Toán I

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Dãy số

Định nghĩa

Một dãy số là một hàm số $\mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a_n$*, ở đó* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *hoặc* $\mathbb{C}$.
Kí hiệu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) *Dãy số đơn điệu: tăng* $(a_n \leq a_{n+1})$*, giảm* $(a_n \geq a_{n+1})$.

ii) *Dãy số bị chặn: chặn trên* $a_n \leq M \ \forall n$*, chặn dưới:* $a_n \geq K \ \forall n$.

Dãy số

Định nghĩa

Một dãy số là một hàm số $\mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a_n$, *ở đó* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *hoặc* $\mathbb{C}$.
Kí hiệu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) *Dãy số đơn điệu: tăng* $(a_n \leq a_{n+1})$, *giảm* $(a_n \geq a_{n+1})$.

ii) *Dãy số bị chặn: chặn trên* $a_n \leq M\ \forall n$, *chặn dưới:* $a_n \geq K\ \forall n$.

Giới hạn của dãy số

Một dãy số $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn là L và viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ nếu

i) (một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho các số hạng a_n gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

Dãy số

Định nghĩa

Một dãy số là một hàm số $\mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a_n$*, ở đó* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *hoặc* $\mathbb{C}$*.*
Kí hiệu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

i) *Dãy số đơn điệu: tăng* $(a_n \leq a_{n+1})$*, giảm* $(a_n \geq a_{n+1})$*.*
ii) *Dãy số bị chặn: chặn trên* $a_n \leq M\ \forall n$*, chặn dưới:* $a_n \geq K\ \forall n$*.*

Giới hạn của dãy số

Một dãy số $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn là L và viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ nếu

i) (một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho các số hạng a_n gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.
ii) (nói một cách chính xác)

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon).$$

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

Dãy số hội tụ - phân kì

i) Ta nói dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ nếu có số $L \in \mathbb{K}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

ii) Ngược lại, ta nói dãy số $\{a_n\}$ là phân kì.

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

Dãy số hội tụ - phân kì

i) Ta nói dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ nếu có số $L \in \mathbb{K}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

ii) Ngược lại, ta nói dãy số $\{a_n\}$ là phân kì.

Giới hạn vô cùng

Ta nói $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow a_n > M).$$

Hãy phát biểu cho TH $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

Dãy số hội tụ - phân kì

i) Ta nói dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ nếu có số $L \in \mathbb{K}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

ii) Ngược lại, ta nói dãy số $\{a_n\}$ là phân kì.

Giới hạn vô cùng

Ta nói $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow a_n > M).$$

Hãy phát biểu cho TH $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn của một dãy số, nếu tồn tại, là duy nhất.

Tính chất về thứ tự

Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức

i) Nếu $\exists N_1 \in \mathbb{N} : a_n \geq a, \forall n \geq N_1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a$.

ii) Nếu $\exists N_2 \in \mathbb{N} : a_n \leq b, \forall n \geq N_2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq b$.

iii) Nếu $\exists N \in \mathbb{N} : a \leq a_n \leq b, \forall n \geq N$ thì $a \leq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq b$.

Tính chất về thứ tự

Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức

i) Nếu $\exists N_1 \in \mathbb{N} : a_n \geq a, \forall n \geq N_1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \geq a$.

ii) Nếu $\exists N_2 \in \mathbb{N} : a_n \leq b, \forall n \geq N_2$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \leq b$.

iii) Nếu $\exists N \in \mathbb{N} : a \leq a_n \leq b, \forall n \geq N$ thì $a \leq \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \leq b$.

Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức

Nếu $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n, \forall n \geq N$ thì

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$,

ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

Tính chất về thứ tự

Tiêu chuẩn kẹp

Cho các dãy số thực $(a_n), (b_n), (c_n)$ thỏa mãn

i) $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq N$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

Giới hạn của dãy số

Các phép toán về giới hạn của dãy số

Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ hữu hạn thì

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n . \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Các TH đặc biệt

i) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

ii) $\infty \times \infty = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty$ (theo các quy tắc về dấu).

Bốn dạng vô định: $\infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty$.

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Giả sử bạn có số tiền là 1 tỉ và gửi ngân hàng với lãi suất tiết kiệm là 100% một năm. Như vậy sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là 2 tỉ. Bây giờ giả sử bạn không muốn lấy gốc và lãi một lần một năm mà lấy thường xuyên hơn, vậy thì số tiền của bạn sẽ được tính như thế nào?

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Giả sử bạn có số tiền là 1 tỉ và gửi ngân hàng với lãi suất tiết kiệm là 100% một năm. Như vậy sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là 2 tỉ. Bây giờ giả sử bạn không muốn lấy gốc và lãi một lần một năm mà lấy thường xuyên hơn, vậy thì số tiền của bạn sẽ được tính như thế nào?

1) Nếu bạn muốn tính lãi 2 lần một năm, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2.25$ tỉ.

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Giả sử bạn có số tiền là 1 tỉ và gửi ngân hàng với lãi suất tiết kiệm là 100% một năm. Như vậy sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là 2 tỉ. Bây giờ giả sử bạn không muốn lấy gốc và lãi một lần một năm mà lấy thường xuyên hơn, vậy thì số tiền của bạn sẽ được tính như thế nào?

1) Nếu bạn muốn tính lãi 2 lần một năm, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2.25$ tỉ.
2) Nếu bạn muốn tính lãi theo quý, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times = 2.4414$ tỉ.

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Giả sử bạn có số tiền là 1 tỉ và gửi ngân hàng với lãi suất tiết kiệm là 100% một năm. Như vậy sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là 2 tỉ. Bây giờ giả sử bạn không muốn lấy gốc và lãi một lần một năm mà lấy thường xuyên hơn, vậy thì số tiền của bạn sẽ được tính như thế nào?

1) Nếu bạn muốn tính lãi 2 lần một năm, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2.25$ tỉ.
2) Nếu bạn muốn tính lãi theo quý, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times = 2.4414$ tỉ.
3) Nếu bạn muốn tính lãi suất theo tháng, sau một năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035$ tỉ.

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Giả sử bạn có số tiền là 1 tỉ và gửi ngân hàng với lãi suất tiết kiệm là 100% một năm. Như vậy sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là 2 tỉ. Bây giờ giả sử bạn không muốn lấy gốc và lãi một lần một năm mà lấy thường xuyên hơn, vậy thì số tiền của bạn sẽ được tính như thế nào?

1) Nếu bạn muốn tính lãi 2 lần một năm, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2.25$ tỉ.
2) Nếu bạn muốn tính lãi theo quý, sau 1 năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times = 2.4414$ tỉ.
3) Nếu bạn muốn tính lãi suất theo tháng, sau một năm số tiền của bạn sẽ là $1 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035$ tỉ.
4) Nếu có n khoảng tính lãi suất, số tiến sao một năm bạn nhận được sẽ là $1.00 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$.

Như vậy số tiền các bạn nhận được sẽ càng lớn nếu bạn càng chia nhỏ khoảng tính lãi suất.

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Như vậy số tiền các bạn nhận được sẽ càng lớn nếu bạn càng chia nhỏ khoảng tính lãi suất.

i) Phải chăng nếu bạn tính lãi suất liên tục, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty$ và các ngân hàng sẽ phá sản?

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Như vậy số tiền các bạn nhận được sẽ càng lớn nếu bạn càng chia nhỏ khoảng tính lãi suất.

i) Phải chăng nếu bạn tính lãi suất liên tục, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty$ và các ngân hàng sẽ phá sản?

ii) Thật may mắn, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ với mọi n, và do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818\ldots$

Bài toán tính tiền gửi tiết kiệm

Như vậy số tiền các bạn nhận được sẽ càng lớn nếu bạn càng chia nhỏ khoảng tính lãi suất.

i) Phải chăng nếu bạn tính lãi suất liên tục, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty$ và các ngân hàng sẽ phá sản?

ii) Thật may mắn, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ với mọi n, và do đó tồn tại $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818\ldots$

Khi số n càng lớn thì số tiền bạn nhận được sẽ càng gần số e.

i) Ví dụ, nếu bạn tính lãi suất hàng tuần ($n = 52$), số tiền bằng 2.692597,

ii) trong khi nếu bạn tính lãi suất hàng ngày ($n = 365$) thì số tiền là 2.714567.

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

i) Mọi dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

ii) Mọi dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Ví dụ

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *hữu hạn.*

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

i) Mọi dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

ii) Mọi dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Ví dụ

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *hữu hạn.*

Hệ quả

Một dãy số thực (a_n) tăng chỉ có hai khả năng xảy ra

i) hoặc (a_n) hội tụ,

ii) hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Phát biểu tương tự cho dãy số thực giảm.

Tiêu chuẩn Cauchy

Định nghĩa

Dãy số $\{a_n\}$ *được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi* $\epsilon > 0$, *tồn tại số tự nhiên* N *sao cho* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *với mọi* $m, n > N$.

Ví dụ

Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *là một dãy số Cauchy.*

Tiêu chuẩn Cauchy

Định nghĩa

Dãy số $\{a_n\}$ *được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *với mọi* $m, n > N$.

Ví dụ

Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *là một dãy số Cauchy.*

Định lý

Dãy số $\{a_n\}$ *là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy số Cauchy.*

Ví dụ

Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ *với* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *là phân kỳ.*

Dãy con

Định nghĩa

Với mọi dãy $\{a_n\}$ *cho trước, dãy số* $\{a_{\sigma(n)}\} \subset \{a_n\}$ *sao cho* $\sigma(i) < \sigma(j)$ *với mọi* $i < j$*, được gọi là một dãy con của* $\{a_n\}$.

Ví dụ

$\{a_{2n+1}\}$ *và* $\{a_{2n}\}$ *là các dãy con của* (a_n).

Sự hội tụ của dãy con

i) Nếu dãy (a_n) hội tụ đến L thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ đến L.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = L.$

iii) (Định lý Bolzano-Weierstrass) Từ mọi dãy số thực bị chặn đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Một số dãy số thông dụng

Dãy cấp số cộng, nhân

i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Phần tử r khi đó được gọi là công sai.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n$. Phần tử r khi đó được gọi là công bội.

Dãy truy hồi cấp một với hệ số không đổi

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

i) Nếu $a = 1$ thì đó là dãy cấp số cộng.

ii) Nếu $a \neq 1$ thì đặt $v_n = u_n + \lambda$ và chọn λ sao cho (v_n) là một dãy cấp số nhân.

Một số dãy số thông dụng

Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

Kí hiệu $E_{a,b}$ là tập hợp tất cả các dãy số (u_n) trong $\mathbb{K}$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Cấu trúc và số chiều của $E_{a,b}$

1) $E_{a,b}$ là một không gian véc tơ.
2) $\dim E_{a,b} = 2$. Thật vậy, kí hiệu $(U_n), (V_n) \in E_{a,b}$ xác định bởi
$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 0, \\ V_0 = 0, V_1 = 1. \end{cases}$$
Khi đó,
   i) $(U_n), (V_n)$ là độc lập tuyến tính trong $E_{a,b}$,
   ii) $(U_n), (V_n)$ là một hệ sinh của $E_{a,b}$.

Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

Cấu trúc của $E_{a,b}$

Ta xét xem $E_{a,b}$ có chứa các dãy cấp số nhân hay không. Cho $r \in \mathbb{K}$, ta có

$$(r_n) \in E_{a,b} \Leftrightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0.$$

i) PTĐT $r^2 - ar - b = 0$ có 2 nghiệm thực r_1, r_2 phân biệt. Họ $\{(r_1^n), (r_2^n)\}$ là ĐLTT trong $E_{a,b} \Rightarrow$ nó là một cơ sở $\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2$ sao cho

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

ii) PTĐT có một nghiệm thực duy nhất $r_0 \Rightarrow \{(r_0^n), (nr_0^{n-1})\}$ lập thành một cơ sở của $E_{a,b} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ sao cho

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^{n-1}.$$

iii) PTĐT vô nghiệm thực $\Rightarrow r_1, r_2 = \overline{r_1} \in \mathbb{C}$ là các nghiệm phức của nó $\Rightarrow u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Dãy truy hồi

Dãy truy hồi cấp một loại $u_{n+1} = f(u_n)$

Cho I là một khoảng đóng của $\mathbb{R}$ và $f : I \to I$ là một ánh xạ.

1) Nếu f đơn điệu tăng trên I thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ nên $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Nghĩa là,
   i) $u_0 \leq u_1 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   ii) $u_0 \geq u_1 \Rightarrow u_1 \geq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   Việc còn lại chỉ phải xét xem dãy số đã cho có bị chặn trên (dưới) hay không.

Dãy truy hồi

Dãy truy hồi cấp một loại $u_{n+1} = f(u_n)$

Cho I là một khoảng đóng của $\mathbb{R}$ và $f : I \to I$ là một ánh xạ.

1) Nếu f đơn điệu tăng trên I thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ nên $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Nghĩa là,
   i) $u_0 \leq u_1 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   ii) $u_0 \geq u_1 \Rightarrow u_1 \geq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   Việc còn lại chỉ phải xét xem dãy số đã cho có bị chặn trên (dưới) hay không.
2) Nếu f đơn điệu giảm trên I thì ánh xạ $f \circ f$ là tăng trên I. Xét hai dãy con u_{2n} và u_{2n+1} đơn điệu (và có chiều ngược nhau)

Dãy truy hồi

Dãy truy hồi cấp một loại $u_{n+1} = f(u_n)$

Cho I là một khoảng đóng của $\mathbb{R}$ và $f : I \to I$ là một ánh xạ.

1) Nếu f đơn điệu tăng trên I thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ nên $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Nghĩa là,
   i) $u_0 \leq u_1 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   ii) $u_0 \geq u_1 \Rightarrow u_1 \geq u_2 \leq \cdots \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   Việc còn lại chỉ phải xét xem dãy số đã cho có bị chặn trên (dưới) hay không.
2) Nếu f đơn điệu giảm trên I thì ánh xạ $f \circ f$ là tăng trên I. Xét hai dãy con u_{2n} và u_{2n+1} đơn điệu (và có chiều ngược nhau)
3) Nếu f liên tục trên I. Khi đó, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ thì chuyển qua giới hạn ta có $f(L) = L$, từ đó xác định được giới hạn của nó.

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Khái niệm hàm số

Định nghĩa

Cho X và Y là các tập hợp. Một hàm số f đi từ tập hợp X vào tập hợp Y, kí hiệu $f : X \to Y$, là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một giá trị duy nhất $y \in Y$.

Chú ý rằng điều ngược lại không đúng, với một giá trị $y \in Y$ có thể có hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in X$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = y$. Chẳng hạn như $f(x) = x^2$.

Tập xác định - Tập giá trị

i) TXĐ $= \{x \in X | f(x)$ được định nghĩa$\}$.

ii) TGT $= \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\}$.

Hàm số

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

i) Hàm số chẵn: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

ii) Hàm số lẻ: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Hàm số tuần hoàn

$\exists T > 0 : f(x) = f(x+T) \forall x \in \text{ TXĐ}.$

Hàm hợp

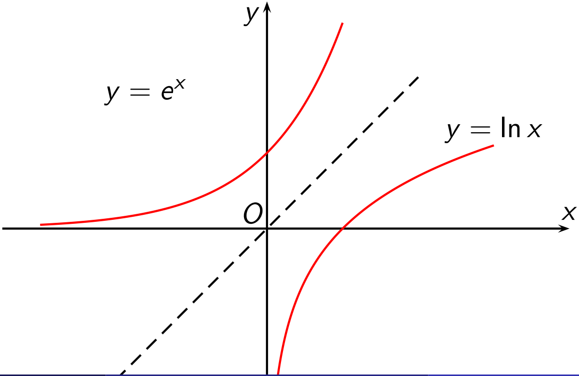
Cho $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Khi đó $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Hàm số

Hàm ngược

Cho $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó

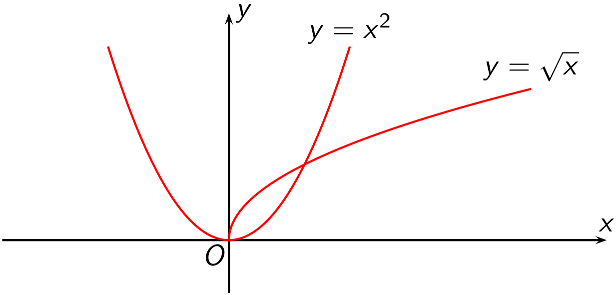
$$f^{-1} : Y \to X,$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$



Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sơ cấp cơ bản:

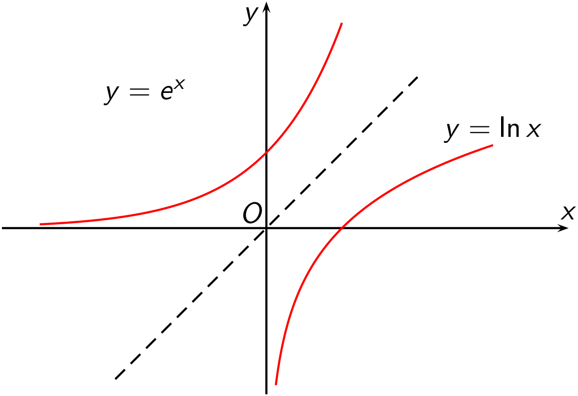
1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$. TXĐ của hàm số này phụ thuộc vào α.
   a) Nếu α nguyên dương, TXĐ$= \mathbb{R}$,
   b) Nếu α nguyên âm, hàm số $y = \frac{1}{x^{-\alpha}}$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   c) Nếu $\alpha = \frac{1}{p}$, p nguyên dương chẵn, TXĐ$= \mathbb{R}_{\geq 0}$,
   d) Nếu $\alpha = \frac{1}{p}$, p nguyên dương lẻ, thì TXĐ$= \mathbb{R}$.
   e) Nếu α là số vô tỉ thì quy ước TXĐ$= \mathbb{R}_{>0}$.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sơ cấp cơ bản:

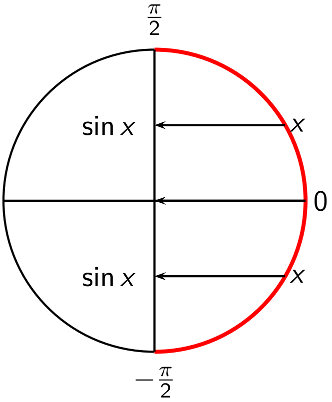
2. Hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và luôn dương. Hàm này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.
3. Làm số logarit $y = \log_a(x)$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$. Hàm số này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

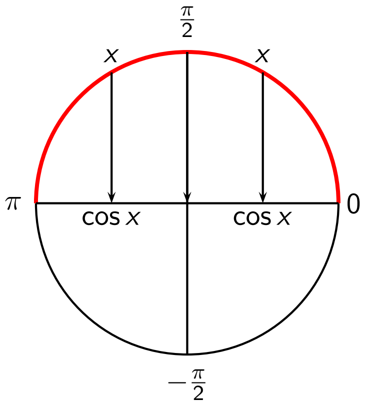
a) Hàm số $y = \sin x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn CK 2π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

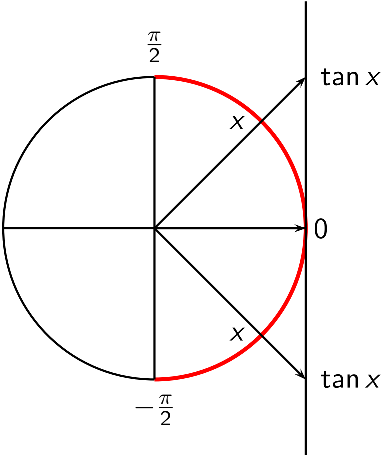
   b) Hàm số $y = \cos x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn CK 2π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

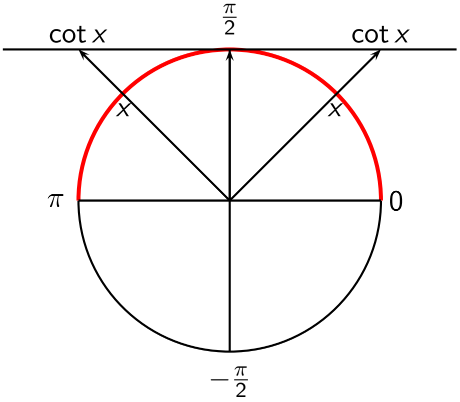
4. Hàm lượng giác

   c) Hàm số $y = \tan x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.



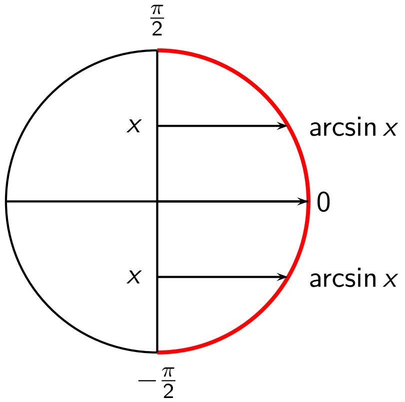
Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác
   d) Hàm số $y = \cot x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

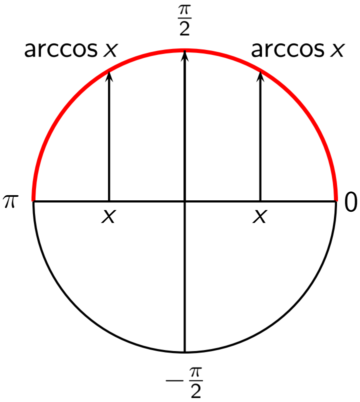
5. Hàm lượng giác ngược.
   a) Hàm số $y = \arcsin x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

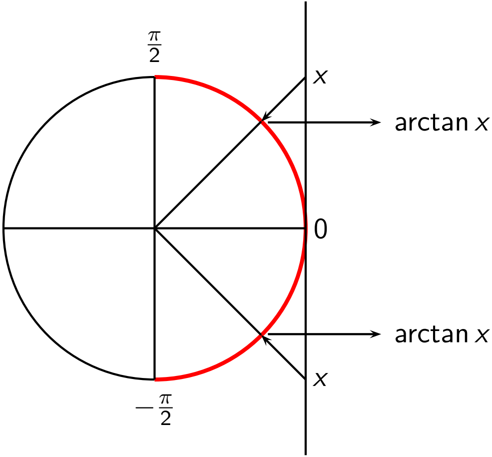
   b) Hàm số $y = \arccos x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= [0, \pi]$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

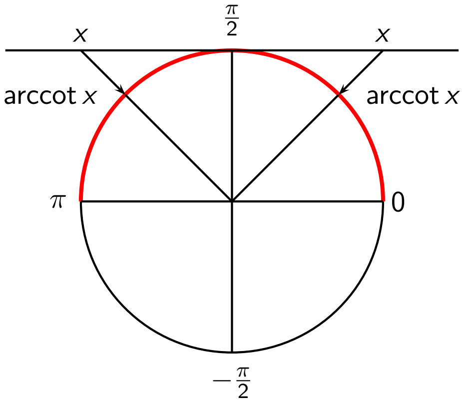
   c) Hàm số $y = \arctan x$, TXĐ=$\mathbb{R}$, TGT= $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

   d) Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $(0, \pi)$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



Hàm số sơ cấp

Người ta gọi hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, phép lập hàm số đối với các hàm số sơ cấp cơ bản. Các hàm số sơ cấp được chia thành hai loại.

i) Hàm số đại số: là những hàm số mà khi tính giá trị của nó ta chỉ phải làm một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Ví dụ: các đa thức, phân thức, ...

ii) Hàm số siêu việt: là những hàm số sơ cấp nhưng không phải là hàm số đại số, như $y = \ln x, y = \sin x, \ldots$

Không gian véc tơ $\mathbb{K}^X$

Cho $X \neq \emptyset$ là một tập hợp bất kì, $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}\}$. Ta trang bị cho $\mathbb{K}^X$ hai luật hợp thành trong $+, \times$ $\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$
và một luật hợp thành ngoài $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$.

Mệnh đề

i) $(\mathbb{K}^X, +, \times)$ *là một vành giao hoán, có đơn vị.*

ii) $(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ *là một không gian véc tơ (vô hạn chiều).*

Gọi P_X (tương ứng I_X) là tập hợp các ánh xạ chẵn (tương ứng lẻ) từ X vào $\mathbb{K}$.

Mệnh đề

i) $\mathbb{K}^X = P_X \oplus I_X$.

ii) Tập hợp các ánh xạ T-tuần hoàn từ X vào $\mathbb{K}$ là một KGVT con của $\mathbb{K}^X$.

Quan hệ thứ tự trong $\mathbb{K}^X$

Định nghĩa

Ta định nghĩa một quan hệ trong $\mathbb{R}^X$ *bởi*

$$\forall f, g \in \mathbb{K}^X, (f \leq g) \Leftrightarrow (\forall x \in X, f(x) \leq g(x)).$$

Mệnh đề

i) $\leq$ *là một quan hệ thứ tự trong* $\mathbb{R}^X$*; thứ tự này là không toàn phần nếu* card $X \geq 2$.

ii) $\leq$ *tương thích với phép* $+$*:*

$$\forall f, g, h \in \mathbb{R}^X, (f \leq g \Leftrightarrow f + h \leq g + h).$$

iii) $\forall f, g, h \in \mathbb{R}^X, \left(\begin{cases} f \geq g, \\ 0 \leq h \end{cases} \Rightarrow fh \leq gh \right).$

Không gian $\mathbb{K}^X$

Cho X là một khoảng con của $\mathbb{R}$ và $f \in \mathbb{R}^X$. Ta nói

Tính đơn điệu

1) f là (đơn điệu) tăng nếu $\forall (x_1, x_2) \in X^2, (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
2) f là (đơn điệu) giảm nếu $\forall (x_1, x_2) \in X^2, (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
3) f là tăng ngặt nếu $\forall (x_1, x_2) \in X^2, (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
4) f là giảm ngặt nếu $\forall (x_1, x_2) \in X^2, (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Tính bị chặn

1) f là bị chặn trên nếu $\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in X, f(x) \leq A$.
2) f là bị chặn dưới nếu $\exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in X, f(x) \geq B$.
3) f là bị chặn dưới nếu $\exists A, B \in \mathbb{R} : \forall x \in X, B \leq f(x) \leq A$.

Mệnh đề

Tập hợp $B(X, \mathbb{R})$ các hàm bị chặn từ X vào $\mathbb{R}$ là một KGVT con của $\mathbb{R}^X$.

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) (nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) *(nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.*

ii) *(nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $\delta > 0$ sao cho*

$$\text{nếu } |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) *(nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.*

ii) *(nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $\delta > 0$ sao cho*

$$\text{nếu } |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tương tự như vậy, hãy nêu các định nghĩa
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Giới hạn của dãy số vs Giới hạn của hàm số

Bổ đề

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\{x_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Ý nghĩa

i) Muốn chỉ ra $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ta chỉ ra hai dãy số $x_n \to x_0, x_n' \to x_0$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n')$.

ii) Gặp giới hạn của dãy số, có thể đưa về giới hạn của hàm số. Chẳng hạn như, tính $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$.

Giới hạn dãy số: Công cụ thô sơ

i) Tiêu chuẩn kẹp

ii) Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

iii) Tiêu chuẩn Cauchy

Giới hạn hàm số: Công cụ hiện đại

i) Vô cùng bé, Vô cùng lớn

ii) Khai triển Maclaurin

iii) Quy tắc L'Hospital

Các tính chất của giới hạn

Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, nếu tồn tại, là duy nhất.

Các phép toán trên giới hạn

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
3) $\lim\limits_{x\to x_0} [cf(x)] = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
4) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
5) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Chú ý: Ngoại trừ bốn dạng vô định sau $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$.

Giới hạn của hàm số

Chuyển qua giới hạn trong các bất đẳng thức

Cho $x_0 \in (a, b)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

i) Nếu $c \leq f(x)$ trong lân cận của x_0 thì $c \leq L$.

ii) Nếu $f(x) \leq d$ trong lân cận của x_0 thì $L \leq d$.

iii) Nếu $c \leq f(x) \leq d$ trong lân cận của x_0 thì $c \leq L \leq d$.

Định lý (Tiêu chuẩn kẹp)

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0, và tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Ví dụ

Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Các tính chất của giới hạn

Giới hạn ở vô cùng

Nếu

i) $f(x) \leq g(x)$ trong lân cận của x_0,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0, \\ \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$.

Áp dụng $\lim\limits_{x \to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} B(x) \ln A(x)}$.

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty,$
16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$
16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,
18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi,$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi,$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0.$

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Vô cùng lớn - Vô cùng bé

Vô cùng bé

Hàm số $f(x)$ được gọi là một *vô cùng bé* (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, nếu $\lim_{x \to a} f(x) = A$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

Ví dụ

$f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, h(x) = x^{2017}$ *là các VCB khi* $x \to 0$.

Các tính chất

i) Tổng, hiệu, tích của hai VCB là một VCB.

ii) Tuy nhiên, thương của hai VCB chưa chắc đã là một VCB, vì chúng thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$.

So sánh các VCB

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương và viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Ví dụ

i) $f(x) = x^a$ $(a > 0)$ *là VCB bậc cao hơn* $g(x) = x^b$ $(b > 0) \Leftrightarrow a > b$.

ii) $\sin x \sim x$.

Quy tắc thay tương đương

Định lý (Quy tắc thay tương đương)

Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ *khi* $x \to a$ *thì*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Các VCB tương đương hay dùng

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$\sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Định lý (Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao)

Nếu $\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x)), \beta_1(x) = o(\beta_2(x))$ *khi* $x \to a$ *thì*

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x) \text{ và } \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2+x^3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$.

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\tan^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}$.

Vô cùng bé

Ví dụ (Giữa kì, K61)

So sánh cặp vô cùng bé sau đây khi $x \to 0$

a) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 + x^3}$, $\beta(x) = e^{\sin x} - 1$.

b) $\alpha(x) = \sqrt[5]{x^4 - x^5}$, $\beta(x) = \ln(1 + \tan x)$.

c) $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{x + x^2}$.

d) $\alpha(x) = e^{x^2} - 1$, $\beta(x) = x^2 + x^3$.

e) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$.

Chú ý

KHÔNG thay tương đương với hiệu hai VCB, $\alpha(x) = \sin x - \tan x + x^3$.

i) *Thay tương đương* $\alpha(x) \sim x^3$, ii) *Thực tế,* $\alpha(x) \sim \frac{x^3}{2}$.

Vô cùng lớn

Vô cùng lớn

i) Hàm số $f(x)$ được gọi là một *vô cùng lớn* (viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

ii) $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL khi $x \to a$.

So sánh các VCL

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL khi $x \to a$.

i) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL cùng bậc.
Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Vô cùng lớn

Qui tắc thay tương đương và ngắt bỏ VCL bậc thấp

i) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ là các VCL khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

ii) Nếu $\alpha_1(x) = O(\alpha_2(x)), \beta_1(x) = O(\beta_2(x))$ là các VCL khi $x \to a$ thì

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_1(x) \text{ và } \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2^x}{x+3^x}.$$

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó xác định trong một lân cận nào đó của x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Liên tục một phía

i) Liên tục trái:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

ii) Liên tục phải
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Ví dụ (Học kì 20163)

Tìm a để $x = 2$ là điểm liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a\cos\sqrt{x-1}, & \textit{nếu } x \geq 1, \\ \operatorname{arccot}(1-x), & \textit{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Các định lý về hàm liên tục

Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

i) Hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$,

ii) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$, đồng thời liên tục phải tại a, liên tục trái tại b. Khi đó, nó

a) bị chặn trên đoạn đó, tức là $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

b) đạt được GTLN, GTNN trên đó.

Liên tục từng khúc

Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[a, b]$ nếu

i) $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$,

ii) $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng (a_i, a_{i+1}),

iii) tồn tại $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$ hữu hạn.

Các định lý về hàm liên tục

Một số tính chất

Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục?

Sự liên tục của hàm hợp

Nếu $\begin{cases} u(x) \text{ liên tục tại } x_0, \\ f(u) \text{ liên tục tại } u_0 = u(x_0) \end{cases}$ thì $f(u(x))$ liên tục tại $x = x_0$.

Sự liên tục của hàm ngược

Nếu $y = f(x)$ đồng biến và liên tục trên khoảng (a, b) thì hàm ngược $y = g(x)$ cũng đồng biến và liên tục trên $f(a, b)$.

Các tính chất của hàm số liên tục

Định lý giá trị trung gian

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Khi đó $f(x)$ nhận tất cả các giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$. Nghĩa là,

i) nếu $f(a) \leq f(b)$ thì $\forall c \in [f(a), f(b)], \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = c$.

Định lý Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists \alpha \in (a, b) : f(\alpha) = 0$.

Ví dụ

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) *Biết* $a + b + 2c = 0$, *chứng minh rằng* $f(x)$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* $[0, 1]$.

b) *Biết* $2a + 3b + 6c = 0$, *chứng minh rằng* $f(x)$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* $[0, 1]$.

Điểm gián đoạn của hàm số

Điểm liên tục

$$p = [\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ hữu hạn}]$$
$$\wedge [\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)]$$

Điểm gián đoạn

Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói nó gián đoạn tại x_0.

Điểm gián đoạn của hàm số

Điểm liên tục

$$p = [\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ hữu hạn}]$$
$$\wedge [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)]$$

Điểm gián đoạn

Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói nó gián đoạn tại x_0.

$$\bar{p} = [\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$$
$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty] \vee [\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty]$$
$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$$
$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0).$$

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Giả sử x_0 là một điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$.

Phân loại điểm gián đoạn

$\bar{p} = [\nexists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)]$	**Loại II**
$\vee [\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty] \vee [\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty]$	**Loại II**
$\vee [\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)]$	**Loại I**
$\vee [\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0)$	**Bỏ được**

Nếu x_0 là một điểm gián đoạn loại I thì giá trị $\left| f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right) \right|$ gọi là bước nhảy của hàm số.

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

a) $y = \frac{1}{1-2^{\tan x}}$.   b) $y = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}}$.   c) $y = \frac{1}{1-2^{\frac{x-1}{x}}}$.

$$\bar{p} = [\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$$ **Loại II**

$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty] \vee [\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty]$$ **Loại II**

$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$$ **Loại I**

$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0)$$ **Bỏ được**

Chú ý: Tất cả các hàm số sơ cấp đều liên tục trên TXĐ của chúng.

Sự liên tục đều

Kí hiệu I là một trong các khoảng sau $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$.

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng I.

i) Ta nói $f(x)$ là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0), \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên I nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in I$.

Sự liên tục đều

Kí hiệu I là một trong các khoảng sau $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$.

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng I.

i) *Ta nói $f(x)$ là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, nghĩa là*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0), \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên I nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in I$.

ii) *Ta nói $f(x)$ liên tục đều trên I nếu*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall x, y \in I, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.)$$

i) Liên tục: $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$,

ii) Liên tục đều: $\delta = \delta(\epsilon)$ $\boxed{\textbf{LIÊN TỤC ĐỀU} \Rightarrow \textbf{ LIÊN TỤC}}$.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = x$

Sự liên tục đều

Định lý (Heine-Cantor)

Nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì nó liên tục đều trên đó.

Ví dụ

Xét sự liên tục (đều) của hàm số $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ trên $[-1, 1]$.

Bổ đề

i) *Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 thì với mọi dãy $\{x_n\} \subset I$,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

ii) *Nếu $f(x)$ liên tục đều trên I thì với mọi dãy $\{x_n\} \subset I$ và $\{y_n\} \subset I$,*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

Sự liên tục đều

Theo tiêu chuẩn kiểu dãy số này, muốn chỉ ra hàm số $f(x)$ không liên tục đều trên I, ta chỉ ra hai dãy số $\{x_n\} \subset I$ và $\{y_n\} \subset I$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ **NHƯNG** } \lim_{n\to+\infty}[f(x_n) - f(y_n)] \neq 0.$$

Ví dụ

Xét sự hội tụ (đều) của hàm số sau trên $(0,1)$

a) $f(x) = \frac{1}{x}$,

b) $g(x) = \ln x$,

c) $h(x) = \sin\frac{1}{x}$

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Đạo hàm

Định nghĩa

1) Đạo hàm

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2) Đạo hàm phải:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3) Đạo hàm trái:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61). Tính $f'(0)$, biết $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đạo hàm

Các tính chất

1) Mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía.

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow [\exists f'(x_0^+) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists f'(x_0^-) \text{ hữu hạn}] \wedge [f'(x_0^+) = f'(x_0^-)].$$

2) $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ liên tục tại x_0.

Các phép toán trên đạo hàm

1) $(u+v)' = u' + v'$,
2) $(u-v)' = u' - v'$,
3) $(uv)' = u'v + uv'$,
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Hãy chỉ ra một hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1$ nhưng không có đạo hàm tại các điểm này.

Đạo hàm của hàm hợp và hàm ngược

Đạo hàm của hàm hợp

$$[f(u(x))]' = f'_u.u'_x.$$

Ý tưởng chứng minh

i) $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

ii) $f[u(x_0 + \Delta x)] - f[u(x_0)] = f\left[u_0 + \underbrace{u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}_{\delta_y}\right] - f(u(x_0))$

Ví dụ, tính $\left(x^{\sin x}\right)', 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Đạo hàm của hàm hợp và hàm ngược

Đạo hàm của hàm hợp

$$[f(u(x))]' = f'_u.u'_x.$$

Ý tưởng chứng minh

i) $u(x_0+\Delta x) = u(x_0) + u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

ii) $f[u(x_0+\Delta x)] - f[u(x_0)] = f\left[u_0 + \underbrace{u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}_{\delta_y}\right] - f(u(x_0))$

Ví dụ, tính $\left(x^{\sin x}\right)', 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Đạo hàm của hàm ngược

i) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x và $f'(x) \neq 0$,

ii) hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược $x = \varphi(y)$

thì hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11) $(\text{arccot}\, x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11) $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$\Rightarrow$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f^{'}(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f^{'}(x_0)\Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = o(\Delta x) \\ \Rightarrow & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \\ \Rightarrow & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f'(x_0)\Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0. \end{aligned}$$

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U_\epsilon(x_0)$. Nếu có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, ở đó A chỉ phụ thuộc vào x_0 chứ không phụ thuộc vào Δx thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và

$$df = A\Delta x.$$

Vi phân

Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

i) Đối với hàm số một biến số, hàm số có đạo hàm tại x khi và chỉ khi nó khả vi tại x, và $df(x) = f'(x)\Delta x$.

ii) Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vì thế với biến số độc lập x ta có $dx = \Delta x$ và do đó,

$$dy = df(x) = f^{'}(x)dx.$$

Các phép toán trên vi phân

$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(u.v) = udv + vdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm $f'(x)$ nếu biết

a) $\frac{d}{dx}[f(2016x)] = x^2.$

b) $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2.$

Một cách tiếp cận khác của vi phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Ta gọi ánh xạ, kí hiệu là $d_{x_0}f$, xác định bởi

$$\begin{aligned} d_{x_0}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ h &\mapsto f'(x_0)h \end{aligned}$$

là vi phân của f tại x_0.

Vậy vi phân của f tại x_0 là một ánh xạ tuyến tính.

Nhận xét

i) Kí hiệu Id là ánh xạ đồng nhất, khi đó, $d_{x_0}(\mathrm{Id}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \mapsto h$.

ii) Một cách lạm dụng kí hiệu, ta kí hiệu x là ánh xạ đồng nhất $x := \mathrm{Id}$. Khi đó, $d_{x_0}x = \mathrm{Id}$, không phụ thuộc vào x_0 $\Rightarrow$ ta kí hiệu nó là dx.

iii) $d_{x_0}f = f'(x_0)dx$

Ý nghĩa & ứng dụng của vi phân

Tính bất biến của vi phân cấp một

Cho $y = f(x)$ là một hàm số khả vi.

i) Nếu x là một biến số độc lập thì ta có $dy = f'(x)dx$,

ii) Nếu x không phải là một biến số độc lập, chẳng hạn như $x = x(t)$ là một hàm số phụ thuộc vào t chẳng hạn, thì ta vẫn có

$$dy = f'(x)dx.$$

Do đó, vi phân cấp một có tính bất biến.

Chú ý: Vi phân cấp cao không có tính bất biến này.

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61): tính gần đúng $\sqrt[3]{7,97}$, $\sqrt[3]{8,03}$.

Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa

Nếu hàm số $y = f(x)$ *có đạo hàm thì* $y' = f'(x)$ *gọi là đạo hàm cấp một của* f.

i) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp một được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu là* $f''(x)$.

ii) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp* $n-1$ *được gọi là đạo hàm cấp* n, *kí hiệu là* $f^{(n)}(x)$.

Các phép toán

i) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$,

ii) $(u.v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ (công thức Leibniz).

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^{\alpha})^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$
3) $(\sin x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) $(\cos x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$
3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
5) $(a^x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$
3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
5) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$
6) $(\ln x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$
3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
5) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$
6) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tính các đạo hàm cấp cao

a) $[(x^2+x)e^x]^{(20)}$.
b) $(x^2\sin 2x)^{(50)}$.
c) $(x^2\cos 2x)^{(60)}$.
d) $\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{(60)}$
e) $y^{(10)}(0)$ *với* $y(x) = e^{x^2}$,
f) $y^{(9)}(0)$ *với* $y(x) = \arctan x$.

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad \text{(công thức Leibniz).}$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

i) Vi phân của vi phân cấp một $d(d(f(x)))$ được gọi là vi phân cấp hai của hàm số $f(x)$, và được kí hiệu là $d^2f(x)$.

ii) Tương tự như vậy, $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x))$.

Công thức tính

i) Nếu x là biến số độc lập thì $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

ii) Chú ý rằng vi phân cấp cao không có tính bất biến, chẳng hạn như, nếu x phụ thuộc vào t thì

$$df(x) = f'(x)dx, \quad d^2f(x) = f'(x)d^2x + f''(x)dx^2 \neq f''(x)dx^2.$$

Ví dụ (Học kì 20163)

Cho $y = (2x+1)\sin x$. Tính $d^{(10)}y(0)$.

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Fermat

Giả thiết hàm số $f(x)$

i) xác định trên (a, b),

ii) đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$,

iii) tồn tại $f'(x_0)$.

Khi đó, $f'(x_0) = 0$.

Nếu $f(x)$ đạt CĐ tại x_0 thì

i) $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$

ii) $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Điều này chỉ xảy ra khi $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$.

Ví dụ

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = |x|^3$.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Rolle

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

iii) thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b)$,

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.

Ví dụ (Học kì 20163)

Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x^2-2)(x^2-3)$. Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực? Giải thích.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Lagrange

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

i) Ý tưởng chứng minh: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

ii) Các giả thiết của Định lý đều cần thiết, không thể bỏ qua giả thiết nào.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Chứng minh rằng $\frac{a-b}{1+a^2} < \operatorname{arccot} b - \operatorname{arccot} a < \frac{a-b}{1+b^2}$ *với mọi* $0 < a < b$.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Cauchy

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

iii) $g'(x)$ không triệt tiêu trong khoảng mở (a, b). Khi đó,

$$\exists c \in (a, b) \text{ sao cho } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ý tưởng chứng minh: Xét $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$

i) Có đạo hàm đến cấp n trong khoảng đóng liên tục tại x_0,

ii) Có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong lân cận $U_\epsilon(x_0)$,

thì $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ở đó c là một số thực nằm giữa x và x_0 nào đó.

Nếu $x_0 = 0$ thì công thức sau còn được gọi là công thức Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2) $\frac{1}{1+x} =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5) $\sin x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
6) $\cos x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

7) $\ln(1+x) =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Ứng dụng

i) Tính gần đúng.
ii) Tính giới hạn.

Công thức Maclaurin

Tính gần đúng

Tính gần đúng số e với sai số nhỏ hơn $0,0001$.

Tính giới hạn

Tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - \ln(1+x)}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{x^2}$.

Quy tắc L'Hospital

Định lý (Quy tắc L'Hospital)

Giả thiết

i) *Các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi trong một lân cận nào đó của điểm a (có thể trừ tại a), $g'(x) \neq 0$ trong lân cận ấy,*

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0.$

Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *thì* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

Ý tưởng chứng minh:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

c nằm giữa x và x_0.

Công thức L'Hospital

Chú ý

Công thức L'Hospital vẫn đúng nếu

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Công thức L'Hospital chỉ là điều kiện cần.
Ví dụ (Cuối kì, 20163). Tính

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}.$$

Ứng dụng của công thức L'Hospital

1) Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$, — Ví dụ, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.
2) Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, — Ví dụ, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.
3) Khử dạng vô định $0\times\infty$, — Ví dụ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.
4) Khử dạng vô định $\infty-\infty$, — Ví dụ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.
5) Các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = \infty \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 0 \vee \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0^0 \\ \infty^0 \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty =$$

Về các dạng vô định $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^{\infty} = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} = \infty, \quad \infty \times \infty =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty$$

Ví dụ

Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Phạm vi áp dụng của quy tắc L'Hospital?

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^4}.$$

Cách 1: Maclaurin

$$\begin{aligned}
\text{TS} &= x - \sin x \\
&= \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\sim \frac{x^3}{6}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4} = \infty.$$

Cách 2: L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{12x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{24x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{24} = 0.
\end{aligned}$$

Thay tương đương khi có hiệu hai VCB?

Ví dụ (Giữa kì K61)

Tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}.$$

Cách 1: Thay tương đương

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1) - \sin x + (1 - \cos x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Cách 2: L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2}$$
$$= 1.$$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim \; -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim \; -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim \ - \frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim \ - \frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x)-\beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x-\sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x-\tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x-\arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x-\arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x-\tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x-\arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x-\arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x-\arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1 + x) \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1 + x) \sim \frac{x^2}{2}$

m) $(1 - \cos x) - \frac{x^2}{2} \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

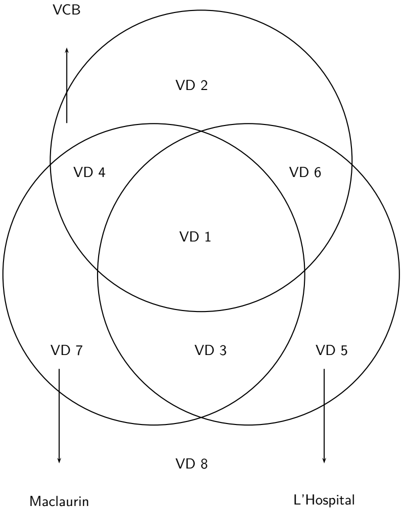
j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$

m) $(1 - \cos x) - \frac{x^2}{2} \sim -\frac{x^4}{24}$

Ba phương pháp mới để tính giới hạn



1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x+x^2-\sin x}{x+\sin^2 x+\arcsin^3 x+\arctan^4 x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x+x^3}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x-x^3}{\arcsin(\arctan^3 x)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$, hoặc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x}{x+\arcsin^3 x}$

7) Tìm a, b : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax^2+b\ln(\cos x)}{x^4} = 1.$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

Comparison

Học phổ thông:

i) Ít học định nghĩa

ii) Học theo dạng bài

Học đại học:

i) Nắm chắc định nghĩa,

a) (Giữa kì K61). Tính $f'(0)$, biết

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

b) (Giữa kì K59) Cho $f(x)$ khả vi tại 1 và $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(1+7x)-f(1+2x)}{x} = 2$.
Tính $f'(1)$.

ii) GV cung cấp công cụ, SV lựa chọn cách làm

a) (Giữa kì K61) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$,

b) (Học kì 20163) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+\sin x}{x+1}$.

Về các VCL tiêu biểu

Ba VCL tiêu biểu (khi $x \to +\infty$), đó là

1) Các hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1, ví dụ a^x $(a > 1)$,
2) Các hàm số đa thức, các hàm số là lũy thừa của x, chẳng hạn x^n, x^α, $(\alpha > 0)$,
3) Các hàm số logarit với cơ số lớn hơn 1, như $\ln x, \log_a x$ $(a > 1)$.

Ba hàm số này tiến ra vô cùng khi $x \to +\infty$ với tốc độ khác nhau.

$$\boxed{\textbf{Hàm số mũ}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số logarit}}$$

Cụ thể,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x^{2016} + e^x}{\log_2 x + x^{2017} + 2e^x}.$$

Một số bài tập bổ sung

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}}-\dfrac{e^x}{x}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x - x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $a\neq 0, b\neq 0$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, $a,b>0$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x(\tan x-\sinh x)}$

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là

i) đơn điệu tăng nếu

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định nghĩa

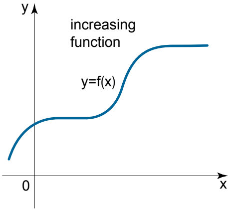
Hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là

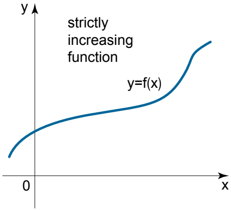
i) *đơn điệu tăng nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$,*

ii) *đơn điệu giảm nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$,*

iii) *tăng ngặt nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$,*

iv) *giảm ngặt nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*





Ví dụ, chứng minh hàm số $f(x) = x^3$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ bằng định nghĩa.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.Khi xét tính đơn điệu của hàm số, người ta chỉ xét tại những khoảng (đoạn) mà hàm số đó được xác định.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.Khi xét tính đơn điệu của hàm số, người ta chỉ xét tại những khoảng (đoạn) mà hàm số đó được xác định.*

iii) *Hàm số đơn điệu chỉ có thể có các điểm gián đoạn loại I.*

iv) *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b) thì hàm ngược của nó đơn điệu giảm trên $(f(a), f(b))$.*

Hàm lồi

Định nghĩa

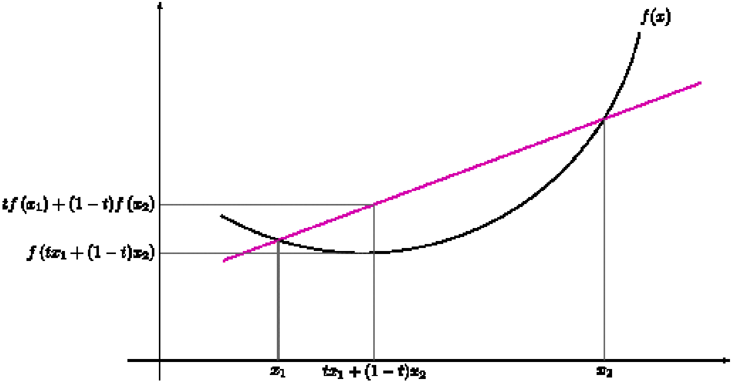
Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu

Hàm lồi

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ và } \forall t \in [0,1].$$



Hàm số lồi

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I và có đạo hàm đến cấp hai trong I. Khi đó, nếu $f''(x) > 0$ trong I thì f là hàm số lồi trong I.

Ý tưởng chứng minh: Đặt $c = tx_1 + (1-t)x_2$, ta có

$$
\begin{aligned}
& tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(c) \\
=& (1-t)[f(x_2) - f(c)] - t[f(c) - f(x_1)] \\
=& (1-t)(x_2 - c)f'(c_1) - t(c - x_1)f'(c_2) \\
=& t(1-t)(x_2 - x_1)[f'(c_1) - f'(c_2)] \\
=& t(1-t)(x_2 - x_1)f''(c_3), \quad x_1 < c_3 < x_2
\end{aligned}
$$

Chú ý

Hàm số f được gọi là lõm trên khoảng I nếu $-f$ là hàm số lồi trên khoảng đó.

BĐT hàm lồi

Định lý (Bất đẳng thức Jensen)

Cho f là hàm lồi trên (a,b), $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Khi đó $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Hệ quả (BĐT Cauchy (BĐT trung bình))

Áp dụng BĐT Jensen với $f(x) = -\ln x$ ta được:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0.$$

Ví dụ

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ *liên tục trên* (a, b), *ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu*

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b), ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a, b)$ sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

i) *Nếu $f(x) - f(x_0) > 0$ thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại x_0.*

ii) *Nếu $f(x) - f(x_0) < 0$ thì ta nói hàm số đạt cực đại tại x_0.*

Định lý (Định lý Fermat)

Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b), nếu hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý (Điều kiện đủ của cực trị)

Giả thiết hàm số $f(x)$ khả vi trong khoảng $(a, b) \setminus \{x_0\}$, ở đó $x_0 \in (a, b)$ là một điểm tới hạn (đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định).

i) *Nếu khi đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

ii) *Nếu khi đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các cực trị của hàm số sau

a) $y = \frac{2x}{x^2+2}$. b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý

Giả thiết hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục ở lân cận của điểm x_0 và $f'(x_0) = 0$. Khi đó

i) *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*

ii) *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các cực trị của hàm số $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ trong khoảng $(0, 2\pi)$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý

Giả thiết hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận của điểm x_0 và

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó

i) *Nếu n chẵn thì $f(x_0)$ đạt cực trị tại x_0 và đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$, đạt cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

ii) *Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.*

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $y = \sin^3 x, \quad y = \sin^4 x$.

Chương 3: Phép tính vi phân và tích phân

Ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Phân hoạch

i) Ta gọi $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ sao cho $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ là một phân hoạch của $[a, b]$.

ii) Kí hiệu S là tập các phân hoạch của $[a, b]$.

iii) Với mỗi $s = (a_i)_{0\leq i\leq n} \in S$, kí hiệu $p(s) = \max_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i)$.

Ánh xạ bậc thang

i) Ánh xạ $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là bậc thang nếu $\exists s = (a_i)_{0\leq i\leq n} \in S$ và $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ sao cho $e(x) = \lambda_i, \forall x \in (a_i, a_{i+1})$.

ii) Cho $e \in E(a, b)$. Ta nói $s' = (b_0, \ldots, b_n)$ là tương thích với e nếu $e\big|_{(b_i, b_{i+1})}$ là ánh xạ hằng.

Kí hiệu $E(a, b)$ là tập hợp các ánh xạ bậc thang trên $[a, b]$.

Đại số các ánh xạ bậc thang

Tích phân của ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Cho $e \in E(a,b)$ và $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in S$ tương thích với e. Số thực $\int\limits_a^b e := \sum\limits_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i$ không phụ thuộc vào phân hoạch s tương thích với e.

Các tính chất

i) Ánh xạ $E(a,b) \to \mathbb{R}, e \mapsto \int\limits_a^b e$ là ánh xạ tuyến tính.

ii) $\forall e_1, e_2 \in E(a,b), (e_1 \leq e_2 \Rightarrow \int\limits_a^b e_1 \leq \int\limits_a^b e_2)$.

iii) $\forall e \in E(a,b), (|\int\limits_a^b e| \leq \int\limits_a^b |e|)$.

iv) $\int\limits_a^c e = \int\limits_a^b e + \int\limits_b^c e$.

Ánh xạ liên tục từng khúc

Liên tục từng khúc

Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[a, b]$ nếu

i) $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$,

ii) $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng (a_i, a_{i+1}),

iii) tồn tại $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$ hữu hạn.

Kí hiệu $\mathcal{CM}$ là tập các ánh xạ liên tục từng khúc trên $[a, b]$.

Mệnh đề

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc. Tồn tại $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang sao cho $f = g + e$.

Xấp xỉ một ánh xạ liên tục từng khúc

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và $\epsilon > 0$. Tồn tại các ánh xạ bậc thang $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sao cho $\varphi \leq f \leq \psi$ và $\psi - \varphi \leq \epsilon$.

Tích phân trên một đoạn ánh xạ liên tục từng khúc

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc. Đặt

$$A = \{\varphi \in E(a,b), \varphi \le f\}, \quad B = \{\psi \in E(a,b), f \le \psi\} \subset E(a,b).$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \int_a^b \varphi | \varphi \in A \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \int_a^b \psi | \psi \in B \right\}.$$

Theo Định lý xấp xỉ, lấy $\epsilon = 1$ chẳng hạn, tồn tại φ_0, ψ_0 sao cho $\varphi_0 \le f \le \psi_0$ và $\psi_0 - \varphi_0 < 1$. Như vậy,

i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$, và bị chặn trên bởi $\int_a^b \psi_0 \Rightarrow \exists \mu_1 = \sup \mathcal{A}$,

ii) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, và bị chặn dưới bởi $\int_a^b \varphi_0 \Rightarrow \exists \mu_2 = \inf \mathcal{B}$.

Định nghĩa

$\int_a^b f := \mu_1 = \mu_2.$

Các tính chất của tích phân hàm liên tục từng khúc

Tính chất tuyến tính

Ánh xạ $E(a, b) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int\limits_a^b f$ là một ánh xạ tuyến tính.

Các tính chất liên quan đến thứ tự

i) Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc. Nếu $f \geq 0$ thì $\int\limits_a^b f \geq 0$.

ii) Hệ quả 1: nếu $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc thì
$f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

iii) Hệ quả 2: Đặt $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ thì

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M(b-a).$$