

---

# CURSO BÁSICO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 2: Física Teórica 1 [Electromagnetismo]

---

E.F. Lavia

versión 0.1

24 de julio de 2020

# Contenidos

<b>1 Conceptos fundamentales de electromagnetismo</b>	<b>1</b>
1.1 Electrostática . . . . .	2
1.1.1 Conservación de la carga . . . . .	3
1.2 Interacción magnética . . . . .	5
1.2.1 Fuerza de un circuito sobre otro . . . . .	6
1.3 Teorema de Helmholtz . . . . .	7
1.4 Ley de Gauss . . . . .	7
1.4.1 Gauges . . . . .	9
1.4.2 Delta de Dirac . . . . .	11
1.4.3 Vectores polares y axiales ante transformaciones . . . . .	12
1.5 El potencial vector . . . . .	16
1.6 Resolviendo problemas de potencial . . . . .	20
1.6.1 Unicidad de problemas de potencial . . . . .	20
<b>2 Teorema de Green</b>	<b>25</b>
2.1 Imágenes y método de Green . . . . .	25
2.1.1 El Método de Green . . . . .	25
2.2 Funciones de Green . . . . .	27
2.2.1 Función de Green libre . . . . .	28
2.2.2 Sobre el caso de Neumann . . . . .	29
2.2.3 Green para el problema externo de una esfera . . . . .	29
2.2.4 Algunos campos . . . . .	32
2.3 Condiciones de contorno para el campo eléctrico . . . . .	34
2.3.1 Carga puntual frente a esfera puesta a tierra . . . . .	36
2.3.2 Principio de superposición . . . . .	38
2.3.3 Condiciones de contorno para medios magnéticos . . . . .	40
2.4 Desarrollo multipolar . . . . .	41
2.5 Dipolo eléctrico . . . . .	44
2.5.1 Independencia del origen para el momento dipolar . . . . .	46
2.5.2 Momento cuadripolar de un elipsoide . . . . .	48

# CONTENIDOS

2

2.5.3	Interacción de un campo externo con una distribución de carga . . . . .	48
2.5.4	Capa dipolar . . . . .	53
2.5.5	Momento dipolar por unidad de volumen . . . . .	55
2.6	Desarrollo multipolar para el campo magnético . . . . .	60
2.6.1	Interpretación del momento magnético . . . . .	63
2.6.2	Interacción del campo magnético con una distribución de corriente . . . . .	64
2.7	Perturbación de un campo eléctrico uniforme por un conductor	69
<b>3</b>	<b>Método de separación de variables</b>	<b>73</b>
3.1	Separación en coordenadas cartesianas . . . . .	74
3.2	Separación en coordenadas esféricas . . . . .	80
3.3	Detalles sobre solución de problemas de potencial . . . . .	85
3.3.1	Desarrollo distancia entre puntos . . . . .	86
3.3.2	Prolongación analítica . . . . .	86
3.3.3	Comentario multipolos . . . . .	90
3.4	Armónicos esféricos . . . . .	93
3.4.1	Relación de los multipolos esféricos y los cartesianos . .	100
3.5	Separación de variables en cilíndricas . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Medios materiales</b>	<b>114</b>
4.1	Campos estáticos en medios materiales . . . . .	114
4.1.1	Magnetismo en la materia . . . . .	117
4.1.2	Imán permanente . . . . .	120
4.2	Polarización y magnetización de medios . . . . .	123
4.2.1	Desarrollo dipolar del campo magnético . . . . .	128
4.2.2	Campo externo sobre distribución . . . . .	129
4.3	Consideraciones energéticas . . . . .	130
4.3.1	Medios anisótropos . . . . .	132
4.4	Interpretación termodinámica de U . . . . .	133
4.4.1	Fuerza entre placas de un condensador . . . . .	134
4.5	Teorema de Thomson . . . . .	135
4.5.1	Teorema de Earnshaw . . . . .	136
4.6	Esfera con magnetización uniforme . . . . .	136
4.7	Histeresis . . . . .	137
4.7.1	Esfera ferromagnética en campo externo . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Fenómenos dependientes del tiempo</b>	<b>140</b>
5.1	Ley de Faraday e inducción . . . . .	140
5.1.1	Corrección a las ecuaciones . . . . .	141
5.1.2	Potenciales . . . . .	142

5.2	Conservación de la energía (teorema de Poynting) . . . . .	145
5.3	Conservación del momento. Tensor de Maxwell . . . . .	147
5.3.1	El tensor de Maxwell en acción . . . . .	153
5.3.2	Ejemplos del tensor de Maxwell . . . . .	154
5.4	Método cuasiestacionario . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Ondas planas</b>	<b>166</b>
6.0.1	Sobre complejos . . . . .	168
6.0.2	Poynting promedio y energías promedio . . . . .	169
6.1	Polarización de ondas . . . . .	170
6.1.1	El tensor de Maxwell para las ondas . . . . .	173
6.2	Reflexión y refracción de ondas en medios . . . . .	174
6.3	Corrientes en conductores . . . . .	183
6.4	Campo electromagnético en un medio conductor . . . . .	185
6.4.1	Algunos ejemplos y casos . . . . .	191
6.5	Desfasajes en los campos . . . . .	191
<b>7</b>	<b>Relatividad especial</b>	<b>201</b>
7.1	Transformación de vectores . . . . .	201
7.1.1	Transcurso del tiempo en un sistema con $V$ grande . . . . .	209
7.1.2	Efecto Doppler relativista . . . . .	211
7.2	Forma covariante del electromagnetismo . . . . .	214
7.2.1	Transformación de los campos . . . . .	217
7.2.2	Covarianza con medios materiales . . . . .	219
7.3	Principio de Hamilton y relatividad . . . . .	220
7.3.1	Principio de Hamilton e interacción electromagnética . . . . .	226
7.3.2	Partícula en un campo electromagnético . . . . .	228
7.3.3	Cambio de gauge . . . . .	231
7.3.4	Especie de tiro oblicuo . . . . .	231
7.3.5	Cuadrivelocidad . . . . .	232
<b>8</b>	<b>Campos de cargas en movimiento</b>	<b>237</b>
8.1	Potenciales retardados . . . . .	237
8.1.1	Fuente armónica . . . . .	240
8.1.2	Radiación a orden $\ell = 1$ . . . . .	244
8.1.3	Ejemplo de antena . . . . .	244
8.2	Campos de una partícula cargada en movimiento . . . . .	247
8.3	Campo de una carga en movimiento . . . . .	249
8.4	Cálculo de potencia irradiada . . . . .	250
8.5	Frenado magnético . . . . .	252
8.5.1	Esponja electromagnética . . . . .	253

<b>A</b>	<b>Delta de Dirac</b>	<b>254</b>
<b>B</b>	<b>Coordenadas esféricas y cilíndricas</b>	<b>255</b>
<b>C</b>	<b>Rejunte</b>	<b>257</b>

## Capítulo 1

---

# Conceptos fundamentales de electromagnetismo

La idea del curso es resolver las ecuaciones que describen matemáticamente el comportamiento clásico de los campos electromagnéticos, es decir las ecuaciones de Maxwell, en diversas situaciones. Luego, la conexión con la fuerza que experimentarán las partículas cargadas por la acción de dichos campos vendrá descrita por la fuerza de Lorentz.

Panorámicamente, lo dicho corresponde a trabajar con el set de ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_\ell & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\ell + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\end{aligned}$$

las cuales permiten determinar a los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  a partir de la densidad de carga  $\rho$  y de corriente  $\mathbf{J}$  (notemos que también los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  influyen en el comportamiento de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$ ). Finalmente, la fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula de carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  es

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Crudamente podemos decir que de esto trata el electromagnetismo clásico. Las ecuaciones de Maxwell son lineales, de modo que vale la superposición aunque los campos tienen en sí matemáticamente naturaleza diferente. Los campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  don ejemplos de vectores polares (aquellos que tienen bien definido el sentido, como la fuerza, la posición y la velocidad) mientras que  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  son

ejemplos de vectores axiales, que por el contrario tienen su sentido definido por una convención, como por ejemplo las velocidades angulares.

De acuerdo con ello, el carácter de vector axial o polar tiene consecuencias en la transformación de los mismos. Las transformaciones que se considerarán serán rotaciones, reflexiones espaciales y reflexiones temporales. Las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes ante estas transformaciones.

El resto del capítulo recorrerá lo que es la construcción usual del electromagnetismo; primeramente considerar situaciones estáticas, independientes del tiempo, lo cual hace que aparezcan como fenómenos independientes la electricidad y el magnetismo y luego repasar someramente algunas propiedades matemáticas útiles para el formalismo.

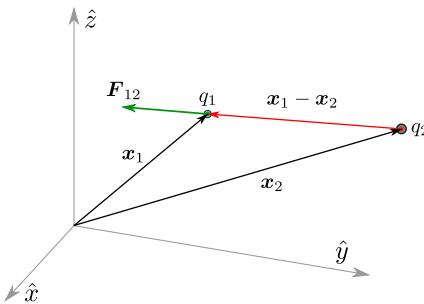
**Si multiplico vectorialmente dos vectores polares obtengo un vector axial.**

## 1.1 Electrostática

La ley de Coulomb establece que

$$\mathbf{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

es la fuerza sobre la partícula en  $\mathbf{x}_1$  debido a la partícula en  $\mathbf{x}_2$ . La constante  $k$  está para ajustar las unidades. En sistema gaussiano es  $k = 1$  y adimensional. La Figura 1.1 ilustra la situación para el caso en que ambas cargas tienen igual signo; en ese caso la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  tiene la dirección del vector  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ : apunta desde la fuente hacia el punto donde se evalúa.



**Figura 1.1** Fuerza sobre la carga  $q_1$  debida a la carga  $q_2$ .

Cuando la carga  $q_1$  es suficientemente pequeña como para no perturbar a la carga  $q_2$  que origina la fuerza, se puede utilizar la ley de Coulomb para definir

el campo eléctrico según

$$\mathbf{E}_{12}(\mathbf{x}_1) \equiv \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_1}.$$

Para una distribución discreta de  $N$  cargas  $q_i$  y tomando  $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}$  se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}.$$

En el límite en que las cargas están lo suficientemente próximas como para considerar que forman se tiene una distribución de carga de volumen  $\rho(\mathbf{x})$ , la expresión del campo adopta la forma de una integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

donde  $V'$  es el volumen de integración. En general  $\mathbf{x}$  es el llamdo punto campo y  $\mathbf{x}'$  punto fuente.

### 1.1.1 Conservación de la carga

Aceptaremos el principio de conservación de la carga; la carga eléctrica no se genera ni se destruye. Considerando una región  $\Omega$  en el espacio (cuya frontera está fija) la carga total encerrada en la misma es

$$Q(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}', t) d\Omega,$$

siendo su variación temporal

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} d\Omega,$$

donde la derivada total se transforma en una derivada parcial debido a que el volumen es fijo.

La conservación de la carga nos dice que como la carga no aparece ni desaparece mágicamente, entonces la variación de la carga contenida en  $\Omega$  en cualquier instante de tiempo se debe al flujo neto de carga de la misma; es decir a la diferencia entre la que abandona la región y aquella que entra. Como ilustra esquemáticamente la Figura 1.2, la variación de carga  $\Delta Q$  en un dado  $\Delta t$  corresponde a la diferencia entre las entrantes y las salientes.

La forma que tiene ese flujo se construye a partir del análisis ilustrado en el inserto de la figura. Allí se ve un elemento pequeño  $\delta\Omega$  que linda con la frontera

**Acá creo que la derivada debería ser la parcial desde el vamos. Check!**

de la región. Este elemento  $\delta V$  es lo suficientemente pequeño como para que en su interior el campo de velocidad de las cargas sea constante. La *caja*  $\delta V$  tiene un volumen que se puede expresar  $\ell \delta S$  (longitud de la caja por área de la base). La longitud  $\ell$  se elige como  $\ell = v_n \delta t$ , donde  $v_n$  es la componente de la velocidad normal a la superficie. Así elegido, el volumen  $\delta V = v_n \delta t \delta S$  representa el volumen que pasaría a través de  $\delta S$  en el tiempo  $\delta t$ . En efecto, la partícula más lejana del borde  $\delta S$  que está a distancia  $\ell$  recorrerá en  $\delta t$  justamente esa distancia (la velocidad  $v$  es constante para todo el elemento). Si la velocidad estuviese orientada hacia adentro, entonces tendríamos un bloque similar de carga entrante, y el razonamiento es el mismo.

La cantidad de carga  $\delta Q$  que atraviesa el área  $\delta S$  será entonces

$$\delta Q = \rho \delta V = \rho v_n \delta S \delta t = \rho \mathbf{v} \cdot (\hat{n} \delta S) \delta t$$

donde se ha expandido la velocidad normal. Entonces la variación de la carga en el elemento es

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot (\hat{n} \delta S).$$

Si el producto escalar entre la velocidad y la normal es positivo entonces esto significa que la carga abandona la superficie mientras que el caso contrario implica carga entrando en la misma. Entonces debemos ajustar la expresión anterior con un signo menos. Entonces, pasando al continuo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

donde  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  es el vector densidad de corriente y  $d\mathbf{S} = \hat{n} dS$  es el diferencial de superficie vectorial.

Entonces, juntando las dos expresiones para la carga tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

y aplicando el teorema de la divergencia en el miembro derecho

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} d\Omega,$$

o bien

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right] d\Omega = 0,$$

y como esto vale para cualquier volumen  $\Omega$  se sigue que el corchete debe ser nulo, de modo que se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

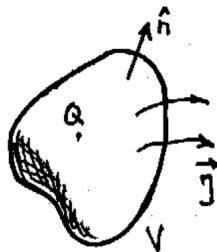


Figura 1.2

que es la ecuación de continuidad de la carga.

Si es  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  no se acumula carga; las líneas de  $\mathbf{J}$  no tienen principio ni fin. Los problemas de corrientes estacionarias cumplen esta condición. Esta condición en la ecuación de continuidad nos dice que la distribución de carga no varía con el tiempo.

Si fuera  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  esto significa que las líneas de  $\mathbf{J}$  no tienen principio ni fin. Check!

## 1.2 Interacción magnética

Cuando se da  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  hablamos de una corriente estacionaria (no hay acumulación de carga en ninguna parte). Las corrientes estacionarias producen efectos magnéticos dados por la ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \frac{Id\ell' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

que es válida para un circuito  $\Gamma$ , que es una curva –lineal– que se recorre en sentido positivo (CCW). Si no puede despreciarse el espesor de un circuito, hay que considerar una integral de volumen y la expresión es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'.$$

Luego, la fuerza sobre un circuito lineal  $\Gamma$  es

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma} Id\ell \times \mathbf{B},$$

mientras que para un volumen se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV.$$

La expresión del torque es

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV.$$

La transformación entre estas integrales puede hacerse merced al siguiente razonamiento,

$$\begin{aligned} Id\ell \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} d\ell \times \mathbf{B} = \cos(\theta) dS \mathbf{J} d\ell \times \mathbf{B} = \\ \mathbf{J} \times \mathbf{B} \cos(\theta) dS d\ell &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\mathbf{S} \cdot d\ell = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \end{aligned}$$

### 1.2.1 Fuerza de un circuito sobre otro

La fuerza ejercida por el campo magnético de un circuito 2 sobre otro circuito 1 puede calcularse con un poco de paciencia como sigue

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{c} \int_{\Gamma_1} I_1 d\ell_1 \times \left\{ \frac{1}{c} \int_{\Gamma_2} \frac{I_2 d\ell_2 \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \right\} \\ F_{12} &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} d\ell_1 \times \left\{ \frac{d\ell_2 \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \right\}, \end{aligned}$$

y utilizando una identidad vectorial,

$$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} d\ell_2 \left\{ \frac{d\ell_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \right\} - \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \{d\ell_1 \cdot d\ell_2\}$$

Luego, se puede reescribir el primer término notando que

$$\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} = \nabla_{\mathbf{x}_2} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} = -\nabla_{\mathbf{x}_1} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \quad (2.1)$$

de manera que la primer integral resulta

$$-\int_{\Gamma_2} d\ell_2 \int_{\Gamma_1} d\ell_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|},$$

la cual es nula porque se está integrando un gradiente en una curva cerrada.

Entonces, se tiene

$$F_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (d\ell_1 \cdot d\ell_2)$$

que vale lo mismo si intercambiamos  $\Gamma_1$  con  $\Gamma_2$  en la integración, lo cual implica que la fuerza sobre un circuito debido a otro es igual a la fuerza sobre este último debida al primero. Esto quiere decir que vale el principio de acción y reacción en el caso de corrientes estacionarias. Si las corrientes no son estacionarias no se tendrá, en general, este resultado. Con corrientes no estacionarias se generará campo electromagnético y habrá emisión de radiación.

### 1.3 Teorema de Helmholtz

Nos dice que un campo vectorial está completamente determinado por su divergencia y su rotor. Por ejemplo, para un campo eléctrico se tiene

$$\mathbf{E} = \int_{V'} \rho \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = - \int_{V'} \rho \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = - \nabla_{\mathbf{x}} \int_{V'} \frac{\rho}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' =$$

donde la integral que ha resultado dentro del gradiente es la integral de Poisson. Entonces,

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}),$$

de modo que  $\mathbf{E}$  es un gradiente y por ello

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Esta última condición implica que el campo electrostático  $\mathbf{E}$  es conservativo, cumple  $\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$ , o lo que es lo mismo,  $\mathbf{E}$  es irrotacional. Hemos hecho la construcción de un potencial electrostático.

Para el curso de indicial:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

### 1.4 Ley de Gauss

La idea es considerar el campo ejercido por una carga puntual  $q$  en un punto de una superficie  $S \equiv \partial\Omega$ , como se ilustra en la Figura 4.3.

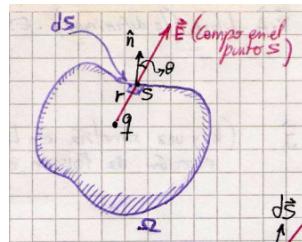


Figura 4.3

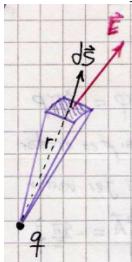
El campo en el punto verifica

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} = q \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

y teniendo en cuenta el diferencial de superficie  $dS$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = q \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS$$

donde el factor  $\cos \theta dS/r^2$  es el ángulo sólido subtendido por  $dS$  desde el punto donde se halla  $q$



Podemos escribir

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = q d\Omega$$

donde  $d\Omega$  es el diferencial de ángulo sólido. Integrando para todo el volumen

$$\int_{S \equiv \partial V} \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = q \int_S d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{carga exterior} \\ 4\pi & \text{carga interior} \end{cases}$$

y la integral es nula si la carga es exterior a  $S$  o  $4\pi$  si es interior, En el caso de una cantidad de cargas internas se tendrá, evidentemente,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi \sum_i q_i.$$

Este hecho se conoce como La ley de Gauss y se expresa

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi Q_n,$$

donde  $Q_n$  es la carga neta dentro de la superficie  $S$ . Al continuo pasa como

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi \int_V \rho dV,$$

de manera que usando el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V 4\pi \rho dV,$$

o bien

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho.$$

Lo que es vital en todo este razonamiento es el hecho de que el campo decaya como  $1/r^2$ . Luego, alguna 'ley de Gauss' podrá aplicarse a cualquier campo con ese tipo de decaimiento.

Por otro lado si  $\mathbf{E}$  es el gradiente de un potencial  $\phi$  la divergencia del campo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

conduce a la ecuación de Poisson para el potencial electrostático,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho,$$

cuyo caso particular en el caso  $\rho = 0$

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

constituye la ecuación de Laplace.

Matemáticamente esto significa que la solución de la ecuación no homogénea (Poisson) es suma de una solución del homogéneo (Laplace) más una solución particular. La carga en el volumen está relacionada con la solución particular.

Por supuesto para resolver cualquiera de estas ecuaciones hace falta dar las correspondientes condiciones de contorno. Usualmente serán de dos tipos: Dirichlet (valor del potencial en la superficie) o Newmann (valor de la derivada normal del potencial sobre la superficie).

### 1.4.1 Gauges

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  entonces existe un  $\mathbf{A}$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

pero para caracterizar totalmente el  $\mathbf{A}$  tengo la libertad de definir a conveniencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{"el gauge".}$$

Casos particulares importantes son el gauge de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

de manera que como

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

se llega para el potencial electromagnético, bajo el gauge de Coulomb, a que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Electrostática	Magnetostática
$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 ^3}$	$d\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \frac{I_1 d\ell_1 \times J_2 d\ell_2 \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 ^3}$
$\mathbf{E} = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} dV'$	$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' ^3} dV'$
Ley de Gauss	Ley de Ampere
$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_n$	$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_c$
Ecuaciones electrostáticas	Ecuaciones magnetostáticas
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$
$\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

**Tabla 1.1** Recetario de ecuaciones básicas para la electrostática y la magnetostática.

La operación de tomar rotor y el producto vectorial cambian el carácter de los vectores: de polares pasan a axiales y viceversa.

El laplaciano es la divergencia del gradiente, dos operaciones que no cambian el carácter de un vector. Luego, el laplaciano preserva la simetría.

La fuerza general sobre una distribución de carga es

$$\mathbf{F} = \int_{V'} \rho \mathbf{E} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV'.$$

Estos comentarios sobre vectores irán en el apéndice matemático vectorial.

A partir de la tabla hay mucho para mencionar. Por ejemplo, el hecho de la separación total de fenómenos, que la fuerza magnética es una diferencial (no hay cargas puntuales magnéticas), que el potencial en un caso es escalar mientras que en el otro es vectorial, etc.

### 1.4.2 Delta de Dirac

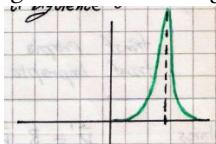
Una densidad de carga puntual se puede escribir mediante una delta de Dirac de acuerdo a

$$\rho(\mathbf{x}') = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \infty & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \end{cases}$$

siendo las dimensiones de la delta las de  $1/L^3$  y cumpliéndose

$$\int_{V'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = 1.$$

La delta de Dirac se puede aproximar con ciertas funciones matemáticas con gráficas como el siguiente



La delta de Dirac cumple las siguientes propiedades

$$\int f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)$$

$$\int f(\mathbf{x}) \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = -f'(\mathbf{x}_0)$$

$$\int f(\mathbf{x}) \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = (-1)^n f^n(\mathbf{x}_0)$$

$$\delta[f(\mathbf{x})] = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|f'(\mathbf{x}_0)|} \quad f(\mathbf{x}_0) = 0$$

En coordenadas cartesianas es

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0)$$

y para curvilíneas, como el elemento diferencial y el de volumen son

$$d\mathbf{x} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3 \quad dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

se tiene

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \delta(q_3 - q'_3)$$

donde  $q_1, q_2$  y  $q_3$  son coordenadas curvilíneas generales y  $h_1 h_2 h_3$  es el jacobiano de la transformación. Puntualmente para coordenadas esféricas se tiene

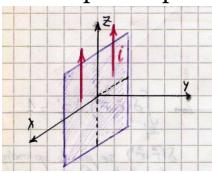
$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

donde no está definido para  $\theta = 0$ . Si  $r_0 = 0$  entonces se tiene

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

que involucra un factor de normalización.

Para un casquete esférico se tendrá  $\rho(\mathbf{x}) = \sigma \delta(r - R)$  y para una corriente circulando por un plano como ilustra la figura



se tiene  $\mathbf{J} = g \delta(y) \hat{z}$ . Estas deltas, al ser unidimensionales tienen unidades de  $1/L^{-1}$  de manera que las otras unidades serán llevadas por  $\sigma$  y  $g$ .

### 1.4.3 Vectores polares y axiales ante transformaciones

Las transformaciones propias son aquellas con determinante 1 y las impropias las que tienen determinante distinto de 1. Entonces, para un vector polar  $\mathbf{p}$  y siendo  $R$  la matriz de la transformación y  $|R|$  su determinante, se tiene

$$\mathbf{p}' = R \mathbf{p},$$

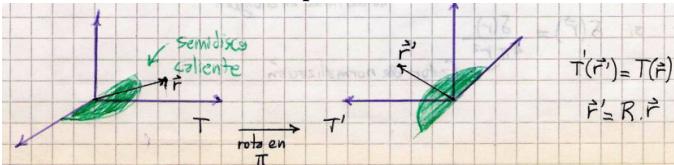
mientras que para un vector axial  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}' = |R| R \mathbf{a}.$$

Aquí se ve que ante una transformación propia ambos vectores transforman igual pero ante una impropia hay un cambio asociado al determinante.

Un vector polar sufre reflexión especular mientras que un vector axial (*pseudovector*) sufre una antireflexión especular. Ver la figura.

Para un campo escalar, como podría ser la temperatura  $T(\mathbf{x})$  una rotación deja invariante el valor del campo





**Figura 4.4** A la izquierda está el comportamiento polar mientras que a la derecha se halla el comportamiento axial.

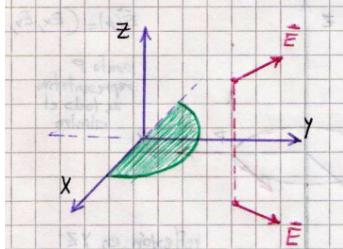
En el caso de un campo vectorial



se ve que

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}') = R\mathbf{E}(R\mathbf{x}).$$

En el caso de una simetría por reflexión como la de la figura



el campo en una situación simétrica cumplirá

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}') = R\mathbf{V}(\mathbf{x})$$

mientras que un campo escalar sería  $T(\mathbf{x}') = T(\mathbf{x})$ .

#### EJEMPLO 4.1 Ejemplo de problema simétrico (eléctrico)

Consideremos un plano infinito cargado con una densidad de carga  $\sigma$ , según se ve en la figura bajo estas líneas. La idea es que el campo en un punto  $P$  será

$$\mathbf{E}(P) = (E_x, E_y, E_z),$$

es decir que en principio tendrá los tres componentes.



Del otro lado del plano la situación es la misma de manera que se tiene una simetría de reflexión en  $xz$ . La matriz de una reflexión es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces se tienen las relaciones (compruébese en la figura)

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = -E_y, \quad E'_z = E_z. \quad (4.1)$$

Luego, otra simetría es sencillamente rotar el plano un ángulo  $\pi$  en torno a  $\hat{z}$ , y esta rotación será

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que implica

$$E'_x = -E_x, \quad E'_y = -E_y, \quad E'_z = E_z. \quad (4.2)$$

Como ambas simetrías conllevan a la misma situación física, deben ser ciertas las relaciones (4.1) y (4.2) de modo que como  $E_x = -E_x$  se debe cumplir que  $E_x = 0$ .

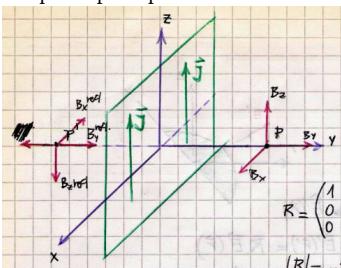
Se puede hacer el mismo razonamiento para la simetría de reflexión en torno a  $xy$  puesto que dicho plano separa dos semiespacios espectralmente idénticos. En este caso como  $P$  se halla sobre dicho plano basta una rotación en un ángulo de  $2\pi$ , que deja el campo en el mismo sitio para obtener la relación  $E_z = -E_z$  lo cual implica que  $\mathbf{E} = E_y \hat{y}$ .

#### EJEMPLO 4.2 Ejemplo de problema simétrico (magnético)

Consideremos un plano infinito por el cual circula una corriente cuya densidad de corriente  $\mathbf{J}$  está mostrada en la figura bajo estas líneas. La idea es que el campo magnético  $\mathbf{B}$  en un punto  $P$  será

$$\mathbf{B}(P) = (B_x, B_y, B_z),$$

es decir que en principio tendrá los tres componentes.



Dado que este campo es un pseudovector, debe reflejarse *mal* en el plano, como se ilustra en la figura. La reflexión en el plano  $xz$  lleva a

$$B'_x = -B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = -B_z, \quad (4.3)$$

**poner matriz de rotación en apéndice**

que proviene de la matriz de reflexión  $R$  del caso anterior (es la misma porque giramos en el mismo sentido el mismo plano) a la cual se le ha multiplicado el determinante  $|R| = -1$  de la misma puesto que el campo  $\mathbf{B}$  es un pseudovector.

La rotación en torno a un ángulo  $\pi$  del plano es también una simetría, representada por la misma matriz de rotación  $R$  del ejemplo anterior por lo cual se tendrán

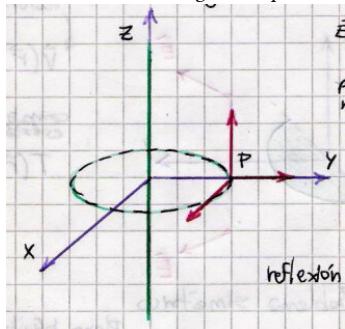
$$B'_x = -B_x, \quad B'_y = -B_y, \quad B'_z = B_z, \quad (4.4)$$

de lo cual se deduce que  $B_y = B_z = 0$ . El campo magnético sólo puede tener componente en  $\hat{x}$ , es decir que se escribirá como  $\mathbf{B} = B_x \hat{x}$ . Este hecho también puede deducirse cualitativamente utilizando la regla de la mano derecha.

#### EJEMPLO 4.3 Hilo cargado e hilo con corriente

Consideraremos ahora dos situaciones geométricas idénticas (un hilo infinito) pero en primer lugar el caso en que está cargado uniformemente y en segundo lugar el caso en que por el mismo circula una corriente estacionaria  $i$ .

En el caso del hilo cargado se quiere determinar las simetrías del campo  $\mathbf{E}$  en un punto  $\mathbf{P}$ ,



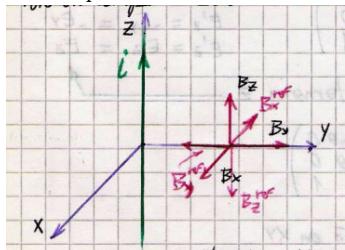
El punto  $\mathbf{P}$  es representativo de todo el cilindro. La simetría de reflexión en  $xy$  no hace que el punto cambie ( $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$ ) pero el campo debe reflejarse, de lo cual se tiene

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = E_y, \quad E'_z = -E_z.$$

Luego, la rotación en ángulo  $2\pi$  implica que  $E_z = -E_z$  y por ende el componente  $z$  debe ser nulo.

Por otra parte, la simetría de reflexión en  $yz$  de igual manera lleva a  $E_x = -E_x$  de forma que el campo  $\mathbf{E}$  de un hilo cargado solo tendrá componentes en  $\hat{y}$ .

En el caso del hilo con una corriente que circula por el mismo se debe notar que ahora la corriente tiene dirección con lo cual la simetría de reflexión en  $xy$  se verifica si incorporamos un signo menos que dé cuenta del cambio en la dirección de la corriente



Entonces por una parte tenemos la reflexión que, luego del añadido del signo extra, da las igualdades

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = -B_z,$$

que al combinarse con las que resultan de que los puntos son el mismo  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  (o digamos que giramos en ángulo  $2\pi$ ) resultan en que  $B_z = -B_z$  y por ende  $B_z$  es nulo.

La reflexión en  $yz$  no requiere el signo menos extra por el cambio de la corriente, así que da sencillamente

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = -B_y, \quad B'_z = -B_z,$$

y luego la igualdad de puntos establece

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = B_z,$$

de modo que, igualando ambas expresiones, tiene que ser  $B_y = B_z = 0$ . Entonces el campo  $\mathbf{B}$  sólo tiene componentes en  $\hat{x}$ , es un campo anular.

Como se vió en el ejemplo anterior, una reflexión más una rotación permite eliminar componentes de campo.

Una simetría más una rotación-traslación permite eliminar dependencias.

Lo primero que debe hacerse es escribir bien la  $\mathbf{J}$  a partir del dato de la corriente (que es el que se suele tener) mediante

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

En cambio, para  $\mathbf{A}$  es más fácil usar

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y despejar de aquí la ecuación diferencial que emplear

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

## 1.5 El potencial vector

Por la ley de Biot y Savart, el campo  $\mathbf{B}$  debido a una densidad de corriente en un volumen puede obtenerse a partir de

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'. \quad (5.1)$$

Utilizando la identidad de (2.1), con el gradiente respecto del punto campo, y la identidad vectorial

$$\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \phi$$

la expresión (5.1) para el campo magnético resulta en

$$\mathbf{B} = \nabla_x \times \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

**En estos ejemplos creo que es más beneficiosa la notación de la carpeta, ecuaciones ‘triples’.**

de modo que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (5.2)$$

pero como el potencial vector se define a menos del gradiente de un escalar, resulta

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \nabla\psi$$

es tan buen potencial vector como  $\mathbf{A}$  puesto que los rotores verifican  $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$ , de lo cual extraemos en conclusión que el potencial vector está definido a menos del gradiente de una función escalar.

Cada componente de  $\mathbf{A}$  en el caso de que  $\nabla\psi = 0$  puede verse como una integral de Poisson.

Ahora bien, si se toma el rotor del campo  $\mathbf{B}$ , lo cual es tomar el rotor de  $\mathbf{A}$ , se tiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \left( \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \right)$$

y usando la identidad del rotor de un rotor (ver apéndices XXX) resulta descompuesto en dos términos de acuerdo a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \left( \nabla \cdot \left[ \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \right] \right) - \nabla^2 \left( \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \right),$$

el gradiente de una divergencia y el laplaciano de un vector. Trabajaremos cada uno de ellos por separado.

Dado que la divergencia es con respecto a las coordenadas de  $\mathbf{x}$  y la integración es con respecto a las coordenadas  $\mathbf{x}'$  puede introducirse la misma bajo el signo integral y entonces

$$I_1 = \frac{1}{c} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla \cdot \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' = -\frac{1}{c} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla' \cdot \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV'$$

donde la última igualdad se debe al cambio de las coordenadas contra las cuales se deriva. Ahora notando la siguiente expresión para la divergencia del integrando en el potencial vector,

$$\nabla' \cdot \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

Considerando que  $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ , lo cual se verifica si la corriente es estacionaria se tiene

$$I_1 = -\frac{1}{c} \int_{V'} \nabla' \cdot \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV'$$

**Reacomodar estas cosas.**

expresión a la cual se puede aplicar el teorema de la divergencia en una superficie  $S' = \partial V'$  que englobe completamente a la distribución de corrientes dada por  $\mathbf{J}$  (y esto siempre se puede hacer si  $\mathbf{J}$  está acotada) resultando en

$$I_1 = \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \hat{n} dS' = 0.$$

El segundo término es

$$I_2 = \nabla^2 \left( \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \right)$$

donde el laplaciano, por la misma razón, también puede ser llevado dentro de la integral lo cual resulta en

$$I_2 = \frac{1}{c} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' = \frac{4\pi}{c} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV',$$

luego de utilizar el valor del laplaciano de la diferencia entre puntos campo y fuente. La integral es nula salvo en el caso en el cual el punto  $\mathbf{x}$  se halle dentro de  $V'$ , lo cual suponemos que es cierto obteniéndose entonces

$$I_2 = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}).$$

Juntando todos los resultados de estas excursiones, arribamos a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}).$$

Integrando esta ecuación de Maxwell sobre una superficie  $S$  cuya frontera es una curva cerrada  $\Gamma$  se tiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$$

y por el teorema de Stokes arribamos a

$$\int_{\Gamma \equiv \partial S} \mathbf{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_\Gamma$$

que es la ley de Ampere. Notemos que  $I_\Gamma$  es la corriente concatenada por el lazo  $\Gamma$ .

Además, volviendo a la identidad vectorial del doble rotor,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

que se simplifica utilizando el gauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , para llegar a

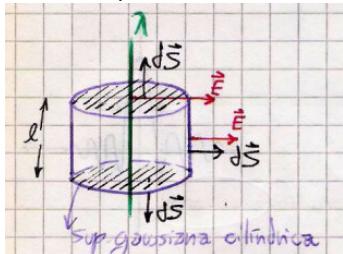
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

que es una ecuación de Poisson vectorial para la magnetostática.

Magnetostática y electrostática son gobernadas por ecuaciones de Poisson para potenciales  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  y el problema entonces se reduce a resolverlas para luego hallar los campos por derivación.

### EJEMPLO 5.1 Ejemplo de Gauss law y Ampere law

Se tiene un hilo cargado con una densidad lineal de carga  $\lambda$ , tomando una superficie gaussiana cilíndrica coaxial y concéntrica con el mismo



se tiene

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q,$$

y dada la forma del campo en cada superficie se tiene

$$E 2\pi r \ell = 4\pi \lambda \ell$$

de modo que

$$E = \frac{2\lambda}{r}.$$

En el caso de un toro por el cual circula una corriente  $i$  en cada vuelta de la espira se definen dos circuitos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  según al figura debajo



El campo  $\mathbf{B}$  estará en  $\hat{\varphi}$  y además no depende de  $\varphi$  por la simetría (en coordenadas cilíndricas), entonces para un dado  $r_0$  y  $z_0$  será una constante en  $\hat{\varphi}$ . Entonces

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_c$$

y para los circuitos de la figura

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\ell = 0 \quad \mathbf{B} = 0$$

de modo que el campo magnético será nulo fuera. En cambio, dentro

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} Ni \quad B = \frac{2Ni}{Rc}$$

**Estaría bueno hacer un análisis fino de las aproximaciones, hacer el cálculo posta de los campos magnéticos y ver que las consideraciones de simetría funcionan. Este ejemplo, pese a lo boludo, es muy ilustrativo.**

## 1.6 Resolviendo problemas de potencial

Estaremos interesados en resolver las ecuaciones de Poisson y de Laplace en un cierto recinto. Para tener soluciones únicas necesitaremos condiciones de contorno de tipo Dirichlet o de tipo Newmann (derivada normal en el contorno).

### 1.6.1 Unicidad de problemas de potencial

La unicidad de la solución permite la fabricación de problemas equivalentes para otras soluciones. Si dos problemas satisfacen iguales condiciones de contorno entonces en el recinto encerrado por ese contorno tienen igual solución.

Si en un recinto  $R$

$$\phi_1|_{cont} = \phi_2|_{cont} \quad (6.1)$$

pero se da para el interior de  $R$  que  $\phi_1 \neq \phi_2$  entonces se tiene sucesivamente

$$U \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad \nabla U = \nabla \phi_1 - \nabla \phi_2$$

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = -4\pi\rho + 4\pi\rho = 0$$

$$\nabla \cdot (U \nabla U) = U (\nabla \cdot \nabla U) + \nabla U \cdot \nabla U$$

$$\int_V \nabla \cdot (U \nabla U) dV = \int_V U \nabla^2 U + (\nabla^2 U)^2 dV = \int_V (\nabla^2 U)^2 dV$$

llegando al último miembro porque el potencial  $U$  cumple la ecuación de Laplace. Luego,

$$\int_V (\nabla^2 U)^2 dV = \int_S U \nabla U \cdot dS = 0$$

habiéndose pasado a la integral de superficie por el teorema de la divergencia y anulando el valor global porque  $U$  en el contorno es nula (recuérdese (6.1)). Además,

$$\nabla U \cdot dS \rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial \hat{n}} \right|_{cont}$$

luego,

$$\nabla U = 0 \quad \nabla \phi_1 = \nabla \phi_2$$

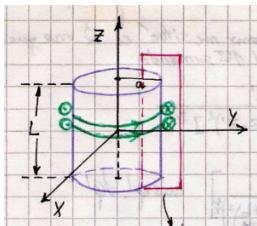
y entonces

$$\phi_1 = \phi_2.$$

a menos, por supuesto, de una constante.

Los problemas que siguen parecen ser correspondientes a cálculo de campos a lo F3, de manera que tendrán que reubicarse luego. Suponemos que son guía 1.

#### EJEMPLO 6.1 Problema 6



La integral del campo magnético es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\Omega$$

pero primeramente se busca obtener la corriente, cuya distribución es proporcional a la delta de Dirac con alguna constante de proporcionalidad que hay que hallar. Entonces

$$I_T = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \alpha \delta(y - a) dy dz = \alpha \int_{-L/2}^{L/2} dz = \alpha L = InL$$

de lo cual se obtiene  $\alpha = nL$  y donde se ha usado  $n = N/L$ .

Luego,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{nI \delta(r' - a) r' \hat{\varphi} \times (-r' \cos \varphi' \hat{x} - r' \sin \varphi' \hat{y} + (z - z') \hat{z})}{(r'^2 + [z - z']^2)^{3/2}} dr' d\varphi' dz'$$

y colapsando la delta en  $r$ ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{nI}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{a' \hat{\varphi} \times (-a' \cos \varphi' \hat{x} - a' \sin \varphi' \hat{y} + (z - z') \hat{z})}{(a'^2 + [z - z']^2)^{3/2}} d\varphi' dz'$$

donde el producto vectorial requiere previamente convertir  $\hat{\varphi}$  a cartesianas. Entonces, usando la regla mnemotécnica sabida,

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin \varphi' & -\cos \varphi' & 0 \\ -a \cos \varphi' & -a \sin \varphi' & (z - z') \end{vmatrix} = \cos \varphi' (z - z') \hat{x} + \sin \varphi' (z - z') \hat{y} + a \hat{z}$$

Las integrales en  $\cos \varphi'$  y  $\sin \varphi'$  dan cero porque son trigonométricas entre 0 y  $2\pi$ . Luego

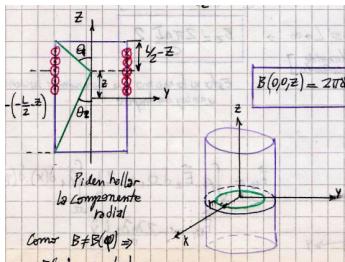
$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{nI 2\pi a^2}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{(a^2 + [z - z']^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{2\pi n I}{c} \left( \frac{L/2 + z}{a^2 + (z + L/2)^2} + \frac{L/2 - z}{a^2 + (L/2 - z)^2} \right)$$

Aquí parece que se simplificaba el  $a^2$ .

y se obtiene

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{2\pi n I}{c} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1)$$

Veo la idea acá pero esto hay que hacerlo con mucho cuidado. Tal vez garabatear en papel y pasar los pasos importantes aquí. Utilizar claramente las condiciones de contorno; Dirichlet o Newmann.



Piden hallar la componente radial. Como  $B$  no depende de  $\varphi$ ,  $B(r_0)$  es constante y entonces situándose en  $\hat{x}$  sabré que es válido en un círculo  $r$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{nIa}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\varphi} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\varphi' dz'$$

Ahora es

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' =$$

pero como requiero únicamente el campo en  $\hat{r}$  me interesará la parte en  $\hat{z}$  pues  $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$ .

$$\hat{r} = \cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y},$$

pero como estoy situado en  $\hat{x}$  me quedo únicamente con el primer sumando.

$$B_x(r, z) = \frac{anI}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z') \cos \varphi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi + [z - z']^2)^{3/2}} d\varphi' dz'$$

y definiendo  $b^2 \equiv a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi$ , se puede hacer la integral en  $z'$

$$B_x(r, z) = \frac{anI}{c} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{b^2 + [z - L/2]^2)^{1/2}} - \frac{1}{b^2 + [z + L/2]^2)^{1/2}} \right] \cos \varphi' d\varphi' dz'$$

Pero  $b$  es función de  $\varphi$  de modo que conviene aproximar con  $L \gg a$  ( $r, a \ll L$ , entonces  $b \ll L$ ) y puedo expandir con Taylor y  $z \ll L$ .

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + (z \pm L/2)^2}} = \frac{2}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2/L^2 + 4z^2/L^2 \pm 4z/L}}$$

y definiendo  $\alpha \equiv 4b^2/L^2 + 4z^2/L^2$  y  $\beta \equiv 4z/L$  se tiene

$$\frac{2}{L} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha - \beta)}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta}} \right) \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{8}(\alpha - \beta)^2 - 1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{3}{8}(\alpha + \beta)^2 = \beta \left( 1 - \frac{3}{2}\alpha \right)$$

y regresando al cálculo de  $B$

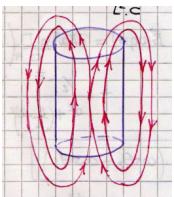
$$B_x(r, z) = \frac{anI}{c} \int_0^{2\pi} \frac{2}{L} \left( \frac{4z}{L} \left( 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{4}{L^2} (r^2 - 2ar \cos \varphi + a^2 + z^2) \right] \right) \right) \cos \varphi' d\varphi'$$

$$B_x(r, z) = \frac{8aznI}{L^2 c} \frac{12ar\pi}{L^2} = \frac{96\pi nI}{c} \left( \frac{a^2 z r}{L^4} \right)$$

y junto con

$$B_z = \frac{2\pi nI}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

**Anoté que el término que multiplica al  $3/2$  sería un  $\alpha$  (supongo "el"  $\alpha$ ). Chequearlo.**



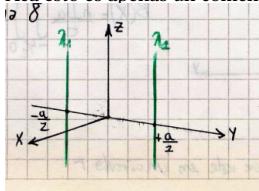
Si  $L \rightarrow \infty$  (caso de solenoide infinito) se tiene

$$B_z = \frac{4\pi n I}{c},$$

que es lo mismo que se obtiene haciendo una ley de Ampere.

### EJEMPLO 6.2 Problema 8

Acá esto es apenas un comentario.



Para un hilo cargado es  
 $E = 2\lambda/r$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \int \rho_1 \mathbf{E}_1 d\Omega_1 = \frac{2\lambda_2}{a} \int_{\Omega} \lambda_1 \delta(x) \delta(y + a/2) d\Omega_1 \\ \mathbf{F}_{12} &= -\frac{2\lambda_1 \lambda_2}{a} L \hat{y} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 6.3 Problema 5

El potencial

$$\phi(r) = \frac{e}{r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-2r/a}$$

revienta en cero. No obstante se puede separar en dos potenciales uno de los cuales revienta y el otro no,

$$\phi(r) = \frac{e}{r} e^{-2r/a} + \frac{e}{a} e^{-2r/a}$$

donde el primer término es Yukawa, sumando y restando  $e/r$  y agrupando

$$\phi(r) = \frac{e}{r} \left( e^{-2r/a} - 1 \right) + \frac{e}{a} e^{-2r/a} + \frac{e}{r}$$

donde el último término es el potencial de una carga en el origen que proviene de una densidad de carga  $\rho = e\delta(\mathbf{x})$ . Definiendo al primer término como  $\phi_1$  se puede despejar  $\rho$  desde la ecuación de Poisson  $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ ,

$$\rho = -\frac{1}{4\pi r} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi_1)$$

o bien

$$\rho = -\frac{1}{a^2 \pi r} \frac{e}{r} r e^{-2r/a},$$

y hemos averiguado la densidad de carga de cada parte.

Entonces, por ser átomo neutro

$$Q = \int_V \rho dV + e = 0,$$

y la integral puede hacerse en esféricas porque la dependencia es solamente en  $r$ .

## Capítulo 2

---

# Teorema de Green

## 2.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extra (cargas imagen) las condiciones de contorno.

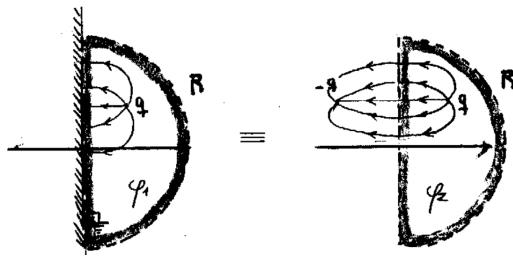


Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma:  $\phi_1 = \phi_2$  por unicidad.

### 2.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el  $\phi$  de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación elemen-

tal.

Restando entre sí

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

y

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \int_S [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \in R, \mathbf{x} \in R$$

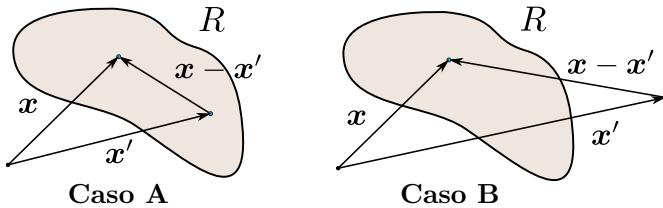


Figura 1.2

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \nabla^2 \psi = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$-\phi(\mathbf{x})4\pi + \int_V 4\pi \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

donde estamos usando la abreviatura  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$  que es la derivada normal en la superficie. Despejando

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \right) dS,$$

donde la primer integral es debido a las cargas internas y la segunda al efecto de las cargas fuera del recinto  $R$ .

Recordemos que las condiciones tipo Dirichlet corresponden a  $\phi|_S$  y las tipo Neumann a  $\partial \phi / \partial \hat{n}|_S$ .

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \notin R, \mathbf{x} \in R$$

y

$$\int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS,$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de  $R$  que producen campo en el interior  $R$ .

Hemos tomado  $\psi = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  que verifica [1]; interpretándose  $\psi$  como el potencial de una carga puntual unitaria.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

podemos tomar

$$G \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

donde  $G$  es la función de Green, el potencial de una carga unidad situada en  $\mathbf{x}'$  calculado en  $\mathbf{x}$ . Luego, se tiene

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \nabla^2 f$$

donde  $f$  satisface Laplace (si el recinto no incluye a  $\mathbf{x}'$ ). Es decir que  $\nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ .

Entonces  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  representan la o las imágenes necesarias para que  $G$  cumpla el contorno necesario  $G_D|_S = 0$ .

## 2.2 Funciones de Green

El teorema de Green me da una expresión integral para el potencial  $\phi$ . En efecto,

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi(\mathbf{x}')}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS', \quad (2.1)$$

y si  $\mathbf{x} \notin V$ , se tiene

$$0 = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}') - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS'. \quad (2.2)$$

Pero para poder utilizar (2.1) necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno, de manera que según sean

$$\text{Dirichlet} \quad \begin{cases} G_D : \nabla^2 G_D = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ G_D|_{\text{contorno de } R} = 0 \\ \phi|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G_D \rho \, dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial}{\partial n} G_D \, dS' \end{cases}$$

donde la condición de contorno de  $G$  equivale, en el contexto físico del electromagnetismo, a reemplazar el contorno por un conductor metálico puesto a tierra. Entonces  $G$  es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi_2}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma \quad \phi_2|_S = \phi_1|_S$$

$$\text{Neumann} \quad \begin{cases} G_N : \nabla^2 G_N = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ \nabla G_N \cdot \hat{n}|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = <\phi>|_S + \int_{V'} G_N \rho \, dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S G_N|_S \frac{\partial G_N}{\partial n} \, dS \end{cases}$$

## 2.2.1 Función de Green libre

La ecuación de Green libre

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

que representa una superficie infinita con condición de contorno  $\phi(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) = 0$  lleva directo a la integral de Poisson. En efecto sería como no tener contornos (tenerlos en infinito es no tenerlos). Entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \, dV = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV'$$

que es la integral de Poisson. La ecuación de Poisson se recupera teniendo en cuenta que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

En este caso, Dirichlet y Neumann llevan a la misma solución porque potencial y campo son nulos en los contornos.

## 2.2.2 Sobre el caso de Neumann

En el caso de las condiciones de Neumann se tiene un problema si se toma  $\partial_n G = 0$ . En efecto

$$\int \partial_n G dS = \int \nabla G \cdot \hat{n} dS = \int \nabla \cdot (\nabla G) dV = \int \nabla^2 G dV = -4\pi,$$

si el punto de evaluación  $x$  está dentro del dominio definido por  $V$ . Por ello, para condiciones de Neumann se toma:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = -\frac{4\pi}{S}.$$

Entonces, la integración resulta en

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S dS = \frac{1}{S} \int_S \phi dS = \langle \phi \rangle |_S,$$

que es el valor promedio de  $\phi$  en la superficie  $S$ . No se puede anular con

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = 0$$

salvo que el volumen de integración no contenga a  $x = x'$  en cuyo caso se excluye  $x = x'$  de la integración.

Se suele tomar la superficie  $S \rightarrow \infty$  de modo que resulte nulo  $\langle \phi \rangle |_S$ . Se toma el volumen  $V$  rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito entonces

$$\langle \phi \rangle |_S = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = 0$$

**Como en scattering.**

esto es el llamado *problema exterior*.

## 2.2.3 Green para el problema externo de una esfera

La configuración es una carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra. La idea aquí es conocer dónde ubicar la imagen  $q'$  para que se verifique el contorno, es decir que el potencial será ahora el correspondiente a las dos cargas

$$\varphi(x) = \frac{q}{|x-y|} + \frac{q'}{|x-y'|}$$

y debe cumplir que

$$\varphi(x)|_{r=a} = 0,$$

Este título sería “Ejemplo método de imágenes”. En realidad este es un ejemplo de cálculo de función de Green; así fue dado en la teoría.

por la conexión a tierra. Para ajustar esta condición se tienen dos variables, la magnitud de la carga  $q'$  y su posición  $\mathbf{y}'$ . No obstante, la simetría de la configuración establece ciertas restricciones para la posición  $\mathbf{y}'$ ; en efecto para el problema de una carga frente a una esfera el eje que une el centro de la esfera con la carga es un eje de simetría de revolución; si la esfera gira en torno a ese eje la configuración es la misma. Luego, la carga imagen debe ser tal que no rompa esa simetría: debe estar localizada en dicho eje. Entonces  $\mathbf{y}'$  y  $\mathbf{y}$  son colineales y la posición incógnita requerida es solamente el módulo  $y' = |\mathbf{y}'|$ .

Los módulos en los denominadores pueden expresarse en términos de la ley de los cosenos, como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y'^2 - 2 x y' \cos \gamma}},$$

donde  $x, y$  son los módulos respectivos.



**Figura 2.3** Geometría para el problema de la carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra.

Luego, la condición de contorno evaluada sobre la superficie de la esfera  $|\mathbf{x}| = a$  implica que

$$\varphi(\mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=a} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0,$$

y entonces se tienen que obtener ahora  $q, y'$  a partir de esta ecuación que en realidad representan infinitas direcciones dado que  $\gamma$  puede ser cualquier ángulo entre  $0$  y  $2\pi$ . Se necesitarán dos ecuaciones para resolver únicamente el

problema. Si se eligen  $\gamma = \pi$  y  $\gamma = 0$  la ecuación anterior define el sistema

$$\begin{cases} \frac{q}{y-a} + \frac{q'}{a-y'} = 0 \\ \frac{q}{a+y} + \frac{q'}{a+y'} = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el par

$$q' = -\frac{a}{y} q, \quad y' = \frac{a^2}{y},$$

y entonces

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} - \frac{(a/y)q}{\sqrt{x^2 + a^4/y^2 - 2x(a^2/y) \cos \gamma}}.$$

El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  del espacio, debido a una carga en  $\mathbf{y}$  depende de los módulos  $x, y$  y del ángulo  $\gamma$  entre dichos vectores.

Esta solución puede obtenerse un poco más heurísticamente, ver nota 2.7.

Lo que sucede físicamente es que se induce carga sobre la superficie de la esfera. Se querrá ver (luego?) cuál es la distribución de carga que se inducirá sobre la superficie.

Parece ser una constante que si elegimos las cosas del modo más simétrico posible, las expresiones resultan más sencillas.

Esta expresión, así como está, no se halla en ningún sistema de coordenadas en particular.

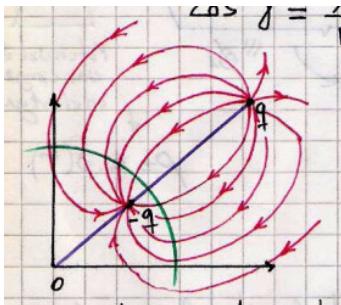
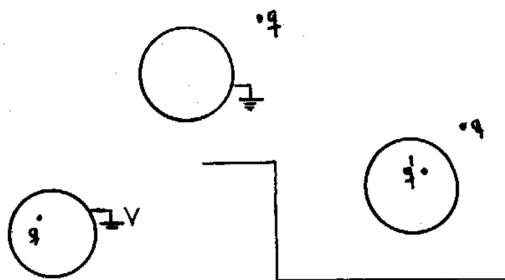


Figura 2.4

Este ejemplo ha servido también para mostrar la determinación de la función de Green para la configuración dada por una esfera aterrizada (condiciones de Dirichlet), que sería

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a/|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - (a^2/|\mathbf{y}|)\hat{\mathbf{y}}|}$$



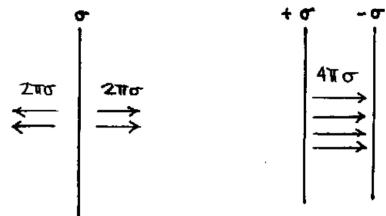
**Figura 2.5**  $G_D$  es el potencial de la configuración (a) y se evalúa teniendo en cuenta la otra (b) que se resuelve casualmente por imágenes. La (c) se resuelve alterando las condiciones.

El caso (c) de la Figura se resuelve con

$$\begin{aligned} -\frac{V}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS &= -\frac{V}{4\pi} \int_S \nabla G \cdot dS = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G dV \\ &= -\frac{V}{4\pi} (-4\pi) \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V \end{aligned}$$

## 2.2.4 Algunos campos

En distribuciones infinitas de carga la integral de Poisson diverge pero ello



se debe a que en realidad no existen distribuciones infinitas de carga.

### EJEMPLO 2.1 Problema 1



Primeramente se calculan los valores de la carga imagen, los cuales, para un sistema de coordenadas esféricas, son

$$q' = -\frac{a}{r}q \quad r' = \frac{a^2}{r}.$$

Se ve que cumplen los límites razonables. Luego, habría que hacer el potencial nulo mandando el engendro a tierra y luego se le suma algo que de potencial  $V$  en  $r = a$ .

La función de Green por imágenes será

$$G_D = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2 \mathbf{x}'|},$$

la cual cumple que sobre la superficie es nula.

Subsecuentemente,

$$\rho(\mathbf{x}') = \sigma\delta(r - b), \phi(\mathbf{x}')|_S = V, \phi(\mathbf{x}')|_{S_{R \rightarrow \infty}} = 0$$

y

$$\int \rho(\mathbf{x}') dV = 4\pi b^2 \sigma$$

$$\int \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV = \int \frac{b^2 \sigma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS$$

siendo  $b = |\mathbf{x}'|$ . Poniendo manos a la obra en la integral (en esféricas)

$$\int \frac{b^2 \sigma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS = \int dt \int d\Omega r^2 \sigma \delta(r' - b) \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2 \mathbf{x}'|} \right]$$

$$\int d\Omega \sigma b^2 \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2 \mathbf{x}'|} \right]$$

donde el primer término es el potencial de un casquete, que es

$$\begin{cases} \frac{4\pi b^2 \sigma}{r} & \text{si } r > b \\ 4\pi b^2 \sigma & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y el segundo término se puede trabajar para llegar a

$$\frac{b^2 a}{r} \int d\Omega \sigma \frac{-1}{|a^2/r^2 \mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Pero recordemos que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial r^2} = \frac{a^2}{r} < a$$

Juntando todo

$$\begin{cases} \frac{4\pi b^2\sigma}{r} - \frac{a}{r} 4\pi\sigma b & \text{si } r > b \\ 4\pi b^2\sigma - \frac{a}{r} 4\pi\sigma b & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

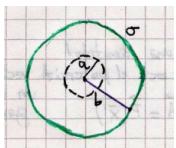
Y se tiene

$$-\frac{1}{4\pi} \int \phi(\mathbf{x}') \nabla' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS' = \frac{V}{4\pi} \int \nabla' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS' = VQ_n,$$

donde en el último paso se ha usado el teorema de la divergencia. Luego, como  $Q_n = -a/r$  se tiene

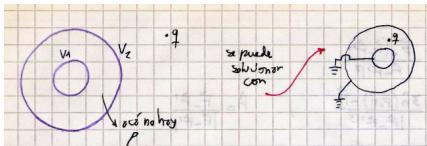
$$\phi = \frac{Va}{r}$$

que entonces en  $r = a$  es  $V$ .



Esto conviene hacerlo integrando en esféricas con  $\mathbf{x} \parallel \hat{z}$ .

#### EJEMPLO 2.2 Comentario superposición



### 2.3 Condiciones de contorno para el campo eléctrico

Consideraremos la superficie de separación entre dos medios 1 y 2, la cual puede estar cargada, y sobre la misma imaginaremos un cilindro pequeño  $\Sigma$  de tapas paralelas a la superficie y altura despreciable y asimismo, un circuito cerrado  $\Gamma$  también de altura despreciable perpendicular a la superficie, ver figura.

La normal a la superficie es  $\hat{n}$  mientras que  $\hat{t}$  es un versor tangente a la misma.

La ley de Gauss establece para el cilindro  $\Sigma$  que

$$\int_{S_\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_n,$$



Figura 3.6

donde  $S_\Sigma$  es la superficie total del cilindro y  $Q_n$  la carga neta encerrada. Como la superficie lateral es despreciable, por serlo la altura, la integral de superficie se reduce a la de las tapas. Si la densidad de carga sobre la superficie es  $\sigma$  entonces

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S$$

o bien

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

lo cual implica que la componente normal del campo  $\mathbf{E}$  es discontinua si hay carga superficial presente.

Por otra parte, como el rotor de  $\mathbf{E}$  es nulo (en electrostática), el teorema de Stokes implica

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} = 0 = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

y despreciando el aporte de las partes del circuito que son perpendiculares a la superficie, resulta

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\ell = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{n}_\Gamma \times \hat{n}) d\ell = 0$$

donde en el miembro derecho se ha expresado la dirección del  $d\ell$  en función de los versores normal y tangencial, y entonces

$$\hat{n}_\Gamma \cdot (\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) = 0,$$

que indica que el segundo factor tiene que ser nulo, es decir

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

No sé si no decir directamente que en electrostática es nula la integral de línea de  $\mathbf{E}$  y ya.

y esto implica que la componente tangencial del campo es continua, sin importar que exista carga o no.

Entonces el trabajo yendo del medio 1 al 2 será nulo

$$W_{1 \rightarrow 2} = 0 = q(\phi_2 - \phi_1),$$

lo cual implica que  $\phi_2 = \phi_1$  porque la discontinuidad del campo es finita. Como veremos luego, esto no vale en el caso de una capa dipolar.

Resumiendo

$$E_{2\hat{n}} - E_{1\hat{n}} = 4\pi\sigma \quad E_{2\hat{r}} - E_{1\hat{r}} = 0$$

Expresando el campo en términos del potencial, se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla\phi_2 \cdot \hat{n} + \nabla\phi_1 \cdot \hat{n} &= 4\pi\sigma \\ \frac{\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n}}{4\pi} &= \sigma \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} \end{aligned} \tag{3.1}$$

esta es la densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios.

### 2.3.1 Carga puntual frente a esfera puesta a tierra

Volvemos a este problema, recordando que el potencial fuera de la misma se hubo determinado por el método de imágenes. Recordemos también que dentro de la esfera el potencial debe ser constante (no hay carga allí, puesto que la imagen es un dispositivo virtual sin existencia física). Consideraremos dos secciones, interna y externa.

Por la simetría del problema la densidad de carga inducida tiene la simetría de revolución en torno al eje que pasa por  $q, q'$  y el origen de coordenadas y será máxima en el punto de la esfera más cercano a  $q$ . Dado que el potencial es constante dentro de la esfera, e igual al valor que toma sobre la superficie, la ecuación (3.1) es

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S.$$

Ubicando nuestra esfera en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, la normal externa  $\hat{n}$  es claramente  $\hat{r}$  de modo que derivar normalmente es derivar con respecto a la dirección radial, es decir  $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$  y entonces

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \frac{[1 - (a/y)^2]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos\gamma]^{3/2}}.$$

**Acordate que harcodeaste con un pdf el  $\ell$  bold.**

**Hay que ver la relación de esto con lo anterior; creo que no estoy entendiendo, o explicando, bien.**

**La definición de derivada normal puede ir para apéndice.**

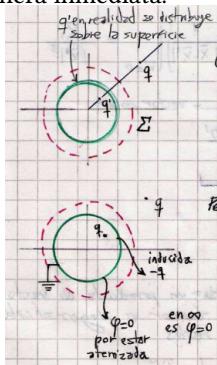
Si consideramos ahora el problema interno; esto es, una carga  $q$  rodeada por una esfera conductora conectada a tierra, se pueden hacer los mismos razonamientos que en el caso de la carga exterior y la solución es la misma intercambiando  $q'$  por  $q$  y  $y'$  por  $y$ . Entonces, en ese caso el cálculo de la densidad utiliza  $\hat{n} = -\hat{r}$  y se tiene

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y}\right) \frac{[(a/y)^2 - 1]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}$$

La carga total inducida sobre una superficie se evaluará en general a través de

$$Q = \int_S \sigma dS.$$

En el caso anterior del problema de la carga frente a una esfera a tierra se puede utilizar la ley de Gauss para hallar en cada caso la carga total de una manera inmediata.



Situando una superficie gaussiana  $\Sigma$  por fuera de la esfera, como se ve en la figura, resulta que la carga encerrada neta es la misma con imagen o sin imagen. En efecto, en el problema real la carga encerrada se distribuye sobre la superficie mientras que en el problema equivalente está concentrada en la posición  $y'$  y sabemos que es  $q'$ ; luego como los dos problemas son equivalentes el lado derecho de la ley de Gauss debe ser idéntico y la carga inducida será la neta encerrada, que es  $q'$ , la carga imagen.

Procediendo de modo similar para el problema interno (ahora  $q'$  está por fuera de la superficie  $\Sigma$ ), ahora la situación es diferente porque el campo sobre  $\Sigma$  es nulo (solo es no nulo fuera de la esfera por la conexión a tierra). Entonces la ley de Gauss ya nos dice ahí que la carga neta es nula y ello lleva a que la carga inducida sea  $-q$  que no es igual a la carga imagen.

**Acá debiera estar claro que se invierte el significado de  $y'$ , ahora es mayor que  $a$ .**

### 2.3.2 Principio de superposición

Consideremos la situación depicted en la figura



**Figura 3.7**

Una cierta distribución de carga está rodeada por una superficie a potencial  $V$ . El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  es

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

pero como el potencial sobre la superficie está fijo en  $V$  la última integral es

$$-\frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int \nabla G \cdot \hat{n} dS,$$

la cual por el teorema de la divergencia resulta

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla \cdot (\nabla G_D) dV = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G_D dV$$

y recordando que la función de Green es solución de la ecuación de Poisson para una densidad dada por la delta de Dirac, se tiene

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = V \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V,$$

de manera que

$$\varphi \mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega + V,$$

lo cual puede una manera de ver el principio de superposición.

#### Notas importantes sobre el principio de superposición

La ecuación de Poisson es muchas veces inútil porque en general no se tiene la distribución de cargas  $\rho(\mathbf{x})$ . Esto sucede en general con conductores pues la carga allí se distribuye acomodándose para alcanzar el equilibrio.

Para campos y potenciales vale superposición. Pero cada problema de potencial (con su ecuación de poisson) incluye además de la ecuación las condiciones de contorno. Dados dos problemas

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_1 \quad + \quad \text{CC}_1$$

y

$$\nabla^2 \varphi_2 = -4\pi\rho_2 \quad + \quad \text{CC}_2$$

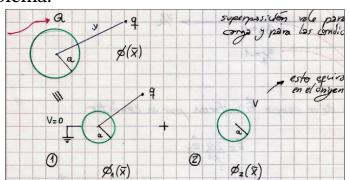
la suma de soluciones  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  con  $\rho = \rho_1 + \rho_2$

$$\nabla^2 \rho = -4\pi\rho \quad + \quad \text{CC} \quad (3.2)$$

donde hay que asegurarse de que CC sea la suma de las condiciones del problema 1 y las del problema 2. Desde el otro punto de vista, si tengo un problema como (3.2) y lo quiero pensar como la superposición de dos potenciales  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  puedo generarme unas condiciones de contorno artificiales que tengan en cuenta las influencias mutuas.

### EJEMPLO 3.1 Consideraciones sobre imágenes y Green

Superposición vale para las distribuciones de carga y para los contornos. Veamos el siguiente problema.



Se puede resolver mediante la superposición ilustrada en ① y ②. En efecto

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a/y \cdot q}{|\mathbf{x} - a^2/y^2 \mathbf{y}|} \quad \phi_2(\mathbf{x}) = \frac{q'}{|\mathbf{x}|}$$

Utilizando la ley de Gauss para una superficie esférica de radio  $r$  tal que  $a < r < y$ , se tiene  $\int \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi Q^n$  y como según la superposición que estamos haciendo es  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  resulta

$$\int \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi Q^n = -\frac{4\pi qa}{y} + 4\pi q',$$

de manera que

$$q' = Q + q \frac{a}{y},$$

y luego:

$$\phi = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq/y}{|\mathbf{x} - a^2/y^2 \mathbf{y}|} + \frac{Q + q a/y}{|\mathbf{x}|}$$

donde el segundo término es la imagen de la carga  $q$  y es tercero es otra imagen, cuya carga está distribuida uniformemente sobre la esfera conductora.

Veamos qué pasa con la fuerza ahora. La fuerza sobre la carga  $q$  será

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Esta esfera ② equivale a que  $V = q/a$ .

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \frac{1}{[1-a^2/y^2]} \hat{e}_y + q \frac{Q+q a/y}{y^2} \hat{e}_y = \frac{q}{y^2} \left[ Q - \frac{qa^3(2y^2-a^2)}{y(y^2-a^2)^2} \right] \hat{e}_y$$

lo que nos dice que a cierta distancia la fuerza cambia de signo. Si  $y \gg a$  podemos llegar a

$$\mathbf{F} \approx \frac{q}{y^2} \left[ Q - \frac{2a^3 q}{y^3} \right],$$

o bien, con un límite más brutal, a  $\mathbf{F} \approx qQ/y^2$ . Se comporta como una carga puntual. El gráfico siguiente ilustra la fuerza



Si un electrón escapa de la superficie de un conductor necesitamos hacer un trabajo (función trabajo)

### 2.3.3 Condiciones de contorno para medios magnéticos

Para los medios magnéticos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot dS = \int_S \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l \cdot dS = \frac{4\pi}{C} \mathbf{g}_l \cdot \hat{s} d\ell$$

donde hicimos la transformación

$$\int \mathbf{H} \cdot d\ell = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\ell$$

y donde recordemos que la altura de  $\Gamma$  tiene a cero.

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} = (-\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{s}) d\ell$$

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} d\ell = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \times \hat{n}) \cdot \hat{s} d\ell$$

de manera que

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l = \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$$

$$\hat{n} \times \hat{s} = \frac{d\ell}{d\ell}$$

Habría que entender bien este tema que es crucial. Imagino que working los ejemplos podría recuperar lo que alguna vez supe.

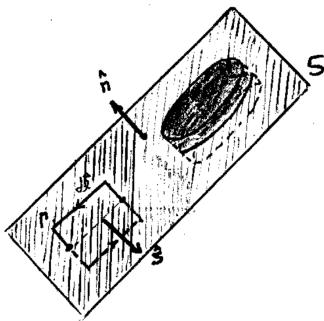


Figura 3.8

$$B_{2\hat{n}} - B_{1\hat{n}} = 0 \quad H_{2\hat{t}} - H_{1\hat{t}} = \frac{4\pi}{c} g_l$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

## 2.4 Desarrollo multipolar

Si se conoce la distribución de carga el potencial se obtiene integrando

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (4.1)$$

No obstante, esta expresión puede ser muy complicada porque en el denominador depende de la variable  $\mathbf{x}'$  sobre la cual se está integrando. Resulta conveniente entonces hacer un desarrollo del denominador, que es una función de  $\mathbf{x}'$ , en torno a un punto que se toma como origen de una esfera que engloba a la distribución de carga. Luego, ese desarollo será válido en puntos externos a dicha esfera. Es decir que la distribución de carga tiene que estar localizada.

Entonces, desarrollando en torno a  $\mathbf{x}' = 0$  (el origen de coordenadas) se tienen

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \partial_i \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \Big|_{\mathbf{x}'=0} x'_i + \frac{1}{2} \partial_j \partial_i \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \Big|_{\mathbf{x}'=0} x'_i x'_j + \dots,$$

o bien

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{x_i x'_i}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{x_i x'_i x_j x'_j}{|\mathbf{x}|^5} + \dots,$$

Se necesita una serie que converja, y que lo haga rápido.



Luego, introduciendo la misma en (4.1) resulta

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \int_{V'} x'_i \rho(\mathbf{x}') dV' + \\ & \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}'|^2) \rho(\mathbf{x}') dV' + \dots,\end{aligned}$$

Chequear la expansión, tal vez ponerla en vectorial o hacerla bien en el Apéndice. Junta huevos y hacer el término siguiente.

Se tiene un desarrollo de diferentes órdenes

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi^{(0)}(\mathbf{x}) + \phi^{(1)}(\mathbf{x}) + \phi^{(2)}(\mathbf{x}) + \phi^{(3)}(\mathbf{x}) + \dots$$

que se conocen según

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{Q}{|\mathbf{x}|} \quad \text{Orden monopolar}$$

$$\frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \int_{V'} x'_i \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{x_i p_i}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{Orden dipolar}$$

$$\frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}'|^2) \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{1}{2} \frac{x_i Q_{ij} x_j}{|\mathbf{x}|^5} \quad \text{Orden cuadrupolar}$$

El último término, matricialmente sería

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5}.$$

Los momentos son el momento monopolar,

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV,$$

que es la carga total, el momento dipolar,

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV$$

y el momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2] dV.$$

Con esta escritura es

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5}$$

Separando la expresión del momento cuadrupolar se ve que

$$Q_{ij} = 3 \int_V \rho(\mathbf{x}) x_i x_j dV - \delta_{ij} \int_V \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 dV = 3C_{ij} - \delta_{ij} C_{ll},$$

donde esta última expresión permite ver que el momento cuadrupolar es de traza nula ( $C_{ll}$  es la traza).

El momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta, los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga. Asimismo  $Q_{ij} = Q_{ji}$  es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable y tiene autovalores reales. Tiene traza nula,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

y cada  $Q_{ii}$  informa sobre la distribución de carga a lo largo del eje  $i$ . El tensor diagonalizado tendrá tres componentes independientes.

Se da también que  $Q_{ij}(i \neq j)$  mide desbalance lejos de los ejes. Una esfera con  $\rho$  uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolo.



Figura 4.9

Una simetría de reflexión implica que el  $p_{\perp} = 0$  donde la notación significa perpendicular al plano. Esto es así porque no hay desbalance. Para una simetría de revolución  $Q_{xx} = Q_{yy}$  entonces el  $Q_{ij}$  puede darse con un sólo número.

Si en una distribución dada, los momentos multipolares hasta el orden  $\ell - 1$  son nulos entonces el momento multipolar de orden  $\ell$  no depende del origen de coordenadas. Así, por ejemplo, cuando el monopolo es nulo el momento dipolar no depende del centro de momentos.

En la figura vemos que no ambos no tienen desbalance de carga respecto del origen; el disco uniformemente cargado tendrá monopolo no nulo y dipolo nulo (siempre respecto del origen), los anillos cargados con carga opuesta tendrán monopolo y dipolo nulos (respecto del origen y de cualquier otro punto). Pero si muevo las distribuciones se tendrá desbalance el disco pero no los anillos.

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros; el cuadrupolo se da con un solo número. En la Figura tenemos un elipsoide con densidad de carga

**El comentario en pag. 12 de la carpeta -recuadrado en rojo- induce algo diferente; pide simetría en el plano perpendicular al vector. Me parece a mí que lo que debiera verse es una simetría en la distribución de carga.**



Figura 4.10



Figura 4.11

$\rho$  uniforme. Tiene simetría de revolución de modo que el momento cuadripolar es un número.  $Q_{zz} = 0$  puesto que una esfera no tiene desbalance, entonces  $\vec{Q} = 0$

Para una esfera uniformemente cargada todos los momentos dipolares más allá del monopolo valen cero, lo cual se ve por ley de Gauss.

En general en las aplicaciones uno se queda con tres términos; monopolo, dipolo y cuadrupolo y se busca que esa expresión converja rápido. En general tomando como centro el centro de la distribución la convergencia es más rápida.

Los multipolos pueden sumarse (superposición) para varias distribuciones de carga.

## 2.5 Dipolo eléctrico

Se obtiene como límite de

$$\phi(x) = \frac{q}{|x - x_+|} - \frac{q}{|x - x_-|}.$$

No sé si corresponde hacer mención a que el potencial del dipolo se obtiene como límite en el caso de que la distancia entre cargas tiende a la nulidad.

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

si está en el origen, y

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

si está en un punto  $\mathbf{x}_0$ . Para calcular el campo hay que tomar el gradiente de esta expresión, multiplicarlo por  $-1$ , lo cual es un poco trabajoso, pero ahí vamos. Usando que el segundo miembro es a su vez un gradiente [poner esa cuenta en el apéndice matemático] se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) = -\nabla \left( \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) = \nabla \left( \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) \right),$$

luego se utiliza la identidad para el gradiente de un producto escalar notando que como uno de los vectores en el escalar es a su vez un gradiente se tiene una expresión más sencilla [otra cuenta de apéndice] En efecto, el primer término se anula por involucrar el producto vectorial de un gradiente, el segundo y tercero porque  $\mathbf{p}$  es independiente de  $\mathbf{x}$  reduciéndose la expresión a

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)$$

que implica que el operador  $\nabla$  que multiplica al momento dipolar se aplica sobre el gradiente de  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Ahora restauramos ese último valor y la cuenta se puede hacer más fácilmente en indicial [la hago como nota al final]. Finalmente

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \hat{\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

donde

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Si hacemos una transformación ortogonal de cartesianas a esféricas para un dipolo con  $\mathbf{p}$  en el eje  $z$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

y para este caso particular son el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{p \hat{z} \cdot r \hat{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

La identidad es  $\nabla(A \cdot B) =$   
cuatro términos, dos rotores y  
dos términos del tipo  
convectivo.

Pasarla al apéndice esta matriz.



**Figura 5.12** Dipolo centrado en el origen.

y el campo

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta}$$

que tiene simetría de revolución, puesto que no depende de  $\varphi$ .

Las líneas de campo cumplen que un diferencial de arco  $d\ell$  a través de una línea de campo es tal que

$$d\ell \parallel \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \times d\ell = 0$$

la línea de campo sigue la dirección del campo.

En coordenadas curvilíneas generales es

$$d\ell = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

y para un campo cualquiera  $\mathbf{E} = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 + E_3 \hat{e}_3$  se verificarán

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}$$

En el caso de esféricas  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$  y evaluando el producto vectorial  $dr/r = 2 \cotg \theta d\theta$ , las líneas de campo, en el caso del dipolo no tendrán componente en  $\hat{\varphi}$  (como es de esperar).

## 2.5.1 Independencia del origen para el momento dipolar

Queremos ver el hecho de que si los momentos de orden  $\ell - 1$  son nulos entonces el momento de orden  $\ell$  no depende del origen. Escribimos el momento dipolar de orden  $\ell$  como

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^\ell \propto \int \rho(\mathbf{x}) x^\alpha y^\beta z^\gamma d^3x$$

donde  $\ell = \alpha + \beta + \gamma$ . Trasladamos el origen del sistema de coordenadas  $x' = x - x_0$ , entonces

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ell} \propto \int \rho(\mathbf{x}') (x' + x_0)^{\alpha} (y' + y_0)^{\beta} (z' + z_0)^{\gamma} d^3x',$$

y usamos combinatoria allí

$$(x + c)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} c^r,$$

donde  $(nr) = n! / ((n - r)!r!)$  de manera que

**Poner el símbolo correcto del combinatorio**

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ell} \propto \sum_{rst}^{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\alpha}{r} \right) \left( \frac{\beta}{s} \right) \left( \frac{\gamma}{t} \right) x_0^r y_0^s z_0^t \int \rho(\mathbf{x}') x'^{\alpha} y'^{\beta} z'^{\gamma} d^3x'$$

donde  $0 \leq r \leq \alpha$ ,  $0 \leq s \leq \beta$  y  $0 \leq t \leq \gamma$ . Si  $r = s = t = 0$  entonces tenemos el multipolo de orden  $\ell$  calculado en el sistema  $X'Y'Z'$ .

Esto es general; si en una distribución monopolo y dipolo son nulos entonces el cuadripolo no depende del origen de coordenadas.

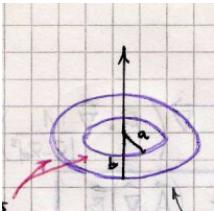
**Esto ya se dijo mucho, cansa.**

#### EJEMPLO 5.1 Disco con carga uniforme

El momento dipolar nulo respecto del origen, pero no respecto de otro punto porque el momento monopolar no es nulo.



#### EJEMPLO 5.2 Aros cargados



En este caso la carga total es nula, el monopolo es nulo entonces.

$$\lambda_A = \frac{Q}{2\pi a} \quad \lambda_B = \frac{Q}{2\pi b}$$

de manera que

$$|\lambda_A| = |\lambda_B| \frac{b}{a}$$

El dipolo será nulo respecto del origen y respecto a otros puntos también. El tensor cuadripolar está caracterizado por un sólo número (luego consideramos a los átomos neutros monopolar y dipolarmente)  $Q_n = e^{-1} Q_{zz}$ .

**Algunos momentos cuadripolares nucleares:** Para el  $^{14}\text{N}$  es  $Q = 7.1 \cdot 10^{-2}$  y para el  $^{35}\text{Cl}$  es  $Q = -7.9 \cdot 10^{-2}$

## 2.5.2 Momento cuadripolar de un elipsoide

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

y la componente  $Q_{11}$  del tensor (que es de traza nula) es

$$Q_{xx} = \int \rho(\mathbf{x})(3x^2 - r^2) d^3x = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) d^3x$$

donde el tercer término es porque consideramos densidad constante (un elipsoide uniformemente cargado). Para integrar se hace un cambio de coordenadas

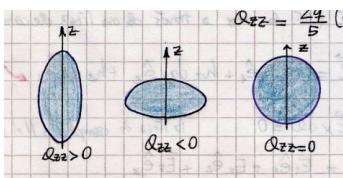
$$x' = \frac{x}{A}; \quad y' = \frac{y}{B}; \quad z' = \frac{z}{C};$$

y entonces se tienen

$$Q_{xx} = \frac{q}{5}(2A^2 - B^2 - C^2) \quad Q_{yy} = \frac{q}{5}(2B^2 - C^2 - A^2) \quad Q_{zz} = \frac{q}{5}(2C^2 - A^2 - B^2)$$

siendo  $q$  la carga total. Si el eje  $z$  es el de revolución, entonces  $A = B$  y se dan

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{q}{5}(A^2 - C^2) \quad Q_{zz} = \frac{2q}{5}(C^2 - A^2)$$



**Observaciones marginales:**  $C_{ij}$  tiene más términos de los que necesito para describir un potencial.  $Q_{ij} = C_{ij} - \text{traza}$ , usamos tensor de traza nula.

## 2.5.3 Interacción de un campo externo con una distribución de carga

Si tenemos un campo  $\mathbf{E}$  con sus fuentes lejos,



y que cumple  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (irrotacionalidad), se da la siguiente fuerza sobre la distribución

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV,$$

y si  $\mathbf{E}$  no varía demasiado en  $V$ , entonces podemos representar bien por una serie

$$E^\ell(\mathbf{x}) = E^\ell + x_j \partial_j E^\ell + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^\ell$$

entonces

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

o bien

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i q + (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_i + \mathbf{x} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla E_i]$$

de lo cual extraemos que el campo interactúa con la carga, el gradiente del campo interactúa con el dipolo y la divergencia del campo interactúa con el cuadrupolo. Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo, el torque  $\mathbf{T} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$  se puede escribir como

$$\mathbf{T} = q\mathbf{x} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

donde  $\mathbf{p} \equiv q\mathbf{x}$  es el momento dipolar y vemos que el torque tiende a centrar el dipolo según la dirección del campo  $\mathbf{E}$  aunque no lo logra por la agitación térmica.

En la carpeta escribí que reescribía un término de la expansión como

$$\frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E_i = \frac{1}{2} \left[ x_j x_k \partial_j \partial_k E_i - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \partial_j \partial_k E_i \right]$$

calculo que para lograr que seaa el cuadrupolo la integral. Es la componente sub- $i$  del Laplaciano.

La energía de un dipolo será

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

entonces

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

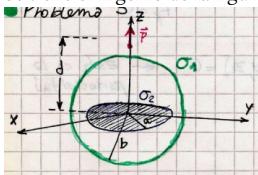
siendo los últimos tres términos nulos según lo que consideramos previamente de manera que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

En la carpeta puse que la integral del cuadrupolo da:  
 $Q_{kj} \partial_k \partial_j E_i$ .

**EJEMPLO 5.3 Problema 3**

Se tiene el ingenio de la figura.



La distribución de carga está caracterizada por

$$\rho = p_0 \hat{z} \quad \sigma_1 = \sigma_0 \cos(\theta) \quad \sigma_2 = \sigma_0 \left( \frac{r}{a} - c \right)$$

pero el casquete es neutro.

$$\int \rho(\mathbf{x}') dV = \int_S b^2 \sigma_0 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi = 2\pi b^2 \sigma_0 \int_0^\pi \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = 0$$

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{x}') dV &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \sigma_0 \left( \frac{r}{a} - c \right) d\theta = 2\pi \sigma_0 \int_0^a \left( \frac{r^2}{a} - rc \right) dr \\ &\int \rho(\mathbf{x}') dV = 2\pi \sigma_0 \left( \frac{r^3}{3a} - \frac{r^2 c}{2} \right) \Big|_0^a \end{aligned}$$

y esta expresión se anula para  $c = 2/3$ . En este caso el momento dipolar de *toda* la distribución no dependerá del sistema de coordenadas, aunque las partes entre sí podrían depender.

El cálculo del momento dipolar requiere mirar la simetría del problema. Hay simetría de revolución y el *vbp* es en  $\hat{z}$  pero la densidad de carga  $\rho$  en  $\hat{z}$  es nula de manera que el momento dipolar del disco es nulo. En  $\hat{x}, \hat{y}$  es cero por la simetría de revolución.

$$\int \rho(\mathbf{x}) z dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi = 2\pi a^3 \sigma_0 \int_{-1}^1 u^2 du$$

y entonces

$$p_z = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0.$$

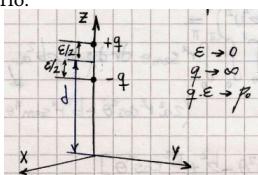
Luego desde  $p_z + p_0 = 0$  obtenemos

$$p_0 = -\frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0.$$

Respecto del momento cuadripolar será, tomando ejes principales,  $Q_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  así también como  $Q_{xx} = Q_{yy}$  (simetría de revolución) y la traza nula  $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$  de modo que

$$Q_{xx} = -\frac{1}{2} Q_{zz} = -\frac{Q}{2}.$$

El dipolo en el origen tiene cuadripolo nulo; pero si no estuviera en el origen habría que calcularlo.



El momento cuadripolar del dipolo se calcula utilizando la definición del dipolo, con sus límites, según

$$Q_{zz} = -2q(d - \varepsilon/2)^2 + 2q(d + \varepsilon/2)^2 = 4qd\varepsilon = 4dp_0,$$

siendo esto último el aporte del dipolo al momento cuadripolar. El momento cuadripolar del casquete es nulo. Como

$$z^2 = a^2 \cos^2 \theta \quad x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta$$

se tiene

$$2z^2 - x^2 - y^2 = 3a^2 \cos^2 \theta - a^2$$

$$Q_z z = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta (3a^2 \cos^2 \theta - a^2) d\theta$$

Aquí puede ver que tiene que anularse.

Para la placa que descansa sobre el plano se tiene

$$z = 0 \quad x^2 + y^2 = r^2$$

y entonces

$$Q = -2\pi \int_0^a r^3 \sigma_0 \left( \frac{r}{a} - c \right) dr = -2\pi \sigma_0 a^4 \left( \frac{1}{5} - \frac{c}{4} \right)$$

Restando

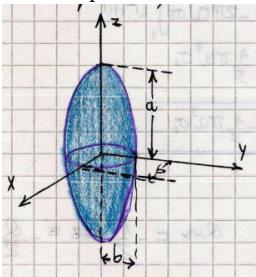
$$Q = 4dp_0 - 2\pi \sigma_0 a^4 \left( \frac{1}{5} - \frac{c}{4} \right)$$

se llega finalmente a

$$Q = -\frac{2}{3}\pi \sigma_0 a^3 \left( \frac{a}{10} + 8d \right).$$

#### EJEMPLO 5.4 Problema 5

Núcleo elipsoidal con simetría de revolución en  $\hat{z}$ . Las medidas en la ilustración aquí abajo:



$$Q \equiv Q_{zz} \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$$

Y la integral será

$$\int \rho(\mathbf{x})(2z^2 - x^2 - y^2) dr,$$

y haciendo el cambio de variables

$$u = \frac{x}{b} \quad v = \frac{y}{b} \quad w = \frac{z}{a}$$

el diferencial es  $dudvdw = dV/(b^2a)$ . La integración es en una esfera unitaria entonces conviene pasar a coordenadas esféricas,

$$\int \rho b^2 a (2aw^2 - b^2 v^2 - b^2 u^2) dudvdw = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \rho b^2 a (2a^2 r^2 \cos^2 \theta - b^2 r^2 \sin^2 \theta) d\varphi d\theta dr$$

dos de las integrales son directas,

$$I = \frac{2\pi\rho b^2 a}{5} \int_0^\pi \sin \theta (2a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) d\theta$$

Con un nuevo cambio de variables  $t = \cos \theta$  la integral puede hacerse y resulta

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho b^2 a (a + b)(a - b).$$

Para  $a > b$  se tendrá una pelota de rugby ( $Q > 0$ ) mientras que para  $a < b$  se tiene una lenteja ( $Q < 0$ ).

Si  $q = Ze$  la carga total será

$$q^T = \frac{4}{3} \pi b^2 a \rho,$$

de modo que

$$Q = \frac{4}{5} Ze \frac{(a + b)}{2} (a - b)$$

y siendo  $R$  el radio medio  $(a + b)/2$  será

$$\frac{a - b}{R} = \frac{5Q}{4ZeR^2}.$$

Ahora evaluamos el trabajo [?]

$$W = \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

donde el factor  $1/2$  no va porque el potencial  $\phi$  es externo. Si éste no cambia mucho a lo largo del volumen  $V$  se puede utilizar su desarrollo de Taylor,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i},$$

y como  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  puesto que se está lejos de las fuentes, tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$

Sumando y multiplicando cosas pudeo formar la siguiente expresión

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} [3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2] \frac{\partial E_j}{\partial x_i},$$

y entonces

$$W = q \phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}.$$

Si tomo ejes principales es

$$-\frac{1}{6} \sum_i Q_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} Q - \frac{1}{2} \frac{\partial E_y}{\partial y} Q + \frac{\partial E_z}{\partial z} Q \right],$$

o bien

$$-\frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{E} Q + \frac{3}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} Q \right] = -\frac{1}{4} Q \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

## 2.5.4 Capa dipolar

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

y el potencial de una capa dipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$

siendo  $\mathbf{D}$  el momento dipolar por área que viene de acuerdo a la definición

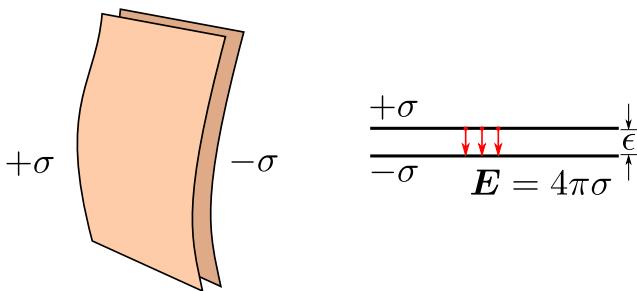
$$D = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sigma \epsilon$$

refiérase a la ilustración bajo esta línea. Pero antes algunas cuentas con los dedos

$$\delta\phi = \frac{\delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

$$\delta\mathbf{p}(\mathbf{x}') = \mathbf{D}(\mathbf{x}') \delta S'$$

$$\int_S d\phi(\mathbf{x}) = \int_{S'} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$



Veamos algún detalle más sobre la capa dipolar, que está ilustrado en la Figura siguiente.

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = \frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{S} = -\frac{D \cos(\theta)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{r^2} dS$$

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -D d\Omega$$



Figura 5.13

puesto que

$$\phi(x) = -D \int_S d\Omega \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \equiv d\Omega$$

Para las condiciones de contorno se da lo siguiente

$$E_2^{\hat{n}} - E_1^{\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$-\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\frac{\partial \phi_1 - \phi_2}{\partial \hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\sigma \epsilon$$

Y el cálculo del trabajo

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q 4\pi\sigma \epsilon = q (\phi_1 - \phi_2)$$

desde donde deducimos que el potencial tiene un salto al surcar la capa dado por

$$\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D$$

Entonces, asociado a una capa dipolar hay un salto de  $4\pi D$ .

Para dos chapas infinitas de carga uniforme  $\sigma$  pero opuesta el campo eléctrico es nulo en todas partes salvo en el interior, donde vale  $4\pi\sigma$  (véase ilustración abajo). Luego el potencial tiene un salto de  $4\pi\sigma d$  que se produce a lo largo de la distancia  $d$ .

Si se considera el límite  $\sigma \rightarrow \infty$  y  $d \rightarrow 0$  se tiene una capa dipolar y lo que sucede es que la subida apreciable dada por la recta se colapsa a un escalón.

Acá hay que trabajar mejor esto de la capa dipolar en referencia a las BC. Además saber si lo del  $W$  de 1 a 2 es usar la integral de línea por un camino perpendicular a la surface.

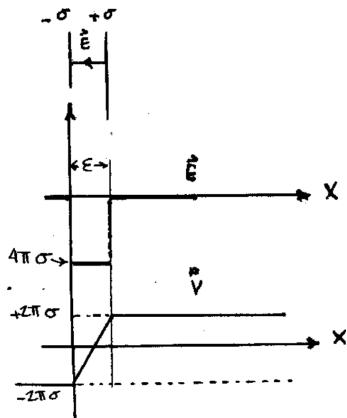


Figura 5.14

### 2.5.5 Momento dipolar por unidad de volumen

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Suponiendo una distribución continua de dipolos dada por  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ , el potencial total debido a la misma se obtiene de la integración

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV,$$

donde  $\mathbf{P}$  es la llamada polarización, el momento dipolar por unidad de volumen, siendo  $V$  un volumen que incluye a la zona de polarización (ver Figura). Este volumen debe incluir a la misma aunque puede no coincidir con ella. El



Figura 5.15

potencial se puede escribir como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV$$

Luego, usando la identidad ID 1 (apéndice) la anterior integral resulta en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

y si usamos el teorema de la divergencia en la primera integral se tiene

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV,$$

lo que habilita a pensar que el borde del cuerpo polarizado tiene una densidad de carga de polarización

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{n},$$

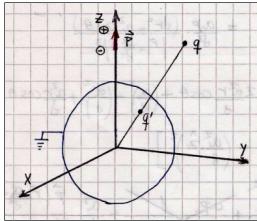
y que en el interior existe una carga de polarización volumétrica

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

siempre y cuando  $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ , es decir que la polarización no sea homogénea.

#### EJEMPLO 5.5 Problema 3

El problema a resolver se esquematiza en la figura siguiente, donde se ve un dipolo eléctrico frente a una esfera de radio  $a$  conectada a tierra y una carga  $q$



El potencial será

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \partial_n G_D dS,$$

pero la última integral será nula puesto que la esfera está puesta a tierra ( $\phi = 0$  sobre la esfera). La función de Green para una carga  $q$  frente a una esfera será

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{|\mathbf{x}'|} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/r^2 \mathbf{x}'|}$$

donde debe recordarse que en la expresión de la función de Green,

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

que aporta la geometría del problema, la parte  $F$  son las contribuciones debidas a las imágenes. La densidad de carga será

$$\rho(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) + q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d} - \boldsymbol{\varepsilon})$$

donde el último término debiera expandirse en serie de Taylor (lo cual puede hacerse ahora o después de integrar). Entonces

$$q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) + q\nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \dots$$

y se tiene

$$\rho(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -q\nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}).$$

De esta forma

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int_V \mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV = -\mathbf{p} \cdot \nabla G_D(\mathbf{x}, \mathbf{d}),$$

que no es otra cosa que

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{|\mathbf{x}'|} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/x^2 \mathbf{x}'|} \right) \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

pero se puede intercambiar  $x \equiv |\mathbf{x}|$  con  $x' \equiv |\mathbf{x}'|$  así no hay problemas con los diferentes versores  $\hat{x}, \hat{x}'$ . Entonces el segundo término de la anterior expresión pasa a ser

$$\frac{a}{x} \frac{1}{|x'\hat{x} - a^2/x\hat{x}'|} = \frac{a}{x} \frac{1}{\left(x'^2 + \left(\frac{a^2}{x}\right)^2 - 2a^2 \cos(\hat{x}, \hat{x}')\right)},$$

Teniendo en cuenta este intercambio,

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} - \frac{a}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}' - a^2/x^2 \mathbf{x}|} \right) \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

que lleva a

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \frac{a}{x} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{x}' - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - a^2/x^2 \mathbf{x}|^3} \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

donde el primer término es un dipolo y al segundo puede dársele otra forma. En efecto, evaluando en el punto solicitado se tiene

$$\frac{a}{x^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{d} - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{d} - a^2/x^2 \mathbf{x}|^3} = \frac{a}{d^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{d} - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

donde se ha podido intercambiar  $d$  con  $x$  por la forma de la expresión. Luego, considerando el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{x}$  se tiene

$$\frac{ap}{d^2} \frac{(x^2 - a^2/d \cos \theta)}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

Luego, completando cuadrados en el numerador se puede poner

$$\frac{ap}{d^2} \left[ x^2 - \frac{a^2}{d} x \cos \theta \right] = \frac{ap}{d^3} \left[ x^2 - 2 \frac{a^2}{d} x \cos \theta + \frac{a^2}{d} x \cos \theta + \left(\frac{a}{d}\right)^2 - \left(\frac{a}{d}\right)^2 \right]$$

$$\frac{ap}{d^2} \left[ x^2 - \frac{a^2}{d} x \cos \theta \right] = \frac{ap}{d^2} \left[ |\mathbf{x} - a^2/d \hat{z}|^2 + \frac{a^2}{d} \mathbf{x} \cdot \hat{z} - \left| \frac{a^2}{d} \hat{z} \right|^2 \right]$$

de manera que finalmente

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d})}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^3} + \frac{ap}{d^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|} + \frac{a^3}{d^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 - a^2/d^2 \mathbf{d})}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

y se tienen entonces tres términos que son: un dipolo real, un monopolo imagen y un dipolo imagen.

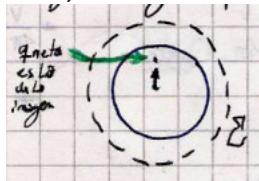
Notemos entonces que además de haber generado la imagen de un dipolo fue necesaria la imagen de una carga puntual extra. Si hubiésemos resuelto el problema haciendo la imagen directamente del dipolo hubiera estado incompleta<sup>1</sup>.

Por imágenes el problema involucra resolver desde

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{-q}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} + \frac{q}{|\mathbf{x} - (\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})|} + \frac{q}{d} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|} - \frac{q}{(d + \boldsymbol{\varepsilon})} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/(d + \boldsymbol{\varepsilon})^2 (\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})|},$$

y aquí deberían expandirse los denominadores con  $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$  mediante Taylor. En el último término de la expresión anterior convendría permutar  $(d + \boldsymbol{\varepsilon})$  con  $x$ . Entonces hay que usar las mismas ideas que en el caso anterior.

Acá hay una observación asociada al figurín bajo estas líneas



Con un problema interior la carga inducida es la carga imagen; porque puedo usar Gauss con una superficie  $\Sigma$  y el campo depende de la carga encerrada real ( $\sigma$  inducida).

La parte (c)

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} = -4\pi\sigma_{\text{ind}},$$

y como el segundo término del LHS es cero, se tiene

$$\sigma_{\text{ind}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi_0}{\partial r}(\mathbf{x})$$

donde la derivada es en esféricas.

La parte (d) es un desarrollo multipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{x} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{x^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{x^5} + \dots$$

Se tienen

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV = \frac{ap}{d^2}$$

que es la carga imagen puntual.

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV = [-q\mathbf{d} + q(\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathbf{p} \left( 1 + 2 \frac{a^3}{d^3} \right)$$

que, considerando el primer dipolo, da el aporte de un dipolo más una contribución de la esfera.

Puedo tomar ejes principales en  $x, y$ . Por la simetría de este problema  $Q_{xx}, Q_{yy}$  son iguales de manera que como la traza es nula, con solo calcular  $Q_{xx}$  ya tengo todo lo que necesito.

Para el dipolo real (será el momento cuadripolar de un dipolo desplazado del origen)

$$Q_{xx} = -q(-d^2) + q(-(d + \boldsymbol{\varepsilon})^2) = -2pd$$

donde en el último término se ha hecho el límite  $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ . Para la carga imagen y el dipolo imagen serán, respectivamente,

$$Q_{xx} = \frac{ap}{d^2} \left( \frac{a^2}{d} \right)^2 \quad Q_{xx} = -2 \left( \frac{a^3 p}{d^3} \right) \left( \frac{a^2}{d} \right)$$

**Anoté la definición del momento cuadrupolar**

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - |\mathbf{x}|^2 \delta_{ij}) \rho dV$$

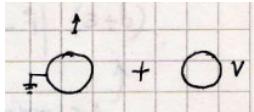
<sup>1</sup>Si se hace la imagen del dipolo considerando sus cargas componentes sale bien la cosa

Sumando todos

$$Q_{xx} = -2pd \left( 1 + \frac{a^5}{2d^5} \right),$$

el último factor es la contribución de la esfera al cuadripolo.

Por superposición, si la esfera estuviera a potencial  $V$  como se muestra en el gráfico



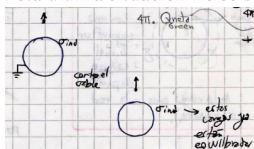
se tendría

$$\int_V \rho G_d dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \partial_n G_D dS$$

y la integral de superficie se puede hacer utilizando la ley de Gauss,

$$-\frac{V}{4\pi} \int_S E_G dS = \frac{Va}{r}$$

Esta última situación no sé bien a qué viene:

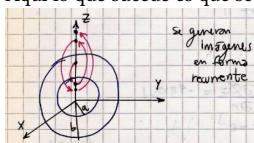


**Anoté por allí que  
superposición es un Green  
gráfico.**

Cualquier carga  $Q$  que se añada después ya no altera la distribución  $\sigma$ .

#### EJEMPLO 5.6 Problema 4

Aquí lo que sucede es que se generan imágenes en forma recurrente.



Podemos agrupar en un cuadro la generación según el orden. Entonces en cada orden  $n$  tenemos un par  $(q, r)$  que se construye colocando la prescripción  $(q, r)$  anterior correspondiente al radio "cruzado". Así por ejemplo, el  $n = 2$  se construye en  $r < a$  tomando la prescripción de  $n = 1$  con  $r < a$  y reemplazando allí el  $n = 1$  de  $r > b$ . Consecuentemente, la prescripción  $n = 2$  para  $r > b$  se construye tomando la  $n = 1$  de  $r > b$  y reemplazando allí la  $n = 1$  de  $r < a$ .

$n$	$r < a$	$r > b$
1	$\left( -\frac{aq}{r}, \frac{a^2}{r} \right)$	$\left( -\frac{bq}{r}, \frac{b^2}{r} \right)$
2	$\left( -\frac{a(-qb/r)}{b^2/r}, \frac{a^2}{b^2/r} \right) = \left( \frac{aq}{b}, \frac{a^2r}{b^2} \right)$	$\left( -\frac{b(-aq/r)}{a^2/r}, \frac{b^2}{a^2/r} \right) = \left( \frac{bq}{a}, \frac{b^2r}{a^2} \right)$
3	$\left( -\frac{qa^2}{br}, \frac{a^4}{b^2r} \right)$	$\left( -\frac{qb^2}{ar}, \frac{b^4}{a^2r} \right)$
	...	...

Siguiendo la recurrencia se tiene

$$n = 1, 3 : -q \frac{a}{r} \left( \frac{a}{b} \right)^n \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r < a$$

$$n = 2, 4 : q \left( \frac{a}{b} \right)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad r < a$$

y

$$n = 1, 3 : -q \frac{b}{r} \left( \frac{b}{a} \right)^n \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r > b$$

$$n = 2, 4 : q \left( \frac{b}{a} \right)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad r > b$$

mientras que para las distancias se obtiene

$$n = 1, 3 : \frac{a^2}{r} \left( \frac{a}{b} \right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r < a$$

$$n = 2, 4 : r \left( \frac{a}{b} \right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad r < a$$

y

$$n = 1, 3 : \frac{b^2}{r} \left( \frac{b}{a} \right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r > b$$

$$n = 2, 4 : r \left( \frac{b}{a} \right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad r > b$$

Finalmente todo esto se puede ubicar en una serie para la función de Green, que será

$$G_D = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^n}{|\mathbf{x} - \left(\frac{a}{x'}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \mathbf{x}'|} + \frac{-\left(\frac{b}{x}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^n}{|\mathbf{x} - \left(\frac{b}{x'}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \mathbf{x}'|} \right] + \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{|\mathbf{x} - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \mathbf{x}'|} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n}{|\mathbf{x} - \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \mathbf{x}'|} \right] + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

## 2.6 Desarrollo multipolar para el campo magnético

Haremos una especie de desarrollo multipolar del potencial vector  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

quedándonos a primer orden para  $\mathbf{x}$  en torno a  $\mathbf{x}' = 0$ . Es decir, se empleará

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3}$$

lo cual conduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int_V \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

donde el primer término es nulo lo cual se verá a continuación. En notación indicial la integral que interesa es

$$\int_V J_i(\mathbf{x}') dV',$$

luego notemos que

$$\partial_k(J_k x_i) = (\partial_k J_k)x_i + J_k \partial_k x_i$$

donde el primer término es nulo por ser la divergencia de  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  y el segundo es la delta de Kronecker de tal forma que

$$\partial_k(J_k x_i) = J_k \delta_{ki} = J_i. \quad (6.1)$$

El teorema de la divergencia entonces nos asegura que

$$\int_V \partial_k(J_k x_i) dV = \int_S J_k x_i dS$$

donde debe notarse que si la superficie es tal que engloba a todas las corrientes  $J$  entonces ya no hay corriente sobre la superficie y el integrando es nulo.

Se quiere ver que vale

$$\int_V J_i x_k dV = - \int_V J_k x_i dV,$$

y para ello veamos qué le pasa a la divergencia de un tensor de tercer rango, que se puede escribir

$$\partial_l(x_i J_l x_k) = \partial_l(x_i J_l) x_k + x_i J_l \partial_l(x_k)$$

usando el resultado anterior (6.1) es

$$\partial_l(x_i J_l x_k) = J_i x_k + x_i J_k,$$

y como es

$$\int_V (J_i x_k + x_i J_k) dV = 0.$$

**Recordar que Biot & Savart es para densidad de corriente estacionaria, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$**

Parece que acá termina la cosa.  
No me queda nada claro.

Por otra parte, dado que

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' - \mathbf{J} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$$

se puede aplicar esto en la integración del segundo término

$$\int_V x_i J_k x'_i dV' = \int_V x_i J_i x'_k dV' - \int_V \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k dV'$$

donde el primero aquí será nulo porque es idéntico al anterior, y entonces

$$\int_V x_i J_k x'_i dV' = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int_V (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k dV',$$

quedando en deuda la explicación del 1/2.

Este término que resultó nulo correspondería al orden monopolar y su nulidad refleja la no existencia de monopolos magnéticos.

Esto conduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \left[ \left( \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J} dV \right) \times \mathbf{x} \right]$$

y si definimos el corchete como  $\mathbf{m}$  (momento magnético) entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

en el origen, y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

desplazado hacia  $\mathbf{x}'$ , las cuales son expresiones a primer orden y que utilizan el gauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

De esta manera tendremos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2c} [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')]$$

que es la magnetización o densidad de momento magnético, y entonces el momento magnético pasa a ser

$$\mathbf{m} = \int_v \mathcal{M}(\mathbf{x}') dV'.$$

Ahora se querrá ver qué le pasa al rotor de  $\mathbf{A}$ . Para ello se usa la identidad vectorial I2 del apéndice. Considerando  $\mathbf{m} = \mathbf{M}$  y  $\mathbf{N} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$  se tiene

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \mathbf{m} (\nabla \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3) - \mathbf{N} (\nabla \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 \cdot \nabla) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3,$$

**Esto habrá que hacerlo bien. La notación está muy poco consistente.**

donde los dos primeros términos son nulos<sup>2</sup>. Entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + 4\pi\delta(\mathbf{x}) \mathbf{m},$$

pero el segundo término con la delta no se considerará porque estamos lejos de la distribución de corrientes<sup>3</sup>. Luego,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Recordando la expresión para el momento dipolar del campo eléctrico (buscarla) como

$$\mathbf{E}^{(2)} = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

que llevaba a  $\mathbf{E}^{(2)} = (3(\mathbf{P} \cdot \hat{n})\hat{n} - \mathbf{P})/|\mathbf{x}|^3$ , por analogía se tendrá

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3},$$

que nos dice que bien lejos cualquier distribución de corriente localizada  $\mathbf{B}$  se presenta como el campo magnético de un dipolo magnético dado por  $\mathbf{m}(x)$ . Esta aproximación corresponde, por supuesto, al primer orden del desarrollo. El momento magnético puede pensarse entonces como una espirilla.

## 2.6.1 Interpretacion del momento magnético

Se puede pensar al  $\mathbf{m}$  como una espira plana, lo cual nos provee de una noción intuitiva del momento dipolar magnético. Entre un punto  $x$  del borde y un diferencial de arco  $d\ell$  queda definido un triángulo infinitesimal cuya área  $dA$  será

$$dA = \frac{1}{2}x \sin(\alpha) d\ell,$$

que no es otra cosa que el área de un triángulo (base por altura sobre dos), siendo el área orientada

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

y entonces

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{A}$$

<sup>2</sup>El segundo es nulo porque  $\mathbf{m}$  no depende de  $\mathbf{x}$

<sup>3</sup>El término con la delta de Dirac cobra importancia en análisis microscópicos y cuánticos



Figura 6.16

Para convertir un volumen a espira hacemos la transformación del modo usual,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV = \frac{I}{2c} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

usando que

$$\mathbf{J} dV = J d\ell dS = \frac{I}{dS} d\ell dS = I d\ell$$

A modo de ejemplo, para una espira circular de radio  $r$  es

$$m = \frac{i}{c} \pi r^2.$$

## 2.6.2 Interacción del campo magnético con una distribución de corriente

La idea es considerar la fuerza sobre una distribución de corrientes debida a un campo externo homogéneo. Hacemos una expansión de Taylor del campo  $\mathbf{B}$  con  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

y entonces como la fuerza es

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}(\mathbf{x}') dV'$$

resulta que

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 dV' + \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B} dV'$$

siendo el primer término nulo.



Figura 6.17

Mediante identidades vectoriales podemos llegar a una expresión

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) dV'$$

y utilizando la demostración previa de que

$$\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} dV = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV,$$

resulta que

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{B} \times \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV$$

y entonces, identidades vectoriales mediante,

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Si el campo es homogéneo la fuerza es nula. Por otra parte, como  $\mathbf{F} = -\nabla U$  se puede definir energías para los dipolos de acuerdo con el esquema

$$F_m = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$F_e = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

siendo  $U_{m,e}$  la energía de los dipolos en campos externos.

La fuerza de un campo  $\mathbf{B}$  externo sobre una distribución de corrientes es el gradiente de cierta energía

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

de donde se ve claramente que si  $\mathbf{B}$  es uniforme entonces la fuerza es nula.  $\mathbf{m}$  es una constante que depende de la distribución de corrientes.

#### EJEMPLO 6.1 Problema 6b

Ahora  $a \ll L$  y por la simetría de rotación son convenientes coordenadas cilíndricas. La simetría reclama que no hay dependencia en  $\varphi$  ni componente  $B_\varphi$  de manera que

$$\mathbf{B}(r, z) = B_z(r, z) \hat{z} + B_r(r, z) \hat{r}$$

Considerando una expansión de Taylor para  $r$  pequeños

$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z) + \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=0} r \quad B_r(r, z) \approx B_r(0, z) + \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_{r=0} r$$



La simetría dice también que  $B_r(0, z) = 0$  y utilizando la divergencia nula  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  del campo en cilíndricas se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=0}$$

y evaluando en  $r = 0$  se obtiene [CHECK ESTO]

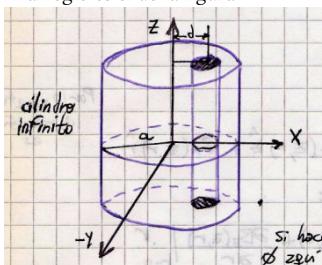
$$\frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=0}$$

Se obtiene una expresión algo más general que la que se hubo obtenido (la de la clase pasada, que es la del capítulo 1) que utilizaba  $L \rightarrow \infty$ .

### EJEMPLO 6.2 Problema 11

Este es un problema que no incluye condiciones de contorno porque la distribución de carga está dada. Es un cilindro infinito. Si hacemos el potencial  $\varphi$  aquí vemos que revienta lo cual se debe a que la distribución de carga es infinita.

El arreglo es el de la figura



También se puede pensar de la siguiente forma



El campo para un cilindro de radio  $R$  centrado en  $r = 0$  es

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{2\pi a^2 \rho}{r} \hat{r} & r \geq R \\ 2\pi r \rho \hat{r} & r < R \end{cases}$$

Escribiendo el campo interno como

$$2\pi r \rho \hat{r} = 2\pi \rho \mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{x} = r \hat{r}$  es el vector que vive en el plano horizontal, se puede trasladar el cilindro así

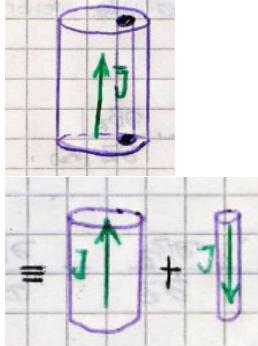
$$2\pi \rho (\mathbf{x} + d \hat{x})$$

y entonces el campo dentro del cilindro es

$$\mathbf{E} = 2\pi \rho d \hat{x}.$$

**Hay que mirar la práctica porque esto está confuso.**

Para la parte (b) se considera



$$B(r) 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j,$$

pero  $\mathbf{B}$  es en  $\hat{\varphi}$  y entonces

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi r j}{c} \frac{\hat{\varphi}}{r} = \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + x \hat{y})$$

de manera que el campo total, que es la suma de los campos del cilindro grande y del pequeño, será

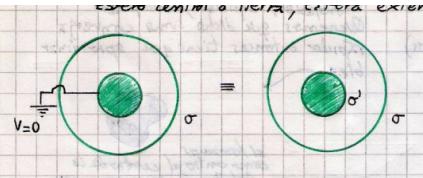
$$\mathbf{B} = \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + d \hat{y} + x \hat{y}) - \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + x \hat{y}),$$

o bien

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi j}{c} d \hat{y}.$$

**EJEMPLO 6.3 Problema 13**

Esfera central a tierra, esfera externa con densidad superficial  $\sigma$ . La siguiente equivalencia es posible



Luego, esto se resuelve así, usando la simetría esférica y la ley de Gauss  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$  se tienen

$$4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 & r < a \\ 4\pi a^2 \sigma & a < r < b \\ 4\pi \frac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r^2} \hat{r} & r > b \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ 4\pi \frac{\sigma' b^2}{r^2} \hat{r} & a < r < b \\ 4\pi \frac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r^2} \hat{r} & r > b \end{cases}$$

El potencial será

$$V = \begin{cases} 4\pi \frac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r} + C_1 & r > b \\ 4\pi \frac{\sigma' b^2}{r} + C_2 & a < r < b \\ C_3 & r < a \end{cases}$$

y al pedir continuidad para el mismo, se tienen

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 4\pi\sigma, \quad C_3 = 0$$

donde en la última está metida la  $\sigma'$  que hace nulo el potencial  $V$  sobre la esfera interna. Así, finalmente

$$V = \begin{cases} 4\pi \frac{\sigma a(a-b)}{r} & r > b \\ 4\pi \frac{\sigma a(r-b)}{r} & a < r < b \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Una serie de diagramitas a descubrir siguen:



## 2.7 Perturbación de un campo eléctrico uniforme por un conductor

En la figura, parte superior, se tienen dos cargas separadas una distancia  $2R$  según se muestra, lo que produce un campo

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{R^2} \hat{z}.$$

En el límite de  $Q, R \rightarrow \infty$  con  $2Q/R^2 = cte$ , se tiene un campo uniforme.

El potencial  $\phi$  de la esfera es constante por ser conductor, y se puede definir como

$$\phi|_{\text{esf}} \equiv 0$$

pues  $\phi(\infty) \neq 0$  porque hay densidad de carga  $\rho$  en el infinito.

Para la carga superior,

$$\phi_1 = \frac{-Q}{|\mathbf{x} - R \hat{z}|} + \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} - a^2/R \hat{z}|}$$

mientras que para la inferior

$$\phi_2 = \frac{Q}{|\mathbf{x} + R \hat{z}|} - \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} + a^2/R \hat{z}|}$$

Recordemos que

$$(1 + \alpha)^{(-1/2)} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha \quad \alpha \ll 1$$

y podemos trabajar el denominador

$$|\mathbf{x} - R \hat{z}| = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos \theta}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - R \hat{z}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos \theta}} = \frac{1}{R(1 + x^2/R^2 - 2x/R \cos \theta)^{(1/2)}}$$

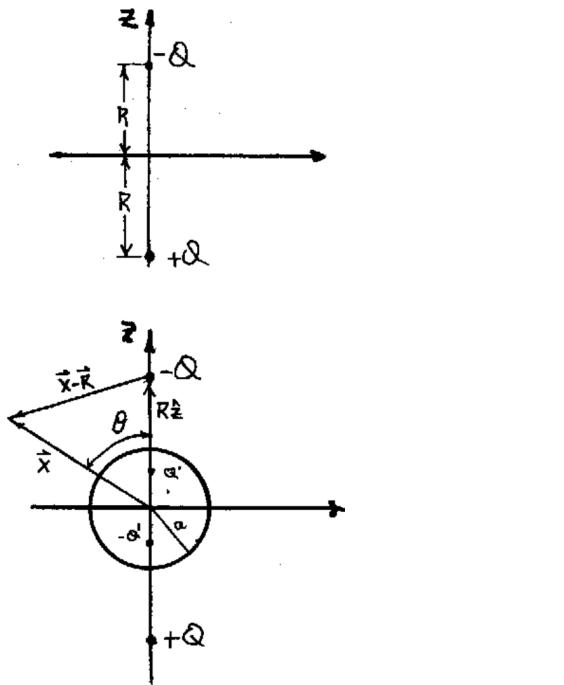


Figura 7.18

$$\frac{1}{|x - R\hat{z}|} \approx \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos \theta \right)$$

de manera que luego

$$\begin{aligned} \phi(r) &\approx Q \left[ \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos \theta \right) + \frac{a}{Rx} \left( 1 + \frac{a^2}{Rx} \cos \theta \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} \cos \theta \right) - \frac{a}{Rx} \left( 1 - \frac{a^2}{Rx} \cos \theta \right) \right] \end{aligned}$$

$$\phi(x) \approx -\frac{2Qx}{R^2} \cos \theta + \frac{2a^3 Q}{R^2 x^2} \cos \theta$$

y haciendo  $x \equiv r$  y tomando el límite,

$$\phi(r) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

y la carga total sobre la esfera es nula puesto que estuvo aislada todo el tiempo. Respecto de la Figura, si hacemos un Gauss en la zona indicada se obtiene  $Q_n = 0$ , entonces  $\phi(r = a) = 0$ .



**Figura 7.19**

El segundo término es como un dipolo puntual, apuntando en la misma dirección que el campo externo,

$$E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta = E_0 \frac{a^3 \hat{z} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

donde

$$\mathbf{p} \equiv E_0 a^3 \hat{z}$$

#### EJEMPLO 7.1 Problemita interesante



#### NOTAS

##### 7.1 Sobre el problema de la carga frente a la esfera conductora a tierra

Decíamos que esta solución se puede obtener de manera más heurística, como lo hace Jackson? [CITA], a partir de la expresión en

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0,$$

se podría intentar forzar que el segundo denominador sea idéntico al primero para lo cual se puede multiplicar arriba y abajo por el factor  $(y/a)$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{y/a \sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0$$

lo que conduce a

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{\sqrt{y^2 + y^2 y'^2/a^2 - 2 y^2/a y' \cos \gamma}} = 0$$

y esta ecuación se satisface si  $yy' = a^2$  y si  $q = -q'(y/a)$ , que es justamente la solución encontrada previamente de un modo más tradicional.

También es interesante considerar algunos casos límite y ver que se recuperan resultados y comportamientos familiares. Si  $q$  está localizada muy cerca de la superficie de la esfera, i.e.  $|\mathbf{y}| \approx a + \varepsilon$  resultan  $y' \approx a - \varepsilon$  y  $q' \approx -q + (\varepsilon/a)q$  que son exactamente los resultados para una carga frente a un plano conductor (si despreciamos la cantidad infinitesimal  $(\varepsilon/a)$ ). Muy cerca de la superficie de la esfera la carga ve un plano infinito.

## Capítulo 3

---

# Método de separación de variables

Al resolver una PDE (partial differential equation) se termina en general en un problema de Sturm-Liouville, que lleva a autovalores y autofunciones.

Un problema regular de Sturm-Liouville está representado por una ecuación del tipo

$$\frac{d}{dx} \left[ r(x) \frac{df}{dx} \right] + [q(x) + \lambda p(x)]f = 0,$$

donde  $p(x)$  es una función peso que definen la ortogonalidad (muchas veces vale 1). Las condiciones de contorno en el intervalo  $(a, b)$  serán

$$f(a) + \frac{df}{dx}(a) = 0 \quad f(b) + \frac{df}{dx}(b) = 0$$

En el  $(a, b)$  las condiciones de ortogonalidad se leen

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) p(\xi) d\xi = 0 \quad n \neq m$$

Asimismo, si están normalizadas, se puede escribir

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) p(\xi) d\xi = \delta_{nm}$$

Luego, cualquier  $f$  (well behaved) en el  $(a, b)$  se puede poner como

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^N a_n U_n(x)$$

Entonces

$$M_N = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N U_n(x') \right|^2 dx,$$

y esta expresión es mínima cuando los  $a_n$  son

$$a_n = \int_a^b U_n^*(x') f(x') p(x') dx'$$

Entonces,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x')$$

es correcto porque la serie converge. Luego, integrando en  $x'$

$$f(x) = \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') f(x') p(x') dx' \right] U_n(x)$$

y donde

$$f(x) = \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) \right] f(x') p(x') dx'$$

es claro que esto debe tener comportamiento de delta de Dirac, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

es la llamada condición de clausura.

### 3.1 Separación en coordenadas cartesianas

Separamos los problemas en regiones donde vale  $\nabla^2\phi = 0$  entonces las fronteras tendrán la  $\rho(\mathbf{x}')$  en general en forma de  $\sigma, \lambda$ .

Para coordenadas cartesianas la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$ , adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

que intentaremos resolver a partir de un *ansatz*

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

lo que conduce a

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Para que esta solución valga, cada término tiene que ser una constante, entonces primeramente

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$$

lleva a

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2,$$

y

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2,$$

conduce a

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

donde cada una de estas ecuaciones es una versión simplificada de Sturm-Liouville.

En estos casos particulares son osciladores armónicos; uno en cada dirección.

Luego suponiendo  $\alpha, \beta \int \mathbb{R} > 0$  será  $\gamma \in \mathbb{R}$  y la solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} e^{\pm i\alpha_m x} e^{\pm i\beta_n y} e^{\pm i\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z}.$$

donde  $A_{m,n}$  es una constante general. Las condiciones de contorno permitirán fijar las constantes y entonces la solución tendrá diversas formas.

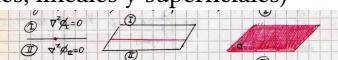
Según la conveniencia del problema particular será

$$e^{\pm \gamma x_i} = \cosh(\gamma x_i) + \sinh(\gamma x_i)$$

$$e^{\pm ikx_i} = \cos(kx_i) + i \sin(kx_i)$$

## Algunos tips

Queremos resolver la ecuación de Poisson, en el caso de cargas tipo (puntuales, lineales y superficiales)



podemos resolver  $\nabla^2 \varphi = 0$  que es más sencilla y separamos en dos regiones ① y ② donde me preocupo solamente por Laplace. Si las fuentes son más complejas que esto nos remitiremos a la función de Green.

**EJEMPLO 1.1 Potencial en una caja**

En este caso interesa el potencial  $V$  dentro de la caja. El exterior está fuera del ámbito de la resolución.



Se plantea para el potencial

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta} [A_\alpha \sin(\alpha x) + B_\alpha \cos(\alpha x)] [C_\beta \sin(\beta y) + D_\beta \cos(\beta y)] \times [E_\gamma \sinh(\gamma z) + F_\gamma \cosh(\gamma z)]$$

Utilizando que el potencial es nulo en los contornos indicados (ver figura) resulta

$$\phi(0, 0, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad F_\gamma = 0$$

$$B_\alpha = 0 \quad D_\beta = 0$$

**Tal vez poner que esto es por las tapas laterales.**

Entonces, juntando todas las constantes en una única constante  $A$  el potencial será la suma siguiente

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \sinh(\gamma z)$$

donde dada la relación  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$  este índice se ha absorbido junto a los otros dos de manera que solo es una doble sumatoria.

Para satisfacer las condiciones de potencial nulo en  $x = a$  y  $y = b$  se deben cumplir

$$\alpha = n \frac{\pi}{a} \quad \beta = m \frac{\pi}{b}$$

para todo natural  $n, m$ . Luego

$$\gamma = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

Entonces, cambiando los índices de la sumatoria a

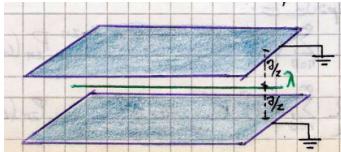
$$\phi(x, y, z) = \sum_{n, m} A_{nm} \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{b} y\right) \sinh\left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} z\right)$$

Finalmente sobre la tapa superior será  $\phi(x, y, c) = V(x, y)$  de manera que, mediante un cálculo rutinario llegamos a

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{b} y\right) dy dx.$$

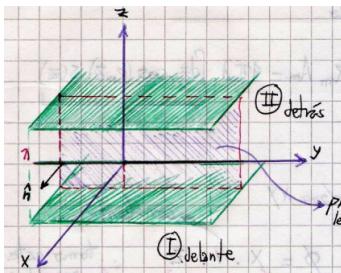
**EJEMPLO 1.2 Problema 2**

El problema a resolver está en el sketch de abajo



Queremos que no haya carga en las regiones en las cuales se subdividirá el espacio nos ocuparemos del laplaciano.

El sistema coordenado a utilizar está mostrado abajo



La densidad de carga se puede escribir según

$$\rho(\mathbf{x}) = \lambda \delta(x) \delta(z) = \sigma \delta(z)$$

donde hemos definido una densidad  $\sigma$ . La solución será de la forma

$$\Phi = X Y Z,$$

donde  $Y$  será una constante porque el problema no depende de  $y$ . Como las funciones trigonométricas se anulan en puntos y  $Z$  necesita esto se eligen

$$Z \propto \cos(k_z z), \sin(k_z z)$$

y  $X \propto e^{-Kx}$  porque el potencial podría ir decreciendo en  $x$  –aunque es infinito–. Donde  $K = k_z$  y  $k_y = 0$ . Hay una simetría en  $xy$  de reflexión, entonces el potencial es par. Luego, para la base de funciones usaré funciones pares (cosenos). Luego,

$$\phi(z = \pm a/2) = 0,$$

por ser planos conductores a tierra. Entonces hacer que se cumpla

$$\cos(\pm a/2K) = 0,$$

necesita  $k_n = (2n + 1)\pi/a$  (nos alcanza con  $\mathbb{N}$  más el cero). La base de funciones será

$$\phi_I = \sum_n A_n^I e^{-K_n x} \cos(K_n z) \quad x > 0$$

$$\phi_{II} = \sum_n A_n^{II} e^{K_n x} \cos(K_n z) \quad x < 0$$

Ahora pediremos condiciones en la superficie de separación, la continuidad del potencial

$$\phi_I(x = 0) = \phi_{II}(x = 0)$$

Entonces, para el campo resultan

$$\sum_n A_n^I \cos(k_n z) = \sum_n A_n^{II} \cos(k_n z)$$

es decir  $A_n^I = A_n^{II} \equiv A$ , y para las derivadas del potencial

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \phi_I}{\partial x} - \left(-\frac{\partial \phi_{II}}{\partial x}\right) &= 4\pi\lambda\delta(z)|_{x=0} \\ 2 \sum_n k_n A_n \cos(k_n z) &= 4\pi\lambda\delta(z)\end{aligned}$$

Para despejar el coeficiente se utilizan las propiedades de ortogonalidad, tomando el producto escalar en ambos miembros de la anterior ecuación,

$$ak_m A_m = 4\pi\lambda \int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_m z) \delta z dz$$

y como la integral da uno,

$$A_n = \frac{4\lambda}{2n+1}$$

**El período es  $a$  pues hay nodos en  $\pm a/2$ . Se multiplica por coseno y se integra.**

Ahora considero el plano  $xy$ .



Se propone una fórmula

$$\phi = XYZ,$$

donde  $X$  es una  $e^{ikx}$ ,  $Y$  es una constante y para  $Z$  se toma  $\sinh(k|z - a/2|)$  porque un solo cero es necesario. Entonces tenemos prescripciones para cada zona que son

$$\begin{aligned}\phi_I &= \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(k|z - a/2|) A_k^I e^{ikx} dk \\ \phi_{II} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(k|z - a/2|) A_k^{II} e^{ikx} dk\end{aligned}$$

Entonces, de la evaluación de los contornos

$$\phi_I(z=0) = \phi_{II}(z=0)$$

surgen

$$A_k^I = A_k^{II} \equiv A_k$$

y asimismo

$$-2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk - 2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk = 4\pi\lambda\delta(x)$$

lo cual nos lleva a

$$-2 \int A_k e^{ikx} k \cosh(ka/2) dk = 4\pi\lambda\delta(x),$$

y multiplico por  $\int e^{-ik'x} dx$  lo cual lleva a

$$A_k = \frac{-\lambda}{k' \cosh(ka/2)},$$

**Usaremos la expresión de la delta en Fourier:**

$$2\pi\delta(k - k') = \int e^{i(k-k')x} dx$$

y volviendo todo a  $k$  sin primar

$$\phi = -\lambda \int dk e^{ikx} \frac{\sinh(k|z-a/2|)}{k' \cosh(ka/2)}$$

Para este caso obtenemos para el potencial una integral, contrariamente a lo que teníamos para el otro caso donde aparecía una serie.

Queremos ver la relación entre ambas,

$$\sinh(k|z-a/2|) = \sum_n A_n \cos(k_n z)$$

Sacamos de una tabla la forma del  $A$ , que es

$$A_n = -\frac{4k}{a} \frac{\cosh(ka/2)}{(k^2 + k_n^2)}$$

y obtenemos, a menos de una constante,

$$\int \frac{e^{ikx}}{(k^2 + k_n^2)} dx$$

Por residuos se tiene

$$\int \frac{e^{ikx}}{(k - ik_n)(k + ik_n)} \text{Res}(f, \text{den.})$$



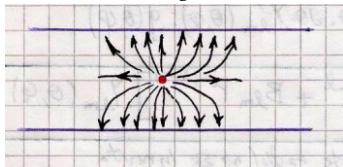
Usamos residuos para evaluar la integral. Vemos que da

$$\frac{2\pi i e^{-k_n}}{2ik_n}$$

En el caso de  $x > 0$  se tendrá

$$\phi = 4\lambda \sum_n \frac{\cos(k_n z)}{2n+1} e^{-k_n x}$$

Para calcular las cargas inducidas, véase figurín bajo estas líneas, será



$$\left. \frac{\partial \phi^{II}}{\partial z} \right|_{z=-a/2} = 4\pi\sigma_{\text{ind}}$$

donde

$$\sigma = \frac{\lambda e^{\pi|x|}}{a(1 + e^{-})}$$

y entonces

$$\int \sigma dx = \frac{Q^{\text{ind}}}{L} = -\frac{\lambda}{2}$$

Lo que sucede en las direcciones  $x, y$  son condiciones periódicas de potencial que requieren dos ceros.

## 3.2 Separación en coordenadas esféricas

Para coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

proponiéndose la separación

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) Q(\varphi)$$

resulta en

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}$$

Procediendo como en el caso anterior, se tiene primeramente

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -\alpha^2,$$

un oscilador armónico en  $\varphi$  de manera que

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi},$$

donde en principio  $\alpha \in \mathbb{R}$  pero podemos ir más lejos y como

$$\cos \alpha\varphi = \cos(\alpha\varphi \pm 2\pi)$$

se sigue que  $\alpha \in \mathbb{Z}$  y podemos llamarlo  $m^2 \equiv \alpha^2 \in \mathbb{Z}$ . Estamos suponiendo que tenemos un recinto de integración que abarca todo el rango de  $\varphi$  de 0 a  $2\pi$ . Debe tenerse presente que esta solución no sirve si la distribución no abarca todo el intervalo angular mencionado.

Luego,

$$-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \beta^2,$$

**Las coordenadas convenientes dependerán de los contornos. Recorremos que siempre la cosa es resolver la ecuación más sus BC.**

que merced al cambio de variables  $x = \cos \theta$ , que implica  $d/d\theta = -\sin \theta d/dx$  lleva la ecuación anterior a la forma

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[ \beta^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0,$$

la cual es claramente un problema de Sturm-Liouville. Con respecto a  $r$  se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \beta^2$$

donde un nuevo cambio de variables  $R(r) = U(r)/r$  conduce a

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{\beta^2 U}{r^2} = 0$$

Si el problema tiene simetría azimutal ( $m = 0$ ) se tendrá<sup>1</sup>:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \beta^2 P = 0, \quad (2.1)$$

la cual tiene un punto singular en  $x^2 = 1$  que corresponde al coseno en 0 o en  $\pi$  (el eje polar). Este problema se evita con

$$\beta^2 = \ell(\ell+1), \quad \ell \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

porque la serie sólo se mueve entre  $z \in (-1, 1)$  y entonces con la condición (2.2) las funciones que salen de la ecuación (2.1) no presentan singularidades. La serie que da  $P$  se corta. Son los polinomios de Legendre. Tenemos una nueva restricción entonces que es el eje polar  $-1 < z < 1$ . Se reescribe la (2.1) como

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P = 0.$$

Las funciones  $P$  son los polinomios de Legendre  $P_\ell$  que forman un conjunto completo y son ortogonales entre sí. Se pueden construir con la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [x^2 - 1]^\ell,$$

donde se cumple  $P_\ell(x=1) = 1$  y además las condiciones de ortogonalidad son

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

---

<sup>1</sup>Si  $m = 0$  significa sencilamente que no depende del ángulo  $\varphi$ , o sea que hay simetría de revolución.

Se ve [?]

$$(\ell + 1)P_{\ell+1} - (2\ell + 1)xP_\ell + \ell P_{\ell-1} = 0$$

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx} - x \frac{dP_\ell}{dx} - (\ell + 1)P_\ell = 0$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_\ell}{dx} - \ell x P_\ell + \ell P_{\ell-1} = 0$$

y

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}U = 0$$

de manera que su solución será del tipo

$$U(r) = Ar^{\ell+1} + BR^{-\ell}.$$

siendo

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)Q(\varphi)$$

un armónico esférico.

si usamos  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  de modo que  $\alpha \in \mathbb{Z}$  y entonces  $\alpha = m$ , con simetría azimutal es  $m = 0$  (rotación en  $\varphi$ ),

$$Q = G\varphi + H \quad G, H \text{ ctes.}$$

Para las otras funciones será

$$R(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell R^{-\ell-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_\ell P_\ell^m(\cos(\theta)) + D_\ell Q_\ell^m(\cos(\theta))$$

siendo  $P_\ell^m$  polinomio de Legendre, que verifica la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [x^2 - 1]^\ell$$

con  $P_\ell(\cos(\theta))$  polinomio de Legendre de primera especie, y  $Q_\ell(\cos(\theta))$  de segunda especie. Los  $\{P_\ell\}$  son un conjunto completo y ortogonal en  $-1 \leq x \leq 1$  o bien en  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Los  $\{Q_\ell^m(\cos(\theta))\}$  tienen problemas en  $\theta = 0, \theta = \pi$  (eje  $z$ ) de manera que si está el eje  $z$  no podemos usar  $Q_\ell^m$ ; en estos problemas sólo podemos usar  $P_\ell^m(\cos(\theta))$ . Luego, la solución total será

$$\phi(r, \theta, \phi) = [R(r)][\Theta(\theta)][Q(\varphi)],$$

o bien

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}] [C_\ell P_\ell^m + D_\ell Q_\ell^m] [E_m \cos(m\phi) + F_m \sin(m\phi)]$$

y en el caso particular  $m = 0$

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}] [C_{\ell} P_{\ell}^m + D_{\ell} Q_{\ell}^m] [G_0 \phi + H_0]$$

Las constantes  $A_{\ell}, B_{\ell}, C_{\ell}, D_{\ell}, E_m, F_m$  se ajustan con el  $\phi(r \rightarrow \infty)$ ,  $\phi(r \rightarrow 0)$ ,  $\phi(z = 1)$  y  $\phi(z = -1)$ .

Lo que permite esquivar el problema del punto singular en  $x \equiv \cos(\theta) = 1$  es

$$\beta^2 = \ell(\ell + 1) \quad -\ell < m < \ell \quad \alpha^2 = m^2$$

Recordemos las sumas de series

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} z^{\ell} \quad |z| < 1,$$

el polinomio asociado de Legendre

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} [1-x^2]^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} [x^2 - 1]^{\ell}$$

que cumple

$$P_{\ell}(1) = 1 \quad P_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell} \quad \forall \ell$$

con

$$\int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx = \frac{2}{2\ell + 1}$$

siendo la ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} P_{\ell'}^m(\cos(\theta)) P_{\ell}^m(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \delta_{\ell\ell'}$$

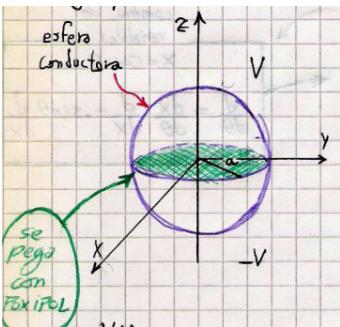
$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^m(x) P_{\ell}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

En esféricas las constantes de separación están asociadas

$$R(r) \text{ con } \ell \quad \Theta(\theta) \text{ con } \ell, m \quad Q(\phi) \text{ con } m$$

#### EJEMPLO 2.1 Problema de separación esférica

Ya este problema, ver figura, tiene simetría de revolución. Entonces será  $m = 0$



$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_{\ell}r^{\ell} + B_{\ell}r^{-(\ell+1)}] P_{\ell} \cos \theta \quad (2.3)$$

En dos secciones diferentes se tendrá

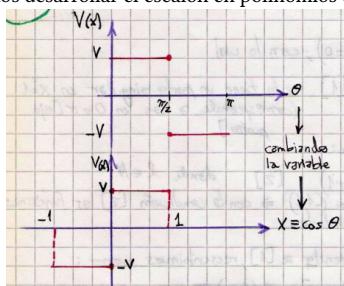
$$r > a \quad \varphi_I(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-(\ell+1)} P_{\ell} \cos \theta$$

$$r < a \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell} \cos \theta$$

Entonces, cada potencial tiende al valor  $V(x)$

$$\varphi_I(r, \theta)_{r=a} \rightarrow V(x) \quad \varphi_{II}(r, \theta)_{r=a} \rightarrow V(x)$$

El escalón refleja la imparidad, de manera que sólo aparecerán términos impares. Ahora queremos desarrollar el escalón en polinomios de Legendre



El gráfico de arriba tiene también el cambio de variables  $x \equiv \cos \theta$ ,

$$\frac{V(x)}{V} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} P_{\ell}$$

con  $\ell$  impar. El coeficiente

$$c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\ell}(x) dx = (2\ell+1) \int_0^1 P_{\ell}(x) dx,$$

y usando la fórmula de Rodrigues

$$c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2^{\ell}\ell!} \int_0^1 \frac{d^{\ell}(x^2-1)^{\ell}}{dx^{\ell}} dx$$

se viene

$$c_\ell = \left(\frac{-1}{2}\right)^{(\ell-1)/2} \frac{(2\ell+1)(\ell-2)!!}{2((\ell+1)/2)!}$$

donde el doble factorial es sobre los impares. Hemos hallado los coeficientes. Reemplazando para los primeros

$$c_1 = 3/2 \quad c_3 = -7/8 \quad c_5 = 11/16,$$

Entonces

$$A_\ell = Va^{-\ell}c_\ell \quad B_\ell = Va^{\ell+1}c_\ell$$

### 3.3 Detalles sobre solución de problemas de potencial

Si el potencial es par en una coordenada, entonces uso funciones pares (cosenos). La continuidad del potencial

$$\phi_I(x=0) = \phi_{II}(x=0) =$$

y salto en el campo

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -4\pi\sigma|_{x=0}$$

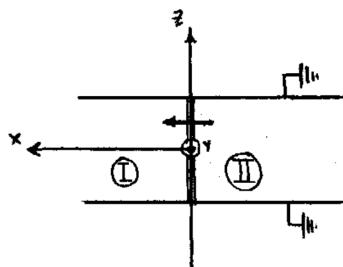


Figura 3.1

Si tengo condiciones periódicas en la coordenada irán senos y cosenos trigonométricos, entonces se discretizan  $m, n$  y tengo  $\sum_n \sum_m$  una serie de Fourier.

Si tengo condiciones no periódicas en la coordenada irán seno, coseno hiperbólicos entones tengo  $\int dk$  integral de Fourier.

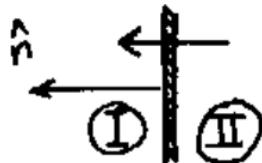
En general tomo

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

pudiéndose discretizar los  $k'$ s luego. Se considera  $\alpha^2 \equiv k_{\hat{e}_1}^2$  y así siguiendo con las otras dos.

Sobre la ecuación de salto en el campo aplicamos ortogonalidad y despejamos coeficientes en función de  $\sigma$ .

Detalle: el salto en el campo se hace siguiendo la normal, como se ilustra abajo



**Figura 3.2**

$$\hat{E_I} - \hat{E_{II}} = 4\pi\sigma \quad -\frac{\partial\phi_I}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{II}}{\partial x} = 4\pi\sigma$$

Para  $k_{e_1}^2$  en el caso discreto

$$\sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_m e_1) + \sin(k_m e_1)$$

pero en el continuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik e_1} dk$$

usamos  $\exp(ik e_1)$  para que la integral converja en lugar de  $(\cos(ke_1) + \sin(ke_1))$ .

### 3.3.1 Desarrollo distancia entre puntos

Es útil el desarrollo

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'_<^\ell}{r'_>} P_\ell(\cos(\gamma))$$

en polinomios de Legendre para el ángulo entre vectores en coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas, donde  $\gamma = \gamma(\theta, \phi)$  es el ángulo entre vectores, que surge del teorema del coseno.

### 3.3.2 Prolongación analítica

Consiste en *prolongar* una solución restringida por ejemplo en el eje polar a todo el resto del espacio pegándole los polinomios de Legendre.

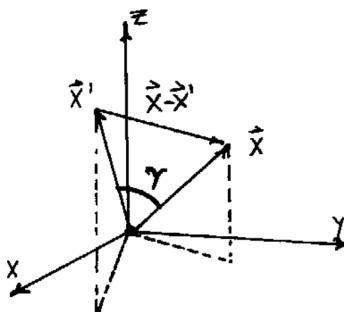


Figura 3.3

Como ejemplo vemos un anillo con carga  $Q$  distribuida uniformemente. Hay un plano de simetría perpendicular al eje de simetría.

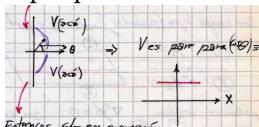


A partir de la prescripción (2.3)

$$r > a \quad \varphi_1(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} r^{-(2n+1)} P_{2n}(\cos \theta)$$

$$r < a \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta)$$

y hay que ver las condiciones de contorno. Me quedaré con los coeficientes pares porque es simétrico el potencial por la simetría en  $\theta$ ,



y por ello sólo me aparecerán coeficientes pares. Los potenciales están evaluados en el eje polar que son dos ángulos theta,

$$\varphi_1(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} r^{-(2n+1)} \quad \varphi_2(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n}$$

una serie de potencias para el potencial  $V(x = \hat{z})$  de un anillo (que es un caso ya resuelto en F3).

Luego, multiplicando esta serie de potencias por los polinomios de Legendre tendremos el  $V$  para todo el espacio. El cálculo elemental da

$$\varphi(\mathbf{x})(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{Q}{r\sqrt{1 + a^2/r^2}}$$

Entonces

$$\varphi_1(\theta = 0^\circ, 180^\circ) = \frac{Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

Ahora para todo el espacio es

$$\varphi_1(r > a) = \frac{Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{1}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} r^{-2n} P_{2n}(\cos \theta)$$

$$\varphi_2(r < a) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \theta)$$

En notación compacta

$$\varphi(\mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta).$$

Lo ponemos en serie (pasamos un cálculo de F3 a una serie)

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(0) \quad r > a$$

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q \frac{r^\ell}{a^{\ell+1}} P_\ell(0) \quad r < a$$

y  $P_\ell(0)$  tiene términos pares solamente (los impares son nulos).

Entonces

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{a^{2n}} P_{2n}(0)$$

con

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n n!}$$

**A partir de aquí están los  
barruntos de las notas de final.  
Habrá que consolidar con lo  
transcripto desde la carpeta.**



Figura 3.4

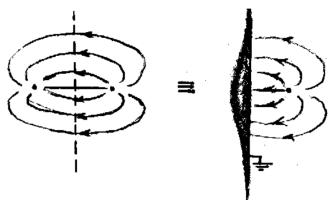


Figura 3.5

por lo tanto para todo el espacio será

$$\phi(r, \phi/2) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\sin(\theta)) \quad r < a$$

El hecho de que sólo vivan  $\ell$  pares viene porque  $\phi$  es par pues hay simetría de reflexión en el plano  $xy$ , lo que sucede de  $(0, \pi/2)$  es igual a lo que sucede de  $(\pi/2, \pi)$ .

Los problemas con simetría de revolución en torno a  $\hat{z}$  pueden ser resueltos con el método de prolongación analítica. La idea central es que si dos soluciones del potencial coinciden en un conjunto de puntos (como ser el eje azimutal) entonces deben ser la misma solución.

### 3.3.3 Comentario multipolos

Estos dos problemas son equivalentes, pero multipolarmente tienen desarrollos diferentes. El problema es que el metal a tierra tendrá carga hasta el infinito y entonces no podemos tener un radio de convergencia.

#### EJEMPLO 3.1 Problema esfera y aro

La situación del problema puede verse en la ilustración dada por el figurín siguiente

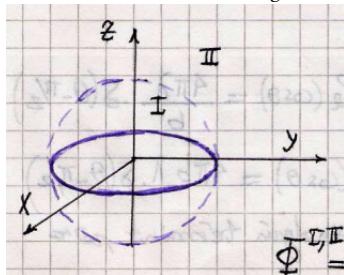


La situación física que se observa es que habrá simetría azimuthal, dado que la distribución es la misma para todo ángulo  $\varphi$ . Entonces será  $m = 0$ . Además, como el eje polar forma parte de la solución también se descartará  $Q_\ell^m$  dado que se necesita regularidad en  $-1, 1$ .

Entonces, el candidato es

$$\phi^{I,II} = \sum_{\ell} (A_{\ell}^{I,II} r^{\ell} + B_{\ell}^{I,II} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde hemos establecido las dos regiones ilustradas aquí abajo



Luego, requeriremos regularidad en  $r \rightarrow \infty$  para  $\phi^{II}$  y en  $r = 0$  para  $\phi^I$  lo cual conduce a

$$A_{\ell}^{II} = 0 \quad B_{\ell}^I = 0$$

Entonces

$$\phi^I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = \sum_{\ell} B_{\ell}^{II} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

y del contorno en  $b$  se tiene

$$\phi^I(r = b) = \phi^{II}(r = b) = \quad A_{\ell}^I b^{-\ell-1} = B_{\ell}^{II} b^{-\ell-1} \equiv \frac{C_{\ell}}{b}$$

$$\phi^I = \frac{1}{b} \sum_{\ell} C_{\ell} \left( \frac{r}{b} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = \frac{1}{r} \sum_{\ell} C_{\ell} \left( \frac{b}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

El análisis de  $\rho(r, \theta, \varphi)$  tal que  $\int \rho dV = q$  en principio nos dice que no dependerá de  $\varphi$  y tendremos una forma

$$\rho = f(\theta)\delta(r - b) \quad \rho = \alpha(r, \theta)\delta(\theta - \pi/2)\delta(r - b)$$

la cual por integración

$$\rho = \frac{q}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(\theta - \pi/2)\delta(r - b)$$

lo cual conduce a una

$$\sigma = \frac{\lambda}{b} \delta(\theta - \pi/2)$$

Las derivadas del potencial serán

$$\frac{\partial \phi^I}{\partial n} = \frac{\partial \phi^I}{\partial r} = \frac{1}{b} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell-1} b P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\frac{\partial \phi^{II}}{\partial n} = \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell + 1 \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell+1} b^{-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

y al evaluarlas en  $r = b$

$$\frac{\partial \phi^I}{\partial r} \Big|_b = \frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} \ell P_{\ell}(\cos \theta) \quad \frac{\partial \phi^{II}}{\partial r} \Big|_b = -\frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} (\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \phi^{II}}{\partial n} - \frac{\partial \phi^I}{\partial n}\right) \Big|_b &= \frac{1}{b^2} \sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{4\pi\lambda}{b} \delta(\theta - \pi/2) \\ \sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) &= 4\pi\lambda b \delta(\theta - \pi/2) \end{aligned}$$

y ahora necesitariamos encontrar  $C_{\ell}$  para lo cual multiplicaremos ambos miembros y faremos uso de las condiciones de ortogonalidad de los polinomios [ver ecuaciones tal y tal]

$$\sum_{\ell} C_{\ell} (2\ell + 1) \int_0^{\pi} \sin \theta P_{\ell'}(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta) d\theta = 4\pi\lambda b \int_0^{\pi} \sin \theta P_{\ell'}(\cos \theta) \delta(\theta - \pi/2) d\theta$$

que resulta en

$$C_{\ell'} (2\ell' + 1) \frac{2}{2\ell' + 1} = 4\pi\lambda b P_{\ell'}(0)$$

y de lo cual se desprende que ahora podemos escribir

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_{\ell} \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta) \quad \phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_{\ell} \left(\frac{b}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(0) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Luego,

$$P_{\ell+1}(x)(\ell + 1) - (2\ell + a)xP_{\ell}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

y para sucesivos

$$P_{\ell+1}(0)(\ell + 1) + \ell P_{\ell-1}(0) = 0 \quad P_{\ell+2}(0)(\ell + 2) + (\ell + 1)P_{\ell}(0) = 0$$

$$P_{\ell+2}(0) = -\frac{(\ell + 1)}{(\ell + 2)} P_{\ell}(0)$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_0(0) = 1 \quad P_1(0) = 0$$

**En este caso el  $\sin \theta$  podría no estar [ $\zeta?$ ].**

y se ve que los  $P_\ell$  que aportarán serán los pares, de manera que

$$P_2(0) = -\frac{1}{2} \quad P_4(0) = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \quad P_6(0) = \left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

tras lo cual

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)$$

$$\phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta)$$

Ahora se mete a tierra la esfera por imágenes, ver ilustración siguiente



$$b = \frac{a^2}{r}$$

Con ello

$$\lambda = \frac{dq}{b d\theta} \quad \lambda' = \frac{dq'}{b' d\theta}$$

y

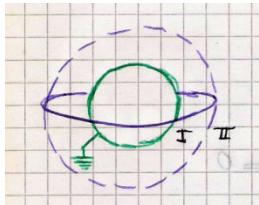
$$\lambda' = -\frac{b}{a} \lambda.$$

Deberíamos obtener, si hacemos la superposición,

$$\phi^I = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r^{4n+1} - a^{4n+1}}{r^{2n+1} b^{2n}}\right) P_{2n}(\cos\theta)$$

$$\phi^{II} = 2\pi\lambda \sum_n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b^{4n+1} - a^{4n+1}}{r^{2n+1} b^{2n}}\right) P_{2n}(\cos\theta)$$

También se puede llegar directamente a la resolución por separación de variables en la configuración



Es similar de entrada

$$\phi^{I,II} = \sum_\ell (A_\ell^{I,II} r^\ell + B_\ell^{I,II} r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos\theta).$$

### 3.4 Armónicos esféricos

Considérese el problema de Sturm-Liouville siguiente

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ e(e+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

para  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  y  $-1 \leq x \leq 1$ . Como  $\ell \geq 0$  y  $-\ell \leq m \leq \ell$  se tendrán

$$P_{\ell m} = (-1)^m (1-x)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

y entonces

$$P_{\ell,-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell m}(x)$$

con  $\phi_m = e^{im\varphi}$ . La condición de ortogonalidad nos dice que

$$\int_{-1}^1 P_{\ell' m}(x) P_{\ell m}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

y de lo cual deducimos que

$$P_{\ell m}(x) \phi_m(x).$$

Estas expresiones se presentan en forma conjunta y normalizada. Son los armónicos esféricos.

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

Los armónicos esféricos son un conjunto ortonormalizado en

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Se verifica también

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi) = (-1) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi).$$

La ortonormalidad es

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) d\theta = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}$$

mientras que la completitud

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta'))$$

En la carpeta tenía  $x$  en lugar de  $\cos(\theta)$ .

nos dice que solo es diferente de cero esta suma cuando los ángulos primados y sin primar son iguales. Entonces una función  $f$  cualquiera  $\in L^2$  se puede expresar en armónicos esféricos,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

donde

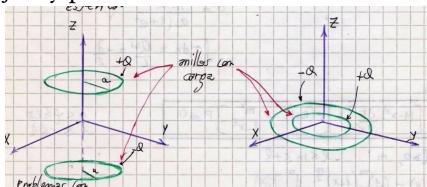
$$A_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) f(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) d\theta,$$

y como el potencial es  $L^2$ , entonces en coordenadas esféricas es

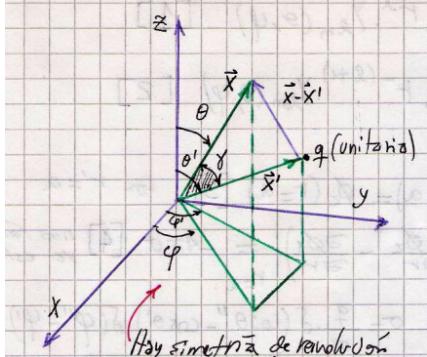
$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_{\ell,m} r^{\ell} + B_{\ell,m} r^{-(\ell+1)}] Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

donde la parte radial no se ha inmutado. Esta es la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, que será la solución general para un problema de potencial en dichas coordenadas.

El figurín siguiente muestra anillos con carga, según se indica, centrados en un sistema de coordenadas. Son problemas con simetría de revolución en torno al eje  $\hat{z}$  y permiten ser resueltos con el método de la prolongación analítica.



Ahora consideraremos la siguiente figura



y la evaluación del potencial

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}] P_{\ell}(\cos \gamma)$$

Claramente hay simetría de revolución si la carga  $q$  se hallase sobre el eje  $z$ . En este caso el problema no puede depender de  $\varphi$  y ello se ve en que  $P_{\ell}(1) = 1$  para todo  $\ell$ .

La siguiente figurita explicita lo que sucede

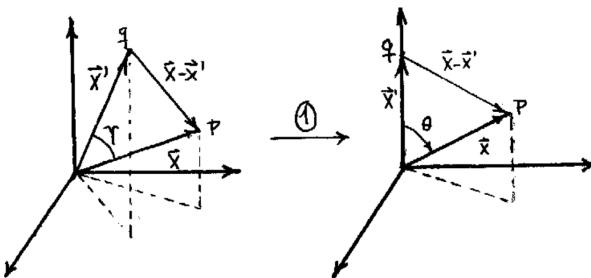


Figura 4.6 Figurin

Se ve que si  $q$  está en  $\hat{z}$  entonces la simetría de revolución implica que  $\gamma$  se transforma en el  $\theta$  de esféricas. Si, además,  $\gamma$  es nulo entonces se tiene simetría de revolución en torno al eje determinado por la recta que contiene a ambos puntos.

Con respecto al inverso de la distancia recíproca resulta

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}}$$



Figura 4.7

donde  $|\mathbf{x}| = r$  y  $|\mathbf{x}'| = r'$ . Así

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}} = \frac{1}{|r - r'|}$$

Esto define dos zonas ①  $r' > r$  y ②  $r' < r$ . Serán  $\phi_1 = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell}$  y  $\phi_2 = \sum_{\ell} B_{\ell} r^{-(\ell+1)}$ . Entonces, si  $r' < r$  será

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r(1 - r'/r)} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}}$$

en cambio si es  $r' > r$

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r'(1 - r/r')} = \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}}$$

de manera que

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

donde  $r_{<}$  y  $r_{>}$  son el mayor y el menor  $r$  para cada región. Con esta notación se puede escribir una única fórmula. Además podemos pensar en  $1 = P_{\ell}(1) \forall \ell$  que también es  $1 = P_{\ell}(\cos 0)$ , lo cual nos lleva a

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos 0)$$

que es la descomposición en polinomios de Legendre del  $\phi$  de una carga unitaria en  $\hat{z}$  y evaluado en  $\hat{z}$ .

Hacemos de esta manera prolongación analítica,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

y decimos que será el  $\phi$  de una carga unitaria en cualquier parte (descompuesto en polinomios de Legendre). Aquí  $\gamma = \gamma(\theta, \varphi)$  de modo que  $\cos \gamma$  será una función muy complicada de los ángulos esféricos, en efecto,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Se separará el espacio en las dos regiones definidas previamente, y entonces tendremos

$$r < r' : \quad \phi_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.1)$$

$$r > r' : \quad \phi_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.2)$$

Con estas prescripciones aplicaremos las condiciones de contorno: el potencial será nulo en el infinito, en la superficie será continuo y no habrá divergencias en el interior de la esfera.

$$\begin{aligned} \phi_1(r=a) &= \phi_2(r=a) \\ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= -4\pi\sigma \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde esta última  $\sigma$  cumple que<sup>2</sup>

$$\int \sigma dS = q \quad \sigma = \frac{q}{a^2} \delta(\cos \theta'' - \cos \theta') \delta(\varphi'' - \varphi')$$

Luego, usando la relación para la  $\delta$  anterior se tienen

$$\sigma = \frac{q}{a^2} Y_{\ell,m}(\theta'', \varphi'') Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

y evaluando

$$\phi_1(r'=a) = \phi_2(r'=a)$$

se tiene  $D_{\ell,m} = A_{\ell,m} a^{2\ell+1}$  puesto que las ecuaciones (4.1) y (4.2) son iguales término a término ya que los armónicos independientes son linealmente independientes.

Utilizando la (4.3) con la  $\sigma$  definida se llega a que

$$\sum_{\ell,m} [D_{\ell,m}(\ell+1)a^{-(\ell+2)} + A_{\ell,m}\ell a^{\ell-1}] Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \frac{4\pi q}{a^2} \sum_{\ell,m} Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell,m}(\theta, \varphi).$$

Otra vez usando que son funciones linealmente independientes, se tiene

$$\frac{D_{\ell,m}}{a^{\ell+2}} + A_{\ell,m}\ell a^{\ell-1} = \frac{4\pi q}{a^2} Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

Ya tenemos los coeficientes y entonces podemos expresar el potencial  $\phi$  descompuesto en armónicos esféricos como

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r'_<^{\ell}}{r'_>^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

---

<sup>2</sup>Es una delta de Dirac adecuada para que se cumpla lo que se tiene que cumplir

que es el potencial de una carga puntual unitaria con armónicos esféricos. Con esta expresión debiera hacerse más sencilla la integral de Poisson, pero no tanto porque como sumamos sobre  $\ell$  y  $m$  la expresión es simétrica por los índices.

El polinomio  $P_\ell$  en función del  $\cos \gamma$  se puede escribir utilizando el *teorema de adición* de los armónicos esféricos ha sido usado

$$P_\ell(\cos \gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi')$$

Ahora, si reemplazamos en la integral de Poisson se tiene

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi') \right] dV',$$

que se puede cosmetizar como

$$\phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') Y_{\ell,m}^*(\theta', \varphi') r'_<^\ell dV' \right] \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r_>^{\ell+1}},$$

definiéndose el corchete como  $q_{\ell m}$  coeficiente multipolar de orden  $\ell, m$ , así

$$\phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r_>^{\ell+1}},$$

es el desarrollo multipolar para el potencial  $\phi$ .

Entonces, definiendo

$$\phi_{\ell m}(\mathbf{x}) = 4\pi \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r_>^{\ell+1}}$$

se tiene para el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) = -\nabla \sum_{\ell,m} \phi_{\ell m}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell,m} \mathbf{E}_{\ell m}(\mathbf{x})$$

que es una suma de campos multipolares

$$\mathbf{E}_{\ell m}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi_{\ell m}(\mathbf{x}).$$

#### EJEMPLO 4.1 Green en términos de armónicos esféricos para el problema de la esfera y la carga

Para una esfera y una carga puntual frente a ella (ver sección XXX y cartoon bajo estas líneas) se tenía bajo condiciones de Dirichlet,

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{x'/a |\mathbf{x} - a^2/x'^2 \mathbf{x}'|}$$

donde el primer término tiene ya un desarrollo en armónicos esféricos según se vio [conectar]. El segundo término, en cambio, tiene eje de simetría de revolución y puede resolverse usando *prolongación analítica*.



$$\frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

y habría que hacer una expansión de Taylor de esto. Con  $\gamma = 0$  se tiene

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{x'/a|x - a^2/x'^2x'|}$$

Vemos esto para chequear que la serie converja  $xx' > a^2$

$$\frac{a}{xx'(1 - a^2/(xx'))} = \frac{a}{xx'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{a^2}{xx'} \right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell+1}}{(xx')^{\ell+1}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(|\mathbf{x}|)$$

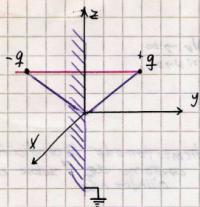
y para  $x, x' > a$

$$\frac{1}{x'/a|\mathbf{x} - a^2/x'^2\mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell+1}}{(xx')^{\ell+1}} \frac{1}{2^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

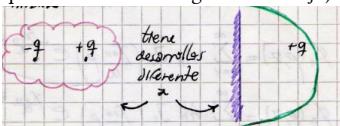
y lo de adentro [...] es Green en armónicos esféricos para la esfera. Esto tiene que valer cero sobre la esfera  $G_D(|\mathbf{x}| = a, |\mathbf{x}'| = a) = 0$ .

Para el problema interno debemos alterar el radio de convergencia porque cambian las relaciones entre  $xx'$  y  $a$ .

Observación interesante para el problema de una superficie a potencial nulo (una chapa, por ejemplo). Veamos ilustración más abajo.



Si desarrollamos ambos problemas multipolarmente en el problema equivalente (calculo que esto quisiera ilustrar con la figurilla de abajo) la expresión no es la misma.



El problema es que la chapa tiene carga hasta el infinito y entonces no podemos tener un radio de convergencia.

### 3.4.1 Relación de los multipolos esféricos y los cartesianos

El operador gradiente en coordenadas esféricas es Apéndice XXX. Entonces

$$\begin{aligned} E_r^{\ell m} &= \frac{4\pi(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+2}} q_{\ell m} \\ E_\theta^{\ell m} &= \frac{-2\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+2}} \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} q_{\ell m} \\ E_\varphi^{\ell m} &= \frac{-4\pi}{2\ell+1} \frac{im}{r^{\ell+2} \sin \theta} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) q_{\ell m} \end{aligned}$$

De aquí, reemplazando sale la relación entre desarrollos

$$q_{00} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{00} = Y_{00}^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\ell = 1 \quad \begin{cases} q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(p_x - ip_y) \\ q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(p_x + ip_y) \\ q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \end{cases} \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ (-1)^m q_{\ell m}^* = q_{\ell, -m}$$

$$\begin{cases} q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} \\ q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}) \\ q_{22} = -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \end{cases} \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

donde en estas últimas expresiones los índices numéricos representan las coordenadas de acuerdo con  $1, 2, 3 \equiv x, y, z$ .

## 3.5 Separación de variables en cilíndricas

Se propone

$$\phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$$

de modo que el laplaciano en cilíndricas (ver Apéndice XXX) conduce a

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{Q\rho^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Entonces el último término será constante de la forma

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2,$$

donde la naturaleza de  $k$  dependerá también de las condiciones de contorno del problema (en conexión con lo del  $k$  negativo que se dirá luego). Entonces podemos escribir

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \rho^2 k^2 = 0.$$

y hacemos

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -\nu^2$$

donde la constante se toma negativa por la condición de que  $Q$  sea periódica en  $2\pi$ . [Acá yo diría que la periodicidad hace que la constante  $\nu$  sea entera]. Se tienen, en suma

$$Q \propto e^{\pm i\nu\phi} \quad Z \propto e^{\pm kz}.$$

Prosiguiendo, esto conduce a

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + R \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) = 0,$$

la cual haciendo un reemplazo  $x = k\rho$  lleva a

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dR}{dx} \right) + \left( x - \frac{\nu^2}{x} \right) R = 0,$$

que ahora tiene forma de Sturm-Liouville.

Las soluciones serán funciones de Bessel de primera y segunda especie,

$$J_\nu(x) \quad N_\nu(x),$$

donde las de segunda especie se definen a partir de las de primera según

$$N_\nu(k\rho) \equiv \frac{J_\nu(k\rho) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin(\nu\pi)}$$

la cual se suele llamar función de Neumann.

En general  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$  no son independientes, pero  $J_\nu$  y  $N_\nu$  sí lo son de manera que la combinación lineal

$$J_\nu + N_\nu$$

es una buena solución general (luego hay que introducir los contornos).

La función  $J_\nu$  tiene valores bien comportados siempre mientras que  $N_\nu$ , en cambio, diverge en el origen del eje  $\hat{z}$ . Si la región de integración incluye dicho eje, entonces los coeficientes asociados a la función de Neumann deben anularse.

También se suelen definir

$$H_\nu^{(1)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) + iN_\nu(k\rho)$$

$$H_\nu^{(2)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) - iN_\nu(k\rho)$$

que son las funciones de Bessel de tercera especie o bien Hankel de primera y segunda especie respectivamente.

Todas las funciones cilíndricas verifican las siguientes relaciones de recurrencia

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_\nu}{dx}(x)$$

donde  $\Omega$  es cualquiera de las funciones cilíndricas.

Algunos valores asintóticos serán de utilidad. Con  $x \ll 1$  se tiene

$$J_\nu \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$N_\nu \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + 0.57\dots] & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases}$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma generalizada que verifica [¿?]  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$  cuando  $n$  es un natural.

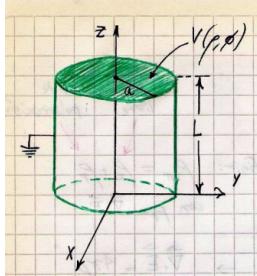
Para el límite  $x \gg 1$  y  $x \gg \nu$  se dan

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

donde los factores senoidales implican un comportamiento oscilante.

**EJEMPLO 5.1 Cilindro a tierra con tapa a potencial**

El figureti siguiente ilustra la distribución



Se tienen

$$\phi|_{\rho=a} = 0 \quad \phi|_{z=0} = 0$$

condiciones que conducen, respectivamente, a que

$$J_m(ka) = 0 \quad Z(z) \propto \sinh(k_{mn}z)$$

donde  $k_{mn}a \equiv x_{mn}$  etiqueta ceros de Bessel. El primer subíndice es el orden de Bessel y el segundo el orden del cero. Esta será la forma en que se enumerarán los ceros.

El potencial tendrá la pinta

$$\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m,n} c_{mn} e^{im\phi} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z)$$

donde las funciones de Neumann se retiraron puesto que no son finitas en  $\rho = 0$ . Evaluando sobre la tapa se tiene  $\phi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$ . La ortogonalidad para  $\phi$  y  $\rho$  involucra las siguientes dos integrales

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{mm'},$$

$$\int_0^a \rho J_{m'}(k_{m'n}\rho) J_{m'}(k_{mn}\rho) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(k_{m'n}a)]^2 \delta_{nn'},$$

las cuales aplicadas conducen a

$$C_{m'n'} 2\pi \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(k_{m'n}a)]^2 = \int_0^{2\pi} e^{-im'\phi} d\phi \int_0^a \rho J_{m'}(k_{m'n}\rho) J_{m'}(k_{mn'}\rho) V(\rho, \phi) d\rho$$

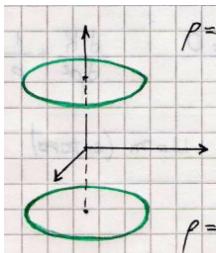
que como es todo primado en  $m$  puede expresarse con  $m$  a secas.

**EJEMPLO 5.2 Problema de aros**

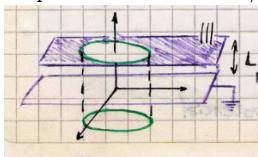
Este problema de aros no tiene simetría azimutal pero aún así la variable va de 0 a  $2\pi$ . Las densidades de carga de los aros superior e inferior son, respectivamente,

$$\rho = \lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a)\delta(z - L/2) \quad \rho = -\lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho - a)\delta(z + L/2)$$

**La observación principal aquí es que  $k$  sin “enes” es un  $k$  continuo.**



El espacio será separado de la manera ilustrada en la figurilla siguiente, para generar un problema equivalente. Se redefine  $L/2 \rightarrow L$  para no arrastrar un molesto dos.



Se tendrán

$$\begin{aligned} R(\rho) &\sim J_m(k\rho) \\ Q(\phi) &\sim e^{\pm im\phi} \text{ o bien } \cos(m\phi) + \sin(m\phi) \\ Z(z) &\sim \begin{cases} Z^I(z) \sim e^{-kz} \\ Z^{II}(z) \sim \sinh(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

La densidad de carga será

$$\sigma = \frac{\rho}{\delta(z-L)} = \lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho-a)$$

que conduce a

$$\begin{aligned} \phi^I &= \int dk \sum_m J_m(k\rho) [A_m^I \cos(m\phi) + B_m^I \sin(m\phi)] e^{-kz} \\ \phi^{II} &= \int dk \sum_m J_m(k\rho) [A_m^{II} \cos(m\phi) + B_m^{II} \sin(m\phi)] \sinh(kz) \end{aligned}$$

Como se dijo,  $k$  es continuo cuando no está discretizado el contorno. La continuidad del potencial en el borde establece que

$$\phi^I|_{z=L} = \phi^{II}|_{z=L},$$

mientras que la discontinuidad de las derivadas lleva a

$$-\frac{\partial \phi^I}{\partial z} - \left( -\frac{\partial \phi^{II}}{\partial z} \right) = 4\pi\sigma = 4\pi\lambda_0 \sin(n\phi) \delta(\rho-a).$$

La única posibilidad es que  $m = n$  y  $A_m^{I,II} = 0$  para todo  $m$ . Se puede ver analíticamente

$$\begin{aligned} \phi^I &= \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^I \sin(n\phi) e^{-kz} \\ \phi^{II} &= \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^{II} \sin(n\phi) \sinh(kz) \end{aligned}$$

y emparejando será

$$B_{kn}^I e^{-kL} = B_{kn}^{II} \sinh(kL)$$

Estas las condiciones de ortogonalidad para el seno y coseno, que seguramente tengo tipeadas en otro lado. Mejor referir a ese lado.

y además como

$$\int_0^\infty J_n(k\rho) J_n(k'\rho) d\rho = \frac{\delta(k - k')}{k},$$

el contorno ha resultado escrito así

$$\int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^I e^{-kL} + \int dk k J_n(k\rho) B_{kn}^{II} \cosh(kL) = 4\pi\lambda_0 \delta(\rho - a)$$

$$\int dk k B_{kn}^I e^{-kL} \int d\rho \rho J_n(k'\rho) J_n(k\rho) + \\ \int dk k B_{kn}^{II} \cosh(kL) \int d\rho \rho J_n(k'\rho) J_n(k\rho) = 4\pi\lambda_0 J_n(k'a)$$

que conduce, luego de retirar las primas, a

$$B_{kn}^{II} (\sinh kL + \cosh kL) = 4\pi\lambda_0 a J_n(ka)$$

Se ve que si  $z \rightarrow \infty$  entonces  $e^{-kz} \rightarrow 0$  salvo para  $k = 0$ . Luego,

$$\phi^I(z \rightarrow \infty) = \int J_n(k\rho) e^{-kz} \sin(n\phi) B_{k=0,n} dk$$

y esta integral se halla en los handbooks.

### Función de Green para el cilindro

Tenemos una carga y ponemos un plano que pasa por donde está la carga. La picture de abajo depicts la situación.



La densidad de carga puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{\rho} q \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z')$$

y se pueden plantear: plano en  $z'$ , plano en  $\phi'$  y cilindro en  $r'$  (esto último dará origen a funciones especiales de Bessel). Con objeto de tener Laplace en el interior, se tiene una densidad de carga  $\rho = \sigma \delta(z - z')$  que da origen a

$$\sigma = \frac{q}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi')$$

Entonces

$$\Phi(\varphi) \sim e^{\pm im\phi} \quad R(\rho) \sim J_n(k_{mn}\rho)$$

$$Z(z) = \begin{cases} Z^I(z) = \sinh(k_{mn}[z - L]) \\ Z^{II}(z) = \sinh(k_{mn}z) \end{cases}$$

$$\phi^{I,II} = \sum_{m=-\infty} \sum_{n=1} A_{mn}^{I,II} J_{|m|}(k_{|m|}\rho) \begin{Bmatrix} \sinh(k_{|m|n}(z - L)) \\ \sinh(k_{|m|n}z) \end{Bmatrix}$$

donde  $m$  y  $-m$  no serán ortogonales. La continuidad llevará a

$$A_{mn}^I \sinh(k_{mn}(z' - L)) = A_{mn}^{II} \sinh(k_{mn}z') \quad z = z'$$

mientras que la discontinuidad en las derivadas

$$-\sum_{m,n} A_{mn}^I e^{im\phi} J_n(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) +$$

$$\sum_{m,n} A_{mn}^{II} e^{in\phi} J_m(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}z') = 4\pi\sigma$$

La ortogonalidad, en cambio permite

$$-\sum_n A_{mn}^I J_m(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) +$$

$$\sum_n A_{mn}^{II} J_m(k_{mn}\rho) k_{mn} \cosh(k_{mn}z') = 4\pi\delta(\rho - \rho')$$

$$\int d\phi e^{-im\phi} \delta(\phi - \phi')$$

$$\int_0^a \rho J_m(k_{mn}\rho) J_m(k_{mn'}\rho) d\rho = \delta_{mn'} \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_{mn}a)]^2$$

$$\frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_{mn}a)]^2 (-A_{mn}^I k_{mn} \cosh(k_{mn}[z' - L]) +$$

$$A_{mn}^{II} k_{mn} \cosh(k_{mn}z')) = e^{-im\phi} 4\pi J_m(k_{mn}\rho')$$

y finalizaremos con este comentario: Jackson lo resolvió.

### Ceros de la función de Bessel

Las funciones de Bessel tienen infinitos ceros,

$$J_\nu(x_{\nu n}) = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \nu \text{ fijo}$$

siendo  $x_{\nu n}$  un cero de  $J_\nu$ . Así

$$\sqrt{\rho} J_\nu \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \quad 0 \leq \rho \leq a$$

con  $\nu \geq 0$  fijo es un conjunto ortonormal completo en el intervalo  $[0, a]$  siendo  $a$  el radio del cilindro.

Luego, se cumple la siguiente ortogonalidad

$$\int_0^a \rho J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'}$$

donde  $\rho$  es el factor de peso. Entonces se puede desarrollar cualquier función  $L^2$  en el  $[0, a]$  en términos de ceros de Bessel. Entonces la expansión

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) \quad f(a) = 0$$

donde  $n$  numera los ceros de la función de Bessel. Así, los coeficientes son

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) d\rho$$

Los ceros de las derivadas de las funciones de Bessel (derivadas con respecto a su argumento) también dan un conjunto completo de autofunciones.

### Cambio de signo de la constante de separación

Un asunto interesante es el signo de la constante  $k$ . Si suponemos que es imaginaria se tendría

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = (-ik)^2 = -k^2$$

lo cual conduce a ecuaciones de oscilador armónico en  $Z, Q$  para las cuales

$$Z = e^{\pm ikz} \quad Q = e^{\pm i\nu\phi}$$

Esto siempre suponiendo que todo el rango  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  está accesible. Sucederá esto cuando las condiciones en las tapas sean periódicas. Se modificará Sturm-Liouville de acuerdo con

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - R \left( k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) = 0$$

y mediante  $x \equiv k\rho$ , será

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0$$

lo cual nos lleva a la solución de Bessel modificadas, y, consecuentemente a las funciones de Bessel modificadas

$$I_\nu(k\rho) = (-i)^{-\nu} J_\nu(ik\rho)$$

$$K_\nu(k\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ik\rho),$$

donde son respectivamente las de primera y segunda especie y vemos que tienen argumento imaginario. Las soluciones serán las mismas que antes solamente que con argumento imaginario.

Como en el caso anterior, son convenientes algunas expresiones asintóticas. Para  $x \ll 1$  y  $x \gg \nu$  se tiene

$$I_\nu \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$K_\nu \rightarrow \begin{cases} -[\ln(\frac{x}{2}) + 0.57\dots] & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases}$$

Para el límite  $x \gg 1$  y  $x \gg \nu$  se dan

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

#### EJEMPLO 5.3 Problema 3.6[8](9) de Jackson primera[segunda](tercera) edición

Se ve un cilindro donde las tapas están a potencial  $V = 0$  mientras los laterales tienen un potencial  $V = V(\phi, z)$ . Las condiciones de contorno según  $\hat{z}$  son periódicas, entonces el parámetro de separación debe tomarse imaginario puro como se vio antes. Estaremos utilizando funciones modificadas de Bessel.



El potencial dentro de este cilindro verificará  $\nabla^2 V = 0$ . El potencial debería entonces poder escribirse como una combinación lineal del tipo

$$\phi = \sum_{\nu,k} [A_{\nu k} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu k} \cos(\nu\varphi)] [C_{\nu k} \sin(kz) + D_{\nu k} \cos(kz)] [E_{\nu k} I_\nu(k\rho) + F_{\nu k} K_\nu(k\rho)]$$

**En la carpeta no usé el argumento  $k\rho$ , sino el  $x$ . Habría que consolidar la notación.**

y luego como  $\phi(z=0) = 0$  implica que  $D_{\nu k} = 0$ , luego como  $\sin(\rho, \varphi, z=L) = 0$  se tendrá  $k = n\phi/L$ . Como en el eje  $z$  no hay cargas, pero las funciones  $K_{\nu k}$  divergen allí estamos obligados a tomar  $F_{\nu k} = 0$ . Con toda esta información y redefiniendo constantes resulta

$$\phi = \sum_{\nu, k} [A_{\nu n} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu n} \cos(\nu\varphi)] \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) I_{\nu}\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

Dado el dato del problema  $\phi(a, \varphi, z) = V(\phi, z)$  debe ser

$$V = \sum_{\nu, k} [A_{\nu n} \sin(\nu\varphi) + B_{\nu n} \cos(\nu\varphi)] \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) I_{\nu}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

que es una serie doble de Fourier donde los coeficientes serán

$$A_{m\rho} = \frac{2}{\pi L I_m(\pi a \rho / L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz V(\phi, z) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\rho\pi z}{L}\right)$$

$$B_{m\rho} = \frac{2}{\pi L I_m(\pi a \rho / L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz V(\phi, z) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\rho\pi z}{L}\right)$$

#### EJEMPLO 5.4 Otro problema

Se conoce el potencial en el plano, será  $V(\rho, \varphi)$  donde se supone que  $V \rightarrow 0$  con  $\rho \rightarrow \infty$  y también con  $z \rightarrow \infty$ . No hay restricciones en  $\varphi$ , y el rango de  $\rho$  es el natural entre  $[0, \infty)$ . No hay condiciones periódicas de ningún tipo. Entonces se usarán funciones de Bessel usuales.

La solución será una combinación lineal de todos los valores de los parámetros, y para  $z \geq 0$

$$\phi(\rho, \varphi, z) = [A_\nu J_\nu(k\rho) + B_\nu N_\nu(k\rho)] [\sin(\nu\varphi) + \cos(\nu\varphi)] e^{-kz}$$



$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)]$$

de modo que

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)]$$

que involucra un Fourier en la variable  $\varphi$  con coeficientes de función  $k$ . Entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k'\rho) A_m(k') dk'$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k\rho) B_m(k) dk'$$

La ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k)$$

y usando la completitud para la integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \int_0^{\infty} \rho J_m(k\rho) V(\rho, \varphi) d\rho &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho J_m(k'\rho) J_m(k\rho) A_m(k') dk' d\rho \\ &\quad \int_0^{\infty} A_m(k') dk' \int_0^{\infty} \rho J_m(k'\rho) J_m(k\rho) d\rho = \frac{A_m(k)}{k} \end{aligned}$$

de tal modo que los coeficientes serán

$$\begin{aligned} A_m(k) &= \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) J_m(k\rho) \sin(m\varphi) d\varphi \\ B_m(k) &= \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho, \varphi) J_m(k\rho) \cos(m\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

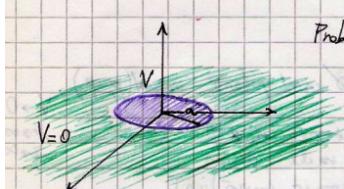
Finalmente el potencial es

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin(m\varphi) + B_m(k) \cos(m\varphi)] \quad (5.1)$$

que para el valor especial  $\varphi = 0$  resulta en

$$\phi(\rho, 0, z) = \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_0(k\rho) B_0(k) \cos(m\varphi).$$

El problema del Jackson ilustrado en esta figuretta es un caso particular del anterior.



Es el nunca bien ponderado disco a potencial fijo. Es un potencial azimutalmente simétrico, de manera que será  $m = 0$ . Las expresiones son otra vez (5.1) reducido al único término  $m = 0$ .

El valor para el eje  $\hat{z}$  calculable por otros medios es

$$\phi(z) = V \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (5.2)$$

y el coeficiente  $B_0$  es

$$B_0(k) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} V(\rho) J_0(k\rho) d\varphi = kV \int_0^a J_0(k\rho) d\rho$$

haciendo un cambio de variables  $x \equiv k\rho$  y mirando en una tabla de integrales

$$B_0 = \frac{V}{k} \int_0^{ka} x J_0(x) dx = \frac{V}{k} ka J_1(ka)$$

Parece que esas dos últimas ecuaciones refieren a este problema más que al anterior. Aquí la carpeta parece ser misleading.

donde se ha usado el resultado

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

Entonces,

$$\phi(\rho, z) = Va \int_0^\infty J_0(k\rho) J_1(ka) e^{-kz} dk$$

que para el eje  $\hat{z}$  es

$$\phi(0, z) = Va \int_0^\infty J_0(0) J_1(ka) e^{-kz} dk$$

y como  $J_0(0) = 1$  estos nos lleva a

$$\phi(0, z) = Va \int_0^\infty J_1(ka) e^{-kz} dk$$

Otra vez miramos el handbook y tomamos

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{[\sqrt{a^2 + b^2} - a]^n}{b^n \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad n > 1. \quad (5.3)$$

Usando este resultado,

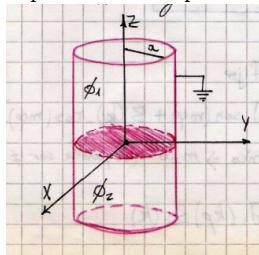
$$\int_0^\infty J_1(ka) e^{-kz} dk = \frac{z^2 + a^2 - z}{a \sqrt{z^2 + a^2}},$$

de manera que el potencial en el eje  $\hat{z}$  es efectivamente el anticipado en (5.2). Tomando  $n = 0, a = z, b = \rho$  en la expresión de la integral (5.3) se tiene

$$\int_0^\infty J_0(x\rho) e^{-xz} dx = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{1}{R}$$

que es el potencial de una carga puntual unitaria situada en el origen dado en coordenadas cilíndricas.

Ahora encerramos la carga unitaria por un cilindro infinito a tierra de radio  $a$ . Veamos el figurín para entender un poco.



Se tendrán ciertas condiciones más o menos obvias,

$$z = 0 \quad \phi_1 = \phi_2 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 4\pi\sigma$$

El problema tiene, además, simetría azimutal, y entonces

$$\phi(\rho, z) = R(\rho) Z(z)$$

$$R(\rho) = A_\nu J_\nu(k\rho) + B_\nu N_\nu(k\rho)$$

pero  $B_\nu$  debe ser nulo porque  $N_\nu \rightarrow \infty$  si  $\nu = 0$ . Luego,

$$Z(z) = E_k e^{kz} + F_k e^{-kz}$$

Considerando la condición de contorno de  $V$  nulo sobre el cilindro resultan

$$\phi_1(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\rho \chi_{0n}}{a}\right) e^{-\chi_{0n} z/a}$$

$$\phi_2(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n J_0\left(\frac{\rho \chi_{0n}}{a}\right) e^{\chi_{0n} z/a}$$

Ahora habría que expresar la delta de Dirac de la carga (que consideraremos  $q$ ).

$$\int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sigma d\varphi = q$$

de lo cual resulta

$$\sigma = \frac{q}{2\pi} \delta(\rho)$$

Desde las condiciones de contorno resultan  $A_n = A'_n$  y el valor dado por la de la derivada normal. Luego el lector podría seguirlo [tal vez yo lo tenga que seguir, je.]

Las  $I_\nu(k\rho)$  tendrán problemas en  $\rho \rightarrow \infty$  y  $K_\nu(k\rho)$  problemas en  $\rho = 0$  (en el eje  $\hat{z}$ ). Si atravesamos densidades de carga en  $\hat{z}$  entonces usamos Bessel

$$Z = e^{\pm kz} \Rightarrow J_\nu^{(1)}(k\rho); N_\nu^{(2)}(k\rho)$$

pero bajo condiciones periódicas en  $\hat{z}$  se usan Bessel modificadas

$$Z = e^{\pm ikz} \Rightarrow I_\nu^{(1)}(k\rho); K_\nu^{(2)}(k\rho)$$

y esto último se da por ejemplo en tapas del cilindro. La función de Bessel de primera especie se puede expresar como serie según

$$J_\nu^{(1)}(k\rho) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

### Escrachos+

Para  $k$  sea  $\phi(\rho = a) = 0$  entonces

$$J_\nu(ka) = 0 \Rightarrow ka = x_{\nu n} \Rightarrow J_\nu(x_{\nu n} \rho/a)$$

y  $k = \frac{x_{\nu n}}{a}$  si  $0 \leq \rho \leq a$  y si está acotado en  $\rho$  entonces es discreto y se suma  $\sum_{n=1}^{\infty}$  y  $\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}$  si  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  y si no está acotado en  $\rho$  entonces usamos

$$\int_0^{\infty} dk$$

y la completitud

$$\int_0^{\infty} x J_\nu(kx) J_\nu(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

y  $k$  en general será función de  $n \in \mathbb{N}$  por condición periódica en tapas (en  $\hat{z}$ ) o en cilindros (en  $\hat{\rho}$ ).

$$\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\nu k} \begin{Bmatrix} J_{\nu}(k\rho) \\ I_{\nu}(k\rho) \end{Bmatrix} + B_{\nu k} \begin{Bmatrix} N_{\nu}(k\rho) \\ K_{\nu}(k\rho) \end{Bmatrix}] [C_k \begin{Bmatrix} e^{\pm kz} \\ e^{\pm ikz} \end{Bmatrix}] [D_{k\nu} e^{\pm i\nu\phi}]$$

donde  $k = k(n)$  y usamos  $\sin(kz) + \cos(kz)$  si hay discretización.

### Escrachos++

Donde los primeros dos términos conducen a la ecuación de Bessel, el tercero es igual a  $-\nu^2$  y el cuarto a  $k^2$ . Sacamos

$$Z = e^{\pm kz}$$

$$Q = e^{\pm i\nu\phi}$$

donde si  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  entonces  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Si en cambio la variable  $\phi$  no corre entre 0 a  $2\pi$  se dará que  $\nu \notin \mathbb{Z}$ .

$\nu \in \mathbb{Z}$	$\nu \notin \mathbb{Z}$
$J_{\nu}(k\rho)$	$J_{\nu}(k\rho)$
$J_{-\nu}(k\rho)$	$N_{\nu}(k\rho)$

donde

$$N_{\nu}(k\rho) \equiv \frac{J_{\nu}(k\rho) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin(\nu\pi)}$$

siendo  $J_{\nu}(k\rho)$  la función de Bessel de primera especie,  $N_{\nu}(k\rho)$  la función de Bessel de segunda especie (Neumann).  $N_{\nu}(k\rho)$  tiene problemas en el origen de modo que no sirve si el dominio incluye al eje  $\hat{z}$ , en cambio  $J_{\nu}(k\rho)$  tiene problemas en  $\rho \rightarrow \infty$ .

## Capítulo 4

---

# Medios materiales

Digamos, un poco *sketchi* que los medios se pueden agrupar, según sus propiedades según el siguiente esquema.

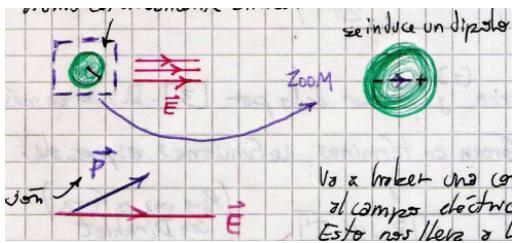
- Dieléctricos
- Medios magnéticos
  - { imán inducido
    - paramagnético
    - diamagnético
  - imán permanente      ferromagnético
- Conductores
  - { perfecto
  - buen conductor
  - mal conductor
- Plasmas (gas ionizado)

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

## 4.1 Campos estáticos en medios materiales

En la picture de acá abajo tenemos un átomo esféricamente simétrico, un medio y un vector de polarización. Entonces vemos en la vista zoom cómo se induce un dipolo

Esta subsección tal vez mejor sería que fuera llamada “polarización eléctrica”.



Habrá una componente dipolar paralela al campo eléctrico externo. Esto nos lleva a la constante dieléctrica del medio (dependerá decrecientemente de la temperatura).

Supondremos que las propiedades macroscópicas para dos campos se satisfacen para los campos vistos microscópicamente

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla \times \mathcal{E} = 0$$

El campo macro  $\mathbf{E}$  será un promedio estadístico de su versión microscópica

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathcal{E}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}) d^3 \boldsymbol{\chi},$$

donde  $\boldsymbol{\chi}$  es una coordenada que barre el volumen  $\Delta V$ . Como vale la linealidad, se tiene  $\nabla \times \mathcal{E} = 0$  que conduce a  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  de manera que  $\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{x})$ . El vector  $\mathbf{D}$  no cumple esto último.

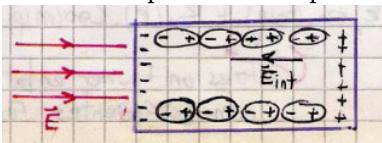
Se construye así

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle p_i \rangle,$$

donde la polarización

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V}$$

es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.



Luego, un *cacho* de potencial  $\phi$  será

$$\delta \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta V' + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta V'$$

de manera que el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \delta \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' = \int \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

Ahora el último término se puede escribir como

$$\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = - \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

y considerando integración por partes en esta última

$$\int_{V'} \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que se pueden consolidar en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\rho_L(\mathbf{x}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] dV',$$

donde el volumen  $V'$  abarca todas las fuentes (incluso las de polarización). Entonces considerando que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P,$$

se puede definir una densidad de carga total

$$\rho_T = \rho_L + \rho_P.$$

Entonces, el potencial se escribe como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

De esta forma se puede construir un vector  $\mathbf{D}$  siguiendo esta línea de razonamiento:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_T = 4\pi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

y pasando de miembros

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho_P = 4\pi\rho_L$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

de modo que

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

donde  $\mathbf{D}$  es el llamado vector desplazamiento y estas expresiones valen para todo medio.

En la situación depicted en la figurilla siguiente

**Hay que hacer partes con sumo detalle aquí y justificar que el surface term se arroja a los chanchos.**



se tendrá una compensación exacta si  $\mathbf{P}$  es uniforme, de manera que  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . En caso contrario existirá una  $\rho_P$  no nula en el interior.

### escrachos

Luego el potencial es, posteriormente a haber hecho partes es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

Por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

donde  $\xi_e$  es la susceptibilidad eléctrica y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_P,$$

que provienen del rotor de  $\mathbf{E}$ , la divergencia de  $\mathbf{D}$  y la divergencia de  $\mathbf{P}$  respectivamente.

## 4.1.1 Magnetismo en la materia

Los dipolos magnéticos inducidos son de dirección opuesta al campo externo  $\mathbf{B}$  (diamagnetismo). Aquellas sustancias con momento magnético permanente se orientan en la dirección del campo  $\mathbf{B}$  (paramagnético).

No sé qué pasaba con la parte de la integral de superficie.

Esta sección fue antes “imanes inducidos”.



Microscópicamente se tiene un campo  $\mathbf{b}$  que verifica  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$  de manera que el campo total será un promedio en la región, i.e.

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{b}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d^3 \xi,$$

donde  $\Delta V$  es microscópicamente grande pero macroscópicamente chico. La linealidad permite que la divergencia de  $\mathbf{B}$  sea nula de modo que existe  $\mathbf{A}$  tal que su rotor es  $\mathbf{B}$ . Entonces,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}_i) \langle \mathbf{m}_i \rangle$$

donde  $N_i$  es un tipo de moléculas y  $\langle \mathbf{m}_i \rangle$  es un momento magnético medio. La sumatoria vale para ciertos tipos de moléculas [¿?].

Por otro lado la magnetización se puede interpretar/definir como

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta V},$$

que es el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial

$$\delta \mathbf{A} = \frac{\delta \mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

se evalúa con la misma idea que la del dipolo para polarización. Queda por incorporar el asuntete de

$$\frac{1}{c} \int_V c \mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

usando partes.

El potencial vector puede escribirse como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c \mathbf{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] dV',$$

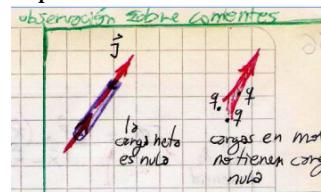
y con el trick usual la segunda integral se convierte a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c \nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV'$$

mientras que con la definición de las corrientes total y de magnetización es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Tenía este figurín por allí. Sería bueno ver si es una idea importante.



que vale para toda región donde haya corrientes libres (o desplazamientos microscópicos de carga) más medios magnetizados.

Tenemos, por otra parte, la otra construcción

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que debiéramos consolidar de alguna manera. Cuando tenemos volumen y superficie son pertinentes:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c} \mathbf{g}_m$$

Para la ecuación del rotor tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \nabla \times \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M$$

donde  $\mathbf{H}$  es la intensidad de campo magnético.

Por la linealidad

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_M) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde  $\chi_M$  es la susceptibilidad magnética y  $\mu$  es la permeabilidad magnética.

Si  $\mu > 1$  es un medio paramagnético y  $\mu < 1$  es diamagnético.

Si hay linealidad e isotropía

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}$$

donde el paréntesis es  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica. Si hay isotropía

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

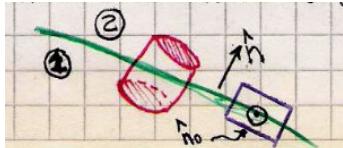
**Se puede hacer un parangón con  $D$  según se vio para sustancias polarizadas.**

## Condiciones de contorno con medios

Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} g_L \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde  $g_L$  se refiere a densidad de corriente superficial.



Aplicando teorema de Stokes sobre el rotor de  $\mathbf{H}$  para el circuitito diminuto se tiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{n} dS = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\ell$$

pero como

$$\frac{d\ell}{d\ell} = d\hat{\ell} = \hat{n}_0 \times \hat{n}$$

y será (tendiendo a cero la superficie del circuitito)

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{n}_0 \times \hat{n}) d\ell = d\ell \hat{n}_0 \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)]$$

Como la orientación de  $\hat{n}_0$  es arbitraria los dos miembros son iguales y entonces

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} g_L$$

que nos dice que el componente tangencial de  $\mathbf{H}$  no es continuo cuando circula por el borde una  $g_L$ .

Si esta es nula se tiene

$$\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{n2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n1} \\ H_{t2} = H_{t1} \end{cases}$$

### 4.1.2 Imán permanente

Hay magnetización  $\mathbf{M}$  aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que no hay relación lineal entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , luego

$$\mathbf{M} \neq \xi_M \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu \mathbf{H}$$

El campo  $\mathbf{M}$  es fuente de campo. El asunto es que  $\mathbf{M}$  tiene el problema de la discontinuidad, pero  $\mathbf{M} = 0$  fuera del medio. La relación entre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c}\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

Para un imán es  $\mathbf{J}_L = 0$  de manera que

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi_m,$$

que es un potencial escalar magnético, que explica  $\mathbf{H}$ . Fuera del imán no hay  $\mathbf{J}_M$  y se tiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_T = 0.$$

Se podría utilizar un potencial para  $\mathbf{B}$  por lo anterior pero esto fallará en la superficie de separación. En general no es conveniente un  $\phi_B$  escalar. La relación constitutiva es

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

y entonces

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -4\pi\nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$-\nabla^2\phi_m = -4\pi\nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\nabla^2\phi_m = -4\pi\rho_m$$

donde se ha definido cargas ficticias de magnetización. Las cargas magnéticas producen el  $\phi_m$  dentro del imán. Se deduce una  $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &\equiv -\rho_m & \mathbf{M} \cdot \hat{n} &\equiv \sigma_m \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

de manera que

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV'$$

se puede asociar

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_P.$$

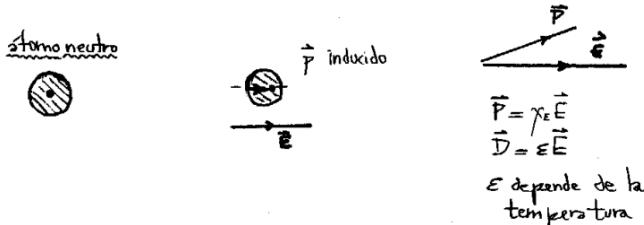


Figura 1.1

### EJEMPLO 1.1 Esfera magnetizada

Consideremos la ilustración de aquí abajo donde aparece el problema en cuestión. Es un problema análogo a los de electrostática.



No hay densidades de magnetización  $\rho_M$  pues  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$  pero se tiene

$$\begin{cases} \mathbf{M} \neq 0 & r < a \\ \mathbf{M} = 0 & r > a \end{cases}$$

Esta discontinuidad generará cargas de magnetización en superficie que resolveremos con los contornos. Se divide en dos regiones según indica la figura.

$$\nabla^2 \phi_H^I = 0 \quad \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$$

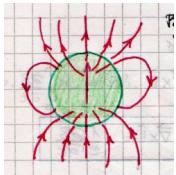
$$\nabla^2 \phi_H^{II} = 0 \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\nabla \phi_H^{II} + \nabla \phi_H^I - 4\pi \mathbf{M}) \cdot \hat{n} = 0$$

de la cual

$$(-\nabla \phi_H^{II} + \nabla \phi_H^I) \cdot \hat{n} = 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y  $\mathbf{M} \cdot \hat{n} = M \cos \theta$  y la continuidad  $\phi_H^{II} = \phi_H^I$ . Entonces para fuera de la esfera es el campo equivalente a un dipolo puntual en el origen.



Dentro de la esfera  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  son homogéneos y valen

$$\mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3} \mathbf{M} \quad \mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}$$

## 4.2 Polarización y magnetización de medios

La polarización y la magnetización suelen depender de los campos externos, es decir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ . Una sustancia lineal admite un desarrollo del tipo

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que  $\mathbf{M}_0 = 0$ ,  $\mathbf{P}_0 = 0$  se da que

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_i \sum_j \left( \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j \right) \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y ahí se ve explícitamente que tienen que ser tensores,

$$\mathbf{M} = \vec{\xi}_M \mathbf{H} \quad \mathbf{P} = \vec{\xi}_e \mathbf{E}.$$

Estos tensores son, respectivamente, los tensores de susceptibilidad magnética y eléctrica. En el caso en que sean escalares (isotropía [¿?]) la susceptibilidad eléctrica solo puede tomar valores positivos mientras que la magnética puede tomar también valores negativos.

## Medios magnéticos de muy alta permeabilidad

Consideremos un caso especial donde

$$\mathbf{g}_L = 0.$$

Entonces

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{n} \quad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1$$

En el límite  $\mathbf{H}_2 \perp$  superficie del medio y es similar al  $\mathbf{E}$  a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente *equipotenciales*.

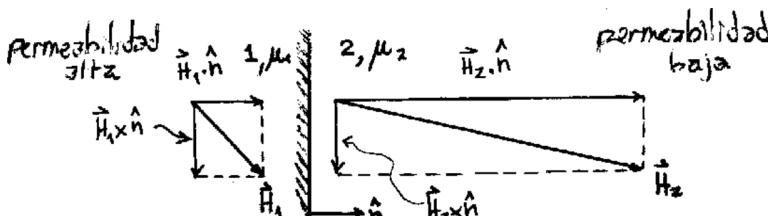
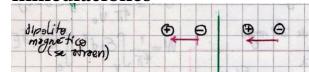


Figura 2.2

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{es decir} \quad \mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$$

Esto estaba en las inmediaciones



## Consideraciones en medios magnéticos

Fuera de un imán permanente

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$\mathbf{B} = -\nabla \phi_m^B,$$

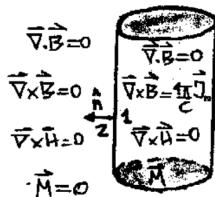


Figura 2.3

pero fallará en la superficie de separación donde hay  $J_m$  y por ende  $\mathbf{J}_T$ . Lo que sí funciona es

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m^H,$$

y

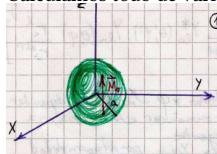
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{H} &= -\nabla \cdot (\nabla \phi_m^H) = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} = 4\pi \rho_M \\ -\nabla^2 \phi_m^H &= 4\pi \rho_M\end{aligned}$$

una ecuación de Poisson para el potencial  $\phi_m^H$ .

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0 \\ (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1 - 4\pi \mathbf{M}) \cdot \hat{n} &= 0 \\ (-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1) \cdot \hat{n} &= 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_M\end{aligned}$$

#### EJEMPLO 2.1 Problema 5 (imán esférico)

Calculamos todo de varias maneras



Bola ①

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV = \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \hat{z}$$

Bola ②

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 4\pi \rho_m \\ \mathbf{m} &= \int \rho_m \mathbf{x} dV = \hat{z} \int \rho_m z dV\end{aligned}$$

Se tienen además

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y como  $\mathbf{M}$  es constante en el interior, no hay  $\rho_m$  en el volumen. Habría que escribir bien la magnetización  $\mathbf{M}$ . Usaremos una función escalón

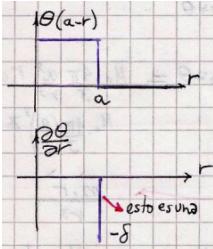
Consideraremos una función escalón  $\Theta$  de tal manera que

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \Theta(a - r)$$

donde

$$M_0 \hat{z} = M_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \Theta(a - r)$$

según puede verse en el figurín bajo estas líneas (se ve solo el tetón).



Entonces,

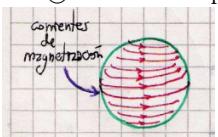
$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_0 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \cos \theta \Theta(a - r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta \Theta(a - r)] \right) = -M_0 \cos \theta \delta(r - a)$$

donde  $M_0 \cos \theta = \sigma_M$  resultado que es consistente con la cuenta de  $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .

Finalmente,

$$\mathbf{m} = \int \rho_m z dV = M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi M_0 a^3 \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \hat{z}$$

Bola ③. Se ilustra en la postal siguiente



Desde

$$\mathbf{J}_m = c \nabla \times \mathbf{M}$$

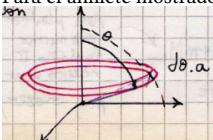
se deduce

$$\mathbf{g}_m = c \mathbf{M} \times \hat{n} = c M_0 \hat{z} \times \hat{r} = c M_0 \sin \theta \hat{\varphi}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}_m dV = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\ell = \frac{I \text{ Area}}{c} \hat{z}$$

y hemos obtenido el resultado de  $\mathbf{m}$  como área por corriente.

Para el anillete mostrado en el cartón



$$d\mathbf{m} = \frac{\text{sección}}{c} du = \frac{1}{c} \pi a^2 \sin^2 \theta \, a \, g_m d\theta$$

o bien, integrando,

$$\mathbf{m} = \hat{z} \int_0^\pi M_0 \pi a^3 \sin^3 \theta \, d\theta = \hat{z} \left( \frac{4\pi}{3} a^3 M_0 \right)$$

con lo cual el potencial resulta

$$\phi_M = \int \frac{\rho_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV$$

o en full splendor

$$\phi_M = \int \int M_0 \cos \theta \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \right] a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Aquí hay simetría en torno a  $\hat{z}$  de manera que el problema no puede depender de esta coordenada. Los armónicos esféricos pasan a ser los polinomios de Legendre. Puedo ver que  $\cos \theta$  es un armónico  $Y_{10}$  y por ortogonalidad se va toda la doble sumatoria y sobreviven solamente  $\ell = 1, m = 0$ .

Usando esta información tenemos

$$\phi_M = M_0 a^2 \left( \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} Y_{10}^*(\theta, \varphi) = M_0 \frac{4\pi}{3} a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

solución que es válida en todo el espacio.

$$\phi_M = \begin{cases} M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{r}{a^2} \cos \theta & r < a \\ M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{a}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde el último caso  $r > a$  se puede escribir como

$$M_0 \frac{4\pi}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 z = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Recordemos que si  $r > a$  es  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  mientras que para  $r < a$  es  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ .

Si introducimos este imán pelota en un medio tengo una alteración en el contorno. Aquí hay que usar separación de variables.

$$\phi_I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\phi_{II} = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}^{II}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde en  $I$  se ha tirado una parte de la solución porque diverge en cero, mientras que en  $II$  se tira en cambio la parte que corresponde.

Los contornos salen de evaluar

$$\phi_I(a, \theta) = \phi_{II}(a, \theta)$$

lo cual conduce a

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{2\ell+1}}$$

En el caso de los campos  $\mathbf{B}$  se tendrá  $B_{nII} = B_{nI}$  que conduce a [c?]

$$\mu H_{nI} = H_{nII} + 4\pi M_{nI}$$

$$\text{Valen } \cos \theta = Y_{10} \sqrt{4\pi/3}.$$

donde el lhs no se puede plantear en un imán permanente y el rhs implica que para plantear esto mismo en el caso *II* necesito conocer  $M$  pero conozco  $\mu$ .

$$-\mu \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 4\pi M_0 \cos \theta = 4\pi \sigma_M$$

donde esta última ecuación es casi una de contorno como para el campo  $\mathbf{E}$  pero ojo que está el  $\mu$ . Viene de que  $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ . Luego,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \mu(\ell+1) \frac{B_\ell^{II}}{a^{\ell+2}} + \ell a^{\ell-1} A_\ell^I \right] P_\ell(\cos \theta) = 4\pi \sigma_M$$

y ahora se aplica ortogonalidad multiplicando por  $P_{\ell'}$  e integrando, entonces

$$c_\ell \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} = \frac{4\pi M_0}{2\ell'+1} \delta_{\ell 1} \quad 2\mu \frac{B_1}{a^3} + A_1 = 4\pi M_0$$

y de estas dos ecuaciones se obtienen los coeficientes

$$A_\ell^I = \frac{B_\ell^I}{a^{2\ell+1}}$$

sumados a

$$4\pi M_0 = (1+2\mu)A \quad A_1 = \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \quad B_1 = \frac{4\pi M_0 a^3}{1+2\mu}$$

Finalmente,

$$\phi = \begin{cases} \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} r \cos \theta & r < a \\ \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde otra vez la última expresión, para  $r > a$ , tiene la forma  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3$  donde  $\mathbf{m} = 4\pi M_0 a^3 \hat{z} / (1+2\mu)$ .

Un momento dipolar magnético diferente al inicial es porque hubo momento inducido

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \mathbf{m}_T - \mathbf{m} = \left( \frac{4\pi a^3}{1+2\mu} M_0 - \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \right) \hat{z}$$

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \left( \frac{1-\mu}{1+2\mu} \right) \frac{8\pi}{3} a^3 M_0 \hat{z}$$

#### 4.2.1 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Supongo que integrando esto en volumen y usando partes se arriba a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Entonces, usando la identidad **ID 3** del apéndice se convierte en

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar que el término de volumen se debe a una corriente de magnetización  $\mathbf{J}_M$  y el de superficie a una corriente superficial  $\mathbf{g}_M$ , de modo que se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

El término de superficie puede ser fácil si se conoce  $\mathbf{M}$  sobre la superficie. Este componente se puede dejar de lado si se toma una región de integración que engloba a toda la distribución.

Las unidades de  $\mathbf{g}_M$  tienen que ser de corriente sobre longitud ( $q/(t\ell)$ ) o bien  $i/\ell$ .

Me falta desculpar esta expresión, pero tendría que ser la expresión anterior luego de cosmética y tirar el término de superficie. Veremos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad  $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

#### 4.2.2 Campo externo sobre distribución

Se quiere ver la maquinaria matemática para evaluar el efecto de un campo externo sobre una configuración de carga. Recuérdese que un campo homogéneo no hace fuerza sobre un dipolo. El punto de partida es la integral del potencial

$$W = \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3x$$

y el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla \phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi(0) + \dots$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \mathbf{E}_j(0) + \dots$$

Implantando esta expansión en la integral previa,

$$W = \phi(0) \int \rho(\mathbf{x}) d^3x - \mathbf{E}(0) \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x - \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \mathbf{E}_j(0)$$

Esto puede ser el kid de lo que no entendía y de esos dibujillos



en la carpeta

$$W = q\phi - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i E_j$$

Tomando el gradiente, con su signo,  $\mathbf{F} = -\nabla W$  y entonces

$$F_k = -\partial_k W = -q \partial_k \phi + p_i \partial_k E_i + \frac{1}{6} Q_{ij} j \partial_i \partial_j E_k$$

entonces  $\partial_k E_j = \partial_j E_k$  puesto que el carácter irrotacional del campo externo hace que puedan intercambiarse los índices en la expresión. El primer término del rhs es  $q\mathbf{E}$ .

### 4.3 Consideraciones energéticas

Aquí la idea es construir la configuración carga a carga. Evaluando el trabajo de generar el potencial total. Recordemos [¿?]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(-\nabla\phi) = -\nabla U$$

$$\Delta U = W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell \rightarrow \Delta U = - \int_{\Gamma} \nabla(q\phi) \cdot d\ell = -q\Delta\phi$$

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} \quad \frac{\delta U}{\delta x} = F_t$$

donde el subíndice es por tangencial.

Se empieza con  $W_1 = 0$ . Luego

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2}(W_2^a + W_2^b) = \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right)$$

$$W_N = \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

siendo  $\phi_{ij}$  el potencial sobre  $q_i$  debido a  $q_j$ . Entonces,

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de  $q_i$ . La versión continua será, evidentemente,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material. Se quiere ver que trabajo  $W$  debe hacerse para modificarlo en un  $\Delta\rho$ .

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \delta V \phi,$$

o bien

$$\Delta(\delta W) = \delta q \phi = \delta \rho dV \phi.$$

Se integra en todo el volumen,

$$\delta W = \int \delta \rho \phi dV.$$

que satisface  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$  de modo que

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})}{4\pi} \delta V \phi$$

o bien

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \phi dV.$$

y usando identidades (la de siempre -ponerla en Apéndice- o partes)

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \left( \int \nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) dV - \int \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dV \right)$$

Ahora se presupone que se integra en todo el espacio. La superficie en el infinito tiene  $\phi$ ,  $\mathbf{D}$  tiendiendo a cero y me olvido de esa integral. Entonces, reemplazando el gradiente del potencial por el campo, se tiene

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{4\pi} \int \left( \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \right) dV$$

y esto es el trabajo necesario para formar la configuración en presencia de medios materiales. Resquechos de la otra deducción [habría que consolidar] siguen a continuación:

$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) = \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D}$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta V [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) - \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi]$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \left( \int_V \nabla \cdot (\mathbf{D}\phi) dV + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \right)$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D}\phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotropía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su  $\epsilon$ . Es un proceso isotérmico. Uno asume que  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$  y no varía con el tiempo. En la práctica  $\epsilon$  varía con la temperatura.

### 4.3.1 Medios anisótropos

Consideremos un medio lineal anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j$$

con el tensor de segundo rango  $\epsilon_{ij}$ . En este caso

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{ij} E_i \delta E_j \quad W = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{ij} dV \int_0^E E_i \delta E_j$$

en la cual el campo  $\mathbf{E}$  desde cero a su valor final es paralelo a si mismo en todo momento.



Entonces

$$\frac{\delta E_i}{\cos \alpha_i} = \frac{\delta E_j}{\cos \alpha_j}$$

$$\delta E_j = a_{ij} \delta E_i$$

*¿Qué será el  $a$  contravariante?*

con  $a_{ij} = \cos \alpha_j / \cos \alpha_i$ . Entonces  $E_j = a_{ij} E_i = a^{ij} E_i$  y

$$\int_0^E E_i \delta E_j = a^{ij} \int_0^E E_i \delta E_i = \frac{1}{2} a^{ij} E_i^2$$

de modo que también

$$\int_0^E E_i \delta E_j = \frac{1}{2} E_i E_j,$$

y entonces

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV.$$

Esta expresión vale para medios lineales isótropos o no homogéneos o no homogéneos. Es decir, es bastante general. Traemos cargas desde el infinito pensando que el medio material no cambia su constante (temperatura constante), por ello indirectamente hemos supuesto un proceso isotérmico. Este trabajo ha incrementado la función libre de Helmholtz.

## 4.4 Interpretación termodinámica de U

El incremento de energía a T constante

$$\delta W = U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j \quad \text{con } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ tensor simétrico (4.1)}$$

Pero  $\epsilon$  es función de T la temperatura y entonces no podemos decir que

$$dU = dW$$

valga en general, pues también hay variación del calor (a no ser que sea un proceso isotérmico) de modo que la energía que representa (4.1) es la energía libre de Helmholtz a T constante.

$$dU = dQ - dW \quad F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT$$

pero al ser la última cero, resulta

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV - SdT$$

de modo que como el primer término es  $\partial F / \partial D|_T$  resulta que la entropía es

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D$$

Si es un medio isótropo entonces  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  y, se puede escribir

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} S &= \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{\mathbf{D}} = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV. \end{aligned}$$

De esta manera

$$U = F + TS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[ \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{D} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \left[ \epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right] dV,$$

y finalmente para medios lineales e isótropos

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial(T\epsilon)}{\partial T} dV$$

y la segunda ley de la termodinámica es

$$\delta Q = T.dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

con  $\epsilon > 0, T > 0$ , (lo cual vale siempre)  $\partial \epsilon / \partial T < 0$  si el  $\epsilon$  decrece con  $T$  el cuerpo se enfriá  $\delta Q < 0$ .

Este análisis está en el libro de Panofsky y en el Landau de electrodinámica de los medios.

**Estamos queriendo ver el calor absorbido por el sistema si el campo  $E$  crece a su valor final.**

**Agitación térmica tiende a desorientar dipolos.**

**Isotropía implicará no igual dirección de  $D, E$  pero no pueden ser opuestos [¿?].**

#### 4.4.1 Fuerza entre placas de un condensador

Sea un medio inmerso en un sistema aislado del exterior. Entonces tendremos  $dW_e + dW_m = 0$  de lo cual deducimos

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -dW_e,$$

o bien

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e|_q$$

que pasa para un sistema aislado a carga constante. Para un condensador

$$W_e = \frac{1}{2c} Q^2 \quad -\nabla W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \nabla C = \mathbf{F}$$

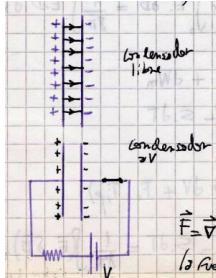
que es la energía electrostática proveniente de Helmholtz.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \delta W_e|_V + dW_B = 0$$

donde el segundo y tercer término son a tensión constante y el trabajo de la batería, respectivamente. Entonces

$$\mathbf{F} = \nabla W_e|_V,$$

que es un proceso a  $V$  constante; la fuerza tiende a aumentar la energía libre de Helmholtz del sistema, aunque la fuerza entre placas continúa siendo la misma. La ilustración ilustra



La fuerza tiende a deformar el condensador, pero aumenta la capacidad. Luego,

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\mathbf{F} = \nabla W_e|_V = \frac{1}{2} V^2 \nabla C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \nabla C$$

## 4.5 Teorema de Thomson

Consideremos una zona del espacio donde hay un campo eléctrico con un conductor. Al llegar al equilibrio se redistribuyen las cargas para hacer mínimo la energía libre de Helmholtz  $F$  del sistema.

La variación de la energía para un sistema de  $n$  electrodos será

$$\delta W = \int_V \phi \delta \rho \, dV = \sum_{i=1}^n \int \phi_i \delta \rho_i \, dV = \sum_{i=1}^n \phi_i \int \delta \rho_i \, dV = 0$$

donde  $\delta\rho$  es la variación de la densidad de carga y donde se ha sumado en los equipotenciales  $\phi_i$  para cada conductor  $i$ -ésimo. La última igualdad se hace cero porque los conductores están aislados y su carga neta no varía su distribución.

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\nabla\phi \cdot \delta \mathbf{D} dV) = \\ \delta W &= \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi)] dV \\ \delta W &= \frac{1}{8\pi} \sum_i^N \int_V \phi_i 4\pi \delta p_i dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \mathbf{D} \phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_i^N \phi_i \int_V \delta \rho_i dV = 0\end{aligned}$$

y la integral de superficie la podemos dejar desvanecerse. Se suma sobre cada conductor que se halla a  $\phi$  constante  $\phi_i$ . La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio  $\delta \rho_i = 0 \forall i$ .

#### 4.5.1 Teorema de Earnshaw

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca pueden llegar a un equilibrio estable. El  $\phi$  no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región (estamos excluyendo los límites de la región).

Sea una región (ilustrada en la pic) donde

$$\hat{n} \cdot \nabla\phi|_s < 0 \Rightarrow \int_S \hat{n} \cdot \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} < 0 \Rightarrow$$



$$\int_V \nabla \cdot (\nabla\phi) dV = \int_V \nabla^2\phi dV = 0$$

entonces no vale lo que supusieramos (que era negativo).

#### 4.6 Esfera con magnetización uniforme

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 = \nabla \times \mathbf{M}$$

Pic tomada de la carpeta



usando el  $\phi_m$  se llega a

$$\mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3}M \quad \mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3}M$$

donde  $I$  es por interior de esfera y afuera el  $\phi_m$  es el de un dipolo con

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}a^3M$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie (no hay multipolos subsiguientes).



Figura 6.4

En las figuras vemos las líneas de  $\mathbf{B}$  que son continuas, no nacen ni mueren, pero las de  $\mathbf{H}$  nacen y mueren en la superficie, por la  $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .  $\mathbf{H}$  es menos intenso que  $\mathbf{B}$  pues

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi M$$

de manera que en el interior  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  tienen sentidos opuestos.

## 4.7 Histéresis

Los campos fundamentales son  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , en realidad  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$  de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

pero para ferromagnéticos es  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  con  $f$  no lineal. Se verifica un fenómeno de histéresis;  $\mathbf{B}$  es una función multivaluada de  $\mathbf{H}$  y  $f$  depende de la historia del material.

$\mathbf{H}$  se conoce como campo desmagnetizante.

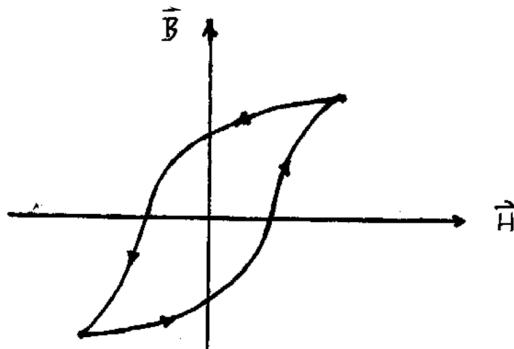


Figura 7.5

#### 4.7.1 Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un campo magnético uniforme  $B_0$  tendremos

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}$$

y podemos eliminar  $\mathbf{M}$  de acuerdo con

$$2\mathbf{H}_I + \mathbf{B}_I = 3\mathbf{B}_0$$

La curva de histéresis, ver figura siguiente, permite relacionar  $\mathbf{H}_I$  y  $\mathbf{B}_I$ . Queremos forzar la ocurrencia de

$$\mathbf{B}_I + 2\mathbf{H}_I = 0.$$

El campo  $\mathbf{H}$  se conoce como campo desmagnetizante.

Vemos en la figura que  $P$  es el punto de trabajo del imán esférico. Subimos  $\mathbf{B}_0$  hasta saturar la esfera y luego cuando  $\mathbf{B}_0 = 0$  nos hallamos en  $P$ . Hemos recorrido el camino  $ABP$ . Si  $\mathbf{H}$  es pequeño dentro del imán, éste es bastante estable en el sentido de que no se desmagnetiza fácilmente.

Usando la curva de histéresis relacionamos  $\mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{H}_I$  y entonces

$$\mathbf{B}_I = 3\mathbf{B}_0 - 2\mathbf{H}_I.$$

En un toroide se tienen  $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  de manera que  $\sigma_M = 0$  lo cual conduce a  $\mathbf{H} = 0$ . Es un imán estable.

Si el  $\mathbf{M}$  es paralelo a la superficie el imán será tanto más estable. En la figura bajo estas líneas se ven algunos conceptos importantes.

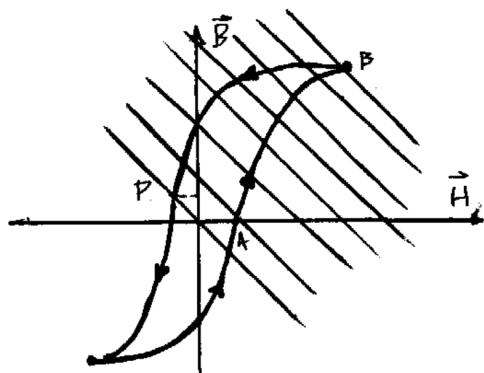
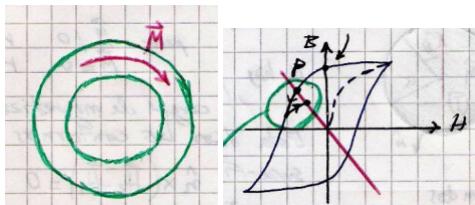


Figura 7.6



En la figura de la derecha vemos que se regresa por una minicurva de histeresis a una magnetización menor.

## Capítulo 5

---

# Fenómenos dependientes del tiempo

## 5.1 Ley de Faraday e inducción

En un circuito  $\Gamma$  se induce una fuerza electromotriz (fem) dada por

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

y por otra parte

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = -k \frac{d}{dt} \left( \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

donde el signo menos es la ley de lenz; la fem se opone el cambio de flujo. Esta propiedad no puede depender de que exista o no circuito. Si el circuito permanece rígido, la derivada temporal pasa directamente adentro como derivada parcial y se tiene

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = -k \left( \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

la cual, por aplicación del teorema de Stokes en una superficie que englobe al circuito, conduce a

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -k \left( \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right),$$

o bien

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

que nos dice que si en un punto hay variación temporal de  $\mathbf{B}$  se está produciendo un campo  $\mathbf{E}$  no conservativo.

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

siendo  $S = \partial\Gamma$  y donde

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

siendo  $\mathbf{E}$  un campo irrotacional medido en el frame donde  $\Gamma$  está en reposo. El signo menos es la ley de lenz, la FEM se opone el cambio de flujo.

Pero la variación de flujo puede deberse a variación de  $\mathbf{B}$  o a deformación del circuito.

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{V} \cdot d\ell$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{E}' \cdot d\ell &= -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{V} \cdot d\ell \\ \int_{\Gamma} [\mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{V}] \cdot d\ell &= -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

y si  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{V}$  es el campo medido en el laboratorio se llega a la ley de Faraday,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y usando el teorema de Stokes a su forma diferencial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

siendo este campo  $\mathbf{E}$  claramente no conservativo.

### 5.1.1 Corrección a las ecuaciones

Entonces resultan las siguientes cuatro ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

que son las leyes de Coulomb y Faraday en forma diferencial. Asimismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

que es la no existencia de monopolos magnéticos y la ley de Ampere. En el último caso con  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  que es para corrientes estacionarias.

Justamente por ello la ecuación relacionada con la ley de Ampere está incompleta así puesto que se dedujo para corrientes estacionarias. Maxwell introduce la continuidad aproximadamente en 1865. Entonces, como

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

se sigue que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}}{4\pi} = \nabla \cdot \left[ \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0$$

que es posible pensar como una nueva densidad de corriente  $\mathbf{J}$ . Entonces la ley de Ampere completa es:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

siendo  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  la llamada corriente de desplazamiento. Las cuatro ecuaciones están ahora completas y constituyen las *ecuaciones de Maxwell*.

Estas ecuaciones son lineales de manera que vale superposición para ellas. No obstante no vale superposición para campos relacionados no linealmente con  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ .

### 5.1.2 Potenciales

Entonces, para campos dinámicos el conjunto de ecuaciones es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  al igual que en magnetostática, podemos derivar  $\mathbf{B}$  del potencial vector  $\mathbf{A}$ . Luego veremos que persistirá una indeterminación de la  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . No obstante, como  $\mathbf{E}$  no tiene rotor nulo, entonces no existe  $\phi$  potencial escalar. En efecto, tomando

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \nabla \times \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

podemos pensar en un potencial general  $\Phi$  tal que

$$-\nabla \Phi = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

o bien

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

donde por supuesto  $\Phi$  no tiene significado de trabajo, medido independientemente de la trayectoria, como sí lo tenía el potencial electrostático.

Podemos expresar las ecuaciones de Maxwell (1.1) y (1.2) en términos de estos potenciales  $\mathbf{A}, \Phi$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \rightarrow \nabla \cdot \left( -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

de manera que resultan dos ecuaciones para los potenciales, pero acopladas

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Así como están son de difícil resolución.

## Cambio de Gauge

Podemos desacoplarlas utilizando la arbitrariedad de los potenciales

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{1.3}$$

si le sumamos una función al potencial vector,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda,$$

se da que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

pero

$$-\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla\Lambda}{\partial t} = \mathbf{E}$$

lo cual vale si y sólo si

$$-\nabla \left( \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

de manera que requiero

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

y estas dos ecuaciones fijan la transformación de gauge. Como con  $\mathbf{A}'$ ,  $\Phi'$  sigue valiendo las (1.3), requiero que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \left( \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)$$

y si usamos los nuevos potenciales, ahora sin apóstrofes para no confundir con notación redundante,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho$$

ambos potenciales satisfacen sendas ecuaciones de onda no homogéneas. Los potenciales son como ondas propagándose en el espacio y luego se verá que los campos también serán algo parecido. El *gauge* de Lorentz o “condición de Lorentz” es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

En este caso resulta una ecuación de onda para  $\Lambda$  de manera que habrá muchísimos  $\Lambda$  que nos dan el mismo campo. Infinitos potenciales dan el mismo campo.

Podemos imponer también

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

el *gauge* de Coulomb y entonces

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho$$

vemos que el potencial  $\phi$  cumple la ecuación de Poisson. No obstante, veremos luego que la condición de Lorentz es invariante relativista mientras que la de Coulomb no lo es. El campo se describirá como el electrostático, que es estacionario, de manera que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

y entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

siendo cada uno de los términos nulos por sí mismo. El gauge, la “medida” describe a los potenciales, pero los resultados físicos deben ser independientes del gauge.

## 5.2 Conservación de la energía (teorema de Poynting)

Sea una región  $V$  con volumen fijo, en la cual existen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  variantes con el tiempo y ninguna otra cosa. Parece lógico suponer que se puede escribir una ecuación de continuidad para  $U$  la densidad de energía electromagnética por unidad de volumen. La fuerza por unidad de volumen de los campos sobre las cargas es

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

entonces

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\ell = q \mathbf{E} \cdot d\ell,$$

dado que  $\mathbf{B}$  no hace trabajo por ser perpendicular la fuerza a la velocidad.

$$\delta U = q \mathbf{E} \cdot d\ell$$

Para una carga  $q$  es

$$\frac{dU}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

y para una distribución de cargas,

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

que no es otra cosa que la potencia entregada por los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  dentro del volumen  $V$ . Es una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica.

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \left[ \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV$$

Si usamos la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
 &= \int_V \frac{c}{4\pi} \left( [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) dV \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_V \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}] dV - \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS
 \end{aligned}$$

siendo  $S \equiv \partial V$ . Si denominamos ahora

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &\equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad \text{vector de Poynting} \\
 U &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \quad \text{Densidad de energía EM}
 \end{aligned}$$

resulta que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S},$$

entonces hemos hallado una ecuación de continuidad con  $U, \mathbf{S}$  en función de los campos, que nos dice que la conservación de la energía por unidad de volumen es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.$$

Integrando esta ecuación resulta

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

donde se ha aplicado el teorema de Gauss en el miembro derecho. Así

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

siendo el primer término del LHS la variación de la energía total, el segundo la potencia entregada por los campos sobre las fuentes y el RHS el flujo de energía a través de la región transportado por el vector de Poynting. Notemos que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  es el trabajo hecho por unidad de tiempo y por volumen por los campos. Localmente la conservación de la energía es

$$\frac{dU_{cam}}{dt} + \frac{dU_{mec}}{dt} = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S},$$

donde la integral del miembro derecho es la energía que escapa a través de una región (menos el flujo del vector de Poynting). Los campos  $\mathbf{S}$  y  $U$  no están relacionados linealmente con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .

Acá hay un par de tricks que hay que explicar, de como extraer la derivada temporal, etc.

Si cambia la energía en el volumen  $V$  es debido a que se transfiere energía a las cargas como  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  o se escapa energía electromagnética como flujo de  $\mathbf{S}$ .

### 5.3 Conservación del momento. Tensor de Maxwell

La idea es que una onda plana puede portar momento pero no momento angular. Una onda electromagnética circularmente polarizada puede transportar momento angular. Se tiene

$$\frac{d\mathbf{P}_{cam}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \int_S T \hat{n} dS$$

y el miembro derecho refleja el momento lineal que se escapa por la superficie de integración. La versión integral de la anterior es

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{p} dV = \int_S T \hat{n} dS$$

que refleja la conservación del momento lineal. El primer término del lhs es el momento lineal del campo electromagnético, mientras que el segundo representa las fuerzas sobre las cargas en volumen.

Acometeremos primeramente la segunda integral del lado izquierdo. En el discreto se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

y pasando al continuo

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] dv$$

y si suponemos MLIH se puede expresar la densidad de carga en términos de la divergencia del campo  $\mathbf{D}$  y así

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \times \mathbf{B} \right] dv$$

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \times \mathbf{B} \right] dv$$

Ahora, usando las siguientes cuentas auxiliares

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \epsilon\mu \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y ahora volviendo

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B}) - \frac{\epsilon\mu}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \right] dV$$

haciendo un pase de miembros y expresando  $\mathbf{H}$  en términos de  $\mathbf{E}$  es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ \frac{1}{4\pi} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} - \epsilon\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B})] dV \end{aligned}$$

donde el último término en el integrando del RHS es cero y se lo puedo sumar por ello. Esto es para lograr un término simétrico en los campos eléctrico y magnético. Prosiguiendo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ \frac{1}{4\pi} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{H})] dV \end{aligned}$$

donde la segunda integral del lhs define a

$$\mathbf{g} = \frac{\mu\epsilon}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{\mathbf{S}}{v^2}$$

siendo  $v$  la velocidad de la onda en el medio. Podemos utilizar un identidad más, ver Apéndice ID4, para expresar

$$\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{D}$$

y así obtener

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}\mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbb{1}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})],$$

donde debe notarse que el primer producto  $\mathbf{E}\mathbf{D}$  es un producto tensorial, no es un número su resultado sino un tensor (que vendrá representado como una matriz). Se puede hacer lo propio con el campo magnético y al final del día se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV = \\ \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \left( \left[ \mathbf{D}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbb{1}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \right] + \left[ \mathbf{H}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbb{1}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] \right) dV \end{aligned}$$

Tenía anotado: “transferencia de impulso lineal de los campos a las cargas”.

donde los primeros términos dentro de cada corchete son productos tensoriales. Aplicando el teorema de la divergencia en el rhs, y expresando la derivada de la integral de  $\mathbf{g}$  con el momento de los campos, se puede escribir

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_C}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbb{1} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}] d\mathbf{S} \quad (3.1)$$

Hemos encontrado que se puede definir la conservación como flujo de un tensor de segundo rango,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right]$$

que es el tensor de esfuerzos de Maxwell. El tensor da entonces flujo de momento. Si el medio es LIH el tensor es simétrico. El tensor de Maxwell dinámico es la suma de los tensores estáticos eléctrico y magnético a la vez.

Entonces

$$\int_V (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})) dV + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV \right) = \int_S T \cdot d\mathbf{S}$$

con la normal saliente. Luego, localmente la conservación del momento lineal es

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{cam}}{dt} = \int_S T \cdot d\mathbf{S}$$

donde el RHS es la fuerza por unidad de área a través de  $S$  que actúa sobre las partículas y los campos dentro de  $V$ . Definiendo

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

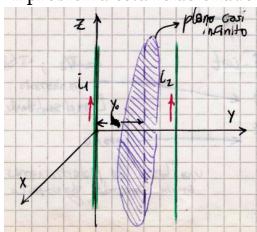
se tiene que  $\mathbf{g}$  es una densidad de flujo de momento y también puede expresarse

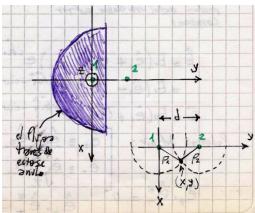
$$\mathbf{g} = \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

Observemos que el tensor de Maxwell es un tensor cartesiano.

### EJEMPLO 3.1 Problema 10b

El problema está relacionado con lo ilustrado bajo estas líneas





Los campos y los ángulos involucrados son

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{c\rho_1} I_1 \hat{e}_{\varphi_1} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{2}{c\rho_2} I_2 \hat{e}_{\varphi_2}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{x}{\rho_1} & \sin \varphi_1 &= \frac{y}{\rho_1} & \cos \varphi_2 &= \frac{x}{\rho_2} & \sin \varphi_2 &= \frac{y-d}{\rho_1} \\ \rho_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} & \hat{e}_{\varphi_1} &= \cos \varphi_1 \hat{y} - \sin \varphi_1 \hat{x} \\ \rho_1 &= \sqrt{x^2 + (y-d)^2} & \hat{e}_{\varphi_2} &= \cos \varphi_2 \hat{y} - \sin \varphi_2 \hat{x} \end{aligned}$$

Calcularemos el tensor de Maxwell (será genérico)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad B_z = 0$$

luego como  $\hat{n} = (n_x, n_y, 0)$  es

$$T = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} B_x^2 - B_y^2 & 2B_x B_y & 0 \\ 2B_x B_y & B_y^2 - B_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_z^2 - B_x^2 - B_y^2 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \hat{n}|_y = (T \cdot \hat{n}) \cdot \hat{y} = \frac{1}{8\pi} [2B_x B_y n_x - (B_y^2 - B_x^2)n_y]$$

Me interesa solamente la componente en  $\hat{y}$  dado que las otras serán nulas. La dirección  $\hat{n}$  es la saliente en el semicilindro infinito.

El producto escalar tiene metido  $B_1, B_2$  lo cual generará términos con  $B_1$ , términos con  $B_2$  y términos acoplados. Lo que depende de  $B_1$  es como una autofuerza y debería ser nula (es antifísica). Vemos la parte de interacción solamente (términos mezclados). Lo que depende solamente de  $B_2$  tampoco lo consideramos.

Luego,

$$\begin{aligned} B_{y_1} B_{y_2} &= \frac{4J_1 J_2}{c^2} \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} \frac{y_0 - d}{(\sqrt{x^2 + (y_0 - d)^2})^2} \\ B_{x_1} B_{x_2} &= \frac{4J_1 J_2}{c^2} \frac{x}{x^2 + y_0^2} \frac{x}{(x^2 + (y_0 - d)^2)} \end{aligned}$$

$$F_y = \int \int (T \cdot \hat{n}) \cdot \hat{y} dx dz$$

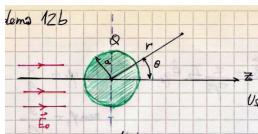
definiendo un  $f_y \equiv F_y / \text{Long.}$  se tendrá

$$f_y = \int_{-\infty}^{\infty} (T \cdot \hat{n}) \cdot \hat{y} dx = 8 \frac{J_1 J_2}{c^2} \frac{-2\pi}{d} \frac{1}{8\pi} = -\frac{2I_1 I_2}{c^2 d}$$

y la última integral sale porque es *de esas* que están en tablas.

### EJEMPLO 3.2 Problema 12b

Un esquema del problema puede verse aquí abajo



Usaremos esta expresión previamente calculada

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \cos \theta \frac{a^3}{r^2} + \frac{Q}{r}$$

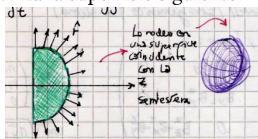
$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta}\right)$$

$$\mathbf{E} = \left(E_0 \cos \theta + 2E_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta + \frac{Q}{r^2}\right) \hat{r} - E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \hat{\theta}$$

Para hacer la integral

$$\mathbf{F} = \int T \hat{n} dS = \frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt}$$

se utiliza la superficie siguiente



y conviene ésta porque el campo es radial allí. Será  $\hat{n} \equiv \hat{r}$ . Tomo  $\hat{r}$  en tercer lugar para que el último elemento sea positivo y tenemos

$$T = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} -E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & E^2 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$T \hat{n} = \frac{E^2}{8\pi} \hat{r}$$

Me interesaré solamente la componente en  $\hat{z}$  (puesto que la fuerza estará dirigida en esa componente)

$$T \hat{n} \cdot \hat{z} = \frac{E^2}{8\pi} \hat{r} \cdot \hat{z} = \frac{E^2}{8\pi} \cos \theta$$

y como

$$E(r=a)^2 = \left(3E_0 \cos \theta + \frac{Q}{r^2}\right)^2$$

entonces

$$F_z = \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(9E_0^2 \cos^2 \theta + 6E_0 \cos \theta \frac{Q}{r^2} + \frac{Q}{8a^2}\right) d\theta$$

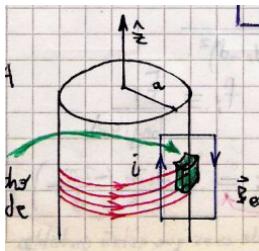
y finalmente

$$F_z = \frac{1}{4} \left(\frac{9}{4} E_0^2 a^2 + 2E_0 \frac{Q}{3r^2} + \frac{Q}{8a^2}\right).$$

### EJEMPLO 3.3 Problema 14

Se calculará solamente en el cacho mostrado en la figura. El ingenio tiene  $n$  vueltas por unidad de longitud y consideraremos que el campo magnético es

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} n I \hat{z}$$



Al elegir el eje  $\hat{z}$  el tensor  $T$  ya es diagonal. Por simetría debería anularse el flujo en las tapitas superior e inferior. Usamos un eje cartesiano en el eje  $\hat{x}$

$$T = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

donde  $\hat{n} = (-1, 0, 0)$  y  $T \hat{n} = B^2/(8\pi) \hat{x}$  y entonces

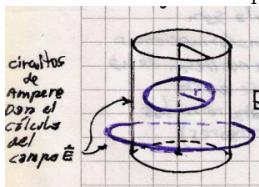
$$\frac{dF_x}{dS} = P = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Si ahora es una corriente alterna la que circula podemos emplear un formalismo cuasiestacionario. Serán

$$\mathbf{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} n I_0 \sin(\omega t) \hat{z}$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\frac{2\omega\pi nr^2}{c^2} I_0 \cos(\omega t)$$

y usando los dos circuitos de Ampere ilustrados en el siguiente cartoon



se tiene (hemos calculado el campo  $E$  con una analogía [?])

$$E_\varphi^{(1)} = \begin{cases} -\frac{2\pi\omega n}{c^2} I_0 \cos(\omega t) r & r < a \\ -\frac{2\pi\omega a^2}{rc^2} I_0 \cos(\omega t) & r > a \end{cases}$$

El vector de Poynting será

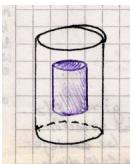
$$\mathbf{S} = -\frac{c}{4\pi} \left( \frac{4\pi n I_0}{c} \right)^2 \frac{\omega r \cos(\omega t) \sin(\omega t)}{2c} \hat{r}$$

mientras que la energía, dado que  $\omega \sim 0$  será

$$\mu \approx \frac{1}{8\pi} |(B^{(0)})^2|,$$

dado que las variaciones de  $E^2$  serán despreciables.

Para el cálculo del flujo de  $\mathbf{S}$  se utiliza la superficie mostrada en el grafito



$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{4\pi n I_0}{c} \right)^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

e integrando en volumen

$$\int \frac{\partial \mu}{\partial t} dV = \pi r^2 \ell \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

y para el Poynting

$$\int \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS = S(r) 2\pi r \ell = - \left( \frac{4\pi n I_0}{c} \right)^2 \frac{\ell \pi \omega r^2}{4\pi} \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

porque son paralelos el  $\mathbf{S}$  y  $\hat{n}$ . Se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mu dV = - \int \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS.$$

### 5.3.1 El tensor de Maxwell en acción

Se consideran sistemas interactuantes a distancia



y la idea es encerrar al cuerpo con una superficie cerrada  $\Sigma$  lo que nos permitira conocer el campo total sobre esa superficie. Tenemos la siguiente ecuación que no sé bien que

$$F_i(b) = \int_V f_i(b) dV = \int_V \partial_j T_{ij} dV = \int_S T_{ij} \hat{n}_j dS.$$

El tensor  $T$  será diagonal si una de las direcciones es paralela al campo. Con el  $T$  puede calcularse la fuerza que hacen los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sobre una cierta distribución de cargas y corrientes, con tal de evaluar su flujo en alguna superficie que las contenga (como se ve en la figura)

y con tal de que

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \mathbf{g} dV \right) = 0 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

puesto que en ese caso será

$$\mathbf{F} = \int_S T \cdot d\mathbf{S}.$$

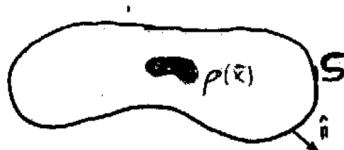


Figura 3.1

En este caso se suele definir el concepto de presión de radiación

$$\mathbf{R}_{rad} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dS} T \cdot \hat{n}.$$

$T$  es un tensor con autovalores reales; coincidiendo sus autovectores con la dirección del campo. Es independiente del sentido del campo, depende del valor absoluto de los mismos.

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \epsilon E^2 \right]$$

es el tensor eléctrico y

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mu H^2 \right]$$

el tensor magnético.

### 5.3.2 Ejemplos del tensor de Maxwell

Respecto de la figura, donde vemos que el campo penetra en el recinto y la tensión es hacia adentro, escribimos

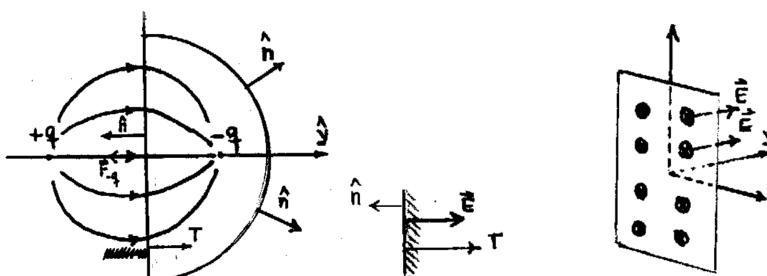


Figura 3.2

$$d\mathbf{S} = -dS\hat{y} \quad \mathbf{F}_{\text{sobre } -q} = -F\hat{y}$$

$$T|_S = \begin{pmatrix} -E_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_y^2 \end{pmatrix}$$

la fuerza atractiva hacia afuera del recinto.

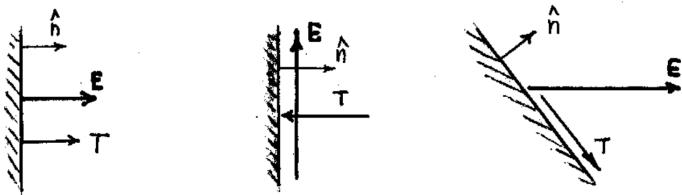


Figura 3.3

En este otro caso, el campo sale del recinto y la tensión es hacia afuera pues la  $\hat{n}$  ha cambiado de sentido.

$$T \cdot dS \propto \hat{y} \quad \mathbf{F}_{\text{sobre } +q} = F\hat{y}$$

es una fuerza atractiva hacia afuera del recinto.

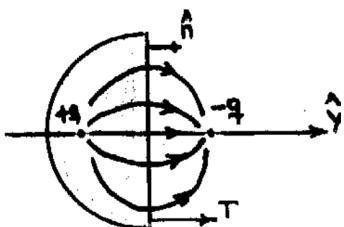


Figura 3.4

Aquí abajo el campo es tangencial al recinto, la tensión penetra en él.

Se llega al concepto de T cuando pensamos en campos para justificar las interacciones. Este concepto es válido también para el campo magnético. Para medios materiales, lineales e isótropos, se tendrán consecuentemente los siguientes tensores eléctrico y magnético estáticos [electro- y magneto-estáticos], respectivamente,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} (1 - b_e) \right]$$

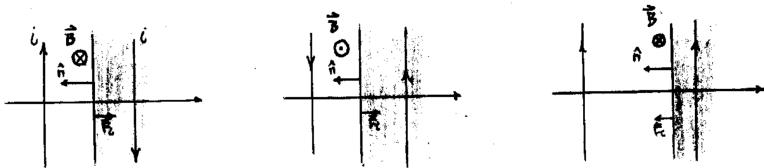


Figura 3.5

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} (1 - b_m) \right].$$

Se definen la electrofricción y magnetofricción,  $b_e, b_m$ , respectivamente como

$$b_e = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\rho} = \int_S T_{ij} n_j dS$$

hallándose la  $b_m$  con una definición análoga. La fuerza total de este término es nula pero el efecto es tender a reventar el medio.

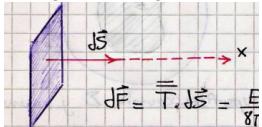
Para el vacío el  $T_{ij}$  es simétrico y con elementos reales, por lo tanto es diagonalizable con autovalores reales. Para diagonalizarlo podemos usar razonamientos físicos o matemáticos.

Cuando  $T$  está diagonalizado la traza no es nula y figura el cuadrado del campo eléctrico, o sea que no depende de la dirección sino solo del valor absoluto de la intensidad. Cuando se diagonaliza, haciendo

$$|T - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

se tienen  $\lambda_1 = E^2/8\pi$  y  $\lambda_{2,3} = -E^2/8\pi$ , donde el autovector de  $\lambda_1$  corresponde a la dirección de  $\mathbf{E}$  y  $\lambda_{2,3}$  a las direcciones perpendiculares.

El siguiente figurín ilustra



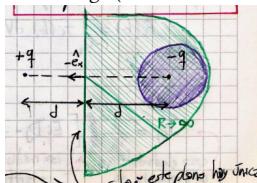
donde se tiene

$$dF = T dS = \frac{E^2}{8\pi} dS \hat{e}_x,$$

o bien en palabras; el campo  $\mathbf{E}$  por unidad de área en la dirección de la normal a la superficie por el elemento de superficie transmite una tensión a través de la superficie.

**EJEMPLO 3.4**

Considerando el siguiente dibujo vemos que se quiere obtener la fuerza sobre  $q$  para lo cual se encierra la carga (con una semiesfera al infinito) y calcula el flujo resultante

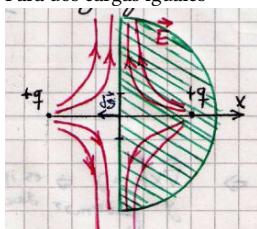


Queda un plano sobre el cual solamente hay  $E_x \hat{x}$ . Entonces

$$F_x = -\frac{4d^2q^2}{8\pi} \int_{\text{Plano xy}} \frac{dydz}{(d^2 + y^2 + z^2)^3} = -\frac{q^2}{(2d)^2}.$$

En este caso las dos cargas tienen signos opuestos. Sobre el plano el campo es perpendicular, se transmite entonces una tensión a través del mismo plano; existe una fuerza atractiva.

Para dos cargas iguales



se tiene en  $x = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{2q(y \hat{y} + z \hat{z})}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

el campo es paralelo al plano. Entonces la interacción es repulsiva porque se ejerce una presión a través de  $dS$  que empuja a  $q$ . El tensor es

$$T(0, y, z) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & E_y^2 - \frac{E^2}{2} & E_y E_z \\ 0 & E_y E_z & E_z^2 - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix}$$

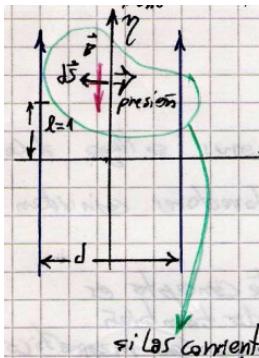
Inmediatamente se llega, para la fuerza sobre la carga de la derecha, a

$$F_x = -\frac{q^2}{8\pi} \int \frac{4(y^2 + z^2)}{(d^2 + y^2 + z^2)^3} dy dz = -q^2 \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(d^2 + \rho^2)^3} d\rho = \frac{q^2}{(2d)^2},$$

que recupera el resultado de la ley de Coulomb (previo pasaje a cilíndricas de la integral y buscando el resultado en una tabla).

**EJEMPLO 3.5 Cables paralelos por los que circula corriente**

Se analizará fuerza por unidad de longitud dada la extensión infinita de los cables.



$$\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{B}^1(\eta) + \mathbf{B}^2(\eta) = -\frac{4I}{c} \frac{y}{(d/2)^2 + y^2} \hat{x}$$

Los cables se atraerán si las corrientes son paralelas. Los cables se repulsan si las corrientes son antiparalelas (sentido contrario).

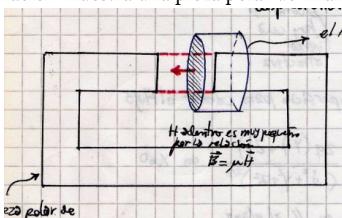
La siguiente figurita ilustra



que si cambio de normal  $\hat{n}$  cambio dirección de la fuerza (debida al flujo del tensor de Maxwell, no al flujo del campo que será nulo).

### EJEMPLO 3.6 Fuerza en imán polar

En este ejemplo se desprecia el flujo lateral y el interior (que es mucho más pequeño). La ilustración muestra una pieza polar de imán.



Luego, el tensor es

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right].$$

$$d\mathbf{F}_{||} = T \cdot d\mathbf{S}_{||} \rightarrow \frac{E^2}{8\pi} d\mathbf{S}_{||}$$

el campo eléctrico transmite una tensión  $E^2/8\pi$  paralela a la dirección del cam-

**Un campo ejerce una presión en una dirección perpendicular al campo.**

po. El tensor diagonalizado es

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/2 \end{pmatrix}$$

En cambio, el tensor no diagonalizado es

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & \frac{1}{2}(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & \frac{1}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{pmatrix}$$

Si se elige uno de los ejes a lo largo del campo  $\mathbf{E}$  se diagonaliza el tensor, lo cual es un razonamiento matemático.

## 5.4 Método cuasiestacionario

Se aproximan campos y fuentes con frecuencias bajas, es decir cuando  $\omega \approx 0$ , serán campos que varían lentamente con el tiempo. O sea que en alguna medida se utilizarán expresiones estáticas para una situación dinámica. Observemos que se desarrollará la parte espacial pero la temporal quedará como está. Se considera

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}} e^{i\omega/c\hat{n}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t}$$

y se desarrollará la parte espacial en torno a  $\omega = 0$ . Se hace un Taylor derivando con respecto a  $\omega$  y evaluando en  $\omega = 0$ . Comencemos el show,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}} + \omega \frac{i\hat{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbb{E}} + \omega^2 \frac{i^2 (\hat{n} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{E}}$$

y si le *pegamos* la parte temporal será

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(0)}} + \underbrace{\omega \frac{i\hat{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(1)}} + \underbrace{\omega^2 \frac{i^2 (\hat{n} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(2)}}$$

Para el campo  $\mathbf{B}$  puede hacerse una descomposición análoga. Veamos cómo resulta esto aplicándolo a la ecuación del rotor del campo  $\mathbf{E}$ , es decir a  $\nabla \times \mathbf{E} = -1/c \partial \mathbf{B} / \partial t$ . Considerando hasta orden 2, se tienen

$$\nabla \times (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^2) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1 + \mathbf{B}^2)$$

$$0 + \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}^1}_{\propto \omega} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}^2}_{\propto \omega^2} = \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^0}_{\propto \omega} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^1}_{\propto \omega^2} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^2}_{\propto \omega^3}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{\mathbf{B}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \omega (-i\omega) \frac{i\hat{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbf{B}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \frac{\omega^2}{2} (-i\omega) \frac{i^2 (\hat{n} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbf{B}} e^{-i\omega t} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^{(0)} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{B}^{(1)}} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \frac{\omega^2}{2} \frac{i^2 (\hat{n} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{B}^{(2)}} \end{aligned}$$

Igualando miembro a miembro se establece una equivalencia entre órdenes,

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(0)} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial t}$$

donde el orden cero es el de los campos estáticos y el orden 1 es el término cuasiestacionario. Notemos que no *cabalgan* en la misma medida  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , como se aprecia de la ecuación del rotor para el orden 1 del campo eléctrico.

Consideramos  $\omega/c\ell \ll 1$  con  $\ell$  alguna longitud característica del sistema. Esta es la aproximación del sistema para poder usar cuasiestacionario.

En general, en el método cuasiestacionario se alternarán para un mismo campo el valor constante (no necesariamente cero) y alguna función de  $(\mathbf{x}, t)$ . Es decir, que si  $E_{par} = cte.$  entonces  $E_{impar} \neq cte.$  y si  $B_{impar} \neq cte.$  entonces  $B_{par} = cte.$

No es muy formal decir  $\omega$  chico puesto que no es adimensional. Débese comparar contra alguna magnitud del problema físico, por ejemplo

$$\frac{\omega}{c} \ell \rightarrow 0$$

es una buena magnitud característica, donde  $\ell$  es una longitud característica del sistema físico.

Para las densidades de carga y de corriente,  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$  vale un desarrollo similar. Recordemos que la nomenclatura de corrientes en

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

es corriente de conducción y de desplazamiento respectivamente.

Cuando un conductor no es perfecto vale la ley de Ohm,

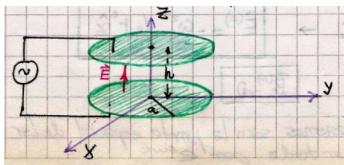
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \delta = \frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}$$

donde  $\delta$  es la profundidad pelicular, una longitud de penetración.

#### EJEMPLO 4.1 Problema 4

La figura ilustra la situación, donde se considera  $a \gg h$  y se desprecian los bordes.

Orden cero	Orden uno	Orden dos
$\nabla \cdot \epsilon E^0 = 4\pi\rho^0$	$\nabla \cdot \epsilon E^{(1)} = 4\pi\rho^{(1)}$	$\nabla \cdot \epsilon E^{(2)} = 4\pi\rho^{(2)}$
$\nabla \times E^{(0)} = 0$	$\nabla \times E^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial t}$	$\nabla \times E^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial B^{(2)}}{\partial t}$
$\nabla \cdot B^{(0)} = 0$	$\nabla \cdot B^{(1)} = 0$	$\nabla \cdot B^{(2)} = 0$
$\nabla \times \frac{1}{\mu} B^{(0)} = \frac{4\pi}{c} J^{(0)}$	$\nabla \times \frac{1}{\mu} B^{(1)} = \frac{4\pi}{c} J^{(1)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon E^{(0)}}{\partial t}$	$\nabla \times \frac{1}{\mu} B^{(2)} = \frac{4\pi}{c} J^{(2)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon E^{(1)}}{\partial t}$
$\nabla \cdot J^{(0)} = 0$	$\nabla \cdot J^{(1)} = -\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}$	$\nabla \cdot J^{(2)} = -\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}$



Se considera también que está alimentado con tensión y no con corriente. Luego,  $\omega/c\ell \rightarrow 0$  con  $\ell$  cierta longitud característica. Luego veremos quién es esta  $\ell$ .

Se trabaja cada uno de los órdenes.

**Orden cero.** De las ecuaciones correspondientes y por integración del campo estático obtenemos

$$\int \mathbf{E} \cdot d\ell = V_0,$$

de modo que

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{V_0}{h} \hat{z} \quad \mathbf{B}^{(0)} = 0$$

**Orden uno.** Desde las ecuaciones de  $\mathbf{E}$ , que utilizan el  $\mathbf{B}^{(0)}$  se obtiene  $\mathbf{E}^{(1)} = 0$ . Utilizando las ecuaciones de  $\mathbf{B}$ , con la prescripción de  $\mathbf{E}^{(0)}$  se llega a

$$\mathbf{B}^{(1)} = -i \left[ \frac{\omega r}{c} \right] \frac{V_0}{2h} \hat{\varphi}$$

donde  $r < a$ . De esta expresión se puede ver que el término entre corchetes involucra una variable adimensional que nos puede servir de candidata para  $\ell$ . En efecto con  $\ell \equiv a$  el radio del capacitor puede ser la longitud buscada.

La densidad  $\sigma$  de cada placa es uniforme, dadas las aproximaciones, o lo que es lo mismo, fluctúa muy rápidamente. Como  $\lambda \gg a$  entonces

$$\frac{\omega a}{c} \ll 1.$$

**Orden dos.** La ecuación del rotor del campo eléctrico es

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(2)} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{V_0}{2h} r \hat{\varphi},$$

lo cual conduce a

$$\mathbf{E}^{(2)} = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{V_0}{4h} r^2 \hat{z} \quad \mathbf{B}^{(2)} = 0.$$

Como vemos, se alterna qué campo es nulo en cada orden subsiguiente. Todas estas expresiones son la parte espacial de los campos, faltando *pegarles* la parte temporal.

Se puede ver que el campo converge a una función de Bessel

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(4)} + \dots = \frac{V_0}{h} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 r^2 + \dots \right] = \frac{V_0}{h} J_0(\omega r/c)$$

que tiene simetría de revolución. Ver apéndice expresión C.

El capacitor tiene vacío, entonces no se disipa energía. Solamente la energía se hallará almacenada en los campos  $\mathbf{E}$ ,  $vB$ . Entonces

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} [|E|^2 + |B|^2]$$

lo cual conduce a

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{V_0}{h} \right)^2 \left[ \cos^2(\omega t) + \frac{\omega r^2}{2c} \sin^2(\omega t) \right],$$

Acá tenía observado en la carpeta que los campos eran vectores reales, pero el  $\mathbf{B}$  de orden 1 es claramente complejo.

que es la energía instantánea. Generalmente interesa la potencia media, es decir la integral en un período, luego

$$\langle U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{V_0}{h} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\omega r^2}{2c} \right],$$

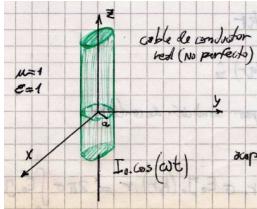
que vale en cada punto del capacitor. Entonces,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = 0,$$

dado que resulta un coseno multiplicado por un seno. Esta cantidad es nula porque nos hemos quedado a primer orden. A orden dos son los términos que tienen que ver con la radiación hacia el infinito.

#### EJEMPLO 4.2 Problema 5

Consideramos un cable conductor real, no perfecto.



Se tiene

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

donde  $\sigma$  es constante. Digamos que en un cable la corriente no circula igual en toda la sección, en corriente alterna. En corriente continua es uniforme. Las ecuaciones de Maxwell de los campos eléctricos y magnéticos están acopladas como sabemos. Clavándoles un rotor a ambas resulta

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = 0,$$

donde el factor lineal que multiplica al campo será denominado  $K^2$ . El campo  $\mathbf{E}$  debe tener dirección en  $\hat{z}$  dado que la corriente tiene la dirección del campo. Se propone una solución del tipo  $E_0 e^{i\omega t}$  y de la condición (4.2) vemos que el comportamiento temporal tiene que ser del tipo propuesto.

En un buen conductor  $\sigma$  es muy grande respecto de  $\omega$ ; si ésta última crece deja de ser un buen conductor. La aproximación de buen conductor implica entonces,

$$\frac{4\omega\sigma}{\omega} \gg 1$$

y utilizándola en nuestra ecuación para el campo eléctrico se tiene

$$K^2 \approx i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$$

y consecuentemente

$$K \frac{1+i\sqrt{4\pi\omega\sigma}}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\delta}$$

donde

$$\delta \equiv \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}}$$

tiene unidades de longitud y se denomina longitud de penetración. Será como una longitud característica del problema dado que

$$\delta = \frac{c}{\omega\sqrt{2\pi\sigma/\omega}}$$

**Esto tiene que estar hecho con detalle en el próximo chapter.**

y entonces

$$\frac{\omega\delta}{c} \ll 1.$$

Para resolver este problema aplicaremos el método cuasiestacionario.

**Orden cero.** Nos da sencillamente  $\nabla^2 E = 0$ .

**Orden uno.** Resulta la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico,

$$(\nabla^2 + K^2) \mathbf{E}^{(1)} = 0,$$

que en coordenadas cilíndricas es la ecuación de Bessel, previo cambio de variables a  $x = Kr$ ,

$$\frac{d^2 \mathbf{E}^{(1)}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \mathbf{E}^{(1)}}{dx} + \mathbf{E}^{(1)} = 0$$

su solución es

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_0 J_0(kr) \hat{z}$$

siendo  $E_0$  una constante a determinar a partir de la condición de contorno. Utilizando  $j$  para la corriente, para no confundir con las funciones de Bessel, se tiene

$$I_0 = \int j dS = 2\pi\sigma \int_0^a E_0 J_0(kr) r dr$$

que se integrará con ayuda de las expresiones del apéndice C. Luego,

$$E_0 = \frac{I_0 K}{2\pi\sigma a J_1(ka)}$$

de manera que  $E^{(1)} = E_0 J_0(kr)$ .

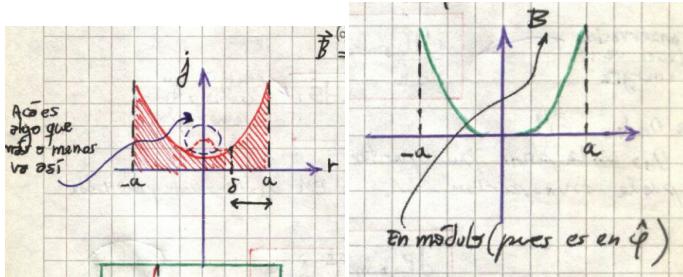
De la ecuación del rotor del campo eléctrico se despeja el campo magnético hallándose

$$\mathbf{B}^{(0)} = -c \int E_0 J_1(kr) k e^{-i\omega t} dt \hat{\varphi},$$

de la cual se obtiene

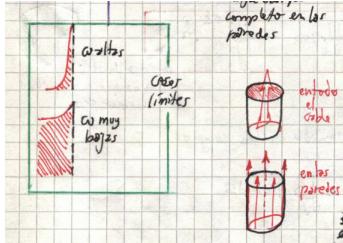
$$\mathbf{B}^{(0)} = -\frac{icK}{\omega} \frac{I_0 K J_1(kr)}{2\pi\sigma a J_1(ka)} e^{-i\omega t} \hat{\varphi} = \frac{2I_0}{ac} \frac{J_1(kr)}{J_1(ka)} e^{-i\omega t} \hat{\varphi}$$

Los siguientes grafitetes muestran el comportamiento de  $j$  y de  $\mathbf{B}$



donde se ve en función del radio y vemos que la corriente viaja casi por completo en las paredes.

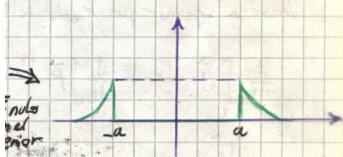
Los casos límite se ven en estas ilustraciones.



Vemos también el cálculo del campo  $\mathbf{B}$  afuera, mediante ley de Ampere,

$$B = \frac{2I_0}{ac} \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

y su relación con las aproximaciones anteriores. Cuando  $\omega$  es alta  $B$  es nulo en el interior.



Calculemos ahora la potencia disipada por efecto Joule. Será un cálculo de promedio temporal,

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{ \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* \}$$

donde dentro de la toma de parte real son fasores. Entonces

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \sigma \mathcal{R}e \left\{ \left( \frac{I_0 J_0(kr)}{2\pi\sigma a |J_1(ka)|} \right)^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} e^{i\omega t} \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-i\pi/4} e^{i\omega t} \right\} = \frac{I_0^2 |J_0(kr)|^2}{4\pi^2 \sigma a^2 |J_1(ka)|^2 \delta^2}$$

Esta es la disipación por unidad de volumen. Tenemos que integrar ahora

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r dr \int_0^L dz \frac{I_0^2 |J_0(kr)|^2}{4\pi^2 \sigma a^2 |J_1(ka)|^2 \delta^2},$$

y usando las propiedades de integración de las funciones de Bessel,

$$P = \frac{I_0^2}{4} \left( \frac{L}{\sigma\pi\delta^2} \right) \left( 1 + \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \right)^2$$

y como el paréntesis es  $\sim 1$  se tiene que

$$P \approx \frac{I_0^2}{2} R_{eq}$$

donde  $R_{eq}$  es una resistencia equivalente y la disipación se produce en la longitud  $\delta$  no en todo el radio del cable.

## Capítulo 6

---

# Ondas planas

Lejos de las fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Podemos derivar con respecto al tiempo en cada ecuación de rotor y reemplazar con la otra de manera que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

y esto nos lleva a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

dos sendas ecuaciones de onda para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Pero es sabido que la solución de

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

es

$$\psi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

de modo que podemos postular como soluciones para nuestras ecuaciones de onda a

$$\mathbf{E} = \vec{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \mathbf{B} = \vec{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Se tiene además que  $\mathbf{k} = k\hat{n}$  da a través de  $\hat{n}$  la dirección de propagación de la onda. El número de onda  $k$  podrá ser complejo lo cual refleja atenuación. Las características del medio entran a través de

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}$$

Por su parte  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$  son las amplitudes de los campos, que serán números complejos constantes (no varían con la posición o el tiempo) y podrán dar desfasajes.

Al utilizar las ecuaciones de divergencia sobre las soluciones se obtiene que

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \hat{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

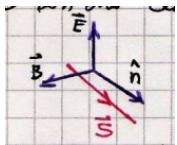
de manera que las ondas se propagan perpendicularmente a los campos, por ello las ondas electromagnéticas son transversales.

Utilizando las ecuaciones de rotor de  $\mathbf{E}$ , en indicial (hacerlas), se llega a la importante relación

$$\vec{B}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n} \times \vec{E}_0$$

de modo que los vectores  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$  también son perpendiculares. Procediendo en forma análoga para la ley de Ampere-Maxwell se obtiene el mismo resultado. Si el vector  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$  entonces  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$  tienen la misma fase.

En el vacío o en un medio LIH los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  estarán en fase. Asimismo  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{n}$  forman una terna derecha, lo cual se debe a que se definió en primer lugar a  $\mathbf{B}$  con una terna derecha.



Luego,

$$\mathbf{S} \parallel \hat{n}$$

si el medio es LIH pues  $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . El vector de Poynting apunta en la dirección de propagación de la onda.

En un medio anisótropo  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$  siendo  $\epsilon$  un tensor. Allí  $\vec{E}_0 \cdot \hat{n} \neq 0$  salvo que  $\epsilon$  esté diagonalizado y  $\mathbf{E} \parallel$  al eje principal.

Entonces si bien todavía se tiene que

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

**Acá hay que hacer las cuentas para demostrar todo esto que acá se dice sin más. Además hay que comentar sobre la introducción de números complejos en las amplitudes. Cómo son estos vectores complejos.**

pero si  $\vec{E}$  ya no es perpendicular a  $\hat{n}$  no será el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  (dirección de propagación de la energía) paralelo a la dirección  $\hat{n}$  de propagación de la onda.

### 6.0.1 Sobre complejos

El formalismo complejo es útil para operaciones lineales; cuando haya magnitudes no relacionadas linealmente es un problema.

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{con } A \in \mathbb{C}$$

Sean

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

siempre trabajaremos en general con dependencias temporales armónicas y tenemos  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  en el módulo  $\mathbf{A}_0$  que pasa a depender de  $\mathbf{x}$ .

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas. Así, los campos físicos serán

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{x}) e^{i\omega t}]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{x}) e^{i\omega t}]$$

La parte real de la suma es la suma de las partes reales,

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B}),$$

de modo que con operaciones lineales es lo mismo tomar parte real antes o después. Pero para el producto,

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B}),$$

de modo que con operaciones no lineales no es lo mismo. Para hacer producto necesito tomar la parte real de cada factor y entonces

$$\mathfrak{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathfrak{R}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mathfrak{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} e^{-i2\omega t}) = \frac{1}{2} \mathfrak{R}(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^* e^{i2\omega t}),$$

donde el tercer término es porque a los efectos de tomar la parte real conjugar y no conjugar es lo mismo. Si  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  son tales que tienen la misma fase, el resultado será real.

En las aplicaciones uno estará interesado en promedios temporales. El término con  $e^{i2\omega t}$  se hace nulo cuando el promedio es sobre un número entero de períodos, entonces

$$\langle \mathbf{AB} \rangle = \langle \mathfrak{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathfrak{R}(\mathbf{B}) \rangle = \frac{1}{2} \mathfrak{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*)$$

## 6.0.2 Poynting promedio y energías promedio

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en ondas electromagnéticas toman la forma

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{H} = \vec{\mathbb{H}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

de manera que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* + \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}} e^{-i2\omega t})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^*)$$

En un MLIH es

$$\vec{\mathbb{B}} = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}} \quad \vec{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}$$

donde usamos que  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ , lo cual conduce a

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re(\vec{\mathbb{E}} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}})^*)$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n}(\vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{E}}^*) - \vec{\mathbb{E}}^*(\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}))$$

y finalmente

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{\mathbb{E}}|^2 \hat{n}$$

que es el vector de Poynting para ondas en MLIH. Se puede proceder en forma análoga para la energía. Entonces,

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \Re(\vec{\mathbb{H}} \cdot \vec{\mathbb{B}}^* + \vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{D}}^*)$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \Re\left(\frac{1}{\mu} |\vec{\mathbb{B}}|^2 + \epsilon |\vec{\mathbb{E}}|^2\right) = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathbb{E}}|^2$$

puesto que

$$|\vec{\mathbb{B}}|^2 = \mu\epsilon|\vec{\mathbb{E}}|^2,$$

y entonces la densidad de energía promedio es

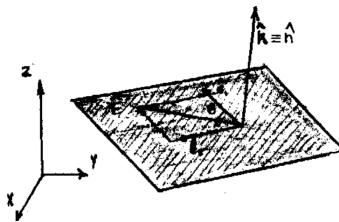
$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathbb{E}}|^2.$$

## 6.1 Polarización de ondas

Una onda plana bien general en  $\hat{n}$  es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\epsilon}_1 \vec{\mathbb{E}}_1 + \hat{\epsilon}_2 \vec{\mathbb{E}}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.1)$$

Las amplitudes  $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$  son complejos para permitir la diferencia de fase entre componentes.

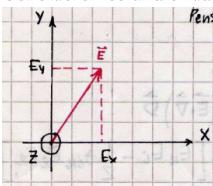


**Figura 1.1**

Si  $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$  están en fase entonces  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  está linealmente polarizada con  $\theta$  fijo. Es como que  $\mathbf{E}$  viaja siempre por el mismo andarivel, oscilando.

### EJEMPLO 1.1 Polarización lineal

Consideremos una onda que se propaga en  $\hat{z}$



$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t + \delta) \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t)$$

que son los valores que determinan la punta del vector en el tiempo. Entonces

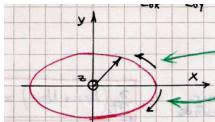
$$\frac{x^2}{E_{0x}^2} + \frac{y^2}{E_{0y}^2} - \frac{xy}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

Si las dos componentes están en fase,  $\delta = 0$  y de la ecuación anterior se deduce

$$y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} x.$$

Onda linealmente polarizada.

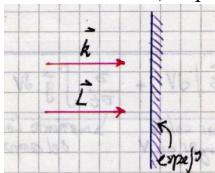
Si  $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$  tienen fase arbitraria entonces  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  está elípticamente polarizada.

**EJEMPLO 1.2 Polarización elíptica**

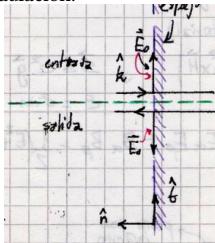
Si  $\delta = \pi/2$  entonces la ecuación resulta

$$\frac{x^2}{E_{0x}^2} + \frac{y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

la punta del vector está sobre una elipse. Puede ser sentido horario o antihorario. Esto degenerará en una polarización circular; horaria (que lleva  $\mathbf{L}$  en la dirección de  $-\hat{k}$ ) o antihoraria (que lleva  $\mathbf{L}$  en la dirección de  $\hat{k}$ ). Aquí la dirección  $\hat{k}$  de la onda es  $\hat{z}$ .



Pasarán lo mismo con el momento angular  $\mathbf{L}$  si incide una onda polarizada circularmente. Aquí la superficie azul es un espejo. Incide una onda plana que le transfiere impulso lineal: hay presión de radiación.



Supongamos que al llegar al espejo (rebote) el campo  $\mathbf{E}$  sea en la dirección  $\hat{t}$ . Como  $\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$  se desfase  $\pi$ . Los contornos en los casos dinámicos son iguales a los estáticos.

Estamos reflejando la onda y no se altera el  $\mathbf{L}$  porque rereflejamos el sistema y al ser  $\mathbf{L}$  vector axial no debe sufrir cambios.

Si  $|\vec{\mathbb{E}}_1| = |\vec{\mathbb{E}}_2|$  y la fase es  $\pi/2$  entonces  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  está circularmente polarizada.

$$\vec{\mathbb{E}}_2 = \vec{\mathbb{E}}_1 e^{i\pi/2} = \vec{\mathbb{E}}_1 i$$

entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_1 (\hat{\epsilon}_1 \pm \hat{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

**EJEMPLO 1.3 Para dinamitar**

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_1 (\hat{\epsilon}_1 \pm i \hat{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

**Como está circularmente polarizada, la onda lleva momento angular  $\mathbf{L}$ .**

**Revisar porque en la carpeta no coincide. Se tiene en cambio lo que pongo en el ejemplo para dinamitar.**

donde el + es horario y el – antihorario (momento angular en el sentido de propagación).

donde el + corresponde a  $\mathcal{C}^+$  antihoraria y el – a horaria. Nos definimos por comodidad,

$$\hat{\epsilon}_+ \equiv \frac{\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}} \quad \hat{\epsilon}_- = \frac{\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}}$$

una base de polarizaciones. Se cumplen

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}_\mp^* &= 0 & \hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}_\pm^* &= 1 \\ \hat{\epsilon}_1 &= \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ + i\hat{\epsilon}_-) & \hat{\epsilon}_2 &= \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ - i\hat{\epsilon}_-)\end{aligned}$$

luego cualquier polarización se puede escribir como combinación lineal de  $\mathcal{C}^+$  y  $\mathcal{C}^-$ .

Por otra parte, una onda plana general también se puede escribir, además de como en (1.1), según

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\epsilon}_+ \vec{\mathbb{E}}_+ + \hat{\epsilon}_- \vec{\mathbb{E}}_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

donde la conversión entre bases la tenemos en las expresiones previas. Luego,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 + E_-/E_+}{1 - E_-/E_+} = \frac{|1+r|}{|1-r|} \quad \frac{E_-}{E_+} = r e^{i\alpha}$$

Entonces

$$\mathbf{E} = \left( \frac{E_+ + E_-}{\sqrt{2}} \right) \hat{\epsilon}_1 + i \left( \frac{E_+ - E_-}{\sqrt{2}} \right) \hat{\epsilon}_2$$

donde el cambio de bases es

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_+ \\ \hat{\epsilon}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_+ \\ \hat{\epsilon}_- \end{pmatrix} = T_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_+ \\ \hat{\epsilon}_- \end{pmatrix}$$

donde  $T_1, T_2$  son transformaciones que nos llevan de una base a otra por rotación de los versores.

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}'_1 \\ \hat{\epsilon}'_2 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}'_+ \\ \hat{\epsilon}'_- \end{pmatrix} = T_1 T_2 \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{pmatrix}$$

con

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} e^{-ix} & 0 \\ 0 & e^{ix} \end{pmatrix}$$

Ahora se cambia de base la onda  $\mathbf{E}$ , lo cual da

$$\mathbf{E} = [e^{ix} E_+ \hat{\epsilon}_+ + e^{-ix} E_- \hat{\epsilon}_-] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$$

y pasamos a una nueva base donde la elipse es canónica.

$$\frac{E'_-}{E'_+} = \frac{E_-}{E_+} e^{-2ix} = r e^{i\alpha} e^{-2ix}$$

Habiendo girado  $\alpha/2$  hemos hecho coincidir con los ejes los semiejes principales de la elipse.

Una onda que rebota en un espejo transfiere impulso lineal. Una onda  $\mathcal{C}$  lleva  $\mathbf{L}$  pero no lo transfiere en un rebote perfecto. Por ser  $\mathbf{L}$  un vectorial axial (pseudovector) el reflejo es equivalente a una simetría del sistema.

Tenemos dos base entonces  $\{\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2\}$  y  $\{\hat{\epsilon}_+, \hat{\epsilon}_-\}$ . Además,

$$\frac{\vec{E}_-}{\vec{E}_+} = r e^{i\alpha}$$

si  $r = \pm 1, \alpha = 0$  entonces estamos frente a linealmente polarizada.

### 6.1.1 El tensor de Maxwell para las ondas

Para la onda plana hay direcciones privilegiadas. Fijemos

$$x : \text{campo } \mathbf{E} \quad y : \text{campo } \mathbf{B} \quad z : \text{propagación}$$

El tensor será

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\epsilon|\mathbf{E}_0|^2 \end{pmatrix}$$

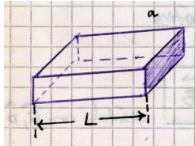
donde los ceros en los dos elementos diagonales superiores se deben a que no transmite impulso en una dirección que no es la de propagación. Luego, el valor promedio temporal será

$$\langle T \rangle = \langle T_E \rangle + \langle T_M \rangle$$

que lleva a

$$-\epsilon|\mathbf{E}_0|^2 - \frac{1}{\mu}|\mathbf{B}_0|^2 = -2\epsilon|\mathbf{E}_0|^2$$

En el ejemplito que ilustra esta figura [Chequear esto que es super sketchi!]



$$E = \langle \mu \rangle aL = \langle S \rangle at$$

puesto que  $t = L/v$  y donde  $v = \langle S \rangle / \langle \mu \rangle = c / \sqrt{\mu\epsilon}$ . Se ve que

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\epsilon|^2 \langle \mu \rangle = \frac{\epsilon}{8\pi} |\epsilon|^2$$

## 6.2 Reflexión y refracción de ondas en medios

Consideramos una onda plana que llega a una separación entre medios transparentes. Las condiciones de contorno deben adaptarse a la dinámica, pero las ecuaciones de las divergencias

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

se mantienen iguales al caso estático de manera que no variará el contorno que dependa de ellas. No olvidemos que las fuentes están muy lejos y entonces  $\rho \sim 0$  y  $\mathbf{J} \sim 0$ .

Los medios son LIH y transparentes. Las ecuaciones de rotor serán

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Luego las condiciones de contorno son las mismas que para el caso estático.

Partimos de una onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

donde

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$$

siendo  $v$  la velocidad en el medio. Los índices de refracción serán

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \quad n' = \sqrt{\mu'\epsilon'}$$

de tal suerte que los campos son

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

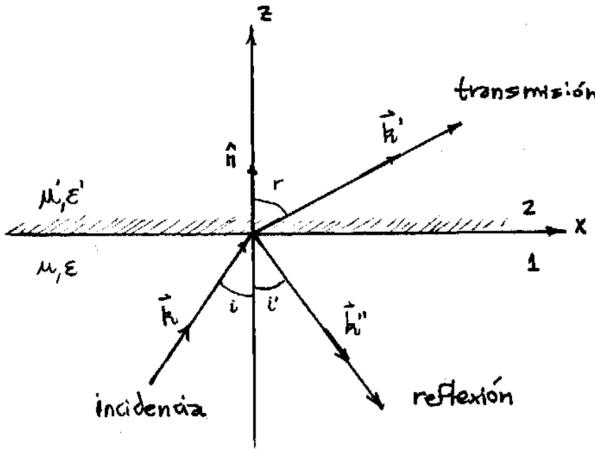


Figura 2.2

Las ondas reflejada y transmitida serán, respectivamente,

$$\mathbf{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - \omega'' t)} \quad \mathbf{E}' = \vec{E}_0' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)},$$

pero como el medio "y el sin primar es el mismo ( $\mu'' = \mu, \epsilon'' = \epsilon$ ) se tendrá

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|.$$

Se quiere saber si al cruzar de un medio al otro cambia  $\omega$ ,  $k$  o ambas. No tememos que las condiciones de contorno se deben satisfacer sobre el contorno durante todo instante de tiempo, entonces las fases de las tres ondas

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} |_{z=0} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} |_{z=0} - \omega' t = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} |_{z=0} - \omega t$$

y  $\omega' = \omega$  dado que ambas tienen que ser iguales término a término (parte espacial y parte temporal). Entonces la frecuencia  $\omega$  no varía entre medios, lo que varía es la longitud de onda.

Esto conduce a

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} |_{z=0} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} |_{z=0} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} |_{z=0}$$

Pero notemos que  $\hat{n} \cdot \mathbf{x}|_{z=0} = 0$  y que se puede escribir

$$\mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{x}(\hat{n} \cdot \hat{n}) - (\hat{n} \cdot \mathbf{x})\hat{n}|_{z=0},$$

y entonces

$$\mathbf{k} \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{x} \times \hat{n})]_{z=0} = \mathbf{k}' \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{x} \times \hat{n})]_{z=0} = \mathbf{k}'' \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{x} \times \hat{n})]_{z=0}$$

y esto es la ecuación de un vector contenido en un plano. Luego, los tres vectores  $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$  tienen un plano en común.

Con esto se obtiene la primer ley de la óptica geométrica, habiendo postulado la mera existencia de condiciones de contorno. Los vectores que representan las ondas están en un mismo plano y se verifica

$$k \sin(i) = k' \sin(r) = k'' \sin(i'),$$

y se deducen las consecuencias

$$n \sin(i) = n' \sin(i') \quad \text{Ley de Snell,}$$

donde  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$  y que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión

$$i = i' \quad \text{Ley de reflexión.}$$

La existencia de condiciones de contorno en  $z = 0$  que deben ser satisfechas en todo  $t$  en todo punto  $(x, y)$  lleva a todos los factores de fase iguales en  $z = 0$ .

Se debe tener  $\mathbf{B}$  normal continuo y  $\mathbf{D}$  normal continuo también, lo cual viene de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  y  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ .

Luego se plantean los contornos considerando que los campos bajo  $z = 0$  son suma de incidente y reflejado.

$$D_{\hat{n}} : \quad [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] \cdot \hat{n} = 0 \quad \rightarrow \quad [\epsilon' \mathbf{E}'_0 - \epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0)] \cdot \hat{n} = 0$$

$$E_{\hat{t}} : \quad \hat{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{n} \times [\mathbf{E}'_0 - (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0)] = 0$$

$$B_{\hat{n}} : \quad [\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0)] \cdot \hat{n} \quad \text{Igual a cero esto?}$$

$$H_{\hat{t}} : \quad \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 - \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0) \right] = 0$$

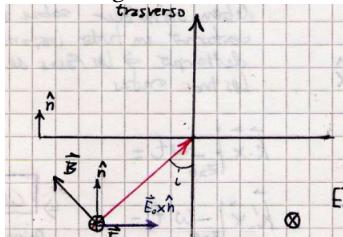
de manera que

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

donde  $c/\omega$  es el mismo para ambos medios.

Aplicando diligentemente los contornos se llega a las *relaciones de Fresnel* que son los cocientes de las amplitudes relativas.

Analicemos primeramente el transverso eléctrico, cuya situación está depicted en la figura



La condición de  $D_{\hat{n}}$  se satisface idénticamente, y

$$-\mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0 = 0,$$

luego, usando que  $(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \hat{n} = (\mathbf{E}_0 \times \hat{n}) \cdot \mathbf{k} = E_0 k \sin(i)$  se tiene

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \times \hat{n} = -\mathbf{k}(\hat{n} \cdot \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_0(\hat{n} \cdot \mathbf{k}) = E'_0 k \cos(i)$$

que conduce a

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 - E''_0) \cos(i) - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_0 \cos(r) = 0.$$

donde se ha usado también que

$$k' = k \sqrt{\frac{\mu' \epsilon'}{\mu \epsilon}}.$$

Entonces

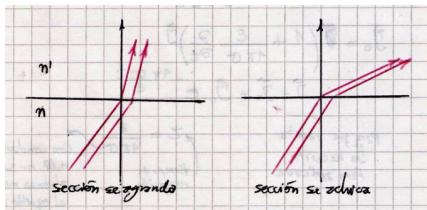
$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{1 - \frac{\mu \tan(i)}{\mu' \tan(r)}}{1 + \frac{\mu \tan(i)}{\mu' \tan(r)}} \approx -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

donde la última aproximación es porque para medios transparentes se tiene  $\mu \sim 1$ . Asimismo

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{1 + \frac{\mu \tan(i)}{\mu' \tan(r)}} = 1 + \frac{\sin(r - i)}{\sin(r + i)}$$

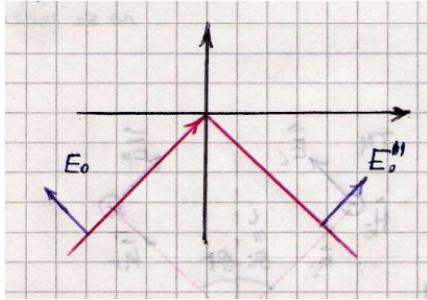
Sea la situación  $r < i$  y  $n' < n$ , entonces se tendrán:

**Pese a que el rotor de  $E$  es no nulo en dinámica, para los contornos vale lo mismo que para el caso estático.**



¿trans o tras?

Analicemos ahora el transverso magnético



Haciendo los cálculos se llega a

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{-\frac{\mu}{\mu'} \sin(2r) + \sin(2i)}{\frac{\mu'}{\mu} \sin(2r) + \sin(2i)} \approx \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)}$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu'\epsilon'}} \frac{\sin(2i)}{\sin(2r) + \frac{\mu}{\mu'} \sin(2i)} \approx \frac{2 \sin(r) \cos(i)}{\sin(i + r) \cos(i - r)}$$

donde las últimas igualdades en cada caso se obtienen usando medio transparente.

Usando  $\mu \sim 1$  (válido para medios transparentes) tenemos

$TE$ $\frac{E_0''}{E_0} = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$ $\frac{E_0'}{E_0} = 1 + \frac{\sin(r - i)}{\sin(i + r)}$	$TM$ $\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)}$ $\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sin(r) \cos(i)}{\sin(i + r) \cos(i - r)}$
--	---

frecuencias ópticas  $\mu'/\mu = 1$ 

Si  $i \sim 0$  entonces TE y TM son similares a menos de un signo, el cual es debido solamente a la convención asumida para los campos a la entrada y a la salida.

Si  $i + r = \pi/2$  el TM es nulo y el ángulo  $i$  es el ángulo de Brewster.



Figura 2.3



Cuando case el sol será más molesta la luz reflejada pero se puede evitar con un polarizador ubicado convenientemente.

Recordemos que el campo  $E$  es el vector que caracteriza el vector óptico, lo cual se ve en experiencias de Lloyd? o Wiener?.

Notemos que

$$\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_t,$$

pues  $\mathbf{S}$  no está relacionado linealmente con  $E$ ,  $B$ , y lo que sí vale es

$$\mathbf{S}_i \cdot \hat{n} = \mathbf{S}_r \cdot \hat{n} + \mathbf{S}_t \cdot \hat{n}.$$

### Polarization (Brewster angle)

Es un  $i_B$  tal que no hay onda  $E$  reflejada (en TM),

$$E_0'' = 0,$$

pues  $\tan(i + r) \rightarrow \infty$  con  $i + r = \pi/2$  se da

$$i_b = \text{atan} \left( \frac{n'}{n} \right),$$

y entonces

$$\frac{n}{n'} \sin(i_B) = \cos(i_B) \rightarrow i_b = \text{atan} \left( \frac{n'}{n} \right),$$

Sirve para producir luz polarizada linealmente.

No puede suceder Brewster y reflexión total interna simultáneamente (¿se come la onda el medio?)

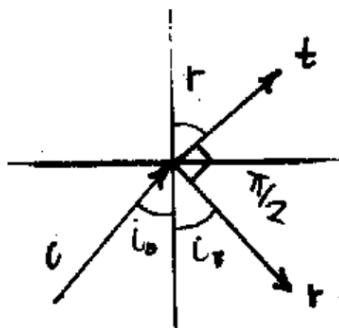


Figura 2.4

### Reflexión interna total

Sea  $n_{inc} > n_{trans}$ . Entonces se da que

$$n \sin(i) = n' \sin(r),$$

$$\frac{n}{n'} \sin(i) = \sin(r),$$

y el LHS es mayor igual a 1 para algunos  $i$ . Existe un ángulo límite

$$\sin(r) = 1 = \frac{n}{n'} \sin(i)$$

$$i_0 = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

de manera que si  $i \geq i_0$  entonces  $\sin(r) > 1$  y se debe tener un  $r \in \mathbb{C}$ .

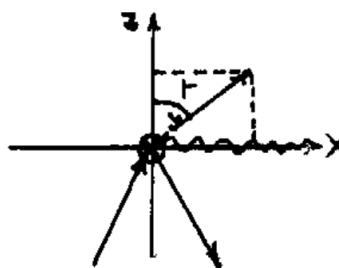


Figura 2.5

$\text{Si } \sin(r) > 1$  se tiene  $\sin(r)^2 > 1$  y como por teorema de Pitágoras es

$$\cos(r)^2 = 1 - \sin(r)^2 \rightarrow \cos(r) = i\sqrt{\sin(r)^2 - 1}$$

donde notemos especialmente que hemos sacado fuera un  $\sqrt{-1} = i$  para que el argumento de la raíz sea positivo en este caso especial. Luego

$$\cos(r) = i\sqrt{\frac{n}{n'} \sin(i)^2 - 1} = ia$$

y si  $\sin(r) = 1$  entonces  $r = \pi/2$ . Entonces

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = e^{i(k \cos(r)z + k \sin(r)x)} = \underbrace{e^{-kaz}}_{\text{atenuación}} \underbrace{e^{ik \sin(r)x}}_{\text{propagación}}$$

Hay ondas evanescentes en la reflexión interna total



El vector de onda  $\mathbf{k}'$  se puede pensar como un  $\mathbf{k}' = k' \cos(r) - ik' \sin(r)$  aunque este pensamiento no es muy feliz (anoté).

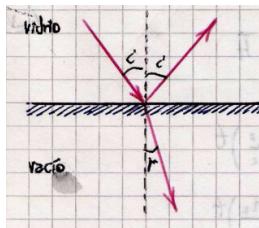
### EJEMPLO 2.1 Problema 1

Se trata de reflexión interna total. Se considera el promedio de  $\mathbf{S}$  porque alterna en el tiempo, luego

$$\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

y entonces

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (S' \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}' \times \sqrt{\epsilon} (\hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{E})^* \right)$$

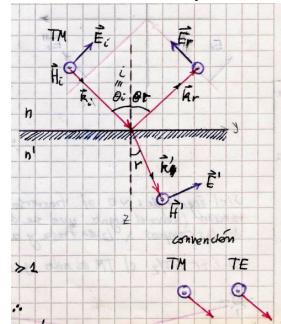


$$\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sqrt{\epsilon} \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}^* \cdot \hat{\mathbf{n}} \right)$$

$$\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon} c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \operatorname{Re} (\cos r) = 0,$$

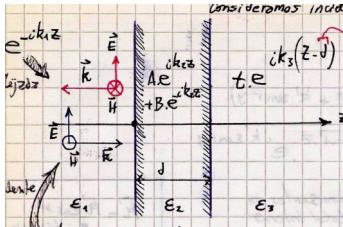
lo cual es nulo porque es imaginario puro el coseno, entonces no hay flujo del vector de Poynting hacia abajo.

Tenía este sketch para la convención de TM y TE:



**EJEMPLO 2.2 Problema 3**

Se considera incidencia normal. En el dibujete están esquematizadas direcciones y medidas



Se plantean dos coeficientes en el medio porque hay una onda que viene y una que va. En la incidencia no escribimos explícitamente la parte temporal  $i\omega t$  y el coeficiente se toma  $E_0 = 1$ . Consideramos  $\mu = 1$  y se obtendrá  $\mathbf{H}$  a partir de  $\mathbf{E}$  según

$$\mathbf{H} = \frac{n}{\mu} \hat{k} \times \mathbf{E}$$

Como no hay fuentes, hay continuidad de componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$ ,

$$\begin{cases} z=0 & \begin{array}{l} 1+r=A+B \\ n_1(1-r)=n_2(A-B) \end{array} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{① campo } \mathbf{E} \\ \text{② campo } \mathbf{H} \end{array}$$

$$\begin{cases} z=d & \begin{array}{l} A e^{ik_2 d} + B e^{-ik_2 d} = t \\ n_3(A e^{ik_2 d} - B e^{-ik_2 d}) = n_3 t \end{array} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{③ campo } \mathbf{E} \\ \text{④ campo } \mathbf{H} \end{array}$$

Entonces, se despejan  $A, B$  desde ③ y ④, dando

$$A e^{ik_2 d} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_3}{n_2} \right) t \quad B e^{-ik_2 d} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{n_3}{n_2} \right) t$$

y utilizando estas junto con ① y ②

$$\frac{1+r}{1-r} = \frac{n_1}{n_2} \left( \frac{1+r_{23} e^{2ik_2 d}}{1-r_{23} e^{2ik_2 d}} \right) \quad r_{23} \equiv \frac{1-n_3/n_2}{1+n_3/n_2}$$

siendo este último  $r_{23}$  el coeficiente de reflexión del medio 2 al 3. Ahora buscaremos cuándo se anula esta cosa.

$$r = \frac{r_{12} - r_{23} e^{i2k_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i2k_2 d}} \quad r_{12} \equiv \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

y la anulación de partes real e imaginaria requiere

$$r_{12} + r_{23} e^{i\delta} = 0$$

$$r_{12} + r_{23} \cos \delta = 0 \quad r_{12} + r_{23} \sin \delta = 0$$

luego, si  $\delta = 2k_2 d = m\pi$  será

$$r_{12} + r_{23}(-1)^m = 0,$$

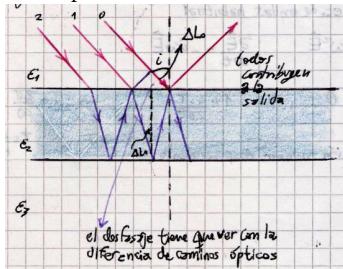
y con  $m$  par

$$r_{12} = -r_{23} \quad r_{12} = -r_{21}$$

se invierte el orden de los medios. Una solución razonable es  $n_3 = n_1$  que lleva a  $r_{21} = r_{23}$ . Con  $m$  impar se tienen  $r_{12} = r_{23}$  que lleva a  $n_2^2 = n_3 n_1$ .

**Forma alternativa**

Esto se puede resolver de una forma alternativa, como en interferencia. Veamos el dibujete



se tiene que

$$\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_j e^{i\delta_j}$$

y será

$$\delta = 2\Delta L_1 - k_1 \Delta L_0$$

$$\Delta L_1 = 2 \left( \frac{d}{\cos r} \right) \quad \Delta L_0 = 2d \tan r \sin i$$

y haciendo cálculos

$$\delta = \frac{2d\omega}{c} n_2 \cos r$$

**Estamos haciendo**  $\delta_j = j\delta$ .

con cada rayo se suma al desfasaje  $\delta$ .

Para las amplitudes se tiene

$$E_0 = r_{12} E_i \quad E_j = t_{21} r_{23}^j r_{21}^{j-1} t_{12} E_i,$$

y los primeros se pueden hacer a mano, así

$$E = \left[ r_{12} + \frac{t_{12} t_{21}}{r_{21}} \sum_{j=1}^{\infty} (r_{23} r_{21} e^{i\delta})^j \right] E_i = \left[ r_{12} + \frac{t_{12} t_{21}}{r_{21}} \frac{r_{23} r_{21} e^{i\delta}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i\delta}} \right] E_i$$

y usando  $t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}$ ?<sup>2</sup> con  $r_{12} = r_{21}$  se tiene

$$E = \left( \frac{r_{12} + r_{23} e^{i\delta}}{1 + r_{23} r_{12} e^{i\delta}} \right) E_i$$

con

$$d = \frac{\lambda_2 \ell}{2 \cos r} \quad \delta = m\pi \quad n_3 = n_1$$

que es el mismo resultado al que arribásemos por el otro método.

## 6.3 Corrientes en conductores

La continuidad de la carga y la divergencia de  $\mathbf{D}$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

para medios LIH, nos llevan a

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

y esto lo puedo pensar como una densidad de corriente estacionaria,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{J}_e$  proveniente de un  $\mathbf{E}'$  tal que  $\nabla \times \mathbf{E}' \neq 0$ .

Recordando la ley de Ohm microscópica,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \mathbf{J}$$

Un campo irrotacional no puede mantener una corriente estacionaria, necesito una FEM para ella. La FEM es una fuente de  $\mathbf{E}$  no conservativo.

y esto nos conduce a una ecuación diferencial para  $\mathbf{J}$ ,

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J} + \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \left(1 + \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{J}$$

y entonces

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_0 e^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

siendo el segundo término del RHS la parte no estacionaria de la corriente. Evidentemente, si  $t \rightarrow \infty$  ésta tiende a cero.

Dado que se verifica (3.1) se tiene

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_0 e^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

y definimos un tiempo de relajación

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

que es un tiempo característico en el cual se alcanzarán condiciones estacionarias.

Podemos distinguir dos comportamientos entonces en términos de este tiempo de relajación  $\tau$ , si  $t < \tau$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_0 e^{-t/\tau}$$

y en cambio cuando  $t \gg \tau$  se tendrá  $\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_e$  de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_e.$$

Por otra parte con respecto a los conductores, si se da que ( $\sigma \ll 1$ ) estamos en presencia de un conductor malo y no se alcanza *nunca* la condición de  $\mathbf{E} = 0$  en el interior. Tienen un  $\tau$  grande. Si estamos ante un conductor perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) la corriente es estacionaria y se tiene un  $\mathbf{E} = 0$  en el interior, el tiempo  $\tau$  es pequeño, tiendiendo a cero.

Podemos desarrollar un enfoque similar en términos de la densidad de carga  $\rho$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho$$

Entonces

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad \tau \equiv \frac{\epsilon}{4\pi\sigma},$$

y una vez que  $t \gg \tau$  y se estabiliza el sistema es  $\rho = \rho_0$  entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

## 6.4 Campo electromagnético en un medio conductor

Tenemos un campo EM de fuentes lejanas y queremos ver qué sucede en un medio conductor cuando una onda penetra en él. Lejos de la fuente se verifican

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

siendo  $\rho_L = 0$  y  $\mu, \epsilon$  homogéneos. Modelando de acuerdo

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

y siendo la ley de Ohm microscópica

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

y reemplazando en la ecuación del rotor para  $\mathbf{H}$  se tiene

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right),$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

y ahora podemos introducir la expresión que tenemos para el rotor de  $\mathbf{H}$  y usar que la divergencia de  $\mathbf{E}$  es nula de manera que

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

y entonces

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

que no es otra cosa que una ecuación de ondas general. Un par de casos particulares interesantes son el caso  $\sigma = 0$  que corresponde a un dieléctrico, para el que se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

una ecuación de ondas usual. Para el caso general  $\sigma > 0$  (conductor) podemos pensar en una solución general del tipo onda plana armónica,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

cuyas derivadas temporales son fáciles de hallar y resultan proporcionales a  $\mathbf{E}$  de manera que reemplazando este *ansatz* en la ecuación arribamos a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} i\mu\sigma\omega \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \mu\varepsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0,$$

que se puede agrupar de manera más inteligente como

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \left( 1 + i4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Podemos definir una especie de número de onda efectivo

$$K^2 \equiv k^2 \left( 1 + i4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)$$

y considerar la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0,$$

con los diferentes casos particulares ocurriendo dentro de  $K^2$ . Así para el caso de un excelente conductor,

$$4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$$

se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} + i \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

Esta parece ser una ecuación con difusión o de difusión.  
Investigarlo.

que es una ecuación de difusión para la corriente de conducción [?]. Por el contrario en el caso de un conductor pobre

$$4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1$$

resulta en

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

que es una ecuación de ondas usual dando como resultado una propagación. Tiende a la ecuación de ondas con  $\sigma = 0$ .

Para frecuencias ópticas se da que la corriente de conducción es similar a la corriente de desplazamiento [?].

En general podemos escribir

$$K^2 = k^2 \left( 1 + \frac{i}{\tau\omega} \right)$$

donde  $\tau$  es la relajación del medio y  $\omega$  es la vibración del campo. Se puede poner en términos del período,

$$K^2 = k^2 \left( 1 + \frac{iT}{2\pi\tau} \right)$$

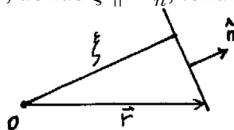
y si  $\tau \gg T$  se tiene propagación.

Para metales  $\tau \approx 10^{-14}$  segundos y entonces es válida la ecuación de difusión hasta la región de radiofrecuencias. Por ejemplo, si

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau\omega} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} \gg \omega$$

y para metales se cumple que  $1.10^{14} \gg 6.10^6$  siendo este último un valor razonable para ondas de radio.

Si consideramos los campos funciones de la distancia  $\xi$  de una plano al origen O, donde  $\xi \parallel \mathbf{E}_n$ , tendremos



Estos ejemplitos hay que revisarlos y reescribirlos.

Los campos son constantes en los planos de normal  $\hat{n}$  (ver ilustración). Se puede escribir,

$$\mathbf{E}(\xi, t) = \mathbf{E}_n(\xi, t) + \mathbf{E}_t(\xi, t)$$

donde  $n$  es longitudinal y  $t$  refiere a transversal a la variación de la coordenada

$$\mathbf{H}(\xi, t) = \mathbf{H}_n(\xi, t) + \mathbf{H}_t(\xi, t)$$

donde consideramos medios LIH.

$$\nabla = \hat{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

y de acuerdo a Maxwell,

$$\hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} = 0 \quad \hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = 0$$

se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial H_n}{\partial \xi} &= 0 \\ \hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

y si tomamos producto escalar de la última ecuación con la normal resulta

$$\hat{n} \cdot \left( \hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \right) = \frac{4\pi}{c} \sigma E_n + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0$$

de manera que

$$E_n = E_n^0 e^{-4\pi\sigma/\varepsilon t},$$

con lo cual el  $E_{\hat{n}}$  (electrostático) se apaga exponencialmente con el tiempo de relajación del conductor. El campo electrostático, el longitudinal proviene sí de un potencial.

Además,

$$\hat{n} \cdot \left( \hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \right) = \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

y haciendo escalar con el versor  $\hat{n}$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial H_n}{\partial \xi} = 0.$$

El tiempo de relajación coincide con el tiempo de atenuación [?]. Luego, un campo  $\mathbf{H}$  sólo es constante en el tiempo y uniforme en el espacio.

Un campo magnético so se ve influenciado por el conductor (que tenga, por supuesto, propiedades magnéticas despreciables). No se apantalla.

Supongamos que los campos penetrantes tienen la dependencia

$$e^{ik \cdot x - i\omega t},$$

y el rotor de  $\mathbf{H}$  se puede escribir entonces

$$ik \times \mathbf{H}_0 + i\omega \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} = 0,$$

y haciendo producto vectorial por el vector de onda  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} \times (\nabla \times \mathbf{k} H_0) = -\frac{k^2}{\mu} \mathbf{B}_0$$

de lo cual

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu \varepsilon \omega}{c} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \frac{1}{k^2} (\nabla \times \mathbf{k} E_0),$$

y del rotor del campo eléctrico sale

$$\mathbf{B}_0 = \frac{c}{\omega} (\nabla \times \mathbf{k} E_0)$$

de lo cual se deduce

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \frac{\mathbf{B}_0}{k^2}.$$

Por ello  $k^2 \in \mathbb{C}$  y  $k \in \mathbb{C}$ . Se necesita que el campo al medrar en el conductor, vaya disipando energía.

Tendremos que conectar con lo siguiente.

Asimismo la energía está metida casi por completo en el campo magnético cuando es un muy buen conductor.

$$K^2 = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right]$$

Conviene escribir el número de onda como

$$K = \beta + i \frac{\alpha}{2},$$

siendo  $\beta$  el término responsable de la propagación,  $\alpha$  el término que se atenúa. Operando se llega a las formas “simétricas” siguientes (para lograr esta bella simetría es que se escribió el  $k$  de esa manera),

$$\beta = \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + (\omega\tau)^{-2}}}{2} \right]^{1/2} = k$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[ \frac{1 + \sqrt{-1 + (\omega\tau)^{-2}}}{2} \right]^{1/2} = k$$

Podemos pensar en dos límites extremos: pésimo conductor  $4\pi\sigma/(\omega\varepsilon) \ll 1$  y excelente conductor  $4\pi\sigma/(\omega\varepsilon) \gg 1$ . La calidad de buen o mal conductor depende de la frecuencia de la onda penetrante.

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau\omega} \ll 1 \quad \frac{T}{2\pi\tau} \ll 1$$

Usando la aproximación (de mal conductor) resulta en

$$\beta \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \quad \frac{\alpha}{2} \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left( \frac{2\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)$$

La parte real corresponde a un término que se propaga y la parte imaginaria corresponde a un término que se atenúa

$$k \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi i}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma$$

Entonces resulta que para el caso de un mal conductor  $\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$  o bien  $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \ll \omega$  o bien  $1/\tau \ll \omega$  se tiene

$$K = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi\sqrt{\mu\sigma}}{c\sqrt{\epsilon}}$$

En cambio, por el mismo razonamiento pero para un excelente conductor,  $1/\tau \gg \omega$

$$K = (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c}$$

y aquí la parte de atenuación  $\alpha/2 = \alpha(\omega)/2$  de modo que hay distorsión. Se distorsiona porque la parte de atenuación depende de la frecuencia. En general tendremos

$$\mathbf{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha/2 \hat{n} \cdot \mathbf{x}} e^{i[\beta \hat{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}$$

que nos muestra una primera exponencial real que es el factor de atenuación. Entre más conductor un medio más rápida es la atenuación.

La amplitud cae a  $E_0 e^{-1}$  es una longitud  $\delta$

$$\delta = \frac{1}{\alpha/2} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}$$

que es la distancia que se desplazó el campo para que su amplitud sea  $1/e$  menor. Es la llamada “profundidad pelicular” (*skin depth*) que da idea de cuánto penetra una onda electromagnética sin atenuarse.

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \left[ \beta + i \frac{\alpha}{2} \right] \hat{k} \times \mathbf{E}$$

de modo que si  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  entonces  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  tienen la misma fase. Si en cambio  $\mathbf{k}$  pertenece a  $\mathbb{C}^3$  hay crecimiento o decrecimiento exponencial en algunas direcciones. Vemos en una onda plana el caso de la atenuación se vería así

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i(k\hat{n}_R \cdot \mathbf{x} + k\hat{n}_I \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i(k\hat{n}_R \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{k\hat{n}_I \cdot \mathbf{x}}$$

### 6.4.1 Algunos ejemplos y casos

Recordemos

$$\omega = 2\pi\nu \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

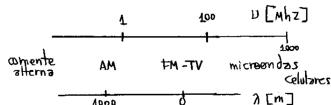


Figura 4.6

Noción de algunos numeritos a partir de la tabla

	$\nu$	$\lambda$
celular	$1.10^9$ Hz	0.3 m
radio AM	$1.10^6$ Hz	300 m
radio FM	$1.10^8$ Hz	3 m

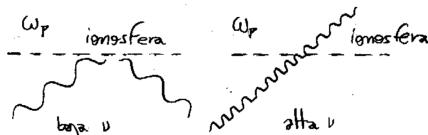


Figura 4.7

Para una malla metálica de interespaciado  $\ell$  tenemos los casos  $\lambda \gg \ell$  significa que es macizo para la onda. La penetración no dependerá de la  $\sigma(\omega)$ , es un conductor macizo.

$\lambda \ll \ell$  es transparente para la onda. No ve el conductor.

En un buen conductor  $\mu_M > \mu_E$  el material se comporta inductivamente.  
En un mal conductor  $\mu_E > \mu_M$  el material se comporta capacitivamente.

### 6.5 Desfasajes en los campos

Al ser  $k$  un complejo los campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  no están en fase dentro del medio. Entonces  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| e^{i\varphi}$  donde el ángulo es el desfasaje en el campo al entrar en el conductor.

$$\tan \varphi = \frac{\alpha}{2\beta}$$

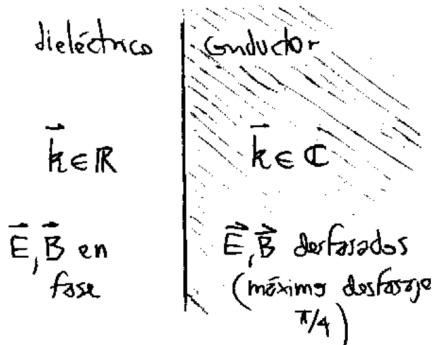


Figura 4.8

de lo cual se deduce

$$\frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \tan(2\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)$$

el máximo desfase es de  $\pi/4$  y se da cuando el material es muy buen conductor. Los valores promedio son

$$\langle \mu \rangle = \langle \mu_\varepsilon \rangle + \langle \mu_M \rangle = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*)$$

$$\langle \mu_M \rangle = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} |\mathbf{E}_0|^2$$

$$\langle \mu_M \rangle = \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \langle \mu_\varepsilon \rangle$$

donde se ve que la energía está metida casi toda en el campo  $\mathbf{B}$  cuando el medio es muy buen conductor.

#### EJEMPLO 5.1 Problema 8. Explicación del modelo de Drude

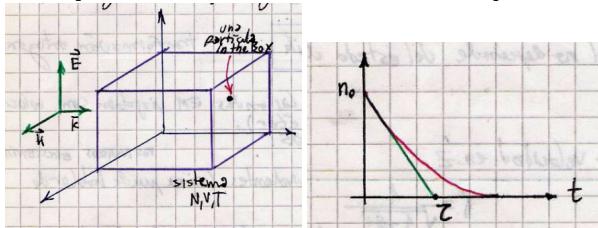
Tenemos un plasma (gas ionizado) con cargas libres. Estado estacionario, baño térmico (temperatura constante) y campo  $\mathbf{E}$  externo armónico. Los choques se producen en un tiempo  $\tau$  promedio. Sean  $n \equiv$  electrones con promedio  $\mathbf{p}$  y los choques hacen que vayan perdiendo momento  $\mathbf{p}$

$$\frac{n(t)}{\tau} = -\frac{dn(t)}{dt}$$

y

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v},$$

donde se desprecia la fuerza de  $\mathbf{H}$ . Es la fuerza debida a choques con moléculas vecinas.



Como el campo es armónico la velocidad  $\mathbf{v}$  será armónica  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$ , donde  $\nu \equiv 1/\tau$  es la frecuencia entre choques. Simplificamos la exponencial temporal

$$i\omega m \mathbf{v}_0 = e\mathbf{E}_0 - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v}_0 = \frac{e\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0.$$

Entonces para la corriente en promedio tenemos

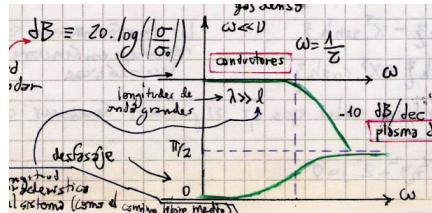
$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0$$

donde el factor del campo sub-cero puede verse como un  $\sigma(\omega)$ , y entonces podemos escribir

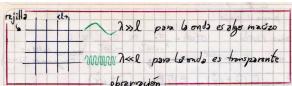
$$\mathbf{J} = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0$$

donde si  $\omega\tau \gg 1$  tiro el uno y tengo un desfasaje de  $90^\circ (-i)$ .

La siguiente figura muestra diversos comportamientos en función de la frecuencia  $\omega$ . Puntualmente con  $\omega \gg \nu$  tenemos una frecuencia de choques muy baja (gas ionizado) partículas muy alejadas entre sí.



Tenemos la siguiente observación que debería pasarse a texto o ilustrar de otra manera, o quizás mejor entender en qué sentido van las longitudes de onda (las ondas EM son transversales).



Con toda esta información podemos resolver las ecuaciones de Maxwell faltantes. Estamos con

$$\sigma(\omega) = \frac{i\sigma_0}{\omega\tau} = \frac{ine^2}{m\omega}$$

con  $\omega\tau \gg 1$  y debemos resolver

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Entonces tomo la primera y la introduzco en la segunda, luego

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

que resulta en

$$\nabla^2 E + K^2 E = 0,$$

donde

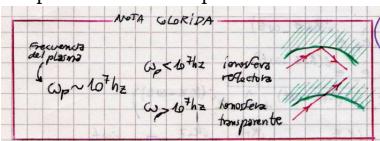
$$K^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega}\right]$$

de lo cual extraemos

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{4\pi n e^2}{m \omega^2}}$$

y podemos definir una  $\omega_P^2 \equiv 4\pi n e^2 / m$  que es una frecuencia del plasma típica. Luego, si  $k/\omega$  es un número real tenemos una onda que se propaga pues implica que  $\omega > \omega_P$  y  $K$  es real entonces  $E_0 e^{i(kx-\omega t)}$ . Por el contrario si  $k/\omega$  es un número imaginario tenemos una onda que se atenúa y  $\omega < \omega_P$  y el  $K$  es imaginario lo cual lleva a  $E_0 e^{-|k|x} e^{i\omega t}$ , que significa que la onda no puede penetrar el medio y empieza a decaer.

El típico modelo de un plasma es la ionosfera. Véase la siguiente nota:

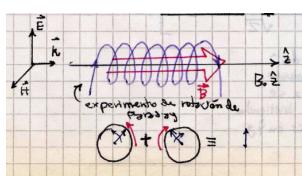


La radio AM refleja y tiene más alcance. La radio FM en cambio deja pasar y se va al espacio.

### Observación

Esto que sigue parece ser un tema nuevo, así que no correspondería realmente a este ejemplo. Tenemos un campo magnético fuerte. Una onda  $\mathbf{E}$  linealmente polarizada (se puede ver como superposición de dos polarizaciones circulares)

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y}) e^{i(kz-\omega t)}$$



Escribimos, sin incluir la fuerza viscosa, pero sí el campo magnético porque es intenso, luego

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx e\mathbf{E} + e \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times B_0 \hat{z} \right)$$

Trabajo en la zona de plasma diluido

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \approx -\frac{\sigma_0}{i\omega\tau} \sim 0,$$

donde lo último es porque la frecuencia es muy grande. Usando la aproximación vista de que  $E \sim e^{i\omega t}$

$$-im\omega\mathbf{v}_0 = eE_0(\hat{x} \pm i\hat{y}) + \frac{ev_0B_0}{c}(-\hat{y} \pm i\hat{x})$$

y tenemos el sistemita [?]

$$\begin{cases} -im\omega v_0 = eE_0 \pm i\frac{ev_0B_0}{c} \\ \pm m\omega v_0 = \pm ieE_0 - \frac{ev_0B_0}{c} \end{cases}$$

de manera que

$$v_0 = \frac{ieE_0}{m(\omega \pm eB_0/(mc))}$$

luego, como  $J = nev_0$  se tiene

$$J = \frac{ine^2}{m(\omega \pm eB_0/(mc))} E_0$$

donde

$$\omega_c \equiv \frac{eB_0}{mc},$$

es la llamada frecuencia de ciclotrón. Tenemos dos  $\sigma$ . Se sigue que

$$\frac{K}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}}$$

entonces la raíz en el rhs es una especie de índice de refracción  $n_r = n_{\pm}$ .

Las dos ondas circularmente polarizadas ven diferentes índices de refracción. Tomo

$$\frac{\hat{x} \pm i \hat{y}}{\sqrt{2}} \equiv \hat{e}_{\pm}$$

y, absorbiendo la  $\sqrt{2}$  en la amplitud  $E_0$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = E_0 \left( \hat{e}_+ e^{i(K_+ z - \omega t)} + \hat{e}_- e^{i(K_- z - \omega t)} \right) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = E_0 \left( \frac{e^{iK_+ z} + e^{iK_- z}}{\sqrt{2}} \hat{x} + i \frac{e^{iK_+ z} - e^{iK_- z}}{\sqrt{2}} \hat{y} \right) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

El ángulo  $\alpha$  de la onda linealmente polarizada se obtiene dividiendo las partes en  $\hat{x}$  y en  $\hat{y}$ . Así tendremos

$$\tan \varphi = \frac{e^{iK_+ z} - e^{iK_- z}}{e^{iK_+ z} + e^{iK_- z}}$$

y esta expresión se puede "simetrizar" para obtener

$$\tan \varphi = \frac{e^{i(K_+/2 - K_-/2)z} - e^{-i(K_+/2 - K_-/2)z}}{e^{i(K_+/2 - K_-/2)z} + e^{-i(K_+/2 - K_-/2)z}}$$

$$\tan \varphi = \tan \left( \frac{(K_+ - K_-)z}{2} \right)$$

y como  $K_+ = \omega/c n_+$  y  $K_- = \omega/c n_-$  se tiene finalmente

$$\varphi = \frac{\omega z}{2c} (n_+ - n_-).$$

#### EJEMPLO 5.2 Problema 4. Mixed tips

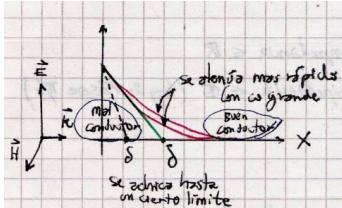
Tenemos un mal conductor (un conductor pobre) y un buen conductor. La ecuación general es

$$\nabla^2 E + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \left[ 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right] E = 0$$

donde toda la constante que acompaña al campo es una  $K^2$  efectiva (para que tengamos una ecuación de Helmholtz). Luego en un conductor bueno desprecio el 1 porque  $\sigma$  es constante y muy grande. En un conductor magro no se puede despreciar el 1 claramente porque  $\sigma$  es muy pequeño y entonces tengo dos expresiones para  $K^2$ . En este último caso aproximamos  $K = \sqrt{1+\chi} \sim 1 + 1/2\chi$ . Entonces

$$K \approx (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \frac{1+i}{\delta} \quad K \approx \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[ 1 + i \frac{2\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right]$$

para conductor bueno y magro, respectivamente. El siguiente gráfico ilustra los diferentes comportamientos



En el problema se piden calcular  $\langle \mu_E \rangle$ ,  $\langle \mu_H \rangle$ ,  $\langle W \rangle = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle$  siendo esta última la energía disipada por efecto Joule.

Digamos en resumen que un buen conductor disipa más energía;  $\mu_E$  disminuye y  $\mu_E < \mu_B$ , es más magnético que eléctrico. Por lo tanto el material se comporta de forma inductiva. Un conductor magro en cambio disipa menos energía, entonces  $\mu_E > \mu_B$ , el conductor expulsa corriente y el material se comporta en forma capacitativa.

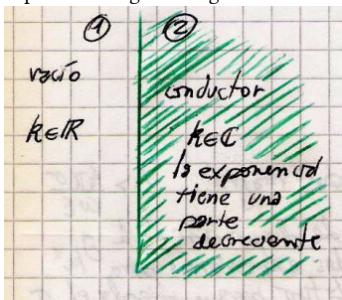
Se define el factor de mérito  $Q$  de la siguiente forma (una cuenta que haremos para un buen y para un mal conductor)

$$Q \equiv \omega \frac{\langle \mu \rangle}{\langle W \rangle} = \begin{cases} \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\sigma} \gg 1 & \text{mal conductor} \\ \frac{1}{2} & \text{buen conductor} \end{cases}$$

Se ve que para el caso de buen conductor la relación entre la energía en el campo y la disipada es fija y no depende de nada.

#### Otra cosa

¿Pero qué sucede cuando una onda atraviesa un conductor bueno en el contorno? La situación está depicted en el gráfico siguiente:



$$\begin{cases} E_{t_2} - E_{t_1} = 0 \\ H_{t_2} - H_{t_1} = \frac{4\pi}{c} g \quad \text{perfecto} \end{cases}$$

y vemos que no hay deltas en el rhs de la segunda condición [?]. En el caso de conductor bueno (no perfecto) se tiene un cero y entonces  $H_{t_2} - H_{t_1} = 0$ .

En la zona ①

$$\mathbf{E}_1 = E_0 e^{i(K_1 x - \omega t)} \hat{y} \quad \mathbf{H}_1 = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{\mu/\epsilon}} e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{z}$$

En la zona ②, teniendo en cuenta que aquí  $k_2 = (1+i)/\delta$  resulta

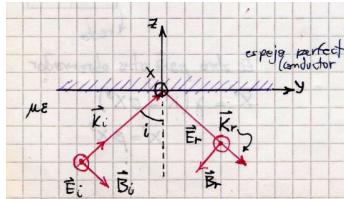
$$\mathbf{E}_2 = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)} \hat{x} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{E_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}}{\sqrt{\mu/\epsilon} \sqrt{\omega\epsilon/(4\pi\sigma)} e^{-i\pi/4}} \hat{x}$$

**Check que el campo  $\mathbf{H}$  sea en  $x$  versor.**

Y vemos que  $\mathbf{H}$  siempre se puede llevar al campo  $\mathbf{E}$  sobre algo que tiene unidades de impedancia. En la zona ① los campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  viajan en fase pues la impedancia es un número real. En la zona ② los campos viajan desfasados porque la impedancia es compleja; hay un desfasaje de  $\pi/4$ .

### EJEMPLO 5.3 Problema 7 (Experiencia de Wiener)

Se muestra en la figuretta un conductor perfecto, un espejo perfecto.



Planteamos las prescripciones de los campos, dado el sistema coordinado.

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= E_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \hat{x} & \mathbf{B}_i &= \sqrt{\mu\epsilon} E_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \hat{k}_i \times \hat{x} \\ \mathbf{E}_r &= E_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \hat{x} & \mathbf{B}_r &= \sqrt{\mu\epsilon} E_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \hat{k}_r \times \hat{x} \end{aligned}$$

Evaluaremos los contornos. En el material el campo eléctrico es nulo, pero el contorno asociado al campo magnético no es nulo porque hay densidad de corriente superficial al rebotar la onda incidente,

$$E_r + E_i = 0 \quad (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r) \times \hat{n} = 0$$

Podemos descomponer los vectores de onda según

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_y + \mathbf{k}_z \quad \mathbf{k}_r = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_z$$

donde

$$k_y = |k| \sin(i) \quad k_z = |k| \cos(i).$$

Entonces

$$\mathbf{E} = E_i (e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} - e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) \hat{x}$$

y los vectoriales son

$$\hat{k}_i \times \hat{x} = -\sin(i) \hat{z} + \cos(i) \hat{y} \quad \hat{k}_r \times \hat{x} = -\sin(i) \hat{z} - \cos(i) \hat{y}$$

de manera que el campo magnético

$$\mathbf{B} = -E_i \sqrt{\mu\epsilon} \left[ (e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} - e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) \sin(i) \hat{z} (e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) \cos(i) \hat{y} \right]$$

**El producto escalar  $(\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r) \cdot \hat{n}$  lleva en realidad a la ley de Snell.**

Simplificando un poco las expresiones anteriores,

$$\mathbf{E} = 2iE_i e^{ik_i y} e^{-i\omega t} \sin(k_z z)$$

$$\mathbf{B} = 2E_i \sqrt{\mu\epsilon} e^{ik_i y} [-i \sin(k_z z) \sin(i) \hat{z} + \cos(k_z z) \cos(i) \hat{y}]$$

y entonces el vector de Poynting

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})$$

resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} 4\sqrt{\mu\epsilon} E_i^2 \sin^2(k_z z) \sin(i) \hat{y},$$

tenemos flujo en la dirección  $\hat{y}$ . Se tienen, además,

$$\langle \mu_E \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} 4E_i^2 \sin^2(k_z z)$$

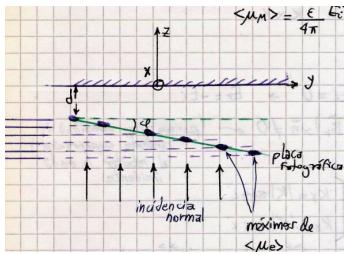
$$\langle \mu_M \rangle = \frac{\epsilon}{4\pi} E_i^2 (\sin^2(k_z z) \sin^2(i) + \cos^2(k_z z) \cos^2(i))$$

Con incidencia normal  $i = 0$  se tiene vector de Poynting promedio nulo. Hay ondas estacionarias en ese caso.

### Incidencia normal

Consideramos  $i = 0$  ahora. El Poynting promedio es nulo, pero

$$\langle \mu_E \rangle = \frac{\epsilon}{4\pi} E_i^2 \sin^2(k_z z) \quad \langle \mu_M \rangle = \frac{\epsilon}{4\pi} E_i^2 \cos^2(k_z z) \cos^2(i)$$



En  $z = 0$  se tienen  $\langle \mu_E \rangle = 0$  y  $\langle \mu_M \rangle \neq 0$  si la placa está en  $\varphi = 0$ ,  $z = 0$  no se registra nada y entonces  $\mathbf{E}$  es el vector óptico.

Cuando  $\varphi \neq 0$  y existe un  $d > 0$  se imprimen franjas oscuras en los máximos de  $E$ . El máximo de  $\langle \mu_E \rangle$  vendrá de la cuenta

$$kz = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

y será

$$z_M = \frac{\lambda}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

con un espaciamiento entre máximos (interfranja) de  $\Delta D = 1/(2 \sin \varphi)$ .

### Incidencia 45°

La incidencia es  $i = \pi/4$  y entonces seno y coseno dan lo mismo  $1/\sqrt{2}$  de modo que el TE nos da la información

$$\langle \mu_E \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} 4E_i^2 \sin^2(k_z z/\sqrt{2}) \quad z_M = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \Delta D = \frac{1}{(\sqrt{2} \sin \varphi)}$$

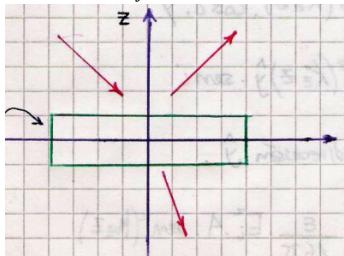
Para el TM no hace falta hacer las cuentas nuevamente. Es similar al TE pero con  $\mathbf{E} = \mathbf{B}$  de manera que  $\langle \mu_E \rangle^{\text{TM}} = \langle \mu_B \rangle^{\text{TE}}$  y será

$$\langle \mu_B \rangle^{\text{TE}} = \frac{\epsilon}{8\pi} E_i^2,$$

que es uniforme (no hay franjas).

**EJEMPLO 5.4 Problema 5 (presión de radiación)**

Veamos el dibujete



No me interesaría la componente tangencial porque se hace tender la pared a cero. Se evaluarán

$$\int_S T \hat{n} dS - \int_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dV.$$

donde  $\mathbf{g}$  es la densidad de momento lineal del campo electromagnético. El tensorete es

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i D_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \delta_{ij} \right]$$

y el valor promedio de la densidad de momento en el volumen será, para un cierto período  $\tau$

$$\langle \int_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dV \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V \frac{\partial g}{\partial t} dV = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V [g(\tau) - g(0)] dV \rightarrow 0,$$

esto último porque  $\tau$  es largo y  $g(\tau)$  oscila. Pero  $\tau$  es un tiempo promedio cualquiera no es un período aquí, y luego robamos on esta integral metiéndola hacia adentro.

Considerando la fuerza en  $\hat{z}$  (porque es la presión) no necesito considerar todos los componentes, luego

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_z \rangle &= \int_{m1} \langle T_{zz} \rangle_1 |_{z=a} dS - \int_{m2} \langle T_{zz} \rangle_1 |_{z=0} dS \\ T \cdot \hat{n} &= T_{xz} \hat{x} + T_{yz} \hat{y} + T_{zz} \hat{z} \end{aligned}$$

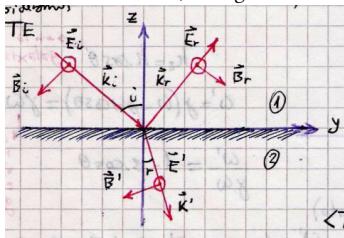
siendo la presión de radiación la expresión

$$P_{\text{Rad}} = [-\langle T_{zz} \rangle_1 + \langle T_{zz} \rangle_2]_{z=0}$$

luego

$$T_{zz} = \frac{1}{4\pi} \left( \varepsilon E_z^2 + \frac{1}{\mu} B_z^2 - \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu^{-1} B^2) \right)$$

Consideraremos el TE, ver figura



Dados los campos, para el medio “2”

$$\mathbf{E}' = E' e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \hat{x} \quad \mathbf{B}' = -\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} E' e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} (\sin(r) \hat{z} + \cos(r) \hat{y})$$

será

$$\langle T_{zz} \rangle_z = -\frac{1}{8\pi} \varepsilon_z E'^2 \cos^2(r)$$

Para el medio “1”, los campos son

$$\mathbf{E} = e^{i(k_y y - \omega t)} [E_i e^{-ik_z z} + E_r e^{ik_z z}]$$

$$\mathbf{B} = \mu_1 \varepsilon_1 e^{i(k_y y - \omega t)} \{ [E_i e^{-ik_z z} + E_r e^{ik_z z}] \cos(i) \hat{y} - [E_i e^{-ik_z z} + E_r e^{ik_z z}] \sin(i) \hat{z} \}$$

y las condiciones nos conducen a

$$i) \quad E_z = 0$$

$$ii) \quad \mathcal{R}e(B_z B_z^*) = \mu_1 \varepsilon_1 (E_i^2 + E_r^2 - 2E_i E_r \cos(2k_z z) \sin^2(i))$$

$$iii) \quad \mathcal{R}e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos(2k_z z)$$

$$iv) \quad \mathcal{R}e(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) = \mathcal{R}e(B_z B_z^*) + \mathcal{R}e(B_y B_y^*) =$$

$$\mu_1 \varepsilon_1 (E_i^2 + E_r^2 - 2E_i E_r \cos(2k_z z) \sin^2(i))$$

$$+ \mu_1 \varepsilon_1 (E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos(2k_z z) \cos^2(i))$$

Sumando los resultados de *i*, *ii*, *iii*, *iv*) se llega a

$$P_{\text{Rad}} = \frac{\varepsilon_1}{8\pi} (E_i^2 + E_r^2) \cos^2(i) - \frac{\varepsilon_2}{8\pi} E' \sin^2(i)$$

## Capítulo 7

---

# Relatividad especial

## 7.1 Transformación de vectores

Digamos que un vector transforma

$$X'_i = a_{ij} X_j$$

de manera que se verifique que las leyes físicas sean invariantes frente a rotaciones propias. El módulo no cambia  $|X'|^2 = |X|^2$ .

Einstein postula que:

- Todos los sistemas inerciales son equivalentes (no se puede hablar de espacio absoluto).
- La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

Las ecuaciones vistas hasta ahora son igualdades vectoriales. Toda ley física debe ser covariante de un sistema inercial a otro.

Para una magnitud tensorial de 2do rango la traza del mismo debe ser invariante y además satisface

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Transformación ortogonal. En la época de Maxwell se postuló que las ondas EM viajaban con velocidad  $c$  respecto al espacio absoluto (el éter). Pero esta idea muere con Einstein en 1905.

Sea un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $v$  de otro  $S$  en forma paralela a un eje (ver figura).

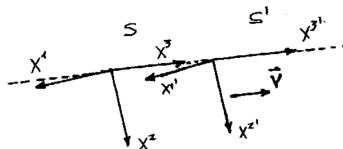


Figura 1.1

Se verifica entonces la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned}x^1' &= x^1 \\x^2' &= x^2 \\x^3' &= \gamma [x^3 - \beta x^0] \\x^{0'} &= \gamma [x^0 - \beta x^3]\end{aligned}$$

donde son

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad x^0 = ct$$

A la transformación [1] se le puede dar forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue definiendo

$$\beta \equiv \tanh(\eta) \quad \gamma \equiv \cosh(\eta) \quad \gamma \cdot \beta = \sinh(\eta)$$

y con esta nueva notación puede escribirse

$$\begin{aligned}x^{0'} &= x^0 \cosh(\eta) - x^3 \sinh(\eta) \\x^{3'} &= -x^0 \sinh(\eta) + x^3 \cosh(\eta)\end{aligned}$$

donde seguimos viendo que las leyes son lineales en las coordenadas (el espacio es isótropo)

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y no es otra cosa que una rotación en eje  $\hat{0}, \hat{3}$  con el ángulo  $\eta = \text{atanh}(\beta)$ . O sea, son rotaciones en funciones hiperbólicas. Notemos que se verifica la invariancia del módulo de la transformación

$$(x^{0'})^2 - ((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$$

o en una notación más feliz

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

**Debiéramos dar ideas de estas cosas importantes de relatividad especial**

Estamos queriendo generar una estructura geométrica para pasar entre sistemas inerciales.

Este espacio 4D es el de Minkowski y no es euclídeo. Un punto de este espacio es lo que se llama un *evento*; el radio vector posición en este espacio.

Busquemos ahora la transformación inversa. Dado que

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x^{3'} = \gamma(x^3 - \beta x^0) \end{cases}$$

y entonces se tienen los componentes contravariantes de las coordenadas del evento, que verifican

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y la transformación inversa, que se obtiene tomando los reemplazos

$$x^{i'} \rightarrow x^i \quad , \quad x^i \rightarrow x^{i'}, \quad \beta \rightarrow -\beta,$$

permite hallar los componentes covariantes de dichas coordenadas que verifican

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

En realidad hemos considerado una transformación de Lorentz muy sencilla. Una más general será

$$\begin{cases} x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{cases}$$

que nos da el radio vector contravariante y el covariante, respectivamente. Cada coordenada es función de todas las otras.

El elemento diferencial de línea, que es un invariante, es

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds'^2$$

o bien

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

que define el tensor de la métrica. Se verifica

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Cuadrivectores en el espacio 4D

Un cuadrivector contravariante es

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

mientras que el covariante es

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

y vemos que las partes temporales son las mismas cambiando el signo de la espacial. Las reglas de transformación son

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \quad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

luego el producto interno es

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \equiv A_\alpha B^\alpha$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein, que significa que

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

que es invariante por ser un escalar de Lorentz,

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\alpha B'^\alpha$$

Se ve que las reglas de transformación son tales que en el producto interno se cancelan los factores y el mismo resulta, como es sano que suceda, independiente del sistema coordenado. No cualesquiera cuatro cantidades forman los componentes de un cuadrivector.

## Intervalos entre eventos

La distancia entre evento origen y un evento cualquiera es

$$S^2 = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2,$$

pero los intervalos deben ser invariantes relativistas y de Lorentz. Si el intervalo es temporal se tiene

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 > 0$$

y los eventos pueden estar conectados causalmente

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 < 0$$

y los eventos no pueden estar conectados causalmente. Se cumple

$$\delta s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Como  $\delta s^2$  es un invariante, entonces el carácter del mismo se conserva en todos los sistemas inerciales.

## Operadores diferenciales

Tenemos la derivada respecto a una coordenada contravariante

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada covariante, y también la derivada respecto de una coordenada covariante

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada contravariante. Note la simetría entre derivado respecto de arriba y es derivada abajo y viceversa. La notación abreviada puede inducir a confusiones.

La cuadridivergencia de un cuadrivector es un invariante,

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\mathbf{A})$$

y aquí vemos  $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$ . Esto nos lleva al D'Alembertiano

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2$$

En el operador  $\partial_\alpha$  el subíndice cambia de ubicación pero se mantiene el carácter (contra-) o (co-) variante del operador.

## Conexión de sucesos

Sean dos sucesos  $x_1^\alpha, x_2^\alpha$  tales que  $s^2$  es el intervalo entre los mismos (al cuadrado), y es un invariante lorentziano

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$$

El intervalo es temporal si  $s^2 > 0$  en cuyo caso se tiene

$$c\delta t > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

lo cual significa que existe frame inercial donde  $x_1 = x_2$  los eventos ocurren en el mismo sitio de manera que pueden estar conectados causalmente; puesto que  $c\delta t > 0$  y  $t_2 > t_1$ . Por el contrario si  $c^2 < 0$  se tiene

$$c\delta t < |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

y existe entonces frame inercial donde los dos eventos son en el mismo sitio  $x_1 = x_2$  y entonces  $c\delta t < 0$  y  $t_2 < t_1$  de manera que no pueden estar conectados causalmente.

Sea

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dz \right)$$

y si es ② posterior a ① en  $S$  entonces  $dt > 0$ . Entonces  $dt'$  puede ser mayor, menor o igual a cero (no respeta la temporalidad de  $S$ ).

El orden temporal se puede alterar pasando de  $S$  a  $S'$ , pero en ese caso se rompe la causalidad. En todos aquellos intervalos donde tienen diferentes signos  $dt$  y  $dt'$  se viola el principio de causalidad. Dos sucesos estarán relacionados causalmente si dado  $dt > 0$  se tiene

$$dt > \frac{v}{c^2} dz$$

y eligiendo  $S'$  fijo a la señal que se emite y siendo  $v$  la velocidad de propagación de la señal, será

$$1 > \frac{v}{c^2} \frac{dz}{dt} = \frac{v^2}{c^2}$$

para que ninguna señal se pueda mover a mayor velocidad que la de la luz (porque tiene que valer la causalidad). El gráfico siguiente intenta ilustrar estas consideraciones. Suponemos haz de luz desde el  $-\infty$  que pasa por el origen

Ahora se ve lo que pasa para otro observador haciendo un cambio de coordenadas

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^3) \quad x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

y si ahora es  $x'^0 = 0$  entonces para un observador en  $S'$  se tiene

$$0 = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

o bien  $x^0 = \beta x^3$  y aquí es  $x'^3 = 0$  de modo que

$$\frac{x^3}{\beta} = x^0$$

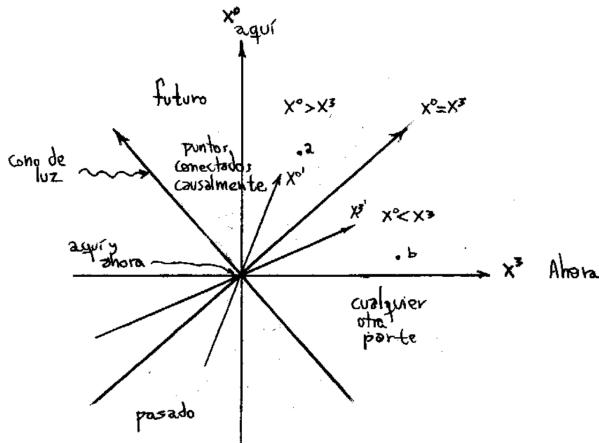


Figura 1.2

y entonces *a* de la figura puede ser causado por un suceso en el origen pero *b* no tiene conexión causal con el origen.

Para el observador  $S'$  el punto *b* está debajo de su "ahora" que es el pasado. Por otra parte *a* para el observador  $S$  es el futuro. Para este mismo observador, el punto *b* está en "cualquier otra parte" de tal manera que no puede estar conectado causalmente con el origen.

### EJEMPLO 1.1 Problema

No relativista será la información propia (desde el sistema donde se produce el evento solidario al objeto). Tenemos  $K, K'$  sistemas inerciales, donde el segundo se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  con respecto al primero. Suponemos  $\mathbf{V} = V \hat{z}$ .

$$\hat{x} \parallel \hat{x}' \quad \hat{y} \parallel \hat{y}' \quad \hat{z} \parallel \hat{z}'$$

Una barra moviéndose en  $K'$  a velocidad constante medida desde  $K$

$$\begin{cases} L' = Z'_1 - Z'_0 \\ L = Z_1 - Z_0 \end{cases}$$

y entonces tenemos la contracción de Lorentz

$$L = \frac{L'}{\gamma} \leq L',$$

la longitud de un objeto es relativa.

Consideremos dos eventos en un punto fijo  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$  (sigo un evento). Una lámpara que está encendida  $t'_1 = 0$  y se apaga en  $t'_2 = t' = \tau'$ . ¿Cómo se ven desde laboratorio estos eventos? Transformo a laboratorio.

$$\Delta t = \tau = \gamma \tau' > \tau$$

y el tiempo transcurrido desde el laboratorio es mayor.

Un muón no relativista tendrá  $\tau' = 2.2 \cdot 10^{-6}$  seg. Los muones siempre están medidos en tiempo de laboratorio.

$$d = 1907 \text{ m} \quad t = 0 \quad v = 0.9952c \quad \Delta t = 6.3873 \cdot 10^{-6} \text{ seg}$$

dado que en  $t = 0$  se miden 573 muones por hora, en  $t_0 = 6.3873 \cdot 10^{-6}$  se verán 424 muones por hora. Entonces

$$N(t) = N(0) e^{t/\tau}$$

de lo cual se deduce  $\tau = 2.2527 \cdot 10^{-5}$  seg. Entonces desde  $\tau = \gamma\tau'$  será

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2} = 0.9952,$$

de manera que según relatividad el resultado está consistente.

Las magnitudes contables son invariables relativistas.

**Lorentz vincula sistemas inerciales; a velocidad constante entre ellos.**

### EJEMPLO 1.2 Problema

Algunas cuentas sobre Doppler relativista. La fase es un invariante de manera que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega t' \quad \mathbf{k}'_{\parallel} = \gamma \left( \mathbf{k}_{\parallel} - \beta \frac{\omega}{c} \right)$$

Considerando que  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{k}$  y además  $\beta = \mathbf{V}/c$  con  $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$  se tienen

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}'_{\perp} \quad \omega' = \gamma(\omega - c\beta \cdot \mathbf{k})$$

y definimos los módulos con

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad |\mathbf{k}'| = \frac{\omega}{c}$$

donde

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta) \\ \tan \theta' = \gamma \sin \theta / (\cos \theta - \beta) \end{cases}$$

siendo la transformación de Galileo

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V}t \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \\ t' = t \end{cases}$$

lo cual nos lleva a

$$\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp} - \omega t = \mathbf{k}'_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V}t) + \mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp} - \omega' t$$

$$\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} \quad \mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}$$

luego se tendrá  $\omega = \mathbf{k}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V} + \omega'$

$$\omega' = \omega(1 - \beta \cos \theta),$$

que es la ecuación del efecto Doppler relativista.

Por otra parte,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

que nos conduce a

$$\frac{\omega'}{\omega} - 1 = \frac{1}{2}\beta^2 - \beta \cos \theta$$

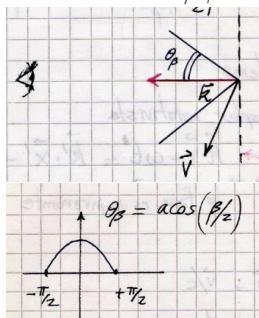
Si estoy tratando de forzar la situación para obtener corriemientos opuestos

$$f_{nr} = -\beta \cos \theta \quad f_r = \frac{1}{2} \beta^2 - \beta \cos \theta$$

entonces

$$\begin{cases} f_{nr} > 0 & \text{si } \cos \theta < 0 \\ f_{nr} < 0 & \text{si } \cos \theta > 0 \\ f_r > 0 & \text{si } \cos \theta < 1/2\beta \\ f_r < 0 & \text{si } \cos \theta > 1/2\beta \end{cases}$$

necesitaré  $0 < \cos \theta < 1/2\beta$  o bien



### EJEMPLO 1.3 Problema

$$\tan \theta' = \gamma \sin \theta / (\cos \theta - \beta)$$

y basta con ver lo que sucede en  $\theta' = \pi/2, -\pi/2$ . En su mayor parte, la energía toda se va para adelante.

#### 7.1.1 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

Sea  $v/c$  no despreciable

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z) \quad \gamma > 1$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left( 1 - \beta \frac{\Delta z}{c\Delta t} \right)$$

pero si en  $S'$  la partícula está en reposo es  $v = dz/dt$  de manera que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2)$$

$$\Delta t' = \Delta t (1 - \beta^2)^{1/2}$$

de modo que  $\Delta t' < \Delta t$ , en  $S'$  el tiempo transcurre más lentamente.

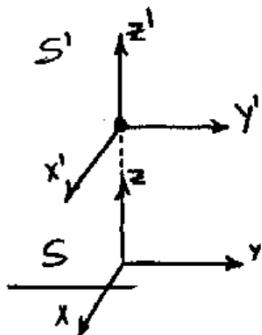
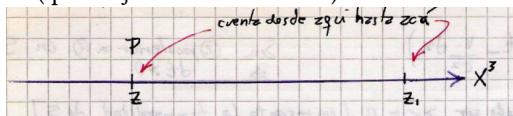


Figura 1.3

### Número de onda y conteo

Un proceso de conteo (discreto) es invariante lorentziano, pero no así el medir longitudes. Supongamos un aparato que cuenta el número de crestas de ondas (que viajan con velocidad  $c$ ). Cuento en  $x^3$  entre



$$x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

siendo  $v$  entre los sistemas  $S$  y  $S'$ . El número de crestas que cuenta el aparato es

$$\#_s = \frac{z_1 - z}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}(z_1 - z) = \frac{k}{2\pi}(ct - z) = \frac{1}{2\pi}(\omega t - kz)$$

donde se ha usado que  $z_1 = ct$ , luego para un observador primado se tendrá consecuentemente

$$\#'_s = \frac{1}{2\pi}(\omega't' - k'z')$$

y se puede generalizar

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega't' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t,$$

lo cual nos conduce a ver que

$$-\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \frac{\omega' x'^0}{c}\right) = -\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \frac{\omega x^0}{c}\right)$$

es un invariante lorentziano de acuerdo con

$$k_\alpha x^\alpha = k'_\alpha x'^\alpha \quad (1.1)$$

Entonces dado ese comportamiento se puede definir el cuadrivector de onda como

$$k^\alpha = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right).$$

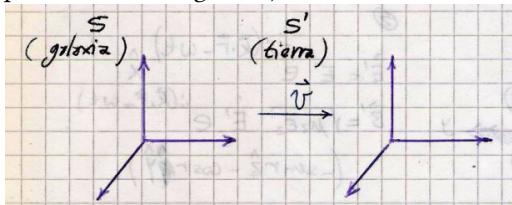
Una onda plana debe ser invariante relativista. En una onda plana la ecuación de invariancia (1.1) conduce al efecto Doppler. En el caso relativista depende de la velocidad relativa entre fuente y observador.

### 7.1.2 Efecto Doppler relativista

Volamos a la transformación entre sistemas  $S$  y  $S'$ , teníamos

$$k'_z = \gamma \left( k_z - \beta \frac{\omega}{c} \right) \quad \frac{\omega'}{c} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \beta k_z \right)$$

y de estas dos diferentes  $k_z$  surge el efecto Doppler. Se tienen los sistemas (el sin primar es en una galaxia)



y serán

$$k_z = k \cos \theta \quad \frac{\omega'}{\gamma \omega} = 1 - \beta \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo del número de onda con el eje  $\hat{z}$ . Considerando la transformación inversa (acercamiento)  $\omega = \omega' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$  resulta

$$\frac{\omega'}{\gamma \omega} = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \theta')}$$

Ahora bien, tomando  $\beta \ll 1$  resulta

$$\omega \approx \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

y a primer orden, con  $\theta \sim \theta'$  usando

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)}.$$

Veamos casos particulares de la invariancia del producto escalar.

### Caso 1

En este caso son paralelos la velocidad y el vector de onda, i.e.  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$  se tienen  $k_x = k_y = 0$  y  $k_z = k$  entonces

$$k' = \gamma k(1 - \beta) = k \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

luego,

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

donde  $\beta > 0$  implica alejamiento y  $\beta < 0$  implica acercamiento. Luego la diferencia de longitudes de onda es

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{\sqrt{1 + \beta} - \sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} \approx \lambda\beta$$

de lo cual se deduce que a primer orden en  $\beta$  es  $\Delta\lambda \sim \lambda\beta$ .

Queríamos ver si es una buena aproximación, usamos

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{14580 \text{ \AA}}{6560 \text{ \AA}}$$

que es el cociente entre la longitud de onda medida en la tierra respecto de la misma que viene de la estrella. Entonces

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{-1} = 0.202$$

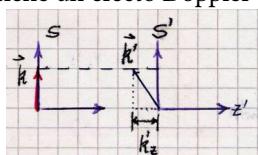
de modo que  $\beta = 0.664$ . Pero usando la aproximación

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.223.$$

Y entonces es claro que se necesita  $\beta$  chico para que valga la aproximación hecha más arriba.

### Caso 2

En este caso son perpendiculares la velocidad y el vector de onda, i.e.  $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ , se tiene un efecto Doppler transversal.



Se tienen en este caso  $k'_x = k_x, k'_y = k_y, k_z = 0$  y es

$$k'_z = -\gamma \beta k \quad k'^2 = \gamma^2 k^2$$

de modo que  $k' = \gamma k$  y  $\omega' = \gamma \omega$ . Vemos que en este caso el efecto Doppler transversal es notable solo a orden dos, es un fenómeno netamente relativista ( $\gamma$  es de orden cuadrado en su efecto). A orden cero (clásico) no hay efecto.

Supongamos una partícula a velocidad constante según el observador  $S$ . Sean dos sucesos de esa partícula.

$$c\Delta t' = \gamma c\Delta t \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

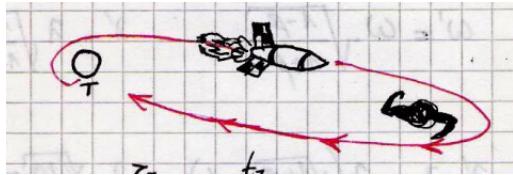
donde el intervalo de tiempo primado es tiempo propio pues en  $S'$  la partícula está en reposo. Se ve que en el sistema  $S'$  el tiempo transcurre más lentamente,  $\Delta t' < \Delta t$ .

Si no hay sistema en el cual se halle en reposo, podemos pensar en un intervalo infinitesimal donde está en reposo instante a instante pero cambia.

$$dt' = \sqrt{1 - \beta^2} dt = d\tau$$

### Ejemplo relojes

Tenemos la situación depicted en el figurin:



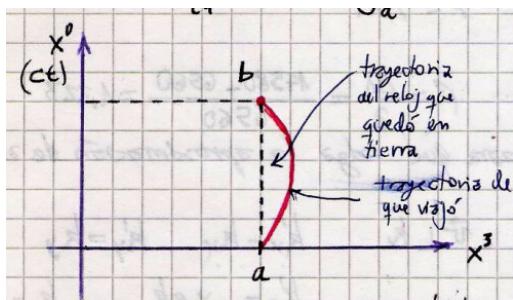
Tenemos un reloj 1 en  $S$  y un reloj 2 en  $S'$  dando la vuelta a la galaxia. Se tiene

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} dt < t_2 - t_1$$

y estos sistemas no son equivalentes. Es la paradoja de los mellizos. El tiempo pasa más lento para el que viajó

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c} \int_a^b ds$$

La métrica de Minkowski no corresponde a una euclídea.



En el espacio de Minkowski la línea recta es la distancia mayor entre dos puntos.

## 7.2 Forma covariante del electromagnetismo

Partimos de la ecuación de continuidad para la carga,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

la cual con la definición del cuadrivector corriente

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$$

se puede escribir como

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

La formulación covariante empleaba el gauge de Lorentz (es necesario) puesto que con él las ecuaciones son válidas en cualquier sistema inercial. El gauge de Lorentz era

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

siendo el cuadripotencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

y entonces

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Se podía ver que resultan ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

La conservación de la carga es una de las leyes más firmemente establecidas.

que viene a ser, usando el D'alembertiano,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square A = \frac{4\pi}{c} J$$

y para el potencial  $\phi$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

que desemboca en

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square \phi = \frac{4\pi}{c} (c\rho)$$

Al aplicar el D'Alembertiano a un cuadrivector obtenemos otro cuadrivector

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu.$$

Veamos qué sucede con las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial. Recordemos que toda ecuación de igualdad de entes tensoriales en el espacio de Minkowski es covariante.

**Otros gauges sirven bien si no me interesa pasar de un sistema a otro.**

Teníamos

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

de modo que en términos del cuadripotencial

$$E_i = -\partial_i A^0 - \partial^0 A^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$$

y luego el campo  $\mathbf{B}$  viene del rotor del cuadripotencial, por lo tanto

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

del mismo modo que

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \quad B_z = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2$$

y entonces se puede definir un ente

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que unifica notaciones para los dos campos.

Los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  forman parte de un tensor de segundo rango antisimétrico llamado tensor de intensidad de campo (tiene diagonal nula),

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que tendrá seis elementos independientes. Tres para el campo eléctrico y tres para el magnético. Matricialmente se puede ver como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la métrica  $g_{\mu\nu}$  podemos arribar a la versión covariante

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} F^\mu_\alpha$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

También es conveniente definir un tensor de intensidad de campo dual, con ambos índices contravariantes,

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

que no es otra cosa que

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

y donde  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  es el tensor de Levi-Civita de cuatro dimensiones -totalmente antisimétrico-, que es nulo cuando se repite un índice.

### EJEMPLO 2.1 Tensor dual

Sea por ejemplo el elemento  $\mathcal{F}^{01}$ ,

$$\mathcal{F}^{01} = \frac{1}{2} \varepsilon^{01\gamma\delta} F_{\gamma\delta},$$

así que dado el comportamiento del tensor de Levi-Civita se tienen

$$\mathcal{F}^{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{0123} F_{23} + \varepsilon^{0132} F_{32}),$$

dado que toda otra posibilidad es nula. Entonces

$$\mathcal{F}^{01} = \varepsilon^{0123} F_{23}$$

y vemos que se pasa del  $F$  al  $\mathcal{F}$  con la regla

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$$

Se querrá entonces escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante explícita, lo que significa que no cambiarán de forma al pasar entre sistemas inerciales.

Tomamos las dos ecuaciones con fuentes, y se ve que las podemos expresar según

$$\partial_i E_i = \frac{4\pi}{c} J^0 = \partial_i F^{i0} = \partial_\alpha F^{\alpha 0},$$

asimismo

$$\partial_2 B_3 - \partial_3 B^2 - \partial_0 E^1 = \frac{4\pi}{c} J^1 = \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

es la componente 1 del mismocuadrivector. Entonces

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta.$$

resume las dos ecuaciones de Maxwell con fuentes.

Con respecto a las ecuaciones sin fuentes

$$\partial_i \mathcal{F}^{0i} = 0 = \partial_\alpha \mathcal{F}^{0\alpha}$$

entonces

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$

resume las ecuaciones sin fuentes. Si se usa el tensor directo quedan expresadas como

$$\partial^\alpha \mathcal{F}^{\beta\gamma} + \partial^\beta \mathcal{F}^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Recordemos que usaremos índices griegos para los cuatro componentes 0, 1, 2, 3 e índices latinos para la parte espacial 1, 2, 3.

### EJEMPLO 2.2 Comentario corrientes parásitas

Un conductor en el seno de un campo magnético genera sobre sí al moverse corrientes de Foucault o turbillonarias que tienden a frenar su movimiento.

## 7.2.1 Transformación de los campos

Volviendo a la transformación de Lorentz de los sistemas  $S$  a  $S'$

$$ct' = \gamma [ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}]$$

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma [\mathbf{x}_{\parallel} - \beta ct]$$

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$$

con  $\beta = v/c$  y siendo la matriz de la transformación la siguiente

$$a_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

se tiene  $F^{\mu\nu'} = a_{\lambda}^{\mu} a_{\sigma}^{\nu} F^{\lambda\sigma}$  donde  $F^{\lambda\sigma}$  es el tensor con índices contravariantes.

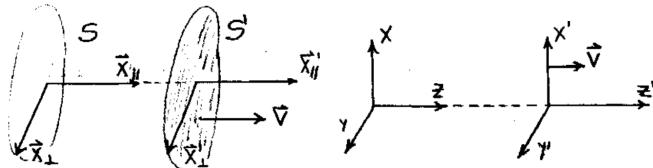


Figura 2.4

La transformación de los campos  $E, B$  según la figura superior satisface

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) & B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y) \\ E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) & B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) \\ E'_z &= E_z & B'_z &= B_z \end{aligned}$$

y separando los campos en componentes paralelas y perpendiculares, esto es  $E = E_{\parallel} + E_{\perp}$  y  $B = B_{\parallel} + B_{\perp}$  se tienen

$$E' = E_{\parallel} + \gamma (E_{\perp} + \beta \times B)$$

$$B' = B_{\parallel} + \gamma (B_{\perp} - \beta \times E)$$

que se pueden poner como

$$E' = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot E) + \gamma (E + \beta \times B)$$

$$B' = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot B) + \gamma (B - \beta \times E).$$

Recordemos que la transformación de Galileo era

$$E' = E + \frac{1}{c} V \times B \quad B' = B - \frac{1}{c} V \times E$$

siendo el segundo término el que da origen a las corrientes de Foucault al mover un conductor en el seno de un campo  $B$ . Las chapas en un transformador

aisladas buscan cortas las corrientes de Foucault. No conviene diseñar un aparato que tenga que moverse en el seno de un campo magnético si es de material conductor.

Las contracciones del producto escalar entre el tensor de intensidad son invariantes. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= 2(B^2 - E^2) \\ \mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} &= 2(E^2 - B^2) \\ \mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= -4\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Como estamos poniendo contracciones opuestas se compensan los efectos entre sí y dan invariantes [?].

Sea

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

entonces  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  o alguno de los campos es nulo en todo sistema inercial. Lo mismo si se tiene que el invariante es mayor a cero; lo será en todos los sistemas iniciales.

Para una carga que se mueve con velocidad  $v$  se tiene  $\mathbf{B} = 0$  en un sistema en el que  $q$  está en reposo de manera que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' = 0$$

siempre y entonces  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$  para cualquier sistema inercial  $S'$ . El campo magnético que crea la partícula será perpendicular al campo eléctrico en toda situación.

Un sistema electromagnético dependiente del tiempo intercambiará  $\mathbf{p}$  con el campo entonces no vale el principio de acción y reacción ,

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \int_{S(v)} \bar{T} \cdot d\mathbf{S}$$

mientras que

$$\frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \right)$$

## 7.2.2 Covarianza con medios materiales

Las ecuaciones sin fuentes tienen la misma forma en presencia de medios materiales. Las que cambian son las que tienen fuentes, porque ahora aparecen los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{D}$ .

Para un medio material podemos reemplazar el tensor  $F^{\alpha\beta}$  por otro tensor  $G^{\alpha\beta}$  tal que

$$E_i \rightarrow D_i, \quad B_i \rightarrow H_i$$

donde

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

que se puede pensar como otro tensor corrector?

$$F^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta},$$

donde

$$R^{\alpha\beta} = 4\pi \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}$$

que provienen de las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Finalmente

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

donde la información de  $P_i$  y  $M_i$  está en el tensor  $R^{\alpha\beta}$ . Estamos diciendo que en un medio material los vectores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  se deben comportar como los elementos de un tensor.

Procediendo en forma análoga a lo que se hiciera para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la transformación de Lorentz, se tendrán los campos transforman según

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_\parallel + \gamma (\mathbf{P}_\perp - \beta \times \mathbf{M})$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}_\parallel + \gamma (\mathbf{M}_\perp + \beta \times \mathbf{P})$$

Entonces de un sistema inercial a otro una  $\mathbf{P}$  da origen a una  $\mathbf{M}$  y viceversa.

### 7.3 Principio de Hamilton y relatividad

Habiéndonos situado en un espacio de Minkowski, tenemos la acción

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

siendo  $\alpha$  una constante a fijar luego, y  $ds$  un arco en el espacio minkowskiano entre dos eventos  $a$  y  $b$ . La acción debe ser un invariante pues es un extremo y el intervalo  $ds$  debe ser temporal,

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

de manera que

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

y donde  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -\alpha c (1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

y luego

$$\mathcal{L} \rightarrow T = \frac{mv^2}{2} \text{ (baja velocidad)}$$

de manera que fijamos el valor de la constante a partir de este límite de baja velocidades,

$$\mathcal{L} = -mc^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

es el lagrangiano relativista.

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$$

y haciendo el álgebra,

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde  $m$  es la masa en reposo y  $p_i$  es el momento relativista. Notemos que si  $v = c$  entonces el momento diverge si  $m \neq 0$ , mientras que con  $m=0$  no sabemos qué sucede. Entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Para un movimiento circular, el módulo de la velocidad permanece constante.

$$\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

si en cambio es  $\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \neq 0$  se tiene

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \left( \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{V}(1 - v^2/c^2)^{-3/2} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v}\gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}$$

donde el primer término en el RHS está asociado a la variación en la dirección y el segundo a la variación en la magnitud (hemos usado con  $\gamma^3 v^2/c^2 > \gamma$ ?). De esto se desprende que la inercia es mayor para variar la longitud de  $\mathbf{v}$  que su dirección. Es más fácil cambiar dirección que rapidez.

Entonces, volviendo al langrangiano

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = m\gamma v^2 + mc^2\gamma^{-1} = m\gamma c^2$$

y esta es la energía relativista de una partícula libre. Veamos el límite de bajas velocidades, es decir que si  $v/c \ll 1$  entonces

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

y resulta

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_0 + \frac{mv^2}{2}$$

donde  $E_0$  es una energía en reposo, que no depende de  $\mathbf{v}$  y podemos expresar la energía cinética como

$$E - mc^2 = \frac{mv^2}{2} = T.$$

Se puede definir

$$\mathbf{p} = m\mathbf{w},$$

con  $\mathbf{w} = \gamma\mathbf{v}$  entonces

$$E^2 = m^2\gamma^2c^4 \quad p^2 = m^2\gamma^2v^2$$

y

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2\gamma^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2$$

y esta es la relación fundamental entre energía y momento

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2.$$

Para partículas con  $m_0 = 0$  y  $v = c$  será

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 \quad p = \frac{h\nu}{c} = k\hbar.$$

**En la carpeta hay otra cosa:**

Tengo  $\frac{dp}{dt} = \gamma^3 m \frac{dv}{dt}$ .

**Anoté que esta energía es compatible con el PAM, que calculo será el principio de acción mínima.**

La formulación hamiltoniana comenzará a partir de

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + m^2c^2} c,$$

sobre el que se puede operar para obtener el límite clásico (de bajas velocidades) como

$$\mathcal{H} = \left( 1 + \frac{p^2}{m^2c^2} \right)^{1/2} mc^2$$

y si se cumple  $p/(mc) \ll 1$  entonces

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m^2}$$

donde el último término es el hamiltoniano de la mecánica clásica para nuestra partícula libre.

El cuadrimomento se define como

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \mathbf{u}), \quad \Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

o bien

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$$

siendo

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

el invariante asociado a la conservación (del cuadrimomento).

### EJEMPLO 3.1 Problema 11

Se espera que al tener una carga en movimiento aparezca en alguna parte una corriente. Consideramos un sistema  $K'$  en movimiento relativo con respecto a otro sistema  $K$ . Con las definiciones usuales de  $\beta$  y  $\gamma$  tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{||} &= \mathbf{E}_{||} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{||} &= \mathbf{B}_{||} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

de lo cual las inversas

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}'_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}')$$

Introduciendo la física en la transformación

$$\mathbf{E}' = q \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \quad \mathbf{B}' = 0$$

y tendríamos que convertir a coordenadas sin primar.

$$\mathbf{E}_{||} = \mathbf{E}'_{||} = q \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma \mathbf{E}'_{\perp}$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'_{\perp}$$

donde son

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - c\boldsymbol{\beta}t) \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp},$$

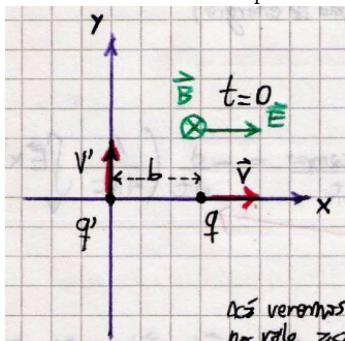
y luego la norma será

$$|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}'_{\parallel}|^2 + |\mathbf{x}'_{\perp}|^2 = \gamma^2(\mathbf{x}_{\parallel} - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_{\perp}|^2$$

Juntando todo podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \frac{q(\mathbf{x}_{\parallel} - c\boldsymbol{\beta}t)}{(\gamma^2(\mathbf{x}_{\parallel} - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_{\perp}|^2)^{3/2}} & \mathbf{E}_{\perp} &= \frac{q \gamma \mathbf{x}_{\perp}}{(\gamma^2(\mathbf{x}_{\parallel} - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_{\perp}|^2)^{3/2}} \\ \mathbf{B}_{\parallel} &= 0 & \mathbf{B}_{\perp} &= \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp} \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos partículas con velocidad perpendicular. Un sistema dependiente del tiempo intercambia momento con el campo.



Aquí tenemos la expresión de los campos producidos por una partícula en movimiento vista desde un sistema reposante, el sistema que se mueve está en la partícula. Presupusimos que ambos coinciden en  $x = 0$  y  $t = 0$ . En esta situación se verá que no vale acción y reacción.

Veamos ahora los campos para  $q'$  donde

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{V'}{c} \hat{y} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$$

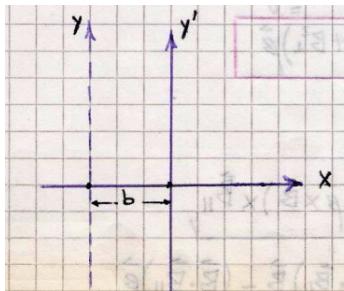
$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0(t=0) \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma' q' \frac{1}{b} \hat{x}$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = B_y \hat{y} = 0 \quad \mathbf{B}_{\perp} = -\frac{\gamma' q' V'}{cb^2} \hat{z}$$

y la fuerza de Lorentz, sobre  $q'$  debido a  $q'$ , será

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma q q'}{b^2} \left( \hat{x} + \frac{VV'}{c^2} \hat{y} \right)$$

Ahora corremos el sistema de referencia, que es el eje  $\hat{y}$ . Recordemos que los sistemas siempre están en reposo. No están en movimiento relativo.



Se tienen ahora

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{q}{\gamma^3 b^2} \hat{x} \quad \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad \mathbf{B}_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}_{\perp} = 0$$

de tal manera que el campo total es  $\mathbf{B} = 0$  y  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel}$ . La fuerza será

$$\mathbf{F} = -\frac{qq'}{\gamma^3 b^2} \hat{x},$$

y vemos que no es la misma expresión.

Hay momento que se va hacia alguna parte; las partículas transfieren momento hacia afuera (hacia el campo).

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV$$

pero habría que calcular el campo para todo el espacio puesto que el integrando abarca todo. Si tomo el volumen muy grande y usamos la expresión [CITA]

$$\frac{dP_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dP_{\text{campo}}}{dt} = \int_{S(v)} T \cdot \hat{n} dS,$$

será la integral de surface nula pues no se escapa energía. Entonces

$$\frac{dP_{\text{mec}}}{dt} = -\frac{dP_{\text{campo}}}{dt}$$

y la fuerza de Lorentz será

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = -\frac{dP_{\text{campo}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \right)$$

y esta cuenta debería dar lo mismo.

### EJEMPLO 3.2 Problema 13

Consideremos la cuenta

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = (\mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}) \times (\mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}) = \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\perp}$$

que da cuatro términos de los cuales el primero es nulo, el segundo y tercero son proporcionales a  $\beta_{\perp}$  mientras que el cuarto es proporcional a  $\beta_{\parallel}$ . Entonces tenemos la separación de los productos vectoriales de acuerdo con

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\perp} \quad (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\parallel}$$

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \gamma^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$$

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\parallel} \times (\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\parallel}$$

que conducen a

$$\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{E}_{\perp} \times \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\perp} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$$

de los cuales el primero es  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel}$ , el segundo  $-E_{\perp}^2 \boldsymbol{\beta}$  mientras que el tercero

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\perp}) \boldsymbol{\beta} = -B_{\perp}^2 \boldsymbol{\beta}$$

y el cuarto

$$((\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - [(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\beta}] \mathbf{B} = [(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\beta}] \boldsymbol{\beta} = [(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel}] \boldsymbol{\beta}$$

de manera que

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \gamma^2 (1 + \beta^2) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel} - \gamma^2 (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) \boldsymbol{\beta}.$$

Ahora operamos  $(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp}$  y obtenemos

$$\gamma (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} - \gamma \mathbf{E}_{\parallel} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\parallel},$$

y este último término se desarma como

$$\gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}_{\parallel}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\parallel}) \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}_{\perp}$$

y puede verse que sucede lo mismo con el término que contiene al campo  $\mathbf{E}$  de modo que

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \gamma (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} + \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}_{\perp} + \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}_{\perp}.$$

Ahora habría que ver que hay un sistema de referencia donde se cumple que sean colineales. Entonces el producto vectorial será nulo.

$$\begin{cases} (1 + \beta^2) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel} = (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) \boldsymbol{\beta} \\ (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = -(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}_{\perp} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}_{\perp} \end{cases}$$

de manera que al ser colineales sucede que

$$(1 + \beta^2) (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) \boldsymbol{\beta} - (1 + \beta^2) [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}_{\perp}]$$

y además

$$\frac{\mathbf{V}}{1 + V^2/c^2} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2}$$

de tal modo que

$$(E^2 + B^2) \boldsymbol{\beta} = (1 + \beta^2) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

y se deduce que  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = 0$ . Pero a la última parte no se llega fácil; presupongo  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0$  y entonces de  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  tenemos que ambos campos son perpendiculares y puede ser que  $\mathbf{E} = 0 = \mathbf{B}$ , si en cambio son  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$  (por lo que se vio antes) se tendrá  $E^2 - B^2 < 0$  o bien  $E^2 - B^2 > 0$ ; si en un sistema es  $E = 0$  entonces será  $B \neq 0$ . Estamos usando como invariantes  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  y  $E^2 - B^2$ .

### 7.3.1 Principio de Hamilton e interacción electromagnética

Se parte de una variación de la acción

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds$$

donde  $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}$  de manera que

$$-mc\delta \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} = -\frac{mc}{2} \int_a^b \frac{\delta(dx_\mu dx^\mu)}{\sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}} = -m \int_a^b \delta(dx_\mu) \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

donde nos hemos sacado la raíz de encima. Esto ahora se puede integrar por partes,

$$\delta S = -m \int_a^b w^\nu \delta dx_\nu = -mw^\nu dx_\nu|_a^b + m \int_a^b w_\nu \delta x^\nu$$

y como  $a$  y  $b$  son puntos fijos, el primer término se anula. Luego

$$\delta S = m \int_a^b w^\nu \delta(dx_\nu)$$

o bien

$$\delta S = m \int_a^b \frac{dw^\nu}{d\tau} \delta x_\nu d\tau = m \int_a^b a^\nu \delta x_\nu d\tau,$$

que implica que el cuadrvector aceleración  $a^\mu$  debe ser nulo. Luego, la cuadri-velocidad de la partícula debe ser constante. Podemos escribir esta equivalencia

$$\mathbf{p} = \nabla S \quad \rightarrow \quad p^\mu = \partial^\mu S$$

Consideremos ahora que el punto  $a$  se varía (ya no es fijo)  $\delta x^\nu \equiv \delta x^\nu|_a \neq 0$  de manera que

$$\delta S = mw^\nu \delta x_\nu$$

y

$$p^\nu = mw^\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}$$

entonces

$$w^\nu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

es proporcional a la energía de la partícula. Luego,  $p^\nu = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v})$  y

$$p^0 = m\gamma c = \frac{m\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\partial S}{\partial x^0}$$

de modo que

$$\partial_\mu S \partial^\mu S = m^2 c^2$$

es invariante lorentziano.

### 7.3.2 Partícula en un campo electromagnético

Dado que es de la mecánica clásica  $\mathcal{L} = T - V$  la acción correspondiente la podemos expresar como

$$S = S_0 + S_{\text{inter}} = \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} V dt$$

es decir la suma de una parte libre y una de interacción. Luego la acción no relativista (bajas velocidades) será

$$S_{\text{inter}}^{NR} = \int_{t_1}^{t_2} -e\phi dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e\phi}{c} d(ct) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{eA^0}{c} dx^0$$

si usamos los cuadrvectores

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

y generalizamos

$$S_{\text{inter}} = -\frac{e}{c} \int_{x_1}^{x_2} A_\mu dx^\mu$$

tendremos

$$S_{\text{inter}} = \frac{e}{c} \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - c\phi dt) = \frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - c\phi) dt$$

y finalmente el lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

donde el primer término es el lagrangiano de partícula libre y la interacción viene luego. Esta lagrangiano no es invariante de medida; sin embargo no perjudica porque en las ecuaciones de movimiento sólo entran las derivadas del mismo. Recordemos además que  $\mathcal{L}$  no es invariante relativista (porque su integral temporal debiera ser invariante relativista [?]) pero la acción  $S$  sí lo es.

Para construir el hamiltoniano necesitamos el momento conjugado,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

y siguiendo la prescripción usual

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - \mathcal{L},$$

**Notemos que los límites de integración pasaron a ser los momentos temporales.**

se arriba a

$$H = (m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A})\mathbf{v} + mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\phi = \\ m\gamma v^2 + e\phi + mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

y

$$H = m\gamma v^2 + e\phi + \frac{mc^2}{\gamma}$$

de manera que el hamiltoniano en un campo es

$$H = m\gamma c^2 + e\phi$$

En presencia de un campo electrostático tenemos esta versión de hamiltoniano, con energía cinética (el primer término) y potencial (el segundo). En el caso de un campo magnético estacionario la expresión es solamente el primer término y se mantiene constante por ello la energía.

Notemos lo siguiente

$$\mathbf{P} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \quad H = m\gamma c^2 + e\phi$$

y

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = m^2\gamma^2 v^2 \quad \left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 = m^2\gamma^2 c^2 \\ \left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = mc^2,$$

con ustedes el invariante. Entonces el cuadrimomento de una partícula en un campo electromagnético, sometida a un potencial electromagnético es

$$p^\mu = \left(\frac{H - e\phi}{c}, \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$$

que es un caso particular del xxxx.

Podemos usar esto para fabricarnos un hamiltoniano relativista. En efecto, se tendrá

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2} + e\phi$$

y el no relativista

$$H^{nr} = mc^2\left(1 + \frac{1}{m^2c^2}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2\right)^{1/2} + e\phi$$

usando la aproximación de baja velocidad,

$$H^{nr} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi$$

donde tiro el término de reposo  $mc^2$  y

$$H^{nr} \approx \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi.$$

Ahora se aplicarán las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano electro-magnético hallado, para obtener el movimiento de una partícula cargada. Para eso notemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathcal{L} = \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e \nabla \phi = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e \nabla \phi$$

donde se ha usado la identidad ID 4 del apéndice. Luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

y tomándole derivada temporal y juntando todo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

que es la fuerza de Lorentz con la corrección relativista. Es la misma expresión hallada otra vez pero sin tener en cuenta la relatividad.

Si  $\mathbf{E} = 0$  entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{pues} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

y el campo  $\mathbf{B}$  sólo variará la dirección de  $\mathbf{v}$ , no su módulo.  $S$  no es invariante relativista porque no está directamente conectada a ningún observable.

El radio de giro de una partícula ciclotrón es mayor con la aproximación relativista que con la newtoniana porque su inercia dada por su masa variable es mayor, puesto que  $\gamma > 1$ . Planteamos

$$|\mathbf{F}| = evB$$

que desde el punto de vista relativista significa

$$evB = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

mientras que clásicamente

$$m \frac{v^2}{r} = evB$$

y sale el radio de giro desde acá

$$r_B = \frac{m\gamma v}{eB} \quad r_B^{nr} = \frac{mv}{eB}$$

y luego  $r_B > r_B^{nr}$ .

### 7.3.3 Cambio de gauge

El cambio de gauge es una transformación

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

entonces

$$A'0 = \phi - \partial^0 f \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

La acción es

$$S = \int_a^b \left( -mc ds + \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu \right) = \int_a^b \left( -mc ds + \frac{e}{c} A'^\mu dx_\mu + \frac{e}{c} \partial^\nu f dx_\nu \right)$$

y lo último es una diferencial total exacta en el espacio de Minkowski  $e/c df$ ; no contribuye al cambio de gauge.

El cambio de gauge no es invariante pero  $\delta S = 0$  sí es invariante. La cuadridensidad de fuerza de Lorentz

$$f^\beta = -\partial_\alpha T^{\alpha\beta}.$$

Esto último parece un poco descolgado.

### 7.3.4 Especie de tiro oblicuo

La situación física es la depicted en la figura bajo estas líneas

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v})$$

que lleva a un sistema hartocomplificado de resolver que es

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \right) = eE \\ \frac{dP_y}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{v_y}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

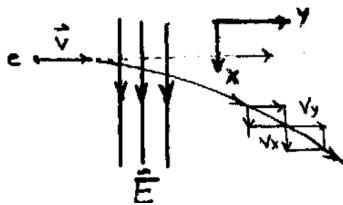


Figura 3.5

Cualitativamente vemos que  $v_x$  crece a medida que ingresa en la zona de campo  $E$  entonces como  $v_y$  es constante se tiene que  $\gamma$  aumenta y aumenta la inercia de modo que disminuye  $|v|$  y describe aproximadamente una parábola (curva catenaria).

En estos problemas estamos despreciando la energía radiada por la partícula.

### 7.3.5 Cuadrivelocidad

$u$  no transforma como cuadrivector (¿que  $u$ ?), pero lo que sí transforma así es

$$W^\mu = (\Gamma c, \Gamma u)$$

donde  $\Gamma \equiv 1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ . Luego tenemos la fórmula de Einstein de suma de velocidades, que tiene como límite a  $c$ ,

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} \quad u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}\right)}$$

De esta manera el cuadrimomento es

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma u) \quad \Rightarrow \quad mW^\mu = p^\mu.$$

#### EJEMPLO 3.3 Problema 14

Tenemos un cable con corriente o cilindro

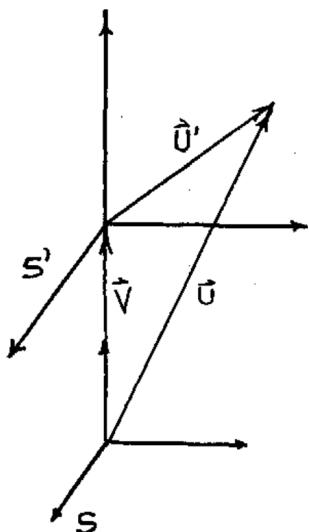
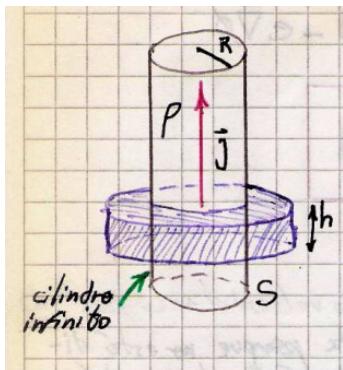


Figura 3.6



$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q \quad \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_c$$

Los campos serán

$$2\pi rhE = 4\pi \begin{cases} \pi R^2 h \rho & \rho > R \\ \pi r^2 h \rho & \rho < R \end{cases}$$

$$2\pi rB = \frac{4\pi}{c} \begin{cases} \pi R^2 j & \rho > R \\ \pi r^2 j & \rho < R \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{2\pi R^2 \rho}{r^2} \mathbf{x} & \rho > R \\ 2\pi \rho \mathbf{x} & \rho < R \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2\pi R^2}{cr} j \hat{\theta} & \rho > R \\ \frac{2\pi r j}{c} \hat{\theta} & \rho < R \end{cases}$$

Tenemos los invariantes y entonces  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \propto \hat{r} \cdot \hat{\theta}$  entonces al final serán  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  serán

perpendiculares.

$$E^2 = \frac{4\pi^2 R^4 \rho^2}{r^2} \quad B^2 = \frac{4\pi^2 R^4 j^2}{c^2 r^2},$$

con los campos internos, a menos de un factor dan lo mismo

$$E^2 - B^2 = \frac{4\pi^2 R^4}{c^2 r^2} (c^2 \rho^2 - j^2),$$

y el paréntesis es  $-j_\mu j^\mu$ , que viene de la forma de la cuadricorriente [referir a la primera vez que aparece]. Se puede hacer esto transformando  $\mathbf{j}$  que lo hace como lo hacen las coordenadas.

Entonces, los dos casos son  $c\rho > j$  entonces existe sistema  $K'$  tal que  $\mathbf{B}' = 0$ . El otro caso, si  $c\rho < j$  entonces existe sistemas  $K'$  tal que  $\mathbf{E}' = 0$ .

En el primer caso se tiene  $\mathbf{B}' = 0$  y usamos las leyes de transformación de los campos ya vistas.

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = 0 = \mathbf{B}_{\parallel}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = 0 = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$$

y de acá despejamos el campo magnético perpendicular. Entonces  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$ . Habría que ver quién es  $\boldsymbol{\beta}$ , pero las dependencias generales serán

$$\mathbf{B}(\hat{\theta}) = \boldsymbol{\beta}(\hat{r}, \hat{z}) \times \mathbf{E}(\hat{r}),$$

entonces serán  $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{z}$ . No pueden tener componente en  $\hat{r}$  porque la velocidad cambiaría punto a punto, entonces sólo en  $\hat{z}$ . Finalmente,

$$\beta = \frac{j}{c\rho},$$

así se anula  $\mathbf{B}$ .

En el segundo caso hay un sistema donde  $\mathbf{E}' = 0$ ,

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = 0 = \mathbf{E}_{\parallel} \\ E'_{\perp} = 0 = \gamma(E_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \end{cases}$$

de lo cual deducimos que  $E_{\parallel} = 0$  y  $E_{\perp} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}$ , entonces  $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{z}$ . Finalmente,

$$\beta = \frac{c\rho}{j},$$

que es el resultado que habíamos obtenido antes. Los otros campos serán

$$\mathbf{B}' = 0 \quad \mathbf{E}' = ?$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} = E_z \hat{z} = 0$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + 1/(c\rho) \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

pero hay que pasar de  $r \rightarrow r'$ .

#### EJEMPLO 3.4 Problema 18 & 17

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \frac{dU}{dt} = qc\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma c\boldsymbol{\beta} \\ U = \gamma mc^2 \end{cases}$$

Para campo eléctrico  $\mathbf{E}$  constante,  $\mathbf{B} = 0$  entonces

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}$$

y tomando la cuenta  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = q\mathbf{E}\Delta t$ , con  $\mathbf{p} = p_0 \hat{y}$  y  $\mathbf{E} = E \hat{x}t$ .

Entonces,

$$p^2 = \frac{m^2 c^2 \beta^2}{1 - \beta^2} = p_0^2 + q^2 E^2 t^2$$

y desarrollando

$$1 - \beta^2 = \frac{m^2 c^2}{m^2 c^2 + p_0^2 + q^2 E^2 t^2}$$

de lo cual

$$\beta = \frac{qEt + p_0}{(q^2 E^2 t^2 + p_0^2 + m^2 c^2)^{1/2}} \quad \mathbf{v} = \frac{cq\mathbf{E}t + \mathbf{p}_0}{(q^2 E^2 t^2 + p_0^2 + m^2 c^2)^{1/2}}$$

si definimos el argumento de la raíz que aparece en el denominador, se tienen

$$v_z = 0 \quad v_x = \frac{cqEt}{\sqrt{\Phi}} \quad v_z = \frac{p_0}{\sqrt{\Phi}}$$

Ahora integramos estas ecuaciones y obtenemos

$$x = c\sqrt{t^2 + (p_0^2 + m^2 c^2)/q^2 E^2} - \frac{U_0}{qE}$$

donde la energía inicial es  $U_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4}$ ,

$$x = \sqrt{c^2 t^2 + \frac{U_0}{q^2 E^2}} - \frac{U_0}{qE}$$

Para valores de velocidad

$$v_y = \frac{cp_0}{qE\sqrt{t^2 + \alpha^2}}$$

con  $\alpha^2 = U_0^2/(c^2 q^2 E^2)$  y con integración elemental llegamos a

$$y = \frac{cp_0}{qE} \operatorname{asinh} \left( \frac{cqtE}{U_0} \right)$$

y correspondientemente

$$x = \frac{U_0}{qE} \left[ \cosh \left( \frac{qEy}{cp_0} \right) - 1 \right]$$

Esto es una especie de parábola.

Para el problema 18 es  $\mathbf{B} = cte.$  y  $\mathbf{E} = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \\ \frac{dU}{dt} = 0 \end{cases}$$

de lo cual extraemos  $\gamma mc^2 = cte..$  Por otra parte

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q}{\gamma mc} \mathbf{B}$$

y entonces  $\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}$ . Luego,

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}_{||}}{dt} = 0 \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}_{\perp}}{dt} = \boldsymbol{\beta}_{\perp} \times \boldsymbol{\omega}$$

y el campo  $\beta_{\perp}$  sólo varía su dirección, mientras que  $\beta_{\parallel}$  es constante. De todo esto saldrá que  $\theta = \omega t$ .

Se tiene

$$\mathbf{v}_{\perp} = \omega a (\cos(\omega \Delta t) \hat{x} + \sin(\omega \Delta t) \hat{y}),$$

y el radio de giro es

$$a = \frac{cp_{\perp}}{qB},$$

donde  $v_{\perp} = \omega a$  de modo que  $\beta_{\perp} = \omega a/c$  y entonces

$$p_{\perp} = \gamma mc\beta_{\perp},$$

lo cual nos provee el link para calcular el radio de giro.

### EJEMPLO 3.5 Problema 19

La idea es moverme a un sistema de referencia donde uno se anula y entonces evalúo el otro (campo en un campo eléctrico o magnético puro). Esto lo puedo hacer si  $E \neq B$ .

## Capítulo 8

---

# Campos de cargas en movimiento

## 8.1 Potenciales retardados

Usando el gauge de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

con forma general

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

siendo  $f$  la que da la distribución de fuentes.

Resolveremos (1.1) con una función de Green. Hacemos Fourier respecto a la frecuencia, de manera que podamos remover el tiempo (además luego nos interesarán fuentes armónicas y por sobre todo cualquier perturbación puede descomponerse en Fourier).

Suponemos que podemos escribir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

siendo sus inversas

$$\psi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

luego la ecuación resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

de manera que se satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea,

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{x}, \omega),$$

para cada valor de frecuencia  $\omega$ .

Una función de Green satisfacrá

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

donde  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{R}$  y la función de Green será simétricamente esférica pues pedimos la no existencia de contornos, entonces llamando a aquella  $G_k(R)$  se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{R})$$

donde hemos usado el laplaciano en esféricas. Debemos distinguir dos casos, si  $R = 0$  entonces la anterior resulta

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

mientras que de ser cierto  $R \neq 0$  en cambio

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 (RG_k) = 0$$

y entonces se propone como solución general

$$G_k(R) = \frac{A}{R} e^{ikR} + \frac{B}{R} e^{-ikR}$$

donde  $A, B$  dependerán de las condiciones de contorno y siendo que el primer término del RHS representa una onda divergente esférica y el segundo una onda convergente esférica.

Se puede interpretar  $G_k$  como el potencial de una carga unitaria que aparece en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  en el instante  $t = t'$  y luego desaparece (mmm, qué misterio!).

Ahora necesitamos meter la dependencia temporal,

$$\begin{aligned} \left( \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \\ -4\pi f(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') e^{i\omega t} dt \\ -4\pi f(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'} \end{aligned}$$

de modo que tenemos

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'},$$

usando lo cual se llega a

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(R) e^{-\omega t} d\omega$$

donde  $\tau$  es el tiempo relativo entre los tiempos de observación y fuente ( $t'$ ) y  $R$  es la distancia relativa entre observación y fuente.

En un medio no dispersivo es

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta(\tau \mp \frac{R}{c})$$

y así llegamos a

$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' - \frac{1}{c}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t - (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green retardada

$$G^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' + \frac{1}{c}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t + (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green avanzada.

$G^+$  exhibe el comportamiento causal del efecto observado en  $\mathbf{x}$  a  $t$  causado por la acción de la fuente en el tiempo  $(t - R/c)$  donde  $R/c$  es la diferencia de tiempo de la señal en propagarse. Al valor

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

se lo llama el tiempo retardado. Es un poco más práctica la nomenclatura

$$G^+(R, t, t') = \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} \quad G^-(R, t, t') = \frac{\delta(t' - [t + (R/c)])}{R},$$

Entonces una solución particular de (1) (¿uno qué?) es

$$\psi^\pm(\mathbf{x}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'$$

y dos soluciones son

$$\psi_{in}(\mathbf{x}, t) + \int \int G^+ f dv' dt \quad \psi_s(\mathbf{x}, t) + \int \int G^- f dv' dt$$

con  $f(\mathbf{x}', t')$  una fuente que es diferente de cero solo en un intervalo  $\sim t'$ . Entonces  $\psi_{in}$  satisface (1) homogénea en  $t \rightarrow -\infty$ .  $\psi_s$  es la onda en  $t \rightarrow +\infty$  solución homogénea. La situación más común es el caso de  $\psi_{in}$  con  $\psi_{in} = 0$  entonces

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_v' \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} f(\mathbf{x}', t') dv' dt',$$

e integrando con la delta

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_v' \frac{f(\mathbf{x}', t - (R/c))}{R} dv',$$

que es una fuente en una cierta región que se enciende un instante e irradia.

### 8.1.1 Fuente armónica

Sea una fuente armónica en el tiempo

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t'}$$

entonces el potencial vector es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t'} \Big|_{t_{ret}} dv' = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t} e^{i\omega R/c} \Big|_{t_{ret}} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} e^{-i\omega t} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{R} e^{i\omega R/c} dv$$

se puede ver como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dv' e^{-i\omega t}$$

Si la fuente oscila armónicamente con frecuencia  $\omega$  entonces los campos tendrán la misma frecuencia  $\omega$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{i\omega/c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dv'$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \text{si} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t'}$$

La aproximación consiste en desarrollar

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

y ver condiciones asintóticas. Cuando  $\ell = 0$  (el primer término de la sumatoria en  $\ell$ ) y  $kx' \ll 1$  tenemos una antena ineficiente. La longitud de onda  $\lambda$  de la radiación es mucho mayor al tamaño del emisor,  $2\pi x' \ll \lambda$  (longitud de onda larga). En cambio tenemos  $2\pi x \gg \lambda$  que es la condición de campo lejano (siempre la usaremos).

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{(0)} = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x}$$

es una onda esférica saliente. Es el potencial vector  $\mathbf{A}$  de un dipolo magnético oscilante armónicamente. Recordemos que falta siempre *pegarle* un factor  $\exp(i\omega t)$ . Usando  $\mathbf{E}0i/k\nabla \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = k^2(\hat{r} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx}\right) \quad (1.2)$$

siendo  $\hat{r}$  la dirección de propagación y  $x \equiv |\mathbf{x}|$  que puede ser  $|r\hat{r}|$  en esféricas. El que contribuye a la radiación es el primer término de (1.2) (campo lejano) mientras que el segundo se va a cero rápidamente.

Cerca de la antena es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = ik(\hat{r} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2},$$

pues  $kx \ll 1$  y entonces  $\exp(ikx) \sim 1$  (campo cercano) de manera que si  $\lambda \rightarrow \infty$  entonces  $\mathbf{B}^{(0)} \sim 0$ . El campo  $\mathbf{E}$  cerca de la antena es

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}^{(0)} = \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}$$

que es el campo de un dipolo eléctrico.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  son transversales a  $\hat{r}$  y tienen la misma longitud (en unidades CGS). La potencia media (en un número entero de períodos) será

$$\langle dP \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\Omega$$

y entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 \\ \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin(\theta)^2\end{aligned}$$

y este cálculo podemos ver de dónde sale

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{24\pi} \Re\{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\} = \frac{c}{8\pi} \Re\{(\mathbf{B}^0 \times \hat{r}) \times k^2 (\hat{r} \times \mathbf{p})/r\} \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \Re\{(-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\theta}) \times (-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\phi})\} = \frac{c}{8\pi} p^2 k^4 \sin(\theta)^2 \hat{r} \cdot \hat{r}\end{aligned}$$

Luego, la potencia irradiada es máxima en  $\theta = \pi/2$  (ver figura)

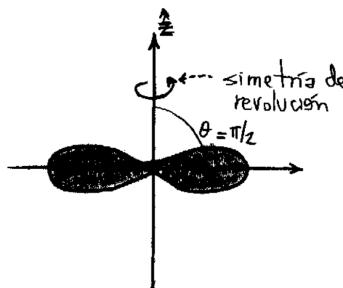


Figura 1.1

Tenemos un cálculo auxiliar de esta cuenta pero no sé si suma meterlo acá.

Entonces,

- Si  $\mathbf{B} = 0$  se da que  $\mathbf{S} = 0$ , es decir que no hay radiación.
- Un monopolo no produce campo de radiación por su simetría esférica. Una corriente  $J\hat{r}$  no produce  $\mathbf{B}$  y se tienen

$$\mathbf{B}_{rad}^0 = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p}) e^{ikr} \quad \mathbf{E}_{rad}^0 = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p}) e^{ikr} \times \hat{r}$$

- Para que un campo sea de radiación debe tener flujo  $\mathbf{S}$  no nulo en el infinito. Si los campos van como  $1/r$  entonces el Poynting va como  $1/r^2$  y  $dS$  va como  $r^2$  de modo que  $\langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S}$  tiene valor constante (un flujo que se va y no retorna a la fuente). Si el campo va como  $1/r^2$  y entonces no produce flujo lejos.

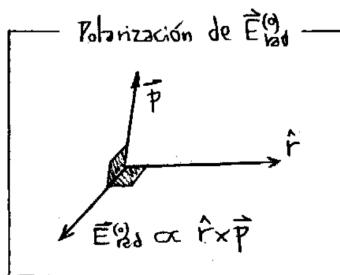


Figura 1.2

- Si hacemos la aproximación  $\ell = 1$  en  $\sum_{\ell}$  resulta que se obtiene un momento magnético oscilante más un cuadrupolo eléctrico.
- La radiación a orden  $\ell = 0$  es un dipolo eléctrico oscilante (ver figura)

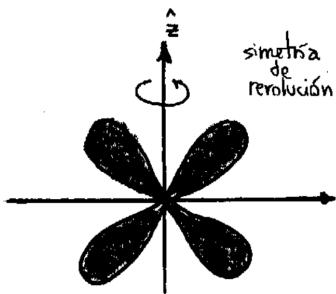


Figura 1.3

- La distribución angular de potencia para la parte cuadrupolar que surge con  $\ell = 1$  es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2$$

que es para una fuente con simetría de revolución.

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^6}{128\pi} |\hat{r} \times \mathbf{Q}|^2,$$

donde  $\mathbf{Q}$  es un vector que vale  $\hat{n} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$ , o bien indicialmente  $n_i Q_{ij}$ .

### 8.1.2 Radiación a orden $\ell = 1$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}(t') + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t')}{cR} \times \hat{n} + \frac{1}{6c^2 R} \overline{Q}(t') \cdot \hat{n}$$

que es la radiación dipolar eléctrica, magnética y cuadrupolar eléctrica.

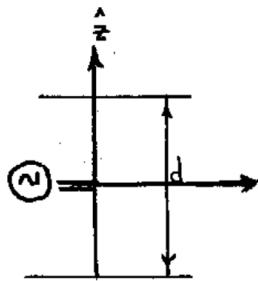
### 8.1.3 Ejemplo de antena

Sea una pequeña antena de longitud  $d$  (ver figura) tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I \sin(k[d/2 - |z'|]) \delta(x') \delta(y') \hat{z}$$

que tiene nodos de la corriente en los extremos. Luego considerando fuente armónica ( $A = A(x) \exp(i\omega t)$ ) será

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dv'$$



**Figura 1.4**

Hacemos algunas aproximaciones geométricas de distancia amparadas en la figura de más abajo.

Estas aproximaciones son clásicas de los problemas de difracción.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\theta)} = x(1 - 2x'/x \cos(\theta) + (x'/x)^2)^{1/2}$$

y quedándonos a primer orden,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x(1 - x'/x \cos(\theta))$$

de manera que aceptamos una buena aproximación y una bruta,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x - x' \cos(\theta)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x$$

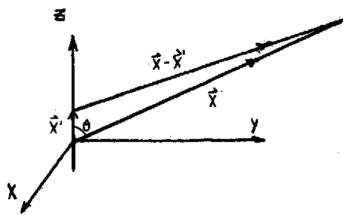


Figura 1.5

para así escribir

$$\approx \frac{1}{|x|} e^{ikx} e^{-ikx' \cos(\theta)}$$

donde notamos que hemos aproximado de una forma dentro del argumento de la exponencial compleja y de otra en el denominador de la fracción.

Así, resulta

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \frac{e^{ikx}}{x} \int_V' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ikx' \cos(\theta)} dv'$$

Existe condición de contorno que en los extremos la corriente debe ser nula, entonces debe haber nodos del seno (en  $\pm d/2$ ) y los  $d$  posibles son  $n\lambda/2$ .

$$\mathbf{A}(x) = \hat{z} \frac{2I e^{ikx}}{ckx} [\cos(kd/2 \cos(theta)) - \cos(kd/2)] \frac{1}{\sin(\theta)^2}$$

entonces

$$\mathbf{A}(x) = A_z \hat{z} \quad \mathbf{A}(x) = A_z \cos(\theta) \hat{\theta} - A_z \sin(\theta) \hat{\phi}$$

Falta un vegsor

Entonces con  $kx' \ll 1$  (longitud de onda larga,  $\lambda \gg d$ ) tenemos

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \left( \frac{kd}{2} \right)^4 \sin(\theta)^2$$

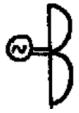
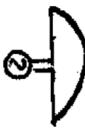
identificando con  $|p| = Id^2/(2c)$  y este es el primer término multipolar. El paréntesis es muy chico. Con media longitud de onda ( $kd = \pi$ ) ( $\lambda/2 = d$ ) es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \frac{\cos(\pi/2 \cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2}$$

y finalmente para una longitud de onda ( $\lambda = 2$  y  $kd = 2\pi$ ) se tiene

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \left[ \frac{2 \cos(\pi/2 \cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2} \right]^2$$

Las ilustraciones sucesivas de la figura bajo estas líneas dan cuenta de estas diferentes longitudes.



**Figura 1.6**

Como referencia tengamos en cuenta que las expresiones salen de

$$\mathbf{B}_{rad} = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \dot{\mathbf{A}} = ik\hat{n} \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

Estas equivalencias son para campos de radiación nomás,

$$\mathbf{B}_{rad} = ik\hat{n} \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

## 8.2 Campos de una partícula cargada en movimiento

Escribimos la densidad de corriente y la densidad de carga según

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

$$\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

de manera que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{t'}^t \int_{V'} \frac{q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{t'}^t \int_{V'} \frac{q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

donde hemos usado  $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  de modo que es  $R = R(t')$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_v^t \frac{q\mathbf{v}\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v}(t')}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)R(t')} \Big|_{t'=t-R/c}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_v^t \frac{q\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)R(t')} \Big|_{t'=t-R/c}$$

cuyas expresiones son los potenciales de Liénard-Wiechert. Hemos usado en las cuentas que

$$\delta[t' - (t - R(t')/c)] = \frac{1}{\frac{d}{dt'}(t' + R(t')/c)} \delta(t - t')$$

(idea que viene de  $\delta f = (1/(df/dx_0))\delta(x - x_0)$ ) y que

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} \quad \frac{dR}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{x}}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{R} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} = -\hat{n} \cdot \mathbf{v}$$

$$1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = 1 - \hat{n} \cdot \beta$$

según la figura que ilustra bajo estas líneas

y como los campos serán

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

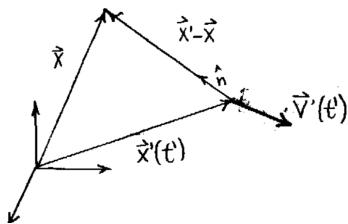


Figura 2.7

se tiene que

$$\mathbf{E} = q \frac{(\hat{n} - \beta)(1 - \beta^2)}{K^3 R^2} \Big|_{ret} + \frac{q \hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{c K^3 R} \Big|_{ret}$$

donde se ve que vale  $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E}$  que ya sabíamos para  $\mathbf{E}_{rad}$  y  $\mathbf{B}_{rad}$  y donde  $K \equiv 1 - \hat{n} \cdot \beta$

De acuerdo a la figura xxxx en  $t'$  se produce el campo. Cuando la radiación llega a  $x$  en tiempo  $t$  la partícula se halla en  $x'$  (tiempo  $t$ ), de manera que la moraleja es que  $t$  y  $t'$  son instantes de tiempo diferentes en un mismo sistema inercial.

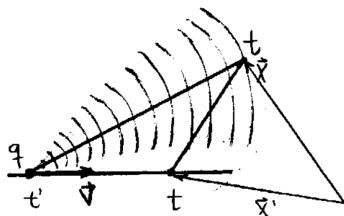


Figura 2.8

Podemos sacar un par de frases importantes ya que

- Si una partícula se mueve con  $v$  constante puedo pasar a un frame inercial  $S'$  donde es  $v = 0$  y entonces  $\mathbf{B}' = 0$  de manera que como  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' = 0$  se tiene  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$  en todo frame inercial.
- El  $\mathbf{E}_{rad}$  estará dado por el  $\mathbf{E}_a$ .
- Toda partícula que está acelerada en un frame inercial debe irradiar ondas EM, entonces una partícula recorre una circunferencia (en un campo  $\mathbf{B}$ ) si aceptamos que lo que irradia es despreciable.

Sea ahora una partícula  $e$  con  $|v|$  constante, entonces

$$\mathbf{B}_{bs} = e \frac{\beta \times \hat{n}}{\gamma^2 k^3 R^2} \quad (\text{Lienard-Wiechert}) \qquad \qquad \mathbf{B}_{bs} = e \frac{\mathbf{v} \times \hat{n}}{c R^2} \quad (\text{Biot-Savart})$$

y

$$E_v = e \frac{\hat{n} - \hat{\beta}}{\gamma^2 k^3 R^2}$$

donde vemos que difieren en

$$\frac{1 - \beta^2}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)}$$

### 8.3 Campo de una carga en movimiento

El campo de velocidad es

$$\mathbf{E}_v = e \frac{(\hat{n} - \hat{\beta})}{\gamma^2(1 - \hat{n} \cdot \hat{\beta})^3 R^2} = e \left[ \frac{\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1 - \hat{n} \cdot \hat{\beta})^3 R^2} \right]$$

referidas las magnitudes a la figura XXXX.

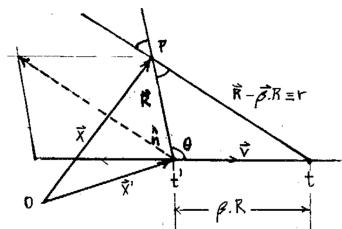


Figura 3.9

$$|E_v| = e^{\frac{\sqrt{R^2 + \beta^2 R^2 - 2R^2\beta \cos(\theta)}}{\gamma^2(1 - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}/R)^3 R^3}} = e^{\frac{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\theta)}}{\gamma^2(1 - \beta \cos(\theta))^3 R^2}}$$

entonces como  $\cos(\theta) = \beta$

$$\frac{d|E_v|}{d\theta} = 0$$

siendo los extremos  $\theta = 0, \pi$  que representan un movimiento hacia adelante o hacia atrás.

$$|E_v(\cos(\theta) = \beta)| = \frac{e\gamma}{r^2}$$

$$|\mathbf{E}_v(\cos(\theta) = 1)| = \frac{e(1 + \beta^2 - 2\beta)^2}{R^2(1 - \beta^2)^{-1}(1 - \beta)^3}$$

$$|\mathbf{E}_v^{(\theta=1)}| = \frac{e}{R^2(1 - \beta^2)^2\gamma^2} = \frac{e}{r^2\gamma^2}$$

puesto que es  $r = R(1 - \beta)$ . Vemos que es similar al campo estático pero con un factor corrector.

Campo de aceleración, es

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{K^3 R} \approx \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta})}{K^3 R} = \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times \dot{\beta}}{K^3 R}$$

donde usamos que  $v/c \ll 1$  y por ende  $1 - \hat{n} \cdot \beta \approx 1$  entonces es

$$\hat{n} \cdot \dot{\beta} \approx \hat{n}$$

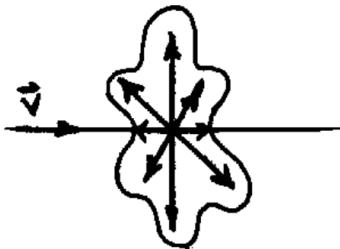


Figura 3.10

## 8.4 Cálculo de potencia irradiada

Se realiza calculando el vector de Poynting,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \hat{n} = \frac{e^2}{4\pi c} \hat{n} \left| \frac{\hat{n} \times \dot{\beta}}{R} \right|^2$$

si es

$$dP = \mathbf{S} \cdot \hat{n} R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \hat{n} \times \dot{\beta} \right|^2 d\Omega$$

y entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{v}^2}{c^2} \sin(\theta)^2 = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin(\theta)^2.$$

Luego, si integramos,

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int \int \sin(\theta)^3 d\theta d\phi$$

y se llega a que

$$P = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3}$$

que es la fórmula de Larmor con  $v/c \ll 1$ . Ahora podemos prescindir de la restricción no relativista usando que la  $P$  es invariante lorentziano.

$$P = \frac{2e^2}{3c^3 m^2} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

y como  $p_\mu(E/c, -\mathbf{p})$  y  $p^\mu(E/c, \mathbf{p})$ .

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}(E^2/c^2)$$

$$\tau = \gamma(t - \beta x_{||}) \quad \frac{d\tau}{dt} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

y luego para una trayectoria rectilínea

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{a^2 \sin(\theta)^2}{(1 - \beta \cos(\theta))^5}$$

$$P = \frac{2e^2 a^2 \gamma^6}{3c^3} \quad a = Z_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

Según vemos en la figura la distribución angular de potencia es una especie de *as de pique* en el cual a mayor velocidad los lóbulos se pegán al eje de simetría. Compárese con el caso no relativista.

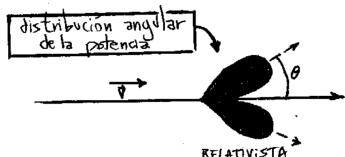


Figura 4.11

Se tiene además

$$\theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}$$

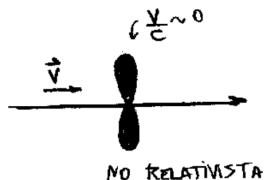


Figura 4.12

## 8.5 Frenado magnético

Sea la Figura. Hacemos

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega \frac{r}{c} \hat{\phi} \times (-B\hat{z}) = -\frac{\omega r B}{c} \hat{r}$$

y la densidad de potencia disipada por corrientes de Foucault será

$$\mathfrak{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}' = \sigma E'^2 = \frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2}$$

donde

$$P = \int \int \frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2} r d\theta dr = \frac{\sigma \omega^2 a^4 B^2 2\pi}{4c^2}.$$

Son corrientes de *Foucault* las que frenan el disco.

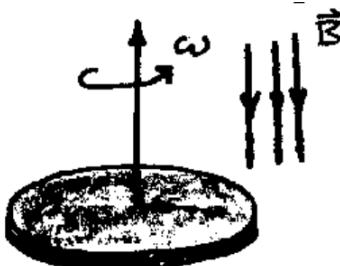


Figura 5.13

En un disco fijo con  $\mathbf{B} = B_0 e^{i\omega t}$  habrá  $\mathbf{E} = E(r)\hat{\phi}$  de manera que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E(r)^2$  entonces se disipará energía por efecto Joule. Se calientan los transformadores en un ejemplo usual de la vida real.

### 8.5.1 Esponja electromagnética

En  $t = 0$  se distribuye una  $\sigma$  en la cara interna. Se genera una  $\mathbf{J}$  y un campo  $\mathbf{E}$  radial que no produce  $\mathbf{B}$  entonces  $\mathbf{S} = 0$  no hay radiación. La carga se mueve

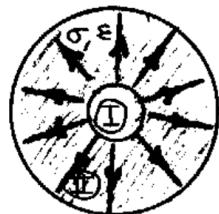


Figura 5.14

por el interior hasta llegar a la superficie y alcanzar situación estática  $\mathbf{E}_{II} = 0$ . La energía disipada lo hace en forma de calor pero no se radía.

## Apéndice A

---

### Delta de Dirac

La delta de Dirac tiene representaciones numéricas en términos de límites. En sí, debe entenderse como un proceso límite. Las dos más utilizadas son las representaciones lorentziana,

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}$$

gaussiana

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/(4\epsilon)}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\epsilon}}$$

y la que utiliza la función sinc, [CHECK]

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}$$

La variable que tiene a cero  $\epsilon$  cuantifica el ancho mientras que  $1/\epsilon$  cuantifica la altura.

Hacer grafititos de estas funciones.

## Apéndice B

---

# Coordenadas esféricas y cilíndricas

Acá se condensan algunas expresiones asociadas al aspecto de los operadores diferenciales en los diferentes sistemas de coordenadas curvilíneos.

El prototipo de sistema curvilíneo es el esférico. Teníamos

$$d\mathbf{x} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

donde  $r^2 \sin \theta$  es el jacobiano de la transformación.

La idea es que en cualquier sistema curvilíneo de coordenadas  $\{q_i\}$  se tiene para el diferencial total de una función  $f$

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$$

y como en coordenadas cartesianas es

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i,$$

la idea es que tiene que valer lo mismo en todo sistema de coordenadas. Luego, en un sistema donde las coordenadas no son las cartesianas se tiene

$$d\mathbf{x} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

donde los  $h_i$  dan la métrica del espacio coordenado. El gradiente será

$$\nabla f = g_1 \hat{e}_1 + g_2 \hat{e}_2 + g_3 \hat{e}_3$$

donde  $g_i$  se ajusta pidiendo que el escalar  $df$  sea un invariante

$$\nabla f \cdot d\mathbf{x} = \sum_i h_i g_i dq_i,$$

de lo cual surge que

$$\nabla \equiv \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \hat{e}_i.$$

Este es el operador gradiente en un sistema curvilíneo.

La divergencia en cartesianas es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

y utilizando el teorema de la divergencia de Green,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

se arriba a

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} [h_2 h_3 F_1] + \frac{\partial}{\partial q_2} [h_1 h_3 F_2] + \frac{\partial}{\partial q_3} [h_1 h_2 F_3] \right)$$

Luego, el laplaciano (que será el operador más usado en este curso) resulta de

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi,$$

es decir la divergencia del gradiente de la función.

En un sistema curvilíneo la delta será algo como

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \delta(q_3 - q'_3).$$

## Apéndice C

---

# Rejunte

### Simplificaciones

Recordemos que

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

la simplificación de las raíces cuadradas implican el módulo para tener en cuenta las dos posibilidades del signo.

### Ángulo entre dos vectores

En esféricas el ángulo entre dos vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , escribiendo los versores en cartesianas resulta

$$\cos \gamma \equiv \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|} = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

### Cálculo diferencial e integral vectorial sobre superficies

Hablar sobre la normal  $\hat{n}$  de una superficie y versores tangenciales  $\hat{t}$ .

**Identidades vectoriales** Esta,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

y otras.

**ID 1** Siendo  $\mathbf{A}$  un vector genérico y  $\phi$  un campo escalar,

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

**ID 2**

$$\nabla \times [\mathbf{M} \times \mathbf{N}] = \mathbf{M} (\nabla \cdot \mathbf{N}) - \mathbf{N} (\nabla \cdot \mathbf{M}) + (\mathbf{N} \cdot \nabla) \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{N}$$

**ID 3**

$$\int_V \nabla \times \mathbf{R} dV = \int_S \mathbf{R} \times \hat{n} dS$$

**ID 4**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

**Bessel Functions**

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}$$

Algunas integrales útiles

$$\int x^n J_{n-1} dx = x^n J_n(x)$$

$$\int_0^x x J_n^2(x) dx = \frac{x^2}{2} [J_n(x)^2 - J_{n-1}(x) J_{n+1}(x)]$$