Capítulo 1

Relatividad especial

1.1 Transformación de vectores

Digamos que un vector transforma

$$X_i' = a_{ij} X_j$$

de manera que se verifique que las leyes físicas sean invariantes frente a rotaciones propias. El módulo no cambia $|\boldsymbol{X}'|^2 = |\boldsymbol{X}|^2$.

Einstein postula que:

- Todos los sistemas inerciales son equivalentes (no se puede hablar de espacio absoluto).

- La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

Las ecuaciones vistas hasta ahora son igualdades vectoriales. Toda ley física debe ser covariante de un sistema inercial a otro.

Para una magnitud tensorial de 2do rango la traza del mismo debe ser invariante y además satisface

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Transformación ortogonal. En la época de Maxwell se postuló que las ondas EM viajaban con velocidad c respecto al espacio absoluto (el éter). Pero esta idea muere con Einstein en 1905.

Sea un sistema S' que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ de otro S en forma paralela a un eje (ver figura).

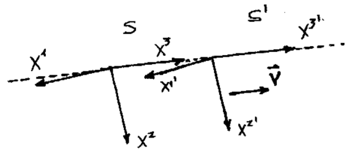


Figura 1.1

Se verifica entonces la transformación de Lorentz

$$
\begin{aligned}
x^{1'} &= x^1 \\
x^{2'} &= x^2 \\
x^{3'} &= \gamma\left[x^3 - \beta x^0\right] \\
x^{0'} &= \gamma\left[x^0 - \beta x^3\right]
\end{aligned}
$$

donde son

$$
\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad\qquad x^0 = ct
$$

A la transformación [1] se le puede dar forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue definiendo

$$
\beta \equiv \tanh(\eta) \qquad \gamma \equiv \cosh(\eta) \qquad \gamma \cdot \beta = \sinh(\eta)
$$

y con esta nueva notación puede escribirse

$$
\begin{aligned}
x^{0'} &= x^0 \cosh(\eta) - x^3 \sinh(\eta) \\
x^{3'} &= -x^0 \sinh(\eta) + x^3 \cosh(\eta)
\end{aligned}
$$

donde seguimos viendo que las leyes son lineales en las coordenadas (el espacio es isótropo)

Debiéramos dar ideas de estas cosas importantes de relatividad especial

$$
\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}
$$

y no es otra cosa que una rotación en eje $\hat{0}, \hat{3}$ con el ángulo $\eta = \mathrm{atanh}(\beta)$. O sea, son rotaciones en funciones hiperbólicas. Notemos que se verifica la invariancia del módulo de la transformación

$$
(x^{0'})^2 - ((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)
$$

o en una notación más feliz

$$
(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)
$$

Estamos queriendo generar una estructura geométrica para pasar entre sistemas inerciales.

Este espacio 4D es el de Minkowski y no es euclídeo. Un punto de este espacio es lo que se llama un *evento*; el radio vector posición en este espacio.

Busquemos ahora la transformación inversa. Dado que

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ \\ x^{3'} = \gamma(x^3 - \beta x^0) \end{cases}$$

y entonces se tienen los componentes contravariantes de las coordenadas del evento, que verifican

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y la transformación inversa, que se obtiene tomando los reemplazos

$$x^{i'} \to x^i \quad , \quad x^i \to x^{i'} \quad , \quad \beta \to -\beta,$$

permite hallar los componentes covariantes de dichas coordenadas que verifican

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

En realidad hemos considerado una transformación de Lorentz muy sencilla. Una más general será

$$\begin{cases} x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \\ x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{cases}$$

que nos da el radio vector contravariante y el covariante, respectivamente. Cada coordenada es función de todas las otras.

El elemento diferencial de línea, que es un invariante, es

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds'^2$$

o bien

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

que define el tensor de la métrica. Se verifica

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cuadrivectores en el espacio 4D

Un cuadrivector contravariante es

$$A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$$

mientras que el covariante es

$$A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A})$$

y vemos que las partes temporales son las mismas cambiando el signo de la espacial. Las reglas de transformación son

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \qquad\qquad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

luego el producto interno es

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \equiv A_\alpha B^\alpha$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein, que significa que

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

que es invariante por ser un escalar de Lorentz,

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\alpha B'^\alpha$$

Se ve que las reglas de transformación son tales que en el producto interno se cancelan los factores y el mismo resulta, como es sano que suceda, independiente del sistema coordenado. No cualesquiera cuatro cantidades forman los componentes de un cuadrivector.

Intervalos entre eventos

La distancia entre evento origen y un evento cualquiera es

$$S^2 = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2,$$

pero los intervalos deben ser invariantes relativistas y de Lorentz. Si el intervalo es temporal se tiene

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 > 0$$

y los eventos pueden estar conectados causalmente

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 < 0$$

y los eventos no pueden estar conectados causalmente. Se cumple

$$\delta s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Como δs^2 es un invariante, entonces el carácter del mismo se conserva en todos los sistemas inerciales.

Operadores diferenciales

Tenemos la derivada respecto a una coordenada contravariante

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada covariante, y también la derivada respecto de una coordenada covariante

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada contravariante. Note la asimetría entre derivo respecto de arriba y es derivada abajo y viceversa. La notación abreviada puede inducir a confusiones.

En el operador ∂_α el subíndice cambia de ubicación pero se mantiene el caracter (contra-) o (co-) variante del operador.

La cuadridivergencia de un cuadrivector es un invariante,

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{A})$$

y aquí vemos $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$. Esto nos lleva al D'Alembertiano

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \nabla^2$$

Conexión de sucesos

Sean dos sucesos x_1^α, x_2^α tales que s^2 es el intervalo entre los mismos (al cuadrado), y es un invariante lorentziano

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^2$$

El intervalo es temporal si $s^2 > 0$ en cuyo caso se tiene

$$c\delta t > |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$$

lo cual significa que existe frame inercial donde $x_1 = x_2$ los eventos ocurren en el mismo sitio de manera que pueden estar conectados causalmente; puesto que $c\delta t > 0$ y $t_2 > t_1$. Por el contrario si $c^2 < 0$ se tiene

$$c\delta t < |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$$

y existe entonces frame inercial donde los dos eventos son en el mismo sitio $x_1 = x_2$ y entonces $c\delta t < 0$ y $t_2 < t_1$ de manera que no pueden estar conectados causalmente.

Sea

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dz \right)$$

y si es ② posterior a ① en S entonces $dt > 0$. Entonces dt' puede ser mayor, menor o igual a cero (no respeta la temporalidad de S).

El orden temporal se puede alterar pasando de S a S', pero en ese caso se rompe la causalidad. En todos aquellos intervalos donde tienen diferentes signos dt y dt' se viola el principio de causalidad. Dos sucesos estarán relacionados causalmente si dado $dt > 0$ se tiene

$$dt > \frac{v}{c^2} dz$$

y eligiendo S' fijo a la señal que se emite y siendo v la velocidad de propagación de la señal, será

$$1 > \frac{v}{c^2} \frac{dz}{dt} = \frac{v^2}{c^2}$$

para que ninguna señal se pueda mover a mayor velocidad que la de la luz (porque tiene que valer la causalidad). El gráfico siguiente intenta ilustrar estas consideraciones. Suponemos haz de luz desde el $-\infty$ que pasa por el origen

Ahora se ve lo que pasa para otro observador haciendo un cambio de coordenadas

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^3) \qquad x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

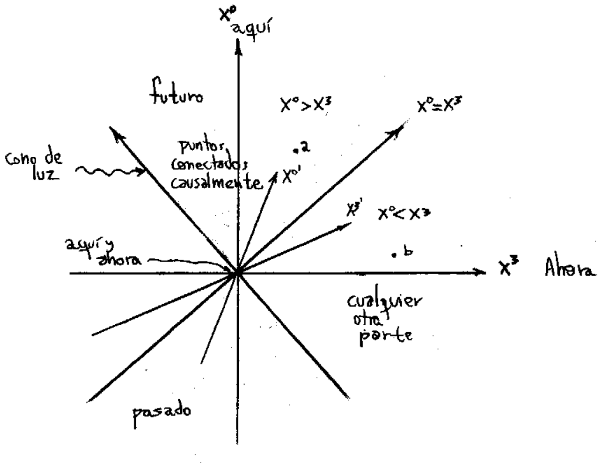


Figura 1.2

y si ahora es $x'^0 = 0$ entonces para un observador en S' se tiene

$$0 = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

o bien $x^0 = \beta x^3$ y aquí es $x'^3 = 0$ de modo que

$$\frac{x^3}{\beta} = x^0$$

y entonces a de la figura puede ser causado por un suceso en el origen pero b no tiene conexión causal con el origen.

Para el observador S' el punto b está debajo de su "ahora" que es el pasado. Por otra parte a para el observador S es el futuro. Para este mismo observador, el punto b está en "cualquier otra parte" de tal manera que no puede estar conectado causalmente con el origen.

1.1.1 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

Sea v/c no despreciable

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z) \qquad\qquad \gamma > 1$$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t\left(1 - \beta\frac{\Delta z}{c\Delta t}\right)$$

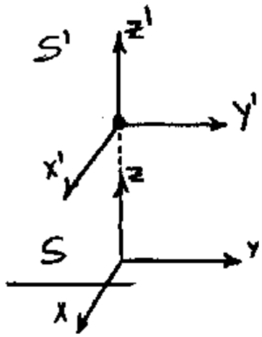


Figura 1.3

pero si en S' la partícula está en reposo es $v = dz/dt$ de manera que

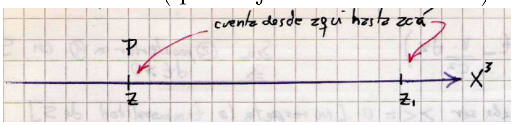
$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2)$$

$$\Delta t' = \Delta t (1 - \beta^2)^{1/2}$$

de modo que $\Delta t' < \Delta t$, en S' el tiempo transcurre más lentamente.

Número de onda y conteo

Un proceso de conteo (discreto) es invariante lorentziano, pero no así el medir longitudes. Supongamos un aparato que cuenta el número de crestas de ondas (que viajan con velocidad c). Cuento en x^3 entre



$$x'^3 = \gamma (x^3 - \beta x^0)$$

siendo $\boldsymbol{v}$ entre los sistemas S y S'. El número de crestas que cuenta el aparato es

$$\#_s = \frac{z_1 - z}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}(z_1 - z) = \frac{k}{2\pi}(ct - z) = \frac{1}{2\pi}(\omega t - kz)$$

donde se ha usado que $z_1 = ct$, luego para un observador primado se tendrá consecuentemente

$$\#'_s = \frac{1}{2\pi}(\omega' t' - k' z')$$

y se puede generalizar

$$\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{x}' - \omega' t' = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t,$$

lo cual nos conduce a ver que

$$-\left(\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{x}' - \frac{\omega' x'^0}{c}\right) = -\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \frac{\omega x^0}{c}\right)$$

es un invariante lorentziano de acuerdo con

$$k_\alpha x^\alpha = k'_\alpha {x'}^\alpha \tag{1.1}$$

Entonces dado ese comportamiento se puede definir el cuadrivector de onda como

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right).$$

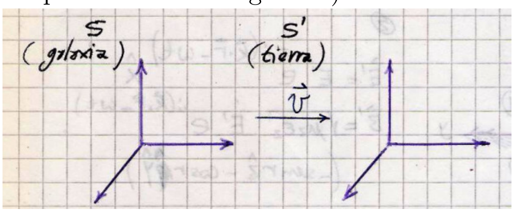
Una onda plana debe ser invariante relativista. En una onda plana la ecuación de invariancia (1.1) conduce al efecto Doppler. En el caso relativista depende de la velocidad relativa entre fuente y observador.

1.1.2 Efecto Doppler relativista

Volamos a la transformación entre sistemas S y S', teníamos

$$k'_z = \gamma\left(k_z - \beta\frac{\omega}{c}\right) \qquad \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z\right)$$

y de estas dos diferentes k_z surge el efecto Doppler. Se tienen los sistemas (el sin primar es en una galaxia)



y serán

$$k_z = k\cos\theta \qquad \frac{\omega'}{\gamma\omega} = 1 - \beta\cos\theta$$

donde θ es el ángulo del número de onda con el eje $\hat{z}$. Considerando la transformación inversa (acercamiento) $\omega = \omega'\gamma\,(1 + \beta\cos\theta')$ resulta

$$\frac{\omega'}{\gamma\omega} = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta\cos\theta')}$$

Ahora bien, tomando $\beta \ll 1$ resulta

$$\omega \approx \omega \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

y a primer orden, con $\theta \sim \theta'$ usando

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}.$$

Veamos casos particulares de la invariancia del producto escalar.

Caso 1

En este caso son paralelos la velocidad y el vector de onda, i.e. $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}$ se tienen $k_x = k_y = 0$ y $k_z = k$ entonces

$$k' = \gamma k(1-\beta) = k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

luego,

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

donde $\beta > 0$ implica alejamiento y $\beta < 0$ implica acercamiento. Luego la diferencia de longitudes de onda es

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda\,\frac{\sqrt{1+\beta} - \sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \approx \lambda\beta$$

de lo cual se deduce que a primer orden en β es $\Delta\lambda \sim \lambda\beta$.

Queríamos ver si es una buena aproximación, usamos

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{14580\ \text{Å}}{6560\ \text{Å}}$$

que es el cociente entre la longitud de onda medida en la tierra respecto de la misma que viene de la estrella. Entonces

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{-1} = 0.202$$

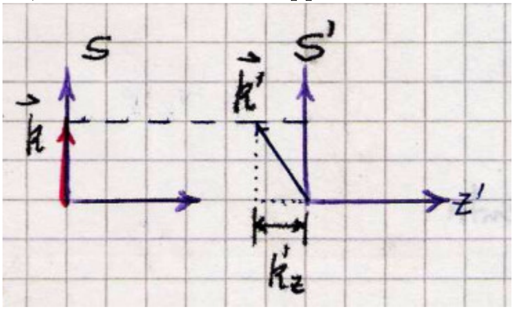
de modo que $\beta = 0.664$. Pero usando la aproximación

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.223.$$

Y entonces es claro que se necesita β chico para que valga la aproximación hecha más arriba.

Caso 2

En este caso son perpendiculares la velocidad y el vector de onda, i.e. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{k}$, se tiene un efecto Doppler transversal.



Se tienen en este caso $k'_x = k_x, k'_y = k_y, k_z = 0$ y es

$$k'_z = -\gamma\beta k \qquad {k'}^2 = \gamma^2 k^2$$

de modo que $k' = \gamma k$ y $\omega' = \gamma\omega$. Vemos que en este caso el efecto Doppler transversal es notable solo a orden dos, es un fenómeno netamente relativista (γ es de orden cuadrado en su efecto). A orden cero (clásico) no hay efecto.

Supongamos una partícula a velocidad constante según el observador S. Sean dos sucesos de esa partícula.

$$c\Delta t' = \gamma c\Delta t \left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

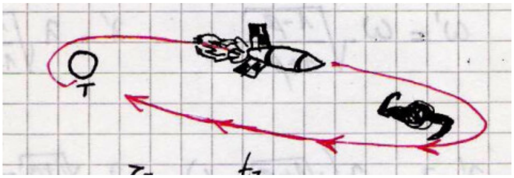
donde el intervalo de tiempo primado es tiempo propio pues en S' la partícula está en reposo. Se ve que en el sistema S' el tiempo transcurre más lentamente, $\Delta t' < \Delta t$.

Si no hay sistema en el cual se halle en reposo, podemos pensar en un intervalo infinitesimal donde está en reposo instante a instante pero cambia.

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}dt = d\tau$$

Ejemplo relojes

Tenemos la situación depicted en el figurin:



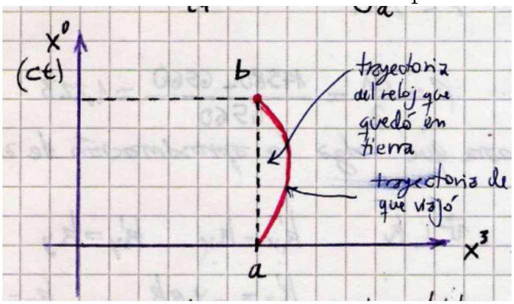
Tenemos un reloj 1 en S y un reloj 2 en S' dando la vuelta a la galaxia. Se tiene

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} dt < t_2 - t_1$$

y estos sistemas no son equivalentes. Es la paradoja de los mellizos. El tiempo pasa más lento para el que viajó

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c} \int_a^b ds$$

La métrica de Minkowski no corresponde a una euclideana.



En el espacio de Minkwoski la línea recta es la distancia mayor entre dos puntos.

1.2 Forma covariante del electromagnetismo

Partimos de la ecuación de continuidad para la carga,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

La conservación de la carga es una de las leyes más firmemente establecidas.

la cual con la definición del cuadrivector corriente

$$J^\mu = (c\rho, \boldsymbol{J})$$

se puede escribir como

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0.$$

La formulación covariante empleaba el gauge de Lorentz (es necesario) puesto que con él las ecuaciones son válidas en cualquier sistema inercial. El gauge de Lorentz era

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

siendo el cuadripotencial

$$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$$

y entonces

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial ct} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0.$$

Se podía ver que resultan ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

que viene a ser, usando el D'alembertiano,

$$\partial_\mu\partial^\mu = \Box\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

y para el potencial ϕ

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

que desemboca en

$$\partial_\mu\partial^\mu = \Box\phi = \frac{4\pi}{c}(c\rho)$$

Al aplicar el D'Alembertiano a un cuadrivector obtenemos otro cuadrivector

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c}J^\mu.$$

Veamos qué sucede con las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial. Recordemos que toda ecuación de igualdad de entes tensoriales en el espacio de Minkowski es covariante.

Otros gauges sirven bien si no me interesa pasar de un sistema a otro.

Teníamos

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},$$

de modo que en términos del cuadripotencial

$$E_i = -\partial_i A^0 - \partial^0 A^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$$

y luego el campo $\boldsymbol{B}$ viene del rotor del cuadripotencial, por lo tanto

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

del mismo modo que

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \qquad B_z = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2$$

y entonces se puede definir un ente

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que unifica notaciones para los dos campos.

Los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ forman parte de un tensor de segundo rango antisimétrico llamado tensor de intensidad de campo (tiene diagonal nula),

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que tendrá seis elementos independientes. Tres para el campo eléctrico y tres para el magnético. Matricialmente se puede ver como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

También se suele definir un tensor de intensidad de campo dual

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

que no es otra cosa que

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

y donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Levi-Civita de cuatro dimensiones, que es nulo cuando se repite un índice. Entonces las ecuaciones de Maxwell en forma covariante explícita resultan

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha.$$

EJEMPLO 2.1 Comentario corrientes parásitas

Un conductor en el seno de un campo magnético genera sobre sí al moverse corrientes de Foucault o turbillonarias que tienden a frenar su movimiento.

1.2.1 Transformación de los campos

L transformación de Lorentz era

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma\left[ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}\right] \\
\mathbf{x}'_{\parallel} &= \gamma\left[\mathbf{x}_{\parallel} - \beta ct\right] \\
\mathbf{x}'_{\perp} &= \mathbf{x}_{\perp}
\end{aligned}
$$

con $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ y donde la transformación de los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$

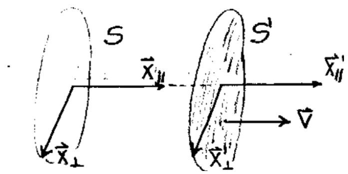


Figura 2.4

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}_{\parallel} + \gamma\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}\right) \\
\boldsymbol{B}' &= \boldsymbol{B}_{\parallel} + \gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\right)
\end{aligned}
$$

que se pueden poner como

$$
\boldsymbol{E}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) + \gamma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}\right)
$$

$$
\boldsymbol{B}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}) + \gamma\left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\right)
$$

y recordemos que la transformación de Galileo era

$$
\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B} \qquad\qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}
$$

siendo el segundo término el que da origen a las corrientes de Foucault al mover un conductor en el seno de un campo $\boldsymbol{B}$.

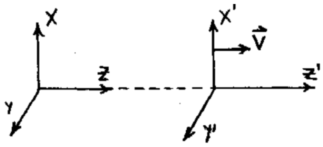


Figura 2.5

Según la figura superior la transformación de los campos satisface

$$
\begin{aligned}
E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) \qquad & B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y) \\
E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) \qquad & B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) \\
& E'_z = E_z \qquad & B'_z &= B_z
\end{aligned}
$$

Las contracciones del producto escalar entre el tensor de intensidad son invariantes. Así, por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= 2(B^2 - E^2) \\
\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} &= 2(E^2 - B^2) \\
\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= -4\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

Sea

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = 0,$$

entonces $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$ o alguno de los campos es nulo en todo sistema inercial. Para una carga que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ se tiene $\boldsymbol{B} = 0$ en un sistema en el que q está en reposo de manera que

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{E}' = 0$$

siempre y entonces $\boldsymbol{E}' \perp \boldsymbol{B}'$ para cualquier sistema inercial S'.

Un sistema electromagnético dependiente del tiempo intercambiará $\boldsymbol{p}$ con el campo entonces no vale el principio de acción y reacción ,

$$\frac{d\boldsymbol{P}_M}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}_c}{dt} = \int_{S(v)} \overline{T}\cdot d\boldsymbol{S}$$

mientras que

$$\frac{d\boldsymbol{P}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}dV\right)$$

1.2.2 Covarianza con medios materiales

En presencia de medios materiales puede definirse

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$F^{\alpha\beta} \to G^{\alpha\beta}, \quad E_i \to D_i, \quad B_i \to H_i$$

si las relaciones constitutivas son

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} \qquad\qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$$

desde

$$G^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}$$

y con

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

donde la información de P_i y M_i está en el tensor $R^{\alpha\beta}$. Recordemos que los campos transforman según

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}_\parallel + \gamma\left(\boldsymbol{P}_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{M}\right)$$

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}_\parallel + \gamma\left(\boldsymbol{M}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{P}\right)$$

Entonces de un sistema inercial a otro una $\boldsymbol{P}$ da origen a una $\boldsymbol{M}$ y viceversa.

1.3 Principio de Hamilton y relatividad

Habiéndonos situado en un espacio de Minkowski, tenemos la acción

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

siendo α una constante a fijar luego, y ds un arco en el espacio minkowskiano. La acción debe ser un invariante pues es un extremo.

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

de manera que

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} cdt\sqrt{1 - v^2/c^2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$$

y donde $\mathcal{L}$ es el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -\alpha c \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

y luego

$$\mathcal{L} \to T = \frac{mv^2}{2} \text{ (baja velocidad)}$$

de manera que fijamos el valor de la constante a partir de este límite de baja velocidades,

$$\mathcal{L} = -mc^2 \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

es el lagrangiano relativista.

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$$

y haciendo el álgebra,

$$p_i = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

que es el momento relativista. Entonces

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Para un movimiento circular, el módulo de la velocidad permanece constante.

$$\frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\,\gamma\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

si en cambio es $\frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt} \neq 0$ se tiene

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{V}(1 - v^2/c^2)^{-3/2}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m\boldsymbol{v}\gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

donde el primer término en el RHS está asociado a la variación en la dirección y el segundo a la variación en la magnitud (hemos usado con $\gamma^3 v^2/c^2 > \gamma$?). De esto se desprende que la inercia es mayor para variar la longitud de $\boldsymbol{v}$ que su dirección. Es más fácil cambiar dirección que rapidez.

Entonces

$$E = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - \mathcal{L} = m\gamma v^2 + mc^2\gamma^{-1} = m\gamma c^2$$

y esta es la energía relativista de una partícula libre. Veamos el límite de bajas velocidades, es decir que si $v/c \ll 1$ entonces

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

y resulta

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_0 + \frac{mv^2}{2}$$

donde E_0 es una energía en reposo, que no depende de $\boldsymbol{v}$ y podemos expresar la energía cinética como

$$E - mc^2 = \frac{mv^2}{2} = T.$$

Si es

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{w},$$

con $\boldsymbol{w} = \gamma\boldsymbol{v}$ entonces

$$E^2 = m^2\gamma^2 c^4 \qquad p^2 = m^2\gamma^2 v^2$$

y

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 \gamma^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2 c^2$$

y esta es la relación fundamental entre energía y momento

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2.$$

Para partículas con $m_0 = 0$ y $v = c$ será

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 \qquad\qquad p = \frac{h\nu}{c} = k\hbar.$$

La formulación hamiltoniana comenzará a partir de

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + m^2c^2}\, c,$$

sobre el que se puede operar para obtener el límite clásico (de bajas velocidades) como

$$\mathcal{H} = \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} mc^2$$

y si se cumple $p/(mc) \ll 1$ entonces

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m^2}$$

donde el último término es el hamiltoniano de la mecánica clásica para nuestra partícula libre.

El cuadrimomento se define como

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \boldsymbol{u}), \qquad \Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

o bien

$$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$$

siendo

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

el invariante asociado a la conservación (del cuadrimomento).

1.3.1 Partícula en un campo electromagnético

Dado que es de la mecánica clásica $\mathcal{L} = T - V$ la acción correspondiente la podemos expresar como

$$S = S_0 + S_inter = \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} V dt$$

es decir la suma de una parte libre y una de interacción. Luego

$$S^{NR}_{inter} = \int_{t_1}^{t_2} -e\phi dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{e\phi}{c} d(ct) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{eA^0}{c} dx^0$$

si usamos los cuadrivectores

$$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}) \qquad x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$$

y generalizamos

$$S_{inter} = -\frac{e}{c}\int_{x_1}^{x_2} A_\mu dx^\mu$$

tendremos

$$S_inter = \frac{e}{c}\int_{x_1}^{x_2} (\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x} - c\phi dt) = \frac{e}{c}\int_{x_1}^{x_2} (\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{v} - c\phi)\, dt$$

y finalmente el lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\phi$$

donde el primer término es el lagrangiano de partícula libre y la interacción viene luego. Esta lagrangiano no es invariante de medida; sin embargo no perjudica porque en las ecuaciones de movimiento sólo entran las derivadas del mismo. Recordemos además que $\mathcal{L}$ no es invariante relativista pero la acción S sí lo es.

Para construir el hamiltoniano necesitamos el momento conjugado,

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = m\gamma\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$$

y siguiendo la prescripción usual $\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} - \mathcal{L}$,

$$H = (m\gamma\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A})\boldsymbol{v} + mc^2(1-v^2/c^2)^{1/2} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} + e\phi = \\ m\gamma v^2 + e\phi + mc^2(1-v^2/c^2)^{1/2}$$

y

$$H = m\gamma v^2 + e\phi + \frac{mc^2}{\gamma}$$

de manera que el hamiltoniano en un campo es

$$H = m\gamma c^2 + e\phi$$

$$\boldsymbol{P} = m\gamma v + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \qquad H = m\gamma c^2 + e\boldsymbol{\phi}$$

y

$$\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = m^2\gamma^2 v^2 \qquad \left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 = m^2\gamma^2 c^2$$

$$\left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 - \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = mc^2,$$

con ustedes el invariante. Entonces el cuadrimomento de una partícula en un campo electromagnético, sometida a un potencial electromagnético es

$$p^\mu = \left(\frac{H - e\phi}{c}, \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \right)$$

que es un caso particular del xxxx.

Para el caso de H es

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})} + e\phi$$

y el no relativista

$$H^{nr} = mc^2(1 + \frac{1}{m^2c^2}(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2)^{1/2} + e\phi$$

usando la aproximación de baja velocidad,

$$H^{nr} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 + e\phi$$

donde tiro el término de reposo mc^2 y

$$H^{nr} \approx \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 + e\phi$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano electromagnético hallado se llega a

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\boldsymbol{v}) = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right)$$

qu es la fuerza de Lorentz con la corrección relativista. Es la misma expresión hallada otrora pero sin tener en cuanta la relatividad.

Si $\boldsymbol{E} = 0$ entonces

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \text{pues} \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

y el campo $\boldsymbol{B}$ sólo variará la dirección de $\boldsymbol{v}$, no su módulo. El radio de giro de una partícula ciclotrón es mayor con la aproximación relativista que con la newtoniana porque su inercia es mayor $\gamma > 1$. Planteamos

$$|\boldsymbol{F}| = evB$$

que desde el punto de vista relativista significa

$$evB = m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

mientras que clásicamente

$$m\frac{v^2}{r} = evB$$

y sale el radio de giro desde acá

$$r_B = \frac{m\gamma v}{eB} \qquad r_B^{nr} = \frac{mv}{eB}$$

y luego $r_B > r_B^{nr}$.

1.3.2 Cambio de gauge

El cambio de gauge es una transformación

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} f$$

entonces

$$A'0 = \phi - \partial^0 f \qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f$$

El cambio de gauge no es invariante pero $\delta S = 0$ sí es invariante. La cuadridensidad de fuerza de Lorentz

$$f^{\beta} = -\partial_{\alpha} T^{\alpha\beta}.$$

1.3.3 Especie de tiro oblicuo

La situación física es la depicted en la figura bajo estas líneas

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = e\boldsymbol{E} = \frac{}{t}(m\gamma\boldsymbol{v})$$

que lleva a un sistema hartocomplicado de resolver que es

$$\frac{dP_x}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2)/c^2}}\right) = eE$$
$$\frac{dP_y}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2)/c^2}}\right) = 0$$

Cualitativamente vemos que v_x crece a medida que ingresa en la zona de campo $\boldsymbol{E}$ entonces como v_y es constante se tiene que γ aumenta y aumenta la inercia de modo que disminuye $|\boldsymbol{v}|$ y describe aproximadamente una parábola.

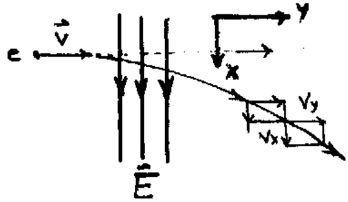


Figura 3.6

1.3.4 Cuadrivelocidad

$\boldsymbol{u}$ no transforma como cuadrivector (¿que u?), pero lo que sí transforma así es

$$W^{\mu} = (\Gamma c, \Gamma \boldsymbol{u})$$

donde $\Gamma \equiv 1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$. Luego tenemos la fórmula de Einstein de suma de velocidades, que tiene como límite a c,

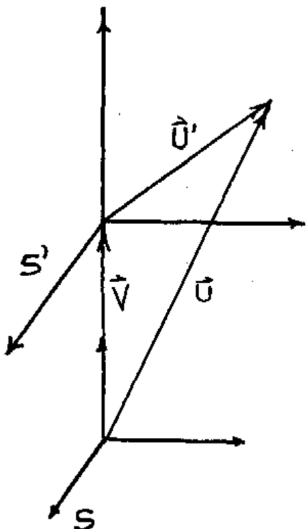


Figura 3.7

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}} \qquad u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}\right)}$$

De esta manera el cuadrimomento es

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \boldsymbol{u}) \qquad \Rightarrow \qquad mW^\mu = p^\mu.$$