

## Capítulo 1

---

# Dinámica cuántica

Queremos ver la evolución temporal de los kets. Para ello utilizaremos cierta convención. Un ket dependerá del tiempo lo cual se indicará con

$$|\alpha, t_0, t\rangle,$$

notación que refiere al estado  $\alpha$  que partió en  $t_0$  al tiempo  $t$ . Luego  $|\alpha, t = t_0\rangle \equiv |\alpha\rangle$ . Pictóricamente

$$|\alpha, t_0\rangle \xrightarrow[\text{evoluciona}]{} |\alpha, t_0, t\rangle$$

Emplearemos para ello un operador de evolución temporal  $U_{(t, t_0)}$  al cual le pediremos que realice la evolución según

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U |\alpha, t_0\rangle$$

Entonces, un elemento de matriz  $\langle b | U_{(t, t_0)} | a \rangle$  implica la probabilidad (amplitud) de que se tenga componente de  $b$  en el tiempo  $t$  del sistema que estamos considerando. El operador de evolución tendrá las propiedades

- Unitariedad

$$\langle \alpha, t_0, t | \alpha, t_0, t \rangle = 1 \quad \forall t$$

$$\langle \alpha, t_0 | U^\dagger U | \alpha, t_0 \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$$

para conservación de la probabilidad. Tiene que ser unitario.

- Linealidad

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0$$

- Límite a  $\mathbb{1}$  (identidad)

$$U_{(t,t_0)} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad t \rightarrow t_0$$

o bien

$$U_{(t_0+dt,t_0)} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad dt \rightarrow 0$$

Una forma más general de escribir un  $U$  unitario es  $U = e^{i\eta A}$ . De aquí se ve más fácil que como  $e^{i\eta A} e^{-i\eta A^\dagger} = 1$  una transformación unitaria infinitesimal es  $U = 1 + i\eta A$  y  $-dt/\hbar = \eta$ .

Se propone entonces (infinitesimalmente) un

$$U_{(t+dt,t)} = \mathbb{1} - i \Omega dt$$

con  $\Omega$  hermítico. Comparando con clásica vemos que  $H$  origina la evolución temporal, entonces identificamos  $\Omega$  con  $H$ , del modo  $\Omega = H/\hbar$  así que

$$U_{(t+dt,t)} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H dt.$$

**El hamiltoniano  $H$  es un operador ahora.**

De esta forma

$$U_{(t+dt,t_0)} = U_{(t+dt,t)} U_{(t,t_0)} = \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H dt \right) U_{(t,t_0)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{U_{(t+dt,t_0)} - U_{(t,t_0)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H U_{(t,t_0)}$$

y entonces

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H U$$

que es la ecuación para  $U_{(t,t_0)}$ . No podemos utilizar los métodos que usamos anteriormente porque en  $U = N e^{i \int dt' H(t)/\hbar}$  [depende del tiempo?]. Supongamos que es  $H \sim \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}(\theta)$ , se tiene en  $t = 0$  es  $\mathbf{r}(t) = \hat{z}$  y en  $t = 5$  seg. es  $\mathbf{r}(t) = \hat{y}$ . Tenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_{(t,t_0)} |\alpha, t_0\rangle = H U_{(t,t_0)} |\alpha, t_0\rangle,$$

que nos conduce a la ecuación de Schrödinger para kets

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle$$

donde el inconveniente es que  $H = H(t)$ .

El concepto se ilustra en la figura siguiente

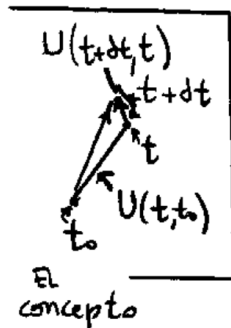


Figura 0.1

## 1.1 Casos sencillos de solución de $U(t, t_0)$

- Supongamos  $H \neq H(t)$ , entonces

$$U(t, t_0) = e^{-i/\hbar H(t-t_0)}$$

- Sea  $H = H(t)$ , entonces

$$U(t, t_0) = e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t H(t') dt'}$$

y la integral puede hacerse una vez conocida la expresión de  $H(t)$ .

- Sea  $H = H(t)$  con  $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$  entonces

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \times \\ \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n)$$

y esta es la serie de Dyson (del físico Freeman Dyson(.).) Esta es la solución formal general para el caso 3.

El problema que suscita es debido a que si  $H$  a diferentes tiempos no conmuta no podemos poner la exponencial en serie de potencias. En realidad  $\exp(\square)$  tiene sentido sólo si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \square^n$$

tiene sentido; es decir, si no surgen ambigüedades al tomar la potencia  $n$ -ésima del operador  $\square$ .

Para el caso 1 (pensamos una especie de serie de Taylor, que es un modo general de encarar este tipo de problemas de cosas no bien definidas) es simplemente

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} = 1 - i\frac{H}{\hbar}(t-t_0) + \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{H\Delta t}{\hbar}\right)^2 + \dots + \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{H\Delta t}{\hbar}\right)^n,$$

y por otra parte

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H - i\frac{H^2}{\hbar^2} \Delta t + \dots$$

y término a término coinciden; entonces probamos que la solución vale.

Para el caso 2, donde los hamiltonianos a diferentes tiempos conmutan entre sí, es decir  $[H(t_1), H(t_2)] = 0$  la solución es

$$U(t, t_0) = e^{i/\hbar \int_{t_0}^t H(t') dt'}$$

Esto no es una boludez. Al desarrollar Taylor la exponencial surge un problema

Si no conmutan los operadores no sé cómo armar el cuadrado.

$$A^2 = A(t)A(t'') \text{ o bien } A^2 = A(t'')A(t)$$

$$\left(\int H(t')dt'\right) \left(\int H(t'')dt''\right) \neq \left(\int H(t'')dt''\right) \left(\int H(t')dt'\right)$$

puesto que al operar es

$$\int dt' dt'' H(t')H(t'') \neq \int dt' dt'' H(t'')H(t')$$

pues  $[H(t'), H(t'')] \neq 0$ . En el caso 2  $(\int_{t_0}^t H(t')dt')^n$  no tiene problemas puesto que está provista la conmutatividad.

### 1.1.1 Soluciones útiles

La solución que sirve es

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U(t, t_0) |\alpha\rangle$$

La idea es escribir el  $|\alpha\rangle$  del sistema y hallar un operador que conmute con el hamiltoniano y en cuya base escribo  $|\alpha\rangle$ ,

$$|\alpha\rangle = \sum C_{a'} |a'\rangle \quad H |\alpha\rangle = \sum E_{a'} C_{a'} |a'\rangle$$

**El operador  $\square$  no se deja poner sombreros, quiere andar con la cabeza descubierta**

y trabajaremos con una solución útil ahora.

Primeramente conseguimos un  $\hat{A}$  tal que  $[A, H] = 0$  y entonces (estoy considerando  $H \neq H(t)$ )

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle,$$

luego

$$U(t, t_0) |\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

con  $\hat{H}$  y  $\hat{A}$  conmutan se tiene

$$\hat{H} |a'\rangle = E_{a'} |a'\rangle \quad \hat{A} |a'\rangle = a' |a'\rangle$$

Entonces operamos con el  $H$  para

$$U(t, t_0) = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' |$$

y así (quiero saber cómo trabaja en el tiempo  $|\alpha\rangle$ ), le aplico el operador evolución

$$U(t, t_0) |\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle$$

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle = \sum_{a''} \sum_{a'} c_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a''\rangle \langle a'' | a' \rangle$$

o bien

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} c_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle,$$

de manera que comparando con

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle |a'\rangle$$

El coeficiente es el mismo pero le hemos sumado una fase  $\exp(-iE_{a'}(t-t_0)/\hbar)$  que no es global.

### 1.1.2 Evolución de valores de expectación

Recordemos primeramente que los autoestados no evolucionan. Luego

$$|\alpha\rangle = |a'\rangle \quad \rightarrow \quad |\alpha, t\rangle = |a', t\rangle = e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle$$

La fase es global y no tiene sentido físico (no cambia el valor de expectación, por ejemplo) Es considerar una autoestado [?]. La podemos descartar (setear igual a uno)

$$\langle a', t | B | a', t \rangle = \langle a' | e^{i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} B e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} | a' \rangle = \langle a' | B | a' \rangle$$

El valor de expectación de un operador respecto a un autoestado no varía. Se simplifican las fases y en el valor de expectación no me entero de ellas. Para un estado que no es necesariamente autoestado

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t \rangle = \langle a'' | \sum_{a''} \langle a'' | \alpha \rangle^* e^{i\frac{E_{a''}}{\hbar}(t-t_0)} B \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} | a' \rangle$$

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t \rangle = \sum_{a', a''} C_{a''}^* C_{a'} e^{i\frac{E_{a''} - E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} \langle a'' | B | a' \rangle$$

donde  $(E_{a''} - E_{a'})/\hbar$  es la llamada frecuencia de Bohr y vemos que la fase global depende de los índices de las sumatorias; entonces habrá términos de interferencia.

$$C_{a''}^* = \langle \alpha, t_0 | a'' \rangle \quad C_{a'} = \langle a' | \alpha, t_0 \rangle$$

El valor de expectación de un operador respecto a un estado general tiene una fase no global que produce términos de interferencia.

Sólo en el caso en que  $B$  conmute con  $H$  ( $B$  diagonal) se dará que la fase no interviene, porque pierdo una sumatoria merced a una delta de Kronecker que aparece.

### 1.1.3 Relaciones de conmutación

Algunas propiedades de los conmutadores

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, B \cdot C] = B[A, C] + [A, B]C$$

Identidad de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

**Acá no es boca + caballo  
puesto que no conmutan.**

$$i\hbar[A, B]_{\text{classic}} = [A, B]$$

donde  $[\cdot, \cdot]_{\text{classic}}$  es el corchete de Poisson. Las relaciones de conmutación fundamentales son

$$[x_i, x_j] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

a las que podemos sumar

$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \quad [p, G(x)] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

### 1.1.4 La ecuación de Schrödinger

Habíamos llegado a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle,$$

donde supusimos que el hamiltoniano no depende del tiempo, y es el clásico. Caso típico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Puedo meter un bra  $\langle x' |$  que no depende del tiempo y entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' | \alpha, t_0, t \rangle = \langle x' | H | \alpha, t_0, t \rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(x', t) = \langle x' | \frac{p^2}{2m} + V(x) | \alpha, t_0, t \rangle$$

de manera que resulta la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(x', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Psi_\alpha(x', t) + V(x) \Psi_\alpha(x', t).$$

Ahora la función de onda depende del tiempo.

Si suponemos que  $|\psi\rangle$  es autoestado de  $H$  entonces

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(t_0)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi(t_0)\rangle,$$

y entonces el lhs de la ecuación de Schrödinger pasa a ser  $E\Psi_\alpha(x', t)$ .

Si no fuera autoestado, sino combinación lineal de autoestados, entonces podemos escribir

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha, t_0\rangle = \sum_m e^{-iHt/\hbar} |m\rangle \langle m | \alpha, t_0 \rangle.$$

**Acá usamos que sabemos cómo operan  $p$  y  $p^2$ .**

**Anoté que en la página de la materia están los postulados en un pdf. Notemos que  $p = -i\hbar \nabla$ .**

**EJEMPLO 1.1 Ejercicio guía 2**

Parte a)

$$H = -\frac{e}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -\frac{eB}{mc} S_z = -\omega S_z$$

donde suponemos que el campo es en  $\hat{z}$ . Entonces

$$[H, S_z] = 0 \quad [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

como es nulo el conmutador, tienen una base común de autokets. Será  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  y se pueden escribir

$$S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle \quad H |\pm\rangle = -mp \frac{\omega \hbar}{2} |\pm\rangle.$$

Parte b)

En  $t = 0$  es

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

de modo que

$$|\alpha, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\omega t/2} |+\rangle + e^{-i\omega t/2} |-\rangle]$$

Parte c)

Quiero medir en un instante posterior

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right)_{\hat{x}} = |\langle S_x; + | \alpha; t \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2}) \right|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

y consecuentemente

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right)_{\hat{y}} = \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

de manera que como hay solamente dos estados posibles la probabilidad suma 1.

Parte d)

Se tiene

$$\langle S_x \rangle = \langle \alpha(t) | S | \alpha(t) \rangle$$

con la expresión para  $|\alpha(t)\rangle$ . Se puede hacer directamente o utilizando la probabilidad, que ya fue calculada previamente. La idea es que como

$$\langle A \rangle = \sum_a a |\langle a | \alpha \rangle|^2,$$

entonces

$$\frac{\hbar}{2} \left( \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right)$$

y luego  $\langle S_x \rangle = \hbar/2 \cos(\omega t)$ . Para  $S_y$  se puede operar con las matrices de Pauli, pues  $S_y = \hbar/2 \sigma_y$  con

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

En general hay que descomponer en autoestados, como  $|+\rangle = (10)^t$  y el  $|-\rangle = (01)^t$  de manera que  $\langle S_x \rangle = \hbar/2 \sin(\omega t)$ . Por otra parte, como tengo un medio de probabilidad up y down, será  $S_z = 0$ .

Parte e)

Sea  $n(t)$  tal que  $\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\alpha, t\rangle = |\alpha, t\rangle$ . Del ejercicio 8 tomamos

$$\mathbf{S} \cdot \hat{n} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle$$

**Una fase global sale de todo el ket y muere en el valor absoluto.**



y

$$|\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} |-\rangle$$

de modo que

$$|\alpha, t\rangle = \frac{e^{i\omega t/2}}{\sqrt{2}} [|+\rangle + e^{-i\omega t} |-\rangle] \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-i\omega t} |-\rangle)$$

donde me olvido de la exponencial afuera porque es una fase global y no aporta a la probabilidad. Comparamos el resultado final con lo del ejercicio 8 y por inspección obtenemos que  $\beta = \pi/2$  y  $\alpha = -\omega t$ .

### 1.1.5 Representación de Heisenberg

Los kets y los operadores no tienen sentido físico, pero sí los valores de expectación

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle,$$

puesto que son lo que se mide. Entonces cualquier física podrá modificar los primeros pero debe conservar los valores de expectación. Así tenemos dos representaciones posibles:

Schrödinger	Heisenberg
$ \alpha\rangle \rightarrow U  \alpha\rangle$	$ \alpha\rangle \rightarrow  \alpha\rangle$
$A \rightarrow A$	$A \rightarrow U^\dagger A U$
$ a'\rangle \rightarrow  a'\rangle$	$ a'\rangle \rightarrow U^\dagger  a'\rangle$

Así vemos que en Schrödinger los kets evolucionan y los operadores permanecen fijos; al igual que los autoestados. En cambio en Heisenberg los kets no evolucionan pero sí lo hacen los operadores y los autoestados.

Deben notarse que:

1. Los productos internos no cambian con el tiempo

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | U^\dagger U | \alpha \rangle$$

2. Los valores de expectacion son los mismos en ambos esquemas

$$\langle \alpha, t | A | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, t | U^\dagger A U | \alpha, t \rangle = \begin{cases} \langle A \rangle^{(H)} \\ \langle A \rangle^{(S)} \end{cases}$$

de lo cual se deduce que

$$\langle A \rangle^{(S)} = \langle A \rangle^{(H)} \quad A(t)^H = U(t)^\dagger A^S U(t)$$

El operador  $\hat{A}$  en Schrödinger no depende explícitamente del tiempo. La idea es que le “pegamos” a los operadores la evolución temporal de los kets.

$$(\langle \alpha, t_0 | U^\dagger) A^{(S)} (U | \alpha, t_0 \rangle) = \langle \alpha, t_0 | U^\dagger A^{(S)} U S | \alpha, t_0 \rangle$$

pero a  $t = t_0$  las representaciones coinciden,

$$|\alpha, t_0, t_0\rangle^{(S)} = |\alpha\rangle^{(H)}$$

y se separan a medida que el tiempo transcurre. Se tiene

$$U(t, t_0) = U(t) = e^{iHt/\hbar},$$

donde este  $H$  no depende del tiempo.

### EJEMPLO 1.2 Ejemplito

Con el operador de traslación sería algo como

$$|\alpha\rangle^{(S)} \rightarrow \left[1 - \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar}\right] |x\rangle^{(S)}$$

$$\mathbf{X}^{(S)} \rightarrow \mathbf{X}^{(S)}$$

Representación de apple (manzana?)

$$|\alpha\rangle^{(A)} \rightarrow |\alpha\rangle^{(A)}$$

$$\mathbf{X}^{(A)} \rightarrow U^\dagger \mathbf{X}^{(A)} U = \left[1 + \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar}\right] \mathbf{X} \left[1 - \frac{i\mathbf{p}d\mathbf{x}}{\hbar}\right] = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$$

y para ambas representaciones es

$$\langle \mathbf{X} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{X} \rangle + \langle d\mathbf{X} \rangle$$

### EJEMPLO 1.3 Ejercicio 21

Punto a)

$$[x, f(p_x)]_{\text{Poisson}} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x} \frac{\partial F(p_x)}{\partial x} = \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x}.$$

Punto b) donde  $x, p_x$  son operadores. Entonces hay que evaluar

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}],$$

y como conocemos el conmutador de  $x, p_x$  se utiliza una serie de potencias, es decir

$$[x, f(p_x)] = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial p_x^n} [x, p_x^n],$$

y

$$[x, p_x^n] = [x, p_x^n p_x^{n-1}] = p_x [x, p_x^{n-1}] + [x, p_x] p_x^{n-1} = p_x [x, p_x^{n-1}] + i\hbar p_x^{n-1},$$

y aplicando inducción matemática se ve que llegamos a

$$[x, p_x^n] = i\hbar n p_x^{n-1},$$

de modo que

$$[x, f(p_x)] = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial p_x^n} i\hbar n p_x^{n-1} = \sum_n [\dots] = i\hbar \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x}$$

puesto que es el desarrollo en serie de la derivada. Finalmente,

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}] = -a e^{ip_x a/\hbar}.$$

Punto c) se tiene que  $e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle$  es autoestado de  $\hat{x}$ , donde  $\hat{x} |x'\rangle = x' |x'\rangle$ . Luego, usando el resultado anterior

$$[x, e^{ip_x a/\hbar}] |x'\rangle = -a e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle,$$

de lo cual se deduce, expandiendo, que

$$\hat{x} e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle = (x' - a) e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle,$$

o bien

$$\hat{x} |x'\rangle = (x' - a) |x'\rangle,$$

de manera que el operador  $e^{ip_x a/\hbar}$  es el operador de traslación pues

$$e^{ip_x a/\hbar} |x'\rangle = |x' - a\rangle.$$

## La ecuación de Heisenberg

Queremos llegar a una ecuación para trabajar en la representación de Heisenberg.

$$\begin{aligned} A^H &= U^\dagger A^S U & \frac{\partial A^H}{\partial t} &= \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} A^S U + U^\dagger A^S \frac{\partial U}{\partial t} + U^\dagger A^S \frac{\partial U}{\partial t} \\ i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H U ; \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{-i\hbar} U^\dagger H \\ (H U)^\dagger &= U^\dagger H^\dagger = U^\dagger H \\ \frac{\partial A^H}{\partial t} &= \frac{-1}{i\hbar} U^\dagger H A^S U + U^\dagger \underbrace{\frac{\partial A^S}{\partial t}}_{=0} U + U^\dagger A^S \frac{1}{i\hbar} H U \end{aligned}$$

pues  $A^S$  no depende explícitamente del tiempo (si )

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} (U^\dagger H U U^\dagger A^S U - U^\dagger A^S U U^\dagger H U) = \frac{1}{i\hbar} (-H A + A H)$$

y llegamos a la ecuación de Heisenberg

$$\frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H^{(H)}]$$

si  $A^{(H)}$  conmuta con el  $H^{(H)}$ , entonces  $A^{(H)}$  es una cantidad conservada (una constante de movimiento). En ese caso el operador no depende del tiempo y entonces  $A^{(H)} = A^{(S)}$ .

## Evolución de autoestados

$$A^S |a'\rangle^S = a' |a'\rangle^S,$$

aplico un  $U^\dagger$  a ambos lados y entonces

$$U^\dagger A^S U U^\dagger |a'\rangle^S = a' U^\dagger |a'\rangle^S$$

los  $a'$  no dependen de la representación porque tienen significado físico. Entonces los  $|a'\rangle$  evolucionan

$$A^H (U^\dagger |a'\rangle^S) = a' (U^\dagger |a'\rangle^S)$$

$$|a', t\rangle^H = U^\dagger |a'\rangle^S \quad \frac{\partial}{\partial t} (|a', t\rangle^H) = \frac{\partial}{\partial t} (U^\dagger |a'\rangle^S)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle^H = -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger |a'\rangle^S = -\frac{1}{i\hbar} H U^\dagger |a'\rangle^S$$

puesto que recordemos, nota importante,

$$H^H = U^\dagger H^S U = U^\dagger U H^S = \mathbb{1} H^S = H^S$$

entonces  $H$  es el mismo en ambas puesto que  $\hat{U} = \hat{U}(\hat{H})$  y  $[U, H] = 0$ .

De esta forma los autoestados evolucionan al revés

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle^H = -H |a', t\rangle^H$$

Podemos ver de otro modo la equivalencia, usando el proyector para el operador de Schrödinger,

$$A^S = \sum_{a'} a' |a'\rangle^S \langle a'|^S$$

y entonces  $A^H$  será

$$A^H = U^\dagger \sum_{a'} A^S |a'\rangle \langle a'| U = \sum_{a'} a' U^\dagger |a'\rangle \langle a'| U$$

pero

$$A^H = \sum_{a'} A^H |a', t\rangle \langle a', t| \equiv \sum_{a'}$$

y luego se tiene que

$$A^H = \sum_{a'} a' |a', t\rangle \langle a', t| \equiv \sum_{a'} a' (U^\dagger |a'\rangle) (\langle a'| U),$$

donde por inspección resulta

$$|a', t\rangle = U^\dagger |a'\rangle^S.$$

	Schrödinger	Heisenberg
$ \alpha\rangle$	evolucionan	no evolucionan
$A$	no evolucionan	evolucionan
$ a'\rangle$	no evolucionan	evolucionan

## Coefficientes

Los coeficientes en Schrödinger y en Heisenberg son

$$C_{a'}^S(t) = {}^S \langle a' | \alpha, t_0, t \rangle^S = {}^S \langle a' | (U | \alpha, t_0) \rangle$$

$$C_{a'}^H(t) = {}^H \langle a', t | \alpha, t_0 \rangle^H = ({}^S \langle a' | U) | \alpha, t_0 \rangle$$

Entonces en Schrödinger es

$$|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha, t_0, t \rangle = \sum_{a'} \overbrace{\langle a' | \alpha, t_0, t \rangle}^{C_{a'}(t)} |a'\rangle$$

mientras que en Heisenberg es

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} |a', t\rangle \langle a', t | \alpha, t_0 \rangle = \sum_{a'} \overbrace{\langle a', t | \alpha, t_0 \rangle}^{C_{a'}(t)} |a', t\rangle$$

Los coeficientes en las expresiones son iguales como corresponde a todo magnitud que tiene sentido físico, pues  $|c_a(t)|^2$  es la probabilidad. El coeficiente es el mismo en ambas representaciones.

Tampoco  $a'$  puede depender de la representación porque tiene sentido físico.

### 1.1.6 Teorema de Ehrenfest

Para una partícula libre, donde  $p(t) = p(0)$  es constante de movimiento,

$$x^{(H)} = x(0) + \frac{p(0)}{m}t$$

y se tiene

$$[x(t), x(0)] = -\frac{i\hbar}{m}t$$

que es decir que es un operador que no conmuta a  $t$  diferentes

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = \frac{1}{i\hbar}[p, V(x)] = \frac{1}{i\hbar} \left( -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ p &= m \frac{dx}{dt} \quad \frac{dp}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned}$$

donde estamos usando

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[A^H, H]$$

Es necesario remarcar que relaciones como  $[x, p] = i\hbar$  son para operadores en la picture de Schrödinger, donde los operadores no cambian en el tiempo. Estamos en efecto haciendo  $[x(0), p(0)] = i\hbar$

$$\left\langle \alpha, t_0 \left| m \frac{d^2 x}{dt^2} \right| \alpha, t_0 \right\rangle = - \left\langle \alpha, t_0 \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \alpha, t_0 \right\rangle$$

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \alpha, t_0 | x^H | \alpha, t_0 \rangle = - \left\langle \alpha, t_0 \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \alpha, t_0 \right\rangle$$

y entonces el teorema de Ehrenfest es

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x^{(s)} \rangle = - \left\langle \frac{\partial V^{(s)}}{\partial x} \right\rangle$$

los valores de expectación son iguales en ambas representaciones.

#### EJEMPLO 1.4 Ejercicio 24

Parte a). Integramos

$$\int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \hat{x} | \alpha \rangle = \int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle x' = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' e^{-ip'x'/\hbar} \langle x' | \alpha \rangle x'$$

y expresando en términos de la derivada

$$\int dx' \frac{\partial}{\partial p'} \frac{e^{-ip'x'/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\hbar}{-i} \langle x' | \alpha \rangle$$

o bien

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \left[ \int dx' \langle p' | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle \right]$$

Como

$$\langle \beta | x | \alpha \rangle = \int dp' \langle \beta | p' \rangle i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | \alpha \rangle = \int dp' \psi_\beta(p')^* i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi_\alpha(p')$$

se deduce que

$$x \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial p}.$$

Parte b). El significado físico de  $e^{i\hat{x}C/\hbar}$  donde  $C$  es alguna constante. Por la expansión en serie se tiene

$$e^{i\hat{x}C/\hbar} |x'\rangle = e^{ixC/\hbar} |x'\rangle$$

de manera que la itegración

$$\int dx' e^{i\hat{x}C/\hbar} |x'\rangle \langle x' | p' \rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{e^{i\hat{x}(C+p')/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} =$$

o bien

$$\int dx' |x'\rangle \langle x' | C + p' \rangle = |C + p'\rangle.$$