

## Capítulo 1

---

# Mecánica lagrangiana

## 1.1 Introducción a la formulación de Lagrange

Permite automatizar la resolución de problemas. Surge de la observación de una característica de las fuerzas de vínculo. El vínculo representa una restricción.

La fuerza de vínculo se *acomoda* en todo momento, cambiando sus características, para satisfacer el vínculo en todo instante. Son de una naturaleza diferente a las fuerzas tradicionales, que no se acomodan.

Las fuerzas de vínculo están asociadas a ecuaciones de vínculo y dependen de ellas. Las ecuaciones, además, *dependizan* las coordenadas de un problema. Examinemos un problema sencillo con vínculos.

### EJEMPLO 1.1 Problema con fuerza de vínculo

Considere el problema esquematizado en la figura donde dos bloques se mueven en un campo gravitatorio. La segunda ley de Newton para cada bloque resultan en

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= 2T \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - T\end{aligned}$$

Pero la cuerda que une los dos cuerpos, suponiendo que se mantiene tensa en todo momento, vincula sus posiciones de manera que se debe cumplir

$$2(d - x_1) + d_2 + x_2 = L$$

Derivando dos veces esta relación se llega a

$$-2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0,$$

que al reemplazar en las ecuaciones de Newton permite, eliminando la tensión  $T$ , obtener

$$\ddot{x}_1 = \frac{2m_2}{4m_2 + 1} g = \frac{1}{2 + 1/(2m_2)} g,$$

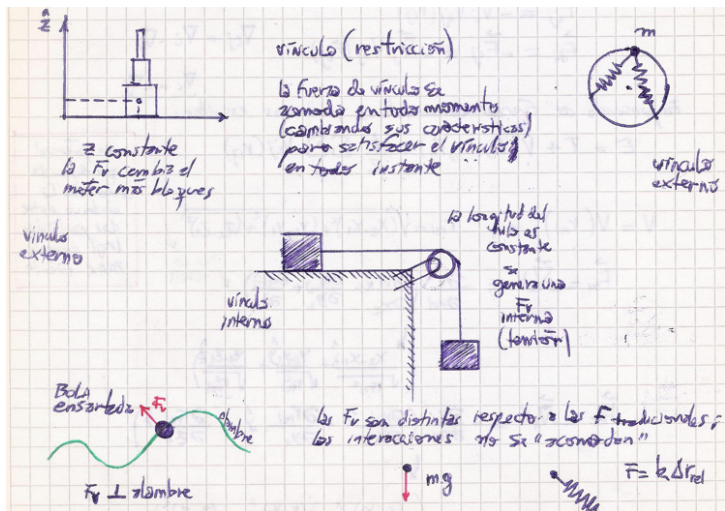


Figura 1.1 .

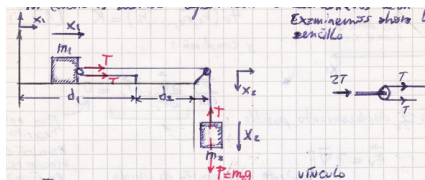


Figura 1.2 .

y

$$\ddot{x}_2 = \frac{4m_2}{4m_2 + 1} g = \frac{1}{1 + 1/(4m_2)} g.$$

Esto último nos dice que el bloque  $m_2$  se moverá con aceleración  $g$  en el límite de  $m_2 \rightarrow \infty$  y el bloque  $m_1$  con aceleración  $g/2$  bajo el mismo límite.

El enfoque de Lagrange debiera permitir llegar a este mismo resultado por supuesto.

Si el vínculo es  $f(x) = 0$  entonces el trabajo virtual de las fuerzas es necesariamente nulo.

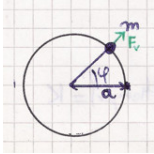
## 1.2 Grados de libertad y vínculos

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema.

La interpretación lagrangiana encuentra las ecuaciones para las coordenadas independientes. Dado un sistema con  $N$  coordenadas y  $k$  vínculos,

$$\# \text{ g.l.} = N - k \equiv \{q_i\} \text{ coordenadas generalizadas}$$

Consideremos el caso de una bola *ensartada* en un aro plano,



la cual puede moverse únicamente por el aro. Claramente la coordenada generalizada es  $\varphi$ , la cual describe completamente el movimiento de la misma; el vínculo es  $r = a$  y el trabajo realizado por las fuerzas de vínculo  $W_{F_v} = 0$  porque  $F_v \perp \delta\varphi$ . La fuerza de vínculo (en dirección radial) es perpendicular al desplazamiento compatible con el vínculo. En este caso el vínculo expresa las coordenadas del espacio real.

Las fuerzas de vínculo  $\mathbf{F}^v$  se acomodan en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las  $\mathbf{F}^v$  son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0,$$

es decir que el trabajo virtual de las fuerzas de vínculo es nulo. Este trabajo puede no ser nulo si el tiempo varía (si no se considera un desplazamiento virtual).

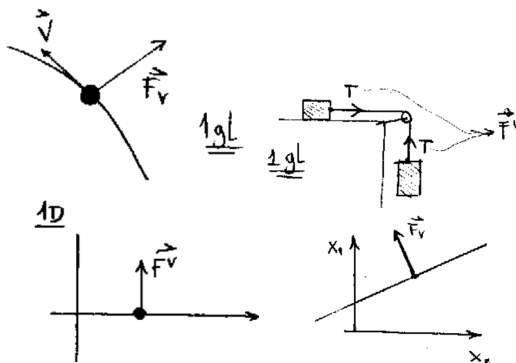


Figura 2.3

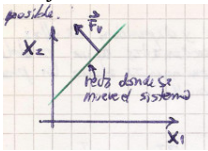
Un sistema 3D con dos vínculos resulta en un movimiento 1D; el sistema puede pensarse que se mueve sobre un alambre.

Para el caso de los bloques (o masas deslizantes), al tener dos coordenadas, el sistema se mueve en una recta del espacio de coordenadas. La fuerza de vínculo es perpendicular al desplazamiento posible. El vínculo expresa aquí las coordenadas donde se mueven las masas y es perpendicular al desplazamiento virtual pero no al desplazamiento real.

$$\mathbf{F}_v = (2\mathbf{T} - \mathbf{T})$$

$$V_{vy} = -\frac{1}{2}F_{vx}(F_{vx}, -\frac{1}{2}F_{vx})$$

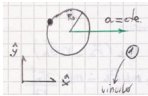
El trabajo virtual de las fuerzas de vínculo es nulo.



Entender este gráfico mejor!

### EJEMPLO 2.1 Aro acelerado en un plano

Un aro que se mueve hacia la derecha con aceleración constante  $\alpha$ .



Tiene una ecuación de vínculo dada por

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_0^2$$

y donde

$$x_c = x_0 + \frac{1}{2}at^2, y_c = y_0$$

## 1.2.1 Clasificación de los vínculos

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que  $W_{virtual}^{Fv} = 0$ , y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que  $\mathbf{F}^v$  perpendicular al desplazamiento posible.

Un desplazamiento virtual es un desplazamiento a  $t_0$  fijo compatible con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en  $\delta t$  durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

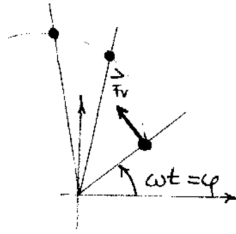


Figura 2.4

A tiempo fijo el desplazamiento es en  $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$ .

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

Si las fuerzas de vínculo se pueden escribir como

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_N) = K,$$

donde  $K$  es una constante, luego (derivando implícitamente la ecuación) cumplirán

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_v}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

Entonces la fuerza de vínculo es proporcional al gradiente de la ecuación de vínculo,

$$\mathbf{F}_v = \lambda \nabla f$$

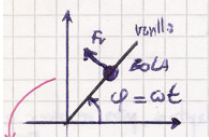
En un caso 3D tendríamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

Los vínculos que dependen de la velocidad o aquellos dados en términos de desigualdades (no de ecuaciones) no cumplen, en general, que el trabajo de las fuerzas de vínculo sea perpendicular al desplazamiento.

La dependencia de las fuerzas de vínculo puede depender del tiempo. Supongamos ahora un problema parecido al anterior; una bola engarzada en una varilla que rota con velocidad angular constante  $\omega$ .

**Esto contrapone a lo posterior. Tal vez estos desplazamientos no son virtuales después de todo. Esta sección hay que depurarla bien.**



La bola se mueve sobre la varilla; la coordenada angular  $\varphi$  forma parte de la ecuación de vínculo

$$\varphi - \omega t = 0$$

En un dado instante de tiempo fijo el único desplazamiento posible, que es en  $\hat{r}$ , es perpendicular a la fuerza de vínculo. No hay trabajo a tiempo fijo. En estos casos la ecuación de vínculo será

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = K,$$

pero como a tiempo fijo es  $\Delta t = 0$ , se tiene

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_v}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

donde no aparece al tiempo  $t$ . Esto es un *desplazamiento virtual*; un desplazamiento a tiempo fijo compatible con los vínculos.

### 1.3 Principio de los trabajos virtuales

En las ecuaciones de Newton para un sistema de  $N$  partículas, con  $3N$  coordenadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i,$$

se pueden separar las fuerzas que actúan sobre cada partícula en fuerzas externas aplicadas  $\mathbf{F}_i^a$  y fuerzas de vínculo  $\mathbf{F}_i^v$ . Es decir,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v,$$

o bien, expresando la aceleración en función de la derivada temporal del momento, resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, multiplicando cada término por un desplazamiento, en principio independiente,  $\delta \mathbf{x}_i$  y sumando se tiene

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0.$$

Esto es sumamente sketchi, debemos leer la carpeta de la cursada y luego la teoría.

Nótese que esta ecuación es válida por serlo para cada partícula  $i$ .

Supongamos ahora que estos desplazamientos son *compatibles* con los vínculos. Entonces

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{x}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

pero el segundo término es nulo porque los  $\delta \mathbf{x}_i$  son compatibles con los vínculos y como sabemos  $\mathbf{F}_i^v \perp \delta \mathbf{x}_i$ .

Entonces

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0, \quad (3.1)$$

donde no se verifica, en general, que el primer vector en cada producto escalar sea nulo.

La expresión (3.1) es el llamado *Principio de los Trabajos Virtuales*, y dada la independencia admitida en los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{x}_i$ , se sigue que la sumatoria en (3.1) es nula porque cada término es nulo, es decir

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

Explicar qué es este principio y qué es un desplazamiento virtual.

Hay que dejar bien el claro el asunto de que las fuerzas de vínculos son siempre perp a los desplazamientos virtuales y que estos, ¿no son independientes?

### EJEMPLO 3.1 Ejemplo de los bloques

Para el ejemplo de los bloques

$$(m_1 \ddot{x}_1 - 2T) \delta x_1 + (m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g + T) \delta x_2 = 0$$

pero en realidad  $\delta x_1, \delta x_2$  no son independientes, están relacionados según  $2\delta x_1 = \delta x_2$ . Entonces

$$(m_1 \ddot{x}_1 + 2m_2 \ddot{x}_2 - 2m_2 g) \delta x_1 = 0$$

donde ahora  $\delta x_1$  es compatible con los vínculos pero es independiente y arbitrario para el problema. Entonces la ecuación anterior debe ser nula porque el paréntesis es nulo,

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2m_2 \ddot{x}_2 - 2m_2 g = m_1 \ddot{x}_1 + 4m_2 \ddot{x}_1 - 2m_2 g = 0$$

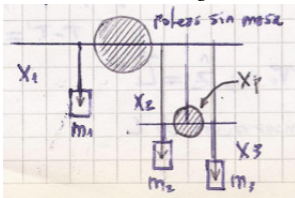
y de la última

$$\ddot{x}_1 = \frac{2m_2 g}{(m_1 + 4m_2)}.$$

Hemos llegado a la resolución en forma independiente de los vínculos.

### EJEMPLO 3.2 Más de un grado de libertad

Si tenemos más de un grado de libertad, como en el caso de dos poleas sin masa.



Se tienen dos ecuaciones de vínculo

$$x_1 + x_p = \ell_1 \quad (x_2 - x_p) + (x_3 - x_p) = \ell_2.$$

El problema tiene cuatro coordenadas y dos ecuaciones de vínculo, lo cual nos deja dos grados de libertad. La primer ecuación de vínculo permite liberarnos de  $x_p$  y quedarnos en principio con los movimientos de las tres masas. Entonces, ¿el principio de los trabajos virtuales? sería en este caso

$$(m_1\ddot{x}_1 - m_1g)\delta x_1 + (m_2\ddot{x}_2 - m_2g)\delta x_2 + (m_3\ddot{x}_3 - m_3g)\delta x_3 = 0$$

y luego podemos utilizar la segunda ecuación de vínculo, combinándola con la primera para llegar a

$$x_2 + x_3 + 2x_1 = \text{cte.}$$

lo cual conduce a la relación

$$\delta x_1 = -\frac{\delta x_2 + \delta x_3}{2}.$$

Finalmente

$$(m_2\ddot{x}_2 - m_2g - \frac{m_1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{m_1}{2}g)\delta x_2 + (m_3\ddot{x}_3 - m_3g - \frac{m_1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{m_1}{2}g)\delta x_3 = 0.$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{x}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamente cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{x} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector  $\delta \mathbf{x}$  como  $N$  dimensionales.

### 1.3.1 Comentario vínculos

El trabajo de la fuerza de vínculos es nulo si el desplazamiento es virtual.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \delta x_N = 0$$

Como es un desplazamiento virtual, el tiempo  $t$  está fijo (imagen fija = tiempo congelado)

## 1.4 Construcción del lagrangiano

Vamos a utilizar el principio de los trabajos virtuales para escribir las ecuaciones de la mecánica de otra manera [¿?] sin preocuparnos por las fuerzas de

¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.

Esto hay que consolidarlo todo. Volará.



vínculo, que en general pueden no ser conocidas o tener una naturaleza compleja. Consideremos un sistema de  $N$  partículas y  $k$  ecuaciones de vínculo

**Esta es la papa: las fuerzas de vínculo son difíciles de escribir si es esto posible del todo.**

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_1$$

.....

$$f_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_k$$

y por ende  $3N - k$  grados de libertad (suponiendo que nos hallamos en 3 dimensiones).

Tenemos  $N$  relaciones del tipo

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (4.1)$$

que significa que la posición de la partícula  $i$ -ésima depende en principio de las  $3N - k$  coordenadas generalizadas y del tiempo. Una variación de la misma tendrá la forma

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \delta t$$

y suponiéndola un desplazamiento virtual el último término se anula puesto que  $\delta t = 0$  en ese caso y entonces

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (4.2)$$

Por otro lado, del principio de los trabajos virtuales (3.1) es

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0,$$

donde  $\mathbf{F}_i^a$  es la fuerza aplicada externa que no incluye las fuerzas de vínculo. El primer término se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (4.3)$$

Se ha pasado de una descripción en términos de  $\delta \mathbf{x}_i$  ( $3N$  variables) a otra en términos de  $\delta q_j$  ( $3N - k$  coordenadas generalizadas).

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla

Consideremos en primer lugar la derivada total del producto siguiente

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right),$$

y en segundo lugar la velocidad de cada partícula, que proviene de la derivada total de cada ecuación (4.1) y resulta

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

A partir de esta última es claro ver que la derivada de la velocidad de la partícula  $i$ -ésima respecto a la coordenada  $l$ -ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}. \quad (4.4)$$

La ecuación de la velocidad se puede derivar otra vez, con respecto a  $q_l$ , obteniéndose

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial t},$$

Una manera menmotécnica de recordar esto es con el siguiente esquema:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}.$$

y se puede ver que invirtiendo el orden de derivación, esto significa que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right).$$

Volviendo ahora a (4.3) y usando los resultados recientes tenemos

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

El hecho de que se pueda sacar fuera la derivada temporal y pasar adentro la derivada con respecto a la coordenada generalizada  $q$  puede verse haciendo la cuenta de manera explícita.

donde modificaremos el corchete expresando derivadas con respecto a la posición  $\mathbf{x}$  en términos de derivadas con respecto a la velocidad  $\mathbf{v}$ , de manera que

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right]$$

y usando el *trick* usual

$$\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial q}$$

resulta

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\}$$

Es hora ya de introducir la sumatoria en  $i$  hacia el interior del corchete, y la ecuación original es ahora

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

y dentro de los paréntesis ha aparecido la energía cinética  $T$ . La sumatoria en  $j$  no era otra cosa que la suma de las derivadas de los momentos, y entonces

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i.$$

Escribiendo la variación  $\delta \mathbf{x}$  en términos de  $\delta q$  a través de (4.2) se llega a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N \left( \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j \delta q_j$$

siendo

$$Q_j = \sum_i^N \left( \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right)$$

la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ . Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (4.5)$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas, provienen de un potencial, entonces

$$\mathbf{F}_i^a = - \frac{\partial V(\{\mathbf{x}_j\})}{\partial \mathbf{x}_i}$$

y expresando la fuerza  $Q_j$  en términos del potencial  $V$

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

el cual, insertado en la ecuación (4.5), conduce a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Dado que  $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = V(\{q_j\})$  (no depende de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ ) se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

y definiendo al lagrangiano  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

se arriba a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Nótese que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-k}, t)$ , es decir que es función del conjunto  $(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ . De esta manera las ecuaciones resultantes serán, a lo sumo, ecuaciones diferenciales para  $q_j(t)$  de orden dos.

Si existieran fuerzas aplicadas que no provienen de un potencial (no conservativas) entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC},$$

y las ecuaciones adquieren un término extra

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - Q_j^{NC} \right] \delta q_j = 0.$$

Como esto vale para todo grado de libertad  $j$ , puesto que las variaciones son independientes, llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange con presencia de fuerzas no conservativas. Este es el resultado más importante del capítulo.

Se tienen así una formulación para los problemas mecánicos en términos de ecuaciones diferenciales para los grados de libertad  $q_j$  que prescindan del conocimiento de las fuerzas de vínculo.

No sé si es la primera vez que aparecen. De serlo habría que remarcarlo como es debido, tal vez recuadrar

## 1.4.1 Algunos ejemplos del lagrangiano

### EJEMPLO 4.1 Bloques deslizantes

Teníamos el vínculo

$$-2x_1 + x_2 = \text{cte.}$$

Luego,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad V = -m_2gx_2$$

y tomando  $x_2$  como independiente llego a

$$T - V = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{4} + m_2 \right) \dot{x}_2^2 + m_2gx_2.$$

Luego, las ecuaciones de E-L serán

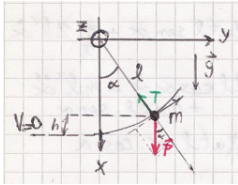
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \left( \frac{m_1}{4} + m_2 \right) \ddot{x}_2 - m_2g = 0$$

que conduce a

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2g}{\frac{m_1}{4} + m_2},$$

que es a lo que se tenía que llegar.

### EJEMPLO 4.2 Péndulo



Las ecuaciones son

$$m\ell\dot{\alpha}^2 = -T + mg \cos \alpha \quad m\ell\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha$$

y se podría resolver desde aquí nomás. Pero escribamos el lagrangiano

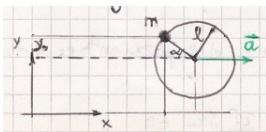
$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 - mg\ell(1 - \cos \alpha)$$

Sus ecuaciones de E-L son

$$m\ell\ddot{\alpha} + mg\ell \sin \alpha = 0$$

que es la ecuación del péndulo  $\ddot{\alpha} = -g/\ell \sin \alpha$ .

### EJEMPLO 4.3 Aro acelerado



Supongamos un aro horizontal en una mesa sin rozamiento. Tiene un único grado de libertad.

El vínculo es

$$(x - 1/2 at^2)^2 + (y - y_0)^2 = \ell^2$$

Falta ilustración del aro y sistema coordenado.

y las posiciones instantáneas de la masa  $m$

$$x = \frac{1}{2}at^2 - \ell \cos(\varphi) \quad y = y_0 + \ell \sin(\varphi)$$

Es conveniente utilizar el ángulo  $\varphi$  como coordenada generalizada. Pero  $\varphi$  está solidaria al aro. Eso no es un problema siempre que el  $\mathcal{L}$  esté medido en un sistema inercial.

En este caso no hay potencial pero como  $\varphi$  es una coordenada vista en un sistema no inercial, aparecerán las fuerzas ficticias asociadas al movimiento. Serán

$$\dot{x} = at + \ell \sin(\varphi)\dot{\varphi} \quad \dot{y} = \ell \cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

y luego

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(a^2t^2 + 2at\ell \sin(\varphi)\dot{\varphi} + \ell^2\dot{\varphi}^2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m\ell^2\ddot{\varphi} + m a \ell \sin(\varphi) = 0$$

lo cual resulta en la ecuación de movimiento

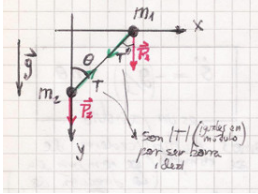
$$\ddot{\varphi} = -\frac{a}{\ell} \sin(\varphi)$$

que es una ecuación que da oscilaciones, como la de un péndulo. Estas oscilaciones están causadas, claramente, por la aceleración  $a$ .

En este ejemplo se ve que se calcula la energía cinética  $T$  en un sistema inercial; no obstante, este valor está expresado en términos de una coordenada que no es inercial (es solidaria al aro). Aparecen entonces las fuerzas inerciales que tienen que aparecer y punto.

#### EJEMPLO 4.4 Problema 5 –para vínculos–

Este problema es de vínculos y trabajos virtuales. Habría que reubicarlo.



Se tienen dos masas  $m_1$  y  $m_2$  de manera que en principio se tendrían seis coordenadas; no obstante como el movimiento es en un plano (se puede tomar el  $z = 0$  como tal) y las masas están restringidas a moverse a lo largo del eje que las engarza se tiene, adoptando el esquema de la figura,

$$z_1 = z_2 = 0 \quad x_2 = y_1 = 0$$

es decir cuatro ecuaciones de vínculo a la cual le sumamos una quinta

$$x_1^2 + y_2^2 = \ell^2 \quad (4.6)$$

de manera que resulta un problema para un único grado de libertad. Obviando los subíndices que no son necesarios, y diferenciando implícitamente la ecuación (4.6) se obtiene

$$x dx + y dy = 0$$

Utilizando el ángulo  $\theta$  y parametrizando las variables implicadas en (4.6) de acuerdo con

$$x = \ell \sin \theta \quad y = \ell \cos \theta$$

**La  $T$  del  $\mathcal{L}$  es la vista desde un sistema INERCIAL siempre; en todo caso luego aparecen las fuerzas ficticias necesarias. ESTO HAY QUE ESTUDIARLO Y ENTENDERLO.**

**El lagrangiano se dedujo de las ecuaciones de Newton, entonces debemos calcular  $T$ ,  $V$  de un sistema inercial. Acá no se entiende si lo que se hace en la carpeta está bien o no, en el sentido de que parece que al usar una coordenada que no es inercial estamos calculando  $T$  no inercial.?**

vemos que es una buena coordenada porque verifica el vínculo de manera natural.

Planteando las ecuaciones

$$(T \sin \theta - m_1 \ddot{x})\delta x + (m_2 g - T \cos \theta - m_2 \ddot{y})\delta y = 0$$

$$x\delta x = -y\delta y \quad (4.7)$$

pero usando la última, se tiene

$$-\frac{x}{\ell}T\delta x - \frac{y}{\ell}T\delta y = 0$$

de manera que desaparece la tensión. Entonces

$$m_2 \ddot{x}\delta x = m_2(g - \ddot{y})\delta y$$

que es una ecuación de Lagrange de primera especie. Usando otra vez (4.7)

$$-m_1 \ddot{x} \frac{y}{x} = m_2(g - \ddot{y})$$

y entonces ahora habría que convertir a expresar todo en términos de  $\theta$ . Derivando las expresiones de  $x$ ,  $y$  en términos del ángulo  $\theta$  resulta que

$$-m_1 \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = m_2(g + \ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$\ddot{\theta} \ell (m_2 \sin \theta + m_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}) + \dot{\theta}^2 \ell (m_2 \sin \theta - m_1 \cos \theta) + m_2 g = 0$$

Si  $m_1 = m_2$  entonces

$$\ddot{\theta} \ell \frac{m}{\sin \theta} + mg = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta,$$

y vemos que es un péndulo.

Ahora se quisiera calcular la tensión  $T$ . Se utilizarán multiplicadores de Lagrange. Sea que los vínculos se rompen (se rompen, por supuesto, en la dirección de las fuerzas de vínculos). Supongamos que existe  $y_1$  (hay desplazamiento en la coordenada  $y_1$ ) entonces existirá  $\lambda$  tal que  $\lambda \delta y_1 \neq 0$

$$\delta y_1 (m_1 \ddot{y}_1 - \lambda - m_1 g) \quad \lambda = m_1 g$$

pero la ecuación en (1) (página anterior) debe seguir valiendo.

$$\lambda_T + x\delta x + \lambda_T y\delta y$$

$$(m_1 \ddot{x} + \lambda_T x)\delta x + (m_2(g - \ddot{y}) + \lambda_T + y)\delta y = 0$$

lo cual vale si  $\lambda_T = -\frac{T}{\ell}$ . Y se ve que el multiplicador de Lagrange es la tensión (vínculo) – la fuerza asociada a que se cumpla el vínculo –. Tengo un multiplicador por cada vínculo. Si hay  $n$  vínculos y quiero un vínculo uso un solo multiplicador. Pero ahora  $\delta x$  y  $\delta y$  son independientes, entonces deben anularse por separado los dos miembros de la ecuación de Newton.

$$m_1 \ddot{x} + \lambda_T x \quad m_2(g - \ddot{y}) + \lambda_T y$$

$$\lambda_T = -\frac{m_1 \ddot{x}}{x}$$

$$\lambda_T = -\frac{m_1(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{\sin \theta} = m_1\left(\frac{g}{\ell} \cos \theta - \dot{\theta}^2\right)$$

## 1.5 Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

En los ejemplos del péndulo y del aro acelerado [CITAR], la resolución del sistema a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange condujo a las mismas ecuaciones de movimiento (lo que significa que, para iguales condiciones iniciales, la física del sistema es la misma) pero se partió de dos lagrangianos diferentes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mg\ell \cos \alpha \quad \mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\ell^2\ddot{\alpha} + 2\ell g t \sin \alpha \dot{\alpha} + g^2 t^2)$$

que llevaban a

$$\ell\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0.$$

Es decir, que desde el punto de vista del movimiento del sistema, los dos lagrangianos son equivalentes. Pero notemos que el término central en  $\mathcal{L}'$  aparece vinculado a

$$\frac{d}{dt}(m\ell g t \cos \alpha) = -m\ell g t \dot{\alpha} \sin \alpha + m\ell g \cos \alpha,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + m\ell g \cos \alpha - \frac{d}{dt}(m\ell g t \cos \alpha) + \frac{1}{2}g^2 t^2 \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + m\ell g \cos \alpha - \frac{d}{dt}\left(m\ell g t \cos \alpha - \frac{1}{6}g^2 t^3\right) \end{aligned}$$

o bien

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}(F(\alpha, t)).$$

Entonces, parece que existe alguna relación entre dos lagrangianos que conducen a iguales ecuaciones de movimiento.

En el ejemplo visto del sistema mecánico del aro acelerado parece que existía alguna relación entre dos lagrangianos que conducían a iguales ecuaciones de movimiento. Veamos ahora el origen de esa relación.

Dado un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i, t)$  nos construimos otro  $\mathcal{L}'$  sumándole al anterior la derivada total de una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo  $F = F(q_i, t)$ , de modo que

$$\mathcal{L}'(\dot{q}_i, q_i, t) = \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i, t) + \frac{dF}{dt}(q_i, t).$$

La aceleración del aro era  $\alpha$  pero escribimos  $g$  para enfatizar que tienen la misma forma.

Link con el ejemplo del aro acelerado!!



Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

para este nuevo lagrangiano resultan en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \\ &\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde aparecen las ecuaciones correspondientes al lagrangiano  $\mathcal{L}$  más los dos términos del renglón inferior. Veremos que estos se cancelan exactamente por un argumento similar al encontrado en la ecuación (4.4) en la sección anterior.

Para ello es necesario expresar la derivada total de  $F$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i^{3N-k} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Usando explícitamente estos resultados en los términos extra de (5.1), se llega a que

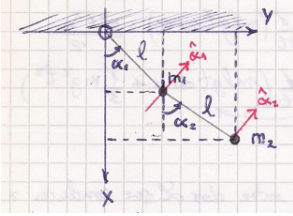
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \\ \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \right\} &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} = 0 \end{aligned}$$

donde la obtención del cero responde a que hemos aceptado que las derivadas cruzadas de  $F$  son idénticas. Para ello basta con admitir que  $F$  sea de clase  $C^2$  (derivadas segundas continuas).

Finalmente hemos comprobado que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos al lagrangiano la derivada total respecto del tiempo de una función de  $(q_i, t)$ . O sea que podríamos construir infinitos lagrangianos diferentes por el añadido de una derivada total y todos ellos llevan a las mismas ecuaciones de movimiento.

**EJEMPLO 5.1 Lagrangiano en funcionamiento**

Dos masas  $m_1, m_2$  conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable según indica la figura que se mueven en un plano.



En principio este problema tiene cuatro coordenadas  $x_1, x_2, y_1, y_2$  pero las barras determinan dos ecuaciones de vínculo

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell^2 \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell^2$$

de modo que es un sistema con dos grados de libertad.

Para escribir el lagrangiano notemos que

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2$$

Y en términos de los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  se tiene

$$x_1 = \ell \cos \alpha_1 \quad y_1 = \ell \sin \alpha_1$$

$$x_2 = \ell \cos \alpha_2 + \ell \cos \alpha_1 \quad y_2 = \ell \sin \alpha_1 + \ell \sin \alpha_2$$

pero antes de hacer toda el álgebra, notemos que  $(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = |\mathbf{v}_1|^2$  está siempre en la dirección del vector  $\hat{\alpha}_1$  y no puede tener componente perpendicular. Considerando solamente esa componente, sería

$$\mathbf{v}_1 = \ell \dot{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1 \quad \text{con} \quad v_1^2 = \ell^2 \dot{\alpha}_1^2$$

y correspondientemente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \ell \dot{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1 + \ell \dot{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2 \\ v_2^2 &= \ell^2 \dot{\alpha}_1^2 + \ell^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ell^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

**Este ejemplo es interesante porque considera unos versores movibles. Habría que continuarlo y ver qué se hizo en la carpeta.**

**1.6 Momentos conjugados y coordenadas cíclicas**

Dado un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  se define el momento canónicamente conjugado a  $q_j$  como

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (6.1)$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv Q_j,$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ .

Sea ahora un lagrangiano que no depende explícitamente de la coordenada  $k$ , es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t),$$

entonces será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

y como consecuencia las ecuaciones de Euler-Lagrange en la coordenada  $k$ -ésima resultan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k = Q_k = 0$$

de manera que no existe fuerza generalizada en el grado de libertad  $k$  y como es  $\dot{p}_k = 0$ , se conserva el momento  $p_k$  canónicamente conjugado a  $q_k$ . En estos casos se dice que la coordenada  $q_k$  que no aparece en el lagrangiano, es una coordenada cíclica.

### EJEMPLO 6.1 Potencial central en un plano

Sea un potencial central  $V(r)$  en el plano. El lagrangiano de una partícula de masa  $m$  sometida al mismo, y en las convenientes coordenadas polares  $(r, \varphi)$  es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange serán, en  $r$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 r + \frac{dV}{dr} = 0$$

y en  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

En esta última debemos notar que  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi = 0$  y esto significa que  $\varphi$  es cíclica. Entonces se conserva el momento canónicamente conjugado a  $\varphi$  puesto que verifica

$$\dot{p}_\varphi = mr^2 \ddot{\varphi} = 0$$

lo cual lleva a que  $mr^2 \dot{\varphi}$  es una constante para este sistema. La moraleja es que la existencia de una coordenada cíclica permite ahorrarnos una integración. Esto, por supuesto, para este problema no es otra cosa que la conservación del momento angular [?].

## 1.7 Momentos canónicamente conjugados y traslaciones rígidas

Consideremos un sistema de partículas que sufre una traslación rígida infinitesimal. Esta traslación se lleva a cabo a través de un desplazamiento en la coordenada  $q$  y de magnitud  $\delta q$  en la dirección dada por el versor  $\hat{n}$ .

En efecto, para el sistema de  $N$  partículas, la traslación rígida implica

$$q \longrightarrow q + \delta q \quad \mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n}$$

La Figura 7.5 representa la situación.

Luego, suponiendo una energía cinética de tipo  $T_2$ , el momento canónicamente conjugado  $p$  (en la coordenada  $q$  –cuyo subíndice omitimos–) es [¿se sabe esto a esta altura?]

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial \dot{q}} \right) = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}}$$

**Hablar de vectores al cuadrado.**  
**Nota de cómo se manipula:** uso  
 $dv_i^2 = 2\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i$  y

La *forma* de la traslación rígida implica que

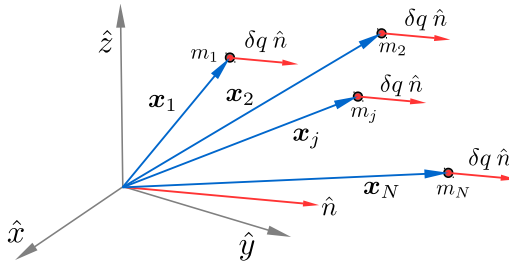
$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} - \mathbf{x}_i}{\delta q} = \hat{n}.$$

de modo que

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} = \left( \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_{\hat{n}}$$

**Recordemos que**

$$\mathbf{v}_i = \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$



**Figura 7.5**

Hemos arribado al resultado de que el momento canónicamente conjugado correspondiente a la coordenada generalizada asociada a la traslación rígida es la proyección del momento total en la dirección de ésta.

Para el ejemplo trivial de la partícula libre,  $T = 1/2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ , se tiene  $p_x = mv_x$  si la traslación es en la dirección  $\hat{x}$ . **Este ejemplo suma algo?**

Para las fuerzas generalizadas, equivalentemente se tiene

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \left( \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{F} \cdot \hat{n},$$

la fuerza generalizada es la proyección de las fuerzas aplicadas en la dirección dada por  $\hat{n}$ .

La ecuación para la fuerza generalizada  $Q_j$  era

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Aún en el caso de que  $T$  dependa de  $q_j$  la traslación rígida implica que  $\partial T / \partial q_j = 0$  porque es sumar un vector constante a la posición, luego  $d\mathbf{x}_i/dt = d(\mathbf{x}_i + \mathbf{a})/dt$  para todo  $\mathbf{a}$  constante. Entonces, para la coordenada  $q$  asociada a la traslación en  $\hat{n}$  se tiene

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dP_{\hat{n}}}{dt},$$

de tal manera que si en  $\hat{n}$  no hay fuerza  $Q$  tendremos  $dP_{\hat{n}}/dt = 0$ , es decir  $P_{\hat{n}}$  conservado.

Revisar porque esto no estaba tan claro. Supongo que la idea es ver que aún con presencia de  $T_1$  esto sigue valiendo

Acá la cosa es que la traslación es una cosa que sufre el sistema pero no es dinámica. Es una construcción nuestra, como un cambio de sistema de referencia.

## 1.8 Momentos canónicamente conjugados y rotaciones rígidas

Ahora consideraremos un sistema de partículas que sufre una rotación rígida infinitesimal. Esta se materializa a través de un desplazamiento angular en la coordenada  $q$  de magnitud  $\delta q$ . La dirección y sentido, para cada posición  $\mathbf{x}_i$  vienen dadas por el producto vectorial  $\hat{n} \times \mathbf{x}_i$ .

Para un sistema de  $N$  partículas, la rotación rígida implica

$$q \longrightarrow q + \delta q |\mathbf{x}| \sin \alpha_i \quad \mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} \times \mathbf{x}_i$$

La Figura 8.6 representa la situación, donde por razones de claridad se muestran solamente dos partículas.

El momento canónicamente conjugado en la coordenada angular  $q$  será

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} \times \mathbf{x}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i)$$

donde hemos utilizado el hecho de que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) - \mathbf{r}_i}{\delta q} = \hat{n} \times \mathbf{x}_i.$$

Esta coordenada  $q$  es especial en el sentido en que representa una rotación.

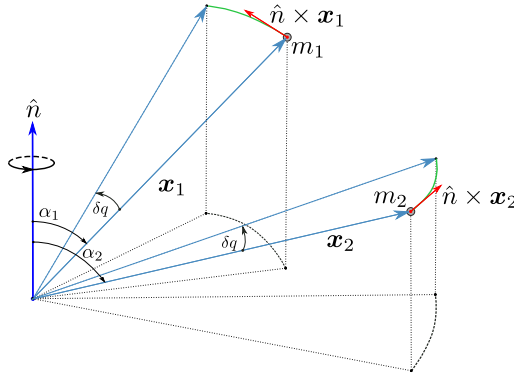


Figura 8.6

El sumando se puede reescribir (usando  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ ) para que aparezca explícitamente la forma buscada,

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}_i) = \sum_i^N \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i^N \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{l}_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_i^N \mathbf{l}_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}$$

que significa

$$p = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} = L_{\hat{\mathbf{n}}},$$

el momento canónicamente conjugado en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  es el momento angular total del sistema proyectado en esa dirección. La fuerza generalizada será

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}_i) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^a \right) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_i^N \boldsymbol{\tau}_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T},$$

i.e. la componente del torque en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Asimismo, si la coordenada implica una rotación rígida entonces  $\partial T / \partial q = 0$  debido a que la energía cinética  $T$  es un escalar y es por ende invariante ante rotaciones (un vector rotado cambia su dirección pero no su módulo). Luego

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dL_{\hat{\mathbf{n}}}}{dt} = \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{n}}}.$$

Tal vez un ejemplo 2D ayude a aclarar un poco este tema.

Todo este análisis (traslaciones y rotaciones rígidas) vale si el potencial  $V$  no depende de la velocidad; en caso contrario cambia la forma de los momentos

canónicos. En efecto, en este caso es

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}}$$

Volviendo al ejemplo de la partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en un campo electro-magnético se tendrá

$$p = mv_{\hat{n}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \hat{n},$$

es decir que aparece un término extra con el potencial vector respecto del caso en que la partícula está libre.

## 1.9 Energía cinética generalizada

Resulta útil disponer de la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas. Para un sistema de  $N$  partículas, es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i |\mathbf{v}_i|^2$$

donde las posiciones de cada una de ellas se pueden expresar en términos de  $k$  coordenadas generalizadas

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

y sus respectivas velocidades serán

$$\mathbf{v}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Luego, utilizando el hecho de que  $|\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ , se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{s=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \quad (9.1)$$

y expandiendo el producto resulta

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left[ \sum_j^k \sum_s^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_j \dot{q}_s + 2 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2 \right],$$

la cual se puede separar en tres contribuciones

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

La derivada con respecto al tiempo de la posición es la  $d/dt$  no la parcial.

Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.

con las siguientes formas:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$T_1 = \sum_j^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2,$$

donde se ha alterado el orden de los signos  $\sum$  para enfatizar el hecho de que las cantidades entre paréntesis pueden asociarse a una matriz y un vector de acuerdo con

$$a_{js}(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

Entonces

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k a_{js} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_j^k b_j \dot{q}_j, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2$$

son, respectivamente, contribuciones cuadráticas, lineales o de orden cero con respecto a las velocidades generalizadas  $\dot{q}$ .

Para una partícula libre será

$$T = T_2$$

es decir que solamente es cuadrática en las velocidades. Para una partícula sometida a vínculos en general, en términos de las coordenadas generalizadas, se tendrán las tres clases de cinética.

### EJEMPLO 9.1 Cinética de la partícula libre en esféricas

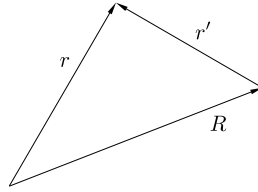
En coordenadas esféricas la energía de una partícula libre es

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin \theta \dot{\varphi}^2 \right).$$

Si las coordenadas generalizadas son las coordenadas  $r, \theta, \varphi$  se identifica

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left( a_r(r, \theta, \varphi) \dot{r}^2 + a_\theta(r, \theta, \varphi) \dot{\theta}^2 + a_\varphi(r, \theta, \varphi) \dot{\varphi}^2 \right).$$





**Figura 10.7** Sistema de partículas

## 1.10 Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i$$

y veremos ahora que el último término es nulo ya que son vectores perpendiculares. Para ello notemos que

$$M \mathbf{R}_{cm} = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}'_i)$$

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i$$

y también

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i$$

de modo que

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

Finalmente

$$T^{tot} = T^{cm} + T_{cm}^{tot}$$

Esto hay que revisarlo, derivo ambos miembros? Vincular con la figura.

## 1.11 Trabajo en un sistema de partículas

Empezamos desde

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

donde el trabajo externo puede escribirse

$$W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s} \quad (11.1)$$

La no dependencia del camino para la integral que da (11.1) requiere que

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}_i) \quad \nabla_{\mathbf{r}_i} \times \mathbf{F}_i^e = 0$$

y entonces puedo inducir la existencia de una función potencial para las fuerzas externas,

$$W^{ext} = - \sum_i^N \Delta V_i$$

Por otro lado,

$$W_c^{int} = \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^N \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

## 1.12 Lagrangiano cíclico en el tiempo

Empezando desde la derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (12.1)$$

y usando la derivada total del término

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q},$$

se puede expresar (12.1) sin derivadas segundas explícitas  $\ddot{q}$  de suerte que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Quiero un  $\ell$  en bold, no me gusta el s.

barra resizable ya.

la cual, acomodando un poco los términos, resulta en

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Como el corchete son las ecuaciones de Euler-Lagrange y además  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q} \equiv p$  se tiene

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} (p \dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} (p \dot{q} - \mathcal{L}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Definiendo al operador hamiltoniano  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{H} \equiv p \dot{q} - \mathcal{L} \quad (12.2)$$

resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (12.3)$$

El hamiltoniano es un operador tal que su variación temporal total depende de la variación temporal explícita del lagrangiano. Entonces, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ , el hamiltoniano se conserva.<sup>1</sup>

Por otra parte, si se cumple que :

- Los vínculos no dependen del tiempo
- El potencial no depende de las velocidades generalizadas,

entonces el hamiltoniano es la energía, es decir

$$\mathcal{H} = E = T + V. \quad (12.4)$$

La condición de que los vínculos no dependan del tiempo tiene como consecuencia que la energía cinética sea una función cuadrática en las velocidades generalizadas. Entonces la condición (12.4) se puede expresar en términos de las energías cinéticas y potenciales como

$$T = T_2 \quad V \neq V(\dot{q})$$

Asimismo, la condición de energía constante  $E = E_0$  se cumplirá si el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo,  $W^{\text{nc}} = 0$ .

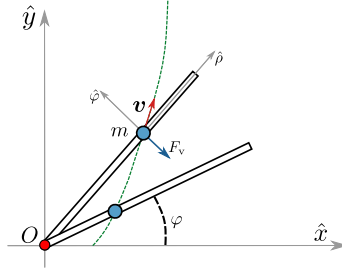
**No sé en qué momento se ha definido el hamiltoniano,  $H = T + V$ , deberíamos referirlo y tenerlo en cuenta.**

**Esto se debiera haber visto antes en algún momento, y convendría recordarlo aquí.**

<sup>1</sup>Notemos en la ecuación (12.3) que la derivada  $\partial \mathcal{L} / \partial t$  refiere a la aparición explícita de  $t$ ; de este modo el hecho de que sea  $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$  significa que el  $\mathcal{H}$  se conserva pero no que  $\mathcal{L}$  se conserva. Esto último requeriría  $d\mathcal{L}/dt = 0$ .

**EJEMPLO 12.1 Bola rotante engarzada en alambre**

Una barra gira sobre una mesa sin rozamiento en torno a un punto fijo  $O$  con velocidad angular constante  $\omega$ . Esta barra tiene enhebrada una bola de masa  $m$  que puede deslizarse libremente a lo largo de la misma, como se ilustra esquemáticamente en la figura 12.8.



**Figura 12.8** Problema de la barra que gira con una masa  $m$  enhebrada.

Claramente la bola seguirá, con respecto a un sistema de coordenadas polar  $(\rho, \varphi)$  con origen en el punto  $O$ , una trayectoria como la esquematizada por la curva verde.

En este problema no hay potencial y el lagrangiano, que es  $T$ , será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

El hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2\omega^2). \quad (12.5)$$

Luego, como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces el hamiltoniano dado por la (12.5) se conserva. No obstante, el hamiltoniano no es la energía puesto que la energía cinética  $T$  tiene la forma  $T = T_2 + T_0$ , que proviene del hecho de que la fuerza de vínculo (que tendrá dirección angular en este caso) dependerá del tiempo. La energía no se conserva, claramente hay trabajo de la fuerza de vínculo, que es una fuerza no conservativa.

La conservación del hamiltoniano dependerá de las coordenadas generalizadas elegidas. Podría pensarse que el  $\mathcal{H}$  es la energía vista en un sistema no inercial [?]. La energía siempre es la medida en un sistema inercial. Además, cuando se conserve lo será desde cualquier sistema de coordenadas inercial elegido.

## 1.13 Energía cinética y el hamiltoniano

Dado que la energía cinética tiene la forma general

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j}_{T_2}$$

entonces, la energía total será

$$E = T + V = T_0 + T_1 + T_2 + V. \quad (13.1)$$

La forma particular de la energía cinética (13.1) implica que

$$p_i \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1 + 2T_2,$$

entonces el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  adopta la expresión

$$\mathcal{H} = T_2 - T_0 + V.$$

Luego, para que se verifique que el hamiltoniano es la energía del sistema, i.e.  $\mathcal{H} = E$  se necesita

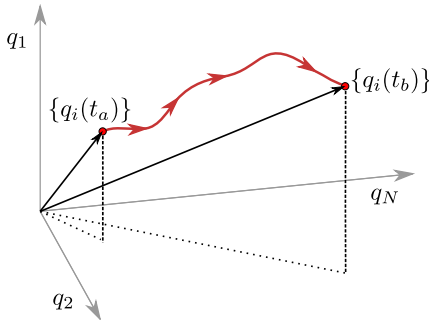
$$2T_0 + T_1 = 0.$$

Una solución de este sistema es, por supuesto,  $T_0 = T_1 = 0$ ; el hamiltoniano es la energía cuando la velocidad del sistema es exclusivamente cuadrática en las velocidades generalizadas. Este será el caso cuando los vínculos no dependan del tiempo, y siempre suponiendo que el potencial no depende de la velocidad.

**Hay que enganchar esto con la sección anterior. Hacer un cuadro sketchi de cuando se conserva la energía y cuando el hamiltoniano es la energía del sistema.**

## 1.14 Principio de acción mínima

El estado de un sistema mecánico de  $N$  grados de libertad en un dado instante de tiempo  $t$  puede asociarse a un vector de componentes  $\{q_i\}$  viviendo en un espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas. La evolución entre dos puntos en ese espacio, de  $\{q_i(t_a)\}$  a  $\{q_i(t_b)\}$  por ejemplo, se realiza por un trayecto continuo entre esos dos puntos, que es la trayectoria del sistema.



**Figura 14.9** Trayectoria de un sistema mecánico  $\{q_i\}$  entre dos puntos del espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas.

En principio cualquier trayecto entre dos puntos es posible porque eso depende de la física a la cual está sometido el sistema, no obstante existe un principio que permite saber cuál es la trayectoria que seguirá.

Considerando el lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V$  y la siguiente integral (la acción  $S$ ) entre los puntos  $\{q_i(t_a)\}$  y  $\{q_i(t_b)\}$ ,

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, t) dt$$

se tiene que la trayectoria real entre estos dos puntos es tal que la integral  $S$  toma su valor mínimo.

Dicho de otra manera, esto significa que  $S$  como funcional dependiendo de  $\{q_i\}$ ,  $\{\dot{q}_i\}$  deberá tener un valor mínimo (o ser estacionaria) al especializarse en la trayectoria real. Esto es análogo a lo que sucede en cálculo; en el mínimo de una función (de una o varias variables) la derivada se anula. El concepto equivalente en funcionales como  $S$  es el de variación nula.

La idea es construir una *variación* arbitraria respecto de la trayectoria real  $\{q_i\}$  y forzar a que esa variación se anule para obtener una condición sobre las  $\{q_i\}$  (para funciones esa condición era que el gradiente se anule).

Si me sitúo en la trayectoria verdadera, es decir el conjunto  $\{q_i(t)\}$ , una variación arbitraria de la misma tendrá la forma

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (14.1)$$

donde cada coordenada  $q$  variará de acuerdo con su correspondiente desplazamiento  $\delta q$ . La variación se hace en un intervalo de tiempo arbitrario  $[t_a, t_b]$  y con extremos fijos,

$$\delta q(t_a) = 0 \quad \delta q(t_b) = 0, \quad (14.2)$$

lo que significa que los puntos de partida y llegada en el espacio de fases son los mismos.

Asimismo se pedirá que todas las trayectorias empleen el mismo tiempo de manera que la variación se hará en algún tiempo fijo intermedio  $t_a < t < t_b$ . O sea que  $\delta t = 0$ .

Una representación unidimensional (una única  $q$ ) puede verse en la Figura 14.10. La trayectoria real sería la curva  $q(t)$  en color rojo, mientras que la curva verde sería una trayectoria variada a través de  $\delta q$ . Los extremos fijos (14.2) implican que la variación es nula allí, y entonces las curvas comienzan y terminan en el mismo punto.

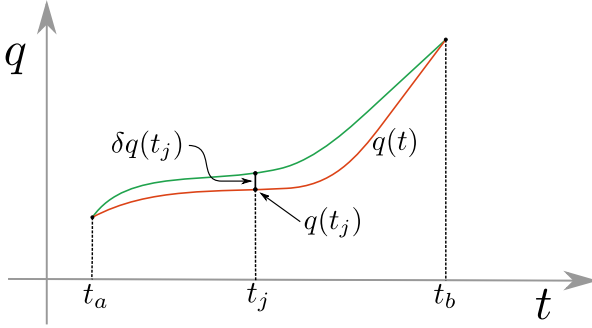
El hecho de considerar una variación a tiempo fijo  $t_j$  implica que nos situaremos arbitrariamente en ese instante y variaremos las trayectorias  $\{q_i\}$  congeladas en ese instante arbitrario. Por supuesto, el resultado debería valer para cualquier instante intermedio considerado.

La idea es determinar las condiciones que se necesitan para

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0.$$

**Habría que justificar cuál es el significado de esto y porqué es así.**

**Cuán sketchi es todo esto!!  
Mucho para aclarar. Tal vez se justifique un minicurso de variacional como apéndice.**



**Figura 14.10** El principio de acción mínima

Para ello comenzamos tomando una variación de  $S$  que pasa dentro de la integral como

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)] dt$$

y donde vemos explícitamente que es a tiempo fijo.

La variación de la integral puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt,$$

y como será útil tener todo en función de las variaciones  $\delta q_i$ , es conveniente expresar las variaciones  $\delta \dot{q}_i$  en términos de una derivada total a través de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

resultando en

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt,$$

que se puede separar en dos términos

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt,$$

Pero el primer término es una derivada total y por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt = \sum_i^N \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_a}^{t_b} \quad (14.3)$$

y es nulo porque  $\delta q_i = 0$  en los extremos para toda coordenada  $i$  (las variaciones son nulas en los extremos). Decimos que este es un término de superficie. Entonces la condición

$$\delta S = \sum_i^N \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

se verificará por el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange<sup>2</sup>

$$\sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

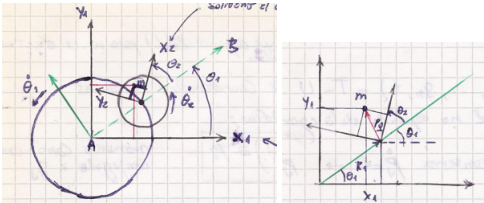
Se puede ver que

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Luego, si se hace  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df/dt$  (ambos lagrangianos difieren en una derivada total con respecto al tiempo) la trayectoria que minimiza  $\mathcal{L}'$  es la que misma que minimiza  $\mathcal{L}$  por la condición dada por (14.3).

La moraleja es que si los lagrangianos difieren en una derivada total del tiempo obtenemos la misma física.

#### EJEMPLO 14.1 Problema círculos



El disco pequeño está solidario al disco [?]. La línea AB está pintada sobre los discos para poder medir los ángulos. El eje  $x_1$  está solidario al piso (inercial).

La segunda figura ilustra el movimiento de la masa en el sistema fijo.,

$$x_1 = R_1 \cos \theta_1 + \rho \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

<sup>2</sup>Como las variaciones  $\delta q_i$  son arbitrarias e independientes la anulación de la ecuación  $\delta S$  requiere la anulación de cada uno de los  $i = 1, 2, \dots, N$  corchetes en los integrandos.



$$y_1 = R_1 \sin \theta_1 + \rho \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

Luego, hay que calcular

$$\frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$$

con

$$\dot{x}_1 = -R_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \dot{\rho} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi) - \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

$$\dot{y}_1 = R_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \dot{\rho} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi) + \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

Habría que elevar esto al cuadrado, lo cual a mano es un trabajo un poco cumbersome.

$$T = \frac{1}{2} m (R_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\rho}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})^2 + \rho^2 2 R_1 \dot{\theta}_1 [\dot{\rho} \sin(\theta_2 + \varphi) + \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \cos(\theta_2 + \varphi)])$$

y como no hay potencial, entonces  $\mathcal{L} = T$ . Trabajando con las ecuaciones de Lagrange se llega a

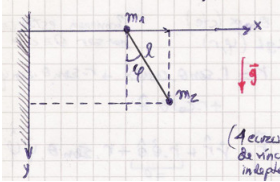
$$\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2 + \dot{\varphi})^2 - R_1 \omega_1^2 \cos(\omega_2 t + \varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} [2(\omega_1 + \omega_2)] + \frac{R_1 \omega_1 (\omega_1 + \omega_2)}{\rho} \sin(\omega_2 t + \varphi) = 0$$

Este sistema tiene dos grados de libertad  $(\rho, \varphi)$  y el lagrangiano es  $\mathcal{L}(\varphi, \rho, \dot{\varphi}, \dot{\rho}, t)$ . En realidad  $\theta_j = \theta_j(\rho, \varphi)$  para  $j = 1, 2$  y entonces  $\theta_j$  no son coordenadas generalizadas.

Este problema se puede simplificar si se asume que  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  son constantes [Esto viene antes o viene después].

#### EJEMPLO 14.2 Problema 17



Un problema de dos masas con, en principio, seis grados de libertad. Dado que el movimiento se asume que ocurre en un plano, el  $z$  por ejemplo, eso implica dos vínculos  $z_1 = z_2 = 0$  a los cuales debemos sumarle la fijación de  $m_1$  en la altura  $y_1 = 0$  y el vínculo de la barra

$$y_2^2 + (x_2 - x_1)^2 = \ell^2$$

luego es un problema de dos grados de libertad, que pueden ser elegidos como  $(x, \varphi)$ . Esto último puesto que

$$x_2 = x + \ell \sin \varphi \quad y_2 = \ell \cos \varphi.$$

Considerando  $x_1$  equivale para simplificar la notación se tiene

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{\varphi} \ell \cos \varphi \quad \dot{y}_2 = -\dot{\varphi} \ell \sin \varphi$$

Todo esto permite escribir

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (2 \dot{x} \dot{\varphi} \ell \cos \varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -m_2 g \ell \cos \varphi$$

La condición de que  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\varphi)$  implica la cantidad conservada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} (m_1 + m_2) + m_2 \dot{\varphi} \ell \cos \varphi \equiv p_x,$$

que es el momento lineal en  $x$ . Para la coordenada  $\varphi$  resulta la ecuación

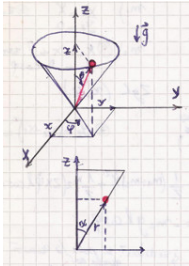
$$\ddot{x} \cos \varphi + \ell \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0,$$

mientras que para  $x$  se tiene

$$\ddot{x}(m_1 + m_2) + m_2 \ell (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) = 0.$$

Se pueden combinar para tener una ecuación para  $\varphi$  solamente. Luego esa dinámica la puedo obtener? [ver carpeta].

### EJEMPLO 14.3 Problema 7



En este problema convienen esféricas  $\theta$  constante. Tendremos dos grados de libertad  $(\varphi, r)$ . Usando las expresiones de las coordenadas esféricas (ver XXXX chap 1) se tiene

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = |\dot{r}\hat{r} + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi}|^2$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha$$

Con esto escribimos  $T$  usando que  $V = mgr \cos \alpha$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha$$

El grado de libertad  $\varphi$  tendrá asociado un momento conjugado que se conserva, pues  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi = 0$ , luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha = cte. \equiv L$$

mientras la ecuación de E-L para  $r$  arrojará

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0$$

y utilizando la conservación

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \alpha} + g \cos \alpha = 0.$$

Si ahora calculamos la energía  $E = T + V$  se obtiene

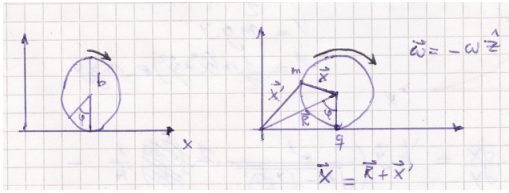
$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2 \varphi}{mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

donde los dos últimos términos constituyen un potencial efectivo.

### EJEMPLO 14.4 Cicloides y esas cosas

Tautocrona, Huygens (1773)

## Curva cicloide



Con las consideraciones de las figuras, tenemos en rápida sucesión

$$\mathbf{R} = (vt, b)$$

$$\mathbf{X}' = (-b \sin \varphi, -b \cos \varphi); \quad \varphi = \omega t$$

$$\mathbf{X} = (vt - b \sin \varphi, b - b \cos \varphi)$$

y por condición de rodadura

$$\mathbf{v}_q = 0 = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_{cm} = v\hat{x} + (-\omega)b\hat{k} \times (-\hat{y})$$

$$0 = (v - \omega b)\hat{x},$$

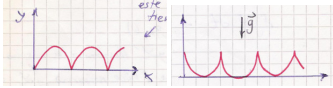
o bien  $v = \omega b$  e integrando

$$vt = \omega tb = \varphi b.$$

Con esto llego a mi ecuación paramétrica para el cicloide

$$\begin{cases} x = b(\varphi - \sin \varphi) \\ y = b(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

Este cicloide tiene gráfico



Pero necesito uno que mire hacia abajo, lo cual se logra con un cambio  $y' = -y + bz$  de modo que

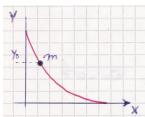
$$\begin{cases} x = b(\varphi - \sin \varphi) \\ y = b(1 + \cos \varphi) \end{cases}$$

Ahora se hace un cambio de variables nuevo

$$\frac{y}{b} = 1 + \cos \varphi \quad \frac{y-b}{b} = \cos \varphi$$

y entonces

$$x(y) = b \left( \arccos \left( \frac{y-b}{b} \right) - \sqrt{1 - ((y-b)/b)^2} \right)$$



Usando todo esto

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad V = mgy$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Derivando  $x$  y haciendo el álgebra,

$$\dot{x} = -\dot{y} \sqrt{\frac{2b-y}{y}}.$$

Utilizando toda esta información, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{mb\dot{y}}{y} - mgy$$

y las ecuaciones de E-L

$$mb \left( 2 \frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right) + mg = 0.$$

Podemos ver, con alguna experiencia, que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^2}{y} \right) = \dot{y} \left( 2 \frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} mb \frac{1}{\dot{y}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^2}{y} \right) + mg &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^2}{y} \right) &= -\frac{g}{b} \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

y ahora se puede integrar

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^2}{y} \right) dt &= -\frac{g}{b} \int_0^t \frac{dy}{dt} dt, \\ \frac{\dot{y}^2}{y} \Big|_0^t &= -\frac{g}{b} y \Big|_0^t \end{aligned}$$

Usando condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{y}(t=0) = 0 \\ y(t=0) = y_0 \end{cases} \\ \frac{\dot{y}^2}{y} &= -\frac{g}{b} y + \frac{g}{b} y_0 \\ \dot{y} &= \frac{g}{b} \sqrt{(y_0 - g)y} \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{y_0 y - y^2}} &= \sqrt{\frac{g}{b}} \int_0^t dt = \sqrt{\frac{g}{b}} t \\ \text{asin} \left( \frac{y - y_0/2}{y_0/2} \right) \Big|_{y_0}^y &= \text{asin} \left( \frac{y - y_0/2}{y_0/2} \right) - \frac{\pi}{2} \\ \frac{y - y_0/2}{y_0/2} &= \sin(\sqrt{\frac{g}{b}} t + \pi/2) = \cos(\sqrt{\frac{g}{b}} t) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{y_0}{2} (1 + \cos(\sqrt{\frac{g}{b}} t)).$$

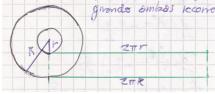
Si quiero calcular el tiempo de caída será:

$$0 = \frac{y_0}{2} \left( 1 + \cos(\sqrt{\frac{g}{b}} \tau) \right),$$

de lo cual se deduce

$$\tau = \sqrt{\frac{b}{g}} \pi.$$

La cicloide es la curva de caída por la cual se tarda el tiempo mínimo. La masa  $m$  tarda lo mínimo en caer por esta curva. Si las dos ruedas están pegadas girando ambas, recorrerán en un giro una distancia verde:



Esto no sucede: alguna de ambas deslizará.

## 1.15 Aplicaciones del principio de acción mínima

El principio variacional de Hamilton tiene más uso como herramienta formal de lo que tiene en el campo de la aplicación.

Me falta algo de esta clase inicial, pero esperamos que no sea fundamental!

$$S = \int (T - V_0) dt$$

donde el lagrangiano es con  $V = V_0$  constante (un lagrangiano sujeto a potencial constante). La integral de acción da una medida de la longitud de la órbita (el espacio recorrido). Para una partícula sujeta a  $V = 0$

$$S = \frac{1}{2} \int mv_0^2 dt = \frac{1}{2} mv_0^2 (t - t_0)$$

de manera que  $v_0(t - t_0)$  representa la distancia  $d$  recorrida, y es

$$S = \frac{1}{2} mv_0 d$$

Comentario sobre el cálculo de las variaciones

Esta idea debe estar en el suplemento matemático que le dedicaremos a variacional

$$I = \int f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) dt$$

entonces  $I$  es extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial [dx/dt]} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

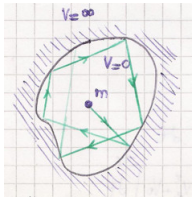
También podemos encontrar esta notación, dependiendo del tipo de problema,

$$I = \int f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx$$

### 1.15.1 Billares [otro título?]

Consideramos una partícula libre en una región del espacio (una partícula rebotando en cierta región). Podemos pensar en un potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \in D \\ \infty & x \notin D \end{cases}$$



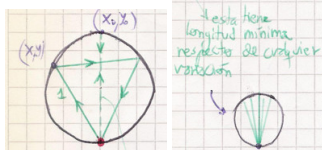
Es un pozo de potencial con una partícula libre en su interior; se los suele llamar *billares*. En este caso

$$I = \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_k(t), t) dt.$$

La integral da la longitud de la órbita (espacio recorrido)

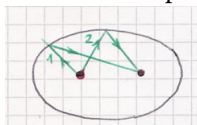
$$\frac{1}{2} m v_0^2 \int_{t_i}^{t_f} dt = \frac{1}{2} m v_0^2 (t_f - t_i)$$

En un billar circular



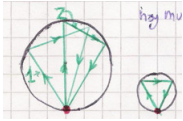
Si parto del punto rojo y quiero minimizar (extremar) la trayectoria que me da el ir hacia  $(x, y)$  y volver al punto rojo, obtendré una órbita periódica en  $(x_0, y_0)$ . Esa órbita periódica es extrema entre ir y volver al punto rojo.

En un billar elíptico



hay muchas trayectorias posibles entre los focos. El lagrangiano integrado me da todos las extremas (1, 2, ...), que por otro lado son las reales, y con las condiciones iniciales determinaré qué trayectoria extrema estará considerando.

Hay muchas trayectorias (1, 2, ...) que son posibles



$$I = \int \mathcal{L}$$

da la longitud total de todo el camino.

¿Esta sección aporta algo?

### 1.15.2 Minimización del camino entre dos puntos

Esto lo clavo por acá, después recomendarlo

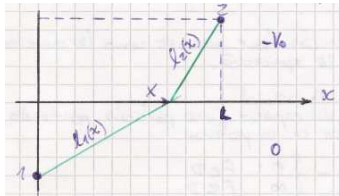


Figura 15.11

El  $\tau$  es fijo. Este problema no es como el del billar porque la velocidad no es constante [?].

$$I = \int_1^2 \mathcal{L} dt$$

pero se puede descomponer en  $I = I_1 + I_2$ ; es decir un lagrangiano para cada medio, luego

$$I = \frac{1}{2}mv_1^2 \int_0^{t_i} dt + \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + V_0\right) \int_{t_i}^{t_f} dt,$$

que al integrar da

$$I = \frac{1}{2}mv_1^2 t_i + \frac{1}{2}mv_2^2(t_f - t_i) + V_0(t_f - t_i).$$

Las condiciones geométricas del problema (ver Figura) implican que

$$v_1 t_i = \ell_1(x) \quad v_2(t_f - t_i) = \ell_2(x)$$

siendo  $\ell_i$  longitudes que dependen de  $x$ . Esto permite expresar los tiempos  $t$  en términos de la distancia  $x$  sobre la frontera. Entonces se obtiene la acción  $I$  en términos de posiciones y velocidades, i.e.

$$I = I(v_1, v_2, x) = \frac{1}{2}mv_1\ell_1(x) + \frac{1}{2}mv_2\ell_2(x) + \frac{V_0}{V_2}\ell_2(x).$$

Luego, como todo sucede a  $\tau$  fijo ( $t_f = \tau$ ) se debe tener el siguiente vínculo

$$\tau = \frac{\ell_1(x)}{v_1} + \frac{\ell_2(x)}{v_2}.$$

Entonces, diferenciando implícitamente el vínculo y la integral  $I$  obtenemos, respectivamente,

$$d\tau = 0 = \left( \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx - \frac{\ell_1}{v_1^2} dv_1 - \frac{\ell_2}{v_2^2} dv_2$$

$$dI = \left( \frac{v_1}{2} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{v_2}{2} \frac{d\ell_2}{dx} + \frac{V_0}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx + \frac{\ell_1}{2} dv_1 + \left( \frac{\ell_2}{2} - \frac{V_0\ell_2}{v_2^2} \right) dv_2 = 0$$

En esta última ecuación, si fuesen independientes los diferenciales  $dx, dv_1, dv_2$  entonces sería nulo cada paréntesis. Como no es el caso empleamos multiplicadores de Lagrange,

$$d\tau = \lambda \left( \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx - \lambda \frac{\ell_1}{v_1^2} dv_1 - \lambda \frac{\ell_2}{v_2^2} dv_2$$

y combinando

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_1}{2} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{v_2}{2} \frac{d\ell_2}{dx} + \frac{V_0}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} - \lambda \left[ \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right] \right) dx + \\ & \left( \frac{\ell_1}{2} + \lambda \frac{\ell_1}{v_1^2} \right) dv_1 + \left( \frac{\ell_2}{2} - \frac{V_0\ell_2}{v_2^2} + \lambda \frac{\ell_2}{v_2^2} \right) dv_2. \end{aligned}$$

Ahora se puede igualar a cero cada paréntesis porque consideramos independientes  $v_1$  y  $v_2$ . Entonces, se tienen

$$\lambda = -\frac{1}{2}v_1^2 \quad \lambda = -\frac{1}{2}v_2^2 + V_0$$

de manera que ha resultado la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_2^2 - V_0$$



Reemplazando en la anterior expresión, se llega a

$$v_1 \frac{d\ell_1}{dx} + v_2 \frac{d\ell_2}{dx} = 0.$$

$$\ell_1 = \sqrt{Y_0^2 + x^2} \quad \ell_2 = \sqrt{Y_f^2 + (L - x)^2}$$

$$\frac{d\ell_1}{dx} = \sin(\alpha_1) \quad \frac{d\ell_2}{dx} = -\sin(\alpha_2)$$

de modo que

$$v_1 \sin(\alpha_1) = v_2 \sin(\alpha_2),$$

que es la conclusión de la ley de Snell. Entonces podemos establecer un parangón entre mecánica clásica y óptica geométrica.

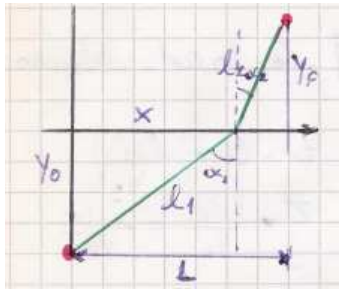


Figura 15.12

### 1.15.3 Acción mínima ejemplos

En general, dada una integral

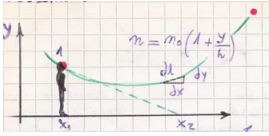
$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left(y, \frac{dy}{dt}, t\right) dt,$$

si se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial (dy/dt)} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

entonces se da que  $I$  es un extremo. Por ello esta idea es generalizable a casos no mecánicos, como veremos a continuación.

### EJEMPLO 15.1 Espejismo -problema 5-



En estos problemas debemos saber primeramente de qué punto a qué punto vamos.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} n(y) dl = \int_1^2 n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_1^2 n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Si defino  $y' = dy/dx$  y  $f = n_0(1 + y/h)\sqrt{1 + y'^2}$  se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left( n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)$$

y haciendo la derivada explícitamente

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = n_0 \left( \frac{y'^2}{h\sqrt{1 + y'^2}} + \left(1 + \frac{y}{h}\right) \left[ y'' \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y'}{2(\sqrt{1 + y'^2})^3} 2y'y'' \right] \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{n_0}{h} \sqrt{1 + y'^2}$$

Luego, juntando todo

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{h + y}.$$

Si tomamos

$$y + h = \frac{\alpha h}{n_0} \cosh \left( \frac{\alpha n_0}{\alpha h} + \beta \right)$$

$$y'' = \frac{n_0}{\alpha h} \cosh()$$

Acá, claramente, faltan cosas.

### EJEMPLO 15.2 Problema 8

Por la periodicidad se propone una serie de Fourier

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

donde  $\omega$  corresponde a la frecuencia del movimiento de subida y bajada.

$$y(0) = 0 \quad \mathcal{L} = T - V$$

$$y(t_{\text{caída}}) = 0 \quad \mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy$$

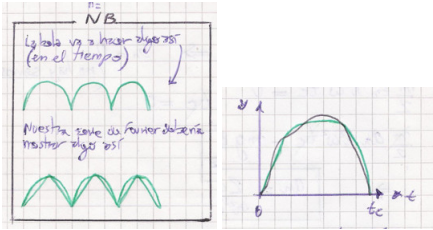
Entonces queremos lograr  $\delta I = 0$  para

$$I = \int_0^{t_c} \mathcal{L} dt$$

para hallar la mejor serie de Fourier que verifique

$$\dot{y} = \sum_n -a_n \sin(n\omega t)n\omega + b_n \cos(n\omega t)n\omega$$

y esto habría que elevarlo al cuadrado.



Quisiera ver la diferencia entre las dos trayectorias que muestra la figura.

$$y(0) = \frac{\omega}{2} + \sum a_n = y(t_c)$$

Y calculo acá las variaciones

$$0 = \delta y(0) = \delta \frac{a_0}{2} + \sum_n \delta a_n$$

$$\delta a_0 = - \sum_n 2\delta a_n \quad \text{vinculo}$$

$$I = m \int_0^{t_c} \left[ \sum_n a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t) \right]^2 dt - mg \int_0^{t_c} \left[ \frac{a_0}{2} \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] dt$$

**Anoté:** porque  $t_c$  es el tiempo de un periodo.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \cos(n\omega t) dt &= 0 & \int_0^{t_c} \sin(n\omega t) dt &= 0 \\ \int_0^{t_c} \cos^2(n\omega t) dt &= T/2 & \int_0^{t_c} \sin^2(n\omega t) dt &= T/2 \\ I &= \frac{m}{2} \left( \sum_n a_n^2 n^2 \omega^2 \frac{T_c}{2} + \sum_n b_n^2 n^2 \omega^2 \frac{T_c}{2} \right) - mg T_c \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

La integral ya está dada en función de los coeficientes de la serie, de manera que lo que faltaría es hacer variar los coeficientes y ya.

$$\delta I = -\frac{m}{2} \sum_n a_n \delta a_n n^2 \omega^2 t_c + \frac{m}{2} \sum_n b_n \delta b_n n^2 \omega^2 t_c - mg \delta \frac{a_0}{2} t_c + \frac{mg}{2} \sum_n 2\delta a_n t_c = 0$$

y como los  $\delta a_n, \delta b_n$  son independientes todos los términos serán cero por separado. Entonces

$$\frac{m}{2} b_n \delta b_n n^2 \omega^2 t_c = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0,$$

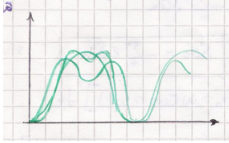
es decir que no hay senos. Por otro lado,

$$a_n = \frac{2g}{n^2 \omega^2}$$

y

$$y(t) = \sum_n \frac{1 - \cos(n\omega t)}{n^2 \omega^2 / 2g}$$

Se ve que la mejor serie de Fourier tendrá algo que se aproxima a la parábola.



Podemos ver si se llega a la altura máxima  $y_{\text{maxima}} \equiv y(t_c/2)$

$$y(t_c/2) = \frac{2g}{\omega^2} \sum_n \frac{2}{n^2} = \frac{4g}{\omega^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{gt_c^2}{6} = \frac{2v_0^2}{3g}$$

o bien

$$y(t_c/2) = \frac{2v_0^2}{3g} \quad (15.1)$$

donde

$$E = mgy_{\text{maxima}}, E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

y la altura máxima real es  $Y_{\text{maxima}} = v_0^2/(2g)$  que difiere de la que se obtiene con la serie de Fourier. Entonces, la mejor solución de entre las series de Fourier es (15.1) que difiere de la solución real. Esta solución es derivable en los nodos, mientras que la solución real no lo es.

**Este ejemplo hay que trabajarlo bastante!**

## 1.16 Multiplicadores de Lagrange

El principio variacional de Hamilton nos dice que la trayectoria real que sigue un sistema es la que extremiza la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i[t], \dot{q}_i[t], t) dt.$$

Esa condición de extremo, conducía directamente a las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt = 0 \quad (16.1)$$

donde  $\delta q_j$  eran desplazamientos independientes y esta condición significaba que el corchete debía ser nulo para todo grado de libertad  $j$ .

Pero puede suceder (en el caso de vínculos no-holónomos, por ejemplo) que no se pueda despejar alguna  $q_j$  y entonces no todos los  $\delta q_j$  son independientes.

Sí se tienen  $s$  ecuaciones de vínculo no holónomos [¿cómo es un vínculo no-holónimo? o es que se deriva una ecuación de vínculo usual??]

**Habría que tomarse medio minuto para chequear: consistencia de la notación con respecto a los límites en estas integrales de acción, definir extremización, ver si la implicancia es un sí y sólo sí o no, etc.**

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, s$$

donde  $\ell$  suma en los grados de libertad. Multiplicando por  $\delta t$  puede verse que no son independientes,

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} + b^k(q_i, t) \delta t = 0.$$

Si ahora las  $\delta q_{\ell}$  son variaciones a  $t$  fijo, entonces se cumple

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} = 0,$$

expresión que puede integrarse con respecto al tiempo y sumar sobre todas las ecuaciones de vínculo,

$$\sum_k^s \int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0.$$

El cero de esta última ecuación puede restarse del otro cero dado por la integral (16.1), suma de  $N - s$  ecuaciones con  $\delta q_{\ell}$  independientes [¿chechar esto?] con para construirmos de esa manera la ecuación

$$\int \sum_{j=1}^{N-s} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k^s \lambda^k a_j^k(q_i, t) \right\} \delta q_j dt = 0$$

y se tienen  $N - s$  ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k^s \lambda^k a_j^k(q_i, t),$$

y  $s$  ecuaciones

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0. \quad (16.2)$$

El parámetro  $\lambda^k$  es la fuerza de vínculo asociada al vínculo que no se pudo despejar. Es un multiplicador de Lagrange.

Los vínculos holónomos se pueden escribir también en la forma (16.2). Un vínculo holónomo está representado por una ecuación del tipo

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = cte.$$

de manera que para desplazamientos virtuales (donde  $\delta t = 0$ ) la derivada temporal de esta ecuación implica<sup>3</sup>

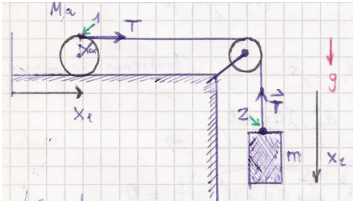
$$\sum_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

<sup>3</sup>Recordemos que para desplazamientos virtuales el término  $\partial f / \partial t$  no aparece por estar multiplicado a  $\delta t = 0$ .

y esta ecuación es precisamente de la forma  $\sum_{\ell} a_{\ell}^k \delta q_{\ell}$ .

### EJEMPLO 16.1 Resolución de sistema holónomo

Consideramos un cilindro rodando sin deslizar.



Los vínculos son relaciones entre velocidades que se pueden integrar. De la soga:

$$\dot{x}_1 + \dot{a} = \dot{x}_2$$

por el rozamiento sobre el piso:

$$\dot{\alpha} a = \dot{x}_1$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 + a \Delta \alpha &= \Delta x_2 & \Delta \alpha a &= \Delta x_1 \\ \delta x_1 + a \delta \alpha - \delta x_2 &= 0 & \delta x_1 - a \delta \alpha &= 0 \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + m g x_2$$

donde los dos términos centrales en el rhs son la cinética del cuerpo rígido.

Ahora hacemos

$$\lambda^1 (\delta x_1 + a \delta \alpha - \delta x_2) = 0 \quad \lambda^2 (\delta x_1 - a \delta \alpha) = 0$$

donde deberíamos obtener  $\lambda^1$  tensión y  $\lambda^2$  fuerza de rozamiento. Luego,

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= (\lambda^1 + \lambda^2) \\ m \ddot{x}_2 &= m g + \lambda^1 (-1) \\ I \ddot{\alpha} &= (\lambda^1 a - \lambda^2 a) \end{aligned}$$

Escribiendo las ecuaciones de Newton para este problema resulta en

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= T - F_{\text{roz}} \\ m \ddot{x}_2 &= m g - T \\ I \ddot{\alpha} &= T a + F_{\text{roz}} a \end{aligned}$$

de manera que identificamos naturalmente a

$$\lambda^1 = T \quad \lambda^2 = -F_{\text{roz}}$$

Entonces, para el caso de vínculo holónomos tendremos  $a_{\ell}^k(q_i, t) = \nabla_i f^k \cdot \delta x_i$  de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k \lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial q_j} \quad (16.3)$$

Falta entender bien principio trabajos virtuales y despl virtual ( $\delta t = 0$ )

Aclarar mil cosas: rueda un poco (máximo  $\alpha = \pi/2$ ). ¿Es una aproximación sólo válida para ángulos pequeños? El caso exacto es mucho quilombo? Sirve para algo?

Lo de los  $\delta$  pide para ser explicado y entendido.

Hay que escribir bien la conversión de  $\nabla f^k$  hacia  $\partial f^k / \partial q_j$ . Parece una boludez, pero tal vez no sea así.

Pero sabemos [sí?] que cuando existe fuerza generalizada (no proveniente de un potencial) se tenía

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \quad (16.4)$$

e igualando los miembros derechos de (16.3) y (16.4)

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k^s \lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial q_j}$$

se arriba a que

$$\lambda^k = \mathbf{F}_i^a$$

de manera que  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos que no se pudieron retirar (no despejados en las ecuaciones [?]). Si los vínculos son holónomos (pero no quise despejar) entonces son las fuerzas de vínculo.

La moraleja es que si no puedo despejar en función de coordenadas independientes sí o sí necesito introducir multiplicadores de Lagrange.

Tenía anotado que (16.4) es el lagrangiano con fuerzas no conservativas, cuando por supuesto  $\mathbf{F}$  son fuerzas no conservativas.

### Más sobre el asunto de vínculos

comparando vemos que

$$Q_j = \sum \lambda^k a_j^k(q_j, t) \quad \text{vínculos no holónomos}$$

$$Q_j = \sum \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \delta \mathbf{r}_j \quad \text{vínculos holónomos}$$

En el caso de vínculos holónomos

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

donde no quise despejar en función de  $q_1, \dots, q_n$  resulta que

$$Q_j^{\delta q_j} = \sum_i^N \lambda (\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  es un desplazamiento virtual de la partícula. Vamos a reescribir este término,

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Acá hay temas con los índices y con lo que se suma. Parece no ser la misma cosa. Tenía observado en la carpeta que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_i, t)$  y  $f(q_i, t) = 0$ .

Hay que revisar bien esta sección y meter algún ejemplo esclarecedor.

El supraíndice con  $\delta q_j$  va sobre el igual en realidad.

$$\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j^{\delta q_j} = \lambda \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

luego como

$$a_j^k \equiv \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i}$$

se sigue que los  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo.

En el caso de vínculos no holónomos  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos no retirados.

$$Q_j \delta q_j = \sum \lambda^k (\nabla_i g^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial q_j}$$

entonces  $\lambda^k = F^v$ .

Como extra escribamos que para cada grado de libertad  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k^s \lambda^k a_j^k \equiv 0$$

donde  $\delta q_j$  son ahora independientes.

$$Q_j = \sum_i^N F_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

### EJEMPLO 16.2 Moneda rodando por un plano

Consideramos una moneda que rueda libremente por un plano (no sujeta a potencial). Situaremos un sistema de ejes sobre la moneda, que etiquetaremos 123 y otro fijo fuera de la misma xyz.

$$\mathbf{V}_{cm} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -(\dot{\phi} \hat{2} + \dot{\psi} \hat{3}) \times (-a \hat{2})$$

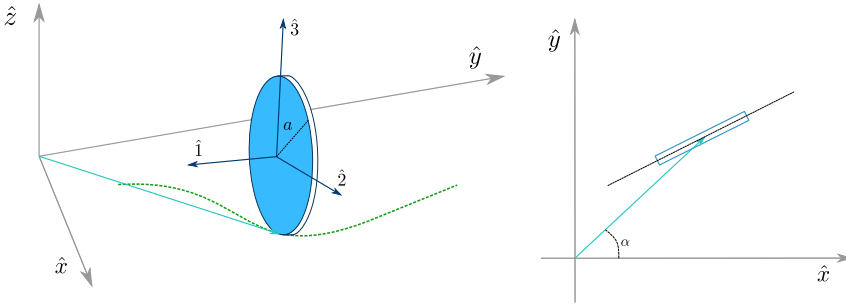
$$\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = -a \dot{\psi} \hat{1}$$

siendo los vínculos

$$z_{cm} - a = 0 \quad \theta = \pi/2 \quad |\mathbf{V}_{cm}| = a \dot{\psi}$$

de tal modo que son dos grados de libertad. Los vínculos provienen de la rodadura y de considerar que la moneda permanece en todo momento vertical, aunque pueda cambiar la dirección de su





**Figura 16.13** Moneda que rueda libremente por un plano. Intercambié ejes 2 y 3 respecto del dibujo anterior.

velocidad. En este problema se deben utilizar multiplicadores de Lagrange de manera obligada. El lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \dot{\psi}^2.$$

Como los vínculos dependen de la velocidad, resulta

$$\dot{y} = a \dot{\psi} \cos(\psi) \sin(\phi) = a \sin(\phi) \dot{\psi}$$

$$\dot{x} = a \dot{\psi} \cos(\psi) \cos(\phi) = a \cos(\phi) \dot{\psi}$$

de tal manera que

$$\dot{y} - a \sin(\phi) \dot{\psi} = 0 \quad \dot{x} - a \cos(\phi) \dot{\psi} = 0$$

y luego esto equivale a

$$\lambda_1 (dy - a \sin(\phi) d\psi) = 0 \quad \lambda_2 (dx - a \cos(\phi) d\psi) = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Podemos escribir

$$m \ddot{x} = \lambda_1 \quad m \ddot{x} = m a \frac{d}{dt} (\cos(\phi) \dot{\psi})$$

$$m \ddot{x} = m a (-\sin(\phi) \dot{\phi} \dot{\psi} + \cos(\phi) \ddot{\psi})$$

$$m \ddot{y} = \lambda_2$$

$$I_2 \ddot{\phi} = 0 \quad I_3 \ddot{\psi} = -\lambda_2 a \sin(\phi) - \lambda_1 a \cos(\phi)$$

$$\hat{1} = \cos(\psi) [\sin(\phi) \hat{y} + \cos(\phi) \hat{x}]$$

No entiendo/recuerdo lo que quise decir con la expresión bajar los ejes. Calculo que se relaciona con la proyección de los ejes 123 en xyz. Confirmarlo.

### 1.16.1 Soluciones aproximadas

Puedo tomar un subconjunto pequeño de funciones y restringirme a buscar cua es la mejor función de ese conjunto en el sentido de extremar  $I$ :

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt,$$

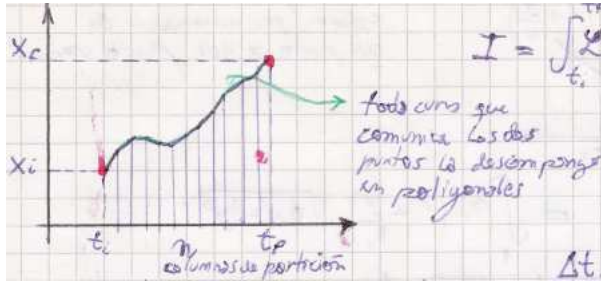


Figura 16.14

donde el subconjunto de las funciones  $q_1, q_2, \dots, q_n$  las tomo de algún subconjunto en particular. Por ejemplo,

$$q_1^f = a_0 + a_1 t_f + \dots \quad q_1^i = a_0 + a_1 t_i + \dots$$

### 1.16.2 Oscilador armónico

Considero un oscilador armónico en una dimensión.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

Quiero resolver de manera aproximada el oscilador armónico y ver que está bien. Si considero  $n \rightarrow \infty$  tengo infinitos parámetros y puedo parametrizar cualquier curva que una los puntos inicial y final.

comments del gráfico: toda curva que comunica los dos puntos la descompongo en poligonales. Columnas de partición

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt$$

Parto el intervalo y considero una partición de  $N$  cachos.

$$\Delta t N = t_i - t_f$$

donde  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ . Luego la versión discreta de la integral es

$$I \approx \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{1}{2} m \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t^2} - \frac{1}{2} k x_i^2 \right) \Delta t$$

Tomamos la derivada

$$\frac{\partial I}{\partial x_j} = \left( m \frac{(x_j - x_{j-1})}{\Delta t^2} - m \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\Delta t^2} \right) \Delta t - k x_j \Delta t$$

e igualándola a cero,

$$\frac{m}{\Delta t^2}(-2x_j + x_{j-1} + x_{j+1}) + kx_j = 0$$

que se puede escribir como

$$\frac{m}{\Delta t} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} - \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \right) + kx_j = 0$$

y que en el límite continuo va a

$$m\ddot{x} - kx = 0.$$

### EJEMPLO 16.3 Geodésicas

La idea es extremizar la distancia entre dos puntos de una dada geometría. En el caso del plano se tiene

$$I = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

donde se ha definido  $\dot{y} \equiv dy/dx$ . Evidentemente si la geometría es plana, la curva que extremiza el intervalo tiene que ser una recta. Veámoslo. Las ecuaciones de Euler Lagrange se reducen a:

$$\frac{d}{ddx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0,$$

las cuales nos dicen que

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C$$

donde  $C$  es una constante. No es difícil ver que esta ecuación lleva a

$$y(x) = C_1 x + C_2$$

para  $C_1, C_2$  constantes. Esta es la ecuación de una recta en el plano.

#### Un ejemplo más sofisticado

Si a una curva  $z = z(x)$  como la que se ilustra en la figura se la hace girar en torno al eje  $z$  se tiene una superficie de revolución. Un punto tridimensional en esa superficie se puede parametrizar en términos de coordenadas cilíndricas  $\rho, \theta, z$  según

$$\begin{cases} x = \rho(z) \cos(\theta) \\ y = \rho(z) \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

donde el hecho de que la superficie es 2D se trasluce en que cada coordenada cartesiana 3D  $x, y, z$  depende a lo sumo de dos variables  $\theta, z$ .

La trayectoria mínima entre dos puntos provendrá otra vez de extremar

$$I = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

pero utilizando la restricción de la superficie dada por las ecuaciones XXX. Utilizando la prima para denotar la derivada con respecto a  $z$  se tiene

$$dx = \rho' \cos \theta dz - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \rho' \sin \theta dz + \rho \cos \theta d\theta$$

Creo que se puede usar que uno conoce diferencias finitas algo. El final parece no estar muy claro en la carpeta. Hacer la cuenta a mano bien.

Este material es parte de una clase práctica. Habría que ver de hacerlo encajar mejor.

$$I = \int \sqrt{\rho'^2 dz^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

que se puede poner en términos de la derivada con respecto a  $z$  sacando como factor común su diferencial. Entonces

$$I = \int \sqrt{(\rho'^2 + 1)dz^2 + \rho^2 \theta'^2 dz}$$

donde tanto  $\rho$  como  $\theta$  son funciones de  $z$ . El lagrangiano es función de  $\theta', \rho, \rho'$

Si calculamos las ecuaciones de Euler Lagrange para  $\theta$  (que son las más fáciles puesto que la dependencia es solo de la derivada) se llega a

$$\frac{\rho \rho' \theta'}{\sqrt{(\rho'^2 + 1) + \rho^2 \theta'^2}} = C$$

que se puede, haciendo el álgebra correspondiente, lleva a la forma explícita

$$\theta(z) = C_1 \int \frac{\sqrt{\rho'^2 + 1}}{2\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} dz + C_2, \quad (16.5)$$

que es una ecuación genérica para una superficie en rotación. Es decir, que recorrer la curva de longitud mínima por esa superficie debe hacerse avanzando en  $\theta$  según la prescripción dada por (16.5).

Si la superficie fuera un cilindro, de radio  $a$ , por ejemplo, se tendría  $\rho = a$  de modo que la (16.5) se integra inmediatamente para dar

$$\theta(z) = C_1 \frac{z}{a\sqrt{a^2 - C_1^2}}.$$

Luego, para dos puntos separados verticalmente una distancia  $h$  (ver figura) sobre la superficie del cilindro se tiene que la curva que representa la distancia mínima es una hélice en el cilindro, de paso  $h$ . Si la superficie lateral de este cilindro se desplegase sobre un plano, esa curva es una recta.

### Superficie general en 3D

Si la partícula debe *caminar* en la superficie  $\Omega$  entonces tal vez se pueda expresar como  $z = z(x, y)$  de tal forma se tendrá

$$I = \int f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt$$

Luego, la derivada total de  $z$  será

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}$$

y entonces

$$I = \int f(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}) dt.$$

Planteando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\dot{x}} \right) - \frac{df}{dz} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{y}} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\dot{y}} \right) - \frac{df}{dz} \frac{d\dot{z}}{dy} = 0$$

las cuales se pueden simplificar usando la derivada total,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) \frac{dz}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dx} \right) + \frac{df}{dz} \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

**Los dos últimos términos  
tienen que aparecer tachados.**

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) + \frac{dz}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{y}} \right) + \frac{dz}{dy} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right) &= 0\end{aligned}$$

y como

$$\frac{dG}{dx} \dot{x} + \frac{dG}{dy} \dot{y} + \frac{dG}{dz} \dot{z} = 0,$$

se sigue que

$$\dot{z} = - \left( \frac{dG}{dx} \dot{x} + \frac{dG}{dy} \dot{y} \right) \frac{1}{dG/dz}$$

o bien

$$\dot{z} = - \left( \frac{G_x}{G_z} \dot{x} + \frac{G_y}{G_z} \dot{y} \right)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) + \frac{G_x}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{y}} \right) + \frac{G_y}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right) &= \lambda(t) G_z\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{G_x} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) = \frac{1}{G_y} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{y}} \right) = \frac{1}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{z}} \right)$$

Esta expresión puede simplificarse como

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$$

si el parámetro  $t$  es  $s$

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} ds$$

y entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) = \ddot{x}$$

de manera que la ecuación de la geodésica es

$$\frac{1}{G_x} \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{G_y} \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{G_z} \frac{d^2 z}{ds^2}$$

Ahora, si consideramos

$$I = \int [f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \lambda G(x, y, z)] dt$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{d\dot{x}} \right) - \lambda G_x = 0$$

y es un vínculo que hay que integrar, y es mucho más difícil.

Volviendo a la superficie general

$$I = \int \left[ \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \lambda G \right] dt$$

$$T = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = cte. \equiv k$$

y entonces  $s = kt$

$$k^2 m \ddot{x} - \lambda G_x = 0$$

$$k^2 m \ddot{y} - \lambda G_y = 0$$

$$k^2 m \ddot{z} - \lambda G_z = 0$$

$$G(x, y, z) = 0$$

La partícula se mueve en una geodésica

$$\frac{\ddot{x}}{G_x} = \frac{\ddot{y}}{G_y} = \frac{\ddot{z}}{G_z}$$

## 1.17 Potenciales dependientes de la velocidad

Hasta el momento se consideró que el potencial  $V$  dependía únicamente de la posición y resultaba eso en una fuerza generalizada [la llamé así?]

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

para la cual el  $\mathcal{L} \equiv T - V$  cumplía las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (17.1)$$

Si en cambio se tiene un potencial dependiente, además, de la velocidad,

$$U = U(q_1, \dots, q_2, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

y se requiere que sigan valiendo las ecuaciones (17.1) para  $\mathcal{L} \equiv T - U$ , necesitaremos evidentemente

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

una fuerza generalizada que depende de posiciones y velocidades.

El ejemplo canónico de una tal fuerza es la fuerza de Lorentz, que es la que sufre una partícula de carga  $q$  en presencia de un campo electromagnético dado por campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y cuya forma es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.2)$$

Esta fuerza (17.2) puede expresarse en términos de dos potenciales. Para ello es necesario recurrir a las relaciones que verifican los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y que están dadas por las ecuaciones de Maxwell, cuyo esquema se presenta en la siguiente tabla.

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Dado que la divergencia de  $\mathbf{B}$  es nula, entonces existe un potencial vector  $\mathbf{A}$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Entonces, la ley de Faraday resulta

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

o bien

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

La cantidad entre paréntesis es de rotor nulo y entonces se puede escribir

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$$

de manera que los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  pueden expresarse en términos de una función escalar  $\varphi$  y un campo vectorial  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Entonces, en términos de estos potenciales (17.2) resulta

$$\mathbf{F} = -q\nabla\varphi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}.$$

Supongamos, para simplificar el razonamiento, que es  $\mathbf{F} = F_x \hat{x}$  y veamos que

$$F_x = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c} (v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y)$$

se puede escribir

$$F_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Desarrollando explícitamente el rotor se tiene

$$(v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y) = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

donde se ha sumado y restado la conveniente combinación  $v_x \partial_x A_x$ . Dado que las velocidades y las posiciones son variables independientes (se verifica  $\partial_a v_b = 0$  para cualquier combinación  $a, b = x, y, z$ ) se puede *filtrar* la velocidad dentro de las derivadas para reescribir

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Los tres términos restantes en derivadas respecto de  $A_x$  no son otra cosa que una derivada total,

$$-\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla (A_x) \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt}$$

Luego, se fuerza la aparición de una derivada con respecto a la velocidad (para obtener una expresión en consonancia con la búsqueda) del siguiente modo

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}),$$

y juntando todo resulta

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} \left( -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right).$$

Como  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ , se la puede incluir dentro de la derivada con respecto a la velocidad obteniendo finalmente el resultado buscado

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right),$$

donde

$$U = q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

Se puede demostrar directamente la fórmula anterior desde la expresión vectorial de  $\mathbf{F}$  utilizando su equivalente indicial, es decir a partir de

$$F_i = -q\partial_i\varphi - \frac{q}{c} \partial_t A_i + \frac{q}{c} \epsilon_{ilm} v_l \epsilon_{mjk} \partial_j A_k$$

que es la coordenada  $i$ -ésima de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Utilizando las propiedades del símbolo de Levi-Civita se tiene

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i + (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj})v_l \partial_j A_k]$$

y, tras colapsar las deltas, y reordenar términos

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i - v_j \partial_j A_i + v_k \partial_i A_k].$$

**Mucho para tener en cuenta:**  
resumen previo de notación  
indicial, resumen de classical  
field theory. Aclarar que  
posición y velocidad son  
independientes.



Como el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  no depende explícitamente de  $\mathbf{x}$  se puede introducir  $v_k$  a través de la derivada  $\partial_i$ . Además los dos primeros términos del corchete representan la derivada total de  $A_i$  de manera que tenemos

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} \left[ -\frac{d}{dt}(A_i) + \partial_i(v_k A_k) \right],$$

o bien

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c}(v_k A_k) \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{c} A_i \right).$$

Se puede hacer aparecer explícitamente lo faltante dentro de la derivada total notando que se puede escribir de manera absolutamente general

$$\frac{q}{c} A_i = \frac{\partial}{\partial v_i} (-q\varphi + \frac{q}{c} v_k A_k)$$

dado que  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$  son funciones de la posición y el tiempo solamente. Luego,

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c}(v_k A_k) \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i} (q\varphi - \frac{q}{c} v_k A_k) \right]$$

y esto significa que el potencial completo es

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = q\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).$$

En el ejemplo de la fuerza de Lorentz se desprecia el campo generado por la misma partícula que se mueve. Es decir, que el campo externo no es afectado por el movimiento de la partícula. Una formulación lagrangiana que lo tuviera en cuenta debería considerar un  $\mathcal{L}_p$  para la partícula.

## 1.18 Cambio de *gauge* en potenciales

Según se vio en la sección anterior, en el caso del electromagnetismo tenemos un potencial  $U$  que depende de la posición y la velocidad de una manera muy especial. Además el potencial escalar  $\varphi$  usual en la electrostática fue necesario definir un potencial vector  $\mathbf{A}$  que estaba vinculado con el campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Solamente se le pide al campo  $\mathbf{A}$  que su rotor sea  $\mathbf{B}$  y esto no lo determina por completo. En particular si se define

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

un nuevo potencial  $\mathbf{A}'$  que difiere del original por el añadido del gradiente de una función escalar, las ecuaciones de movimiento no se ven alteradas. En efecto, la divergencia del campo magnético  $\mathbf{B}$  es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\nabla \times \nabla f) = 0$$

donde el cero se logra porque cada uno de los dos miembros es cero por separado. Asimismo, como el rotor de un gradiente es nulo, el rotor de  $\mathbf{B}$  no se ve alterado;

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times (\nabla \times \nabla f) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Luego, hay un grado de libertad extra en la determinación del  $\mathbf{A}$  que es esta función escalar  $f$ , y que se suele expresar dando la divergencia de  $\mathbf{A}$ . En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f.$$

La divergencia de  $\mathbf{A}$  se puede elegir entonces arbitrariamente y esto es lo que se conoce como la *libertad de gauge*[?] o el cambio de *gauge* del potencial. Descansa en el hecho de que las ecuaciones de movimiento son, por supuesto, independientes del gauge elegido.

Chequear esta mini subsección.