

## Capítulo 1

---

# Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

## 1.1 Introducción a la formulación de Hamilton

Un sistema mecánico está caracterizado por  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  las cuales dan un estado posible del sistema, y además dan toda la información dinámica del mismo.

Ahora se describirá al sistema en términos de  $q_i, p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  que tiene la característica de producir una simetría en la mecánica así definida (la mecánica hamiltoniana). La simetría es tal que son intercambiables  $q_i$  y  $p_i$ .

Para las ecuaciones de movimiento se parte del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  tiene la misma información que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

Se puede hacer una analogía con la termodinámica, pues la primer ley se escribe

$$dE = dQ - dW = \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_V dS - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_S dV,$$

lo cual implica que usando  $S, V$  tengo como “potencial” a la energía. Un estado termodinámico se define por dos variables;  $(S, V), (T, P), (S, P), (T, V)$  que son cada par variables conjugadas.

Para definir estos potenciales se usan transformadas de Legendre. Así,

$$d(E - TS) = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT \equiv dA$$

siendo  $A$  la energía libre de Helmholtz.

$$d(E + PV) = TdS - PdV + PdV + VdP = TdS + VdP \equiv dH$$

siendo  $H$  la entalpía.

En el caso del Hamiltoniano se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

la cual usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y el hecho de que  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  es el momento conjugado  $p_i$  se tiene

$$d\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

y como esta ecuación es el diferencial total del hamiltoniano se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$$

siendo la última igualdad una derivación vista oportunamente. Asimismo,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \sum_i \dot{q}_i \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\sum_i \dot{p}_i$$

que son una mayor cantidad de ecuaciones pero de orden uno (comparando con las ecuaciones del sistema en el formalismo lagrangiano).

Con esto definimos un espacio de fases  $(p_i, q_i)$  de  $2N$  dimensiones para estudiar el movimiento de un sistema de partículas. En el caso particular de una única partícula tendremos dos variables,  $(p, q)$ .

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \quad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos  $(\beta_i, \alpha_i)$  que son constantes. Entonces la acción es del tipo  $F_2$ , i.e.

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \quad (1.1)$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

y esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE). Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

y además que Hamilton-Jacobi tiene solución si el problema es totalmente separable. Si  $H = H(q_i, \alpha_i)$  entonces  $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$  y en ese caso es  $H = cte.$  y podemos poner  $H = \alpha_1$ . Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \longrightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener  $S$ .

Podemos ver que si  $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$ , y me quedo con  $H = \alpha_1 \equiv K$  entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \longrightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \longrightarrow P_i = \alpha_i(ctes.).$$

La  $\alpha_1$  no puede depender de  $q_i$  pues si se tuviera  $\partial \alpha_1/\partial q_i \neq 0$  no sería constante  $\alpha_1$  pues  $\dot{q} \neq 0$ .

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1.1) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

## 1.2 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen  $\mathcal{V}$  en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

$$\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n dP_1 dP_2 \dots dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}$$

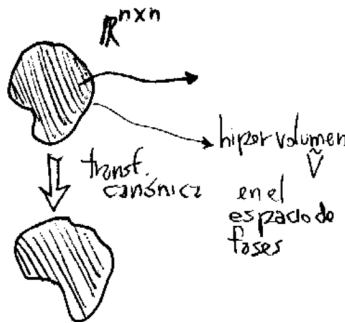


Figura 2.1

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) |_{P_i = \text{cte}}}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) |_{q_i = \text{cte}}}$$

que en notación de matriz es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)$$

y

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que  $J = 1$  y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma.

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dp dq \quad A_{P,Q} = \int dP dQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1$$

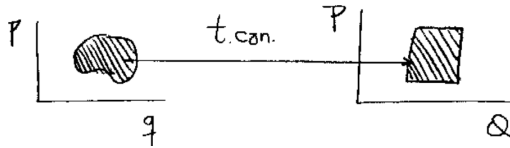


Figura 2.2

Notamos que el corchete de Poisson para una transformación canónica en un grado de libertad es el corchete que ya sabíamos de uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

### 1.3 Variables ángulo-acción

Consideremos una transformación canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

la cual requiere

- Conservativos  $S = W - Et$
- Totalmente separables  $W = \sum_i^N W_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Problemas periódicos

El movimiento periódico es de rotación o libración,

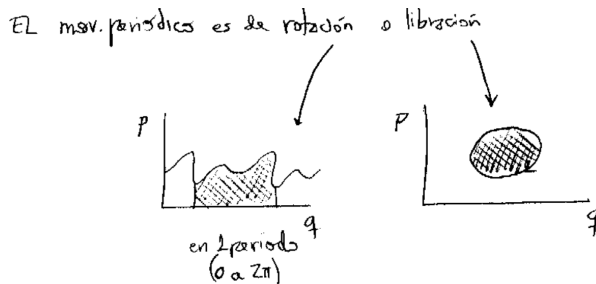


Figura 3.3

La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

$$S = \sum_i^N W_i(q_i, J_i) - Et$$

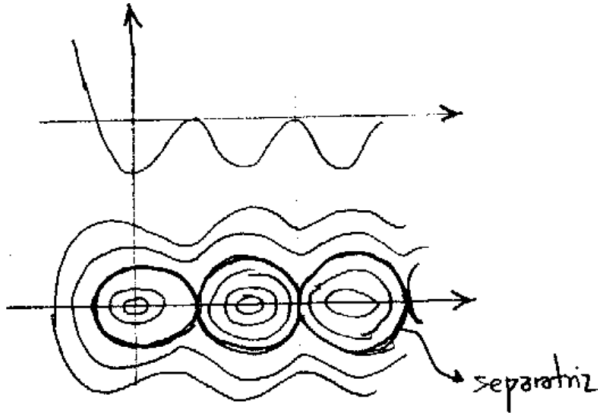


Figura 3.4

Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeñas perturbaciones.

La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{ciclo}} p_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

son constantes y a su vez los  $\alpha_i$  son constantes de separación. Asimismo  $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n)$ . La transformación  $S$  es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo  $p_i = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$ . El nuevo hamiltoniano es  $E = E(J_1, \dots, J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i$$

de manera que tenemos

$$\theta_i = \omega t + \theta_{0_i} \quad \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i)$$

y entonces despejamos las  $q_i$  desde

$$\theta_i(q_i, J_i) = \omega t + \theta_{0_i}.$$

Las condiciones iniciales  $(q_i, J_i)$  se introducen en

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$$

y obtengo las  $J_1, \dots, J_n$  constantes.

## 1.4 Transformación canónica infinitesimal

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i P_i$$

es la indentidad

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i$$

y donde considero

$$F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) \quad \text{con } \epsilon \sim 0$$

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \longrightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \longrightarrow Q_i = q_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

donde  $\partial G / \partial P_i \approx \partial G / \partial p_i$  diferirán en un orden  $\epsilon^2$  el cual descarto. Entonces

$$\delta p_\ell = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_\ell} \quad \delta q_\ell = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_\ell}.$$

Si considero  $H$  en lugar de  $G$  y  $\epsilon = \delta t$  entonces

$$\frac{\delta p_\ell}{\delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \frac{\delta q_\ell}{\delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

de tal manera que

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \quad \dot{q}_\ell = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

y donde se ve que el  $H$  genera la transformación evolución temporal.

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

y

$$\delta A = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \epsilon [A, H] \longrightarrow \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

entonces las constantes de movimiento generan transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante al hamiltoniano  $H$ . Si

$$\frac{dA}{dt} = 0 \implies [A, H] = 0$$

## 1.5 Potencial electromagnético

Arranquemos por los momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{pero si } V \neq V(q) \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces

$$U(q, \dot{q}) = e\phi - e/c \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \longrightarrow \mathcal{L} = T - e\phi + e/c \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = mV_x - (e/c)A_x.$$

Hacemos un cambio de gauge, en un potencial generalizado

$$U = e\Phi(\mathbf{x}, t) - (q/c) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(t)$$

y el cambio de gauge es

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

que no altera las ecuaciones de movimiento.

### EJEMPLO 5.1 Problema de parcial

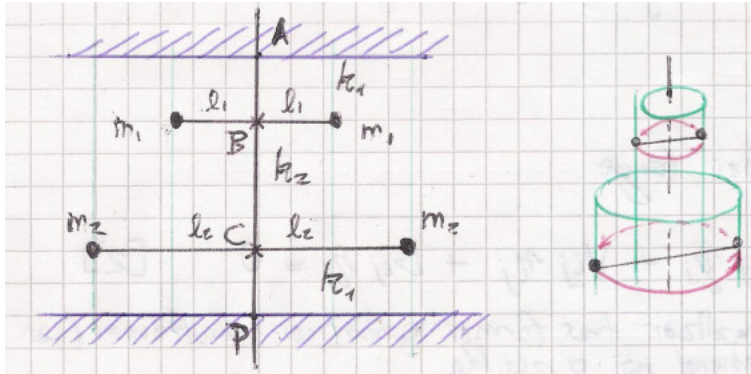
Luego, para desacoplar la solución habría que plantear la matriz

$$\mathbb{B} = [\eta_1^\dagger \dots \eta_i^\dagger]$$

### EJEMPLO 5.2 Problema 12

El setup se ilustra en la figura siguiente.





El torque

$$\tau = -k\theta$$

lo suponemos un potencial  $V = 1/2k\theta^2$ , donde  $k$  tiene unidades de energía. Las barras solo rotan de manera que

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2)$$

donde estamos pensando como dos partículas. En cambio, pensándolo como una barra con momento de inercia es

$$T = \frac{1}{2}I\Omega^2$$

Entonces,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(2m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(2m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 \quad V_{12} = \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad V_2 = \frac{1}{2}k_1\theta_2^2$$

Definiendo  $\eta_i = \theta_i - \theta_{eq}$  que implican  $\dot{\eta}_i = \dot{\theta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) se puede escribir el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \ell_1^2 m_1 \dot{\eta}_1^2 + \ell_2^2 m_2 \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\eta_1^2 - \frac{1}{2}k_2\eta_2^2 - \frac{1}{2}k_2(\eta_2 - \eta_1)^2$$

de manera que

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\ell_1^2 m_1 & 0 \\ 0 & 2\ell_2^2 m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

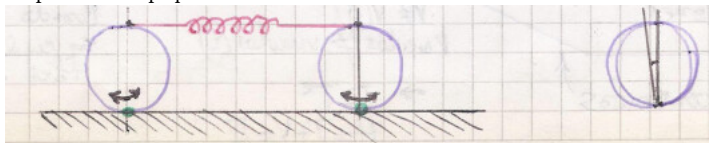
Faltaría entonces

$$\det\{\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\} = 0$$

y los autovectores  $A^1, A^2$ .

### EJEMPLO 5.3 Problema 8

Un problema de pequeñas oscilaciones.



En este ejemplo hay que suponer que el lagrangiano es ya de entrada de pequeñas oscilaciones.