Capítulo 1

Conceptos fundamentales de electromagnetismo

La idea del curso es resolver las ecuaciones que describen matemáticamente el comportamiento clásico de los campos electromagnéticos, es decir las ecuaciones de Maxwell, en diversas situaciones. Luego, la conexión con la fuerza que experimentarán las partículas cargadas por la acción de dichos campos vendrá descripta por la fuerza de Lorentz.

Panorámicamente, lo dicho corresponde a trabajar con el set de ecuaciones

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_\ell \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_\ell + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

las cuales permiten determinar a los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ a partir de la densidad de carga ρ y de corriente $\boldsymbol{J}$ (notemos que también los campos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ influyen en el comportamiento de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$). Finalmente, la fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right).$$

Crudamente podemos decir que de esto trata el electromagnetismo clásico. Las ecuaciones de Maxwell son lineales, de modo que vale la superposición aunque los campos tienen en sí matemáticamente naturaleza diferente. Los campo $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ don ejemplos de vectores polares (aquellos que tienen bien definido el sentido, como la fuerza, la posición y la velocidad) mientras que $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ son ejemplos de vectores axiales, que por el contrario tienen su sentido definido por una convención, como por ejemplo las velocidades angulares.

De acuerdo con ello, el carácter de vector axial o polar tiene consecuencias en la transformación de los mismos. Las transformaciones que se considerarán serán rotaciones, reflexiones espaciales y reflexiones temporales. Las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes ante estas transformaciones.

Si multiplico vectorialmente dos vectores polares obtengo un vector axial.

El resto del capítulo recorrerá lo que es la construcción usual del electromagnetismo; primeramente considerar situaciones estáticas, independientes del tiempo, lo cual hace que aparezcan como fenómenos independientes la electricidad y el magnetismo y luego repasar someramente algunas propiedades matemáticas útiles para el formalismo.

1.1 Electrostática

La ley de Coulomb establece que

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3}$$

es la fuerza sobre la partícula en $\boldsymbol{x}_1$ debido a la partícula en $\boldsymbol{x}_1$. La constante k está para ajustar las unidades. En sistema gaussiano es $k = 1$ y adimensional. La Figura 1.1 ilustra la situación para el caso en que ambas cargas tienen igual signo; en ese caso la fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ tiene la dirección del vector $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$: apunta desde la fuente hacia el punto donde se evalúa.

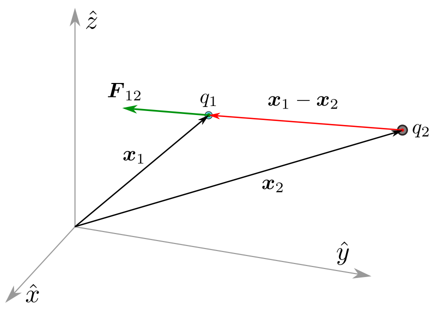

Figura 1.1 Fuerza sobre la carga q_1 debida a la carga q_2.

Cuando la carga q_1 es suficientemente pequeña como para no perturbar a la carga q_2 que origina la fuerza, se puede utilizar la ley de Coulomb para definir el campo eléctrico según

$$\boldsymbol{E}_{12}(\boldsymbol{x}_1) \equiv \lim_{q_1 \to 0} \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{q_1}.$$

Para una distribución discreta de N cargas q_i y tomando $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}$ se tiene

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|^3}.$$

En el límite en que las cargas están lo suficientemente próximas como para considerar que forman se tiene una distribución de carga de volumen $\rho(\boldsymbol{x})$, la expresión del campo adopta la forma de una integral

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int_{V'} \rho(\boldsymbol{x}') \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, dV'$$

donde V' es el volumen de integración. En general $\boldsymbol{x}$ es el llamdo punto campo y $\boldsymbol{x}'$ punto fuente.

1.1.1 Conservación de la carga

Aceptaremos el principio de conservación de la carga; la carga eléctrica no se genera ni se destruye. Considerando una región Ω en el espacio (cuya frontera está fija) la carga total encerrada en la misma es

$$Q(t) = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}', t) \, d\Omega,$$

siendo su variación temporal

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} \, d\Omega,$$

donde la derivada total se transforma en una derivada parcial debido a que el volumen es fijo.

Acá creo que la derivada debería ser la parcial desde el vamos. Check!

La conservación de la carga nos dice que como la carga no aparece ni desaparece mágicamente, entonces la variación de la carga contenida en Ω en cualquier instante de tiempo se debe al flujo neto de carga de la misma; es decir a la diferencia entre la que abandona la región y aquella que entra. Como ilustra esquemáticamente la Figura 1.2, la variación de carga ΔQ en un dado Δt corresponde a la diferencia entre las entrantes y las salientes.

La forma que tiene ese flujo se construye a partir del análisis ilustrado en el inserto de la figura. Allí se ve un elemento pequeño $\delta\Omega$ que linda con la frontera de la región. Este elemento δV es lo suficientemente pequeño como para que en su interior el campo de velocidad de las cargas sea constante. La *caja* δV tiene un volumen que se puede expresar $\ell\delta S$ (longitud de la caja por área de la base). La longitud ℓ se elige como $\ell = v_n \delta t$, donde v_n es la componente de la velocidad normal a la superficie. Así elegido, el volumen $\delta V = v_n \delta t \delta S$ representa el volumen que pasaría a través de δS en el tiempo δt. En efecto, la partícula más lejana del borde δS que está a distancia ℓ recorrerá en δt justamente esa distancia (la velocidad v es constante para todo el elemento). Si la velocidad estuviese orientada hacia adentro, entonces tendríamos un bloque similar de carga entrante, y el razonamiento es el mismo.

La cantidad de carga δQ que atraviesa el área δS será entonces

$$\delta Q = \rho \delta V = \rho v_n \delta S \delta t = \rho \boldsymbol{v} \cdot (\hat{n} \delta S) \delta t$$

donde se ha expandido la velocidad normal. Entonces la variación de la carga en el elemento es

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \rho \boldsymbol{v} \cdot (\hat{n} \delta S).$$

Si el producto escalar entre la velocidad y la normal es positivo entonces esto significa que la carga abandona la superficie mientras que el caso contrario implica carga entrando en la misma. Entonces debemos ajustar la expresión anterior con un signo menos. Entonces, pasando al continuo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\int_{\partial \Omega} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

donde $\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}$ es el vector densidad de corriente y $d\boldsymbol{S} = \hat{n} dS$ es el diferencial de superficie vectorial.

Entonces, juntando las dos expresiones para la carga tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} \, d\Omega = -\int_{\partial \Omega} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S},$$

y aplicando el teorema de la divergencia en el miembro derecho

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} \, d\Omega = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \, d\Omega,$$

o bien

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \right] \, d\Omega = 0,$$

y como esto vale para cualquier volumen Ω se sigue que el corchete debe ser nulo, de modo que se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0,$$

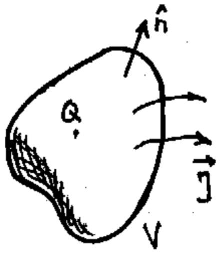

Figura 1.2

que es la ecuación de continuidad de la carga.

Si es $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0$ no se acumula carga; las líneas de $\boldsymbol{J}$ no tienen principio ni fin. Los problemas de corrientes estacionarias cumplen esta condición. Esta condición en la ecuación de continuidad nos dice que la distribución de carga no varía con el tiempo.

Si fuera $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ esto significa que las líneas de $\boldsymbol{J}$ no tienen principio ni fin.Check!

1.2 Interacción magnética

Cuando se da $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ hablamos de una corriente estacionaria (no hay acumulación de carga en ninguna parte). Las corrientes estacionarias producen efectos magnéticos dados por la ley de Biot-Savart

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int_\Gamma \frac{I d\ell' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}$$

que es válida para un circuito Γ, que es una curva que se recorre en sentido CCW. En el caso de un volumen la expresión es

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} dV'$$

mientras que la fuerza sobre un circuito Γ es

$$F = \frac{1}{c} \int_\Gamma I d\ell \times \boldsymbol{B}$$

y sobre un volumen

$$F = \frac{1}{c} \int_V \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} dV$$

La transformación entre estas integrales puede hacerse merced al siguiente razonamiento,

$$I d\ell \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} d\ell \times \boldsymbol{B} = \cos(\theta) dS \boldsymbol{J} d\ell \times \boldsymbol{B} =$$

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \cos(\theta) dS d\ell = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} \cdot d\ell = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} dV$$

1.2.1 Fuerza de un circuito sobre otro

La fuerza de un circuito 2 sobre otro circuito 1 puede calcularse con un poco de paciencia como sigue

$$F_{12} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_1} I_1 d\ell_1 \times \left\{ \frac{1}{c} \int_{\Gamma_2} \frac{I_2 d\ell_2 \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} \right\}$$

$$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} d\ell_1 \times \left\{ \frac{d\ell_2 \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} \right\}$$

$$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} d\ell_2 \left\{ \frac{d\ell_1 \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} \right\} - \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} \{ d\ell_1 \cdot d\ell_2 \}$$

donde el primer término se comprueba nulo si se reescribe utilizando que

$$\frac{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} = \nabla_{\boldsymbol{x}_2} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|} = -\nabla_{\boldsymbol{x}_1} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}$$

de manera que entonces

$$-\int_{\Gamma_2} d\ell_2 \int_{\Gamma_1} d\ell_1 \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}_1} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}$$

donde se ve que es nula la última integral dado que

$$\int_{\Gamma_1} d\ell_1 \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}_1} = 0.$$

Entonces, se tiene

$$F_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} (d\ell_1 \cdot d\ell_2)$$

que vale lo mismo si intercambiamos Γ_1 con Γ_2 en la integración. Podemos decir que con corrientes estacionarias vale el principio de acción y reacción: las fuerzas son iguales y de sentido opuesto.

1.3 Teorema de Helmholtz

Nos dice que un campo vectorial está completamente determinado por su divergencia y su rotor. Por ejemplo, para un campo eléctrico

$$\boldsymbol{E} = \int_{V'} \rho \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} dV' = -\int_{V'} \rho \nabla_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} dV' = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \int_{V'} \frac{\rho}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} dV' =$$

y esta última es la integral de Poisson

$$\boldsymbol{E} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \phi(\boldsymbol{x}).$$

Entonces $\boldsymbol{E}$ es un gradiente y por ello

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

de manera que $\boldsymbol{E}$ es conservativo, cumple $\int \boldsymbol{E} \cdot d\ell = 0$ o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{E}$ es irrotacional. Hemos hecho la construcción de un potencial electrostático.

1.4 Ley de Gauss

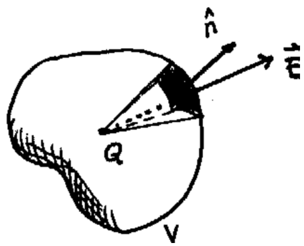

Figura 4.3

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{n} = q \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

y el ángulo sólido es

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{n} dS = q \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{n} dS = q d\Omega \qquad \longrightarrow \qquad \int_{S \equiv \partial V} \boldsymbol{E} \cdot \hat{n} \, dS = q \int_S d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{carga exterior} \\ 4\pi & \text{carga interior} \end{cases}$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi \sum_i q_i$$

La ley de Gauss es

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi Q_n$$

donde Q_n es la carga neta dentro de la superficie S. Al continuo pasa como

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi \int_V \rho \, dV$$

de manera que

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \, dV = \int_V 4\pi\rho \, dV$$

y entonces

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

Por otro lado si $\boldsymbol{E}$ es el gradiente de un potencial ϕ se tiene

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{\nabla}\phi) = -\nabla^2\phi = 4\pi\rho$$

y se desprenden las ecuaciones de Poisson,

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

y de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0$$

que es el caso particular de la anterior con cargas nulas.

La solución de la ecuación no homogénea es suma de una solución del homogéneo más una solución particular. La carga está relacionada a la solución particular.

1.4.1 Gauges

Dado que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ entonces existe un $\boldsymbol{A}$ tal que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

pero para caracterizar totalmente el $\boldsymbol{A}$ tengo la libertad de definir a conveniencia

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \text{ “el gauge”}.$$

Casos particulares importantes son el gauge de Coulomb,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

de manera que como

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

se llega para el potencial electromagnético, bajo el gauge de Coulomb, a que

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

$\boldsymbol{E} = \int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\rvert^3} dV'$	$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\rvert^3} dV'$
Ley de Gauss $\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi Q_n$	Ley de Ampere $\int_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_c$
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$

Tabla 1.1

La operación de tomar rotor y el producto vecrtorial cambian el carácter de los vectores: de polares pasan a axiales y viceversa.

La fuerza general sobre una distribución de carga es

$$\boldsymbol{F} = \int_{V'} \rho \boldsymbol{E} dV' + \frac{1}{c}\int_{V'} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} dV'.$$

1.4.2 Delta de Dirac

Una densidad de carga puntual se puede escribir mediante una delta de Dirac de acuerdo a

$$\rho(\boldsymbol{x}') = q\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}' \\ \infty & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \end{cases}$$

siendo las dimensiones de la delta las de $1/L^3$ y cumpliéndose

$$\int_{V'} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')dV' = 1$$

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\delta(q_3-q_3')$$

donde q_1, q_2 y q_3 son coordenadas curvilíneas generales y $h_1 h_2 h_3$ es el jacobiano de la transformación. Luego

$$\int f(\boldsymbol{x})\delta'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)dx = -f'(\boldsymbol{x}_0)$$

1.4.3 reflexión

Un vector polar sufre reflexión especular mientras que un vector axial (*pseudovector*) sufre una antireflexión especular. Ver la figura.

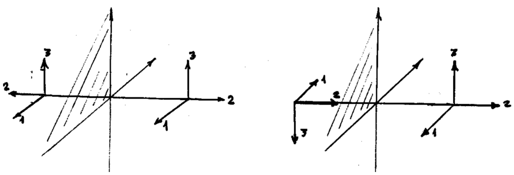

Figura 4.4

Una reflexión más una rotación permite eliminar componentes de campo. Una simetría más una rotación-traslación permite eliminar dependencias.

Lo primero que debe hacerse es escribir bien la $\boldsymbol{J}$ a partir del dato de la corriente (que es el que se suele tener) mediante

$$i = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

En cambio, para $\boldsymbol{A}$ es más fácil usar

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

y despejar de aquí la ecuación diferencial que emplear

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int_V \frac{\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}dV$$

1.5 El potencial vector

Por la ley de Biot y Savart,

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} dV' = \boldsymbol{\nabla}_x \times \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} dV'$$

de modo que

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} dV' \tag{5.1}$$

pero

$$\boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\Psi$$

es tan buen potencial vector como $\boldsymbol{A}$ puesto que los rotores verifican $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}$, de lo cual extraemos en conclusión que el potencial vector está definido a menos del gradiente de una función escalar.

Tomándole el rotor a (5.1) y considerando $\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = 0$ lo cual se verifica si la corriente es estacionaria se tiene

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$$

y entonces

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

y por el teorema de Stokes arribamos a

$$\int_{\Gamma \equiv \partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I_\Gamma$$

que es la ley de Ampere. Notemos que I_Γ es la corriente concatenada por el lazo Γ. Además

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

pero utilizando el gauge de Coulomb es $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ y entonces

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

que es una ecuación de Poisson vectorial.

Magnetostática y electrostáctica son gobernadas por ecuaciones de Poisson para potenciales $\boldsymbol{A}, \phi$ y el problema entonces se reduce a resolverlas para luego hallar los campos por derivación.

1.6 Unicidad de problemas de potencial

Si dos problemas satisfacen iguales condiciones de contorno entonces en el recinto encerrado por ese contorno tienen igual solución.

Si en un recinto R

$$\phi_1|_{cont} = \phi_2|_{cont} \tag{6.1}$$

pero se da para el interior de R que $\phi_1 \neq \phi_2$ entonces se tiene sucesivamente

$$U \equiv \phi_1 - \phi_2 \qquad \boldsymbol{\nabla} U = \boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \boldsymbol{\nabla}\phi_2$$

$$\nabla^2 U = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = -4\pi\rho + 4\pi\rho = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(U\boldsymbol{\nabla}U) = U\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}U) + \boldsymbol{\nabla}U\cdot\boldsymbol{\nabla}U$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(U\boldsymbol{\nabla}U)\,dV = \int_V U\nabla^2 U + (\nabla^2 U)^2 dV = \int_V (\nabla^2 U)^2 dV$$

llegando al último miembro porque el potencial U cumple la ecuación de Laplace. Luego,

$$\int_V (\nabla^2 U)^2 dV = \int_S U\boldsymbol{\nabla}U\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

habiéndose pasado a la integral de superficie por el teorema de la divergencia y anulando el valor global porque U en el contorno es nula (recuérdese (6.1)). Además,

$$\boldsymbol{\nabla}U\cdot d\boldsymbol{S} \longrightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial\hat{n}}\right|_{cont}$$

luego,

$$\boldsymbol{\nabla}U = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\phi_1 = \boldsymbol{\nabla}\phi_2$$

y entonces

$$\phi_1 = \phi_2.$$

a menos, por supuesto, de una constante.