

## Capítulo 1

---

# Teorema de Green

## 1.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras (cargas imagen) las condiciones de contorno.

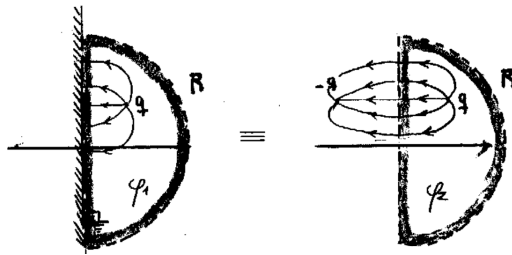


Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma:  $\phi_1 = \phi_2$  por unicidad.

### 1.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el  $\phi$  de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación

elemental.

Restando entre sí

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

y

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \int_S [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \in R, \mathbf{x} \in R$$

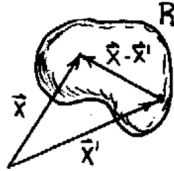


Figura 1.2

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & \nabla^2 \psi &= -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ -\phi(\mathbf{x})4\pi + \int_V 4\pi \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' &= \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

donde estamos usando la abreviatura  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$  que es la derivada normal en la superficie. Despejando

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \right) dS,$$

donde la primer integral es debido a las cargas internas y la segunda al efecto de las cargas fuera del recinto  $R$ .

Recordemos que las condiciones tipo Dirichlet corresponden a  $\phi|_S$  y las tipo Neumann a  $\partial \phi / \partial \hat{n}|_S$ .

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \notin R, \mathbf{x} \in R$$

y

$$\int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS,$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de  $R$  que producen campo en el interior  $R$ .

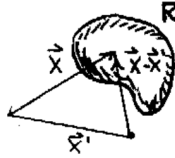


Figura 1.3

Hemos tomado  $\psi = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  que verifica [1]; interpretándose  $\psi$  como el potencial de una carga puntual unitaria.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

podemos tomar

$$G \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

donde  $G$  es la función de Green.

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \nabla^2 f$$

donde  $F$  satisface Laplace (si el recinto no incluye a  $\mathbf{x}'$ ). Con  $\nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

Entonces  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  representan la o las imágenes necesarias para que  $G$  cumpla el contorno necesario  $G_D|_S = 0$ .

## 1.2 Funciones de Green

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS', \quad (2.1)$$

Pero para poder utilizar (2.1) necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno, de manera que según sean

$$\text{Dirichlet} \quad \begin{cases} G_D : \nabla^2 G_D = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ G_D|_{\text{contorno}} = 0 \\ \phi|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G_D \rho \, dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial}{\partial n} G_D \, dS' \end{cases}$$

donde la condición de contorno de  $G$  equivale, en el contexto físico del electromagnetismo, a reemplazar el contorno por un conductor metálico puesto a tierra. Entonces  $G$  es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi_2}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma \quad \phi_2|_S = \phi_1|_S$$

$$\text{Neumann} \quad \begin{cases} G_N : \nabla^2 G_N = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ \nabla G_N \cdot \hat{n}|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle|_S + \int_{V'} G_N \rho \, dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S G_N|_S \frac{\partial G_N}{\partial n} \, dS \end{cases}$$

### 1.2.1 Green para el problema externo de una esfera

La configuración es una carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra. La idea aquí es conocer dónde ubicar la imagen  $q'$  para que se verifique el contorno, es decir que el potencial será ahora el correspondiente a las dos cargas

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}$$

y debe cumplir que

$$\varphi(\mathbf{x})|_{r=a} = 0,$$

por la conexión a tierra. Para ajustar esta condición se tienen dos variables, la magnitud de la carga  $q'$  y su posición  $\mathbf{y}'$ . No obstante, la simetría de la configuración establece ciertas restricciones para la posición  $\mathbf{y}'$ ; en efecto para el problema de una carga frente a una esfera el eje que une el

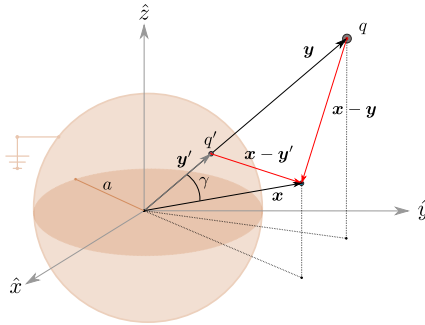
Este título sería “Ejemplo método de imágenes”. En realidad este es un ejemplo de cálculo de función de Green; así fue dado en la teoría.

centro de la esfera con la carga es un eje de simetría de revolución; si la esfera gira en torno a ese eje la configuración es la misma. Luego, la carga imagen debe ser tal que no rompa esa simetría: debe estar localizada en dicho eje. Entonces  $\mathbf{y}'$  y  $\mathbf{y}$  son colineales y la posición incógnita requerida es solamente el módulo  $y' = |\mathbf{y}'|$ .

Los módulos en los denominadores pueden expresarse en términos de la ley de los cosenos, como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \gamma}},$$

donde  $x, y$  son los módulos respectivos.



**Figura 2.4** Geometría para el problema de la carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra.

Luego, la condición de contorno evaluada sobre la superficie de la esfera  $|\mathbf{x}| = a$  implica que

$$\varphi(\mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=a} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2ay' \cos \gamma}} = 0,$$

y entonces se tienen que obtener ahora  $q, y'$  a partir de esta ecuación que en realidad representan infinitas direcciones dado que  $\gamma$  puede ser cualquier ángulo entre 0 y  $2\pi$ . Se necesitarán dos ecuaciones para resolver unívocamente el problema. Si se eligen  $\gamma = \pi$  y  $\gamma = 0$  la ecuación anterior define el sistema

$$\begin{cases} \frac{q}{y-a} + \frac{q'}{a-y'} = 0 \\ \frac{q}{a+y} + \frac{q'}{a+y'} = 0 \end{cases}$$

Parece ser una constante que si elegimos las cosas del modo más simétrico posible, las expresiones resultan más sencillas.

cuya solución es el par

$$q' = -\frac{a}{y} q, \quad y' = \frac{a^2}{y},$$

y entonces

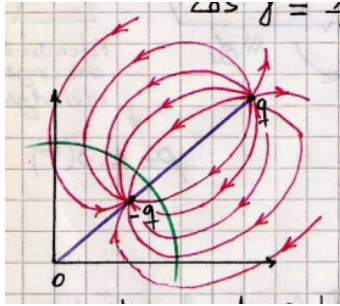
$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} - \frac{(a/y)q}{\sqrt{x^2 + a^4/y^2 - 2x(a^2/y) \cos \gamma}}.$$

El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  del espacio, debido a una carga en  $\mathbf{y}$  depende de los módulos  $x, y$  y del ángulo  $\gamma$  entre dichos vectores.

Esta solución puede obtenerse un poco más heurísticamente, ver nota 1.9.

Lo que sucede físicamente es que se induce carga sobre la superficie de la esfera. Se querrá ver (luego?) cuál es la distribución de carga que se inducirá sobre la superficie.

**Esta expresión, así como está, no se halla en ningún sistema de coordenadas en particular.**



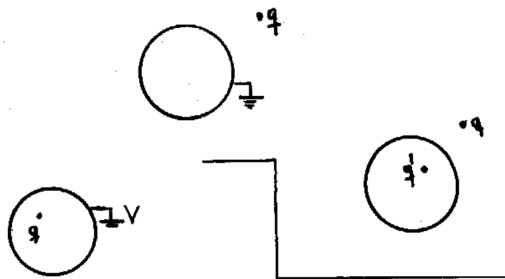
**Figura 2.5**

Este ejemplo ha servido también para mostrar la determinación de la función de Green para la configuración dada por una esfera aterrizada (condiciones de Dirichlet), que sería

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a/|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - (a^2/|\mathbf{y}|)\hat{\mathbf{y}}|}$$

El caso (c) de la Figura se resuelve con

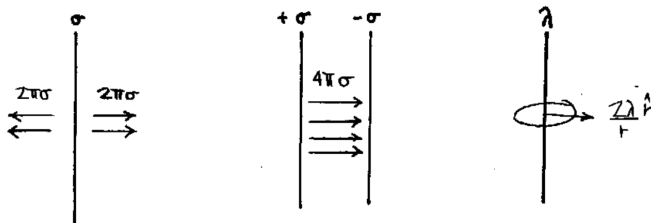
$$\begin{aligned} -\frac{V}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS &= -\frac{V}{4\pi} \int_S \nabla G \cdot d\mathbf{S} = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G dV \\ &= -\frac{V}{4\pi} (-4\pi) \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V \end{aligned}$$



**Figura 2.6**  $G_D$  es el potencial de la configuración (a) y se evalúa teniendo en cuenta la otra (b) que se resuelve casualmente por imágenes. La (c) se resuelve alterando las condiciones.

### 1.3 Algunos campos

En distribuciones infinitas de carga la integral de Poisson diverge pero ello se debe a que en realidad no existen distribuciones infinitas de carga.



**Figura 3.7**

### 1.4 Notas método de Green

Función de Green libre (sin contornos) lleva directo a la integral de Poisson

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho G dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \text{con} \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$

Para condiciones de Neumann se toma:

$$\nabla G_N|_S = -\frac{4\pi}{S} = \frac{\partial G}{\partial n}|_S$$

la integral

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}|_S dS$$

no se puede anular con

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

salvo que el volumen de integración no contenga a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  en cuyo caso: se excluye  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  de la integración.

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}|_S dS = \frac{1}{S} \int_S \phi|_S dS = \langle \phi \rangle|_S$$

que es el valor promedio de  $\phi$  en la superficie  $S$ .

Se suele tomar la superficie  $S \rightarrow \infty$  de modo que resulte nulo  $\langle \phi \rangle|_S$ . Se toma el volumen  $V$  rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito entonces

$$\langle \phi \rangle|_S = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

esto es el llamado *problema exterior*.

## 1.5 Condiciones de contorno para los campos

Consideraremos la superficie de separación entre dos medios 1 y 2, la cual puede estar cargada, y sobre la misma imaginaremos un cilindro pequeño  $\Sigma$  de tapas paralelas a la superficie y altura despreciable y asimismo, un circuito cerrado  $\Gamma$  también de altura despreciable perpendicular a la superficie, ver figura.

La normal a la superficie es  $\hat{n}$  mientras que  $\hat{t}$  es un versor tangente a la misma.



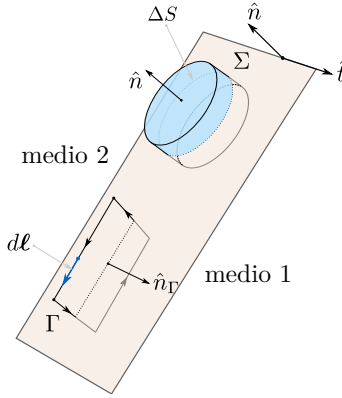


Figura 5.8

La ley de Gauss establece para el cilindro  $\Sigma$  que

$$\int_{S_\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_n,$$

donde  $S_\Sigma$  es la superficie total del cilindro y  $Q_n$  la carga neta encerrada. Como la superficie lateral es despreciable, por serlo la altura, la integral de superficie se reduce a la de las tapas. Si la densidad de carga sobre la superficie es  $\sigma$  entonces

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S$$

o bien

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma$$

lo cual implica que la componente normal del campo  $\mathbf{E}$  es discontinua si hay carga superficial presente.

Por otra parte, como el rotor de  $\mathbf{E}$  es nulo (en electrostática), el teorema de Stokes implica

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} = 0 = \int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

y despreciando el aporte de las partes del circuito que son perpendiculares a la superficie, resulta

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{n}_\Gamma \times \hat{n}) d\ell = 0$$

No sé si no decir directamente que en electrostática es nula la integral de línea de  $\mathbf{E}$  y ya.

donde en el miembro derecho se ha expresado la dirección del  $d\vec{\ell}$  en función de los versores normal y tangencial, y entonces

$$\hat{n}_\Gamma \cdot (\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) = 0,$$

que indica que el segundo factor tiene que ser nulo, es decir

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

y esto implica que la componente tangencial del campo es continua, sin importar que exista carga o no.

**Acordate que harcodeaste con un pdf el  $\ell$  bold.**

Resumiendo

$$E_{2\hat{n}} - E_{1\hat{n}} = 4\pi\sigma \quad E_{2\hat{t}} - E_{1\hat{t}} = 0$$

Expresando el campo en términos del potencial, se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla\phi_2 \cdot \hat{n} + \nabla\phi_1 \cdot \hat{n} &= 4\pi\sigma \\ \frac{\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n}}{4\pi} &= \sigma \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} \end{aligned} \quad (5.1)$$

esta es la densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios.

### 1.5.1 Carga puntual frente a esfera puesta a tierra

Volvemos a este problema, recordando que el potencial fuera de la misma se hubo determinado por el método de imágenes. Recordemos también que dentro de la esfera el potencial debe ser constante (no hay carga allí, puesto que la imagen es un dispositivo virtual sin existencia física). Consideramos dos secciones, interna y externa.

Por la simetría del problema la densidad de carga inducida tiene la simetría de revolución en torno al eje que pasa por  $q, q'$  y el origen de coordenadas y será máxima en el punto de la esfera más cercano a  $q$ . Dado que el potencial es constante dentro de la esfera, e igual al valor que toma sobre la superficie, la ecuación (5.1) es

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S.$$

Ubicando nuestra esfera en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, la normal externa  $\hat{n}$  es claramente  $\hat{r}$  de modo que derivar normalmente es derivar con respecto a la dirección radial, es decir  $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$

y entonces

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \frac{[1 - (a/y)^2]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}.$$

La definición de derivada normal puede ir para apéndice.

Si consideramos ahora el problema interno; esto es, una carga  $q$  rodeada por una esfera conductora conectada a tierra, se pueden hacer los mismos razonamientos que en el caso de la carga exterior y la solución es la misma intercambiando  $q'$  por  $q$  y  $y'$  por  $y$ . Entonces, en ese caso el cálculo de la densidad utiliza  $\hat{n} = -\hat{r}$  y se tiene

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \frac{[(a/y)^2 - 1]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}$$

Acá debiera estar claro que se invierte el significado de  $y'$ , ahora es mayor que  $a$ .

La carga total inducida sobre una superficie se evaluará en general a través de

$$Q = \int_S \sigma dS.$$

En el caso anterior del problema de la carga frente a una esfera a tierra se puede utilizar la ley de Gauss para hallar en cada caso la carga total de una manera inmediata.

Situando una superficie gaussiana  $\Sigma$  por fuera de la esfera, como se ve en la figura, resulta que la carga encerrada neta es la misma con imagen o sin imagen. En efecto, en el problema real la carga encerrada se distribuye sobre la superficie mientras que en el problema equivalente está concentrada en la posición  $y'$  y sabemos que es  $q'$ ; luego como los dos problemas son equivalentes el lado derecho de la ley de Gauss debe ser idéntico y la carga inducida será la neta encerrada, que es  $q'$ , la carga imagen.

Procediendo de modo similar para el problema interno (ahora  $q'$  está por fuera de la superficie  $\Sigma$ ), ahora la situación es diferente porque el campo sobre es nulo (solo es no nulo fuera de la esfera por la conexión a tierra). Entonces la ley de Gauss ya nos dice ahí que la carga neta es nula y ello lleva a que la carga inducida sea  $-q$  que no es igual a la carga imagen.

### 1.5.2 Principio de superposición

Consideremos la situación depicted en la figura

Una cierta distribución de carga está rodeada por una superficie a potencial  $V$ . El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  es

$$\varphi \mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

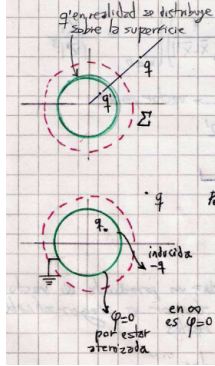


Figura 5.9

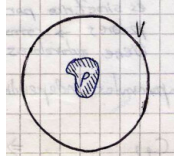


Figura 5.10

pero como el potencial sobre la superficie está fijo en  $V$  la última integral es

$$-\frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int \nabla G \cdot \hat{n} dS,$$

la cual por el teorema de la divergencia resulta

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla \cdot (\nabla G_D) dV = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G_D dV$$

y recordando que la función de Green es solución de la ecuación de Poisson para una densidad dada por la delta de Dirac, se tiene

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = V \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V,$$

de manera que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega + V,$$

lo cual puede una manera de ver el principio de superposición.



## 1.6 Desarrollo multipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Cuando la expresión es muy complicada podemos desarrollarla en una serie de potencias

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3} + \sum_{i,j} \frac{1}{2|\mathbf{x}|^5} x_i Q_{ij} x_j$$

donde está centrado en el origen de coordenadas. El último término, matricialmente sería

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5}$$

y es el término cuadrupolar.

Los momentos son el momento dipolar,

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV$$

el momento monopolar

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV$$

que es la carga total, y el momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2] dV$$

El momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta, los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga. Asimismo  $Q_{ij} = Q_{ji}$  es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable. Tiene traza nula,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

se da también que  $Q_{ij} (i \neq j)$  mide desbalance lejos de los ejes. Una esfera con  $\rho$  uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolo.

Una simetría de reflexión implica que el  $\mathbf{p}_\perp = 0$  donde la notación significa perpendicular al plano. Esto es así porque no hay desbalance. Para una simetría de revolución  $Q_{xx} = Q_{yy}$  entonces el  $Q_{ij}$  puede darse con un sólo número.



Figura 6.12

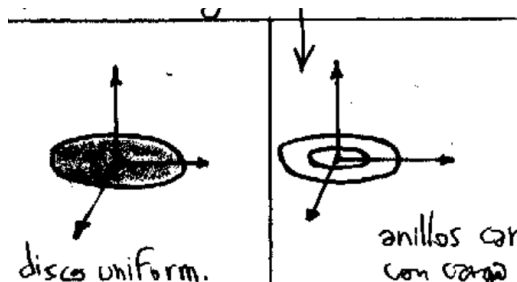


Figura 6.13

Si en una distribución dada, los momentos multipolares hasta el orden  $\ell - 1$  son nulos entonces el momento multipolar de orden  $\ell$  no depende del origen de coordenadas.

En la figura vemos que no ambos no tienen desbalance de carga respecto del origen; el disco uniformemente cargado tendrá monopolo no nulo y dipolo nulo (siempre respecto del origen), los anillos cargados con carga opuesta tendrán monopolo y dipolo nulos (respecto del origen y de cualquier otro punto). Pero si muevo las distribuciones se tendrá desbalance el disco pero no los anillos.

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros; el cuadrupolo se da con un solo número. En la Figura tenemos un elipsoide con densidad de carga  $\rho$  uniforme. Tiene simetría de revolución de modo que el momento cuadrupolar es un número.  $Q_{zz} = 0$  puesto que una esfera no tiene desbalance, entonces  $\vec{Q} = 0$

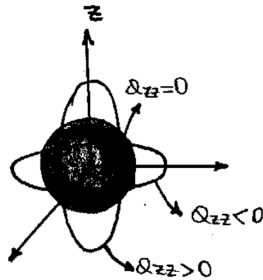


Figura 6.14

## 1.7 Dipolo eléctrico

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

si está en el origen, y

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

si está en un punto  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \hat{\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

donde debemos notar que  $\mathbf{p}$  no depende de  $\mathbf{x}$ .

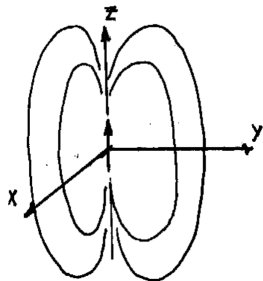


Figura 7.15 Dipolo centrado en el origen.

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{p \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$



siendo

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta}$$

tiene simetría de revolución, puesto que no depende de  $\hat{\phi}$ .

Las líneas de campo cumplen que  $d\ell$  a través de una línea de campo es tal que

$$d\ell \parallel \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} \times d\ell = 0$$

la línea de campo sigue la dirección del campo. En el caso del dipolo no tendrán componente en  $\hat{\phi}$  (como es de esperar).

### 1.7.1 Inteacción de un campo externo con una distribución de carga

Si tenemos un campo  $\mathbf{E}$  con sus fuentes lejos,



Figura 7.16

y que cumple  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (irrotacionalidad), se da la siguiente fuerza sobre la distribución

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV,$$

y si  $\mathbf{E}$  no varía demasiado en  $V$ , entonces podemos representar bien por una serie

$$E^\ell(\mathbf{x}) = E^\ell + x_j \partial_j E^\ell + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^\ell$$

entonces

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

o bien

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i q + (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_i + \mathbf{x} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla E_i]$$

de lo cual extraemos que el campo interactúa con la carga, el gradiente del campo interactúa con el dipolo y la divergencia del campo interactúa con el cuadrupolo. Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo, el torque  $\mathbf{T} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$  se puede escribir como

$$\mathbf{T} = q\mathbf{x} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

donde  $\mathbf{p} \equiv q\mathbf{x}$  es el momento dipolar y vemos que el torque tiende a centrar el dipolo según la dirección del campo  $\mathbf{E}$  aunque no lo logra por la agitación térmica.

La energía de un dipolo será

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

entonces

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

siendo los últimos tres términos nulos según lo que consideramos previamente de manera que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

### 1.7.2 Capa dipolar

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

y el potencial de una capa dipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$

siendo  $\mathbf{D}$  el momento dipolar por área que viene de acuerdo a la definición

$$D = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sigma \epsilon$$

refiérase a la ilustración bajo esta línea

Veamos algún detalle más sobre la capa dipolar, que está ilustrado en la Figura siguiente.

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = \frac{D \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{r^2} dS$$

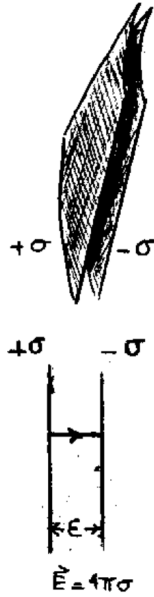


Figura 7.17

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -D d\Omega$$

puesto que

$$\phi(\mathbf{x}) = -D \int_S d\Omega \quad \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \equiv d\Omega$$

Para las condiciones de contorno se da lo siguiente

$$\begin{aligned} E_2^{\hat{n}} - E_1^{\hat{n}} &= 4\pi\sigma \\ -\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n} &= 4\pi\sigma \\ \frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\hat{n}} &= 4\pi\sigma \\ \phi_1 - \phi_2 &= 4\pi\sigma\epsilon \end{aligned}$$

desde donde deducimos que el potencial tiene un salto al surcar la capa dado por

$$\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D$$

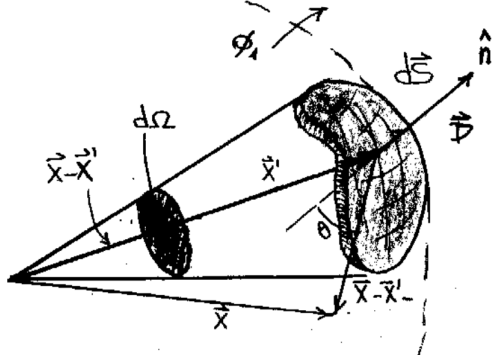


Figura 7.18

### 1.7.3 Momento dipolar por unidad de volumen

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

y el potencial de muchos de ellos sale de la integración

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV$$

donde  $\mathbf{P}$  es la llamada polarización, el momento dipolar por unidad de volumen, siendo  $V$  un volumen que incluye a la zona de polarización (ver Figura).

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV$$

y si usamos el teorema de la divergencia para convertir una de las integrales resulta

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

lo que habilita a pensar en como que

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} \equiv \sigma_P$$

está presente en el borde del cuerpo polarizado, y en su interior existe

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} \equiv \rho_P$$

siempre que  $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$  es decir que la polarización no sea homogénea.

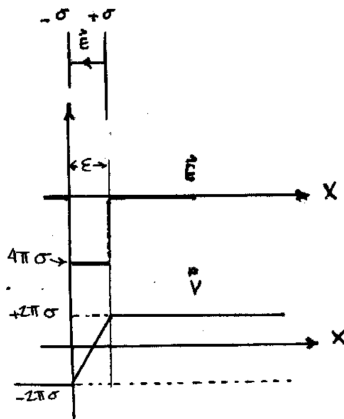


Figura 7.19

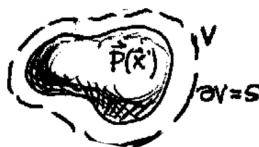


Figura 7.20

## 1.8 El potencial vector

Haremos una especie de desarrollo multipolar del potencial vector  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

pero como se puede escribir

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3}$$

en torno a  $\mathbf{x}' = 0$  será

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|} dV' + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int_V \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int_V \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

Recordar que Biot & Savart es para densidad de corriente estacionaria, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

y el primer término es nulo lo cual puede verse porque sale integrando con alguna identidad (?) y usando que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Correspondería al orden monopolar y el hecho de que sea nulo refleja la no existencia de monopolos.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left[ \left( \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J} dV \right) \times \mathbf{x} \right] \frac{1}{|\mathbf{x}|^3}$$

y si definimos el paréntesis como  $\mathbf{m}$  (momento magnético) entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

en el origen, y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

en  $\mathbf{x}'$ , las cuales son expresiones a primer orden y que utilizan el gauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

De esta manera tendremos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2c} [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] ]$$

que es la magnetización o densidad de momento magnético, y entonces el momento magnético pasa a ser

$$\mathbf{m} = \int_v \mathcal{M}(\mathbf{x}') dV'.$$

Se puede trabajar con el potencial vector así

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

la cual luego de mucho álgebra vectorial se puede llevar a la forma

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3},$$

que nos dice que bien lejos cualquier distribución de corriente localizada presenta como  $\mathbf{B}$  el campo magnético de un dipolo magnético dado por  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ . Esta aproximación corresponde, por supuesto, al primer orden del desarrollo.

### 1.8.1 interpretacion del momento magnético

Se puede pensar  $\mathbf{m}$  como una espira.

$$dA = \frac{x d\ell \sin(\alpha)}{2}$$

siendo el área orientada

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

y entonces

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{A}$$

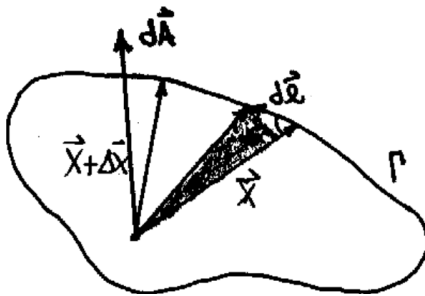


Figura 8.21

Desde volumen a espira hacemos la transformación del modo usual,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2c} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

usando que

$$\mathbf{J} dV = J d\ell dS = \frac{I}{dS} d\ell dS = I d\ell$$

A modo de ejemplo, para una espira circular de radio  $r$  es

$$m = \frac{i}{c} \pi r^2.$$

### 1.8.2 Interacción del campo magnético con una distribución de corriente

Hacemos una expansión de Taylor del campo  $\mathbf{B}$  con  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

y entonces como la fuerza es

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}(\mathbf{x}') dV'$$

resulta que



Figura 8.22

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 dV' + \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B} dV'$$

siendo el primer término nulo.

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Si el campo es homogéneo la fuerza es nula, pero como  $\mathbf{F} = -\nabla U$

$$F_m = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow U_M = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$F_e = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

siendo  $U_{m,e}$  la energía de los dipolos en campos externos.

Mediante identidades vectoriales podemos llegar a una expresión

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{B} dV' = -\nabla \times \frac{1}{2c} (-\mathbf{B}) \times \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV' =$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{B} \times \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV'$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$



La fuerza de un campo  $\mathbf{B}$  externo sobre una distribución de corrientes es el gradiente de cierta energía

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

de donde se ve claramente que si  $\mathbf{B}$  es uniforme entonces la fuerza es nula.  $\mathbf{m}$  es una constante que depende de la distribución de corrientes.

## 1.9 Perturbación por un conductor sobre un campo eléctrico uniforme

Se tiene un campo uniforme con  $Q, R \rightarrow \infty$  pero con  $2Q/R^2 = cte$ , según se ve en la Figura.

El potencial  $\phi$  de la esfera es constante por ser conductor. Puedo definir

$$\phi|_{esf} \equiv 0$$

pues  $\phi(\infty) \neq 0$  porque hay densidad de carga  $\rho$  en el infinito.

Para la carga superior,

$$\phi_1 = \frac{-Q}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} + \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} - a^2/R\hat{z}|}$$

mientras que para la inferior

$$\phi_2 = \frac{Q}{|\mathbf{x} + R\hat{z}|} + \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} + a^2/R\hat{z}|}$$

Recordemos que

$$(1 + \alpha)^{(-1/2)} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha \quad \alpha \ll 1$$

y podemos trabajar el denominador

$$|\mathbf{x} - R\hat{z}| = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos(\theta)}} = \frac{1}{R(1 + x^2/R^2 - 2x/R \cos(\theta))^{(1/2)}}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \approx \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos(\theta) \right)$$

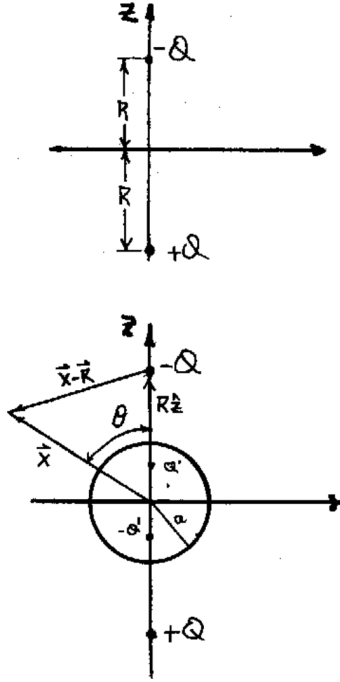


Figura 9.23

de manera que luego

$$\begin{aligned} \phi(r) \approx Q \left[ \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos(\theta) \right) + \frac{a}{Rx} \left( 1 + \frac{a^2}{Rx} \cos(\theta) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} \cos(\theta) \right) - \frac{a}{Rx} \left( 1 - \frac{a^2}{Rx} \cos(\theta) \right) \right] \\ \phi(x) \approx -\frac{2Qx}{R^2} \cos(\theta) + \frac{2a^3Q}{R^2x^2} \cos(\theta) \end{aligned}$$

y haciendo  $x \equiv r$  y tomando el límite,

$$\phi(r) = -E_0 r \cos(\theta) + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos(\theta)$$

y la carga total sobre la esfera es nula puesto que estuvo aislada todo el tiempo. Respecto de la Figura, si hacemos un Gauss en la zona indicada se obtiene  $Q_n = 0$ , entonces  $\phi(r = a) = 0$ .

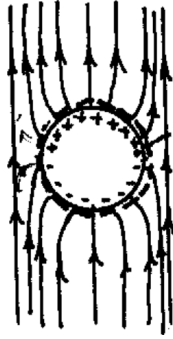


Figura 9.24

El segundo término es como un dipolo puntual,

$$E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos(\theta) = E_0 \frac{a^3 \hat{z} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

donde

$$\mathbf{p} \equiv E_0 a^3 \hat{z}$$

## NOTAS

### 9.1 Sobre el problema de la carga frente a la esfera conductora a tierra

Decíamos que esta solución se puede obtener de manera más heurística, como lo hace Jackson? [CITA], a partir de la expresión en

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0,$$

se podría intentar forzar que el segundo denominador sea idéntico al primero para lo cual se puede multiplicar arriba y abajo por el factor  $(y/a)$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{y/a \sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0$$

lo que conduce a

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{\sqrt{y^2 + y'^2 y'^2 / a^2 - 2 y^2 / a y' \cos \gamma}} = 0$$

y esta ecuación se satisface si  $yy' = a^2$  y si  $q = -q'(y/a)$ , que es justamente la solución encontrada previamente de un modo más tradicional.

También es interesante considerar algunos casos límite y ver que se recuperan resultados y comportamientos familiares. Si  $q$  está localizada muy cerca de la superficie de la esfera, i.e.  $|\mathbf{y}| \approx a + \varepsilon$  resultan  $y' \approx a - \varepsilon$  y  $q' \approx -q + (\varepsilon/a)q$  que son exactamente los resultados para una carga frente a un plano conductor (si despreciamos la cantidad infinitesimal  $(\varepsilon/a)$ ). Muy cerca de la superficie de la esfera la carga ve un plano infinito.