

Lý thuyết trường

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 6: Lý thuyết trường

1 Trường vô hướng

2 Trường vectơ

Chương 6: Lý thuyết trường

1 Trường vô hướng

2 Trường véctơ

Trường vô hướng

Định nghĩa

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Một hàm số

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto u = u(x, y, z) \end{aligned}$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω .

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

• $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M)$.

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M).$
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M).$
- $\vec{v} = \vec{k} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng \vec{v} tại M , kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M).$
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M).$
- $\vec{v} = \vec{k} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{k}}(M) = \frac{\partial f}{\partial z}(M).$

Đạo hàm theo hướng vs Đạo hàm riêng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \cdot c.$$

Đạo hàm theo hướng vs Đạo hàm riêng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ đơn vị.

Mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \cdot c.$$

Nếu \vec{l} không phải là một vectơ đơn vị thì $\vec{v} = \frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$ và $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$.

Ví dụ

Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l} = (1, 1, 1)$ của hàm số $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ tại điểm $M(1, 1, 1)$.

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Ví dụ

Tính $\overrightarrow{\text{grad}} u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Ví dụ

Tính $\overrightarrow{\text{grad}} u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Đạo hàm theo hướng vs Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot \vec{l}}{\|\vec{l}\|}$$

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng \vec{l} .

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng \vec{l} .

- $\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) \right|$ đạt GTLN bằng $|\overrightarrow{\text{grad} f}|$ nếu $\vec{l} // \overrightarrow{\text{grad} f}$.

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng \vec{l} .

- $\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) \right|$ đạt GTLN bằng $|\overrightarrow{\text{grad} f}|$ nếu $\vec{l} // \overrightarrow{\text{grad} f}$.
- Hàm số f tăng nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\text{grad} f}$.

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng \vec{l} .

- $\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) \right|$ đạt GTLN bằng $|\overrightarrow{\text{grad} f}|$ nếu $\vec{l} // \overrightarrow{\text{grad} f}$.
- Hàm số f tăng nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\text{grad} f}$.
- Hàm số f giảm nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\text{grad} f}$.

Ví dụ

Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x \sin z - y \cos z$ từ gốc toạ độ $O(0, 0, 0)$ là lớn nhất?

Chương 6: Lý thuyết trường

1 Trường vô hướng

2 Trường vectơ

Trường vectơ

Cho Ω là một miền mở trong \mathbb{R}^3 . Một hàm vectơ

$$\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

được gọi là một trường vectơ trên Ω .

Trường vectơ

Cho Ω là một miền mở trong \mathbb{R}^3 . Một hàm vectơ

$$\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

được gọi là một trường vectơ trên Ω .

Thông lượng

Cho S là một mặt định hướng và \vec{F} là một trường vectơ. Đại lượng

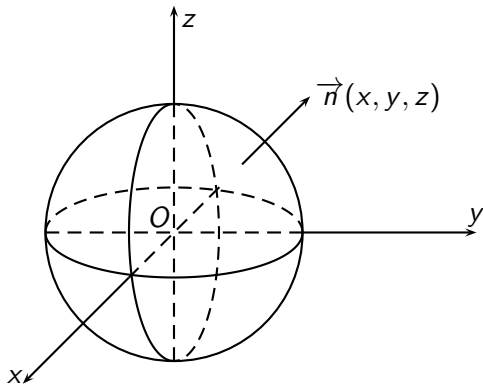
$$\phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \quad (1)$$

được gọi là thông lượng của \vec{F} đi qua mặt cong S .

Thông lượng

Ví dụ

Cho $\vec{F} = xz^2\vec{i} + 2\vec{j} + zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của \vec{F} qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.



Trường vectơ

Dive - Trường ống

- a. $\text{div } \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$
- b. Trường vectơ \vec{F} xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu $\text{div } \vec{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

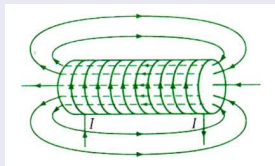
Trường vectơ

Dive - Trường ống

- a. $\text{div } \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$
- b. Trường vectơ \vec{F} xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu $\text{div } \vec{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Tính chất của trường ống

Nếu \vec{F} là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.



Trường vectơ

Hoàn lưu

Cho \mathcal{C} là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian.
Đại lượng

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \quad (2)$$

được gọi là hoàn lưu (hay lưu số) của \vec{F} dọc theo đường cong \mathcal{C} .

Trường vectơ

Hoàn lưu

Cho \mathcal{C} là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian.
Đại lượng

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \quad (2)$$

được gọi là hoàn lưu (hay lưu số) của \vec{F} dọc theo đường cong \mathcal{C} .

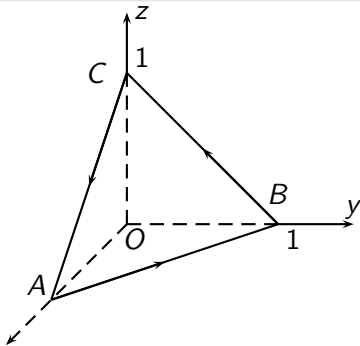
Ví dụ

Cho $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$ và L là tam giác ABC , $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ chiều dương của các trục tọa độ. Tính lưu số của \vec{F} dọc theo L .

Hoàn lưu (Lưu số)

Ví dụ

Cho $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$ và L là tam giác ABC , $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ chiều dương của các trục tọa độ. Tính lưu số của \vec{F} dọc theo L .



Trường thế - hàm thế vị

Véc tơ xoáy

Véc tơ

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} := \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

được gọi là véc tơ xoáy (hay véc tơ rota) của trường véc tơ \vec{F} .

Trường thế - hàm thế vị

Véc tơ xoáy

Véc tơ

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} := \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

được gọi là véc tơ xoáy (hay véc tơ rota) của trường vectơ \vec{F} .

Trường thế

Trường vectơ \vec{F} được gọi là trường thế (trên Ω) nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{\text{grad}} u = \vec{F}$ (trên Ω). Khi đó u được gọi là hàm thế vị.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}.$

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.
2. $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L .

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.
2. $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L .
3. $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B .

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.
2. $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L .
3. $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B .
4. \vec{F} là một trường thế, nghĩa là có hàm số $u(x, y, z)$ sao cho $\vec{\text{grad}} u = \vec{F}$.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.
2. $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L .
3. $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B .
4. \vec{F} là một trường thế, nghĩa là có hàm số $u(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{\text{grad}} u = \vec{F}$.

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C.$$

Trường thế - hàm thế vị

Hàm thế vị

Nếu \vec{F} là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C. \quad (3)$$

Ví dụ

Trong các trường sau, trường nào là trường thế? Nếu nó là trường thế, hãy tìm hàm thế vị của nó.

- a. $\vec{a} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}.$
- b. $\vec{b} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$
- c. $\vec{c} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}.$