Capítulo 1

Gas de Bose

Para Bose debe cumplirse $\mu <$ todo e y como $e \geq 0$ eso dice que

$$\mu < 0$$

Pero si en un sistema tiene e_0 como mínimo y $e_0 > 0$ entonces, ¿puede ser $\mu > 0$? Aparentemente sí (al menos recordando que la restricción sale de la serie).

Ya lo entendí esto: pero no para partícula libre.

Además $\langle n_e \rangle \geq 0$, el número de partículas debe ser positivo.

$$\beta p V = \log(\Xi) = \sum_e -\log(1 - \mathrm{e}^{-\beta(e-\mu)})$$

$$\beta p = \sum_{e \neq 0} \frac{-\log(1 - \mathrm{e}^{-\beta(e-\mu)})}{V} - \frac{\log(1-z)}{V}$$

El último término será negligible para todo z, incluso con $z \to 1$ pues en ese caso $V \to \infty$ mucho más rápido

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1-z}$$

y $\langle n_0 \rangle / V$ es finito incluso con $z \to 1$, entonces

$$\langle n_0 \rangle - z \langle n_0 \rangle - z = 0 \qquad z = \frac{\langle n_0 \rangle}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$1 - z = \frac{1}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$-\frac{\log(1-z)}{V} = \frac{\log(1+\langle n_0\rangle)}{V}$$

y dado que $\log(\langle n_0\rangle) \ll \langle n_0\rangle$ despreciamos $\log(1-z)/V$.

Como $0 > \mu$ entonces $\mathrm{e}^{\beta\mu} \equiv z < 1$

En Bose la fugacidad está acotada

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V}\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) + \frac{\lambda^3}{V} n_0$$

$$\underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{densidad total}} = \underbrace{\frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)}_{\text{densidad en los excitados}} + \underbrace{\frac{1}{V}\left(\frac{z}{1-z}\right)}_{\text{densidad en el fundamental}}$$

Por otro lado como $0 < z < 1$ entonces $g_{3/2}(z)$ está acotada

$$g_{3/2}(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{3/2}} = 2.612$$

Con $z \approx 1$ da

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{n_0}{V}$$

cuando se aumenta N necesariamente las partículas se apilan en el fundamental; es una fracción macroscópica pués $V \to \infty$ y entonces $n_0 \to \infty$.

Se da con

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{\lambda^3}{V} N = \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} > 2.612$$

Destaco en esta expresión T baja dividiendo y n alta multiplicando.

El condensado de Bose surge cuando se saturan los excitados; ello pasa con T baja, N/V alta y $\mu \to 0$

GRAFIQUETE

El condensado de Bose podemos pensarlo como la coexistencia de dos fluidos ($e = 0$ y $e \neq 0$). Podemos definir un T_c, v_c desde

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) = 2.612 = \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{1}{v}$$

que lleva a que para un dado v tenemos una cierta T_c y para una cierta T tenemos un dado v_c dados ambos por

$$T_c^{3/2} = \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{1}{v} \frac{1}{g_{3/2}(1)} \qquad v_c = \frac{\lambda^3(T)}{g_{3/2}(1)}$$

De esta forma si $T < T_c$ y $v < v_c$ se tiene la condensación de Bose

$$\lambda^3 \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{N_0}{V}$$

que es válida a partir de la condensación ($T < T_c$)

$$N = \frac{(2\pi mk)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} g_{3/2}(1) V + N_0 = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} + N_0$$

$N_e = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$

$$N_o = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right),$$

que es válida por supuesto con $T < T_c$. A partir de haber alcanzado la condensación $z = 1$, añadir partículas $(N++)$ o reducir el volumen $(V--)$ hace que $N_e/V \to 0$ pues $V \to \infty$

DIBUJO con observaciones

Cuando v/λ^3 es chico se saturan los N_e y entonces $z \to 1$.

Cuando v/λ^3 es grande no hay condensado y entonces $\lambda^3/v \approx z$ o bien $1/(v/\lambda^3) \approx z$.

Para la presión tendremos

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$$

con $z = 1 (T < T_c)$

$$\frac{p}{kT} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} g_{5/2}(1) = \frac{1}{v(T_c/T)^{3/2} g_{3/2}(1)} g_{5/2}(1)$$

$$p = 1.34 \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \qquad \frac{pV}{NkT} = 0.513 \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

con $z = 1 (T = T_c)$

$$\beta p = \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1) v} = \frac{0.513}{v}$$

$$p = 0.513 \frac{NkT}{V}$$ es aprox. $1/2p$ gas ideal clásico

con $z \lesssim 1 (T > T_c)$

$$\beta p = \frac{1}{v} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

pero no podemos expandir en el virial porque λ^3/v no es chico.

Con $z \approx 0$ ($T \gg T_C$)

$$\beta p v = \frac{pV}{NkT} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

usando toda la serie y procediendo en modo análogo a Fermi se obtienen

Los a_ℓ son los coeficientes del virial -que son los mismos para Fermi-.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0.17678 \\ a_3 = -0.00330 \end{cases}$$

$$\frac{pV}{NkT} = 1 - 0.17678\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) - 0.00330\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2$$

DIBUJO

El virial vale en $\lambda^3/v \ll 1$ (alta T y baja N/V)

A bajas T se comportan de modo muy diferente, $p_{\text{ Fermi }} > 0$ y $p_{\text{ Bose }} \approx 0$

1.1 Análisis del gas ideal de Bose

- $\lambda^3/v \ll 1$ y entonces $z \ll 1$ $\quad [T \gg T_c]$

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$\beta p V \approx 1 - \frac{\lambda^3}{v}\frac{1}{2^{5/2}} \qquad\qquad U = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}NkT\left(1 - \frac{\lambda^3}{v}\frac{1}{2^{5/2}}\right)$$

- $\lambda^3/v \approx 1$ y entonces $z < 1$ $\quad [T > T_c]$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

- $\lambda^3/v = 2.612$ y entonces $z = 1$ $\quad [T = T_c]$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \approx \frac{1.34}{2.612} \approx 0.513$$

- $\lambda^3/v \gg 1$ y entonces $z = 1 \quad [T < T_c]$ y hay que considerar el fundamental

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \qquad\qquad \lambda^3 \left(\frac{N - N_0}{V} \right) = g_{3/2}(1)$$

Con $z = 1$ y $T < T_c$ expresamos todo en términos de (T/T_c).

que lleva a

$$\left(1 - \frac{N_0}{N} \right) = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

puesto que T_c es tal que

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T_c)^{3/2}} \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) = \frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 0.513 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = g_{3/2}(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{1}{g_{3/2}(1)}$$

Desde la expresión de la energía $U = 3/2pV$ y $C_V = \frac{\partial}{\partial T}(3/2pV)$ y entonces

- $T < T_c$

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} N k \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} 0.513 \right) = \frac{15}{4} N k \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} 0.513 \qquad C_V \propto T^{3/2}$$

- $T = T_c$

$$C_V = Nk\, 0.513 \frac{15}{4} = Nk 1.92375$$

- $T > T_c$

$$C_V = \left(\frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \underbrace{\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}}_{\to\infty \text{ en } z=1} \right)$$

C_V es continuo.

- $T \gg T_c$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(T \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1} \right)$$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \left(1 + 0.0884 \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + ... \right)$$

DIBUJO

1.1.1 Condensado de Bose como transición de fase

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{v}{v_c}$$

que se obtiene desde las siguientes

$$\frac{\lambda^3(T_c)}{v} = g_{3/2}(1) \qquad\qquad \frac{\lambda^3(T)}{v_c} = g_{3/2}(1)$$

para llegar a la relación útil:

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = \frac{v}{v_c}$$

$\lambda^3 = h^3/(2\pi mkT)^{3/2}$ **y** $\frac{\lambda^3}{v_c} = g_{3/2}(1) = \frac{\lambda^3}{v}\frac{v}{v_c}$

En $\frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2}(1)$ vale

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \text{ no tengo en cuenta } N_0$$

$$\frac{v_c}{v} = \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)}$$

Se vio que con $V \to \infty$

$$\frac{1}{V}\log(1-z) \to 0$$

y entonces

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \qquad v > v_c$$

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \qquad v \leq v_c$$

$$\beta p = \frac{g_{5/2}(1)}{v_c g_{3/2}(1)}$$

es decir que la presión p no depende del v

Con $v > v_c$

$$p = \frac{kTg_{5/2}(z)}{\lambda^3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z)$$

que conlleva a

$$kT = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^2} \qquad p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{v^{5/3}[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

y con $v > v_c$

$$pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

con $v \leq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

Vemos que en $v = v_c$ es

$$pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(1)}{[g_{3/2}(1)]^{5/3}}$$

$$p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(1)}{v_c g_{3/2}(1)}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{kT}{v_c}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

y entonces se ve que es continua.

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z) \quad v \geq v_c \qquad \Bigg| \qquad \beta p = \frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(1) \quad v \leq v_c$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \quad v > v_c \qquad \Bigg| \qquad \frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) \quad v = v_c$$

- $v \geq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c}g_{5/2}(z) = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2}g_{5/2}(z)$$

$$p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^5}g_{5/2}(z) = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{v_c^{5/3}[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

$$\boxed{pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}}}$$

- $v \leq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c} g_{5/2}(1) = \boxed{\left(\frac{kT}{v_c}\right)\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}}$$

Las isotermas del gas ideal de Bose serán algo como

DIBUJO

Una dada T_1 determina un v_{c_1} pués

$$\frac{\lambda^3(T_1)}{v_{C_1}} = g_{3/2}(1) \quad \to \quad v_{C_1} = \frac{\lambda^3(T_1)}{g_{3/2}(1)}$$

y en la zona condensada p no depende del v.

$\lambda^3(T) \propto T^{-3/2}$ **A medida que T sube el v_c es más pequeño.**

Si ponemos todo en función de T resulta

$$v \leq v_c \qquad p = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2} g_{5/2}(1)$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{5}{2}\frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(k)^{5/2}T^{3/2} g_{5/2}(1) = \frac{5}{2}\frac{k}{\lambda^3} g_{5/2}(1) = \frac{5}{2}\frac{k}{v_c}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

DIBUJO

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(5/2)kT g_{5/2}(1)}{T v_c g_{3/2}(1)}$$

pero Clapeyron era

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{(5/2)kT g_{5/2}(1)/g_{3/2}(1)}{T v_c}}$$

$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} = \frac{T\Delta S}{T\Delta V} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$

Es una transición de fase de primer orden

$$S = \frac{U + pV - \mu N}{T} = \frac{5/2pV - \mu N}{T}$$

$$\frac{S}{kN} = \frac{5}{2}\frac{pV}{NkT} - \frac{\mu}{kT}$$

y entonces

$$T > T_c \qquad \frac{S}{kN} = \frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z$$

$$T < T_c \qquad \frac{S}{kN} = \frac{5}{2} 0.513 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1) v}$

$$\text{Con } T \to 0 \qquad \frac{S}{kN} \propto T^{3/2}$$

y por lo tanto vale la tercer de la termodinámica. Para $T < T_c$ es

$$S = Nk \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{v}{v_c} \right) \quad \to \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S/N}{\partial V/N} = \frac{\partial s}{\partial v}$$

siendo s entropía por unidad y v volumen específico.

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{(5/2) k g_{5/2}(1)/g_{3/2}(1)}{v_c} = \frac{dp}{dT}$$

y acá es donde vemos que es una transición de fase de primer orden.

1.2 Cuánticos IV –reubicar–

algunos temitas sueltos:
números de ocupación
gas de Fermi p y c_v
gas de Fermi p y c_v
Condensado de Bose

¿El condensado BE requiere población de los niveles o V total de algún tipo?

Tenía unas consultas agarradas con clip: ¿porqué hay una cúspide en C_v? ¿transiciones?

El coeficiente lineal del virial $1/2^{5/2} = 0.1767767$ sale considerando las $f_\nu(z)$ hasta orden uno y tirando términos más allá.

El requerimiento $\mu < 0$ viene de que el fundamental n_0 no puede tener población negativa

$$n_0 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(e_0 - \mu)} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1} \geq 0$$

$$\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu < 0$$

Con $\mu \to 0^-$ tenemos $n \to \infty$

En el caso del condensado establecemos desde

$$\frac{\lambda^3(T)}{v} = g_{3/2}(1)$$

que lleva para T_c (para v fijo) o v_c (para T fija) versiones evaluadas de la anterior ecuación.

Para la población de los estados excitados

$$p_x = \frac{h}{V^{1/3}} n_x \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{h}{V^{1/3}} \boldsymbol{n}$$

$$\frac{n_{e_i}}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i} - 1} \leq \frac{1}{V(\,\mathrm{e}^{\beta e_i} - 1)} = \frac{1}{V(\sum_{l=1}^{\infty} (\beta e_i)^l / l!)}$$

pués $z^{-1} = 1/z \leq 1$

$$\beta e = \frac{\beta p^2}{2m} = \frac{\beta}{2m} \frac{h^2}{V^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\frac{2m}{V^{1/3} \beta h^2 (\sum_{l=1} \dots)} \to 0 \quad \text{si} \quad V \to \infty$$

y entonces

$$\frac{n_e}{V} \to 0 \quad \text{si} \quad V \to \infty$$

Esto significa que si V es muy grande, en el condensado se tenderá a que todas las partículas se hallen en $e = 0$ pues

$$\frac{N_e}{N} \to 0 \qquad\qquad \frac{N_0}{N} \to 1$$

Véamoslo en la ecuación de N,

$$\frac{\lambda^3 N}{V} = g_{3/2}(1) + \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1 - z}$$

y si $z \to 1$ de forma que $z/(1-z) \gg 1$ entonces $g_{3/2}(1)$ es despreciable de modo que

$$\frac{\lambda^3 N}{V} \approx \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1 - z} = \frac{\lambda^3 N_0}{V}$$

y se da que $N \sim N_0$.

En Bose se da $0 < z < 1$

DIBUJITOS

Con $z \ll 1$ es $\lambda^3/v \approx z$ y entonces $z \approx 1/(v/\lambda^3)$. Con $z = 1$ es $\lambda^3/v = 2.612$n pero si $\lambda^3/v > 2.612$ entonces z no se mueve y sigue en su valor 1.

1.2.1 Cuánticos 5 - Cuánticos 5b –reubicar–

presión gas de Bose

C_V gas de Bose

El condensado de Bose es una transición de fase de primer orden. Crece la población del fundamental de modo espectacular. El parámetro λ^3/V se encarga de adjustar la población del fundamental.

límite clásico función de partición

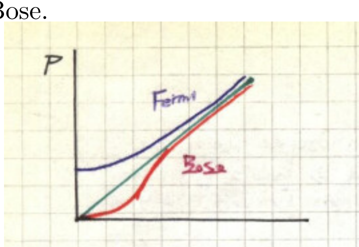
cálculo de $Tr(\,\mathrm{e}^{-\beta A}) = Q_N(V,T)$

diferencia con el caso clásico

potencial efectivo

Ver la transición de fase con el tema del calor latente. ¿Cómo era lo de Clayperon?

Podemos comparar presión con el gas ideal para reconoder si es Fermi o Bose.

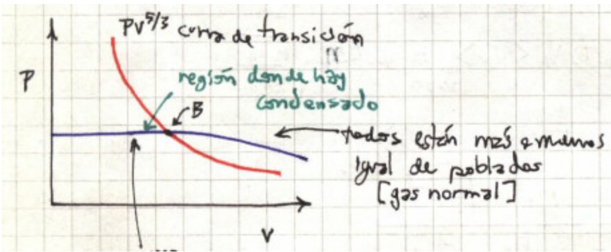


El C_V es continuo. Veamos que da

$$T < T_C \qquad \frac{C_V}{Nk} \propto T^{3/2}$$

$$T = T_C \qquad \frac{C_V}{Nk} \approx 1.925 > \frac{3}{2}$$

$$T > T_C \qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2}T\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right)\frac{C_V}{Nk}$$



La flecha de abajo señala una región de coexistencia. Entonces el fundamental se empieza a poblar mucho. Cuando tengo todos en el condensado es $S \to 0, T \to 0$ y se ve que satisface la tercer ley. Los boltzmanniones no cumplen esto (no están pensados para satisfacer la tercer ley).

Tiene calor latente ΔH, entonces tenemos una transición de fase de primer orden.

1.2.2 Límite clásico de la función de partición

Cuando se overlapean las funciones de onda en las partículas hay que realizar las perturbaciones correspondientes. El límite clásico es la no permutación. La simetría hace surgir términos efectivos de interacción (atractivos o repulsivos)