

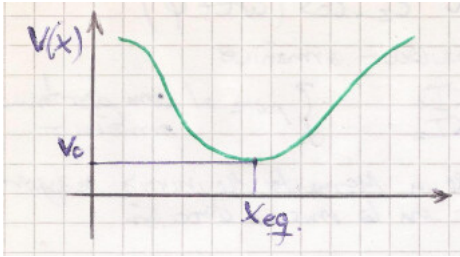
Capítulo 1

Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio. Esto desarrollará un método sistemático para tratar todo tipo de problemas con muchos grados de libertad pero en forma aproximada.

1.0.1 Idea para un grado de libertad

Para un grado de libertad la idea es que



en un potencial $V(x)$ con un mínimo, es decir que cumple

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0, \frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$$

para algún x_{eq} , en la expresión de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (1)$$

se aproxima el potencial según¹

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2, \quad (2)$$

y si definimos $k \equiv d^2 V/dx^2|_{x_{eq}}$ se llega a

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V_0 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2,$$

que derivada con respecto al tiempo resulta en

$$m\ddot{x} + k(x - x_{eq}) = 0,$$

la cual no es otra cosa que una ecuación de oscilador armónico, cuya solución general es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ y φ está asociada a la energía E . Ver Apéndice X para la resolución de oscilador armónico.

El problema físico tiene dos constantes aunque la resolución presenta cuatro (dos complejos, con parte real e imaginaria).

Un apéndice más: oscilador armónico con término no homogéneo (usar 76R carpeta). Acá habría que llegar a despejar quién es φ .

1.0.2 Varias variables

En el caso de un potencial $V(x_1, \dots, x_n)$ hay que hallar las raíces del mismo y luego desarrollar en torno a los puntos de equilibrio. Se empieza desde

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_{eq}} = 0,$$

y habría que desarrollar

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} (x - x_i)(x - x_j)$$

No obstante, el problema se puede enfocar mejor en términos de las coordenadas generalizadas. Entonces, el potencial es

$$V(q_1, \dots, q_n) \approx V(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

¹Nótese que esta es la expansión de Taylor en la cual el término lineal está justamente ausente porque la derivada primera en el punto es nula.

y la energía cinética,

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \approx \frac{1}{2} \left(m(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial m}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \dots \right) \sum_{i,j}^n \dot{q}_i \dot{q}_j$$

[Esta expresión hay que revisarla y reubicarla!]

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde m_{ij} son los coeficientes de las coordenadas generalizadas y se desarrollarán en serie en torno al equilibrio (caracterizado por un supraíndice 0), es decir,

$$m_{ij} \approx m_{ij}(q_i^0, \dots, q_n^0) + \sum_k \left. \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right|_{q^0} (q_k - q_k^0)$$

Haciendo la aproximación consistente resulta

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (\eta_i)(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \big|_{q_i^0} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

con $V_{ij} \equiv \partial^2 V / (\partial q_i \partial q_j) \big|_{q_i^0}$, $m_{ij} = m_{ij} \big|_{q_i^0}$ simétricos y donde se ha definido $\eta_i = q_i - q_i^0$. Notemos que $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$. Con esta nomenclatura puede escribirse

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^t \mathbb{V} \boldsymbol{\eta}$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{d}{d\dot{\eta}_k} (\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\eta_i \eta_j) = 0$$

son n ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = 0 \quad k = (1, \dots, n).$$

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

tomando al final del proceso $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$ como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 m_{kj} + V_{kj}) A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

siendo $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ autofrecuencias con $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$ y $\omega_s^2 \geq 0$.

Entonces, dado un $V = V(q_i)$ puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con $\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j |_{q_i^0}$ o bien cambiar variable $\eta = q_i - q_i^0$ y quedarse con los términos cuadráticos en $\eta_i \eta_j$. Para la energía cinética $T = T(q, \dot{q})$ puede ser más fácil evaluar $m_{ij}(q_i) |_{q_i^0}$ y quedarnos con los términos cuadráticos en $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$.

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \quad s = 1, \dots, N$$

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1^s e^{i\omega_s t} \\ A_2^s e^{i\omega_s t} \\ \dots \\ A_N^s e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia ω_s , siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia ω_s .

Luego, es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{tot} &= c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \dots + c_N \boldsymbol{\eta}^N \\ \boldsymbol{\eta}_{tot} &= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ \dots \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces \mathbf{A}^s es un modo normal de frecuencia s .

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \dots \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total (j es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

siendo el \dagger el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por \mathbb{T} de la unidad)

$$\mathbf{A}^t \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

lo cual significa que \mathbf{A} diagonaliza a \mathbb{T} , siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & \dots & & \\ \vdots & & & \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

interpolando a la matriz

$$\mathbf{A}^t \mathbb{V} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{A}^t \mathbb{T} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{1}$$

y sea ahora el siguiente cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi}$$

tal que

$$\mathbf{A}^{n \times n} \boldsymbol{\xi}^{n \times 1} \quad (\mathbf{A} \boldsymbol{\xi})^t = \boldsymbol{\xi}^{1 \times n} \mathbf{A}^{n \times n}$$

y que se llaman coordenadas normales.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{T} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \mathbf{A}^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{V} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\xi}^t \mathbb{1} \dot{\xi} - \frac{1}{2}\dot{\xi}^t \omega^2 \mathbb{1} \xi$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \xi_i^2 \omega_i^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

y son N ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

de modo que si $\omega^2 = \omega_i^2$ entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}$$

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en ξ (un grado de libertad es una ω) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a ω_s . Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en η , un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las ω .

Si $\omega = 0$ es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_j t} + A_j (Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la $\omega = 0$. Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \eta = A^\dagger \mathbb{T} A \xi$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \eta = \mathbb{1} \xi$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscila con una frecuencia única (son N osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

donde tienen la misma fase los A_j^s para toda frecuencia ω_s

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$\mathbf{A} = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

1.1 Oscilaciones viscosas

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j + B_{ij} \dot{\eta}_j = 0$$

no se puede convertir en osciladores independientes.

$$\det \{\mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B}\} = 0$$