

# Relatividad especial

## 1.1 Transformación de vectores

Digamos que un vector transforma

$$X'_i = a_{ij}X_j$$

de manera que se verifique que las leyes físicas sean invariantes frente a rotaciones propias. El módulo no cambia  $|\mathbf{X}'|^2 = |\mathbf{X}|^2$ .

Einstein postula que:

- Todos los sistemas inerciales son equivalentes (no se puede hablar de espacio absoluto).
- La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

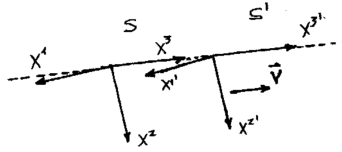
Las ecuaciones vistas hasta ahora son igualdades vectoriales. Toda ley física debe ser covariante de un sistema inercial a otro.

Para una magnitud tensorial de 2do rango la traza del mismo debe ser invariante y además satisface

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Transformación ortogonal. En la época de Maxwell se postuló que las ondas EM viajaban con velocidad  $c$  respecto al espacio absoluto (el éter). Pero esta idea muere con Einstein en 1905.

Sea un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  de otro  $S$  en forma paralela a un eje (ver figura).



**Figura 1.1**

Se verifica entonces la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned}x^{1'} &= x^1 \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= \gamma [x^3 - \beta x^0] \\x^{0'} &= \gamma [x^0 - \beta x^3]\end{aligned}$$

donde son

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad x^0 = ct$$

A la transformación [1] se le puede dar forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue definiendo

$$\beta \equiv \tanh(\eta) \quad \gamma \equiv \cosh(\eta) \quad \gamma \cdot \beta = \sinh(\eta)$$

y con esta nueva notación puede escribirse

$$\begin{aligned}x^{0'} &= x^0 \cosh(\eta) - x^3 \sinh(\eta) \\x^{3'} &= -x^0 \sinh(\eta) + x^3 \cosh(\eta)\end{aligned}$$

donde seguimos viendo que las leyes son lineales en las coordenadas (el espacio es isótropo)

**Debiéramos dar ideas de estas cosas importantes de relatividad especial**

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y no es otra cosa que una rotación en eje  $\hat{0}, \hat{3}$  con el ángulo  $\eta = \operatorname{atanh}(\beta)$ . O sea, son rotaciones en funciones hiperbólicas. Notemos que se verifica la invariancia del módulo de la transformación

$$(x^{0'})^2 - ((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$$

o en una notación más feliz

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Estamos queriendo generar una estructura geométrica para pasar entre sistemas inerciales.

Este espacio 4D es el de Minkowski y no es euclídeo. Un punto de este espacio es lo que se llama un *evento*; el radio vector posición en este espacio.

Busquemos ahora la transformación inversa. Dado que

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x^{3'} = \gamma(x^3 - \beta x^0) \end{cases}$$

y entonces se tienen los componentes contravariantes de las coordenadas del evento, que verifican

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y la transformación inversa, que se obtiene tomando los reemplazos

$$x^{i'} \rightarrow x^i \quad , \quad x^i \rightarrow x^{i'} \quad , \quad \beta \rightarrow -\beta,$$

permite hallar los componentes covariantes de dichas coordenadas que verifican

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

En realidad hemos considerado una transformación de Lorentz muy sencilla. Una más general será

$$\begin{cases} x^{\alpha'} = x^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{cases}$$

que nos da el radio vector contravariante y el covariante, respectivamente. Cada coordenada es función de todas las otras.

El elemento diferencial de línea, que es un invariante, es

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds'^2$$

o bien

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

que define el tensor de la métrica. Se verifica

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Cuadrivectores en el espacio 4D

Un cuadrivector contravariante es

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

mientras que el covariante es

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

y vemos que las partes temporales son las mismas cambiando el signo de la espacial. Las reglas de transformación son

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \quad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

luego el producto interno es

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \equiv A_\alpha B^\alpha$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein, que significa que

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

que es invariante por ser un escalar de Lorentz,

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\alpha B'^\alpha$$

Se ve que las reglas de transformación son tales que en el producto interno se cancelan los factores y el mismo resulta, como es sano que suceda, independiente del sistema coordenado. No cualesquiera cuatro cantidades forman los componentes de un cuadrivector.

## Intervalos entre eventos

La distancia entre evento origen y un evento cualquiera es

$$S^2 = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2,$$

pero los intervalos deben ser invariantes relativistas y de Lorentz. Si el intervalo es temporal se tiene

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 > 0$$

y los eventos pueden estar conectados causalmente

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 < 0$$

y los eventos no pueden estar conectados causalmente. Se cumple

$$\delta s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Como  $\delta s^2$  es un invariante, entonces el carácter del mismo se conserva en todos los sistemas inerciales.

## Operadores diferenciales

Tenemos la derivada respecto a una coordenada contravariante

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

que es la derivada covariante, y también la derivada respecto de una coordenada covariante

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

que es la derivada contravariante. Note la asimetría entre derivado respecto de arriba y es derivada abajo y viceversa. La notación abreviada puede inducir a confusiones.

La cuatridivergencia de un cuatrivector es un invariante,

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \nabla \cdot (-\mathbf{A})$$

y aquí vemos  $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$ . Esto nos lleva al D'Alembertiano

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2$$

**En el operador  $\partial_\alpha$  el subíndice cambia de ubicación pero se mantiene el carácter (contra-) o (co-) variante del operador.**

### Conexión de sucesos

Sean dos sucesos  $x_1^\alpha, x_2^\alpha$  tales que  $s^2$  es el intervalo entre los mismos (al cuadrado), y es un invariante lorentziano

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$$

El intervalo es temporal si  $s^2 > 0$  en cuyo caso se tiene

$$c\delta t > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

lo cual significa que existe frame inercial donde  $x_1 = x_2$  los eventos ocurren en el mismo sitio de manera que pueden estar conectados causalmente; puesto que  $c\delta t > 0$  y  $t_2 > t_1$ . Por el contrario si  $c^2 < 0$  se tiene

$$c\delta t < |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

y existe entonces frame inercial donde los dos eventos son en el mismo sitio  $x_1 = x_2$  y entonces  $c\delta t < 0$  y  $t_2 < t_1$  de manera que no pueden estar conectados causalmente.

Sea

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dz \right)$$

y si es ② posterior a ① en  $S$  entonces  $dt > 0$ . Entonces  $dt'$  puede ser mayor, menor o igual a cero (no respeta la temporalidad de  $S$ ).

El orden temporal se puede alterar pasando de  $S$  a  $S'$ , pero en ese caso se rompe la causalidad. En todos aquellos intervalos donde tienen diferentes signos  $dt$  y  $dt'$  se viola el principio de causalidad. Dos sucesos estarán relacionados causalmente si dado  $dt > 0$  se tiene

$$dt > \frac{v}{c^2} dz$$

y eligiendo  $S'$  fijo a la señal que se emite y siendo  $v$  la velocidad de propagación de la señal, será

$$1 > \frac{v}{c^2} \frac{dz}{dt} = \frac{v^2}{c^2}$$

para que ninguna señal se pueda mover a mayor velocidad que la de la luz (porque tiene que valer la causalidad). El gráfico siguiente intenta ilustrar estas consideraciones. Suponemos haz de luz desde el  $-\infty$  que pasa por el origen

Ahora se ve lo que pasa para otro observador haciendo un cambio de coordenadas

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^3) \quad x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

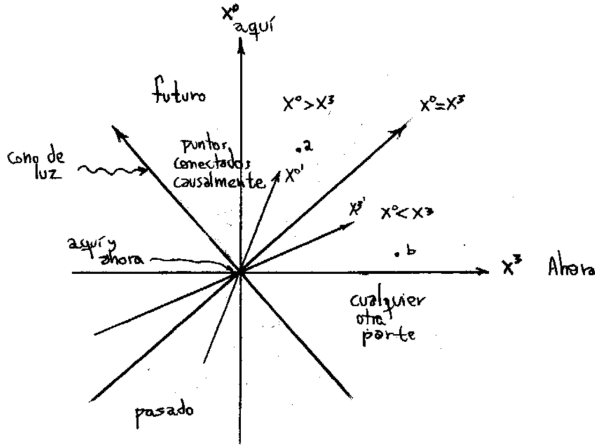


Figura 1.2

y si ahora es  $x'^0 = 0$  entonces para un observador en  $S'$  se tiene

$$0 = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

o bien  $x^0 = \beta x^3$  y aquí es  $x'^3 = 0$  de modo que

$$\frac{x^3}{\beta} = x^0$$

y entonces  $a$  de la figura puede ser causado por un suceso en el origen pero  $b$  no tiene conexión causal con el origen.

Para el observador  $S'$  el punto  $b$  está debajo de su “ahora” que es el pasado. Por otra parte  $a$  para el observador  $S$  es el futuro. Para este mismo observador, el punto  $b$  está en “cualquier otra parte” de tal manera que no puede estar conectado causalmente con el origen.

### EJEMPLO 1.1 Problema

No relativista será la información propia (desde el sistema donde se produce el evento solidario al objeto). Tenemos  $K, K'$  sistemas inerciales, donde el segundo se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  con respecto al primero. Suponemos  $\mathbf{V} = V \hat{z}$ .

$$\hat{x} \parallel \hat{x}' \quad \hat{y} \parallel \hat{y}' \quad \hat{z} \parallel \hat{z}'$$

Una barra moviéndose en  $K'$  a velocidad constante medida desde  $K$

$$\begin{cases} L' = Z'_1 - Z'_0 \\ L = Z_1 - Z_0 \end{cases}$$

y entonces tenemos la contracción de Lorentz

$$L = \frac{L'}{\gamma} \leq L',$$

la longitud de un objeto es relativa.

Consideremos dos eventos en un punto fijo  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$  (sigo un evento). Una lámpara que está encendida  $t'_1 = 0$  y se apaga en  $t'_2 = t' = \tau'$ . ¿Cómo se ven desde laboratorio estos eventos? Transformo a laboratorio.

$$\Delta t = \tau = \gamma \tau' > \tau$$

y el tiempo transcurrido desde el laboratorio es mayor.

Un muón no relativista tendrá  $\tau' = 2.2 \cdot 10^{-6}$  seg. Los muones siempre están medidos en tiempo de laboratorio.

$$d = 1907 \text{ m} \quad t = 0 \quad v = 0.9952c \quad \Delta t = 6.3873 \cdot 10^{-6} \text{ seg}$$

dado que en  $t = 0$  se miden 573 muones por hora, en  $t_0 = 6.3873 \cdot 10^{-6}$  se verán 424 muones por hora. Entonces

$$N(t) = N(0) e^{t/\tau}$$

de lo cual se deduce  $\tau = 2.2527 \cdot 10^{-5}$  seg. Entonces desde  $\tau = \gamma \tau'$  será

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2} = 0.9952,$$

de manera que según relatividad el resultado está consistente.

Las magnitudes contables son invariables relativistas.

**Lorentz vincula sistemas inerciales; a velocidad constante entre ellos.**

### EJEMPLO 1.2 Problema

Algunas cuentas sobre Doppler relativista. La fase es un invariante de manera que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' \quad \mathbf{k}'_{\parallel} = \gamma \left( \mathbf{k}_{\parallel} - \beta \frac{\omega}{c} \right)$$

Considerando que  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{k}$  y además  $\beta = \mathbf{V}/c$  con  $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$  se tienen

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp} \quad \omega' = \gamma(\omega - c\beta \cdot \mathbf{k})$$

y definimos los módulos con

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad |\mathbf{k}'| = \frac{\omega'}{c}$$

donde

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta) \\ \tan \theta' = \gamma \sin \theta / (\cos \theta - \beta) \end{cases}$$

siendo la transformación de Galileo

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V}t \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \\ t' = t \end{cases}$$

lo cual nos lleva a

$$\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp} - \omega t = \mathbf{k}'_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V}t) + \mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp} - \omega' t$$



$$\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} \quad \mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}$$

luego se tendrá  $\omega = \mathbf{k}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V} + \omega'$

$$\omega' = \omega(1 - \beta \cos \theta),$$

que es la ecuación del efecto Doppler relativista.

Por otra parte,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

que nos conduce a

$$\frac{\omega'}{\omega} - 1 = \frac{1}{2}\beta^2 - \beta \cos \theta$$

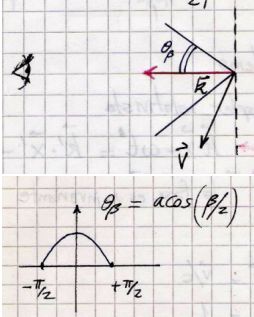
Si estoy tratando de forzar la situación para obtener corrimientos opuestos

$$f_{nr} = -\beta \cos \theta \quad f_r = \frac{1}{2}\beta^2 - \beta \cos \theta$$

entonces

$$\begin{cases} f_{nr} > 0 & \text{si } \cos \theta < 0 \\ f_{nr} < 0 & \text{si } \cos \theta > 0 \\ f_r > 0 & \text{si } \cos \theta < 1/2\beta \\ f_r < 0 & \text{si } \cos \theta > 1/2\beta \end{cases}$$

necesitaré  $0 < \cos \theta < 1/2\beta$  o bien



### EJEMPLO 1.3 Problema

$$\tan \theta' = \gamma \sin \theta / (\cos \theta - \beta)$$

y basta con ver lo que sucede en  $\theta' = \pi/2, -\pi/2$ . En su mayor parte, la energía toda se va para adelante.

#### 1.1.1 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

Sea  $v/c$  no despreciable

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z) \quad \gamma > 1$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left( 1 - \beta \frac{\Delta z}{c \Delta t} \right)$$

pero si en  $S'$  la partícula está en reposo es  $v = dz/dt$  de manera que

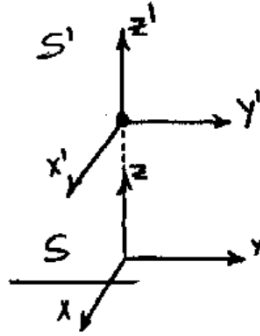


Figura 1.3

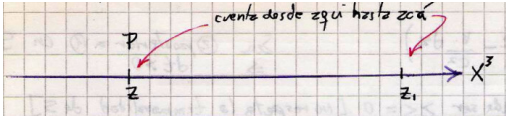
$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2)$$

$$\Delta t' = \Delta t (1 - \beta^2)^{1/2}$$

de modo que  $\Delta t' < \Delta t$ , en  $S'$  el tiempo transcurre más lentamente.

### Número de onda y conteo

Un proceso de conteo (discreto) es invariante lorentziano, pero no así el medir longitudes. Supongamos un aparato que cuenta el número de crestas de ondas (que viajan con velocidad  $c$ ). Cuento en  $x^3$  entre



$$x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

siendo  $v$  entre los sistemas  $S$  y  $S'$ . El número de crestas que cuenta el aparato es

$$\#_s = \frac{z_1 - z}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}(z_1 - z) = \frac{k}{2\pi}(ct - z) = \frac{1}{2\pi}(\omega t - kz)$$

donde se ha usado que  $z_1 = ct$ , luego para un observador primado se tendrá consecuentemente

$$\#'_s = \frac{1}{2\pi}(\omega' t' - k' z')$$

y se puede generalizar

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t,$$

lo cual nos conduce a ver que

$$-\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \frac{\omega' x'^0}{c}\right) = -\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \frac{\omega x^0}{c}\right)$$

es un invariante lorentziano de acuerdo con

$$k_\alpha x^\alpha = k'_\alpha x'^\alpha \quad (1.1)$$

Entonces dado ese comportamiento se puede definir el cuadvivector de onda como

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right).$$

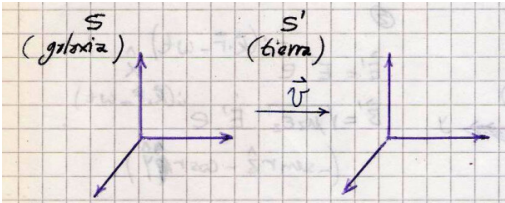
Una onda plana debe ser invariante relativista. En una onda plana la ecuación de invariancia (1.1) conduce al efecto Doppler. En el caso relativista depende de la velocidad relativa entre fuente y observador.

### 1.1.2 Efecto Doppler relativista

Volamos a la transformación entre sistemas  $S$  y  $S'$ , teníamos

$$k'_z = \gamma \left(k_z - \beta \frac{\omega}{c}\right) \quad \frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z\right)$$

y de estas dos diferentes  $k_z$  surge el efecto Doppler. Se tienen los sistemas (el sin primar es en una galaxia)



y serán

$$k_z = k \cos \theta \quad \frac{\omega'}{\gamma \omega} = 1 - \beta \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo del número de onda con el eje  $\hat{z}$ . Considerando la transformación inversa (acercamiento)  $\omega = \omega' \gamma (1 + \beta \cos \theta')$  resulta

$$\frac{\omega'}{\gamma \omega} = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \theta')}$$

Ahora bien, tomando  $\beta \ll 1$  resulta

$$\omega \approx \omega' \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

y a primer orden, con  $\theta \sim \theta'$  usando

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)}.$$

Veamos casos particulares de la invariancia del producto escalar.

### Caso 1

En este caso son paralelos la velocidad y el vector de onda, i.e.  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$  se tienen  $k_x = k_y = 0$  y  $k_z = k$  entonces

$$k' = \gamma k (1 - \beta) = k \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

luego,

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

donde  $\beta > 0$  implica alejamiento y  $\beta < 0$  implica acercamiento. Luego la diferencia de longitudes de onda es

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{\sqrt{1 + \beta} - \sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} \approx \lambda \beta$$

de lo cual se deduce que a primer orden en  $\beta$  es  $\Delta \lambda \sim \lambda \beta$ .

Queríamos ver si es una buena aproximación, usamos

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{14580 \text{ \AA}}{6560 \text{ \AA}}$$

que es el cociente entre la longitud de onda medida en la tierra respecto de la misma que viene de la estrella. Entonces

$$\left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{-1} = 0.202$$

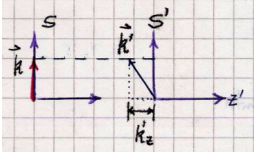
de modo que  $\beta = 0.664$ . Pero usando la aproximación

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.223.$$

Y entonces es claro que se necesita  $\beta$  chico para que valga la aproximación hecha más arriba.

### Caso 2

En este caso son perpendiculares la velocidad y el vector de onda, i.e.  $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ , se tiene un efecto Doppler transversal.



Se tienen en este caso  $k'_x = k_x$ ,  $k'_y = k_y$ ,  $k_z = 0$  y es

$$k'_z = -\gamma\beta k \quad k'^2 = \gamma^2 k^2$$

de modo que  $k' = \gamma k$  y  $\omega' = \gamma\omega$ . Vemos que en este caso el efecto Doppler transversal es notable solo a orden dos, es un fenómeno netamente relativista ( $\gamma$  es de orden cuadrado en su efecto). A orden cero (clásico) no hay efecto.

Supongamos una partícula a velocidad constante según el observador  $S$ . Sean dos sucesos de esa partícula.

$$c\Delta t' = \gamma c\Delta t \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

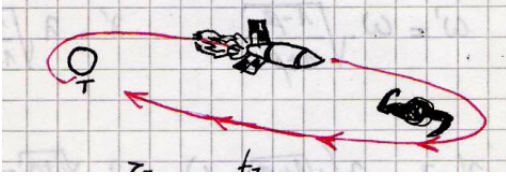
donde el intervalo de tiempo primado es tiempo propio pues en  $S'$  la partícula está en reposo. Se ve que en el sistema  $S'$  el tiempo transcurre más lentamente,  $\Delta t' < \Delta t$ .

Si no hay sistema en el cual se halle en reposo, podemos pensar en un intervalo infinitesimal donde está en reposo instante a instante pero cambia.

$$dt' = \sqrt{1 - \beta^2} dt = d\tau$$

### Ejemplo relojes

Tenemos la situación depicted en el figurin:



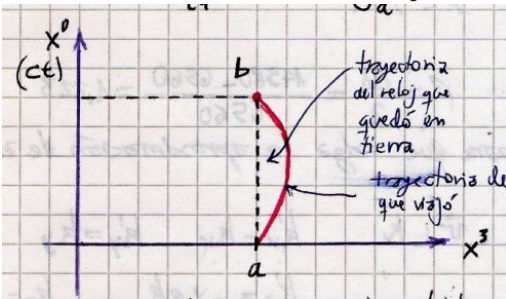
Tenemos un reloj 1 en S y un reloj 2 en S' dando la vuelta a la galaxia. Se tiene

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} dt < t_2 - t_1$$

y estos sistemas no son equivalentes. Es la paradoja de los mellizos. El tiempo pasa más lento para el que viajó

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c} \int_a^b ds$$

La métrica de Minkowski no corresponde a una euclídeana.



En el espacio de Minkowski la línea recta es la distancia mayor entre dos puntos.

## 1.2 Forma covariante del electromagnetismo

Partimos de la ecuación de continuidad para la carga,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

la cual con la definición del cuadrivector corriente

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$$

**La conservación de la carga es una de las leyes más firmemente establecidas.**

se puede escribir como

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

La formulación covariante empleaba el gauge de Lorentz (es necesario) puesto que con él las ecuaciones son válidas en cualquier sistema inercial. El gauge de Lorentz era

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

siendo el cuadripotencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

y entonces

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Se podía ver que resultan ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

que viene a ser, usando el D'alembertiano,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

y para el potencial  $\phi$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \phi$$

que desemboca en

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square \phi = \frac{4\pi}{c} (c\rho)$$

Al aplicar el D'Alembertiano a un cuadvivector obtenemos otro cuadvivector

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu.$$

Veamos qué sucede con las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial. Recordemos que toda ecuación de igualdad de entes tensoriales en el espacio de Minkowski es covariante.

Teníamos

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

Otros gauges sirven bien si no me interesa pasar de un sistema a otro.

de modo que en términos del cuadripotencial

$$E_i = -\partial_i A^0 - \partial^0 A^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$$

y luego el campo  $\mathbf{B}$  viene del rotor del cuadripotencial, por lo tanto

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

del mismo modo que

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \quad B_z = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2$$

y entonces se puede definir un ente

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que unifica notaciones para los dos campos.

Los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  forman parte de un tensor de segundo rango antisimétrico llamado tensor de intensidad de campo (tiene diagonal nula),

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que tendrá seis elementos independientes. Tres para el campo eléctrico y tres para el magnético. Matricialmente se puede ver como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la métrica  $g_{\mu\nu}$  podemos arribar a la versión covariante

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

También es conveniente definir un tensor de intensidad de campo dual, con ambos índices contravariantes,

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$



que no es otra cosa que

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

y donde  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  es el tensor de Levi-Civita de cuatro dimensiones -totalmente antisimétrico-, que es nulo cuando se repite un índice.

### EJEMPLO 2.1 Tensor dual

Sea por ejemplo el elemento  $\mathcal{F}^{01}$ ,

$$\mathcal{F}^{01} = \frac{1}{2} \varepsilon^{01\gamma\delta} F_{\gamma\delta},$$

así que dado el comportamiento del tensor de Levi-Civita se tienen

$$\mathcal{F}^{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{0123} F_{23} + \varepsilon^{0132} F_{32}),$$

dado que toda otra posibilidad es nula. Entonces

$$\mathcal{F}^{01} = \varepsilon^{0123} F_{23}$$

y vemos que se pasa del  $F$  al  $\mathcal{F}$  con la regla

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$$

Se querrá entonces escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante explícita, lo que significa que no cambiarán de forma al pasar entre sistemas inerciales.

Tomamos las dos ecuaciones con fuentes, y se ve que las podemos expresar según

$$\partial_i E_i = \frac{4\pi}{c} J^0 = \partial_i F^{i0} = \partial_\alpha F^{\alpha 0},$$

asimismo

$$\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_0 E^1 = \frac{4\pi}{c} J^1 = \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

es la componente 1 del mismocuatrivector. Entonces

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta.$$

resume las dos ecuaciones de Maxwell con fuentes.

Con respecto a las ecuaciones sin fuentes

$$\partial_i \mathcal{F}^{0i} = 0 = \partial_\alpha \mathcal{F}^{0\alpha}$$

entonces

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$

resume las ecuaciones sin fuentes. Si se usa el tensor directo quedan expresadas como

$$\partial^\alpha \mathcal{F}^{\beta\gamma} + \partial^\beta \mathcal{F}^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Recordemos que usaremos índices griegos para los cuatros componentes 0, 1, 2, 3 e índices latinos para la parte espacial 1, 2, 3.

### EJEMPLO 2.2 Comentario corrientes parásitas

Un conductor en el seno de un campo magnético genera sobre sí al moverse corrientes de Foucault o turbillonarias que tienden a frenar su movimiento.

## 1.2.1 Transformación de los campos

Volviendo a la transformación de Lorentz de los sistemas  $S$  a  $S'$

$$ct' = \gamma [ct - \beta \cdot \mathbf{x}]$$

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma [\mathbf{x}_{\parallel} - \beta ct]$$

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$$

con  $\beta = \mathbf{v}/c$  y siendo la matriz de la transformación la siguiente

$$a^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

se tiene  $F^{\mu\nu'} = a^\mu_{\lambda} a^{\nu'}_{\sigma} F^{\lambda\sigma}$  donde  $F^{\lambda\sigma}$  es el tensor con índices contravariantes.

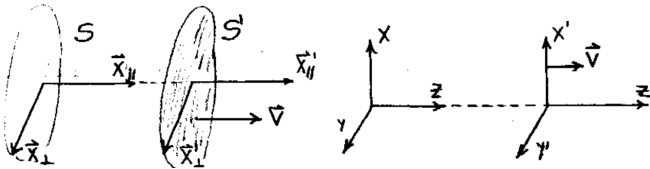


Figura 2.4

La transformación de los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  según la figura superior satisface

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) & B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y) \\ E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) & B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) \\ E'_z &= E_z & B'_z &= B_z \end{aligned}$$

y separando los campos en componentes paralelas y perpendiculares, esto es  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}$  se tienen

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$$

que se pueden poner como

$$\mathbf{E}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) + \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) + \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}).$$

Recordemos que la transformación de Galileo era

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}$$

siendo el segundo término el que da origen a las corrientes de Foucault al mover un conductor en el seno de un campo  $\mathbf{B}$ . Las chapas en un transformador aisladas buscan cortar las corrientes de Foucault. No conviene diseñar un aparato que tenga que moverse en el seno de un campo magnético si es de material conductor.

Las contracciones del producto escalar entre el tensor de intensidad son invariantes. Así, por ejemplo,

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 2(E^2 - B^2)$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$$

Sea

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

entonces  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  o alguno de los campos es nulo en todo sistema inercial. Lo mismo si se tiene que el invariante es mayor a cero; lo será en todos los sistemas inerciales.

Como estamos poniendo contracciones opuestas se compensan los efectos entre sí y dan invariantes [?].

Para una carga que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  se tiene  $\mathbf{B} = 0$  en un sistema en el que  $q$  está en reposo de manera que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' = 0$$

siempre y entonces  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$  para cualquier sistema inercial  $S'$ . El campo magnético que crea la partícula será perpendicular al campo eléctrico en toda situación.

Un sistema electromagnético dependiente del tiempo intercambiará  $\mathbf{p}$  con el campo entonces no vale el principio de acción y reacción ,

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \int_{S(v)} \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S}$$

mientras que

$$\frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \right)$$

### 1.2.2 Covarianza con medios materiales

Las ecuaciones sin fuentes tienen la misma forma en presencia de medios materiales. Las que cambian son las que tienen fuentes, porque ahora aparecen los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{D}$ .

Para un medio material podemos reemplazar el tensor  $F^{\alpha\beta}$  por otro tensor  $G^{\alpha\beta}$  tal que

$$E_i \rightarrow D_i, \quad B_i \rightarrow H_i$$

donde

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

que se puede pensar como otro tensor corrector?

$$F^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta},$$

donde

$$R^{\alpha\beta} = 4\pi \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}$$

que provienen de las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Finalmente

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

donde la información de  $P_i$  y  $M_i$  está en el tensor  $R^{\alpha\beta}$ . Estamos diciendo que en un medio material los vectores  $\mathbf{P}, \mathbf{M}$  se deben comportar como los elementos de un tensor.

Procediendo en forma análoga a lo que se hiciera para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la transformación de Lorentz, se tendrán los campos transforman según

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= \mathbf{P}_\parallel + \gamma (\mathbf{P}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{M}) \\ \mathbf{M}' &= \mathbf{M}_\parallel + \gamma (\mathbf{M}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{P})\end{aligned}$$

Entonces de un sistema inercial a otro una  $\mathbf{P}$  da origen a una  $\mathbf{M}$  y viceversa.

### 1.3 Principio de Hamilton y relatividad

Habiéndonos situado en un espacio de Minkowski, tenemos la acción

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

siendo  $\alpha$  una constante a fijar luego, y  $ds$  un arco en el espacio minkowskiano entre dos eventos  $a$  y  $b$ . La acción debe ser un invariante pues es un extremo y el intervalo  $ds$  debe ser temporal,

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

de manera que

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

y donde  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -\alpha c (1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

y luego

$$\mathcal{L} \rightarrow T = \frac{mv^2}{2} \text{ (baja velocidad)}$$

de manera que fijamos el valor de la constante a partir de este límite de baja velocidades,

$$\mathcal{L} = -mc^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

es el lagrangiano relativista.

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$$

y haciendo el álgebra,

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde  $m$  es la masa en reposo y  $p_i$  es el momento relativista. Notemos que si  $v = c$  entonces el momento diverge si  $m \neq 0$ , mientras que con  $m=0$  no sabemos qué sucede. Entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Para un movimiento circular, el módulo de la velocidad permanece constante.

$$\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

si en cambio es  $\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \neq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= m \left( \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{V} (1 - v^2/c^2)^{-3/2} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v}\gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

donde el primer término en el RHS está asociado a la variación en la dirección y el segundo a la variación en la magnitud (hemos usado con  $\gamma^3 v^2/c^2 > \gamma$ ?). De esto se desprende que la inercia es mayor para variar la longitud de  $\mathbf{v}$  que su dirección. Es más fácil cambiar dirección que rapidez.

**En la carpeta hay otra cosa: Tengo  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma^3 m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ .**

Entonces, volviendo al langrangiano

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = m\gamma v^2 + mc^2\gamma^{-1} = m\gamma c^2$$

y esta es la energía relativista de una partícula libre. Veamos el límite de bajas velocidades, es decir que si  $v/c \ll 1$  entonces

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

y resulta

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_0 + \frac{mv^2}{2}$$

donde  $E_0$  es una energía en reposo, que no depende de  $\mathbf{v}$  y podemos expresar la energía cinética como

$$E - mc^2 = \frac{mv^2}{2} = T.$$

Se puede definir

$$\mathbf{p} = m\mathbf{w},$$

con  $\mathbf{w} = \gamma\mathbf{v}$  entonces

$$E^2 = m^2\gamma^2c^4 \quad p^2 = m^2\gamma^2v^2$$

y

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2\gamma^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2$$

y esta es la relación fundamental entre energía y momento

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2.$$

Para partículas con  $m_0 = 0$  y  $v = c$  será

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 \quad p = \frac{h\nu}{c} = k\hbar.$$

La formulación hamiltoniana comenzará a partir de

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + m^2c^2} \, c,$$

sobre el que se puede operar para obtener el límite clásico (de bajas velocidades) como

$$\mathcal{H} = \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} mc^2$$

**Anoté que esta energía es compatible con el PAM, que calculo será el principio de acción mínima.**

y si se cumple  $p/(mc) \ll 1$  entonces

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m^2}$$

donde el último término es el hamiltoniano de la mecánica clásica para nuestra partícula libre.

El cuádrimomento se define como

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \mathbf{u}), \quad \Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

o bien

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$$

siendo

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

el invariante asociado a la conservación (del cuádrimomento).

### EJEMPLO 3.1 Problema 11

Se espera que al tener una carga en movimiento aparezca en alguna parte una corriente. Consideramos un sistema  $K'$  en movimiento relativo con respecto a otro sistema  $K$ . Con las definiciones usuales de  $\beta$  y  $\gamma$  tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel & \mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel & \mathbf{B}'_\perp &= \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

de lo cual las inversas

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') \quad \mathbf{B}_\perp = \gamma(\mathbf{B}'_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}')$$

Introduciendo la física en la transformación

$$\mathbf{E}' = q \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \quad \mathbf{B}' = 0$$

y tendríamos que convertir a coordenadas sin primar.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\parallel &= \mathbf{E}'_\parallel = q \frac{\mathbf{x}'_\parallel}{|\mathbf{x}'|^3} & \mathbf{E}_\perp &= \gamma \mathbf{E}'_\perp \\ \mathbf{B}_\parallel &= \mathbf{B}'_\parallel = 0 & \mathbf{B}_\perp &= \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'_\perp \end{aligned}$$

donde son

$$\mathbf{x}'_\parallel = \gamma(\mathbf{x}_\parallel - c\boldsymbol{\beta}t) \quad \mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp,$$

y luego la norma será

$$|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}'_\parallel|^2 + |\mathbf{x}'_\perp|^2 = \gamma^2(\mathbf{x}_\parallel - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_\perp|^2$$

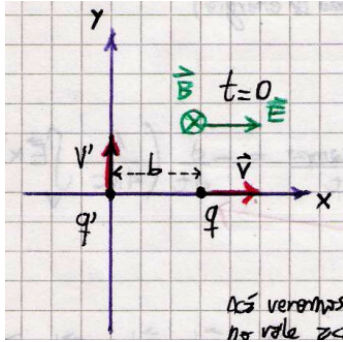
Juntando todo podemos escribir

$$\mathbf{E}_\parallel = \frac{q(\mathbf{x}_\parallel - c\boldsymbol{\beta}t)}{(\gamma^2(\mathbf{x}_\parallel - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_\perp|^2)^{3/2}} \quad \mathbf{E}_\perp = \frac{q \gamma \mathbf{x}_\perp}{(\gamma^2(\mathbf{x}_\parallel - c\boldsymbol{\beta}t)^2 + |\mathbf{x}'_\perp|^2)^{3/2}}$$



$$B_{\parallel} = 0 \quad B_{\perp} = \beta \times E_{\perp}$$

Entonces tenemos dos partículas con velocidad perpendicular. Un sistema dependiente del tiempo intercambia momento con el campo.



Aquí tenemos la expresión de los campos producidos por una partícula en movimiento vista desde un sistema reposante, el sistema que se mueve está en la partícula. Presupusimos que ambos coinciden en  $x = 0$  y  $t = 0$ . En esta situación se verá que no vale acción y reacción.

Veamos ahora los campos para  $q'$  donde

$$\beta' = \frac{V'}{c} \hat{y} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$$

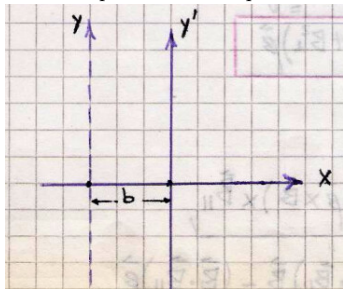
$$E_{\parallel} = 0(t=0) \quad E_{\perp} = \gamma' q' \frac{1}{b} \hat{x}$$

$$B_{\parallel} = B_y \hat{y} = 0 \quad B_{\perp} = -\frac{\gamma' q' V'}{cb^2} \hat{z}$$

y la fuerza de Lorentz, sobre  $q$  debido a  $q'$ , será

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma q q'}{b^2} \left( \hat{x} + \frac{V V'}{c^2} \hat{y} \right)$$

Ahora corremos el sistema de referencia, que es el eje  $\hat{y}$ . Recordemos que los sistemas siempre están en reposo. No están en movimiento relativo.



Se tienen ahora

$$E_{\parallel} = -\frac{q}{\gamma^3 b^2} \hat{x} \quad E_{\perp} = 0 \quad B_{\parallel} = 0 \quad B_{\perp} = 0$$

de tal manera que el campo total es  $\mathbf{B} = 0$  y  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel}$ . La fuerza será

$$\mathbf{F} = -\frac{qq'}{\gamma^3 b^2} \hat{x},$$

y vemos que no es la misma expresión.

Hay momento que se va hacia alguna parte; las partículas transfieren momento hacia afuera (hacia el campo).

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV$$

pero habría que calcular el campo para todo el espacio puesto que el integrando abarca todo. Si tomo el volumen muy grande y usamos la expresion [CITA]

$$\frac{dP_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dP_{\text{campo}}}{dt} = \int_{S(v)} T \cdot \hat{n} dS,$$

será la integral de surface nula pues no se escapa energía. Entonces

$$\frac{dP_{\text{mec}}}{dt} = -\frac{dP_{\text{campo}}}{dt}$$

y la fuerza de Lorentz será

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = -\frac{dP_{\text{campo}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \right)$$

y esta cuenta debería dar lo mismo.

### EJEMPLO 3.2 Problema 13

Consideremos la cuenta

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = (\mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}) \times (\mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}) = \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\perp}$$

que da cuatro términos de los cuales el primero es nulo, el segundo y tercero son proporcionales a  $\beta_{\perp}$  mientras que el cuarto es proporcional a  $\beta_{\parallel}$ . Entonces tenemos la separación de los productos vectoriales de acuerdo con

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\perp} \quad (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \mathbf{E}'_{\parallel} \times \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{B}'_{\parallel}$$

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \gamma^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B}_{\perp} + \beta \times \mathbf{E})$$

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\parallel} \times (\mathbf{B}_{\perp} - \beta \times \mathbf{E}) + \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\parallel}$$

que conducen a

$$\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{E}_{\perp} \times \beta \times \mathbf{E}) + (\beta \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\perp} - (\beta \times \mathbf{B}) \times (\beta \times \mathbf{E})$$

de los cuales el primero es  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel}$ , el segundo  $-\mathbf{E}_{\perp}^2 \beta$  mientras que el tercero

$$(\beta \cdot \mathbf{B})\beta - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\perp})\beta = -\mathbf{B}_{\perp}^2 \beta$$

y el cuarto

$$[(\beta \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}]\beta - [(\beta \times \mathbf{E}) \cdot \beta]\mathbf{B} = [(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \beta]\beta = [(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel}]\beta$$

de manera que

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\parallel} = \gamma^2 (1 + \beta^2) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel} - \gamma^2 (\mathbf{E}_{\perp}^2 + \mathbf{B}_{\perp}^2) \beta.$$

Ahora operamos  $(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp}$  y obtenemos

$$\gamma(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} - \gamma \mathbf{E}_{\parallel} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \gamma(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\parallel},$$

y este último término se desarma como

$$\gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}_{\parallel})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\parallel})\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}_{\perp}$$

y puede verse que sucede lo mismo con el término que contiene al campo  $\mathbf{E}$  de modo que

$$(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} + \gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_{\perp} + \gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}_{\perp}.$$

Ahora habría que ver que hay un sistema de referencia donde se cumple que sean colineales. Entonces el producto vectorial será nulo.

$$\begin{cases} (1 + \beta^2)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\parallel} = (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2)\boldsymbol{\beta} \\ (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = -(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_{\perp} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}_{\perp} \end{cases}$$

de manera que al ser colineales sucede que

$$(1 + \beta^2)(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2)\boldsymbol{\beta} - (1 + \beta^2)[(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}_{\perp}]$$

y además

$$\frac{\mathbf{V}}{1 + V^2/c^2} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2}$$

de tal modo que

$$(E^2 + B^2)\boldsymbol{\beta} = (1 + \beta^2)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

y se deduce que  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\perp} = 0$ . Pero a la última parte no se llega fácil; presupongo  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0$  y entonces de  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  tenemos que ambos campos son perpendiculares y puede ser que  $\mathbf{E} = 0 = \mathbf{B}$ , si en cambio son  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$  (por lo que se vio antes) se tendrá  $E^2 - B^2 < 0$  o bien  $E^2 - B^2 > 0$ ; si en un sistema es  $E = 0$  entonces será  $B \neq 0$ . Estamos usando como invariantes  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  y  $E^2 - B^2$ .

### 1.3.1 Principio de Hamilton e interacción electromagnética

Se parte de una variación de la acción

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds$$

donde  $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}}$  de manera que

$$-mc \delta \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}} = -\frac{mc}{2} \int_a^b \frac{\delta(dx_{\mu} dx^{\mu})}{\sqrt{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}}} = -m \int_a^b \delta(dx_{\mu}) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

donde nos hemos sacado la raíz de encima. Esto ahora se puede integrar por partes,

$$\delta S = -m \int_a^b w^{\nu} \delta dx_{\nu} = -mw^{\nu} dx_{\nu} \Big|_a^b + m \int_a^b w_{\nu} \delta x^{\nu}$$

y como  $a$  y  $b$  son puntos fijos, el primer término se anula. Luego

$$\delta S = m \int_a^b w^\nu \delta(dx_\nu)$$

o bien

$$\delta S = m \int_a^b \frac{dw^\nu}{d\tau} \delta x_\nu d\tau = m \int_a^b a^\nu \delta x_\nu d\tau,$$

que implica que el cuadvivector aceleración  $a^\mu$  debe ser nulo. Luego, la cuadvivelocity de la partícula debe ser constante. Podemos escribir esta equivalencia

$$\mathbf{p} = \nabla S \quad \longrightarrow \quad p^\mu = \partial^\mu S$$

Consideremos ahora que el punto  $a$  se varía (ya no es fijo)  $\delta x^\nu \equiv \delta x^\nu|_a \neq 0$  de manera que

$$\delta S = m w^\nu \delta x_\nu$$

y

$$p^\nu = m w^\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}$$

entonces

$$w^\nu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

es proporcional a la energía de la partícula. Luego,  $p^\nu = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v})$  y

$$p^0 = m\gamma c = \frac{m\gamma c^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\partial S}{\partial x^0}$$

de modo que

$$\partial_\mu S \partial^\mu S = m^2 c^2$$

es invariante lorentziano.

### 1.3.2 Partícula en un campo electromagnético

Dado que es de la mecánica clásica  $\mathcal{L} = T - V$  la acción correspondiente la podemos expresar como

$$S = S_0 + S_{\text{inter}} = \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} V dt$$

es decir la suma de una parte libre y una de interacción. Luego la acción no relativista (bajas velocidades) será

$$S_{\text{inter}}^{NR} = \int_{t_1}^{t_2} -e\phi dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e\phi}{c} d(ct) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{eA^0}{c} dx^0$$

si usamos los cuadvectores

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

y generalizamos

$$S_{\text{inter}} = -\frac{e}{c} \int_{x_1}^{x_2} A_\mu dx^\mu$$

tendremos

$$S_{\text{inter}} = \frac{e}{c} \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - c\phi dt) = \frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - c\phi) dt$$

y finalmente el lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

donde el primer término es el lagrangiano de partícula libre y la interacción viene luego. Esta lagrangiano no es invariante de medida; sin embargo no perjudica porque en las ecuaciones de movimiento sólo entran las derivadas del mismo. Recordemos además que  $\mathcal{L}$  no es invariante relativista (porque su integral temporal debiera ser invariante relativista [?]) pero la acción  $S$  sí lo es.

Para construir el hamiltoniano necesitamos el momento conjugado,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = m\gamma \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

y siguiendo la prescripción usual

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - \mathcal{L},$$

se arriba a

$$H = (m\gamma \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}) \mathbf{v} + mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\phi = m\gamma v^2 + e\phi + mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

y

$$H = m\gamma v^2 + e\phi + \frac{mc^2}{\gamma}$$

de manera que el hamiltoniano en un campo es

$$H = m\gamma c^2 + e\phi$$

**Notemos que los límites de integración pasaron a ser los momentos temporales.**

En presencia de un campo electrostático tenemos esta versión de hamiltoniano, con energía cinética (el primer término) y potencial (el segundo). En el caso de un campo magnetostático la expresión es solamente el primer término y se mantiene constante por ello la energía.

Notemos lo siguiente

$$\mathbf{P} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \quad H = m\gamma c^2 + e\phi$$

y

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = m^2\gamma^2 v^2 \quad \left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 = m^2\gamma^2 c^2$$

$$\left(\frac{H}{c} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = mc^2,$$

con ustedes el invariante. Entonces el cuadrimomento de una partícula en un campo electromagnético, sometida a un potencial electromagnético es

$$p^\mu = \left(\frac{H - e\phi}{c}, \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$$

que es un caso particular del xxxx.

Podemos usar esto para fabricarnos un hamiltoniano relativista. En efecto, se tendrá

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\phi$$

y el no relativista

$$H^{nr} = mc^2\left(1 + \frac{1}{m^2c^2}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right)^{1/2} + e\phi$$

usando la aproximación de baja velocidad,

$$H^{nr} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi$$

donde tiro el término de reposo  $mc^2$  y

$$H^{nr} \approx \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi.$$

Ahora se aplicarán las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano electromagnético hallado, para obtener el movimiento de una partícula cargada. Para eso notemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathcal{L} = \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\nabla\phi = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\phi$$

donde se ha usado la identidad ID 4 del apéndice. Luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

y tomándole derivada temporal y juntando todo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

qu es la fuerza de Lorentz con la corrección relativista. Es la misma expresión hallada otrora pero sin tener en cuenta la relatividad.

Si  $\mathbf{E} = 0$  entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{pues} \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

y el campo  $\mathbf{B}$  sólo variará la dirección de  $\mathbf{v}$ , no su módulo.  $S$  no es invariante relativista porque no está directamente conectada a ningún observable.

El radio de giro de una partícula ciclotrón es mayor con la aproximación relativista que con la newtoniana porque su inercia dada por su masa variable es mayor, puesto que  $\gamma > 1$ . Planteamos

$$|\mathbf{F}| = evB$$

que desde el punto de vista relativista significa

$$evB = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

mientras que clásicamente

$$m \frac{v^2}{r} = evB$$

y sale el radio de giro desde acá

$$r_B = \frac{m\gamma v}{eB} \quad r_B^{nr} = \frac{mv}{eB}$$

y luego  $r_B > r_B^{nr}$ .

### 1.3.3 Cambio de gauge

El cambio de gauge es una transformación

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

entonces

$$A'0 = \phi - \partial^0 f \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

La acción es

$$S = \int_a^b \left( -mcds + \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu \right) = \int_a^b \left( -mcds + \frac{e}{c} A'^\mu dx_\mu + \frac{e}{c} \partial^\nu f dx_\nu \right)$$

y lo último es una diferencial total exacta en el espacio de Minkowski  $e/c df$ ; no contribuye al cambio de gauge.

El cambio de gauge no es invariante pero  $\delta S = 0$  sí es invariante. La cuadridensidad de fuerza de Lorentz

$$f^\beta = -\partial_\alpha T^{\alpha\beta}.$$

**Esto último parece un poco descolgado.**

### 1.3.4 Especie de tiro oblicuo

La situación física es la depicted en la figura bajo estas líneas

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v})$$

que lleva a un sistema hartocomplicado de resolver que es

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \right) = eE \\ \frac{dP_y}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{v_y}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

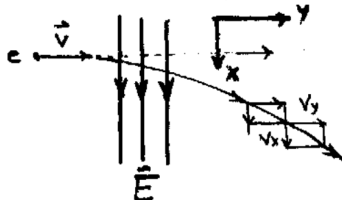


Figura 3.5



Cualitativamente vemos que  $v_x$  crece a medida que ingresa en la zona de campo  $\mathbf{E}$  entonces como  $v_y$  es constante se tiene que  $\gamma$  aumenta y aumenta la inercia de modo que disminuye  $|\mathbf{v}|$  y describe aproximadamente una parábola (curva catenaria).

En estos problemas estamos despreciando la energía radiada por la partícula.

### 1.3.5 Cuadrivelocidad

$\mathbf{u}$  no transforma como cuadvivector (¿que  $u$ ?), pero lo que sí transforma así es

$$W^\mu = (\Gamma c, \Gamma \mathbf{u})$$

donde  $\Gamma \equiv 1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ . Luego tenemos la fórmula de Einstein de suma de velocidades, que tiene como límite a  $c$ ,

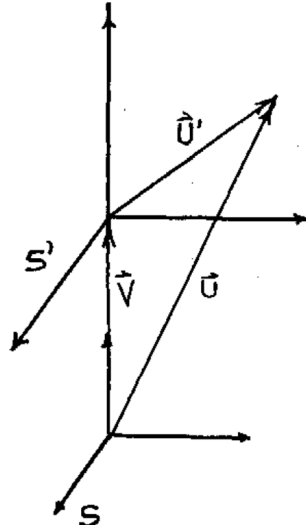


Figura 3.6

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}} \quad u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}\right)}$$

De esta manera el cuadrivector es

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad mW^\mu = p^\mu.$$