Capítulo 1

Picture de interacción y perturbación dependiente del tiempo

Puédense escribir perturbaciones dependientes del tiempo

$$H = H_0 + V(t)$$

con $|n\rangle$ no dependiente del tiempo. Se estudiarán transiciones entre autoestados del H_0 (que son estacionarios). Un autoestado permanece en el tiemo como tal pero con fase oscilante

$$|\alpha, t_0, t\rangle_s = \mathrm{e}^{-iH/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle_s$$

$$= \mathrm{e}^{-iH/\hbar(t-t_0)} \mathrm{e}^{-iV(t)/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle$$

$$= \sum_n \mathrm{e}^{-iH_0/\hbar\, t} \mathrm{e}^{-iV(t)/\hbar\, t} |n\rangle \langle n \,|\, \alpha, t_0\rangle$$

$$= \sum_n \mathrm{e}^{-iE_n^0/\hbar\, t} |n\rangle \; \mathrm{e}^{-iV(t)/\hbar\, t} \langle n \,|\, \alpha, t_0\rangle$$

$$\mathrm{e}^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s = \sum_n \underbrace{\mathrm{e}^{-iV(t)/\hbar\, t} \langle n \,|\, \alpha, t_0\rangle}_{C_n(t)} |n\rangle = |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

es decir

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I = \mathrm{e}^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s$$

Aquí se puede pensar que

- $C_n(t)$ evoluciona por $V(t)$

- $e^{-iE_n^0 t/\hbar}$ evoluciona por H_0

Esto introduce la *picture* de interacción de Dirac; en la cual los estados evolucionan con $V(t)$.

	Dirac	Schrödinger	Heinsenberg
estados $\|\alpha\rangle$	evolucionan con $V(t)$	evolucionan con H	fijos
operadores	evolucionan con H_0	fijos	evolucionan con H
base $\|a'\rangle$	fijos	fijos	evolucionan

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_s = H\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_s$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\, e^{-iH_0t/\hbar}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I\right) = H\, e^{-iH_0t/\hbar}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I$$

$$i\hbar\, e^{-iH_0t/\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I = V(t)\, e^{-iH_0t/\hbar}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I = V(t)\left|\alpha,t_0,t\right\rangle_I,$$

que es la ecuación de evolución de los kets. Pediremos asimismo que

$$_s\langle\, A_s\,\rangle_s =_I \langle\, A_I\,\rangle_I$$

$$_I\left\langle\alpha,t_0,t\,|\,A_I\,|\,\alpha,t_0,t\right\rangle_I =_s \left\langle\alpha,t_0,t\,\right|\, e^{-iH_0t/\hbar}A_I\, e^{iH_0t/\hbar}\left|\,\alpha,t_0,t\right\rangle_s =_s \left\langle\alpha,t_0,t\,|\,A_s\,|\,\alpha,t_0,t\right\rangle_s =$$

Y los operadores evolucionan según

$$A_I = \, e^{iH_0t/\hbar}A_s\, e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A_I,H_0]$$

que es igual que la ecuación de Heisenberg pero con $\hat{H}_0$ en lugar de H. Los kets base permanecen fijos, porque así lo hacen en Schrödinger, en realidad oscila su fase; entonces

$$\left|n,t_0,t\right\rangle_s = \, e^{-iHt/\hbar}\left|n,t_0\right\rangle_s$$

$$\left|n,t_0,t\right\rangle_I = \, e^{iH_0t/\hbar}\, e^{-iHt/\hbar}\left|n,t_0\right\rangle_s = \, e^{-iVt/\hbar}\left|n,t_0\right\rangle_s = \, e^{iH_0t/\hbar}\left|n,t_0\right\rangle_s$$

$$\left|n,t_0,t\right\rangle_I = \, e^{iE_0t/\hbar}\left|n,t_0,t\right\rangle_s$$

1.0.1 Evolución de los coeficientes

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I = \sum_n |n\rangle \langle n \,|\, \alpha, t_0, t\rangle_I = \sum_n C_n(t)\,|n\rangle$$

$$C_n(t) = \, \mathrm{e}^{iVt/\hbar} \langle n \,|\, \alpha, t_0\rangle_s$$

$$\langle n \,|\, \alpha, t_0, t\rangle_I = C_m(t)$$

con $|n\rangle\,, |m\rangle$ autoestados de H_0, le pego un $\langle n|$ a la ecuación de evolución de kets,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle n \,|\, \alpha, t_0, t\rangle_I = \langle n \,|\, V_I(t) \,|\, \alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$= \sum_m \langle n \,|\, V_I(t) \,|\, m\rangle \langle m \,|\, \alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) = \sum_m C_m(t)\langle n \,|\, V_I(t) \,|\, m\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) = \sum_m C_m(t)\langle n \,|\, V_s \,|\, m\rangle \; \mathrm{e}^{it(E_n - E_m)/\hbar}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_n(t) = \sum_m C_m(t)V_{nm}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_{nm}t}$$

donde $V_{nm}(t) \equiv \langle n \,|\, V(t) \,|\, m\rangle$ y $\omega_{nm} \equiv (E_n - E_m)/\hbar$. Esta es la ecuación que cumplen los coeficientes, donde $|C_n(t)|^2$ es la probabilidad de hallar al sistema en el autoestado $|n\rangle$. Es decir

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\\ \dots\\ \dot{c}_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}\,\mathrm{e}^{i\omega_{12}} & \dots\\ V_{21}\,\mathrm{e}^{i\omega_{21}} & V_{22} & \dots\\ \dots & & \\ \dots & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \dots\\ c_N\end{pmatrix}$$

que puede ser de difícil solución.

1.0.2 Método perturbativo (dependiente del tiempo)

Pensaremos en una serie perturbativa

$$C_n(t) = C_n(t)^{(0)} + C_n(t)^{(1)} + C_n(t)^{(2)} + \dots$$

El evolucionador temporal en la picture de interacción cumple

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U_I(t, t_0)\,|\alpha, t_0\rangle_I$$

que viene de

$$i\hbar\frac{d}{dt}U_I(t,t_0) = V_I(t)U_I(t,t_0)$$

con $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ la cual resolviendo nos hace llegar a

$$U_I(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')U_I(t',t_0)dt'$$

y esto lleva a la serie de Dyson:

$$\begin{aligned} U_I(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int V_I(t')dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} V_I(t') \int_{t_0}^{t'} V_I(t'')dt'' + ... \\ + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt'''... \int_{t_0}^{t^{n-1}} dt^n V_I(t')V_I(t'')...V_I(t^n) \end{aligned}$$

1.0.3 Transiciones entre autoestados del hamiltoniano H_0

$$|i, t_0 = 0, t\rangle_I = U_I(t,0)\,|i\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n\,|\,U_I(t)\,|\,i\rangle$$

y como se viera oportunamente

$$|i,t\rangle_I = \sum_n C_n(t)\,|n\rangle = \sum_n \left(\langle n\,|\,U_I(t)\,|\,i\rangle\right)|n\rangle$$

La amplitud de transición será

$$C_n(t) = \langle n\,|\,U_I(t)\,|\,i\rangle$$

con $|i\rangle\,, |n\rangle$ autoestados de H_0. Sea $\tilde{C}_n(t) = \langle n\,|\,U_s(t)\,|\,i\rangle$ y busquemos una expresión

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0, t\rangle_I &= \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}\,|\alpha, t_0, t\rangle_s \\ &= \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}U_S(t,t_0)\,|\alpha, t_0\rangle_s \\ |\alpha, t_0, t\rangle_I &= \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}U_S(t,t_0)\,\mathrm{e}^{-iH_0t_0/\hbar}\,|\alpha, t_0\rangle_I = U_I(t,t_0)\,|\alpha, t_0\rangle_I \\ \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}\hat{U}_S\,\mathrm{e}^{-iH_0t_0/\hbar} &= \hat{U}_I \end{aligned}$$

y notemos que $\hat{U}$ no obedece la ley de transformación de operadores.

$$C_n(t) = \left\langle n\right|\,\mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}U_S(t,t_0)\,\mathrm{e}^{-iH_0t_0/\hbar}\left|\,i\right\rangle$$

$$C_n(t) = \mathrm{e}^{-i/\hbar[E_n^{(0)}t-E_i^{(0)}t_0]}\,\langle n\,|\,U_S(t,t_0)\,|\,i\rangle = \mathrm{e}^{-i/\hbar[E_n^{(0)}t-E_i^{(0)}t_0]}\tilde{C}_n(t)$$
$$\Rightarrow |C_n(t)|^2 = |\tilde{C}_n(t)|^2.$$

Para transiciones entre autoestados de H_0 los coeficientes dan la misma probabilidad (evaluados con el evolucionador de Dirac que con el de Schrödinger). Vamos a las transiciones a los tres

- orden 0
$$C_n^{(0)}(t) = \langle n\,|\,1\,|\,i\rangle = \delta_{ni}$$
- orden 1
$$C_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{i\omega_{ni}}V_{ni}(t')dt' \qquad\qquad V_{ni} \equiv \langle n\,|\,V(t)\,|\,i\rangle$$
- orden 2
$$C_n^{(2)}(t) = \sum_m \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt''\mathrm{e}^{it'/\hbar(E_n-E_m)}V_{nm}(t')\mathrm{e}^{it''/\hbar(E_m-E_i)}V_{mi}(t'')$$

y entonces la probabilidad de ir desde $|keti \to |i\rangle$, hasta orden dos, sería

$$P_{i\to n}^{(2)} = |C_n^{(0)}(t) + C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t)|^2$$

1.0.4 Ejemplo: potencial constante encendido abruptamente

Notemos que $V \neq V(t)$. Dependerá de cualquier otra cosa.

$$C_n^0(t) = 0$$
$$C_n^1(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0 ?^t\, \mathrm{e}^{i/\hbar(E_n-E_i)t'}V_{ni}dt' = \frac{V_{ni}}{(E_n-E_i)}(1-\,\mathrm{e}^{i\omega_{ni}t})$$
$$|C_n^1(t)|^2 = \frac{4|V_{ni}|^2}{|E_n-E_i|^2}\sin^2\left(\frac{(E_n-E_i)t}{2\hbar}\right)$$

Es máxima la probabilidad cuando $\Delta E \to 0$. En ese caso las transiciones son a estados de la misma energía. A tiempo largo la probabilidad es no nula para aquellos estados
$$t \sim \frac{2\pi}{|\omega_{ni}|}$$
Hay probababilidad de transición $|i\rangle \to |n\rangle$ apreciable con $\Delta E \sim 0$.

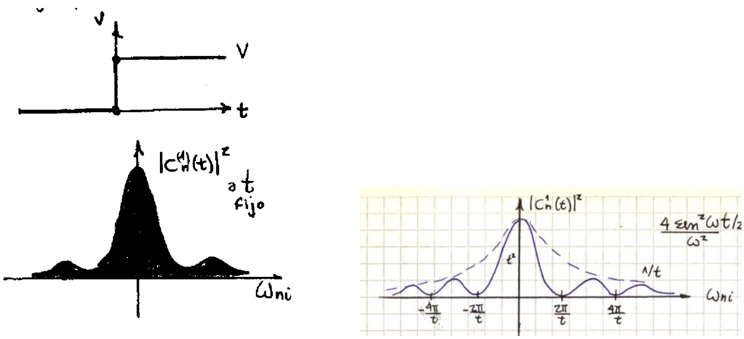
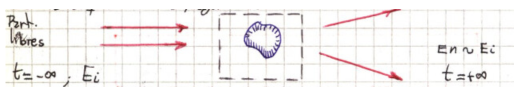


Figura 0.1

1.1 Scattering: orden 1



Este último ejemplo puede aplicarse a colisiones elásticas. Prendemos y apagamos un potencial que es el masacote al cual impactamos. De entrada ha partículas libres y de salida (lejos de V) partículas libres. Entonces $E_n - E_c \sim 0$ y consideraremos lo que sucede a tiempos largos. Interesará la probabilidad total de transicionear a estados de energía similares a E_i. Por ello se considera

$$\sum_{\substack{n \\ E_n \sim E_i}} |C_n^1(t)|^2 \longrightarrow \int dE_n \rho(E_n) |C_n^1(t)|^2$$

donde el integrando es el número de estados dentro de un intervalo de energías $(E, E+dE)$. En tiempos muy largos la expresión [1] tiende a una

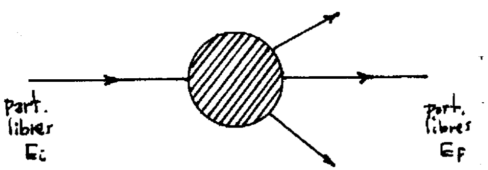


Figura 1.2

delta de Dirac y se integra fácil,

$$\lim \int dE\rho(E_n)|C_n^1(t)|^2 = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)|\bar{V}_{ni}|^2\rho(E_n)\Big|_{E_n\sim E_i}$$

La probabilidad de transición es proporcional a t. Se suele definir una tasa de transición (probabilidad de transición por unidad de tiempo)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\substack{n\\E_n\sim E_i}} |C_n^{(1)}|^2\right) = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)|\bar{V}_{ni}|^2\rho(E_n) = \omega_{i\to n}^{(1)}$$

que es la regla de oro de Fermi.

1.2 El método variacional

Se puede usar para aproximar la energía del estado fundamental (el estado de energía mínima)

$$\langle\psi\,|\,H\,|\,\psi\rangle = \sum_{n,m}\langle\psi\,|\,n\rangle\langle n\,|\,H\,|\,m\rangle\langle m\,|\,\psi\rangle = \sum_{n,m} E_n\langle\psi\,|\,n\rangle\langle n\,|\,m\rangle\langle m\,|\,\psi\rangle$$

$$\langle\psi\,|\,H\,|\,\psi\rangle = \sum_{n,m} E_n C_n^*\langle n\,|\,m\rangle\, C_m = \sum_n E_n|C_n|^2$$

$$\sum_n E_n|C_n|^2 \geq \sum_n E_0|C_n|^2 = E_0\sum_n |C_n|^2 = E_0\langle\psi_n\,|\,\psi_n\rangle$$

y usamos

$$|\psi\rangle = \sum_n\langle n\,|\,\psi\rangle\,|n\rangle \qquad \langle\psi| = \sum_n\langle\psi\,|\,n\rangle\,\langle n|$$

para arribar a

$$\frac{\langle\psi_n\,|\,H\,|\,\psi_n\rangle}{\langle\psi_n\,|\,\psi_n\rangle} \geq E_0.$$

1.2.1 Scattering a orden dos y OFPT

Continuando con el orden dos de scattering por un $V \neq V(t)$ se tiene:

$$\omega_{i\to n}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\overline{V_{ni} + \sum_{m\neq i}\frac{V_{nm}V_{mi}}{(E_i - E_m)}}\right|^2\rho(E_n)\Bigg|_{E_n\sim E_i}$$

Para obtener los siguientes términos dentro del $|\bar{}|^2$ podemos emplear un ardid gráfico conocido como *Old Fashioned Perturbation Theory*

Fíjese que en los estados intermedios estados virtuales $|m\rangle\,, |j\rangle$ no se conserva la energía. Son propagadores.

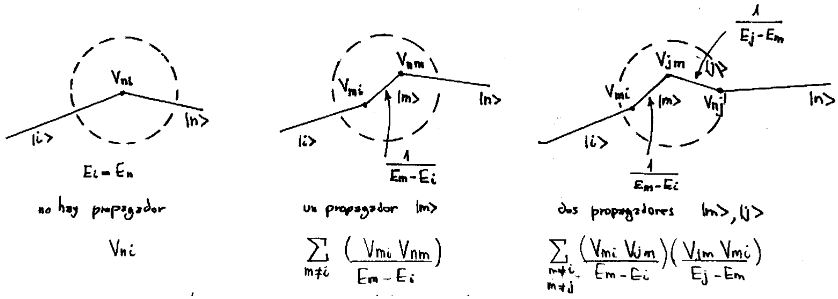


Figura 2.3

1.2.2 Perturbación armónica

Sea un potencial armónico y hermítico

$$V(t) = \mathbb{V}\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathbb{V}^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \mathbb{V} \neq \mathbb{V}(t)$$

quiero ver probabilidad de transición a orden uno,

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t (V_{ni}\,\mathrm{e}^{i\omega t'} + V_{ni}^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\omega t'})\,\mathrm{e}^{i\omega_{ni}t'}\,dt'$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar}\left[V_{ni}\int_0^t \mathrm{e}^{i(\omega+\omega_{ni})t'}\,dt' + V_{ni}^\dagger\int_0^t \mathrm{e}^{i(-\omega+\omega_{ni})t'}\,dt'\right]$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar}\left[V_{ni}\frac{\mathrm{e}^{i(\omega+\omega_{ni})t}-1}{i(\omega+\omega_{ni})} + V_{ni}^\dagger\frac{\mathrm{e}^{i(-\omega+\omega_{ni})t}-1}{i(-\omega+\omega_{ni})}\right]$$

$$C_n(t)^1 = \frac{V_{ni}}{\hbar}\frac{1-\ \mathrm{e}^{i(\omega+\omega_{ni})t}}{(\omega+\omega_{ni})} + \frac{V_{ni}^\dagger}{\hbar}\frac{1-\ \mathrm{e}^{i(-\omega+\omega_{ni})t}}{(-\omega+\omega_{ni})}$$

$$\lim_{t\to\infty} C_n(t)^1 = \frac{1}{\hbar}\left[V_{ni}\delta(\omega_{ni}+\omega) + V_{ni}^\dagger\delta(\omega_{ni}-\omega)\right]$$

Luego será nulo sólo si

$$\omega_{ni} = -\omega \qquad \longrightarrow \qquad \frac{E_n - E_i}{\hbar} = -\omega \quad E_n = E_i - \hbar\omega$$

$$\omega_{ni} = -\omega \qquad \longrightarrow \qquad \frac{E_n - E_i}{\hbar} = \omega \quad E_n = E_i + \hbar\omega$$

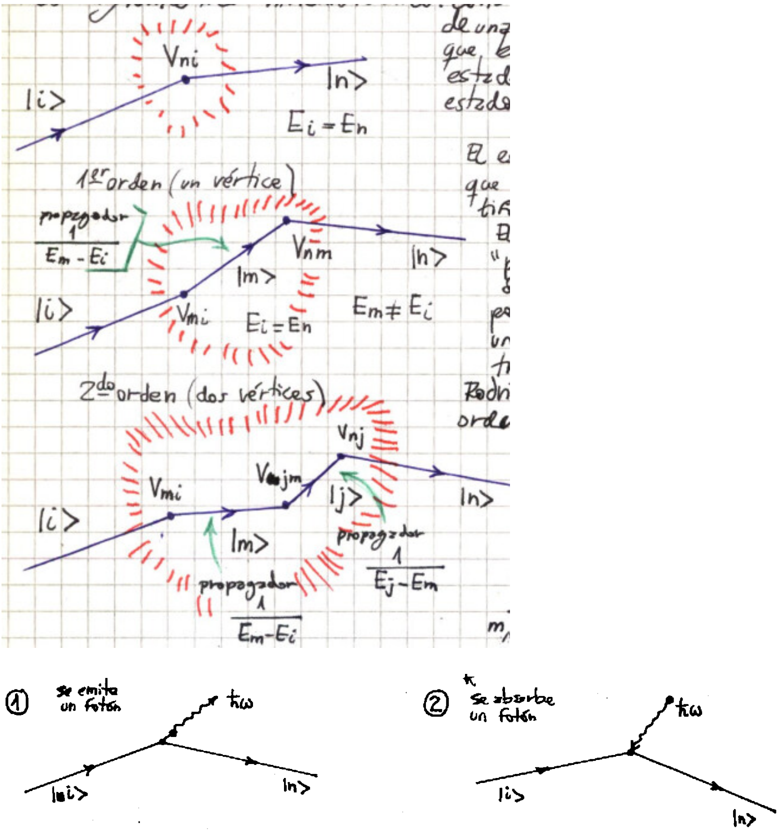


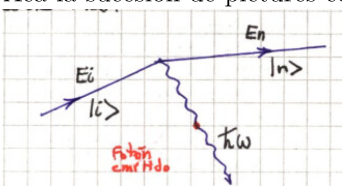
Figura 2.4

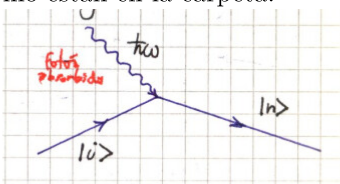
Luego,

$$\lim_{t \to \infty} C_n(t)^1$$

representa la probababilidad de emitir o absorber fotones en una interacción. Se puede asociar que V crea fotones y $V^\dagger$ destruye fotones. Para un átomo se tiene

Acá la sucesión de pictures como están en la carpeta:





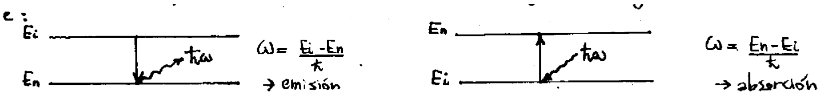
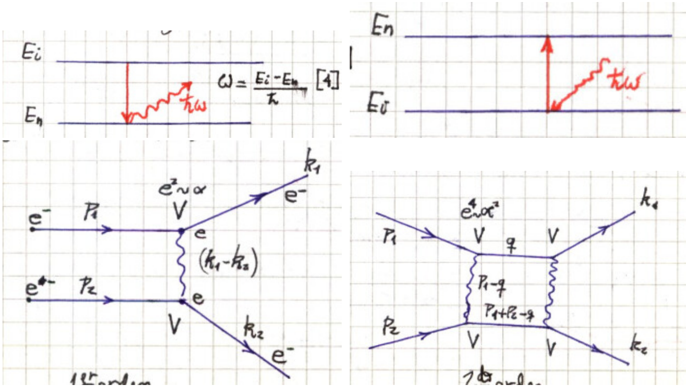


Figura 2.5



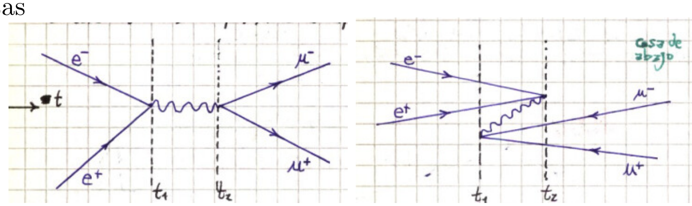
1.3 Despoblamiento de estados iniciales

Queremos ver con cual v se despoblan los $|i\rangle$. Para ellllo me construyo un potencial *suave*

$$\lim_{\eta\to 0} V(t) = \mathrm{e}^{\eta t}\mathbb{V}, \qquad \mathbb{V}\text{cte.}$$

donde η es un parámetro regularizador.

Previa a la picture del desdoblamiento de estados iniciales estaban estas



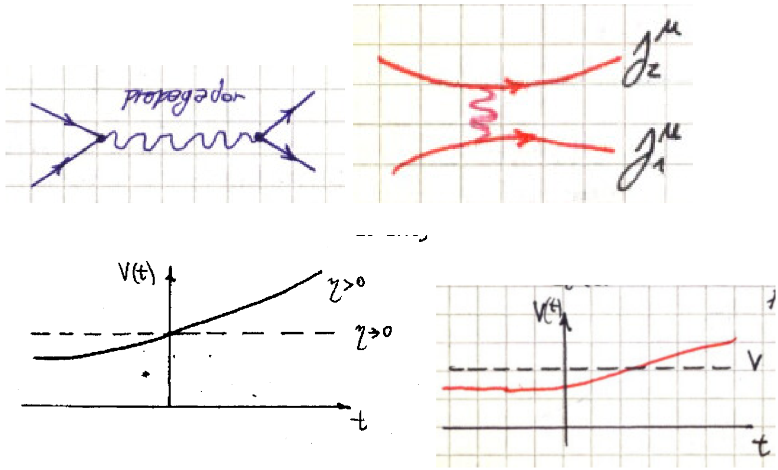


Figura 3.6

$$C_n(t)^1 = \lim_{t\to\infty} -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_{ni}\, \mathrm{e}^{\eta t'}\, \mathrm{e}^{i\omega_{ni}t'} dt'$$

$$C_n(t)^1 = -\frac{i}{\hbar}V_{ni}\frac{\mathrm{e}^{\eta t}\, \mathrm{e}^{i\omega_{ni}t}}{\eta + i\omega_{ni}} \qquad |C_n(t)^1|^2 = \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{2\eta t}}{\eta^2+\omega_{ni}^2}$$

$$\frac{d}{dt}|C_n(t)^1|^2 = 2\eta\frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{2\eta t}}{\eta^2+\omega_{ni}^2}$$

y tomando el límite $\eta \to 0$

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{d}{dt}|C_n(t)^1|^2 = 2\frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\frac{\eta}{\eta^2+\omega_{ni}^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_{ni}^2 \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega_{ni}^2 = 0 \end{cases}$$

y llegamos a la regla de oro de Fermi,

$$\frac{d}{dt}|C_n(t)^1|^2 = 2\frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\delta(\omega_{ni})\pi$$

1.3.1 Scattering sección eficaz

$|k\rangle, |k\rangle'$ son autoestados de momento (partículas libres),

$$|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$$

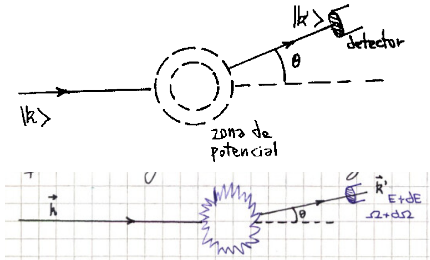


Figura 3.7

se conserva la energía. Consideraremos la aproximación más baja (aproximación de Born).

$$\omega = \int \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E'-E)|\,\langle \boldsymbol{k}' \,|\, V \,|\, \boldsymbol{k}\rangle\,|^2 \rho(E')dE'$$

queremos calcular la densidad de estados de energía entre $(E, E+dE)$. Pensamos en una partícula libre en una caja $1D$ de longitud L.

$$N\,\mathrm{e}^{ik_x x/\hbar}, \qquad \text{con } \; k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$$

pidiendo normalización unitaria $\langle k \,|\, k\rangle = 1$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\,\mathrm{e}^{ik_x x/\hbar}$$

con $L \to \pm\infty$ son n_x, k_x continuas.

$$dk_x = \frac{2\pi}{L}dn_x \quad \longrightarrow \quad dn_x = \frac{L}{2\pi}dk_x$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2 \quad \longrightarrow \quad n^2 = \frac{L^2}{(2\pi)^2}k^2$$

$$dE = \frac{\hbar^2}{m}kdk \quad \longrightarrow \quad dn = \frac{L}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2 k}dE$$

$$n^2 dn d\Omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{mk}{\hbar^2}\, dE\, d\Omega$$

donde $n^2\, dn\, d\Omega$ es la densidad de estados de energía $(E, E+dE)$ en $d\Omega$

$$n^2\, dn\, d\Omega = \rho(E')dE'$$

Con esto sale la integral obteniéndose

$$\omega_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'} = \frac{L^3}{(2\pi)^2}\frac{m}{\hbar^3}\left|\langle \boldsymbol{k}' \,|\, V \,|\, \boldsymbol{k}\rangle\right|^2 k' d\Omega$$

Esta es la probabilidad de transición entre los impulsos $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$. Es el número de partículas en la unidad de tiempo por unidad de área

$$\text{seccion eficaz} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\#\text{ de part en } d\Omega \text{ en la unidad de t}}{\#\text{ de part incidentes en la unidad de t por unidad de área}}$$

Un elemento de matriz $\langle k' \,|\, V \,|\, k\rangle$ será

$$\langle \boldsymbol{k}' \,|\, V \,|\, \boldsymbol{k}\rangle = \int dx' \, \langle \boldsymbol{k}' \,|\, \boldsymbol{x}'\rangle \, \langle \boldsymbol{x}' \,|\, V \,|\, \boldsymbol{k}\rangle = \int d\boldsymbol{x}' \frac{1}{L^3} \, \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot \boldsymbol{x}} \, V(\boldsymbol{x}'),$$

la transformada de Fourier del potencial es, amén de constantes, la am-

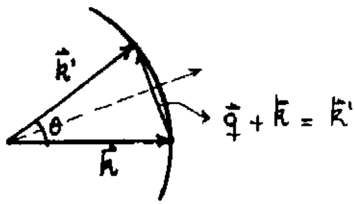


Figura 3.8

plitud a primer orden

$$|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| = 2k\sin(\theta/2) \qquad \text{con } k = k'$$

Entonces para cualquier potencial esféricamente simétrico se puede hacer la integral

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\left(\frac{2m}{4\pi\hbar}\right)^2 \int d^3x' \; V(x) \, \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot \boldsymbol{x}'}\right|^2$$

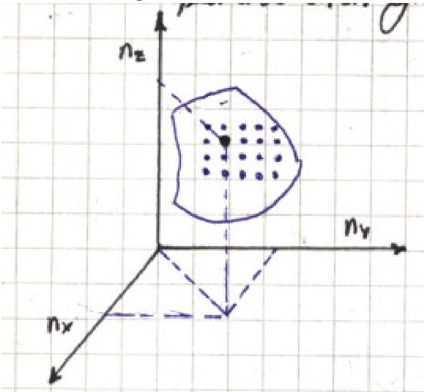
y expresamos todo en función de $q = q(\theta)$

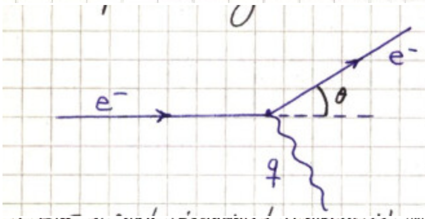
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty rV(r)\sin(q)dr \right|^2$$

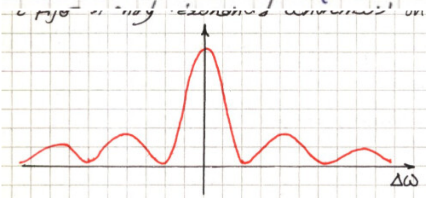
Utilizando un potencial de Yukawa primero y tomando el límite para llegar al de Coulomb tenemos la sección eficaz de Rutherford

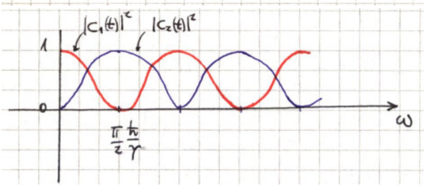
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2m^2e^4}{\hbar^4}\frac{1}{16k^4\sin^4(\theta/2)}$$

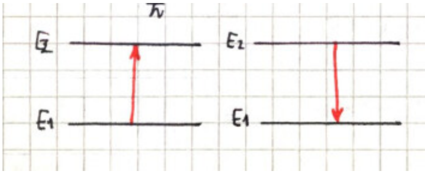
hay que tomar el potencial de Yukawa y luego el límite porque el de Coulomb diverge de entrada










$\hbar\nu$
E_2
E_1
E_2
E_1