

Medios materiales

1.1 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar como corrientes \mathbf{J}_M y \mathbf{g}_M ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

1.2 Medios materiales

- Dieléctricos
- Medios magnéticos $\left\{ \begin{array}{l} \text{imán inducido} \left\{ \begin{array}{l} \text{paramagnético} \\ \text{diamagnético} \end{array} \right. \\ \text{imán permanente} \quad \text{ferromagnético} \end{array} \right.$

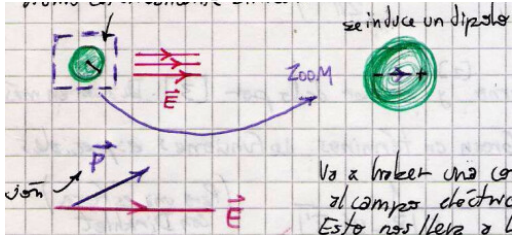
- Conductor $\begin{cases} \text{perfecto} \\ \text{buen conductor} \\ \text{mal conductor} \end{cases}$
- Plasmas (gas ionizado)

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

1.2.1 Campos estáticos en medios materiales

En la picture de acá abajo tenemos un átomo esféricamente simétrico, un medio y un vector de polarización. Entonces vemos en la vista zoom cómo se induce un dipolo

Esta subsección tal vez mejor sería que fuera llamada “polarización eléctrica”.



Habrà una componente dipolar paralela al campo eléctrico externo. Esto nos lleva a la constante dieléctrica del medio (dependerá decrecientemente de la temperatura).

Supondremos que las propiedades macroscópicas para dos campos se satisfacen para los campos vistos microscópicamente

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla \times \mathcal{E} = 0$$

El campo macro \mathbf{E} será un promedio estadístico de su versión microscópica

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathcal{E}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}) d^3\chi,$$

donde χ es una coordenada que barre el volumencillo ΔV . Como vale la linealidad, se tiene $\nabla \times \mathcal{E} = 0$ que conduce a $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ de manera que $\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. El vector \mathbf{D} no cumple esto último.

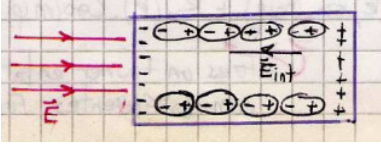
Se construye así

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle,$$

donde la polarización

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V}$$

es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.



Luego, un *cacho* de potencial ϕ será

$$\delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta V' + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta V'$$

de manera que el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \int \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

Ahora el último término se puede escribir como

$$\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = - \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

y considerando integración por partes en esta última

$$\int_{V'} \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que se pueden consolidar en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\rho_L(\mathbf{x}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] dV',$$

donde el volumen V' abarca todas las fuentes (incluso las de polarización).

Entonces considerando que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P,$$

se puede definir una densidad de carga total

$$\rho_T = \rho_L + \rho_P.$$

Entonces, el potencial se escribe como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

Hay que hacer partes con sumo detalle aquí y justificar que el surface term se arroja a los chanchos.

De esta forma se puede construir un vector \mathbf{D} siguiendo esta línea de razonamiento:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_T = 4\pi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

y pasando de miembros

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho_P = 4\pi\rho_L$$

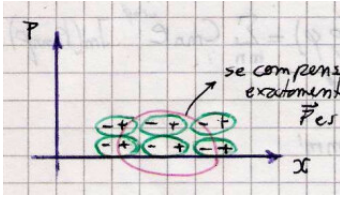
$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

de modo que

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

donde \mathbf{D} es el llamado vector desplazamiento y estas expresiones valen para todo medio.

En la situación depicted en la figurilla siguiente



se tendrá una compensación exacta si \mathbf{P} es uniforme, de manera que $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. En caso contrario existirá una ρ_P no nula en el interior.

escrachos

Luego el potencial es, posteriormente a haber hecho partes es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

Por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

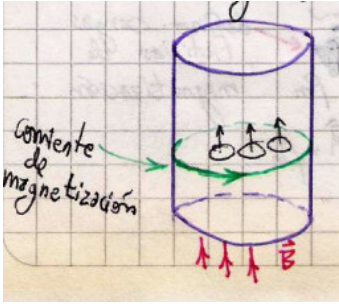
donde ξ_e es la susceptibilidad eléctrica y ϵ es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_P,$$

que provienen del rotor de \mathbf{E} , la divergencia de \mathbf{D} y la divergencia de \mathbf{P} respectivamente.

No sé qué pasaba con la parte de la integral de superficie.

1.2.2 Imanes inducidos



Para la Magnetización,

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta V}$$

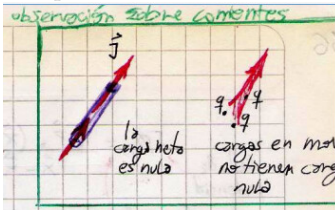
que es el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial

$$\delta A = \frac{\delta \mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

se evalúa con la misma idea que la del dipolo para polarización. Queda por incorporar el asuntete de

$$\frac{1}{c} \int_V c \mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

usando partes.



Entonces es

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c} \mathbf{g}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \nabla \times \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{c}\mathbf{J}_M$$

y por la linealidad

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_M)\mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

donde ξ_M es la susceptibilidad magnética y μ es la permeabilidad magnética. Si $\mu > 1$ es un medio paramagnético y $\mu < 1$ es diamagnético.

Si hay linealidad e isotropía

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E}$$

donde el paréntesis es ε es la permitividad eléctrica. Si hay isotropía

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{g}_L \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde \mathbf{g}_L se refiere a densidad de corriente superficial. Si esta es nula se tiene

$$\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{n2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n1} \\ H_{t2} = H_{t1} \end{cases}$$

1.2.3 Imán permanente

Hay magnetización \mathbf{M} aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que

$$\mathbf{M} \neq \xi_M \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu\mathbf{H}$$

El campo \mathbf{M} es fuente de campo. El asunto es que \mathbf{M} tiene el problema de la discontinuidad, pero $\mathbf{M} = 0$ fuera del medio. La relación entre \mathbf{B}, \mathbf{H} depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c}\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

si $\mathbf{J}_L = 0$ entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$

que es un potencial escalar magnético.

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$-\nabla^2 \phi_m = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$$

donde se ha definido cargas ficticias de magnetización. Se deduce una $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &\equiv -\rho_m & \mathbf{M} \cdot \hat{n} &\equiv \sigma_m \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV' \end{aligned}$$

se puede asociar

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_P.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] dV'$$

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c \nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV'$$

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

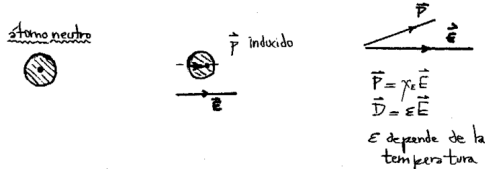


Figura 2.1

1.3 Contornos para polarización y magnetización

Suelen \mathbf{P}, \mathbf{M} depender de los campos externos, es decir $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$.

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que $\mathbf{M}_0 = 0, \mathbf{P}_0 = 0$ se da que

$$\mathbf{M} = \sum_i \sum_j \left(\left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j \right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

y ahí vemos que es un tensor,

$$\mathbf{M} = \vec{\xi}_M \mathbf{H} \quad \mathbf{P} = \vec{\xi}_e \mathbf{E}.$$

Algún detalle de contornos magnéticos

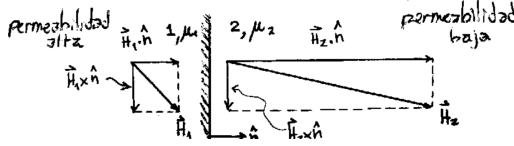


Figura 3.2

Sea

$$g_L = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}\hat{n} \times \mathbf{H}_1 &= \hat{n} \times \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} &= \mathbf{B}_2 \cdot \hat{n} \quad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{n} \\ H_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1 \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1\end{aligned}$$

En el límite $\mathbf{H}_2 \perp$ superficie del medio y es similar al \mathbf{E} a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente *equipotenciales*.

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{es decir} \quad \mathbf{D} = \vec{\epsilon} \mathbf{E}$$

Consideraciones en medios magnéticos

Fuera de un imán permanente

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$\mathbf{B} = -\nabla \phi_m^B,$$

pero fallará en la superficie de separación donde hay \mathbf{J}_m y por ende \mathbf{J}_T . Lo que sí funciona es

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m^H,$$

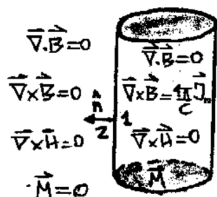


Figura 3.3

y

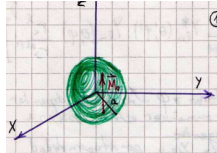
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{H} &= -\nabla(\nabla \phi_m^H) = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} = 4\pi \rho_M \\ -\nabla^2 \phi_m^H &= 4\pi \rho_M\end{aligned}$$

una ecuación de Poisson para el potencial ϕ_m^H .

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0 \\ (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1 - 4\pi \mathbf{M}) \cdot \hat{n} &= 0 \\ (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1) \cdot \hat{n} &= 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_M\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.1 Problema 5 (imán esférico)

Calculamos todo de varias maneras



Bola ①

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV = \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \hat{z}$$

Bola ②

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 4\pi \rho_m \\ \mathbf{m} &= \int \rho_m \mathbf{x} dV = \hat{z} \int \rho_m z dV\end{aligned}$$

Se tienen además

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y como \mathbf{M} es constante en el interior, no hay ρ_m en el volumen. Habría que escribir bien la magnetización \mathbf{M} . Usaremos una función escalón

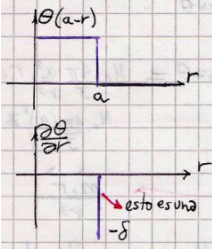
Consideramos una función escalón Θ de tal manera que

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \Theta(a - r)$$

donde

$$M_0 \hat{z} = M_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \Theta(a - r)$$

según puede verse en el figurín bajo estas líneas (se ve solo el tetón).



Entonces,

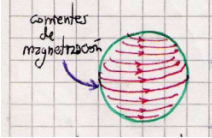
$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \cos \theta \Theta(a-r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta \Theta(a-r)] \right) = -M_0 \cos \theta \delta(r-a)$$

donde $M_0 \cos \theta = \sigma_M$ resultado que es consistente con la cuenta de $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$.

Finalmente,

$$\mathbf{m} = \int \rho_m z dV = M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi M_0 a^3 \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \hat{z}$$

Bola ③. Se ilustra en la postal siguiente



Desde

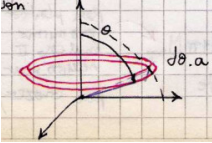
$$\mathbf{J}_m = c \nabla \times \mathbf{M}$$

se deduce

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= c \mathbf{M} \times \hat{n} = c M_0 \hat{z} \times \hat{r} = c M_0 \sin \theta \hat{\varphi} \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}_m dV = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\ell = \frac{I \text{ Area}}{c} \hat{z} \end{aligned}$$

y hemos obtenido el resultado de \mathbf{m} como área por corriente.

Para el anillito mostrado en el cartón



$$d\mathbf{m} = \frac{\text{seccion}}{c} du = \frac{1}{c} \pi a^2 \sin^2 \theta a \mathbf{g}_m d\theta$$

o bien, integrando,

$$\mathbf{m} = \hat{z} \int_0^\pi M_0 \pi a^3 \sin^3 \theta d\theta = \hat{z} \left(\frac{4\pi}{3} a^3 M_0 \right)$$

con lo cual el potencial resulta

$$\phi_M = \int \frac{\rho_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

o en full splendor

$$\phi_M = \int \int M_0 \cos \theta \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right] a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Aquí hay simetría en torno a de manera que el problema no puede depender de esta coordenada. Los armónicos esféricos pasan a ser los polinomios de Legendre. Puedo ver que $\cos \theta$ es un armónico Y_{10} y por ortogonalidad se va toda la doble sumatoria y sobreviven solamente $\ell = 1, m = 0$.

$$\text{Valen } \cos \theta = Y_{10} \sqrt{4\pi/3}.$$

Usando esta información tenemos

$$\phi_M = M_0 a^2 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} Y_{10}^*(\theta, \varphi) = M_0 \frac{4\pi}{3} a^2 \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

solución que es válida en todo el espacio.

$$\phi_M = \begin{cases} M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{r}{a^2} \cos \theta & r < a \\ M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{a}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde el último caso $r > a$ se puede escribir como

$$M_0 \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 z = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Recordemos que si $r > a$ es $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ mientras que para $r < a$ es $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$.

Si introducimos este imán pelota en un medio tengo una alteración en el contorno. Aquí hay que usar separación de variables.

$$\phi_I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\phi_{II} = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}^{II}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde en I se ha tirado una parte de la solución porque diverge en cero, mientras que en II se tira en cambio la parte que corresponde.

Los contornos salen de evaluar

$$\phi_I(a, \theta) = \phi_{II}(a, \theta)$$

lo cual conduce a

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{2\ell+1}}$$

En el caso de los campos \mathbf{B} se tendrá $B_{nII} = B_{nI}$ que conduce a $[\dot{\iota}^?]$

$$\mu H_{nI} = H_{nII} + 4\pi M_{nI}$$

donde el lhs no se puede plantear en un imán permanente y el rhs implica que para plantear esto mismo en el caso II necesito conocer M pero conozco μ .

$$-\mu \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 4\pi M_0 \cos \theta = 4\pi \sigma_M$$

donde esta última ecuación es casi una de contorno como para el campo \mathbf{E} pero ojo que está el μ . Viene de que $\mathbf{H} = -\nabla \phi$. Luego,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\mu(\ell+1) \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{\ell+2}} + \ell a^{\ell-1} A_{\ell}^I \right] P_{\ell}(\cos \theta) = 4\pi \sigma_M$$

y ahora se aplica ortogonalidad multiplicando por $P_{\ell'}$ e integrando, entonces

$$c_{\ell} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} = \frac{4\pi M_0}{2\ell'+1} \delta_{\ell 1} \quad 2\mu \frac{B_1}{a^3} + A_1 = 4\pi M_0$$

y de estas dos ecuaciones se obtienen los coeficientes

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^I}{a^{2\ell+1}}$$

sumados a

$$4\pi M_0 = (1+2\mu)A \quad A_1 = \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \quad B_1 = \frac{4\pi M_0 a^3}{1+2\mu}$$

Finalmente,

$$\phi = \begin{cases} \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} r \cos \theta & r < a \\ \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde otra vez la última expresión, para $r > a$, tiene la forma $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}/|x|^3$ donde $\mathbf{m} = 4\pi M_0 a^3 \hat{z}/(1+2\mu)$.

Un momento dipolar magnético diferente al inicial es porque hubo momento inducido

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \mathbf{m}_T - \mathbf{m} = \left(\frac{4\pi a^3}{1+2\mu} M_0 - \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \right) \hat{z}$$

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \left(\frac{1-\mu}{1+2\mu} \right) \frac{8\pi}{3} a^3 M_0 \hat{z}$$

1.4 Consideraciones energéticas

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(-\nabla\phi) = -\nabla U$$

$$\Delta U = W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} \rightarrow \Delta U = - \int_{\Gamma} \nabla(q\phi) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -q\Delta\phi$$

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} \quad \frac{\delta U}{\delta x} = F_t$$

donde el subíndice es por tangencial.

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right)$$

$$W_N = \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

siendo ϕ_{ij} el potencial sobre q_i debido a q_j .

$$W_N = \sum_i^N \frac{1}{2} q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de q_i .

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \delta V \phi$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})}{4\pi} \delta V \phi$$

$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) = \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D}$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta V [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) - \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi]$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \left(\int_V \nabla \cdot (\mathbf{D} \phi) dV + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \right)$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D} \phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotroía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su ϵ . Es un proceso isotérmico. Uno asume que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ y no varía con el tiempo. En la práctica ϵ varía con la temperatura.

1.5 Interpretación termodinámica de U

El incremento de energía a T constante

$$\delta W = U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j \quad \text{con } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ tensor simétrico} \quad (5.1)$$

Pero ϵ es función de T la temperatura y entonces no podemos decir que

$$dU = dW$$

valga en general, pues también hay variación del calor (a no ser que sea un proceso isotérmico) de modo que la energía que representa (5.1) es la energía libre de Helmholtz a T constante.

$$dU = dQ - dW \quad F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT$$

pero al ser la última cero, resulta

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV - SdT$$

de modo que como el primer término es $\partial F / \partial D|_T$ resulta que

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D$$

Si es un medio isotrópico entonces $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y entonces

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = S \end{aligned}$$

luego

$$U = F + TS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[\mathbf{D} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \left[\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right] dV$$

y finalmente para medios lineales e isotrópos

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial T \epsilon}{\partial T} dV$$

y la segunda ley de la termodinámica es

$$\delta Q = T \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

con $\epsilon > 0, T > 0, \partial \epsilon / \partial T < 0$ si el ϵ decrece con T el cuerpo se enfría $\delta Q < 0$.

1.6 Teorema de Thomson



Figura 6.4

$$\delta W = \int_V \phi \delta \rho dV$$

las cargas en un conductor se redistribuirán hasta que F alcance su valor mínimo.

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\nabla \phi \cdot \delta \mathbf{D} dV) =$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta (\mathbf{D} \phi)] dV$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \sum_i^N \int_V \phi_i 4\pi \delta p_i dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \mathbf{D} \phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_i^N \phi_i \int_V \delta \rho_i dV = 0$$

y la integral de superficie la podemos dejar desvanecerse. Se suma sobre cada conductor que se halla a ϕ constante ϕ_i . La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio $\delta\rho_i = 0 \forall i$.

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca pueden llegar a un equilibrio estable. El ϕ no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región.

Sea una región donde

$$\nabla\phi|_s < 0 \Rightarrow \int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla\phi) dV = \int_V \nabla^2\phi dV = 0$$

entonces no vale lo que supusiéramos.

1.7 Esfera con magnetización uniforme

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 = \nabla \times \mathbf{M}$$

usando el ϕ_m se llega a

$$\mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}$$

donde I es por interior de esfera y afuera el ϕ_m es el de un dipolo con

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}a^3\mathbf{M}$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie (no hay multipolos subsiguientes).

En las figuras vemos las líneas de \mathbf{B} que son continuas, no nacen ni mueren, pero las de \mathbf{H} nacen y mueren en la superficie, por la $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$. \mathbf{H} es menos intenso que \mathbf{B} pues

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

de manera que en el interior \mathbf{H} y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos.

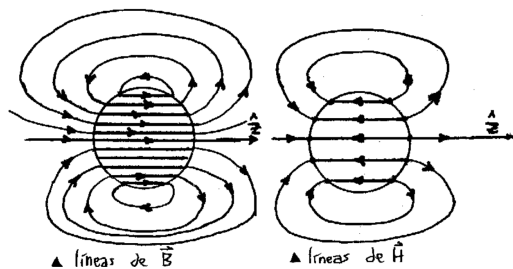


Figura 7.5

1.8 Histéresis

Los campos fundamentales son \vec{E}, \vec{B} , en realidad \vec{D}, \vec{H} se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de ρ, \vec{J} de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

pero para ferromagnéticos es $\vec{B} = f(\vec{H})$ con f no lineal. Se verifica un fenómeno de histéresis; \vec{B} es una función multivaluada de \vec{H} y f depende de la historia del material.

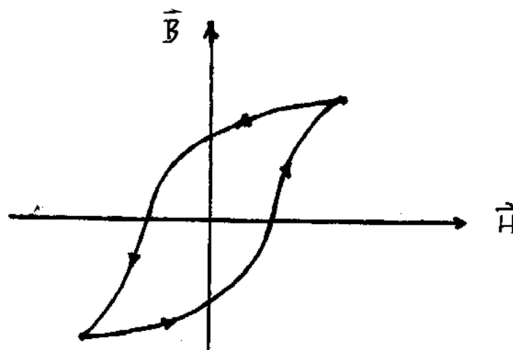


Figura 8.6

\vec{H} se conoce como campo desmagnetizante.

1.9 Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un B_0 uniforme tendremos

$$H_I = B_0 - \frac{4\pi}{3}M \quad B_I = B_0 + \frac{8\pi}{3}M$$

y podemos eliminar M de manera que

$$2H_I + B_I = 3B_0$$

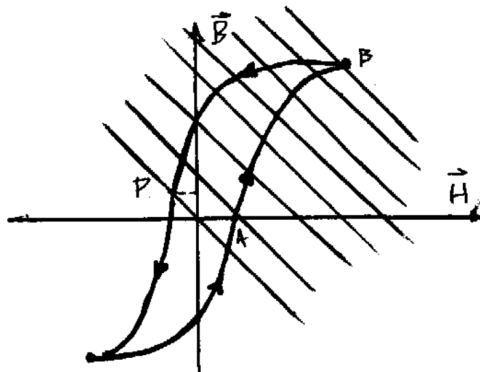


Figura 9.7

Vemos en la figura en P el punto de trabajo del imán esférico. Subimos B_0 hasta saturar la esfera y luego cuando $B_0 = 0$ nos hallamos en P. Hemos recorrido el camino ABP.

Usando la curva de histéresis relacionamos B_I, H_I y entonces

$$B_I = 3B_0 - 2H_I.$$

Un imán es tanto más estable cuando H_I es pequeño; en el caso de $M \parallel$ superficie, por ejemplo.