

---

# CURSO BÁSICO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 1: Mecánica Clásica

---

E.F. Lavia

versión 0.1

23 de octubre de 2019

# Contenidos

<b>1 Conceptos de mecánica newtoniana</b>	<b>1</b>
1.1 Leyes de conservación . . . . .	1
1.1.1 Momento lineal . . . . .	1
1.1.2 Momento angular . . . . .	3
1.1.3 Trabajo y energía . . . . .	7
1.2 Introducción a la formulación de Lagrange . . . . .	15
1.3 Grados de libertad y vínculos . . . . .	16
1.3.1 Clasificación de los vínculos . . . . .	18
1.4 Velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas . .	20
1.4.1 Coordenadas cilíndricas . . . . .	21
1.4.2 Coordenadas esféricas . . . . .	22
1.5 Transformación entre sistemas en rotación . . . . .	23
<b>2 Mecánica lagrangiana</b>	<b>27</b>
2.1 Principio de los trabajos virtuales . . . . .	27
2.1.1 Comentario vínculos . . . . .	29
2.2 Construcción del lagrangiano . . . . .	29
2.2.1 Algunos ejemplos del lagrangiano . . . . .	34
2.3 Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total .	37
2.4 Momentos conjugados y coordenadas cíclicas . . . . .	39
2.5 Momentos canónicamente conjugados y traslaciones rígidas . .	40
2.6 Momentos canónicamente conjugados y rotaciones rígidas . .	42
2.7 Energía cinética generalizada . . . . .	44
2.8 Energía cinética de un sistema de partículas . . . . .	46
2.9 Trabajo en un sistema de partículas . . . . .	47
2.10 Lagrangiano cíclico en el tiempo . . . . .	47
2.11 Energía cinética y el hamiltoniano . . . . .	49
2.12 Principio de acción mínima . . . . .	50
2.13 Aplicaciones del principio de acción mínima . . . . .	58
2.13.1 Billares [otro título?] . . . . .	59
2.13.2 Minimización del camino entre dos puntos . . . . .	60

# CONTENIDOS

2

2.13.3	Acción mínima ejemplos . . . . .	62
2.14	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	65
2.14.1	Soluciones aproximadas . . . . .	70
2.14.2	Oscilador armónico . . . . .	71
2.15	Potenciales dependientes de la velocidad . . . . .	75
2.16	Cambio de <i>gauge</i> en potenciales . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Simetrías</b>	<b>80</b>
3.1	Constantes de movimiento y simetrías . . . . .	80
3.1.1	Simetrías en el lagrangiano . . . . .	81
3.1.2	Rotación en 3D infinitesimal . . . . .	83
3.2	El teorema de Noether . . . . .	83
3.2.1	Rotación infinitesimal . . . . .	85
3.2.2	Rotación en 3D infinitesimal . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Fuerzas centrales</b>	<b>92</b>
4.1	Fuerzas centrales . . . . .	92
4.2	Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	99
4.2.1	elipses y velocidad areolar . . . . .	100
4.3	Velocidad areolar . . . . .	101
4.4	Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler . . . . .	103
4.5	Teorema del virial . . . . .	110
4.6	Vector de Runge-Lenz . . . . .	112
4.7	Precesión [acomodar] . . . . .	116
4.8	Orbitas de potenciales centrales . . . . .	116
4.9	Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente . . . . .	117
4.10	Dispersión . . . . .	121
4.10.1	preliminares–usar y destruir– . . . . .	121
4.10.2	Esfera maciza . . . . .	124
4.10.3	Ángulo sólido . . . . .	126
4.11	Dispersión por dos cuerpos . . . . .	127
4.12	Scattering . . . . .	132
4.12.1	Delta de Dirac –mover a apéndice– . . . . .	139
4.13	Dispersión por potenciales infinitos . . . . .	140
4.13.1	Problemas descolgados –reacomodar– . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Pequeñas oscilaciones</b>	<b>143</b>
5.0.1	Idea para un grado de libertad . . . . .	143
5.0.2	Varias variables . . . . .	144
5.0.3	Expresión vectorial . . . . .	149
5.0.4	Un cambio de coordenadas . . . . .	150
5.0.5	Coordenadas colectivas y normales . . . . .	153

# CONTENIDOS

3

5.1	Oscilaciones viscosas . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Cuerpos rígidos</b>	<b>167</b>
6.1	Cuerpos rígidos . . . . .	167
6.1.1	Grados de libertad de un cuerpo rígido . . . . .	169
6.1.2	Velocidad de un cuerpo rígido . . . . .	170
6.1.3	Unicidad de la velocidad de rotación . . . . .	172
6.1.4	Eje instantáneo de rotación . . . . .	173
6.2	Energía cinética del cuerpo rígido . . . . .	174
6.3	El tensor de inercia . . . . .	178
6.3.1	Simetrías y distribución de masa . . . . .	181
6.3.2	tensores -reubicar- . . . . .	184
6.4	Ángulos de Euler . . . . .	184
6.4.1	La peonza simétrica . . . . .	190
6.5	Teorema de Steiner . . . . .	199
6.6	Movimiento de un cuerpo asimétrico . . . . .	202
6.7	Sistemas no inerciales . . . . .	207
6.8	Lagrangiano de un sistema no inercial que se traslada . . . . .	211
6.9	Sistemas rotantes . . . . .	214
6.9.1	Lagrangiano en un sistema rotante . . . . .	219
<b>7</b>	<b>Sistemas rotantes</b>	<b>223</b>
7.1	Sistemas rotantes . . . . .	223
7.1.1	Recordemos la transformación de Galileo . . . . .	224
7.2	Problemas de parcial . . . . .	226
7.2.1	Problema 2 . . . . .	226
7.2.2	Problema 1 . . . . .	226
7.2.3	Problema 3 . . . . .	227
7.2.4	Problema 4 . . . . .	227
<b>8</b>	<b>Ecuaciones de Hamilton</b>	<b>228</b>
8.0.1	Otra nomenclatura, elegante y compacta . . . . .	230
8.1	Transformación canónica del hamiltoniano . . . . .	230
8.2	Transformaciones canónicas. Una picture . . . . .	233
<b>9</b>	<b>Transformaciones canónicas</b>	<b>234</b>
9.1	Funciones generatrices . . . . .	234
9.2	Algunos ejemplos de generatrices y transformaciones . . . . .	235
9.3	Corchetes de Poisson . . . . .	235
<b>10</b>	<b>Ecuaciones de Hamilton-Jacobi</b>	<b>238</b>
10.1	Introducción a la formulación de Hamilton . . . . .	238

10.1.1	La idea de Hamilton-Jacobi . . . . .	239
10.2	Preservación del volumen en una transformación canónica . . . . .	243
10.3	Variables ángulo-acción . . . . .	245
10.3.1	Péndulo . . . . .	246
10.3.2	Oscilador armónico . . . . .	248
10.4	Transformación canónica infinitesimal . . . . .	251
10.5	Volviendo a Hamilton-Jacobi . . . . .	253
10.5.1	Comentario Schrödinger . . . . .	256
10.5.2	Hamilton-Jacobi particular . . . . .	257
10.6	Potencial electromagnético . . . . .	259
10.6.1	Popurrí de cosas para reubicar . . . . .	269
<b>A</b>	<b>Rotación en el plano</b>	<b>271</b>

## Prefacio

Al momento de escribir este volumen tomo conciencia de la lejanía que me separa de aquel que fui yo al tomar las notas originales del curso de mecánica clásica que dictase el profesor Alejandro Fendrik en 2005.

En cierto sentido creo que esa distancia fue beneficiosa porque me situó casi en la perspectiva de un extranjero que por primera vez tuviera que recorrer esas tierras.

La mecánica clásica forma la estructura basal sobre la cual se construye todo el resto de la física teórica. En ella uno empieza a manipular ecuaciones más complicadas y aprende formalismos nuevos que le permitirán atacar viejos y nuevos problemas con otra mirada. Mucho de lo que aquí se ve se utiliza después en física menos intuitiva y más abstracta, como por ejemplo la mecánica cuántica y la relatividad general, donde es más difícil lograr una intuición física y pensar las cosas en términos de modelos mecánicos. Si esta intuición puede ser ganada aquí, en mecánica clásica, ello redundará en un mejor soporte mental para los próximos pasos.

## Capítulo 1

---

# Conceptos de mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo constituye el corazón de la mecánica clásica.

El contenido de este capítulo forma un núcleo básico de los resultados de la mecánica newtoniana que necesitaremos tener a mano para lo subsiguiente (leyes de conservación del momento lineal, momento angular y energía) así como ciertos rudimentos mínimos de la matemática usual en la resolución de los problemas.

## 1.1 Leyes de conservación

Repasaremos a continuación las leyes de conservación fundamentales de la mecánica para sistemas de partículas.

### 1.1.1 Momento lineal

La segunda ley de Newton se podía escribir en función del momento lineal de una partícula de masa  $m$  como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

siendo  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  el momento de la partícula y  $\mathbf{F}$  la fuerza total que actuaba sobre la misma. Si el resultado de las fuerzas sobre la partícula era nulo entonces se tiene que  $\mathbf{p} = \text{cte.}$  (el momento lineal es una constante de movimiento).

En el caso de un sistema de  $N$  partículas como el mostrado en la Figura 1.1 el momento total del sistema es la suma de los momentos individuales, es decir

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$$

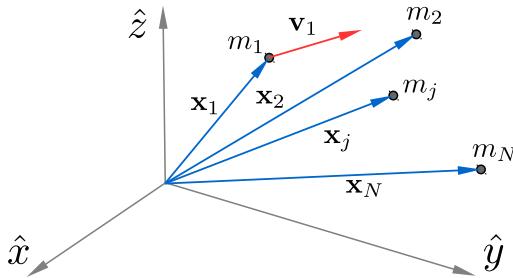
luego la segunda ley para el sistema serán las  $N$  ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza total sobre la partícula  $i$ -ésima que puede descomponerse según

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

siendo  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  las fuerzas debidas a agentes externos y  $\mathbf{F}_{ij}$  la fuerza sobre la partícula  $i$  debido a la partícula  $j$ .



**Figura 1.1** Sistema de partículas de masas  $m_i$  con sus correspondientes vectores de posición  $\mathbf{x}_i$ . La partícula  $m_1$  tiene además indicado su vector velocidad  $\mathbf{v}_1$ .

Entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}$$

pero el último término del RHS es nulo puesto que por cada sumando  $\mathbf{F}_{ij}$  también aparece el sumando  $\mathbf{F}_{ji}$  y por acción y reacción estas fuerzas tienen la

misma dirección y sentido opuesto, i.e.

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

De esta forma la ley de conservación para el sistema es

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{total}}^{\text{ext}}$$

y el momento  $\mathbf{P}$  del sistema se conserva si la resultante de todas las fuerzas externas es nula.

Definiendo el vector de posición del centro de masa como

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M}$$

donde  $M$  es la masa del sistema, se tiene el resultado clásico de que

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{x}_{\text{cm}}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \mathbf{P},$$

el sistema como un todo tiene un momento total que puede asociársele al de una única partícula *centro de masa* de masa  $M$  y que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ .

Si  $\mathbf{P}$  se conserva, entonces  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$  es una constante, el sistema posee un punto (el centro de masas) que se mueve con velocidad constante sin importar qué tan complejo sea el movimiento del conjunto total.

### 1.1.2 Momento angular

El momento angular de una partícula con momento lineal  $\mathbf{p}$  es

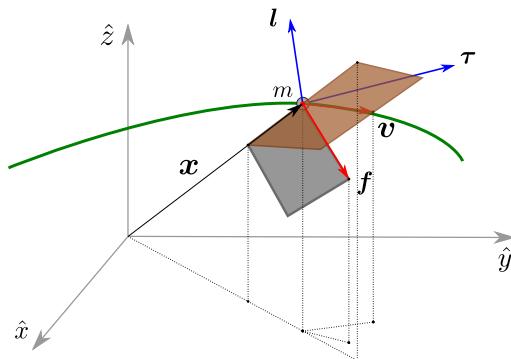
$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = m \mathbf{x} \times \mathbf{v}.$$

En la Figura 1.2 se ilustra sobre la trayectoria de una partícula el vector momento angular. La variación temporal del momento angular,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

se reduce al segundo término, puesto que  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$  es paralela a  $\mathbf{p}$ , y se tiene finalmente el resultado conocido

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.2)$$



**Figura 1.2** Una partícula de masa  $m$  se desplaza en una trayectoria. En un punto  $x$  de la misma se indican su velocidad  $v$ , su momento angular  $l$  y la fuerza  $F$  a la que está sometida y el torque resultante  $\tau$  por esa fuerza. El momento angular es perpendicular al plano (en marrón) definido por los vectores  $x$  y  $v$  mientras que el torque lo es al plano (en gris) definido por  $x$  y  $F$ .

de que la variación del momento angular es el torque  $\tau$  causado por la fuerza  $F$  que actúa sobre la partícula.

Dado que la definición de  $l$  y de  $\tau$  implica el vector de posición  $x$  se sigue que ambas magnitudes dependen de la elección del origen del sistema de coordenadas. Es decir que una determinación de  $l$  y  $\tau$  tiene sentido únicamente con respecto a un cierto origen de coordenadas.

De la ecuación (1.2) se deduce que si la fuerza es siempre paralela al vector de posición de una partícula ( $F \parallel x$ ) entonces el momento angular  $l$  se conserva puesto que el torque es  $\tau = 0$  en ese caso. Es lo que se llama una fuerza central.

Cambiar en el dibujo f por F.  
Igualmente habría que ser consistente con qué quiero decir para las mayúsculas y qué para las minúsculas.

Habría que destacar lo de fuerza central con un dibujo. Es importante.

### Momento angular para un sistema de partículas

Si ahora tenemos un sistema de  $N$  partículas el momento angular correspondiente (con respecto a un dado origen de coordenadas) será

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$$

De manera equivalente, la variación temporal es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$$

y si utilizamos la descomposición (1.1) para la fuerza  $\mathbf{F}_i$  resulta

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

Es claro<sup>1</sup> que el segundo término puede expresarse de manera equivalente como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji}]$$

y aceptando que las fuerzas internas son pares acción-reacción se tiene

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j] \times \mathbf{F}_{ij},$$

de manera que la derivada del momento angular total es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j] \times \mathbf{F}_{ij} \quad (1.3)$$

La conservación de  $\mathbf{L}$ ,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

requiere entonces que las fuerzas externas sean centrales, lo cual anula el primer término en (1.3), y que se verifique

$$\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

es decir que la fuerza sobre  $i$  ejercida por la partícula  $j$  tenga la dirección del vector que une las dos partículas, para anular el segundo término de (1.3).

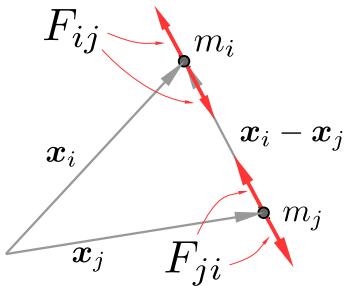
Esto establece lo que se llama un “principio de acción y reacción fuerte”; las fuerzas son iguales y opuestas (de esto se trata el principio de acción y reacción), pero además colineales. Dadas dos partículas del sistema cualesquiera con posiciones  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_j$  y de masas  $m_i$ ,  $m_j$ , como se muestra en la Figura 1.3, la fuerza  $\mathbf{F}_{ij}$  sobre  $i$  debido a  $j$  debe estar contenida en la dirección del vector  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  lo cual le otorga las dos posibilidades indicadas por las flechas rojas gruesas. Para la fuerza  $\mathbf{F}_{ji}$  el razonamiento es, por supuesto, idéntico.

La existencia de un principio de acción y reacción fuerte sobreviene [es una consecuencia?] de la naturaleza puntual de los cuerpos. De no ser puntuales se tendrá principio de acción y reacción a secas.

Acá hay más para extraer:  
poner un gráfico con lo que no  
puede pasar. Poner un código  
de colores para las flechas,  
puesto que si son iguales y  
opuestas las fuerzas están  
hermanadas las externas por  
un lado y las internas por el  
otro.

---

<sup>1</sup>Nota 1.5



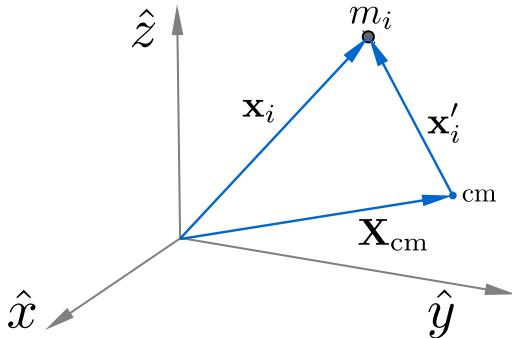
**Figura 1.3** Principio de acción y reacción fuerte para dos partículas de masas  $m_i$  y  $m_j$ .

Existe otra descomposición interesante para el momento angular  $\mathbf{L}$  de un sistema de  $N$  partículas en términos de sus distancias al centro de masas.

Para cada partícula  $i$ -ésima con posición  $\mathbf{x}_i$  y velocidad  $\mathbf{v}_i$  definimos una coordenada  $\mathbf{x}'_i$  y una velocidad  $\mathbf{v}'_i$  en términos de la posición  $\mathbf{X}$  y velocidad  $\mathbf{V}$  del centro de masa, ver Figura 1.4, de acuerdo a

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X} + \mathbf{x}'_i \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i,$$

es decir que consideramos coordenadas respecto al centro de masa.



**Figura 1.4**

En términos de estas nuevas variables primadas el momento angular es

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{X} + \mathbf{x}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)$$

Actualizar el  $X_{cm}$  en el gráfico y poner el origen O.

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N (\mathbf{X} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{X} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

Como la posición del centro de masa es

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \quad (1.4)$$

se tendrá

$$M\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{X} + \mathbf{x}'_i) = \mathbf{X} \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i$$

pero el primer término del RHS es  $M\mathbf{X}$  de manera que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i = 0. \quad (1.5)$$

La velocidad del centro de masa es la derivada temporal de (1.4), i.e.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (1.6)$$

Con estos resultados volvemos a la expresión del momento que resulta

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{X} \times M\mathbf{V} + \mathbf{X} \times \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \right) + \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i,$$

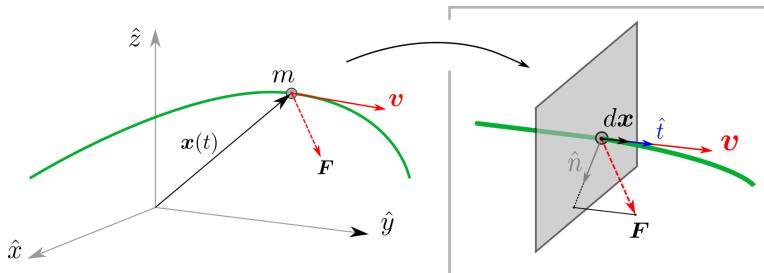
pero debido a (1.5) y a su derivada temporal (que resulta nula) el segundo y tercer sumando de la expresión anterior son nulos y entonces

$$\mathbf{L}_O = (\mathbf{X} \times M\mathbf{V}) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

siendo el primer término del RHS el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

### 1.1.3 Trabajo y energía

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una cierta trayectoria suave  $\mathbf{x}(t)$ , ver Figura 1.5, debido a la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$ . Su velocidad  $\mathbf{v}$  es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma



**Figura 1.5** Partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una trayectoria  $x(t)$  bajo la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  (izquierda). En el detalle de la derecha se muestra la descomposición del movimiento en direcciones tangencial  $\hat{t}$  y normal  $\hat{n}$ .

un vedor  $\hat{t}$  colineal con la misma. Esto define un plano, mostrado en la parte derecha de la figura, para el cual todo vector perteneciente al mismo es normal a la trayectoria. Elegimos un vedor  $\hat{n}$  que está en la dirección de la proyección de  $\mathbf{F}$  sobre dicho plano.

Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F^t \hat{t} + F^n \hat{n} \quad \mathbf{v} = v \hat{t}$$

de manera que la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

para la componente  $\hat{t}$  resulta

$$m \frac{dv}{dt} = F^t$$

Involucrando al diferencial de arco  $ds = |dx|$  a lo largo de la trayectoria, la ecuación anterior se puede escribir como

$$m dv \frac{ds}{dt} = m v dv = F^t ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

donde la última igualdad es posible en virtud de que  $F^n \perp d\mathbf{x}$  por construcción.

Podemos integrar ambos miembros de (1.7) entre  $x(t_0) \equiv x_0$  y su correspondiente velocidad  $v(t_0) \equiv v_0$  hasta  $x_1, v_1$ ,

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

**Notemos que el vedor desplazamiento  $ds$  camina por la trayectoria.**

obteniendo

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_0}^{v_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}$$

que es el llamado *teorema de las fuerzas vivas* para una partícula de masa  $m$  y nos dice que la variación de energía cinética en la trayectoria es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la misma, i.e.

$$T_1 - T_0 = \Delta T_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}. \quad (1.8)$$

En el caso particular en que la fuerza sea normal a la trayectoria en todo el intervalo  $[t_0, t_1]$  se tendrá  $\Delta T = 0$ , es decir que se conserva la energía cinética a lo largo de toda la trayectoria. Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo y esto es solamente debido a que este proviene de un producto escalar (una proyección); las componentes normales no hacen trabajo.

Si la fuerza proviene de un potencial<sup>2</sup>, se tiene

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.9)$$

Falta meter lo de

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

y podemos expresar en coordenadas cartesianas esta equivalencia (1.9)

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right)$$

y evaluar la integral del trabajo para obtener

$$W = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}[t]) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt = V_0 - V_1$$

donde la última igualdad se obtiene por integración de un gradiente. Esto significa que la integral es independiente de la trayectoria  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$ .

Entonces, volviendo a (1.8)

$$\overbrace{T_1 - T_0}^{\text{Vale siempre}} = \overbrace{W_{0 \rightarrow 1}}^{\text{Si } \mathbf{F} \text{ proviene de potencial}} = \overbrace{V_0 - V_1}$$

y pasando de miembros se tiene

$$(T_1 + V_1) = (T_0 + V_0)$$

que viene a significar que la cantidad  $E = T + V$  (la energía mecánica) se conserva si la fuerza  $\mathbf{F}$  proviene de un potencial  $V$ . Por dicha razón, las fuerzas

---

<sup>2</sup>El menos delante del gradiente es una convención, como se verá a continuación.

para las cuales se verifica (1.9) se llaman *fuerzas conservativas*. En una dimensión, cualquier  $F(x)$  se puede hacer provenir de un potencial si verifica ser integrable, es decir si podemos definir

$$V(x) = \int F(x) dx. \quad (1.10)$$

Para tres dimensiones no cualquier  $F(x)$  es conservativa.

El signo negativo en (1.9) hace que la cantidad conservada sea  $T + V$  en lugar de  $T - V$ . Tiene más sentido físico que se conserve una suma de energías antes que una resta de las mismas.

### Trabajo y energía para un sistema de partículas

Para un sistema de  $N$  partículas la energía cinética simplemente es la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Utilizando la expresión en función del centro de masa,  $v_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$  en la energía se llega a

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v'_i^2,$$

donde el primer término es la energía cinética de traslación del centro de masa y el segundo término (la sumatoria) es la energía cinética interna. En el caso de dos cuerpos la anterior expresión se reduce a

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \mu v_r^2$$

donde  $\mu$  es la masa reducida y  $v_r$  es la velocidad relativa.

La definición del trabajo, en cambio, es un poco más complicada. Entre dos instantes de tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$  el sistema está caracterizado por las  $N$  posiciones  $\{\mathbf{x}_i\}$  de todos sus integrantes y cada partícula experimenta un desplazamiento  $\Delta \mathbf{x}_i$  asociado con la fuerza que actúa sobre ella.

En principio la fuerza sobre cada partícula puede dividirse en interna (debida a las otras partículas del sistema) y externa (debida a agentes exteriores al sistema), lo cual permite escribir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

y consecuentemente

$$W = W^{\text{int}} + W^{\text{ext}}$$

**Las conservaciones de las cosas permiten reducir la cantidad de integraciones necesarias.**

El  $W$  entre dos instantes de tiempo  $t_0$  y  $t_1$  corresponde ahora a la integral entre la configuración del sistema a  $t_0$  dada por  $\{\mathbf{x}_i(t_0)\}$  hasta la configuración  $\{\mathbf{x}_i(t_1)\}$ , las cuales etiquetaremos como 0 y 1 respectivamente.

Entonces el trabajo externo es

$$W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{x}_i$$

siendo  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  la fuerza externa sobre la partícula  $i$ . Para que valga la conservatividad es necesario que

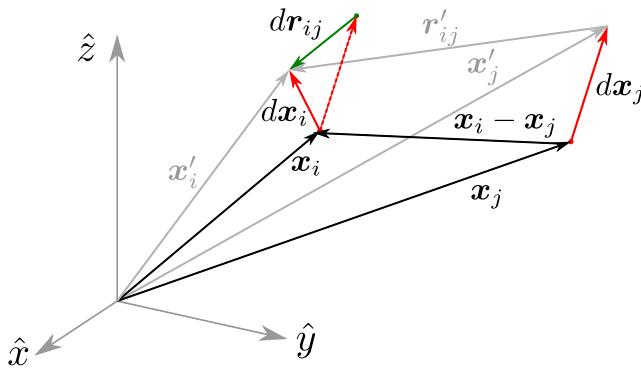
- La fuerza sobre  $i$  dependa solamente de las coordenadas  $\mathbf{x}_i$  de esa partícula. Es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$$

- Se verifique para cada  $\mathbf{F}_i$

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0,$$

donde el operador  $\nabla$  se toma con respecto a las coordenadas de la partícula  $i$  en cuestión.



**Figura 1.6** Elementos implicados en la evaluación del trabajo interno  $W^{\text{int}}$  para un sistema de partículas.

Arreglar flechas en este gráfico.

Estas condiciones permiten escribir la fuerza como el gradiente de un potencial y entonces el trabajo externo es la suma de las diferencias entre las energías potenciales de las partículas entre las configuraciones 0 y 1, o bien

$$W^{\text{ext}} = - \sum_{i=1}^N \Delta V_i(\mathbf{x}_i)|_0^1$$

El rozamiento depende de la velocidad, entonces no es conservativo.

El trabajo interno corresponde a la suma sobre cada partícula  $i$  de la fuerza ejercida por todas las otras partículas  $j \neq i$  del sistema, es decir

$$W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{F}_{ij}$  es la fuerza sobre  $i$  ejercida por  $j$ . La restricción en la sumatoria sobre  $j$  descarta la suma de autofuerzas. Es claro que la expresión (1.11) se puede escribir equivalentemente como

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{x}_j)$$

y si ahora aceptamos que vale el principio de acción y reacción

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j).$$

**¿nota final con la justificación de que se puede escribir así?**

Definiendo luego un vector de separación relativa  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  se tiene que las integrales son de la forma

$$\int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y sabemos, por analogía con lo anterior, que si  $\mathbf{F}_{ij}$  depende del vector de separación  $\mathbf{r}_{ij}$  y es de rotor nulo entonces las fuerzas internas son conservativas. Entonces,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V(\mathbf{r}_{ij}) \quad \mathbf{F}_{ji} = -\nabla_j V(\mathbf{r}_{ij})$$

y como vale acción y reacción  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  esto lleva a que  $\nabla_i = \nabla_j$ .

Un ejemplo numérico aclarará esta relación. Sea un potencial que depende de la distancia entre dos partículas,  $r = |\mathbf{r}_{ij}|$ , es decir que si  $i = 2$  y  $j = 1$  se tendrá

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 V &= -\frac{\partial V}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_2} \hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y_2} \hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z_2} \hat{z} \right) = \\ &- \frac{\partial V}{\partial r} \frac{1}{r} ((x_2 - x_1) \hat{x} + (y_2 - y_1) \hat{y} + (z_2 - z_1) \hat{z}) \end{aligned}$$

**Un potencial que depende solo de la distancia entre dos partículas  $|\mathbf{r}_{ij}|$  cumple PAR fuerte.**

y, en cambio,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V &= -\frac{\partial V}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_1} \hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y_1} \hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z_1} \hat{z} \right) = \\ &\quad -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{1}{r} (-(x_2 - x_1) \hat{x} - (y_2 - y_1) \hat{y} - (z_2 - z_1) \hat{z})\end{aligned}$$

de manera que  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ .

En estos casos, en presencia de fuerzas conservativas

$$E = T + V^e(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij}$$

donde  $V^e$  es el trabajo externo. Luego, la variación de energía  $\Delta E$  será

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N (\Delta T_i - \Delta V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta V_{ij}.$$

**Revisar la escritura de la energía y de la variación, qué pienso con respecto a T, V?**

### EJEMPLO 1.1 Análisis energético de un potencial

Dada una fuerza 1D

$$F(x) = -kx + \frac{a}{x^3}, \quad a > 0$$

se realiza un análisis del potencial resultante y de la energía.

A partir de esta fuerza, que es la del oscilador armónico 1D sumada a una perturbación controlada por el parámetro  $a$ , procedemos a calcular el potencial, a través de la relación (1.10) de modo que (a menos de una constante aditiva que no interesa aquí) se obtiene

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{a}{2x^2}$$

siendo la energía total

$$E = T + V(x),$$

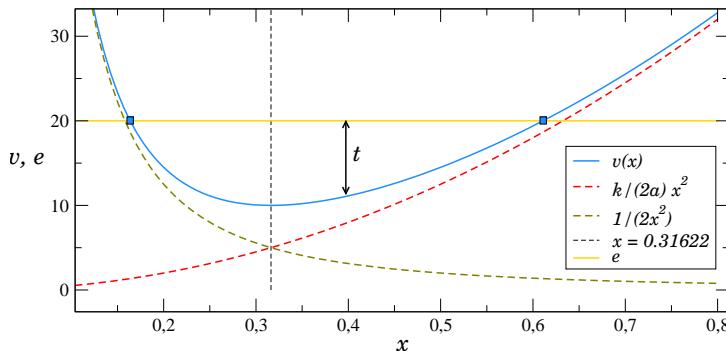
la cual es una cantidad conservada.

Para analizar el movimiento bajo este potencial dividimos ambos miembros sobre  $a$  y se define  $v \equiv V/a$  para considerar tres casos representativos  $k/a = 5, 20, 100$ . Este potencial  $v$  es una especie de potencial por unidad de  $a$ . Consecuentemente, tendremos una energía reescalada  $e = t + v$ .

Para el caso  $k/a = 100$  la Figura 1.7 muestra la gráfica de  $v$  junto con la de cada uno de los términos que componen este potencial; el término  $k/(2a)x^2$  (cuadrático) y  $1/(2x^2)$  (una ley de potencias de exponente -2). En la zona de  $x$  pequeña domina la ley de potencias mientras que para  $x$  grande domina la cuadrática.

También está indicada una línea de  $e$  constante que define la energía total  $t + v$ . Dada la restricción  $e = t + v$ , la energía cinética  $t$  está representada por la distancia vertical entre  $e$  y  $v$  para todo  $x$  comprendido entre los puntos indicados por cuadros azules. Estos son aquellos puntos para los cuales  $t = 0$  (la velocidad es nula) y definen por ende un punto de cambio de

La fuerza  $-kx$  es una fuerza restitutiva mientras que  $a/x^3$  es una fuerza repulsiva pues  $a > 0$ .



**Figura 1.7** Gráfico del potencial  $v = V(x)/a$  y energía  $e = E/a$  escalados para el ejemplo del oscilador perturbado ( $k/a = 100$ ).

movimiento; son los llamados *turning points* (puntos de retroceso). En la figura se indica con una doble flecha vertical la magnitud de  $t$  para  $x = 0.4$ .

Las regiones por fuera de los puntos de retroceso están prohibidas puesto que  $t < 0$  allí. El movimiento posible para este potencial es entonces acotado y se halla dentro del intervalo definido por dichos puntos.

La línea vertical punteada  $x = 0.31622$  indica el mínimo del potencial (que sale desde  $dV(x)/dx = 0$  y es equivalente por ello a la condición  $F(x) = 0$ ). Ese punto es, debido a la forma particular de  $F$ , donde son iguales los aportes del oscilador (término cuadrático) y de su perturbación (ley de potencias).

A medida que  $a$  es más importante ( $k/a$  disminuye) la parte  $1/x^2$  del potencial actúa hasta valores de  $x$  mayores, como puede verse en la Figura XXX donde aparecen graficado  $v$  para los casos  $k/a = 100, 20, 5$ .

Para una partícula que se mueva bajo este potencial la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - \frac{k}{2} x^2 - \frac{a}{2x^2},$$

permite llegar a la integral de la trayectoria

$$\sqrt{m} \int \frac{1}{[2E - kx^2 - a/x^2]^{1/2}} dx = \int dt.$$

La existencia de solución cerrada para esta integral dependerá, por supuesto, de la forma del potencial  $V(x)$ . En este caso particular el reemplazo  $u = x^2$  permite escribir el argumento de la raíz como una diferencia de cuadrados merced a un nuevo reemplazo  $y = u - E/k$ . Si se integra entre  $x_0 = x(t=0)$  y  $x = x(t)$  se obtiene

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0^2 - E/k}^{x^2 - E/k} \frac{1}{\sqrt{C^2 - y^2}} dy = t - t_0$$

donde la constante es  $C = \sqrt{E^2 - ka}/k$ .

La solución de esta integral es del tipo  $\arcsin(y/|C|)$  de manera que obtenemos

$$x^2 = \frac{\sqrt{E^2 - ak}}{k} \sin \left[ \sqrt{4k/m}(t - t_0) + \arcsin((kx_0^2 - E)/\sqrt{E^2 - ak}) \right] + \frac{E}{k}.$$

**Poner la cuenta genérica en las notas. Why not?. FALTA un gráfico.**

Si se supone ahora que  $\dot{x}_0 = 0$  (la cinética es nula en el instante  $t = 0$ ) resulta  $\arcsin(1) = \pi/2$  y entonces

$$x^2 = \frac{\sqrt{E^2 - ak}}{k} \cos [\sqrt{4k/m}(t - t_0)] + \frac{E}{k},$$

o bien

$$x = \sqrt{\frac{E}{k}} \left( 1 + \sqrt{1 - ak/E^2} \cos [2\sqrt{k/m}(t - t_0)] \right)^{1/2}$$

donde hemos tomado el valor positivo de la raíz porque en este problema es  $x > 0$ .

El caso límite  $a = 0$  recupera el oscilador armónico usual, como era de esperarse, pues en este caso se tiene

$$x_{(a=0)} = \sqrt{\frac{2E}{k}} \left( \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) \right] \right),$$

donde se ha utilizado la fórmula trigonométrica para el semiángulo.

**Completar esta solución. Ver en práctica? Lo de  $E = E(a)$  no lo entendí.**

## 1.2 Introducción a la formulación de Lagrange

Permite automatizar la resolución de problemas. Surge de la observación de una característica de las fuerzas de vínculo. El vínculo representa una restricción.

La fuerza de vínculo se *acomoda* en todo momento, cambiando sus características, para satisfacer el vínculo en todo instante. Son de una naturaleza diferente a las fuerzas tradicionales, que no se acomodan.

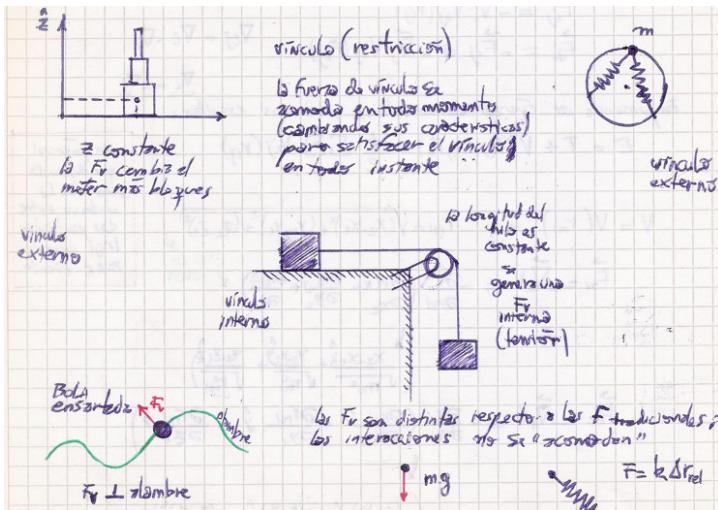


Figura 2.8

Las fuerzas de vínculo están asociadas a ecuaciones de vínculo y dependen de ellas. Las ecuaciones, además, *dependizan* las coordenadas de un problema. Examinemos un problema sencillo con vínculos.

### EJEMPLO 2.1 Problema con fuerza de vínculo

Considerese el problema esquematizado en la figura donde dos bloques se mueven en un campo gravitatorio. La segunda ley de Newton para cada bloque resultan en

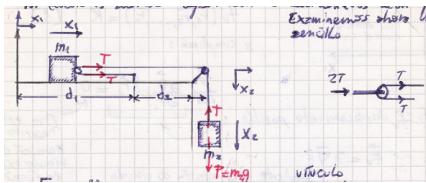


Figura 2.9 .

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= 2T \\m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - T\end{aligned}$$

Pero la cuerda que une los dos cuerpos, suponiendo que se mantiene tensa en todo momento, vincula sus posiciones de manera que se debe cumplir

$$2(d - x_1) + d_2 + x_2 = L$$

Derivando dos veces esta relación se llega a

$$-2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0,$$

que al reemplazar en las ecuaciones de Newton permite, eliminando la tensión T, obtener

$$\ddot{x}_1 = \frac{2m_2}{4m_2 + 1} g = \frac{1}{2 + 1/(2m_2)} g,$$

y

$$\ddot{x}_2 = \frac{4m_2}{4m_2 + 1} g = \frac{1}{1 + 1/(4m_2)} g.$$

Esto último nos dice que el bloque  $m_2$  se moverá con aceleración  $g$  en el límite de  $m_2 \rightarrow \infty$  y el bloque  $m_1$  con aceleración  $g/2$  bajo el mismo límite.

El enfoque de Lagrange debiera permitir llegar a este mismo resultado por supuesto.

**Si el vínculo es  $f(x) = 0$  entonces el trabajo virtual de las fuerzas es necesariamente nulo.**

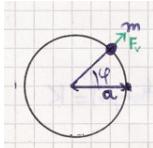
## 1.3 Grados de libertad y vínculos

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema.

La interpretación lagrangiana encuentra las ecuaciones para las coordenadas independientes. Dado un sistema con  $N$  coordenadas y  $k$  vínculos,

$$\# \text{ g. l.} = N - k \equiv \{q_i\} \text{ coordenadas generalizadas}$$

Consideremos el caso de una bola *ensartada* en un aro plano,



la cual puede moverse únicamente por el aro. Claramente la coordenada generalizada es  $\varphi$ , la cual describe completamente el movimiento de la misma; el vínculo es  $r = a$  y el trabajo realizado por las fuerzas de vínculo  $W_{F_v} = 0$  porque  $F_v \perp \delta\varphi$ . La fuerza de vínculo (en dirección radial) es perpendicular al desplazamiento compatible con el vínculo. En este caso el vínculo expresa las coordenadas del espacio real.

Las fuerzas de vínculo  $\vec{F}^v$  se *acomodan* en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las  $\vec{F}^v$  son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0,$$

es decir que el trabajo virtual de las fuerzas de vínculo es nulo. Este trabajo puede no ser nulo si el tiempo varía (si no se considera un desplazamiento virtual).

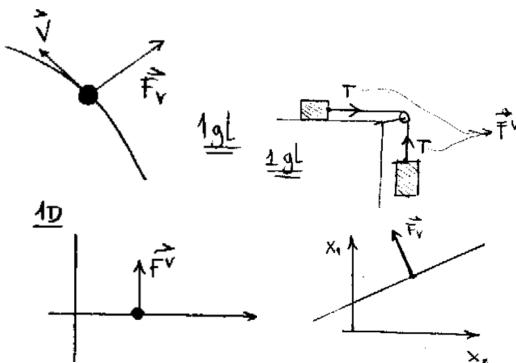


Figura 3.10

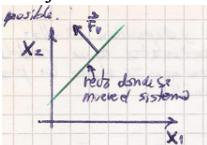
Un sistema 3D con dos vínculos resulta en un movimiento 1D; el sistema puede pensarse que se mueve sobre un alambre.

Para el caso de los bloques (o masas deslizantes), al tener dos coordenadas, el sistema se mueve en una recta del espacio de coordenadas. La fuerza de vínculo es perpendicular al desplazamiento posible. El vínculo expresa aquí las coordenadas donde se mueven las masas y el perpendicular al desplazamiento virtual pero no al desplazamiento real.

$$\mathbf{F}_v = (2\mathbf{T} - \mathbf{T})$$

$$V_{vy} = -\frac{1}{2}F_{vx}(F_{vx}, -\frac{1}{2}F_{vx})$$

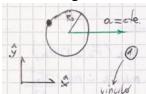
El trabajo virtual de las fuerzas de vínculo es nulo.



**Entender este gráfico mejor!**

### EJEMPLO 3.1 Aro acelerado en un plano

Un aro que se mueve hacia la derecha con aceleración constante  $\mathbf{a}$ .



Tiene una ecuación de vínculo dada por

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_0^2$$

y donde

$$x_c = x_0 + \frac{1}{2}at^2, \quad y_c = y_0$$

#### 1.3.1 Clasificación de los vínculos

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos } \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que  $W_{virtual}^{F^v} = 0$ , y

$$\text{no holónomos } \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 & \\ f(r_i) \geq cte. & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que  $\mathbf{F}^v$  perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a  $t_0$  fijo compatible con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en  $\delta t$  durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

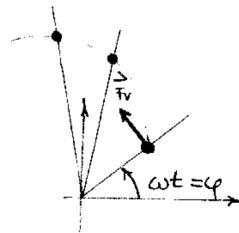


Figura 3.11

A tiempo fijo el desplazamiento es en  $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$ .

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

Si las fuerzas de vínculo se pueden escribir como

$$f_v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = K,$$

donde  $K$  es una constante, luego (derivando implícitamente la ecuación) cumplirán

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_v}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Entonces la fuerza de vínculo es proporcional al gradiente de la ecuación de vínculo,

$$\mathbf{F}_v = \lambda \nabla f$$

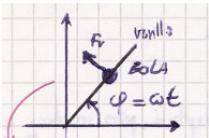
En un caso 3D tendríamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

Los vínculos que dependen de la velocidad o aquellos dados en términos de desigualdades (no de ecuaciones) no cumplen, en general, que el trabajo de las fuerzas de vínculo sea perpendicular al desplazamiento.

La dependencia de las fuerzas de vínculo puede depender del tiempo. Supongamos ahora un problema parecido al anterior; una bola engarzada en una varilla que rota con velocidad angular constante  $\omega$ .

**Esto contrapone a lo posterior.**  
Tal vez estos desplazamientos  
no son virtuales después de  
todo. Esta sección hay que  
depurarla bien.



La bola se mueve sobre la varilla; la coordenada angular  $\varphi$  forma parte de la ecuación de vínculo

$$\varphi - \omega t = 0$$

En un dado instante de tiempo fijo el único desplazamiento posible, que es en  $\hat{r}$ , es perpendicular a la fuerza de vínculo. No hay trabajo a tiempo fijo. En estos casos la ecuación de vínculo será

$$f_v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = K,$$

pero como a tiempo fijo es  $\Delta t = 0$ , se tiene

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_v}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = 0$$

donde no aparece al tiempo  $t$ . Esto es un *desplazamiento virtual*; un desplazamiento a tiempo fijo compatible con los vínculos.

## 1.4 Velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas

En la resolución de los problemas dinámicos que surgen de las ecuaciones de Newton la igualdad vectorial involucrada debe, en general, escribirse en algún sistema de coordenadas apropiado. Esto implica para la aceleración la doble derivada con respecto al tiempo del vector de posición  $\mathbf{x}(t)$  en las coordenadas en las cuales se halle escrito.

Obviando el sistema cartesiano rectangular usual  $(x, y, z)$ , los dos sistemas de coordenadas más sencillos son el de coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$  y el de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ . Los problemas más sencillos de la dinámica implican geometrías donde estos sistemas son apropiados. Asimismo, muchas geometrías más complejas pueden quizás en primera aproximación modelarse con estas coordenadas.

Así, por ejemplo, un vector genérico en términos de la base de versores cilíndricos  $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$  será

$$\mathbf{V}(t) = r\hat{r} + \varphi\hat{\varphi} + z\hat{z},$$

de manera que su derivada con respecto al tiempo implica la derivación de cada coordenada y cada versor.

La gran ventaja de las coordenadas cartesianas es que los versores  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  tienen su orientación constante para cualquier punto del espacio, razón por la cual no varían con el tiempo. Entonces, en general, resulta conveniente evaluar las derivadas de los versores que sí varían con el tiempo (como por ejemplo  $\hat{r}$ ) en términos de su descomposición en cartesianas, puesto que sólo hay que derivar el coeficiente que lo acompaña.

Para coordenadas cartesianas, las fórmulas de velocidad y aceleración son triviales. A partir del vector de posición

$$\mathbf{x}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

se tienen

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z},$$

$$\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z},$$

donde con el objeto de no sobrecargar la notación no se ha explicitado la dependencia temporal en las coordenadas.

A continuación se deducen las fórmulas de velocidad y aceleración para las coordenadas cilíndricas y esféricas a partir de un vector de posición  $\mathbf{x}(t)$  del origen<sup>3</sup>.

### 1.4.1 Coordenadas cilíndricas

Un vector de posición del origen es

$$\mathbf{x}(t) = r\hat{r} + z\hat{z},$$

y la derivada temporal se hace con la regla de Leibniz en el caso del primer término de la derecha,

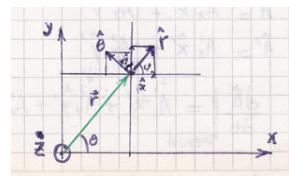
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

y para evaluar la derivada temporal del vedor consideramos la descomposición

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

<sup>3</sup>Un vector del origen tiene su base anclada en el origen del sistema de coordenadas lo que causa que no tenga componentes angulares en los sistemas cilíndrico y esférico. Esta simplificación es importante y en realidad si no fuera aplicable la utilización de estos sistemas tal vez pierda su razón de ser.



que lleva a

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin \varphi \dot{\varphi} \hat{x} + \cos \varphi \dot{\varphi} \hat{y} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

y entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z}.$$

Para la aceleración hay que derivar la velocidad con respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{\varphi} + r \left( \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d\hat{\varphi}}{dt} \right) + \ddot{z} \hat{z}$$

y utilizando

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) = -\dot{\varphi} \hat{r}$$

finalmente se arriba a

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z}.$$

Para problemas de dos dimensiones suele utilizarse un sistema coordenado, conocido como coordenadas polares, que es el de cilíndricas con  $z \equiv 0$ . Las expresiones de velocidad y aceleración polares correspondientes serán las obtenidas en esta sección luego de *borrar* la coordenada  $z$ .

## 1.4.2 Coordenadas esféricas

Para el sistema esférico la deducción de la equivalencia cartesiana de los versores es un poco más trabajosa que en el sistema cilíndrico (donde en realidad estos versores viven en un plano  $z$  cte.) y el álgebra implicado es algo engorroso. La expresión de los versores es

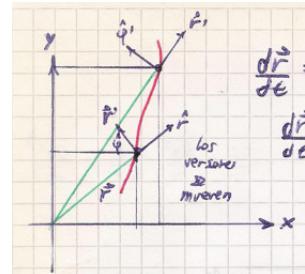
$$\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z},$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y},$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}.$$

Un vector de posición es simplemente

$$\mathbf{x} = r \hat{r}$$



Dado que este es un curso básico pero que se jacta de visual, tendríamos que poner ilustraciones del carajo de los vectores en esféricas y cilíndricas para que quede intuitivo sus dificultades cuando el problema en cuestión no tiene las simetrías explícitas de estos sistemas.

aunque en el  $\hat{r}$  está *escondida* la dependencia angular. Consignaremos a continuación solamente las expresiones finales para la velocidad y aceleración, que son respectivamente

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \\ & (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\varphi}\end{aligned}$$

## 1.5 Transformación entre sistemas en rotación

Otro tipo de transformación común entre sistemas de coordenadas (en el plano) que comparten origen es la rotación.

Suponiendo un sistema de coordenadas  $(x, y)$  fijo (que llamaremos “inerzial”) de origen  $O$  y otro de coordenadas  $(x', y')$ , que está rotando en torno a ese origen (sistema “móvil”), interesa ver qué consecuencias tiene sobre la velocidad y aceleración de un vector de posición  $\mathbf{A}$ , el hecho de determinarlas desde uno u otro sistema. Si bien hablamos de un sistema *fijo*, en realidad ambos se hallan en rotación entre sí.

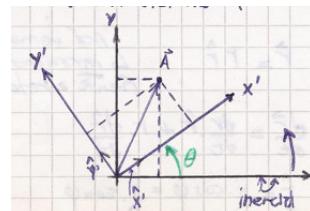
Como se ve en la FIGURA XXX la posición instantánea entre sistemas está determinada por el ángulo  $\theta(t)$  y, dado que ambos sistemas comparten el origen, los mismos son coincidentes en  $\theta = 0$ .

Dado que los sistemas no se hallan entre sí a velocidad constante<sup>4</sup> es patente que las ecuaciones de Newton se verán modificadas. Para un vector  $\mathbf{A}$  constante con respecto al sistema inercial, cualitativamente esperaríamos observarlo desde el sistema móvil en alguna suerte de movimiento dado por el efecto dinámico de la rotación<sup>5</sup>. Veamos qué surge de la cuenta algebraica.

El mismo vector de acuerdo a los dos sistemas de coordenadas en el plano, es

$$\mathbf{A}(t) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad \mathbf{A}'(t) = A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}'$$

donde las coordenadas primadas refieren al sistema móvil. Nótese que los versores asociados en ambos casos  $(\hat{x}, \hat{y})$  y  $(\hat{x}', \hat{y}')$  son constantes, esto es, no dependen del tiempo. Que ambos sistemas se hallen en rotación entre sí no es intrínseco de alguno de ellos. Un observador del sistema primado ve a sus ejes fijos mientras que en las medidas que realiza sobre  $\mathbf{A}$  verá una dinámica particular.



<sup>4</sup>Aún en el caso de  $\theta(t) = cte.$  la velocidad no es constante como vector puesto que cambia de dirección todo el tiempo.

<sup>5</sup>Si estoy montado en el caballo de madera de una calesita veré a mi abuela, que me espera inmóvil a un lado, como dotada de movimiento.

Si consideramos la variación temporal de  $\mathbf{A}'$  pero como es vista desde el sistema inercial resulta

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{inercial}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + A'_x \dot{\hat{x}'} + \dot{A}'_y \hat{y}' + A'_y \dot{\hat{y}'},$$

porque para un observador en el sistema inercial se mueven las componentes del vector y los versores.

La variación temporal de los versores la conocemos porque es la misma situación geométrica que la encontrada para el caso de los versores cilíndricos ( $\hat{r}, \hat{\varphi}$ ). Podemos hallar la equivalencia

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \dot{\theta} \hat{y}' \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = -\dot{\theta} \hat{x}'.$$

Desde el sistema móvil los versores son por supuesto constantes (el sistema móvil no es consciente de su movimiento) de modo que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{móvil}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}'$$

y entonces

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{fijo}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{móvil}} + A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'.$$

Si definimos

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{z},$$

entonces resulta que

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' = \dot{\theta} \hat{z} \times (A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}') = A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'.$$

Volviendo a la derivada de  $\mathbf{A}$  tenemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{fijo}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}'$$

que nos da la variación temporal de un vector  $\mathbf{A}$  visto desde un sistema fijo en términos de lo que se mediría en un sistema (móvil) que está en rotación respecto al primero.

Si ahora la especializamos para un vector de posición  $\mathbf{x}$ , obtenemos la velocidad

$$\mathbf{v}|_{\text{fijo}} = \mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}',$$

donde

$$\mathbf{v}|_{\text{móvil}} = \dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}'$$

**Esta notación es oscura, habría que ver una mejor manera de explicar esto.**

Asimismo, la aceleración se obtiene aplicando la relación al vector  $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{x}/dt$ , de manera que tendremos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}|_{\text{fijo}} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{\text{fijo}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \\ \mathbf{a}|_{\text{fijo}} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' \right] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}']\end{aligned}$$

Ahora procedemos a trabajar las expresiones dentro del primer corchete, empezando por la derivada temporal de la velocidad en el sistema móvil,

$$\mathbf{a}|_{\text{móvil}} \equiv \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}' \hat{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{y}}')|_{\text{móvil}} = \ddot{\mathbf{x}}' \hat{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{y}}'$$

y continuando con el término

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}} = \omega \mathbf{x}' \hat{\mathbf{y}}' - \omega \mathbf{y}' \hat{\mathbf{x}}',$$

cuya derivada es

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}|_{\text{móvil}} = -(\dot{\omega} \mathbf{y}' + \omega \dot{\mathbf{y}}') \hat{\mathbf{x}}' + (\dot{\omega} \mathbf{x}' + \omega \dot{\mathbf{x}}') \hat{\mathbf{y}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'|_{\text{móvil}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}}$$

Juntando todo resulta

$$\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}')$$

donde el tercero es la aceleración de Coriolis y el cuarto la aceleración centrípeta.

Las leyes de Newton observadas desde el sistema fijo serán

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}|_{\text{móvil}} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

que se pueden reacomodar como

$$m\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}|_{\text{móvil}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

donde ahora en el RHS tenemos la fuerza  $\mathbf{F}$  que es la única que produce par de acción y reacción, y los términos de fuerza lineal, de Coriolis y centrífuga.

Si  $\boldsymbol{\omega} = cte.$  entonces la fuerza lineal es nula.

## NOTAS

**5.1 Sumatoria de torques** Una manera de convencerse de que esta escritura es posible es hacer un diagrama de los diferentes términos que aparecen en esta doble sumatoria. Es fácil de ver que con el añadido del término  $\mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji}$  se está haciendo un doble conteo que justifica el  $1/2$  que aparece luego.

Está un poco inconsistente la notación utilizada, con lo de móvil y la prima. La carpeta tiene muchos typos. El 'Problema' de la hoja 5R no lo entiendo; en realidad parece estar vinculado a sólidos. Habría que decidir si ponerlo o no. En caso negativo, ¿qué otro se puede ubicar?

Una demostración más matemática puede lograrse escribiendo la sumatoria  $j \neq i$  sin esta restricción, lo cual se puede hacer así:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}(1 - \delta_{ij})$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. Es claro que podemos hacer un cambio de etiquetas en las sumatorias puesto que los índices sumados son *mudos*, i.e.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}(1 - \delta_{ij}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}(1 - \delta_{ij})$$

y dado que el orden de las sumatorias es irrelevante llegamos a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}(1 - \delta_{ij}) + \boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}(1 - \delta_{ij})]$$

Regresando ahora a las sumatoria restringida obtenemos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{x}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}]$$

que es el resultado buscado.

## Capítulo 2

---

# Mecánica lagrangiana

## 2.1 Principio de los trabajos virtuales

En las ecuaciones de Newton para un sistema de  $N$  partículas, con  $3N$  coordenadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i,$$

se pueden separar las fuerzas que actúan sobre cada partícula en fuerzas externas aplicadas  $\mathbf{F}_i^a$  y fuerzas de vínculo  $\mathbf{F}_i^v$ . Es decir,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v,$$

o bien, expresando la aceleración en función de la derivada temporal del momento, resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, multiplicando cada término por un desplazamiento, en principio independiente,  $\delta\mathbf{x}_i$  y sumando se tiene

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0.$$

Nótese que esta ecuación es válida por serlo para cada partícula  $i$ .

Supongamos ahora que estos desplazamientos son *compatibles* con los vínculos. Entonces

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta\mathbf{x}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0$$

Esto es sumamente sketchy,  
debemos leer la carpeta de la  
cursada y luego la teoría.

Explicar qué es este principio y  
qué es un desplazamiento  
virtual.

pero el segundo término es nulo porque los  $\delta\mathbf{x}_i$  son compatibles con los vínculos y como sabemos  $\mathbf{F}_i^v \perp \delta\mathbf{x}_i$ .

Entonces

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0, \quad (1.1)$$

donde no se verifica, en general, que el primer vector en cada producto escalar sea nulo.

La expresión (1.1) es el llamado *Principio de los Trabajos Virtuales*, y dada la independencia admitida en los desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{x}_i$ , se sigue que la sumatoria en (1.1) es nula porque cada término es nulo, es decir

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

**Hay que dejar bien el claro el asunto de que las fuerzas de vínculos son siempre perp a los desplazamientos virtuales y que estos, ¿no son independientes?**

### EJEMPLO 1.1 Ejemplo de los bloques

Para el ejemplo de los bloques

$$(m_1\ddot{x}_1 - 2T)\delta x_1 + (m_2\ddot{x}_2 - m_2g + T)\delta x_2 = 0$$

pero en realidad  $\delta x_1, \delta x_2$  no son independientes, están relacionados según  $2\delta x_1 = \delta x_2$ . Entonces

$$(m_1\ddot{x}_1 + 2m_2\ddot{x}_2 - 2m_2g)\delta x_1 = 0$$

donde ahora  $\delta x_1$  es compatible con los vínculos pero es independiente y arbitrario para el problema. Entonces la ecuación anterior debe ser nula porque el paréntesis es nulo,

$$m_1\ddot{x}_1 + 2m_2\ddot{x}_2 - 2m_2g = m_1\ddot{x}_1 + 4m_2\ddot{x}_1 - 2m_2g = 0$$

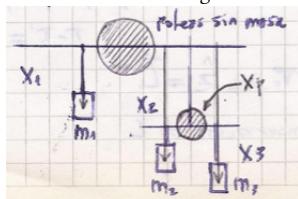
y de la última

$$\ddot{x}_1 = \frac{2m_2g}{(m_1 + 4m_2)}.$$

Hemos llegado a la resolución en forma independiente de los vínculos.

### EJEMPLO 1.2 Más de un grado de libertad

Si tenemos más de un grado de libertad, como en el caso de dos poleas sin masa.



Se tienen dos ecuaciones de vínculo

$$x_1 + x_p = \ell_1 \quad (x_2 - x_p) + (x_3 - x_p) = \ell_2.$$

El problema tiene cuatro coordenadas y dos ecuaciones de vínculo, lo cual nos deja dos grados de libertad. La primera ecuación de vínculo permite liberarnos de  $x_p$  y quedarnos en principio con

los movimientos de las tres masas. Entonces, ¿el principio de los trabajos virtuales? sería en este caso

$$(m_1\ddot{x}_1 - m_1g)\delta x_1 + (m_2\ddot{x}_2 - m_2g)\delta x_2 + (m_3\ddot{x}_3 - m_3g)\delta x_3 = 0$$

y luego podemos utilizar la segunda ecuación de vínculo, combinándola con la primera para llegar a

$$x_2 + x_3 + 2x_1 = \text{cte.}$$

lo cual conduce a la relación

$$\delta x_1 = -\frac{\delta x_2 + \delta x_3}{2}.$$

Finalmente

$$(m_2\ddot{x}_2 - m_2g - \frac{m_1}{2}\dot{x}_1 + \frac{m_1}{2}g)\delta x_2 + (m_3\ddot{x}_3 - m_3g - \frac{m_1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{m_1}{2}g)\delta x_3 = 0.$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{x}_i) - K = 0$$

luego, derivando implicitamente cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{x} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector  $\delta \mathbf{x}$  como  $N$  dimensionales.

*¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.*

## 2.1.1 Comentario vínculos

El trabajo de la fuerza de vínculos es nulo si el desplazamiento es virtual.

**Esto hay que consolidarlo todo. Volará.**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \delta x_N = 0$$

Como es un desplazamiento virtual, el tiempo  $t$  está fijo (imagen fija = tiempo congelado)

## 2.2 Construcción del lagrangiano

Vamos a utilizar el principio de los trabajos virtuales para escribir las ecuaciones de la mecánica de otra manera [¿?] sin preocuparnos por las fuerzas de vínculo, que en general pueden no ser conocidas o tener una naturaleza compleja. Consideraremos un sistema de  $N$  partículas y  $k$  ecuaciones de vínculo

**Esta es la papa: las fuerzas de vínculo son difíciles de escribir si es esto posible del todo.**

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_1$$

.....

$$f_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = K_k$$

y por ende  $3N - k$  grados de libertad (suponiendo que nos hallamos en 3 dimensiones).

Tenemos  $N$  relaciones del tipo

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (2.1)$$

que significa que la posición de la partícula  $i$ -ésima depende en principio de las  $3N - k$  coordenadas generalizadas y del tiempo. Una variación de la misma tendrá la forma

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \delta t$$

y suponiéndola un desplazamiento virtual el último término se anula puesto que  $\delta t = 0$  en ese caso y entonces

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (2.2)$$

Por otro lado, del principio de los trabajos virtuales (1.1) es

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0,$$

donde  $\mathbf{F}_i^a$  es la fuerza aplicada externa que no incluye las fuerzas de vínculo. El primer término se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.3)$$

Se ha pasado de una descripción en términos de  $\delta \mathbf{x}_i$  ( $3N$  variables) a otra en términos de  $\delta q_j$  ( $3N - k$  coordenadas generalizadas).

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

**Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla**

Consideremos en primer lugar la derivada total del producto siguiente

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right),$$

y en segundo lugar la velocidad de cada partícula, que proviene de la derivada total de cada ecuación (2.1) y resulta

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

A partir de esta última es claro ver que la derivada de la velocidad de la partícula  $i$ -ésima respecto a la coordenada  $l$ -ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}. \quad (2.4)$$

La ecuación de la velocidad se puede derivar otra vez, con respecto a  $q_l$ , obteniéndose

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial t},$$

y se puede ver que invirtiendo el orden de derivación, esto significa que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right).$$

Volviendo ahora a (2.3) y usando los resultados recientes tenemos

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

donde modificaremos el corchete expresando derivadas con respecto a la posición  $x$  en términos de derivadas con respecto a la velocidad  $\mathbf{v}$ , de manera que

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right]$$

y usando el *trick* usual

$$\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial q}$$

resulta

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) \right\}$$

**Una manera menmotécnica de recordar esto es con el siguiente esquema:**

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}.$$

**El hecho de que se pueda sacar fuera la derivada temporal y pasar adentro la derivada con respecto a la coordenada generalizada  $q$  puede verse haciendo la cuenta de manera explícita.**

Es hora ya de introducir la sumatoria en  $i$  hacia el interior del corchete, y la ecuación original es ahora

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

y dentro de los paréntesis ha aparecido la energía cinética  $T$ . La sumatoria en  $j$  no era otra cosa que la suma de las derivadas de los momentos, y entonces

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i.$$

Escribiendo la variación  $\delta \mathbf{x}$  en términos de  $\delta q$  a través de (2.2) se llega a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N \left( \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j \delta q_j$$

siendo

$$Q_j = \sum_i^N \left( \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right)$$

la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ . Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (2.5)$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas, provienen de un potencial, entonces

$$\mathbf{F}_i^a = - \frac{\partial V(\{\mathbf{x}_j\})}{\partial \mathbf{x}_i}$$

y expresando la fuerza  $Q_j$  en términos del potencial  $V$

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

el cual, insertado en la ecuación (2.5), conduce a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Dado que  $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = V(\{q_j\})$  (no depende de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ ) se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

y definiendo al lagrangiano  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

se arriba a

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Nótese que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-k}, t)$ , es decir que es función del conjunto  $(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ . De esta manera las ecuaciones resultantes serán, a lo sumo, ecuaciones diferenciales para  $q_j(t)$  de orden dos.

Si existieran fuerzas aplicadas que no provienen de un potencial (no conservativas) entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC},$$

y las ecuaciones adquieren un término extra

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - Q_j^{NC} \right] \delta q_j = 0.$$

Como esto vale para todo grado de libertad  $j$ , puesto que las variaciones son independientes, llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange con presencia de fuerzas no conservativas. Este es el resultado más importante del capítulo.

Se tienen así una formulación para los problemas mecánicos en términos de ecuaciones diferenciales para los grados de libertad  $q_j$  que prescinden del conocimiento de las fuerzas de vínculo.

No sé si es la primera vez que aparecen. De serlo habría que remarcarlo como es debido, tal vez recuadrar

## 2.2.1 Algunos ejemplos del lagrangiano

### EJEMPLO 2.1 Bloques deslizantes

Teníamos el vínculo

$$-2x_1 + x_2 = \text{cte.}$$

Luego,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad V = -m_2gx_2$$

y tomando  $x_2$  como independiente llego a

$$T - V = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{4} + m_2 \right) \dot{x}_2^2 + m_2gx_2.$$

Luego, las ecuaciones de E-L serán

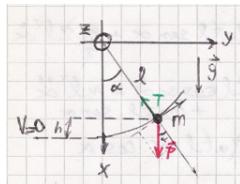
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \left( \frac{m_1}{4} + m_2 \right) \ddot{x}_2 - m_2g = 0$$

que conduce a

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2g}{\frac{m_1}{4} + m_2},$$

que es a lo que se tenía que llegar.

### EJEMPLO 2.2 Péndulo



Las ecuaciones son

$$ml\ddot{\alpha}^2 = -T + mg \cos \alpha \quad ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha$$

y se podría resolver desde aquí nomás. Pero escribamos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mg\ell(1 - \cos \alpha)$$

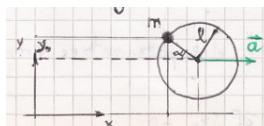
Sus ecuaciones de E-L son

$$ml\ddot{\alpha} + mg\ell \sin \alpha = 0$$

que es la ecuación del péndulo  $\ddot{\alpha} = -g/\ell \sin \alpha$ .

### EJEMPLO 2.3 Aro acelerado

Falta ilustración del aro y sistema coordenado.



Supongamos un aro horizontal en una mesa sin rozamiento. Tiene un único grado de libertad.

El vínculo es

$$(x - 1/2 at^2)^2 + (y - y_0)^2 = \ell^2$$

y las posiciones instantáneas de la masa  $m$

$$x = \frac{1}{2}at^2 - \ell \cos(\varphi) \quad y = y_0 + \ell \sin(\varphi)$$

Es conveniente utilizar el ángulo  $\varphi$  como coordenada generalizada. Pero  $\varphi$  está solidaria al aro. Eso no es un problema siempre que el  $\mathcal{L}$  esté medido en un sistema inercial.

En este caso no hay potencial pero como  $\varphi$  es una coordenada vista en un sistema no inercial, aparecerán las fuerzas ficticias asociadas al movimiento. Serán

$$\dot{x} = at + \ell \sin(\varphi)\dot{\varphi} \quad \dot{y} = \ell \cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

y luego

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(a^2t^2 + 2at\ell \sin(\varphi)\dot{\varphi} + \ell^2\dot{\varphi}^2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m\ell^2\ddot{\varphi} + mal \sin(\varphi) = 0$$

lo cual resulta en la ecuación de movimiento

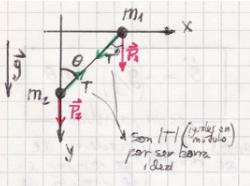
$$\ddot{\varphi} = -\frac{a}{\ell} \sin(\varphi)$$

que es una ecuación que da oscilaciones, como la de un péndulo. Estas oscilaciones están causadas, claramente, por la aceleración  $a$ .

En este ejemplo se ve que se calcula la energía cinética  $T$  en un sistema inercial; no obstante, este valor está expresado en términos de una coordenada que no es inercial (es solidaria al aro). Aparecen entonces las fuerzas iniciales que tienen que aparecer y punto.

#### EJEMPLO 2.4 Problema 5 -para vínculos-

Este problema es de vínculos y trabajos virtuales. Habría que reubicarlo.



Se tienen dos masas  $m_1$  y  $m_2$  de manera que en principio se tendrían seis coordenadas; no obstante como el movimiento es en un plano (se puede tomar el  $z = 0$  como tal) y las masas están restringidas a moverse a lo largo del eje que las engarza se tiene, adoptando el esquema de la figura,

$$z_1 = z_2 = 0 \quad x_2 = y_1 = 0$$

es decir cuatro ecuaciones de vínculo a la cual le sumamos una quinta

$$x_1^2 + y_2^2 = \ell^2 \tag{2.6}$$

de manera que resulta un problema para un único grado de libertad. Obviando los subíndices que no son necesarios, y diferenciando implícitamente la ecuación (2.6) se obtiene

$$xdx + ydy = 0$$

Utilizando el ángulo  $\theta$  y parametrizando las variables implicadas en (2.6) de acuerdo con

$$x = \ell \sin \theta \quad y = \ell \cos \theta$$

**La  $T$  del  $\mathcal{L}$  es la vista desde un sistema INERCIAL siempre; en todo caso luego aparecen las fuerzas ficticias necesarias.  
ESTO HAY QUE ESTUDIARLO Y ENTENDERLO.**

**El lagrangiano se dedujo de las ecuaciones de Newton, entonces debemos calcular  $T, V$  de un sistema inercial. Acá no se entiende si lo que se hace en la carpeta está bien o no, en el sentido de que parece que al usar una coordenada que no es inercial estamos calculando  $T$  no inercial.?**

vemos que es una buena coordenada porque verifica el vínculo de manera natural.

Planteando las ecuaciones

$$(T \sin \theta - m_1 \ddot{x})\delta x + (m_2 g - T \cos \theta - m_2 \ddot{y})\delta y = 0$$

$$x \delta x = -y \delta y \quad (2.7)$$

pero usando la última, se tiene

$$-\frac{x}{\ell} T \delta x - \frac{y}{\ell} T \delta y = 0$$

de manera que desaparece la tensión. Entonces

$$m_2 \ddot{x} \delta x = m_2 (g - \ddot{y}) \delta y$$

que es una ecuación de Lagrange de primera especie. Usando otra vez (2.7)

$$-m_1 \ddot{x} \frac{y}{x} = m_2 (g - \ddot{y})$$

y entonces ahora habrá que convertir a expresar todo en términos de  $\theta$ . Derivando las expresiones de  $x$ ,  $y$  en términos del ángulo  $\theta$  resulta que

$$-m_1 \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = m_2 (g + \ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$\ddot{\theta} \ell (m_2 \sin \theta + m_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}) + \dot{\theta}^2 \ell (m_2 \sin \theta - m_1 \cos \theta) + m_2 g = 0$$

Si  $m_1 = m_2$  entonces

$$\ddot{\theta} \ell \frac{m}{\sin \theta} + mg = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta,$$

y vemos que es un péndulo.

Ahora se quisiera calcular la tensión  $T$ . Se utilizarán multiplicadores de Lagrange. Sea que los vínculos se rompen (se rompen, por supuesto, en la dirección de las fuerzas de vínculos). Supongamos que existe  $y_1$  (hay desplazamiento en la coordenada  $y_1$ ) entonces existirá  $\lambda$  tal que  $\lambda \delta y_1 \neq 0$

$$\delta y_1 (m_1 \ddot{y}_1 - \lambda - m_1 g) \quad \lambda = m_1 g$$

pero la ecuación en (1) (página anterior) debe seguir valiendo.

$$\lambda_T + x \delta x + \lambda_T y \delta y$$

$$(m_1 \ddot{x} + \lambda_T x) \delta x + (m_2 (g - \ddot{y}) + \lambda_T y) \delta y = 0$$

lo cual vale si  $\lambda_T = -\frac{T}{\ell}$ . Y se ve que el multiplicador de Lagrange es la tensión (vínculo) – la fuerza asociada a que se cumpla el vínculo –. Tengo un multiplicador por cada vínculo. Si hay  $n$  vínculos y quiero un vínculo uso un solo multiplicador. Pero ahora  $\delta x$  y  $\delta y$  son independientes, entonces deben anularse por separado los dos miembros de la ecuación de Newton.

$$m_1 \ddot{x} + \lambda_T x \quad m_2 (g - \ddot{y}) + \lambda_T y$$

$$\lambda_T = -\frac{m_1 \ddot{x}}{x}$$

$$\lambda_T = -\frac{m_1 (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{\sin \theta} = m_1 \left( \frac{g}{\ell} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \right)$$

## 2.3 Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

En los ejemplos del péndulo y del aro acelerado [CITAR], la resolución del sistema a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange condujo a las mismas ecuaciones de movimiento (lo que significa que, para iguales condiciones iniciales, la física del sistema es la misma) pero se partió de dos lagrangianos diferentes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mgl \cos \alpha \quad \mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\ell^2\ddot{\alpha} + 2\ell gt \sin \alpha \dot{\alpha} + g^2t^2)$$

que llevaban a

$$\ell\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0.$$

**La aceleración del aro era  $a$  pero escribimos  $g$  para enfatizar que tienen la misma forma.**

Es decir, que desde el punto de vista del movimiento del sistema, los dos lagrangianos son equivalentes. Pero notemos que el término central en  $\mathcal{L}'$  aparece vinculado a

$$\frac{d}{dt}(mlgt \cos \alpha) = -m\ell g t \dot{\alpha} \sin \alpha + ml g \cos \alpha,$$

de manera que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + ml g \cos \alpha - \frac{d}{dt}(mlgt \cos \alpha) + \frac{1}{2}g^2t^2 \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + ml g \cos \alpha - \frac{d}{dt}\left(mlgt \cos \alpha - \frac{1}{6}g^2t^3\right)\end{aligned}$$

o bien

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}(F(\alpha, t)).$$

Entonces, parece que existe alguna relación entre dos lagrangianos que conducen a iguales ecuaciones de movimiento.

En el ejemplo visto del sistema mecánico del aro acelerado parece que existía alguna relación entre dos lagrangianos que conducían a iguales ecuaciones de movimiento. Veamos ahora el origen de esa relación.

Dado un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i, t)$  nos construimos otro  $\mathcal{L}'$  sumándole al anterior la derivada total de una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo  $F = F(q_i, t)$ , de modo que

$$\mathcal{L}'(\dot{q}_i, q_i, t) = \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i, t) + \frac{dF}{dt}(q_i, t).$$

**Link con el ejemplo del aro acelerado!!**

## Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

para este nuevo lagrangiano resultan en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde aparecen las ecuaciones correspondientes al lagrangiano  $\mathcal{L}$  más los dos términos del renglón inferior. Veremos que estos se cancelan exactamente por un argumento similar al encontrado en la ecuación (2.4) en la sección anterior.

Para ello es necesario expresar la derivada total de  $F$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i^{3N-k} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Usando explícitamente estos resultados en los términos extra de (3.1), se llega a que

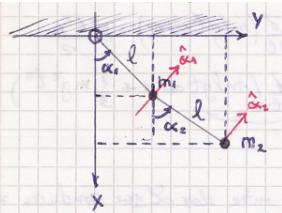
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \\ \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \right\} &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} = 0 \end{aligned}$$

donde la obtención del cero responde a que hemos aceptado que las derivadas cruzadas de  $F$  son idénticas. Para ello basta con admitir que  $F$  sea de clase  $C^2$  (derivadas segundas continuas).

Finalmente hemos comprobado que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos al lagrangiano la derivada total respecto del tiempo de una función de  $(q_i, t)$ . O sea que podríamos construir infinitos lagrangianos diferentes por el añadido de una derivada total y todos ellos llevan a las mismas ecuaciones de movimiento.

**EJEMPLO 3.1 Lagrangiano en funcionamiento**

Dos masas  $m_1, m_2$  conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable según indica la figura que se mueven en un plano.



En principio este problema tiene cuatro coordenadas  $x_1, x_2, y_1, y_2$  pero las barras determinan dos ecuaciones de vínculo

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell^2 \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell^2$$

de modo que es un sistema con dos grados de libertad.

Para escribir el lagrangiano notemos que

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2$$

Y en términos de los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  se tiene

$$x_1 = \ell \cos \alpha_1 \quad y_1 = \ell \sin \alpha_1$$

$$x_2 = \ell \cos \alpha_2 + \ell \cos \alpha_1 \quad y_2 = \ell \sin \alpha_1 + \ell \sin \alpha_2$$

pero antes de hacer toda el álgebra, notemos que  $(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = |\mathbf{v}_1|$  está siempre en la dirección del vector  $\hat{\alpha}_1$  y no puede tener componente perpendicular. Considerando solamente esa componente, sería

$$\mathbf{v}_1 = \ell \dot{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1 \quad \text{con} \quad v_1^2 = \ell^2 \dot{\alpha}_1^2$$

y correspondientemente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \ell \dot{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1 + \ell \dot{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2 \\ v_2^2 &= \ell^2 \dot{\alpha}_1^2 + \ell^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ell^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

**Este ejemplo es interesante porque considera unos versores móviles. Habría que continuarlo y ver qué se hizo en la carpeta.**

## 2.4 Momentos conjugados y coordenadas cílicas

Dado un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  se define el momento canónicamente conjugado a  $q_j$  como

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \tag{4.1}$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv Q_j,$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ .

Sea ahora un lagrangiano que no depende explícitamente de la coordenada  $k$ , es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t),$$

entonces será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

y como consecuencia las ecuaciones de Euler-Lagrange en la coordenada  $k$ -ésima resultan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k = Q_k = 0$$

de manera que no existe fuerza generalizada en el grado de libertad  $k$  y como es  $\dot{p}_k = 0$ , se conserva el momento  $p_k$  canónicamente conjugado a  $q_k$ . En estos casos se dice que la coordenada  $q_k$  que no aparece en el lagrangiano, es una coordenada cíclica.

#### EJEMPLO 4.1 Potencial central en un plano

Sea un potencial central  $V(r)$  en el plano. El lagrangiano de una partícula de masa  $m$  sometida al mismo, y en las convenientes coordenadas polares  $(r, \varphi)$  es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange serán, en  $r$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2r + \frac{dV}{dr} = 0$$

y en  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mr^2\ddot{\varphi} = 0.$$

En esta última debemos notar que  $\partial \mathcal{L}/\partial \varphi = 0$  y esto significa que  $\varphi$  es cíclica. Entonces se conserva el momento canónicamente conjugado a  $\varphi$  puesto que verifica

$$\dot{p}_\varphi = mr^2\ddot{\varphi} = 0$$

lo cual lleva a que  $mr^2\ddot{\varphi}$  es una constante para este sistema. La moraleja es que la existencia de una coordenada cíclica permite ahorrarnos una integración. Esto, por supuesto, para este problema no es otra cosa que la conservación del momento angular [?].

## 2.5 Momentos canónicamente conjugados y translaciones rígidas

Consideremos un sistema de partículas que sufre una traslación rígida infinitesimal. Esta traslación se lleva a cabo a través de un desplazamiento en la coordenada  $q$  y de magnitud  $\delta q$  en la dirección dada por el versor  $\hat{n}$ .

En efecto, para el sistema de  $N$  partículas, la traslación rígida implica

$$q \rightarrow q + \delta q \quad \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n}$$

La Figura 5.1 representa la situación.

Luego, suponiendo una energía cinética de tipo  $T_2$ , el momento canónicamente conjugado  $p$  (en la coordenada  $q$  –cuyo subíndice omitimos–) es

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial \dot{q}} \right) = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}}$$

La forma de la traslación rígida implica que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} - \mathbf{x}_i}{\delta q} = \hat{n}.$$

de modo que

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} = \left( \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_{\hat{n}}$$

[*¿se sabe esto a esta altura?*]

**Hablar de vectores al cuadrado.**  
**Nota de cómo se manipula:** uso  
 $d\mathbf{v}_i^2 = 2\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i$  y

**Recodemos que**

$$\mathbf{v}_i = \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

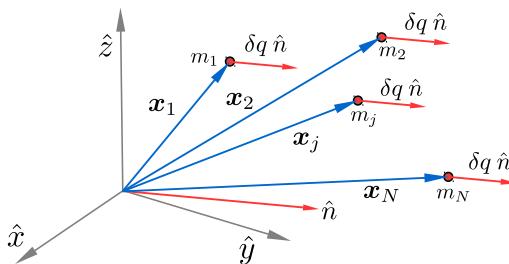


Figura 5.1

Hemos arribado al resultado de que el momento canónicamente conjugado correspondiente a la coordenada generalizada asociada a la traslación rígida es la proyección del momento total en la dirección de ésta.

Para el ejemplo trivial de la partícula libre,  $T = 1/2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ , se tiene  $p_x = mv_x$  si la traslación es en la dirección  $\hat{x}$ .

**Este ejemplo suma algo?**

Para las fuerzas generalizadas, equivalentemente se tiene

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \left( \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \right) \cdot \hat{n} = \mathbf{F} \cdot \hat{n},$$

la fuerza generalizada es la proyección de las fuerzas aplicadas en la dirección dada por  $\hat{n}$ .

La ecuación para la fuerza generalizada  $Q_j$  era

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Aún en el caso de que  $T$  dependa de  $q_j$  la traslación rígida implica que  $\partial T / \partial q_j = 0$  porque es sumar un vector constante a la posición, luego  $d\mathbf{x}_i/dt = d(\mathbf{x}_i + \mathbf{a})/dt$  para todo  $\mathbf{a}$  constante. Entonces, para la coordenada  $q$  asociada a la traslación en  $\hat{n}$  se tiene

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dP_{\hat{n}}}{dt},$$

de tal manera que si en  $\hat{n}$  no hay fuerza  $Q$  tendremos  $dP_{\hat{n}}/dt = 0$ , es decir  $P_{\hat{n}}$  conservado.

**Revisar porque esto no estaba tan claro. Supongo que la idea es ver que aún con presencia de  $T_1$  esto sigue valiendo**

## 2.6 Momentos canónicamente conjugados y rotaciones rígidas

Ahora consideraremos un sistema de partículas que sufre una rotación rígida infinitesimal. Esta se materializa a través de un desplazamiento angular en la coordenada  $q$  de magnitud  $\delta q$ . La dirección y sentido, para cada posición  $\mathbf{x}_i$  vienen dadas por el producto vectorial  $\hat{n} \times \mathbf{x}_i$ .

Para un sistema de  $N$  partículas, la rotación rígida implica

$$q \rightarrow q + \delta q |\mathbf{x}| \sin \alpha_i \quad \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \delta q \hat{n} \times \mathbf{x}_i$$

La Figura 6.2 representa la situación, donde por razones de claridad se muestran solamente dos partículas.

El momento canónicamente conjugado en la coordenada angular  $q$  será

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{n} \times \mathbf{x}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i)$$

donde hemos utilizado el hecho de que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_i + \delta q (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) - \mathbf{r}_i}{\delta q} = \hat{n} \times \mathbf{x}_i.$$

**Acá la cosa es que la traslación es una cosa que sufre el sistema pero no es dinámica. Es una construcción nuestra, como un cambio de sistema de referencia.**

**Esta coordenada  $q$  es especial en el sentido en que representa una rotación.**

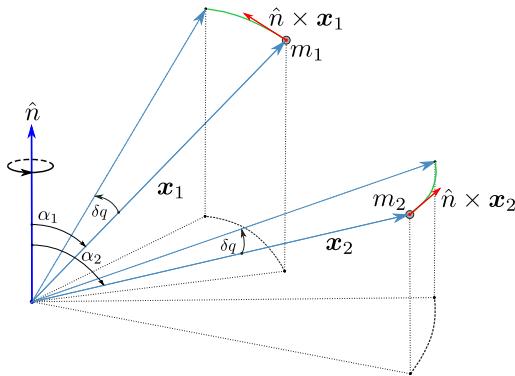


Figura 6.2

El sumando se puede reescribir (usando  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ ) para que aparezca explícitamente la forma buscada,

$$p = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot (\mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot \mathbf{l}_i = \hat{n} \cdot \sum_i^N \mathbf{l}_i = \hat{n} \cdot \mathbf{L}$$

que significa

$$p = \hat{n} \cdot \mathbf{L} = L_{\hat{n}},$$

el momento canónicamente conjugado en la dirección  $\hat{n}$  es el momento angular total del sistema proyectado en esa dirección. La fuerza generalizada será

$$Q = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot (\hat{n} \times \mathbf{x}_i) = \hat{n} \cdot \left( \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^a \right) = \hat{n} \cdot \sum_i^N \boldsymbol{\tau}_i = \hat{n} \cdot \mathbf{T},$$

i.e. la componente del torque en la dirección  $\hat{n}$ .

Asimismo, si la coordenada implica una rotación rígida entonces  $\partial T / \partial q = 0$  debido a que la energía cinética  $T$  es un escalar y es por ende invariante ante rotaciones (un vector rotado cambia su dirección pero no su módulo). Luego

$$Q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dL_{\hat{n}}}{dt} = \mathbf{T}_{\hat{n}}.$$

**Tal vez un ejemplo 2D ayude a aclarar un poco este tema.**

Todo este análisis (traslaciones y rotaciones rígidas) vale si el potencial  $V$  no depende de la velocidad; en caso contrario cambia la forma de los momentos

canónicos. En efecto, en este caso es

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}}$$

Volviendo al ejemplo de la partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en un campo electromagnético se tendrá

$$p = mv_{\hat{n}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \hat{n},$$

es decir que aparece un término extra con el potencial vector respecto del caso en que la partícula está libre.

## 2.7 Energía cinética generalizada

Resulta útil disponer de la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas. Para un sistema de  $N$  partículas, es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i |\mathbf{v}_i|^2$$

donde las posiciones de cada una de ellas se pueden expresar en términos de  $k$  coordenadas generalizadas

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$$

y sus respectivas velocidades serán

$$\mathbf{v}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Luego, utilizando el hecho de que  $|\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ , se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{s=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \quad (7.1)$$

y expandiendo el producto resulta

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left[ \sum_j^k \sum_s^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_j + 2 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2 \right],$$

la cual se puede separar en tres contribuciones

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

**La derivada con respecto al tiempo de la posición es la  $d/dt$  no la parcial.**

**Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.**

con las siguientes formas:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_j \dot{q}_s$$

$$T_1 = \sum_j^k \left( \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2,$$

donde se ha alterado el orden de los signos  $\sum$  para enfatizar el hecho de que las cantidades entre paréntesis pueden asociarse a una matriz y un vector de acuerdo con

$$a_{js}(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, \dots, q_k, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

Entonces

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_j^k \sum_s^k a_{js} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_j^k b_j \dot{q}_j, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right|^2$$

son, respectivamente, contribuciones cuadráticas, lineales o de orden cero con respecto a las velocidades generalizadas  $\dot{q}$ .

Para una partícula libre será

$$T = T_2$$

es decir que solamente es cuadrática en las velocidades. Para una partícula sometida a vínculos en general, en términos de las coordenadas generalizadas, se tendrán las tres clases de cinética.

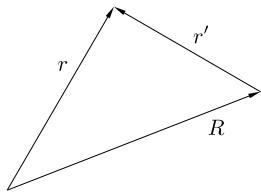
#### EJEMPLO 7.1 Cinética de la partícula libre en esféricas

En coordenadas esféricas la energía de una partícula libre es

$$T_2 = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin \theta \dot{\varphi}^2).$$

Si las coordenadas generalizadas son las coordenadas  $r, \theta, \varphi$  se identifica

$$T_2 = \frac{1}{2} m (a_r(r, \theta, \varphi) \dot{r}^2 + a_\theta(r, \theta, \varphi) \dot{\theta}^2 + a_\phi(r, \theta, \varphi) \dot{\varphi}^2).$$



**Figura 8.3** Sistema de partículas

## 2.8 Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}'_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

y veremos ahora que el último término es nulo ya que son vectores perpendiculares. Para ello notemos que

$$\begin{aligned} M\mathbf{R}_{cm} &= \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}'_i) \\ 0 &= \sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

y también

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i$$

de modo que

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

Finalmente

$$T^{tot} = T^{cm} + T_{cm}^{tot}$$

Esto hay que revisarlo, derivo ambos miembros? Vincular con la figura.

## 2.9 Trabajo en un sistema de partículas

Empezamos desde

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

donde el trabajo externo puede escribirse

Quiero un  $\ell$  en bold, no me gusta el s.

$$W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s} \quad (9.1)$$

La no dependencia del camino para la integral que da (9.1) requiere que

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}_i) \quad \nabla_{\mathbf{r}_i} \times \mathbf{F}_i^e = 0$$

y entonces puedo inducir la existencia de una función potencial para las fuerzas **barra resizable ya.** externas,

$$W^{ext} = - \sum_i^N [\Delta V_i]_1^2$$

Por otro lado,

$$W_c^{int} = \int_1^2 \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_j^N \int_1^2 \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

## 2.10 Lagrangiano cíclico en el tiempo

Empezando desde la derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (10.1)$$

y usando la derivada total del término

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q},$$

se puede expresar (10.1) sin derivadas segundas explícitas  $\ddot{q}$  de suerte que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

la cual, acomodando un poco los términos, resulta en

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Como el corchete son las ecuaciones de Euler-Lagrange y además  $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q} \equiv p$  se tiene

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} (p \dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} (p \dot{q} - \mathcal{L}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Definiendo al operador hamiltoniano  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{H} \equiv p \dot{q} - \mathcal{L} \quad (10.2)$$

resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (10.3)$$

El hamiltoniano es un operador tal que su variación temporal total depende de la variación temporal explícita del lagrangiano. Entonces, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ , el hamiltoniano se conserva.<sup>1</sup>

Por otra parte, si se cumple que :

- Los vínculos no dependen del tiempo
- El potencial no depende de las velocidades generalizadas,

entonces el hamiltoniano es la energía, es decir

$$\mathcal{H} = E = T + V. \quad (10.4)$$

La condición de que los vínculos no dependan del tiempo tiene como consecuencia que la energía cinética sea una función cuadrática en las velocidades generalizadas. Entonces la condición (10.4) se puede expresar en términos de las energías cinéticas y potenciales como

$$T = T_2 \quad V \neq V(\dot{q})$$

Asimismo, la condición de energía constante  $E = E_0$  se cumplirá si el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo,  $W^{\text{nc}} = 0$ .

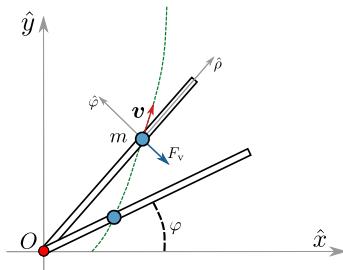
No sé en qué momento se ha definido el hamiltoniano,  
 $H = T + V$ , deberíamos referirlo y tenerlo en cuenta.

<sup>1</sup>Notemos en la ecuación (10.3) que la derivada  $\partial \mathcal{L}/\partial t$  refiere a la aparición explícita de  $t$ ; de este modo el hecho de que sea  $\partial \mathcal{L}/\partial t = 0$  significa que el  $\mathcal{H}$  se conserva pero no que  $\mathcal{L}$  se conserva. Esto último requeriría  $d\mathcal{L}/dt = 0$ .

Esto se debiera haber visto antes en algún momento, y convendría recordarlo aquí.

**EJEMPLO 10.1 Bola rotante engarzada en alambre**

Una barra gira sobre un mesa sin rozamiento en torno a un punto fijo  $O$  con velocidad angular constante  $\omega$ . Esta barra tiene enhebrada una bola de masa  $m$  que puede deslizarse libremente a lo largo de la misma, como se ilustra esquemáticamente en la figura 10.4.



**Figura 10.4** Problema de la barra que gira con una masa  $m$  enhebrada.

Claramente la bola seguirá, con respecto a un sistema de coordenadas polar  $(\rho, \varphi)$  con origen en el punto  $O$ , una trayectoria como la esquematizada por la curva verde.

En este problema no hay potencial y el lagrangiano, que es  $T$ , será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

El hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2\omega^2). \quad (10.5)$$

Luego, como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces el hamiltoniano dado por la (10.5) se conserva. No obstante, el hamiltoniano no es la energía puesto que la energía cinética  $T$  tiene la forma  $T = T_2 + T_0$ , que proviene del hecho de que la fuerza de vínculo (que tendrá dirección angular en este caso) dependerá del tiempo. La energía no se conserva, claramente hay trabajo de la fuerza de vínculo, que es una fuerza no conservativa.

La conservación del hamiltoniano dependerá de las coordenadas generalizadas elegidas. Podría pensarse que el  $\mathcal{H}$  es la energía vista en un sistema no inercial [?]. La energía siempre es la medida en un sistema inercial. Además, cuando se conserve lo será desde cualquier sistema de coordenadas inercial elegido.

## 2.11 Energía cinética y el hamiltoniano

Dado que la energía cinética tiene la forma general

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j}_{T_2}$$

entonces, la energía total será

$$E = T + V = T_0 + T_1 + T_2 + V. \quad (11.1)$$

La forma particular de la energía cinética (11.1) implica que

$$p_i \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1 + 2T_2,$$

entonces el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  adopta la expresión

$$\mathcal{H} = T_2 - T_0 + V.$$

Luego, para que se verifique que el hamiltoniano es la energía del sistema, i.e.  $\mathcal{H} = E$  se necesita

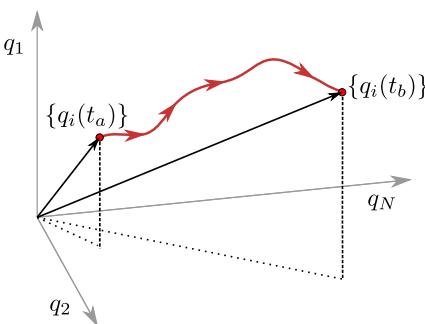
$$2T_0 + T_1 = 0.$$

Una solución de este sistema es, por supuesto,  $T_0 = T_1 = 0$ ; el hamiltoniano es la energía cuando la velocidad del sistema es exclusivamente cuadrática en las velocidades generalizadas. Este será el caso cuando los vínculos no dependan del tiempo, y siempre suponiendo que el potencial no depende de la velocidad.

## 2.12 Principio de acción mínima

El estado de un sistema mecánico de  $N$  grados de libertad en un dado instante de tiempo  $t$  puede asociarse a un vector de componentes  $\{q_i\}$  viviendo en un espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas. La evolución entre dos puntos en ese espacio, de  $\{q_i(t_a)\}$  a  $\{q_i(t_b)\}$  por ejemplo, se realiza por un trayecto continuo entre esos dos puntos, que es la trayectoria del sistema.

Hay que enganchar esto con la sección anterior. Hacer un cuadro sketchi de cuando se conserva la energía y cuando el hamiltoniano es la energía del sistema.



**Figura 12.5** Trayectoria de un sistema mecánico  $\{q_i\}$  entre dos puntos del espacio  $N$ -dimensional de coordenadas generalizadas.

En principio cualquier trayecto entre dos puntos es posible porque eso depende de la física a la cual está sometido el sistema, no obstante existe un principio que permite saber cuál es la trayectoria que seguirá.

Considerando el lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V$  y la siguiente integral (la acción  $S$ ) entre los puntos  $\{q_i(t_a)\}$  y  $\{q_i(t_b)\}$ ,

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, t) dt$$

se tiene que la trayectoria real entre estos dos puntos es tal que la integral  $S$  toma su valor mínimo.

Dicho de otra manera, esto significa que  $S$  como funcional dependiendo de  $\{q_i\}$ ,  $\{\dot{q}_i\}$  deberá tener un valor mínimo (o ser estacionaria) al especializarse en la trayectoria real. Esto es análogo a lo que sucede en cálculo; en el mínimo de una función (de una o varias variables) la derivada se anula. El concepto equivalente en funcionales como  $S$  es el de variación nula.

La idea es construir una *variación* arbitraria respecto de la trayectoria real  $\{q_i\}$  y forzar a que esa variación se anule para obtener una condición sobre las  $\{q_i\}$  (para funciones esa condición era que el gradiente se anule).

Si me sitúo en la trayectoria verdadera, es decir el conjunto  $\{q_i(t)\}$ , una variación arbitraria de la misma tendrá la forma

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (12.1)$$

donde cada coordenada  $q$  variará de acuerdo con su correspondiente desplazamiento  $\delta q$ . La variación se hace en un intervalo de tiempo arbitrario  $[t_a, t_b]$  y con extremos fijos,

$$\delta q(t_a) = 0 \quad \delta q(t_b) = 0, \quad (12.2)$$

lo que significa que los puntos de partida y llegada en el espacio de fases son los mismos.

Asimismo se pedirá que todas las trayectorias empleen el mismo tiempo de manera que la variación se hará en algún tiempo fijo intermedio  $t_a < t < t_b$ . O sea que  $\delta t = 0$ .

Una representación unidimensional (una única  $q$ ) puede verse en la Figura 12.6. La trayectoria real sería la curva  $q(t)$  en color rojo, mientras que la curva verde sería una trayectoria variada a través de  $\delta q$ . Los extremos fijos (12.2) implican que la variación es nula allí, y entonces las curvas comienzan y terminan en el mismo punto.

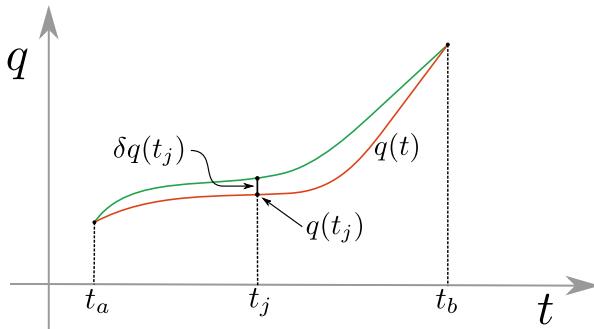
El hecho de considerar una variación a tiempo fijo  $t_j$  implica que nos situaremos arbitrariamente en ese instante y variaremos las trayectorias  $\{q_i\}$  congeladas en ese instante arbitrario. Por supuesto, el resultado debería valer para cualquier instante intermedio considerado.

La idea es determinar las condiciones que se necesitan para

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0.$$

**Habrá que justificar cuál es el significado de esto y porqué es así.**

**Cuán sketchy es todo esto!!**  
**Mucho para aclarar. Tal vez se justifique un minicurso de variacional como apéndice.**



**Figura 12.6** El principio de acción mínima

Para ello comenzamos tomando una variación de  $S$  que pasa dentro de la integral como

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)] dt$$

y donde vemos explícitamente que es a tiempo fijo.

La variación de la integral puede escribirse

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt,$$

y como será útil tener todo en función de las variaciones  $\delta q_i$ , es conveniente expresar las variaciones  $\delta \dot{q}_i$  en términos de una derivada total a través de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

resultando en

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt,$$

que se puede separar en dos términos

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt,$$

Pero el primer término es una derivada total y por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{t_a}^{t_b} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt = \sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_a}^{t_b} \quad (12.3)$$

y es nulo porque  $\delta q_i = 0$  en los extremos para toda coordenada  $i$  (las variaciones son nulas en los extremos). Decimos que este es un término de superficie. Entonces la condición

$$\delta S = \sum_i^N \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

se verificará por el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange<sup>2</sup>

$$\sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

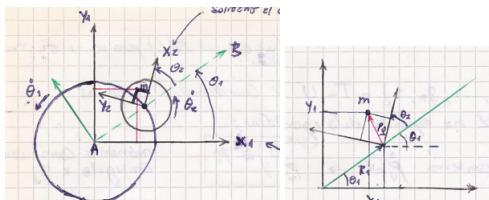
Se puede ver que

$$\delta S = 0 \iff \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Luego, si se hace  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df/dt$  (ambos lagrangianos difieren en una derivada total con respecto al tiempo) la trayectoria que minimiza  $\mathcal{L}'$  es la que misma que minimiza  $\mathcal{L}$  por la condición dada por (12.3).

La moraleja es que si los lagrangianos difieren en una derivada total del tiempo obtenemos la misma física.

### EJEMPLO 12.1 Problema círculos



El disco pequeño está solidario al disco [?]. La línea AB está pintada sobre los discos para poder medir los ángulos. El eje  $x_1$  está solidario al piso (inercial).

La segunda figura ilustra el movimiento de la masa en el sistema fijo.,

$$x_1 = R_1 \cos \theta_1 + \rho \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

<sup>2</sup>Como las variaciones  $\delta q_i$  son arbitrarias e independientes la anulación de la ecuación  $\delta S$  requiere la anulación de cada uno de los  $i = 1, 2, \dots, N$  corchetes en los integrandos.

$$y_1 = R_1 \sin \theta_1 + \rho \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

Luego, hay que calcular

$$\frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$$

con

$$\dot{x}_1 = -R_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \dot{\rho} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi) - \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

$$\dot{y}_1 = R_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \dot{\rho} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi) + \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$$

Habrá que elevar esto al cuadrado, lo cual a mano es un trabajo un poco cumbrosome.

$$T = \frac{1}{2} m (R_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \rho^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi})^2 + \dot{\rho}^2 + 2R_1 \dot{\theta}_1 [\dot{\rho} \sin(\theta_2 + \varphi) + \rho(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}) \cos(\theta_2 + \varphi)])$$

y como no hay potencial, entonces  $\mathcal{L} = T$ . Trabajando con las ecuaciones de Lagrange se llega a

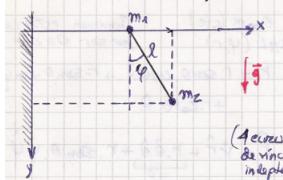
$$\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2 + \dot{\varphi})^2 - R_1 \omega_1^2 \cos(\omega_2 t + \varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} [2(\omega_1 + \omega_2)] + \frac{R_1 \omega_1 (\omega_1 + \omega_2)}{\rho} \sin(\omega_2 t + \varphi) = 0$$

Este sistema tiene dos grados de libertad ( $\rho, \varphi$ ) y el lagrangiano es  $\mathcal{L}(\varphi, \rho, \dot{\varphi}, \dot{\rho}, t)$ . En realidad  $\dot{\theta}_j = \dot{\theta}_j(\rho, \varphi)$  para  $j = 1, 2$  y entonces  $\theta_j$  no son coordenadas generalizadas.

Este problema se puede simplificar si se asume que  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  son constantes [Esto viene antes o viene después].

### EJEMPLO 12.2 Problema 17



Un problema de dos masas con, en principio, seis grados de libertad. Dado que el movimiento se asume que ocurre en un plano, el  $z$  por ejemplo, eso implica dos vínculos  $z_1 = z_2 = 0$  a los cuales debemos sumarle la fijación de  $m_1$  en la altura  $y_1 = 0$  y el vínculo de la barra

$$y_2^2 + (x_2 - x_1)^2 = l^2$$

luego es un problema de dos grados de libertad, que pueden ser elegidos como  $(x, \varphi)$ . Esto último puesto que

$$x_2 = x + l \sin \varphi \quad y_2 = l \cos \varphi.$$

Considerando  $x_1$  equivale a simplificar la notación se tiene

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\varphi} \sin \varphi$$

Todo esto permite escribir

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -m_2 g l \cos \varphi$$

La condición de que  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\varphi)$  implica la cantidad conservada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(m_1 + m_2) + m_2 \dot{\varphi} l \cos \varphi \equiv p_x,$$

que es el momento lineal en  $x$ . Para la coordenada  $\varphi$  resulta la ecuación

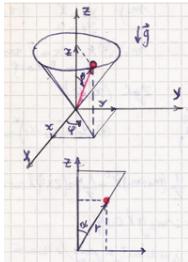
$$\ddot{x} \cos \varphi + \ell \dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0,$$

mientras que para  $x$  se tiene

$$\ddot{x}(m_1 + m_2) + m_2 \ell (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) = 0.$$

Se pueden combinar para tener una ecuación para  $\varphi$  solamente. Luego esa dinámica la puedo obtener? [ver carpeta].

### EJEMPLO 12.3 Problema 7



En este problema convienen esféricas  $\theta$  constante. Tendremos dos grados de libertad ( $\varphi, r$ ). Usando las expresiones de las coordenadas esféricas (ver XXXX chap 1) se tiene

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = |\dot{r}\hat{r} + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi}|^2$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha$$

Con esto escribimos  $T$  usando que  $V = mgr \cos \alpha$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha$$

El grado de libertad  $\varphi$  tendrá asociado un momento conjugado que se conserva, pues  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi = 0$ , luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha = cte. \equiv L$$

mientras la ecuación de E-L para  $r$  arrojará

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0$$

y utilizando la conservación

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \alpha} + mg \cos \alpha = 0.$$

Si ahora calculamos la energía  $E = T + V$  se obtiene

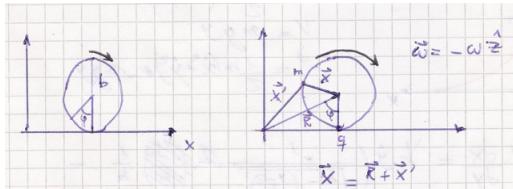
$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2 \varphi}{mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

donde los dos últimos términos constituyen un potencial efectivo.

### EJEMPLO 12.4 Cicloides y esas cosas

Tautocrona, Huygens (1773)

## Curva cicloide



Con las consideraciones de las figuras, tenemos en rápida sucesión

$$\mathbf{R} = (vt, b)$$

$$\mathbf{X}' = (-b \sin \varphi, -b \cos \varphi); \quad \varphi = \omega t$$

$$\mathbf{X} = (vt - b \sin \varphi, b - b \cos \varphi)$$

y por condición de rodadura

$$\mathbf{v}_q = 0 = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_{cm} = v\hat{x} + (-\omega)b\hat{k} \times (-\hat{y})$$

$$0 = (v - \omega b)\hat{x},$$

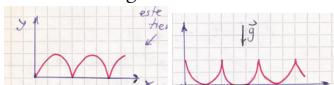
o bien  $v = \omega b$  e integrando

$$vt = \omega tb = \varphi b.$$

Con esto llego a mi ecuación paramétrica para el cicloide

$$\begin{cases} x = b(\varphi - \sin \varphi) \\ y = b(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

Este cicloide tiene gráfico



Pero necesto uno que mire hacia abajo, lo cual se logra con un cambio  $y' = -y + bz$  de modo que

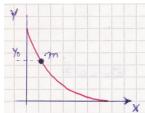
$$\begin{cases} x = b(\varphi - \sin \varphi) \\ y = b(1 + \cos \varphi) \end{cases}$$

Ahora se hace un cambio de variables nuevo

$$\frac{y}{b} = 1 + \cos \varphi \quad \frac{y - b}{b} = \cos \varphi$$

y entonces

$$x(y) = b \left( \arccos \left( \frac{y - b}{b} \right) - \sqrt{1 - ((y - b)/b)^2} \right)$$



Usando todo esto

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad V = mgy$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Derivando  $x$  y haciendo el álgebra,

$$\dot{x} = -\dot{y}\sqrt{\frac{2b-y}{y}}.$$

Utilizando toda esta información, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{mb\dot{y}}{y} - mg y$$

y las ecuaciones de E-L

$$mb\left(2\frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2}\right) + mg = 0.$$

Podemos ver, con alguna experiencia, que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{y}\right) = \dot{y}\left(2\frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} mb\frac{1}{\dot{y}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{y}\right) + mg &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{y}\right) &= -\frac{g}{b}\frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

y ahora se puede integrar

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^2}{y}\right) dt &= -\frac{g}{b} \int_0^t \frac{dy}{dt} dt, \\ \frac{\dot{y}^2}{y} \Big|_0^t &= -\frac{g}{b} y \Big|_0^t \end{aligned}$$

Usando condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{y}(t=0) = 0 \\ y(t=0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}^2}{y} &= -\frac{g}{b}y + \frac{g}{b}y_0 \\ \dot{y} &= \frac{g}{b}\sqrt{(y_0-g)y} \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{y_0y-y^2}} &= \sqrt{\frac{g}{b}} \int_0^t dt = \sqrt{\frac{g}{b}} t \\ \text{asin}\left(\frac{y-y_0/2}{y_0/2}\right) \Big|_{y_0}^y &= \text{asin}\left(\frac{y-y_0/2}{y_0/2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ \frac{y-y_0/2}{y_0/2} &= \sin\left(\sqrt{\frac{g}{b}}t + \pi/2\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}t\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{y_0}{2}(1 + \cos(\sqrt{\frac{g}{b}}t)).$$

Si quiero calcular el tiempo de caída será:

$$0 = \frac{y_0}{2} \left(1 + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\tau\right)\right),$$

de lo cual se deduce

$$\tau = \sqrt{\frac{b}{g}}\pi.$$

La cicloide es la curva de caída por la cual se tarda el tiempo mínimo. La masa  $m$  tarda lo mínimo en caer por esta curva. Si las dos ruedas están pegadas girando ambas, recorrerán en un giro una distancia verde:



Esto no sucede: alguna de ambas deslizará.

## 2.13 Aplicaciones del principio de acción mínima

El principio variacional de Hamilton tiene más uso como herramienta formal de lo que tiene en el campo de la aplicación.

**Me falta algo de esta clase inicial, pero esperamos que no sea fundamental!**

$$S = \int (T - V_0) dt$$

donde el lagrangiano es con  $V = V_0$  constante (un lagrangiano sujeto a potencial constante). La integral de acción da una medida de la longitud de la órbita (el espacio recorrido). Para una partícula sujeta a  $V = 0$

$$S = \frac{1}{2} \int mv_0^2 dt = \frac{1}{2} mv_0^2 (t - t_0)$$

de manera que  $v_0(t - t_0)$  representa la distancia  $d$  recorrida, y es

$$S = \frac{1}{2} mv_0 d$$

Comentario sobre el cálculo de las variaciones

**Esta idea debe estar en el suplemento matemático que le dedicaremos a variacional**

$$I = \int f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) dt$$

entonces  $I$  es extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial [dx/dt]} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

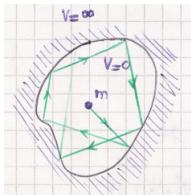
También podemos encontrar esta notación, dependiendo del tipo de problema,

$$I = \int f \left( y, \frac{dy}{dx}, x \right) dx$$

### 2.13.1 Billares [otro título?]

Consideramos una partícula libre en una región del espacio (una partícula rebotando en cierta región). Podemos pensar en un potencial

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in D \\ \infty & \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$



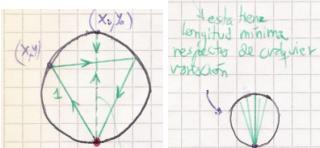
Es un pozo de potencial con una partícula libre en su interior; se los suele llamar *billares*. En este caso

$$I = \int_{q_i}^{q_{a_f}} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_k(t), t) dt.$$

La integral da la longitud de la órbita (espacio recorrido)

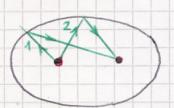
$$\frac{1}{2}mv_0^2 \int_{t_i}^{t_f} dt = \frac{1}{2}mv_0^2(t_f - t_i)$$

En un billar circular



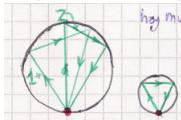
Si parto del punto rojo y quiero minimizar (extremar) la trayectoria que me da el ir hacia  $(x, y)$  y volver al punto rojo, obtendré una órbita periódica en  $(x_0, y_0)$ . Esa órbita periódica es extrema entre ir y volver al punto rojo.

En un billar elíptico



hay muchas trayectorias posibles entre los focos. El lagrangiano integrado me da todos las extremas (1, 2, ...), que por otro lado son las reales, y con las condiciones iniciales determinaré qué trayectoria extrema estaré considerando.

Hay muchas trayectorias (1, 2, ...) que son posibles



$$I = \int \mathcal{L}$$

*¿Esta sección aporta algo?*

da la longitud total de todo el camino.

### 2.13.2 Minimización del camino entre dos puntos

*Esto lo clavo por acá, después reacomodarlo*

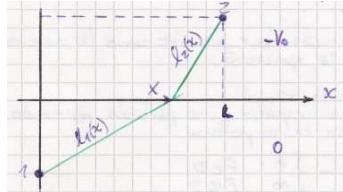


Figura 13.7

El  $\tau$  es fijo. Este problema no es como el del billar porque la velocidad no es constante [?].

$$I = \int_1^2 \mathcal{L} dt$$

pero se puede descomponer en  $I = I_1 + I_2$ ; es decir un lagrangiano para cada medio, luego

$$I = \frac{1}{2}mv_1^2 \int_0^{t_i} dt + \left( \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0 \right) \int_{t_i}^{t_f} dt,$$

que al integrar da

$$I = \frac{1}{2}mv_1^2 t_i + \frac{1}{2}mv_2^2 (t_f - t_i) + V_0(t_f - t_i).$$

Las condiciones geométricas del problema (ver Figura) implican que

$$v_1 t_i = \ell_1(x) \quad v_2 (t_f - t_i) = \ell_2(x)$$

siendo  $\ell_i$  longitudes que dependen de  $x$ . Esto permite expresar los tiempos  $t$  en términos de la distancia  $x$  sobre la frontera. Entonces se obtiene la acción  $I$  en términos de posiciones y velocidades, i.e.

$$I = I(v_1, v_2, x) = \frac{1}{2}mv_1\ell_1(x) + \frac{1}{2}mv_2\ell_2(x) + \frac{V_0}{V_2}\ell_2(x).$$

Luego, como todo sucede a  $\tau$  fijo ( $t_f = \tau$ ) se debe tener el siguiente vínculo

$$\tau = \frac{\ell_1(x)}{v_1} + \frac{\ell_2(x)}{v_2}.$$

Entonces, diferenciando implícitamente el vínculo y la integral  $I$  obtenemos, respectivamente,

$$d\tau = 0 = \left( \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx - \frac{\ell_1}{v_1^2} dv_1 - \frac{\ell_2}{v_2^2} dv_2$$

$$dI = \left( \frac{v_1}{2} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{v_2}{2} \frac{d\ell_2}{dx} + \frac{V_0}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx + \frac{\ell_1}{2} dv_1 + \left( \frac{\ell_2}{2} - \frac{V_0 \ell_2}{v_2^2} \right) dv_2 = 0$$

En esta última ecuación, si fuesen independientes los diferenciales  $dx, dv_1, dv_2$  entonces sería nulo cada paréntesis. Como no es el caso empleamos multiplicadores de Lagrange,

$$d\tau = \lambda \left( \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right) dx - \lambda \frac{\ell_1}{v_1^2} dv_1 - \lambda \frac{\ell_2}{v_2^2} dv_2$$

y combinando

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_1}{2} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{v_2}{2} \frac{d\ell_2}{dx} + \frac{V_0}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} - \lambda \left[ \frac{1}{v_1} \frac{d\ell_1}{dx} + \frac{1}{v_2} \frac{d\ell_2}{dx} \right] \right) dx + \\ & \left( \frac{\ell_1}{2} + \lambda \frac{\ell_1}{v_1^2} \right) dv_1 + \left( \frac{\ell_2}{2} - \frac{V_0 \ell_2}{v_2^2} + \lambda \frac{\ell_2}{v_2^2} \right) dv_2. \end{aligned}$$

Ahora se puede igualar a cero cada paréntesis porque consideramos independientes  $v_1$  y  $v_2$ . Entonces, se tienen

$$\lambda = -\frac{1}{2}v_1^2 \quad \lambda = -\frac{1}{2}v_2^2 + V_0$$

de manera que ha resultado la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_2^2 - V_0$$

Reemplazando en la anterior expresión, se llega a

$$v_1 \frac{d\ell_1}{dx} + v_2 \frac{d\ell_2}{dx} = 0.$$

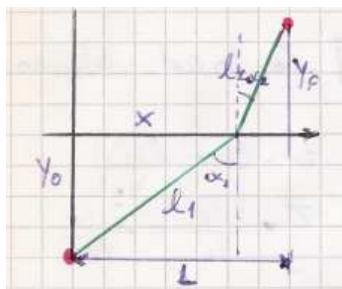
$$\ell_1 = \sqrt{Y_0^2 + x^2} \quad \ell_2 = \sqrt{Y_f^2 + (L-x)^2}$$

$$\frac{d\ell_1}{dx} = \sin(\alpha_1) \quad \frac{d\ell_2}{dx} = -\sin(\alpha_2)$$

de modo que

$$v_1 \sin(\alpha_1) = v_2 \sin(\alpha_2),$$

que es la conclusión de la ley de Snell. Entonces podemos establecer un paralelogramo entre mecánica clásica y óptica geométrica.



**Figura 13.8**

### 2.13.3 Acción mínima ejemplos

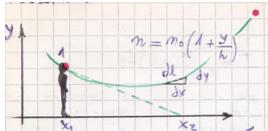
En general, dada una integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f \left( y, \frac{dy}{dt}, t \right) dt,$$

si se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial dy/dt} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

entonces se da que  $I$  es un extremo. Por ello esta idea es generalizable a casos no mecánicos, como veremos a continuación.

**EJEMPLO 13.1 Espejimo -problema 5-**

En estos problemas debemos saber primeramente de qué punto a qué punto vamos.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} n(y) d\ell = \int_1^2 n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_1^2 n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Si defino  $y' = dy/dx$  y  $f = n_0(1 + y/h)\sqrt{1 + y'^2}$  se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left( n_0 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)$$

y haciendo la derivada explícitamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= n_0 \left( \frac{y'^2}{h\sqrt{1+y'^2}} + \left(1 + \frac{y}{h}\right) \left[ y'' \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y'}{2(\sqrt{1+y'^2})^3} 2y'y'' \right] \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{n_0}{h} \sqrt{1+y'^2} \end{aligned}$$

Luego, juntando todo

$$y'' = \frac{1+y'^2}{h+y}.$$

Si tomamos

$$\begin{aligned} y+h &= \frac{\alpha h}{n_0} \cosh \left( \frac{\alpha n_0}{\alpha h} + \beta \right) \\ y'' &= \frac{n_0}{\alpha h} \cosh() \end{aligned}$$

**Acá, claramente, faltan cosas.**

**EJEMPLO 13.2 Problema 8**

Por la periodicidad se propone una serie de Fourier

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

donde  $\omega$  corresponde a la frecuencia del movimiento de subida y bajada.

$$y(0) = 0 \quad \mathcal{L} = T - V$$

$$y(t_{\text{caída}}) = 0 \quad \mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy$$

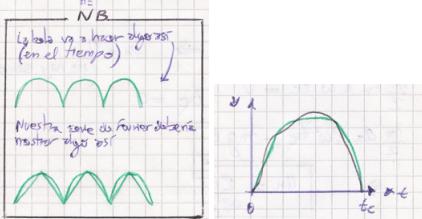
Entonces queremos lograr  $\delta I = 0$  para

$$I = \int_0^{t_c} \mathcal{L} dt$$

para hallar la mejor serie de Fourier que verifique

$$\dot{y} = \sum_n -a_n \sin(n\omega t) n\omega + b_n \cos(n\omega t) n\omega$$

y esto habría que elevarlo al cuadrado.



Quisiera ver la diferencia entre las dos trayectorias que muestra la figura.

$$y(0) = \frac{\omega}{2} + \sum a_n = y(t_c)$$

Y calculo acá las variaciones

$$0 = \delta y(0) = \delta \frac{a_0}{2} + \sum_n \delta a_n$$

$$\delta a_0 = - \sum_n 2\delta a_n \quad \text{vinculo}$$

$$I = m \int_0^{t_c} \left[ \sum_n a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t) \right]^2 dt - mg \int_0^{t_c} \left[ \frac{a_0}{2} \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] dt$$

**Anoté:** porque  $t_c$  es el tiempo de un período.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \cos(n\omega t) dt &= 0 & \int_0^{t_c} \sin(n\omega t) dt &= 0 \\ \int_0^{t_c} \cos^2(n\omega t) dt &= T/2 & \int_0^{t_c} \sin^2(n\omega t) dt &= T/2 \\ I &= \frac{m}{2} \left( \sum_n a_n^2 n^2 \omega^2 \frac{T_c}{2} + \sum_n b_n^2 n^2 \omega^2 \frac{T_c}{2} \right) - mgT_c \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

La integral ya está dada en función de los coeficientes de la serie, de manera que lo que faltaría es hacer variar los coeficientes y ya.

$$\delta I = -\frac{m}{2} \sum_n a_n \delta a_n n^2 \omega^2 t_c + \frac{m}{2} \sum_n b_n \delta b_n n^2 \omega^2 t_c - mg \delta \frac{a_0}{2} t_c + \frac{mg}{2} \sum_n 2\delta a_n t_c = 0$$

y como los  $\delta a_n$ ,  $\delta b_n$  son independientes todos los términos serán cero por separado. Entonces

$$\frac{m}{2} b_n \delta b_n n^2 \omega^2 t_c = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0,$$

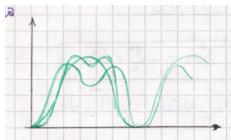
es decir que no hay senos. Por otro lado,

$$a_n = \frac{2g}{n^2 \omega^2}$$

y

$$y(t) = \sum_n \frac{1 - \cos(n\omega t)}{n^2 \omega^2 / 2g}$$

Se ve que la mejor serie de Fourier tendrá algo que se aproxima a la parábola.



Podemos ver si se llega a la altura máxima  $y_{\text{maxima}} \equiv y(t_c/2)$

$$y(t_c/2) = \frac{2g}{\omega^2} \sum_n \frac{2}{n^2} = \frac{4g}{\omega^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{gt_c^2}{6} = \frac{2v_0^2}{3g}$$

o bien

$$y(t_c/2) = \frac{2v_0^2}{3g} \quad (13.1)$$

donde

$$E = mgy_{\text{maxima}}, E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

y la altura máxima real es  $Y_{\text{maxima}} = v_0^2/(2g)$  que difiere de la que se obtiene con la serie de Fourier. Entonces, la mejor solución de entre las series de Fourier es (13.1) que difiere de la solución real. Esta solución es derivable en los nodos, mientras que la solución real no lo es.

**Este ejemplo hay que trabajarla bastante!**

## 2.14 Multiplicadores de Lagrange

El principio variacional de Hamilton nos dice que la trayectoria real que sigue un sistema es la que extremiza la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i[t], \dot{q}_i[t], t) dt.$$

Esa condición de extremo, conducía directamente a las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt = 0 \quad (14.1)$$

donde  $\delta q_j$  eran desplazamientos independientes y esta condición significaba que el corchete debía ser nulo para todo grado de libertad  $j$ .

Pero puede suceder (en el caso de vínculos no-holónomos, por ejemplo) que no se pueda despejar alguna  $q_j$  y entonces no todos los  $\delta q_j$  son independientes.

Si se tienen  $s$  ecuaciones de vínculo no holónomos [¿cómo es un vínculo no-holónomo? o es que se deriva una ecuación de vínculo usual??]

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, s$$

**Habrá que tomarse medio minuto para chequear: consistencia de la notación con respecto a los límites en estas integrales de acción, definir extremización, ver si la implicancia es un sí y sólo sí o no, etc.**

donde  $\ell$  suma en los grados de libertad. Multiplicando por  $\delta t$  puede verse que no son independientes,

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} + b^k(q_i, t) \delta t = 0.$$

Si ahora las  $\delta q_{\ell}$  son variaciones a  $t$  fijo, entonces se cumple

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} = 0,$$

expresión que puede integrarse con respecto al tiempo y sumar sobre todas las ecuaciones de vínculo,

$$\sum_k^s \int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0.$$

El cero de esta última ecuación puede restarse del otro cero dado por la integral (14.1), suma de  $N - s$  ecuaciones con  $\delta q_{\ell}$  independientes [¿chechar esto?] con para construirnos de esa manera la ecuación

$$\int \sum_{j=1}^{N-s} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k^s \lambda^k a_j^k(q_i, t) \right\} \delta q_j dt = 0$$

y se tienen  $N - s$  ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k^s \lambda^k a_j^k(q_i, t),$$

y  $s$  ecuaciones

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0. \quad (14.2)$$

El parámetro  $\lambda^k$  es la fuerza de vínculo asociada al vínculo que no se pudo despejar. Es un multiplicador de Lagrange.

Los vínculos holónomos se pueden escribir también en la forma (14.2). Un vínculo holónomo está representado por una ecuación del tipo

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = cte.$$

de manera que para desplazamientos virtuales (donde  $\delta t = 0$ ) la derivada temporal de esta ecuación implica<sup>3</sup>

$$\sum_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

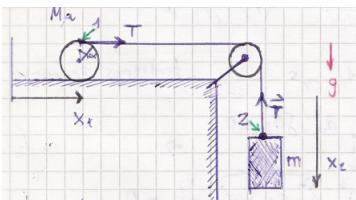
---

<sup>3</sup>Recordemos que para desplazamientos virtuales el término  $\partial f / \partial t$  no aparece por estar multiplicado a  $\delta t = 0$ .

y esta ecuación es precisamente de la forma  $\sum_{\ell} a_{\ell}^k \delta q_{\ell}$ .

### EJEMPLO 14.1 Resolución de sistema holónomo

Consideramos un cilindro rodando sin deslizar.



Los vínculos son relaciones entre velocidades que se pueden intergrar. De la soga:

$$\dot{x}_1 + \dot{\alpha}a = \dot{x}_2$$

por el rozamiento sobre el piso:

$$\dot{\alpha}a = \dot{x}_1$$

**Aclarar mil cosas: rueda un poco (máximo  $\alpha = \pi/2$ ). ¿Es una aproximación sólo válida para ángulos pequeños? El caso exacto es mucho quilombo? Sirve para algo?**

**Lo de los  $\delta$  pide para ser explicado y entendido.**

$$\begin{aligned}\Delta x_1 + a\Delta\alpha &= \Delta x_2 & \Delta\alpha a &= \Delta x_1 \\ \delta x_1 + a\delta\alpha - \delta x_2 &= 0 & \delta x_1 - a\delta\alpha &= 0\end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 + mgx_2$$

donde los dos términos centrales en el rhs son la cinética del cuerpo rígido.

Ahora hacemos

$$\lambda^1(\delta x_1 + a\delta\alpha - \delta x_2) = 0 \quad \lambda^2(\delta x_1 - a\delta\alpha) = 0$$

donde deberíamos obtener  $\lambda^1$  tensión y  $\lambda^2$  fuerza de rozamiento. Luego,

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= (\lambda^1 1 + \lambda^2 1) \\ m\ddot{x}_2 &= mg + \lambda^1(-1) \\ I\ddot{\alpha} &= (\lambda^1 a - \lambda^2 a)\end{aligned}$$

Escribiendo las ecuaciones de Newton para este problema resulta en

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= T - F_{roz} \\ m\ddot{x}_2 &= mg - T \\ I\ddot{\alpha} &= Ta + F_{roz}a\end{aligned}$$

de manera que identificamos naturalmente a

$$\lambda^1 = T \quad \lambda^2 = -F_{roz}$$

Entonces, para el caso de vínculo holónomos tendremos  $a_{\ell}^k(q_i, t) = \nabla_i f^k$ .  $\delta x_i$  de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k^s \lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial q_j} \quad (14.3)$$

**Hay que escribir bien la conversión de  $\nabla f^k$  hacia  $\partial f^k / \partial q_j$ . Parece una boludez, pero tal vez no sea así.**

Pero sabemos [sí?] que cuando existe fuerza generalizada (no proveniente de un potencial) se tenía

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \quad (14.4)$$

e igualando los miembros derechos de (14.3) y (14.4)

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k^s \lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial q_j}$$

se arriba a que

$$\lambda^k = \mathbf{F}_i^a$$

de manera que  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos que no se pudieron retirar (no despejados en las ecuaciones [?]). Si los vínculos son holónomos (pero no quise despejar) entonces son las fuerzas de vínculo.

La moraleja es que si no puedo despejar en función de coordenadas independientes sí o sí necesito introducir multiplicadores de Lagrange.

Tenía anotado que (14.4) es el lagrangiano con fuerzas no conservativas, cuando por supuesto  $\mathbf{F}$  son fuerzas no conservativas.

## Más sobre el asunto de vínculos

comparando vemos que

$$Q_j = \sum \lambda^k a_j^k(q_j, t) \quad \text{vínculos no holónomos}$$

$$Q_j = \sum \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \delta \mathbf{r}_j \quad \text{vínculos holónomos}$$

En el caso de vínculos holónomos

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

donde no quise despejar en función de  $q_1, \dots, q_n$  resulta que

$$Q_j^{\delta q_j} = \sum_i^N \lambda (\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  es un desplazamiento virtual de la partícula. Vamos a reescribir este término,

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Acá hay temas con los índices y con lo que se suma. Parece no ser la misma cosa. Tenía observado en la carpeta que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_i, t)$  y  $f(q_i, t) = 0$ .

Hay que revisar bien esta sección y meter algún ejemplo esclarecedor.

El supraíndice con  $\delta q_j$  va sobre el igual en realidad.

$$\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j^{\delta q_j} = \lambda \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

luego como

$$a_j^k \equiv \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i}$$

se sigue que los  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo.

En el caso de vínculos no holónomos  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos no retirados.

$$Q_j \delta q_j = \sum \lambda^k (\nabla_i g^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial q_j}$$

entonces  $\lambda^k = F^v$ .

Como extra escribamos que para cada grado de libertad  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k^s \lambda^k a_j^k \equiv 0$$

donde  $\delta q_j$  son ahora independientes.

$$Q_j = \sum_i^N F_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

### EJEMPLO 14.2 Moneda rodando por un plano

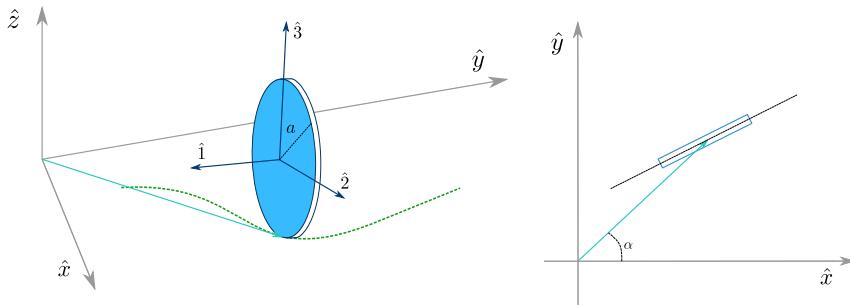
Consideramos una moneda que rueda libremente por un plano (no sujeta a potencial). Situaremos un sistema de ejes sobre la moneda, que etiquetaremos 123 y otro fijo fuera de la misma xyz.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{cm} &= -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -(\dot{\phi}\hat{2} + \dot{\psi}\hat{3}) \times (-a\hat{2}) \\ \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} &= -a\dot{\psi}\hat{1} \end{aligned}$$

siendo los vínculos

$$z_{cm} - a = 0 \quad \theta = \pi/2 \quad |\mathbf{V}_{cm}| = a\dot{\psi}$$

de tal modo que son dos grados de libertad. Los vínculos provienen de la rodadura y de considerar que la moneda permanece en todo momento vertical, aunque pueda cambiar la dirección de su



**Figura 14.9** Moneda que rueda libremente por un plano. Intercambié ejes 2 y 3 respecto del dibujo anterior.

velocidad. En este problema se deben utilizar multiplicadores de Lagrange de manera obligada. El lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I_2^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_3^2\dot{\psi}^2.$$

Como los vínculos dependen de la velocidad, resulta

$$\begin{aligned}\dot{y} &= a\dot{\psi} \cos(\psi) \sin(\phi) = a \sin(\phi)\dot{\psi} \\ \dot{x} &= a\dot{\psi} \cos(\psi) \cos(\phi) = a \cos(\phi)\dot{\psi}\end{aligned}$$

de tal manera que

$$\dot{y} - a \sin(\phi)\dot{\psi} = 0 \quad \dot{x} - a \cos(\phi)\dot{\psi} = 0$$

y luego esto equivale a

$$\lambda_1(dy - a \sin(\phi)d\psi) = 0 \quad \lambda_2(dx - a \cos(\phi)d\psi) = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \lambda_1 \quad m\ddot{x} = ma \frac{d}{dt}(\cos(\phi)\dot{\psi}) \\ m\ddot{x} &= ma(-\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\psi} + \cos(\phi)\ddot{\psi}) \\ m\ddot{y} &= \lambda_2 \\ I_2\ddot{\phi} &= 0 \quad I_3\ddot{\psi} = -\lambda_2 a \sin(\phi) - \lambda_1 a \cos(\phi) \\ \hat{1} &= \cos(\psi)[\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\phi)\hat{x}]\end{aligned}$$

No entiendo/recuerdo lo que quise decir con la expresión *bajar los ejes*. Calculo que se relaciona con la proyección de los ejes 123 en xyz.  
Confirmarlo.

## 2.14.1 Soluciones aproximadas

Puedo tomar un subconjunto pequeño de funciones y restringirme a buscar cuáles es la mejor función de ese conjunto en el sentido de extremar  $I$ :

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt,$$

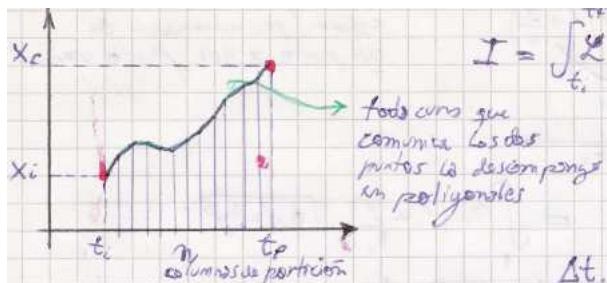


Figura 14.10

donde el subconjunto de las funciones  $q_1, q_2, \dots, q_n$  las tomo de algún subconjunto en particular. Por ejemplo,

$$q_1^f = a_0 + a_1 t_f + \dots \quad q_1^i = a_0 + a_1 t_i + \dots$$

## 2.14.2 Oscilador armónico

Considero un oscilador armónico en una dimensión.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \dot{x}^2$$

Quiero resolver de manera aproximada el oscilador armónico y ver que está bien. Si considero  $n \rightarrow \infty$  tengo infinitos parámetros y puedo parametrizar cualquier curva que una los puntos inicial y final.

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt$$

Parto el intervalo y considero una partición de  $N$  cachos.

$$\Delta t N = t_f - t_i$$

donde  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ . Luego la versión discreta de la integral es

$$I \approx \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{1}{2} m \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t^2} - \frac{1}{2} k x_i^2 \right) \Delta t$$

Tomamos la derivada

$$\frac{\partial I}{\partial x_j} = \left( m \frac{(x_j - x_{j-1})}{\Delta t^2} - m \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\Delta t^2} \right) \Delta t - k x_j \Delta t$$

comments del gráfico: toda curva que comunica los dos puntos la descompongo en poligonales. Columnas de partición

e igualándola a cero,

$$\frac{m}{\Delta t^2}(-2x_j + x_{j-1} + x_{j+1}) + kx_j = 0$$

que se puede escribir como

$$\frac{m}{\Delta t} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} - \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \right) + kx_j = 0$$

y que en el límite continuo va a

$$m\ddot{x} - kx = 0.$$

### EJEMPLO 14.3 Geodésicas

La idea es extremizar la distancia entre dos puntos de una dada geometría. En el caso del plano se tiene

$$I = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

donde se ha definido  $\dot{y} \equiv dy/dx$ . Evidentemente si la geometría es plana, la curva que extremiza el intervalo tiene que ser una recta. Veámoslo. Las ecuaciones de Euler Lagrange se reducen a:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0,$$

las cuales nos dicen que

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C$$

donde  $C$  es una constante. No es difícil ver que esta ecuación lleva a

$$y(x) = C_1 x + C_2$$

para  $C_1, C_2$  constantes. Esta es la ecuación de una recta en el plano.

### Un ejemplo más sofisticado

Si a una curva  $z = z(x)$  como la que se ilustra en la figura se la hace girar en torno al eje  $z$  se tiene una superficie de revolución. Un punto tridimensional en esa superficie se puede parametrizar en términos de coordenadas cilíndricas  $\rho, \theta, z$  según

$$\begin{cases} x = \rho(z) \cos(\theta) \\ y = \rho(z) \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

donde el hecho de que la superficie es 2D se traslucen en que cada coordenada cartesiana 3D  $x, y, z$  depende a lo sumo de dos variables  $\theta, z$ .

La trayectoria mínima entre dos puntos provendrá otra vez de extremar

$$I = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

pero utilizando la restricción de la superficie dada por las ecuaciones XXX. Utilizando la prima para denotar la derivada con respecto a  $z$  se tiene

$$dx = \rho' \cos \theta dz - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \rho' \sin \theta dz + \rho \cos \theta d\theta$$

**Creo que se puede usar que uno conoce diferencias finitas algo. El final parece no estar muy claro en la carpeta. Hacer la cuenta a mano bien.**

**Este material es parte de una clase práctica. Habría que ver de hacerlo encajar mejor.**

$$I = \int \sqrt{\rho'^2 dz^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

que se puede poner en términos de la derivada con respecto a  $z$  sacando como factor común su diferencial. Entonces

$$I = \int \sqrt{(\rho'^2 + 1)dz^2 + \rho^2\theta'^2} dz$$

donde tanto  $\rho$  como  $\theta$  son funciones de  $z$ . El lagrangiano es función de  $\theta'$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$

Si calculamos las ecuaciones de Euler Lagrange para  $\theta$  (que son las más fáciles puesto que la dependencia es solo de la derivada) se llega a

$$\frac{\rho\rho'\theta'}{\sqrt{(\rho'^2 + 1) + \rho^2\theta'^2}} = C$$

que se puede, haciendo el álgebra correspondiente, llevar a la forma explícita

$$\theta(z) = C_1 \int \frac{\sqrt{\rho'^2 + 1}}{2\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} dz + C_2, \quad (14.5)$$

que es una ecuación genérica para una superficie en rotación. Es decir, que recorrer la curva de longitud mínima por esa superficie debe hacerse avanzando en  $\theta$  según la prescripción dada por (14.5).

Si la superficie fuera un cilindro, de radio  $a$ , por ejemplo, se tendría  $\rho = a$  de modo que la (14.5) se integra inmediatamente para dar

$$\theta(z) = C_1 \frac{z}{a\sqrt{a^2 - C_1^2}}.$$

Luego, para dos puntos separados verticalmente una distancia  $h$  (ver figura) sobre la superficie del cilindro se tiene que la curva que representa la distancia mínima es una hélice en el cilindro, de paso  $h$ . Si la superficie lateral de este cilindro se desplegase sobre un plano, esa curva es una recta.

### Superficie general en 3D

Si la partícula debe *caminar* en la superficie  $\Omega$  entonces tal vez se pueda expresar como  $z = z(x, y)$  de tal forma se tendrá

$$I = \int f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt$$

Luego, la derivada total de  $z$  será

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}$$

y entonces

$$I = \int f(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}) dt.$$

Planteando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} \right) - \frac{df}{dz} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} \right) - \frac{df}{dz} \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} \right) = 0$$

las cuales se pueden simplificar usando la derivada total,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) \frac{dz}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dx} \right) + \frac{df}{dz} \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

**Los dos últimos términos tienen que aparecer tachados.**

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) + \frac{dz}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dy} \right) + \frac{dz}{dy} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) &= 0\end{aligned}$$

y como

$$\frac{dG}{dx} \dot{x} + \frac{dG}{dy} \dot{y} + \frac{dG}{dz} \dot{z} = 0,$$

se sigue que

$$\dot{z} = - \left( \frac{dG}{dx} \dot{x} + \frac{dG}{dy} \dot{y} \right) \frac{1}{dG/dz}$$

o bien

$$\dot{z} = - \left( \frac{G_x}{G_z} \dot{x} + \frac{G_y}{G_z} \dot{y} \right)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) + \frac{G_x}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dy} \right) + \frac{G_y}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right) &= \lambda(t) G_z\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{G_x} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{1}{G_y} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dy} \right) = \frac{1}{G_z} \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dz} \right)$$

Esta expresión puede simplificarse como

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$$

si el parámetro  $t$  es  $s$

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} ds$$

y entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) = \ddot{x}$$

de manera que la ecuación de la geodésica es

$$\frac{1}{G_x} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{G_y} \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{G_z} \frac{d^2z}{ds^2}$$

Ahora, si consideramos

$$I = \int [f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \lambda G(x, y, z)] dt$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) - \lambda G_x = 0$$

y es un vínculo que hay que integrar, y es mucho más difícil.

Volviendo a la superficie general

$$I = \int \left[ \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \lambda G \right] dt$$

$$T = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} = cte. \equiv k$$

y entonces  $s = kt$

$$\begin{aligned} k^2 m \ddot{x} - \lambda G_x &= 0 \\ k^2 m \ddot{y} - \lambda G_y &= 0 \\ k^2 m \ddot{z} - \lambda G_z &= 0 \end{aligned}$$

$$G(x, y, z) = 0$$

La partícula se mueve en una geodésica

$$\frac{\ddot{x}}{G_x} = \frac{\ddot{y}}{G_y} = \frac{\ddot{z}}{G_z}$$

## 2.15 Potenciales dependientes de la velocidad

Hasta el momento se consideró que el potencial  $V$  dependía únicamente de la posición y resultaba eso en una fuerza generalizada [la llamé así?]

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

para la cual el  $\mathcal{L} \equiv T - V$  cumplía las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (15.1)$$

Si en cambio se tiene un potencial dependiente, además, de la velocidad,

$$U = U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

y se requiere que sigan valiendo las ecuaciones (15.1) para  $\mathcal{L} \equiv T - U$ , necesitaremos evidentemente

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

una fuerza generalizada que depende de posiciones y velocidades.

El ejemplo canónico de una tal fuerza es la fuerza de Lorentz, que es la que sufre una partícula de carga  $q$  en presencia de un campo electromagnético dado por campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  y cuya forma es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (15.2)$$

Esta fuerza (15.2) puede expresarse en términos de dos potenciales. Para ello es necesario recurrir a las relaciones que verifican los campos  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  y que están dadas por las ecuaciones de Maxwell, cuyo esquema se presenta en la siguiente tabla.

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Dado que la divergencia de  $\mathbf{B}$  es nula, entonces existe un potencial vector  $\mathbf{A}$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Entonces, la ley de Faraday resulta

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

o bien

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

La cantidad entre paréntesis es de rotor nulo y entonces se puede escribir

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$$

de manera que los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  pueden expresarse en términos de una función escalar  $\varphi$  y un campo vectorial  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Entonces, en términos de estos potenciales (15.2) resulta

$$\mathbf{F} = -q\nabla \varphi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}.$$

Supongamos, para simplificar el razonamiento, que es  $\mathbf{F} = F_x \hat{x}$  y veamos que

$$F_x = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{q}{c} (v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y)$$

se puede escribir

$$F_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Desarrollando explícitamente el rotor se tiene

$$(v_y [\nabla \times \mathbf{A}]_z - v_z [\nabla \times \mathbf{A}]_y) = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

donde se ha sumado y restado la conveniente combinación  $v_x \partial_x A_x$ . Dado que las velocidades y las posiciones son variables independientes (se verifica  $\partial_a v_b = 0$  para cualquier combinación  $a, b = x, y, z$ ) se puede *filtrar* la velocidad dentro de las derivadas para reescribir

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Los tres términos restantes en derivadas respecto de  $A_x$  no son otra cosa que una derivada total,

$$-\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -\frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla(A_x) \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt}$$

Luego, se fuerza la aparición de una derivada con respecto a la velocidad (para obtener una expresión en consonancia con la buscada) del siguiente modo

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = \frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}),$$

y juntando todo resulta

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} \left( -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right).$$

Como  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ , se la puede incluir dentro de la derivada con respecto a la velocidad obteniendo finalmente el resultado buscado

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right),$$

donde

$$U = q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

Se puede demostrar directamente la fórmula anterior desde la expresión vectorial de  $\mathbf{F}$  utilizando su equivalente indicial, es decir a partir de

$$F_i = -q\partial_i \varphi - \frac{q}{c} \partial_t A_i + \frac{q}{c} \epsilon_{ilm} v_l \epsilon_{mjk} \partial_j A_k$$

que es la coordenada  $i$ -ésima de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Utilizando las propiedades del símbolo de Levi-Civita se tiene

$$F_i = -q\partial_i \varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i + (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj}) v_l \partial_j A_k]$$

y, tras colapsar las deltas, y reordenar términos

$$F_i = -q\partial_i \varphi + \frac{q}{c} [-\partial_t A_i - v_j \partial_j A_i + v_k \partial_i A_k].$$

**Mucho para tener en cuenta:**  
**resumen previo de notación indicial, resumen de classical field theory. Aclarar que posición y velocidad son independientes.**

Como el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  no depende explícitamente de  $\mathbf{x}$  se puede introducir  $v_k$  a través de la derivada  $\partial_i$ . Además los dos primeros términos del corchete representan la derivada total de  $A_i$  de manera que tenemos

$$F_i = -q\partial_i\varphi + \frac{q}{c} \left[ -\frac{d}{dt}(A_i) + \partial_i(v_k A_k) \right],$$

o bien

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c}(v_k A_k) \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{c} A_i \right).$$

Se puede hacer aparecer explícitamente lo faltante dentro de la derivada total notando que se puede escribir de manera absolutamente general

$$\frac{q}{c} A_i = \frac{\partial}{\partial v_i} \left( -q\varphi + \frac{q}{c} v_k A_k \right)$$

dado que  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$  son funciones de la posición y el tiempo solamente. Luego,

$$F_i = -\partial_i \left[ q\varphi - \frac{q}{c}(v_k A_k) \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i} \left( q\varphi - \frac{q}{c} v_k A_k \right) \right]$$

y esto significa que el potencial completo es

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = q\varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).$$

En el ejemplo de la fuerza de Lorentz se desprecia el campo generado por la misma partícula que se mueve. Es decir, que el campo externo no es afectado por el movimiento de la partícula. Una formulación lagrangiana que lo tuviera en cuenta debería considerar un  $\mathcal{L}_p$  para la partícula.

## 2.16 Cambio de gauge en potenciales

Según se vio en la sección anterior, en el caso del electromagnetismo tenemos un potencial  $U$  que depende de la posición y la velocidad de una manera muy especial. Además el potencial escalar  $\varphi$  usual en la electrostática fue necesario definir un potencial vector  $\mathbf{A}$  que estaba vinculado con el campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de :  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Solamente se le pide al campo  $\mathbf{A}$  que su rotor sea  $\mathbf{B}$  y esto no lo determina por completo. En particular si se define

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

un nuevo potencial  $\mathbf{A}'$  que difiere del original por el añadido del gradiente de una función escalar, las ecuaciones de movimiento no se ven alteradas. En efecto, la divergencia del campo magnético  $\mathbf{B}$  es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\nabla \times \nabla f) = 0$$

donde el cero se logra porque cada uno de los dos miembros es cero por separado. Asimismo, como el rotor de un gradiente es nulo, el rotor de  $\mathbf{B}$  no se ve alterado;

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}') = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times (\nabla \times \nabla f) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Luego, hay un grado de libertad extra en la determinación del  $\mathbf{A}$  que es esta función escalar  $f$ , y que se suele expresar dando la divergencia de  $\mathbf{A}$ . En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f.$$

La divergencia de  $\mathbf{A}$  se puede elegir entonces arbitrariamente y esto es lo que se conoce como la *libertad de gauge*[?] o el cambio de *gauge* del potencial. Descansa en el hecho de que las ecuaciones de movimiento son, por supuesto, independientes del gauge elegido.

**Chequear esta mini subsección.**

## Capítulo 3

---

# Simetrías

### 3.1 Constantes de movimiento y simetrías

Si en las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0,$$

se daba el caso de que  $\mathcal{L}$  no dependía de  $q_j$  entonces  $\partial \mathcal{L} / \partial q_j = 0$  y

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

significa que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$$

es una constante ( $\dot{p}_j = 0$ ).

Por otra parte, si  $\delta q_i$  es traslación rígida en una dirección  $\hat{n}$  entonces

$$p_i = \mathbf{P} \cdot \hat{n} \quad \text{y} \quad Q_j = \mathbf{F} \cdot \hat{n}.$$

En cambio, si  $\delta q_i$  es una rotación rígida en torno a un eje  $\hat{n}$  se tiene

$$p_i = \mathbf{L} \cdot \hat{n} \quad \text{y} \quad Q_j = \mathbf{T} \cdot \hat{n}.$$

En estos dos casos

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

puesto que:

- Como  $T$  depende de las velocidades (y no de las coordenadas) no depende del origen y por lo tanto no varía ante una traslación rígida (que es un cambio de origen).
- Como  $T$  es un escalar no cambia ante una rotación.

Luego, si  $V \neq V(\dot{q})$  (el potencial  $V$  no depende explícitamente de las velocidades) entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} (p_j) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

es la fuerza total proyectada en la dirección  $\hat{n}$ .

Para examinar constantes de movimiento podemos ver primero las variables cílicas. Sin embargo, si elegimos otras coordenadas tal vez no aparezca la constante de movimiento como coordenada cílica (aunque por supuesto sigue existiendo dicha constante).

### 3.1.1 Simetrías en el lagrangiano

Sea un cambio de coordenadas  $q_i \rightarrow q'_i$ , si como resultado de éste se tenía

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i(q'_i, t), \dot{q}_i(\dot{q}'_i, t), t),$$

es decir, que al escribir el lagrangiano en función de las nuevas coordenadas obtengo el mismo, se está ante la presencia de una simetría asociada.

Las variables cílicas son un caso particular de teorema de Noether. Una transformación infinitesimal genérica de  $k$  grados de libertad es

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_1 + \varepsilon g_1(q_1, \dots, q_k, t) \\ q'_2 &= q_2 + \varepsilon g_2(q_1, \dots, q_k, t) \\ &\dots \\ q'_k &= q_k + \varepsilon g_k(q_1, \dots, q_k, t) \end{aligned}$$

Para una traslación infinitesimal rígida se tiene

$$x'_i = x_i + \delta x$$

$$y'_i = y_i + \delta y$$

$$z'_i = z_i + \delta z$$

Acá parecen estar separadas los movimientos rígidos del hecho de que  $V$  sea de las coordenadas solamente. En un caso tenemos  $\dot{p} = 0$  y en otro  $\dot{p} = -\partial V / \partial q$ . Creo que lo del potencial sería para las otras coordenadas no afectadas por la simetría?

o bien  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  y la energía cinética

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

es invariable puesto que depende de las velocidades (que no dependen del origen) y se da  $\dot{x} = \dot{x}'$  y lo mismo para las otras coordenadas.

Para una rotación en el plano  $xy$

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + \varepsilon y_i \\ y'_i &= y_i - \varepsilon x_i \\ z'_i &= z_i \end{aligned}$$

que matricialmente se pueden ver como

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}'_i \\ \dot{y}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix}$$

resulta

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$$

y ahora para  $T'$  expresamos las coordenadas primitivas en función de las nuevas (primadas).

$$T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i ([\dot{x}'_i - \varepsilon \dot{y}'_i]^2 + [\dot{y}'_i + \varepsilon \dot{x}'_i]^2)$$

y a primer orden

$$T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}'_i^2 - 2\varepsilon \dot{y}'_i \dot{x}'_i + 2\varepsilon \dot{y}'_i \dot{x}'_i + \dot{y}'_i^2) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}'_i^2 + \dot{y}'_i^2) = T.$$

Entonces  $T$  es invariante ante traslación rígida y rotación rígida. Faltaría completar este análisis con las simetrías del potencial  $V$  para ver las simetrías del lagrangiano. En los casos en que

$$V = V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad \text{Invariancia de traslación en cualquier dirección}$$

lo cual significa depender de la distancia relativa. Otro caso es:

$$V = V(x_i, y_i) \quad \text{Invariancia de traslación en } z$$

**Resolver un problema de double superscript aquí. T es invariante porque es básicamente un escalar.**

Noether dice que si el lagrangiano  $\mathcal{L}$  es invariante entonces hay una simetría de la transformación que no necesariamente es rotación rígida o traslación rígida.

$$T \text{ se conserva en } \begin{cases} \text{rotación rígida} \\ \text{traslaciones} \end{cases}$$

$$V \text{ tendrá } \begin{cases} 1. \text{ rotación rígida} \\ 2. \text{ traslación} \\ 3. \text{ rotación y traslación} \end{cases}$$

Luego, digamos que:

- $\mathcal{L}$  tiene un momento lineal si  $V$  tiene 1
- $\mathcal{L}$  tiene un momento angular si  $V$  tiene 2
- $\mathcal{L}$  tiene una combinación de momento lineal y angular si  $V$  tiene 3

Si se tiene constante de movimiento, no necesariamente el lagrangiano  $\mathcal{L}$  tiene esa simetría.

Una transformación general para  $k$  grados de libertad se escribe como

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_1 + \sum_{\ell=1}^S \varepsilon_\ell g_1^\ell(q_1, \dots, q_k, t) \\ q'_2 &= q_2 + \sum_{\ell=1}^S \varepsilon_\ell g_2^\ell(q_1, \dots, q_k, t) \\ &\dots \\ q'_k &= q_k + \sum_{\ell=1}^S \varepsilon_\ell g_k^\ell(q_1, \dots, q_k, t) \end{aligned}$$

donde el término en cada sumatoria corresponde al  $\delta q_k$ .

**La simetría de paridad**  
 $x \rightarrow -x$ , que es una reflexión tiene la particularidad de que es discreta, no se puede ir continuamente.

### 3.1.2 Rotación en 3D infinitesimal

## 3.2 El teorema de Noether

Si existe una transformación continua  $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$  que deje invariante el  $\mathcal{L}$  entonces hay una constante de movimiento asociada a dicha transformación.

La transformación se puede escribir

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i$$

y cumple

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q'_i, \dot{q}'_i, t) = \mathcal{L}(q_i[q'_i, t], \dot{q}_i[\dot{q}'_i, t], t)$$

y así si consideramos una variación a  $t$  fijo, también vale que

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

pero como el primer término del RHS es nulo por las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0,$$

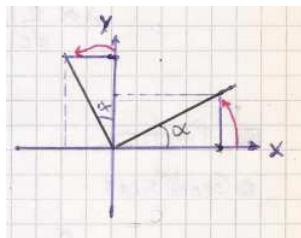
lo que está dentro del paréntesis es la cantidad conservada.

Existe una simetría (que deja invariante al lagrangiano) y resulta en una constante de movimiento. No obstante, no toda constante de movimiento proviene de una simetría.

#### EJEMPLO 2.1 Rotación en el plano

Una rotación en el plano  $xy$  bajo un ángulo pequeño  $\epsilon$  se puede escribir (ver Apéndice A) como

$$\begin{cases} x' = x + \epsilon y \\ y' = y - \epsilon x \end{cases}$$



**Figura 2.1**

Si consideramos el lagrangiano de una partícula libre en dicho plano  $\mathcal{L} = 1/2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ , la cantidad conservada será

$$m\dot{x}\delta x + m\dot{y}\delta y = 2\epsilon(-p_x y + p_y x) = cte.$$

que no es otra cosa que el momento angular  $L_z$  (que se conserva).

Por supuesto, para una rotación general (no restringida a un plano) son necesarios tres parámetros. La rotación plana requiere solamente un parámetro.

En el caso de una partícula rebotando en un billar hay simetría de rotación en torno a  $z$ , luego hay constante de movimiento. En el caso del movimiento elíptico donde 1 y 2 son los focos no hay simetría de rotación pero aún así hay constante de movimiento  $\ell_1 \ell_2$ .



Figura 2.2

### 3.2.1 Rotación infinitesimal

Recordemos que

$$\delta q_i = q'_i - q_i$$

y una traslación infinitesimal es

$$\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}.$$

La variable cíclica es un caso particular de teorema de Noether, pero hay constantes de movimiento que no provienen de ninguna simetría.

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\delta \alpha \hat{n} \times \mathbf{r}_i) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \delta \alpha \sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i \right) = \delta \alpha \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i \right) = 0$$

siendo  $\delta \alpha \equiv \epsilon$  un parámetro infinitesimal. Para  $k$  grados de libertad

$$q'_i = q_i + \underbrace{\epsilon_i g_i(q_1, \dots, q_n, t)}_{\delta q}$$

...

$$q'_k = \dots$$

En la carpeta estaba este tema.  
Aparentemente para una rotación general aparecía el momento angular conservado, si se manipulaban adecuadamente los índices.

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r} \quad \text{traslación rígida}$$

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta\alpha \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i \quad \text{rotación rígida}$$

o también

$$\delta\mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

$T$  es invariante siempre frente a (por ser un escalar)

$$T = T'$$

entonces habrá que examinarlo. Constatemos que

$$V = V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

es invariancia ante una traslación rígida, y

$$V = V(x_1, x_2)$$

es una invariancia de traslación en  $x_3$ .

$\mathcal{L}$  tendrá como constante un momento lineal si  $V$  es invariante frente a traslación.  $\mathcal{L}$  tendrá como constante un momento angular si  $V$  es invariante frente a rotación.  $\mathcal{L}$  tendrá como constante una combinación si  $V$  es invariante frente a una roto-traslación.

Otra construcción posible es

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q'_i, \dot{q}'_i, t) = 0$$

pidiendo que  $d\mathcal{L} = 0$  llego a

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \delta q' \right) \right\} = 0$$

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell} \right) \right\} = 0$$

y podemos usar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

pues  $g \neq g(t)$  y es todo a tiempo fijo. Se tiene

$$q' = q + \delta q$$

Las primas están mal. Hay que pensar una construcción adecuada. Queda odd.

$$q'_i = q_i + \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}$$

siendo esta la transformación general

$$\delta q'_i = \delta q_i + \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}$$

Extraemos también que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell} = C$$

Por hipótesis de Noether, se tiene  $\delta \mathcal{L} = 0$  y si  $\delta$  de la variación es pequeño (o sea que la variación es infinitesimal) vale que  $d\mathcal{L} = 0$ . Asimismo, se puede pensar también como que  $\mathcal{L}$  es invariante ante la transformación infinitesimal  $\delta q$

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = 0$$

y aplicando la regla de la derivada del producto en el segundo término, se tiene

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \sum_i^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

donde el primer término es nulo (por ecuaciones de Euler-Lagrange), y el segundo término

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

involucra la cantidad conservada

$$\sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = cte. \quad (2.1)$$

Si se usa la prescripción [de dónde salió?]

$$\delta q_i = \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

en (2.1) se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \sum_{\ell=1}^s \epsilon_{\ell} g_1^{\ell} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \sum_{\ell=1}^s \epsilon_{\ell} g_2^{\ell} + \dots \right) = 0$$

y si tomo  $\epsilon_{\text{epsilon}}_1 = \epsilon$  y todos los  $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots = 0$  lo cual se puede hacer puesto que son independientes,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \epsilon g_1^1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \epsilon g_2^1 + \dots \right) = 0$$

y como los primeros términos dentro de cada sumando en el paréntesis son los momentos canónicamente conjugados,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i g_i^1 \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i g_i^2 \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i g_i^\ell \right) = 0 \quad \ell = 1, 2, \dots, s$$

y tendrá una constante de movimiento por cada parámetro independiente.

**Acá no entiendo bien de qué la va esta construcción.**

### 3.2.2 Rotación en 3D infinitesimal

En este caso se escribe

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \delta \hat{n} \times \mathbf{x}_i$$

que es una rotación en torno a un versor genérico  $\hat{n}$  y el carácter de infinitesimal viene dado por  $\delta \ll 1$ . En términos de coordenadas esféricas

$$(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \times (x_i, y_i, z_i)$$

de modo que

$$x'_i = x_i + \delta (\sin \theta \sin \phi z_i - \cos \theta y_i)$$

$$x'_i = x_i + \delta (\cos \theta x_i - \sin \theta \cos \phi z_i)$$

$$x'_i = x_i + \delta (\sin \theta \cos \phi y_i - \sin \theta \sin \phi x_i)$$

que es una rotación controlada por tres parámetros  $(\theta, \phi, \delta)$ . Como por hipótesis la rotación es una transformación de simetría se tendrá

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0$$

y si usamos las expresiones dadas por las ecuaciones anteriores donde  $\delta$  es una constante, se tendrá

$$\delta \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i (p_{x_i} z_i - p_{z_i} x_i) \sin \theta \sin \phi + (-p_{x_i} y_i + p_{y_i} x_i) \cos \theta + (-p_{y_i} z_i + p_{z_i} y_i) \sin \theta \cos \phi \right) = 0$$

y como  $\theta, \phi, \delta$  son independientes tomo  $\theta = 0$  y  $\phi$  genérico para llegar a

$$\delta \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i (p_{y_i} x_i - p_{x_i} y_i) \right) = 0$$

que implica  $L_z$  constante. De forma similar, considerando  $\theta = \pi/2$  y  $\phi = 0$

$$\delta \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i (p_{z_i} y_i - p_{y_i} z_i) \right) = 0,$$

que conduce a  $L_x$  constante. Finalmente,  $\theta = \pi/2$  y  $\phi = \pi/2$  desemboca en  $L_y$  constante,

$$\delta \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i (p_{x_i} z_i - p_{z_i} x_i) \right) = 0.$$

Tener en cuenta que conservamos el  $L$  total, i.e. la  $\sum_i$ .

### EJEMPLO 2.2 Helicidad

Supongamos una transformación

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho \\ z' &= z + a\delta\varphi \\ \varphi' &= \varphi + \delta\varphi\end{aligned}$$

que es una rotación y traslación. Automáticamente  $T$  es invariante ante tal transformación y según Noether se conserva

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta\varphi + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} a\delta\varphi + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}_i} 0 &= cte. \\ \sum_i l_{z_i} + a \sum_i p_{z_i} &= \sum_i (l_{z_i} + ap_{z_i}) = \frac{cte.}{\delta\varphi}\end{aligned}$$

y la cantidad entre paréntesis es la helicidad.

El caso más general es cuando

$$\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}\dot{q} + \varepsilon \frac{df}{dt}$$

y entonces

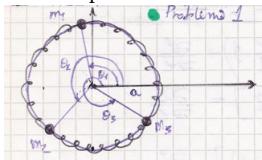
$$\sum p_i \delta q_i + f$$

Corregir esto!

esta forma toman las constantes de movimiento.

**EJEMPLO 2.3 Resortes enganchados**

Este es el problema 1.



$$T = \frac{1}{2}m_1a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2a^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3a^2\dot{\theta}_3^2$$

$$V = \frac{k}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{k}{2}(\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{k}{2}(\theta_3 - \theta_1)^2$$

Sería de esperar que en este caso se conserven algunas cosas y que sean visibles esas conservaciones observando simetrías.

Una manera de explicitar esto sería expresar  $V$  en función de nuevas coordenadas, así el lagrangiano no dependerá de alguna [?]

$$q_1 = \theta_1 - \theta_2 \quad q_2 = \theta_2 - \theta_3 \quad q_3 = \theta_3$$

y con estas definiciones

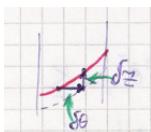
$$q_1 + q_2 = \theta_1 - \theta_3$$

y será  $V = V(q_1, q_2)$ . Entonces

$$p_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_3} = cte$$

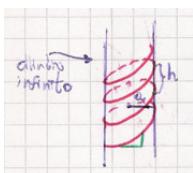
Esto era de esperar nomás mirar el sistema; tenía una simetría de rotación.

**Esta es la manera formal de generar estas conservaciones [?].**

**EJEMPLO 2.4 Rotación en cilindros [?]**

Si roto en  $\varphi$  el potencial no ve cambios. Entonces una variación en el lagrangiano toma la forma

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi = L\varphi \delta \varphi = 0$$



Si varío en  $z$  y en  $\varphi$  la transformación

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi = 0$$

será nula. Si elegimos las coordenadas usuales para este problema,

$$x = a \cos \theta \quad y = a \sin \theta \quad z = \frac{h\theta}{2\pi}$$

A partir de

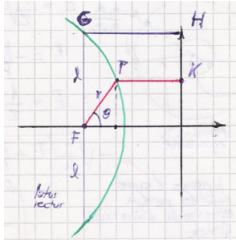
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \delta z + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) \delta \varphi,$$

se puede *amasar* la expresión para llegar a

$$\left( \dot{p}_z \frac{h}{2\pi} + L_\varphi \right) \delta \varphi$$

**Estoy buscando una simetría  
del potencial girando en  $2\pi$ .**

### EJEMPLO 2.5 Secciones cónicas



La sección cónica es el lugar geométrico que cumple

$$PF = ePK$$

donde  $0 \leq e \leq +\infty$  y se tiene

$$\begin{cases} e < 1 & \text{elipse} \\ e = 1 & \text{parábola} \\ e > 1 & \text{hipérbola} \end{cases}$$

$$PF = e(GH - PF \cos \theta) \quad PF(1 - e \cos \theta) = eGH$$

$$r(1 - e \cos \theta) = \ell$$

Si  $e < 1$  se da

$$\frac{x - e\ell/(e^2 - 1)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a^2 = \left( \frac{\ell}{e^2 - 1} \right)^2$$

Si por el contrario es  $e > 1$

$$\frac{x - e\ell/(e^2 - 1)}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b^2 = \left( \frac{\ell}{\sqrt{e^2 - 1}} \right)^2$$

Si el origen de coordenadas está en el foco.

## Capítulo 4

---

# Fuerzas centrales

## 4.1 Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que depende únicamente de la distancia entre dos puntos. Es decir que si se tienen dos puntos  $x, y$ , separados una distancia  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , una fuerza central  $\mathbf{F}$  verifica

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

de manera que la información sobre la dirección de la misma ( $\hat{\mathbf{r}}$ ) está establecida en la recta que une  $x$  con  $y$  mientras que su módulo es una función escalar  $F(r)$ .

Comentario de que fijo un punto, y es una función vectorial tomar vector y da vector, que resulta finalmente más simple porque se sabe de antemano la dirección de la salida –en la dirección de la recta que une los puntos–.

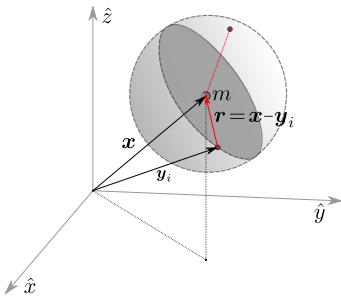


Figura 1.1

Esto implica, al ser una fuerza dependiente de una sola coordenada, que siempre es posible obtener un potencial a partir de ella, es decir que existe  $V(r)$

tal que

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Entonces, para una partícula libre el lagrangiano se puede escribir en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2)$$

El momento angular  $\mathbf{L}$  se conserva puesto que  $\tau = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$ . Como es  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} = cte$  entonces se sigue que  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que  $\theta = \pi/2$  (se sitúa la partícula en el plano  $xy$ ) y entonces se tienen dos grados de libertad,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Como  $\phi$  es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2\dot{\phi} \quad (1.1)$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular (la primera ecuación de movimiento). Esa información puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[ \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right] \quad (1.2)$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo<sup>1</sup>  $V_{\text{eff}}$ , y el lagrangiano adopta la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r).$$

Digamos que el potencial efectivo sería todos aquellos términos que no tienen la forma de la energía cinética (cuadrática en velocidades). Notemos que ahora el lagrangiano depende solamente de  $r$ ; el problema ha resulado para un único grado de libertad.

Dado el sistema elegido (movimiento plano en  $xy$ ) ahora el  $p_\phi$  es el  $L$  total; en cambio, de haber elegido otro plano el  $p_\phi$  sería el  $L_z$ .

**Hay que elaborar bastante aquí:** la fuerza central implica la simetría esférica porque tomado como origen de coordenadas uno de los dos puntos  $x$  o  $y$ , la fuerza por otro punto que se halle a la misma distancia  $r$  tendrá la misma magnitud. Además, el torque de la fuerza respecto a ese origen será nulo puesto que son paralelos  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ . Anoté en la carpeta: el lagrangiano es un potencial de superficies equipotenciales esféricas, entonces se conserva el momento angular.

<sup>1</sup>Debido a la conservación del momento angular la parte de la energía dependiente de  $\phi$ , o mejor dicho debida a la rotación en  $\phi$  se ha podido expresar en términos de  $r$ ; entonces pasa a formar parte del potencial.

La ecuación de Euler-Lagrange para el lagrangiano (1.2) resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Integrando esta ecuación se llega a la conservación de la energía pero podemos utilizar el hecho de saber que la misma se conserva y escribir su expresión explícita

$$E = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (1.3)$$

A partir de estas constantes  $L$ ,  $E$  tengo dos ecuaciones de primer orden (1.1) y (1.3). Se han podido *ahorrar* dos integraciones: la integral de  $\ddot{r}$  para obtener  $\dot{r}$  y la integral de  $\ddot{\phi}$  para hallar  $\dot{\phi}$ .

Desde la ecuación (1.3) se puede integrar directamente la trayectoria  $r = r(t)$  según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)},$$

o bien

$$\int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{r(t_i)}^{r(t_f)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r))}},$$

integral que en principio siempre tiene solución. A partir de la ecuación (1.1) se puede obtener la trayectoria en el espacio físico  $r = r(\phi)$ , o equivalentemente  $\phi = \phi(r)$ .

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dr} \dot{r} = \frac{L}{mr^2}$$

e incorporando de la (1.3) la expresión de  $\dot{r}$  se puede llegar a

$$\int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi = \int_{r(\phi_i)}^{r(\phi_f)} \frac{L}{\sqrt{2mr^4(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r))}} dr$$

y la resolución total del problema dependerá de la forma  $V(r)$ .

Consideremos, para fijar ideas, un potencial general del tipo

$$V(r) = \alpha r^{-n}$$

que es un potencial cuyo comportamiento dependerá del signo de la constante que acompaña. Los casos posibles serán

$$\alpha = \begin{cases} \alpha > 0 & \text{potencial repulsivo} \\ \alpha = 0 & \text{partícula libre} \\ \alpha < 0 & \text{potencial atractivo} \end{cases}$$

**Embellecer un poco las expresiones por el aspecto odd de las raíces y todo eso.**

En un gráfico de potencial y energía en función del radio se pueden analizar muchos aspectos de la física bajo ese potencial (como se hizo en el ejemplo XX del capítulo XX)

Para el caso de  $\alpha > 0$  se tiene una situación como la que se ilustra en la

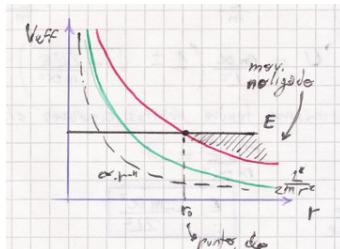
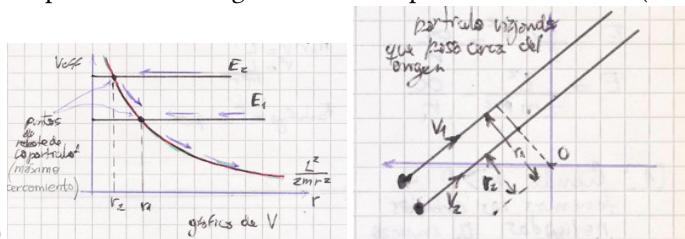


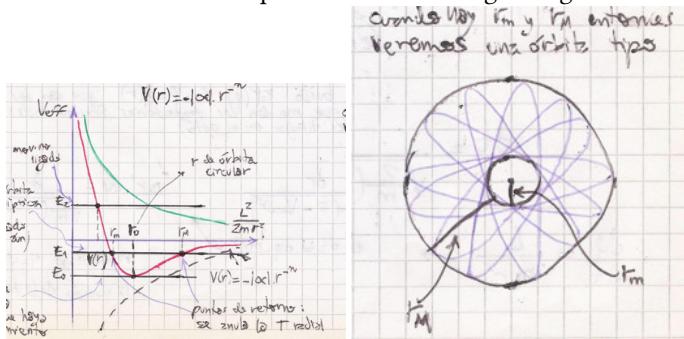
figura bajo estas líneas

En el caso de partícula libre,  $\alpha = 0$ , a cierta velocidad se tendrá el siguiente gráfico de potencial. El otro gráfico ilustra la posible situación real (en el espacio



físico)

Finalmente el caso de un potencial atractivo,  $\alpha < 0$  se tienen energías para las cuales el movimiento es ligado. Cuando existen radios mínimo y máximo se tendrá una órbita como la que se ilustra en el segundo gráfico



En los puntos de retorno se anula la energía cinética radial  $T$ . El momento angular  $L$  es el responsable de que haya satélites orbitando a los planetas; si  $L = 0$  la partícula pasaría por el origen.

En el gráfico bajo estas líneas ilustramos muchas de las características de la física del problema de fuerzas centrales.

Este gráfico hay que tirarlo de inmediato.

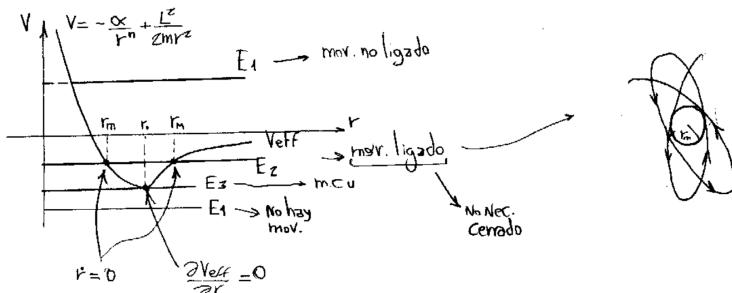


Figura 1.2

Calculemos ahora los puntos de retorno. Tomando el cambio de variables  $U = 1/r$  en la ecuación de la energía es

$$\frac{L^2}{2m}U^2 - \alpha U - E = 0,$$

una cuadrática para  $U$  con soluciones

$$U = \frac{m\alpha}{L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 2L^2E/(m\alpha^2)} \right) \quad (1.4)$$

y entonces

$$U_+ = \frac{1}{r_m} \quad U_- = \frac{1}{r_M}$$

Si requiere que  $U > 0$  en cada caso, necesito  $\sqrt{1 + 2L^2E/(m\alpha^2)} < 1$  de manera que  $E < 0$ .

Asimismo tendrá órbitas circulares si

$$\frac{2L^2E}{m\alpha^2} = -1$$

lo que significa que

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}.$$

Puedo calcular el radio de órbita circular haciendo que la fuerza radial se compense exactamente con la fuerza centrífuga

$$mr v = L$$

y entonces

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Cuando  $E > 0$  se ve en (1.4) que se obtienen las órbitas no ligadas;  $U_-$  empieza a ser negativa y hay que descartarla porque significa un  $r_M$  negativo.

Una vez en posesión de  $r(t), \phi(t)$  se pueden calcular  $r(\phi)$  o  $\phi(r)$  que son las funciones que me darán las trayectorias físicas reales (*el dibujo en el cielo*). Utilizando  $d\phi/dt = L/(mr^2)$  en  $dr/dt$  se llega a

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2/m(E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{mr^2}{L} d\phi$$

y ahora se tiene  $\phi = \phi(r)$  que es la ecuación de la trayectoria, cuya integral es

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_{r_0}^r \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{2/m(E - V_{\text{eff}}(r))}} \quad (1.5)$$

La ecuación de movimiento para  $r$  [¿?]

$$m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

y la relación

$$\frac{mr^2}{L} d\phi = dt$$

permite transformar una derivada temporal en una derivada con respecto al ángulo,

$$\frac{d}{dt} (\ ) = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} (\ )$$

de modo que la ecuación de arriba se convierte en

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr},$$

es decir en

$$-\frac{L^2}{mr^4} \frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}.$$

Proponiendo el cambio de variables  $U = 1/r$  se tiene

$$dU = -\frac{1}{r^2} dr,$$

y entonces

$$\frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}.$$

La ecuación en términos de  $U$  luce como

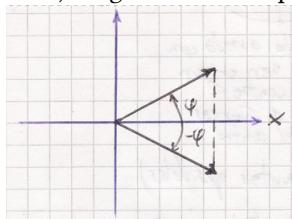
$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + U = -\frac{m}{L^2U^2} F(1/U), \quad (1.6)$$

donde  $F(1/U) = dV/dr(U)$ .

Para el caso de un potencial newtoniano (problema de Kepler) tendremos

$$-\frac{m}{L^2U^2} F(1/U) = \frac{\alpha m}{L^2}.$$

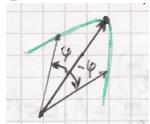
La integral de la trayectoria (1.5) será *fea o no* dependiendo de la forma del potencial  $V$ . En la ecuación (1.6) tiene una propiedad de simetría puesto que es invariante ante el cambio  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Entonces si utilizamos condiciones de contorno que tengan esta simetría sabremos que la órbita por encima de  $x$  (ver figuretta) es igual a la órbita por debajo.



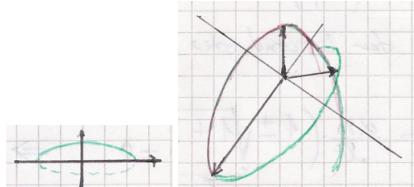
Las condiciones iniciales

$$\left. \frac{dU}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = U'_0 = 0 \quad U|_{\varphi=0} = U_0$$

donde en la condición de la derivada vemos que con la nulidad vale para  $\varphi$  y para  $-\varphi$ . Luego,  $U_0$  corresponderá a un máximo o mínimo necesariamente porque hacia un lado y hacia otro tengo el mismo comportamiento.



Entonces máximo y mínimo son puntos apsidales, si elijo el eje  $x$  ahí tengo simetría de reflexión de la órbita.



**Esto ilustra un procedimiento elemental y usual en resolución de ecuaciones diferenciales que es el de cambio de variables. Decir algo al respecto.**

Entonces la integral (1.5) se puede escribir

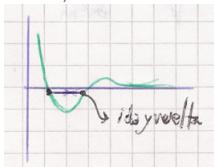
$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{2mr^2} \frac{dr}{\sqrt{2/m(E - V_{\text{eff}}(r))}} \quad (1.7)$$

donde  $\Delta\varphi[?]$  es el ángulo que avanza en una oscilación (esto es el ángulo de una oscilación completa).

Si esto es un múltiplo racional de  $\pi$  entonces se cierra la órbita; es decir que se tiene la siguiente condición de órbita cerrada

$$\frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \frac{m}{n}$$

donde  $m, n$  son enteros.



Como la integral (1.7) depende de  $L, E$  en general tendremos para el problema genérico órbitas abiertas.

**Recordar que problema ligado no implica órbita cerrada.**

Hay dos problemas que dan órbitas cerradas siempre: son los potenciales

$$V = -\frac{k}{r} \quad (\text{Problema de Kepler}) \qquad V = \frac{1}{2}kr^2 \quad (\text{Oscilador armónico 3D isótropo})$$



El problema de Kepler da órbita cerrada elíptica siempre si  $E < 0$  con origen en un foco (centro de fuerzas en un foco). Tiene dos puntos apsidales y da una oscilación completa para cerrar una vuelta.

El oscilador armónico 3D da órbita cerrada con elipse con origen en el centro (centro de fuerzas en el centro). Tiene cuatro puntos apsidales y necesita dos oscilaciones para cerrar una vuelta.

## 4.2 Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$\begin{aligned}
 d\phi = \frac{L}{mr^2} dt &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{L}{mr^2} \\
 \frac{d}{t}(\dot{r}) &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{\phi}(\dot{r}) \\
 m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\
 \frac{L}{r^2} \frac{d}{\phi} \left( \frac{dr}{dt} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr} \\
 \frac{L}{r^2} \frac{d}{\phi} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr}
 \end{aligned}$$

y acá probamos el conveniente cambio de variables

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{r} \quad dU = -\frac{1}{r^2} dr \quad \frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -U^2 \frac{dr}{d\phi} \\
 U^2 L \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{L}{m} \frac{dU}{d\phi} \right\} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
 -\frac{U^2 L^2}{m} \frac{d^2 U}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
 -\frac{U^2 L^2}{m} \left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] &= F(1/U)
 \end{aligned}$$

o bien

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2}.$$

En el caso del potencial de Kepler será

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{Km}{L^2},$$

es decir que el miembro derecho es una constante. Sale fácil entonces.

#### 4.2.1 elipses y velocidad areolar

[Reubicar este material](#)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}$$

y la excentricidad es

$$\begin{cases} e = 0 & \text{círculo} \\ 0 < e < 1 & \text{elipse} \\ e = 1 & \text{parábola} \\ e > 0 & \text{hipérbola} \end{cases}$$

En términos de la energía y para un potencial  $V = -Cr^{-1}$  la excentricidad se puede reescribir como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}}$$

El lagrangiano para el radio equivalente [?] era

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\mathbf{R}_{\text{cm}} + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{C}{r}$$

pero si me sitúo en el centro de masas se reduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{C}{r}$$

y la ecuación de movimiento para  $\varphi$  al ser variable cíclica resulta una conservación,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \ell = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

### 4.3 Velocidad areolar

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

Aproximo por un triángulo. De la figura puede verse que

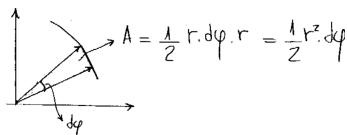


Figura 3.3

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi$$

y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{\ell}{\mu} = cte.$$

La velocidad areolar es constante. Luego, integrando en un período  $\tau$  se tiene que el área  $A$  de la elipse es

$$A = \frac{\ell \tau}{2\mu}$$

y como geométricamente ésta es

$$A = \pi ab = \frac{\pi C \ell}{\sqrt{8\mu|E|^3}}$$

y además

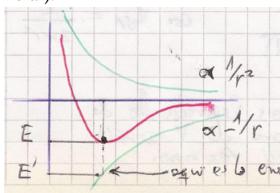
$$\tau = \frac{\pi C \sqrt{\mu}}{\sqrt{8|E|^3}}$$

entonces el período verifica

$$\tau^2 \sim \frac{1}{|E|^3}.$$

### EJEMPLO 3.1 Problema 1 (con órbita circular)

Si  $r = cte.$  entonces  $\bar{T} = T$  y  $\bar{V} = V$  en cuyo caso es  $E = T + V = V/2$ . En el caso de frenado [?] la partícula tiene  $E = V/2$  antes de frenar y luego del frenado  $E = V$  (solamente potencial).



Ahora supongo un problema equivalente (problema elíptico de cierto semieje). El nuevo sistema son dos masas en una órbita elíptica que se va achatando.

$$\tau = \frac{2\pi\mu C}{\sqrt{8\mu|E|^3}} \quad \tau' = \frac{2\pi\mu C}{\sqrt{16\mu|E|^3}}$$

y entonces

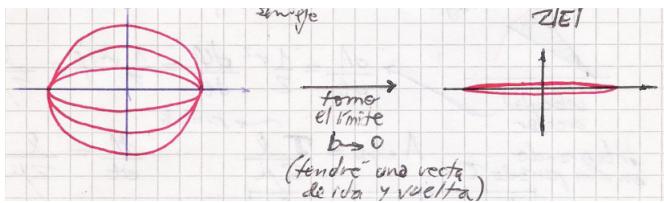
$$\frac{\tau}{\tau'} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{-1}$$

Conozco esta relación

$$E'^{3/2} = 2^{2/3} E$$

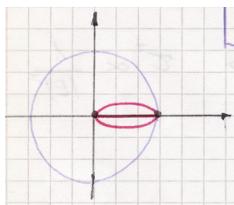
$$\tau' = \frac{\tau}{2\sqrt{2}}.$$

El período depende solo del semieje  $a = C/(2|E|)$



Ahí tendré medio tiempo calculado porque voy y vengo

$$\frac{\tau'}{2} = \frac{\tau}{4\sqrt{2}} \equiv t_{\text{colisión}}$$



## 4.4 Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler

Tenemos

$$\int d\phi = \int \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}})}} dr \quad \frac{d^2U}{d\phi^2} + U = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2} \quad U = 1/r$$

que es simétrica respecto a  $\phi$  y  $-\phi$ . Esto determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\phi = 0) = U_0 \quad \left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0$$

lo cual significa que  $U_0$  es un extremo (punto apsidal).

Calculemos ahora el ángulo que recorre una oscilación completa,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}})}} dr$$

Si  $\Delta\phi = 2q$  siendo  $q = (m/n)\pi$  son  $m, n \in \mathbb{Z}$  entonces

$$\Delta\phi = 2 \frac{m}{n} \pi$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$$

y esto significaría que la órbita se cierra.

La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + \left(U - \frac{km}{L^2}\right) = 0.$$

Si consideramos una nueva variable

$$\beta = U - \frac{km}{L^2}$$

la anterior pasa a

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2} + \beta = 0$$

y es fácil ver que la solución es

$$\beta = A \cos(\phi - \phi_0),$$

o bien

$$U(\phi) = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0), \quad (4.1)$$

donde  $A, \phi_0$  son constantes. Ahora bien, la expresión (4.1) es la solución general, necesitamos proveer las condiciones iniciales para fijar  $A, \phi_0$ . Propongamos  $\phi_0 = 0$  punto apsidal. Luego podemos utilizar  $r_m, r_M$  lo cual determina  $U_m, U_M$  respectivamente, cuyos valores son

$$U_m^M = \frac{km}{L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}} \right)$$

y esto nos permite fijar  $A$ . Incorporando esto en (4.1) y recordando que  $U(\phi) = 1/r$  se tiene

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}} \cos(\phi) \right),$$

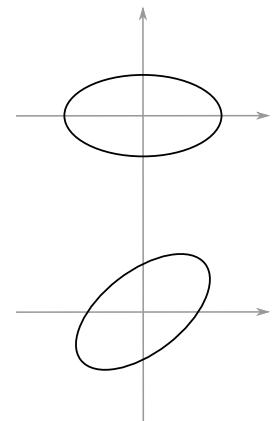
que no es otra cosa que la ecuación de una elipse en coordenadas polares con origen en un foco. Veámoslo.

Las elipses verifican

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \sigma^2 = a^2 - b^2$$

donde  $\sigma$  es la semi-distancia focal. Definiendo  $\sigma/a \equiv \varepsilon$  (la excentricidad) se puede expresar

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$



Eligiendo el punto  $\phi_0 = 0$  obtenemos una elipse como la de arriba.

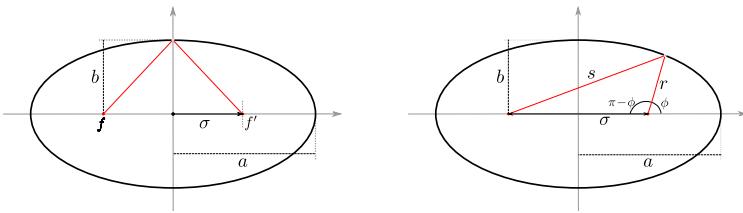


Figura 4.4

Por otro lado, usando el teorema del coseno para el triángulo definido en la Figura 4.4 es

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 4\sigma r \cos(\pi - \phi)$$

y como  $s + r$  es la distancia que se mantiene constante e igual, entre otras, a  $2a$  se sigue que

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r \cos(\phi)$$

cuya simplificación conduce a

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\phi)}{a(1 - \varepsilon)} = \frac{a}{b^2} (1 + \varepsilon \cos(\phi))$$

la cual es la ecuación de una elipse.

Entonces en resumen, las leyes de Kepler son

Falta el sistema de coordenadas en el foco  $f'$ . Revisar quién es EL.

1. Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esto es común de los potenciales del tipo

$$V \propto 1/r$$

Acá hay que hacer un laburo muy importante.

2. El radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta \phi \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{L}{2m} (\text{cte.})$$

Esto es una característica de todo potencial central.

3. El cubo del semieje mayor de la órbita de un planeta es proporcional al cuadrado del período empleado en recorrerla. La ecuación anterior, que da la velocidad areolar, se puede integrar como

$$\int dA = \frac{L}{2m} \int dt$$

que conduce a

$$\pi ab = \frac{L}{2m}\tau \quad \rightarrow \quad a = \frac{L\tau}{2\pi bm},$$

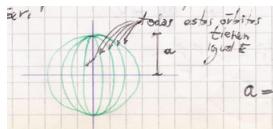
y luego, como  $km/L^2 = a/b^2$  llegamos a

$$a^3 = \frac{k}{m} \frac{1}{4\pi^2} \tau^2 = \frac{GM}{4\pi^2} \tau^2$$

y esto es independiente de la masa del planeta.

Como  $a$  depende de  $L$  se tiene que dependiendo de la energía  $E$  tendrá órbitas como las ilustradas debajo todas las cuales tienen la misma energía

$$a = \frac{1}{2}(r_M + r_m) = -\frac{k}{2E}$$



Para una elipse con el sistema coordenado en el centro se tiene

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2(\phi))$$



Trabajamos más con la elipse,

$$r_M + r_m = 2a$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad E - \frac{L^2}{2m}U^2 - kU = 0$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{\frac{2mkE}{L^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2mkE}{L^2}\right)^2 + \frac{8mE}{L^2}}}{2}$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{mEk}{L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2}{mEk^2}} \right)$$

y acá constatamos que representa una elipse; es decir que las órbitas son elípticas.

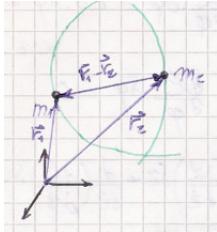
**Esto estaba en la carpeta pero no lo entiendo bien del todo.  
Tal vez ilustración de la elipse con el sistema coordenado en el origen.**

**EJEMPLO 4.1 Problema 1 de central forces**

Conviene pasarlo a un problema equivalente para una partícula *masa reducida* en términos del centro de masa.

$$E = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$\tau = \frac{2\pi R}{R\dot{\theta}}$$



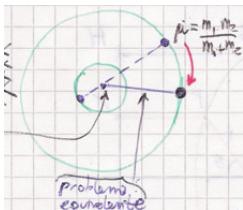
$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$

Al detenerlas,

$$E = -\frac{K}{r}$$

y al rearrancar

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{K}{r}$$



Para la integración le pongo el signo negativo puesto que corresponde a la situación física correcta

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{K}{r} \right)}$$

Integración a ambos miembros lleva a

$$\int_0^\tau dt = - \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E + \frac{K}{r})}}$$

o bien a

$$\tau' = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \sqrt{\frac{R}{K}} \int_R^0 \sqrt{\frac{r}{R-r}} dr$$

Con el cambio de variables  $U = \sqrt{R-r}$  que lleva al diferencial

$$dU = \frac{-dr}{2\sqrt{R-r}}$$

la integral resulta en

$$2\left(\frac{\mu R}{2K}\right) \int_0^{\sqrt{R}} \sqrt{R-U^2} dU = 2\left(\frac{\mu R}{2K}\right) \left(\frac{U\sqrt{R-U^2}}{2} + \frac{R}{2} \arcsin\left(\frac{U}{\sqrt{R}}\right)\right)$$

que se ha buscado en tablas. Luego,

$$\tau' = \sqrt{\frac{\mu R}{2K}} \frac{R\pi}{2}$$

y las ecuaciones de Newton,

$$\frac{K}{R^2} = \mu R \dot{\theta}^2$$

de la cual se puede despejar  $\dot{\theta}$  para obtener

$$\tau = 2\pi R \sqrt{\frac{\mu R}{K}}$$

de manera que

$$\frac{\tau}{\tau'} = 4\sqrt{2}.$$

#### EJEMPLO 4.2 Problema 4 de central forces

Consideramos un potencial de la forma

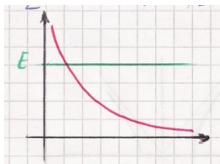
$$V(r) = \frac{K}{r^2}$$

que es un potencial repulsivo puesto que

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2K}{r^3}$$

implica que *aleja a la partícula*. Como es central, conserva  $L = mr^2\dot{\theta}$  se puede escribir la energía como

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \left(\frac{\ell}{2mr^2} + \frac{K}{r^2}\right)$$



Luego,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2L}{2m^2r^2} - \frac{2K}{mr^2}}$$

y entonces

$$mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2L}{2m^2r^2} - \frac{2K}{mr^2}} \frac{d\theta}{dr} = L$$

de manera que

$$\int_0^\theta d\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2(E - L/(2mr^2) - K/r^2)^{1/2}}$$

Con el cambio de variables  $U = 1/r$

$$\theta = -\frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{dU}{[E - U^2(L/(2m) + K)]^{1/2}}$$

Integrada da

$$\theta = \frac{L}{m\sqrt{2Km + \frac{L^2}{m^2}}} \left( \cos \left[ \frac{\sqrt{2Km + L^2/(m^2)}}{r_0\sqrt{2E/m}} \right] - \cos \left[ \frac{\sqrt{2Km + L^2/(m^2)}}{r\sqrt{2E/m}} \right] \right).$$

Tomo  $r_0$  punto de retorno

$$E = \left( \frac{L^2}{2mr_0^2} + \frac{K}{r_0^2} \right)$$

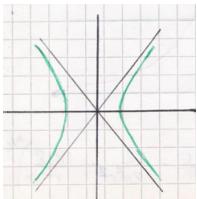
y entonces

$$r_0 = \sqrt{\frac{L}{2mE} + \frac{K}{E}}$$

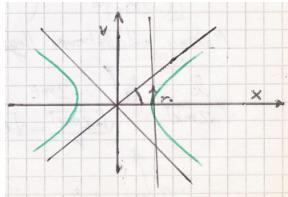
$$\theta = \frac{L}{m\sqrt{2Km + \frac{L^2}{m^2}}} \cos \left( \frac{r_0}{r} \right)$$

y se puede despejar

$$r = \frac{r_0}{\cos(\theta m/L\sqrt{2mK + L^2/m^2})}$$



Continuamos con el problema [esto sacarlo, je!]



$$r = \frac{r_0}{\cos(\varphi\sqrt{2m^3K/L^2 + 1})}$$

Vemos el comportamiento asintótico, si  $K = 0$  entonces

$$r = \frac{r_0}{\cos \varphi}.$$

Si el potencial es atractivo, por ejemplo  $V(r) = -\frac{K}{r^2}$  entonces se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{K'}{r^2},$$

**Ojo, chequear esta expresión porque en la carpeta está distinta!**

donde

$$K' = \left( \frac{L^2}{2m} - \frac{K}{r^2} \right).$$

Entonces la velocidad será

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{K'}{r^2} \right)}$$

A partir de la ecuación para el momento angular,  $mr^2\dot{\varphi} = L$  podemos llegar a la integral para  $\varphi(r)$  [esto creo que ya se hizo en la teoría, en dicho caso citar, sino hacer en detalle]

$$\int d\varphi = \int \frac{L}{m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{K'}{r^2} \right)}}$$

Con el reemplazo usual  $r = 1/U$  se llega a

$$\varphi = -L \int \frac{dU}{(2mE - K'mU^2)^{1/2}}.$$

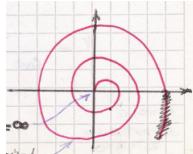
Si  $L^2 > 2mK$  es

$$\frac{L^2 - 2mK}{2m} > 0 \quad K' > 0$$

y tengo un caso similar al anterior (en la página precedente[sic carpeta?]). En cambio si  $L^2 < 2mK$  se tiene  $K' < 0$ . Usando la ayuda para la integral [refiere al enunciado en la guia?] que se hace entre  $r_0$  y algún  $r$  final resulta

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{-2mK'}} \log \left( \frac{-2mE}{\sqrt{-2mK'/r} + \sqrt{2mE - K'/r^3}} \right)$$

y esto dice que la partícula cae al origen describiendo una espiral. En el origen es  $\dot{\varphi} \rightarrow \infty$



Dicho esto, se puede calcular el tiempo que tarda en caer al origen a partir de la ecuación para  $\dot{r}$

$$-\int_{r_0}^0 \frac{1}{\sqrt{2/m(E - K'/r^2)}} dt = \int_0^{t_f} dt$$

Como la energía se conserva puede utilizarse su valor inicial,  $E = K'/r_0^2$  de modo que el LHS de la ecuación anterior es

$$t_f = -\sqrt{\frac{m}{-2K'}} \int_{r_0}^0 \frac{r_0 r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = r_0^2 \sqrt{\frac{m}{-2K'}}.$$

## 4.5 Teorema del virial

Se aplica a sistemas de muchas partículas. Defino

$$G \equiv \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

de modo que como  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$  se tiene

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{p}_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$$

y se puede ver que el último miembro del RHS es  $\mathbf{p}_i \dot{\mathbf{x}}_i = m_i v_i^2 = 2T$  donde  $T$  es la energía cinética del sistema. Luego

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{x}_i + 2T$$

Defino el valor medio temporal de una cantidad  $A$  según

$$\bar{A} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(t) dt$$

[Pasar esto a Apéndice!!].

$$\overline{G} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{d\tau} dt = \overline{2T} + \overline{\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i}$$

Pero el integrando en el LHS es un diferencial total, entonces

$$\frac{1}{\tau} (G(\tau) - G(0)) = \overline{2T} + \overline{\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i}$$

Si ahora estoy trabajando con un sistema que realiza un movimiento periódico, entonces en  $\tau$  definido como ese período tiene

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i} = 0$$

lo cual lleva a el teorema del virial

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i}$$

También es cero si el mov. [?]

La temperatura media es

$$\overline{T} = \frac{3}{2} N k T'$$

para partículas en un recipiente. La fuerza es por los golpeteos (la temperatura en realidad es microscópicamente una manifestación de golpeteo molecular). Si  $d\mathbf{F}_i = -p\hat{n}dA$  de modo que

$$\frac{1}{2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i = -\frac{p}{2} \int_S \hat{n} \cdot \mathbf{x} dA = -\frac{p}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{x} dV = -\frac{3}{2} pV$$

y entonces, igualando con la expresión anterior de la  $\bar{T}$  se tiene

$$NkT = pV,$$

que es la ecuación de estado del gas ideal.

Si ahora supongo  $\mathbf{F} = -\nabla V$  homogénea de grado  $k$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i^N \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i} = \frac{1}{2} \overline{kV(\mathbf{x})} = \frac{1}{2} k\bar{V}$$

Con un potencial central vale

$$V = -\frac{C}{r} = -Cr^{-1},$$

o sea que es un potencial homogéneo de grado  $k = -1$ . Entonces, para un movimiento periódico bajo una fuerza central, será

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}$$

de manera que  $\bar{E} = \bar{T} + \bar{V} = 1/2\bar{V}$ . Para un oscilador armónico, como  $k = -2$  se tiene  $\bar{E} = 2\bar{T} = 2\bar{V}$

**Acá hay que aclarar que hace la homogeneidad para transformar el gradiente en  $kV$ .**

## 4.6 Vector de Runge-Lenz

Para el problema de Kepler también se conserva una cantidad llamada *vector de Runge-Lenz* definido como

$$\mathbf{R} = \mathbf{v} \times \mathbf{l} - \alpha \frac{\mathbf{x}}{x}.$$

Luego, si le tomamos la derivada temporal, resulta

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{l} \right) + \left( \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right) - \alpha \frac{\mathbf{v}}{x} + \frac{\alpha}{x^2} \frac{dx}{dt} \mathbf{x}$$

donde el último se puede poner en términos de la velocidad si utilizamos la regla de la cadena así

$$\frac{d|\mathbf{x}|}{dt} = \frac{d|\mathbf{x}|}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla(|\mathbf{x}|) \cdot \mathbf{v} \quad i = 1, 2, 3$$

Luego, cada componente  $i$ -ésimo del gradiente de la norma del vector de posición tiene (en coordenadas cartesianas) la misma forma; tomando como ejemplo el  $i = 1$

$$\frac{d|\mathbf{x}|}{dx_1} = \frac{d\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{dx_1} = \frac{x_1}{|\mathbf{x}|},$$

de manera que

$$\nabla(|\mathbf{x}|) = \frac{\mathbf{x}}{x} = \hat{\mathbf{x}},$$

el gradiente de la norma del vector es su dirección. Entonces, volviendo a la ecuación original resulta

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{l} \right) + \left( \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right) - \alpha \frac{\mathbf{v}}{x} + \alpha \mathbf{x} \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{x^3} \right)$$

Dado que  $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$  el segundo término en la anterior expresión desaparece y nos queda

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times [\mathbf{x} \times m\mathbf{v}] \right) - \alpha \frac{\mathbf{v}}{x} + \alpha \mathbf{x} \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{x^3} \right)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times (\mathbf{x} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{V} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)$$

pero como  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$  resulta lo que resulta.

Aparentemente esto tiene que dar nulo pero no lo estaría viendo.

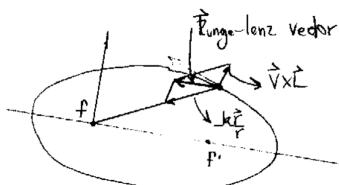


Figura 6.5

El vector de Runge-Lenz siempre apunta en la misma dirección dada su constancia (ver figura). Mejorar la figura!

Escribo  $T = E - V$

$$r_{max}mv^2 = 2Er_{max} + 2\alpha$$

pero

$$\begin{aligned} r_{max} &= \frac{2El^2\alpha}{\alpha^2m(1-\varepsilon)} = \frac{-1}{\alpha} \frac{b^2\alpha}{\alpha^2(1-\varepsilon)} \\ r_{max} &= -(1+\varepsilon)\alpha \end{aligned}$$

$$b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

#### EJEMPLO 6.1 Vector de Runge-Lenz en órbitas elípticas

Este título es provisorio. Está en la carpeta en 42R.

Sabemos que el vector de Runge-Lenz tiene la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{x}}{x}$$

y cumple

$$\frac{dA}{dt} = 0$$

Veamos qué expresión tiene el módulo  $A \equiv |\mathbf{A}|$ . Tomando el producto escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = Ar \cos \theta = (\mathbf{V} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x} - \alpha \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{x}$$

y reescribiendo (ciclicidad del producto vectorial)

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{L}}{m} = \frac{L^2}{m}$$

y entonces

$$\alpha r \left( 1 + \frac{A}{\alpha} \cos \theta \right) = \frac{L^2}{m}$$

pero como  $(1 + \varepsilon \cos \theta) = p/r$  es la excentricidad se tiene  $A = \varepsilon \alpha$ .

#### EJEMPLO 6.2 Problema . Nuevo potencial

Para el potencial

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r), \quad |\delta U| \ll \frac{\alpha}{r}$$

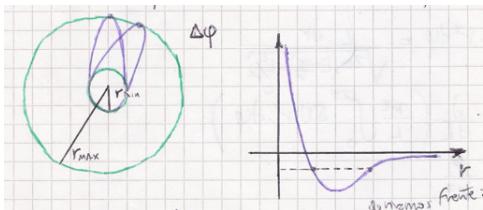
la integral resultante es

$$\varphi = \int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

pero si derivamos con respecto a un parámetro (por ejemplo  $L$ ) se pueda cambiar la misma a

$$\varphi = -\frac{d}{dL} \int \frac{\sqrt{2m(E-U) - L^2}}{r^2} dr$$

y esta segunda se comporta mejor que la primera.



Una órbita no cerrada, a la larga, pasas por todos los puntos dentro del área barrida.  
Ahora se trabajará el integrando anterior

$$\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - 2m\delta U - \frac{L^2}{r^2}} = \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2m\delta U}{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Se puede considerar una expansión de Taylor en la segunda raíz de manera que

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{d}{dL} \left[ \int \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}} dr - m \int \frac{\delta U dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} \right] \\ \varphi &= 2\pi + m \frac{d}{dL} \int \int \frac{\delta U dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} \end{aligned}$$

donde el primer resultado,  $2\pi$ , proviene de la solución del problema de Kepler y el segundo es un término  $\Delta\varphi$  que dependrá de la forma de la perturbación. Considerando perturbaciones del tipo

$$\delta U = \frac{\beta}{r^2} \quad \delta U = \frac{\gamma}{r^3}$$

Antes de proceder es conveniente hacer un pasaje de la integral. Recordando que se tenía

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

y que la conservación del momento angular  $L$  implicaba

$$L = mr^2\dot{\theta}t,$$

si pasamos  $\theta$  a  $\varphi$  entonces  $dt = (mr^2/L)d\varphi$  y consecuentemente

$$mr^2d\varphi = \frac{Ldr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

de forma que

$$\Delta\varphi = \frac{d}{dL} \left( \frac{m^2}{L} \int_0^{2\pi} \delta U r^2 d\varphi \right).$$

Regresando ahora a las formas específicas planteadas, vemos que en el primer caso es

$$\Delta\varphi = \beta m^2 2\pi \frac{d}{dL} \frac{1}{L} = -\frac{2\pi m^2 \beta}{L^2},$$

mientras que para el segundo la integral resulta en

$$\gamma \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r(\varphi)},$$

que se puede hacer explícitamente recordando que  $p = L^2/(m\alpha)$  y

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$$

y entonces

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{L^2},$$

todo lo cual lleva a que

$$\Delta\varphi = \frac{d}{dL} \left( \frac{m^3}{L^3} \gamma \alpha \right) = -\frac{3m^2 \gamma \alpha}{L^4}.$$

## 4.7 Precesión [acomodar]

Este movimiento, ver figura, corresponde a una oscilación completa de  $r_m$  a  $r_M$  y vuelta. La precesión de un punto de la órbita se aplica a órbitas en las cuales puede pensarse que la órbita se mueve como un todo en su figura. La magnitud  $\delta\varphi/\tau_r$  es la velocidad angular de precesión.

Ilustración 45R inferior

## 4.8 Órbitas de potenciales centrales

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$V(r) = \frac{kr^2}{2}$$

Estos dos casos dan órbitas cerradas. Pero hay otros potenciales interesantes.

El potencial de Yukawa

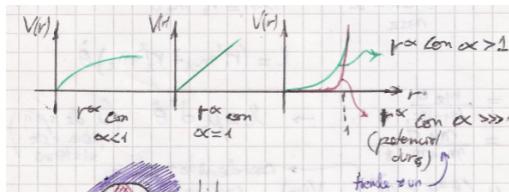
$$V(r) = -\frac{e^{-\lambda r}}{r^\alpha}$$

que es aproximadamente como un potencial coulombiano apantallado ( $\alpha = 1, \lambda = 0$ ). Otro es el oscilador no armónico

$$V(r) = r^\alpha$$

Algunos casos se muestran bajo estas líneas

Da órbita que no se cierra en un billar elíptico.



**Figura 8.6** Algunas curvas de potenciales anarmónicos  $r^\alpha$ .



**Figura 8.7**

## 4.9 Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente

Para dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  sometidas a una fuerza central

$$\mathbf{F}_{21} = F(r)\hat{\mathbf{r}}_{21} \quad F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

siendo  $x \equiv |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  la distancia relativa.

La energía del sistema será de la forma  $E = T_1 + T_2 + V(r)$  pero se puede expresar según  $E = T_{cm} + T_{rel} + V(r)$ ; es decir separando la energía cinética en el aporte del centro de masa más un aporte que depende de la distancia relativa entre los cuerpos. De modo idéntico para el momento angular podemos pasar de  $L_{total} = L_{cm} + L_{spin}$  donde el momento angular de spin es el referido al movimiento en torno al centro de masas.

Consideramos el siguiente sistema de coordenadas,

$$r \equiv |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad \dot{r} \equiv |\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1|$$

Revisar y consolidar toda la notación aquí, que está mezclada.

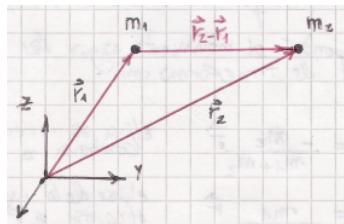


Figura 9.8 .

donde el sistema centro de masas es

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad MV_{cm} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$0 = m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2$$

que provocan

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}'_1$$

dando unas  $r$  relativas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}'_1. \quad (9.1)$$

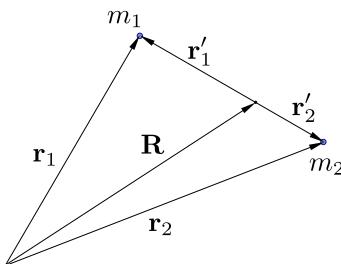


Figura 9.9 Sistema coordinado para la reducción del problema de dos cuerpos al de uno equivalente.

Luego, como la energía se conserva (el  $V_{cm} = cte.$ ) podemos escribir

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(r)$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r) \\
 E &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r) \\
 E &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\dot{\mathbf{r}}'^2_2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}'^2_2 + V(r) \\
 E &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2m_1}{M}\dot{\mathbf{x}}^2 + V(r).
 \end{aligned}$$

Pero como  $E$  y la  $\mathbf{V}$  se conservan, se tiene

$$e \equiv E - \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{x}}^2 + V(r)$$

donde  $e$  es una cantidad conservada que podemos llamar la energía reducida[?].

Este último  $\mathbf{x}$  es un vector distancia relativa. Es un problema equivalente para la partícula centro de masas.

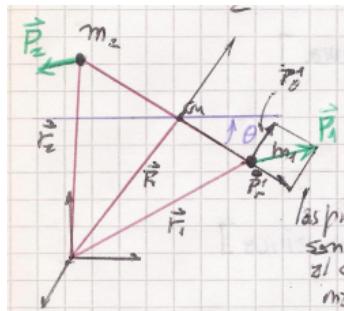


Figura 9.10 .

Podemos considerar ahora los momentos angulares de las partículas respecto de este sistema centro de masas. Así

$$\mathbf{l}'_1 = \mathbf{x}'_1 \times \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{l}'_2 = \mathbf{x}'_2 \times \mathbf{p}'_2$$

y sus módulos verifican

$$|\mathbf{l}'_1| = x_1'^2 m_1 \dot{\theta} \quad |\mathbf{l}'_2| = x_2'^2 m_2 \dot{\theta}$$

de manera que

$$\ell = (x_1'^2 m_1 + x_2'^2 m_2) \dot{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (9.2)$$

es el momento angular de spín para este sistema. Nótese que a partir de (9.1) se puede expresar las  $x'_i$  ( $i = 1, 2$ ) en términos de  $r$ .

Luego, en coordenadas polares en el centro de masa resulta

$$e = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r),$$

o bien, usando (9.2),

$$e = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

que no es otra cosa que el problema de fuerza central para un cuerpo de masa  $\mu$ .

Diremos que la *distancia relativa* describe una elipse. Las trayectoria reales en el espacio físico son dos elipses confocales. Por supuesto dejan de cumplirse las leyes de Kepler en este caso.

Si como solución proponemos

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

tendré  $r = r(\phi)$  una elipse, que es lo que describe el  $r$  relativo. Se descompondrá el movimiento según las ecuaciones de transformación

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad \text{Elipse de dirección contraria a } \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad \text{Elipse de dirección igual a } \mathbf{r}$$

Tendremos dos elipses confocales como muestra la figura bajo estas líneas

En este caso ya dejan de cumplirse las leyes de Kepler

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} \quad a^3 \sim \tau^2$$

para la órbita relativa.

$$\frac{\pi ab}{\tau} = \frac{\ell}{2\mu}$$

$$b = \frac{\ell}{\sqrt{\alpha\mu}}a^{1/2} \quad \frac{a}{b} = \frac{\mu\alpha}{\ell^2}$$

$$\frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\alpha\mu\tau}} = \frac{1}{2\mu}$$

y entonces ahora se ve que no es independiente de las masas y no se puede simplificar  $\sqrt{\mu\alpha}$  con  $\mu$  como ocurría en un movimiento elíptico tradicional (bajo potencial gravitatorio). Entonces no es válida la ley de Kepler.

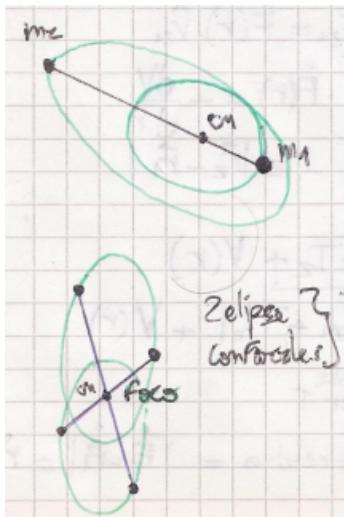
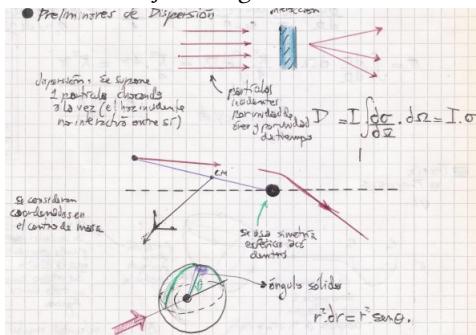


Figura 9.11 .

## 4.10 Dispersión

### 4.10.1 preliminares–usar y destruir-

Se supone una partícula chocando a la vez (el haz incidente no interactúa entre sí). Se conoce las partículas incidentes por área y por tiempo  $I$  y las dispersadas serán  $D = I \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = I\sigma$ . Se consideran coordenadas en el centro de masa. Se trabaja en ángulos sólidos.



El problema 1 en página 45 parece estar hecho en la teoría, de manera que no transcribe ahora.

Es un tema muy importante porque permite investigar qué hay en el interior de la materia por medio de *pegarle* con algo que se conoce perfectamente. En estas situaciones el blanco es desconocido y el proyectil conocido.

Pero proyectil y blanco pueden actuar de acuerdo a un potencial. Esta interacción queda especificada por la *sección eficaz de dispersión elástica*.

Veamos primeramente a lo que se llama un *centro dispersor* (blanco de masa tendiendo a infinito). Al lanzar un haz de partículas (proyectiles) en primera instancia están libres y al acercarse recién se notan los efectos.

Consideraremos la dispersión de un haz de partículas de cierta energía cinética por un centro dispersor, ver ilustración. Todas las partículas tienen la misma energía  $1/2mV_{cm}^2$

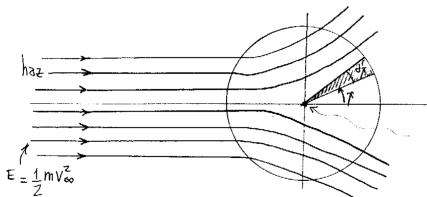


Figura 10.12

La sección eficaz diferencial es  $d\sigma$  que es el número de partículas dispersadas entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  por unidad de tiempo. Pero esto depende del ancho del haz y de la cantidad de partículas del haz. Para independizarlo se divide por la intensidad del haz (# de partículas por área) y se construye así  $d\sigma'$

$$d\sigma' \equiv \frac{d\sigma}{dn} dAdt$$

y así  $d\sigma'$  tiene unidades de área. Obviaremos en lo que sigue la “” en la notación. Entonces, ahora, la sección eficaz diferencial, bien definida, es

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

siendo  $dN$  el número de partículas dispersadas entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  por unidad de tiempo y  $n$  el número de partículas emitidas por tiempo y por área.

Si el centro dispersor tiene simetría esférica el cálculo es sencillo, puesto que se conserva el momento angular  $L$ . En realidad, ya con la simetría radial cilíndrica en torno a la dirección del haz basta para resolver analíticamente. Estas suposiciones son muy fuertes y restrictivas pero a fin de cuentas este es un caso de gabinete para formar algunas ideas.

Consideramos  $d$  centro dispersor con simetría esférica (cilíndrica basta).

*mbox* Figura 46 abajo.

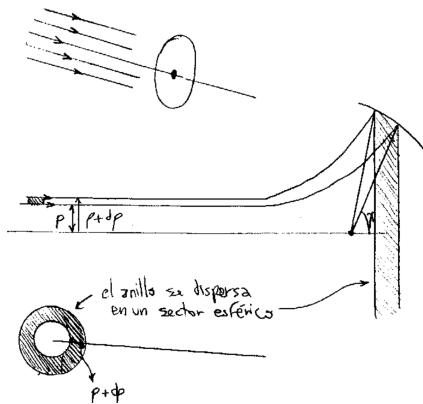


Figura 10.13

Usamos como suposiciones que todo lo que emerge entre  $\rho + d\rho - \rho$  es dispersado entre  $\chi + d\chi - \chi$ , y que se conservan tanto  $E$  como  $L$ .

El anillo se dispersa en un sector esférico. Entonces para el anillo entre  $\rho + d\rho - \rho$  el área de la corona será

$$A = \pi((\rho + d\rho)^2 - \rho^2),$$

que a primer orden (suponiendo  $d\rho$  diferencial) será

$$A \approx 2\pi\rho d\rho.$$

La variable  $\rho$  es el llamado *parámetro de impacto*. Entonces

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho d\rho I}{I} = 2\pi\rho d\rho$$

donde  $I$  el número de partículas por unidad de tiempo y área en el haz. Si obtuviese  $\rho = \rho(\chi)$  entonces inalmente

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

donde el módulo es porque la cantidad correspondiente será negativa. La función  $\rho(\chi)$  nos dará información sobre el potencial entre las partículas y el centro. La función  $\chi(\rho)$  se llama función deflexión.

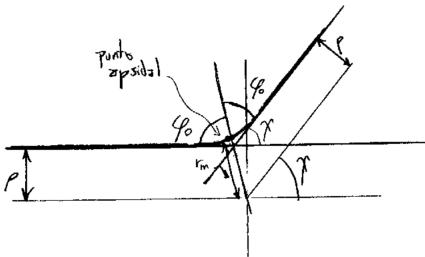
Como se conservan la energía y el momento angular

$$E = \frac{1}{2}mV_\infty^2 \quad L = m\rho V_\infty^2$$

aunque por supuesto al variar  $\rho$  varío el momento angular  $L$  de las partículas. Entonces tanto una como otra magnitud determinan cómo se dispersan las partículas.

La conservación de  $L$  implica la constancia de  $\rho$  como valor asintótico para la trayectoria. El punto apsidal es un punto tal que existe simetría de la órbita respecto al mismo.

*mbox figura 46R izquierda*



**Figura 10.14**

Se puede calcular el ángulo  $\varphi_0$  de acuerdo a

$$\chi = \pi - 2\varphi_0,$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}})}} dr$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0(\rho)$$

e invertimos desde la última ecuación. Considerando  $E = 1/2mv_\infty^2$  y  $L = m\rho v_\infty$  se tiene

$$V_{\text{eff}} = \frac{L}{2mr^2} + V(r)$$

aunque en general se desconoce  $V(r)$  o el tamaño efectivo de su interacción. En esos casos se puede ajustar el cálculo con lo que se mide experimentalmente para tener un potencial parecido a la interacción real.

#### 4.10.2 Esfera maciza

Veamos el caso de una esfera maciza. Lo primero es encarar el cálculo de  $\rho = \rho(\chi)$  o su inversa. En general los cuerpos duros equivalen a un potencial

del tipo

$$V = \begin{cases} \infty & \text{cuerpo} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad (10.1)$$

Si el potencial  $V$  en la esfera no fuese infinito eso significa que hay partículas que podrían ingresar.

Figura 47 potenciales

La geometría del problema es tal que

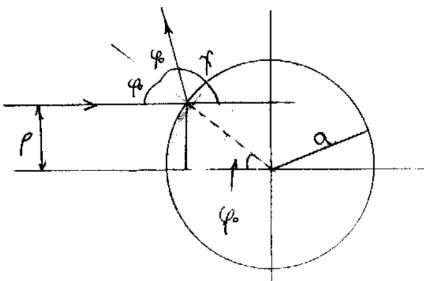


Figura 10.15

$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

$$\sin(\varphi_0) = \frac{\rho}{a} \quad d\rho = -a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)$$

y entonces

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) d\chi$$

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\pi - \chi) d\chi = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi$$

y como hay que integrar  $\chi$  de 0 a  $\pi$

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi = \pi a^2$$

$$\sigma = \pi a^2$$

En el caso de los cuerpos duros (potencial constante del tipo del dado en (10.1)) la sección eficaz total  $\sigma$  es la sombra de los mismos.

### 4.10.3 Ángulo sólido

El ángulo sólido total para una esfera es  $\Omega = 4\pi$  y es igual a  $A/r^2$  siendo  $A$  el área de la misma. El diferencial de ángulo sólido se construye a partir de la ilustración

Figura 47 inferior dentro de inserto

y se ve que es

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi.$$

Luego, para la dispersión por una esfera,

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\Omega,$$

la sección eficaz diferencial es constante y la sección eficaz total (integrada)  $\sigma = \pi a^2$  da información sobre el número de partículas que se desvían. Podemos pensar que las partículas se desvían si caen dentro del área de la *sombra* del blanco.

Figura 47 ultima, esfera con rayitos

**Sobre el ángulo sólido**

$$\Omega = \text{Área}/r^2$$

#### EJEMPLO 10.1 Pozo esférico de profundidad $V_0$

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi \sin(\chi) d\chi \\ \Omega &= 4\pi \end{aligned}$$

Figura 47R segunda, para el ejemplo.

La geometría del problema implica que

$$\chi = 2(\alpha - \beta)$$

y la conservación de la energía,

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - V_0,$$

implica que

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}} \equiv n$$

y entonces  $v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$  lo cual conduce a

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}$$

y  $\sin \alpha = \rho/a$ . La conservación del momento angular  $\mathbf{L}$  determina que el trayecto rojo en la figura sea el que ocurre.

Supongamos que no hay conservación del momento angular, como en la situación ilustrada aquí abajo,

Figura 47R final final

Se tendrá entonces

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}}$$

aunque hay un ángulo (el de reflexión interna total) que hará que no salgan partículas puesto que son atrapadas por el cuerpo.

Existe un  $\rho$  de rebote (de reflexión interna) y entonces  $\chi = \chi(\rho)$  será discontinua a saltos porque para un cierto  $\rho$  sale y para un  $\rho + d\rho$  ya no.

Figura 48 con toda la explicación

Si el momento angular no se conserva no es posible calcular  $\chi = \chi(\rho)$ .

**Hay unos comentarios jugosos respecto de esta figura que habría que explotar.**

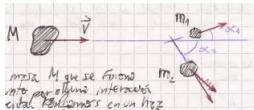
## 4.11 Dispersión por dos cuerpos

El problema de la dispersión de dos cuerpos se puede tratar en modo similar al de un cuerpo si se convierte el mismo en un problema equivalente para un cuerpo de masa  $\mu$ .

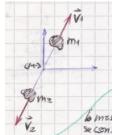
Así la situación de dos cuerpos interactuando se convierte en la de un cuerpo por un potencial. El asunto es que aquí varían los ángulos de dispersión porque estamos considerando un sistema en el centro de masas.

Sea una masa  $M$  que se fisiona en un punto por alguna interacción desconocida. Pensamos un haz de estas partículas  $M$  que se fisionan del mismo modo.

**Esto requerirá alguna ilustración visual.**



Desde el centro de masas se vería una situación como la mostrada en la ilustración



La ilustración con coordenadas sería algo como:

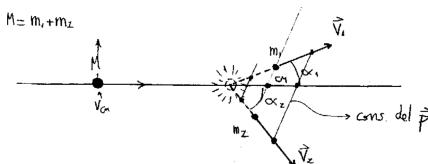


Figura 11.16

Desde el centro de masa se conserva el momento, y entonces

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

definimos una velocidad relativa

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right).$$

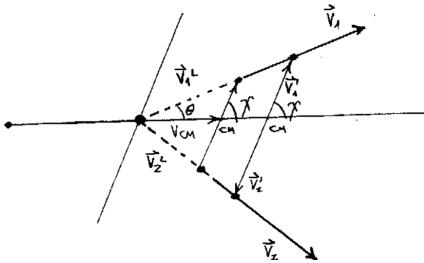


Figura 11.17

Con respecto a la energía,

$$\frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 + e_{int} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 + e_{int1} + e_{int2} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = e_{int} - e_{int1} - e_{int2} = \Delta e$$

y pasando todo en términos de la velocidad relativa

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v = \Delta e$$

entonces

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta e}{\mu}}.$$

Como la velocidad relativa  $v$  es una constante se sigue que la separación de los cuerpos es a velocidad constante. Por otra parte, la energía interna  $e$  es la que provoca la fisión. Se puede pensar que existe un resorte que *revienta* espontáneamente y separa ambas partículas.

Conocemos el módulo de la velocidad pero no su dirección. El problema es evidentemente plano. Consideraremos que todo se mide desde el centro de masas y el problema es no relativista. Desde un sistema laboratorio

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{V}'_1 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{V}_1^L - \mathbf{V}_{cm}) = \mathbf{V}'_1$$

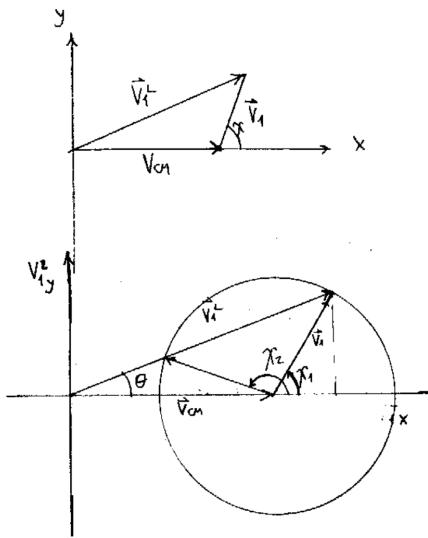


Figura 11.18

$$\begin{aligned} V_1^L^2 - V_{cm}^2 - 2V_1^L V_{cm} \cos(\chi) &= V_1^2 \\ V_{1x}^L + V_{1y}^L - V_{cm} - 2V_{1x}^L V_{cm} \cos(\chi) &= V_1^2 \\ (V_{1x}^L - V_{cm})^2 + V_{1y}^L^2 &= V_1^2 \end{aligned}$$

que es una circunferencia en el plano. De la ilustración puede verse que

$$\tan(\theta) = \frac{V_1 \sin(\chi)}{V_{cm} + V_1 \cos(\chi)}$$

Luego, se puede despejar de la anterior ecuación el valor de  $\chi$ . Para ello se elevan ambos miembros al cuadrado, se expande como

$$\tan^2 \theta \left( \frac{V_{cm}}{V_1} \right)^2 + \tan^2 \theta \cos^2 \chi + 2 \tan \theta \frac{V_{cm}}{V_1} \cos \chi = 1 - \cos^2 \chi$$

y luego del álgebra resulta

$$\cos \chi = -\sin^2 \theta \pm \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} \sqrt{1 + \tan^2 \theta - \tan^2 \theta \left( \frac{V_{cm}}{V_1} \right)^2}.$$

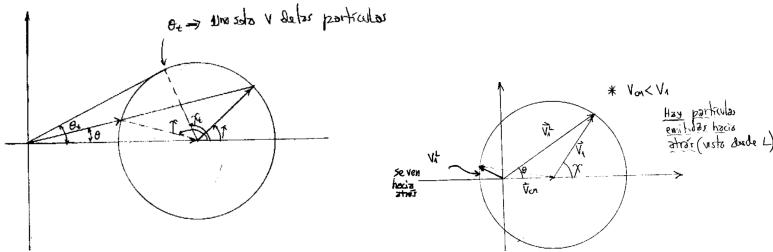
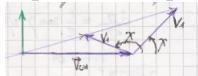


Figura 11.19

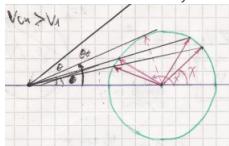
Esto tiene dos raíces  $\chi_{1,2}$  si  $V_{cm} > V_1$ . A un mismo  $\theta$  tengo dos  $\chi$ , uno correspondiente a partículas rápidas y otro para lentas.



Hay una  $v_1$  para la cual se anula el término dentro de la raíz, que es

$$1 + \tan^2 \theta \left( 1 - \left( \frac{V_{cm}}{V_1} \right)^2 \right)$$

y cuando eso sucede se tiene  $V_1 = V_{cm} \sin \theta$ . Si  $V_{cm} > V_1$  no hay partículas emitidas hacia atrás,



a medida que aumenta  $\theta$  las partículas lentas y rápidas tendrán velocidades parecidas. Cuando vale  $\theta_t$  no tengo más que una sola velocidad. Para  $\theta > \theta_t$  no hay emisión de partículas.

Si  $V_{cm} > V_1$  hay una sola  $V$  de las partículas.

Si  $V_{cm} < V_1$  hay partículas emitidas hacia atrás vistas desde L.

Si pensamos en una distribución isotrópica de partículas, desde el centro de masa será proporcional al ángulo sólido

$$\text{Distribución } \sim d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi,$$

y entonces el cociente entre la fracción de ángulo de la distribución y el ángulo sólido total,

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \chi d\chi.$$

Podemos evaluar la distribución de energía de las partículas. Desde el centro de masa,

$$e = \frac{1}{2}m_1V_1^2$$

y entonces

$$V_L^2 = V_1^2 + V_{cm}^2 - 2V_1V_{cm} \cos(\pi - \chi)$$

a iguales  $V_1, V_{cm}$  se tienen variables  $V_L, \chi$ , entonces

$$dV_L^2 = -2V_1V_{cm} \sin(\chi)d\chi$$

$$\frac{dV_L^2}{2V_1V_{cm}} = \sin(\chi)d\chi$$

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi)d\chi$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin(\chi)d\chi$$

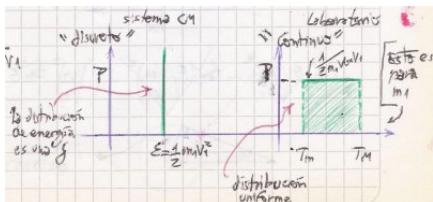
$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{d(V_L^2)}{4V_1V_{cm}} = \frac{1}{2} \frac{d(1/2m_1V_L^2)}{m_1V_1V_{cm}}$$

Como la anterior se puede escribir,

$$\frac{dT}{2m_1V_{cm}v_1}$$

se ve que representa la fracción de partículas entre  $T$  y  $T + dT$  vistas desde el laboratorio.

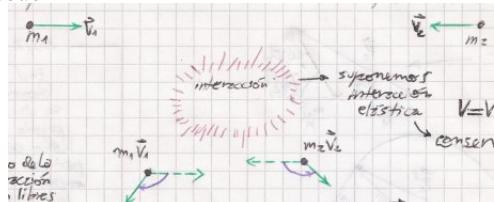
Las diferencias entre las distribuciones son patentes en este gráfico:



**Tenía el comentario: todas las partículas de la fisión tienen igual energía.**

## 4.12 Scattering

Dos partículas están alejadas inicialmente de modo tal que puede considerarse que no interactúan. Entonces el esquema pictórico siguiente ilustra lo que sucede:



Para la interacción tenemos dos suposiciones básicas:

- Interacción elástica.
- Conservación de energía y de momento.

Luego de la interacción las partículas ya son libres otra vez.

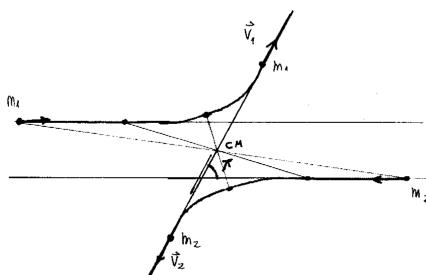
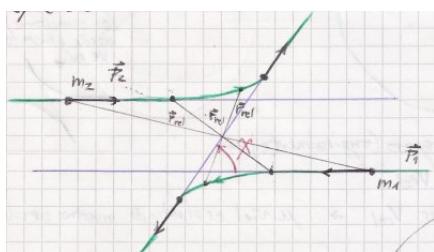


Figura 12.20

Hay que definir con cuál dibujo me quedaré.



Desde el centro de masas la cosa es sencilla; se tiene momento total nulo y los momentos de cada partícula son opuestos. Entonces se tienen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad x \equiv x_2 - x_1 \quad v \equiv v_2 - v_1$$

donde los últimos son las posiciones y velocidades relativas. El problema se puede pasar a uno equivalente en términos de las variables relativas. La conservación de la energía es

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + V(r)$$

y las velocidades verifican

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0 \quad m_1\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2.$$

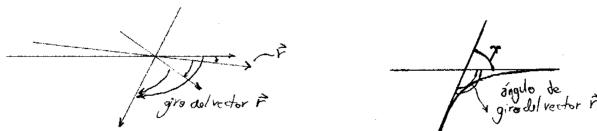
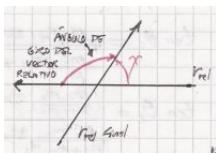


Figura 12.21



En términos de las velocidades relativas

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{cm} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}$$

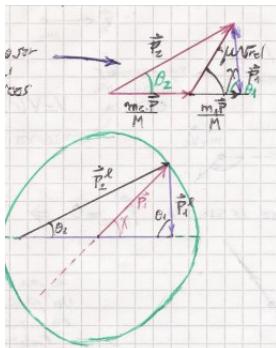
Con estas expresiones se puede escribir las relaciones entre los momentos, las cuales resultan en

$$\mathbf{p}_2^\ell = \frac{m_2}{M}\mathbf{p} + \mu\mathbf{v} \quad \mathbf{p}_1^\ell = \frac{m_1}{M}\mathbf{p} - \mu\mathbf{v}$$

y esto se puede pasar a relaciones geométricas, ver figura debajo,

En el material para final no tenía puesto la v del cm, como si la misma fuera nula. En la carpeta sí está.

Los ángulos se relacionan con la conservación de P y de E.

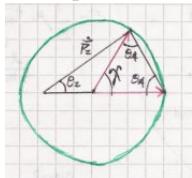


En el laboratorio se utiliza pegarle al blanco con partículas aceleradas con el mismo inicialmente en reposo. Así se simplifican las ecuaciones pero desde el centro de masa se ve así (dibujete usual –de la picture–).

Supongamos que  $m_1$  está en reposo (originalmente)

$$\mathbf{p} = m_2 \mathbf{v}$$

de modo que  $v_2$  inicial es  $v$ , entonces  $\mu v$  es el radio de nuestro círculo,

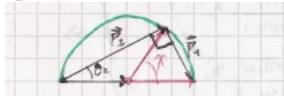


$$2\theta_1 + \chi = \pi$$

de lo cual  $\theta_1 = (\pi - \chi)/2$  y entonces

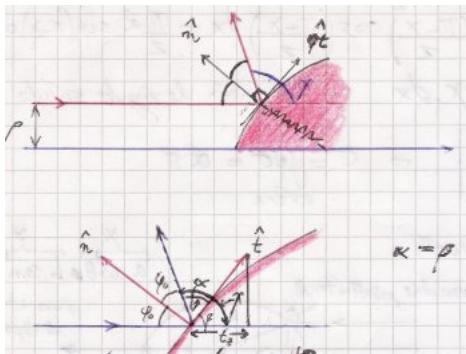
$$\tan \theta_2 = \frac{m u \sin \chi}{m_2^2 + \mu \cos \chi} = \frac{\sin \chi}{m_2/m_1 + \cos \chi}.$$

Si ambas masas son iguales,  $m_1 = m_2$  se tendrá que el ángulo es de  $90^\circ$ , siempre y cuando  $\chi \neq 0$ .



#### EJEMPLO 12.1 Dispersión por potenciales infinitos

Los potenciales duros son infinito sobre la superficie y nulos en cualquier otra parte.



Del cuidadoso análisis de la figura surge que como  $\alpha = \beta$

$$\alpha + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \beta + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

y entonces  $\chi = 2\beta$ , luego

$$\frac{d\rho}{dz} = \tan \beta = \tan \frac{\chi}{2}.$$

La sección eficaz diferencial será

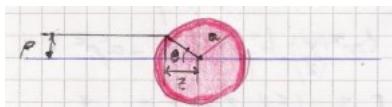
$$d\sigma = 2\pi\varphi \left| \frac{d\varphi}{d\chi} \right| d\chi = 2\pi d\rho^2 d\chi = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega$$

(Revisar las últimas igualdades, de dónde salen?)

También,

$$\tan \frac{\chi}{2} = \frac{d\rho/d\theta}{dz/d\theta}.$$

### EJEMPLO 12.2 Esfera



En el caso de la esfera, como la relación es

$$\rho^2 + z^2 = a^2,$$

de manera que

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

pero como  $z = a \cos \theta$  esto conduce a

$$\tan \frac{\chi}{2} = -\cot \theta.$$

Intercambiando ángulos con

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

se logra

$$\tan \frac{\chi}{2} = \tan \delta,$$

y simplemente es

$$\chi = \pi - 2\theta.$$

Como  $\rho = a \sin \theta$ , resulta

$$d\sigma = 2\pi\rho \frac{d}{d\chi} [a \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)] d\chi,$$

o bien

$$d\sigma = 2\pi a \rho \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) d\chi$$

que por fórmula del ángulo doble (APP!)

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi$$

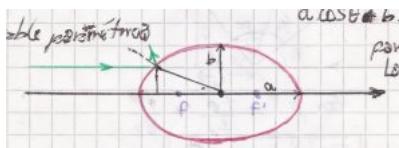
que se puede poner en términos del ángulo sólido como

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\Omega,$$

que se puede integrar para dar

$$\sigma = \int_{esfera} d\sigma = a^2 \pi.$$

### EJEMPLO 12.3 Elipsoide de revolución



En la expresión diferencial  $d\rho/dz$  tomamos una variable paramétrica,

$$\tan \frac{\chi}{2} = \frac{d\rho/d\theta}{dz/d\theta}$$

y entonces usando la parametrización de la elipse

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta,$$

$$\tan \frac{\chi}{2} = -\frac{a}{b} \cot g \theta$$

o bien (necesito que aparezca un seno)

$$\tan \frac{\chi}{2} = -\frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}}{\rho}.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado en la anterior y haciendo el álgebra, se puede despejar  $\rho$

$$\rho = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2(\chi/2)}}.$$

y

$$\frac{d\rho}{d\chi} = \frac{-a^2 b^2}{2(a^2 + b^2 \tan^2(\chi/2))^{3/2}} \frac{\tan(\chi/2)}{\cos^2(\chi/2)}$$

y como

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \pi d\rho^2 d\chi,$$

donde en la última igualdad se ha derivada implícitamente el cuadrado de  $\rho$  (el trick usual). Finalmente,

$$d\sigma = \frac{\pi a^4 b^2}{(a^2 + b^2 \tan^2(\chi/2))^2} \frac{\tan(\chi/2)}{\cos^2(\chi/2)} d\chi,$$

la cual haciendo el álgebra y usando  $2\pi \sin \chi d\chi = d\Omega$  (chequear el ángulo sólido!) permite arribar a

$$d\sigma = \frac{a^4 b^2 d\Omega}{4(a^2 \cos^2(\chi/2) + b^2 \sin^2(\chi/2))^2}$$

resultado que recupera el valor para la esfera en el caso particular  $a = b$ .

#### EJEMPLO 12.4 Parábola

La fórmula de la parábola en coordenadas  $\rho, z$  es

$$\rho^2 = \frac{\alpha}{E} z,$$

donde  $\alpha, E$  son constantes. La derivada de  $\rho$  con respecto a  $z$  es

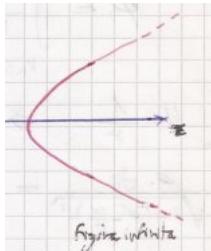
$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{E} \frac{1}{\rho},$$

y como también es

$$\frac{d\rho}{dz} = \tan\left(\frac{\chi}{2}\right),$$

se sigue que

$$\rho = \frac{\alpha}{2E} \cotg\left(\frac{\chi}{2}\right).$$



Entonces, resulta

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \frac{\sin(\chi/2)}{\sin^4(\chi/2)} d\chi$$

Pasando a coordenadas esféricas esta expresión, se tiene

$$d\sigma = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\chi/2)},$$

que es la fórmula de Rutherford.

#### EJEMPLO 12.5 Dispersión por potencial atractivo

Consideremos el potencial atractivo

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0$$

que conlleva, como se ha visto oportunamente,

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \quad L = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\varphi_0 = \int d\varphi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m(E + \alpha/r^2) - L^2/r^2}}$$

Para resolver esta integral son más convenientes las constantes  $\rho, v_\infty$  que se vinculan merced a

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad L = m\rho v_\infty = \sqrt{2mE}\rho$$

en términos de los cuales la integral previa es

$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2\sqrt{1 + \alpha/(Er^2) - \rho^2/r^2}}$$

Luego, el cambio de variables usual  $U = 1/r$  permite hallar la solución

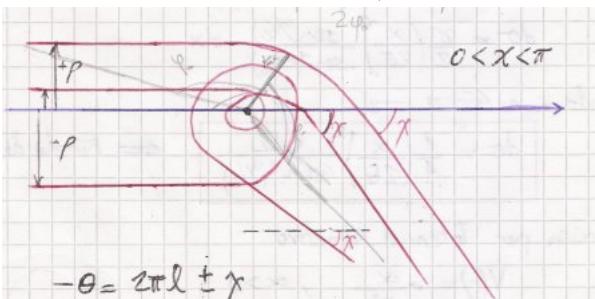
$$\int_{r_m}^{\infty} \frac{\rho dU}{\sqrt{1 - (\rho^2 - \alpha/E)U^2}} = \left. \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \alpha/E}} \arcsin \left( \sqrt{\rho^2 - \alpha/E} \frac{1}{r} \right) \right|_{r_m}^{\infty}$$

y como  $r_m = \sqrt{\rho^2 - \alpha/E}$  resulta

$$\varphi_0 = \frac{\rho\pi}{2\sqrt{\rho^2 - \alpha/E}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - a^2/\rho^2}}$$

donde  $a^2 = E/\alpha$ . Finalmente

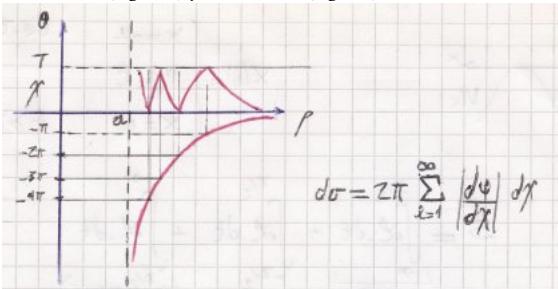
$$\theta = \pi - \frac{\pi}{2\sqrt{1 - a^2/\rho^2}}.$$



Y la solución [?]

$$-\theta = 2\pi\ell \pm \chi,$$

para  $\ell = 0, 1, 2$  (signo +) y  $\ell = 0, 1, 2$  (signo -).



**EJEMPLO 12.6 Dispersión por un cono duro**

Del planteo geométrico surge que

$$\begin{cases} 0 & x \neq 2\alpha \\ \pi a^2 \delta(\chi - 2\alpha) & \end{cases}$$

Esta ilustración es interesante para el asunto de potenciales *duros*

**4.12.1 Delta de Dirac –mover a apéndice–**

Hacer apéndice con la delta de Dirac: Puede pensarse como una función escalón de ancho  $1/\ell$  y altura  $\ell$ . En el límite de  $\ell \rightarrow \infty$  se tiene el behavior de la delta.

Esta sección que sigue quedó descolgada. [Revisarla]. Se puede escribir la energía cinética del siguiente modo

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1-in}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2-in}^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1-cm}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2-cm}^2$$

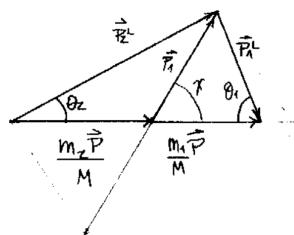
$$T - \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 \equiv t = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{V}_{cm} - \frac{m_2}{M} \mathbf{V} \quad \mathbf{V}_2^L = \mathbf{V}_{cm} - \frac{m_1}{M} \mathbf{V}$$

$$\mathbf{p}_1^L = m_1 \mathbf{V}_{cm} - \mu \mathbf{V} = m_1 \frac{\mathbf{P}}{M} - \mu \mathbf{V}$$

$$\mathbf{p}_2^L = m_2 \mathbf{V}_{cm} + \mu \mathbf{V} = m_2 \frac{\mathbf{P}}{M} + \mu \mathbf{V}$$

Donde



**Figura 12.22**

$$\mathbf{V}_{cm} + \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1^L$$

$$\mathbf{p}_2^L = \frac{m_2}{M} \mathbf{P} + \mu \mathbf{V} \hat{n} \quad \mathbf{p}_1^L = \frac{m_1}{M} \mathbf{P} - \mu \mathbf{V} \hat{n}$$

$$\frac{m_2}{M} \mathbf{P} + \frac{m_1}{M} \mathbf{P} = \mathbf{P} = \mathbf{p}_2^L + \mathbf{p}_1^L$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{P_1 \sin(\chi)}{(m_2/M)P + P_1 \cos(\chi)}$$

## 4.13 Dispersión por potenciales infinitos

La idea es que sabiendo  $\rho$  (parámetro de impacto) quiero saber qué ángulo  $\chi$  se desvían las partículas incidentes.

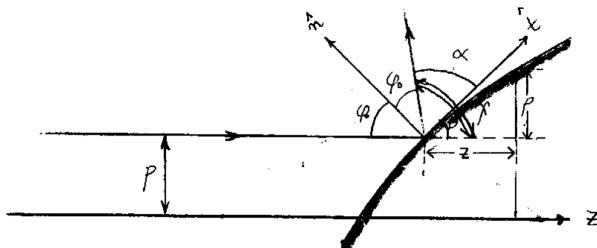


Figura 13.23

$$\phi_0 + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad 2\phi_0 + \alpha + \beta = \pi \quad \phi_0 + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \beta \quad 2\alpha = 2\beta = \chi$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \tan(\beta) = \tan\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho/dz}{dz/d\theta}$$

con  $\theta$  variable paramétrica. Donde  $\rho = \rho(z)$  es la función que da la curva roja (el perfil del cuerpo dispersor).

### 4.13.1 Problemas descolgados –reacomodar–

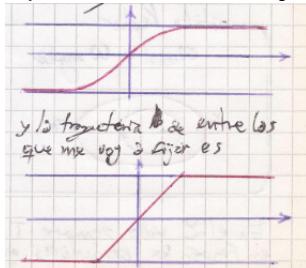
Los siguientes dos ejemplos hay que acomodarlos en donde corresponda. El problema de parcial seguro es muy *sketchy*

**EJEMPLO 13.1 Problema de parcial**

Estimar un tiempo  $\tau$  para una partícula  $m$  sujeta al potencial

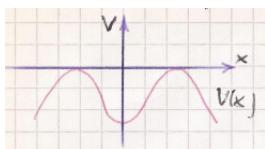
$$V(x) = -\lambda^2(x^2 - a^2)^2$$

si la trayectoria real es de acuerdo a la figura (panel superior) y la trayectoria de entre las que me voy a fijar es como se muestra en el panel inferior.



Hay solución a las ecuaciones de movimiento, en  $t \rightarrow -\infty$  es  $x = -a$  y en  $t \rightarrow +\infty$  es  $x = a$ . Condiciones se verifican para cualquier función de la familia

$$x(t) = \begin{cases} x = -a & t \leq -\tau/2 \\ 2a/\tau t & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ x = a & t \geq \tau/2 \end{cases}$$



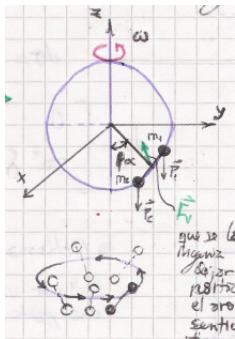
$$S = \int_{-\infty}^{-\tau/2} \mathcal{L} dt + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathcal{L} dt + \int_{\tau/2}^{\infty} \mathcal{L} dt,$$

donde la primera y tercera integral son nulas, sobreviviendo la central solamente.

La trayectoria  $x(t)$  ya la tengo; como necesito el  $\tau$  verdadero obtendré  $S = S(\tau)$  y evaluaré  $\delta S(\tau)/\delta \tau = 0$ . De allí se obtiene el  $\tau$  real (de entre las  $x(t)$  consideradas).

**EJEMPLO 13.2 Aro que gira con dos bochas engarzadas**

De la contemplación de la figura surge que la energía no se conserva en esta situación porque la fuerza de vínculo  $F_v$  hace trabajo.



Es un problema de un único grado de libertad. Acá se conserva el  $\mathcal{H}$ . Esto significa que un observador solidario al aro mediría  $E = \mathcal{H}$  y para él podríamos tener un punto de equilibrio.

La fuerza de vínculo se las ingenia para dejar a la partícula sobre el aro; cambia de sentido todo el tiempo y tiene componente sobre el aro (la trayectoria real).

Recordamos de la órbita de Kepler  $\omega_{radial} = \omega_{angular}$ . Doy una vuelta ( $2\pi$ ) y también voy  $r_M \rightarrow r_m \rightarrow r_M$  entonces tengo frecuencias iguales.



Lo que uno chequea para ver si la órbita es cerrada es

$$\Delta\varphi = 2\Delta r,$$

o bien que ir de 0 a cerrar la órbita sea igual a dos veces ir de  $r_M$  a  $r_m$ . En el lagrangiano  $\mathcal{L}$  mido siempre  $T$  desde un sistema inercial; pero  $T$  la puedo expresar en función de coordenadas que se hallan en el sistema no inercial; en ese caso surgirán las fuerzas ficticias correspondientes.

## Capítulo 5

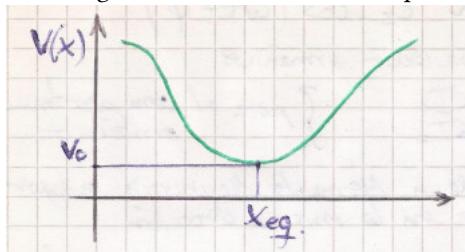
---

# Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio. Esto desarrollará un método sistemático para tratar todo tipo de problemas con muchos grados de libertad pero en forma aproximada.

### 5.0.1 Idea para un grado de libertad

Para un grado de libertad la idea es que



en un potencial  $V(x)$  con un mínimo, es decir que cumple

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0, \frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$$

para algún  $x_{eq}$ , en la expresión de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (1)$$

se aproxima el potencial según<sup>1</sup>

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2, \quad (2)$$

y si definimos  $k \equiv d^2V/dx^2|_{x_{eq}}$  se llega a

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V_0 + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2,$$

que derivada con respecto al tiempo resulta en

$$m\ddot{x} + k(x - x_{eq}) = 0,$$

la cual no es otra cosa que una ecuación de oscilador armónico, cuya solución general es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  y  $\varphi$  está asociada a la energía  $E$ . Ver Apéndice X para la resolución de oscilador armónico.

El problema físico tiene dos constantes aunque la resolución presenta cuatro (dos complejos, con parte real e imaginaria).

Nótese que el desarrollo del potencial a orden dos equivale a una fuerza linealizada, merced a que  $m\ddot{x} = -dV/dx$ .

**Un apéndice más: oscilador armónico con término no homogéneo (usar 76R carpeta). Acá habría que llegar a despejar quién es  $\varphi$ .**

## 5.0.2 Varias variables

En el caso de un potencial  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  hay que hallar las raíces del mismo y luego desarrollar en torno a los puntos de equilibrio. Se empieza desde

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_{eq}} = 0,$$

y habría que desarrollar

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

No obstante, el problema se puede enfocar mejor en términos de las coordenadas generalizadas. Entonces, el potencial es

$$V(q_1, \dots, q_n) \approx V(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

---

<sup>1</sup>Nótese que esta es la expansión de Taylor en la cual el término lineal está justamente ausente porque la derivada primera en el punto es nula.

y la energía cinética,

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \approx \frac{1}{2} \left( m(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial m}{\partial q_i} \Big|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \dots \right) \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

[Esta expresión hay que revisarla y reubicarla!]

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde  $m_{ij}$  son los coeficientes de las coordenadas generalizadas y se desarrollarán en serie en torno al equilibrio (caracterizado por un supraíndice 0), es decir,

$$m_{ij} \approx m_{ij}(q_i^0, \dots, q_n^0) + \sum_k \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \Big|_{q^0} (q_k - q_k^0).$$

Estamos considerando que la energía cinética es  $T = T_2$ , pero cabría pensar que existe un  $T_0(q_1, \dots, q_n)$  y se lo sumaríamos en ese caso al potencial  $V$ . En el lagrangiano que consideraremos no está presente  $T_1$ ; queremos un potencial que no depende de las velocidades.

#### EJEMPLO 0.1 Sobre el término $T_1$

Para el caso de una masa fija, enhebrada en varilla que gira con velocidad angular  $\omega$ , el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

con energía

$$T = T_0 + T_2 = \frac{2}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{2} m \dot{r}^2$$

donde  $\dot{\varphi} = \omega$  el último término no depende de la velocidad pero sí de la posición. Es *como* un potencial que genera la fuerza ficticia.

Haciendo la aproximación consistente resulta

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_i^0} (\eta_i)(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \Big|_{q_i^0} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

con  $V_{ij} \equiv \partial^2 V / (\partial q_i \partial q_j)|_{q_i^0}$ ,  $m_{ij} = m_{ij}|_{q_i^0}$ , ambos simétricos, y donde se ha definido  $\eta_i = q_i - q_i^0$ , que es un apartamiento típico de la posición de equilibrio. Notemos que  $\dot{\eta}_i = \dot{\eta}_i$ . Nótese también que el término lineal en la aproximación de  $m_{ij}$  al verse multiplicado por el producto  $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$  es ya de orden cúbico por lo cual debe descartarse para ser consistentes con las aproximaciones hechas en el potencial.

**Esta aproximación y formalismo sirve para un mínimo y un sistema que hace pequeños apartamientos respecto de ese mínimo.**

Con esta nomenclatura puede escribirse el *lagrangiano de pequeñas oscilaciones*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^t \mathbb{T} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^t \mathbb{V} \eta$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{d}{d\dot{\eta}_k} (\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\eta_i \eta_j) = 0$$

son  $n$  ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = 0 \quad k = (1, \dots, n).$$

Esto es un oscilador armónico para cada partícula. Se puede pensar en todas las partículas unidas por resortes acoplados.

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

de frecuencia  $\omega$ , idéntica para todas las partículas, tomando al final del proceso  $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$  como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 m_{kj} + V_{kj}) A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

lo cual me hará buscar un polinomio característico  $P^n[\omega^2]$  de orden  $n$  en  $\omega^2$ . Así se tendrán  $n$  valores para  $\omega^2$  con  $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$  y  $\omega_s^2 \geq 0$ , que serán las autofrecuencias o frecuencias propias  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ .

Para cada  $\omega$  se tiene una solución

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \quad s = 1, \dots, N$$

pero el movimiento general será una combinación de todas las frecuencias,

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}.$$

En general, dado un  $V = V(q_i)$  puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con  $\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j|_{q_i^0}$  o bien cambiar variable  $\eta = q_i - q_i^0$  y quedarse con los términos cuadráticos en  $\eta_i \eta_j$ . Para la energía cinética  $T = T(q, \dot{q})$  puede ser más fácil evaluar  $m_{ij}(q_i)|_{q_i^0}$  y quedarnos con los términos cuadráticos en  $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ .

Veamos la solución para una frecuencia dada,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) A_j^s = 0$$

y como usamos una raíz  $\omega_s$  se tendrá una ecuación linealmente dependiente que tiraremos. Serán ahora  $N - 1$  ecuaciones,

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) \frac{A_j^s}{A_1^s} = 0$$

y definimos el cociente  $a_j^s \equiv A_j^s / A_1^s$  al pasar dividiendo la amplitud del modo cuya frecuencia estamos considerando. Entonces

$$\sum_j (V_{kj} - \omega_s^2 m_{kj}) a_j^s = -V_{k1} - \omega_s^2 m_{k1} \quad k = 1, \dots, N - 1$$

Entonces como  $N - 1$  ecuaciones no homogéneas tienen solución real, entonces  $a_j$  es un cociente real y todo los  $A_j^s$  tienen que tener la misma fase. [mmm?] La fase viene determinada por las condiciones iniciales.

Veamos ahora que las frecuencias son reales. Para ello se multiplica por el complejo conjugado y se suma

$$\sum_k A_k^{s*} \sum_j V_{kj} A_j^s = \omega_s^2 \sum_k A_k^{s*} \sum_j m_{kj} A_j^s$$

$$\sum_k A_k^s \sum_j V_{kj} A_j^{s*} = \omega_s^{2*} \sum_k A_k^s \sum_j m_{kj} A_j^{s*}$$

**Acá sería bueno poner explícitamente hasta donde llega la sumatoria y explicitar qué  $\omega$  se usa.**

y usando la simetría de  $m_{kj}$ ,  $V_{kj}$  se restan estas ecuaciones y se obtiene

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_s^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s$$

y como la doble sumatoria es no nula se sigue que las frecuencias son reales. Incluso se puede despejar

$$\omega_s^2 = \frac{\sum_k \sum_j A_k^{s*} V_{kj} A_j^s}{\sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^s}$$

Ambos, numerador y denominador son definidos positivos. Si el numerador fuese negativo para alguna dirección, eso significa que en esa dirección será un máximo (sería una especie de punto silla); pequeñas oscilaciones no valdrá en esa dirección.

Por otra parte, si se consideran dos frecuencias diferentes

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_p^{2*}) \sum_k \sum_j A_k^{s*} m_{kj} A_j^p$$

entonces lo que debe ser nulo es la doble sumatoria. Entonces, en la *métrica* dada por  $m_{jk}$   $A_j$  y  $A_k$  son perpendiculares. Para determinar el  $A_1$  (que era el parámetro que permanecía indeterminado) impongo

$$A^{t p*} M A^p = 1$$

y los  $A_j$  se consideran reales pues todos tienen la misma fase y son los modos normales. Se está pidiendo que de uno la norma en la métrica dada por  $M$ .

Si la raíz del polinomio  $P^n$  tiene multiplicidad  $k$ , se tienen  $k$  ecuaciones linealmente dependientes y hay que arrojar al cesto de la basura  $k$  ecuaciones.

Si construyo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots \\ A_2^1 & & \\ \dots & & \end{pmatrix},$$

donde cada columna de esta matriz es un autovector. Entonces se ve que esta matriz *diagonaliza* a  $M$ , i.e.

$$A^t M A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \dots & & \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

Asimismo, como

$$V A = \omega^2 M A,$$

eso conduce a que

$$A^t V A = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

**Hay que repasar esto.**

### EJEMPLO 0.2 Lo de las matrices

Si  $A^{p*} M A^s = 0$  con  $p \neq s$  entonces  $M$  está definiendo una métrica pues si  $M = \mathbb{1}$  entonces

$$A^{p*} \mathbb{1} A^s = A^{p*} A^s = 0,$$

lo cual significa que  $A^{p*}$  y  $A^s$  son perpendiculares.

### 5.0.3 Expresión vectorial

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega_s t} \\ A_2 e^{i\omega_s t} \\ \dots \\ A_N e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia  $\omega_s$ , siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia  $\omega_s$ .

Luego, es

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \dots + c_N \boldsymbol{\eta}^N$$

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ \dots \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

entonces  $\mathbf{A}^s$  es un modo normal de frecuencia  $s$ .

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \dots \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total ( $j$  es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

siendo el  $\dagger$  el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por  $\mathbb{T}$  de la unidad)

$$\mathbf{A}^t \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

lo cual significa que  $A$  diagonaliza a  $\mathbb{T}$ , siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & \dots & & \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$\mathbf{A}^t \mathbb{V} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{A}^t \mathbb{T} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbb{1}$$

#### 5.0.4 Un cambio de coordenadas

Se puede incluso realizar un cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{\eta} = A \boldsymbol{\xi}$$

tal que

$$\mathbf{A}^{n \times n} \boldsymbol{\xi}^{n \times 1} \quad (A \boldsymbol{\xi})^t = \boldsymbol{\xi}^{t \times n} \mathbf{A}^{t \times n}$$

y que se llaman coordenadas normales. Se resuelve el problema en estas coordenadas  $\boldsymbol{\xi}$  y luego se regresa a las originales  $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{T} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \mathbf{A}^t \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{V} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^t \omega^2 \mathbb{1} \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \xi_i^2 \omega_i^2$$

Los autovectores son los modos normales. Son  $N$  osciladores armónicos independientes. Se pasa de un problema de muchas partículas interactuantes a uno de  $N$  partículas que no interactúan.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

y son  $N$  ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

de modo que si  $\omega^2 = \omega_i^2$  entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}.$$

**Hay que consolidar este material disperso y confuso!**

$$\xi_\ell(t) = C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

y entonces

$$\eta_1(t) = \sum_\ell A_1^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

$$\eta_2(t) = \sum_\ell A_2^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

...

$$\eta_N(t) = \sum_\ell A_N^\ell C_\ell \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$$

que son soluciones con  $\omega_i \neq 0$ . Son  $\eta$  coordenadas normales y  $\xi$  coordenadas colectivas [no es al revés?].

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\xi$  (un grado de libertad es una  $\omega$ ) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a  $\omega_s$ . Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\eta$ , un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las  $\omega$ .

Si  $\omega = 0$  es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_s t} + A_j(Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la  $\omega = 0$ . Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = A^\dagger \mathbb{T} A \boldsymbol{\xi}$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = \mathbb{1} \boldsymbol{\xi}$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscila con una frecuencia única (son  $N$  osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

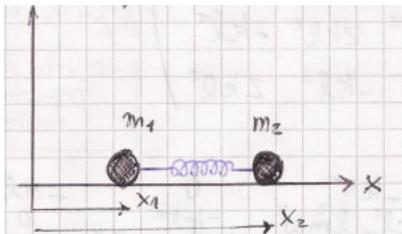
donde tienen la misma fase los  $A_j^s$  para toda frecuencia  $\omega_s$

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$\mathbf{A} = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

### 5.0.5 Coordenadas colectivas y normales



Las ecuaciones de Newton del sistema son

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)$$

que verifican

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

y entonces

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1 - \ell_0)$$

Definiendo  $x_2 - x_1 = x_{rel}$  se pasa de un problema de dos partículas acopladas ( $x_1, x_2$ ) a otro de dos partículas desacopladas; una oscila y la otra se traslada,

$$\mu \ddot{x}_{rel} + k(x_{rel} - \ell_0) = 0 \quad \ddot{x}_{cm} = 0$$

y  $x_{rel}, x_{cm}$  son coordenadas colectivas, pero no corresponden a un movimiento real de un sistema. Tendré dos problemas separados que pueden, dado el caso, excitarse por separado.

En el caso de  $N$  osciladores, si hay algún  $\omega_i = 0$  se tendrá

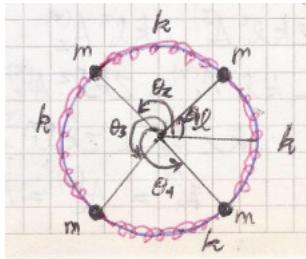
$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \dot{\xi}_i^2$$

y como  $\ddot{\xi}_i = 0$  entonces  $\xi(t) = At + B$  es solución y

$$\eta_N(t) = \sum_{\ell} A_n C_{\ell} \cos(\omega_{\ell} t + \varphi_{\ell}) + \sum_k A_n^k (Bt + D)$$

donde el primer término es por  $\omega_{\ell} \neq 0$  y el segundo por  $\omega_k = 0$ .

**EJEMPLO 0.3 Aro fijo con bolas engarzadas**



El lagrangiano correspondiente a este *setup* es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_4^2] m\ell^2 - \frac{1}{2} k\ell^2 [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + (\theta_4 - \theta_3)^2 + (\theta_1 - \theta_4)^2]$$

Este lagrangiano, como está, ya es de pequeñas oscilaciones. En efecto,  $\theta_2^0 = \theta_1^0$  de modo que  $\theta_2 - \theta_1 = \eta_2 - \eta_1 = \theta_2 - \theta_2^0 + \theta_1^0 - \theta_1$ . Luego,

$$V = \begin{pmatrix} 2k\ell^2 & -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 2k\ell^2 & -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 \end{pmatrix}$$

donde los ceros reflejan la inexistencia de resorte entre dichas partículas. Entonces

$$V - \omega^2 M = \begin{pmatrix} 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & 0 & -k\ell^2 & 2k\ell^2 - m\omega^2\ell^2 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que calcular el determinante de esta matriz  $V - \omega^2 M$ , que luego de desarrollar y usar el método que más le gusta al diligencioso lector permite arribar a

$$P(\omega) = \det(V - \omega^2 M) = m\ell^2\omega(2k\ell^2 - m\ell\omega^2)^2(m\ell\omega^2 - 4k\ell^2),$$

cuyas raíces son:

$$\omega_1^2 = 2\frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2\frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = 0 \quad \omega_4^2 = 4\frac{k}{m}$$

En este ejemplo se conserva el momento angular, de manera que hubiese sido razonable obtener una frecuencia nula asociada como de hecho apareció en  $\omega_3$ . Resolvamos ahora ese modo. Será

$$\begin{aligned} 2k\ell^2 A_1^3 - k\ell^2 A_2^3 - k\ell^2 A_4^3 &= 0, \\ -k\ell^2 A_1^3 + 2k\ell^2 A_2^3 - k\ell^2 A_3^3 &= 0, \\ , -k\ell^2 A_2^3 + 2k\ell^2 A_3^3 - k\ell^2 A_4^3 &= 0 \end{aligned}$$

y resulta  $A_1^3 = A_2^3 = A_3^3 = A_4^3$ .

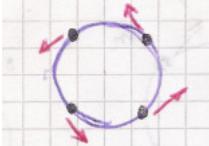
Entonces

$$\mathbf{A}^3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde  $a = 1/(2\ell\sqrt{m})$  y se da

$$\mathbf{A}^{3\dagger} M \mathbf{A}^3 = \mathbb{1}$$

Este es el modo normal de  $\omega_3^2 = 0$ , que se ve dibujado bajo estas líneas



Para la frecuencia  $\omega_4$  es

$$-2k\ell^2 A_1^4 - k\ell^2 A_2^4 - k\ell^2 A_4^4 = 0,$$

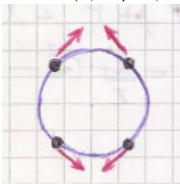
$$k\ell^2 A_1^4 - 2k\ell^2 A_2^4 - k\ell^2 A_3^4 = 0,$$

$$-k\ell^2 A_2^4 - 2k\ell^2 A_3^4 - k\ell^2 A_4^4 = 0$$

de manera que

$$\mathbf{A}^4 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde  $a = 1/(2\ell\sqrt{m})$ . El dibujo asociado será



Para las frecuencias *mellizas*  $\omega_1, \omega_2$  es

$$-k\ell^2 A_1^1 - k\ell^2 A_3^1 = 0,$$

$$-k\ell^2 A_2^1 - k\ell^2 A_4^1 = 0,$$

o bien

$$A_1 = A_3 = 0 \quad A_2 = A_4,$$

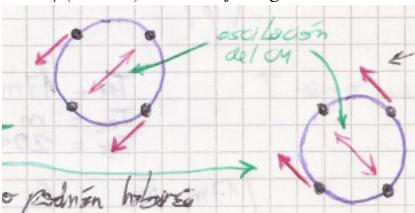
y

$$A_2 = A_4 \quad A_1 = -A_3$$

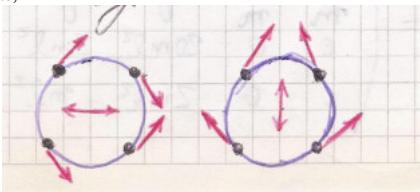
y consecuentemente

$$\mathbf{A}^1 = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

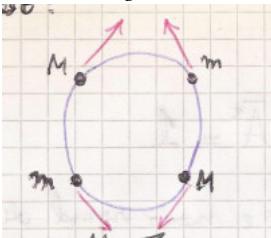
con  $a = 1/(\ell\sqrt{2m})$ . Los dibujos siguientes ilustran los movimientos esperados



Con respecto a lo de aquí arriba son situaciones físicas iguales (si cambio masas no será la misma situación). La introducción de  $M$  y  $m$  (ver figurillas siguientes) rompe la degeneración y serán modos normales pero de diferente frecuencia. Pero podría haberse elegido, ver bajo estas líneas,

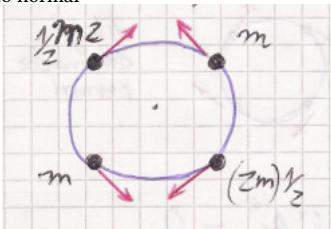


Para el caso siguiente

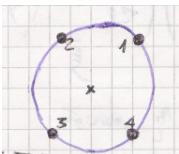


esta configuración no conserva el momento angular.

Si tomamos  $M = 2m$  entonces podemos considerar momento angular nulo y obtengo un modo normal



$$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$



Este ejemplo se continuó en dos clases consecutivas de modo que puede haber algún pise.

En resumen

$$\omega_3^2 = 0 \quad A^3 = \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\omega_4^2 &= \frac{4k}{m} & A^4 &= \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \omega_1^2 = \omega_2^2 &= \frac{2k}{m} \\ A^1 &= \frac{1}{\sqrt{2m\ell}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & A^2 &= \frac{1}{2\sqrt{2m\ell}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^t M A &= 1\end{aligned}$$

El problema dependerá de cómo excitemos al sistema. Si  $\eta = A\xi$  entonces con  $\omega_i \neq 0$  es

$$\xi_i = C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

pero con  $\omega_i = 0$  se tendrá

$$\xi_i = B_i t + D_i.$$

Luego, como  $\dot{\eta} = A\xi$  de tal modo que

$$A^t M \eta = A^t M A \xi \quad A^t M \dot{\eta} = A^t M A \dot{\xi} = \mathbb{1} \dot{x} i$$

Las condiciones iniciales serán

$$\eta_1(t=0) = \theta_0 \quad \eta_i(t=0) = 0, i \neq 1$$

y los  $\dot{\eta}_i(t=0)$  están en función de las  $\eta$  y quiero pasarlas a  $\xi$ .

$$A^t M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2m\ell}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & -\frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & -\frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

mientras que las posiciones iniciales serán

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\ell}} \theta_0 \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\ell}} \theta_0 \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\ell}} \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos \varphi_1 \\ C_2 \cos \varphi_2 \\ Bt + D \\ C_4 \cos \psi_4 \end{pmatrix}$$

y las velocidades iniciales por su parte,

$$\begin{aligned}0 &= -C_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \\ 0 &= -C_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \\ 0 &= B \\ 0 &= -C_3 \omega_4 \sin \varphi_4\end{aligned}$$

[tal vez un typo acá arriba]

Al separar de las posiciones de equilibrio se excitan modos que no son el cero, y tendrán momento angular nulo; el único modo que dará momento angular no nula y por ende generará rotación es el asociado a  $\omega_3^2$ .

Según se ve el modo uno tampoco se está excitando,

$$\varphi_2 = 0 \quad C_2 = \frac{\sqrt{m}}{2\ell} \theta_0$$

$$\eta = A\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & -\frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2m\ell}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{m\ell}} & -\frac{1}{2\sqrt{m\ell}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}\ell} \theta_0 \cos(\omega_2 t) \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}\ell} \theta_0 (Bt + D) \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}\ell} \theta_2 \cos(\omega_4 t) \end{pmatrix}$$

Esto nos da los  $\eta$  solución. Notemos que para el dibujo de los modos normales no hace falta hallar el valor de las constantes  $1/(\sqrt{2m\ell})$ , etc. de normalización.

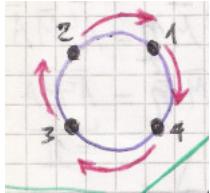
Si hay simetrías en el problema ( $V, M$  son invariantes frente a cierta transformación)

$$VA^\ell = \omega^2 MA^\ell$$

Una matriz,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su inversa  $B^{-1}$  transforman un versor en otro



Pasa según las flechas rojas el sistema; pero ante este cambio el lagrangiano es invariante. Las matrices  $B$  y  $B^{-1}$  son rotaciones (la inversa es en el otro sentido) y que dejan invariante, como se dijo, al lagrangiano. Se ve que pasan  $1000 \rightarrow 0001$  y  $0100 \rightarrow 1000$ ,

$$BVB^t = V \quad BV B^t B = VB \quad BV - VB = 0$$

Los autovectores de  $V$  se pueden elegir dentro de los de  $B$ .

Si  $VA^\ell = \omega^2 MA^\ell$  entonces

$$BVB^t BA^\ell = \omega^2 BM B^t BA^\ell$$

$$VBA^\ell = \omega^2 MBA^\ell,$$

aunque para esto necesito que no sean degenerados los autovectores. Entonces, podemos escribir así:

$$-\omega^2 M + V = (2k\ell^2 - \omega^2 m\ell^2)\mathbb{1} - Bk\ell^2 - B^t K\ell^2$$

Sea la misma  $B$ , que cumple la propiedad

$$B\hat{n} = \hat{n} + 1 \quad B^\dagger \hat{n} = \hat{n} - 1$$

con

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Chequear estas ecuaciones vectoriales!**

**La normalización está en  $A^t MA$ .**

y  $\hat{n} = \hat{N}$  y  $\hat{N} + 1 = \hat{1}$  y  $\hat{0} = \hat{N}$ . Ahora estoy considerando el problema con  $N$  bolas



Si tomo un vector  $u$  y le aplico  $B$ ,

$$\mathbf{u} = \sum e^{i\theta n} \hat{n},$$

entonces

$$B\mathbf{u} = \sum e^{i\theta n} (\hat{n} + 1) = e^{-i\theta} \sum e^{i\theta(n+1)} (\hat{n} + 1)$$

y  $\theta$  es un parámetro que puede valer cualquier cosa; para ajustar [los bordes?] si veo que

$$e^{i\theta(N+1)} (\hat{N} + 1) \quad \text{en } n = N$$

y

$$e^{i\theta 1} (\hat{1})$$

que es lo mismo que

$$\sum e^{i\theta n} \hat{n} \quad \text{en } n = 1$$

entonces puedo vincular

$$e^{i\theta(N+1)} = e^{i\theta},$$

de lo cual deducimos que

$$\theta = \frac{2k\pi}{N}.$$

Ahora operamos

$$(2k\ell^2 \mathbb{1} - Bk\ell^2 - B^\dagger k\ell^2) u = \omega^2 m\ell^2 \mathbb{1} u,$$

$$2k\ell^2 u - k\ell e^{-i\theta} u - k\ell^2 e^{i\theta} u$$

lo que lleva a

$$[2k\ell^2 - k\ell(2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))] u = \omega^2 m\ell^2 u$$

o bien

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \left( 1 - \cos \frac{2k'\pi}{N} \right)$$

con  $k' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$ .

Con  $N = 4$  es

$$k' = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = 0$$

que corresponde a la no degenerada y representa la rotación de todo el *bodoque*. Acá están las cuatro autofrecuencias

$$k' = \pm 1 \quad \omega_1^2 = \omega_{-1}^2 = \frac{2k}{m}$$

$$k' = \pm 2 \quad \omega_2^2 = \omega_{-2}^2 = \frac{4k}{m}$$

donde que sea el  $+$  o el  $-$  en la frecuencia depende de si  $N$  es impar la mitad son positivos y la mitad negativos. Para  $N$  par el que sobra lo tomo positivo o negativo (cualquiera).

Con los autovectores no degenerados tengo los autovalores del modo real. Para los siguientes (como son degenerados) tendrá que tomar una combinación lineal de ellos.

Los autovectores acompañantes serán:

$$k' = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**La idea acá es tomar el lagrangiano de pequeñas oscilaciones y ver qué transformaciones dejan invariantes a las matrices del mismo.**

$$k' = 1 \quad \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} \\ e^{i\pi} \\ e^{i3\pi/2} \\ e^{i2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k' = 1 \quad \begin{pmatrix} e^{-i\pi/2} \\ e^{-i\pi} \\ e^{-i3\pi/2} \\ e^{-i2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con estos dos debo generar independientes en combinación lineal

$$\oplus \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ominus \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde el último se multiplica por  $i$ .

**Esto es muy sketchi, habría que completarlo.**

## 5.1 Oscilaciones viscosas

El lagrangiano usual de pequeñas oscilaciones,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j m_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \eta_i \eta_j V_{ij},$$

lleva naturalmente a

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0$$

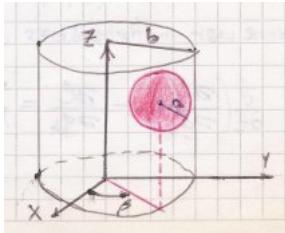
cuya resolución es la diagonalización simultánea de  $M$  y  $V$ . Si hay fuerzas viscosas presentes se obtiene

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j + B_{ij} \dot{\eta}_j = 0 \tag{1.1}$$

Se necesitaría diagonalizar tres formas cuadráticas simultáneas, las tres matrices, lo cual en general no es posible. Este problema (1.1) no tiene en general modos normales. Entonces (1.1) no se podrá convertir en osciladores independientes. La resolución utiliza la misma idea; proponer  $A e^{\lambda t}$  donde  $\lambda \in \mathbb{C}$  entonces

$$\det \{ \mathbb{V} + \lambda^2 \mathbb{M} + \lambda \mathbb{B} \} = 0$$

debe solicitarse para hallar la resolución.

**EJEMPLO 1.1 Problema 14 Método de Lagrange**

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m((b-a)^2\dot{\beta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta) - mgz$$

y como la velocidad  $\mathbf{v}_p$  es nula, se tiene

$$\mathbf{v}_p = 0 = \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}\hat{\varphi}$$

que lleva a

$$0 = (b-a)\dot{\beta}\hat{\beta} + \dot{z}\hat{z} + [\omega_\rho\hat{\rho} + \omega_\beta\hat{\beta} + \omega_z\hat{z}] \times a\hat{\rho}$$

$$0 = (b-a)\dot{\beta}\hat{\beta} + \dot{z}\hat{z} + a\omega_z\hat{\beta} - a\omega_\beta\hat{z}$$

La condición de rodadura es

$$\begin{cases} (b-a)\dot{\beta} + a\omega_z = 0 \\ \dot{z} - a\omega_\beta = 0 \end{cases}$$

y como la velocidad en cartesianas es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\hat{x} + \Omega_y\hat{y} + \Omega_z\hat{z}$ , la conversión a los ejes del problema es

$$\hat{\rho} = \cos\beta\hat{x} + \sin\beta\hat{y} \quad \hat{\beta} = -\sin\beta\hat{x} + \cos\beta\hat{y}$$

o bien

$$\hat{x} = \cos\beta\hat{\rho} - \sin\beta\hat{\beta} \quad \hat{y} = \sin\beta\hat{\rho} + \cos\beta\hat{\beta}$$

entonces

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_\rho\hat{\rho} + \omega_\beta\hat{\beta} + \omega_z\hat{z}$$

donde

$$\omega_\rho = \Omega_x \cos\beta + \Omega_y \sin\beta \quad \omega_\beta = \Omega_y \cos\beta + \Omega_x \sin\beta$$

Luego de algún álgebra

$$\omega_\rho = \dot{\psi}\sin\theta\sin(\varphi-\beta) + \dot{\theta}\cos(\varphi-\beta)$$

$$\omega_\beta = -\dot{\psi}\sin\theta\cos(\varphi-\beta) + \dot{\theta}\sin(\varphi-\beta)$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Pero como

$$(b-a)\beta + a\dot{\varphi} + a\dot{\psi}\cos\theta = 0,$$

$$\dot{z} - a\dot{\theta}\sin(\varphi-\beta) + a\dot{\psi}\sin\theta\cos(\varphi-\beta) = 0,$$

conviene utilizar multiplicadores de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \sum_{\ell=1}^2 \lambda_\ell a_{\ell k}$$

lo cual lleva a

$$m(b-a)^2\ddot{\beta} = \lambda_1(b-a) \quad m\ddot{z} + mg = \lambda_2$$

$$I\ddot{\varphi} + I \frac{d}{dt}(2\dot{\psi} \cos \theta) = a\lambda_1$$

Haciendo gradiente en los vínculos,

$$\lambda_1([b-a]\delta\beta + a\delta\varphi + a \cos \theta \delta\psi) = 0$$

$$\lambda_2(\delta z - a \sin(\varphi - \theta)\delta\theta + a \sin \theta \cos(\varphi - \beta)\delta\psi) = 0$$

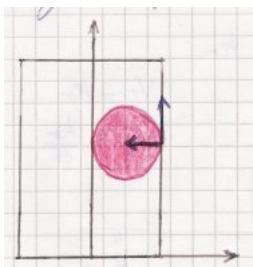
y entonces

$$I\ddot{\theta} + I\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta = -a\lambda_2\varphi \sin(\varphi - \beta)$$

$$I\ddot{\psi} + I \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta) = \lambda_1 a \cos \theta + \lambda_2 \varphi \sin \theta \cos(\varphi - \theta)$$

Tenemos siete ecuaciones con siete incógnitas. Una sugerencia para resolverlo alternativamente es a través de las ecuaciones de Newton,

$$m\dot{V}_{cm} = f + N \quad I\dot{\omega} = t$$



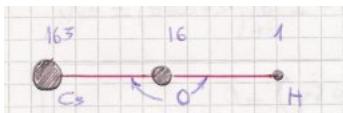
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \dot{\beta}\hat{\beta} \times \omega$$

lo cual nos debería conducir a algo de la forma

$$(I + ma^2)\ddot{\omega}\varphi + \dot{\varphi}I\omega_\varphi = 0$$

y sale que  $\omega_\rho = \dot{\varphi}\omega_\varphi$  siendo  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{z}$  constantes.

### EJEMPLO 1.2 Problema de la molécula diatómica



Acá hay que escribir el potencial con cuidado,

$$V = V_\alpha(\alpha) + V_{CsO}(r) + V_{OH}(r'),$$

donde

$$V_\alpha(\alpha) = \frac{k\ell^2}{2}(\pi - \alpha)^2$$

y  $\ell$  es un  $r, r'$  de equilibrio.

$$V_{CsO}(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

$$V_{OH}(r') = \frac{V_{CsO}(r')}{15}$$

y según se ve ya está separado el mismo. Calculamos las derivadas del potencial,

$$V_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = k\ell^2$$

y de

$$\frac{\partial V_{Cso}}{\partial r}(r) = 0$$

sale un  $r_{eq}$  que cumple  $r_{eq} = \sigma 2^{1/12} \equiv \ell$  y luego

$$V_{Cso}''|_{eq} = 24\epsilon \left[ \frac{26}{r^2} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \frac{7}{r^2} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] = k_r$$

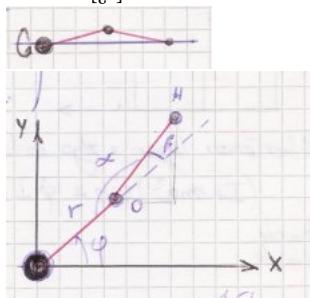
donde los términos con  $\sigma$  equivalen a  $4\ell^2$  y  $2\ell^2$ . Además,

$$V_{rr} = k_r \quad V_{r'r'} = \frac{k_r}{15}$$

Esto define

$$V = \begin{pmatrix} V_{\alpha\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{r'r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

En general tenemos más grados de libertad que tres. Ubicamos el centro de masa en el Cesio por ser muy masivo. Entonces pierdo tres grados de libertad y me quedan seis. Ignoro rotación, y otra cosa más [¿?]



Restan cuatro grados de libertad  $r, \varphi, r', \beta$ .

$$\dot{X}_0^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\mathbf{X}_0 = r \cos(\varphi) \hat{x} + r \sin(\varphi) \hat{y}$$

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{X}_0 + r' \cos(\varphi + \beta) \hat{x} + r' \sin(\varphi + \beta) \hat{y}$$

y el cuadrado es

$$\dot{X}_H^2 = \dot{X}_0^2 + \dot{r}'^2 + r'^2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2$$

$$\begin{aligned} & 2\dot{r}\dot{r}'[\cos \varphi \cos(\beta + \varphi) + \sin \varphi \sin(\beta + \varphi)] + \\ & 2r\dot{r}'[\sin(\beta + \varphi) \sin \varphi (\dot{\beta} + \dot{\varphi}) + \cos(\beta + \varphi) \cos \varphi (\dot{\beta} + \dot{\varphi})] + \\ & 2\dot{r}\dot{r}'[\cos(\beta + \varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \sin(\beta + \varphi)](\dot{\beta} + \dot{\varphi}) + \\ & 2r\dot{r}'[\dot{\varphi} \cos \varphi \sin(\beta + \varphi) - \dot{\varphi} \sin \varphi \cos(\beta + \varphi)] \quad (1.2) \end{aligned}$$

donde los últimos dos se *mueren* al aproximar. Finalmente el lagrangiano de pequeñas oscilaciones resulta en

$$\mathcal{L} = \frac{17}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r'}^2 + r'^2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})) + \frac{m}{2}(2\dot{r}\dot{r'} + 2\ell^2(\dot{\beta} + \dot{\varphi})\dot{\varphi}) - \frac{k_r r^2}{2} - \frac{k_{r'} r'^2}{2} - \frac{k_\beta \beta^2}{2}$$

en donde los  $r^2$  y  $r'^2$  son ambos  $\ell^2$ .

Definimos

$$\eta = \begin{pmatrix} r - \ell \\ r' - \ell \\ \beta - 0 \\ \varphi - 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{r'} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

siendo la posición de equilibrio



La matriz del potencial  $V$  es

$$V = \begin{pmatrix} k_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $k_r = 15k_{r'}$  y  $M_0 = 16M_H$  (check!).

Y ahora hay que armar la energía cinética  $T$  que resulta

$$T = \begin{pmatrix} 17m & m & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20m\ell^2 & 2m\ell^2 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 & m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Luego, el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^t \mathbb{T} \dot{\eta} - \frac{1}{2}\dot{\eta}^t \mathbb{V} \dot{\eta}$$

puede transformarse a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\xi}^t \dot{\xi} - \frac{1}{2}\dot{\xi}^t \omega^2 \dot{\xi}$$

y en estas nuevas coordenadas,

$$\ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = 0$$

y la solución son osciladores armónicos.

Para ello debería hallar  $A$ , donde

$$\bar{\eta} = A\bar{\xi}$$

que verifica  $A\mathbb{T}A^t = \mathbb{1}$  y  $A\mathbb{V}A^t = \omega$  de modo que necesito  $|\omega^2\bar{T} - \bar{V}| = |M| = 0$  donde es

$$M = \begin{pmatrix} 17m\omega^2 - k_r & m\omega^2 & 0 & 0 \\ m\omega^2 & m\omega^2 - k_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20m\ell^2\omega^2 - k_\alpha & 2m\ell^2\omega^2 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2\omega^2 & m\ell^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

Gracias a los bloques se hace menos trabajo, pués los autovalores de la matriz serán los de cada bloque. El primer bloque es

$$\begin{pmatrix} 17\frac{m\omega^2}{k_{r'}} - \frac{k_r}{k_{r'}} & \frac{m\omega^2}{k_{r'}} \\ \frac{m\omega^2}{k_{r'}} & \frac{m\omega^2}{k_{r'}} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\lambda - 15 & \lambda \\ \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$(17\lambda - 15)(\lambda - 1) - \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{15}{16} = 0$$

resulta en  $\lambda_{1,2} = 5/4, 3/4$  de modo que

$$\omega_1^2 = \frac{5}{4} \frac{k_{r'}}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3}{4} \frac{k_{r'}}{m}$$

El otro bloque es

$$\begin{pmatrix} 20\lambda - 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

de manera que

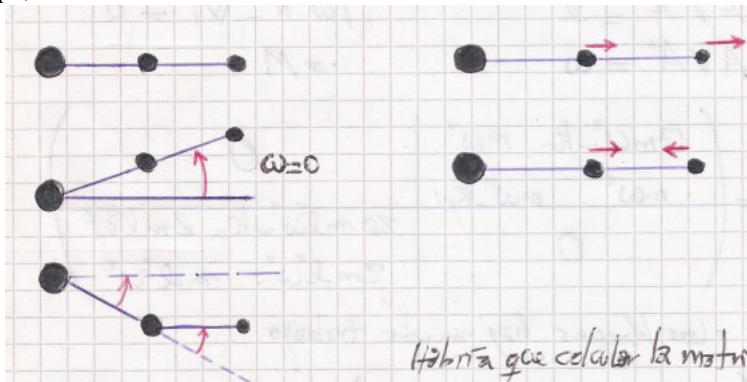
$$(20\lambda - 1)\lambda - 4\lambda^2 = 0$$

lo cual conduce a  $\lambda_{3,4} = 1/16, 0$ .

Los coeficientes de normalización serán

$$a_4 = c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad a_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquí la matriz se separó en bloques y entonces los autovalores serán independientes en cada bloque; no se mezclan entre sí.



Habrá que calcular ahora la matriz modal

$$\bar{a}_1^T \mathbb{T} \bar{a}_1 = 1,$$

que conduce a

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} c_1^2 m = 1$$

lo que arroja  $c_1 = 1/(4\sqrt{2m})$

$$(1 \quad 3) \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} c_2^2 m = 1$$

que da  $c_2 = c_1$ . Luego  $c_3 = 1/(4\sqrt{m\ell^2})$  y  $c_4$  quedó vacante. La matriz modal resulta

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2m}} & \frac{1}{4\sqrt{2m}} & 0 & 0 \\ \frac{-5}{4\sqrt{2m}} & \frac{3}{4\sqrt{2m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\sqrt{m\ell}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{4\sqrt{m\ell}} & \frac{1}{\sqrt{m\ell}} \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora el sistema moviéndose de acuerdo con

$$\bar{X} = 1\bar{\xi}_2 + 3\bar{\xi}_3$$

y entonces podemos pasar a las coordenadas originales,

$$A\bar{\xi}_2 + 3A\bar{\xi}_3$$

**Hay que revisar la notación aquí.**

## Capítulo 6

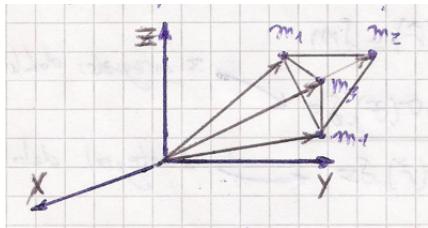
---

# Cuerpos rígidos

## 6.1 Cuerpos rígidos

Se pueden pensar como un sistema que interactúa a través de fuerzas de vínculo que están asociadas a la *condición de rigidez*. Los vínculos constituyen la condición de rigidez,

$$|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| = d_{ij} \quad i \neq j \quad (1.1)$$



Se asocia entonces al conjunto discreto de partículas. Entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2,$$

con la condición de rigidez de las  $N$  partículas.

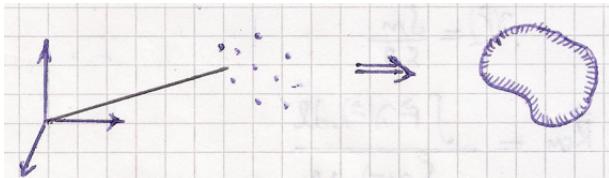
Luego se hace el pasaje del discreto al continuo, a través de la idea

$$\delta m = \rho(\boldsymbol{x}) \delta V.$$

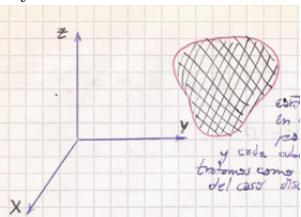
Las partículas están tan próximas que se puede pensar en una distribución continua de masa donde la masa de cada partícula se transforma en la masa de  $N$

cubitos pequeños, entonces

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \mathbf{R} = \frac{\int \rho \mathbf{x} dV}{\int \rho dV}$$



Se corta al cuerpo rígido en cubos (se partitiona) y cada cubito se trata como las  $m_i$  del caso discreto.



Como el volumen  $V$  del cuerpo es constante, se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty, \delta V \rightarrow 0} \delta V N = V$$

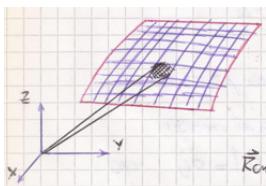
y el centro de masa cumple

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i \mathbf{x}_i \rho(\mathbf{x}_i) \delta V}{\sum_i \rho(\mathbf{x}_i) \delta V} \rightarrow \frac{\int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV}{\int \rho dV},$$

donde debemos notar que el numerador tiene el carácter vectorial porque son tres integrales triples.

Otros cuerpos rígidos son los que tienen una o dos dimensiones despreciables (una lámina o un alambre, respectivamente) que se pueden modelar considerando distribuciones de masa superficiales o longitudinales,

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\delta m}{\delta S}, \quad \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\delta m}{\delta \ell}$$



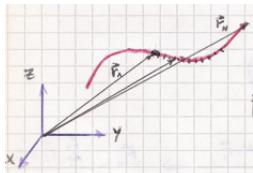
En relatividad restringida no existen cuerpos rígidos; a este nivel no nos preocupamos de ello. Buscaremos escribir el lagrangiano de cada tipo de cuerpo.

Para el caso 2D, será

$$\mathbf{R} = \frac{\int_S x \sigma x dS}{\int_S \sigma x dS},$$

y correspondientemente en el caso 1D

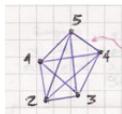
$$\mathbf{R} = \frac{\int x \lambda x d\ell}{\int \lambda x d\ell}.$$



Obviamente las abreviaturas  $\rho, \sigma, \lambda$  son una convención nuestra. Prestar atención a las unidades.

### 6.1.1 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Consideremos un cuerpo rígido de 5 grados de libertad como el de la figura,



Vemos que de entrada son ( $N2$ ) ecuaciones de vínculo (nro combinatorio) de manera que en este caso se tendrían  $3 \times 5 - 10 = 5$  grados de libertad. Pero esto está mal; estas ecuaciones sucede que no son independientes.

Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones (1.1)

Chequear lo del combinatorio y el resultado 10. No lo veo así fácil de una.

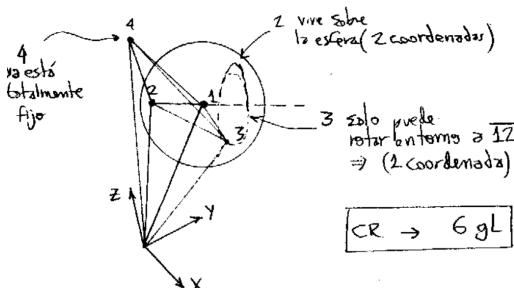
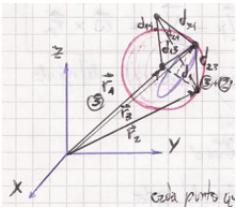
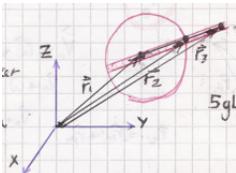


Figura 1.1



Examinando el dibujo de la figura sobre estas líneas vemos [¿?] que el segundo punto estará a distancia  $d_1$  de cualquier punto sobre la esfera (necesito dos coordenadas más). Para el punto 3 necesito un ángulo (una coordenada). Al agregar los siguientes puntos no se requieren nuevas coordenadas; cada punto que agrego viene con la distancia a todos los otros. Entonces, en tres dimensiones un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad.

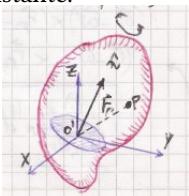
Si las condiciones de rigidez son lineales resultan cinco grados de libertad.



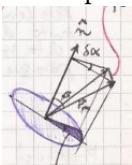
En un cuerpo lineal no tiene sentido la rotación del tercer punto  $x_3$ , entonces ahí se pierde una coordenada.

### 6.1.2 Velocidad de un cuerpo rígido

Lo único que pueden hacer los puntos de un cuerpo rígido, respecto de otro punto del mismo, es rotar puesto que el módulo de la distancia debe permanecer constante.



Con respecto a este gráfico superior, la construcción mostrada significa que



$$\delta r_{p_0} = r_{p_0} \sin(\beta) \delta \alpha = |\delta \mathbf{r}_{p_0}|$$

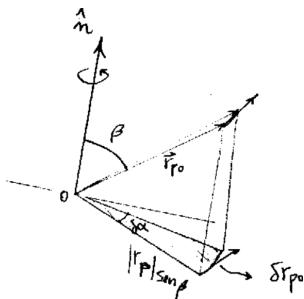


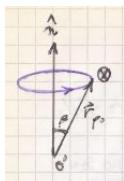
Figura 1.2

Luego, el módulo de la velocidad es

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta r_{p_0}}{\delta t} = r_{p_0} \sin(\beta) \frac{\delta \alpha}{\delta t},$$

o bien

$$v_{p_0} = \dot{\alpha} r_{p_0} \sin(\beta)$$



Dadas las direcciones mostradas en la figura de arriba se ve que la fórmula es el módulo de un producto vectorial entre  $\dot{\alpha} \equiv \omega$  y  $r_p$  y como el resultado es perpendicular a  $r_p$  y al vector  $\hat{n}$  se tiene  $\omega = \hat{w}\hat{n}$ .

pero  $v_{p_0} \perp \hat{n}$  y  $v_{p_0} \perp r_{p_0}$  de manera que

$$v_{p_0} = \Omega \times r_{p_0},$$

es la velocidad de rotación. Pero necesito ir a un sistema inercial para poder definir una velocidad que sirva para el cálculo del lagrangiano.

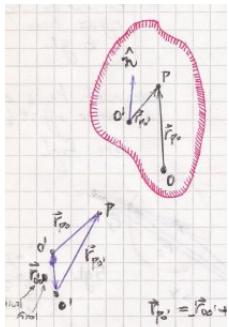
Luego, para ir a un sistema inercial le sumo la V de algún punto del rígido (el origen O) medido desde un sistema inercial. Entonces, el campo de velocidad del cuerpo rígido es

$$v_p = v_O + \Omega \times r_{p_0}.$$

de manera que la velocidad en un punto  $p$  es la suma entre el producto vectorial visto y la velocidad del origen no inercial  $O$ .

**La velocidad en el RHS es la medida desde un sistema inercial; tiene que quedar claro eso!**

### 6.1.3 Unicidad de la velocidad de rotación



Desde dos puntos arbitrarios del rígido 0 y 0', tomados como origen de un sistema no inercial de coordenadas, se puede escribir la velocidad de otro punto  $P$  como

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0}$$

siendo  $\boldsymbol{\Omega}'$  la  $\boldsymbol{\Omega}$  como se ve desde el sistema O'

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es la vista desde el sistema O.

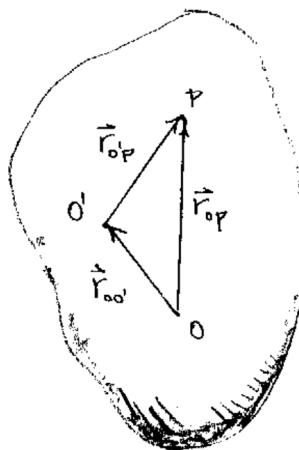


Figura 1.3

$$\mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y descomponiendo de acuerdo con el dibujo resulta

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_{00'} - \mathbf{r}_{0p}) + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = 0$$

$$(\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}_{0'p} = 0.$$

Pero como  $\mathbf{r}_{0'p}$  es cualquier punto del cuerpo rígido, debe darse que el paréntesis es nulo, de lo cual se deduce que  $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$ . Entonces,  $\boldsymbol{\Omega}$  es la misma para cualquier punto del cuerpo rígido.

Notemos la siguiente propiedad que emerge del producto escalar;

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{0p})$$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0$$

lo cual se cumple para todo punto  $p$  perteneciente al cuerpo rígido. Si es  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$  entonces serán  $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_0$  y  $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_p$ .

Si desde un sistema inercial vemos que  $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{v}_p$  entonces para todos los puntos del cuerpo  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a cualquier punto.

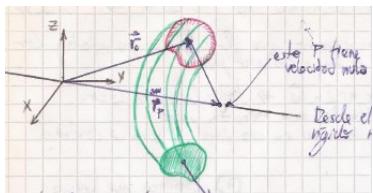
Si en un instante dado  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a  $\mathbf{V}_p$  entonces  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a  $\mathbf{V}_{p'}$  para todo punto del cuerpo rígido.

Si en un instante dado un punto es perpendicular a  $\omega$  entonces todos los puntos lo son. El cuerpo está sufriendo una rotación pura. Los puntos se mueven en una dirección o se mueven en la contraria.



La propiedad que acabamos de analizar garantiza que hay una rotación en torno algún eje; otra historia diferente es encontrarlo.

#### 6.1.4 Eje instantáneo de rotación



Si  $p$  es tal que  $V_p = 0$  entonces

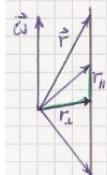
$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0} \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{V}_0$  es una velocidad desde un sistema inercial. Desde el sistema inercial el cuerpo rígido realiza una rotación pura, puesto que veo al punto O rotar en torno a algún eje. Es decir que el punto P determina un eje.

$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel) = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\perp$$

y esto define un eje instantáneo de rotación.

Como vale (1.2) se da que cualquiera de los  $\mathbf{r}$  de la figurilla debajo



verifica la condición predicha. Solo interesa la parte perpendicular. En este caso el cuerpo tiene un eje instantáneo de rotación.

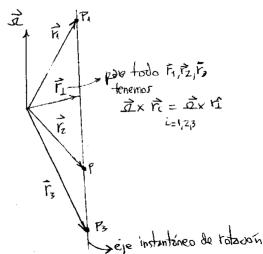


Figura 1.4

Se puede hallar un origen  $O$  tal que verifique

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_0^\perp + \mathbf{v}^\parallel + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

El movimiento más general de un cuerpo rígido es de translación y de rotación combinados.

## 6.2 Energía cinética del cuerpo rígido

Los vínculos del cuerpo rígido son holónomos, entonces podemos usar el lagrangiano Lag [?]

Queremos escribir la energía cinética de un cuerpo rígido explícitamente en términos del momento de inercia  $I$ .

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

donde la última  $\mathbf{r}_i$  está referida al centro de masa (posiciones de los puntos del cuerpo rígido referidas al centro de masa).

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm}^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i))$$

pero es fácil ver que el término de cruza es cero dado que

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = M \mathbf{R}_{cm} \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0$$

puesto que  $M \mathbf{R}_{cm}$  es nulo para un sistema no inercial. Luego

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

que utilizando la identidad vectorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

pasa a

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\Omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2)$$

pero veamos el último paréntesis en detalle,

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \Omega_j x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

insertando una delta de Kronecker

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

y reetiquetando

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_j \sum_k \Omega_j x_j^i \Omega_k x_k^i \right)$$

**Curso de indicial y Einstein convention.**

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k [\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i x_k^i]$$

Cambiar los  $r$  por  $x$ .

Reacomodando un poco,

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j \left( \sum_i^N m_i [\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i x_k^i] \right) \Omega_k$$

y surge explícito que aparece un ente matricial. Podemos escribir entonces

$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j I_{jk} \Omega_k$$

y como lo último es una forma cuadrática podemos escribir de manera más elegante en términos de la matriz  $\Omega$ ,

$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^t \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Omega},$$

donde la  $t$  supraíndice es por traspuesto.

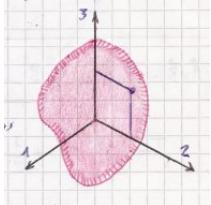
Recordemos que el tensor de inercia tiene en su diagonal los momentos de inercia mientras que los términos fuera de la misma son los productos de inercia. La expresión siguiente, con la delta de Kronecker, engloba los dos casos.

$$I_{ik} = \sum_q m_q (\delta_{ik}(x_q)^2 - x_i^q x_k^q)$$

y el paso al continuo nos deja los momentos de inercia,

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}) [\delta_{ik} r^2 - x_i x_k] dV$$

donde por supuesto es  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .



El cambio de sistema se hace de acuerdo a

$$I'_{ik} = \sum_{\ell s} a_{i\ell} I_{\ell s} a_{ks}$$

y en componentes,

$$\sum_q m_q (\delta_{ik} r'_q - x'_i x'_k) = a_{i\ell} a_{ks} \sum_q m_q (\delta_{\ell s} r_q^2 - x_\ell x_s)$$

donde en el miembro izquierdo es  $i \neq k$ , y el derecho  $\ell \neq s$

$$-\sum_q m_q x'_i x'_k = -\sum_q m_q a_{i\ell} x_\ell a_{ks} x_s$$

entonces

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

siendo el triángulo superior valores repetidos. El tensor de inercia es simétrico por su definición. De los nueve componentes son independientes seis. Matemáticamente

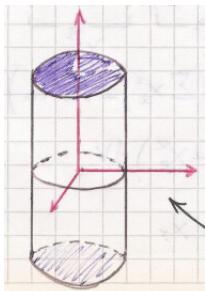
$$I_{ik} = I_{ki}.$$

Eligiendo convenientemente los ejes se puede llevar todo tensor simétrico a una forma diagonal. En ese caso

$$I' = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}$$

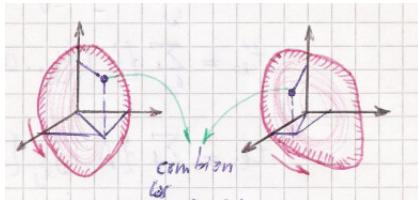
Los  $I'_{ik}$  son los momentos principales de inercia (aquellos que están calculados sobre *ejes principales de inercia*).

Cuando el cuerpo rígido tiene simetría pueden hallarse a ojo los ejes principales de inercia. Como por ejemplo un cilindro:

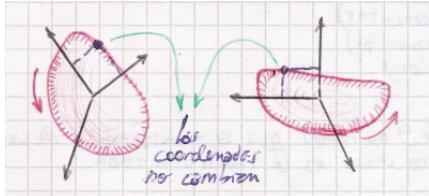


Sin embargo, los componentes del tensor dependen del tiempo debido a su movimiento,

**Hay un tema acá con el tiempo  $t$  y con la diagonalización.**



Entonces defino un sistema fijo al cuerpo. Para el cálculo de  $I$  se usa un sistema fijo al cuerpo rígido. Si usamos un sistema inercial, será  $I_{ik} = I_{ik}(t)$  lo cual no es conveniente.



y ahora tengo  $x \neq x(t)$  pero tengo cambiantes los ejes respecto al sistema inercial. Tomaremos 123 referido al sistema que rota y XYZ referido al sistema que se traslada. Necesitaré luego proyectar la rotación en el sistema inercial en los ejes que se trasladan sobre el cuerpo.

Es conveniente elegir 123 con origen en el centro de masa y partípices del movimiento del cuerpo rígido (clavados al mismo). Asimismo conviene elegir XYZ referidos al sistema inercial coincidentes pero trasladados al centro de masa. Así los  $I_{ik}$  resultan características geométricas del cuerpo.

Finalmente, resulta

$$T = \frac{1}{2} MV_{cm}^2 + \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$$

donde  $I$  son los momentos principales de inercia . Para obtener esta expresión necesito elegir bien el sistema coordenado en el cuerpo rígido.

Los momentos principales de inercia están tabulados para diversos cuerpos geométricos.

Cumplen la siguiente propiedad,

Está un poco desconexo esto porque falta algo de esa clase.  
pág. 64

$$I_i + I_j \geq I_k \quad \forall i, j, k$$

## 6.3 El tensor de inercia

Siendo  $I$  el tensor de inercia buscamos autovectores y autovalores del mismo. Es decir, soluciones a

$$I\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (3.1)$$

o bien en componentes

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j = \lambda v_i \quad (3.2)$$

que se trabaja así

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j - \lambda v_i = \sum_{j=1}^3 (I_{ij} - \delta_{ij} \lambda) v_j = 0$$

lo cual en extenso corresponde al siguiente sistema de tres ecuaciones

$$(I_{11} - \lambda) v_1 + I_{12} v_2 + I_{13} v_3 = 0$$

$$I_{21} v_1 + (I_{22} - \lambda) v_2 + I_{23} v_3 = 0$$

$$I_{31} v_1 + I_{32} v_2 + (I_{33} - \lambda) v_3 = 0$$

Evidentemente, el determinante de la matriz  $I - \lambda \mathbb{1}$  tiene que ser nulo. No obstante si  $I$  fuese un tensor cualquiera no se puede garantizar tres raíces reales del polinomio característico. Eso sucederá si la matriz del tensor resultara ser simétrica.

Ahora multiplicamos la ecuación (3.2) y su conjugada compleja (denotada por  $*$ ) por  $\sum_i v_i$  y  $\sum_i v_i^*$ , respectivamente, para obtener

$$\sum_i v_i \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^* = \lambda^* \sum_i v_i^* v_i$$

$$\sum_i v_i^* \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j = \lambda \sum_i v_i v_i^*$$

Ahora, restando ecuación a ecuación se tiene

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij} v_j^* - v_i^* I_{ij} v_j) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i,$$

y como se puede cambiar de índices en el segundo sumando del miembro izquierdo, puesto que los índices están sumados y son por ello mudos (*dummies*),

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij} v_j^* - v_j^* I_{ji} v_i) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

pero si usamos la propiedad de simetría del tensor de inercia  $I_{ij} = I_{ji}$  entonces

$$0 = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

de modo que como  $v$  es arbitrario se tiene la importante conclusión de que  $\lambda^* = \lambda$ . Los autovalores del tensor de inercia son reales.

Se tienen  $\lambda^s \in \mathbb{R}$  con  $s = 1, 2, 3$ . Hay que asociar los autovectores, que pueden ser complejos. Regresando al sistema de ecuaciones con un  $\lambda^s$  puedo escribir todo en función de cantidades  $v_i/v_1$ , esto es

$$(v_1^s, v_2^s(v_1), v_3^s(v_1)) e^{i\phi} \quad (3.3)$$

dado que una ecuación del sistema es linealmente dependiente [why?].

Como las cantidades  $v_2/v_1, v_3/v_1$  son reales es posible quedarse sin la fase del complejo (que es la misma para todos) y hacer los componentes reales. Los autovectores darán información sobre *direcciones*, que necesitan ser reales [?]. La ec. (3.3) determina una dirección y es todo cuanto necesitaré. A partir de allí calcularé el versor que me dará la dirección. Se requerirá que la norma del vector sea unitaria, i.e.

$$v_1^{s2} + v_2^s(v_1)^2 + v_3^s(v_1)^2 = 1.$$

Si en el sistema hay tres raíces idénticas, entonces la solución es  $\mathbb{R}^3$ , si hubiera dos es, en cambio, un plano,  $\mathbb{R}^2$ .

Sean  $\lambda^p \neq \lambda^s$  entonces

$$\sum_i v_i^p \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^s = \lambda^s \sum_i v_i^p v_i^s$$

$$\sum_i v_i^s \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^p = \lambda^p \sum_i v_i^s v_i^p$$

y restando ecuación a ecuación y cambiando subíndices como hicéramos oportunamente,

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i^p I_{ij} v_j^s - v_i^s I_{ij} v_j^p) = (\lambda^s - \lambda^p) \sum_i v_i^p v_i^s$$

luego como es nulo el miembro izquierdo resulta que

$$\sum_i v_i^p v_i^s = 0$$

de modo que  $v^p$  y  $v^s$  son ortogonales. Los autovectores correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales.

Si hay autovalores iguales se puede completar a tres autovectores ortogonales con el método de Gram-Schmidt [chequear si está bien escrito?].

En suma, con el tensor de inercia obtenemos tres direcciones ortogonales. A partir de (3.1), multiplicando por delante por otro autovector  $\mathbf{v}^{(p)}$ ,

$$\mathbf{v}^{(p)t} I \mathbf{v}^{(s)} = \lambda \mathbf{v}^{(p)t} \mathbf{v}^{(s)},$$

que define un producto matricial. En efecto, si se construye una matriz  $V = (v^s v^p v^q)$  la relación anterior será en todo su esplendor

$$V^t I V = \begin{pmatrix} v_1^s & v_2^s & v_3^s \\ v_1^p & v_2^p & v_3^p \\ v_1^q & v_2^q & v_3^q \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} v_1^s & v_1^p & v_1^q \\ v_2^s & v_2^p & v_2^q \\ v_3^s & v_3^p & v_3^q \end{pmatrix}$$

Como la norma de  $\mathbf{v}$  es unitaria, se tiene además

$$\mathbf{v}^t I \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^t \mathbf{v} = \lambda.$$

Entonces

$$V^t I V = \lambda \mathbf{1}$$

donde el  $\mathbf{1}$  es la matriz identidad. De esta manera,  $\lambda^s, \lambda^p, \lambda^q$  son los momentos principales de inercia

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^q \end{pmatrix}.$$

Vale, además, que

$$\lambda^s = \sum_{ij} v_i^s I_{ij} v_j^s > 0$$

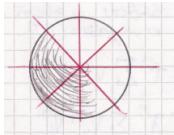
puesto que es una forma cuadrática y está definida positiva.

Los autovectores en fila dan la matriz  $A$  que se usará para pasar a un sistema *anclado* en el cuerpo rígido, que será lo cual permitirá escribir la energía cinética  $T$  como se ha visto.

**En la carpeta dice que habría que demostrarlo**

### 6.3.1 Simetrías y distribución de masa

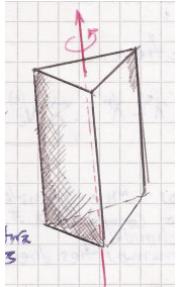
Un distribución de masa esférica  $\rho(r)$  tiene todas las direcciones equivalentes,



Para la esfera maciza, en cualquier dirección tendremos eje principal de inercia: todos los momentos de inercia serán iguales.

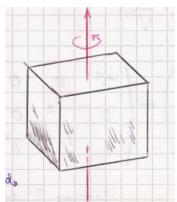
$$I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el paralelepípedo de la figura, rotando en  $2\pi/3$  tengo la misma situación física (eje de simetría de orden tres), entonces tengo eje principal de inercia allí. Es un eje de simetría de orden tres.

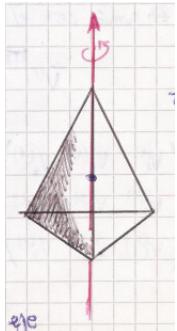


En este caso  $I = 1/2U\Omega^2 = 1/2I(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)$ .

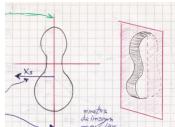
La caja se rota en  $\pi/2$  en cada uno de los tres ejes y las direcciones no cambian. Eje de simetría de orden cuatro. El cubo tiene los tres ejes de inercia iguales



Tetraedro no regular. Base equilátera. Un eje de rotación de algún orden es dirección de eje principal y en el plano perpendicular a dicho eje están [?]



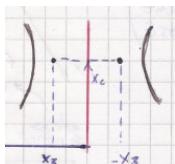
La guitarra tiene simetría de imagen espectral, como se visualiza en el lado derecho. En este caso tendremos una dirección principal de inercia perpendicular al plano rojo y que pasa por el centro de masa del cuerpo. Los otros dos ejes están contenidos en el plano.



[recorte o comentario de algún caso?] Si  $x_3$  es eje entonces  $I_{13}, I_{23}$  se cancelan de a pares y anulan los productos de inercia.

$$\sum m^q x_2^q x_3^q$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$



La idea es que si pienso en planos siempre se hacen nulos los productos de inercia rotacionales [?].

Para la siguiente figura el plano de simetría es eje principal, luego es eje principal de inercia.

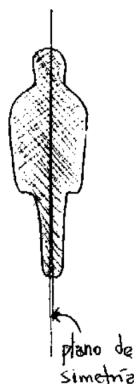


Figura 3.5

### 6.3.2 tensores -reubicar-

Ante un cambio de coordenadas un vector transforma

$$\mathbf{V}' = A\mathbf{V},$$

donde  $A$  es una matriz ortogonal. La idea es que no cualquier terna es un vector. Un tensor tiene la propiedad de transformarse

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j a_{\ell i} a_{sj} t_{ij}$$

o bien (haciendo énfasis en el producto matricial)

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j a_{\ell i} t_{ij} a_{sj}.$$

Si recuperamos desde esta notación de sumatoria la estructura matricial notamos que

$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j [AT]_{\ell j} a_{sj}$$

donde el factor  $a_{sj}$  no se puede sumar así como está. Trasponiéndolo sí se puede, y en efecto

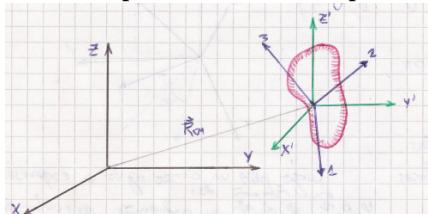
$$t'_{\ell s} = \sum_i \sum_j [AT]_{\ell j} [A]_{js},$$

de tal manera que la ley de transformación de un tensor de rango 2 es

$$T' = ATA^t.$$

## 6.4 Ángulos de Euler

Ahora faltaría escribir todo en buenas coordenadas generalizadas. Lo habitual es escribir en función de tres ángulos independientes. Euler inventó esta nomenclatura para estudiar el trompo.



Los cosenos directores son nueve, pero son dependientes. Consideraremos tres rotaciones, siendo su orden clave.

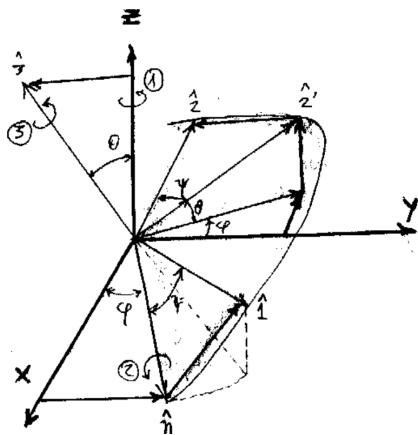
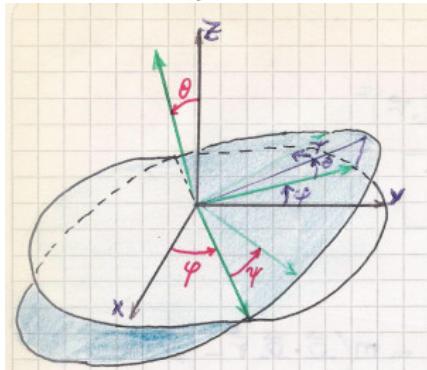
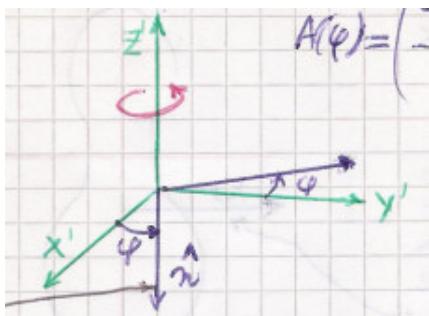


Figura 4.6

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial, 123 tiene origen en el centro de masa del cuerpo.



La primera rotación define  $\varphi$

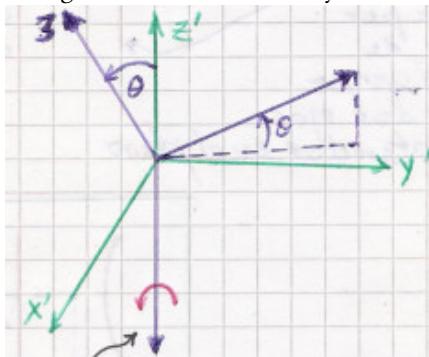


Se hace en torno a  $z'$  a través de la matriz

$$A_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector  $\hat{n}$  está sobre la línea de nodos.

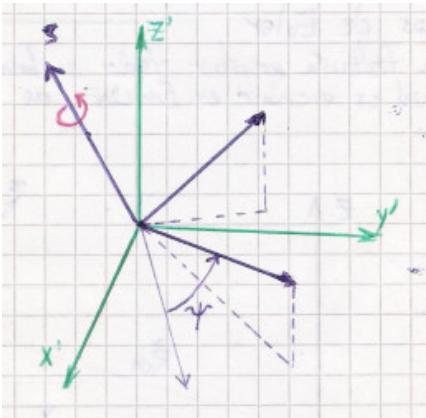
La segunda rotación define  $\theta$  y es de acuerdo a la siguiente matriz



El eje inferior no se ha movido en esta rotación (obsérvese el 1 en la matriz)

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La tercera rotación define  $\Psi$  y es en torno al eje  $z$



La matriz que la describe es

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, las coordenadas verifican

$$0 \leq \varphi, \Psi \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Los ángulos  $\theta, \varphi$  son variedades de los  $\varphi, \theta$  de coordenadas esféricas. Entonces, para un cuerpo rígido la velocidad de rotación se expresará en función de  $\varphi, \theta, \psi$  y sus derivadas  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  para describir también su evolución temporal. En efecto,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

y se debe expresar  $\hat{z}, \hat{n}$  en términos de  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  (que son los ejes fijos en el cuerpo). Como se tiene

$$\hat{z} = \sin \theta \sin \psi \hat{1} + \sin \theta \cos \psi \hat{2} + \cos \theta \hat{3} \quad \hat{n} = \cos \psi \hat{1} - \sin \psi \hat{2}$$

resulta la velocidad

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi)]\hat{1} + [\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi)]\hat{2} + [\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}]\hat{3}.$$

Son estas componentes las que entran en la escritura del lagrangiano de un cuerpo libre como

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2$$

Ahora estamos interesados en el momento angular.

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{spin}$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\mathbf{x}'_i \times \mathbf{v}'_i)$$

que están en el sistema 123 (desde el centro de masa).

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i [\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i)]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\Omega})]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i \left[ \boldsymbol{\Omega} \sum_j^3 (x_j^{2i}) - \mathbf{r}_i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

y la componente  $k$ -ésima será

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[ \Omega_k \sum_j^3 (x_j^{2i}) - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[ \sum_j^3 \delta_{kj} \Omega_j r_i^2 - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_j^3 \sum_i^N m_i [\delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i] \Omega_j = \sum_j^3 I_{kj} \Omega_j$$

o vectorialmente

$$\mathbf{L}_{spin} = I \boldsymbol{\Omega}$$

siendo  $I$  el tensor de inercia. Es claro que  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{L}$  no tienen porqué ser paralelos puesto que  $I$  es una matriz<sup>1</sup>. Explícitamente:

$$I_{kj} = \sum_i^N m_i [\delta_{kj} \mathbf{x}_i^2 - x_k^i x_j^i]$$

Hay diferencia entre las expresiones del  $L$  total.  
Resolver la convención!

Quilombo de notación!! ¡¡Fixear las diferentes  $x$ !!

Se puede resolver en forma sencilla un cuerpo rígido a partir de  $M d\mathbf{V}_{cm}/dt = \mathbf{F}$  y considerando  $I \boldsymbol{\omega} = \tau$ , donde esto último es el momento angular de spin. Esto solamente para casos sencillos, a lo F1.

---

<sup>1</sup>En los problemas sencillos de física 1 era un escalar

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Si le tomamos la derivada temporal,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I\boldsymbol{\Omega}) = \tau$$

donde resulta el torque con respecto al centro de masa. Si  $I$  no depende del tiempo,

$$I \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}) = \tau$$

El tensor depende del tiempo pues está derivado desde un sistema inercial, entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau,$$

que para un observador rotante no vale [?] y debe escribirse

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}_{me} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \tau$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es la del sistema rotante. Necesitaría un tensor escrito en el sistema cuerpo rígido (en los ejes principales). En este caso obtengo estas relaciones triviales. En efecto,

Sean 1,2,3 los ejes principales, entonces  $I$  es diagonal y

$$\mathbf{L}_{spin} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I\boldsymbol{\Omega}$$

Luego se puede escribir el torque con el operador siguiente

$$\frac{d}{dt} \Big|_{in} \square = \frac{d}{dt} \Big|_{rot} \square + \boldsymbol{\Omega} \times \square = \tau$$

para cuando  $\square$  es el momento angular [?]. que es válida para sistemas rotantes (no aquellos que rotan y se trasladan). En este caso  $\boldsymbol{\Omega}$  es la del sistema rotante (en un cuerpo rígido es la  $\boldsymbol{\Omega}$  del cuerpo rígido).

Se puede escribir también

$$\frac{d}{dt} \Big|_{in} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm}$$

$I = I(t)$  si lo describo desde un sistema inercial.  $I \leq I(t)$  si lo describo desde un sistema no inercial.

siendo la derivada de un sistema XYZ, y  $\mathbf{T}$  el torque del cuerpo rígido referido al centro de masa y medido desde el sistema XYZ (inercial). Entonces

$$\mathbf{T}_{cm} = \frac{d}{dt} \Big|_{rot} \mathbf{L}_{spin} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{L}_{spin})$$

y

$$\mathbf{T}_{cm} = I \frac{d}{dt} \Big|_{rot} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times (I \boldsymbol{\Omega}).$$

I visto desde XYZ es  $I = I(t)$  e I desde 123 es constante.

$$\mathbf{T}_{cm} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 \\ I_2 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \\ I_3 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1 \Omega_1 & I_2 \Omega_2 & I_3 \Omega_3 \end{vmatrix}$$

De este sistema resultan,

$$\begin{aligned} T_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 \\ T_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 \\ T_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Euler. Las mismas requieren  $I$  en ejes principales,  $\boldsymbol{\Omega}$  en 1,2,3 (en función de  $\phi, \theta, \psi$ ). Es  $\boldsymbol{\Omega}$  la velocidad de rotación del sistema cuerpo rígido (rotante) respecto a un sistema XYZ fijo en el centro de masa y coincidente con X'Y'Z' (inercial) a todo tiempo. Salvo la traslación del centro de masa, este sistema XYZ será inercial.

Todo este tratamiento de ecuaciones de Euler es para el caso  $\mathbf{L}_{spin} \equiv \mathbf{L}_{cm}^{sist}$ , de manera que no me importan las traslaciones del centro de masa.

$$\frac{d}{dt} \Big|_{XYZ} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm} = \frac{d}{dt} \Big|_{123} \mathbf{L}_{spin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_{spin}$$

Para una peonza esférica son  $I_1 = I_2 = I_3$ .

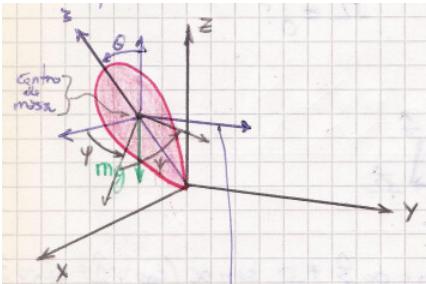
#### 6.4.1 La peonza simétrica

Es lo que vulgarmente se conoce como *trompo*. La energía cinética se compone de una parte de traslación y una de rotación, es decir  $T = T_{trasl} + T_{rot}$ . La velocidad angular del cuerpo y del sistema solidario al mismo es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\psi} \hat{x}_3$$

Hay que depurar bastante esta sección, y elegir una buena notación para el torque (no tengo un buen tau bold!)

Junté comentarios de dos clases teóricas en esta sección.



El sistema inercial se transporta al centro de masa, puesto que la idea es que se mide con respecto a un sistema que sólo se traslada. El sistema fijo al cuerpo garantiza un tensor independiente del tiempo, estacionaria <sup>2</sup>.

Cuando existe una simetría asociada no hace falta que las coordenadas sigan al cuerpo (aquellas que medirían esa simetría). En este caso, si no proyectó sobre todas las coordenadas, ya no es la proyección de la velocidad.

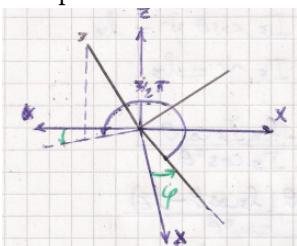
La terna derecha que usamos para proyectar los ángulos de Euler tiene que estar en las direcciones de los ejes principales de inercia, eso garantiza que podamos expresar la energía cinética de rotación según

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2$$

donde para el trompo son

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin(\theta) \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}$$

y debemos destacar que  $\psi = 0$  no es vínculo sino solo comodidad pues  $\dot{\psi} \neq 0$  y es independiente.



Los vínculos pueden escribirse

$$\theta_e = \theta$$

$$\phi_e + \frac{3}{2}\pi = \phi \rightarrow \dot{\phi}_e = \dot{\phi}$$

$$R_{cm}^2 = a^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 + z_{cm}^2$$

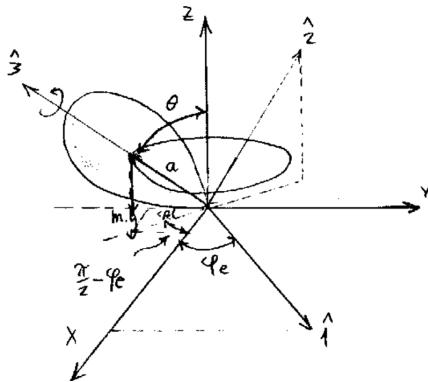


Figura 4.7

y las coordenadas

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = a \sin(\theta) \sin(\phi_e) \\ y &= a \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = -a \sin(\theta) \cos(\phi_e) \\ z &= a \cos(\theta) \end{aligned}$$

Luego, la energía  $T_{trasl}$  se puede poner en términos de los ángulos de Euler, a través de la velocidad del centro de masas, que verifica

$$V_{cm}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}_e^2.$$

Pero esta velocidad del centro de masas tiene parte de la cinética de rotación, y entonces se puede reescribir la energía cinética como

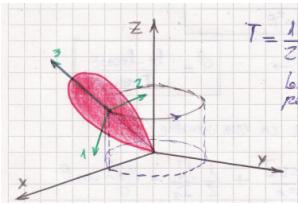
$$T = \frac{1}{2} M(a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}_e^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}_e^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

pero por la simetría  $I_1 = I_2 \equiv I$  de modo que

$$T = \frac{1}{2} Ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\phi}_e^2) + \frac{1}{2} I(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\phi}_e^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2,$$

---

<sup>2</sup>Es decir, una distribución de masa que no depende del tiempo



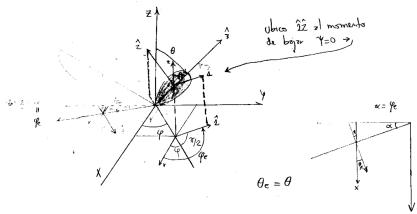
y el lagrangiano es, finalmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(Ma^2 + I)(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mga\cos(\theta)$$

donde los primeros dos términos representan una rotación pura si tomo

$$(Ma^2 + I) \equiv I'$$

donde  $I'$  es otro momento de inercia.



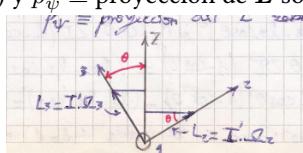
**Figura 4.8**

Este sistema tiene como constantes de movimiento

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I' \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \quad (4.1)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \quad (4.2)$$

La variación de  $\varphi, \psi$  son ambas rotaciones rígidas, entonces si se conservan sus momentos canónicos conjugados será  $p_\varphi \equiv$  proyección de  $\mathbf{L}$  sobre el eje  $z$  ( $\ell_z$ ) y  $p_\psi \equiv$  proyección de  $\mathbf{L}$  sobre el eje 3 ( $\ell_3$ ).



En la figura sobre estas líneas se ve que  $\ell_z$  es lo que corresponde.

$$I_3 \Omega_3 \cos \theta = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \sin \theta$$

$$I \Omega_2 \sin \theta = I' \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

y  $\ell_z$  es una constante que está presente siempre porque las proyecciones no dependen de  $\varphi$ .

Además, se conserva la energía (y coincidirá con el hamiltoniano); es más engorroso resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Usaremos las constantes  $\ell_z, \ell_3$  (según los momentos conjugados en (4.1) y (4.2)). Entonces podemos despejar

$$\dot{\psi} = \frac{\ell_3}{I_3} + \frac{(\ell_3 \cos \theta - \ell_z) \cos \theta}{I' \sin^2 \theta}$$

y

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell_z - \ell_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta}$$

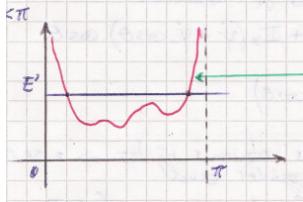
Amasando y haciendo álgebra se llega a un problema en una única variable  $\theta$ ,

$$E = \frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + \frac{(\ell_z - \ell_3 \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{\ell_3^2}{I_3} + Mga \cos \theta$$

y redefino

$$E' \equiv E - \frac{1}{2} \frac{\ell_3^2}{I_3} = \frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + \frac{(\ell_z - \ell_3 \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta} + Mga \cos \theta$$

donde el *potencial* resultante tendrá alguna forma como se muestra en la figura debajo, para  $0 \leq \theta \leq \pi$

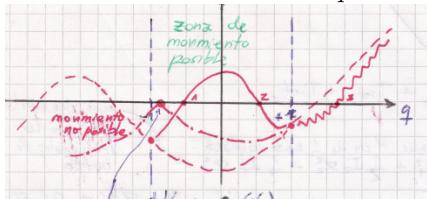


Los puntos  $E' = V$  son un polinomio cúbico en  $\cos \theta$ . Haciendo un poco de álgebra en la energía  $E'$ ,

$$2I'(E' - Mga \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) - (\ell_z - \ell_3 \cos \theta)^2 = I'^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = I'^2 \left( \frac{d \cos \theta}{dt} \right)^2.$$

Este polinomio debe satisfacer ser no nulo durante todo el movimiento. Luego, definiendo  $q \equiv \cos \theta$ , se tiene que como cambia de signo en el límite  $q \rightarrow +\infty$

y en  $q \rightarrow -\infty$  debe tener una raíz. Además  $q = 1$  y  $q = -1$  están debajo del cero. Entonces tendrá una raíz en  $q > 1$

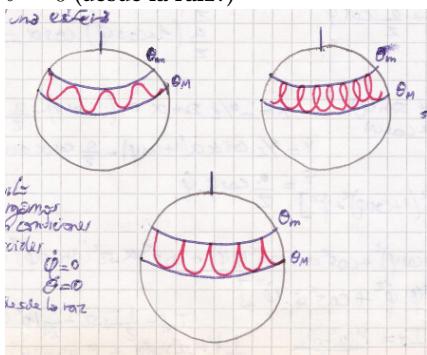


Tiene una raíz doble en  $q < 1$  (ver figura sobre estas líneas) y entonces  $\theta_0(\text{cte})$  equivale a una órbita circular de fuerzas centrales.  $\dot{\theta} = 0$

El trompo se mueve entre  $\theta_m$  y  $\theta_M$  y además tiene tres movimientos dados por los ángulos

$$\begin{cases} \varphi & \text{ángulo de precesión} \\ \theta & \text{ángulo de nutación} \\ \psi & \text{ángulo de rotación propia} \end{cases}$$

El eje del trompo se puede representar en una esfera (ver figura bajo estas líneas). La imagen superior de la derecha corresponde al caso en que  $\varphi$  cambia de signo. La imagen inferior se da si es largado desde condiciones iniciales  $\dot{\varphi} = 0$  y  $\dot{\theta} = 0$  (desde la raíz?)



Luego hay unos interesantes comentarios sobre la ubicación de los ejes. El famoso “bajo ejes”.

$$T = T_{trasl} + T_{rot} + T_{acopl}$$

y el último es nulo si elegimos el origen común O=O'= centro de masa.

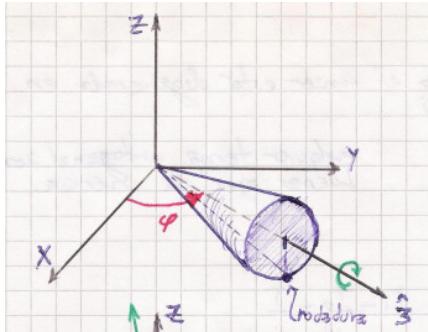
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

También es  $T_{acopl} = 0$  si  $V_0 = 0$  (aquí también se anula  $T_{trasl}$ ).

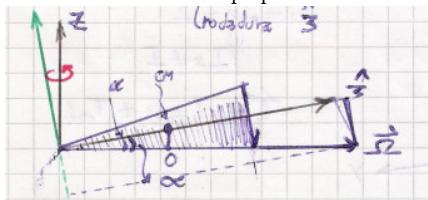
**Comentario respecto a Euler angles:** las rotaciones que dan los ángulos de Euler son sobre ejes distintos; esto da el problema, no son una base ortogonal  $z, \xi, \hat{3}$

**EJEMPLO 4.1 Problema 4c**

Suponemos que en esta situación hay rodadura.



La condición de rodadura proporciona bastante información.



Queremos escribir el vector velocidad angular en función de los ejes definidos en la figura.

Entonces

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos \alpha \hat{z} + \Omega \sin \alpha (\cos \psi \hat{1} + \sin \psi \hat{2})$$

Luego, como

$$\mathbf{v}_0 = 0 = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0,$$

será

$$v_{cm} = \Omega a \sin \alpha$$

y el centro de masa describe una circunferencia en torno a  $z$ , de radio  $a \cos \alpha$  con velocidad tangencial dada por

$$v_{cm} = \dot{\phi} a \cos \alpha.$$

Ahora se puede calcular la energía cinética, que será

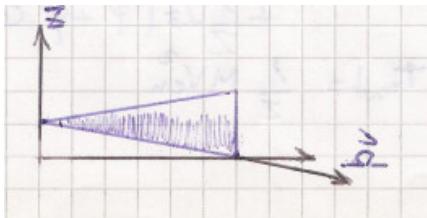
$$T = \frac{1}{2} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \Omega^t I \Omega$$

$$T = \frac{1}{2} m a^2 \cos^2 \alpha \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

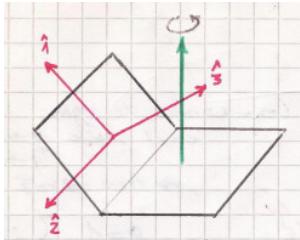
y usando que  $I_1 = I_2$  por simetría

$$T = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha (m a^2 + I_1 + I_3 \cot^2 \alpha) \dot{\phi}^2$$

**Habría que hacer la cuenta prolífica y llegar bien al resultado final.**



## EJEMPLO 4.2 Problema 8



Acá surge un problema; y es que la fuerza centrifuga no es uniforme a través de todo el cuerpo, entonces no es válido que vale considerarla aplicada en el centro de masas.

El lagrangiano será

$$\mathcal{L} = T_{trasl1} + T_{trasl2} + T_{rot1} + T_{rot2}$$

y la primer energía cinética será nula pués el centro de masas no se desplaza. Para la de rotación elegimos los ejes como los ejes principales de inercia y

$$T_{rot1} = \frac{1}{2} I_3 \Omega^2,$$

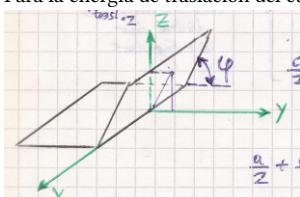
pués  $\Omega = \Omega \hat{z}$  (de modo que  $\Omega_1, \Omega_2 = 0$ ).



Luego  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{1}$  y  $\Omega_{tot} = \dot{\varphi} \hat{1} - \Omega \sin \varphi \hat{2} + \Omega \cos \varphi \hat{3}$  de modo que

$$T_{rot2} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \cos^2 \varphi$$

Para la energía de traslación del cuerpo 2



se tienen las relaciones

$$x_{cm} = \frac{a}{2} \cos \alpha (1 + \sin \alpha) \quad y_{cm} = \frac{a}{2} \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \quad z_{cm} = \frac{a}{2} \sin \varphi$$

Calculando las derivadas temporales de estas expresiones y construyendo  $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  [esto es un guess, hay que confirmarlo] se llega luego de un tiempo a

$$T_{tras} = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 = \frac{Ma^2}{8} [\Omega^2 (1 + \cos \varphi)^2 + \dot{\varphi}^2]$$

Los momentos de inercia por su parte son

$$I_1 = \frac{Ma^2}{12} \quad I_2 = \frac{Mb^2}{12} \quad I_3 = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

Juntando todo, el lagrangiano será

$$\mathcal{L} = \frac{Ma^2}{6} \dot{\varphi}^2 + \frac{Ma^2}{6} \Omega^2 \cos^2 \varphi + \frac{Ma^2}{8} \Omega^2 2 \cos \varphi,$$

en el cual los dos últimos términos pueden considerarse un potencial efectivo  $V_{eff}(\varphi)$ . Igualando a cero la derivada del potencial efectivo  $\partial V_{eff}/\partial \varphi = 0$  se llega a

$$\sin \varphi \left( \frac{3}{4} + \cos \varphi \right) = 0,$$

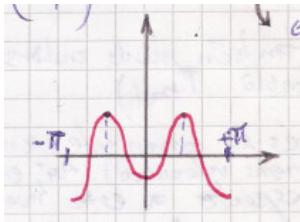
que tiene dos soluciones estables,

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) = \pm 138^\circ$$

y dos inestables

$$\varphi = \pi \quad \varphi = -\pi$$

Supongamos [?] que queremos ver si los equilibrios hallados son estables.



Calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, que serán

$$\frac{Ma^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{Ma^2}{3} \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{Ma^2}{4} \Omega^2 \sin \varphi = 0$$

Considerando pequeñas oscilaciones con  $\varphi \sim 0$  se tiene

$$\ddot{\varphi} + \frac{7}{4} \Omega^2 \varphi = 0,$$

que no es otra cosa que un oscilador armónico. La solución es  $\varphi_0$  tal que  $\cos \varphi_0 = -3/4$ , y usando las fórmulas del seno y el coseno de la suma de dos ángulos (ver Apéndice X) se tiene que

$$\Delta \ddot{\varphi} + \Omega^2 [\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \Delta \varphi - \sin^2 \varphi_0 \Delta \varphi] + \frac{3}{4} \Omega^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0,$$

**Acá hay un hueco en el sentido de que tendría que chequear que las cuentas dan lo que se dice que dan.**

**Acá no está claro qué se sabe. Si sé que son los dos primeros estables, y los segundos inestables ya está. Pareciera que se procede luego como si no se supiera que el equilibrio estable es estable y se hace la perturbación para conseguir el comportamiento. ¡Pero resulta inestable luego! Habría que ver la práctica para dirimir.**

expresión que luego de un poco de álgebra,

$$\Delta\ddot{\varphi} - \frac{7}{16}\Omega^2\Delta\varphi = 0,$$

y entonces resulta que el equilibrio es inestable.

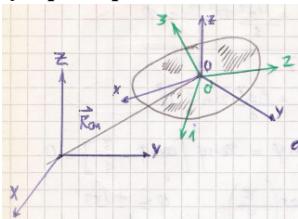
En el caso (b) [?] con gravedad, se tiene

$$V = Mg z_{cm2} = Mg \frac{a}{2} \sin \varphi$$

y desaparecen los equilibrios de  $\pm 138^\circ$ .

## 6.5 Teorema de Steiner

. Consideremos el siguiente cuerpo rígido, donde los ejes 123 para que sean los ejes principales de inercia, así



la energía de rotación es, con respecto al origen  $O'$ ,

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i^2 \right)$$

y la energía cinética total

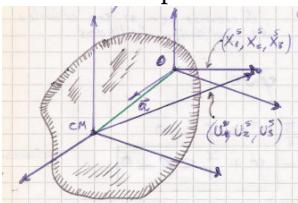
$$T = T_{trasl} + T_{rot} + T_{acopl}$$

siendo la última nula si expresamos todo con respecto a  $O'$ . La velocidad es

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

También puede anularse  $T_{acopl}$  si se eligen  $V_0$  nula (también se anula  $T_{trasl}$  en este caso).

A veces es conveniente escribir respecto de un punto así que está fijo (no tiene velocidad). De esa manera, el tensor de inercia debe reescribirse con respecto a ese nuevo punto.



Tal vez haya que trasladar lo de Steiner hacia atrás o bien traer temas desde atrás hacia adelante

Entonces quisiéramos ver como se escribe en un nuevo sistema de origen  $O$  trasladado desde el centro de masas de forma paralela. La traslación es

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} - \mathbf{a}$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} \mathbf{x}_s^2 - x_i^s x_j^s)$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} (\mathbf{U}_s - \mathbf{a})^2 - (U_i^s - a_i)(U_j^s - a_j))$$

Trasladamos el punto (con el sistema de ejes paralelo al del centro de masa) sin

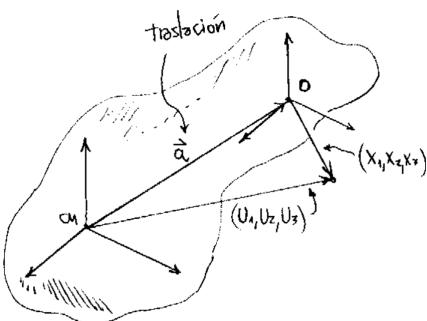


Figura 5.9

rotarlo. Eso es importante.

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s [\delta_{ij} (U_s^2 + a^2 - 2Ua) - (U_i^s U_j^s + a_i a_j - a_i U_j^s - a_j U_i^s)]$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) - \sum_s^N m^s \delta_{ij} 2U^s a + \sum_s^N m^s (a_i U_j^s + a_j U_i^s)$$

pero las dos últimas sumatorias se anulan, y

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) = I_{ij}^{cm} + M(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j).$$

Esto sale de

$$\sum_s^N m^s \delta_{ij} U^s a = \delta_{ij} a \sum_s^N m^s U^s = 0,$$

**Si se rotan los ejes entre sí, entonces hay rotación presente y las expresiones siguientes no serán válidas.**

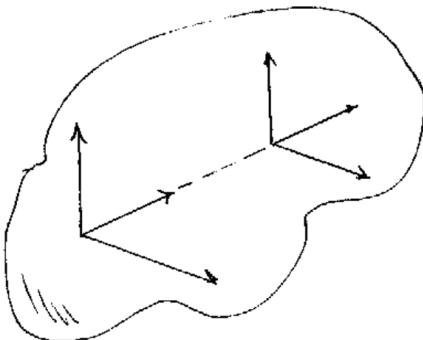


Figura 5.10

que se cumple porque es nula la suma en  $s$ . Dado que esto vale vectorialmente,

$$0 = \sum_s^N m^s \mathbf{U}^s = \sum_s^N m^s (U_1^s \hat{1} + U_2^s \hat{2} + U_3^s \hat{3})$$

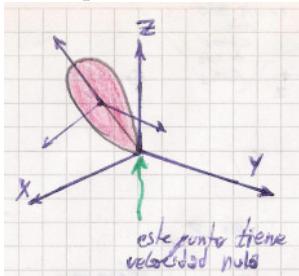
vale en particular para cada coordenada, entonces

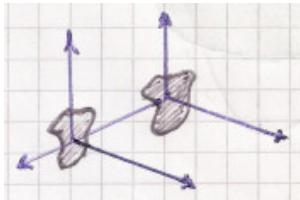
$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s \quad \forall i = 1, 2, 3$$

y también

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s a.$$

La moraleja es que trasladar en un solo eje conserva la diagonalidad del tensor de inercia. La forma diagonal del tensor se conserva si se anulan los productos de inercia; pero esto sólo ocurre si traslado en un solo eje.





## 6.6 Movimiento de un cuerpo asimétrico

Como la energía se conserva es

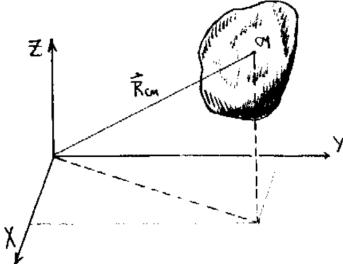
$$E = T + V = T + Mgz_{cm},$$

o bien,

$$E = T_{trasl} + T_{rot} + V(X_{cm})$$

donde cada una se conservan separadamente  $T_{trasl} + V$  y  $T_{rot}$ . Se tiene también

$$\mathbf{L}_{spin} = I\boldsymbol{\Omega}$$



**Figura 6.11**

Usaremos una notación en la cual el subíndice refiere a referido a y el superíndice a de qué puntos/puntos

$$\mathbf{L}|_0^{sist} = \mathbf{L}_{orb}|_0^{cm} + \mathbf{L}_{spin}|_{cm}^{sist}$$

$$\left. \frac{d\mathbf{L}^{orb}}{dt} \right|_{in} = \tau_0^{cm} = \mathbf{x}_{cm} \times \mathbf{F} = \mathbf{x}_{cm} \times -Mg\hat{z} \neq 0$$

de tal manera que el  $\mathbf{L}^{orb} \equiv \mathbf{L}_0^{cm}$  no se conserva.

El que se conserva es  $L^{spin}$  pues pensamos la  $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$  aplicada en el centro de masa que es el origen y que tiene  $x_{cm} = 0$ .

$$\mathbf{L}^{spin} = L_1 \hat{1} + L_2 \hat{2} + L_3 \hat{3} = I_1 \Omega_1 \hat{1} + I_2 \Omega_2 \hat{2} + I_3 \Omega_3 \hat{3}$$

y podemos escribir

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

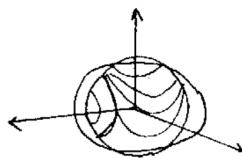
$$T_{rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

$$1 = \frac{L_1^2}{2I_1 T_{rot}} + \frac{L_2^2}{2I_2 T_{rot}} + \frac{L_3^2}{2I_3 T_{rot}}$$

Nótese que  $L_0^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$  es un vínculo. Para un observador en el cuerpo,  $L^{spin}$  rota en una esfera pero  $L^{spin}$  para  $XYZ$  es fijo en el espacio.



Entonces,  $L^{spin}$  se mueve en la intersección de un elipsoide y una esfera lo cual implica una relación entre radios [?], como se intenta hacer notar en las pobres ilustraciones sobre estas líneas.



**Figura 6.12**

Entonces, si se da que  $I_3 > I_2 > I_1$  se tiene

$$L_{spin}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad L^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2$$

donde como se conservan  $T_{rot} \equiv T$  y  $L_{spin} \equiv L$

$$2T = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

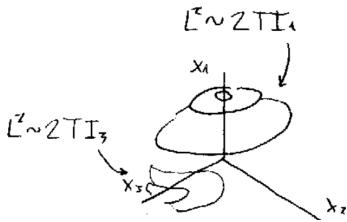


Figura 6.13

de la primera deducimos un elipsoide de semiejes en  $L_i$  y de la segunda una esfera de radio  $L$  en  $L_i$ .

Si se verifica [?]

$$2I_3T > 2I_2T > 2I_1T$$

$$L^2 > 2I_3T \quad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 > \frac{I_3}{I_1}L_1^2 + \frac{I_3}{I_2}L_2^2 + L_3^2$$

$$L_1^2 \left( \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) + L_2^2 \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) > 0$$

pero esto no vale. Asimismo tampoco vale que

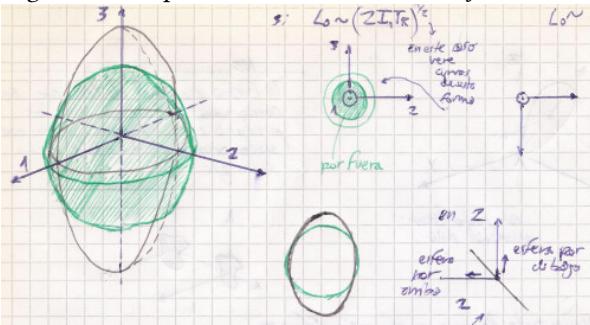
$$L^2 < 2I_1T$$

y resulta la condición para que sea posible el movimiento, que es

$$2I_3T > L^2 > 2I_1T,$$

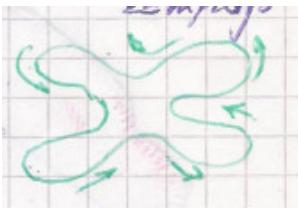
entonces  $L_{spin}$  (su punta) se mueve en la intersección de una esfera y un elipsoide. Estos movimientos son periódicos.

Algunos casos particulares se ilustran debajo de estas líneas,



Si  $L_0 \sim 2I_2 I_3$  el movimiento es muy complejo, como la flor

**Esto está super oscuro. No sé qué se quiso decir, tal vez se halle explicado mejor en la carpeta.**



donde la punta del  $L_0$  describe una figura pesadillezca.  
Esto se puede resolver a partir de sus ecuaciones de Euler,

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = 0 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 = 0 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 = 0 \end{cases}$$

cuya linealización con prescripción

$$\Omega_3 = \Omega_0 + \varepsilon_3(t) \quad \Omega_2 = \varepsilon_2(t) \quad \Omega_1 = \varepsilon_1(t)$$

siendo  $\varepsilon_i \ll \Omega_0$  conduce a

$$\frac{d\Omega_3}{dt} \approx 0,$$

de manera que  $\Omega_3 \sim \Omega_0$  y se tienen

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \varepsilon_2 \Omega_0 = 0 \\ \frac{d^2\varepsilon_2}{dt^2} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \Omega_0 = 0 \end{cases}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones se llega a

$$\frac{d^2\varepsilon_2}{dt^2} + \omega^2 \varepsilon_2 = 0$$

donde es

$$\omega^2 = \Omega_0^2 \frac{I_1 - I_3}{I_2} \frac{I_3 - I_2}{I_1}.$$

Si se da  $\omega^2 > 0$  entonces se tiene un oscilador armónico y  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_2^0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Pero para el comportamiento armónico son necesarios

$$I_3 > I_1 \text{ y } I_3 > I_2 \quad \text{o} \quad I_3 < I_1 \text{ y } I_3 < I_2$$

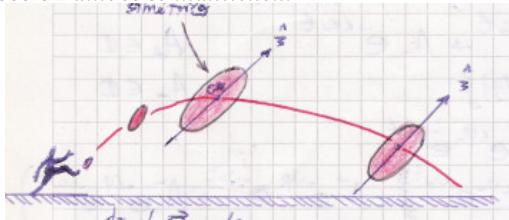
Si  $\Omega_3$  apunta inicialmente en dirección de un momento de inercia mayor, entonces  $\Omega$  se conserva más o menos en la misma dirección

Eje 3 momento de inercia mayor o el menor [?]



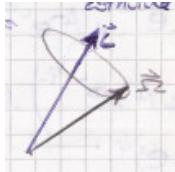
Si  $\omega^2 < 0$  el movimiento es inestable. Sucede cuando  $I_3$  es el momento de inercia intermedio. En las ecuaciones crece el  $\Omega_3$  y se va de ser pequeño (y deja de valer la linealización).

Consideremos ahora un caso  $L_3 = L_z = I\Omega_3$ . Si le doy un  $L_3$  en el vedor  $\hat{3}$  se conserva y el  $\Omega$  debe ser constante.  $L$  es constante si  $\Omega$  coincide en la dirección *ambos se mantienen*.



En la figurita cortesía del alumno Lavia, vemos que dar el  $\Omega$  en la dirección del eje principal significa que  $L$  y  $\Omega$  serán paralelos y constantes ambos.

$L$  es constante si  $\Omega$  no coincide con  $L$  entonces  $\Omega$  hace un trompo en torno a  $L$ .



El asunto acá es que siempre que hablamos de  $L$  es el  $L$  de spin (medido respecto al centro de masas).

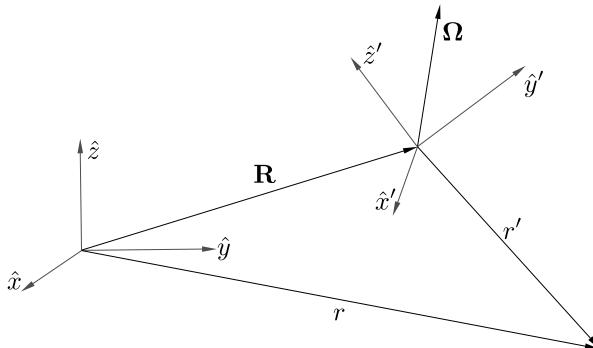
El giróscopo por ejemplo funciona de manera que se le proporciona un  $L$  que permanece constante. No importa cómo lo movamos, apuntará en la dirección del momento angular original  $L$ .

La peonza tiene movimientos estables para la rotación en torno a  $\hat{x}_1, \hat{x}_3$  pero inestables en torno a  $\hat{x}_2$ . El movimiento puede resolverse mediante ecuaciones de Euler. Es estable rotar en torno al mayor o menor momento de inercia lo que generará un movimiento oscilatorio para  $\Omega$  ( $\omega^2 > 0$ ), en cambio es inestable rotar en torno al momento de inercia intermedio, lo cual generará un movimiento armónico para  $\Omega$  ( $\omega^2 < 0$ ).

Con  $\mathbf{L}$  constante si  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\Omega}$  entonces ambos son constantes (corresponde a una rotación). Se consigue con  $\boldsymbol{\Omega}$  en la dirección del eje principal. Si  $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\Omega}$  entonces  $\boldsymbol{\Omega}$  oscila en torno a  $\mathbf{L}$ .

## 6.7 Sistemas no inerciales

Habría que pasar los  $r$  a  $x$ .



**Figura 7.14** Sistemas rotantes.

$\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular del sistema no inercial.  $\ddot{\mathbf{R}}$  es la aceleración del sistema no inercial. Ambas se miden sólo desde el sistema inercial.

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_{in} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{in}$$

si despejamos la derivada respecto del sistema primado,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{in} - \frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_{in}$$

y usamos

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{no\text{in}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

va resultando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{no\text{in}} \right)\Big|_{in} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big|_{in} - \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\Big|_{in} - \frac{d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')}{dt}\Big|_{in}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\Big|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin} = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\Big|_{in} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{in}$$

donde hemos usado que

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\Big|_{noin}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_{in} = -\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_{noin}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\Big|_{noin} + \left( \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin} \right) = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\Big|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \right] \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left[ \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \right]$$

$$\mathbf{a}'|_{noin} = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}') - \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin}$$

$$\mathbf{a}'|_{noin} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}')$$

Vale la pena aclarar la deducción,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_{in} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

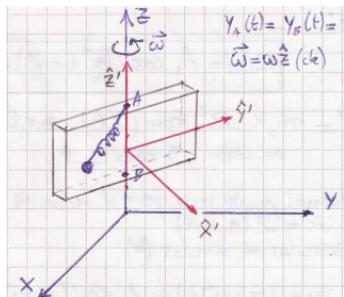
pero si es  $\mathbf{R} = 0$  se tiene  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  y entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{in} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

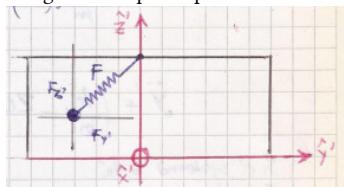
donde el sistema no inercial es el rotante.

### EJEMPLO 7.1 Sistema rotante con resorte divertido

El sistema físico está mostrado en la ilustración bajo estas líneas.



El siguiente esquema permite ver la descomposición de fuerzas



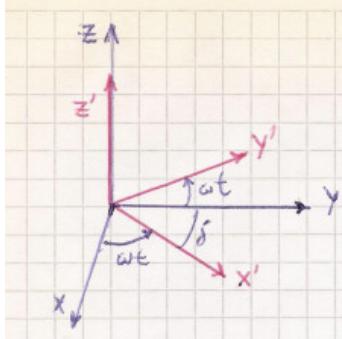
$$Y_A(t) = Y_B(t) = Y_0 \sin(\Omega t) \hat{y} \quad \omega = \omega z$$

siendo  $\omega$  una constante.

$$F'_y = -ky' \hat{y}' \quad F'_z = k(z'_0 - z) \hat{z}'$$

y la aceleración es

$$m\ddot{\mathbf{a}}' = -ky' \ddot{y}' + k(z'_0 - z) \ddot{z}' + y_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \hat{y} - 2m\omega \hat{z}' \times (\omega \hat{z}' \times [y' \hat{y}' + z' \hat{z}']) - 2m\omega \hat{z}' \times (\dot{y}' \hat{y}' + \dot{z}' \hat{z}')$$



$$\ddot{y} = (\hat{y} \cdot \hat{x}') \hat{x}' + (\hat{y} \cdot \hat{x}') \hat{y}' + \underbrace{(\hat{y} \cdot \hat{z}') \hat{z}'}_{=0} = \sin(\omega t) \hat{x}' + \cos(\omega t) \hat{y}'$$

y como  $\delta = \pi/2 - \omega t$  se tiene

$$\cos \delta = \cos(\pi/2 - \omega t) = \sin(\omega t)$$

Luego,

$$\ddot{y}' \quad m\ddot{y}' = -ky' + 2m\omega^2 y' + my_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

$$\ddot{z}' \quad m\ddot{z}' = k(z'_0 - z')$$

$$\ddot{x}' \quad 0 = F_v + 2m\omega \dot{y}' + my_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$$

donde la última componente no me interesa. De las componentes  $\hat{y}', \hat{z}'$  surge la solución (que es del tipo oscilador armónico)

$$\ddot{z}' + \frac{k}{m} z' = \frac{k}{m} z'_0$$

de manera que

$$z(t) = A_z \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_z \right) + z'_0.$$

$$\ddot{y}' + \left( \frac{k}{m} - 2\omega^2 \right) y' = my_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

donde se ve que es un oscilador forzado. Si el sistema está forzado, entonces no se conserva la energía.

Pero además puede verse por el hecho de que el lagrangiano depende del tiempo a través de los vínculos. Es decir que tenemos vínculos dependientes del tiempo.

$$\sin(\Omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin([\Omega + \omega]t) + \frac{1}{2} \sin([\Omega - \omega]t)$$

Propongo una solución particular

$$y_{part} = A_+ \cos([\Omega + \omega]t) + B_+ \sin([\Omega + \omega]t) + A_- \cos([\Omega - \omega]t) + B_- \sin([\Omega - \omega]t)$$

Luego de hacer el álgebra correspondiente se llega a los valores de las amplitudes que son

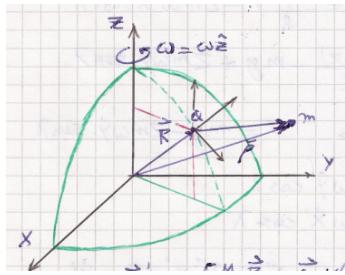
$$A_+ = \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega + \omega)^2]} A_- = \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega - \omega)^2]} B_+ = 0 B_- = 0$$

Puede haber resonancia si el denominador se hace muy chico. Juntando todo,

$$y'(t) = y'_h(t) + y'_{part}(t)$$

$$y'(t) = A_{||} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m} - 2\omega^2} + \varphi_H \right) + \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega + \omega)^2]} \cos([\Omega + \omega]t) + \frac{y_0 \Omega^2}{2[(k/m - 2\omega^2) - (\Omega - \omega)^2]} \cos([\Omega - \omega]t)$$

#### EJEMPLO 7.2 Problema 7 –reticular luego–



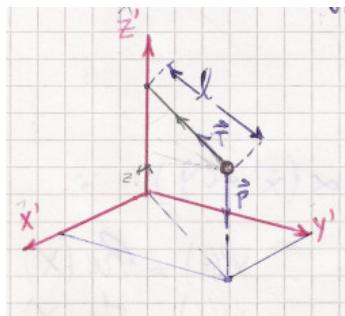
Consideramos un cuerpo libre,

$$\dot{\omega} = 0 \quad \mathbf{A} = \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}$$

Entonces la aceleración es

$$\mathbf{a}' = \underbrace{-\frac{GMm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}')}_{\text{Esto da } g}$$



Y las fuerzas

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + mg$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{x}' + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}')\mathbf{y}' + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}')\mathbf{z}' &= -\frac{Tx}{\ell}\hat{x}' + -\frac{Ty}{\ell}\hat{y}' + \frac{T}{\ell}(\ell - z)\hat{z}' \\ m\mathbf{a} = \mathbf{T} + mg - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}') - m(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'])\end{aligned}$$

Si se tiene  $|\boldsymbol{\omega}| \ll \Omega$ , se puede despreciar  $\boldsymbol{\omega}$  (se tiran los términos cruzados) y entonces se simplifica a

$$\begin{aligned}\hat{x}' & m\ddot{x}' = -\frac{T}{\ell}x' + 2m\omega\dot{y}' \cos\lambda \\ \hat{y}' & m\ddot{y}' = -\frac{T}{\ell}y' - 2m\omega(\dot{x}' \cos\lambda + \dot{z} \sin\lambda) \\ \hat{z}' & m\ddot{z}' = \frac{T(\ell - z)}{\ell} - mg + 2m\omega\dot{y}' \sin\lambda\end{aligned}$$

Ahora approximo con pequeñas oscilaciones y tengo  $z$  aproximadamente constante, luego  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$  de tal manera que se puede despejar del sistema anterior

$$T = mg - 2m\omega\dot{y} \sin\lambda$$

e incorporándola en las otras dos, se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= -\frac{g}{\ell}x' + 2\omega\dot{y}' \cos\lambda \\ \ddot{y}' &= -\frac{g}{\ell}y' - 2\omega\dot{x}' \cos\lambda\end{aligned}$$

Definiendo  $g/\ell \equiv K^2$  y  $\alpha \equiv \omega \cos\lambda$  las dos anteriores lucen como

$$\ddot{x}' = -K^2\dot{x}' + 2\alpha\dot{y}' \quad \ddot{y}' = -K^2\dot{y}' - 2\alpha\dot{x}',$$

es decir que se tiene un sistema acoplado. Para desacoplarlo se puede utilizar números complejos de la forma siguiente, definiendo una variable compleja

$$X = x' + iy'$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \ddot{x}' + i\ddot{y}' = -K^2(x' + iy') - 2i\alpha(x' + iy'), \\ \dot{X} &= -K^2X - 2i\alpha\dot{X}\end{aligned}$$

donde entonces el vínculo con la solución del problema es

$$x'(t) = \Re e(X) \quad y'(t) = \Im m(X)$$

Resolviendo para condiciones iniciales

$$x'_0 = 0, \quad \dot{x}'_0 = 0 \quad y'_0 = A, \quad \dot{y}'_0 = 0$$

se tienen

$$\begin{aligned}x'(t) &= A \cos(\sqrt{g/\ell}t) \sin(\omega \cos\lambda t) \\ y'(t) &= A \cos(\sqrt{g/\ell}t) \cos(\omega \cos\lambda t)\end{aligned}$$

Se puede ver entonces que no se conserva el plano de oscilación del péndulo sino que va rotando.

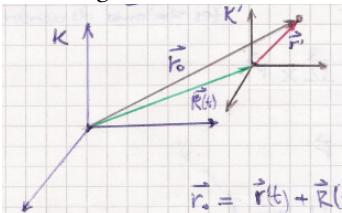
## 6.8 Lagrangiano de un sistema no inercial que se traslada

El lagrangiano de una partícula libre en un sistema inercial es

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - U,$$

En la carpeta están desarrollados separadamente

que lleva por extremar la acción a las correspondientes ecuaciones de movimiento. Note que utilizamos  $U$  para el potencial para evitar confusiones con  $V$  que será la velocidad entre sistemas. Supongamos ahora otro sistema  $K'$  como se ve en la figura,



que se traslada. Por eso sus orígenes están separados por un vector  $X(t)$  que depende del tiempo.

Se tiene, evidentemente,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t) + \mathbf{X}(t) \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{V}(t)$$

Entonces escribiendo  $\mathcal{L}'$ , donde hay que insistir en que esto no significa que se escribe el lagrangiano desde el sistema  $K'$  sino que el lagrangiano se expresa en función de las coordenadas y momentos en  $K'$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m(v' + V)^2 - U(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}mv'^2 + m\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2}mV^2 - U(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

El término en  $V^2$  se puede despreciar puesto que equivale a un término  $df/dt$  que cumpliría

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}mV^2 \quad f = \frac{1}{6}mV^3 + K$$

y además

$$m\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}' = m\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}') - m\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{x}'$$

que corresponde al procedimiento conocido en la práctica como *hacer partes*. El primer término es una derivada total y por ello se tira porque equivale a una derivada total con respecto al tiempo. Entonces,

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}mv'^2 - m\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{x}' - U(\mathbf{x}).$$

Explicar esa notación con vectores dividiendo; es una notación, capo.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

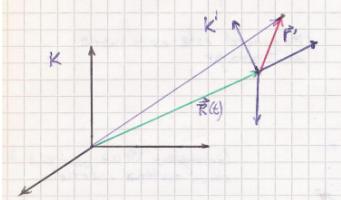
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \mathbf{v}'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \mathbf{x}'} = m\dot{\mathbf{V}} + m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{dU}{d\mathbf{x}'} = 0,$$

o bien

$$m\mathbf{a}' = -\frac{dU}{d\mathbf{x}'} - m\mathbf{A}$$

donde en el lado derecho el primer término es  $m\mathbf{a}$  (la aceleración del sistema inercial) y el segundo una fuerza ficticia  $m\mathbf{A}$  que surge de medir en términos de un sistema que está acelerado con respecto a uno inercial. Expresamos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(V, \mathbf{v}')$  con lo cual aparecen en el  $\mathcal{L}'$  las fuerzas ficticias y expreso  $T$  en función de coordenadas que se hallan sobre un sistema no inercial.

Acá hay que revisar bien la convención de inercial y no inercial!



En el caso de la parte de rotación, los vectores  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  y  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  son los mismos como vector pero están descritos en diferentes sistemas de coordenadas.

Se tiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \Big|_{in} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Big|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$$

donde el subíndice *in* refiere al sistema fijo mientras que *rot* refiere, como se espera, al sistema que rota. Esta ecuación es

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}'$$

y el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - U - m\mathbf{x} \cdot \mathbf{A},$$

que descompone a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - U - m\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2,$$

el lagrangiano válido en cualquier sistema.

El cálculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange da

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d}{d\mathbf{x}} (m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) - \nabla U - m\mathbf{A} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2$$

y utilizando la ec. del apéndice ([escalar de un vector y un producto vectorial])

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} (m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) = m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega},$$

y usando el producto escalar de dos productos vectoriales (apéndice vectores) y el vectorial de un vector y un producto vectorial,

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 = \Omega^2 x^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{d\mathbf{x}} (\Omega^2 x^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2) = m((\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{x} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\Omega}) = m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}).$$

Entonces,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{x} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \nabla U - m\mathbf{A}$$

y se ha recuperado la expresión de aceleración en el sistema no inercial.

Esto de aquí abajo estaba en la versión pretérita. Habría que confraternizarlo con lo anterior.

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \left. \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right) \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \left( \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right)$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{rot} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{rot} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

## 6.9 Sistemas rotantes

Considero dos sistemas, XYZ inercial y X'Y'Z' rotante (no inercial).

$$\mathbf{U}' = A\mathbf{U}$$

donde  $A$  es la matriz del cambio de coordenadas (una transformación ortogonal) y  $\mathbf{U}$  es una descripción desde el XYZ y  $\mathbf{U}'$  una descripción desde el X'Y'Z'.

Haremos unas derivadas utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU_x}{dt} \hat{x} + \frac{dU_y}{dt} \hat{y} + \frac{dU_z}{dt} \hat{z}$$

donde es  $U = U(x, y, z)$ , pero ahora si es  $U = U(x', y', z')$  se tiene en cambio

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + U'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y}' + U'_y \frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z}' + U'_z \frac{d\hat{z}'}{dt}$$

Pero X'Y'Z' es un sistema ortogonal y sus versores cumplen condiciones de ortogonalidad entonces

$$\hat{x}' \cdot \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \hat{z}' = 1$$

$$\hat{x}' \cdot \hat{y}' = \hat{x}' \cdot \hat{z}' = \hat{y}' \cdot \hat{z}' = 0$$

Ahora tenemos que hacer las variaciones de las dos ecuaciones precedentes.  
De la primera

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \delta \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \delta \hat{z}' = 0 \quad (9.1)$$

y de la segunda

$$\begin{aligned} \hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' + \hat{y}' \cdot \delta \hat{x}' &= 0 & \hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' &= 0 & \hat{y}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{y}' &= 0 \\ (9.2) \end{aligned}$$

Asimismo, una variación  $\delta \hat{x}'$  arbitraria puede escribirse como

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xx} \hat{x}' + \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

donde es  $\delta \alpha_{xx} = 0$  debido al primer miembro de (9.1). Notemos que  $\delta \alpha_{xy}$  significa una variación en  $\hat{x}'$  proyectada en  $\hat{y}'$ . Del mismo modo escribimos

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

donde ya hemos anulado las que sabemos son nulas por el mismo argumento.  
Usando (9.2) se tiene también

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta \hat{x}'$$

que pasan respectivamente a

$$\hat{x}' \cdot \delta \alpha_{zx} = -\hat{z}' \cdot \delta \alpha_{xz} \quad \hat{x}' \cdot \delta \alpha_{yx} = -\hat{y}' \cdot \delta \alpha_{xy}$$

Pero las variaciones son tres (¿?)

$$\delta \boldsymbol{\alpha} = (\delta \alpha_x, \delta \alpha_y, \delta \alpha_z).$$

La delta de un vedor tiene componentes en los otros tres versores (no en el mismo vedor)

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

pero proyectando

$$\hat{x}' \cdot \delta\hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta\hat{x}' \quad \rightarrow \quad \delta\alpha_{zx} = -\delta\alpha_{xz}$$

$$\hat{y}' \cdot \delta\hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta\hat{y}' \quad \rightarrow \quad \delta\alpha_{zy} = -\delta\alpha_{yz}$$

$$\hat{x}' \cdot \delta\hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta\hat{x}' \quad \rightarrow \quad \delta\alpha_{yx} = -\delta\alpha_{xy}$$

Con las siguientes definiciones

$$\delta\alpha_{zx} \equiv \delta\alpha_y \quad \delta\alpha_{yz} \equiv \delta\alpha_x \quad \delta\alpha_{xy} \equiv \delta\alpha_z$$

estamos autorizados a escribir

$$\delta\hat{x}' = \delta\alpha_z \hat{y}' - \delta\alpha_y \hat{z}'$$

$$\delta\hat{y}' = -\delta\alpha_z \hat{x}' + \delta\alpha_x \hat{z}'$$

$$\delta\hat{z}' = \delta\alpha_y \hat{x}' - \delta\alpha_x \hat{y}'$$

La rotación infinitesimal puede verse como un vector

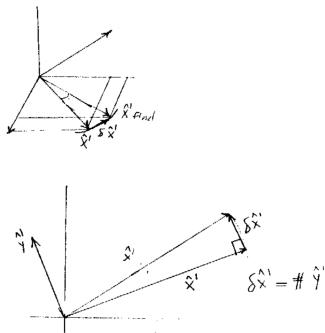


Figura 9.15

$$\delta\boldsymbol{\alpha} = \delta\alpha_x \hat{x} + \delta\alpha_y \hat{y} + \delta\alpha_z \hat{z}$$

$$\frac{\delta\boldsymbol{\alpha}}{\delta t} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}$$

donde hemos hecho  $\Omega_i = \delta\alpha_i/\delta t$ , es decir que identificamos las componentes del vector velocidad angular. En términos de las nuevas variables

$$\frac{\delta\hat{x}'}{\delta t} = \Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}'$$

$$\frac{\delta \hat{y}'}{\delta t} = -\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}'$$

$$\frac{\delta \hat{z}'}{\delta t} = \Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}'$$

Entonces, juntando todo

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z}' + U'_x(\Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}') + U'_y(-\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}') + U'_z(\Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}'),$$

y acomodando según los versores tenemos

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[ \frac{dU'_x}{dt} - U'_y \Omega_z + U'_z \Omega_y \right] \hat{x}' + \left[ \frac{dU'_y}{dt} + U'_x (\Omega_z - U'_z \Omega_x) \right] \hat{y}' + \left[ \frac{dU'_z}{dt} + U'_y \Omega_x - U'_x \Omega_y \right] \hat{z}$$

Los términos asociados a la velocidad angular *entran* como un producto vectorial de manera que podemos colapsar la notación en

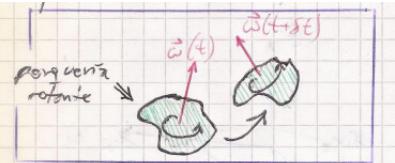
Me gustaba la identificación  
 $\frac{d}{dt}|_{X'Y'Z'}$  el primer gran  
 término en la derivada total del  
 vector  $\mathbf{U}$ .

$$\frac{d}{dt}|_{in} \mathbf{U} = \frac{d}{dt}|_{rot} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}.$$

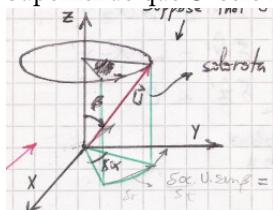
Recordemos que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}' = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ U'_x & U'_y & U'_z \end{vmatrix}.$$

Pero  $\boldsymbol{\Omega}$  es un vector que puede variar en el tiempo. El eje de rotación puede variar en el tiempo,



Suponiendo que  $\mathbf{U}$  solo rota



$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} U \sin \beta = \Omega U \sin \beta = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$$

Un observador rotante vería  $dU/dt|_{rot} = 0$  porque no cambian las componentes. Él sería partícipe del movimiento de  $\mathbf{U}$  y como la velocidad de rotación de  $\mathbf{U}$  es  $\boldsymbol{\Omega}$  entonces  $\mathbf{U}$  se ve quieta.

### EJEMPLO 9.1 Rotación en $\hat{z}$

Consideremos una rotación en torno a  $\hat{z}'$  de manera que como  $\delta\hat{z}' = 0$  entonces  $\delta\alpha_x = \delta\alpha_y = 0$

Luego, se tienen

$$\delta\hat{x}' = \delta\alpha_z\hat{y}' \quad \delta\hat{y}' = -\delta\alpha_z\hat{x}'$$

y entonces debe ser

$$\delta\alpha_z \equiv \omega_z.$$

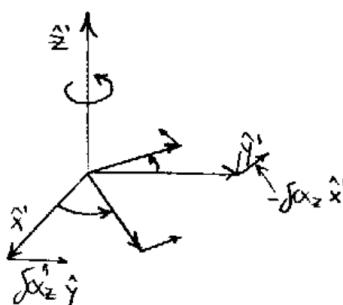
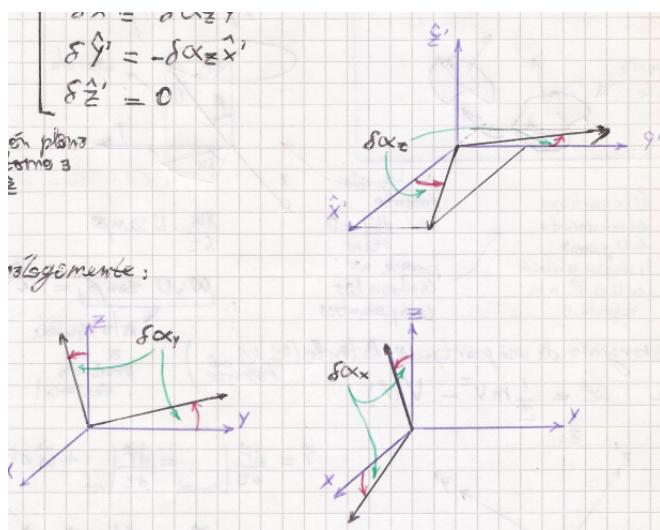


Figura 9.16



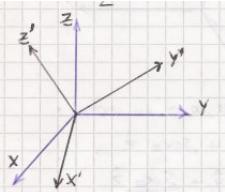
¿Este gráfico y el anterior son lo mismo?

### 6.9.1 Lagrangiano en un sistema rotante

Dado el lagrangiano usual de partícula sometida a potencial  $V$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - V(\mathbf{x}),$$

queremos ver qué forma adopta en un sistema rotante como el de ejes primados



La velocidad verifica

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$$

donde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  puesto que los orígenes de ambos sistemas coinciden. Entonces,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - V(\mathbf{r})$$

donde luego de hacer el álgebra del cuadrado resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - V(\mathbf{x})$$

donde los últimos tres términos puede agruparse en un potencial efectivo  $U = U(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  tal que

$$U = -m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V(\mathbf{x}).$$

Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - U(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Esto es el lagrangiano que escribiría un observador del sistema rotante. Allí se puede pensar que aparece un potencial  $U$  dependiente de la velocidad que es fuente de todas las fuerzas, ficticias y reales.

$$V_{coriolis} = -m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$$

$$V_{centrifugo} = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V(\mathbf{x})$$

La fuerza, puesto que es un potencial que depende de la velocidad, se obtiene a partir de

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Si la velocidad de rotación es baja,  $\Omega \sim 0$  a primer orden el lagrangiano de una partícula libre en un sistema rotante es

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - m \mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}),$$

puesto que el potencial centrífugo es cuadrático en la velocidad angular. Para una partícula libre sometida a un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \frac{q}{2c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x})$$

Esto es el teorema de Larmor y

$$\omega = \frac{q}{2mc} \mathbf{B}$$

es la llamada frecuencia de Larmor.

Podemos definir un operador

**El cuadrado argumento del operador debiera ser un ente en negrita -vectorial-.**

$$\frac{d}{dt} \Big|_{inercial} \square = \frac{d}{dt} \Big|_{rotante} \square + \boldsymbol{\omega} \times \square,$$

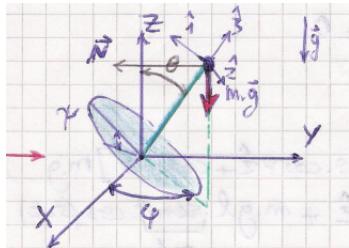
y entonces

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \left( \frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \left[ \frac{d \mathbf{x}}{dt} \Big|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \right] \right)$$

$$m \mathbf{a}_{cm} = -2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \mathbf{F}$$

con  $d\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$

#### EJEMPLO 9.2 Problema 18



Del dibujo de la situación física ya se percibe que no hay cambios apreciables en  $\Psi$ . Asimismo

$$I_1 = I_2, \quad I_3 \equiv I$$

Dado que el torque  $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$  está todo en  $\hat{1}, \hat{2}$  las ecuaciones de Euler, son

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2) = N_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1 (I_1 - I_3) = N_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1) = N_3 = 0 \end{cases}$$

Entonces, ahora proyectamos  $\Omega$  relacionándolos con los ángulos de Euler.

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \Psi$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\Psi}$$

y hay que hacer las derivadas temporales de estas cosas.

Dada la simetría,  $\Psi$  no cambia y se supone constante. [No es claro lo siguiente]

<i>Hay simetría en <math>\Psi \rightarrow \Psi</math> es constante</i>	<i><math>\Psi \neq 0</math></i>	<i>el problema <math>\Psi = 0</math></i>
<i><math>\Psi \neq 0</math></i>	<i>supone</i>	<i><math>\Psi \neq 0</math></i>
<i>aproximaciones</i>	<i>proximaciones</i>	<i><math>\Psi \neq 0</math></i>
<i><math>\dot{\theta}, \dot{\varphi} \approx 0</math></i>	<i><math>\dot{\theta}, \dot{\varphi} \approx 0</math></i>	<i><math>\dot{\theta}, \dot{\varphi} \approx 0</math></i>

Si  $\dot{\Psi} = cte \equiv \Omega$  entonces con  $\theta \sim \pi/2$  y  $\sin \theta \sim 1$  es  $\cos \theta \sim (\pi/2 - \theta)$  y los términos cuadráticos van a la basura. Tenemos

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \quad \dot{\Omega}_1 = \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \Omega$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \quad \dot{\Omega}_2 = \ddot{\varphi} - \dot{\theta} \Omega$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) + \Omega \quad \dot{\Omega}_3 = \ddot{\varphi} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Estas aproximaciones conducen al siguiente sistema

$$\begin{cases} I_1(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\Omega) + \dot{\varphi}[\dot{\varphi}(\frac{\pi}{2} - \theta) + \Omega](I_3 - I_1) = N_1 \\ I_2(\ddot{\varphi} - \dot{\theta}\Omega) + \dot{\theta}[\dot{\varphi}(\frac{\pi}{2} - \theta) + \Omega](I_1 - I_3) = N_2 \\ I[\dot{\varphi}(\frac{\pi}{2} - \theta)] + \dot{\theta}\dot{\varphi}(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

Luego, se proyecta el torque donde debemos notar que no podemos usar  $\Psi$  fijo

$$\mathbf{N} = \ell \hat{3} \times [\sin \theta \sin \Psi \hat{1} + \sin \theta \cos \Psi \hat{2} + \cos \theta \hat{3}] mg$$

$$\mathbf{N} = -mg\ell \sin \theta \sin(\Omega t) \hat{2} + mg\ell \sin \theta \cos(\Omega t) \hat{1}$$

donde notando que los  $\sin \theta \sim 1$  metemos esta información en el sistema, y resulta

$$\begin{cases} I_1(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\Omega) + \dot{\varphi}\Omega(I_3 - I_1) = mg\ell \cos(\Omega t) \\ I_1(\ddot{\varphi} - \dot{\theta}\Omega) + \dot{\theta}\Omega(I_1 - I_3) = -mg\ell \sin(\Omega t) \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta} + \dot{\varphi}\Omega I_3 = mg\ell \cos(\Omega t) \\ I_1 \ddot{\varphi} - \dot{\theta}\Omega I_3 = -mg\ell \sin(\Omega t) \end{cases}$$

Definimos una variable compleja  $\lambda = \theta + i\varphi$  para la resolución, entonces el sistema pasa a

$$I_1(\ddot{\theta} + i\ddot{\varphi}) - iI\Omega(\dot{\theta} + i\dot{\varphi}) = mg\ell e^{-i\Omega t},$$

que expresada en términos de  $\lambda$  se transforma en

$$\ddot{\lambda} - i\frac{I\Omega}{I_1}\dot{\lambda} = \frac{m\ell}{I_1}e^{-i\Omega t},$$

luego la definición de  $a \equiv I/I_1$  y  $b = m\ell/I_1$  nos lleva a

$$\ddot{\lambda} - ia\lambda = \frac{ib}{\Omega}e^{-i\Omega t} + K.$$

Esto es una ecuación no homogénea. Se resuelve primero la parte homogénea  $\ddot{\lambda} - ia\lambda = 0$  como

$$\lambda(t) = A e^{iat} + C.$$

Entonces la ecuación entera será (factor integrante mediante?)

$$e^{-iat}(\ddot{\lambda} - ia\lambda) = \frac{ib}{\Omega}e^{-i\Omega t+i\pi/2-iat} + K e^{-iat}$$

o bien

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{b}{\Omega}e^{-i[(\Omega+a)t-\pi/2]} + K e^{-iat},$$

cuya solución es

$$\lambda(t) = \frac{ib}{\Omega(\Omega+a)}e^{-i(\Omega t-\pi/2)} + iK/a.$$

Finalmente,

$$\lambda(t) = A e^{iat} + D e^{-i(\Omega t-\pi/2)} + iK/a$$

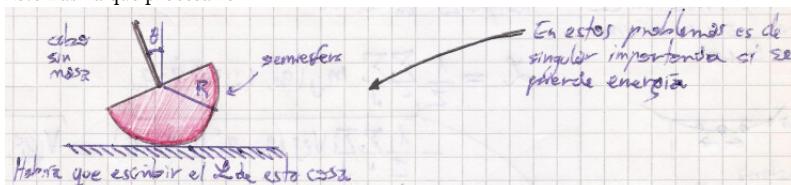
y las soluciones buscadas serán

$$\Re \lambda(t) = \theta(t) \quad \Im \lambda(t) = \varphi(t)$$

No hay que perder de vista que esta solución es válida para  $\theta \sim \pi/2$ .

### EJEMPLO 9.3 Sin nombre

Esto habría que procesarlo



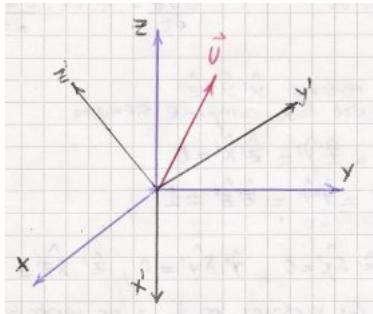
## Capítulo 7

---

# Sistemas rotantes

## 7.1 Sistemas rotantes

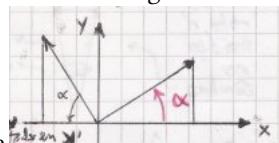
Consideramos un sistema inercial  $X, Y, Z$  y un sistema rotante  $X', Y', Z'$



El cambio de coordenadas entre los dos sistemas adopta la forma

$$U' = AU$$

donde  $A$  es la matriz del cambio de coordenadas. Transformación ortogonal.



Para una rotación plana, en 2D, se tiene explícitamente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz de transformación es la proyección de un

$$(X') = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

versor en los ejes primados.

Las condiciones de ortogonalidad implican que

- Las columnas tienen norma 1.
- Las filas tienen norma 1.
- El producto escalar de dos filas o dos columnas es nulo.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

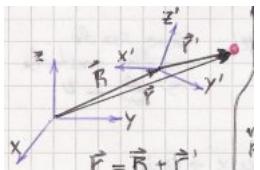
donde cada uno de estos  $a_{ij}$  puede depender del tiempo. Entonces,

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{lj} = \delta_{il} \quad \sum_{j=1}^3 a_{ji} a_{jl} = \delta_{il}$$

Una rotación infinitesimal puede describirse con un vector que sí son comutativas. Para un observador rotando en  $X'Y'Z'$  los versores  $x, y, z$  se mueven con el tiempo.

### 7.1.1 Recordemos la transformación de Galileo

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{r}' \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$$



Entonces la derivada temporal de uno u otro vector tienen diferente aspecto puesto que hay versores que varían con el tiempo, y otros que no. En efecto

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d}{dt} (U_x \hat{x} + U_y \hat{y} + U_z \hat{z}) = \frac{dU_x}{dt} \hat{x} + \frac{dU_y}{dt} \hat{y} + \frac{dU_z}{dt} \hat{z},$$

tiene versores independientes del tiempo mientras que

$$\frac{d\mathbf{U}'}{dt} = \frac{d}{dt}(U'_x \hat{x}' + U'_y \hat{y}' + U'_z \hat{z}') = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z}' + U'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + U'_y \frac{d\hat{y}'}{dt} + U'_z \frac{d\hat{z}'}{dt}$$

no los tiene y deben ser derivados.

No obstante, al variar los versores  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ , dada su ortogonalidad, deben cumplirse siempre

$$\hat{x}' \hat{y}' = \hat{z}' \hat{y}' = \hat{z}' \hat{x}' = 0 \quad (1.1)$$

$$\hat{x}' \hat{x}' = \hat{y}' \hat{y}' = \hat{z}' \hat{z}' = 1 \quad (1.2)$$

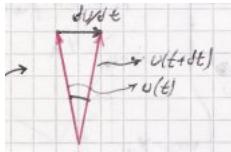
De la segunda ecuación anterior (1.2) surge que

$$\hat{x}' \delta x' = 0, \hat{y}' \delta y' = b e 0, \hat{z}' \delta z' = 0,$$

la variación de los versores es perpendicular a los versores mismos porque al rotar no se varía el módulo; como son de módulo constante,

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \perp \mathbf{U}$$

Ilustración: si solo rota, no varía el módulo



Las variaciones pueden escribirse así

$$\begin{cases} \delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}' \\ \delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}' \\ \delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}' \end{cases}$$

donde vemos que no aparece  $x$  en la  $\delta x$  puesto que es perpendicular [?]

Utilizando la ecuación (1.1)

$$\delta(\hat{x}' \hat{z}') = \delta \hat{x}' \hat{z}' + \hat{x}' \delta \hat{z}' = 0$$

donde podemos identificar  $\delta \alpha_{xz} = \delta \hat{x}'$  y  $\delta \alpha_{zx} = \delta \hat{z}'$ . Los vínculos surgidos de dicha ecuación son

$$\delta \alpha_{xz} = -\delta \alpha_{zx} \quad \delta \alpha_{yx} = -\delta \alpha_{xy} \quad \delta \alpha_{yz} = -\delta \alpha_{zy}$$

Ahora solo necesitaremos tres números para la rotación 3D Si definimos:

$$\delta \alpha_{xz} \equiv -\delta \alpha_y \quad \delta \alpha_{xy} \equiv \delta \alpha_z \quad \delta \alpha_{zy} \equiv -\delta \alpha_x$$

se tiene

$$\begin{cases} \delta\hat{x}' = \delta\alpha_z\hat{y}' - \delta\alpha_y\hat{z}' \\ \delta\hat{y}' = -\delta\alpha_z\hat{x}' + \delta\alpha_x\hat{z}' \\ \delta\hat{z}' = \delta\alpha_y\hat{x}' - \delta\alpha_x\hat{y}' \end{cases}$$

Supongamos rotar en torno a  $\hat{z}$

## 7.2 Problemas de parcial

### 7.2.1 Problema 2

La idea es ver que los parámetros no son independientes. En cada  $\partial S/\partial x_1$  la variable  $x_1$  tiene que ser parámetro independiente.

Dónde están los enunciados de esto?

$$x_1 T + x_2 T^2 = b - a$$

entonces las  $x_1, x_2$  no pueden ser cualquier cosa a la vez.

$$S = \int_t^{t_2} \mathcal{L} dt,$$

de manera que

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \delta x_2$$

y después hay que utilizar el vínculo

$$T \delta x_1 + T^2 \delta x_2 = 0$$

y

$$\delta x_1 = -T \delta x_2.$$

### 7.2.2 Problema 1

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2} \quad z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

y se tienen  $V \neq V(\varphi)$  y  $T \neq T(\varphi)$  de tal manera que  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\varphi)$ . Por ello se conserva  $L_\varphi$ . Como  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$  la energía  $E$  se conserva.

En mecánica clásica la conservación de la energía la vemos como la no dependencia del lagrangiano del tiempo (repasar este dicho y ponerlo bien).

Si se usa  $z_1, z_2, \varphi$  se tiene

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}_3^2)$$

y

$$\begin{cases} x_3 = \cos \varphi \sqrt{a^2 - \left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2} \\ y_3 = \sin \varphi \sqrt{a^2 - \left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)^2} \\ z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

El lagrangiano daba horrible y había que hacer las cuentas nomás.

### 7.2.3 Problema 3

Se puede poner en forma genérica sin usar un sistema coordenado

$$-\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \delta\mathbf{r} = \varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{n}}$$

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{r}}$$

**Suponemos que es producto punto.**

$$0 = \dot{\mathbf{p}} \cdot (\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{p} \cdot (\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{r}})$$

$$0 = \varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] + \varepsilon_2 \dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$0 = \varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \varepsilon_2 \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

### 7.2.4 Problema 4

La idea es poner  $\varphi = \beta$  y  $\dot{r} = 0$  es  $\varphi_0 = \beta$  entonces

$$\mathcal{L} = mr^2 \dot{\varphi} = mrv_t$$

$$|v| = \frac{L}{mr_{Max}}.$$

## Capítulo 8

---

# Ecuaciones de Hamilton

Se pasa de las variables  $(q, \dot{q})$  hacia el par  $(q, p)$  con

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Se parte del

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i^{3N-k} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1)$$

y consideramos el diferencial

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

se deducen entonces,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

que son las ecuaciones de Hamilton. Donde  $(p, q)$  son  $2N$  grados de libertad del sistema llamados las variables canónicas. Si  $V \neq V(\dot{q})$  y los vínculos no dependen del tiempo entonces  $T = T_2$  (la energía cinética es cuadrática en las velocidades) y  $H = T + V = E$ .

No presenta gran economía respecto a la formulación lagrangiana. Aquí las coordenadas y los momentos adquieren un carácter simétrico. Se define el espacio de fases del sistema, donde cada punto describe un estado dinámico en el tiempo.

Una transformación canónica es aquella transformación en variables canónicas. Las variables canónicas son un conjunto de  $2N$  ( $N$  llamadas  $p$  y  $N$  llamadas  $q$ ) variables que cumplen con las ecuaciones (2).

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Aquí despejo según  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i)$  y se introduce en  $T$  entonces se puede obtener un  $H = H(q_i, p_i)$ .

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

de donde se deduce

$$p_{x_i} = m_i \dot{x}_i \quad \rightarrow \quad \dot{x}_i = \frac{p_{x_i}}{m_i},$$

y  $p_{y_i}, p_{z_i}$  se obtienen análogamente. Si  $H \neq E$  para obtener  $H = H(q_i, p_i)$  no hay más remedio que utilizar la definición (1).

#### EJEMPLO 0.1 Sencillo

Sea un hamiltoniano

$$H = \sum_i \frac{p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2}{2m} + V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

y los momentos son

$$p_r = m \dot{r} \rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

$$p_\theta = mr^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

En este caso es fácil porque no hay términos cruzados. En general pasa a ser como invertir una matriz

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\varphi \\ p_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_\varphi \\ \dot{q}_\theta \end{pmatrix}$$

Cuando no hay términos cruzados es equivalente a una matriz diagonal.

En el caso  $H = E$  se puede escribir fácil el hamiltoniano.

### 8.0.1 Otra nomenclatura, elegante y compacta

Si definimos

$$\xi = \begin{cases} q_i & 1 \leq i \leq n \\ p_i & n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

entonces

$$\dot{\xi} = J \nabla_{\xi} H$$

donde el símbolo de la nabla es el gradiente de  $H$  según el  $\xi$  previamente definido. Se ve que  $\dot{\xi}$  y  $\nabla H$  resultan ortogonales. Donde la matriz  $J$  es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz simpléctica.

## 8.1 Transformación canónica del hamiltoniano

Es una transformación que verifica

$$H \longrightarrow K$$

donde  $K = K(Q_i, P_i, t)$  es un nuevo hamiltoniano proveniente de

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i &\longrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i &\longrightarrow \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Es decir, que proponemos un nuevo hamiltoniano  $K$  que es el  $H$  pero en otras coordenadas. La idea es que en esas nuevas coordenadas, el nuevo hamiltoniano sea trivial. Las transformaciones canónicas preservan el carácter simpléctico del espacio.

Ahora usamos el Principio Variacional de Hamilton,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} dt$$

$$\delta S = \sum_i p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t$$

pero el último término es nulo porque la variación es a tiempo fijo. Usando integración por partes en el primer término resulta que

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) \right\} dt$$

y llego pidiendo que sea extremo  $S$  a las ecuaciones de Hamilton (dos primeros paréntesis) mientras que el último término resulta

$$\int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) \right\} dt = p_i \delta q_i|_{t_i}^{t_f},$$

que es nulo porque la variación se hace a extremos fijos.

Entonces, usando la misma idea que el  $\mathcal{L}$  se tiene

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

siendo  $F$  una función generatriz. Luego,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt} \quad (1.1)$$

Si la anterior ecuación vale me aseguro de que los hamiltonianos, en función de  $(p, q)$  o de  $(P, Q)$  sean equivalentes. Obviamente esta es la condición sobre los lagrangianos.

Un mismo lagrangiano puede llevar a diferentes formas de  $H$ , de acuerdo a las coordenadas generalizadas. La transformación la expresamos como

$$q_i = q_i(Q_i, P_i) \quad Q_i = Q_i(p_i, q_i)$$

$$p_i = p_i(Q_i, P_i) \quad P_i = P_i(p_i, q_i)$$

y se tienen  $4n$  variables pero siendo  $2n$  independientes en  $[;?]$

$$\frac{dF}{dt}(2n, t)$$

Se elegirán como variables combinaciones de variables mayúsculas y minúsculas (o imprentas y cursivas).  $F$  se denomina función generatriz.

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$$

$$F_3 = F_3(Q_i, p_i, t) \quad F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$$

Con este sistema se introduce en (1.1) y se resuelve aquello que se necesita para que valga:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_i}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

que conduce a

$$\sum_i \underbrace{\left( p_i - \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \right)}_{=0} \dot{q}_i - \sum_i \underbrace{\left( \frac{\partial F_i}{\partial Q_i} + P_i \right)}_{=0} \dot{Q}_i + \underbrace{K(Q_i, P_i, t) - H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial F_i}{\partial t}}_{=0} = 0$$

que debe valer para todo tiempo  $t$  y deben ser cero dentro de cada llave. Entonces

$$\sum_i \left( p_i - \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_i \left( \frac{\partial F_i}{\partial Q_i} + P_i \right) dQ_i + \left( K - H - \frac{\partial F_i}{\partial t} \right) dt = 0$$

de lo cual se deducen

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$$

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_i}{\partial t},$$

que son las ecuaciones que definen la transformación canónica.

Para

$$F_2(q_i, P_i) = F_1 + \sum_i P_i Q_i$$

se tiene un diferencial

$$dF_2 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum Q_i dP_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

del cual se identifican

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

y así se obtiene la transformación canónica a partir de una generatriz  $F_2$ . Así mismo, usando transformadas de Legendre,

$$F_3 = F_1 - \sum_i q_i p_i$$

$$F_4 = F_1 - \sum_i q_i p_i + \sum_i Q_i P_i$$

Entonces, basta que exista una  $F$  para definir la transformación canónica.

## 8.2 Transformaciones canónicas. Una picture

$$\begin{array}{ll} (q_i, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) & (Q_i, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} & \rightarrow \quad \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q_i} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i} & \rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P_i} \end{array}$$

La existencia de una función generatriz  $F_1, F_2, F_3, F_4$  garantiza la existencia de la parte derecha.

$$K(P_i, Q_i) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

con el corchete de Poisson de A con B siendo

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}$$

$$\frac{dA}{dt}(q_i, p_i, t) = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H] \quad \dot{q}_i = [q_i, H]$$

donde requiero las condiciones

$$[p_i, p_k] = [q_i, q_k] = 0 \quad [q_i, p_k] = \delta_{ik}$$

para utilizar  $p_i, q_i$  como momentos.

Recordemos que  $\partial p_i / \partial q_k = 0$  puesto que  $p$  no depende de  $q$ , son variables independientes.

## Capítulo 9

---

# Transformaciones canónicas

## 9.1 Funciones generatrices

Consideraremos ahora varios casos diferentes de dependencia en la función generatriz,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(q_i, Q_i, t) \\ \sum p_i \dot{q}_i - H + K - \sum P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} &= 0 \\ \sum \left( p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum \left( P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} - H + K &= 0 \end{aligned}$$

y la transformación canónica queda definida por

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$

Todas las combinaciones posibles son

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t) \quad F_2 = F_2(q_i, P_i, t) \quad F_3 = F_3(p_i, Q_i, t) \quad F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$$

y para  $F_2$ , por ejemplo, se tiene

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^N q_i P_i$$

la cual es una identidad (transformación). Y

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i = p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = q_i = Q_i$$

## 9.2 Algunos ejemplos de generatrices y transformaciones

La generatriz identidad

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_i q_i P_i,$$

es tal que las coordenadas y los momentos son los mismos (no cambian).

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_\ell} = P_\ell = p_\ell \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_\ell} = q_\ell = Q_\ell$$

La generatriz

$$F_1(q_i, P_i) = \sum_i q_i Q_i,$$

transforma coordenada en momento y viceversa, de manera que

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_\ell} = Q_\ell = p_\ell \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_\ell} = -P_\ell = q_\ell$$

Una rotación es una transformación canónica. Otro nombre de las transformaciones canónicas es el de transformaciones de contacto. Los pasajes de coordenadas usuales son casos de transformaciones canónicas.

## 9.3 Corchetes de Poisson

Sea  $A = A(q_i, p_i, t)$  entonces

$$\frac{d}{dt} A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

y utilizando las ecuaciones canónicas

$$\frac{d}{dt} A = \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}}_{\equiv [A, H]} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

donde la sumatoria particular resultante se define como el corchete de Poisson.  
Entonces

$$\frac{d}{dt} A = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Las constantes de movimiento en un sistema mecánico cumplen que su corchete de Poisson con el hamiltoniano es nulo.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = [q_i, H] \quad - \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = [p_i, H]$$

Todas las cosas constantes en el tiempo en un sistema mecánico (no depende explícitamente del tiempo) deben ser tales que su variación temporal sea el corchete de Poisson con el hamiltoniano.

Tendremos entonces, siguiendo la mecánica, que:

$$\dot{q}_i = [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_\ell} \quad \dot{p}_i = [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}$$

que es otra manera de escribir las ecuaciones canónicas. Si transformamos coordenadas llegaremos a

$$\dot{Q}_i = [Q_i, K] \quad \dot{P}_i = [P_i, K]$$

junto con los corchetes fundamentales:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [q_i, q_j] = 0$$

de modo que el corchete entre los momentos es nulo así también como el corchete entre las coordenadas.

Si las variables son canónicas, satisfacen estos corchetes fundamentales para las nuevas  $\{p, q\}$

$$[B, A] = \nabla_\xi B^t J \nabla_\xi A$$

Si consigo un sistema mecánico y lo arreglo de modo que las coordenadas y momentos satisfagan

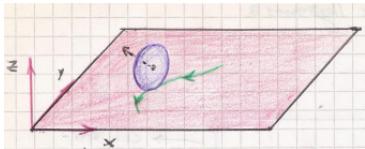
$$[B_k, H] = 0 \quad [B_k, B_\ell] = 0 \forall k, \ell$$

que significa que los momentos son constantes de movimiento y que entre sí tienen corchete nulo, entonces existe una transformación canónica con todas las coordenadas cílicas.

Así, por ejemplo,  $H, \ell^2, \ell_z$  tienen corchete nulo entre sí. Pero  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  no tienen corchete nulo entre sí; no puedo armarme una transformación canónica que me lleva a un espacio donde  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  son momentos generalizados. Esto es similar a lo que ocurría con el CCOC de mecánica cuántica.

### EJEMPLO 3.1 Moneda que desliza por un plano (sin gravedad)

Ya se habló de este problema en la sección 2, con respecto a multiplicadores de Lagrange.



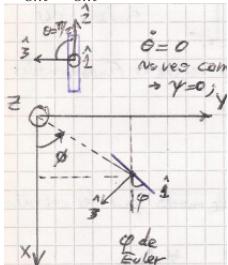
El lagrangiano se puede escribir

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2$$

y la velocidad del centro de masa es

$$V_{cm} = -\Omega \times x$$

y los  $x_{cm}$ ,  $y_{cm}$  no se pueden despejar en función de los ángulos de Euler.



Con respecto a los dos dibujitos de acá arriba vemos que  $\dot{\theta} = 0$  no veo cambio en  $\psi$  de modo que puedo poner  $\psi = 0$ ,  $\dot{\psi} \neq 0$  y además

$$a\dot{\psi} \cos \varphi = V_x^{cm}$$

$$a\dot{\psi} \sin \varphi = V_y^{cm}$$

y si no necesito despejar las coordenadas puedo utilizar el vínculo dependiendo de las velocidades. Si tuviese un  $V = V(coord)$  entonces necesitaría despejar las coordenadas en función de los ángulos de Euler y no me alcanza con este vínculo de las velocidades (el problema es que no es integrable).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (I_3 + Ma^2) \dot{\psi} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

Utilizo Euler y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Otra forma es reescribir el vínculo y usar multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M (\dot{X}_{cm}^2 + \dot{Y}_{cm}^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

que es un lagrangiano en cuatro variables para que el que tenemos dos vínculos,

$$\lambda_1 (a \cos \varphi d\psi - dx) = 0 \quad \lambda_2 (a \sin \varphi d\psi - dy) = 0$$

$$I_3 \ddot{\psi}$$

$$M \ddot{X}_{cm} = -\lambda_1 \quad m \ddot{x} = ma \cos \varphi \dot{\psi}$$

$$M \ddot{Y}_{cm} = -\lambda_2 \quad m \ddot{y} = ma \sin \varphi \dot{\psi}$$

Al reemplazar  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  por sus valores deberé llegar a  $Ma^2 \ddot{\psi}$ .

## Capítulo 10

---

# Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

## 10.1 Introducción a la formulación de Hamilton

Un sistema mecánico está caracterizado por  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  las cuales dan un estado posible del sistema, y además dan toda la información dinámica del mismo.

Ahora se describirá al sistema en términos de  $q_i, p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  que tiene la característica de producir una simetría en la mecánica así definida (la mecánica hamiltoniana). La simetría es tal que son intercambiables  $q_i$  y  $p_i$ .

Para las ecuaciones de movimiento se parte del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  tiene la misma información que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

Se puede hacer una analogía con la termodinámica, pues la primer ley se escribe

$$dE = dQ - dW = \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_V dS - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_S dV,$$

lo cual implica que usando  $S, V$  tengo como “potencial” a la energía. Un estado termodinámico se define por dos variables;  $(S, V), (T, P), (S, P), (T, V)$  que son cada par variables conjugadas.

Para definir estos potenciales se usan transformadas de Legendre. Así,

$$d(E - TS) = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT \equiv dA$$

siendo  $A$  la energía libre de Helmholtz.

$$d(E + PV) = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP \equiv dH$$

siendo  $H$  la entalpía.

En el caso del Hamiltoniano se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

la cual usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el hecho de que  $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$  es el momento conjugado  $p_i$  se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

y como esta ecuación es el diferencial total del hamiltoniano se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$$

siendo la última igualdad una derivación vista oportunamente. Asimismo,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \sum_i \dot{q}_i \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\sum_i \dot{p}_i$$

que son una mayor cantidad de ecuaciones pero de orden uno (comparando con las ecuaciones del sistema en el formalismo lagrangiano).

Con esto definimos un espacio de fases  $(p_i, q_i)$  de  $2N$  dimensiones para estudiar el movimiento de un sistema de partículas. En el caso particular de una única partícula tendremos dos variables,  $(p, q)$ .

### 10.1.1 La idea de Hamilton-Jacobi

La idea es que se busca una transformación canónica que me transporte a un hamiltoniano nuevo donde toda la solución son constantes. Es decir

$$H(q_i, p_i) \longrightarrow K(Q_i, P_i),$$

donde

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \quad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i \tag{1.1}$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos  $(\beta_i, \alpha_i)$  que son constantes. Aunque esto requiere conocer el problema (su solución). Esta transformación existe porque es ir atrás en el tiempo; la antievolución.

Supongamos una generatriz del tipo  $F_2 = S$ , llamada *función principal de Hamilton*

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \quad (1.2)$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

que es la condición necesaria para garantizar las condiciones (1.1). Esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE) al especializar  $H$  en las derivadas parciales

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

que son  $n + 1$  variables y  $n + 1$  constantes (una es trivial porque la ecuación (1.3) no depende de  $S$  sino de sus derivadas).

### EJEMPLO 1.1 ejemplito

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

hay que resolverlo utilizando condiciones iniciales

$$H(q_i, p_i, t) \quad p_i(t=0) \quad q_i(t=0).$$

Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

Cuando la ecuación es separable se puede garantizar la solución de Hamilton-Jacobi. Si  $H = H(q_i, \alpha_i)$ , el hamiltoniano no depende del tiempo, entonces  $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$  y en ese caso es  $H = cte.$  (la energía). Se tiene

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

por lo tanto es separable en el tiempo. Entonces

$$S = W(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N) - Et,$$

donde  $W$  no depende del tiempo, que sólo aparece explícito en el segundo término. Luego

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

con lo cual

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_1, \dots, q_N\right) = E$$

y tengo un nuevo hamiltoniano que no vale cero sino que vale  $E$ . Pase a *un lugar* donde los momentos son constantes y las coordenadas son cílicas.

$$E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

de manera que  $\partial E / \partial \alpha_N = a$  y luego,

$$Q = at + Q_0 \quad \text{las } Q \text{ son lineales}$$

Entonces,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q} = a \quad \text{una constante}$$

y

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \dot{Q}.$$

Remarquemos que si fuera  $E = E(q)$  entonces  $\partial E / \partial q = \dot{\alpha}$  y no sería constante  $\alpha$ , pero  $E$  no depende de  $Q_i$ .

### EJEMPLO 1.2 Ejemplito de un grado de libertad

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + V(q) & S &= W - Et \\ E &= \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + V(q), \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{dW}{dq} = \pm \sqrt{2m[E - V(q)]},$$

$$W(q, E) = \pm \int \sqrt{2m[E - V(q)]} dq - Et$$

Para un grado de libertad siempre tendrá esta forma.

Para más grados de libertad deberíamos poder separar alguna coordenada en igual forma. Si  $q_1$  no aparece, entonces la derivada del hamiltoniano  $H$  respecto a  $q_1$  dice que será constante el  $\dot{q}_1$ , es decir

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = \alpha_2 \quad \rightarrow \quad H\left(\alpha_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}, q_2, \dots, q_N\right) = E.$$

Es más, si la  $S$  es totalmente separable de la forma

$$S(q_i, \alpha_0) = \sum_{i=1}^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N) - Et$$

lo cual, dicho sea de paso, requerirá  $N$  constantes de movimiento, entonces se puede resolver completamente.

[Lo que sigue es un refrito de lo anterior o viceversa; habría que consolidarlo] [...] y podemos poner  $H = \alpha_1$ . Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \rightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener  $S$ .

Podemos ver que si  $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$ , y me quedo con  $H = \alpha_1 \equiv K$  entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \rightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \rightarrow P_i = \alpha_i(\text{ctes.}).$$

La  $\alpha_1$  no puede depender de  $q_i$  pues si se tuviera  $\partial \alpha_1 / \partial q_i \neq 0$  no sería constante  $\alpha_1$  pues  $\dot{q} \neq 0$ .

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1.2) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

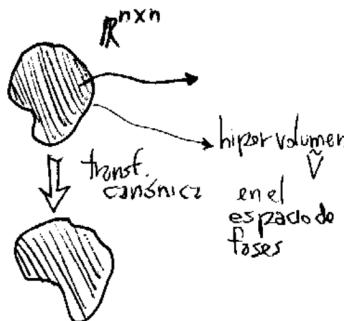


Figura 2.1

## 10.2 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen  $\mathcal{V}$  en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

que en otras coordenadas es

$$\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n dP_1 dP_2 \dots dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}.$$

El jacobiano de la transformación, que permite convertir una integral en la otra, es

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}$$

y puede verse que vale 1. En efecto, como vale una especie de *chain rule*

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)/\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)/\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{q_i=cte}}$$

El jacobiano en notación matricial es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \ddots & \ddots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces se puede ver que para el numerador es

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)$$

mientras que para el denominador,

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que  $J = 1$  y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma (se deforma la cáscara pero el volumen se conserva).

Usando  $|M| = |M^t|$  entonces se ve que vale uno el cociente de los jacobianos. Siempre y cuando sea la transformación canónica.

Son invariantes canónicos

$$\int \int \sum_{i=1}^N dq_i dp_i \quad \int \int \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N dq_i dp_i dq_j dp_j$$

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dp dq \quad A_{P,Q} = \int dP dQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1.$$

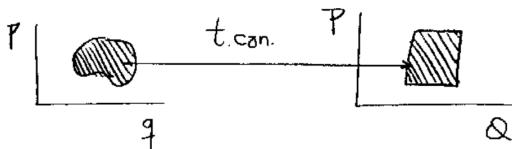


Figura 2.2

Notamos que el jacobiano en una transformación canónica para un sistema de un grado de libertad es el corchete de Poisson de  $Q, P$ , y además da uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

En la transformación, el número de puntos en  $p, q$  es el mismo en  $PQ$  pero la forma que adopta varía. Es como un líquido incompresible.

La transformación canónica cumple que, se parte de una punto a otro por una trayectoria que no corta con ninguna otra.



No confundir espacio de fases con espacio de configuración.

### 10.3 Variables ángulo-acción

La idea es introducir un nuevo juego de variables canónicas. Para ello consideraremos una transformación canónica

$$(p, q) \longrightarrow (J, \theta)$$

con generatriz  $W$  que cumple  $W - Et = S$ . Estas variables se pueden utilizar solamente con

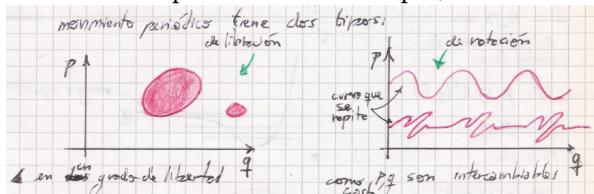
- Problemas conservativos, donde es  $S = W - Et$
- Problemas completamente separables, con

$$W = \sum_i^N W_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

- Problemas de movimiento periódico (condicionalmente)

Solamente si se verifican estos tres supuestos, se pueden utilizar las variables  $(J, \theta)$ .

El movimiento periódico es de dos tipos, de rotación o libración,



Si tengo más de un grado de libertad tendré un gráfico  $pq$  para cada par y puedo tener una libración o una rotación (si el problema es separable). De lo contrario no podré expresar cada  $p$  en función de su  $q$  correspondiente.

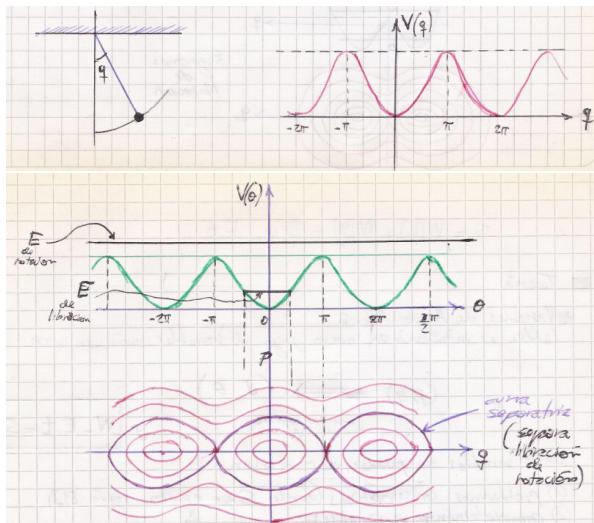
### 10.3.1 Péndulo

La energía en el caso del péndulo es

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgl(1 - \cos q)$$

y un grado de libertad es separable siempre si se conserva la energía. El péndulo realiza dos movimientos,

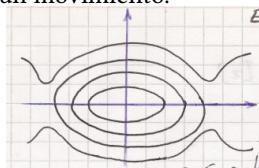
$$E > 2mgl \quad \text{rotación} \qquad E < 2mgl \quad \text{libración}$$



En un sistema con varios grados de libertad, cada grado de libertad deberá tener un grafo de esta forma. Se ve que para pequeñas apartaciones  $q$  es

$$E \approx \frac{p^2}{2m} + \frac{mglq^2}{2},$$

lo cual no es otra cosa que el gráfico de una elipse. Luego, será una elipse *toda la vida* mediante suma de pequeños desplazamientos (perturbaciones). La idea es, entonces, que no podemos pasar de una libración a una rotación mediante perturbaciones pequeñas. Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede atravesar la separatrix perturbando una solución de un movimiento.



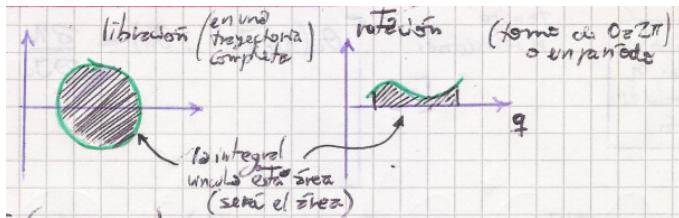
La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{ciclo} p_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

son los nuevos momentos, constantes, y a su vez los  $\alpha_i$  son constantes de separación. Asimismo  $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n)$ . Una integral de acción para cada grado de libertad. Esta integral las puedo hacer siempre dadas las condiciones que se supusieron.

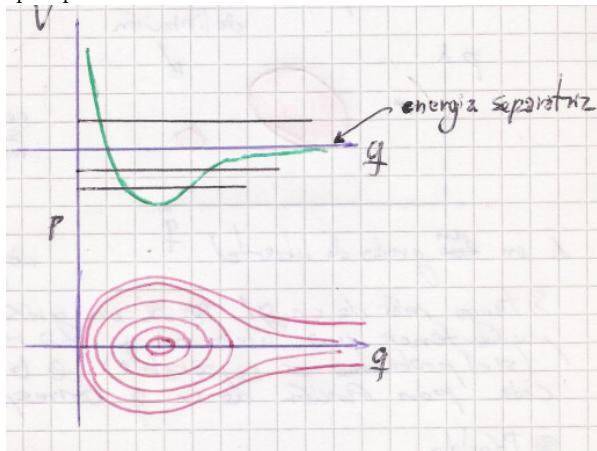


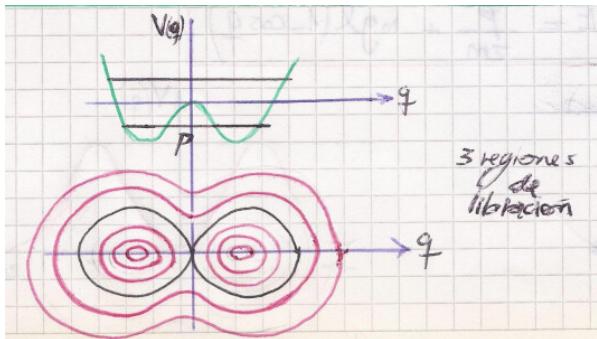
### EJEMPLO 3.1 Comentario central forces

En un problema de fuerzas centrales, por ejemplo, se tienen

$$p_r = p_r(r, \ell^2, \ell_z, E) \quad p_\varphi = p_\varphi(\varphi) \quad p_\theta = cte$$

que son periódicas en cada coordenada pero no el movimiento total porque en general no coinciden los períodos de todos los movimientos en  $r, \theta, \phi$ . Es decir, que la periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

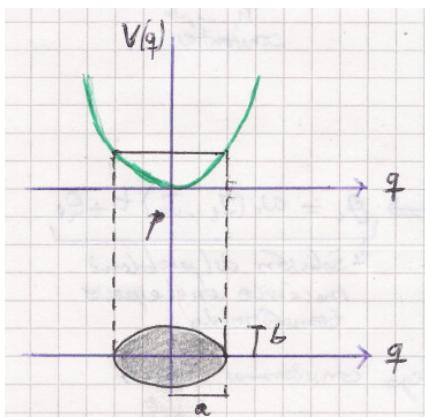




### 10.3.2 Oscilador armónico

La energía es

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$$



de manera que

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega^2q^2}{2E}$$

y

$$J = \frac{1}{2\pi}(\pi ab) = \frac{E}{\omega}.$$

Para el oscilador armónico es entonces

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \dot{\theta}$$

y luego

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

de modo que

$$E = E(J_1, J_2, \dots, J_n)$$

siempre puedo despejar  $E$  en función de los nuevos momentos.

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)$$

$$\theta_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)t + \theta_0 \quad (3.1)$$

y habrá órbitas cerradas dependiendo de las condiciones iniciales de los  $J_i$ .

Ahora faltaría obtener los  $q(t), p(t)$  a partir de la (3.1). Sabemos que

$$W = \sum_i^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

la generatriz total es una suma y los  $\alpha_i$  son las constantes de separación. Necesito

$$W = W(q_i, J_1, \dots, J_n).$$

Utilizo  $\alpha_i(J_1, J_2, \dots, J_n)$  (que se obtuvieron de las  $n$  integrales de acción) y  $\partial W / \partial J_i = \omega_i t + \theta_0$ . Luego tendré  $n$  relaciones del tipo

$$\theta_i(q_i, J_1, \dots, J_n) = \frac{\partial \theta}{\partial J_i} = \omega_i t + \theta_0 \quad (3.2)$$

y  $n$  ecuaciones

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i = p_i(q_i, J_1, \dots, J_n)$$

usando condiciones iniciales  $(q_1, \dots, q_n), (p_1, \dots, p_n)$  en  $t = 0$  especializando a  $t = 0$  obtengo  $J_1, \dots, J_n$  constantes.

$$W = \sum_i^N W_i(q_i, J_1, \dots, J_n).$$

En el sistema (3.2) con la  $E$  hago

$$\frac{\partial E}{\partial J_i}(J_1, \dots, J_n) = \dot{\theta}_i(J_1, \dots, J_n)$$

entonces  $\theta_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)t + \theta_0$  que es la solución del problema en el espacio mecánico transformado. Los  $J_1, \dots, J_n$  son constantes porque dependen de constantes  $\alpha_i$ .

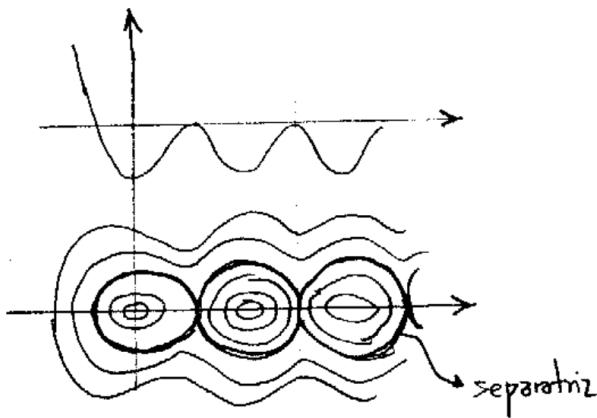


Figura 3.3

Luego, consideramos  $t = 0$  y  $\theta_i = \theta_i(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n)$  provee los  $q_i = q_i(t)$ . Se tiene

$$p_\ell = \frac{\partial W_\ell}{\partial q_\ell} = p_\ell(q_\ell, J_1, \dots, J_n).$$

Para el oscilador armónico

$$E = \omega J \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$W(q, E) = \int \frac{dq}{[2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2q^2)]^{-1/2}} = W(q, J) = \int \frac{dq}{[2m(\omega J - \frac{1}{2}m\omega^2q^2)]^{-1/2}},$$

donde el denominador contiene el  $\cos$  de algo.

$$\frac{\partial W}{\partial J}(q, J) = \theta(t) = \omega t + \theta_0 = \int \frac{m\omega dq}{[2m(\omega J - \frac{m\omega^2q^2}{2})]^{1/2}}$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{\omega J - \frac{m\omega^2q^2}{2}} = p.$$

### Quedó remanente

La transformación  $S$  es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo  $p_i = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$ . El nuevo hamiltoniano es  $E = E(J_1, \dots, J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -J_i$$

de manera que tenemos

$$\theta_i = \omega t + \theta_{0_i} \quad \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i)$$

y entonces despejamos las  $q_i$  desde

$$\theta_i(q_i, J_i) = \omega t + \theta_{0_i}.$$

Las condiciones iniciales  $(q_i, J_i)$  se introducen en

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$$

y obtengo las  $J_1, \dots, J_n$  constantes.

## 10.4 Transformación canónica infinitesimal

Difieren de la identidad en un infinitésimo

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i P_i$$

es la identidad

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i$$

y donde considero

$$F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) \quad \text{con } \epsilon \ll 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \rightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \rightarrow q_i = Q_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

donde  $\partial G / \partial P_i \approx \partial G / \partial p_i$  diferirán en un orden  $\epsilon^2$  el cual descarto. Entonces

$$\delta p_\ell = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_\ell} \quad \delta q_\ell = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_\ell}.$$

Si considero  $H$  en lugar de  $G$  y  $\epsilon = \delta t$  entonces

$$\frac{\delta p_\ell}{\delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \frac{\delta q_\ell}{\delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

de tal manera que

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \dot{q}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

y donde se ve que el  $H$  genera la transformación evolución temporal. Por otra parte, se puede ver cómo varía una cierta cantidad  $A$  ante la transformación canónica.

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

y

$$\delta A = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \epsilon [A, H] \longrightarrow \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

entonces las constantes de movimiento generan transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante al hamiltoniano  $H$ . Si

$$\frac{dA}{dt} = 0 \implies [A, H] = 0$$

Consideremos una rotación infinitesimal. Una rotación en torno al eje  $z$

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \delta \alpha y_i \\ y'_i = y_i + \delta \alpha x_i \\ z'_i = z_i \end{cases}$$

que implica

$$\delta x_i = -\delta \alpha y_i \quad \delta y_i = \delta \alpha x_i \quad \delta z_i = 0$$

**Las constantes de movimiento están generadas por simetrías (Noether).**

Luego,

$$G = \sum_i (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}) = \ell_z$$

y una rotación en torno a  $\hat{n}$  es

$$\delta \alpha [A, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \delta A,$$

si  $A$  es un vector  $\mathbf{V}$  entonces

$$\delta\alpha[\mathbf{V}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \delta\mathbf{V} = \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{V},$$

de modo que

$$[\mathbf{V}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{V}$$

es una relación vectorial; es decir que valen

$$[V_x, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = (\mathbf{n} \times \mathbf{V})_x$$

y lo mismo para los componentes  $y, z$ . Además

$$[L_x, L_z] = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{L})_z = -L_y$$

$$[L_y, L_z] = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{L})_y = L_x$$

$$[L_x, L_y] = (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{L})_x = L_z$$

o bien

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si se repite índice} \\ 1 & \text{si es permutación cíclica} \\ -1 & \text{si es permutación antícíclica} \end{cases}$$

Esto nos dice que no podemos elegir como momentos estas constantes de movimiento puesto que el corchete de Poisson entre ellas es nulo. No va a existir transformación canónica donde  $p_1 = L_x, p_2 = L_y, p_3 = L_z$  pues su corchete de Poisson entre ellas no se anula.

## 10.5 Volviendo a Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

y se pasaba de coordenadas  $q, p$  a constantes  $\alpha, \beta$ .

Lo único que se puede asegurar son condiciones para hallar solución a (5.1) pero no resolverla. La condición es que (5.1) sea separable, que existan tantas constantes de movimiento como grados de libertad. Si el hamiltoniano tiene alguna coordenada cíclica o no depende del tiempo entonces se podría separar, pero en general no es el caso.

Podría suceder que

$$W = \sum_{i=1}^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

y entonces no podré llegar a una solución que se compone de problemas independientes en una variable.

En fuerzas centrales tenemos un ejemplo. Escribamos

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

y

$$W = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\varphi(\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

donde

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{dW_\varphi}{d\varphi} \right)^2 + V(r) = E \equiv \alpha_1$$

y siendo que  $E$  es una constante, la denominamos  $\alpha_1$ .

Luego, como en

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + V(r) - \alpha_1 \right] 2mr^2 \sin^2 \theta = - \left( \frac{dW_\varphi}{d\varphi} \right)^2$$

el miembro izquierdo sólo depende de  $r, \theta$  y el derecho de  $\varphi$  tienen que ser una constante ambos miembros.

Asimismo,

$$\frac{dW_\varphi}{d\varphi} = \alpha_2,$$

y  $W_\varphi = \alpha_2 \varphi$  porque  $\varphi$  es cíclica en fuerzas centrales. Es más,  $\alpha_s$  es el momento angular en  $z$  ( $L_z$ , que es constante). Entonces

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left[ \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 \right] + V(r) = \alpha_1,$$

donde el corchete será  $\alpha_3^2$ . Ahora puedo separar otra vez y surge  $\alpha_3^2$  que será el  $|L|^2$  total. Las  $\alpha_i$  son constantes de separación. Si hubiese escrito con  $\theta = \pi/2$  entonces resultaba más detectable.

$$W(\theta) = \int \sqrt{\left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} \right)} d\theta$$

y luego

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \alpha_3^2 + V(r) = \alpha_1$$

al solucionar lo anterior

$$W_r = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_2^2/(2mr^2))} dr$$

y el nuevo hamiltoniano es  $K = \alpha_1$ . Entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_2 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_3} = 0 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_3 = cte.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1 \quad \text{que lleva a} \quad \beta_2 = t + \beta_{10}$$

Como

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_1}$$

se tiene

$$\beta_1 = \int \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(r) - \alpha_2^2/(2mr^2))}} dr,$$

que es igual a la ecuación ya calculada en el caso de fuerzas centrales.

La forma de separar también funciona si

$$V = V(r) + \frac{a(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{b(\theta)}{r^2},$$

es decir, si el  $V$  tiene una forma como la de arriba en coordenadas esféricas.

Consideremos unas coordenadas  $\xi, \eta, \varphi$  que se relacionan por

$$\rho = \xi\eta \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \quad \varphi = \varphi$$

donde  $\rho, z, \varphi$  son las polares cilíndricas usuales. Un potencial de la forma

$$\frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

en coordenadas parabólicas puede separarse.

En coordenadas elípticas

$$\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad z = \sigma\xi\eta \quad \varphi = \varphi$$

un potencial de la forma

$$V = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2}$$

puede separarse.

En cartesianas es

$$V(\mathbf{x}) = A(x) + B(y) + C(z)$$

condición suficiente de verificación para Hamilton-Jacobi. Si el potencial es separable entonces tengo tantas coordenadas como constantes de movimiento, entonces si tengo la solución [?].

### 10.5.1 Comentario Schrödinger

La ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + V(r) \Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t).$$

Si ensayamos como solución

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) e^{iA(\mathbf{x}, t)/\hbar},$$

se tendrá

$$bV(r) + \frac{b}{2m} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right] = -b \frac{\partial A}{\partial t}$$

o bien

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right] + V(r) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Ecuación de Hamilton-Jacobi (con igualar el orden cero)

$$\frac{1}{m} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{b}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( b^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial b^2}{\partial t} = 0$$

Esto lleva a

$$\nabla \left( \rho \frac{\mathbf{p}}{m} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que es una ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad. De algún lado sacamos, por la situación estacionaria,

$$-\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) b,$$

que equivale a

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^{-1}$$

o bien a

$$\frac{d \log b}{dx} = \frac{d}{dx} \log \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^{-1/2} \right)$$

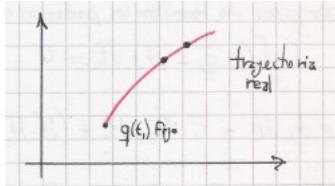
de modo que  $b = 1/\sqrt{p}$  siendo el  $p$  clásico.

### 10.5.2 Hamilton-Jacobi particular

Esto apareció en la práctica. Consideramos

$$S = \int \mathcal{L} dt,$$

donde  $S = S(q_0, t)$ . Pictóricamente



El diferencial de la integral resulta, como hemos visto en incontables ocasiones para Euler-Lagrange, en

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt.$$

Luego,  $\delta S = p_i \delta q_i$  y entonces  $p_i = dS/dq_i$ . Como  $\mathcal{L} = dS/dt$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \mathcal{L} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i$$

A partir de esta última, el diferencial  $d\mathcal{L}$  es

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + d(p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

de manera que

$$d(\mathcal{L} - p_i \dot{q}_i) = p_i dq_i - q_i dp_i$$

lo que nos lleva a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Entonces

$$S = \int (p_i \dot{q}_i - H) dt,$$

y pidiendo  $\delta S = 0$  se tiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{dH}{dp_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt$$

o bien

$$p_i \delta q_i|_{t_1}^{t_2} - \int dt \left[ \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \frac{dH}{dp_i} - \dot{q}_i \right) \delta p_i \right]$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton las podemos obtener con

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \quad \delta \int (P_i \dot{Q}_i - H') dt = 0$$

y

$$dF_1 = p_i \dot{q}_i dt - P_i \dot{Q}_i dt + (H' - H) dt$$

$$dF(q_i, Q_i, t) = P_i dq_i - P_i dQ_i + (H' - H) dt$$

y de la *lectura* de

$$dF_1 =$$

se identifican

$$\frac{dF_1}{dq_i} = p_i \quad \frac{dF_1}{dP_i} = -P_i.$$

De modo ídem se tiene

$$d(F_1 + P_i Q_i) = P_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H) dt$$

$(F_2(q_i, P_i, t))$  lo que lleva a

$$\frac{dF_2}{dq_i} = p_i \quad \frac{dF_2}{dP_i} = Q_i \quad \frac{dF_2}{dt} = H' - H.$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0$$

pero la derivada parcial en el argumento es  $p_i$ . La transformación  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i) = (\beta_i, \alpha_i)$  permite la escritura

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \alpha_i, t) = 0,$$

y  $S = S'(\alpha_i) + A$  donde los  $\alpha_i$  son  $n$  variables (dado que  $S$  aparece sólo derivada).

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

y entonces  $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$ . Ahora como los momentos y las coordenadas son constantes el problema es trivial pero la transformación es muy jodida.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \quad S = S(q_i, t)$$

en este caso  $\frac{dS}{dt} = -E$  y se tiene

$$S = W\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - Et.$$

## 10.6 Potencial electromagnético

Arranquemos por los momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{pero } si V \neq V(q) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces

$$U(q, \dot{q}) = e\phi - e/c\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{L} = T - e\phi + e/c\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = mV_x - (e/c)A_x.$$

Hacemos un cambio de gauge, en un potencial generalizado

$$U = e\Phi(\mathbf{x}, t) - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(t)$$

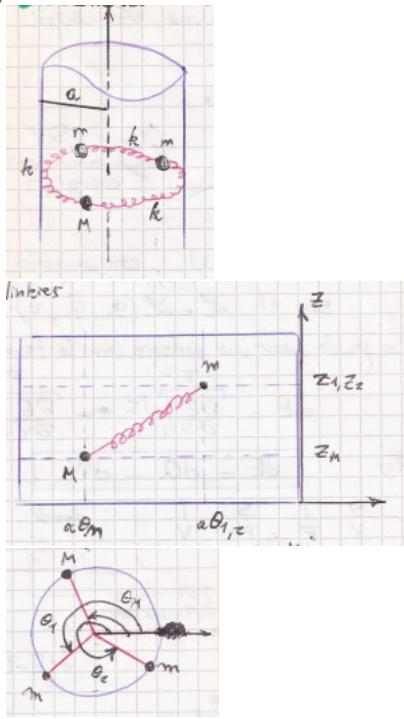
y el cambio de gauge es

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

que no altera las ecuaciones de movimiento.

**EJEMPLO 6.1 Problema de parcial**

El problema cuya geometría se ilustra a continuación. Se consideran  $m_1 = m_2 = m$ ,  $m_3 = M$  y  $k$  slinkies.



Es claramente un problema de seis grados de libertad,  $\theta_M, \theta_1, \theta_2, Z_M, Z_1, Z_2$   
Podemos escribir la energía cinética y el potencial como

$$T = \frac{1}{2} Ma^2 \dot{\theta}_M^2 + \frac{1}{2} Ma^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} M \dot{Z}_M^2 + \frac{1}{2} m (\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} [a^2(\theta_2 - \theta_M)^2 + (Z_2 - Z_M)^2] + \frac{1}{2} [a^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2] + \frac{1}{2} [a^2(\theta_1 - \theta_M)^2 + (Z_1 - Z_M)^2]$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

Como ya está en forma cuadrática no es necesario aproximar. Si tenemos expresiones lineales habría que desarrollar a orden dos, por ejemplo  $\cos \theta \sim 1 - \theta^2/2$  y me quedo con los términos cuadráticos.

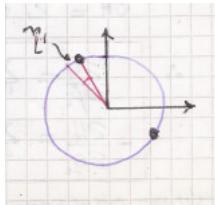
Definimos coordenadas referidas al equilibrio. Nos paramos en el equilibrio y oscilamos en torno a él.

$$\eta_1 = (\theta_M - \theta_{\text{eq}}) \quad \eta_2 = (\theta_M - \theta_{\text{eq}})a \quad \eta_3 = (\theta_2 - \theta_{\text{eq}})a$$

$$\eta_4 = Z_M - Z_{\text{Meq}} \quad \eta_5 = Z_1 - Z_{\text{1eq}} \quad \eta_6 = Z_2 - Z_{\text{2eq}}$$

con sus correspondientes velocidades

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= a\dot{\theta}_M & \dot{\eta}_2 &= a\dot{\theta}_1 & \dot{\eta}_3 &= a\dot{\theta}_2 \\ \dot{\eta}_4 &= \dot{Z}_M & \dot{\eta}_5 &= \dot{Z}_1 & \dot{\eta}_6 &= \dot{Z}_2 \end{aligned}$$



El lagrangiano será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}_4^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_5^2 + \dot{\eta}_6^2) - \frac{k}{2}[(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\eta_5 - \eta_4)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\eta_6 - \eta_4)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_5 - \eta_6)^2]$$

Habria que identificar los coeficientes para armar  $T$ ,  $V$  en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^\top \mathbb{T} \dot{\eta}_1 - \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^\top \mathbb{V} \dot{\eta}_1$$

Como ejemplo, desarrollemos algún término

$$k(\eta_1 - \eta_2)^2 = k\eta_1\eta_2 - 2k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2 = k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 - k\eta_1\eta_2 + k\eta_2\eta_2$$

Las matrices resultan

$$V = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k & 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & -k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

y como se ve ambas resultan en bloques de Jordan y son cada bloque igual. El a incluido en la coordenada hace que se obtenga esa forma simétrica. En

$$\det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T})$$

se reduce a calcular el determinante de la submatriz de  $3 \times 3$ ,

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 M & -k & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix}$$

que resulta en la ecuación

$$\omega^2 \left( \omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{2k}{M} + \frac{2k}{m} \right] + \left[ \frac{6k^2}{mM} + \frac{3k^2}{m^2} \right] \right) = 0,$$

que da

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{M} + \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$$

Para  $\omega^2 = 0$  la ecuación  $(V - \omega^2 T)A^1 = 0$  se verifica para

$$A^1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya normalización se ajusta con  $A^{\dagger}TA^1 = 1$  o bien

$$\alpha^2 (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

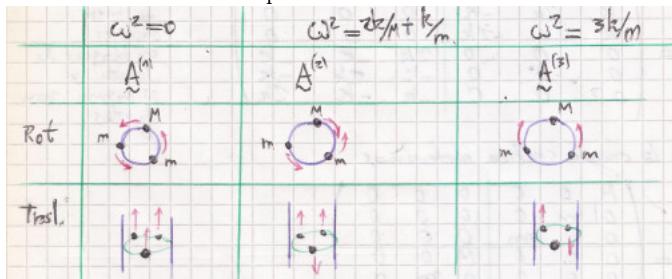
siendo el valor de  $\alpha$  dado por

$$\alpha^2 = \frac{1}{2m + M} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}.$$

Los autovectores son

$$A^1 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \frac{1}{\sqrt{4m^2/M+2m}} \begin{pmatrix} -2m/M \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los movimientos están dados por



Ahora hay que completar hasta la sexta dimensión

$$\bar{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_5 = \frac{1}{\sqrt{2m + 4m^2/M}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2m/M \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

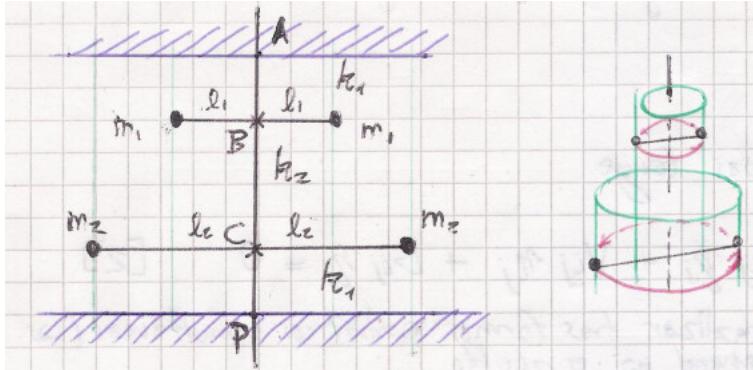
$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m + 4m^2/M}} \begin{pmatrix} -2m/M \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_4 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta}_6 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, para desacoplar la solución habría que plantear la matriz

$$\mathbb{B} = [\eta_1^\dagger \dots \eta_i^\dagger]$$

#### EJEMPLO 6.2 Problema 12

El setup se ilustra en la figura siguiente.



El torque

$$\tau = -k\theta$$

lo suponemos un potencial  $V = 1/2k\theta^2$ , donde  $k$  tiene unidades de energía. Las barras solo rotan de manera que

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2)$$

donde estamos pensando como dos partículas. En cambio, pensándolo como una barra con momento de inercia es

$$T = \frac{1}{2}I\Omega^2$$

Entonces,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(2m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(2m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 \quad V_{12} = \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad V_2 = \frac{1}{2}k_1\theta_2^2$$

Definiendo  $\eta_i = \theta_i - \theta_{\text{eq}}$  que implican  $\dot{\eta}_i = \dot{\theta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) se puede escribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \ell_1^2 m_1 \dot{\eta}_1^2 + \ell_2^2 m_2 \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 \eta_1^2 - \frac{1}{2}k_2 \eta_2^2 - \frac{1}{2}k_2(\eta_2 - \eta_1)^2$$

de manera que

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\ell_1^2 m_1 & 0 \\ 0 & 2\ell_2^2 m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

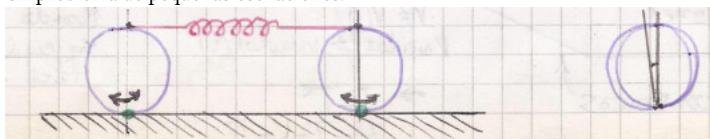
Faltaría entonces

$$\det\{\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\} = 0$$

y los autovectores  $A^1, A^2$ .

### EJEMPLO 6.3 Problema 8

Un problema de pequeñas oscilaciones.



En este ejemplo hay que suponer que el lagrangiano es ya de entrada de pequeñas oscilaciones.

**EJEMPLO 6.4 Problema 1 P96**

El lagrangiano para el *setup* es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k_x}{2}x^2 - \frac{k_y}{2}y^2 - \frac{k_z}{2}z^2,$$

donde los momentos son

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i,$$

para cada una de las coordenadas. El hamiltoniano es  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ , que explícitamente

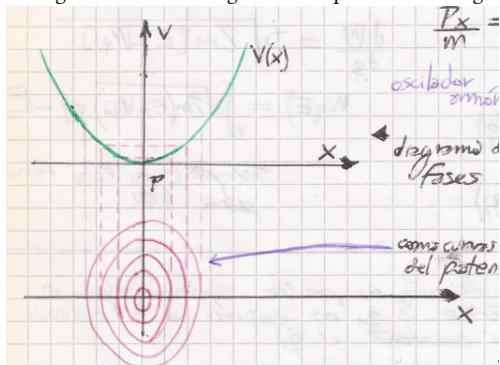
$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2$$

de donde leemos

$$\frac{\partial H}{\partial x} = k_x x = -\dot{p}_x \quad \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x},$$

que conduce, derivando una vez más, a  $\ddot{x} = \dot{p}_x/m$  y  $\ddot{x} = -k_x/m$ , que es la ecuación del oscilador armónico en  $x$ .

El diagrama de fases es algo como lo que muestra la figura siguiente



donde bajo el primer gráfico aparecen las curvas de nivel del potencial.

Para fuerza central resulta  $U(r)$  en esféricas y el lagrangiano es

$$\mathcal{L} =$$

Calculando el hamiltoniano según la definición resulta, después de algo de álgebra, en

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) + U(r).$$

El hamiltoniano es constante puesto que el lagrangiano no depende del tiempo y  $p_\varphi$ , por la cíclicidad de  $\varphi$  es constante.

Si especificamos como potencial el de Kepler, vemos que es separable en  $\theta, r$  puesto que se tiene

$$f(\theta, \varphi) = g(r)$$

de modo que cada una de estas funciones es una constante.

La conservación del momento angular en términos del hamiltoniano resulta en

$$\frac{d}{dt} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) = 2p_\theta \dot{p}_\theta + \frac{2p_\varphi^2 \dot{p}_\varphi^2}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta \dot{\theta} p_\varphi^2}{\sin^3 \theta}$$

y entonces

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \left( \frac{-1}{2mr^2} \frac{-4p_\varphi^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right),$$

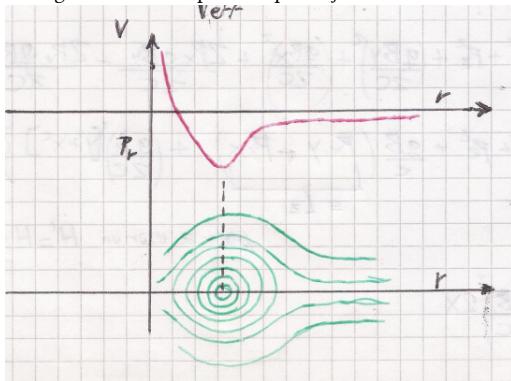
y eso lleva a

$$\left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) = cte$$

EL hamiltoniano tiene un potencial efectivo dado por los dos últimos términos de la derecha,

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} L^2 + U(r)$$

El diagrama de fases aparece aquí abajo.



#### EJEMPLO 6.5 Problema 8 P97

Consideramos un potencial generalizado

$$U = q\varphi - \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A},$$

donde  $\mathbf{A} = 1/2\mathbf{B} \times \mathbf{x}$  y asimismo  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$  siendo el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Si el campo está en el eje  $z$ , es decir  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  se tiene  $\mathbf{A} = 1/2(-By\hat{x} + Bx\hat{y})$ , lo cual conduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{c}\frac{B}{2}(-\dot{y}x + \dot{x}y)$$

y los momentos son

$$P_x = m\dot{x} - \frac{qB}{2c}y \quad P_y = m\dot{y} + \frac{qB}{2c}x \quad P_z = m\dot{z}$$

de manera que  $z$  es cíclica. Luego, calculando el hamiltoniano a través de la definición es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

o bien (usando las equivalencias anteriores)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{qB}{c} (p_x y - p_y x) + \left( \frac{qB}{2c} \right)^2 (x^2 + y^2) \right],$$

y el paréntesis dentro del corchete es el  $L_z$ . Paso a usar un hamiltoniano  $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + cte.$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x} = \frac{1}{2m} \left( \frac{qB}{2c} \right)^2 2x$$

Obtenemos para la ecuación de Newton,

$$\ddot{x} - \frac{q^2 B^2}{4c^2 m^2} x = 0$$

mientras que para la coordenada  $y$  obtenemos una ecuación similar. Entonces

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

con  $\omega = qB/(2cm)$ . Luego

$$x = \frac{1}{\sqrt{}}(\sqrt{2p}+) \quad y = \frac{1}{\sqrt{}}(\sqrt{2p}+)$$

y sus correspondientes momentos,

$$p_x = \frac{\sqrt{}}{2}() \quad p_y = \frac{\sqrt{}}{2}()$$

Deberíamos probar que es una transformación canónica chequeando que se verifican

$$[x, p_x], [y, p_y] = cte. \quad [x, y] = [p_x, p_y] = 0$$

$$[x, p_x] = \text{sum}_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial p_i}$$

y las derivadas

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2p_1} \cos q_1) \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = \frac{1}{\sqrt{2mp_1}} (\sin q_1) \quad \frac{\partial x}{\partial p_2} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial q_1} = -\frac{\sqrt{2mp_1}}{2} (\sin q_1) \quad \frac{\partial p_x}{\partial q_2} = -\frac{\sqrt{m\omega}}{2} \quad \frac{\partial p_x}{\partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{}}{\sqrt{2p_1}}$$

$$[x, p_x] = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \sqrt{2p_1} \cos^2 q_1 + \left( \frac{\sqrt{2mp_1}}{2} \sin^2 q_1 \right) + \frac{1}{2}$$

El hamiltoniano luce

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 + p_y^2 + \frac{m^2 \omega^2}{4} [x^2 + y^2] \right)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{2} p_1 + \frac{\omega}{4} p_2^2 + \frac{\omega}{4} q_2^2,$$

y se ve que  $q_1$  resultó cíclica. Luego  $p_1$  es una constante y

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = \frac{\omega}{2} q_2.$$

Resolviendo se llega a

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0,$$

de manera que  $q_2$  tiene comportamiento oscilatorio. Pero

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{\omega}{2} \quad q_1 = -\frac{\omega}{2} t.$$

**EJEMPLO 6.6 Hamilton Jacobi para fuerza central**

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 + V(r), \quad S = S' - Et$$

entonces se puede escribir

$$E - \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + V(r) \right] = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Para esféricas necesitaré:

$$V = V(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Si reemplazo en el hamiltoniano a la forma separable

$$W(r, \theta, \varphi) = W'(r, \theta) + S_\varphi(\varphi),$$

de modo que

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + C(\varphi) = \alpha \varphi$$

que ya se integra directamente. Luego en forma idem es

$$W'(r, \theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta).$$

**EJEMPLO 6.7 Otro ejemplo de potencial**

$$V = \frac{\alpha}{r} - F(z) \quad (r \text{ esféricos, } z \text{ cilíndricas })$$

donde  $(\xi, \eta, \varphi)$  coordenadas parabólicas. Verifican

$$\frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi \eta}, \quad \varphi \in \{0, 2\pi\}, 0 < \xi, \eta < \infty$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 + \xi \eta},$$

de modo que  $r = 1/2(\xi + \eta)$ . Consideremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + z^2) - V(\rho, \varphi, z)$$

que lleva a

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right)$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} m(\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{m}{2} \xi \eta \dot{\varphi}^2 - V(\xi, \eta, \varphi)$$

y los momentos

$$p_\xi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{m}{4}(\xi + \eta) \frac{\dot{\xi}}{\xi} \quad p_\eta = \frac{m}{4}(\xi + \eta) \frac{\dot{\eta}}{\eta}, \quad p_\varphi = m \xi \eta \dot{\varphi}$$

mientras que el hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{2}{m} \left( \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} \right) + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$$

Ahora vemos el potencial  $V(r, z)$  que es

$$V = \frac{1}{r}(\alpha - Fr) = \frac{1}{r}\left(\alpha - \frac{1}{4}F(\xi^2 - \eta^2)\right)$$

$$V = \frac{(\alpha - F\xi^2/2) + (\alpha + F\eta^2/2)}{\xi + \eta}$$

Reemplazando en el hamiltoniano se tiene

$$S = W(\xi, \eta, \varphi) - Et = W(\xi, \eta) + p_\varphi \varphi - Et$$

donde

$$E(\xi + \eta) = 2\xi \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2\eta \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(\xi + \eta)p_\varphi}{2m\xi\eta} + a(\xi) + b(\eta)$$

o bien

$$E\xi - 2\xi \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + E\xi - \frac{p_\varphi}{2m\xi} - a(\xi) = 2\eta \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + E\xi - \frac{p_\varphi}{2m\eta} + b(\eta) - E\eta$$

y como  $W(\xi, \eta) = W_\xi(\xi) + W_\eta(\eta)$  se tiene

$$\beta = 2\xi \left( \frac{\partial W_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{p_\varphi}{2m\xi} + a(\xi) - E\xi$$

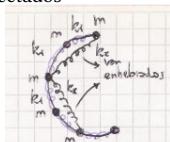
$$W(\xi) = \int \sqrt{\frac{1}{2\xi} \left( \beta + E\xi - \frac{p_\varphi}{2m\xi} - a(\xi) \right)} d\xi,$$

o bien

$$S = W_\xi(\xi) + W_\eta(\eta) + p_\varphi \varphi - Et$$

#### EJEMPLO 6.8 Problema interesante (reacomodar o desaparecer)

Este sistema tiene los mismos modos normales que si no estuvieran estos nuevos resortes conectados



La matriz con resortes entre vecinos es

$$\begin{pmatrix} 2k_1 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & -k_1 \\ -k_1 & 2k_1 & -k_1 & 0 & \dots & -k_1 \\ 0 & -k_1 & 2k_1 & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & & & -k_1 \\ & & \dots & 2k_1 & 0 & \\ -k_1 & & -k_1 & 0 & 2k_1 & \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz con resortes entre terceros

$$\begin{pmatrix} 2(k_1 + k_2) & -k_1 & -k_2 & 0 & \dots & -k_1 \\ -k_1 & 2(k_1 + k_2) & -k_1 & 0 & \dots & -k_1 \\ k_2 & -k_1 & 2(k_1 + k_2) & \dots & & \\ & 0 & 0 & \dots & 2k_1 & \\ -k_2 & & & \dots & & -k_1 \\ -k_1 & -k_2 & & & -k_1 & 2k_1 \end{pmatrix}$$

Siempre tiene los mismos autovectores. Los modos normales están dados por la geometría y las condiciones de contorno.

### 10.6.1 Popurrí de cosas para reubicar

**Sobre el potencial** Si  $\mathbf{F}$  proviene de un potencial que depende del tiempo entonces no será conservativo el campo de fuerzas. No vale lo mismo la integral  $\int F(x, t)dx$  por diferentes caminos (dependerá del tiempo que tarde en cada camino).

**sobre generatrices**

$$F_2 = F_1 + \sum Q_i P_i,$$

con

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_i, P_i) \\ P_i = P_i(q_i) \end{cases}$$

pero tienen que estar escritas  $Q_i, P_i$  en términos de las variables de  $F_2$

**Ángulo-acción**

Todas los grados de libertad separables (de lo contrario no puedo definir una de las acciones).

**Observación**

Se puede transformar entre  $n$  grados de libertad dependiendo del tiempo a  $n + 1$  grados de libertad conservativos.

**Bundle de Hamilton-Jacobi**

Resolviendo Hamilton-Jacobi llegó a

$$K = H(q_i, ) - E = 0$$

y si  $t$  es separable paso al problema  $H(q_i, ) = E$ .

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial W}{\partial P_i} = Q_i$$

con

$$\theta_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)t + \theta_{i0}$$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i}(J_1, \dots, J_n) = \dot{\theta}_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)$$

El problema general tiene como solución  $J_i$  constante  $\theta$  lineal. El asunto es pasar a la solución que sirve

$$\begin{cases} q_1(t), \dots, q_n(t) \\ p_1(t), \dots, p_n(t) \end{cases}$$

usando las condiciones iniciales y la generatriz  $S$ .

La derivada

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n)$$

hay que expresarla en función de los nuevos momentos  $J_i$  (no de las constantes de separación  $\alpha_i$ ) pero en realidad el problema es totalmente separable, entonces

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_i, J_1, \dots, J_n)$$

para ángulo-acción los  $P_i$  no son las constantes de separación.

$$W = W(q_i, P_i) \quad W = W(q_i, J_i)$$

Energía en función de los momentos

$$W = \int \sqrt{2m(E[J] - V[q])} dq,$$

entonces  $W = W(J, q)$ . Si tenemos varios grados de libertad tendremos varias integrales

$$\frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i(q_i, J_n) = \omega_i t + \theta_{i0}$$

Con las condiciones iniciales me meto en:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_1, J_1, \dots, J_n) = p_i(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n)$$

con los  $p_{i0}$  y los  $q_{i0}$  obtengo los  $J_1, \dots, J_n$  constantes  $n$  ecuaciones  $p_{i0} = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(J_1, \dots, J_n)$$

con los  $J_1, \dots, J_n$  obtengo  $\dot{\theta}_i$ .

## Apéndice A

---

### Rotación en el plano

Rotación de un sistema de coordenadas en el plano (pasar de cuaderno).

Para los apéndices faltaría una estructura más consistente. Tal vez subapéndices con aquellos que resulten demasiado pequeños como para justificar una sección con letras grandes. La idea sería agrupar temas comunes y poner en apéndice todo aquello de uso suficientemente general. Deberíamos evitar también que un tomo dependa de un apéndice en otro tomo. En ese caso tal vez convenga duplicar.

# Indice

Coordenadas cíclicas, 39  
Cuerpo rígido, 148  
Cuerpo rígido, grados de libertad, 150  
Cuerpo rígido, velocidad, 151  
  
Energía cinética, 44  
  
Fuerzas centrales, 92  
  
Inercia, momentos principales de, 159  
  
Lagrangiano, 33  
  
Momentos conjugados, 39  
  
Noether, teorema de, 83  
  
Oscilador no armónico, 116  
  
potencial efectivo, 93  
  
Tensor de inercia, 159  
Trabajos virtuales, principio de, 27  
  
Velocidad areolar-, 101  
Virial, teorema del, 111