

## Capítulo 1

---

# Teorema de Green

## 1.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras (cargas imagen) las condiciones de contorno.

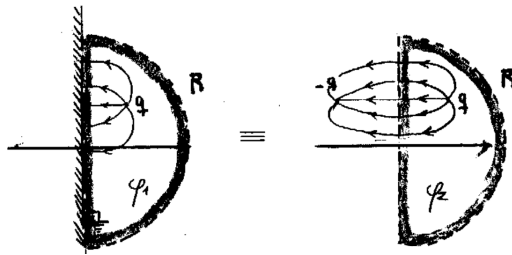


Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma:  $\phi_1 = \phi_2$  por unicidad.

### 1.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el  $\phi$  de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación

elemental.

Restando entre sí

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

y

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \int_S [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \in R, \mathbf{x} \in R$$

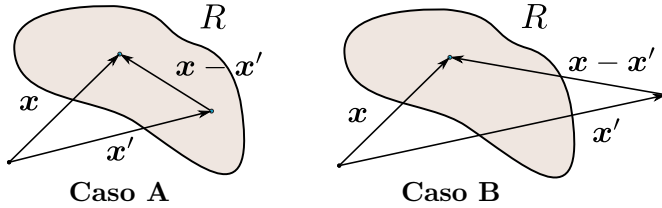


Figura 1.2

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \nabla^2 \psi = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$-\phi(\mathbf{x})4\pi + \int_V 4\pi \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

donde estamos usando la abreviatura  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$  que es la derivada normal en la superficie. Despejando

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \right) dS,$$

donde la primer integral es debido a las cargas internas y la segunda al efecto de las cargas fuera del recinto  $R$ .

Recordemos que las condiciones tipo Dirichlet corresponden a  $\phi|_S$  y las tipo Neumann a  $\partial\phi/\partial\hat{n}|_S$ .

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \notin R, \mathbf{x} \in R$$

y

$$\int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS,$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de  $R$  que producen campo en el interior  $R$ .

Hemos tomado  $\psi = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  que verifica [1]; interpretándose  $\psi$  como el potencial de una carga puntual unitaria.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

podemos tomar

$$G \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

donde  $G$  es la función de Green, el potencial de una carga unidad situada en  $\mathbf{x}'$  calculado en  $\mathbf{x}$ . Luego, se tiene

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \nabla^2 f$$

donde  $f$  satisface Laplace (si el recinto no incluye a  $\mathbf{x}'$ ). Es decir que  $\nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ .

Entonces  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  representan la o las imágenes necesarias para que  $G$  cumpla el contorno necesario  $G_D|_S = 0$ .

## 1.2 Funciones de Green

El teorema de Green me da una expresión integral para el potencial  $\phi$ . En efecto,

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi(\mathbf{x}')}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS', \quad (2.1)$$

y si  $\mathbf{x} \notin V$ , se tiene

$$0 = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left( G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}') - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS'. \quad (2.2)$$

Pero para poder utilizar (2.1) necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno, de manera que según sean

$$\text{Dirichlet} \quad \begin{cases} G_D : \nabla^2 G_D = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ G_D|_{\text{contorno}} = 0 \\ \phi|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G_D \rho \, dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial}{\partial n} G_D \, dS' \end{cases}$$

donde la condición de contorno de  $G$  equivale, en el contexto físico del electromagnetismo, a reemplazar el contorno por un conductor metálico puesto a tierra. Entonces  $G$  es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi_2}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma \quad \phi_2|_S = \phi_1|_S$$

$$\text{Neumann} \quad \begin{cases} G_N : \nabla^2 G_N = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ \nabla G_N \cdot \hat{n}|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle|_S + \int_{V'} G_N \rho \, dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S G_N|_S \frac{\partial G_N}{\partial n} \, dS \end{cases}$$

### 1.2.1 Función de Green libre

La ecuación de Green libre

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

que representa una superficie infinita con condición de contorno  $\phi(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) = 0$  lleva directo a la integral de Poisson. En efecto sería como no tener contornos (tenerlos en infinito es no tenerlos). Entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \, dV = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV'$$

que es la integral de Poisson. La ecuación de Poisson se recupera teniendo en cuenta que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

En este caso, Dirichlet y Neumann llevan a la misma solución porque potencial y campo son nulos en los contornos.

### 1.2.2 Sobre el caso de Neumann

Para condiciones de Neumann se toma:

$$\nabla G_N|_S = -\frac{4\pi}{S} = \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S$$

la integral

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S dS$$

no se puede anular con

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0$$

salvo que el volumen de integración no contenga a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  en cuyo caso: se excluye  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  de la integración.

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S dS = \frac{1}{S} \int_S \phi|_S dS = \langle \phi \rangle|_S$$

que es el valor promedio de  $\phi$  en la superficie  $S$ .

Se suele tomar la superficie  $S \rightarrow \infty$  de modo que resulte nulo  $\langle \phi \rangle|_S$ . Se toma el volumen  $V$  rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito entonces

$$\langle \phi \rangle|_S = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0$$

esto es el llamado *problema exterior*.

### 1.2.3 Green para el problema externo de una esfera

La configuración es una carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra. La idea aquí es conocer dónde ubicar la imagen  $q'$  para que se verifique el contorno, es decir que el potencial será ahora el correspondiente a las dos cargas

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}$$

y debe cumplir que

$$\varphi(\mathbf{x})|_{r=a} = 0,$$

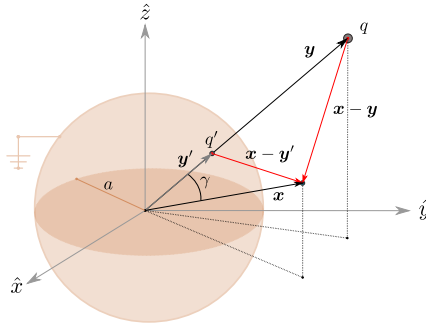
Este título sería “Ejemplo método de imágenes”. En realidad este es un ejemplo de cálculo de función de Green; así fue dado en la teoría.

por la conexión a tierra. Para ajustar esta condición se tienen dos variables, la magnitud de la carga  $q'$  y su posición  $\mathbf{y}'$ . No obstante, la simetría de la configuración establece ciertas restricciones para la posición  $\mathbf{y}'$ ; en efecto para el problema de una carga frente a una esfera el eje que une el centro de la esfera con la carga es un eje de simetría de revolución; si la esfera gira en torno a ese eje la configuración es la misma. Luego, la carga imagen debe ser tal que no rompa esa simetría: debe estar localizada en dicho eje. Entonces  $\mathbf{y}'$  y  $\mathbf{y}$  son colineales y la posición incógnita requerida es solamente el módulo  $y' = |\mathbf{y}'|$ .

Los módulos en los denominadores pueden expresarse en términos de la ley de los cosenos, como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \gamma}},$$

donde  $x, y$  son los módulos respectivos.



**Figura 2.3** Geometría para el problema de la carga puntual  $q$  frente a una esfera metálica de radio  $a$  conectada a tierra.

Luego, la condición de contorno evaluada sobre la superficie de la esfera  $|\mathbf{x}| = a$  implica que

$$\varphi(\mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=a} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2ay' \cos \gamma}} = 0,$$

y entonces se tienen que obtener ahora  $q, y'$  a partir de esta ecuación que en realidad representan infinitas direcciones dado que  $\gamma$  puede ser cualquier ángulo entre 0 y  $2\pi$ . Se necesitarán dos ecuaciones para resolver unívocamente el problema. Si se eligen  $\gamma = \pi$  y  $\gamma = 0$  la ecuación anterior

define el sistema

$$\begin{cases} \frac{q}{y-a} + \frac{q'}{a-y'} = 0 \\ \frac{q}{a+y} + \frac{q'}{a+y'} = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el par

$$q' = -\frac{a}{y} q, \quad y' = \frac{a^2}{y},$$

y entonces

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} - \frac{(a/y)q}{\sqrt{x^2 + a^4/y^2 - 2x(a^2/y) \cos \gamma}}.$$

El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  del espacio, debido a una carga en  $\mathbf{y}$  depende de los módulos  $x, y$  y del ángulo  $\gamma$  entre dichos vectores.

Esta solución puede obtenerse un poco más heurísticamente, ver nota 1.7.

Lo que sucede físicamente es que se induce carga sobre la superficie de la esfera. Se querrá ver (luego?) cuál es la distribución de carga que se inducirá sobre la superficie.

Parece ser una constante que si elegimos las cosas del modo más simétrico posible, las expresiones resultan más sencillas.

Esta expresión, así como está, no se halla en ningún sistema de coordenadas en particular.

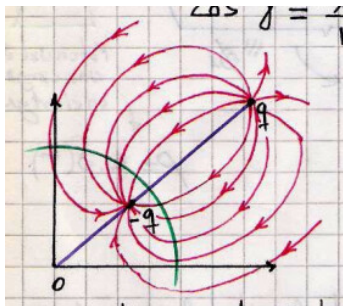
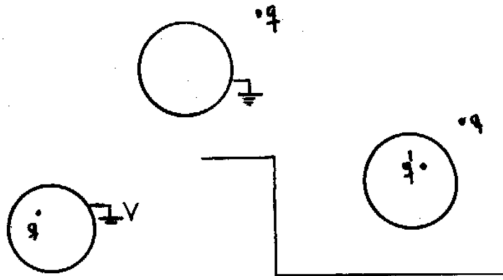


Figura 2.4

Este ejemplo ha servido también para mostrar la determinación de la función de Green para la configuración dada por una esfera aterrizada (condiciones de Dirichlet), que sería

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a/|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - (a^2/|\mathbf{y}|)\hat{\mathbf{y}}|}$$



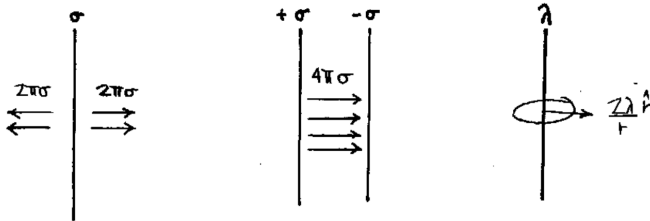
**Figura 2.5**  $G_D$  es el potencial de la configuración (a) y se evalúa teniendo en cuenta la otra (b) que se resuelve casualmente por imágenes. La (c) se resuelve alterando las condiciones.

El caso (c) de la Figura se resuelve con

$$\begin{aligned} -\frac{V}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS &= -\frac{V}{4\pi} \int_S \nabla G \cdot d\mathbf{S} = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G dV \\ &= -\frac{V}{4\pi} (-4\pi) \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V \end{aligned}$$

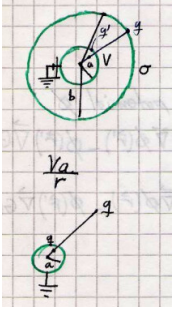
### 1.2.4 Algunos campos

En distribuciones infinitas de carga la integral de Poisson diverge pero ello se debe a que en realidad no existen distribuciones infinitas de carga.



#### EJEMPLO 2.1 Problema 1





Primeramente se calculan los valores de la carga imagen, los cuales, para un sistema de coordenadas esféricas, son

$$q' = -\frac{a}{r}q \quad r' = \frac{a^2}{r}.$$

Se ve que cumplen los límites razonables. Luego, habría que hacer el potencial nulo mandando el engendro a tierra y luego se le suma algo que de potencial  $V$  en  $r = a$ .

La función de Green por imágenes será

$$G_D = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2\mathbf{x}'|},$$

la cual cumple que sobre la superficie es nula.

Subsecuentemente,

$$\rho(\mathbf{x}') = \sigma\delta(r - b), \phi(\mathbf{x}')|_S = V, \phi(\mathbf{x}')|_{S_{R \rightarrow \infty}} = 0$$

y

$$\int \rho(\mathbf{x}') dV = 4\pi b^2\sigma$$

$$\int \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV = \int \frac{b^2\sigma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS$$

siendo  $b = |\mathbf{x}'|$ . Poniendo manos a la obra en la integral (en esféricas)

$$\begin{aligned} \int \frac{b^2\sigma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS &= \int dt \int d\Omega r^2 \sigma \delta(r' - b) \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2\mathbf{x}'|} \right] \\ &= \int d\Omega \sigma b^2 \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{r'|\mathbf{x} - a^2/r'^2\mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

donde el primer término es el potencial de un casquete, que es

$$\begin{cases} \frac{4\pi b^2\sigma}{r} & \text{si } r > b \\ 4\pi b^2\sigma & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y el segundo término se puede trabajar para llegar a

$$\frac{b^2a}{r} \int d\Omega \sigma \frac{-1}{|a^2/r^2\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Pero recordemos que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial r^2} = \frac{a^2}{r} < a$$

Juntando todo

$$\begin{cases} \frac{4\pi b^2 \sigma}{r} - \frac{a}{r} 4\pi \sigma b & \text{si } r > b \\ 4\pi b^2 \sigma - \frac{a}{r} 4\pi \sigma b & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

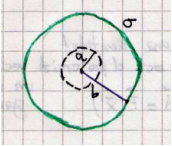
Y se tiene

$$-\frac{1}{4\pi} \int \phi(\mathbf{x}') \nabla' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS' = \frac{V}{4\pi} \int \nabla' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dS' = V Q_n,$$

donde en el último paso se ha usado el teorema de la divergencia. Luego, como  $Q_n = -a/r$  se tiene

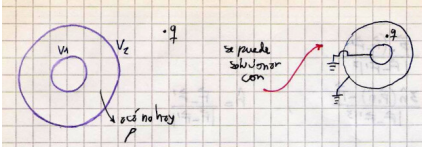
$$\phi = \frac{Va}{r}$$

que entonces en  $r = a$  es  $V$ .



Esto conviene hacerlo integrando en esféricas con  $\mathbf{x} \parallel \hat{z}$ .

### EJEMPLO 2.2 Comentario superposición



## 1.3 Condiciones de contorno para el campo eléctrico

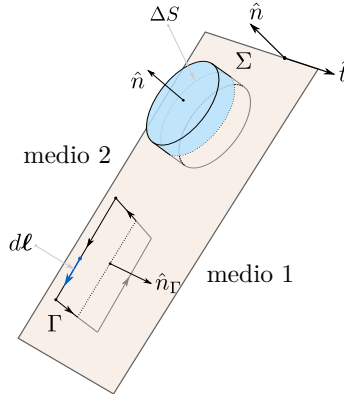
Consideraremos la superficie de separación entre dos medios 1 y 2, la cual puede estar cargada, y sobre la misma imaginaremos un cilindro pequeño  $\Sigma$  de tapas paralelas a la superficie y altura despreciable y asimismo, un circuito cerrado  $\Gamma$  también de altura despreciable perpendicular a la superficie, ver figura.

La normal a la superficie es  $\hat{n}$  mientras que  $\hat{t}$  es un versor tangente a la misma.

La ley de Gauss establece para el cilindro  $\Sigma$  que

$$\int_{S_\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_n,$$

donde  $S_\Sigma$  es la superficie total del cilindro y  $Q_n$  la carga neta encerrada. Como la superficie lateral es despreciable, por serlo la altura, la integral

**Figura 3.6**

de superficie se reduce a la de las tapas. Si la densidad de carga sobre la superficie es  $\sigma$  entonces

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S$$

o bien

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

lo cual implica que la componente normal del campo  $\mathbf{E}$  es discontinua si hay carga superficial presente.

Por otra parte, como el rotor de  $\mathbf{E}$  es nulo (en electrostática), el teorema de Stokes implica

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} = 0 = \int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

y despreciando el aporte de las partes del circuito que son perpendiculares a la superficie, resulta

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{n}_\Gamma \times \hat{n}) d\ell = 0$$

donde en el miembro derecho se ha expresado la dirección del  $d\boldsymbol{\ell}$  en función de los versores normal y tangencial, y entonces

$$\hat{n}_\Gamma \cdot (\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) = 0,$$

que indica que el segundo factor tiene que ser nulo, es decir

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

No sé si no decir directamente que en electrostática es nula la integral de línea de  $\mathbf{E}$  y ya.

y esto implica que la componente tangencial del campo es continua, sin importar que exista carga o no.

Entonces el trabajo yendo del medio 1 al 2 será nulo

$$W_{1 \rightarrow 2} = 0 = q(\phi_2 - \phi_1),$$

lo cual implica que  $\phi_2 = \phi_1$  porque la discontinuidad del campo es finita. Como veremos luego, esto no vale en el caso de una capa dipolar.

Resumiendo

$$E_{2\hat{n}} - E_{1\hat{n}} = 4\pi\sigma \quad E_{2\hat{t}} - E_{1\hat{t}} = 0$$

Expresando el campo en términos del potencial, se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla\phi_2 \cdot \hat{n} + \nabla\phi_1 \cdot \hat{n} &= 4\pi\sigma \\ \frac{\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n}}{4\pi} &= \sigma \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.1)$$

esta es la densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios.

### 1.3.1 Carga puntual frente a esfera puesta a tierra

Volvemos a este problema, recordando que el potencial fuera de la misma se hubo determinado por el método de imágenes. Recordemos también que dentro de la esfera el potencial debe ser constante (no hay carga allí, puesto que la imagen es un dispositivo virtual sin existencia física). Consideramos dos secciones, interna y externa.

Por la simetría del problema la densidad de carga inducida tiene la simetría de revolución en torno al eje que pasa por  $q, q'$  y el origen de coordenadas y será máxima en el punto de la esfera más cercano a  $q$ . Dado que el potencial es constante dentro de la esfera, e igual al valor que toma sobre la superficie, la ecuación (3.1) es

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S.$$

Ubicando nuestra esfera en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, la normal externa  $\hat{n}$  es claramente  $\hat{r}$  de modo que derivar normalmente es derivar con respecto a la dirección radial, es decir  $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$  y entonces

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \frac{[1 - (a/y)^2]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}.$$

**Acordate que harcodeaste con un pdf el  $\ell$  bold.**

**Hay que ver la relación de esto con lo anterior; creo que no estoy entendiendo, o explicando, bien.**

La definición de derivada normal puede ir para apéndice.

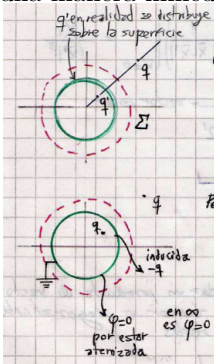
Si consideramos ahora el problema interno; esto es, una carga  $q$  rodeada por una esfera conductora conectada a tierra, se pueden hacer los mismos razonamientos que en el caso de la carga exterior y la solución es la misma intercambiando  $q'$  por  $q$  y  $y'$  por  $y$ . Entonces, en ese caso el cálculo de la densidad utiliza  $\hat{n} = -\hat{r}$  y se tiene

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{y} \right) \frac{[(a/y)^2 - 1]}{[1 + (a/y)^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^{3/2}}$$

La carga total inducida sobre una superficie se evaluará en general a través de

$$Q = \int_S \sigma dS.$$

En el caso anterior del problema de la carga frente a una esfera a tierra se puede utilizar la ley de Gauss para hallar en cada caso la carga total de una manera inmediata.



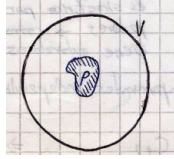
Situando una superficie gaussiana  $\Sigma$  por fuera de la esfera, como se ve en la figura, resulta que la carga encerrada neta es la misma con imagen o sin imagen. En efecto, en el problema real la carga encerrada se distribuye sobre la superficie mientras que en el problema equivalente está concentrada en la posición  $y'$  y sabemos que es  $q'$ ; luego como los dos problemas son equivalentes el lado derecho de la ley de Gauss debe ser idéntico y la carga inducida será la neta encerrada, que es  $q'$ , la carga imagen.

Procediendo de modo similar para el problema interno (ahora  $q'$  está por fuera de la superficie  $\Sigma$ ), ahora la situación es diferente porque el campo sobre es nulo (solo es no nulo fuera de la esfera por la conexión a tierra). Entonces la ley de Gauss ya nos dice ahí que la carga neta es nula y ello lleva a que la carga inducida sea  $-q$  que no es igual a la carga imagen.

Acá debiera estar claro que se invierte el significado de  $y'$ , ahora es mayor que  $a$ .

### 1.3.2 Principio de superposición

Consideremos la situación depicted en la figura



**Figura 3.7**

Una cierta distribución de carga está rodeada por una superficie a potencial  $V$ . El potencial en un punto  $\mathbf{x}$  es

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

pero como el potencial sobre la superficie está fijo en  $V$  la última integral es

$$-\frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int \nabla G \cdot \hat{n} dS,$$

la cual por el teorema de la divergencia resulta

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla \cdot (\nabla G_D) dV = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G_D dV$$

y recordando que la función de Green es solución de la ecuación de Poisson para una densidad dada por la delta de Dirac, se tiene

$$-\frac{V}{4\pi} \int \nabla G_D \cdot \hat{n} dS = V \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V,$$

de manera que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Omega + V,$$

lo cual puede una manera de ver el principio de superposición.

#### **Notas importantes sobre el principio de superposición**

La ecuación de Poisson es muchas veces inútil porque en general no se tiene la distribución de cargas  $\rho(\mathbf{x})$ . Esto sucede en general con conductores pues la carga allí se distribuye acomodándose para alcanzar el equilibrio.

Para campos y potenciales vale superposición. Pero cada problema de potencial (con su ecuación de poisson) incluye además de la ecuación las condiciones de contorno. Dados dos problemas

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi \rho_1 \quad + \quad \text{CC}_1$$

y

$$\nabla^2 \varphi_2 = -4\pi \rho_2 \quad + \quad \text{CC}_2$$

la suma de soluciones  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  con  $\rho = \rho_1 + \rho_2$

$$\nabla^2 \rho = -4\pi \rho \quad + \quad \text{CC} \quad (3.2)$$

donde hay que asegurarse de que CC sea la suma de las condiciones del problema 1 y las del problema 2. Desde el otro punto de vista, si tengo un problema como (3.2) y lo quiero pensar como la superposición de dos potenciales  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  puedo generarme unas condiciones de contorno artificiales que tengan en cuenta las influencias mutuas.

**Habría que entender bien este tema que es crucial. Imagino que working los ejemplos podría recuperar lo que alguna vez supe.**

### 1.3.3 Condiciones de contorno para medios magnéticos

Para los medios magnéticos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{C} \mathbf{g}_l \cdot \hat{s} d\ell$$

donde hicimos la transformación

$$\int \mathbf{H} \cdot d\ell = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\ell$$

y donde recordemos que la altura de  $\Gamma$  tiene a cero.

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} = (-\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{s}) d\ell$$

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} d\ell = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \times \hat{n}) \cdot \hat{s} d\ell$$

de manera que

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l = \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$$

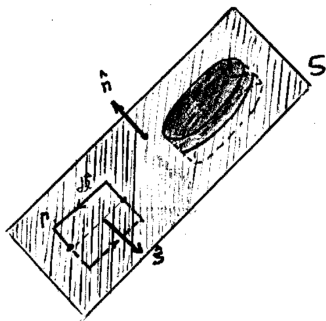


Figura 3.8

$$\hat{n} \times \hat{s} = \frac{d\ell}{d\ell}$$

$$B_{2\hat{n}} - B_{1\hat{n}} = 0 \qquad H_{2\hat{t}} - H_{1\hat{t}} = \frac{4\pi}{c} g_l$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

## 1.4 Desarrollo multipolar

Si se conoce la distribución de carga el potencial se obtiene integrando

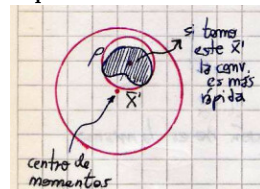
$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (4.1)$$

No obstante, esta expresión puede ser muy complicada porque en el denominador depende de la variable  $\mathbf{x}'$  sobre la cual se está integrando. Resulta conveniente entonces hacer un desarrollo del denominador, que es una función de  $\mathbf{x}'$ , en torno a un punto que se toma como origen de una esfera que engloba a la distribución de carga. Luego, ese desarrollo será válido en puntos externos a dicha esfera.

Entonces, desarrollando en torno a  $\mathbf{x}' = 0$  (el origen de coordenadas) se tienen

$$\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{|x|} + \partial_i \left( \frac{1}{|x-x'|} \right) \Big|_{x'=0} x'_i + \frac{1}{2} \partial_j \partial_i \left( \frac{1}{|x-x'|} \right) \Big|_{x'=0} x'_i x'_j + \dots,$$

Se necesita una serie que converja, y que lo haga rápido.





o bien

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{x_i x'_i}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{x_i x'_i x_j x'_j}{|\mathbf{x}|^5} + \dots,$$

Luego, introduciendo la misma en (4.1) resulta

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \int_{V'} x'_i \rho(\mathbf{x}') dV' + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) \rho(\mathbf{x}') dV' + \dots, \end{aligned}$$

Se tiene un desarrollo de diferentes órdenes

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi^{(0)}(\mathbf{x}) + \phi^{(1)}(\mathbf{x}) + \phi^{(2)}(\mathbf{x}) + \phi^{(3)}(\mathbf{x}) + \dots$$

que se conocen según

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{Q}{|\mathbf{x}|} \quad \text{Orden monopolar}$$

$$\frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \int_{V'} x'_i \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{x_i p_i}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{Orden dipolar}$$

$$\frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) \rho(\mathbf{x}') dV' = \frac{1}{2} \frac{x_i Q_{ij} x_j}{|\mathbf{x}|^5} \quad \text{Orden cuadrupolar}$$

El último término, matricialmente sería

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5}.$$

Los momentos son el momento monopolar,

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV,$$

que es la carga total, el momento dipolar,

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV$$

y el momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2] dV = 3 \int_V \rho(\mathbf{x}) x_i x_j dV - \delta_{ij} \int_V \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 dV$$

**Chequear la expansión, tal vez ponerla en vectorial o hacerla bien en el Apéndice. Juntar huevos y hacer el término siguiente.**

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - \delta_{ij}C_{ll},$$

donde esta última expresión permite ver que el momento cuadrupolar es de traza nula ( $C_{ll}$  es la traza).

El momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta, los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga. Asimismo  $Q_{ij} = Q_{ji}$  es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable y tiene autovalores reales. Tiene traza nula,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

El tensor diagonalizado tendrá tres componentes independientes.

Se da también que  $Q_{ij} (i \neq j)$  mide desbalance lejos de los ejes. Una esfera con  $\rho$  uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolo.

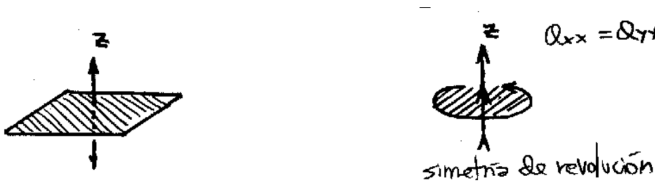


Figura 4.9

Una simetría de reflexión implica que el  $p_{\perp} = 0$  donde la notación significa perpendicular al plano. Esto es así porque no hay desbalance. Para una simetría de revolución  $Q_{xx} = Q_{yy}$  entonces el  $Q_{ij}$  puede darse con un sólo número.

Si en una distribución dada, los momentos multipolares hasta el orden  $\ell - 1$  son nulos entonces el momento multipolar de orden  $\ell$  no depende del origen de coordenadas. Así, por ejemplo, cuando el monopolo es nulo el momento dipolar no depende del centro de momentos.

En la figura vemos que no ambos no tienen desbalance de carga respecto del origen; el disco uniformemente cargado tendrá monopolo no nulo y dipolo nulo (siempre respecto del origen), los anillos cargados con carga opuesta tendrán monopolo y dipolo nulos (respecto del origen y de cualquier otro punto). Pero si muevo las distribuciones se tendrá desbalance el disco pero no los anillos.

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros; el cuadrupolo se da con un solo número. En la Figura tenemos un elipsoide con densidad de carga  $\rho$  uniforme. Tiene simetría de revolución de modo que el

El comentario en pag. 12 de la carpeta -recuadrado en rojo- induce algo diferente; pide simetría en el plano perpendicular al vector. Me parece a mí que lo que debiera verse es una simetría en la distribución de carga.

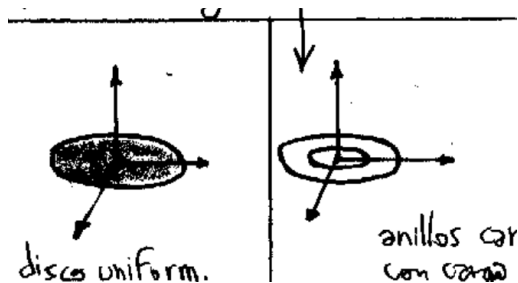


Figura 4.10

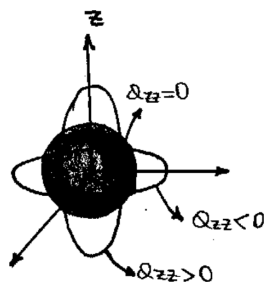


Figura 4.11

momento cuadrupolar es un número.  $Q_{zz} = 0$  puesto que una esfera no tiene desbalance, entonces  $\vec{Q} = 0$

Para una esfera uniformemente cargada todos los momentos dipolares más allá del monopolo valen cero, lo cual se ve por ley de Gauss.

En general en las aplicaciones uno se queda con tres términos; monopolo, dipolo y cuadrupolo y se busca que esa expresión converja rápido. En general tomando como centro el centro de la distribución la convergencia es más rápida.

## 1.5 Dipolo eléctrico

Se obtiene como límite de

$$\phi(x) = \frac{q}{|x - x_+|} - \frac{q}{|x - x_-|}.$$

No sé si corresponde hacer mención a que el potencial del dipolo se obtiene como límite en el caso de que la distancia entre cargas tiende a la nulidad.

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

si está en el origen, y

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

si está en un punto  $\mathbf{x}_0$ . Para calcular el campo hay que tomar el gradiente de esta expresión, multiplicarlo por  $-1$ , lo cual es un poco trabajoso, pero ahí vamos. Usando que el segundo miembro es a su vez un gradiente [poner esa cuenta en el apéndice matemático] se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) = -\nabla\left(\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}\right) = \nabla\left(\mathbf{p} \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}\right)\right),$$

luego se utiliza la identidad para el gradiente de un producto escalar notando que como uno de los vectores en el escalar es a su vez un gradiente se tiene una expresión más sencilla [otra cuenta de apéndice] En efecto, el primer término se anula por involucrar el producto vectorial de un gradiente, el segundo y tercero porque  $\mathbf{p}$  es independiente de  $\mathbf{x}$  reduciéndose la expresión a

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}\right)$$

que implica que el operador  $\nabla$  que multiplica al momento dipolar se aplica sobre el gradiente de  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Ahora restauramos ese último valor y la cuenta se puede hacer más fácilmente en indicial [la hago como nota al final]. Finalmente

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}\hat{n} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

donde

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Si hacemos una transformación ortogonal de cartesianas a esféricas para un dipolo con  $\mathbf{p}$  en el eje  $z$ , se tiene

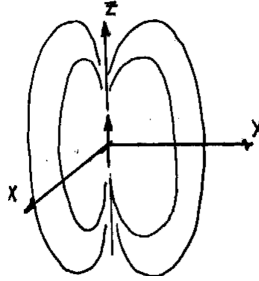
$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

y para este caso particular son el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{p\hat{z} \cdot \hat{r}\hat{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

**La identidad es  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  es cuatro términos, dos rotadores y dos términos del tipo convectivo.**

**Pasarla al apéndice esta matriz.**



**Figura 5.12** Dipolo centrado en el origen.

y el campo

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta}$$

que tiene simetría de revolución, puesto que no depende de  $\hat{\phi}$ .

Las líneas de campo cumplen que un diferencial de arco  $d\ell$  a través de una línea de campo es tal que

$$d\ell \parallel \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} \times d\ell = 0$$

la línea de campo sigue la dirección del campo.

En coordenadas curvilíneas generales es

$$d\ell = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

y para un campo cualquiera  $\mathbf{E} = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 + E_3 \hat{e}_3$  se verificarán

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}$$

En el caso de esféricas  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \theta$  y evaluando el producto vectorial resulta  $dr/r = 2 \cotg \theta d\theta$ , las líneas de campo, en el caso del dipolo no tendrán componente en  $\hat{\phi}$  (como es de esperar).

### 1.5.1 Independencia del origen para el momento dipolar

Queremos ver el hecho de que si los momentos de orden  $\ell - 1$  son nulos entonces el momento de orden  $\ell$  no depende del origen. Escribimos el momento dipolar de orden  $\ell$  como

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ell} \propto \int \rho(\mathbf{x}) x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} d^3x$$

donde  $\ell = \alpha + \beta + \gamma$ . Trasladamos el origen del sistema de coordenadas  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , entonces

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ell} \propto \int \rho(\mathbf{x}') (x' + x_0)^{\alpha} (y' + y_0)^{\beta} (z' + z_0)^{\gamma} d^3 x',$$

y usamos combinatoria allí

$$(x + c)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} c^r,$$

donde  $(nr) = n! / ((n-r)!r!)$  de manera que

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{\ell} \propto \sum_{rst}^{\alpha\beta\gamma} \binom{\alpha}{r} \binom{\beta}{s} \binom{\gamma}{t} x_0^r y_0^s z_0^t \int \rho(\mathbf{x}') x'^{\alpha} y'^{\beta} z'^{\gamma} d^3 x'$$

donde  $0 \leq r \leq \alpha, 0 \leq s \leq \beta$  y  $0 \leq t \leq \gamma$ . Si  $r = s = t = 0$  entonces tenemos el multipolo de orden calculado en el sistema  $X'Y'Z'$ .

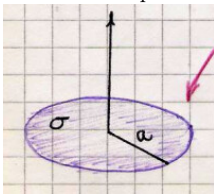
Esto es general; si en una distribución monopolo y dipolo son nulos entonces el cuadripolo no depende del origen de coordenadas.

Poner el símbolo correcto del combinatorio

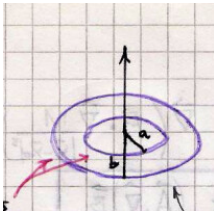
Esto ya se dijo mucho, cansa.

### EJEMPLO 5.1 Disco con carga uniforme

El momento dipolar nulo respecto del origen, pero no respecto de otro punto porque el momento monopolar no es nulo.



### EJEMPLO 5.2 Aros cargados



En este caso la carga total es nula, el monopolo es nulo entonces.

$$\lambda_A = \frac{Q}{2\pi a} \quad \lambda_B = \frac{Q}{2\pi b}$$

de manera que

$$|\lambda_A| = |\lambda_B| \frac{b}{a}$$

El dipolo será nulo respecto del origen y respecto a otros puntos también. El tensor cuadripolar está caracterizado por un sólo número (luego consideramos a los átomos neutros monopolar y dipolarmente)  $Q_n = e^{-1} Q_{zz}$ .

**Algunos momentos cuadripolares nucleares:**

Para el  $^{14}\text{N}$  es

$Q = 7.1 \cdot 10^{-2}$  y para el  $^{35}\text{Cl}$  es  $Q = -7.9 \cdot 10^{-2}$

### 1.5.2 Momento cuadripolar de un elipsoide

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

y la componente  $Q_{11}$  del tensor (que es de traza nula) es

$$Q_{xx} = \int \rho(\mathbf{x})(3x^2 - r^2) d^3x = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) d^3x$$

donde el tercer término es porque consideramos densidad constante (un elipsoide uniformemente cargado). Para integrar se hace un cambio de coordenadas

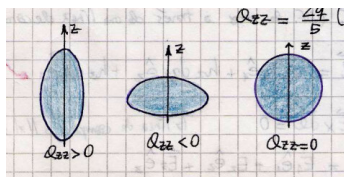
$$x' = \frac{x}{A}; \quad y' = \frac{y}{B}; \quad z' = \frac{z}{C};$$

y entonces se tienen

$$Q_{xx} = \frac{q}{5}(2A^2 - B^2 - C^2) \quad Q_{yy} = \frac{q}{5}(2B^2 - C^2 - A^2) \quad Q_{zz} = \frac{q}{5}(2C^2 - A^2 - B^2)$$

siendo  $q$  la carga total. Si el eje  $z$  es el de revolución, entonces  $A = B$  y se dan

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{q}{5}(A^2 - C^2) \quad Q_{zz} = \frac{2q}{5}(C^2 - A^2)$$



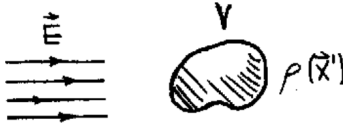
**Observaciones marginales:**

$C_{ij}$  tiene más términos de los que necesito para describir un potencial.

$Q_{ij} = C_{ij}$  - traza, usamos tensor de traza nula.

### 1.5.3 Interacción de un campo externo con una distribución de carga

Si tenemos un campo  $\mathbf{E}$  con sus fuentes lejos,



y que cumple  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (irrotacionalidad), se da la siguiente fuerza sobre la distribución

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV,$$

y si  $\mathbf{E}$  no varía demasiado en  $V$ , entonces podemos representar bien por una serie

$$E^\ell(\mathbf{x}) = E^\ell + x_j \partial_j E^\ell + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^\ell$$

entonces

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

o bien

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i q + (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_i + \mathbf{x} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla E_i]$$

En la carpeta puse que la integral del cuadrupolo da:  $Q_{kj} \partial_k \partial_j E_i$ .

de lo cual extraemos que el campo interactúa con la carga, el gradiente del campo interactúa con el dipolo y la divergencia del campo interactúa con el cuadrupolo. Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo, el torque  $\mathbf{T} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$  se puede escribir como

$$\mathbf{T} = q\mathbf{x} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

donde  $\mathbf{p} \equiv q\mathbf{x}$  es el momento dipolar y vemos que el torque tiende a centrar el dipolo según la dirección del campo  $\mathbf{E}$  aunque no lo logra por la agitación térmica.

En la carpeta escribí que reescribía un término de la expansión como

$$\frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E_i = \frac{1}{2} \left[ x_j x_k \partial_j \partial_k E_i - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \partial_j \partial_j E_i \right]$$

calculo que para lograr que sea el cuadrupolo la integral. Es la componente sub- $i$  del Laplaciano.

La energía de un dipolo será

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$



entonces

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

siendo los últimos tres términos nulos según lo que consideramos previamente de manera que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

### 1.5.4 Capa dipolar

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

y el potencial de una capa dipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$

siendo  $\mathbf{D}$  el momento dipolar por área que viene de acuerdo a la definición

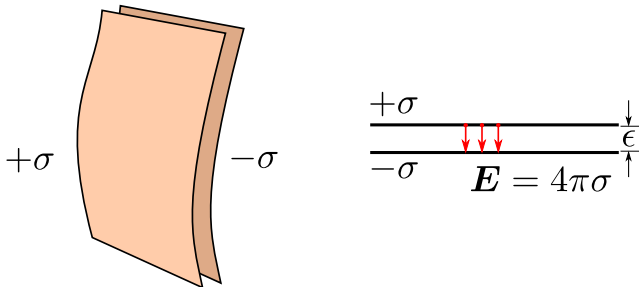
$$\mathbf{D} = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sigma \epsilon$$

refiérase a la ilustración bajo esta línea. Pero antes algunas cuentas con los dedos

$$\delta\phi = \frac{\delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

$$\delta\mathbf{p}(\mathbf{x}') = \mathbf{D}(\mathbf{x}')\delta S'$$

$$\int_S d\phi(\mathbf{x}) = \int_{S'} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$



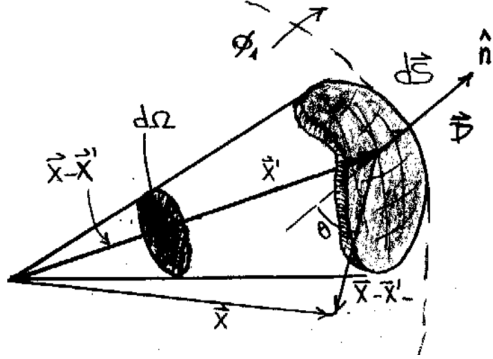


Figura 5.13

Veamos algún detalle más sobre la capa dipolar, que está ilustrado en la Figura siguiente.

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = \frac{D \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{r^2} dS$$

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -D d\Omega$$

puesto que

$$\phi(\mathbf{x}) = -D \int_S d\Omega \quad \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \equiv d\Omega$$

Para las condiciones de contorno se da lo siguiente

$$E_2^{\hat{n}} - E_1^{\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$-\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\sigma \epsilon$$

Y el cálculo del trabajo

$$W_{1 \rightarrow 2} = -q 4\pi\sigma \epsilon = q (\phi_1 - \phi_2)$$

desde donde deducimos que el potencial tiene un salto al surcar la capa dado por

$$\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D$$

Entonces, asociado a una capa dipolar hay un salto de  $4\pi D$ .

Para dos chapas infinitas de carga uniforme  $\sigma$  pero opuesta el campo eléctrico es nulo en todas partes salvo en el interior, donde vale  $4\pi\sigma$  (véase ilustración abajo). Luego el potencial tiene un salto de  $4\pi\sigma d$  que se produce a lo largo de la distancia  $d$ .

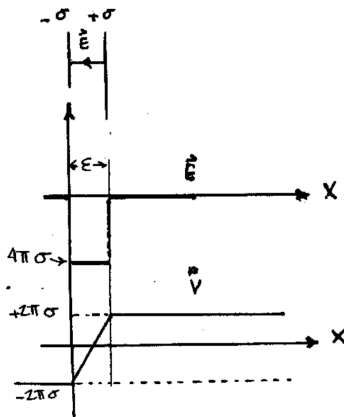


Figura 5.14

Si se considera el límite  $\sigma \rightarrow \infty$  y  $d \rightarrow 0$  se tiene una capa dipolar y lo que sucede es que la subida apreciable dada por la recta se colapsa a un escalón.

### 1.5.5 Momento dipolar por unidad de volumen

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Suponiendo una distribución continua de dipolos dada por  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ , el potencial total debido a la misma se obtiene de la integración

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV,$$

donde  $\mathbf{P}$  es la llamada polarización, el momento dipolar por unidad de volumen, siendo  $V$  un volumen que incluye a la zona de polarización (ver Figura). Este volumen debe incluir a la misma aunque puede no coincidir

Acá hay que trabajar mejor esto de la capa dipolar en referencia a las BC. Además saber si lo del  $W$  de 1 a 2 es usar la integral de línea por un camino perpendicular a la surface.

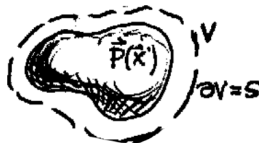


Figura 5.15

con ella. El potencial se puede escribir como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV$$

Luego, usando la identidad ID 1 (apéndice) la anterior integral resulta en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

y si usamos el teorema de la divergencia en la primera integral se tiene

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV,$$

lo que habilita a pensar que el borde del cuerpo polarizado tiene una densidad de carga de polarización

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{n},$$

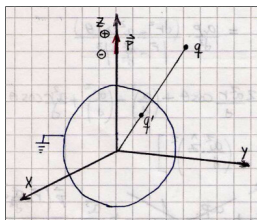
y que en el interior existe una carga de polarización volumétrica

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

siempre y cuando  $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ , es decir que la polarización no sea homogénea.

### EJEMPLO 5.3 Problema 3

El problema a resolver se esquematiza en la figura siguiente, donde se ve un dipolo eléctrico frente a una esfera de radio  $a$  conectada a tierra y una carga  $q$



El potencial será

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \partial_n G_D dS,$$

pero la última integral será nula puesto que la esfera está puesta a tierra ( $\phi = 0$  sobre la esfera). La función de Green para una carga  $q$  frente a una esfera será

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{|\mathbf{x}'|} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/r^2 \mathbf{x}'|}$$

donde debe recordarse que en la expresión de la función de Green,

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

que aporta la geometría del problema, la parte  $F$  son las contribuciones debidas a las imágenes. La densidad de carga será

$$\rho(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) + q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d} - \boldsymbol{\varepsilon})$$

donde el último término debiera expandirse en serie de Taylor (lo cual puede hacerse ahora o después de integrar). Entonces

$$q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) + q\nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \dots$$

y se tiene

$$\rho(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -q\nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}).$$

De esta forma

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int_V \mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV = -\mathbf{p} \cdot \nabla G_D(\mathbf{x}, \mathbf{d}),$$

que no es otra cosa que

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{|\mathbf{x}'|} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/x^2 \mathbf{x}'|} \right) \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

pero se puede intercambiar  $x \equiv |\mathbf{x}|$  con  $x' \equiv |\mathbf{x}'|$  así no hay problemas con los diferentes versores  $\hat{x}, \hat{x}'$ . Entonces el segundo término de la anterior expresión pasa a ser

$$\frac{a}{x} \frac{1}{|\mathbf{x}' \hat{x} - a^2/x \hat{x}'|} = \frac{a}{x} \frac{1}{\left(x'^2 + \left(\frac{a^2}{x}\right)^2 - 2a^2 \cos(\hat{x}, \hat{x}')\right)},$$

Teniendo en cuenta este intercambio,

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} - \frac{a}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}' - a^2/x^2 \mathbf{x}|} \right) \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

que lleva a

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \frac{a}{x} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{x}' - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - a^2/x^2 \mathbf{x}|^3} \Big|_{|\mathbf{x}'|=|\mathbf{d}|},$$

donde el primer término es un dipolo y al segundo puede dársele otra forma. En efecto, evaluando en el punto solicitado se tiene

$$\frac{a}{x^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{d} - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{d} - a^2/x^2 \mathbf{x}|^3} = \frac{a}{d^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (x^2 \mathbf{d} - a^2 \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

donde se ha podido intercambiar  $d$  con  $x$  por la forma de la expresión. Luego, considerando el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{x}$  se tiene

$$\frac{ap}{d^2} \frac{(x^2 - a^2/d \cos \theta)}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

Luego, completando cuadrados en el numerador se puede poner

$$\begin{aligned} \frac{ap}{d^2} \left[ x^2 - \frac{a^2}{d} x \cos \theta \right] &= \frac{ap}{d^3} \left[ x^2 - 2 \frac{a^2}{d} x \cos \theta + \frac{a^2}{d} x \cos \theta + \left( \frac{a}{d} \right)^2 - \left( \frac{a}{d} \right)^2 \right] \\ \frac{ap}{d^2} \left[ x^2 - \frac{a^2}{d} x \cos \theta \right] &= \frac{ap}{d^2} \left[ |\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^2 + \frac{a^2}{d} \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{z}} - \left| \frac{a^2}{d} \hat{\mathbf{z}} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

de manera que finalmente

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d})}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^3} + \frac{ap}{d^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|} + \frac{a^3}{d^3} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d})}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|^3}$$

y se tienen entonces tres términos que son: un dipolo real, un monopolo imagen y un dipolo imagen.

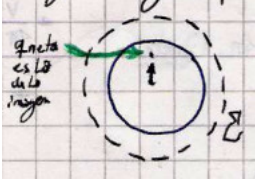
Notemos entonces que además de haber generado la imagen de un dipolo fue necesaria la imagen de una carga puntual extra. Si hubiésemos resuelto el problema haciendo la imagen directamente del dipolo hubiera estado incompleta<sup>1</sup>.

Por imágenes el problema involucra resolver desde

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{-q}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} + \frac{q}{|\mathbf{x} - (\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})|} + \frac{q}{d} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/d^2 \mathbf{d}|} - \frac{q}{(d + \boldsymbol{\varepsilon})} \frac{1}{|\mathbf{x} - a^2/(d + \boldsymbol{\varepsilon})^2 (\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})|},$$

y aquí deberían expandirse los denominadores con  $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$  mediante Taylor. En el último término de la expresión anterior convendría permutar  $(d + \boldsymbol{\varepsilon})$  con  $x$ . Entonces hay que usar las mismas ideas que en el caso anterior.

Acá hay una observación asociada al figurín bajo estas líneas



Con un problema interior la carga inducida es la carga imagen; porque puedo usar Gauss con una superficie  $\Sigma$  y el campo depende de la carga encerrada real ( $\sigma$  inducida).

La parte (c)

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} = -4\pi\sigma_{\text{ind}},$$

y como el segundo término del LHS es cero, se tiene

$$\sigma_{\text{ind}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi_0}{\partial r}(\mathbf{x})$$

donde la derivada es en esféricas.

La parte (d) es un desarrollo multipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{x} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{x^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{x^5} + \dots$$

<sup>1</sup>Si se hace la imagen del dipolo considerando sus cargas componentes sale bien la cosa

Se tienen

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV = \frac{ap}{d^2}$$

que es la carga imagen puntual.

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV = [-q\mathbf{d} + q(\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathbf{p} \left( 1 + 2\frac{a^3}{d^3} \right)$$

que, considerando el primer dipolo, da el aporte de un dipolo más una contribución de la esfera.

Puedo tomar ejes principales en  $x, y$ . Por la simetría de este problema  $Q_{xx}, Q_{yy}$  son iguales de manera que como la traza es nula, con solo calcular  $Q_{xx}$  ya tengo todo lo que necesito.

Para el dipolo real (será el momento cuadripolar de un dipolo desplazado del origen)

$$Q_{xx} = -q(-d^2) + q(-(d + \varepsilon)^2) = -2pd$$

donde en el último término se ha hecho el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para la carga imagen y el dipolo imagen serán, respectivamente,

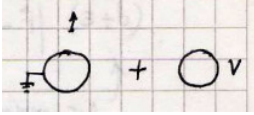
$$Q_{xx} = \frac{ap}{d^2} \left( \frac{a^2}{d} \right)^2 \quad Q_{xx} = -2 \left( \frac{a^3 p}{d^3} \right) \left( \frac{a^2}{d} \right)$$

Sumando todos

$$Q_{xx} = -2pd \left( 1 + \frac{a^5}{2d^5} \right),$$

el último factor es la contribución de la esfera al cuadripolo.

Por superposición, si la esfera estuviera a potencial  $V$  como se muestra en el gráfico



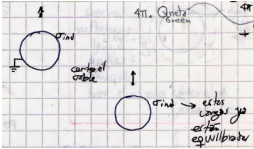
se tendría

$$\int_V \rho G_d dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \partial_n G_D dS$$

y la integral de superficie se puede hacer utilizando la ley de Gauss,

$$-\frac{V}{4\pi} \int_S E_G dS = \frac{Va}{r}$$

Esta última situación no sé bien a qué viene:



Cualquier carga  $Q$  que se añada después ya no altera la distribución  $\sigma$ .

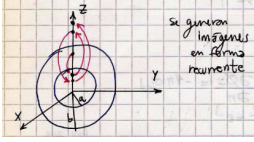
#### EJEMPLO 5.4 Problema 4

Aquí lo que sucede es que se generan imágenes en forma recurrente.

**Anoté la definición del momento cuadripolar**

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - |\mathbf{x}|^2 \delta_{ij}) \rho dV$$

**Anoté por allí que superposición es un Green gráfico.**



Podemos agrupar en un cuadro la generación según el orden. Entonces en cada orden  $n$  tendremos un par  $(q, r)$  que se construye colocando la prescripción  $(q, r)$  anterior correspondiente al radio “cruzado”. Así por ejemplo, el  $n = 2$  se construye en  $r < a$  tomando la prescripción de  $n = 1$  con  $r < a$  y reemplazando allí el  $n = 1$  de  $r > b$ . Consecuentemente, la prescripción  $n = 2$  para  $r > b$  se construye tomando la  $n = 1$  de  $r > b$  y reemplazando allí la  $n = 1$  de  $r < a$ .

$n$	$r < a$	$r > b$
1	$\left(-\frac{aq}{r}, \frac{a^2}{r}\right)$	$\left(-\frac{bq}{r}, \frac{b^2}{r}\right)$
2	$\left(-\frac{a(-qb/r)}{b^2/r}, \frac{a^2}{b^2/r}\right) = \left(\frac{aq}{b}, \frac{a^2 r}{b^2}\right)$	$\left(-\frac{b(-aq/r)}{a^2/r}, \frac{b^2}{a^2/r}\right) = \left(\frac{bq}{a}, \frac{b^2 r}{a^2}\right)$
3	$\left(-\frac{qa^2}{br}, \frac{a^4}{b^2 r}\right)$	$\left(-\frac{qb^2}{ar}, \frac{b^4}{a^2 r}\right)$
	...	...

Siguiendo la recurrencia se tiene

$$n = 1, 3: \quad -q \frac{a}{r} \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r < a$$

$$n = 2, 4: \quad q \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad r < a$$

y

$$n = 1, 3: \quad -q \frac{b}{r} \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r > b$$

$$n = 2, 4: \quad q \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} \quad r > b$$

mientras que para las distancias se obtiene

$$n = 1, 3: \quad \frac{a^2}{r} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r < a$$

$$n = 2, 4: \quad r \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad r < a$$

y

$$n = 1, 3: \quad \frac{b^2}{r} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}_{+0} \quad r > b$$

$$n = 2, 4: \quad r \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad r > b$$

Finalmente todo esto se puede ubicar en una serie para la función de Green, que será

$$G_D = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-\left(\frac{a}{x}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left|x - \left(\frac{a}{x'}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} x'\right|} + \frac{-\left(\frac{b}{x}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^n}{\left|x - \left(\frac{b}{x'}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} x'\right|} \right] +$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left|\mathbf{x} - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \mathbf{x}'\right|} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\left|\mathbf{x} - \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \mathbf{x}'\right|} \right] + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

## 1.6 Desarrollo multipolar para el campo magnético

Haremos una especie de desarrollo multipolar del potencial vector  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

quedándonos a primer orden para  $\mathbf{x}$  en torno a  $\mathbf{x}' = 0$ . Es decir, se empleará

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3}$$

lo cual conduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int_V \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

donde el primer término es nulo lo cual se verá a continuación. En notación indicial la integral que interesa es

$$\int_V J_i(\mathbf{x}') dV',$$

luego notemos que

$$\partial_k (J_k x_i) = (\partial_k J_k) x_i + J_k \partial_k x_i$$

donde el primer término es nulo por ser la divergencia de  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  y el segundo es la delta de Kronecker de tal forma que

$$\partial_k (J_k x_i) = J_k \delta_{ki} = J_i. \quad (6.1)$$

El teorema de la divergencia entonces nos asegura que

$$\int_V \partial_k (J_k x_i) dV = \int_S J_k x_i dS$$

donde debe notarse que si la superficie es tal que engloba a todas las corrientes  $J$  entonces ya no hay corriente sobre la superficie y el integrando es nulo.

**Recordar que Biot & Savart es para densidad de corriente estacionaria, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$**

Se quiere ver que vale

$$\int_V J_i x_k dV = - \int_V J_k x_i dV,$$

y para ello veamos qué le pasa a la divergencia de un tensor de tercer rango, que se puede escribir

$$\partial_l(x_i J_l x_k) = \partial_l(x_i J_l) x_k + x_i J_l \partial_l(x_k)$$

usando el resultado anterior (6.1) es

$$\partial_l(x_i J_l x_k) = J_i x_k + x_i J_k,$$

y como es

$$\int_V (J_i x_k + x_i J_k) dV = 0.$$

Parece que acá termina la cosa. No me queda nada claro.

Por otra parte, dado que

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' - \mathbf{J} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$$

se puede aplicar esto en la integración del segundo término

$$\int_V x_i J_k x'_i dV' = \int_V x_i J_i x'_k dV' - \int_V \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k dV'$$

donde el primero aquí será nulo porque es idéntico al anterior, y entonces

$$\int_V x_i J_k x'_i dV' = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int_V (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k dV',$$

quedando en deuda la explicación del 1/2.

Este término que resultó nulo correspondería al orden monopolar y su nulidad refleja la no existencia de monopolos magnéticos.

Esto habrá que hacerlo bien. La notación está muy poco consistente.

Esto conduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \left[ \left( \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J} dV \right) \times \mathbf{x} \right]$$

y si definimos el corchete como  $\mathbf{m}$  (momento magnético) entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

en el origen, y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

desplazado hacia  $\mathbf{x}'$ , las cuales son expresiones a primer orden y que utilizan el gauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

De esta manera tendremos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2c} [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] ]$$

que es la magnetización o densidad de momento magnético, y entonces el momento magnético pasa a ser

$$\mathbf{m} = \int_v \mathcal{M}(\mathbf{x}') dV'.$$

Ahora se querrá ver qué le pasa al rotor de  $\mathbf{A}$ . Para ello se usa la identidad vectorial I2 del apéndice. Considerando  $\mathbf{m} = \mathbf{M}$  y  $\mathbf{N} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$  se tiene

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3) - \mathbf{N}(\nabla \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3 \cdot \nabla) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3,$$

donde los dos primeros términos son nulos <sup>2</sup>. Entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + 4\pi\delta(\mathbf{x}) \mathbf{m},$$

pero el segundo término con la delta no se considerará porque estamos lejos de la distribución de corrientes<sup>3</sup>. Luego,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Recordando la expresión para el momento dipolar del campo eléctrico (buscarla) como

$$\mathbf{E}^{(2)} = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

que llevaba a  $\mathbf{E}^{(2)} = (3(\mathbf{P} \cdot \hat{n})\hat{n} - \mathbf{P})/|\mathbf{x}|^3$ , por analogía se tendrá

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3},$$

<sup>2</sup>El segundo es nulo porque  $\mathbf{m}$  no depende de  $\mathbf{x}$

<sup>3</sup>El término con la delta de Dirac cobra importancia en análisis microscópicos y cuánticos

que nos dice que bien lejos cualquier distribución de corriente localizada  $\mathbf{B}$  se presenta como el campo magnético de un dipolo magnético dado por  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ . Esta aproximación corresponde, por supuesto, al primer orden del desarrollo. El momento magnético puede pensarse entonces como una espirilla.

### 1.6.1 Interpretacion del momento magnético

Se puede pensar al  $\mathbf{m}$  como una espira plana, lo cual nos provee de una noción intuitiva del momento dipolar magnético. Entre un punto  $\mathbf{x}$  del borde y un diferencial de arco  $d\ell$  queda definido un triángulo infinitesimal cuya área  $dA$  será

$$dA = \frac{1}{2} x \sin(\alpha) d\ell,$$

que no es otra cosa que el área de un triángulo (base por altura sobre dos), siendo el área orientada

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

y entonces

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{A}$$

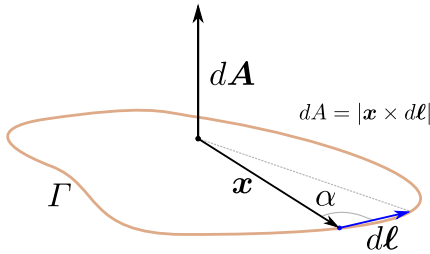


Figura 6.16

Para convertir un volumen a espira hacemos la transformación del modo usual,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV = \frac{I}{2c} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\ell$$

usando que

$$\mathbf{J} dV = J d\ell dS = \frac{I}{dS} d\ell dS = I d\ell$$

A modo de ejemplo, para una espira circular de radio  $r$  es

$$m = \frac{i}{c} \pi r^2.$$

### 1.6.2 Interacción del campo magnético con una distribución de corriente

La idea es considerar la fuerza sobre una distribución de corrientes debida a un campo externo homogéneo. Hacemos una expansión de Taylor del campo  $\mathbf{B}$  con  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

y entonces como la fuerza es

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}(\mathbf{x}') dV'$$

resulta que



Figura 6.17

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 dV' + \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B} dV'$$

siendo el primer término nulo.

Mediante identidades vectoriales podemos llegar a una expresión

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) dV'$$

y utilizando la demostración previa de que

$$\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} dV = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV,$$

resulta que

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{B} \times \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} dV$$

y entonces, identidades vectoriales mediante,

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Si el campo es homogéneo la fuerza es nula. Por otra parte, como  $\mathbf{F} = -\nabla U$  se puede definir energías para los dipolos de acuerdo con el esquema

$$F_m = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$F_e = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

siendo  $U_{m,e}$  la energía de los dipolos en campos externos.

La fuerza de un campo  $\mathbf{B}$  externo sobre una distribución de corrientes es el gradiente de cierta energía

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

de donde se ve claramente que si  $\mathbf{B}$  es uniforme entonces la fuerza es nula.  $\mathbf{m}$  es una constante que depende de la distribución de corrientes.

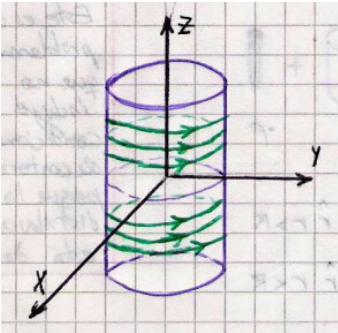
### EJEMPLO 6.1 Problema 6b

Ahora  $a \ll L$  y por la simetría de rotación son convenientes coordenadas cilíndricas. La simetría reclama que no hay dependencia en  $\varphi$  ni componente  $B_\varphi$  de manera que

$$\mathbf{B}(r, z) = B_z(r, z) \hat{z} + B_r(r, z) \hat{r}$$

Considerando una expansión de Taylor para  $r$  pequeños

$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z) + \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r=0} r \quad B_r(r, z) \approx B_r(0, z) + \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} r$$



La simetría dice también que  $B_r(0, z) = 0$  y utilizando la divergencia nula  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  del campo en cilíndricas se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=0}$$

y evaluando en  $r = 0$  se obtiene [CHECK ESTO]

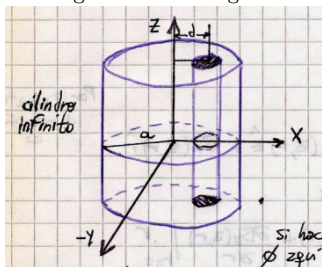
$$\frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=0}$$

Se obtiene una expresión algo más general que la que se hubo obtenido (la de la clase pasada, que es la del capítulo 1) que utilizaba  $L \rightarrow \infty$ .

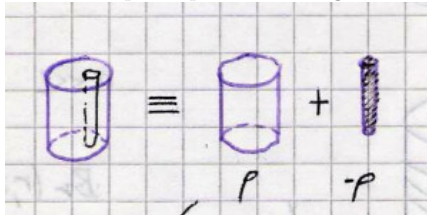
### EJEMPLO 6.2 Problema 11

Este es un problema que no incluye condiciones de contorno porque la distribución de carga está dada. Es un cilindro infinito. Si hacemos el potencial  $\varphi$  aquí vemos que revienta lo cual se debe a que la distribución de carga es infinita.

El arreglo es el de la figura



También se puede pensar de la siguiente forma



El campo para un cilindro de radio  $R$  centrado en  $r = 0$  es

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{2\pi a^2 \rho}{r} \hat{r} & r \geq R \\ 2\pi r \rho \hat{r} & r < R \end{cases}$$

Escribiendo el campo interno como

$$2\pi r \rho \hat{r} = 2\pi \rho \mathbf{x},$$

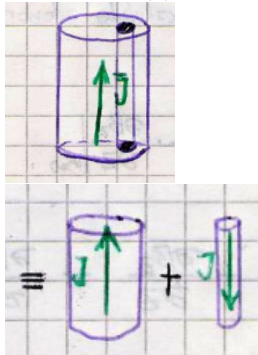
donde  $\mathbf{x} = r \hat{r}$  es el vector que vive en el plano horizontal, se puede trasladar el cilindro así

$$2\pi \rho (\mathbf{x} + d \hat{x})$$

y entonces el campo dentro del cilindro es

$$\mathbf{E} = 2\pi\rho d \hat{x}.$$

Para la parte (b) se considera



Hay que mirar la práctica porque esto está confuso.

$$B(r)2\pi r = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j,$$

pero  $\mathbf{B}$  es en  $\hat{\phi}$  y entonces

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi r j}{c} \frac{\hat{\phi}}{r} = \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + x \hat{y})$$

de manera que el campo total, que es la suma de los campos del cilindro grande y del pequeño, será

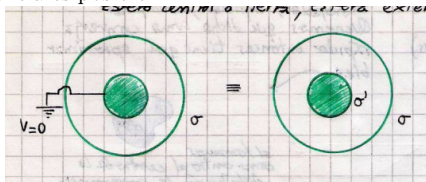
$$\mathbf{B} = \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + d \hat{y} + x \hat{y}) - \frac{2\pi j}{c} (-y \hat{x} + x \hat{y}),$$

o bien

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi j}{c} d \hat{y}.$$

### EJEMPLO 6.3 Problema 13

Esfera central a tierra, esfera externa con densidad superficial  $\sigma$ . La siguiente equivalencia es posible



Luego, esto se resuelve así, usando la simetría esférica y la ley de Gauss  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$  se tienen

$$4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 \\ 4\pi a^2 \sigma \end{cases} \quad 4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 \\ 4\pi b^2 \sigma' \end{cases}$$



$$\mathbf{E} = \begin{cases} 4\pi \frac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r^2} \hat{r} & r > b \\ 4\pi \frac{\sigma' b^2}{r^2} \hat{r} & a < r < b \\ 0 & r < a \end{cases}$$

El potencial será

$$V = \begin{cases} 4\pi \frac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r} + C_1 & r > b \\ 4\pi \frac{\sigma' b^2}{r} + C_2 & a < r < b \\ C_3 & r < a \end{cases}$$

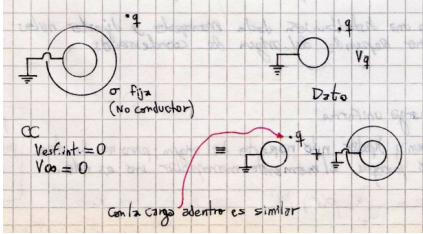
y al pedir continuidad para el mismo, se tienen

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 4\pi\sigma, \quad C_3 = 0$$

donde en la última está metida la  $\sigma'$  que hace nulo el potencial  $V$  sobre la esfera interna. Así, finalmente

$$V = \begin{cases} 4\pi \frac{\sigma a(a-b)}{r} & r > b \\ 4\pi \frac{\sigma a(r-b)}{r} & a < r < b \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Una serie de diagramitas a desdular siguen:



## 1.7 Perturbación por un conductor sobre un campo eléctrico uniforme

Se tiene un campo uniforme con  $Q, R \rightarrow \infty$  pero con  $2Q/R^2 = cte$ , según se ve en la Figura.

El potencial  $\phi$  de la esfera es constante por ser conductor. Puedo definir

$$\phi|_{esf} \equiv 0$$

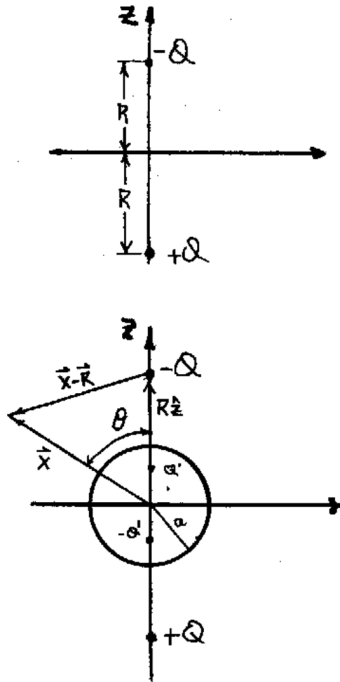


Figura 7.18

pues  $\phi(\infty) \neq 0$  porque hay densidad de carga  $\rho$  en el infinito.

Para la carga superior,

$$\phi_1 = \frac{-Q}{|\mathbf{x} - R\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} - a^2/R\hat{\mathbf{z}}|}$$

mientras que para la inferior

$$\phi_2 = \frac{Q}{|\mathbf{x} + R\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{a/RQ}{|\mathbf{x} + a^2/R\hat{\mathbf{z}}|}$$

Recordemos que

$$(1 + \alpha)^{(-1/2)} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha \quad \alpha \ll 1$$

y podemos trabajar el denominador

$$|\mathbf{x} - R\hat{\mathbf{z}}| = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos(\theta)}} = \frac{1}{R(1 + x^2/R^2 - 2x/R \cos(\theta))^{1/2}}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - R\hat{z}|} \approx \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos(\theta) \right)$$

de manera que luego

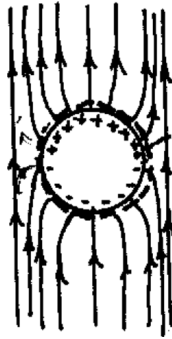
$$\phi(r) \approx Q \left[ \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \cos(\theta) \right) + \frac{a}{Rx} \left( 1 + \frac{a^2}{Rx} \cos(\theta) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} \cos(\theta) \right) - \frac{a}{Rx} \left( 1 - \frac{a^2}{Rx} \cos(\theta) \right) \right]$$

$$\phi(x) \approx -\frac{2Qx}{R^2} \cos(\theta) + \frac{2a^3Q}{R^2x^2} \cos(\theta)$$

y haciendo  $x \equiv r$  y tomando el límite,

$$\phi(r) = -E_0 r \cos(\theta) + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos(\theta)$$

y la carga total sobre la esfera es nula puesto que estuvo aislada todo el tiempo. Respecto de la Figura, si hacemos un Gauss en la zona indicada se obtiene  $Q_n = 0$ , entonces  $\phi(r = a) = 0$ .



**Figura 7.19**

El segundo término es como un dipolo puntual,

$$E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos(\theta) = E_0 \frac{a^3 \hat{z} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

donde

$$\mathbf{p} \equiv E_0 a^3 \hat{z}$$

## NOTAS

### 7.1 Sobre el problema de la carga frente a la esfera conductora a tierra

Decíamos que esta solución se puede obtener de manera más heurística, como lo hace Jackson? [CITA], a partir de la expresión en

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0,$$

se podría intentar forzar que el segundo denominador sea idéntico al primero para lo cual se puede multiplicar arriba y abajo por el factor  $(y/a)$

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{y/a \sqrt{a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \gamma}} = 0$$

lo que conduce a

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2 a y \cos \gamma}} + \frac{q'(y/a)}{\sqrt{y^2 + y^2 y'^2/a^2 - 2 y^2/a y' \cos \gamma}} = 0$$

y esta ecuación se satisface si  $yy' = a^2$  y si  $q = -q'(y/a)$ , que es justamente la solución encontrada previamente de un modo más tradicional.

También es interesante considerar algunos casos límite y ver que se recuperan resultados y comportamientos familiares. Si  $q$  está localizada muy cerca de la superficie de la esfera, i.e.  $|\mathbf{y}| \approx a + \varepsilon$  resultan  $y' \approx a - \varepsilon$  y  $q' \approx -q + (\varepsilon/a)q$  que son exactamente los resultados para una carga frente a un plano conductor (si despreciamos la cantidad infinitesimal  $(\varepsilon/a)$ ). Muy cerca de la superficie de la esfera la carga *ve* un plano infinito.