Capítulo 1

Teorema de Green

1.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras (cargas imagen) las condiciones de contorno.

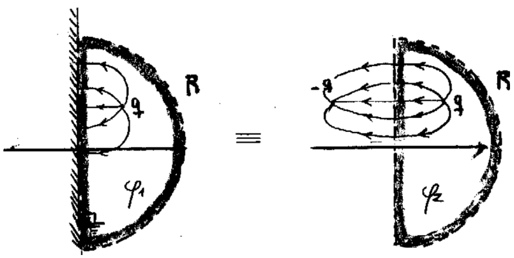


Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma: $\phi_1 = \phi_2$ por unicidad.

1.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el ϕ de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación elemental.

Restando entre sí

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi)=\phi\nabla^2\psi+\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)=\psi\nabla^2\phi+\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V\left[\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right]dV=\int_S\left[\phi\boldsymbol{\nabla}\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}\phi\right]dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int}\qquad \boldsymbol{x}'\in R,\boldsymbol{x}\in R$$

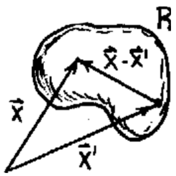


Figura 1.2

$$\psi=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\qquad \nabla^2\psi=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$-\phi(\boldsymbol{x})4\pi+\int_V 4\pi\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,dV'=\int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\,dS$$

donde estamos usando la abreviatura $\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{n}=\partial\phi/\partial n$ que es la derivada normal en la superficie. Despejando

$$\phi(\boldsymbol{x})=\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,dV'+\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]\right)\,dS,$$

donde la primer integral es debido a las cargas internas y la segunda al efecto de las cargas fuera del reciento R.

Recordemos que las condiciones tipo Dirichlet corresponden a $\phi|_S$ y las tipo Neumann a $\partial\phi/\partial\hat{n}|_S$.

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int} \qquad \boldsymbol{x}' \notin R, \boldsymbol{x} \in R$$

y

$$\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, dV' = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right] - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)\, dS,$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de R que producen campo en el interior R.

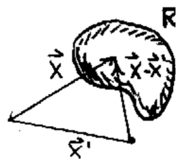


Figura 1.3

Hemos tomado $\psi = 1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ que verifica [1]; interpretándose ψ como el potencial de una carga puntual unitaria.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$$

podemos tomar

$$G \equiv \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$$

donde G es la función de Green.

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + \nabla^2 f$$

donde F satisface Laplace (si el reciento no incluye a $\boldsymbol{x}'$). Con $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$.

Entonces $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ representan la o las imágenes necesarias para que G cumpla el contorno necesario $G_D|_S = 0$.

1.2 Funciones de Green

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{V'} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\, dV' + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \left(G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial}{\partial n}G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\right)\, dS', \tag{2.1}$$

Pero para poder utilizar (2.1) necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno, de manera que según sean

$$\text{Dirichlet} \quad \begin{cases} G_D : \nabla^2 G_D = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \\ G_D|_{contornodeR} = 0 \\ \phi|_S \\ \phi(\boldsymbol{x}) = \int_{V'} G_D \rho \, dV' - \dfrac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \dfrac{\partial}{\partial n} G_D \, dS' \end{cases}$$

donde la condición de contorno de G equivale, en el contexto físico del electromagnetismo, a reemplazar el contorno por un conductor metálico puesto a tierra. Entonces G es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi_2}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma \qquad\qquad \phi_2|_S = \phi_1|_S$$

$$\text{Neumann} \quad \begin{cases} G_N : \nabla^2 G_N = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \\ \boldsymbol{\nabla} G_N \cdot \hat{n}|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_S \\ \phi(\boldsymbol{x}) = <\phi>|_S + \int_{V'} G_N \rho \, dV' + \dfrac{1}{4\pi} \int_S G_N|_S \dfrac{\partial G_N}{\partial n} \, dS \end{cases}$$

1.2.1 Green para el problema externo de una esfera

Este título sería “Ejemplo método de imágenes”. En realidad este es un ejemplo de cálculo de función de Green; así fue dado en la teoría.

La configuración es una carga puntual q frente a una esfera metálica de radio a conectada a tierra. La idea aquí es conocer dónde ubicar la imagen q' para que se verifique el contorno, es decir que el potencial será ahora el correspondiente a las dos cargas

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} + \frac{q'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}'|}$$

y debe cumplir que

$$\varphi(\boldsymbol{x})\big|_{r=a} = 0,$$

por la conexión a tierra. Para ajustar esta condición se tienen dos variables, la magnitud de la carga q' y su posición $\boldsymbol{y}'$. No obstante, la simetría de la configuración establece ciertas restricciones para la posición $\boldsymbol{y}'$; en efecto para el problema de una carga frente a una esfera el eje que une el centro de la esfera con la carga es un eje de simetría de revolución; si la esfera gira en torno a ese eje la configuración es la misma. Luego, la carga imagen debe ser tal que no rompa esa simetría: debe estar localizada en dicho eje. Entonces $\boldsymbol{y}'$ y $\boldsymbol{y}$ son colineales y la posición incógnita requerida es solamente el módulo $y' = |\boldsymbol{y}'|$.

Los módulos en los denominadores pueden expresarse en términos de la ley de los cosenos, como

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,\cos\gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y'^2 - 2\,x\,y'\cos\gamma}},$$

donde x, y son los módulos respectivos.

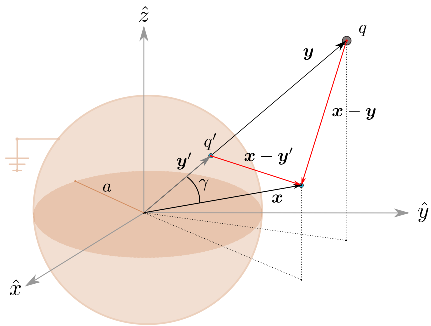


Figura 2.4 Geometría para el problema de la carga puntual q frente a una esfera metálica de radio a conectada a tierra.

Luego, la condición de contorno evaluada sobre la superficie de la esfera $|\boldsymbol{x}| = a$ implica que

$$\varphi(\boldsymbol{x})\big|_{|\boldsymbol{x}|=a} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2\,a\,y\,\cos\gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2\,a\,y'\,\cos\gamma}} = 0,$$

y entonces se tienen que obtener ahora q, y' a partir de esta ecuación que en realidad representan infinitas direcciones dado que γ puede ser cualquier ángulo entre 0 y 2π. Se necesitarán dos ecuaciones para resolver unívocamente el problema. Si se eligen $\gamma = \pi$ y $\gamma = 0$ la ecuación anterior define el sistema

Parece ser una constante que si elegimos las cosas del modo más simétrico posible, las expresiones resultan más sencillas.

$$\begin{cases} \dfrac{q}{y-a} + \dfrac{q'}{a-y'} = 0 \\[2ex] \dfrac{q}{a+y} + \dfrac{q'}{a+y'} = 0 \end{cases}$$

cuya solución es el par

$$q' = -\frac{a}{y}\, q, \qquad y' = \frac{a^2}{y},$$

y entonces

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,\cos\gamma}} - \frac{(a/y)\,q}{\sqrt{x^2 + a^4/y^2 - 2\,x\,(a^2/y)\cos\gamma}}.$$

El potencial en un punto $\boldsymbol{x}$ del espacio, debido a una carga en $\boldsymbol{y}$ depende de los módulos x, y y del ángulo γ entre dichos vectores.

Esta expresión, así como está, no se halla en ningún sistema de coordenadas en particular.

Esta solución puede obtenerse un poco más heurísticamente, ver nota 1.9.

Lo que sucede físicamente es que se induce carga sobre la superficie de la esfera. Se querrá ver (luego?) cuál es la distribución de carga que se inducirá sobre la superficie.

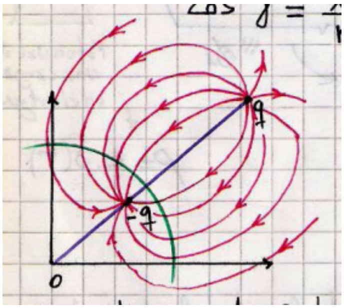


Figura 2.5

Este ejemplo ha servido también para mostrar la determinación de la funcion de Green para la configuración dada por una esfera aterrizada (condiciones de Dirichlet), que sería

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\,|} - \frac{a/|\boldsymbol{y}|}{|\,\boldsymbol{x} - (a^2/|\boldsymbol{y}|)\hat{y}\,|}$$

El caso (c) de la Figura se resuelve con

$$-\frac{V}{4\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS = -\frac{V}{4\pi}\int_S \boldsymbol{\nabla} G \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{V}{4\pi}\int_V \nabla^2 G\, dV$$

$$= -\frac{V}{4\pi}(-4\pi)\int_V \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\, dV = V$$

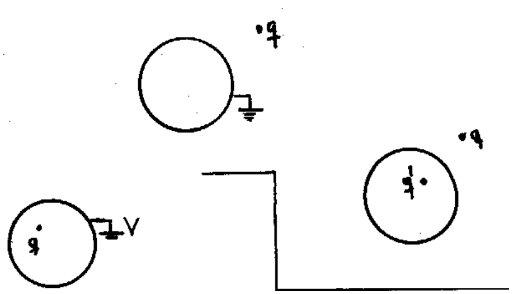


Figura 2.6 G_D es el potencial de la configuración (a) y se evalúa teniendo en cuenta la otra (b) que se resuelve casualmente por imágenes. La (c) se resuelve alterando las condiciones.

1.3 Algunos campos

En distribuciones infinitas de carga la integral de Poisson diverge pero ello se debe a que en realidad no existen distribuciones infinitas de carga.

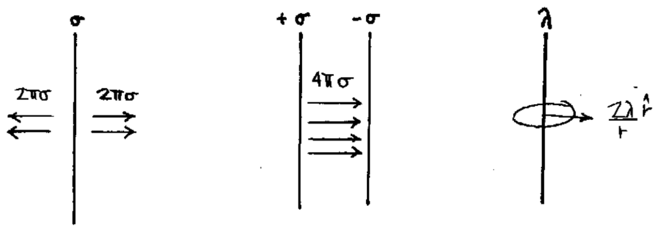


Figura 3.7

1.4 Notas método de Green

Función de Green libre (sin contornos) lleva directo a la integral de Poisson

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$

entonces

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_V \rho\, G\, dV = \int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} dV'$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \qquad \text{con} \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \quad \text{si} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$$

Para condiciones de Neumann se toma:

$$\boldsymbol{\nabla} G_N|_S = -\frac{4\pi}{S} = \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S$$

la integral

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S dS$$

no se puede anular con

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$$

salvo que el volumen de integración no contenga a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ en cuyo caso: se excluye $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ de la integración.

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S dS = \frac{1}{S} \int_S \phi|_S dS =< \phi > |_S$$

que es el valor promedio de ϕ en la superficie S.

Se suele tomar la superficie $S \to \infty$ de modo que resulte nulo $< \phi > |_S$. Se toma el volumen V rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito entonces

$$< \phi > |_S = 0 \qquad\qquad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$$

esto es el llamado *problema exterior*.

1.5 Condiciones de contorno para los campos

Consideraremos la superficie de separación entre dos medios 1 y 2, la cual puede estar cargada, y sobre la misma imaginaremos un cilindro pequeño Σ de tapas paralelas a la superficie y altura despreciable y asimismo, un circuito cerrado Γ también de altura despreciable perpendicular a la superficie, ver figura.

La normal a la superficie es $\hat{n}$ mientras que $\hat{t}$ es un versor tangente a la misma.

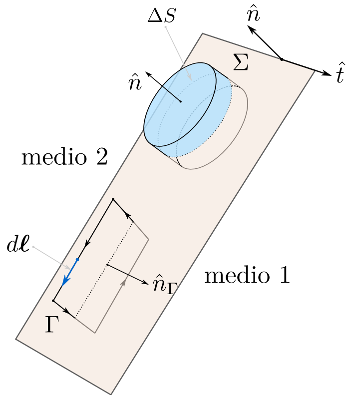


Figura 5.8

La ley de Gauss establece para el cilindro Σ que

$$\int_{S_\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi\, Q_n,$$

donde S_Σ es la superficie total del cilindro y Q_n la carga neta encerrada. Como la superficie lateral es despreciable, por serlo la altura, la integral de superficie se reduce a la de las tapas. Si la densidad de carga sobre la superficie es σ entonces

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \hat{n}\, \Delta S = 4\pi\, \sigma\, \Delta S$$

o bien

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

lo cual implica que la componente normal del campo $\boldsymbol{E}$ es discontinua si hay carga superficial presente.

Por otra parte, como el rotor de $\boldsymbol{E}$ es nulo (en electrostática), el teorema de Stokes implica

No sé si no decir directamente que en electrostática es nula la integral de línea de E y ya.

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 = \int_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

y despreciando el aporte de las partes del circuito que son perpendiculares a la superficie, resulta

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot (\hat{n}_\Gamma \times \hat{n})\, d\ell = 0$$

donde en el miembro derecho se ha expresado la dirección del $d\vec{\ell}$ en función de los versores normal y tangencial, y entonces

$$\hat{n}_\Gamma \cdot (\hat{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)) = 0,$$

que indica que el segundo factor tiene que ser nulo, es decir

$$\hat{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

y esto implica que la componente tangencial del campo es continua, sin importar que exista carga o no.

Acordate que harcodeaste con un pdf el ℓ bold.

Resumiendo

$$E_{2\hat{n}} - E_{1\hat{n}} = 4\pi\sigma \qquad\qquad E_{2\hat{t}} - E_{1\hat{t}} = 0$$

Expresando el campo en términos del potencial, se tiene

$$-\boldsymbol{\nabla}\phi_2 \cdot \hat{n} + \boldsymbol{\nabla}\phi_1 \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n}}{4\pi} = \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} \tag{5.1}$$

esta es la densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios.

1.5.1 Carga puntual frente a esfera puesta a tierra

Volvemos a este problema, recordando que el potencial fuera de la misma se hubo determinado por el método de imágenes. Recordemos también que dentro de la esfera el potencial debe ser constante (no hay carga allí, puesto que la imagen es un dispositivo virtual sin existencia física). Consideramos dos secciones, interna y externa.

Por la simetría del problema la densidad de carga inducida tiene la simetría de revolución en torno al eje que pasa por q, q' y el origen de coordenadas y será máxima en el punto de la esfera más cercano a q. Dado que el potencial es constante dentro de la esfera, e igual al valor que toma sobre la superficie, la ecuación (5.1) es

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S .$$

Ubicando nuestra esfera en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, la normal externa $\hat{n}$ es claramente $\hat{r}$ de modo que derivar normalmente es derivar con respecto a la dirección radial, es decir $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$

y entonces

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{[1 - (a/y)^2]}{[\, 1 + (a/y)^2 - 2\,(a/y)\ \cos\gamma\,]^{3/2}}.$$

La definición de derivada normal puede ir para apéndice.

Si consideramos ahora el problema interno; esto es, una carga q rodeada por una esfera conductora conectada a tierra, se pueden hacer los mismos razonamientos que en el caso de la carga exterior y la solución es la misma intercambiando q' por q y y' por y. Entonces, en ese caso el cálculo de la densidad utiliza $\hat{n} = -\,\hat{r}$ y se tiene

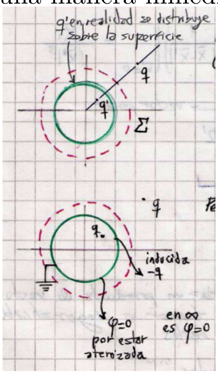
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{[(a/y)^2 - 1]}{[\, 1 + (a/y)^2 - 2\,(a/y)\ \cos\gamma\,]^{3/2}}$$

Acá debiera estar claro que se invierte el significado de y', ahora es mayor que a.

La carga total inducida sobre una superficie se evaluará en general a través de

$$Q = \int_S \sigma \, dS.$$

En el caso anterior del problema de la carga frente a una esfera a tierra se puede utilizar la ley de Gauss para hallar en cada caso la carga total de una manera inmediata.



Situando una superficie gaussiana Σ por fuera de la esfera, como se ve en la figura, resulta que la carga encerrada neta es la misma con imagen o sin imagen. En efecto, en el problema real la carga encerrada se distribuye sobre la superficie mientras que en el problema equivalente está concentrada en la posición y' y sabemos que es q'; luego como los dos problemas son equivalentes el lado derecho de la ley de Gauss debe ser idéntico y la carga inducida será la neta encerrada, que es q', la carga imagen.

Procediendo de modo similar para el problema interno (ahora q' está por fuera de la superficie Σ), ahora la situación es diferente porque el campo sobre es nulo (solo es no nulo fuera de la esfera por la conexión a tierra). Entonces la ley de Gauss ya nos dice ahí que la carga neta es nula y ello lleva a que la carga inducida sea $-q$ que no es igual a la carga imagen.

1.5.2 Principio de superposición

Consideremos la situación depicted en la figura

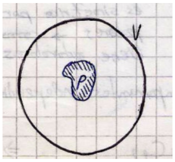


Figura 5.9

Una cierta distribución de carga está rodeada por una superficie a potencial V. El potencial en un punto $\boldsymbol{x}$ es

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}')\, G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\, d\Omega - \frac{1}{4\pi}\int \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, dS$$

pero como el potencial sobre la superficie está fijo en V la última integral es

$$-\frac{1}{4\pi}\int \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, dS = -\frac{V}{4\pi}\int \boldsymbol{\nabla} G \cdot \hat{n}\, dS,$$

la cual por el teorema de la divergencia resulta

$$-\frac{V}{4\pi}\int \boldsymbol{\nabla} G_D \cdot \hat{n}\, dS = -\frac{V}{4\pi}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla} G_D)\, dV = -\frac{V}{4\pi}\int_V \nabla^2 G_D\, dV$$

y recordando que la función de Green es solución de la ecuación de Poisson para una densidad dada por la delta de Dirac, se tiene

$$-\frac{V}{4\pi}\int \boldsymbol{\nabla} G_D \cdot \hat{n}\, dS = V\int \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\, dV = V,$$

de manera que

$$\varphi\boldsymbol{x} = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}')\, G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\, d\Omega + V,$$

lo cual puede una manera de ver el principio de superposición.

Notas importantes sobre el principio de superposición

La ecuación de Poisson es muchas veces inútil porque en general no se tiene la distribución de cargas $\rho(\boldsymbol{x})$. Esto sucede en general con conductores pués la carga allí se distribuye acomodándose para alcanzar el equilibrio.

Para campos y potenciales vale superposición. Pero cada problema de potencial (con su ecuación de poisson) incluye además de la ecuación las condiciones de contorno. Dados dos problemas

$$\nabla^2\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \qquad + \qquad \mathrm{CC}_1$$

y

$$\nabla^2\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \qquad + \qquad \mathrm{CC}_2$$

la suma de soluciones $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ con $\rho = \rho_1 + \rho_2$

$$\nabla^2\rho = -4\pi\rho \qquad + \qquad \mathrm{CC} \tag{5.2}$$

donde hay que asegurarse de que CC sea la suma de las condiciones del problema 1 y las del problema 2. Desde el otro punto de vista, si tengo un problema como (5.2) y lo quiero pensar como la superposición de dos potenciales $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ puedo generarme unas condiciones de contorno artificiales que tengan en cuenta las influencias mutuas.

Habría que entender bien este tema que es crucial. Imagino que working los ejemplos podría recuperar lo que alguna vez supe.

1.5.3 Condiciones de contorno para medios magnéticos

Para los medios magnéticos

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_l$$

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_l \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{C}\boldsymbol{g}_l \cdot \hat{s} d\ell$$

donde hicimos la transformación

$$\int \boldsymbol{H} \cdot d\ell = (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot d\ell$$

y donde recordemos que la altura de Γ tiene a cero.

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{g}_l \cdot \boldsymbol{s} = (-\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{H}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{s}) d\ell$$

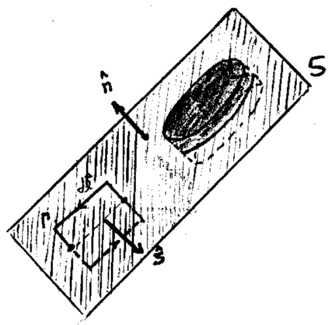


Figura 5.10

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{g}_l \cdot \boldsymbol{s}\, d\ell = (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 \times \hat{n}) \cdot \hat{s} d\ell$$

de manera que

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{g}_l = \hat{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)$$

$$\hat{n} \times \hat{s} = \frac{d\ell}{d\ell}$$

$$B_{2\hat{n}} - B_{1\hat{n}} = 0 \qquad\qquad H_{2\hat{t}} - H_{1\hat{t}} = \frac{4\pi}{c} g_l$$

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

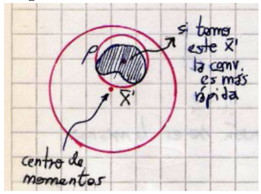
1.6 Desarrollo multipolar

Si se conoce la distribución de carga el potencial se obtiene integrando

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, dV'. \tag{6.1}$$

No obstante, esta expresión puede ser muy complicada porque en el denominador depende de la variable $\boldsymbol{x}'$ sobre la cual se está integrando. Resulta conveniente entonces hacer un desarrollo del denominador, que es una función de $\boldsymbol{x}'$, en torno a un punto que se toma como origen de una esfera que engloba a la distribución de carga. Luego, ese dearrollo será válido en puntos externos a dicha esfera.

Se necesita una serie que converja, y que lo haga rápido.



Entonces, desarrollando en torno a $\boldsymbol{x}' = 0$ (el origen de coordenadas) se tienen

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \partial_i \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=0} x_i' + \frac{1}{2}\, \partial_j \partial_i \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=0} x_i' x_j' + ...,$$

o bien

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{x_i\, x_i'}{|\boldsymbol{x}|^3} + \frac{1}{2}\frac{x_i\, x_i'\, x_j\, x_j'}{|\boldsymbol{x}|^5} + ...,$$

Chequear la expansión, tal vez ponerla en vectorial o hacerla bien en el Apéndice. Juntar huevos y hacer el término siguiente.

Luego, introduciendo la misma en (6.1) resulta

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \int_{V'} \rho(\boldsymbol{x}')\, dV' + \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^3} \int_{V'} x_i'\, \rho(\boldsymbol{x}')\, dV' +$$
$$\frac{1}{2}\frac{x_i\, x_j}{|\boldsymbol{x}|^5} \int_{V'} (\, 3x_i'\, x_j' - \delta_{ij}|\boldsymbol{x}|^2 \,)\, \rho(\boldsymbol{x}')\, dV' + ...,$$

Se tiene un desarrollo de diferentes órdenes

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \phi^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \phi^{(2)}(\boldsymbol{x}) + \phi^{(3)}(\boldsymbol{x}) + ...$$

que se conocen según

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \int_{V'} \rho(\boldsymbol{x}')\, dV' = \frac{Q}{|\boldsymbol{x}|} \qquad \text{Orden monopolar}$$

$$\frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^3} \int_{V'} x_i'\, \rho(\boldsymbol{x}')\, dV' = \frac{x_i\, p_i}{|\boldsymbol{x}|^3} \qquad \text{Orden dipolar}$$

$$\frac{1}{2}\frac{x_i\, x_j}{|\boldsymbol{x}|^5} \int_{V'} (3x_i' x_j' - \delta_{ij}|\boldsymbol{x}|^2) \rho(\boldsymbol{x}') dV' = \frac{1}{2}\frac{x_i\, Q_{ij}\, x_j}{|\boldsymbol{x}|^5} \qquad \text{Orden cuadrupolar}$$

El último término, matricialmente sería

$$\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{x}^t Q \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^5}.$$

Los momentos son el momento monopolar,

$$Q = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) dV,$$

que es la carga total, el momento dipolar,

$$\boldsymbol{p} = \int_V \boldsymbol{x}\, \rho(\boldsymbol{x})\, dV$$

y el momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) \left[3x_i x_j - \delta_{ij}|\boldsymbol{x}|^2\right] dV = 3\int_V \rho(\boldsymbol{x}) x_i x_j dV - \delta_{ij}\int_V \rho(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^2 dV$$

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - \delta_{ij}C_{ll},$$

donde esta última expresión permite ver que el momento cuadrupolar es de traza nula (C_{ll} es la traza).

El momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta, los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga. Asimismo $Q_{ij} = Q_{ji}$ es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable y tiene autovalores reales. Tiene traza nula,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

El tensor diagonalizado tendrá tres componentes independientes.

Se da también que $Q_{ij}(i \neq j)$ mide desbalance lejos de los ejes. Una esfera con ρ uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolo.

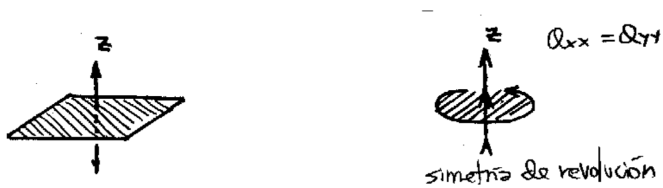


Figura 6.11

El comentario en pag. 12 de la carpeta -recuadrado en rojo- induce algo diferente; pide simetría en el plano perpendicular al vector. Me parece a mí que lo que debiera verse es una simetría en la distribución de carga.

Una simetría de reflexión implica que el $\boldsymbol{p}_\perp = 0$ donde la notación significa perpendicular al plano. Esto es así porque no hay desbalance. Para una simetría de revolución $Q_{xx} = Q_{yy}$ entonces el Q_{ij} puede darse con un sólo número.

Si en una distribución dada, los momentos multipolares hasta el orden $\ell - 1$ son nulos entonces el momento multipolar de orden ℓ no depende del origen de coordenadas. Así, por ejemplo, cuando el monopolo es nulo el momento dipolar no depende del centro de momentos.

En la figura vemos que no ambos no tienen desbalance de carga respecto del origen; el disco uniformemente cargado tendrá monopolo no nulo y dipolo nulo (siempre respecto del origen), los anillos cargados con carga opuesta tendrán monopolo y dipolo nulos (respecto del origen y de cualquier otro punto). Pero si muevo las distribuciones se tendrá desbalance el disco pero no los anillos.

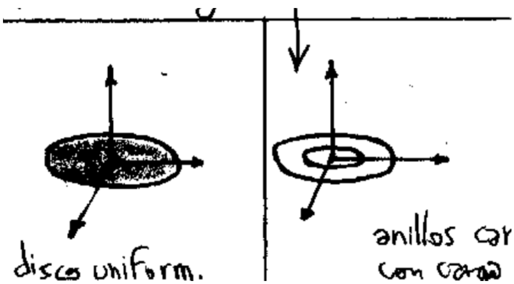


Figura 6.12

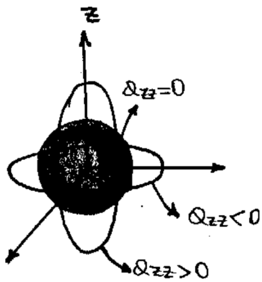


Figura 6.13

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros; el cuadrupolo se da con un solo número. En la Figura tenemos un elipsoide con densidad de carga ρ uniforme. Tiene simetría de revolución de modo que el momento cuadripolar es un número. $Q_{zz} = 0$ puesto que una esfera no tiene desbalance, entonces $\overleftrightarrow{Q} = 0$

Para una esfera uniformemente cargada todos los momentos dipolares más allá del monopolo valen cero, lo cual se ve por ley de Gauss.

En general en las aplicaciones uno se queda con tres términos; monopolo, dipolo y cuadrupolo y se busca que esa expresión converja rápido. En general tomando como centro el centro de la distribución la convergencia es más rápida.

1.7 Dipolo eléctrico

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

si está en el origen, y

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}$$

si está en un punto $\boldsymbol{x}_0$. Para calcular el campo hay que tomar el gradiente de esta expresión, multiplicarlo por -1, lo cual es un poco trabajoso, pero ahí vamos. Usando que el segundo miembro es a su vez un gradiente [poner esa cuenta en el apéndice matemático] se tiene

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right)\right),$$

luego se utiliza la identidad para el gradiente de un producto escalar notando que como uno de los vectores en el escalar es a su vez un gradiente se tiene una expresión más sencilla [otra cuenta de apéndice] En efecto, el primer término se anula por involucrar el producto vectorial de un gradiente, el segundo y tercero porque $\boldsymbol{p}$ es independiente de $\boldsymbol{x}$ reduciéndose la expresión a

La identidad es $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) =$ cuatro términos, dos rotores y dos términos del tipo convectivo.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right)$$

que implica que el operador $\boldsymbol{\nabla}$ que multiplica al momento dipolar se aplica sobre el gradiente de $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$. Ahora restauramos ese último valor y la cuenta se puede hacer más fácilmente en indicial [la hago como nota al final]. Finalmente

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{3\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\hat{n} - \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}$$

donde

$$\hat{n} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}.$$

Si hacemos una transformación ortogonal de cartesianas a esféricas para un dipolo con $\boldsymbol{p}$ en el eje z, se tiene

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

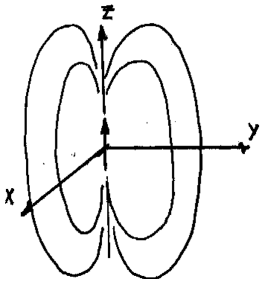


Figura 7.14 Dipolo centrado en el origen.

Pasarla al apéndice esta matriz.

y para este caso particular son el potencial

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{p\hat{z}\cdot r\hat{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2}\cos(\theta)$$

y el campo

$$\boldsymbol{E}(r,\theta) = \frac{2p\cos(\theta)}{r^3}\hat{r} + \frac{p\sin(\theta)}{r^3}\hat{\theta}$$

que tiene simetría de revolución, puesto que no depende de $\hat{\varphi}$.

Las líneas de campo cuplen que un diferencial de arco $d\boldsymbol{\ell}$ a través de una línea de campo es tal que

$$d\boldsymbol{\ell} \parallel \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}\times d\boldsymbol{\ell} = 0$$

la línea de campo sigue la dirección del campo.

En coordenadas curvilíneas generales es

$$d\boldsymbol{\ell} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

y para un campo cualquiera $\boldsymbol{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3$ se verificarán

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}$$

En el caso de esféricas $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$ y evaluando el producto vectorial resulta $dr/r = 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\, d\theta$, las líneas de campo, en el caso del dipolo no tendrán componente en $\hat{\varphi}$ (como es de esperar).

1.7.1 Independencia del origen para el momento dipolar

Queremos ver el hecho de que si los momentos de orden $\ell - 1$ son nulos entonces el momento de orden ℓ no depende del origen. Escribimos el momento dipolar de orden ℓ como

$$Q^{\ell}_{\alpha\beta\gamma} \propto \int \rho(\boldsymbol{x})\, x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}\, d^3x$$

donde $\ell = \alpha + \beta + \gamma$. Trasladamos el origen del sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, entonces

$$Q^{\ell}_{\alpha\beta\gamma} \propto \int \rho(\boldsymbol{x}')\, (x' + x_0)^{\alpha} (y' + y_0)^{\beta} (z' + z_0)^{\gamma}\, d^3x',$$

y usamos combinatoria allí

$$(x + c)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} c^r,$$

Poner el símbolo correcto del combinatorio

donde $(nr) = n!/((n - r)!r!)$ de manera que

$$Q^{\ell}_{\alpha\beta\gamma} \propto \sum_{rst}^{\alpha\beta\gamma} \binom{\alpha}{r} \binom{\beta}{s} \binom{\gamma}{t} x_0^r\, y_0^s\, z_0^t \int \rho(\boldsymbol{x}')\, {x'}^{\alpha} {y'}^{\beta} {z'}^{\gamma}\, d^3x'$$

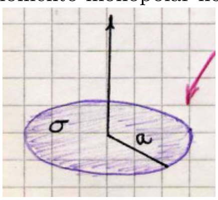
donde $0 \leq r \leq \alpha, 0 \leq s \leq \beta$ y $0 \leq t \leq \gamma$. Si $r = s = t = 0$ entonces tenemos el multipolo de orden calculado en el sistema $X'Y'Z'$.

Esto es general; si en una distribución monopolo y dipolo son nulos entonces el cuadripolo no depende del origen de coordenadas.

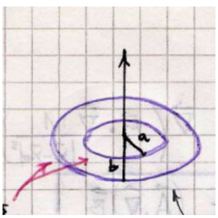
Esto ya se dijo mucho, cansa.

EJEMPLO 7.1 Disco con carga uniforme

El momento dipolar nulo respecto del origen, pero no respecto de otro punto porque el momento monopolar no es nulo.



EJEMPLO 7.2 Aros cargados



En este caso la carga total es nula, el monopolo es nulo entonces.

$$\lambda_A = \frac{Q}{2\pi a} \qquad \lambda_B = \frac{Q}{2\pi b}$$

de manera que

$$|\lambda_A| = |\lambda_B| \, \frac{b}{a}$$

El dipolo será nulo respecto del origen y respecto a otros puntos también. El tensor cuadripolar está caracterizado por un sólo número (luego consideramos a los átomos neutros monopolar y dipolarmente) $Q_n = e^{-1} Q_{zz}$.

Algunos momentos cuadripolares nucleares: Para el ^{14}N es $Q = 7.1 \cdot 10^{-2}$ y para el ^{35}Cl es $Q = -7.9 \cdot 10^{-2}$

1.7.2 Momento cuadripolar de un elipsoide

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

y la componente Q_{11} del tensor (que es de traza nula) es

$$Q_{xx} = \int \rho(\boldsymbol{x})(3x^2 - r^2)\, d^3x = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) d^3x$$

donde el tercer término es porque consideramos densidad constante (un elipsoide uniformemente cargado). Para integrar se hace un cambio de coordenadas

$$x' = \frac{x}{A}; \quad y' = \frac{y}{B}; \quad z' = \frac{z}{C};$$

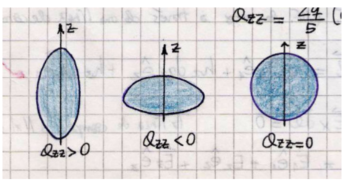
y entonces se tienen

$$Q_{xx} = \frac{q}{5}(2A^2 - B^2 - C^2) \qquad Q_{yy} = \frac{q}{5}(2B^2 - C^2 - A^2) \qquad Q_{zz} = \frac{q}{5}(2C^2 - A^2 - B^2)$$

siendo q la carga total. Si el eje z es el de revolución, entonces $A = B$ y se dan

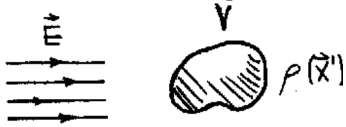
$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{q}{5}(A^2 - C^2) \qquad\qquad Q_{zz} = \frac{2q}{5}(C^2 - A^2)$$

Observaciones marginales: C_{ij} tiene más términos de los que necesito para describir un potencial. $Q_{ij} = C_{ij} -$ traza, usamos tensor de traza nula.



1.7.3 Interacción de un campo externo con una distribución de carga

Si tenemos un campo $\boldsymbol{E}$ con sus fuentes lejos,



y que cumple $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ y $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ (irrotacionalidad), se da la siguiente fuerza sobre la distribución

$$\boldsymbol{F} = \int_V \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, dV,$$

y si $\boldsymbol{E}$ no varía demasiado en V, entonces podemos representar bien por una serie

$$E^\ell(\boldsymbol{x}) = E^\ell + x_j \partial_j E^\ell + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^\ell$$

entonces

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

En la carpeta puse que la integral del cuadrupolo da: $Q_{kj} \partial_k \partial_j E_i$.

o bien

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i q + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}) E_i + \boldsymbol{x} \cdot [(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{\nabla} E_i]$$

de lo cual extraemos que el campo interactúa con la carga, el gradiente del campo interactúa con el dipolo y la divergencia del campo interactúa con el cuadrupolo. Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo, el torque $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}$ se puede escribir como

$$\boldsymbol{T} = q\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

donde $\boldsymbol{p} \equiv q\boldsymbol{x}$ es el momento dipolar y vemos que el torque tiende a centrar el dipolo según la dirección del campo $\boldsymbol{E}$ aunque no lo logra por la agitación térmica.

En la carpeta escribí que reescribía un término de la expansión como

$$\frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E_i = \frac{1}{2} \left[x_j x_k \partial_j \partial_k E_i - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \partial_j \partial_k E_i \right]$$

calculo que para lograr que seaa el cuadrupolo la integral. Es la componente sub-i del Laplaciano.

La energía de un dipolo será

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

entonces

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{p})$$

siendo los últimos tres términos nulos según lo que consideramos previamente de manera que

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}.$$

1.7.4 Capa dipolar

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}$$

y el potencial de una capa dipolar

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_S \frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, dS'$$

siendo $\boldsymbol{D}$ el momento dipolar por área que viene de acuerdo a la definición

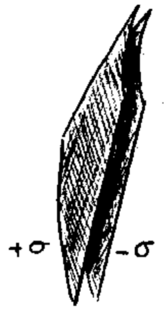
$$D = \lim_{\substack{\sigma \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \sigma \epsilon$$

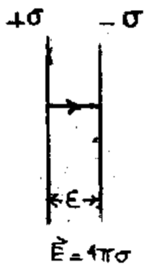
refiérase a la ilustración bajo esta línea. Pero antes algunas cuentas con los dedos

$$\delta\phi = \frac{\delta\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}$$

$$\delta\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}')\delta S'$$

$$\int_S d\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{S'} \frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, dS'$$





Veamos algún detalle más sobre la capa dipolar, que está ilustrado en la Figura siguiente.

$$\frac{\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dS = \frac{D\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d\boldsymbol{S} = -\frac{D\cos(\theta)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}dS = -\frac{D\cos(\theta)}{r^2}dS$$

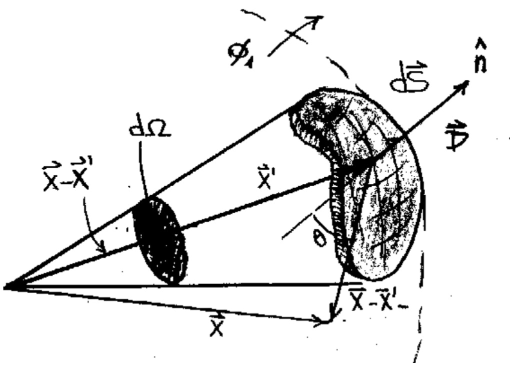


Figura 7.15

$$\frac{\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dS=-Dd\Omega$$

puesto que

$$\phi(\boldsymbol{x})=-D\int_S d\Omega \qquad\qquad \frac{\cos(\theta)}{r^2}dS\equiv d\Omega$$

Para las condiciones de contorno se da lo siguiente

$$E_2^{\hat{n}}-E_1^{\hat{n}}=4\pi\sigma$$

$$-\boldsymbol{\nabla}(\phi_2-\phi_1)\cdot\hat{n}=4\pi\sigma$$

$$\frac{\partial\phi_1-\phi_2}{\partial\hat{n}}=4\pi\sigma$$

$$\phi_1-\phi_2=4\pi\sigma\epsilon$$

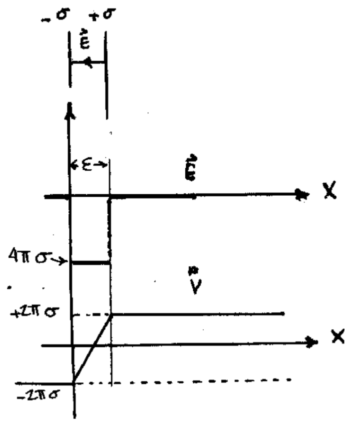


Figura 7.16

desde donde deducimos que el potencial tiene un salto al surcar la capa dado por

$$\phi_2-\phi_1=4\pi D$$

1.7.5 Momento dipolar por unidad de volumen

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

y el potencial de muchos de ellos sale de la integración

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, dV$$

donde $\boldsymbol{P}$ es la llamada polarización, el momento dipolar por unidad de

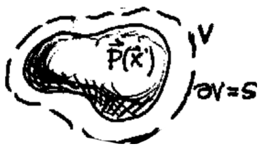


Figura 7.17

volumen, siendo V un volumen que incluye a la zona de polarización (ver Figura).

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_V \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{\nabla}' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) dV$$

y si usamos el teorema de la divergencia para convertir una de las integrales resulta

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, dS - \int_V \frac{\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, dV$$

lo que habilita a pensar en como que

$$\boldsymbol{P} \cdot \hat{n} \equiv \sigma_P$$

está presente en el borde del cuerpo polarizado, y en su interior existe

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \equiv \rho_P$$

siempre que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \neq 0$ es decir que la polarización no sea homogénea.

1.8 El potencial vector

Haremos una especie de desarrollo multipolar del potencial vector $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, dV'$$

pero como se puede escribir

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \approx \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

Recordar que Biot & Savart es para densidad de corriente estacionaria, i.e. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0$

en torno a $\boldsymbol{x}'=0$ será

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{c}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}|}\,dV'+\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\cdot\int_V\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{c|\boldsymbol{x}|}\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,dV'+\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\cdot\int_V\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,dV'$$

y el primer término es nulo lo cual puede verse porque sale integrando con alguna identidad (?) y usando que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0$. Correspondería al orden monopolar y el hecho de que sea nulo refleja la no existencia de monopolos.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\left[\left(\frac{1}{2c}\int_V\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}\,dV\right)\times\boldsymbol{x}\right]\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

y si definimos el paréntesis como $\boldsymbol{m}$ (momento magnético) entonces

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

en el origen, y

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

en $\boldsymbol{x}'$, las cuales son expresiones a primer orden y que utilizan el gauge de Coulomb, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$.

De esta manera tendremos

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}')=\frac{1}{2c}\left[\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\right]$$

que es la magnetización o densidad de momento magnético, y entonces el momento magnético pasa a ser

$$\boldsymbol{m}=\int_v\mathcal{M}(\boldsymbol{x}')\,dV'.$$

Se puede trabajar con el potencial vector así

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3},$$

la cual luego de mucho álgebra vectorial se puede llevar a la forma

$$\boldsymbol{B}=\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{n})\hat{n}-\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|^3},$$

que nos dice que bien lejos cualquier distribución de corriente localizada presenta como $\boldsymbol{B}$ el campo magnético de un dipolo magnético dado por $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$. Esta aproximación corresponde, por supuesto, al primer orden del desarrollo.

1.8.1 Interpretacion del momento magnético

Se puede pensar $\boldsymbol{m}$ como una espira.

$$dA = \frac{x d\ell \sin(\alpha)}{2}$$

siendo el área orientada

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \boldsymbol{x} \times d\ell$$

y entonces

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{c}\boldsymbol{A}$$

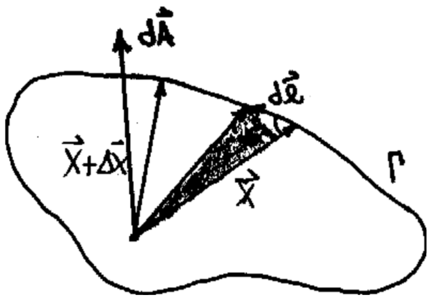


Figura 8.18

Desde volumen a espira hacemos la transformación del modo usual,

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\, dV = \frac{1}{2c}\int_\Gamma \boldsymbol{x} \times \; d\ell$$

usando que

$$\boldsymbol{J}\, dV = J d\ell dS = \frac{I}{dS} d\ell dS = I\, d\ell$$

A modo de ejemplo, para una espira circular de radio r es

$$m = \frac{i}{c}\pi r^2.$$

1.8.2 Interacción del campo magnético con una distribución de corriente

Hacemos una expansión de Taylor del campo $\boldsymbol{B}$ con $|\boldsymbol{x}| \ggg |\boldsymbol{x}'|$,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$$

y entonces como la fuerza es

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\, dV'$$

resulta que

Figura 8.19

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\int_V \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_0\, dV' + \frac{1}{c}\int_V \boldsymbol{J} \times (\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}\, dV'$$

siendo el primer término nulo.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{m}) = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$$

Si el campo es homogéneo la fuerza es nula, pero como $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$

$$F_m = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) \quad \Rightarrow \quad U_M = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$F_e = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}) \quad \Rightarrow \quad U_e = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

siendo $U_{m,e}$ la energía de los dipolos en campos externos.

Mediante identidades vectoriales podemos llegar a una expresión

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{1}{c}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{B}) dV' = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{1}{2c}(-\boldsymbol{B}) \times \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J} dV' =$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \times \frac{1}{2c}\int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J} dV'$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$$

La fuerza de un campo $\boldsymbol{B}$ externo sobre una distribución de corrientes es el gradiente de cierta energía

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$$

de donde se ve claramente que si $\boldsymbol{B}$ es uniforme entonces la fuerza es nula. $\boldsymbol{m}$ es una constante que depende de la distribución de corrientes.

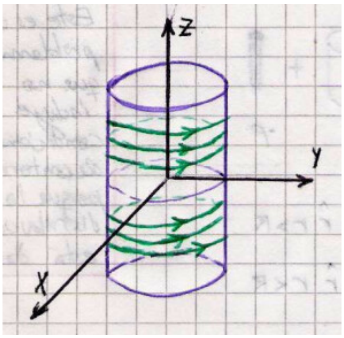
EJEMPLO 8.1 Problema 6b

Ahora $a \ll L$ y por la simetría de rotación son convenientes coordenadas cilíndricas. La simetría reclama que no hay dependencia en φ ni componente B_φ de manera que

$$\boldsymbol{B}(r,z) = B_z(r,z)\,\hat{z} + B_r(r,z)\,\hat{r}$$

Considerando una expansión de Taylor para r pequeños

$$B_z(r,z) \approx B_z(0,z) + \left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0} r \qquad\qquad B_r(r,z) \approx B_r(0,z) + \left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} r$$



La simetría dice también que $B_r(0,z) = 0$ y utilizando la divergencia nula $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ del campo en cilíndricas se tiene

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} - \left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0}$$

y evaluando en $r = 0$ se obtiene [CHECK ESTO]

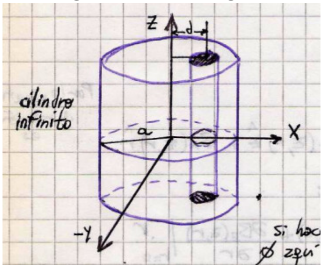
$$\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0}$$

Se obtiene una expresión algo más general que la que se hubo obtenido (la de la clase pasada, que es la del capítulo 1) que utilizaba $L \to \infty$.

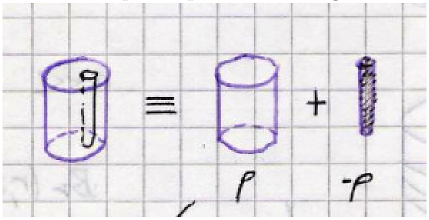
EJEMPLO 8.2 Problema 11

Este es un problema que no incluye condiciones de contorno porque la distribución de carga está dada. Es un cilindro infinito. Si hacemos el potencial φ aquí vemos que revienta lo cual se debe a que la distribución de carga es infinita.

El arreglo es el de la figura



También se puede pensar de la siguiente forma



El campo para un cilindro de radio R centrado en $r = 0$ es

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{2\pi a^2 \rho}{r}\,\hat{r} & r \geq R \\ \\ 2\pi r \rho\,\hat{r} & r < R \end{cases}$$

Escribiendo el campo interno como

$$2\pi r \rho\,\hat{r} = 2\pi\rho\,\boldsymbol{x},$$

donde $\boldsymbol{x} = r\,\hat{r}$ es el vector que vive en el plano horizontal, se puede trasladar el cilindro así

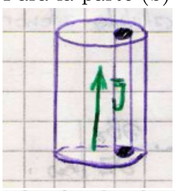
$$2\pi\rho(\boldsymbol{x} + d\,\hat{x})$$

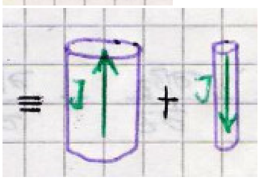
y entonces el campo dentro del cilindro es

$$\boldsymbol{E} = 2\pi\rho d\,\hat{x}.$$

Hay que mirar la práctica porque esto está confuso.

Para la parte (b) se considera





$$B(r)2\pi r = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j,$$

pero $\boldsymbol{B}$ es en $\hat{\varphi}$ y entonces

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\pi r j}{c}\frac{\hat{\varphi}}{r} = \frac{2\pi j}{c}(-y\,\hat{x} + x\,\hat{y})$$

de manera que el campo total, que es la suma de los campos del cilindro grande y del pequeño, será

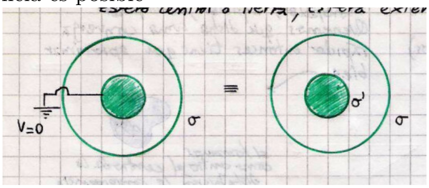
$$\boldsymbol{B} = \frac{2\pi j}{c}(-y\,\hat{x} + d\,\hat{y} + x\,\hat{y}) - \frac{2\pi j}{c}(-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}),$$

o bien

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\pi j}{c} d\,\hat{y}.$$

EJEMPLO 8.3 Problema 13

Esfera central a tierra, esfera externa con densidad superficial σ. La siguiente equivalencia es posible



Luego, esto se resuelve así, usando la simetría esférica y la ley de Gauss $\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi Q$ se tienen

$$4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 \\ 4\pi a^2 \sigma \end{cases} \qquad 4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 \\ 4\pi b^2 \sigma' \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 4\pi \dfrac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r^2}\,\hat{r} & r > b \\[2ex] 4\pi \dfrac{\sigma' b^2}{r^2}\,\hat{r} & a < r < b \\[2ex] 0 & r < a \end{cases}$$

El potencial será

$$V = \begin{cases} 4\pi \dfrac{\sigma a^2 + \sigma' b^2}{r} + C_1 & r > b \\[2ex] 4\pi \dfrac{\sigma' b^2}{r} + C_2 & a < r < b \\[2ex] C_3 & r < a \end{cases}$$

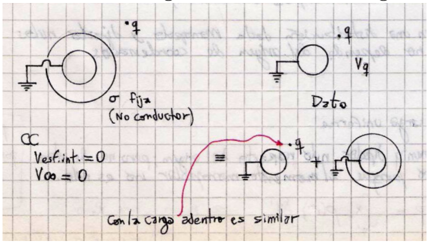
y al pedir continuidad para el mismo, se tienen

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 4\pi\sigma, \qquad C_3 = 0$$

donde en la última está metida la σ' que hace nulo el potencial V sobre la esfera interna. Así, finalmente

$$V = \begin{cases} 4\pi \dfrac{\sigma a(a-b)}{r} & r > b \\[2ex] 4\pi \dfrac{\sigma a(r-b)}{r} & a < r < b \\[2ex] 0 & r < a \end{cases}$$

Una serie de diagramitas a descular siguen:



1.9 Perturbación por un conductor sobre un campo eléctrico uniforme

Se tiene un campo uniforme con $Q, R \to \infty$ pero con $2Q/R^2 = cte$, según se ve en la Figura.

El potencial ϕ de la esfera es constante por ser conductor. Puedo definir

$$\phi|_{esf} \equiv 0$$

pues $\phi(\infty) \neq 0$ porque hay densidad de carga ρ en el infinito.

Para la carga superior,

$$\phi_1 = \frac{-Q}{|\boldsymbol{x} - R\hat{z}|} + \frac{a/RQ}{|\boldsymbol{x} - a^2/R\hat{z}|}$$

mientras que para la inferior

$$\phi_2 = \frac{Q}{|\boldsymbol{x} + R\hat{z}|} + \frac{a/RQ}{|\boldsymbol{x} + a^2/R\hat{z}|}$$

Recordemos que

$$(1+\alpha)^{(-1/2)} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha \qquad \alpha \ll 1$$

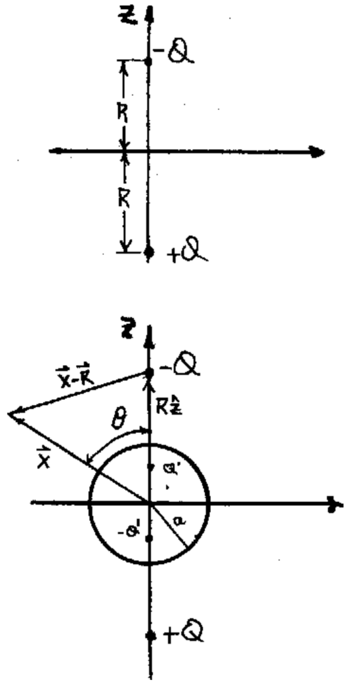


Figura 9.20

y podemos trabajar el denominador

$$|\boldsymbol{x} - R\hat{z}| = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - R\hat{z}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos(\theta)}} = \frac{1}{R(1 + x^2/R^2 - 2x/R\cos(\theta))^(1/2)}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - R\hat{z}|} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{x}{R}\cos(\theta)\right)$$

de manera que luego

$$\phi(r) \approx Q\left[\frac{1}{R}\left(1 + \frac{x}{R}\cos(\theta)\right) + \frac{a}{Rx}\left(1 + \frac{a^2}{Rx}\cos(\theta)\right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{R}\left(1 - \frac{x}{R}\cos(\theta)\right) - \frac{a}{Rx}\left(1 - \frac{a^2}{Rx}\cos(\theta)\right)\right]$$

$$\phi(x) \approx -\frac{2Qx}{R^2}\cos(\theta) + \frac{2a^3Q}{R^2x^2}\cos(\theta)$$

y haciendo $x \equiv r$ y tomando el límite,

$$\phi(r) = -E_0 r\cos(\theta) + E_0\frac{a^3}{r^2}\cos(\theta)$$

y la carga total sobre la esfera es nula puesto que estuvo aislada todo el tiempo. Respecto de la Figura, si hacemos un Gauss en la zona indicada se obtiene $Q_n = 0$, entonces $\phi(r = a) = 0$.

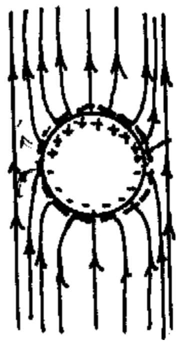


Figura 9.21

El segundo término es como un dipolo puntual,

$$E_0\frac{a^3}{r^2}\cos(\theta) = E_0\frac{a^3\hat{z}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

donde

$$\boldsymbol{p} \equiv E_0 a^3\hat{z}$$

NOTAS

9.1 Sobre el problema de la carga frente a la esfera conductora a tierra

Decíamos que esta solución se puede obtener de manera más heurística, como lo hace Jackson? [CITA], a partir de la expresión en

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2-2\,a\,y\,\cos\gamma}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2+y'^2-2\,a\,y'\;\cos\gamma}} = 0,$$

se podría intentar forzar que el segundo denominador sea idéntico al primero para lo cual se puede multiplicar arriba y abajo por el factor (y/a)

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2-2\,a\,y\;\cos\gamma}} + \frac{q'(y/a)}{y/a\sqrt{a^2+y'^2-2\,a\,y'\;\cos\gamma}} = 0$$

lo que conduce a

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2-2\,a\,y\,\cos\gamma}}+\frac{q'(y/a)}{\sqrt{y^2+y^2y'^2/a^2-2\,y^2/a\,y'\,\cos\gamma}}=0$$

y esta ecuación se satisface si $yy'=a^2$ y si $q=-q'(y/a)$, que es justamente la solución encontrada previamente de un modo más tradicional.

También es interesante considerar algunos casos límite y ver que se recuperan resultados y comportamientos familiares. Si q está localizada muy cerca de la superficie de la esfera, i.e. $|\boldsymbol{y}|\approx a+\varepsilon$ resultan $y'\approx a-\varepsilon$ y $q'\approx -q+(\varepsilon/a)q$ que son exactamente los resultados para una carga frente a un plano conductor (si despreciamos la cantidad infinitesimal (ε/a)). Muy cerca de la superficie de la esfera la carga *ve* un plano infinito.