

Chương I

KHÁI QUÁT CHUNG VỀ ÁNH XẠ

Trong chương này chúng tôi giới thiệu sơ lược về các tính chất của ánh xạ để sử dụng cho các chương sau.

1.1. Các định nghĩa

1.1.1. Định nghĩa 1 - Ánh xạ

Cho 2 tập X, Y . Một ánh xạ từ tập X tới tập Y là một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$. Khi đó X gọi là tập nguồn, Y gọi là tập đích; y gọi là ảnh của x , x gọi là tạo ảnh (nghịch ảnh) của y qua ánh xạ f .

$$\begin{aligned} \text{Ký hiệu: } & f: X \rightarrow Y \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ví dụ

Cho $X = \{a, b, c, d\}$; $Y = \{1, 4\}$. Quy tắc $f: a \mapsto 1; b, c, d \mapsto 4$ là một ánh xạ.

1.1.2. Định nghĩa 2 - Ảnh và nghịch ảnh của một tập con

Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x), \quad A \subset X, B \subset Y. \text{ Khi đó} \end{aligned}$$

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ gọi là ảnh của A qua ánh xạ f .

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của B qua ánh xạ f .

Ví dụ

Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto y = x^2 + 1$ là một ánh xạ. Cho $A = [-1, 2]$, ta có $f(A) = [1, 5]$.

Cho $B = [1, 10]$, ta có $f^{-1}(B) = [-3, 3]$.

1.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

1.2.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (hay $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$, tức là $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu nó là đơn ánh và toàn ánh. Tức là $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$

1.2.2. Ví dụ

Ví dụ 1

Xét ánh xạ:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = x^3$$

Ánh xạ f là đơn ánh vì $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

Ánh xạ f là toàn ánh vì $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \sqrt[3]{y}$ sao cho $f(x) = y$

Do đó ánh xạ f là song ánh.

Ví dụ 2

Xét ánh xạ:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$$

$$x \mapsto y = g(x) = x^2 - 1$$

Ánh xạ g không phải là đơn ánh vì $g(-1) = g(1) = 0$.

Ánh xạ g là toàn ánh vì $\forall y \in [-1, +\infty), \exists x = \sqrt{y+1}$ sao cho $g(x) = y$

Do đó ánh xạ g không phải là song ánh.

1.3. Ánh xạ ngược

Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một song ánh. Khi đó, mỗi phần tử $x \in X$ có một ảnh xác định $f(x) \in Y$. Ngược lại, mỗi phần tử $y \in Y$ có một và chỉ một nghịch ảnh $x \in X$. Vì vậy, song ánh f từ X lên Y là một phép tương ứng 1-1 hai chiều giữa X và Y . Ánh xạ biến $y \in Y$ thành $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ gọi là ánh xạ ngược của song ánh f , ký hiệu là f^{-1} . Vậy f^{-1} là một ánh xạ từ Y lên X , nó cũng là một song ánh.

Ví dụ

Ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x) = x^3 + 1$ là một song ánh. Nó có ánh xạ ngược f^{-1} , đó là: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $y \mapsto \sqrt[3]{y-1}$

1.4. Tích (hợp) của hai ánh xạ

Cho ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y; g: Y \rightarrow Z$. Như vậy, ứng với mỗi phần tử $x \in X$, có một và chỉ một phần tử $y = f(x) \in Y$ và ứng với mỗi phần tử $y \in Y$, có một và chỉ một phần tử $z = g(y) \in Z$. Như vậy, ứng với mỗi phần tử $x \in X$, qua trung gian y , có một và chỉ một phần tử $z = g(y) = g[f(x)] \in Z$. Ánh xạ từ X tới Z xác định bởi: $x \in X \mapsto z = g[f(x)] \in Z$.

Gọi là tích (hay hợp) của ánh xạ f và g , kí hiệu là $g \circ f$.

Vậy $g \circ f: X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Ví dụ

Cho 2 ánh xạ:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin x;$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty], x \mapsto e^x.$$

Ta có:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = e^{\sin x};$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sin e^x.$$

1.5. Bài tập

Chứng minh rằng

- 1) Tích của 2 đơn ánh là 1 đơn ánh
- 2) Tích của 2 toàn ánh là 1 toàn ánh
- 3) Tích của 2 song ánh là 1 song ánh

Chương 2

MA TRẬN-ĐỊNH THỨC-HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Phần đầu chương này được dành để trình bày các khái niệm, các dạng ma trận cơ bản, cũng như các phép toán và những tính chất cơ bản thường gặp về ma trận. Các khái niệm, tính chất, cách tính về định thức, ma trận nghịch đảo, hạng ma trận cũng được đưa ra. Cách giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát được trình bày ở cuối chương.

2.1. Ma trận

2.1.1. Các định nghĩa

1. Ma trận cỡ $m \times n$: là một bảng gồm $m \times n$ số được sắp xếp thành m hàng và n cột dưới dạng sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

với i là chỉ số hàng, j là chỉ số cột; a_{ij} là phần tử ở hàng i và cột j

2. Ma trận cấp n : là ma trận có số hàng và số cột bằng nhau ($m = n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Các phần tử $a_{ii} \forall i = \overline{1, n}$ nằm trên đường chéo chính của A

Các phần tử $a_{ij} \forall i + j = n + 1$ nằm trên đường chéo phụ của A

3. Ma trận hàng: là ma trận chỉ có một hàng

Ví dụ

$$A = (2 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)_{1 \times 6}$$

4. Ma trận cột: là ma trận chỉ có 1 cột.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

2.1.2. Các dạng đặc biệt của ma trận

1. Ma trận không: là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng 0.

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}, \dots$$

2. Ma trận chéo: là ma trận vuông có các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \text{ ma trận không cấp } n \text{ là ma trận chéo đặc biệt.}$$

3. Ma trận đơn vị: là ma trận chéo mà tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

4. Ma trận tam giác trên (dưới): là tam giác có $a_{ij} = 0 \forall i > (<) j$

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

5. Ma trận chuyển vị của ma trận A: ký hiệu là A^T , là ma trận suy từ A bằng cách chuyển các hàng thành các cột tương ứng.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

6. Ma trận bậc thang: là ma trận thỏa mãn 2 điều sau

* Các hàng không (có các phần tử đều bằng 0) nằm phía dưới các hàng khác không (có ít nhất 1 phần tử khác 0).

* Phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới nằm bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Chú ý

* Ma trận chéo là ma trận bậc thang

* Hai ma trận cùng cỡ hay cùng cấp được gọi là bằng nhau nếu các phần tử tương ứng đều bằng nhau

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

2.1.3. Các phép tính trên ma trận

1. Cộng hai ma trận

a. Định nghĩa

Cho 2 ma trận

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}.$$

Tổng (hiệu) của A và B là một ma trận, ký hiệu $A \pm B$, có mỗi số hạng bằng tổng (hiệu) của 2 số hạng tương ứng của 2 ma trận thành phần.

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

b. Tính chất

* $A + B = B + A$ (Tính giao hoán)

* $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Tính kết hợp)

* $\exists O: A + O = O + A = A \quad \forall A$ (O : Ma trận không)

* $\forall A, \exists -A: A + (-A) = (-A) + A = O$ (-A: Ma trận đối của A)

2. Nhân 1 số với 1 ma trận

a. Định nghĩa

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và 1 số k . Tích của số k và ma trận A là một ma trận, ký hiệu kA , có mỗi số hạng bằng tích của số k với số hạng tương ứng của ma trận A .

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

b. Tính chất

$$* (-1)A = -A \quad \forall A$$

$$* k(A + B) = kA + kB \quad \forall k, \forall A, B$$

$$* (k + h)A = kA + hA \quad \forall k, h, \forall A$$

$$* k(hA) = (kh)A \quad \forall k, h, \forall A$$

3. Nhân ma trận với ma trận

a. Định nghĩa

Cho 2 ma trận $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ và $B = [b_{kj}]_{p \times n}$. Tích của 2 ma trận A và B là một ma trận C , ký hiệu $C = AB$, có phần tử $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -3 & 15 \end{bmatrix}$$

b. Tính chất

* AB chỉ được khi số cột của A bằng số hàng của B

* Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

* $(AB)C = A(BC)$ (Tính kết hợp)

* $(A + B)C = AC + BC$

* $C(A+B) = CA + CB$ (Tính phân bố của phép nhân đối với phép cộng)

* $k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad \forall k \in R$

4. Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận

* Nhân các phần tử của hàng (cột) r với một số λ khác 0

$$\lambda L_r \rightarrow L_r \quad (\text{hay } \lambda C_r \rightarrow C_r)$$

* Đổi chỗ hai hàng (cột) r và s

$$L_r \leftrightarrow L_s \text{ (hay } C_r \leftrightarrow C_s)$$

* Cộng λ lần hàng (cột) r vào hàng (cột) s .

$$\lambda L_r + L_s \rightarrow L_s \text{ (hay } \lambda C_r + C_s \rightarrow C_s \text{)}$$

2.2. Định thức

2.2.1. Phép thế và hoán vị của 1 tập hữu hạn

1. Định nghĩa

Giả sử tập hữu hạn $X \neq \emptyset$.

Một song ánh $\sigma : X \rightarrow X$ được gọi là một phép thế của tập X .

Xét X có n phần tử: $X = \{1, 2, 3, \dots, n\} = X_n$

Biểu diễn của phép thế σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Ký hiệu S_n là tập hợp các phép thế của X_n

Ví dụ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \text{ là phép thế đồng nhất của } S_n.$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ là phép thế của } S_3$$

Chú ý

$(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ là 1 hoán vị của X_n

Mỗi phép thế gây ra một hoán vị và ngược lại. Do đó S_n có $n!$ phần tử.

2. Chuyển trí

a. Định nghĩa

Phép thế σ của S_n được gọi là một chuyển trí nếu

$$\sigma(i) = j$$

$$\sigma(j) = i$$

$$\sigma(k) = k, k \neq i, j$$

Chuyển trí này còn được ký hiệu là: (i, j)

b. Ví dụ

$$\text{Với } X_5, \quad (2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dấu của phép thế

a. Nghịch thế

Giả sử σ là phép thế của X_n . Nếu với $i, j \in X$, $i < j$ mà $\sigma(i) > \sigma(j)$ thì cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ được gọi là 1 nghịch thế gây bởi σ (hay là của σ)

b. Ví dụ

Hoán vị $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ có 5 nghịch thế: $(4,2), (4,3), (4,1), (2,1), (3,1)$

Bài tập

Giả sử $\sigma \in S_n$. Chứng minh rằng: $\prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} = 1$ (hay -1) tùy theo số nghịch thế là số chẵn (hay số lẻ) trong đó $\{i, j\}$ chạy khắp tập hợp các tập con gồm 2 phần tử của X_n .

c. Định nghĩa dấu của phép thế

Dấu của phép thế σ , ký hiệu $\text{sgn } \sigma$, được tính theo công thức: $\text{sgn } \sigma = \prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$

d. Phép thế chẵn, phép thế lẻ

Phép thế chẵn là phép thế có dấu bằng 1 (nghĩa là gây ra 1 số chẵn nghịch thế).

Phép thế lẻ là phép thế có dấu bằng -1 (nghĩa là gây ra 1 số lẻ nghịch thế)

e. Mệnh đề

* Mọi phép chuyển trí đều là phép thế lẻ.

* Dấu của tích 2 phép thế của X_n bằng tích các dấu của hai phép thế đó.

Chứng minh:

Giả sử $\sigma = (i, j)$. Xét 2 trường hợp

* $j = i + 1$ Khi đó

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix}$ chỉ có 1 nghịch thế $(i+1, i)$ nên là phép thế lẻ.

* $j - i > 1$: Khi đó

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$

σ gây ra các nghịch thế sau:

$(j, i+1), (j, i+2), \dots, (j, j-1), (j, i)$ có $j-1-i-1+1+1 = j-i$ nghịch thế

$(i+1, i), (i+2, i), \dots, (j-1, i)$ có $j-1-(i+1)+1 = j-i+1$ nghịch thế

Tổng cộng σ có $2(j-i) + 1$ nghịch thế nên là phép thế lẻ.

a) Giả sử σ và τ là 2 phần tử thuộc S_n .

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) =$$

$$\begin{aligned} \prod_{(i,j)} \frac{i-j}{(\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)} &= \prod_{(i,j)} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \times \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)} = \\ &= \prod_{(i,j)} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \times \prod_{(i,j) \circ (\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)} = \prod_{(i,j)} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \times \\ &\times \prod_{(\sigma(i), \sigma(j))} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)} = \text{sgn } \sigma \times \text{sgn } \tau \end{aligned}$$

Bài tập

Cho các hoán vị của S_4 là: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Tìm: $\sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_2 \circ \sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$

2.2.2. Định nghĩa định thức

1. Định nghĩa

a. Định thức cấp n

Cho A là ma trận cấp n, định thức của A, ký hiệu $\det A$, là tổng có dạng sau:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Tổng này gồm $n!$ số hạng, mỗi số hạng là tích của n phần tử của ma trận A mà trong đó không có 2 phần tử nào nằm trên cùng 1 hàng hay 1 cột. Do số phép thế chẵn và lẻ của S_n bằng nhau nên $\det A$ có $n!/2$ số hạng mang dấu cộng (+) và $n!/2$ số hạng mang dấu trừ (-).

b. Minh họa

Trường hợp $n = 2; 3$

$$n = 2; S_2 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{sgn } \sigma_1 a_{1\sigma_1(1)} a_{1\sigma_1(2)} + \text{sgn } \sigma_2 a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$S_3 = \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \}$$

Ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Quy tắc Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \# & & \\ & \# & \\ & & \# \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \# & & \\ & \# & \\ & & \# \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \# & & \\ & \# & \\ & & \# \end{vmatrix}$$

Hay một sơ đồ khác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

c. Ví dụ

$$1) \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 3(-8) = -4 + 28 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$$

2.2.3. Tính chất của định thức

1. Tính chất 1

Định thức của ma trận chuyển vị A^t bằng định thức của ma trận A , nghĩa là: $\det A^t = \det A$.

Chứng minh:

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_N} \text{sgn } \tau b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \dots b_{n\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_N} \text{sgn } \tau a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n}$$

Đặt

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ i } \forall i, j = \overline{1, n}; \tau(k) = i_k \text{ với } k = \overline{1, n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A^t &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \tau a_{i_1 \tau^{-1}(i_1)} a_{i_2 \tau^{-1}(i_2)} \dots a_{i_n \tau^{-1}(i_n)} = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \tau a_{1 \tau^{-1}(1)} a_{2 \tau^{-1}(2)} \dots a_{n \tau^{-1}(n)} = \\ &= \sum_{\tau^{-1} \in S_n} \text{sgn } \tau^{-1} a_{1 \tau^{-1}(1)} a_{2 \tau^{-1}(2)} \dots a_{n \tau^{-1}(n)} = \det A \end{aligned}$$

Chú ý

Từ tính chất 1 suy ra rằng hàng và cột có vai trò như nhau trong định thức nên tính chất nào đã đúng đối với hàng thì cũng đúng đối với cột.

Do đó, kể từ tính chất 2 trở đi ta chỉ phát biểu và chứng minh đối với hàng và phải hiểu rằng chúng vẫn còn đúng đối với cột.

2. Tính chất 2

Nếu mỗi phần tử của một hàng nào đó của định thức là tổng của 2 số hạng thì định thức đó là tổng của 2 định thức, trong đó mỗi định thức thành phần được suy từ định thức đã cho bằng cách thay mỗi phần tử của hàng nói trên bởi 1 trong 2 số hạng của nó, nghĩa là:

$$\begin{vmatrix} a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \end{vmatrix}.$$

Chứng minh:

Gọi D là định thức ở trái, D₁ và D₂ là 2 định thức ở vế phải.

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

3. Tính chất 3

Có thể đưa thừa số chung của các phần tử của 1 hàng ra khỏi dấu định thức, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}$$

Chứng minh:

Gọi D và D' lần lượt là các định thức ở vế trái và vế phải.

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots k a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = kD' \end{aligned}$$

4. Tính chất 4

Nếu định thức có 1 hàng nào đó là hàng không (các phần tử của hàng đều là 0) thì định thức đó bằng 0.

Chứng minh:

Suy từ định nghĩa hay từ tính chất 3.

5. Tính chất 5

Nếu đổi chỗ 2 hàng của 1 định thức thì định thức đổi dấu, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh:

Gọi D và D' lần lượt là các định thức ở vế phải và vế trái.

Đặt $b_{ij} = a_{ij}$ nếu $i \neq h, j \neq k$

$$b_{hj} = a_{kj}, b_{kj} = a_{hj} \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Ta có

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{h\sigma(h)} \dots b_{k\sigma(k)} \dots b_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{k\sigma(h)} \dots a_{h\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Gọi $\tau = (h, k)$

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{\sigma\tau \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \dots a_{k\sigma\tau(k)} \dots a_{h\sigma\tau(h)} \dots a_{n\sigma\tau(n)} \\ &= - \sum_{\sigma\tau \in S_n} \text{sgn } \sigma\tau a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \dots a_{h\sigma\tau(h)} \dots a_{k\sigma\tau(k)} \dots a_{n\sigma\tau(n)} \end{aligned}$$

Đặt $\nu = \sigma\tau$, khi đó

$$D' = - \sum_{v \in S_n} \text{sgn } v a_{1v(1)} a_{2v(2)} \dots a_{hv(h)} \dots a_{kv(k)} \dots a_{nv(n)} = -D$$

6. Tính chất 6

Nếu một định thức có 2 hàng giống nhau thì bằng 0.

Chứng minh:

Suy từ tính chất 5.

7. Tính chất 7

Nếu một định thức có 2 hàng tỷ lệ (Các phần tử tương ứng của chúng tỷ lệ với nhau) thì nó bằng 0.

Chứng minh:

Suy từ tính chất 3 và tính chất 4.

8. Tính chất 8

Nếu cộng λ lần hàng r vào hàng s thì định thức không thay đổi ($r \neq s$), nghĩa là

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda L_r + L_s & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & L_r & \cdot & \cdot \\ \cdot & L_s & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Chứng minh Suy từ tính chất 2 và tính chất 7

9. Tính chất 9

Nếu 1 hàng nào đó của định thức là tổ hợp tuyến tính của các hàng còn lại thì định thức đó bằng 0, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha L_r + \beta L_s + \gamma L_t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Chứng minh Suy từ tính chất 2 và tính chất 7.

Ví dụ

Không tính định thức, hãy chứng tỏ $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ chia hết cho 17.

Giải

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{100C_1 + 10C_2 + C_3 \rightarrow C_3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 17 \cdot 17$$

Bài tập

1) Không khai triển, hãy chứng minh rằng

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

2) Chứng minh

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

3) Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

4) Chứng minh

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

5) Không khai triển định thức, hãy chứng tỏ rằng

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (xy + yz + zx)(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix} = 4 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c-a}{2}$$

6) Không tính định thức, chứng tỏ rằng định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ chia hết cho 12

2.2.4. Khai triển định thức

1. Định thức con - Phụ đại số của 1 phần tử

a. Định nghĩa

Giả sử A là ma trận cấp n: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, nếu bỏ hàng i và cột j của ma trận A ta được ma trận M_{ij} được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử $a_{ij} \forall 1 \leq i, j \leq n$

$D_{ij} = \det M_{ij}$ được gọi là định thức con ứng với phần tử a_{ij}

$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ được gọi là phụ đại số ứng với phần tử a_{ij} .

b. Ví dụ

Cho ma trận $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.8 - 7.2 = -6, C_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = 6$$

2. Khai triển định thức theo các phần tử của 1 hàng (hay 1 cột)

a. Định lý

Cho $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, khi đó ta có

$$D = \det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

(Công thức khai triển theo hàng i)

$$\text{Hay } D = \det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

(Công thức khai triển theo cột j)

Chứng minh:

Bao gồm 3 bước sau:

Bước 1:

Xét trường hợp $i = n, a_{nj} = 0 \forall j \neq n, a_{nn} \neq 0$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdot & \cdot & a_{n-1n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{nn} = a_{nn} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} =
\end{aligned}$$

$$\text{Xem } \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in S_n \\ \sigma(n) = n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau \in S_{n-1} \\ \tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k = \overline{1, n-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \tau = \sigma|_{S_{n-1}} \Rightarrow \text{sgn } \sigma = \text{sgn } \tau$$

$$\begin{aligned}
D &= a_{nn} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \tau a_{1\tau(1)} \dots a_{n-1\tau(n-1)} \\
&= a_{nn} D_{nn} = a_{nn} (-1)^{n+n} D_{nn} = a_{nn} C_{nn}
\end{aligned}$$

Bước 2:

Xét trường hợp $a_{ik} = 0 \forall k \neq j, a_{ij} \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Bằng n-i lần đổi chỗ 2 hàng liên tiếp và n-j lần đổi chỗ 2 cột liên tiếp, ta đưa D về định thức:

$$D' = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Theo tính chất và bước 1, ta có:

$$\begin{aligned}
D' &= (-1)^{n-i+n-j} D = (-1)^{-(i+j)} D \Rightarrow D = (-1)^{i+j} D' = (-1)^{i+j} a'_{nn} C'_{nn} = (=1)^{i+j} a'_{nn} D'_{nn} = \\
&= (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij} = a_{ij} C_{ij}
\end{aligned}$$

Bước 3:

Trường hợp D bất kỳ.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & a_{ij} & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} & a_{11} & & a_{12} & \dots & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{i1} + 0 + \dots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + 0 + a_{ij} + 0 + \dots + 0 & 0 + \dots + 0 + a_{in} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ & a_{n1} & & a_{n2} & \dots & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 &= D_1 + D_2 + \dots + D_n
 \end{aligned}$$

(Các định thức D_i có dạng ở bước 2)

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{ij}C_{ij} + \dots + a_{in}C_{in} \quad (\text{đ.p.c.m})$$

b. Hệ quả

Định thức của ma trận tam giác bằng tích của các phần tử nằm trên đường chéo chính, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

Chứng minh

Khai triển theo cột một $n-1$ lần liên tiếp ta nhận được đ.p.c.m.

3. Ví dụ

Dùng các tính chất của định thức, chứng tỏ rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Giải

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \\
= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = \\
= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Chú ý

$$a_{i1}C_{i'1} + a_{i2}C_{i'2} + \dots + a_{in}C_{i'n} = \begin{cases} \det A & \text{khi } i = i' \\ 0 & \text{khi } i \neq i' \end{cases}$$

$$a_{1j}C_{1j'} + a_{2j}C_{2j'} + \dots + a_{nj}C_{nj'} = \begin{cases} \det A & \text{khi } j = j' \\ 0 & \text{khi } j \neq j' \end{cases}$$

2.3. Ma trận nghịch đảo

Trong các phần dưới đây chúng ta sử dụng hai kết quả (không chứng minh) sau:

1) $\det AB = \det A \cdot \det B$ (Định thức của ma trận tích bằng tích 2 định thức thành phần)

2) $A(BC) = (AB)C$ (Tính chất kết hợp của phép nhân ma trận)

trong đó, A, B, C là các ma trận cấp n.

2.3.1. Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo

1. Định nghĩa

Cho A là ma trận cấp n, nếu tồn tại ma trận B cấp n sao cho $AB = BA = I$ thì A được gọi là ma trận khả đảo và B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu $B = A^{-1}$

2. Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow A^{-1} = B$$

3. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Giả sử B và C đều là các ma trận nghịch đảo của A, ta cần chứng minh $B = C$.

Thật vậy, ta có

$$AB = I$$

$$\Rightarrow C(AB) = CI$$

$$\Rightarrow (CA)B = C$$

$$\Rightarrow IB = C$$

$$\Rightarrow B = C$$

4. Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo và biểu thức của nó

a. Định lý 1 (điều kiện cần)

Nếu ma trận A cấp n khả đảo thì $\det A \neq 0$.

Chứng minh:

$$A \text{ khả đảo} \Rightarrow \exists B \in M_n : AB = BA = I$$

$$\Rightarrow \det AB = \det I = 1 \Rightarrow \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$$

b. Định lý 2 (điều kiện đủ)

Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả đảo và $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$, trong đó $C = (c_{ij})_{n \times n}$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Chứng minh:

Ta có

$$\begin{aligned} A \left(\frac{1}{\det A} C^t \right) &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{pmatrix} = I \\ \left(\frac{1}{\det A} C^t \right) \cdot A &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{pmatrix} = I \\ \Rightarrow A \text{ khả đảo và } A^{-1} &= \frac{1}{\det A} C^t \end{aligned}$$

c. Ví dụ

Tìm A^{-1} biết $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Giải

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ khả đảo.}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16, C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13, C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5, C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Suy ra } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Phương pháp Gauss-Jordan

1. Các ma trận sơ cấp

* $F(r, \lambda)$ ($\lambda \neq 0$) suy từ ma trận đơn vị cùng cấp bằng cách thay $a_{rr} = \lambda$

$$F(r, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & \lambda & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r}$$

Nhân $F(r, \lambda)$ bên trái (phải) ma trận cùng cấp $A \Leftrightarrow$ Nhân hàng (cột) r của A với λ

* $P(r, s)$: ($r \neq s$) suy từ ma trận đơn vị cùng cấp bằng cách hoán vị 2 cột r và s

$$P(r, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r \qquad s$

Nhân $P(r, s)$ bên trái (phải) ma trận cùng cấp $A \Leftrightarrow$ Đổi chỗ 2 hàng (cột) r và s của ma trận A

* $Q(r, \lambda, s)$: ($r \neq s$) suy từ ma trận đơn vị cùng cấp bằng cách thay $a_{sr} = \lambda$

$$Q(r, \lambda, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \lambda & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{---} s \\ \\ \end{matrix}$$

\vdots
 r

Nhân $Q(r, \lambda, s)$ bên trái (phải) ma trận cùng cấp $A \Leftrightarrow$ Cộng λ lần hàng (cột) r vào hàng (cột) s

2. Bổ đề

Cho A là 1 ma trận cấp n .

- Nếu tồn tại ma trận B cấp n sao cho $BA=I$ thì A khả đảo và $B=A^{-1}$

- Nếu tồn tại ma trận C cấp n sao cho $CA=I$ thì A khả đảo và $C=A^{-1}$

Chứng minh:

Nếu tồn tại ma trận B cấp n sao cho $BA=I$ thì A khả đảo và $B=A^{-1}$

$$BA=I \Rightarrow \det BA = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A \text{ khả đảo.}$$

Hơn nữa, ta có

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$$

$$\Rightarrow B(AA^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow BI = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Chứng minh:

Nếu tồn tại ma trận C cấp n sao cho $CA=I$ thì A khả đảo và $C=A^{-1}$ hoàn toàn tương tự.

3. Phương pháp Gauss-Jordan

a. Nội dung

Tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận và ứng dụng bổ đề trên.

$$\text{Sơ đồ: } [A \ I] \xrightarrow{B.d.s.c} \dots \xrightarrow{B.d.s.c} [I \ A^{-1}]$$

b. Ví dụ

Phương pháp được trình bày thông qua ví dụ sau

$$\text{Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\begin{array}{c} A \quad I \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1+L_3 \rightarrow L_3}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ A_1=E_1 A \quad B_1=E_1 I=E_1 \\ E_1 = Q(1, -2, 2), Q(1, -1, 2) \end{array}$$

$$\xrightarrow{2L_2+L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccccc} A_2=E_2 A_1 & B_2=E_2 E_1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad E_2 = Q(2, 2, 3)$$

$$\xrightarrow{(-1)L_3} \left[\begin{array}{cccccc} A_3=E_3 A_2 & B_3=E_3 B_2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad E_3 = F(3, -1)$$

$$\xrightarrow{\substack{-3L_3+L_1 \rightarrow L_1 \\ 3L_3+L_2 \rightarrow L_2}} \left[\begin{array}{cccccc} A_4=E_4 A_3 & B_4=E_4 B_3 \\ 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad E_4 = Q(3, -3, 1), Q(3, 3, 2)$$

$$\xrightarrow{-2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \left[\begin{array}{cccccc} A_5=E_5 A_4=I & B_5=E_5 B_4 \\ 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad E_5 = Q(2, -2, 1)$$

$$I = E_5 A_4 = E_5 E_4 A_3 = E_5 E_4 E_3 A_2 = E_5 E_4 E_3 E_2 A_1 = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A \\ \Rightarrow \exists B = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 : BA = I$$

Do B là tích các ma trận sơ cấp nên B không suy biến

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Chú ý

Ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng để tìm A^{-1} .

Bài tập

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng 2 cách khác nhau

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4. Hạng của một ma trận

2.4.1. Định nghĩa

1. Định thức con cấp k của 1 ma trận

Giả sử $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, nếu trích từ A , k hàng và k cột nào đó thì ta được 1 ma trận con cấp k của A và định thức của nó được gọi là định thức con cấp k của A .

Chú ý

$$k \leq \min(m, n)$$

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Giải

Các định thức con

* cấp 1: $|1|, |2|, \dots, |9|$;

* cấp 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \dots$;

* cấp 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. Hạng của một ma trận

Hạng của 1 ma trận là cấp cao nhất của các định thức con khác không của ma trận đó.

Ký hiệu $\rho(A) = r$

Chú ý

$$\rho(A) = r \Leftrightarrow \begin{cases} \exists D_r \neq 0 \\ \forall D_{r+1} = D_{r+2} = \dots = 0 \end{cases}$$

3. Ví dụ

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0, \quad D_3 = \det A = 0$$

D_3 là định thức con cấp 3 duy nhất.

Vậy $\rho(A) = 2$

4. Nhận xét

Nếu dùng định nghĩa tìm hạng ma trận, nói chung ta phải liệt kê một số khá lớn các định thức con của nó, Điều này là rất phức tạp khi n khá lớn. Phương pháp sau đây giúp ta tránh được điều này, ngoài ra nó còn giúp ta tìm được hạng mà không phải tính một định thức con nào cả.

2.4.2. Phương pháp tìm hạng nhờ các phép biến đổi sơ cấp của ma trận

1. Cơ sở của phương pháp

Dựa vào 2 nhận xét sau

- Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận đó.
- Hạng của 1 ma trận bậc thang bằng đúng số hàng khác không của nó.

2. Nội dung

Để tìm hạng của 1 ma trận A cho trước, trước hết ta dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng và cột đưa A về ma trận bậc thang A' và số hàng khác không của A' chính là hạng của A.

3. Các ví dụ

a) Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-7L_1 + L_3 \rightarrow L_3]{-4L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 2$$

b) Biện luận theo m hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 2 & 5 & m & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1 + L_3 \rightarrow L_3]{-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & m+2 & -1-2m \\ 0 & -1 & -5 & 10-m \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & m+2 & -1-2m \\ 0 & 0 & m-3 & 9-3m \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } m = 3 \\ 3 & \text{khi } m \neq 3 \end{cases}$$

Phương pháp này còn gọi là phương pháp Gauss

Bài tập

Biện luận theo m hạng của ma trận sau

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

2.5. Hệ phương trình tuyến tính có số ẩn bằng số phương trình

2.5.1. Dạng tổng quát và dạng ma trận

1. Dạng tổng quát

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + & \dots & + a_{1n}x_{1n} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_{2n} & = & b_2 \\ & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_{n1} + a_{n2}x_{n2} + & \dots & + a_{nn}x_{nn} & = & b_n \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

2. Dạng ma trận

Đặt $A = (a_{ij})_{n \times n}$ gọi là ma trận hệ số.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{gọi là ma trận \u0111\u1ed9c.}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad \text{gọi là ma trận vế phải (cột vế phải)}$$

(I) $\Leftrightarrow Ax = b$ Dạng ma trận của hệ (I).

* $b \neq 0$ Hệ (I) được gọi là hệ không thuần nhất.

* $b = 0$ Hệ (I) được gọi là hệ thuần nhất.

Chú yí

Ma trận $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}_{n \times n+1}$ được gọi là ma trận mở rộng của hệ (I)

2.5.2. Hệ Cramer

1. Định nghĩa

Hệ vuông $Ax = b$ được gọi là hệ Cramer nếu $\det A \neq 0$.

2. Định lý Cramer

Hệ Cramer $Ax = b$ có nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$

hay $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ $j = \overline{1, n}$, trong đó A_j là ma trận suy từ A bằng cách thay cột thứ j bởi cột về phải b .

Chúng minh:

* Sự tồn tại nghiệm

$$\text{Vì } \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$$

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x = \frac{1}{\det A} C^t b = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \dots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \dots + b_n C_{n2} \\ \dots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \dots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_j = \frac{1}{\det A} (b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}) = \frac{\det A_j}{\det A} \quad \forall j = \overline{1, n}$$

* Sự duy nhất nghiệm

$$\text{Giả sử } x \text{ và } x' \text{ là 2 nghiệm của hệ (I)} \Rightarrow Ax = Ax' = b \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}(Ax')$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)x = (A^{-1}A)x' = Ix = Ix' \Rightarrow x = x'.$$

3. Ví dụ

Giải hệ sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-4L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -11L_2 + L_3 \rightarrow L_3}} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 11 \\ 3 & 1 & -2 \\ -29 & 0 & 29 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 11 \\ -29 & 29 \end{vmatrix} = 29 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 7 & 11 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-4L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -11L_2 + L_3 \rightarrow L_3}} \begin{vmatrix} 12 & 0 & 11 \\ -2 & 1 & -2 \\ 29 & 0 & 29 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 29 & 29 \end{vmatrix} = 29$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{-C_3 + C_2 \rightarrow C_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -(21 + 8) = -29$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-4L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -11L_2 + L_3 \rightarrow L_3}} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & -2 \\ -29 & 0 & 29 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 12 \\ -29 & 29 \end{vmatrix} = 58$$

Hệ có nghiệm duy nhất là

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.5.3. Hệ tam giác trên

1. Định nghĩa

Hệ tam giác trên là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

trong đó, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên ($a_{ii} \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$)

2. Cách giải

Giải từ dưới lên

- Phương trình cuối cho x_n
- Phương trình liền trên cho $x_{n-1} \dots$
- Phương trình đầu cho x_1

3. Áp dụng

Để giải hệ $Ax = b$ chưa có dạng tam giác trên. Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng đưa ma trận mở rộng $\overline{A} = [A \ b]$ về dạng $\overline{A'} = [A' \ b']$ với A' là ma trận tam giác trên.

Ví dụ

Bằng cách đưa về ma trận tam giác trên, giải hệ sau

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_2+L_1 \rightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 3L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ 4L_1+L_3 \rightarrow L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & -13 & -10 \\ 0 & -1 & -13 & -17 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & | & 6 \\ 0 & 10 & 13 & | & 16 \\ 0 & 23 & 27 & | & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & | & 6 \\ 0 & 10 & 13 & | & 16 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_3+L_2 \rightarrow L_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & | & 6 \\ 0 & 1 & 10 & | & 19 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & | & 6 \\ 0 & 1 & 10 & | & 19 \\ 0 & 0 & -29 & | & -58 \end{bmatrix}$$

$$-29x_3 = -58 \Rightarrow x_3 = 2, x_2 + 10.2 = 19 \Rightarrow x_2 = -1, -x_1 + 3.(-1) + 5.2 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$$

Vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất là:
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

2.5.4. Hệ thuần nhất

1. Dạng tổng quát

$$A_{n \times n} x_{n \times 1} = O_{n \times 1} \quad (\text{II})$$

2. Nghiệm tầm thường và không tầm thường

Hệ (II) luôn luôn có nghiệm $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$ được gọi là nghiệm tầm thường.

Nghiệm $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mà $\exists x_j \neq 0$ với $1 \leq j \leq n$ được gọi là nghiệm không tầm thường.

3. Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường

a. Định lý

Hệ thuần nhất $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det A = 0$.

Chúng minh

* Cần (\Rightarrow ?)

Giả sử $\det A \neq 0 \Rightarrow$ Hệ $Ax = 0$ là hệ Cramer \Rightarrow Hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường. Điều này trái với giả thiết. Vậy $\det A = 0$

* Đủ ($? \Leftarrow$)

Bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng và đánh số lại các ẩn (tức là đổi chỗ các cột), ta đưa \bar{A} về \bar{A}' :

$$\overline{A} \rightarrow \overline{A'} = \left[\begin{array}{cccccc|cc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & & 0 & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Trong đó $a'_{ii} \neq 0 \forall i = \overline{1, r}$

Có 2 khả năng

* $r = n \Rightarrow \det A' = a'_{11}a'_{22}\dots a'_{nn} \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ (trái với giả thiết)

* $r < n \Rightarrow$ Hệ thuần nhất sau có số phương trình ít hơn số ẩn nên có vô số nghiệm, trong đó chỉ có 1 nghiệm tầm thường, còn lại là vô số nghiệm không tầm thường.

Các nghiệm được tìm như sau

Các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ (ứng với hệ cuối cùng $A'x=0$) mang giá trị tùy ý.

Các ẩn x_1, x_2, \dots, x_r (ứng với hệ cuối cùng $A'x=0$) được giải từ hệ tam giác trên.

b. Ví dụ

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

1) Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm không tầm thường.

2) Tìm các nghiệm đó.

Giải

$$1) \text{ Hệ có nghiệm không tầm thường } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & a-10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & a-10 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(a-10) - 18 = 0 \Leftrightarrow 3a = 12 \Leftrightarrow a = 4$$

2) Với a = 4 ta có hệ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad (\text{II}) \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}L_5 \rightarrow L_3]{-\frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hệ (II) tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Nghiệm là:

$$x_3 = t \text{ tuỳ ý}$$

$$x_2 = -t$$

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 = t - 2t = -t$$

Với $t \neq 0$ là các nghiệm không tầm thường.

Bài tập

Giải các hệ sau bằng 2 cách (Dùng công thức Cramer, đưa về hệ tam giác trên)

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x+y+z=1 \\ x+3y+z=3 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+2y &= -1 \\ 2x+7y+z &= 2 \\ 3x+9y &= 1 \end{cases}$$

2.6. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

2.6.1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1. Dạng tổng quát

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + & \dots & + a_{1n}x_{1n} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_{2n} & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + & \dots & + a_{mn}x_{mn} & = & b_m \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

2. Dạng ma trận

Đặt $A = (a_{ij})_{m \times n}$ gọi là ma trận hệ số.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \text{ gọi là ma trận ẩn.}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1} \text{ gọi là ma trận vế phải (cột vế phải)}$$

(I) $\Leftrightarrow Ax = b$ Dạng ma trận của hệ (I).

* $b \neq 0$ Hệ (I) được gọi là hệ không thuần nhất.

* $b = 0$ Hệ (I) được gọi là hệ thuần nhất.

$\bar{A} = [A \ b]_{m \times n+1}$ được gọi là ma trận mở rộng (hay ma trận bổ sung) của hệ (I)

Chú ý

- Nếu $m=n$ Hệ vuông
- Hệ tương thích; Có nghiệm
- Hệ xác định; Có 1 nghiệm duy nhất
- Hệ không xác định; Có vô số nghiệm
- Hệ không tương thích; Hệ vô nghiệm

2.6.2. Định lý Kronecker-Capelli

1. Định lý

Hệ tổng quát $A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ (I) tương thích khi và chỉ khi $\rho(\bar{A}) = \rho(A)$.

Chứng minh:

Bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng và đánh số lại các ẩn (đổi chỗ các cột) ta đưa ma trận \bar{A} về dạng bậc thang

$$\bar{A} \rightarrow \bar{A}' = \left[\begin{array}{cccc|cc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right] \quad \text{với } r = \rho(A)$$

a) Cần (\Rightarrow ?)

Giả sử hệ tương thích, ta cần chứng minh $\rho(\bar{A}) = \rho(A)$

Thật vậy, gọi $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ là 1 nghiệm nào đó của hệ (I)

Thay nghiệm này vào $n - r$ phương trình cuối, ta được: $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_m = 0$

$$\Rightarrow \rho(\bar{A}) = r \Rightarrow \rho(\bar{A}) = \rho(A)$$

b) Đủ ($? \Leftarrow$) Giả sử $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = r$, ta cần chứng minh hệ tương thích.

Do $\rho(\bar{A}) = r \Rightarrow b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_m = 0$ (Vì nếu $\exists b'_{r+i} \neq 0$ thì $\rho(\bar{A}) > r$)

Có 2 khả năng

* Nếu $r < n$; $\rho(A) = r \Rightarrow \exists$ định thức con $D_r \neq 0$, định thức này được gọi là định thức con chính của hệ. Hệ tương đương với hệ con chỉ gồm r phương trình chứa định thức D_r này. r ẩn có các hệ số trong định thức con chính gọi là các ẩn chính của hệ, các ẩn còn lại là các ẩn phụ. Trong nghiệm tổng quát các ẩn phụ mang giá trị tùy ý, còn các ẩn chính tính theo các ẩn phụ và được giải nhờ hệ Cramer có định thức là $D_r \neq 0$ nói trên.

Nếu ta đưa hệ về dạng bậc thang như trên thì nên chọn $D_r \neq 0$ là định thức tam giác trên tạo bởi r hàng đầu và r cột đầu của hệ bậc thang.

$$\text{Khi đó hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1r}x'_r & = b'_1 - a'_{1r+1}x'_{r+1} - \dots - a'_{1n}x'_n \\ a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2r}x'_r & = b'_2 - a'_{2r+1}x'_{r+1} - \dots - a'_{2n}x'_n \\ \dots & \dots \\ a'_{rr}x'_r & = b'_r - a'_{rr+1}x'_{r+1} - \dots - a'_{rn}x'_n \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x'_{r+1} & = t_1 \in R \\ x'_{r+2} & = t_2 \in R \\ \dots & \dots \\ x'_n & = t_n \in R \\ x'_1 & = \text{Cramer} \\ x'_2 & = \text{Cramer} \\ \dots & \dots \\ x'_r & = \text{Cramer} \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm.

* Nếu $r = n$; Hệ (I) là hệ Cramer có duy nhất nghiệm.

Tóm lại, hệ luôn luôn tương thích.

2. Các ví dụ

a. Ví dụ 1

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

Hãy xác định a và b để

* Hệ có nghiệm duy nhất.

* Hệ có vô số nghiệm

* Hệ không tương thích.

Giải

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-3L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ -2L_1+L_3 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_3+L_2 \rightarrow L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 5-2b \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{array} \right) \xrightarrow{-3L_2+L_3 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 5-12 \\ 0 & 0 & 21-2a & 7b-21 \end{array} \right)$$

* Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 21-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{21}{2}, b \in R$

* Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 21-2a=0 \\ 7b-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{21}{2} \\ b=3 \end{cases}$

* Hệ không tương thích $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(A)=2 \\ \rho(\overline{A})=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21-2a=0 \\ 7b-21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{21}{2} \\ b \neq 3 \end{cases}$

b. Ví dụ 2

Chứng tỏ rằng hệ sau không tương thích

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ -4L_1+L_3 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{-L_2+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rho(A) = 2 < \rho(\bar{A}) = 3$$

\Rightarrow Hệ không tương thích.

c. Ví dụ 3

Giải và biện luận hệ phương trình sau

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Giải

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -mL_1 + L_3 \rightarrow L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 - m + 2 & 1-m \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } P = (m-1)(-m^2 - m + 2) = -(m-1)^2(m+2)$$

Có 2 trường hợp sau

$$* P \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad r = 3 = n \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất}$$

$$z = \frac{m-1}{m^2 + m - 2} = \frac{m-1}{(m-1)(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$(m-1)y + (1-m)\frac{1}{m+2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{m+2} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{m+2} - \frac{m}{m+2} = \frac{1}{m+2}$$

$$\text{Vậy nghiệm duy nhất là } \begin{cases} x = \frac{1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{1}{m+2} \end{cases}$$

$$* P = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hay } m = -2$$

Khi $m = 1$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow x + y + z = 1. \text{ Nghiệm tổng quát là } \begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \in R \\ z = t \in R \end{cases}$$

Khi $m = -2$ Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0z = 3 \end{cases}$ Hệ không tương thích.

Bài tập

1) Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

2) Giải và biện luận hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + (m-1)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

3) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y - z = 13 \\ 2x + 5y = 33 \\ 4x + 3y - 2z = 19 \\ x + y - 3z = -9 \end{cases}$$

4) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2t = 2 \\ x + y - t = 1 \\ x + z - mt = 2m \end{cases} \quad (\text{I})$$

a) Giải hệ khi $m = 2$ bằng phương pháp Gauss

b) Xác định m để hệ tương thích

5) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ 2x + 7y + (2m+1)z = 2 \\ 3x + 9y + 4mz = 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ khi $m = 0$ bằng phương pháp Gauss

b) Xác định m để hệ có vô số nghiệm. Tìm các nghiệm ấy

6) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + y + (a-1)z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Giải hệ khi $a = 3$ bằng phương pháp Gauss

b) Giải và biện luận hệ theo a

7) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - mz = 14 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$ bằng phương pháp Gauss

b) Với giá trị nào của m thì hệ tương thích

8) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y - z = 13 \\ 2x + 5y = 33 \\ 4x + 3y - 2z = 19 \\ x + y + mz = -9 \end{cases}$$

a) Định m để hệ không tương thích.

b) Giải hệ khi $m = -3$

9) Giải và biện luận hệ phương trình sau

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Chương 3

HÀM SỐ - GIỚI HẠN HÀM SỐ

Trong phần đầu chương này chúng tôi trình sơ lược về các khái niệm, tính chất của ánh xạ cũng như hàm số. Giới hạn dãy số cũng được giới thiệu. Nội dung chính của chương này được dành để trình bày các định nghĩa, tính chất, các tiêu chuẩn so sánh, và cách tính giới hạn hàm số thường gặp. Hàm số liên tục, gián đoạn và một số bài tập được đưa ra ở cuối chương.

3.1. BỔ TÚC HÀM SỐ

3.1.1. Hàm số

1. Định nghĩa

Ánh xạ $f: D_f \subset R \rightarrow R$ được gọi là hàm thực 1 biến thực (gọi tắt là hàm 1 biến) xác định trên D_f .

D_f được gọi là miền xác định của hàm f .

$T_f = f(D_f) = \{x \in D_f / f(x) \in R\}$ được gọi là miền giá trị của hàm f .

Chú ý

- Ta thường gọi tắt hàm số $y = f(x)$
- $T_f = \{y \in R / \exists x \in D_f : y = f(x)\} = \{x \in R / \text{phương trình } y = f(x) \text{ có ít nhất 1 nghiệm } x \in D_f\}$

2. Ví dụ

Tìm miền giá trị của hàm số

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Giải

$$D_f = R$$

$$\forall y \in R, \text{ xét phương trình } y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow y(1+x^2) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \quad (1)$$

* Nếu $y = 0$ (1) có nghiệm $x = 0$

* Nếu $y \neq 0$ (1) là phương trình bậc hai thực sự

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

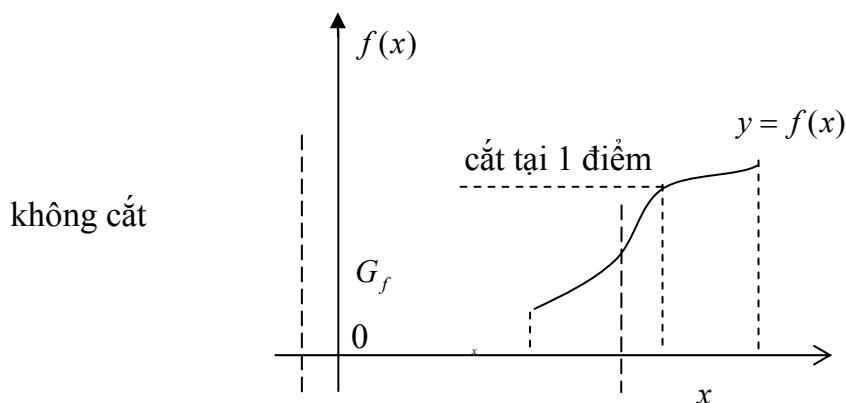
$$\text{Vậy } T_f = [-1; 1]$$

3.1.2. Đồ thị của hàm số

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f: D_f \subset R \rightarrow R$
 $x \mapsto y = f(x)$

Tập hợp $G_f = \{(x; f(x)) / x \in D_f\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f



2. Tính chất

Mọi đường thẳng cùng phương với trục tung cắt G_f tại không quá 1 điểm.

3.1.3. Các phép toán trên hàm số

Cho 2 hàm số f và g có miền xác định lần lượt là D_f và D_g . Khi đó, ta có các định nghĩa sau đây

1. Tổng của f và g là 1 hàm số ký hiệu $f + g$ có

* Miền xác định là $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2. Hiệu của f và g là 1 hàm số ký hiệu $f - g$ có

* Miền xác định là $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

* $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3. Tích của f và g là 1 hàm số ký hiệu $f \cdot g$ có

* Miền xác định là $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4. Thương của f và g là 1 hàm số ký hiệu $\frac{f}{g}$ có

* Miền xác định là $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g / g(x) = 0\}$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

5. Hợp của f và g là 1 hàm số ký hiệu $g \circ f$ có

* Miền xác định là $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

* $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Bài tập

Cho 2 hàm số $f: R \rightarrow R$ và $g: R \rightarrow R$
 $x \mapsto \cos x$ và $x \mapsto 3x^2 - 1$

Hãy xác định 2 hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$

3.1.4. Các hàm số sơ cấp

1. Hàm số sơ cấp cơ bản

a. Định nghĩa

Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản

* Hàm lũy thừa: $y = x^\alpha$ có miền xác định phụ thuộc vào α

* Hàm số mũ: $y = a^x$ (với $1 \neq a > 0$) có miền xác định là R và miền giá trị là $R^+ = (0; +\infty)$

* Hàm số logarit: $y = \log_a x$ (với $1 \neq a > 0$) có miền xác định là $R^+ = (0; +\infty)$ và miền giá trị là: R

* Hàm số lượng giác

$y = \sin x$ và $y = \cos x$ có miền xác định là R và miền giá trị là $[-1; 1]$

Hàm số $y = \operatorname{tg} x$ có miền xác định là $R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$

Hàm số $y = \operatorname{cot} x$ có miền xác định là $R \setminus \{k\pi / k \in Z\}$

* Hàm số lượng giác ngược

$y = \arcsin x$ có miền xác định là $[-1; 1]$ và miền giá trị là $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \arccos x$ có miền xác định là $[-1; 1]$ và miền giá trị là $[0; \pi]$

$y = \operatorname{arctg} x$ có miền xác định là R và miền giá trị là $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \operatorname{arc cot} x$ có miền xác định là R và miền giá trị là $(0; \pi)$

b. Ví dụ

$$y = x^3, y = \cos x, \dots$$

2. Hàm số sơ cấp

a. Định nghĩa

Hàm số cho bởi 1 biểu thức duy nhất thu được qua 1 số hữu hạn các phép trên các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số được gọi là hàm số sơ cấp.

b. Ví dụ

1. $y = \sin^2 x + 2x$

2. $y = \operatorname{tg} 5x^2 + \ln x$

3. $y = \frac{3x-1}{e^{4x}}, \dots$ là các hàm sơ cấp

$$4. y = \begin{cases} -2x+1 & \text{ khi } x > 0 \\ 5 & \text{ khi } x=0 \\ \cos 2x & \text{ khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{không phải là hàm sơ cấp}$$

3.1.5. Giới hạn dãy số

1. Định nghĩa

Cho dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$, ta có các định nghĩa sau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) : n > N \Rightarrow |u_n| > M \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) : n > N \Rightarrow u_n > M \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) : n > N \Rightarrow u_n < -M \quad (4)$$

Chú ý

Dãy số thoả (1) là dãy số hội tụ. Các trường hợp (2), (3), (4) là dãy số phân kỳ. Ngoài ra, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ không tồn tại thì dãy số u_n cũng được gọi là phân kỳ.

2. Ví dụ

Dùng định nghĩa, chứng minh rằng

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = +\infty$

Giải

a) Cho trước $\varepsilon > 0$ bé tùy ý

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Đặt } N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right], \text{ khi đó } \forall n > N \Rightarrow n \geq N+1 > \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\text{Vậy } \forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] : n > N \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\text{hay } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

b) Cho trước $M > 0$ lớn tùy ý

$$2n+1 > M \Leftrightarrow n > \frac{M-1}{2}$$

$$\text{Đặt } N = \left[\frac{M-1}{2} \right], \text{ khi đó } \forall n > N \Rightarrow n \geq N+1 > \frac{M-1}{2} \Rightarrow 2n+1 > M$$

$$\text{Vậy } \forall M > 0, \exists N = \left[\frac{M-1}{2} \right] : n > N \Rightarrow 2n+1 > M$$

$$\text{Hay } \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = +\infty$$

3. Các tính chất cơ bản của dãy số hội tụ

a. Tính chất 1

Nếu dãy số (u_n) hội tụ về $a > p$ ($a < q$) thì $\exists N : n > N \Rightarrow u_n > p$ ($u_n < q$).

b. Tính chất 2

Nếu dãy số (u_n) hội tụ về a và $u_n \leq p$ ($\geq q$) $\forall n$ thì $a \leq p$ ($\geq q$).

c. Tính chất 3

Nếu dãy số (u_n) hội tụ thì giới hạn đó là duy nhất.

d. Tính chất 4

Nếu dãy số (u_n) hội tụ thì nó bị chặn, nghĩa là $\exists M > 0 : |u_n| \leq M \quad \forall n$.

4. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

a. Tiêu chuẩn Weirstrass

Mọi dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Áp dụng

Nếu dãy số thực $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì hội tụ.

Ví dụ

Chứng minh dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ với $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ hội tụ và giới hạn này được ký hiệu là e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Giải

* Dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tăng

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n^3}\right) + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{n^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (So sánh trực tiếp)

* Dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ bị chặn trên

$$u_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

Từ (1) suy ra

$$< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

b. Tiêu chuẩn kẹp

Cho 3 dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ và $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ thỏa $v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Khi đó, nếu 2 dãy $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ và $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ cùng hội tụ về a thì dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ về a

Ví dụ

Chúng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Giải

Vì $x \rightarrow 0$ nên ta chỉ cần xét $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$

* Giả sử $0 < x < \frac{\pi}{2}$

dt tam giác AOM < dt quạt tròn AOM < dt tam giác AOT

Suy ra $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

* Nếu $x < 0$: Đặt $x = -t$, ta được $\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1$

$$\Leftrightarrow \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$$

\Rightarrow đ.p.c.m

c. Tiêu chuẩn Cauchy

Dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Ví dụ

Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chứng minh dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ với $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Giải

$$\varepsilon = \frac{1}{4}, \forall N, \exists p = 3N > q = 2N > N \Rightarrow |u_p - u_q| = \left| \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} + \dots + \frac{1}{3N} \right| = \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} + \dots + \frac{1}{3N} > \frac{1}{3N} + \frac{1}{3N} + \dots + \frac{1}{3N} = \frac{N}{3N} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon$$

Bài tập

1) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy số (u_n) hội tụ về 0 là dãy số $(|u_n|)$

hội tụ về 0.

2) Chứng minh rằng nếu 1 dãy số (u_n) hội tụ về a thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a .

3.2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

3.2.1. lân cận của 1 điểm

$V_{x_0}^\delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ lân cận tâm x_0 bán kính δ . $x \in V_{x_0}^\delta \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$

$V_{x_0}^\delta \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ lân cận thủng tâm x_0 bán kính δ

$x \in V_{x_0}^\delta \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$

$V_{x_0^+}^\delta \setminus \{x_0\} = (x_0; x_0 + \delta)$ lân cận thủng bên phải tâm x_0 bán kính δ .

$x \in V_{x_0^+}^\delta \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$

$V_{x_0^-}^\delta \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta; x_0)$ lân cận thủng bên trái tâm x_0 bán kính δ .

$x \in V_{x_0^-}^\delta \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0$

Chú ý

Đối với vô cực không có khái niệm lân cận, tuy nhiên ứng với $N > 0$ đủ lớn ta ký hiệu

$x \in (-\infty; -N) \Leftrightarrow x < -N$ chỉ x ở trong 1 “ lân cận bên phải ” của $-\infty$

$x \in (N; +\infty) \Leftrightarrow x > N$ chỉ x ở trong 1 “ lân cận bên trái ” của $+\infty$

$x \in (-\infty; -N) \cup (N; +\infty) \Leftrightarrow |x| > N$ chỉ x ở trong 1 “ lân cận bên trái ” của $+\infty$ hoặc “ lân cận bên phải ” của $-\infty$.

3.2.2. Giới hạn hàm số

1. Định nghĩa

a. Định nghĩa Heine (theo ngôn ngữ dãy)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall x_n \xrightarrow{x_n \neq x_0} x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L) \quad (1)$$

b. Định nghĩa Cauchy (theo ngôn ngữ “ $\varepsilon - \delta$ ”)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (2)$$

2. Sự tương đương của 2 định nghĩa

a) $(1) \Rightarrow (2)$

Giả sử L là giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ theo Heine nhưng

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists \xi : 0 < |\xi - x_0| < \delta$ mà $|f(\xi) - L| \geq \varepsilon_0$.

Ta lấy dãy $\delta_n \rightarrow 0 \Rightarrow \exists (\xi_n) : 0 < |\xi_n - x_0| < \delta_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x_0$

$|f(\xi_n) - L| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow f(\xi_n) \text{ không } L \text{ mâu thuẫn với giả thiết (định nghĩa Heine)}$

b) (2) \Rightarrow (1)

$\forall x_n \rightarrow x_0$ mà $x_n \neq x_0$, ta sẽ chứng tỏ $f(x_n) \rightarrow L$

Thật vậy, từ giả thiết ta có: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Vì $x_n \rightarrow x_0$ nên với $\delta > 0$ này $\exists N : n > N \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$.

3. Các định nghĩa giới hạn khác (theo Cauchy)

a. Giới hạn 1 bên

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

b. Giới hạn ở vô cực

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : |x| > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

c. Giới hạn vô cực

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < -M$$

3.2.3. Các giới hạn cơ bản

1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$: (Dạng 1^∞)

Dựa vào giới hạn đã biết: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

Ta tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

* Xét $x \rightarrow +\infty$: $x > 0$, đặt $n = [x]$

$$\Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \text{ khi } x \rightarrow +\infty$$

* Khi $x \rightarrow -\infty$

Đặt $t = -(x+1)$ ta đi đến kết quả như trên

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x+2} \text{ Đặt } \frac{2}{x-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow x = 2z + 1$$

Thay vào ta được giới hạn bằng e^2

Suy ra

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \text{ (Đặt } \alpha = \frac{1}{t} \text{)}$$

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{e}$$

2. Giới hạn $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$ (Dạng $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \ln e = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u} = \log_a e$$

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right) = \frac{2}{3}$$

3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (Dạng $\frac{0}{0}$)

Đặt $u = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(1 + u)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1 + u)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{5x} - \frac{e^{2x} - 1}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{5} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Giải

Đặt $(1+x)^\alpha - 1 = a \Rightarrow (1+x)^\alpha = 1+a \Rightarrow \alpha \ln(1+x) = \ln(1+a)$

$$\text{Khi đó } \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\ln(1+a)} = \alpha \cdot \frac{a}{\ln(1+a)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Bài tập

1) Dùng định nghĩa, chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} = (-1)^n_{n \in \mathbb{Z}^+}$ phân kỳ

2) Viết 2 định nghĩa khác nhau của các giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

3) Dùng định nghĩa Heine, chứng tỏ rằng

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ không tồn tại

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

3.3. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

3.3.1. Vô cùng bé

1. Định nghĩa

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (viết tắt là VCB) trong quá trình nào đó nếu nó dần tới giới hạn 0 trong quá trình ấy.

Ví dụ

Khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin x$ là VCB, x^3 cũng là VCB

Khi $x \rightarrow \infty$ thì $\frac{1}{x}$ là VCB

Chú ý

$\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$

2. Liên hệ giữa VCB và hàm có giới hạn

Điều kiện cần và đủ để hàm $f(x)$ có giới hạn L trong 1 quá trình nào đó là $f(x) - L$ là VCB trong quá trình ấy.

3. Các tính chất của VCB

a) Nếu $\alpha(x)$ là VCB trong 1 quá trình nào đó và C là 1 hằng số thì $C\alpha(x)$ cũng là VCB trong quá trình ấy.

b) Nếu $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ là 1 số hữu hạn các VCB trong cùng 1 quá trình thì tổng và tích của chúng cũng là các VCB trong quá trình ấy.

c) Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$ và $f(x)$ là hàm bị chặn trong 1 lân cận thủng nào đó của x_0 thì $\alpha(x)f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

3.3.2. Vô cùng lớn

1. Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ là VCL trong 1 quá trình nào đó nếu $f(x)$ dần tới vô cực trong quá trình ấy.

2. Liên hệ giữa VCB và VCL

a) Nếu trong 1 quá trình nào đó, hàm $f(x)$ là VCB và luôn khác không thì $\frac{1}{f(x)}$ là VCL trong quá trình ấy.

b) Ngược lại, nếu trong 1 quá trình nào đó hàm $f(x)$ là VCL thì $\frac{1}{f(x)}$ là VCB trong quá trình ấy.

3.3.3. So sánh các VCB

1. Các cấp so sánh

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB trong cùng một quá trình. Khi đó,

a) Nếu tỉ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ dần tới 0 thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$ hay $\beta(x)$ là

VCB cấp thấp hơn $\alpha(x)$, ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Ví dụ

$1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn x

b) Nếu tỉ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ dần tới một hằng số khác 0 thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB bằng cấp.

Ví dụ

Khi $x \rightarrow 0$ thì $1 - \cos x$ và x^2 là hai VCB bằng cấp.

c) Nếu $\alpha(x)$ là VCB bằng cấp với $(\beta(x))^k$ với $k > 0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB cấp k so với VCB $\beta(x)$.

Ví dụ

Khi $x \rightarrow 0$ thì $1 - \cos x$ là VCB cấp 2 so với VCB x

d) Nếu tỉ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ không có giới hạn thì ta nói các VCB $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ không so sánh với nhau được.

e) Nếu tỉ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ dần tới vô cực thì $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ dần tới 0 và ta trở lại trường hợp 1.

2. VCB tương đương

a. Định nghĩa

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB trong cùng 1 quá trình. Nếu tỉ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ có giới hạn bằng 1 trong quá trình đó thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB tương đương.

Ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$

Ví dụ

Khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$

Chú ý

Nếu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ thì $\beta(x) \sim \alpha(x)$

b. Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định

Nếu $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ và $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ thì $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

c. Vô cùng bé tương đương của 1 tổng các VCB đồng thời

Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB trong cùng 1 quá trình và $\alpha(x)$ có cấp thấp hơn thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$.

3. Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB trong cùng 1 quá trình nào đó, $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ đều là tổng của nhiều VCB. Khi đó giới hạn của tỷ số $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn của tỷ số hai VCB cấp thấp nhất ở tử số và mẫu số.

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x + \tan^3 x}{2x + x^5 + 4x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

4. Phần chính của một VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB trong cùng 1 quá trình và nếu $\alpha(x) \sim C\beta^k(x)$ ($k > 0$, C là hằng) thì $C\beta^k(x)$ được gọi là phần chính của VCB $\alpha(x)$ so với VCB $\beta(x)$

Ví dụ

Khi x dần tới 0 thì $1 - \cos x$ là vô cùng bé cấp cao hơn VCB x . So với x thì phần chính của VCB $1 - \cos x$ là $\frac{1}{2}x^2$

3.3.4. So sánh các vô cùng lớn (VCL)

1. Các cấp so sánh

Giả sử $A(x)$ và $B(x)$ là 2 VCL trong cùng 1 quá trình. Khi đó,

a) Nếu tỷ số $\frac{A(x)}{B(x)}$ dần tới ∞ thì ta nói $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ hay $B(x)$ là VCL cấp thấp hơn $A(x)$.

Ví dụ

Khi $x \rightarrow \infty$ thì $x^3 + 1$ là VCL cấp cao hơn VCL $x^{\frac{1}{2}}$ vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$$

b) Nếu tỷ số $\frac{A(x)}{B(x)}$ dần tới 1 hằng số k khác 0 thì ta nói $A(x)$ và $B(x)$ là 2 VCL ngang cấp. Đặc biệt, khi $k = 1$ ta nói $A(x)$ và $B(x)$ là 2 VCL tương đương

c) Nếu tỷ số $\frac{A(x)}{B(x)}$ dần tới 0 thì $\frac{B(x)}{A(x)}$ dần tới ∞ và ta trở lại trường hợp a)

d) Nếu tỷ số $\frac{A(x)}{B(x)}$ không có giới hạn thì ta nói các VCL $A(x)$ và $B(x)$ không so sánh

với nhau được

2. Ứng dụng VCL để khử dạng vô định

a. VCL tương đương

Nếu $A(x) \sim \overline{A}(x)$ và $B(x) \sim \overline{B}(x)$ thì $\lim \frac{A(x)}{B(x)} = \lim \frac{\overline{A}(x)}{\overline{B}(x)}$.

b. VCL tương đương của 1 tổng các VCL đồng thời

Nếu $A(x)$ và $B(x)$ là 2 VCB trong cùng 1 quá trình và $A(x)$ có cấp thấp hơn thì $A(x) + B(x) \sim B(x)$.

3. Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Giả sử $A(x)$ và $B(x)$ là 2 VCB trong cùng một quá trình nào đó, $A(x)$ và $B(x)$ đều là tổng của nhiều VCB. Khi đó giới hạn của tỷ số $\frac{A(x)}{B(x)}$ bằng giới hạn của tỷ số hai VCB cấp thấp nhất ở tử số và mẫu số.

Ví dụ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 7}{2x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{2} = 3$$

3.3.5. Khử dạng vô định

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+0}{1.4(\sqrt{1+0+0} + 1)} = \frac{1}{8}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \stackrel{x'=1-x}{=} \lim_{x' \rightarrow 0} x' \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-x') = \lim_{x' \rightarrow 0} x' \cot g \frac{\pi}{2} x' =$$

$$= \lim_{x' \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} x'}{\sin \frac{\pi}{2} x'} \cos \frac{\pi}{2} x' \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{Đặt } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{2}}$$

Bài tập

Tìm giới hạn sau

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos 6x}{\ln \cos 5x} \right)$

3.4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

3.4.1. Hàm số liên tục

1. Định nghĩa

a. Liên tục tại 1 điểm

* Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong 1 lân cận của điểm x_0 .

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu như $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

* Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong 1 lân cận bên phải của điểm $x = x_0$

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục bên phải tại điểm x_0 nếu như $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

* Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong 1 lân cận bên trái của điểm $x = x_0$

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục bên trái tại điểm x_0 nếu như $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

b. Liên tục trong 1 khoảng, trên 1 đoạn

* Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong (a, b) . Hàm f được gọi là liên tục trong (a, b) nếu như f liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b)

* Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$. Hàm f được gọi là liên tục trên $[a, b]$ nếu như f liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b) , f liên tục bên phải tại a và bên trái tại b

Chú ý

* Điều kiện cần và đủ để hàm f liên tục tại điểm $x = x_0$ là nó liên tục từng bên tại điểm đó.

* Một hàm số sơ cấp xác định trong khoảng nào thì liên tục trong khoảng đó

* Tổng, hiệu, tích, thương và hàm hợp của 2 hàm liên tục là một hàm liên tục.

2. Ví dụ

Xác định a để hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Giải

* Với $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$: Hàm $f(x)$ là hàm sơ cấp nên liên tục

* Tại $x = 0$ $f(0) = a$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

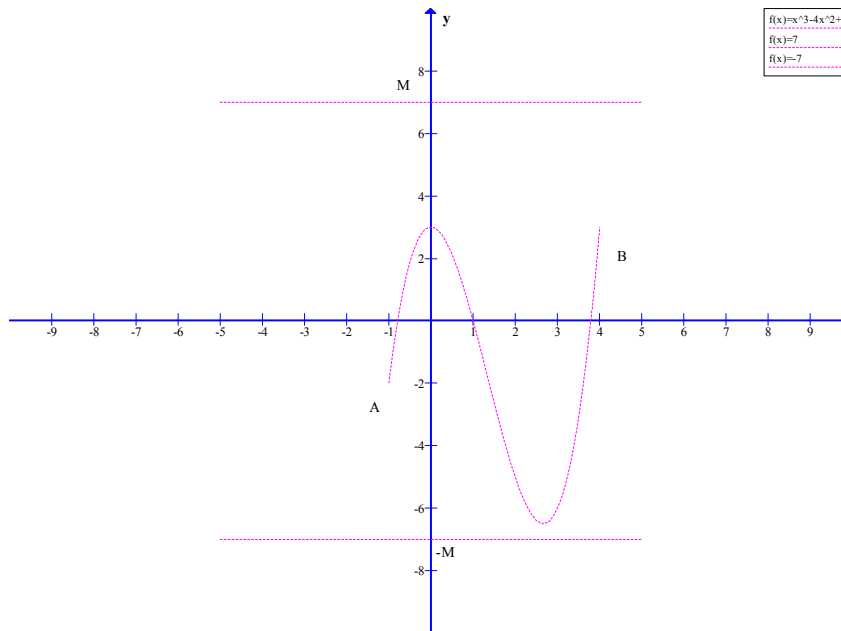
$$f \text{ liên tục trên } \nabla \Leftrightarrow f \text{ liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

3. Tính chất của hàm liên tục trên 1 đoạn

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$

a) Thì f bị chặn trên đoạn đó, nghĩa là: $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

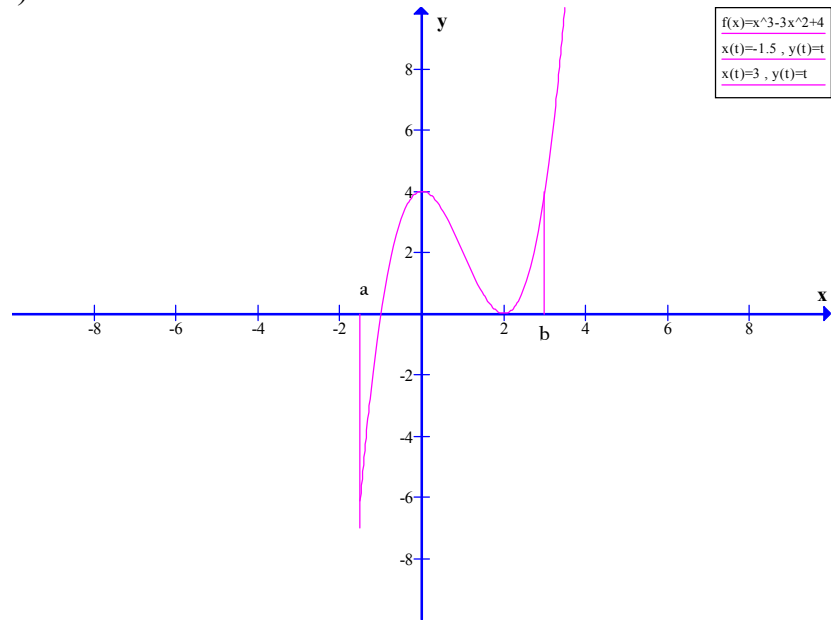
(Định lý Weirestrass I)



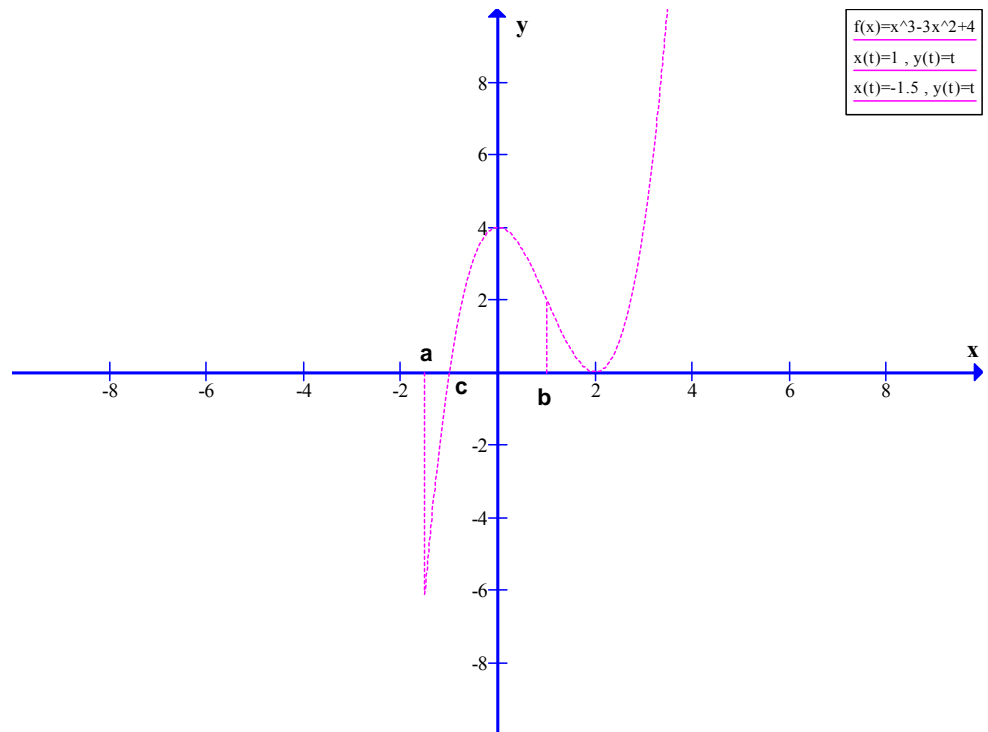
b) Thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$, nghĩa là

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \max_{[a, b]} f(x) \text{ và } \exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \min_{[a, b]} f(x)$$

(Định lý Weirestrass II)

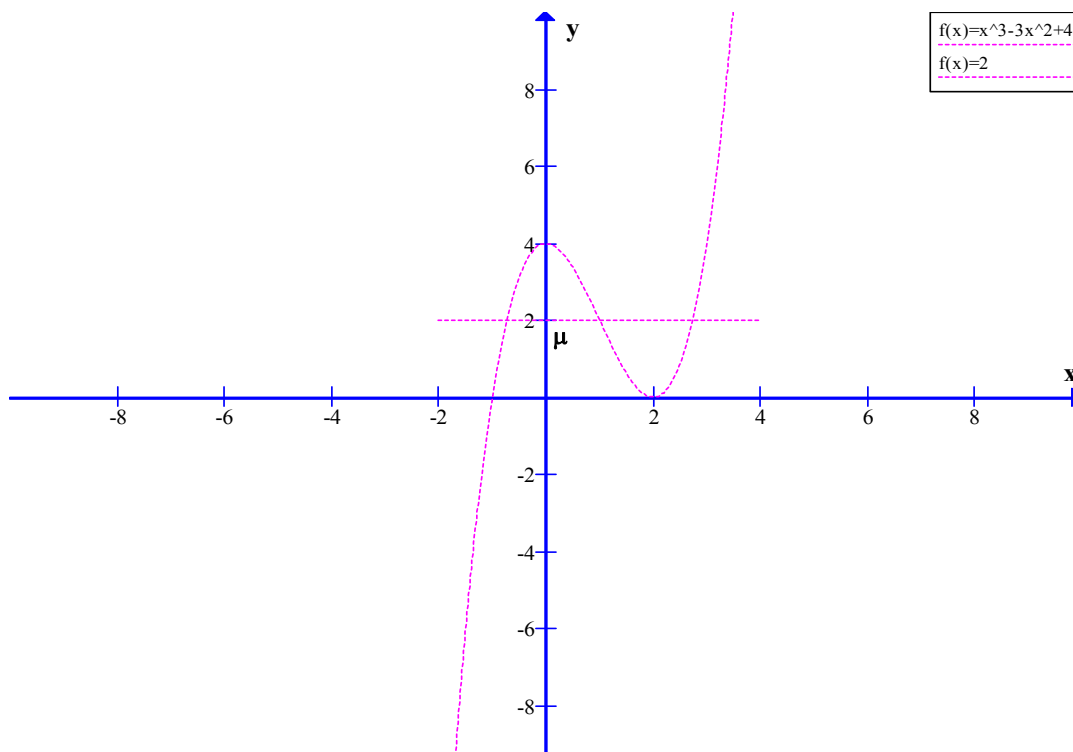


c) và $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng (a, b) . (Định lý Bolzano-Cauchy I)



d) Thì f đạt mọi giá trị trung gian gồm giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, nghĩa là: $\forall \mu \in [m, M], \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \mu$.

(Định lý Bolzano-Cauchy II)



3.4.2. Điểm gián đoạn của hàm số

1. Định nghĩa

Điểm $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$ nếu f không liên tục tại $x = x_0$

2. Các trường hợp gián đoạn

a. Hàm f không xác định tại điểm $x = x_0$

Ví dụ 1

Hàm số $y = \frac{1}{x}$ gián đoạn tại điểm $x = 0$

b. Hàm f xác định tại điểm $x = x_0$ nhưng không có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$

Ví dụ 2

Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$ nên gián đoạn tại điểm đó

c. Hàm f xác định tại $x = x_0$, có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ nhưng giới hạn đó khác với $f(x_0)$

Ví dụ 3

$$\text{Hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+5x)}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại điểm } x=0 \text{ có giới hạn bằng 2 khi}$$

$x \rightarrow 0$, nhưng $f(0) = 2 \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$

3. Phân loại điểm gián đoạn

a. Điểm gián đoạn loại 1

x_0 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm f nếu f gián đoạn tại điểm đó nhưng tồn tại các giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0^\pm$ và hiệu $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ được gọi là bước nhảy của f tại điểm $x = x_0$

Ví dụ

Hàm số trong ví dụ 2 có gián đoạn loại 1 tại điểm $x = 0$ với bước nhảy bằng 2

Đặc biệt

Nếu có thêm điều kiện $f(x_0^+) = f(x_0^-)$ thì điểm gián đoạn loại 1 x_0 được gọi là điểm gián đoạn bỏ được. Ở ví dụ 2 thì $x = 0$ là điểm gián đoạn bỏ được.

Ví dụ

Hàm số trong ví dụ 2 có gián đoạn bỏ được tại điểm $x = 0$

Hàm số trong ví dụ 2 có gián đoạn loại 1 tại điểm $x = 0$ với bước nhảy bằng 2

b. Điểm gián đoạn loại 2

x_0 là điểm gián đoạn không thuộc loại 1 thì được gọi là loại 2.

Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn vô cực của hàm f

Ví dụ

Hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ có $x = 0$ là điểm gián đoạn vô cực.

Bài tập

1) Khảo sát sự liên tục và gián đoạn của hàm số sau trên \mathbb{R}

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 6x}{x^2} & \text{khi } x > 0 \\ 5 & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x}{\sin 3x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{khi } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{khi } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2) Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

3) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \sin \frac{\pi}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R}

4) Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg(x^2 + 2x)}{5x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{2a+1}{2a+1} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

5) Tìm a và b để hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{khi } x \leq 1 \\ a^2x^2 + bx & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$