

## Capítulo 1

---

# Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

## 1.1 Introducción a la formulación de Hamilton

Un sistema mecánico está caracterizado por  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  las cuales dan un estado posible del sistema, y además dan toda la información dinámica del mismo.

Ahora se describirá al sistema en términos de  $q_i, p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  que tiene la característica de producir una simetría en la mecánica así definida (la mecánica hamiltoniana). La simetría es tal que son intercambiables  $q_i$  y  $p_i$ .

Para las ecuaciones de movimiento se parte del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  tiene la misma información que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

Se puede hacer una analogía con la termodinámica, pues la primer ley se escribe

$$dE = dQ - dW = \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_V dS - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_S dV,$$

lo cual implica que usando  $S, V$  tengo como “potencial” a la energía. Un estado termodinámico se define por dos variables;  $(S, V), (T, P), (S, P), (T, V)$  que son cada par variables conjugadas.

Para definir estos potenciales se usan transformadas de Legendre. Así,

$$d(E - TS) = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT \equiv dA$$

siendo  $A$  la energía libre de Helmholtz.

$$d(E + PV) = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP \equiv dH$$

siendo  $H$  la entalpía.

En el caso del Hamiltoniano se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

la cual usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el hecho de que  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  es el momento conjugado  $p_i$  se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

y como esta ecuación es el diferencial total del hamiltoniano se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$$

siendo la última igualdad una derivación vista oportunamente. Asimismo,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \sum_i \dot{q}_i \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\sum_i \dot{p}_i$$

que son una mayor cantidad de ecuaciones pero de orden uno (comparando con las ecuaciones del sistema en el formalismo lagrangiano).

Con esto definimos un espacio de fases  $(p_i, q_i)$  de  $2N$  dimensiones para estudiar el movimiento de un sistema de partículas. En el caso particular de una única partícula tendremos dos variables,  $(p, q)$ .

### 1.1.1 La idea de Hamilton-Jacobi

La idea es que se busca una transformación canónica que me transporte a un hamiltoniano nuevo donde toda la solución son constantes. Es decir

$$H(q_i, p_i) \longrightarrow K(Q_i, P_i),$$

donde

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \quad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i \quad (1.1)$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos  $(\beta_i, \alpha_i)$  que son constantes. Aunque esto requiere conocer el problema (su solución). Esta transformación existe porque es ir atrás en el tiempo; la antievolución.

Supongamos una generatriz del tipo  $F_2 = S$ , llamada *función principal de Hamilton*

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \quad (1.2)$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

que es la condición necesaria para garantizar las condiciones (1.1). Esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE) al especializar  $H$  en las derivadas parciales

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

que son  $n + 1$  variables y  $n + 1$  constantes (una es trivial porque la ecuación (1.3) no depende de  $S$  sino de sus derivadas).

#### EJEMPLO 1.1 ejemplito

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

hay que resolverlo utilizando condiciones iniciales

$$H(q_i, p_i, t) \quad p_i(t = 0) \quad q_i(t = 0).$$

Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

Cuando la ecuación es separable se puede garantizar la solución de Hamilton-Jacobi. Si  $H = H(q_i, \alpha_i)$ , el hamiltoniano no depende del tiempo, entonces  $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$  y en ese caso es  $H = cte$ . (la energía). Se tiene

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

por lo tanto es separable en el tiempo. Entonces

$$S = W(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N) - Et,$$

donde  $W$  no depende del tiempo, que sólo aparece explícito en el segundo término. Luego

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

con lo cual

$$H \left( \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N \right) = E$$

y tengo un nuevo hamiltoniano que no vale cero sino que vale  $E$ . Pase a *un lugar* donde los momentos son constantes y las coordenadas son cíclicas.

$$E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

de manera que  $\partial E / \partial \alpha_N = a$  y luego,

$$Q = at + Q_0 \quad \text{las } Q \text{ son lineales}$$

Entonces,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q} = a \quad \text{una constante}$$

y

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q}.$$

Remarquemos que si fuera  $E = E(q)$  entonces  $\partial E / \partial q = \dot{\alpha}$  y no sería constante  $\alpha$ , pero  $E$  no depende de  $Q_i$ .

### EJEMPLO 1.2 Ejemplito de un grado de libertad

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad S = W - Et$$

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + V(q),$$

de modo que

$$\frac{dW}{dq} = \pm \sqrt{2m[E - V(q)]},$$

$$W(q, E) = \pm \int \sqrt{2m[E - V(q)]} dq - Et$$

Para un grado de libertad siempre tendrá esta forma.

Para más grados de libertad deberíamos poder separar alguna coordenada en igual forma. Si  $q_1$  no aparece, entonces la derivada del hamiltoniano  $H$  respecto a  $q_1$  dice que será constante el  $\dot{q}_1$ , es decir

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = \alpha_2 \quad \rightarrow \quad H \left( \alpha_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_2, \dots, q_N \right) = E.$$

Es más, si la  $S$  es totalmente separable de la forma

$$S(q_i, \alpha_0) = \sum_{i=1}^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N) - Et$$

lo cual, dicho sea de paso, requerirá  $N$  constantes de movimiento, entonces se puede resolver completamente.

[Lo que sigue es un refrito de lo anterior o viceversa; habría que consolidarlo] [...] y podemos poner  $H = \alpha_1$ . Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \rightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener  $S$ .

Podemos ver que si  $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$ , y me quedo con  $H = \alpha_1 \equiv K$  entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \rightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \rightarrow P_i = \alpha_i(\text{ctes}).$$

La  $\alpha_1$  no puede depender de  $q_i$  pues si se tuviera  $\partial \alpha_1 / \partial q_i \neq 0$  no sería constante  $\alpha_1$  pues  $\dot{q} \neq 0$ .

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1.2) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

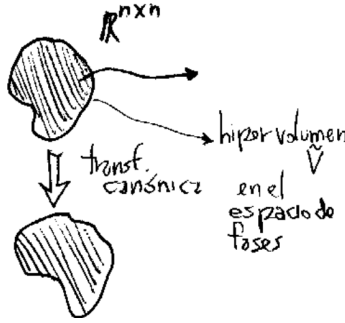


Figura 2.1

## 1.2 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen  $\mathcal{V}$  en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

que en otras coordenadas es

$$\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n dP_1 dP_2 \dots dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}.$$

El jacobiano de la transformación, que permite convertir una integral en la otra, es

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}$$

y puede verse que vale 1. En efecto, como vale una especie de *chain rule*

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{q_i=cte}}$$

El jacobiano en notación matricial es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces se puede ver que para el numerador es

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)$$

mientras que para el denominador,

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que  $J = 1$  y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma (se deforma la cáscara pero el volumen se conserva).

Usando  $|M| = |M^t|$  entonces se ve que vale uno el cociente de los jacobianos. Siempre y cuando sea la transformación canónica.

Son invariantes canónicos

$$\int \int \sum_{i=1}^N dq_i dp_i \quad \int \int \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N dq_i dp_i dq_j dp_j$$

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dp dq \quad A_{P,Q} = \int dP dQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1.$$

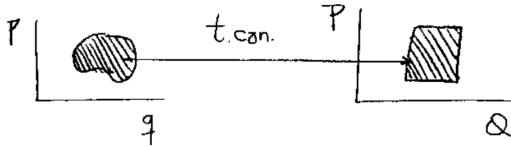


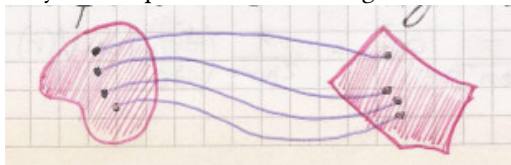
Figura 2.2

Notamos que el jacobiano en una transformación canónica para un sistema de un grado de libertad es el corchete de Poisson de  $Q, P$ , y además da uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

En la transformación, el número de puntos en  $p, q$  es el mismo en  $PQ$  pero la forma que adopta varía. Es como un líquido incompresible.

La transformación canónica cumple que, se parte de una punto a otro por una trayectoria que no corta con ninguna otra.



No confundir espacio de fases con espacio de configuración.

### 1.3 Variables ángulo-acción

Consideremos una transformación canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

la cual requiere

- Conservativos  $S = W - Et$
- Totalmente separables  $W = \sum_i^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Problemas periódicos

El movimiento periódico es de rotación o libración,

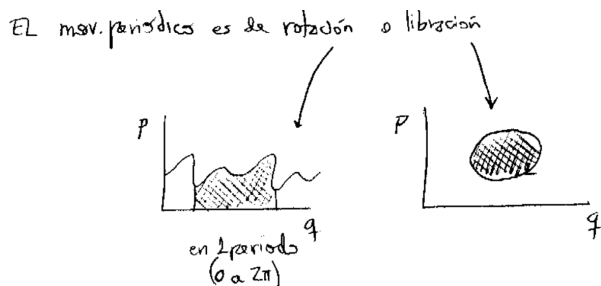


Figura 3.3

La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

$$S = \sum_i^N W_i(q_i, J_i) - Et$$



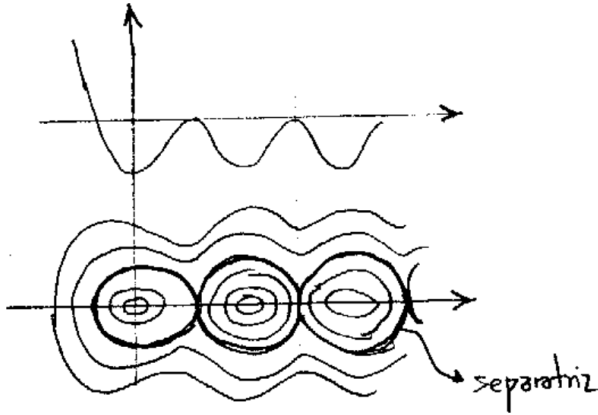


Figura 3.4

Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeñas perturbaciones.

La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{ciclo}} p_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

son constantes y a su vez los  $\alpha_i$  son constantes de separación. Asimismo  $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n)$ . La transformación  $S$  es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo  $p_i = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$ . El nuevo hamiltoniano es  $E = E(J_1, \dots, J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i$$

de manera que tenemos

$$\theta_i = \omega t + \theta_{0_i} \quad \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i)$$

y entonces despejamos las  $q_i$  desde

$$\theta_i(q_i, J_i) = \omega t + \theta_{0_i}.$$

Las condiciones iniciales  $(q_i, J_i)$  se introducen en

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$$

y obtengo las  $J_1, \dots, J_n$  constantes.

## 1.4 Transformación canónica infinitesimal

Difieren de la identidad en un infinitésimo

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i P_i$$

es la identidad

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i$$

y donde considero

$$F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) \quad \text{con } \epsilon \ll 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \longrightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \longrightarrow q_i = Q_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

donde  $\partial G / \partial P_i \approx \partial G / \partial p_i$  diferirán en un orden  $\epsilon^2$  el cual descarto. Entonces

$$\delta p_\ell = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_\ell} \quad \delta q_\ell = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_\ell}.$$

Si considero  $H$  en lugar de  $G$  y  $\epsilon = \delta t$  entonces

$$\frac{\delta p_\ell}{\delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \frac{\delta q_\ell}{\delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

de tal manera que

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \dot{q}_\ell = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

y donde se ve que el  $H$  genera la transformación evolución temporal. Por otra parte, se puede ver cómo varía una cierta cantidad  $A$  ante la transformación canónica.

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

y

$$\delta A = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \epsilon [A, H] \longrightarrow \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

entonces las constantes de movimiento generan transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante al hamiltoniano  $H$ . Si

$$\frac{dA}{dt} = 0 \implies [A, H] = 0$$

Consideremos una rotación infinitesimal. Una rotación en torno al eje  $z$

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \delta\alpha y_i \\ y'_i = y_i + \delta\alpha x_i \\ z'_i = z_i \end{cases}$$

que implica

$$\delta x_i = -\delta\alpha y_i \quad \delta y_i = \delta\alpha x_i \quad \delta z_i = 0$$

**Las constantes de movimiento están generadas por simetrías (Noether).**

Luego,

$$G = \sum_i (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}) = \ell_z$$

y una rotación en torno a  $\hat{n}$  es

$$\delta\alpha[A, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \delta A,$$

si  $A$  es un vector  $\mathbf{V}$  entonces

$$\delta\alpha[\mathbf{V}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \delta\mathbf{V} = \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{V},$$

de modo que

$$[\mathbf{V}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{V}$$

es una relación vectorial; es decir que valen

$$[V_x, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = (\mathbf{n} \times \mathbf{V})_x$$

y lo mismo para los componentes  $y, z$ . Además

$$[L_x, L_z] = (\hat{z} \times \mathbf{L})_z = -L_y$$

$$[L_y, L_z] = (\hat{z} \times \mathbf{L})_y = L_x$$

$$[L_x, L_y] = (\hat{y} \times \mathbf{L})_x = L_z$$

o bien

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si se repite índice} \\ 1 & \text{si es permutación cíclica} \\ -1 & \text{si es permutación anticíclica} \end{cases}$$

Esto nos dice que no podemos elegir como momentos estas constantes de movimiento puesto que el corchete de Poisson entre ellas es nulo. No va a existir transformación canónica donde  $p_1 = L_x, p_2 = L_y, p_3 = L_z$  pues su corchete de Poisson entre ellas no se anula.

## 1.5 Volviendo a Hamilton-Jacobi

$$H \left( \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t \right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

y se pasaba de coordenadas  $q, p$  a constantes  $\alpha, \beta$ .

Lo único que se puede asegurar son condiciones para hallar solución a (5.1) pero no resolverla. La condición es que (5.1) sea separable, que existan tantas constantes de movimiento como grados de libertad. Si el hamiltoniano tiene alguna coordenada cíclica o no depende del tiempo entonces se podría separar, pero en general no es el caso.

Podría suceder que

$$W = \sum_{i=1}^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

y entonces no podré llegar a una solución que se compone de problemas independientes en una variable.

En fuerzas centrales tenemos un ejemplo. Escribamos

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

y

$$W = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\varphi(\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

donde

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{dW_\varphi}{d\varphi} \right)^2 + V(r) = E \equiv \alpha_1$$

y siendo que  $E$  es una constante, la denominamos  $\alpha_1$ .

Luego, como en

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + V(r) - \alpha_1 \right] 2mr^2 \sin^2 \theta = - \left( \frac{dW_\varphi}{d\varphi} \right)^2$$

el miembro izquierdo sólo depende de  $r, \theta$  y el derecho de  $\varphi$  tienen que ser una constante ambos miembros.

Asimismo,

$$\frac{dW_\varphi}{d\varphi} = \alpha_2,$$

y  $W_\varphi = \alpha_2 \varphi$  porque  $\varphi$  es cíclica en fuerzas centrales. Es más,  $\alpha_s$  es el momento angular en  $z$  ( $L_z$ , que es constante). Entonces

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left[ \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 \right] + V(r) = \alpha_1,$$

donde el corchete será  $\alpha_3^2$ . Ahora puedo separar otra vez y surge  $\alpha_3^2$  que será el  $|\mathbf{L}|^2$  total. Las  $\alpha_i$  son constantes de separación. Si hubiese escrito con  $\theta = \pi/2$  entonces resultaba más detectable.

$$W(\theta) = \int \sqrt{\left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} \right)} d\theta$$

y luego

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \alpha_3^2 + V(r) = \alpha_1$$

al solucionar lo anterior

$$W_r = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_3^2/(2mr^2))} dr$$

y el nuevo hamiltoniano es  $K = \alpha_1$ . Entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_2 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_3} = 0 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_3 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_2 = t + \beta_{10}$$

Como

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_1}$$

se tiene

$$\beta_1 = \int \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_2^2/(2mr^2))}} dr,$$

que es igual a la ecuación ya calculada en el caso de fuerzas centrales.

La forma de separar también funciona si

$$V = V(r) + \frac{a(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{b(\theta)}{r^2},$$

es decir, si el  $V$  tiene una forma como la de arriba en coordenadas esféricas.

Consideremos unas coordenadas  $\xi, \eta, \varphi$  que se relacionan por

$$\rho = \xi\eta \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \quad \varphi = \varphi$$

donde  $\rho, z, \varphi$  son las polares cilíndricas usuales. Un potencial de la forma

$$\frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

en coordenadas parabólicas puede separarse.

En coordenadas elípticas

$$\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad z = \sigma \xi \eta \quad \varphi = \varphi$$

un potencial de la forma

$$V = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2}$$

puede separarse.

En cartesianas es

$$V(\mathbf{x}) = A(x) + B(y) + C(z)$$

condición suficiente de verificación para Hamilton-Jacobi. Si el potencial es separable entonces tengo tantas coordenadas como constantes de movimiento, entonces si tengo la solución [?].

### 1.5.1 Comentario Schrödinger

La ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t) + V(r)\Psi(\mathbf{x},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\mathbf{x},t).$$

Si ensayamos como solución

$$\Psi(\mathbf{x},t) = b(\mathbf{x},t) e^{iA(\mathbf{x},t)/\hbar},$$

se tendrá

$$bV(r) + \frac{b}{2m} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right] = -b\frac{\partial A}{\partial t}$$

o bien

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right] + V(r) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Ecuación de Hamilton-Jacobi (con igualar el orden cero)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{b}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( b^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial b^2}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Esto lleva a

$$\nabla \left( \rho \frac{\mathbf{p}}{m} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que es una ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad. De algún lado sacamos, por la situación estacionaria,

$$-\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) b,$$

que equivale a

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^{-1}$$

o bien a

$$\frac{d \log b}{dx} = \frac{d}{dx} \log \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^{-1/2} \right)$$

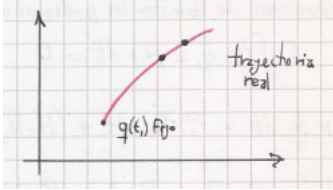
de modo que  $b = 1/\sqrt{p}$  siendo el  $p$  clásico.

### 1.5.2 Hamilton-Jacobi particular

Esto apareció en la práctica. Consideramos

$$S = \int \mathcal{L} dt,$$

donde  $S = S(q_0, t)$ . Pictóricamente



El diferencial de la integral resulta, como hemos visto en incontables ocasiones para Euler-Lagrange, en

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt.$$

Luego,  $\delta S = p_i \delta q_i$  y entonces  $p_i = dS/dq_i$ . Como  $\mathcal{L} = dS/dt$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \mathcal{L} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i$$

A partir de esta última, el diferencial  $d\mathcal{L}$  es

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + d(p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

de manera que

$$d(\mathcal{L} - p_i \dot{q}_i) = p_i dq_i - q_i dp_i$$

lo que nos lleva a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Entonces

$$S = \int (p_i \dot{q}_i - H) dt,$$



y pidiendo  $\delta S = 0$  se tiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{dH}{dp_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt$$

o bien

$$p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \left[ \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \frac{dH}{dp_i} - \dot{q}_i \right) \delta p_i \right]$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton las podemos obtener con

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \quad \delta \int (P_i \dot{Q}_i - H') dt = 0$$

y

$$dF_1 = p_i \dot{q}_i dt - P_i \dot{Q}_i dt + (H' - H) dt$$

$$dF(qq_i, Q_i, t) = P_i dq_i - P_i dQ_i + (H' - H) dt$$

y de la *lectura* de

$$dF_1 =$$

se identifican

$$\frac{dF_1}{dq_i} = p_i \quad \frac{dF_1}{dP_i} = -P_i.$$

De modo ídem se tiene

$$d(F_1 + P_i Q_i) = P_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H) dt$$

$(F_2(q_i, P_i, t))$  lo que lleva a

$$\frac{dF_2}{dq_i} = p_i \quad \frac{dF_2}{dP_i} = Q_i \quad \frac{dF_2}{dt} = H' - H.$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0$$

pero la derivada parcial en el argumento es  $p_i$ . La transformación  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i) = (\beta_i, \alpha_i)$  permite la escritura

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \alpha_i, t) = 0,$$

y  $S = S'(\alpha_i) + A$  donde los  $\alpha_i$  son  $n$  variables (dado que  $S$  aparece sólo derivada).

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

y entonces  $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$ . Ahora como los momentos y las coordenadas son constantes el problema es trivial pero la transformación es muy jodida.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \quad S = S(q_i, t)$$

en este caso  $\frac{dS}{dt} = -E$  y se tiene

$$S = W\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - Et.$$

## 1.6 Potencial electromagnético

Arranquemos por los momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{pero } si V \neq V(q) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces

$$U(q, \dot{q}) = e\phi - e/c \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{L} = T - e\phi + e/c \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = mV_x - (e/c)A_x.$$

Hacemos un cambio de gauge, en un potencial generalizado

$$U = e\Phi(\mathbf{x}, t) - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(t)$$

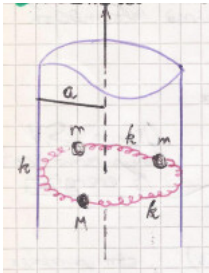
y el cambio de gauge es

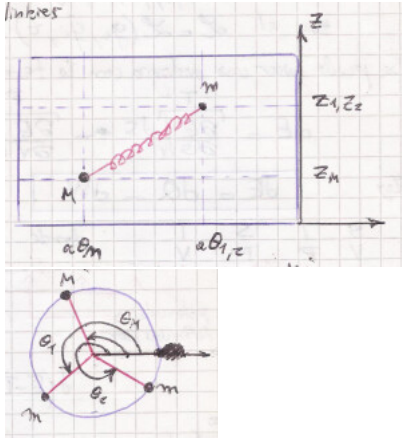
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

que no altera las ecuaciones de movimiento.

### EJEMPLO 6.1 Problema de parcial

El problema cuya geometría se ilustra a continuación. Se consideran  $m_1 = m_2 = m, m_3 = M$  y  $k$  slinkies.





Es claramente un problema de seis grados de libertad,  $\theta_M, \theta_1, \theta_2, Z_M, Z_1, Z_2$   
Podemos escribir la energía cinética y el potencial como

$$T = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}_M^2 + \frac{1}{2} M a^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} M \dot{Z}_M^2 + \frac{1}{2} m (\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} [a^2 (\theta_2 - \theta_M)^2 + (Z_2 - Z_M)^2] + \frac{1}{2} [a^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2] + \frac{1}{2} [a^2 (\theta_1 - \theta_M)^2 + (Z_1 - Z_M)^2]$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

Como ya está en forma cuadrática no es necesario aproximar. Si tenemos expresiones lineales habría que desarrollar a orden dos, por ejemplo  $\cos \theta \sim 1 - \theta^2/2$  y me quedo con los términos cuadráticos.

Definimos coordenadas referidas al equilibrio. Nos paramos en el equilibrio y oscilamos en torno a él.

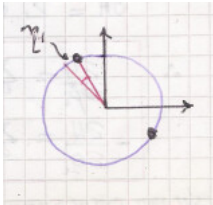
$$\eta_1 = (\theta_M - \theta_{eq}) \quad \eta_2 = (\theta_M - \theta_{1eq})a \quad \eta_3 = (\theta_2 - \theta_{2eq})a$$

$$\eta_4 = Z_M - Z_{Meq} \quad \eta_5 = Z_1 - Z_{1eq} \quad \eta_6 = Z_2 - Z_{2eq}$$

con sus correspondientes velocidades

$$\dot{\eta}_1 = a \dot{\theta}_M \quad \dot{\eta}_2 = a \dot{\theta}_1 \quad \dot{\eta}_3 = a \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\eta}_4 = \dot{Z}_M \quad \dot{\eta}_5 = \dot{Z}_1 \quad \dot{\eta}_6 = \dot{Z}_2$$



El lagrangiano será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\eta}_4^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_5^2 + \dot{\eta}_6^2)$$

$$- \frac{k}{2} [(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\eta_5 - \eta_4)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\eta_6 - \eta_4)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_5 - \eta_6)^2]$$

Habría que identificar los coeficientes para armar  $T$ ,  $V$  en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{e} \bar{a}^\dagger \mathbb{T} \dot{e} \bar{a} - \frac{1}{2} \dot{e} \bar{a}^\dagger \mathbb{V} \dot{e} \bar{a}$$

Como ejemplo, desarrollemos algún término

$$k(\eta_1 - \eta_2)^2 = k\eta_1\eta_2 - 2k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2 = k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2$$

Las matrices resultan

$$V = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k & 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & -k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

y como se ve ambas resultan en bloques de Jordan y son cada bloque igual. El  $a$  incluido en la coordenada hace que se obtenga esa forma simétrica. En

$$\det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T})$$

se reduce a calcular el determinante de la submatriz de  $3 \times 3$ ,

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 M & -k & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix}$$

que resulta en la ecuación

$$\omega^2 \left( \omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{2k}{M} + \frac{2k}{m} \right] + \left[ \frac{6k^2}{mM} + \frac{3k^2}{m^2} \right] \right) = 0,$$

que da

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{M} + \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$$

Para  $\omega^2 = 0$  la ecuación  $(V - \omega^2 T)A^1 = 0$  se verifica para

$$A^1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya normalización se ajusta con  $A^{\dagger 1} T A^1 = 1$  o bien

$$\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

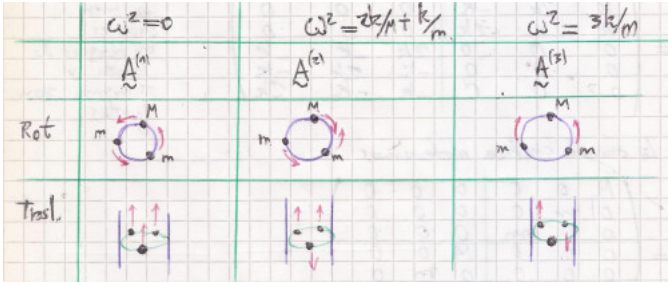
siendo el valor de  $\alpha$  dado por

$$\alpha^2 = \frac{1}{2m + M} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}.$$

Los autovectores son

$$A^1 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \frac{1}{\sqrt{4m^2/M+2m}} \begin{pmatrix} -2m/M \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los movimientos están dados por



Ahora hay que completar hasta la sexta dimensión

$$\bar{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_5 = \frac{1}{\sqrt{2m+4m^2/M}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2m/M \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

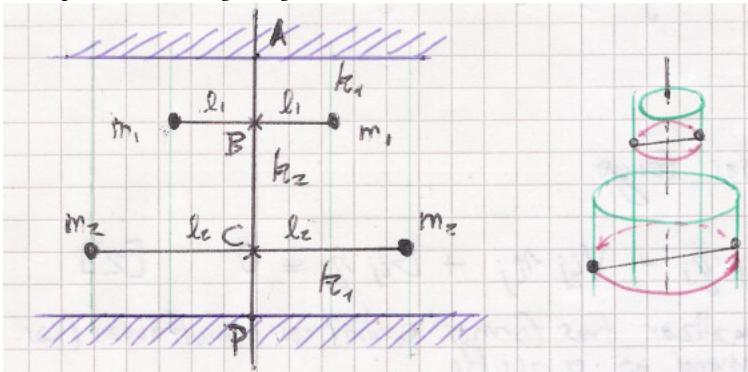
$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m+4m^2/M}} \begin{pmatrix} -2m/M \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_4 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_6 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, para desacoplar la solución habría que plantear la matriz

$$B = [\eta_1^\dagger \dots \eta_i^\dagger]$$

## EJEMPLO 6.2 Problema 12

El setup se ilustra en la figura siguiente.



El torque

$$\tau = -k\theta$$

lo suponemos un potencial  $V = 1/2k\theta^2$ , donde  $k$  tiene unidades de energía. Las barras solo rotan de manera que

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2)$$

donde estamos pensando como dos partículas. En cambio, pensándolo como una barra con momento de inercia es

$$T = \frac{1}{2}I\Omega^2$$

Entonces,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(2m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(2m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 \quad V_{12} = \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad V_2 = \frac{1}{2}k_1\theta_2^2$$

Definiendo  $\eta_i = \theta_i - \theta_{eq}$  que implican  $\dot{\eta}_i = \dot{\theta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) se puede escribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \ell_1^2 m_1 \dot{\eta}_1^2 + \ell_2^2 m_2 \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\eta_1^2 - \frac{1}{2}k_2\eta_2^2 - \frac{1}{2}k_2(\eta_2 - \eta_1)^2$$

de manera que

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\ell_1^2 m_1 & 0 \\ 0 & 2\ell_2^2 m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

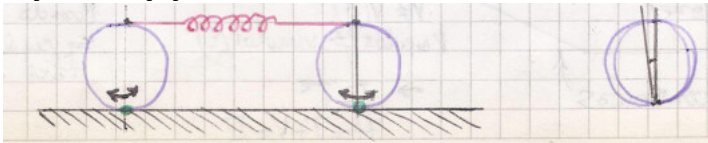
Faltaría entonces

$$\det\{\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\} = 0$$

y los autovectores  $A^1, A^2$ .

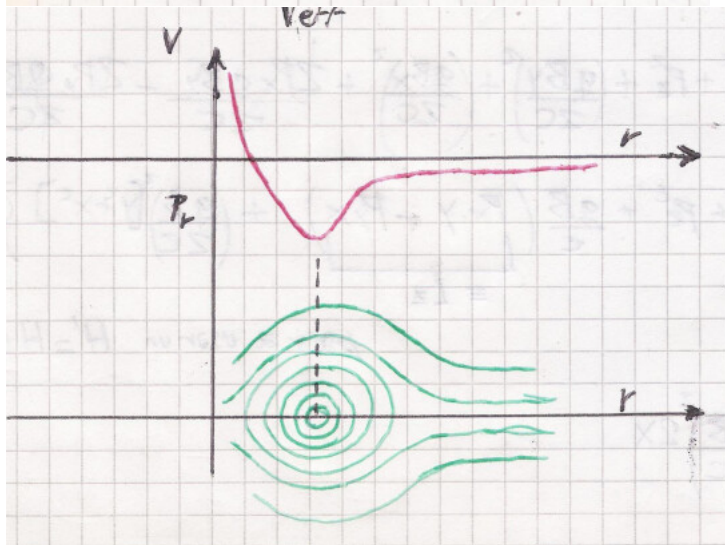
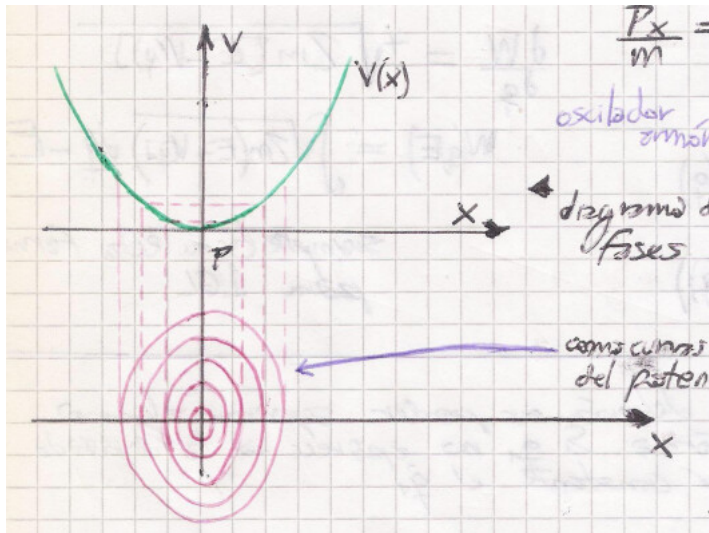
### EJEMPLO 6.3 Problema 8

Un problema de pequeñas oscilaciones.



En este ejemplo hay que suponer que el lagrangiano es ya de entrada de pequeñas oscilaciones.

### EJEMPLO 6.4 Problema 1 P96



EJEMPLO 6.5 Problema 8 P97