dos complejos, con parte real e imaginaria).

Nótese que el desarrollo del potencial a orden dos equivale a una fuerza linealizada, merced a que  $m\ddot{x} = -dV/dx$ .

**Un apéndice más: oscilador armónico con término no homogéneo (usar 76R carpeta).  
Acá habría que llegar a despejar quién es  $\varphi$ .**

### 1.0.2 Varias variables

En el caso de un potencial  $V(x_1, \dots, x_n)$  hay que hallar las raíces del mismo y luego desarrollar en torno a los puntos de equilibrio. Se empieza desde

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_{eq}} = 0,$$

y habría que desarrollar

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} (x - x_i)(x - x_j)$$

No obstante, el problema se puede enfocar mejor en términos de las coordenadas generalizadas. Entonces, el potencial es

$$V(q_1, \dots, q_n) \approx V(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

<sup>1</sup>Nótese que esta es la expansión de Taylor en la cual el término lineal está justamente ausente porque la derivada primera en el punto es nula.

y la energía cinética,

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \approx \frac{1}{2} \left( m(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial m}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \dots \right) \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

[Esta expresión hay que revisarla y reubicarla!]

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde  $m_{ij}$  son los coeficientes de las coordenadas generalizadas y se desarrollarán en serie en torno al equilibrio (caracterizado por un supraíndice 0), es decir,

$$m_{ij} \approx m_{ij}(q_i^0, \dots, q_n^0) + \sum_k \left. \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right|_{q^0} (q_k - q_k^0).$$

Estamos considerando que la energía cinética es  $T = T_2$ , pero cabría pensar que existe un  $T_0(q_1, \dots, q_n)$  y se lo sumaríamos en ese caso al potencial  $V$ . En el lagrangiano que consideraremos no está presente  $T_1$ ; queremos un potencial que no depende de las velocidades.

#### EJEMPLO 0.1 Sobre el término $T_1$

Para el caso de una masa fija, enhebrada en varilla que gira con velocidad angular  $\omega$ , el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

con energía

$$T = T_0 + T_2 = \frac{2}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{2} m \dot{r}^2$$

donde  $\dot{\varphi} = \omega$  el último término no depende de la velocidad pero sí de la posición. Es como un potencial que genera la fuerza ficticia.

Haciendo la aproximación consistente resulta

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (\eta_i)(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}|_{q_i^0} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

con  $V_{ij} \equiv \partial^2 V / (\partial q_i \partial q_j)|_{q_i^0}$ ,  $m_{ij} = m_{ij}|_{q_i^0}$ , ambos simétricos, y donde se ha definido  $\eta_i = q_i - q_i^0$ , que es un apartamento típico de la posición de equilibrio. Notemos que  $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$ . Nótese también que el término lineal en la aproximación de  $m_{ij}$  al verse multiplicado por el producto  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  es ya de orden cúbico por lo cual debe descartarse para ser consistentes con las aproximaciones hechas en el potencial.

**Esta aproximación y formalismo sirve para un mínimo y un sistema que hace pequeños apartamentos respecto de ese mínimo.**

Con esta nomenclatura puede escribirse el *lagrangiano de pequeñas oscilaciones*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^t \mathbb{V} \boldsymbol{\eta}$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{d}{d\dot{\eta}_k} (\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\eta_i \eta_j) = 0$$

son  $n$  ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = 0 \quad k = (1, \dots, n).$$

Esto es un oscilador armónico para cada partícula. Se puede pensar en todas las partículas unidas por resortes acoplados.

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

de frecuencia  $\omega$ , idéntica para todas las partículas, tomando al final del proceso  $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$  como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 m_{kj} + V_{kj}) A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

lo cual me hará buscar un polinomio característico  $P^n[\omega^2]$  de orden  $n$  en  $\omega^2$ . Así se tendrán  $n$  valores para  $\omega^2$  con  $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$  y  $\omega_s^2 \geq 0$ , que serán las autofrecuencias o frecuencias propias  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ .

Para cada  $\omega$  se tiene una solución

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \quad s = 1, \dots, N$$

pero el movimiento general será una combinación de todas las frecuencias,

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}.$$

En general, dado un  $V = V(q_i)$  puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con  $\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j |_{q_i^0}$  o bien cambiar variable  $\eta = q_i - q_i^0$  y quedarse con los términos cuadráticos en  $\eta_i \eta_j$ . Para la energía cinética  $T = T(q, \dot{q})$  puede ser más fácil evaluar  $m_{ij}(q_i) |_{q_i^0}$  y quedarnos con los términos cuadráticos en  $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ .

Veamos la solución para una frecuencia dada,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) A_j^s = 0$$

y como usamos una raíz  $\omega_s$  se tendrá una ecuación linealmente dependiente que tiraremos. Serán ahora  $N - 1$  ecuaciones,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) \frac{A_j^s}{A_1^s} = 0$$

y definimos el cociente  $a_j^s \equiv A_j^s / A_1^s$  al pasar dividiendo la amplitud del modo cuya frecuencia estamos considerando. Entonces

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) a_j^s = -V_{k1} - \omega_s^2 m_{k1} \quad k = 1, \dots, N - 1$$

Entonces como  $N - 1$  ecuaciones no homogéneas tienen solución real, entonces  $a_j$  es un cociente real y todo los  $A_j^s$  tienen que tener la misma fase. [mmm?]

Veamos ahora que las frecuencias son reales. Para ello se multiplica por el complejo conjugado y se suma

$$\begin{aligned} \sum_k A_k^{s*} \sum_j V_{kj} A_j^s &= \omega_s^2 \sum_k A_k^{s*} \sum_j m_{kj} A_j^s \\ \sum_k A_k^s \sum_j V_{kj} A_j^{s*} &= \omega_s^{2*} \sum_k A_k^s \sum_j m_{kj} A_j^{s*} \end{aligned}$$

Acá sería bueno poner explícitamente hasta donde llega la sumatoria y explicitar qué  $\omega$  se usa.

y usando la simetría de  $m_{kj}$ ,  $V_{kj}$  se restan estas ecuaciones y se obtiene

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_s^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s$$

y como la doble sumatoria es no nula se sigue que las frecuencias son reales. Incluso se puede despejar

$$\omega_s^2 = \frac{\sum_k \sum_j A_k^{s*} V_{kj} A_j^s}{\sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s}$$

Ambos, numerador y denominador son definidos positivos. Si el numerador fuese negativo para alguna dirección, eso significa que en esa dirección será un máximo (sería una especie de punto silla); pequeñas oscilaciones no valdrá en esa dirección.

Por otra parte, si se consideran dos frecuencias diferentes

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_p^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^p$$

entonces lo que debe ser nulo es la doble sumatoria. Entonces, en la *métrica* dada por  $m_{jk}$   $A_j$  y  $A_k$  son perpendiculares. Para determinar el  $A_1$  impongo

$$A^{tp*} M A^p = 1$$

y los  $A_j$  se *consideran* reales pues todos tienen la misma fase y son los modos normales. Si construyo

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots \\ A_2^1 & & \\ \dots & & \end{pmatrix},$$

donde cada columna de esta matriz es un autovector. Entonces

$$A^t V A = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 & \\ \dots & & \end{pmatrix}.$$

#### EJEMPLO 0.2 Lo de las matrices

Si  $A^{p*} M A^s = 0$  con  $p \neq s$  entonces  $M$  está definiendo una métrica pues si  $M = \mathbb{1}$  entonces

$$A^{p*} \mathbb{1} A^s = A^{p*} A^s = 0,$$

lo cual significa que  $A^{p*}$  y  $A^s$  son perpendiculares.

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega_s t} \\ A_2 e^{i\omega_s t} \\ \dots \\ A_N e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia  $\omega_s$ , siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia  $\omega_s$ .

Luego, es

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \dots + c_N \boldsymbol{\eta}^N$$

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ \dots \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

entonces  $\mathbf{A}^s$  es un modo normal de frecuencia  $s$ .

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \dots \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total ( $j$  es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = 1$$

siendo el  $\dagger$  el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por  $\mathbb{T}$  de la unidad)

$$\mathbf{A}^t \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

lo cual significa que  $A$  diagonaliza a  $\mathbb{T}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$A^t \mathbb{V} A = \omega^2 A^t \mathbb{T} A = \omega^2 \mathbb{1}$$

y sea ahora el siguiente cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{\eta} = A \boldsymbol{\xi}$$

tal que

$$A^{n \times n} \boldsymbol{\xi}^{n \times 1} \quad (A \boldsymbol{\xi})^t = \boldsymbol{\xi}^{t^{1 \times n}} A^{t^{n \times n}}$$

y que se llaman coordenadas normales.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{T} A \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} A^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \omega^2 \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \xi_i^2 \omega_i^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

y son  $N$  ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

de modo que si  $\omega^2 = \omega_i^2$  entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}$$

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$



grados de libertad en  $\xi$  (un grado de libertad es una  $\omega$ ) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a  $\omega_s$ . Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\eta$ , un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las  $\omega$ .

Si  $\omega = 0$  es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_j t} + A_j(Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la  $\omega = 0$ . Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = A^\dagger \mathbb{T} A \boldsymbol{\xi}$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = \mathbb{1} \boldsymbol{\xi}$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscila con una frecuencia única (son  $N$  osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

donde tienen la misma fase los  $A_j^s$  para toda frecuencia  $\omega_s$

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$\mathbf{A} = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

## 1.1 Oscilaciones viscosas

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j + B_{ij} \dot{\eta}_j = 0$$

no se puede convertir en osciladores independientes.

$$\det \{ \mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B} \} = 0$$