

# Introducción al momento angular (rotaciones)

El operador  $\hat{L}$  será el encargado de realizar las rotaciones. Por el álgebra visto en la mecánica clásica sabemos que, dado un vector  $\mathbf{v}$  y una matriz ortogonal  $R$  se tiene

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} \quad \text{con} \quad |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$$

y

$$|\mathbf{v}|^2 = V^t V = (V^t R^t)(RV) \quad \text{pues} \quad R^t R = R R^t = \mathbb{1}$$

puesto que es una matriz ortogonal. Una matriz ortogonal tiene tres parámetros independientes. Luego se cumplen

- Clausura

$$(R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = \mathbb{1}$$

- El producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal (aquella que cumple  $R^t R = \mathbb{1}$ ). Asociatividad

$$R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3$$

- Existencia de identidad

$$R \mathbb{1} = \mathbb{1} R = R$$

- Existencia de inversa

$$R R^{-1} = R^{-1} R = \mathbb{1} \quad \text{con} \quad R^{-1} \equiv R^t$$

Esto define un grupo de matrices ortogonales que realiza rotaciones y se denomina  $SO(3)$ . Las rotaciones son un grupo respecto a la multiplicación.

### 1.0.1 No conmutatividad de las rotaciones clásicas

Las rotaciones finitas no conmutan. Luego, el grupo de las rotaciones será un grupo abeliano

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

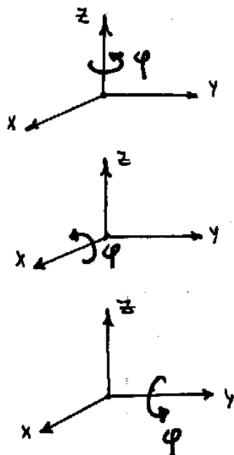


Figura 0.1

Si reemplazamos  $\cos(\epsilon) \approx 1 - \epsilon^2/2$  y  $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$  hasta orden dos. Se puede ver que las rotaciones, en torno a ejes diferentes, sólo conmutan a

orden uno ( $\epsilon$ ) de manera que una rotación infinitesimal  $d\varphi$  conmuta pero una rotación finita  $\varphi$  no lo hace.

En efecto, hasta orden 2 se tienen

$$R_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon^2/2 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \epsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon^2/2 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - \epsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon^2/2 & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 - \epsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

Entonces, se ve que

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien

$$[R_x(\epsilon), R_y(\epsilon)] = R_z(\epsilon) - \mathbb{1}$$

Como el conmutador es diferente de cero el grupo de las rotaciones es un grupo no abeliano. La velocidad angular se define  $\omega/dt$  de modo que eso justifica que los vectores velocidad angular puedan sumarse en mecánica. Esto es lo que sucedía en el caso clásico. Veamos ahora qué le pasa a los kets ante rotaciones.

## 1.1 Rotaciones cuánticas

Para las rotaciones cuánticas suponemos la existencia de un operador  $D_R$  que las realiza, que convierte  $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle_R$  con  $|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$  postulándose una forma del tipo

$$D(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{1} - i \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} d\phi,$$

para una rotación infinitesimal o bien

$$D(\hat{n}, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i \mathbf{J}_z \theta}{\hbar N} \right)^N = e^{-i \mathbf{J} \cdot \hat{n} \theta / \hbar},$$

para rotación finita.

Otro modo de ver esto, es considerando

$$D_R(\hat{n}, \theta + d\theta) = D_R(\hat{n}, \theta) D_R(\hat{n}, d\theta) = D_R(\hat{n}, \theta) \left[ \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} d\theta \mathbf{J} \cdot \hat{n} \right]$$

de modo que

$$\frac{D_R(\hat{n}, \theta + d\theta) - D_R(\hat{n}, \theta)}{d\theta} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \hat{n} D_R(\hat{n}, \theta)$$

lo que conduce a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} D_R(\hat{n}, \theta) = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \hat{n} D_R(\hat{n}, \theta)$$

y, usando la condición de contorno de que  $D_R(\hat{n}, 0) = \mathbb{1}$  se tiene

$$D_R(\hat{n}, \theta) = e^{-i/\hbar \theta (\mathbf{J} \cdot \hat{n})},$$

junto con la relación de conmutación  $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ .

$\hat{D}$  es, como se dijo, el operador de las rotaciones y  $\hat{J}$  es un momento angular general. Se postula de esta forma para que  $\hat{D}$  cumpla las mismas propiedades que  $R$  y la misma relación de conmutación (lo cual los hace pertenecer al mismo álgebra)

$$R_x R_y - R_y R_x = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$D(\hat{x}, \epsilon) D(\hat{y}, \epsilon) - D(\hat{y}, \epsilon) D(\hat{x}, \epsilon) = D(\hat{z}, \epsilon^2) - D(\mathbb{1})$$

de modo que la cuenta lleva a

$$J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z$$

la cual generalizando se llega a

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.1)$$

que son las relaciones de conmutación generales para momento angular  $\hat{J}$ . Esto vale para cualquier rotación, lo cual es más amplio que si es solo  $L$ , el momento angular.

### EJEMPLO 1.1 Operador de rotación para partículas de spin 1/2

Para sistemas de spin 1/2 es

$$D(\hat{n}, \phi) \equiv e^{-i/\hbar \phi \mathbf{S} \cdot \hat{n}}$$

El efecto de la rotación se asocia a

$${}_R \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R = \langle \alpha | e^{iS_z \phi / \hbar} S_x e^{-iS_z \phi / \hbar} | \alpha \rangle$$

una cosa que podemos considerar como un operador y los kets fijos en el tiempo. La base de autoestados de  $S_z$  es

$$S_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \quad S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

los operadores  $S_x, S_y, S_z$  tienen sus expresiones usuales y evaluando resulta

$$D^\dagger S_x D = \frac{\hbar}{2} [(|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|) \cos \phi + i(|+\rangle \langle -| - |-\rangle \langle +|) \sin \phi]$$

que es como si el vector  $S_x$  se transformase como lo haría un vector. En efecto, se tiene

$$S_x \rightarrow \text{rotación} \rightarrow S_x \cos \phi - S_y \sin \phi$$

$$S_y \rightarrow \text{rotación} \rightarrow S_y \cos \phi + S_x \sin \phi$$

pero

$$S_z \rightarrow \text{rotación} \rightarrow S_z$$

lo cual se demuestra por conmutación en la expresión del operador.

Se puede ver que ante rotaciones cuánticas  $D(\hat{n}, \phi)$  los valores de expectación transforman como vectores

$$\begin{pmatrix} \langle S'_x \rangle \\ \langle S'_y \rangle \\ \langle S'_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\hat{x}, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

En general  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  se transforma como vector y entonces  $\hat{J}$  es un operador vectorial. Consideremos un estado de un sistema de espín 1/2,

$$|\alpha\rangle = \langle + | \alpha \rangle |+\rangle + \langle - | \alpha \rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = e^{-iS_z \phi / \hbar} \langle + | \alpha \rangle |+\rangle + e^{-iS_z \phi / \hbar} \langle - | \alpha \rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = \langle + | \alpha \rangle e^{-i\phi/2} |+\rangle + e^{i\phi/2} \langle - | \alpha \rangle |-\rangle$$

Haciendo una rotación de  $\phi = 2\pi$  (cosa que debiera dejar al ket incólume) se tiene

$$D(\hat{z}, 2\pi) |\alpha\rangle = -\langle + | \alpha \rangle |+\rangle - \langle - | \alpha \rangle |-\rangle = -|\alpha\rangle$$

Luego, esto es una muestra del carácter no-clásico del spin; una vuelta completa le cambia el signo al ket pero notemos cuidadosamente que el valor de expectación – que es algo físico – no varía. Esto muestra que el ket no puede tener sentido físico.

Se observó en 1975 que el patrón de interferencia se altera con el  $-|\alpha\rangle$  de manera que tiene importancia ese signo en el ket.

En la picture se esquematiza. Hay neutrones a la izquierda y un campo magnético  $\mathbf{B}$  delante de la pared. Se ve en la interferencia que llega con el signo cambiado; le hacen dar una vuelta completa al spin.



### 1.1.1 Angulos de Euler

Se define una serie de rotaciones

$$1. R_z(\alpha) \quad 2. R_{y'}(\beta) \quad 3. R_{z'}(\gamma)$$

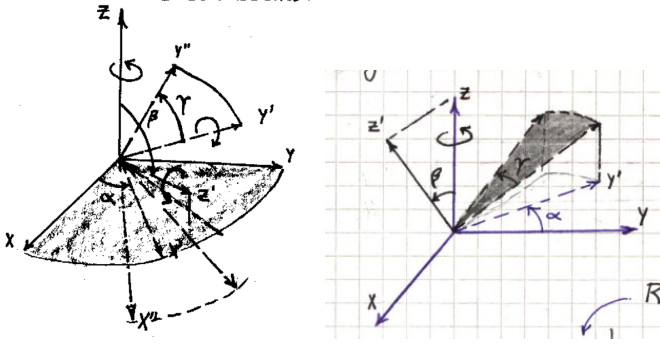
lo cual equivale a

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$$

$$e^{-iJ_{z'}\gamma/\hbar} e^{-iJ_{y'}\beta/\hbar} e^{-iJ_z\alpha/\hbar} |\psi\rangle$$

Pero desconozco cómo operar en los ejes móviles  $z'$ ,  $y'$  así que buscaré es-

Recordemos que en general no se sabe cómo actúan los operadores sobre un estado general sino sobre autoestados.



**Figura 1.2** Los ángulos de Euler son una caracterización de una rotación general en 3D.

cribir las rotaciones de manera que se pueda hacer la cuenta, refiriéndolas a ejes fijos.

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta)$$

siendo estas dos expresiones generales (puede probarse)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) \underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta) R_{y'}(\beta)}_{\mathbb{I}} R_z(\alpha)$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

donde las que son sobre el mismo eje conmutan y entonces,

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma).$$

Rotación equivalente a [1] pero para ejes fijos, puesto que en mecánica cuántica sabemos rotar en torno a ejes fijos.

Los ángulos de Euler son la caracterización de una rotación general en 3D. Entonces nuestra rotación en 3D cuántica será:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma) = e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar}$$

La ley de clausura no era tan obvia (el hecho de pedirla) [cuál es?]. No es una trivialidad como sí podrían serlo las otras tres propiedades.

El hecho de que si  $R_1R_2 = R_3$  se pasaba a los operadores  $D$ , de acuerdo con  $D(R_1)D(R_2) = D(R_3)$  solamente si los operadores  $J$  verificaban la relación de conmutación dada por la Ec. (1.1). La información contenida en dicha relación proporciona todo lo necesario acerca del sistema.

### EJEMPLO 1.2 Ejercicio 7

Consideramos

$$|a\rangle_R = e^{-i/h S_z \varphi} |\alpha\rangle$$

y se pide el valor medio  $\langle S_x \rangle_R$  que será

$${}_R \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R = \langle \alpha | e^{i/h S_z \varphi} S_x e^{-i/h S_z \varphi} | \alpha \rangle$$

y podemos usar la expresión de  $S_x$  de la guía primera con lo cual, operando, resulta

$$\langle S_x \rangle_R = \frac{\hbar}{2} \langle \alpha | (\cos \varphi (|+\rangle \langle -| + |- \rangle \langle +|) + i \sin \varphi (|+\rangle \langle -| - |- \rangle \langle +|)) | \alpha \rangle$$

o bien

$$\langle S_x \rangle_R = \langle S_x \rangle \cos \varphi - \langle S_y \rangle \sin \varphi$$

y vemos que el valor medio del estado rotado es proyección de los valores medios de los estados no rotados.

La parte b) fija el ángulo de la rotación en  $\varphi = 2\pi$ , luego

$$|\alpha\rangle_R = e^{-i/h 2\pi S_z} |\alpha\rangle$$

y, incorporando una constante de normalización  $c$ , se tiene

$$e^{-i/h 2\pi S_z} c(a|+\rangle + b|-\rangle) = c(e^{-i\pi} a|+\rangle + e^{i\pi} b|-\rangle) = -|\alpha\rangle$$

y entonces vemos que rotar en  $2\pi$  ha hecho aparece un signo menos.

### EJEMPLO 1.3 Ejercicio 8

La parte a) está hecha en el libro de Sakurai. La parte b) pide

$$e^{-i/h \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \phi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})^n$$

donde

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

y uso representación  $+-$ . Se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^n (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})^n$$

que con  $n = 0$  da  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} = 1$  y con  $n = 1$  ya tenemos el producto escalar entre  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\hat{n}$ . Con  $n = 2$  es

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = ab + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

y con  $n = 3$  es similar a  $n = 1$  mientras que  $n = 4$  es similar a  $n = 2$ . Vemos que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} = \begin{cases} 1 & \text{par} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{impar} \end{cases}$$

Entonces, la sumatoria puede dividirse en dos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n+1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n})$$

que da

$$\mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}). \quad (1.2)$$

Finalmente, el operador de rotación en la representación  $|+\rangle, |-\rangle$  es

$$D(\hat{n}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) n_z & -(n_y + i n_x) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (n_y - i n_x) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) n_z \end{pmatrix}$$

La parte d) involucra primeramente una rotación alrededor de  $\hat{y}$  en  $\beta$  (lo saco de  $\hat{z}$ ) y en segundo lugar una rotación alrededor de  $\hat{z}$  en  $\alpha$ . Recordemos que las rotaciones no conmutan.

Entonces, usando las expresiones anteriores de la rotación (1.2) resulta

$$D_R(z, \alpha) D_R(y, \beta) |+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) |-\rangle.$$

**Si roto primero en  $\hat{z}$  no lo saco en  $z$  y no sirve a los efectos. Esto por la no conmutatividad.**

## EJEMPLO 1.4 Ejercicio 2

La parte a) son cuentas fáciles (de las que le hubieran gustado a Piuselli).

La parte b) implica

$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}} = \frac{(a_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2}{a_0^2 + |\mathbf{a}|^2}$$

donde hemos multiplicado arriba y abajo por el factor  $a_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$ . Entonces, expandiendo el cuadrado

$$U = (a_0^2 - |\mathbf{a}|^2) \frac{\mathbb{1} + 2ia_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})}{a_0^2 + |\mathbf{a}|^2}$$

y las relaciones que se piden salen desde aquí.

## 1.1.2 Autoestados y autovalores de J

Partimos de

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijR} J_R$$



y tomamos  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  aprovechando que

$$[J^2, J] = 0,$$

siendo esto último muy importante y probándose por evaluación directa.

Lleva a

$$[J^2, J_i^n] = 0 \quad \text{con } i = x, y, z \quad n \in \mathbb{N}$$

Se eligen  $J^2, J_z$  como observables que conmutan

$$J^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle \quad J_z |a, b\rangle = b |a, b\rangle$$

siendo  $a$  autovalor de  $J^2$  y  $b$  de  $J_z$ .

Definiremos los operadores de subida y de bajada

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm J_y$$

que verifican

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm} \quad [J_{\pm}, J^2] = 0$$

Entonces, queremos ver quiénes son  $a, b$ . Haciendo operar, se tiene

$$J^2(J_{\pm} |a, b\rangle) = J_{\pm} J^2 |a, b\rangle = a J_{\pm} |a, b\rangle \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b\rangle$$

$$(J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z) |a, b\rangle = \pm\hbar J_{\pm} |a, b\rangle$$

$$J_z(J_{\pm} |a, b\rangle) = (b \pm \hbar)(J_{\pm} |a, b\rangle) \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_+ |a, b\rangle = c_+ |a, b + \hbar\rangle \quad J_- |a, b\rangle = c_- |a, b - \hbar\rangle$$

de manera que  $J_+$  sube el  $J_z$  en una unidad de  $\hbar$  y  $J_-$  baja el  $J_z$  en una unidad de  $\hbar$ . Entonces,

$$J_{\pm} |a, b\rangle = C_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle$$

donde  $C_{\pm}$  es una constante de normalización. Para averiguarla tenemos que tomar  $(J_+)^* = J_-$ . Empecemos

$$J_+ J_- = J_x^2 + iJ_y J_x - iJ_x J_y + J_y^2, \quad J_- J_+ = J_x^2 - iJ_y J_x + iJ_x J_y + J_y^2$$

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+), \quad J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_+^{\dagger} + J_+^{\dagger} J_+)$$

$$\langle a, b | J^2 - J_z^2 | a, b \rangle = 1/2 \langle a, b | J_+ J_+^{\dagger} + J_+^{\dagger} J_+ | a, b \rangle$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = 1/2 \left[ \langle a, b | J_+ J_+^\dagger | a, b \rangle + \langle a, b | J_+^\dagger J_+ | a, b \rangle \right]$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = |J_+^\dagger | a, b \rangle|^2 \geq 0, \quad \Rightarrow a \geq b^2$$

Esto significa que hay cota máxima para  $b$ . Como

$$J_+ |a, b_M\rangle = 0,$$

debe dar el ket nulo puesto que no se puede seguir subiendo. No sé qué le hace al ket la siguiente combinación de operadores

$$J_- J_+ |a, b_M\rangle = 0$$

pero se puede evaluar del siguiente modo;

$$J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y] = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |a, b_M\rangle = 0$$

$$(a - b_M^2 - \hbar b_M) |a, b_M\rangle = 0$$

$$a = b_M(b_M - \hbar)$$

$$J_- |a, b_m\rangle = 0$$

y como no puede seguir bajando debe dar el ket nulo

$$J_+ J_- |a, b_m\rangle = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |a, b_m\rangle = (a - b_m^2 + \hbar b_m) |a, b_m\rangle = 0$$

$$b_M(b_M + \hbar) = b_m(b_m - \hbar)$$

tiene solución  $b_M - b_m = -\hbar$  si  $b_M + b_m \neq 0$  pero esto es absurdo de manera que  $b_M = b_m$ . Entonces

$$-b_m = b_M \quad \Rightarrow \quad -b_M \leq b \leq b_M$$

Luego, para valor  $a$  fijo

$$|a, b_m\rangle \longrightarrow |a, b_M\rangle$$

y como  $J_+$  sube de  $a$  un  $\hbar$  será

$$b_M = b_m + n\hbar$$

**Puede llegar desde uno a otro con  $J_+$ .**

y entonces

$$b_M = \frac{n\hbar}{2} = \frac{n}{2}\hbar = j\hbar$$

y se da que  $j$  es entero o semientero.

Definiremos

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j\hbar \leq b \leq j\hbar$$

pero como  $b/\hbar = m$

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j \leq m \leq j$$

$$m = (-j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j) \quad 2j+1 \text{ valores de } m$$

esta es la degeneración del estado  $L^2$ . En resumen

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle,$$

todo lo cual salió de la relación de conmutación.

### 1.1.3 La normalización de $J_{\pm}$

Nos falta aún la normalización.

$$J_+ |j, m\rangle = c_+ |j, m+1\rangle \quad J_-^\dagger = J_+$$

Usando la ortonormalidad de los estados se ve que

$$\langle j, m | J_- J_+ | j, m \rangle = \langle j, m | J_+^\dagger J_+ | j, m \rangle = |c_+|^2$$

$$\langle j, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar^2 m = |c_+|^2$$

y como puedo fijar la fase en la unidad, se tiene

$$c_+ = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\begin{aligned} \langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle &= \langle j, m | J_-^\dagger J_- | j, m \rangle = |c_-|^2 \\ &= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 = |c_-|^2 \end{aligned}$$

$$c_- = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

Finalmente, se tienen

$$J_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle$$

y

$$J_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle$$

Se ve que los estados más bajos o más altos se aniquilan

$$J_- |j, -j\rangle = 0 \quad J_+ |j, j\rangle = 0$$

Los elementos de matriz de  $J^2$ ,  $J_z$ ,  $J_+$  serán, si se asume normalización de  $|j, m\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle j', m' | J^2 | j, m \rangle &= j(j+1)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{m'm} \\ \langle j', m' | J_z | j, m \rangle &= m\hbar \delta_{jj'} \delta_{m'm} \end{aligned}$$

Y además

$$\langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar \delta_{jj'} \delta_{m', m \pm 1}$$

que no es diagonal, aunque por poco. Los  $|j', m'\rangle$  no son autoestados de  $J_{\pm}$ .

En el subespacio angular de  $j, m$  vale la completitud

$$\sum_j \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| = \mathbb{1},$$

pero para especificar bien el estado necesito de ciertos sistemas un número más, mínimamente, que es el de la energía

$$\sum_k \sum_j \sum_{m=-j}^j |k, j, m\rangle \langle k, j, m| = \mathbb{1}.$$

### 1.1.4 Elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

Ahora queremos ver cual es la forma de los elementos de matriz de  $\mathcal{D}(R)$

$$\mathcal{D}(R) = e^{i\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi / \hbar}$$

siendo que  $\mathcal{D}(R)$  tiene por efecto rotar el sistema físico. Cuando  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$  es fácil, pero en caso contrario no sabemos cómo opera. Lo primero que hay que notar es que

$$\langle j', m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle \propto \delta_{jj'}$$

porque  $[J^2, J_i] = 0$  y entonces  $[J^2, J_i^n] = 0$  y

$$\mathcal{D}(R) = f(J_i) \longrightarrow [J^2, \mathcal{D}(R)] = 0$$

y

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)} = \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi / \hbar} | j, m \rangle$$

es una matriz para cada  $j$  fijo con  $\{(2j+1) \times (2j+1) = \text{dimensión}\}$

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n}\phi/\hbar} |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

pero las rotaciones no cambian el  $j$ ,  $\mathcal{D}(R)$  conecta estados con la misma  $j$  y  $\mathcal{D}(R) \in (2j+1) \times (2j+1)$

$$\mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

donde  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$  son las funciones de Wigner.

La matriz de  $\mathcal{D}(R)$  (no caracterizada por un único  $j$ ) puede ponerse en forma diagonal por bloques, lo cual surge de considerar la aplicación sobre  $\alpha |j, m\rangle + \beta |j, m'\rangle$

$$\mathcal{D}_{(R)} |\gamma\rangle = \alpha |j_1, m_1\rangle + \beta |j_2, m_2\rangle$$

$$\mathcal{D}(R) = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{matrix} j' \\ j'' \\ j''' \end{matrix}$$

con cada bloque de  $(2j_q+1) \times (2j_q+1)$  con  $q = 1, 2, \dots$ , pero siendo cada bloque irreducible. Cada bloque es un grupo; en efecto, las matrices de rotación con  $j$  fijo forman un grupo.  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$  son los elementillos de la matriz.

$$|j, m\rangle \xrightarrow[\text{Rotación}]{} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

donde el  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$  es la amplitud de hallar al  $|j, m\rangle$  rotado en  $|j, m'\rangle$ . La matriz lo que hace es hacer que varíen las proyecciones del ket sobre la base, pero conservando el valor de  $j$ .

**Hay un dibujito pederro en la carpeta P37.**

### 1.1.5 Forma explícita del operador $\mathcal{D}(R)$

Los ángulos de Euler permitieron caracterizar la rotación más general. Entonces

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)} = \langle j, m' | e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar} |j, m\rangle$$

donde acá sabemos qué es lo que hacen los que están a los lados, porque ya lo calculamos, y entonces

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)} = e^{-i(-m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle j, m' | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j, m \rangle}_{d_{m'm}^{(j)}}$$

siendo el primer factor una fase. En los  $d_{m'm}^{(j)}$ , que son un subconjunto de las funciones de Wigner, está la dificultad de la cuenta.

## 1.2 Formalismo de spinores de Pauli

Apropiado para trabajar con sistemas de espín 1/2. Estos sistemas son casos particulares de momento angular,

$$j = 1/2 \quad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

y se definen los spinores  $\chi_{\pm}$  como

$$|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ \quad |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \langle + | \alpha \rangle \\ \langle - | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \alpha | = ( \langle + | \alpha \rangle \quad \langle - | \alpha \rangle )$$

Para espín 1/2 podemos tomar  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  por la analogía de las relaciones de conmutación. A su vez

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad \text{con} \quad \vec{\sigma} \equiv ( \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z )$$

que es una especie de vector

$$\vec{\sigma} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Luego esta equivalencia provee expresión de los operadores  $S_i$  en términos de matrices de  $2 \times 2$ , así:

$$\frac{i}{2} [J_- - J_+] = J_y = S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y$$

siendo que los  $J_y$  y  $S_y$  actúan sobre kets y el  $\sigma$  sobre spinores.

Las matrices de Pauli cumplen las propiedades básicas siguientes

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \mathbb{1} & \sigma_i^\dagger &= \sigma_i \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= i2\varepsilon_{ijR}\sigma_R & \{\sigma_i, \sigma_j\} &= \delta_{ij} \\ \sigma_i^n &= \begin{cases} \mathbb{1} & n \text{ par} \\ \sigma_i & n \text{ impar} \end{cases} \\ |+\rangle &\equiv |j=1/2, m=1/2\rangle & |-\rangle &\equiv |j=1/2, m=-1/2\rangle \\ (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\end{aligned}$$

### 1.2.1 Aplicación a las rotaciones

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n} \phi / \hbar} = e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2}$$

pero

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^n &= \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} & n \text{ impar} \\ \mathbb{1} & n \text{ par} \end{cases} \\ e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2} &= 1 - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^3 \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 - \dots \\ \mathcal{D}(\hat{n}, \phi) &= e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

es el operador de rotación para sistemas de spin 1/2 (donde  $\mathbb{1} \in 2 \times 2$ ). Con esta expresión podemos evaluar  $d_{m'm}^{j=1/2}(\beta)$

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

donde hemos usado los resultados

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

En el caso general el operador de rotación para sistemas de spin 1/2 lucirá:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} |+\rangle & |-\rangle \end{matrix} \\ \mathcal{D}^{j=1/2}(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{matrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{matrix}\end{aligned}$$

### 1.2.2 Ejemplo

$$d^{1/2}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_+ + \chi_-) = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = |S_x; +\rangle$$

Este resultado es intuitivamente lógico.

### 1.2.3 Rotaciones en sistemas con $j = 1$

Ahora tenemos

$$j = 1 \quad m = -1, 0, 1$$

recordando  $J_y$  en términos de escaleras

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

de modo que

$$J_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{matrix}$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar}\beta + (-i)^2 \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2 \frac{1}{2!} + (-i)^3 \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar}\beta - \frac{1}{2!} \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2 - \frac{i}{3!} \left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 & n \text{ impar} \\ \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 & n \text{ par} \end{cases}$$



$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos(\beta)) - i \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin(\beta) = d^{j=1}(\beta)$$

acá lo vemos como operador (es notación),  $d_{m'm}^{j=1}(\beta)$  simboliza la matriz

$$d^{j=1}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \cos(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) \end{pmatrix} \begin{matrix} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{matrix}$$

### 1.3 Momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

verifica el álgebra de  $\mathbf{J}$ ,

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Consideremos ahora una rotación en torno a  $z$ , en un  $\delta\phi$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{iL_z\delta\phi}{\hbar}\right) |x', y', z'\rangle &= 1 - \frac{iP_y}{\hbar}(x\delta\phi) + \frac{iP_x}{\hbar}(y\delta\phi) |x', y', z'\rangle \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar}(P_yx\delta\phi - P_xy\delta\phi)\right] |x', y', z'\rangle \end{aligned}$$

esto es una traslación en  $\hat{x}, \hat{y}$ ,

$$(1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi) |x', y', z'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$$

Esta traslación es debida a una rotación infinitesimal en  $\delta\phi$  torno a  $z$  entonces genera las rotaciones clásicas en torno a  $z$ .

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle x', y', z' | \alpha \rangle \xrightarrow{\text{Rotamos en } z} \left\langle x', y', z' \left| 1 - \frac{iL_z\delta\phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = \langle x' + y'\delta\phi, y' - x'\delta\phi, z' | \alpha \rangle$$

y en coordenadas esféricas,

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \xrightarrow{\text{Rotamos en } z} \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$$

Podemos hallar una expresión para  $L_z$  en esféricas:

$$\left\langle r, \theta, \varphi \left| 1 - \frac{L_z \delta \phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle \approx \langle \phi | \alpha \rangle - \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \delta \phi$$

identificamos

$$\left\langle \mathbf{r} \left| -\frac{iL_z}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \mathbf{r} | \alpha \rangle$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

operador  $L_z$  en esféricas.

Esta construcción usa que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \approx \frac{\langle \phi + \delta \phi | \alpha \rangle - \langle \phi | \alpha \rangle}{\delta \phi} = \frac{\langle \phi | \alpha \rangle - \langle \phi - \delta \phi | \alpha \rangle}{\delta \phi}$$

y luego se despeja de la última  $\langle \phi - \delta \phi | \alpha \rangle$ .

Usando

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+)$$

se llega a

$$\langle r, \theta, \phi | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right] \langle r, \theta, \varphi | \alpha \rangle$$

$$L^2 = -\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2$$

donde  $\nabla_{\theta, \varphi}^2$  es la parte angular del laplaciano en coordenadas esféricas. Esto puede obtenerse también partiendo de

$$L^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$$

Sea un  $H$  de partícula, sin spín, sujeta a potencial simétricamente esférico. Sabemos que la función de onda  $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}')$  es separable en coordenadas esféricas, entonces:

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = (\langle r | \otimes \langle \theta, \phi |) (|n, l, m \rangle) = \langle r | n, l, m \rangle \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

Cuando el  $H$  es esféricamente simétrico (como en un potencial central) se tiene

$$[H, L_z] = [H, L^2] = 0$$

Trabajaremos solamente en la parte angular  $|\theta, \varphi\rangle \equiv |\hat{n}\rangle$

$$\langle \hat{n} | \ell, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\hat{n})$$

que es la amplitud de hallar  $|\ell, m\rangle$  en la dirección  $\hat{n}$ .

Podemos vincular ahora los armónicos esféricos con los autoestados de  $L_z, L^2$

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

de manera que

$$\langle \hat{n} | L_z | \ell, m \rangle = m\hbar \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

y entonces

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto e^{im\phi}.$$

$$L^2 |\ell, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

y de modo ídem

$$\langle \hat{n} | L^2 | \ell, m \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

$$(-\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \phi}^2 + l(l+1)\hbar) \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = 0$$

Entonces, con la ortogonalidad

$$\longrightarrow \langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

y con la completitud

$$\longrightarrow \int d\Omega |\hat{n}\rangle \langle \hat{n}| = 1$$

de manera que llegamos a

$$\int d\Omega \langle l', m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad \int d\Omega Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

Podemos hallar una expresión para

$$\langle \hat{n} | L_+ | l, l \rangle = 0$$

$$-i\hbar e^{i\phi} \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle \hat{n} | l, l \rangle = 0 \Rightarrow Y_l^m(\theta, \phi) = c_l e^{il\phi} \sin^l \theta$$

Luego usamos  $L_-$  para hallar sucesivamente los demás  $Y_\ell^m$

$$\frac{\langle \hat{n} | L_- | l, m \rangle}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \langle \hat{n} | l, m-1 \rangle$$

y por este camino se llega a

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos^{l-m} \theta)} (\sin \theta)^{2l}$$

con

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)(Y_l^m(\theta, \phi))^* \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

En el caso de momento angular orbital  $\ell$  no puede ser semientero porque entonces  $m$  sería semientero y en una vuelta de  $2\pi$

$$e^{im2\pi} = -1$$

entonces  $\psi$  no será univaluada

Además,

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iL_z 2\pi/\hbar} | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle \quad (\text{no hay signo menos})$$