

## Capítulo 1

---

# Medios materiales

Digamos, un poco *sketchi* que los medios se pueden agrupar, según sus propiedades según el siguiente esquema.

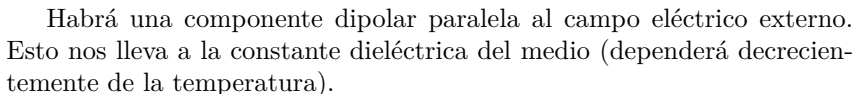
- Dieléctricos
- Medios magnéticos  $\left\{ \begin{array}{l} \text{imán inducido} \left\{ \begin{array}{l} \text{paramagnético} \\ \text{diamagnético} \end{array} \right. \\ \text{imán permanente} \quad \text{ferromagnético} \end{array} \right.$
- Conductor  $\left\{ \begin{array}{l} \text{perfecto} \\ \text{buen conductor} \\ \text{mal conductor} \end{array} \right.$
- Plasmas (gas ionizado)

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

## 1.1 Campos estáticos en medios materiales

En la picture de acá abajo tenemos un átomo esféricamente simétrico, un medio y un vector de polarización. Entonces vemos en la vista zoom cómo se induce un dipolo

Esta subsección tal vez mejor sería que fuera llamada “polarización eléctrica”.


$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \nabla \times \mathcal{E} = 0$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathcal{E}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}) d^3\chi,$$

Se construye así

$$P(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle p_i \rangle,$$

$$P = \frac{\delta p}{\delta V}$$

Diagram illustrating the internal electric field  $E_{int}$  within a dielectric material. The external electric field  $E_{ext}$  is applied from left to right. The dielectric material contains induced positive charges on the left and negative charges on the right, creating an internal electric field  $E_{int}$  that opposes the external field.

$$\delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta V' + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta V'$$
$$\phi(\mathbf{x}) = \int \delta\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \int \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

Ahora el último término se puede escribir como

$$\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = - \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

y considerando integración por partes en esta última

$$\int_{V'} \frac{\rho_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

que se pueden consolidar en

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\rho_L(\mathbf{x}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] dV',$$

donde el volumen  $V'$  abarca todas las fuentes (incluso las de polarización). Entonces considerando que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P,$$

se puede definir una densidad de carga total

$$\rho_T = \rho_L + \rho_P.$$

Entonces, el potencial se escribe como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

De esta forma se puede construir un vector  $\mathbf{D}$  siguiendo esta línea de razonamiento:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_T = 4\pi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

y pasando de miembros

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho_P = 4\pi\rho_L$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

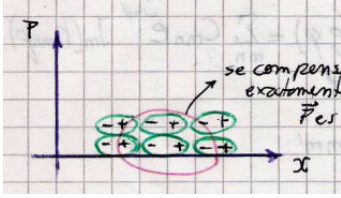
de modo que

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

donde  $\mathbf{D}$  es el llamado vector desplazamiento y estas expresiones valen para todo medio.

En la situación depicted en la figurilla siguiente

Hay que hacer partes con sumo detalle aquí y justificar que el surface term se arroja a los chanchos.



se tendrá una compensación exacta si  $\mathbf{P}$  es uniforme, de manera que  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . En caso contrario existirá una  $\rho_P$  no nula en el interior.

**esrachos**

Luego el potencial es, posteriormente a haber hecho partes es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

Por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e) \mathbf{E}$$

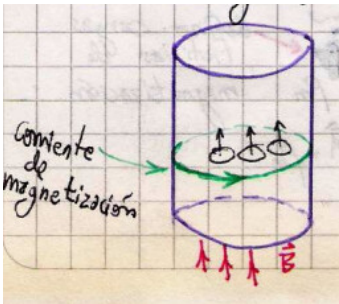
$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

donde  $\xi_e$  es la susceptibilidad eléctrica y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_P,$$

que provienen del rotor de  $\mathbf{E}$ , la divergencia de  $\mathbf{D}$  y la divergencia de  $\mathbf{P}$  respectivamente.

### 1.1.1 Imanes inducidos



Para la Magnetización,

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta V}$$

No sé qué pasaba con la parte de la integral de superficie.

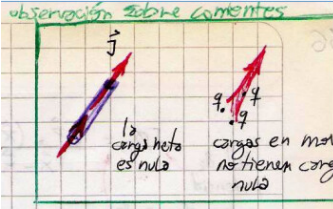
que es el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial

$$\delta A = \frac{\delta \mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

se evalúa con la misma idea que la del dipolo para polarización. Queda por incorporar el asuntete de

$$\frac{1}{c} \int_V c \mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

usando partes.



Entonces es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M \quad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c} \mathbf{g}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \nabla \times \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_M$$

y por la linealidad

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi \chi_M) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde  $\xi_M$  es la susceptibilidad magnética y  $\mu$  es la permeabilidad magnética. Si  $\mu > 1$  es un medio paramagnético y  $\mu < 1$  es diamagnético.

Si hay linealidad e isotropía

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}$$

donde el paréntesis es  $\varepsilon$  es la permitividad eléctrica. Si hay isotropía

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_L \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde  $\mathbf{g}_L$  se refiere a densidad de corriente superficial. Si esta es nula se tiene

$$\begin{cases} B_{n2} = B_{n1} \\ B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_{n2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n1} \\ H_{t2} = H_{t1} \end{cases}$$

### 1.1.2 Imán permanente

Hay magnetización  $\mathbf{M}$  aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que

$$\mathbf{M} \neq \xi_M \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu \mathbf{H}$$

El campo  $\mathbf{M}$  es fuente de campo. El asunto es que  $\mathbf{M}$  tiene el problema de la discontinuidad, pero  $\mathbf{M} = 0$  fuera del medio. La relación entre  $\mathbf{B}, \mathbf{H}$  depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c} \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

si  $\mathbf{J}_L = 0$  entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$

que es un potencial escalar magnético.

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$-\nabla^2 \phi_m = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$$

donde se ha definido cargas ficticias de magnetización. Se deduce una  $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &\equiv -\rho_m & \mathbf{M} \cdot \hat{n} &\equiv \sigma_m \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\nabla \times \mathbf{M})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\rho_L}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ \phi_m &= \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV' \end{aligned}$$

se puede asociar

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_P.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{c\nabla \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}') + \mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \end{aligned}$$

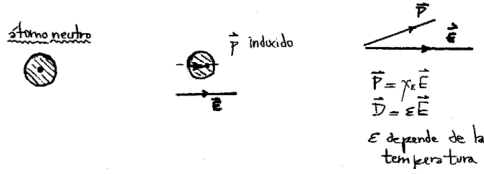


Figura 1.1

## 1.2 Contornos para polarización y magnetización

Suelen  $\mathbf{P}, \mathbf{M}$  depender de los campos externos, es decir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ .

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que  $\mathbf{M}_0 = 0$ ,  $\mathbf{P}_0 = 0$  se da que

$$\mathbf{M} = \sum_i \sum_j \left( \left. \frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right|_{H=0} H_j \right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

y ahí vemos que es un tensor,

$$\mathbf{M} = \vec{\xi}_M \mathbf{H} \quad \mathbf{P} = \vec{\xi}_e \mathbf{E}.$$

### Algún detalle de contornos magnéticos

Sea

$$g_L = 0$$

entonces

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$$



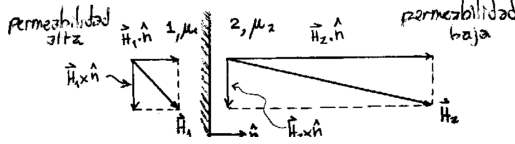


Figura 2.2

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n} = \vec{B}_2 \cdot \hat{n} \quad \mu_1 \vec{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \vec{H}_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1 \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1$$

En el límite  $\vec{H}_2 \perp$  superficie del medio y es similar al  $\vec{E}$  a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente *equipotenciales*.

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{es decir} \quad \vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$$

## Consideraciones en medios magnéticos

Fuera de un imán permanente

$$\nabla \times \vec{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$\vec{B} = -\nabla \phi_m^B,$$

pero fallará en la superficie de separación donde hay  $\vec{J}_m$  y por ende  $\vec{J}_T$ .

Lo que sí funciona es

$$\nabla \times \vec{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$\vec{H} = -\nabla \phi_m^H,$$

y

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot (\nabla \phi_m^H) = -4\pi \nabla \cdot \vec{M} = 4\pi \rho_M$$

$$-\nabla^2 \phi_m^H = 4\pi \rho_M$$

una ecuación de Poisson para el potencial  $\phi_m^H$ .

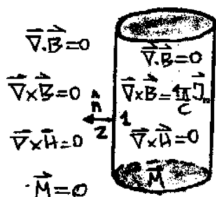


Figura 2.3

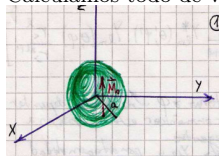
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1 - 4\pi \mathbf{M}) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\nabla \phi_H^2 + \nabla \phi_H^1) \cdot \hat{n} = 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_M$$

**EJEMPLO 2.1 Problema 5 (imán esférico)**

Calculamos todo de varias maneras



Bola ①

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV = \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \hat{z}$$

Bola ②

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$$

$$\mathbf{m} = \int \rho_m \mathbf{x} dV = \hat{z} \int \rho_m z dV$$

Se tienen además

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

y como  $\mathbf{M}$  es constante en el interior, no hay  $\rho_m$  en el volumen. Habría que escribir bien la magnetización  $\mathbf{M}$ . Usaremos una función escalón

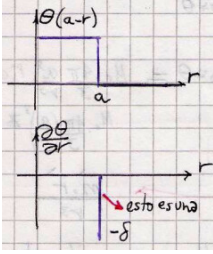
Consideramos una función escalón  $\Theta$  de tal manera que

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \Theta(a - r)$$

donde

$$M_0 \hat{z} = M_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \Theta(a - r)$$

según puede verse en el figurín bajo estas líneas (se ve solo el tetón).



Entonces,

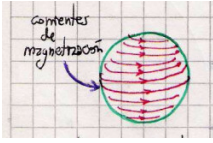
$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_0 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \cos \theta \Theta(a-r)] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta \Theta(a-r)] \right) = -M_0 \cos \theta \delta(r-a)$$

donde  $M_0 \cos \theta = \sigma_M$  resultado que es consistente con la cuenta de  $\sigma = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .

Finalmente,

$$\mathbf{m} = \int \rho_m z dV = M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi M_0 a^3 \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \hat{z}$$

Bola ③. Se ilustra en la postal siguiente



Desde

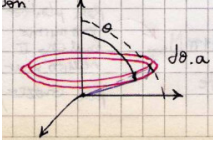
$$\mathbf{J}_m = c \nabla \times \mathbf{M}$$

se deduce

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= c \mathbf{M} \times \hat{n} = c M_0 \hat{z} \times \hat{r} = c M_0 \sin \theta \hat{\varphi} \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}_m dV = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\ell = \frac{I \text{ Area}}{c} \hat{z} \end{aligned}$$

y hemos obtenido el resultado de  $\mathbf{m}$  como área por corriente.

Para el anillito mostrado en el cartón



$$d\mathbf{m} = \frac{\text{seccion}}{c} du = \frac{1}{c} \pi a^2 \sin^2 \theta a \mathbf{g}_m d\theta$$

o bien, integrando,

$$\mathbf{m} = \hat{z} \int_0^\pi M_0 \pi a^3 \sin^3 \theta d\theta = \hat{z} \left( \frac{4\pi}{3} a^3 M_0 \right)$$

con lo cual el potencial resulta

$$\phi_M = \int \frac{\rho_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

o en full splendor

$$\phi_M = \int \int M_0 \cos \theta \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right] a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Aquí hay simetría en torno a de manera que el problema no puede depender de esta coordenada. Los armónicos esféricos pasan a ser los polinomios de Legendre. Puedo ver que  $\cos \theta$  es un armónico  $Y_{10}$  y por ortogonalidad se va toda la doble sumatoria y sobreviven solamente  $\ell = 1, m = 0$ .

$$\text{Valen } \cos \theta = Y_{10} \sqrt{4\pi/3}.$$

Usando esta información tenemos

$$\phi_M = M_0 a^2 \left( \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} Y_{10}^*(\theta, \varphi) = M_0 \frac{4\pi}{3} a^2 \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

solución que es válida en todo el espacio.

$$\phi_M = \begin{cases} M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{r}{a^2} \cos \theta & r < a \\ M_0 \frac{4\pi a^2}{3} \frac{a}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde el último caso  $r > a$  se puede escribir como

$$M_0 \frac{4\pi}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 z = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Recordemos que si  $r > a$  es  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  mientras que para  $r < a$  es  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ .

Si introducimos este imán pelota en un medio tengo una alteración en el contorno. Aquí hay que usar separación de variables.

$$\phi_I = \sum_{\ell} A_{\ell}^I r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\phi_{II} = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}^{II}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

donde en  $I$  se ha tirado una parte de la solución porque diverge en cero, mientras que en  $II$  se tira en cambio la parte que corresponde.

Los contornos salen de evaluar

$$\phi_I(a, \theta) = \phi_{II}(a, \theta)$$

lo cual conduce a

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{2\ell+1}}$$

En el caso de los campos  $\mathbf{B}$  se tendrá  $B_{nII} = B_{nI}$  que conduce a  $[\dot{\ell}]?$

$$\mu H_{nI} = H_{nII} + 4\pi M_{nI}$$

donde el lhs no se puede plantear en un imán permanente y el rhs implica que para plantear esto mismo en el caso  $II$  necesito conocer  $M$  pero conozco  $\mu$ .

$$-\mu \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 4\pi M_0 \cos \theta = 4\pi \sigma_M$$

donde esta última ecuación es casi una de contorno como para el campo  $\mathbf{E}$  pero ojo que está el  $\mu$ . Viene de que  $\mathbf{H} = -\nabla \phi$ . Luego,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \mu(\ell+1) \frac{B_{\ell}^{II}}{a^{\ell+2}} + \ell a^{\ell-1} A_{\ell}^I \right] P_{\ell}(\cos \theta) = 4\pi \sigma_M$$

y ahora se aplica ortogonalidad multiplicando por  $P_{\ell'}$  e integrando, entonces

$$c_{\ell} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} = \frac{4\pi M_0}{2\ell'+1} \delta_{\ell 1} \quad 2\mu \frac{B_1}{a^3} + A_1 = 4\pi M_0$$

y de estas dos ecuaciones se obtienen los coeficientes

$$A_{\ell}^I = \frac{B_{\ell}^I}{a^{2\ell+1}}$$

sumados a

$$4\pi M_0 = (1+2\mu)A \quad A_1 = \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \quad B_1 = \frac{4\pi M_0 a^3}{1+2\mu}$$

Finalmente,

$$\phi = \begin{cases} \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} r \cos \theta & r < a \\ \frac{4\pi M_0}{1+2\mu} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta & r > a \end{cases}$$

donde otra vez la última expresión, para  $r > a$ , tiene la forma  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}/|x|^3$  donde  $\mathbf{m} = 4\pi M_0 a^3 \hat{z}/(1+2\mu)$ .

Un momento dipolar magnético diferente al inicial es porque hubo momento inducido

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\text{ind}} &= \mathbf{m}_T - \mathbf{m} = \left( \frac{4\pi a^3}{1+2\mu} M_0 - \frac{4\pi a^3}{3} M_0 \right) \hat{z} \\ \mathbf{m}_{\text{ind}} &= \left( \frac{1-\mu}{1+2\mu} \right) \frac{8\pi}{3} a^3 M_0 \hat{z} \end{aligned}$$

## 1.3 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Supongo que integrando esto en volumen y usando partes se arriba a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' - \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Entonces, usando la identidad **ID 3** del apéndice se convierte en

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar que el término de volumen se debe a una corriente de magnetización  $\mathbf{J}_M$  y el de superficie a una corriente superficial  $\mathbf{g}_M$ , de modo que se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

El término de superficie puede ser fácil si se conoce  $\mathbf{M}$  sobre la superficie. Este componente se puede dejar de lado si se toma una región de integración que engloba a toda la distribución.

Las unidades de  $\mathbf{g}_M$  tienen que ser de corriente sobre longitud ( $q/(t\ell)$ ) o bien  $i/\ell$ .

Me falta descascar esta expresión, pero tendría que ser la expresión anterior luego de cosmética y tirar el término de superficie. Veremos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad  $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

Esto puede ser el kid de lo que no entendía y de esos dibujillos en la carpeta



## 1.4 Consideraciones energéticas

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(-\nabla\phi) = -\nabla U$$

$$\Delta U = W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} \rightarrow \Delta U = - \int_{\Gamma} \nabla(q\phi) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -q\Delta\phi$$

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} \quad \frac{\delta U}{\delta x} = F_t$$

donde el subíndice es por tangencial.

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left( q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right)$$

$$W_N = \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^N \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

siendo  $\phi_{ij}$  el potencial sobre  $q_i$  debido a  $q_j$ .

$$W_N = \sum_i^N \frac{1}{2} q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de  $q_i$ .

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \delta V \phi$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})}{4\pi} \delta V \phi$$

$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) = \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D}$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta V [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D} \phi) - \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \phi]$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \left( \int_V \nabla \cdot (\mathbf{D} \phi) dV + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \right)$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D} \phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotroía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su  $\epsilon$ . Es un proceso isotérmico. Uno asume que  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$  y no varía con el tiempo. En la práctica  $\epsilon$  varía con la temperatura.

## 1.5 Interpretación termodinámica de U

El incremento de energía a T constante

$$\delta W = U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j \quad \text{con } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ tensor simétrico} \quad (5.1)$$

Pero  $\epsilon$  es función de  $T$  la temperatura y entonces no podemos decir que

$$dU = dW$$

valga en general, pues también hay variación del calor (a no ser que sea un proceso isotérmico) de modo que la energía que representa (5.1) es la energía libre de Helmholtz a  $T$  constante.

$$dU = dQ - dW \quad F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT$$

pero al ser la última cero, resulta

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV - SdT$$

de modo que como el primer término es  $\partial F / \partial D|_T$  resulta que

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D$$

Si es un medio isotrópico entonces  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  y entonces

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dV$$

entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_D &= \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = S \end{aligned}$$

luego

$$U = F + TS = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[ \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{D} + \mathbf{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \left[ \epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right] dV$$

y finalmente para medios lineales e isotrópicos

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial T \epsilon}{\partial T} dV$$



y la segunda ley de la termodinámica es

$$\delta Q = T.dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

con  $\epsilon > 0, T > 0, \partial \epsilon / \partial T < 0$  si el  $\epsilon$  decrece con  $T$  el cuerpo se enfría  $\delta Q < 0$ .

## 1.6 Teorema de Thomson

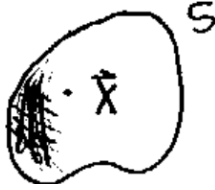


Figura 6.4

$$\delta W = \int_V \phi \delta \rho dV$$

las cargas en un conductor se redistribuirán hasta que  $F$  alcance su valor mínimo.

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\nabla \phi \cdot \delta \mathbf{D} dV) =$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \nabla \cdot \delta \mathbf{D} - \nabla \cdot \delta (\mathbf{D} \phi)] dV$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \sum_i^N \int_V \phi_i 4\pi \delta p_i dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \mathbf{D} \phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_i^N \phi_i \int_V \delta \rho_i dV = 0$$

y la integral de superficie la podemos dejar desvanecerse. Se suma sobre cada conductor que se halla a  $\phi$  constante  $\phi_i$ . La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio  $\delta \rho_i = 0 \forall i$ .

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca pueden llegar a un equilibrio estable. El  $\phi$  no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región.

Sea una región donde

$$\nabla \phi|_s < 0 \Rightarrow \int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \int_V \nabla^2 \phi dV = 0$$

entonces no vale lo que supusiéramos.

## 1.7 Esfera con magnetización uniforme

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z} \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 = \nabla \times \mathbf{M}$$

usando el  $\phi_m$  se llega a

$$\mathbf{H}_I = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}$$

donde  $I$  es por interior de esfera y afuera el  $\phi_m$  es el de un dipolo con

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{M}$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie (no hay multipolos subsiguientes).

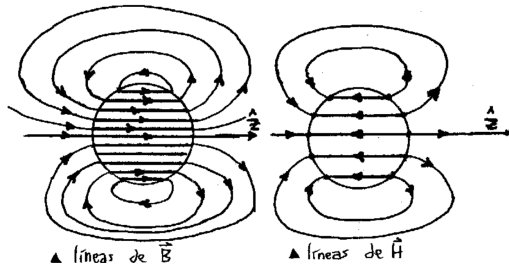


Figura 7.5

En las figuras vemos las líneas de  $\mathbf{B}$  que son continuas, no nacen ni mueren, pero las de  $\mathbf{H}$  nacen y mueren en la superficie, por la  $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$ .  $\mathbf{H}$  es menos intenso que  $\mathbf{B}$  pues

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

de manera que en el interior  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  tienen sentidos opuestos.

## 1.8 Histéresis

Los campos fundamentales son  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , en realidad  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de  $\rho, \mathbf{J}$  de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

pero para ferromagnéticos es  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  con  $f$  no lineal. Se verifica un fenómeno de histéresis;  $\mathbf{B}$  es una función multivaluada de  $\mathbf{H}$  y  $f$  depende de la historia del material.

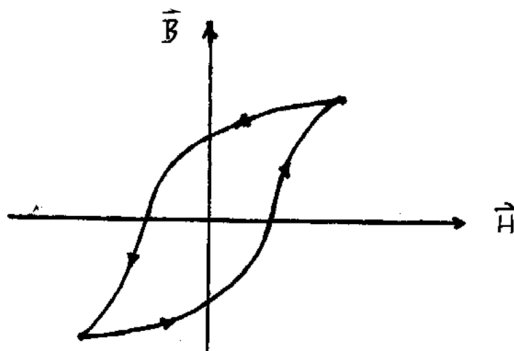


Figura 8.6

$H$  se conoce como campo desmagnetizante.

## 1.9 Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un  $\mathbf{B}_0$  uniforme tendremos

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}$$

y podemos eliminar  $\mathbf{M}$  de manera que

$$2\mathbf{H}_I + \mathbf{B}_I = 3\mathbf{B}_0$$

Vemos en la figura en P el punto de trabajo del imán esférico. Subimos  $\mathbf{B}_0$  hasta saturar la esfera y luego cuando  $\mathbf{B}_0 = 0$  nos hallamos en P. Hemos recorrido el camino ABP.

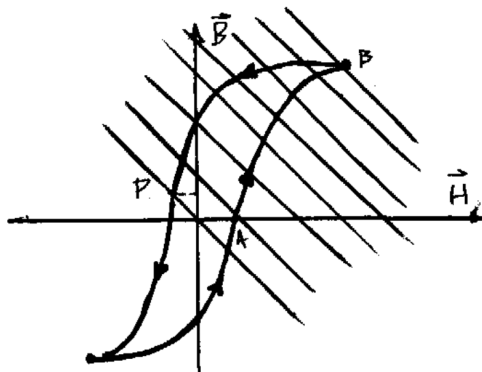


Figura 9.7

Usando la curva de histéresis relacionamos  $B_I, H_I$  y entonces

$$B_I = 3B_0 - 2H_I.$$

Un imán es tanto más estable cuando  $H_I$  es pequeño; en el caso de  $M \parallel$  superficie, por ejemplo.