

# Fenómenos dependientes del tiempo

## 1.1 Ley de Faraday e inducción

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

siendo  $S = \partial\Gamma$  y donde

$$\mathcal{E} \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

siendo  $\mathbf{E}$  un campo irrotacional medido en el frame donde  $\Gamma$  está en reposo. El signo menos es la ley de lenz, la FEM se opone el cambio de flujo.

Pero la variación de flujo puede deberse a variación de  $\mathbf{B}$  o a deformación del circuito.

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{V} \cdot d\ell$$

y entonces

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}' \cdot d\ell = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{V} \cdot d\ell$$

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{V}] \cdot d\ell = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y si  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{B} \times \mathbf{V}$  es el campo medido en el laboratorio se llega a la ley de Faraday,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y usando el teorema de Stokes a su forma diferencial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

siendo este campo  $\mathbf{E}$  claramente no conservativo.

### 1.1.1 Corrección a las ecuaciones

Entonces resultan las siguientes cuatro ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

que son las leyes de Coulomb y Faraday en forma diferencial. Asimismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

que es la no existencia de monopolos magnéticos y la ley de Ampere. En el último caso con  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  que es para corrientes estacionarias.

Justamente por ello la ecuación relacionada con la ley de Ampere está incompleta así puesto que se dedujo para corrientes estacionarias. Maxwell introduce la continuidad aproximadamente en 1865. Entonces, como

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

se sigue que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}}{4\pi} = \nabla \cdot \left[ \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

que es posible pensar como una nueva densidad de corriente  $\mathbf{J}$ . Entonces la ley de Ampere completa es:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

siendo  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  la llamada corriente de desplazamiento. Las cuatro ecuaciones están ahora completas y constituyen las *ecuaciones de Maxwell*.

### 1.1.2 Potenciales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  al igual que en magnetostática, podemos derivar  $\mathbf{B}$  del potencial vector  $\mathbf{A}$ , pero  $\mathbf{E}$  no tiene rotor nulo, entonces no existe  $\phi$  potencial escalar.

Tomando

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \nabla \times \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

podemos pensar en un potencial general  $\Phi$  tal que

$$-\nabla\Phi = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

o bien

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

donde por supuesto  $\Phi$  no tiene significado de trabajo como sí lo tenía el potencial electrostático.

Podemos expresar las ecuaciones (1.1) y (1.2) con  $\mathbf{A}, \Phi$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \rightarrow \text{Nabla} \cdot \left( -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

de manera que resultan dos ecuaciones para los potenciales, pero acopladas

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

### 1.1.3 Cambio de Gauge

Podemos desacoplarlas utilizando la arbitrariedad de los potenciales

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad (1.3)$$

si le sumamos una función al potencial vector,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda,$$

se da que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

pero

$$-\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla\Lambda}{\partial t} = \mathbf{E}$$

lo cual vale si y sólo si

$$-\nabla \left( \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

de manera que requiero

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

y estas dos ecuaciones fijan la transformación de gauge. Como con  $\mathbf{A}'$ ,  $\Phi'$  siguen valiendo las (1.3), requiero que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \left( \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)$$

y si usamos los nuevos potenciales, ahora sin apóstrofes para no confundir con notación redundante,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho$$

ambos potenciales satisfacen sendas ecuaciones de onda. El *gauge de Lorentz* o “condición de Lorentz” es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Podemos imponer también

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

el gauge de Coulomb y entonces

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$$

vemos que el potencial  $\phi$  cumple la ecuación de Poisson. El campo se describirá como el estacionario (electrostático) entonces

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

y entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

siendo cada uno de los términos nulos por sí mismo. Los resultados físicos deben ser independientes del gauge.

## 1.2 Conservación de la energía (teorema de Poynting)

Sea una región con volumen fijo. Existen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  solamente que varían con el tiempo. Pareciera que la energía debiera conservarse.

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

entonces

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\ell = q\mathbf{E} \cdot d\ell$$

dado que  $\mathbf{B}$  no hace trabajo por ser perpendicular la fuerza la velocidad.

$$\delta U = q\mathbf{E} \cdot d\ell$$

para una carga  $q$  es

$$\frac{dU}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

y para una distribución de cargas,

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

que no es otra cosa que la potencia entregada por los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  dentro del volumen  $V$ . Es una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica.

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \left[ \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV$$

Si usamos la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} &= \int_V \frac{c}{4\pi} \left( [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_V \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}] dV - \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} \end{aligned}$$

siendo  $S \equiv \partial V$ . Si denominamos ahora

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad \text{vector de Poynting}$$

$$U = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \quad \text{Densidad de energía EM}$$

resulta que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S}$$

entonces la conservación de la energía por unidad de volumen es

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

e integrada

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

donde se ha aplicado el teorema de Gauss en el miembro derecho. Así

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

siendo el primer término del LHS la variación de la energía total, el segundo la potencia entregada por los campos sobre las fuentes y el RHS el flujo de energía a través de la región transportado por el vector de Poynting. Notemos que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  es el trabajo hecho por unidad de tiempo y por volumen por los campos. Localmente la conservación de la energía es

$$\frac{dU_{cam}}{dt} + \frac{dU_{mec}}{dt} = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}.$$

$\mathbf{S}$  y  $U$  no están relacionados linealmente con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .

### 1.2.1 Conservación del momento

En el discreto se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

y pasando al continuo

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] dv$$

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \times \mathbf{B} \right] dv$$

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[ \frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \times \mathbf{B} \right] dv$$

Ahora, usando las siguientes cuentas auxiliares

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \epsilon\mu \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y ahora volviendo

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c}\epsilon\mu \left( \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \right] dv$$

haciendo un pase de miembros y expresando  $\mathbf{H}$  en términos de  $\mathbf{E}$  es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ \frac{1}{4\pi} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} - \epsilon\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B})] dV \end{aligned}$$

donde el último término en el integrando del RHS es cero y se lo puedo sumar por ello. Prosiguiendo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} + \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \\ \frac{1}{4\pi} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{H})] dV \end{aligned}$$

y con algunas identidades más

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \left[ \mathbf{D}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbb{1}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \right] + \left[ \mathbf{H}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbb{1}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] \right) dV$$

donde los primeros términos dentro de cada corchete son productos tensoriales (su resultado no es un número sino un tensor).

Hemos encontrado que se puede definir la conservación como flujo de un tensor de segundo rango,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right]$$

que es el tensor de esfuerzos de Maxwell.

Entonces

$$\int_V (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})) dV + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV \right) = \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$$

con la normal saliente. Luego, localmente la conservación del momento lineal es

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{cam}}{dt} = \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$$

donde el RHS es la fuerza por unidad de área a través de  $S$  que actúa sobre las partículas y los campos dentro de  $V$ . Definiendo

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

se tiene que  $\mathbf{g}$  es una densidad de flujo de momento y también puede expresarse

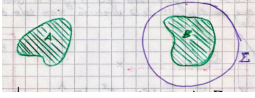
$$\mathbf{g} = \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

Observemos que el tensor de Maxwell es un tensor cartesiano.



### 1.3 Tensor de Maxwell

Se consideran sistemas interactuantes a distancia



y la idea es encerrar al cuerpo con una superficie cerrada  $\Sigma$  lo que nos permitira conocer el campo total sobre esa superficie. Tenemos la siguiente ecuación que no sé bien que

$$F_i(b) = \int_V f_i(b) dV = \int_V \partial_j T_{ij} dV = \int_S T_{ij} \hat{n}_j dS.$$

El tensor  $T$  será diagonal si una de las direcciones es paralela al campo. Con el  $T$  puede calcularse la fuerza que hacen los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sobre una cierta distribución de cargas y corrientes, con tal de evaluar su flujo en alguna superficie que las contenga (como se ve en la figura)

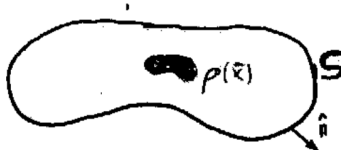


Figura 3.1

y con tal de que

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \mathbf{g} dV \right) = 0 \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

puesto que en ese caso será

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}.$$

En este caso se suele definir el concepto de presión de radiación

$$\mathbf{R}_{rad} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dS} \mathbf{T} \cdot \hat{n}.$$

$T$  es un tensor con autovalores reales; coincidiendo sus autovectores con la dirección del campo. Es independiente del sentido del campo, depende del valor absoluto de los mismos.

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \epsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \epsilon E^2 \right]$$

es el tensor eléctrico y

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mu H^2 \right]$$

el tensor magnético.

### 1.3.1 Ejemplos del tensor de Maxwell

Respecto de la figura, donde vemos que el campo penetra en el recinto y la tensión es hacia adentro, escribimos

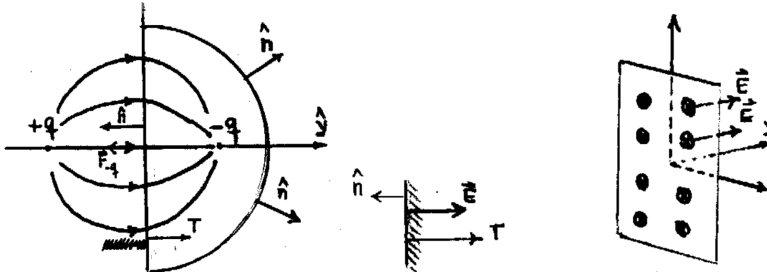


Figura 3.2

$$dS = -dS\hat{y} \quad \mathbf{F}_{\text{sobre } -q} = -F\hat{y}$$

$$T|_S = \begin{pmatrix} -E_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_y^2 \end{pmatrix}$$

la fuerza atractiva hacia afuera del recinto.

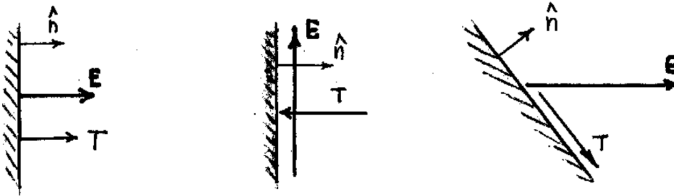


Figura 3.3

En este otro caso, el campo sale del recinto y la tensión es hacia afuera pués la  $\hat{n}$  ha cambiado de sentido.

$$T \cdot d\mathbf{S} \propto \hat{y} \quad \mathbf{F}_{\text{sobre } +q} = F\hat{y}$$

es una fuerza atractiva hacia afuera del recinto.

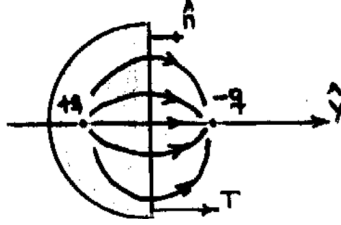


Figura 3.4

Aquí abajo el campo es tangencial al recinto, la tensión penetra en él.

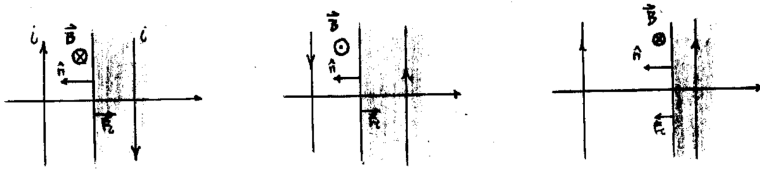


Figura 3.5

Se llega al concepto de  $T$  cuando pensamos en campos para justificar las interacciones. Este concepto es válido también para el campo magnético. Para medios materiales, lineales e isótropos, se tendrán consecuentemente los siguientes tensores eléctrico y magnético estáticos [electro- y magneto-estáticos], respectivamente,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} (1 - b_e) \right]$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} (1 - b_m) \right].$$

Se definen la electrofricción y magnetofricción,  $b_e, b_m$ , respectivamente como

$$b_e = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\rho} = \int_S T_{ij} n_j dS$$

hallándose la  $b_m$  con una definición análoga. La fuerza total de este término es nula pero el efecto es tender a reventar el medio.

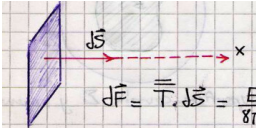
Para el vacío el  $T_{ij}$  es simétrico y con elementos reales, por lo tanto es diagonalizable con autovalores reales. Para diagonalizarlo podemos usar razonamientos físicos o matemáticos.

Cuando  $T$  está diagonalizado la traza no es nula y figura el cuadrado del campo eléctrico, o sea que no depende de la dirección sino solo del valor absoluto de la intensidad. Cuando se diagonaliza, haciendo

$$|T - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

se tienen  $\lambda_1 = E^2/8\pi$  y  $\lambda_{2,3} = -E^2/8\pi$ , donde el autovector de  $\lambda_1$  corresponde a la dirección de  $\mathbf{E}$  y  $\lambda_{2,3}$  a las direcciones perpendiculares.

El siguiente figurín ilustra



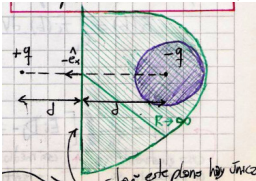
donde se tiene

$$d\mathbf{F} = T d\mathbf{S} = \frac{E^2}{8\pi} dS \hat{\mathbf{e}}_x,$$

o bien en palabras; el campo  $\mathbf{E}$  por unidad de área en la dirección de la normal a la superficie por el elemento de superficie transmite una tensión a través de la superficie.

### EJEMPLO 3.1

Considerando el siguiente dibujo vemos que se quiere obtener la fuerza sobre  $q$  para lo cual se encierra la carga (con una semiesfera al infinito) y calcula el flujo resultante

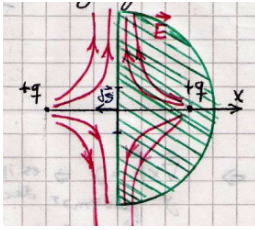


Queda un plano sobre el cual solamente hay  $E_x \hat{\mathbf{x}}$ . Entonces

$$F_x = -\frac{4d^2 q^2}{8\pi} \int_{\text{Plano xy}} \frac{dydz}{(d^2 + y^2 + z^2)^3} = -\frac{q^2}{(2d)^2}.$$

En este caso las dos cargas tienen signos opuestos. Sobre el plano el campo es perpendicular, se transmite entonces una tensión a través del mismo plano; existe una fuerza atractiva.

Para dos cargas iguales



se tiene en  $x = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{2q(y\hat{y} + z\hat{z})}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

el campo es paralelo al plano. Entonces la interacción es repulsiva porque se ejerce una presión a través de  $dS$  que empuja a  $q$ . El tensor es

$$T(0, y, z) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & E_y^2 - \frac{E^2}{2} & E_y E_z \\ 0 & E_y E_z & E_z^2 - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix}$$

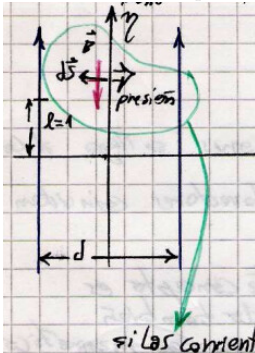
Inmediatamente se llega, para la fuerza sobre la carga de la derecha, a

$$F_x = -\frac{q^2}{8\pi} \int \frac{4(y^2 + z^2)}{(d^2 + y^2 + z^2)^3} dy dz = -q^2 \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(d^2 + \rho^2)^3} d\rho = \frac{q^2}{(2d)^2},$$

que recupera el resultado de la ley de Coulomb (previo pasaje a cilíndricas de la integral y buscando el resultado en una tabla).

### EJEMPLO 3.2 Cables paralelos por los que circula corriente

Se analizará fuerza por unidad de longitud dada la extensión infinita de los cables.



$$\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{B}^1(\eta) + \mathbf{B}^2(\eta) = -\frac{4I}{c} \frac{y}{(d/2)^2 + y^2} \hat{x}$$

Los cables se atraerán si las corrientes son paralelas. Los cables se repulsan si las corrientes son antiparalelas (sentido contrario).

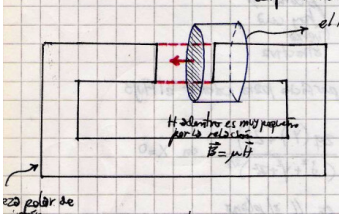
La siguiente figurita ilustra



que si cambio de normal  $\hat{n}$  cambio dirección de la fuerza (debida al flujo del tensor de Maxwell, no al flujo del campo que será nulo).

### EJEMPLO 3.3 Fuerza en imán polar

En este ejemplo se desprecia el flujo lateral y el interior (que es mucho más pequeño). La ilustración muestra una pieza polar de imán.



Luego, el tensor es

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right].$$

$$d\mathbf{F}|_{\parallel} = T \cdot d\mathbf{S}|_{\parallel} \rightarrow \frac{E^2}{8\pi} dS|_{\parallel}$$

el campo eléctrico transmite una tensión  $E^2/8\pi$  paralela a la dirección del campo. El tensor diagonalizado es

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/2 \end{pmatrix}$$

En cambio, el tensor no diagonalizado es

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & \frac{1}{2}(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & \frac{1}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{pmatrix}$$

Si se elige uno de los ejes a lo largo del campo  $\mathbf{E}$  se diagonaliza el tensor, lo cual es un razonamiento matemático.

## 1.4 Método cuasiestacionario

Se aproximan campos y fuentes con frecuencias bajas, es decir cuando  $\omega \approx 0$ . Observemos que se desarrollará la parte espacial pero la temporal quedará como está. Se considera

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}} e^{i\omega/c\hat{n}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t}$$

Un campo ejerce una presión en una dirección perpendicular al campo.

y se desarrollará la parte espacial en torno a  $\omega = 0$ . Comencemos el show,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}} + \omega \frac{i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbb{E}} + \omega^2 \frac{i^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{E}}$$

y si le *pegamos* la parte temporal será

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(0)}} + \underbrace{\omega \frac{i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(1)}} + \underbrace{\omega^2 \frac{i^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{E}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{E}^{(2)}}$$

Para el campo  $\mathbf{B}$  puede hacerse una descomposición análoga,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^2) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1 + \mathbf{B}^2) \\ 0 + \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}^1}_{\propto \omega} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}^2}_{\propto \omega^2} &= \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^0}_{\propto \omega} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^1}_{\propto \omega^2} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^2}_{\propto \omega^3} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \omega (-i\omega) \frac{i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}{c} \vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \frac{\omega^2}{2} (-i\omega) \frac{i^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}^{(0)} + \frac{i\omega}{c} \underbrace{\frac{i\omega}{c} \vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{B}^{(1)}} + \frac{i\omega}{c} \underbrace{\frac{\omega^2}{2} \frac{i^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} \vec{\mathbb{B}} e^{-i\omega t}}_{\mathbf{B}^{(2)}} \end{aligned}$$

Esto establece una equivalencia entre órdenes,

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(0)} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial t}$$

donde el orden cero es el de los campos estáticos.

Consideramos  $\omega/c\ell \ll 1$  con  $\ell$  alguna longitud característica del sistema. Esta es la aproximación del sistema para poder usar cuasiestacionario.

En general, en el método cuasiestacionario se alternarán para un mismo campo el valor constante (no necesariamente cero) y alguna función de  $(\mathbf{x}, t)$ . Es decir, que si  $E_{par} = cte.$  entonces  $E_{impar} \neq cte.$  y si  $B_{impar} \neq cte.$  entonces  $B_{par} = cte.$

Recordemos que la nomenclatura de corrientes en

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

es corriente de conducción y de desplazamiento respectivamente.

Cuando un conductor no es perfecto vale la ley de Ohm,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \delta = \frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}$$

donde  $\delta$  es la profundidad pelicular, una longitud de penetración.

Orden cero	Orden uno	Orden dos
$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}^0 = 4\pi \rho^0$ $\nabla \times \mathbf{E}^{(0)} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B}^{(0)} = 0$	$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}^{(1)} = 4\pi \rho^{(1)}$ $\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(1)}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0$	$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}^{(2)} = 4\pi \rho^{(2)}$ $\nabla \times \mathbf{E}^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(2)}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B}^{(2)} = 0$
$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(0)}$ $\nabla \cdot \mathbf{J}^{(0)} = 0$	$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(1)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{J}^{(1)} = -\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}$	$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(2)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{J}^{(2)} = -\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}$