Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

1.1 Introducción a la formulación de Hamilton

Un sistema mecánico está caracterizado por $\{q_i, \dot{q}_i\}$ las cuales dan un estado posible del sistema, y además dan toda la información dinámica del mismo.

Ahora se describirá al sistema en términos de $q_i, p_i \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ que tiene la característica de producir una simetría en la mecánica así definida (la mecánica hamiltoniana). La simetría es tal que son intercambiables q_i y p_i.

Para las ecuaciones de movimiento se parte del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

donde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ tiene la misma información que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Se puede hacer una analogía con la termodinámica, pues la primer ley se escribe

$$dE = dQ - dW = \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_V dS - \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_S dV,$$

lo cual implica que usando S, V tengo como "potencial" a la energía. Un estado termodinámico se define por dos variables; $(S,V), (T,P), (S,P), (T,V)$ que son cada par variables conjugadas.

Para definir estos potenciales se usan transformadas de Legendre. Así,

$$d(E - TS) = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT \equiv dA$$

siendo A la energía libre de Helmholtz.

$$d(E + PV) = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP \equiv dH$$

siendo H la entalpía.

En el caso del Hamiltoniano se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

la cual usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el hecho de que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ es el momento conjugado p_i se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

y como esta ecuación es el diferencial total del hamiltoniano se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$$

siendo la última igualdad una derivación vista oportunamente. Asimismo,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \sum_i \dot{q}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\sum_i \dot{p}_i$$

que son una mayor cantidad de ecuaciones pero de orden uno (comparando con las ecuaciones del sistema en el formalismo lagrangiano).

Con esto definimos un espacio de fases (p_i, q_i) de $2N$ dimensiones para estudiar el movimiento de un sistema de partículas. En el caso particular de una única partícula tendremos dos variables, (p, q).

1.1.1 La idea de Hamilton-Jacobi

La idea es que se busca una transformación canónica que me transporte a un hamiltoniano nuevo donde toda la solución son constantes. Es decir

$$H(q_i, p_i) \longrightarrow K(Q_i, P_i),$$

donde

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \qquad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i \tag{1.1}$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos (β_i, α_i) que son constantes. Aunque esto requiere conocer el problema (su solución). Esta transformación existe porque es ir atrás en el tiempo; la antievolución.

Supongamos una generatriz del tipo $F_2 = S$, llamada *función principal de Hamilton*

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces
$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \tag{1.2}$$

donde
$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

que es la condición necesaria para garantizar las condiciones (1.1). Esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE) al especializar H en las derivadas parciales

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

que son $n+1$ variables y $n+1$ constantes (una es trivial porque la ecuación (1.3) no depende de S sino de sus derivadas).

EJEMPLO 1.1 ejemplito

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

hay que resolverlo utilizando condiciones iniciales

$$H(q_i, p_i, t) \qquad p_i(t=0) \qquad q_i(t=0).$$

Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

Cuando la ecuación es separable se puede garantizar la solución de Hamilton-Jacobi. Si $H = H(q_i, \alpha_i)$, el hamiltoniano no depende del tiempo, entonces $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$ y en ese caso es $H = cte.$ (la energía). Se tiene

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, ..., q_N\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

o bien
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

por lo tanto es separable en el tiempo. Entonces

$$S = W(q_1, ..., q_N, \alpha_1, ..., \alpha_N) - Et,$$

donde W no depende del tiempo, que sólo aparece explícito en el segundo término. Luego

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

con lo cual

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_1, ..., q_N\right) = E$$

y tengo un nuevo hamiltoniano que no vale cero sino que vale E. Pase a *un lugar* donde los momentos son constantes y las coordenadas son cíclicas.

$$E = E(\alpha_1, ..., \alpha_N)$$

de manera que $\partial E/\partial \alpha_N = a$ y luego,

$$Q = at + Q_0 \qquad \text{las } Q \text{ son lineales}$$

Entonces,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q} = a \qquad \text{una constante}$$

y

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q}.$$

Remarquemos que si fuera $E = E(q)$ entonces $\partial E \; \partial q = \dot{\alpha}$ y no sería constante α, pero E no depende de Q_i.

EJEMPLO 1.2 Ejemplito de un grado de liberad

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \qquad S = W - Et$$

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + V(q),$$

de modo que

$$\frac{dW}{dq} = \pm\sqrt{2m[E - V(q)]},$$

$$W(q, E) = \pm \int \sqrt{2m[E - V(q)]} dq - Et$$

Para un grado de libertad siempre tendrá esta forma.

Para más grados de libertad deberíamos poder separar alguna coordenada en igual forma. Si q_1 no aparece, entonces la derivada del hamiltoniano H respecto a q_1 dice que será constante el $\dot{q}_1$, es decir

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = \alpha_2 \quad \to \quad H\left(\alpha_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_2, ..., q_N\right) = E.$$

Es más, si la S es totalmente separable de la forma

$$S(q_i, \alpha_0) = \sum_{i=1}^{N} W_i(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_N) - Et$$

lo cual, dicho sea de paso, requerirá N constantes de movimiento, entonces se puede resolver completamente.

[Lo que sigue es un refrito de lo anterior o viceversa; habría que consolidarlo] [...] y podemos poner $H = \alpha_1$. Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \longrightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener S.

Podemos ver que si $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$, y me quedo con $H = \alpha_1 \equiv K$ entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \longrightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \longrightarrow P_i = \alpha_i(ctes.).$$

La α_1 no puede depender de q_i pues si se tuviera $\partial\alpha_1/\partial q_i \neq 0$ no sería constante α_1 pues $\dot{q} \neq 0$.

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1.2) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_{i}^{N} W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

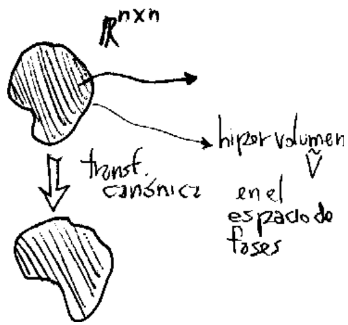


Figura 2.1

1.2 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen $\mathcal{V}$ en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 ... dq_n dp_1 dp_2 ... dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

que en otras coordenadas es

$$\int dQ_1 dQ_2 ... dQ_n dP_1 dP_2 ... dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}.$$

El jacobiano de la transformación, que permite convertir una integral en la otra, es

$$\frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)}$$

y puede verse que vale 1. En efecto, como vale una especie de *chain rule*

$$\frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)} = \frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{q_i=cte}}$$

El jacobiano en notación matricial es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & .. & .. & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces se puede ver que para el numerador es

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)$$

mientras que para el denominador,

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que $J = 1$ y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma (se deforma la cáscara pero el volumen se conserva).

Usando $|M| = |M^t|$ entonces se ve que vale uno el cociente de los jacobianos. Siempre y cuando sea la transformación canónica.

Son invariantes canónicos

$$\int\int\sum_{i=1}^{N} dq_i dp_i \qquad\qquad \int\int\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} dq_i dp_i dq_j dp_j$$

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dpdq \qquad A_{P,Q} = \int dPdQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1.$$

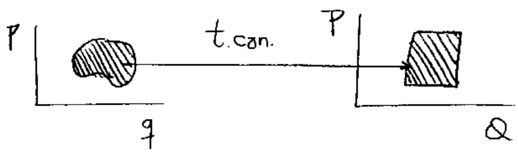


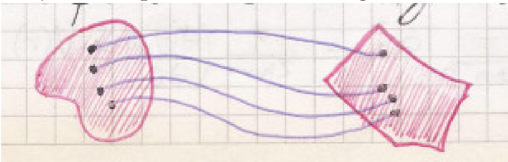
Figura 2.2

Notamos que el jacobiano en una transformación canónica para un sistema de un grado de libertad es el corchete de Poisson de Q, P, y además da uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

En la transformación, el número de puntos en p, q es el mismo en PQ pero la forma que adopta varía. Es como un líquido incompresible.

La transformación canónica cumple que, se parte de una punto a otro por una trayectoria que no corta con ninguna otra.



No confundir espacio de fases con espacio de configuración.

1.3 Variables ángulo-acción

Consideremos una transformación canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

la cual requiere

- Conservativos $S = W - Et$
- Totalmente separables $W = \sum_i^N W_i(q_1, \alpha_1, ..., \alpha_n)$
- Problemas periódicos

El movimiento periódico es de rotación o libración,

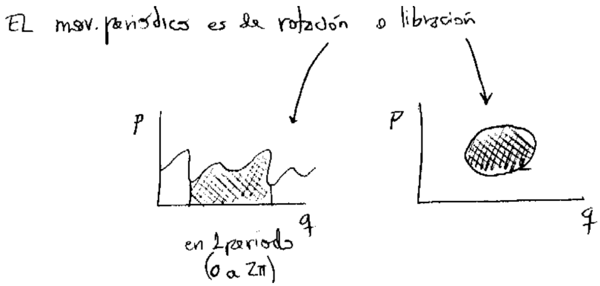


Figura 3.3

La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

$$S = \sum_i^N W_i(q_i, J_i) - Et$$

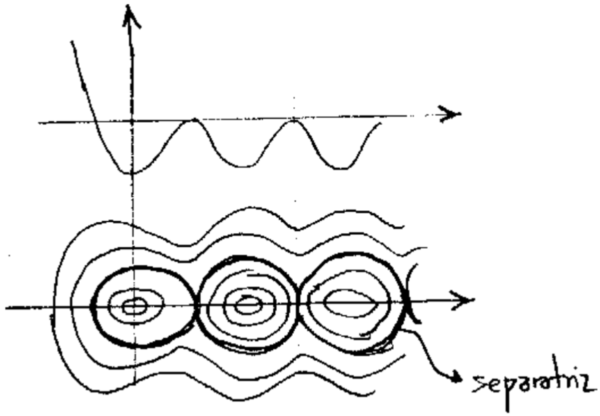


Figura 3.4

Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeñas perturbaciones.

La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\int_{ciclo} p_i(q_1, \alpha_1, ..., \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

son constantes y a su vez los α_i son constantes de separación. Asimismo $\alpha_i = \alpha_i(J_1, ..., J_n)$. La transformación S es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo $p_i = p_i(q_1, J_1, ..., J_n)$. El nuevo hamiltoniano es $E = E(J_1, ..., J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i$$

de manera que tenemos

$$\theta_i = \omega t + \theta_{0_i} \qquad \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i)$$

y entonces despejamos las q_i desde

$$\theta_i(q_i, J_i) = \omega t + \theta_{0_i}.$$

Las condiciones iniciales (q_i, J_i) se introducen en

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, J_1, ..., J_n)$$

y obtengo las $J_1, ..., J_n$ constantes.

1.4 Transformación canónica infinitesimal

Difieren de la identidad en un infinitésimo

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i P_i$$

es la identidad

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i$$

y donde considero

$$F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n) \qquad \text{con } \epsilon \ll 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \longrightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \longrightarrow q_i = Q_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

donde $\partial G/\partial P_i \approx \partial G/\partial p_i$ diferirán en un orden ϵ^2 el cual descarto. Entonces

$$\delta p_\ell = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_\ell} \qquad \delta q_\ell = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_\ell}.$$

Si considero H en lugar de G y $\epsilon = \delta t$ entonces

$$\frac{\delta p_\ell}{\delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \qquad \frac{\delta q_\ell}{\delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

de tal manera que

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \qquad \dot{q}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

y donde se ve que el H genera la transformación evolución temporal. Por otra parte, se puede ver cómo varía una cierta cantidad A ante la transformación canónica.

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

y

$$\delta A = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \epsilon [A, H] \longrightarrow \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

entonces las constantes de movimiento generan transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante al hamiltoniano H. Si

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Longrightarrow [A, H] = 0$$

Consideremos una rotación infinitesimal. Una rotación en torno al eje z

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \delta\alpha y_i \\ y_i' = y_i + \delta\alpha x_i \\ z_i' = z_i \end{cases}$$

que implica

$$\delta x_i = -\delta\alpha y_i \qquad \delta y_i = \delta\alpha x_i \qquad \delta z_i = 0$$

Las constantes de movimiento están generadas por simetrías (Noether).

Luego,

$$G = \sum_i (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}) = \ell_z$$

y una rotación en torno a $\hat{n}$ es

$$\delta\alpha[A, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = \delta A,$$

si A es un vector $\boldsymbol{V}$ entonces

$$\delta\alpha[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = \delta \boldsymbol{V} = \delta\alpha \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{V},$$

de modo que

$$[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{V}$$

es una relación vectorial; es decir que valen

$$[V_x, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}] = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{V})_x$$

y lo mismo para los componentes y, z. Además

$$[L_x, L_z] = (\hat{z} \times \boldsymbol{L})_z = -L_y$$

$$[L_y, L_z] = (\hat{z} \times \boldsymbol{L})_y = L_x$$
$$[L_x, L_y] = (\hat{y} \times \boldsymbol{L})_x = L_z$$

o bien

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si se repite índice} \\ 1 & \text{si es permutación cíclica} \\ -1 & \text{si es permutación anticíclica} \end{cases}$$

Esto nos dice que no podemos elegir como momentos estas constantes de movimiento puesto que el corchete de Poisson entre ellas es nulo. No va a existir transformación canónica donde $p_1 = L_x, p_2 = L_y, p_3 = Lz$ pues su corchete de Poisson entre ellas no se anula.

1.5 Volviendo a Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, ..., q_n, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.1}$$

y se pasaba de coordenadas q, p a constantes α, β.

Lo único que se puede asegurar son condiciones para hallar solución a (5.1) pero no resolverla. La condición es que (5.1) sea separable, que existan tantas constantes de movmiento como grados de libertad. Si el hamiltoniano tiene alguna coordenada cíclica o no depende del tiempo entonces se podría separar, pero en general no es el caso.

Podría suceder que

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_N)$$

y entonces no podré llegar a una solución que se compone de problemas independientes en una variable.

En fuerzas centrales tenemos un ejemplo. Escribamos

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

y

$$W = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\varphi(\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

donde

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2 + V(r) = E \equiv \alpha_1$$

y siendo que E es una constante, la denominamos α_1.

Luego, como en

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + V(r) - \alpha_1\right] 2mr^2\sin^2\theta = -\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2$$

el miembro izquierdo sólo depende de r, θ y el derecho de φ tienen que ser una constante ambos miembros.

Asimismo,

$$\frac{dW_\varphi}{d\varphi} = \alpha_2,$$

y $W_\varphi = \alpha_2\varphi$ porque φ es cíclica en fuerzas centrales. Es más, α_s es el momento angular en z (L_z, que es constante). Entonces

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{\alpha_2^2}{\sin^2\theta} + \left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right] + V(r) = \alpha_1,$$

donde el corchete será α_3^2. Ahora puedo separar otra vez y surge α_3^2 que será el $|\boldsymbol{L}|^2$ total. Las α_i son constantes de separación. Si hubiese escrito con $\theta = \pi/2$ entonces resultaba más detectable.

$$W(\theta) = \int \sqrt{\left(\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2\theta}\right)}\, d\theta$$

y luego

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\,\alpha_3^2 + V(r) = \alpha_1$$

al solucionar lo anterior

$$W_r = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_2^2/(2mr^2))}\, dr$$

y el nuevo hamiltoniano es $K = \alpha_1$. Entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0 \qquad \text{que lleva a} \qquad \beta_2 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_3} = 0 \qquad \text{que lleva a} \qquad \beta_3 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1 \qquad \text{que lleva a} \qquad \beta_2 = t + \beta_{10}$$

Como

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_1}$$

se tiene

$$\beta_1 = \int \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_2^2/(2mr^2))}} dr,$$

que es igual a la ecuación ya calculada en el caso de fuerzas centrales.

La forma de separar también funciona si

$$V = V(r) + \frac{a(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{b(\theta)}{r^2},$$

es decir, si el V tiene una forma como la de arriba en coordenadas esféricas.

Consideremos unas coordenadas ξ, η, φ que se relacionan por

$$\rho = \xi\eta \qquad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \qquad \varphi = \varphi$$

donde ρ, z, φ son las polares cilíndricas usuales. Un potencial de la forma

$$\frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

en coordenadas parabólicas puede separarse.

En coordenadas elípticas

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \qquad z = \sigma\xi\eta \qquad \varphi = \varphi$$

un potencial de la forma

$$V = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2}$$

puede separarse.

En cartesianas es

$$V(\boldsymbol{x}) = A(x) + B(y) + C(z)$$

condición suficiente de verificación para Hamilton-Jacobi. Si el potencial es separable entonces tengo tantas coordenadas como constantes de movimiento, entonces si tengo la solución [?].

1.5.1 Comentario Schrödinger

La ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{x},t)+V(r)\Psi(\boldsymbol{x},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\boldsymbol{x},t).$$

Si ensayamos como solución

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=b(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{e}^{iA(\boldsymbol{x},t)/\hbar},$$

se tendrá

$$bV(r)+\frac{b}{2m}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2\right]=-b\frac{\partial A}{\partial t}$$

o bien

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2\right]+V(r)+\frac{\partial A}{\partial t}=0$$

Ecuación de Hamilton-Jacobi (con igualar el orden cero)

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{b}{2m}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b^2\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\frac{\partial b^2}{\partial t}=0$$

Esto lleva a

$$\nabla\left(\rho\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

que es una ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad. De algún lado sacamos, por la situación estacionaria,

$$-\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)b,$$

que equivale a

$$\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^{-1}$$

o bien a

$$\frac{d\log b}{dx}=\frac{d}{dx}\log\left(\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^{-1/2}\right)$$

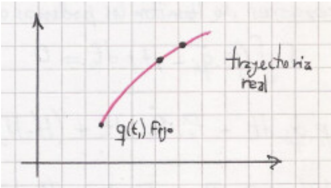
de modo que $b=1/\sqrt{p}$ siendo el p clásico.

1.5.2 Hamilton-Jacobi particular

Esto apareció en la práctica. Consideramos

$$S = \int \mathcal{L} dt,$$

donde $S = S(q_0, t)$. Pictóricamente



El diferencial de la integral resulta, como hemos visto en incontables ocasiones para Euler-Lagrange, en

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt.$$

Luego, $\delta S = p_i \delta q_i$ y entonces $p_i = dS/dq_i$. Como $\mathcal{L} = dS/dt$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \mathcal{L} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i$$

A partir de esta última, el diferencial $d\mathcal{L}$ es

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + d(p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

de manera que

$$d(\mathcal{L} - p_i \dot{q}_i) = p_i dq_i - q_i dp_i$$

lo que nos lleva a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Entonces

$$S = \int (p_i \dot{q}_i - H) \, dt,$$

y pidiendo $\delta S = 0$ se tiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{dH}{dp_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right] dt$$

o bien

$$p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \left[\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + (\frac{dH}{dp_i} - \dot{q}_i)\delta p_i \right]$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton las podemos obtener con

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \qquad \delta \int (P_i \dot{Q}_i - H') dt = 0$$

y

$$dF_1 = p_i \dot{q}_i dt - P_i \dot{Q}_i dt + (H' - H)dt$$

$$dF(qq_i, Q_i, t) = P_i dq_i - P_i dQ_i + (H' - H)dt$$

y de la *lectura* de

$$dF_1 =$$

se identifican

$$\frac{dF_1}{dq_i} = p_i \qquad \frac{dF_1}{dP_i} = -P_i.$$

De modo ídem se tiene

$$d(F_1 + P_i Q_i) = P_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

$(F_2(q_i, P_i, t))$ lo que lleva a

$$\frac{dF_2}{dq_i} = p_i \qquad \frac{dF_2}{dP_i} = Q_i \qquad \frac{dF_2}{dt} = H' - H.$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0$$

pero la derivada parcial en el argumento es p_i. La transformación $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i) = (\beta_i, \alpha_i)$ permite la escritura

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \alpha_i, t) = 0,$$

y $S = S'(\alpha_i) + A$ donde los α_i son n variables (dado que S aparece sólo derivada).

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

y entonces $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$. Ahora como los momentos y las coordenadas son constantes el problema es trivial pero la transformación es muy jodida.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \qquad\qquad S = S(q_i, t)$$

en este caso $\frac{dS}{dt} = -E$ y se tiene

$$S = W\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - Et.$$

1.6 Potencial electromagnético

Arranquemos por los momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{pero } si V \neq V(q) \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces

$$U(q, \dot{q}) = e\phi - e/c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V} \longrightarrow \mathcal{L} = T - e\phi + e/c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = mV_x - (e/c)A_x.$$

Hacemos un cambio de gauge, en un potencial generalizado

$$U = e\Phi(\boldsymbol{x}, t) - (q/c)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{V}(t)$$

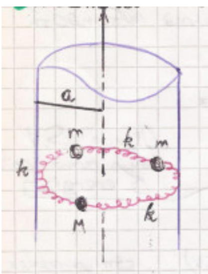
y el cambio de gauge es

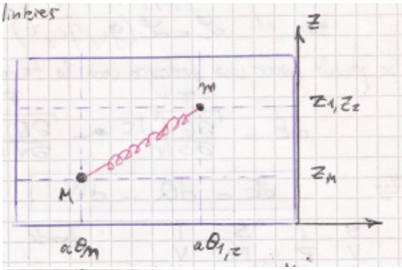
$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla f,$$

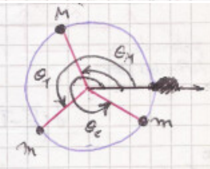
que no altera las ecuaciones de movimiento.

EJEMPLO 6.1 Problema de parcial

El problema cuya geometría se ilustra a continuación. Se consideran $m_1 = m_2 = m, m_3 = M$ y k *slinkies.*







Es claramente un problema de seis grados de libertad, $\theta_M, \theta_1, \theta_2, Z_M, Z_1, Z_2$
Podemos escribir la energía cinética y el potencial como

$$T = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}_M^2 + \frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}M\dot{Z}_M^2 + \frac{1}{2}m(\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2}\left[a^2(\theta_2 - \theta_M) + (Z_2 - Z_M)^2\right] + \frac{1}{2}\left[a^2(\theta_1 - \theta_2) + (Z_1 - Z_2)^2\right] + \frac{1}{2}\left[a^2(\theta_1 - \theta_M) + (Z_1 - Z_M)^2\right]$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

Como ya está en forma cuadrática no es necesario aproximar. Si tenemos expresiones lineales habría que desarrollar a orden dos, por ejemplo $\cos\theta \sim 1 - \theta^2/2$ y me quedo con los términos cuadráticos.

Definimos coordenadas referidas al equilibrio. Nos paramos en el equilibrio y oscilamos en torno a él.

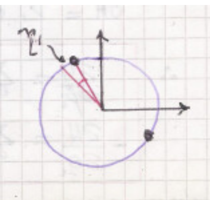
$$\eta_1 = (\theta_M - \theta_{\text{eq}}) \qquad \eta_2 = (\theta_M - \theta_{1\text{eq}})a \qquad \eta_3 = (\theta_2 - \theta_{2\text{eq}})a$$

$$\eta_4 = Z_M - Z_{M\text{eq}} \qquad \eta_5 = Z_1 - Z_{1\text{eq}} \qquad \eta_6 = Z_2 - Z_{2\text{eq}}$$

con sus correspondientes velocidades

$$\dot{\eta}_1 = a\dot{\theta}_M \qquad \dot{\eta}_2 = a\dot{\theta}_1 \qquad \dot{\eta}_3 = a\dot{\theta}_2$$

$$\dot{\eta}_4 = \dot{Z}_M \qquad \dot{\eta}_5 = \dot{Z}_1 \qquad \dot{\eta}_6 = \dot{Z}_2$$



El lagrangiano será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}_4^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_5^2 + \dot{\eta}_6^2)$$
$$-\frac{k}{2}\left[(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\eta_5 - \eta_4)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\eta_6 - \eta_4)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_5 - \eta_6)^2\right]$$

Habria que identificar los coeficientes para armar T, V en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{eta}^{\dagger}\mathbb{T}\dot{eta} - \frac{1}{2}\bar{eta}^{\dagger}\mathbb{V}\bar{eta}$$

Como ejemplo, desarrollemos algún término

$$k(\eta_1-\eta_2)^2 = k\eta_1\eta_2 - 2k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2 = k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2$$

Las matrices resultan

$$V = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k & 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & -k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

y como se ve ambas resultan en bloques de Jordan y son cada bloque igual. El a incluido en la coordenada hace que se obtenga esa forma simétrica. En

$$\det(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T})$$

se reduce a calcular el determinante de la submatriz de 3×3,

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 M & -k & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix}$$

que resulta en la ecuación

$$\omega^2\left(\omega^4 - \omega^2\left[\frac{2k}{M}+\frac{2k}{M}\right] + \left[\frac{6k^2}{mM}+\frac{3k^2}{m^2}\right]\right) = 0,$$

que da

$$\omega_1^2 = 0 \qquad \omega_2^2 = \frac{2k}{M}+\frac{k}{m} \qquad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$$

Para $\omega^2 = 0$ la ecuación $(V-\omega^2 T)A^1 = 0$ se verifica para

$$A^1 = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

cuya normalización se ajusta con $A^{\dagger^1}TA^1 = 1$ o bien

$$\alpha^2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

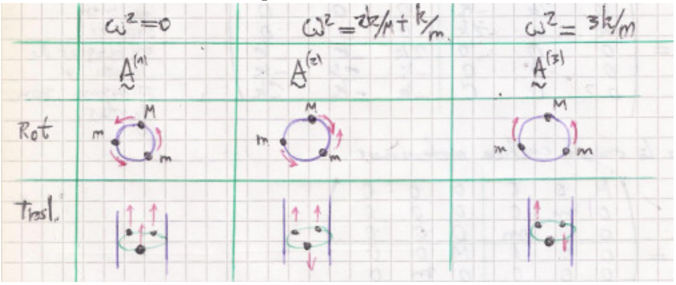
siendo el valor de α dado por

$$\alpha^2 = \frac{1}{2m+M} \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}.$$

Los autovectores son

$$A^1 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad A^2 = \frac{1}{\sqrt{4m^2/M+2m}}\begin{pmatrix}-2m/M\\1\\1\end{pmatrix} \qquad A^3 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Los movimientos están dados por



Ahora hay que completar hasta la sexta dimensión

$$\bar{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \bar{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \bar{\eta}_5 = \frac{1}{\sqrt{2m+4m^2/M}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2m/M0\\1\\1\end{pmatrix}$$

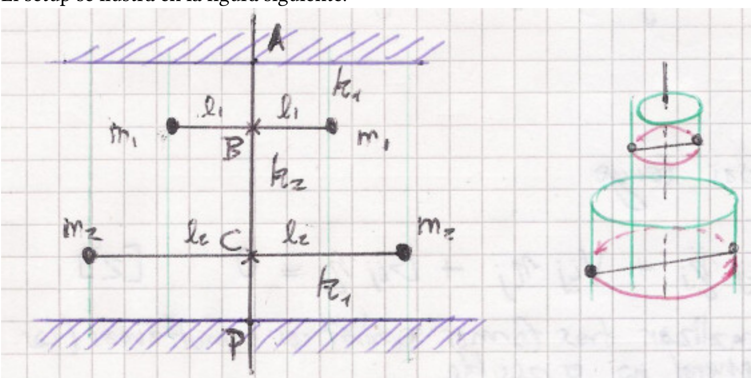
$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m+4m^2/M}}\begin{pmatrix}-2m/M\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \bar{\eta}_4 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \bar{\eta}_6 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Luego, para desacoplar la solución habría que plantear la matriz

$$\mathbb{B} = [\eta_1^\dagger \ldots \eta_i^\dagger]$$

EJEMPLO 6.2 Problema 12

El setup se ilustra en la figura siguiente.



El torque

$$\tau = -k\theta$$

lo suponemos un potencial $V = 1/2k\theta^2$, donde k tiene unidades de energía. Las barras solo rotan de manera que

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2)$$

donde estamos pensando como dos partículas. En cambio, pensándolo como una barra con momento de inercia es

$$T = \frac{1}{2}I\Omega^2$$

Entonces,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(2m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(2m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 \qquad V_{12} = \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 \qquad V_2 = \frac{1}{2}k_1\theta_2^2$$

Definiendo $\eta_i = \theta_i - \theta_{\text{eq}}$ que implican $\dot{\eta}_i = \dot{\theta}_i$ $(i = 1, 2)$ se puede escribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \ell_1^2 m_1\dot{\eta}_1^2 + \ell_2^2 m_2\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\eta_1^2 - \frac{1}{2}k_2\eta_2^2 - \frac{1}{2}k_2(\eta_2 - \eta_1)^2$$

de manera que

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\ell_1^2 m_1 & 0 \\ 0 & 2\ell_2^2 m_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

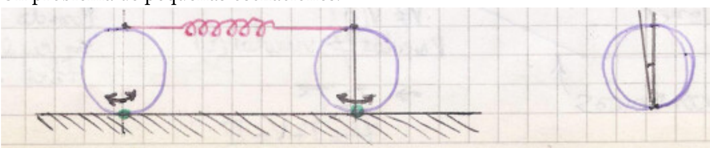
Faltaría entonces

$$\det\{\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}\} = 0$$

y los autovectores A^1, A^2.

EJEMPLO 6.3 Problema 8

Un problema de pequeñas oscilaciones.



En este ejemplo hay que suponer que el lagrangiano es ya de entrada de pequeñas oscilaciones.

EJEMPLO 6.4 Problema 1 P96

El lagrangiano para el *setup* es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k_x}{2}x^2 - \frac{k_y}{2}y^2 - \frac{k_z}{2}z^2,$$

donde los momentos son

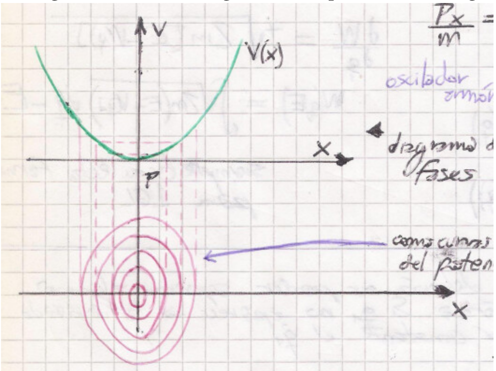
$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i} = m\dot{x}_i,$$

para cada una de las coordenadas. El hamiltoniano es $h = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$, que explícitamente

$$h = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2$$

de donde leemos
$$\frac{\partial H}{\partial x} = k_x x = -\dot{p}_x \qquad \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x},$$
que conduce, derivando una vez más, a $\ddot{x} = \dot{p}_x/m$ y $\ddot{x} = -k_x/m$, que es la ecuación del oscilador armónico en x.

El diagrama de fases es algo como lo que muestra la figura siguiente



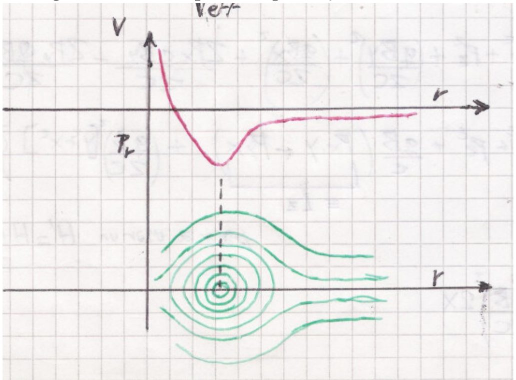
donde bajo el primer gráfico aparecen las curvas de nivel del potencial.

Para fuerza central resulta $U(r)$ en esféricas y el lagrangiano es
$$\mathcal{L} =$$
Calculando el hamiltoniano según la definición resulta, después de algo de álgebra, en
$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + U(r).$$
El hamiltoniano es constantes puesto que el lagrangiano no depende del tiempo y p_φ, por la ciclicidad de φ es constante.

Si espedificamos como potencial el de Kepler, vemos que es separable en θ, r puesto que se tiene
$$f(\theta, \varphi) = g(r)$$
de modo que cada una de estas funciones es una constante.

La conservación del momento angular en términos del hamiltoniano resulta en
$$\frac{d}{dt}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) = 2p_\theta\dot{p}_\theta + \frac{2p_\varphi^2\dot{p}_\varphi^2}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta\dot{\theta}p_\varphi^2}{\sin^3\theta}$$
y entonces
$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}\left(\frac{-1}{2mr^2}\frac{-4p_\varphi^2\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\right),$$
y eso lleva a
$$\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) = cte$$
EL hamiltoniano tiene un potencial efectivo dado por los dos últimos términos de la derecha,
$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}L^2 + U(r)$$

El diagrama de fases aparece aquí abajo.



EJEMPLO 6.5 Problema 8 P97

Consideramos un potencial generalizado

$$U = q\varphi - \frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A},$$

donde $\boldsymbol{A} = 1/2\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{x}$ y asimismo $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ siendo el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

Si el campo está en el eje z, es decir $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$ se tiene $\boldsymbol{A} = 1/2(-By\hat{x}+Bx\hat{y})$, lo cual conduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{q}{c}\frac{B}{2}(-\dot{x}y+\dot{y}x)$$

y los momentos son

$$P_x = m\dot{x} - \frac{qB}{2c}y \qquad P_y = m\dot{y} + \frac{qB}{2c}x \qquad P_z = m\dot{z}$$

de manera que z es cíclica. Luego, calculando el hamiltoniano a través de la definición es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),$$

o bien (usando las equivalencias anteriores)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[p_x^2+p_y^2+p_z^2+\frac{qB}{c}\left(p_xy-p_yx\right)+\left(\frac{qB}{2c}\right)^2(x^2+y^2)\right],$$

y el paréntesis dentro del corchete es el L_z. Paso a usar un hamiltoniano $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + cte$.

$$\dot{x} = \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dot{p_x} = -\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial x} = \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{2c}\right)^2 2x$$

Obtenemos para la ecuación de Newton,

$$\ddot{x} - \frac{q^2B^2}{4c^2m^2}x = 0$$

mientras que para la coordenada y obtenemos una ecuación similar. Entonces

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

con $\omega = qB/(2cm)$. Luego

$$x = \frac{1}{\sqrt{}}(\sqrt{2p}+) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{}}(\sqrt{2p}+)$$

y sus correspondienes momentos,

$$p_x = \frac{\sqrt{}}{2}() \qquad p_y = \frac{\sqrt{}}{2}()$$

Deberíamos probar que es una transformación canónica chequeando que se verifican

$$[x,p_x],[y,p_y] = cte. \qquad [x,y] = [p_x,p_y] = 0$$

$$[x,p_x] = sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial p_x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial p_i}$$

y las derivadas

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1) \qquad \frac{\partial x}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = \frac{1}{\sqrt{2mp_1}}(\sin q_1) \qquad \frac{\partial x}{\partial p_2} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial q_1} = -\frac{\sqrt{2mp_1}}{2}(\sin q_1) \qquad \frac{\partial p_x}{\partial q_2} = -\frac{\sqrt{m\omega}}{2} \qquad \frac{\partial p_x}{\partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{}}{\sqrt{2p_1}}$$

$$[x,p_x] = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\sqrt{2p_1}\cos^2 q_1 + \left(\frac{\sqrt{2mp_1}}{2}\sin^2 q_1\right) + \frac{1}{2}$$

El hamiltoniano luce

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{m^2\omega^2}{4}[x^2+y^2]\right)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{2}p_1 + \frac{\omega}{4}p_2^2 + \frac{\omega}{4}q_2^2,$$

y se ve que q_1 resultó cíclica. Luego p_1 es una constante y

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = \frac{\omega}{2}q_2.$$

Resolviendo se llega a

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0,$$

de manera que q_2 tiene comportamiento oscilatorio. Pero

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{\omega}{2} \qquad q_1 = -\frac{\omega}{2}t.$$

EJEMPLO 6.6 Hamilton Jacobi para fuerza central

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\varphi^2 + V(r), \qquad S = S' - Et$$

entonces se puede escribir

$$E - \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + V(r) \right] = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 .$$

Para esféricas necesitaré:

$$V = V(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Si reemplazo en el hamiltoniano a la forma separable

$$W(r,\theta,\varphi) = W'(r,\theta) + S_\varphi(\varphi),$$

de modo que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + C(\varphi) = \alpha\varphi$$

que ya se integra directamente. Luego en forma ídem es

$$W'(r,\theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta).$$

EJEMPLO 6.7 Otro ejemplo de potencial

$$V = \frac{\alpha}{r} - F(z) \qquad (r \text{ esféricos}, z \text{ cilíndricas })$$

donde (ξ, η, φ) coordenadas parabólicas. Verifican

$$\frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad \varphi \in \{0, 2\pi\}, 0 < \xi, \eta < \infty$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 + \xi\eta},$$

de modo que $r = 1/2(\xi + \eta)$. Consideremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - V(\rho, \varphi, z)$$

que lleva a

$$\dot\rho^2 + \dot z^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta} \right)$$