Capítulo 1

Gas de Bose

Para Bose debe cumplirse $\mu <$ todo e y como $e \geq 0$ eso dice que

$$\mu < 0$$

Pero si en un sistema tiene e_0 como mínimo y $e_0 > 0$ entonces, ¿puede ser $\mu > 0$? Aparentemente sí (al menos recordando que la restricción sale de la serie).

Ya lo entendí esto: pero no para partícula libre.

Además $\langle n_e \rangle \geq 0$, el número de partículas debe ser positivo.

$$\beta p V = \log(\Xi) = \sum_e -\log(1 - \mathrm{e}^{-\beta(e-\mu)})$$

$$\beta p = \sum_{e \neq 0} \frac{-\log(1 - \mathrm{e}^{-\beta(e-\mu)})}{V} - \frac{\log(1-z)}{V}$$

El último término será negligible para todo z, incluso con $z \to 1$ pues en ese caso $V \to \infty$ mucho más rápido

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1-z}$$

y $\langle n_0 \rangle / V$ es finito incluso con $z \to 1$, entonces

$$\langle n_0 \rangle - z \langle n_0 \rangle - z = 0 \qquad z = \frac{\langle n_0 \rangle}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$1 - z = \frac{1}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$-\frac{\log(1-z)}{V} = \frac{\log(1+\langle n_0\rangle)}{V}$$

y dado que $\log(\langle n_0\rangle) \ll \langle n_0\rangle$ despreciamos $\log(1-z)/V$.

Como $0 > \mu$ entonces $\mathrm{e}^{\beta\mu} \equiv z < 1$

En Bose la fugacidad está acotada

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V}\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) + \frac{\lambda^3}{V} n_0$$

$$\underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{densidad total}} = \underbrace{\frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)}_{\text{densidad en los excitados}} + \underbrace{\frac{1}{V}\left(\frac{z}{1-z}\right)}_{\text{densidad en el fundamental}}$$

Por otro lado como $0 < z < 1$ entonces $g_{3/2}(z)$ está acotada

$$g_{3/2}(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{3/2}} = 2.612$$

Con $z \approx 1$ da

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{n_0}{V}$$

cuando se aumenta N necesariamente las partículas se apilan en el fundamental; es una fracción macroscópica pués $V \to \infty$ y entonces $n_0 \to \infty$.

Se da con

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{\lambda^3}{V} N = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{N}{V} > 2.612$$

Destaco en esta expresión T baja dividiendo y n alta multiplicando.

El condensado de Bose surge cuando se saturan los excitados; ello pasa con T baja, N/V alta y $\mu \to 0$

GRAFIQUETE

El condensado de Bose podemos pensarlo como la coexistencia de dos fluidos ($e = 0$ y $e \neq 0$). Podemos definir un T_c, v_c desde

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) = 2.612 = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{1}{v}$$

que lleva a que para un dado v tenemos una cierta T_c y para una cierta T tenemos un dado v_c dados ambos por

$$T_c^{3/2} = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{1}{v} \frac{1}{g_{3/2}(1)} \qquad v_c = \frac{\lambda^3(T)}{g_{3/2}(1)}$$

De esta forma si $T < T_c$ y $v < v_c$ se tiene la condensación de Bose

$$\lambda^3 \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{N_0}{V}$$

que es válida a partir de la condensación ($T < T_c$)

$$N = \frac{(2\pi mk)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} g_{3/2}(1) V + N_0 = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} + N_0$$

$N_e = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$

$$N_o = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right),$$

que es válida por supuesto con $T < T_c$. A partir de haber alcanzado la condensación $z = 1$, añadir partículas ($N++$) o reducir el volumen ($V--$) hace que $N_e/V \to 0$ pues $V \to \infty$

DIBUJO con observaciones

Cuando v/λ^3 es chico se saturan los N_e y entonces $z \to 1$.

Cuando v/λ^3 es grande no hay condensado y entonces $\lambda^3/v \approx z$ o bien $1/(v/\lambda^3) \approx z$.

Para la presión tendremos

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$$

con $z = 1 (T < T_c)$

$$\frac{p}{kT} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} g_{5/2}(1) = \frac{1}{v (T_c/T)^{3/2} g_{3/2}(1)} g_{5/2}(1)$$

$$p = 1.34 \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \qquad \frac{pV}{NkT} = 0.513 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

con $z = 1 (T = T_c)$

$$\beta p = \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1) v} = \frac{0.513}{v}$$

$$p = 0.513 \frac{NkT}{V}$$ es aprox. $1/2p$ gas ideal clásico

con $z \lesssim 1 (T > T_c)$

$$\beta p = \frac{1}{v} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

pero no podemos expandir en el virial porque λ^3/v no es chico.

Con $z \approx 0$ $(T \gg T_C)$

$$\beta p v = \frac{pV}{NkT} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

usando toda la serie y procediendo en modo análogo a Fermi se obtienen

Los a_ℓ son los coeficientes del virial -que son los mismos para Fermi-.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0.17678 \\ a_3 = -0.00330 \end{cases}$$

$$\frac{pV}{NkT} = 1 - 0.17678\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) - 0.00330\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2$$

DIBUJO

El virial vale en $\lambda^3/v \ll 1$ (alta T y baja N/V)

A bajas T se comportan de modo muy diferente, $p_{\text{ Fermi}} > 0$ y $p_{\text{ Bose}} \approx 0$

1.1 Análisis del gas ideal de Bose

- $\lambda^3/v \ll 1$ y entonces $z \ll 1$ $\quad [T \gg T_c]$

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$\beta p V \approx 1 - \frac{\lambda^3}{v}\frac{1}{2^{5/2}} \qquad\qquad U = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}NkT\left(1 - \frac{\lambda^3}{v}\frac{1}{2^{5/2}}\right)$$

- $\lambda^3/v \approx 1$ y entonces $z < 1$ $\quad [T > T_c]$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

- $\lambda^3/v = 2.612$ y entonces $z = 1$ $\quad [T = T_c]$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \approx \frac{1.34}{2.612} \approx 0.513$$

- $\lambda^3/v \gg 1$ y entonces $z = 1 \quad [T < T_c]$ y hay que considerar el fundamental

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \qquad\qquad \lambda^3 \left(\frac{N - N_0}{V} \right) = g_{3/2}(1)$$

que lleva a

$$\left(1 - \frac{N_0}{N} \right) = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

puesto que T_c es tal que

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T_c)^{3/2}} \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) = \frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 0.513 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = g_{3/2}(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1}{v} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{1}{g_{3/2}(1)}$$

Con $z = 1$ y $T < T_c$ expresamos todo en términos de (T/T_c).

Desde la expresión de la energía $U = 3/2 pV$ y $C_V = \frac{\partial}{\partial T}(3/2 pV)$ y entonces

- $T < T_c$

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} N k \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} 0.513 \right) = \frac{15}{4} N k \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} 0.513 \qquad C_V \propto T^{3/2}$$

- $T = T_c$

$$C_V = Nk\, 0.513 \frac{15}{4} = Nk 1.92375$$

- $T > T_c$

$$C_V = \left(\frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \underbrace{\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}}_{\to\infty \text{ en } z=1} \right)$$

C_V es continuo.

- $T \gg T_c$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(T \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1} \right)$$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \left(1 + 0.0884 \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + \ldots \right)$$

DIBUJO

1.1.1 Condensado de Bose como transición de fase

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{v}{v_c}$$

que se obtiene desde las siguientes

$$\frac{\lambda^3(T_c)}{v} = g_{3/2}(1) \qquad \frac{\lambda^3(T)}{v_c} = g_{3/2}(1)$$

para llegar a la relación útil:

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = \frac{v}{v_c}$$

$\lambda^3 = h^3/(2\pi mkT)^{3/2}$ **y** $\frac{\lambda^3}{v_c} = g_{3/2}(1) = \frac{\lambda^3}{v}\frac{v}{v_c}$

En $\frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2}(1)$ vale

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \text{ no tengo en cuenta } N_0$$

$$\frac{v_c}{v} = \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)}$$

Se vio que con $V \to \infty$

$$\frac{1}{V}\log(1-z) \to 0$$

y entonces

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \qquad v > v_c$$

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \qquad v \leq v_c$$

$$\beta p = \frac{g_{5/2}(1)}{v_c g_{3/2}(1)}$$

es decir que la presión p no depende del v

Con $v > v_c$

$$p = \frac{kT g_{5/2}(z)}{\lambda^3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$$

que conlleva a

$$kT = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^2} \qquad p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{v^{5/3}[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

y con $v > v_c$

$$pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

con $v \leq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

Vemos que en $v = v_c$ es

$$pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(1)}{[g_{3/2}(1)]^{5/3}}$$

$$p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(1)}{v_c g_{3/2}(1)}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{kT}{v_c}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

y entonces se ve que es continua.

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad v \geq v_c \qquad \Bigg| \qquad \beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \quad v \leq v_c$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \quad v > v_c \qquad \Bigg| \qquad \frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) \quad v = v_c$$

- $v \geq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c} g_{5/2}(z) = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2} g_{5/2}(z)$$

$$p = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{1}{\lambda^5} g_{5/2}(z) = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{v_c^{5/3}[g_{3/2}(z)]^{5/3}}$$

$$\boxed{pv^{5/3} = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^{5/3}}}$$

- $v \leq v_c$

$$p = \frac{kT}{v_c} g_{5/2}(1) = \boxed{\left(\frac{kT}{v_c}\right) \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}}$$

Las isotermas del gas ideal de Bose serán algo como

DIBUJO

Una dada T_1 determina un v_{c_1} pués

$$\frac{\lambda^3(T_1)}{v_{C_1}} = g_{3/2}(1) \quad \rightarrow \quad v_{C_1} = \frac{\lambda^3(T_1)}{g_{3/2}(1)}$$

y en la zona condensada p no depende del v.

Si ponemos todo en función de T resulta

$\lambda^3(T) \propto T^{-3/2}$ **A medida que T sube el v_c es más pequeño.**

$$v \leq v_c \qquad p = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} g_{5/2}(1)$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{5}{2} \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (k)^{5/2} T^{3/2} g_{5/2}(1) = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda^3} g_{5/2}(1) = \frac{5}{2} \frac{k}{v_c} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$$

DIBUJO

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(5/2)kTg_{5/2}(1)}{Tv_c g_{3/2}(1)}$$

pero Clapeyron era

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{(5/2)kTg_{5/2}(1)/g_{3/2}(1)}{Tv_c}}$$

$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} = \frac{T\Delta S}{T\Delta V} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$

Es una transición de fase de primer orden

$$S = \frac{U + pV - \mu N}{T} = \frac{5/2pV - \mu N}{T}$$

$$\frac{S}{kN} = \frac{5}{2} \frac{pV}{NkT} - \frac{\mu}{kT}$$

y entonces

$$T > T_c \qquad \frac{S}{kN} = \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z$$

$$T < T_c \qquad \frac{S}{kN} = \frac{5}{2} 0.513 \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1) v}$

$$\text{Con } T \to 0 \qquad \frac{S}{kN} \propto T^{3/2}$$

y por lo tanto vale la tercer de la termodinámica. Para $T < T_c$ es

$$S = Nk \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{v}{v_c}\right) \quad \to \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S/N}{\partial V/N} = \frac{\partial s}{\partial v}$$

siendo s entropía por unidad y v volumen específico.

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{(5/2) k g_{5/2}(1)/g_{3/2}(1)}{v_c} = \frac{dp}{dT}$$

y acá es donde vemos que es una transición de fase de primer orden.

1.2 Cuánticos IV –reubicar–

algunos temitas sueltos:
números de ocupación
gas de Fermi p y c_v
gas de Fermi p y c_v
Condensado de Bose

El coeficiente lineal del virial $1/2^{5/2} = 0.1767767$ sale considerando las $f_\nu(z)$ hasta orden uno y tirando términos más allá.

¿El condensado BE requiere población de los niveles o V total de algún tipo?

Tenía unas consultas agarradas con clip: ¿porqué hay una cúspide en C_v? ¿transiciones?

El requerimiento $\mu < 0$ viene de que el fundamental n_0 no puede tener población negativa

$$n_0 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(e_0 - \mu)} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1} \geq 0$$

$$\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu < 0$$

Con $\mu \to 0^-$ tenemos $n \to \infty$

En el caso del condensado establecemos desde

$$\frac{\lambda^3(T)}{v} = g_{3/2}(1)$$

que lleva para T_c (para v fijo) o v_c (para T fija) versiones evaluadas de la anterior ecuación.

Para la población de los estados excitados

$$p_x = \frac{h}{V^{1/3}} n_x \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{h}{V^{1/3}} \boldsymbol{n}$$

$$\frac{n_{e_i}}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i} - 1} \leq \frac{1}{V(\,\mathrm{e}^{\beta e_i} - 1)} = \frac{1}{V(\sum_{l=1}^{\infty} (\beta e_i)^l / l!)}$$

pués $z^{-1} = 1/z \leq 1$

$$\beta e = \frac{\beta p^2}{2m} = \frac{\beta}{2m} \frac{h^2}{V^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\frac{2m}{V^{1/3} \beta h^2 (\sum_{l=1} \ldots)} \to 0 \quad \text{si} \quad V \to \infty$$

y entonces

$$\frac{n_e}{V} \to 0 \quad \text{si} \quad V \to \infty$$

Esto significa que si V es muy grande, en el condensado se tenderá a que todas las partículas se hallen en $e = 0$ pues

$$\frac{N_e}{N} \to 0 \qquad\qquad \frac{N_0}{N} \to 1$$

Véamoslo en la ecuación de N,

$$\frac{\lambda^3 N}{V} = g_{3/2}(1) + \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z}$$

y si $z \to 1$ de forma que $z/(1-z) \gg 1$ entonces $g_{3/2}(1)$ es despreciable de modo que

$$\frac{\lambda^3 N}{V} \approx \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z} = \frac{\lambda^3 N_0}{V}$$

y se da que $N \sim N_0$.

En Bose se da $0 < z < 1$

DIBUJITOS

Con $z \ll 1$ es $\lambda^3/v \approx z$ y entonces $z \approx 1/(v/\lambda^3)$. Con $z = 1$ es $\lambda^3/v = 2.612$n pero si $\lambda^3/v > 2.612$ entonces z no se mueve y sigue en su valor 1.

1.2.1 Cuánticos 5 - Cuánticos 5b –reubicar–

presión gas de Bose
C_V gas de Bose
Condensado de Bose $\rightarrow$ transición de fase de primer orden
límite clásico función de partición
cálculo de $Tr(\,\mathrm{e}^{-\beta A}) = Q_N(V,T)$
diferencia con el caso clásico
potencial efectivo
Podemos comparar presión con el gas ideal para reconoder si es Fermi o Bose.

Ver la transición de fase con el tema del calor latente. ¿Cómo era lo de Clayperon?

El C_V es continuo. Veamos que da

$$T < T_C \qquad \frac{C_V}{Nk} \propto T^{3/2}$$

$$T = T_C \qquad \frac{C_V}{Nk} \approx 1.925 > \frac{3}{2}$$

$$T > T_C \qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2}T\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right)\frac{C_V}{Nk}$$