

## Capítulo 1

---

# Mecánica lagrangiana

## 1.1 Principio de los trabajos virtuales

Las ecuaciones de Newton para un sistema de  $N$  partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

dan cuenta de que sobre cada partícula actúan, en principio, fuerzas externas aplicadas  $\mathbf{F}_i^a$  y fuerzas de vínculo  $\mathbf{F}_i^v$ . Expresando la aceleración en función de la derivada temporal del momento  $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{a}_i$  resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, multiplicando cada término por un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{x}_i$  se tiene

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0.$$

Si hacemos estos desplazamientos *compatibles* con los vínculos nos quedamos con

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0, \quad (1.1)$$

puesto que las fuerzas de vínculo son siempre perpendiculares a los desplazamientos virtuales, es decir

$$\mathbf{F}_i^v \perp \delta \mathbf{x}_i.$$

Esto es sumamente sketchy, debemos leer la carpeta de la cursada y luego la teoría.

Explicar qué es este principio y qué es un desplazamiento virtual.

La expresión (1.1) es el llamado *Principio de los Trabajos Virtuales*, y dada la independencia admitida en los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{x}_i$ , se sigue que la sumatoria en (1.1) es nula porque cada término es nulo, es decir

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{x}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamente cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{x} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector  $\delta \mathbf{x}$  como  $N$  dimensionales.

*¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.*

## 1.2 Construcción del lagrangiano

Consideremos un sistema de  $N$  partículas,  $k$  ecuaciones de vínculo

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_1$$

.....

$$f_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_k$$

y por ende  $3N - k$  grados de libertad (suponiendo que nos hallamos en 3 dimensiones).

Tenemos  $N$  relaciones del tipo

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (2.1)$$

que significa que la posición de la partícula  $i$ -ésima depende en principio de las  $3N - k$  coordenadas generalizadas y del tiempo. Una variación tendrá la forma

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \delta t$$

y suponiéndola un desplazamiento virtual el último término se anula puesto que  $\delta t = 0$  en ese caso y entonces

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Por otro lado, del principio de los trabajos virtuales (1.1) es

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

y se puede reescribir el primer término como

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

Consideremos en primer lugar la derivada total del producto siguiente

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right),$$

y en segundo lugar la velocidad de cada partícula, que proviene de la derivada total de cada ecuación (2.1) y resulta

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

A partir de esta última es claro ver que la derivada de la velocidad de la partícula  $i$ -ésima respecto a la coordenada  $l$ -ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}$$

Si derivamos nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla

Una manera menmotécnica de recordar esto es con el siguiente esquema:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial q_j} dq_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial t} dt \right)$$

de tal manera que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}$$

Volvemos ahora a la eq III y

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

y este corchete lo reescribimos como

$$\begin{aligned} & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \end{aligned}$$

Ahora introducimos la sumatoria en  $i$  hacia adentro de ambos términos,

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

de modo que dentro de los paréntesis resulta  $T$ , luego

$$\begin{aligned} \sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) \right\} \delta q_j \\ \sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

siendo  $Q_j$  la fuerza generalizada. Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas entonces

$$Q_j \delta q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j$$

y como  $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  se tiene

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial r_i} \delta \mathbf{x}_i = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

pero

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Definimos como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Si existieran fuerzas que no provienen de un potencial entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y finalmente

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j^{NC} \delta q_j$$

Como esto vale para todo grado de libertad  $l$  llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es el resultado más importante del capítulo.

### 1.3 Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo  $F = F(q_i, t)$  que sumamos al lagrangiano  $\mathcal{L}$ , de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de  $F$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de  $F$  resultan ser

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

y si aceptamos que  $F$  es de clase  $C^2$  se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de  $q_j, t$ .

## 1.4 Momentos conjugados y coordenadas cíclicas

Dado un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  se define el momento canónicamente conjugado a  $q_j$  como

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (4.1)$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv Q_j,$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ .

Sea ahora un lagrangiano que no depende explícitamente de la coordenada  $k$ , es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t),$$

entonces será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

y como consecuencia las ecuaciones de Euler-Lagrange en la coordenada  $k$ -ésima resultan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k = Q_k = 0$$

de manera que no existe fuerza generalizada en el grado de libertad  $k$  y como es  $\dot{p}_k = 0$ , se conserva el momento  $p_k$  canónicamente conjugado a  $q_k$ . En estos casos se dice que la coordenada  $q_k$  que no aparece en el lagrangiano, es una coordenada cíclica.

### EJEMPLO 4.1 Potencial central en un plano

Sea un potencial central  $V(r)$  en el plano. El lagrangiano de una partícula de masa  $m$  sometida al mismo, y en las convenientes coordenadas polares  $(r, \varphi)$  es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange serán, en  $r$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 r + \frac{dV}{dr} = 0$$

y en  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

En esta última debemos notar que  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi = 0$  y esto significa que  $\varphi$  es cíclica. Entonces se conserva el momento canónicamente conjugado a  $\varphi$  puesto que verifica

$$\dot{p}_\varphi = mr^2 \ddot{\varphi} = 0$$

lo cual lleva a que  $mr^2 \dot{\varphi}$  es una constante para este sistema. La moraleja es que la existencia de una coordenada cíclica permite ahorrarnos una integración. Esto, por supuesto, para este problema no es otra cosa que la conservación del momento angular [?].

## 1.5 Momentos canónicamente conjugados y traslaciones rígidas

Consideremos un sistema de partículas que sufre una traslación rígida infinitesimal. Esta traslación se lleva a cabo a través de un desplazamiento en la coordenada  $q$  y de magnitud  $\delta q$  en la dirección dada por el versor  $\hat{n}$ .

En efecto, para el sistema de  $N$  partículas, la traslación rígida implica

$$q \longrightarrow q + \delta q \quad \mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n}$$

La Figura 5.1 representa la situación.

Luego, suponiendo una energía cinética de tipo  $T_2$ , el momento canónicamente conjugado  $p$  (en la coordenada  $q$  –cuyo subíndice omitimos–) es

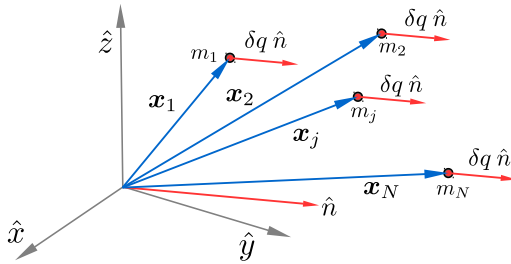
$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial \dot{q}} \right) = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}}$$

La *forma* de la traslación rígida implica que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} - \mathbf{x}_i}{\delta q} = \hat{n}.$$

de modo que

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} = \left( \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_{\hat{n}}$$



**Figura 5.1**

Hemos arribado al resultado de que el momento canónicamente conjugado correspondiente a la coordenada generalizada asociada a la traslación rígida es la proyección del momento total en la dirección de ésta.

[¿se sabe esto a esta altura?]

**Hablar de vectores al cuadrado.**  
Nota de cómo se manipula: uso  $dv_i^2 = 2v_i dv_i$  y

**Recordemos que**  
 $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$



Para el ejemplo trivial de la partícula libre,  $T = 1/2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ , se tiene  $p_x = mv_x$  si la traslación es en la dirección  $\hat{x}$ . **Este ejemplo suma algo?**

Para las fuerzas generalizadas, equivalentemente se tiene

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \left( \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{F} \cdot \hat{n},$$

la fuerza generalizada es la proyección de las fuerzas aplicadas en la dirección dada por  $\hat{n}$ .

La ecuación para la fuerza generalizada  $Q_j$  era

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Aún en el caso de que  $T$  dependa de  $q_j$  la traslación rígida implica que  $\partial T / \partial q_j = 0$  porque es sumar un vector constante a la posición, luego  $d\mathbf{x}_i/dt = d(\mathbf{x}_i + \mathbf{a})/dt$  para todo  $\mathbf{a}$  constante. Entonces, para la coordenada  $q$  asociada a la traslación en  $\hat{n}$  se tiene

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dP_{\hat{n}}}{dt},$$

de tal manera que si en  $\hat{n}$  no hay fuerza  $Q$  tendremos  $dP_{\hat{n}}/dt = 0$ , es decir  $P_{\hat{n}}$  conservado.

Revisar porque esto no estaba tan claro. Supongo que la idea es ver que aún con presencia de  $T_1$  esto sigue valiendo

Acá la cosa es que la traslación es una cosa que sufre el sistema pero no es dinámica. Es una construcción nuestra, como un cambio de sistema de referencia.

## 1.6 Momentos canónicamente conjugados y rotaciones rígidas

Ahora consideraremos un sistema de partículas que sufre una rotación rígida infinitesimal. Esta se materializa a través de un desplazamiento angular en la coordenada  $q$  de magnitud  $\delta q$ . La dirección y sentido, para cada posición  $\mathbf{x}_i$  vienen dadas por el producto vectorial  $\hat{n} \times \mathbf{x}_i$ .

Para un sistema de  $N$  partículas, la rotación rígida implica

$$q \longrightarrow q + \delta q |\mathbf{x}| \sin \alpha_i \quad \mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} \times \mathbf{x}_i$$

La Figura 6.2 representa la situación, donde por razones de claridad se muestran solamente dos partículas.

El momento canónicamente conjugado en la coordenada angular  $q$  será

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} \times \mathbf{x}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i)$$

Esta coordenada  $q$  es especial en el sentido en que representa una rotación.

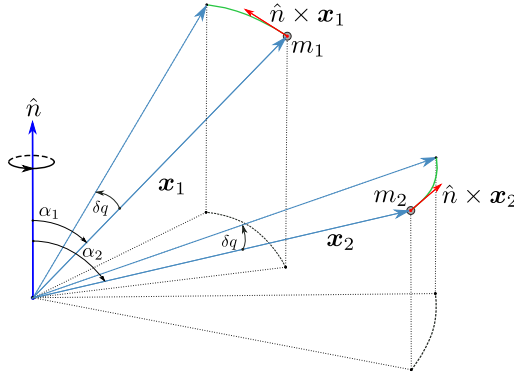


Figura 6.2

donde hemos utilizado el hecho de que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) - \mathbf{r}_i}{\delta q} = \hat{n} \times \mathbf{x}_i.$$

El sumando se puede reescribir (usando  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ ) para que aparezca explícitamente la forma buscada,

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot (\mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot \mathbf{l}_i = \hat{n} \cdot \sum_i^N \mathbf{l}_i = \hat{n} \cdot \mathbf{L}$$

que significa

$$p = \hat{n} \cdot \mathbf{L} = L_{\hat{n}},$$

el momento canónicamente conjugado en la dirección  $\hat{n}$  es el momento angular total del sistema proyectado en esa dirección. La fuerza generalizada será

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) = \hat{n} \cdot \left( \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^a \right) = \hat{n} \cdot \sum_i^N \boldsymbol{\tau}_i = \hat{n} \cdot \mathbf{T},$$

i.e. la componente del torque en la dirección  $\hat{n}$ .

Asimismo, si la coordenada implica una rotación rígida entonces  $\partial T / \partial q = 0$  debido a que la energía cinética  $T$  es un escalar y es por ende invariante ante rotaciones (un vector rotado cambia su dirección pero no su módulo). Luego

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dL_{\hat{n}}}{dt} = \mathbf{T}_{\hat{n}}.$$

Tal vez un ejemplo 2D ayude a aclarar un poco este tema.

Todo este análisis (traslaciones y rotaciones rígidas) vale si el potencial  $V$  no depende de la velocidad; en caso contrario cambia la forma de los momentos canónicos. En efecto, en este caso es

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}}$$

Volviendo al ejemplo de la partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en un campo electromagnético se tendrá

$$p = mv_{\hat{n}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \hat{n},$$

es decir que aparece un término extra con el potencial vector respecto del caso en que la partícula está libre.

## 1.7 Energía cinética de un sistema

Resulta útil disponer de la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas. Para un sistema de  $N$  partículas, es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i |\mathbf{v}_i|^2$$

donde las posiciones de cada una de ellas se pueden expresar en términos de  $k$  coordenadas generalizadas

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

y sus respectivas velocidades serán

$$\mathbf{v}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Luego, utilizando el hecho de que  $|\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ , se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{s=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \quad (7.1)$$

y expandiendo el producto resulta

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left[ \sum_j^k \sum_s^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_j \dot{q}_s + 2 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2 \right],$$

La derivada con respecto al tiempo de la posición es la  $d/dt$  no la parcial.

Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.

la cual se puede separar en tres contribuciones

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Sacarle espacio al **cdot**

con las siguientes formas:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$T_1 = \sum_j^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2,$$

donde se ha alterado el orden de los signos  $\sum$  para enfatizar el hecho de que las cantidades entre paréntesis pueden asociarse a una matriz y un vector de acuerdo con

$$a_{js}(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

Entonces

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k a_{js} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_j^k b_j \dot{q}_j, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2$$

son, respectivamente, contribuciones cuadráticas, lineales o de orden cero con respecto a las velocidades generalizadas  $\dot{q}$ .

Para una partícula libre será

$$T = T_2$$

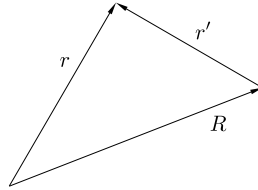
es decir que solamente es cuadrática en las velocidades. Para una partícula sometida a vínculos en general, en términos de las coordenadas generalizadas, se tendrán las tres clases de cinética.

En coordenadas esféricas la energía de una partícula libre es

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin \theta \dot{\varphi}^2 \right).$$

Si las coordenadas generalizadas son las coordenadas  $r, \theta, \varphi$  se identifica

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left( a_r(r, \theta, \varphi) \dot{r}^2 + a_\theta(r, \theta, \varphi) \dot{\theta}^2 + a_\varphi(r, \theta, \varphi) \dot{\varphi}^2 \right).$$



**Figura 8.3** Sistema de partículas

## 1.8 Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i$$

y veremos ahora que el último término es nulo ya que son vectores perpendiculares. Para ello notemos que

$$M \mathbf{R}_{cm} = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}'_i)$$

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i$$

y también

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i$$

de modo que

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

Finalmente

$$T^{tot} = T^{cm} + T_{cm}^{tot}$$

Esto hay que revisarlo, derivo ambos miembros? Vincular con la figura.

## 1.9 Trabajo en un sistema de partículas

Empezamos desde

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

donde el trabajo externo puede escribirse

$$W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s} \quad (9.1)$$

La no dependencia del camino para la integral que da (9.1) requiere que

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}_i) \quad \nabla_{\mathbf{r}_i} \times \mathbf{F}_i^e = 0$$

y entonces puedo inducir la existencia de una función potencial para las fuerzas externas, Quiero un  $\ell$  en bold, no me gusta el s.

$$W^{ext} = - \sum_i^N \Delta V_i$$

Por otro lado,

$$W_c^{int} = \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^N \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

## 1.10 Lagrangiano cíclico en el tiempo

Empecemos desde la derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y usando la derivada total del término

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Reemplazando una en otra resulta que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y acomodando un poco

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} (p\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y entonces previo pase mágico de términos,

$$\frac{d}{dt} (p\dot{q} - \mathcal{L}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y si definimos

$$\mathcal{H} \equiv p\dot{q} - \mathcal{L}$$

resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Entonces si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = cte.$  Además, si se cumplen

$$T = T_2 \quad V \neq V(\dot{q})$$

y además los vínculos no dependen del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = E$ , es decir, el Hamiltoniano es la energía. La condición de que los vínculos no dependan del tiempo genera en realidad que  $T = T_2$ .

Por otro lado  $E = cte.$  si  $W^{nc} = 0$ .

## 1.11 Energía cinética y el hamiltoniano

Dado que la energía cinética tiene la forma general

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j}_{T_2}$$

entonces se sigue que

$$E = T_0 + T_1 + T_2 + V \quad (11.1)$$

y como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = T_1 + 2T_2$$

es

$$\mathcal{H} = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = 2T_2 + T_1 - T_0 - T_1 - T_2 + V = T_2 - T_0 + V$$

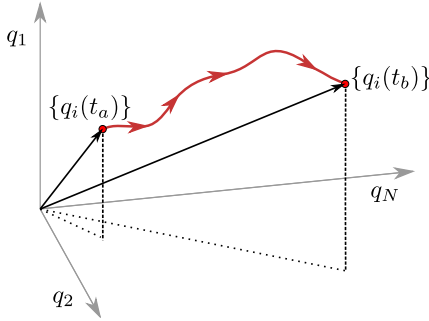
pero como  $E$  es (11.1) se tendrá

$$E = H \iff 2T_0 + T_1 = 0$$

y un solución de este sistema es, por supuesto,  $T_0 = T_1 = 0$

## 1.12 Principio de acción mínima

El estado de un sistema mecánico de  $N$  grados de libertad en un dado instante de tiempo  $t$  puede asociarse a un vector de componentes  $\{q_i\}$  viviendo en un espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas. La evolución entre dos puntos en ese espacio, de  $\{q_i(t_a)\}$  a  $\{q_i(t_b)\}$  por ejemplo, se realiza por un trayecto continuo entre esos dos puntos, que es la trayectoria del sistema.



**Figura 12.4** Trayectoria de un sistema mecánico  $\{q_i\}$  entre dos puntos del espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas.

En principio cualquier trayecto entre dos puntos es posible porque eso depende de la física a la cual está sometido el sistema, no obstante existe un principio que permite saber cuál es la trayectoria que seguirá.

Considerando el lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V$  y la siguiente integral (la acción  $S$ ) entre los puntos  $\{q_i(t_a)\}$  y  $\{q_i(t_b)\}$ ,

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, t) dt$$



se tiene que la trayectoria real entre estos dos puntos es tal que la integral  $S$  toma su valor mínimo.

Dicho de otra manera, esto significa que  $S$  como funcional dependiendo de  $\{q_i\}$ ,  $\{\dot{q}_i\}$  deberá tener un valor mínimo (o ser estacionaria) al especializarse en la trayectoria real. Esto es análogo a lo que sucede en cálculo; en el mínimo de una función (de una o varias variables) la derivada se anula. El concepto equivalente en funcionales como  $S$  es el de variación nula.

La idea es construir una *variación* arbitraria respecto de la trayectoria real  $\{q_i\}$  y forzar a que esa variación se anule para obtener una condición sobre las  $\{q_i\}$  (para funciones esa condición era que el gradiente se anule).

Si me sitúo en la trayectoria verdadera, es decir el conjunto  $\{q_i(t)\}$ , una variación arbitraria de la misma tendrá la forma

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (12.1)$$

donde cada coordenada  $q$  variará de acuerdo con su correspondiente desplazamiento  $\delta q$ . La variación se hace en un intervalo de tiempo arbitrario  $[t_a, t_b]$  y con extremos fijos,

$$\delta q(t_a) = 0 \quad \delta q(t_b) = 0, \quad (12.2)$$

lo que significa que los puntos de partida y llegada en el espacio de fases son los mismos.

Asimismo se pedirá que todas las trayectorias empleen el mismo tiempo de manera que la variación se hará en algún tiempo fijo intermedio  $t_a < t < t_b$ . O sea que  $\delta t = 0$ .

Una representación unidimensional (una única  $q$ ) puede verse en la Figura 12.5. La trayectoria real sería la curva  $q(t)$  en color rojo, mientras que la curva verde sería una trayectoria variada a través de  $\delta q$ . Los extremos fijos (12.2) implican que la variación es nula allí, y entonces las curvas comienzan y terminan en el mismo punto.

El hecho de considerar una variación a tiempo fijo  $t_j$  implica que nos situaremos arbitrariamente en ese instante y variaremos las trayectorias  $\{q_i\}$  congeladas en ese instante arbitrario. Por supuesto, el resultado debería valer para cualquier instante intermedio considerado.

La idea es determinar las condiciones que se necesitan para

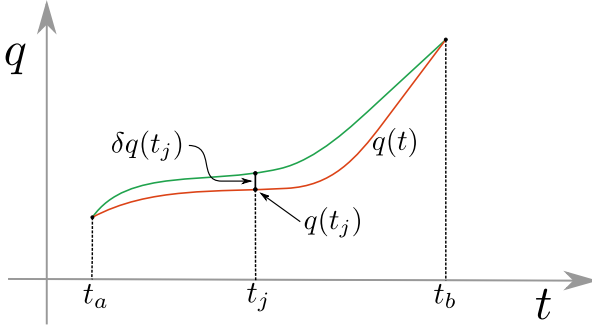
$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0.$$

Para ello comenzamos tomando una variación de  $S$  que pasa dentro de la integral como

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)] dt$$

**Habría que justificar cuál es el significado de esto y porqué es así.**

**Cuán sketchi es todo esto!! Mucho para aclarar. Tal vez se justifique un minicurso de variacional como apéndice.**



**Figura 12.5** El principio de acción mínima

y donde vemos explícitamente que es a tiempo fijo.

La variación de la integral puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt,$$

y como será útil tener todo en función de las variaciones  $\delta q_i$ , es conveniente expresar las variaciones  $\delta \dot{q}_i$  en términos de una derivada total a través de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

resultando en

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt,$$

que se puede separar en dos términos

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt,$$

Pero el primer término es una derivada total y por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt = \sum_i^N \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_a}^{t_b} \quad (12.3)$$

y es nulo porque  $\delta q_i = 0$  en los extremos para toda coordenada  $i$  (las variaciones son nulas en los extremos). Decimos que este es un término de superficie. Entonces la condición

$$\delta S = \sum_i^N \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

se verificará por el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange<sup>1</sup>

$$\sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Se puede ver que

$$\delta S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Luego, si se hace  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df/dt$  (ambos lagrangianos difieren en una derivada total con respecto al tiempo) la trayectoria que minimiza  $\mathcal{L}'$  es la que misma que minimiza  $\mathcal{L}$  por la condición dada por (12.3).

La moraleja es que si los lagrangianos difieren en una derivada total del tiempo obtenemos la misma física.

## 1.13 Aplicaciones del principio de acción mínima

$$S = \int (T - V_0) dt$$

donde el lagrangiano es con  $V = V_0$  constante (un lagrangiano sujeto a potencial constante). La integral de acción da una medida de la longitud de la órbita (el espacio recorrido). Para una partícula sujeta a  $V = 0$

$$S = \frac{1}{2} \int m v_0^2 dt = \frac{1}{2} m v_0^2 (t - t_0)$$

de manera que  $v_0(t - t_0)$  representa la distancia  $d$  recorrida, y es

$$S = \frac{1}{2} m v_0 d$$

---

<sup>1</sup>Como las variaciones  $\delta q_i$  son arbitrarias e independientes la anulación de la ecuación  $\delta S$  requiere la anulación de cada uno de los  $i = 1, 2, \dots, N$  corchetes en los integrandos.

Comentario sobre el cálculo de las variaciones

$$I = \int f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) dt$$

entonces  $I$  es extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial [dx/dt]} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

También podemos encontrar esta notación, dependiendo del tipo de problema,

$$I = \int f \left( y, \frac{dy}{dx}, x \right) dx$$

## 1.14 Multiplicadores de Lagrange

Partimos de la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} (q_i[t], \dot{q}_i[t], t) dt$$

entonces

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt$$

donde  $\delta q_j$  son desplazamientos independientes. Si no se puede despejar alguna  $\delta q_j$  (con vínculos no-holónomos, por ejemplo) entonces algún  $\delta q_j$  es independiente de modo que para que valga  $\delta S = 0$  necesitaré

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0$$

que son los vínculos ( $k = 1, \dots, s$ ); son  $s$  ecuaciones de vínculo. Multiplicamos por  $\delta t$  y vemos que no son independientes

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} + b^k(q_i, t) \delta t = 0$$

Sean  $\delta q_{\ell}$  variación a  $t$  fijo, entonces

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

recordando que  $\ell$  suma en los grados de libertad. Podemos sacar la suma fuera,

$$\sum_k^s \int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

Absorbo la otra sumatoria en el segundo término y paso de  $\ell \rightarrow j$ .

$$\int \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k^s \lambda^k a_{\ell}^k(q_i, t) \right\} \delta q_{\ell} dt = 0$$

entonces

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k a_{\ell}^k(q_i, t) = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_j}{\delta q_j}$$

siendo  $\nabla_j f^k$  el gradiente de la ecuación de vínculo respecto de  $j$  y donde  $\lambda^k$  es la fuerza de vínculo asociada al vínculo no despejado pues como la fuerza generalizada (que no proviene de potencial)

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

y comparando vemos que

$$Q_j = \sum \lambda^k a_j^k(q_j, t) \quad \text{vínculos no holónomos}$$

$$Q_j = \sum \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \delta \mathbf{r}_j \quad \text{vínculos holónomos}$$

En el caso de vínculos holónomos

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

donde no quise despejar en función de  $q_1, \dots, q_n$  resulta que

$$Q_j^{\delta q_j} = \sum_i^N \lambda (\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  es un desplazamiento virtual de la partícula. Vamos a reescribir este término,

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0$$

El supraíndice con  $\delta q_j$  va sobre el igual en realidad.

$$\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j^{\delta q_j} = \lambda \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

luego como

$$a_j^k \equiv \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i}$$

se sigue que los  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo.

En el caso de vínculos no holónomos  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos no retirados.

$$Q_j \delta q_j = \sum \lambda^k (\nabla_i g^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial q_j}$$

entonces  $\lambda^k = F^v$ .

Como extra escribamos que para cada grado de libertad  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k \lambda^k a_j^k \equiv 0$$

donde  $\delta q_j$  son ahora independientes.

$$Q_j = \sum_i^N F_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

#### EJEMPLO 14.1 Moneda rodando por un plano

Consideramos una moneda que rueda libremente por un plano (no sujeta a potencial). Situaemos un sistema de ejes sobre la moneda, que etiquetaremos 123 y otro fijo fuera de la misma xyz.

$$\mathbf{V}_{cm} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -(\dot{\phi} \hat{2} + \dot{\psi} \hat{3}) \times (-a \hat{2})$$

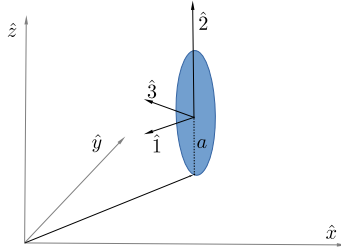
$$\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = -a \dot{\psi} \hat{1}$$

siendo los vínculos

$$z_{cm} - a = 0 \quad \theta = \pi/2 \quad |\mathbf{V}_{cm}| = a \dot{\psi}$$

de tal modo que son dos grados de libertad. El lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \dot{\psi}^2.$$



**Figura 14.6** Moneda que rueda libremente por un plano.

Como los vínculos dependen de la velocidad, resulta

$$\dot{y} = a\dot{\psi} \cos(\psi) \sin(\phi) = a \sin(\phi)\dot{\psi}$$

$$\dot{x} = a\dot{\psi} \cos(\psi) \cos(\phi) = a \cos(\phi)\dot{\psi}$$

de tal manera que

$$\dot{y} - a \sin(\phi)\dot{\psi} = 0 \quad \dot{x} - a \cos(\phi)\dot{\psi} = 0$$

y luego esto equivale a

$$\lambda_1(dy - a \sin(\phi)d\psi) = 0 \quad \lambda_2(dx - a \cos(\phi)d\psi) = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Podemos escribir

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \quad m\ddot{x} = ma \frac{d}{dt}(\cos(\phi)\dot{\psi})$$

$$m\ddot{x} = ma(-\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\psi} + \cos(\phi)\ddot{\psi})$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2$$

$$I_2\ddot{\phi} = 0 \quad I_3\ddot{\psi} = -\lambda_2 a \sin(\phi) - \lambda_1 a \cos(\phi)$$

$$\hat{1} = \cos(\psi)[\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\phi)\hat{x}]$$

**No entiendo/recuerdo lo que quise decir con la expresión bajar los ejes. Calculo que se relaciona con la proyección de los ejes 123 en xyz. Confirmarlo.**

## 1.15 Potenciales dependientes de la velocidad

Hasta el momento se consideró que el potencial  $V$  dependía únicamente de la posición y resultaba eso en una fuerza generalizada [la llamé así?]

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

para la cual el  $\mathcal{L} \equiv T - V$  cumplía las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (15.1)$$

Si en cambio se tiene un potencial dependiente, además, de la velocidad,

$$U = U(q_1, \dots, q_2, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

y se requiere que sigan valiendo las ecuaciones (15.1) para  $\mathcal{L} \equiv T - U$ , necesitaremos evidentemente

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

una fuerza generalizada que depende de posiciones y velocidades.

El ejemplo canónico de una tal fuerza es la fuerza de Lorentz, que es la que sufre una partícula de carga  $q$  en presencia de un campo electromagnético dado por campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y cuya forma es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (15.2)$$

Esta fuerza (15.2) puede expresarse en términos de dos potenciales. Para ello es necesario recurrir a las relaciones que verifican los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y que están dadas por las ecuaciones de Maxwell, cuyo esquema se presenta en la siguiente tabla.

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Dado que la divergencia de  $\mathbf{B}$  es nula, entonces existe un potencial vector  $\mathbf{A}$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Entonces, la ley de Faraday resulta

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

o bien

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

La cantidad entre paréntesis es de rotor nulo y entonces se puede escribir

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$$



de manera que los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  pueden expresarse en términos de una función escalar  $\varphi$  y un campo vectorial  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Entonces, en términos de estos potenciales (15.2) resulta

$$\mathbf{F} = -q\nabla\varphi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}.$$

Supongamos, para simplificar el razonamiento, que es  $\mathbf{F} = F_x \hat{x}$  y veamos que

$$F_x = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c} (v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y)$$

se puede escribir

$$F_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Desarrollando explícitamente el rotor se tiene

$$(v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y) = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

donde se ha sumado y restado la conveniente combinación  $v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$ . Dado que las velocidades y las posiciones son variables independientes (se verifica  $\partial_a v_b = 0$  para cualquier combinación  $a, b = x, y, z$ ) se puede *filtrar* la velocidad dentro de las derivadas para reescribir

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Los tres términos restantes en derivadas respecto de  $A_x$  no son otra cosa que una derivada total,

$$-\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla (A_x) \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt}$$

Luego, se fuerza la aparición de una derivada con respecto a la velocidad (para obtener una expresión en consonancia con la buscada) del siguiente modo

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}),$$

y juntando todo resulta

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} \left( -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right).$$

Como  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ , se la puede incluir dentro de la derivada con respecto a la velocidad obteniendo finalmente el resultado buscado

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right),$$

donde

$$U = q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

Se puede demostrar directamente la fórmula anterior desde la expresión vectorial de  $\mathbf{F}$  utilizando su equivalente indicial, es decir a partir de

$$F_i = -q\partial_i\varphi - \frac{q}{c} \partial_t A_i + \frac{q}{c} \epsilon_{ilm} v_l \epsilon_{mjk} \partial_j A_k$$

que es la coordenada  $i$ -ésima de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Utilizando las propiedades del símbolo de Levi-Civita se tiene

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i + (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj})v_l \partial_j A_k]$$

y, tras colapsar las deltas, y reordenar términos

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i - v_j \partial_j A_i + v_k \partial_i A_k].$$

Como el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  no depende explícitamente de  $\mathbf{x}$  se puede introducir  $v_k$  a través de la derivada  $\partial_i$ . Además los dos primeros términos del corchete representan la derivada total de  $A_i$  de manera que tenemos

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} \left[ -\frac{d}{dt} (A_i) + \partial_i (v_k A_k) \right],$$

o bien

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c} (v_k A_k) \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{c} A_i \right).$$

Se puede hacer aparecer explícitamente lo faltante dentro de la derivada total notando que se puede escribir de manera absolutamente general

$$\frac{q}{c} A_i = \frac{\partial}{\partial v_i} (-q\varphi + \frac{q}{c} v_k A_k)$$

dado que  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$  son funciones de la posición y el tiempo solamente. Luego,

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c} (v_k A_k) \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i} (q\varphi - \frac{q}{c} v_k A_k) \right]$$

**Mucho para tener en cuenta:**  
resumen previo de notación  
indicial, resumen de classical  
field theory. Aclarar que  
posición y velocidad son  
independientes.

y esto significa que el potencial completo es

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = q\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).$$

En el ejemplo de la fuerza de Lorentz se desprecia el campo generado por la misma partícula que se mueve. Es decir, que el campo externo no es afectado por el movimiento de la partícula. Una formulación lagrangiana que lo tuviera en cuenta debería considerar un  $\mathcal{L}_p$  para la partícula.

## 1.16 Cambio de *gauge* en potenciales

Según se vio en la sección anterior, en el caso del electromagnetismo tenemos un potencial  $U$  que depende de la posición y la velocidad de una manera muy especial. Además el potencial escalar  $\varphi$  usual en la electrostática fue necesario definir un potencial vector  $\mathbf{A}$  que estaba vinculado con el campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de:  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Solamente se le pide al campo  $\mathbf{A}$  que su rotor sea  $\mathbf{B}$  y esto no lo determina por completo. En particular si se define

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

un nuevo potencial  $\mathbf{A}'$  que difiere del original por el añadido del gradiente de una función escalar, las ecuaciones de movimiento no se ven alteradas. En efecto, la divergencia del campo magnético  $\mathbf{B}$  es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\nabla \times \nabla f) = 0$$

donde el cero se logra porque cada uno de los dos miembros es cero por separado. Asimismo, como el rotor de un gradiente es nulo, el rotor de  $\mathbf{B}$  no se ve alterado;

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times (\nabla \times \nabla f) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Luego, hay un grado de libertad extra en la determinación del  $\mathbf{A}$  que es esta función escalar  $f$ , y que se suele expresar dando la divergencia de  $\mathbf{A}$ . En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f.$$

La divergencia de  $\mathbf{A}$  se puede elegir entonces arbitrariamente y esto es lo que se conoce como la *libertad de gauge*[?] o el cambio de *gauge* del potencial. Descansa en el hecho de que las ecuaciones de movimiento son, por supuesto, independientes del gauge elegido.

Chequear esta mini subsección.