Toán I

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 2: Đại số tuyến tính và hình học Aphin

1. Phép tính ma trận
   - Ma trận và các phép tính trên ma trận
   - Hạng của một ma trận, Ma trận nghịch đảo
   - Hệ phương trình tuyến tính
2. Không gian véctơ
   - Không gian véctơ, KGVT con, Tổng trực tiếp của các KGVT con
   - Hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh, hạng của một hệ các véctơ
   - Số chiều, cơ sở của một không gian vectơ
3. Ánh xạ tuyến tính
   - Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân
   - Ma trận của một ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở
   - Hạng của một ánh xạ tuyến tính, định thức của một tự đồng cấu
   - Không gian $\mathcal{L}(E, F)$, đại số $\mathcal{L}(E)$
4. Hình học aphin trong mặt phẳng và trong không gian
   - Phép tịnh tiến, các không gian aphin con
   - Ánh xạ aphin, biến đổi aphin
   - Mốc Đề Các

Ma trận

Cho $m, n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa

Một ánh xạ từ $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ gọi là một ma trận m dòng, n cột với các phần tử thuộc $\mathbb{K}$. Ma trận A còn có thể được kí hiệu dưới dạng bảng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i) Các khái niệm: Ma trận vuông, ma trận cột, ma trận dòng, đường chéo và ma trận đường chéo, ma trận đơn vị I.

ii) Các kí hiệu: $M_{m,n}(\mathbb{K}), M_n(\mathbb{K})$.

Các phép tính trên ma trận

1) Phép cộng hai ma trận

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

2) Phép nhân ma trận với một số

$$k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

3) Phép nhân hai ma trận Cho $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \in M_{n,k}(\mathbb{K})$. Ma trận C xác định bởi

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

được gọi là ma trận tích của A và B, kí hiệu $C = AB$.

4) Ma trận chuyển vị

$$(a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Các tính chất

1. $$\begin{cases} A+B=B+A \\ A+0=0+A=A \\ A+(-A)=(-A)+A=0 \\ (A+B)+C=A+(B+C) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} k(A+B)=kA+kB \\ (k+h)A=kA+hA \\ k(hA)=(kh)A \\ k(AB)=(kA)B=A(kB) \\ 1.A=A \\ 0.A=0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (AB)C=A(BC) \\ A.I=I.A=A \\ \text{Chú ý rằng } AB\neq BA \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} A.(B+C)=AB+AC) \\ (A+B)C=AC+BC \end{cases}$$

5. $(AB)^T=B^TA^T$

Các ví dụ

Ví dụ

Tìm ma trận X thoả mãn:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Ví dụ

Tính A^n với

a) $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa

Ma trận B thỏa mãn tính chất

$$AB = BA = I$$

được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, và được kí hiệu là A^{-1}.

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Định thức

Định nghĩa qua phép hoán vị

Định thức của một ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cấp n là tổng luân phiên

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ở đó tổng trên được lấy qua tất cả các phép hoán vị $\sigma \in S_n$.

Định nghĩa theo kiểu truy hồi

1) Ma trận cấp một $\det a = a$,
2) Ma trận cấp hai $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$,
3) Ma trận cấp $n \geq 3$:

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det M_{1n}.$$

Định thức

Các tính chất của định thức

1) $\det A = \det A^T$. Điều này có nghĩa là các tính chất của định thức nếu đúng với hàng thì cũng đúng với cột.

Định thức

Các tính chất của định thức

1) $\det A = \det A^T$. Điều này có nghĩa là các tính chất của định thức nếu đúng với hàng thì cũng đúng với cột.
2) Công thức khai triển một định thức theo một hàng hay cột bất kì:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Ở đó M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.

Định thức

Các tính chất của định thức

1) $\det A = \det A^T$. Điều này có nghĩa là các tính chất của định thức nếu đúng với hàng thì cũng đúng với cột.

2) Công thức khai triển một định thức theo một hàng hay cột bất kì:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Ở đó M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.

3) Một định thức có một hàng bằng 0 thì bằng 0.

Định thức

Các tính chất của định thức

1) $\det A = \det A^T$. Điều này có nghĩa là các tính chất của định thức nếu đúng với hàng thì cũng đúng với cột.
2) Công thức khai triển một định thức theo một hàng hay cột bất kì:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Ở đó M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.
3) Một định thức có một hàng bằng 0 thì bằng 0.
4) Định thức của một ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo.

Định thức

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

	Phép biến đổi	Định thức
6)	Đổi chỗ hai hàng	Đổi dấu
7)	Thêm vào một hàng k lần hàng khác	Không đổi
8)	Nhân một hàng với $k \neq 0$	Nhân lên với k

Mục đích: Đưa về định thức của ma trận tam giác, hoặc định thức của một ma trận đơn giản.

Định thức của tích hai ma trận

9) $\det(AB) = \det A \det B$.

Các phương pháp tính định thức

Phương pháp khai triển

Khai triển theo hàng (cột) nào đó sao cho việc tính định thức là đơn giản nhất (thường chọn hàng, cột có nhiều số 0 nhất).

Phương pháp biến đổi sơ cấp

Các phép biến đổi sau đây được gọi là phép biến đổi sơ cấp trên hàng:

i) Đổi chỗ hai hàng,

ii) Nhân các phần tử của một hàng với một số $k \neq 0$,

iii) Thêm vào một hàng một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác.

Ví dụ

Tính định thức của ma trận $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Hạng của ma trận

Định nghĩa

Ma trận mà các phần tử của nó là giao của p hàng và p cột của ma trận vuông A được gọi là ma trận con cấp p của A. Định thức tương ứng được gọi là định thức con cấp p. Kí hiệu

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & \dots & a_{i_pk_p} \end{vmatrix}$$

Nếu $i_1 = k_1, \dots, i_p = k_p$ thì định thức con được gọi là định thức con chính cấp p.

Định nghĩa

Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A, kí hiệu $r(A)$ hay $\rho(A)$.

Hạng của ma trận

Ma trận bậc thang

1) Các hàng khác không luôn ở trên các hàng bằng không
2) Trên hai hàng khác không thì phần tử đầu tiên khác không ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

Định lý

Hạng của một ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Hạng của ma trận

Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

1) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa A về ma trận bậc thang,
2) đếm số hàng khác không của nó.

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Hạng của ma trận

Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

1) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa A về ma trận bậc thang,
2) đếm số hàng khác không của nó.

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Biến đổi $A \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ *nên* $r(A) = 4$.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

Định thức vs Hạng của ma trận

Phép biến đổi	Định thức	Hạng
Đổi chỗ hai hàng	Đổi dấu	Không đổi
Thêm vào một hàng k lần hàng khác	Không đổi	Không đổi
Nhân một hàng với $k \neq 0$	Nhân lên với k	Không đổi

Chú ý

Vai trò của hàng và cột là như nhau đối với Định thức và Hạng của ma trận.

Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = I$$

thì ta nói B là ma trận nghịch đảo của ma trận A và được kí hiệu là A^{-1}.

Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Ma trận nghịch đảo của ma trận A nếu có thì duy nhất.

Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo

Nếu $\det A \neq 0$ thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^T,$$

ở đó $C = [c_{ij}]$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Ma trận nghịch đảo

Ma trận nghịch đảo của tích hai ma trận

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n khả nghịch. Khi đó AB cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Phương pháp Gauss-Jordan

1) Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.
2) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về ma trận đơn vị I, đồng thời tác động phép biến đổi sơ cấp trên ma trận I.
3) Khi A đã biến đổi thành I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Các ví dụ

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo

$$a)\ B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chú ý

Phương pháp Gauss - Jordan chỉ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Các định thức đặc biệt

Ma trận Vandermonde

Ma trận Vandermonde cấp n là ma trận vuông cấp n có dạng

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Bổ đề

$$\det V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Các định thức đặc biệt

Ma trận Cauchy

Ma trận Cauchy là ma trận vuông cấp n, $A = (a_{ij})$, ở đó $a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$.

Bổ đề

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(x_i + x_j)}$$

Các định thức đặc biệt

Ma trận Frobenius

Ma trận Frobenius

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

hay ma trận bạn của đa thức $p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0$.

Bổ đề

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$$

Các định thức đặc biệt

Ma trận ba đường chéo

Ma trận ba đường chéo có dạng

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Bổ đề

$$\Delta_k = a_k\Delta_{k-1} - b_{k-1}c_k\Delta_{k-2} \text{ } \textit{với } k \geq 2, \text{ } \textit{ở đó } \Delta_k = \det(a_{ij})_{i,j=1}^k.$$

Ma trận ba đường chéo

Trường hợp đặc biệt, kí hiệu

$$(a_1 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1\dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

ta có công thức truy hồi thông qua liên phân số sau:

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Các định thức đặc biệt

Ma trận khối

Giả sử $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, ở đó A_{11} và A_{22} là các ma trận vuông cấp m và cấp n tương ứng.

Định lý

Giả sử D là một ma trận vuông cấp m và B là ma trận cỡ $n \times m$. Khi đó,

$$\begin{vmatrix} DA_{11} & DA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |D|.|A| \text{ và } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + BA_{11} & A_{22} + BA_{12} \end{vmatrix} = |A|.$$

Một số công thức tính định thức khác

Công thức Binet - Cauchy

Giả sử A và B là các ma trận cỡ $n \times m$ và $m \times n$ tương ứng và $n \leq m$. Khi đó

$$\det AB = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq m} A_{k_1 \ldots k_n} B^{k_1 \ldots k_n},$$

ở đó $A_{k_1 \ldots k_n}$ là định thức con thu được từ các cột $k_1, \ldots, k_n$ của A và $B^{k_1 \ldots k_n}$ là định thức con thu được từ các hàng $k_1, \ldots, k_n$ của B.

Công thức khai triển Laplace

Cố định p hàng $i_1, i_2, \ldots, i_p$ của A với $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Khi đó

$$\det A = \sum_{j_1 < \ldots < j_p, j_{p+1} < \ldots < j_n, i_{p+1} < \ldots < i_n} (-1)^{i+j} A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ j_1 & \ldots & j_p \end{pmatrix} . A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \ldots & i_n \\ j_{p+1} & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

ở đó $i = i_1 + \ldots + i_p, j = j_1 + \ldots + j_p$.

Ma trận liên hợp

Ma trận liên hợp

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Ma trận $\operatorname{adj} A = (A_{ij})^T$ gọi là ma trận liên hợp của A.

Một số tính chất

1) $\operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B . \operatorname{adj} A$
2) $\operatorname{adj} XAX^{-1} = X(\operatorname{adj} A)X^{-1}$
3) Nếu $AB = BA$ thì $(\operatorname{adj} A)B = B(\operatorname{adj} A)$.

Định lý

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix} = |A|^{p-1} . \begin{vmatrix} A_{p+1,p+1} & \dots & A_{p+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n,p+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Hệ quả: Nếu A là ma trận suy biến thì $\operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) \leq 1$.

Hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Nếu đặt $A = [a_{ij}]$ là ma trận hệ số của hệ và $b = [b_1 b_2 \dots b_m]^T$ là ma trận cột vế phải, $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ là ma trận ẩn thì ta có dạng ma trận của hệ được viết đơn giản như sau

$$Ax = b$$

Hệ Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Định nghĩa

Hệ (2) gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ *và* $\det A \neq 0$

Định lý (Định lý Cramer)

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính bằng công thức $x = A^{-1}b$*, tức là*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

trong đó A_j *là ma trận suy từ* A *bằng cách thay cột thứ* j *bởi cột VP* b*.*

Biện luận hệ PTTT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

Định lý Kronecker-Capelli

Hệ (3) có nghiệm khi và chỉ khi $r\left(\overline{A}\right) = r(A)$, trong đó $\overline{A}$ là ma trận bổ sung tức là ma trận A thêm cột b, $\overline{A} = [A|b]$.

Hệ quả

1. *Nếu $r\left(\overline{A}\right) \neq r(A)$ thì hệ (3) vô nghiệm*
2. *Nếu $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = n$ thì hệ (3) có nghiệm duy nhất*
3. *Nếu $r\left(\overline{A}\right) = r(A) < n$ thì hệ (3) có vô số nghiệm*

Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính

B1. Viết ma trận A cạnh véctơ cột b ta được ma trận bổ sung $\overline{A}$.

B2. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận A về ma trận bậc thang.

B3. Biện luận theo kết quả thu được.

Ví dụ

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}$

Chú ý

Phương pháp Gauss chỉ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

Định thức vs Hạng của ma trận

Phép biến đổi	Định thức	Hạng
Đổi chỗ hai hàng	Đổi dấu	Không đổi
Thêm vào một hàng k lần hàng khác	Không đổi	Không đổi
Nhân một hàng với $k \neq 0$	Nhân lên với k	Không đổi

Phương pháp Gauss tìm ma trận nghịch đảo và giải HPT

Phép biến đổi	Hệ PT	Ma trận nghịch đảo
Đổi chỗ hai hàng	Không đổi	Được phép sử dụng
Thêm vào một hàng k lần hàng khác	Không đổi	Được phép sử dụng
Nhân một hàng với $k \neq 0$	Không đổi	Được phép sử dụng

Chú ý: PP Gauss chỉ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Lý do: Hệ PT và ma trận bổ sung $[A|I]$ được viết theo lối hàng.

Chương 2: Đại số tuyến tính và hình học Aphin

1. Phép tính ma trận
   - Ma trận và các phép tính trên ma trận
   - Hạng của một ma trận, Ma trận nghịch đảo
   - Hệ phương trình tuyến tính
2. Không gian véctơ
   - Không gian véctơ, KGVT con, Tổng trực tiếp của các KGVT con
   - Hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh, hạng của một hệ các véctơ
   - Số chiều, cơ sở của một không gian vectơ
3. Ánh xạ tuyến tính
   - Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân
   - Ma trận của một ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở
   - Hạng của một ánh xạ tuyến tính, định thức của một tự đồng cấu
   - Không gian $\mathcal{L}(E, F)$, đại số $\mathcal{L}(E)$
4. Hình học aphin trong mặt phẳng và trong không gian
   - Phép tịnh tiến, các không gian aphin con
   - Ánh xạ aphin, biến đổi aphin
   - Mốc Đề Các

Không gian véctơ

Định nghĩa

Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một không gian véctơ *trên $\mathbb{R}$ nếu nó được trang bị hai phép toán gồm:*

a) *Phép cộng véctơ*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \end{aligned}$$

b) *Phép nhân véctơ với vô hướng*

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (a, \alpha) &\mapsto a\alpha \end{aligned}$$

thoả mãn 8 tiên đề về KGVT.

Không gian véctơ

8 tiên đề về KGVT

(V1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(V2) $\exists 0 \in V : 0+\alpha=\alpha+0=\alpha \forall \alpha \in V$

(V3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha'+\alpha=\alpha+\alpha'=0$

(V4) $\alpha+\beta=\beta+\alpha \forall \alpha, \beta \in V$

(V5) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V6) $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta \forall a \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in V$

(V7) $a(b\alpha)=(ab)\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V8) $1\alpha=\alpha \quad \forall \alpha \in V$

i) Bốn tiên đề đầu nói rằng $(V,+)$ là một nhóm abel.

ii) Tiên đề $(V5,6)$ nói rằng phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng véctơ và cộng vô hướng.

iii) Tiên đề $(V8)$ nói rằng phép nhân đã được chuẩn hoá.

Không gian véctơ

Ví dụ

Tập V với các phép toán kèm theo có phải là không gian véctơ không?

a) $V = \{(x, y, z) \,|x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *với các phép toán xác định như sau*

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (|k|\, x, |k|\, y, |k|\, z)$$

b) $V = \{x = (x_1, x_2) \,|x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *với các phép toán xác định như sau:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (x_1^k, x_2^k)$$

trong đó k là số thực bất kỳ

Không gian véctơ con

Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ, W là một tập con của V. Nếu W cùng với hai phép toán thừa hưởng từ V cũng là một không gian véctơ thì W được gọi là không gian véctơ con của V.

Điều kiện cần và đủ để $W \subset V$ là KGVT con

Tập con khác rỗng $W \subset V$ là không gian véctơ con của V nếu và chỉ nếu W khép kín với hai phép toán trên V, nghĩa là

$$\begin{cases} \alpha + \beta \in W, & \forall \alpha, \beta \in W \\ a\alpha \in W, & \forall a \in \mathbb{R}, \alpha \in W \end{cases}$$

Tổng của các KGVT con

Ví dụ

Cho V_1, V_2 *là hai không gian véc tơ con của KGVT* V. *Chứng minh:*

a) $V_1 \cap V_2$ *là KGVT con của* V.

b) *Cho* $V_1 + V_2 := \{x_1 + x_2 \,|x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. *Chứng minh* $V_1 + V_2$ *là KGVT con của* V.

Định nghĩa

Cho V_1, V_2 *là hai KGVT con của KGVT* V. *Khi đó,* V *được gọi là tổng trực tiếp của* V_1 *và* V_2 *và viết* $V = V_1 \oplus V_2$ *nếu*
$V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{0\}$. *Khi đó ta cũng nói* V_1, V_2 *là bù nhau.*

Tổng của các KGVT con

Ví dụ

Cho V_1, V_2 *là hai không gian véc tơ con của KGVT* V*. Chứng minh:*

a) $V_1 \cap V_2$ *là KGVT con của* V*.*

b) *Cho* $V_1 + V_2 := \{x_1 + x_2 \, | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$*. Chứng minh* $V_1 + V_2$ *là KGVT con của* V*.*

Định nghĩa

Cho V_1, V_2 *là hai KGVT con của KGVT* V*. Khi đó,* V *được gọi là tổng trực tiếp của* V_1 *và* V_2 *và viết* $V = V_1 \oplus V_2$ *nếu*
$V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{0\}$*. Khi đó ta cũng nói* V_1, V_2 *là bù nhau.*

Ví dụ

Chứng minh rằng $V = V_1 \oplus V_2$ *khi và chỉ khi mọi véc tơ* x *của* V *có biểu diễn duy nhất dưới dạng* $x = x_1 + x_2$*,* $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$*.*

Cho V là một không gian véctơ và $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

Không gian con sinh bởi một họ véctơ

Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véctơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu $\text{span}(S)$.

$$\text{span}(S) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Định lý

$W = \text{span}(V)$ *là một không gian véctơ con của* V.

Hệ sinh của một không gian véctơ

Nếu $\text{span}(S) = V$, nghĩa là mọi $v \in V$ đều có biểu diễn

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n,$$

thì ta nói họ S sinh ra V hay không gian V sinh bởi họ S.

Hệ độc lập tuyến tính, cơ sở

Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

a) Hệ $(v_1, \ldots, v_n)$ được gọi là *ĐLTT* nếu hệ thức

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n = 0$$

chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

b) Hệ $(v_1, \ldots, v_n)$ được gọi là *PTTT* nếu nó không ĐLTT.

Hệ độc lập tuyến tính, cơ sở

Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

a) Hệ $(v_1, \ldots, v_n)$ được gọi là *ĐLTT* nếu hệ thức

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n = 0$$

chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

b) Hệ $(v_1, \ldots, v_n)$ được gọi là *PTTT* nếu nó không ĐLTT.

Cơ sở - Tọa độ

i) Hệ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ được gọi là một cơ sở của V nếu mỗi véctơ $v \in V$ có biểu diễn

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n, \text{ một cách duy nhất.}$$

ii) Khi đó, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là toạ độ của véctơ v trong cơ sở $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, kí hiệu $[v]_S$.

Hệ sinh, Độc lập tuyến tính, Cơ sở

Cho V là một KGVT và $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

Ba khái niệm quan trọng

1) **Hệ sinh:** $V = \text{span}(S) \Leftrightarrow \forall v \in V$ đều có biểu diễn

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n.$$

2) **Độc lập tuyến tính:**

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

3) **Cơ sở:** S là một cơ sở của $V \Leftrightarrow \forall v \in V$ đều có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n.$$

Định lý

S là một cơ sở của V khi và chỉ khi nó là một hệ sinh độc lập tuyến tính.

Số chiều của KGVT

Định nghĩa

KGVT V được gọi là hữu hạn sinh nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.

Định lý

Giả sử $V \neq \emptyset$ là một KGVT hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.

Số chiều của KGVT

Định nghĩa

KGVT V được gọi là hữu hạn sinh nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.

Định lý

Giả sử $V \neq \emptyset$ là một KGVT hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa

a) *Số phần tử của mỗi cơ sở của KGVT hữu hạn sinh $V \neq \{0\}$ được gọi là* số chiều hay thứ nguyên *của KGVT V, kí hiệu là* $\dim V$. *Nếu* $V = \{0\}$ *thì* $\dim V = 0$.

b) *Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một KGVT* vô hạn chiều.

Hạng của một họ các véctơ

Định nghĩa

Xét họ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset V$. *Số véctơ độc lập tuyến tính tối đa có thể rút ra từ họ* S *được gọi là hạng của họ* S *và kí hiệu là* $r(S)$ *hay* $\operatorname{rank}(S)$.

Cách tìm hạng của họ véctơ

Hạng của họ véctơ S bằng hạng của ma trận toạ độ của nó trong bất kì cơ sở nào của không gian V.

i) Viết các tọa độ của các véctơ của S theo hàng,

ii) Dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về dạng bậc thang.

Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ là một họ các véctơ của V. Khi đó

Định lý

i) $\dim \operatorname{span}(S) = r(S) = r$, *và*

ii) mọi họ r véctơ ĐLTT rút ra từ S đều là một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$.

Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ là một họ các véctơ của V. Khi đó

Định lý

i) $\dim \operatorname{span}(S) = r(S) = r$, *và*

ii) mọi họ r véctơ ĐLTT rút ra từ S đều là một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$.

Phương pháp tìm cơ sở của span(S)

i) Viết các tọa độ của các véctơ của S theo hàng,

ii) Dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về dạng bậc thang.

Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ là một họ các véctơ của V. Khi đó

Định lý

i) $\dim \operatorname{span}(S) = r(S) = r$, *và*

ii) mọi họ r véctơ ĐLTT rút ra từ S đều là một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$.

Phương pháp tìm cơ sở của $\operatorname{span}(S)$

i) Viết các tọa độ của các véctơ của S theo hàng,

ii) Dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về dạng bậc thang.

iii) Khi đó một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$ chính là các véctơ có toạ độ là các hàng khác không của ma trận bậc thang thu được.

Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Ví dụ

Cho $v_1 = (2, 0, 1, 3), v_2 = (1, 1, 0, -1), v_3 = (0, -2, 1, 5), v_4 = (1, -3, 2, 8)$.

a) *Tìm cơ sở và số chiều của* $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$.

b) *Đặt* $V_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2), V_2 = \operatorname{span}(v_3, v_4)$. *Tìm cơ sở và số chiều của* $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Định lý

Chứng minh rằng $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Ví dụ

Cho $v_1 = (2, 0, 1, 3)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, -2, 1, 5)$, $v_4 = (1, -3, 2, 8)$.

a) *Tìm cơ sở và số chiều của* $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$.

b) *Đặt* $V_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2)$, $V_2 = \operatorname{span}(v_3, v_4)$. *Tìm cơ sở và số chiều của* $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

Định lý

Chứng minh rằng $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Định lý

Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ bằng n trừ đi hạng của A.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

$\operatorname{rank}(S) = \dim \operatorname{span}(S) = \operatorname{rank}(A)$, ở đó A là ma trận tọa độ các vectơ của S.

Hạng của họ véc tơ, Cơ sở và số chiều của span(S)

Phép biến đổi	Tìm $\operatorname{rank}(S) = \dim \operatorname{span}(S)$
Đổi chỗ hai hàng	Được phép sử dụng
Thêm vào một hàng k lần hàng khác	Được phép sử dụng
Nhân một hàng với $k \neq 0$	Được phép sử dụng

i) **Chú ý:** Nếu chỉ cần tìm $\operatorname{rank}(S) = \dim \operatorname{span}(S)$ thì các phép biến đổi trên hàng và trên cột có vai trò như nhau.

ii) **Tuy nhiên:** Nếu muốn tìm một cơ sở của span(S) thì ma trận A nên viết theo lối hàng và các phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên hàng.

iii) **Bản chất:**

Bài toán đổi cơ sở

Đặt vấn đề

Trong không gian véctơ n chiều V giả sử có hai cơ sở

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ và } \mathcal{B}' = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$$

Kí hiệu $[v]_{\mathcal{B}} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T$ là toạ độ cột của véctơ $v \in V$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $[v]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$

Bài toán đổi cơ sở

Đặt vấn đề

Trong không gian véctơ n chiều V giả sử có hai cơ sở

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ và } \mathcal{B}' = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$$

Kí hiệu $[v]_{\mathcal{B}} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T$ là toạ độ cột của véctơ $v \in V$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $[v]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$

Ma trận chuyển

Nếu tồn tại ma trận P thoả mãn

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ với mỗi } v \in V$$

thì ma trận P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Bài toán đổi cơ sở

Định lý

Với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ của V thì ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức

$$P = \left[[e'_1]_{\mathcal{B}}[e'_2]_{\mathcal{B}}\ldots[e'_n]_{\mathcal{B}}\right]$$

Bài toán đổi cơ sở

Định lý

Với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ của V thì ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức

$$P = \left[[e_1']_{\mathcal{B}}[e_2']_{\mathcal{B}} \ldots [e_n']_{\mathcal{B}}\right]$$

Định lý

Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ thì

(a) P khả nghịch, và

(b) P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$

Ví dụ

$P_3[x]$ *với hai cơ sở* $E = \{1, x, x^2, x^3\}$, $B = \{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\}$.

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B và B sang E.

b) Tìm tọa độ của $v = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$ đối với cơ sở B.

Chương 2: Đại số tuyến tính và hình học Aphin

1. Phép tính ma trận
   - Ma trận và các phép tính trên ma trận
   - Hạng của một ma trận, Ma trận nghịch đảo
   - Hệ phương trình tuyến tính
2. Không gian véctơ
   - Không gian véctơ, KGVT con, Tổng trực tiếp của các KGVT con
   - Hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh, hạng của một hệ các véctơ
   - Số chiều, cơ sở của một không gian vectơ
3. Ánh xạ tuyến tính
   - Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân
   - Ma trận của một ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở
   - Hạng của một ánh xạ tuyến tính, định thức của một tự đồng cấu
   - Không gian $\mathcal{L}(E, F)$, đại số $\mathcal{L}(E)$
4. Hình học aphin trong mặt phẳng và trong không gian
   - Phép tịnh tiến, các không gian aphin con
   - Ánh xạ aphin, biến đổi aphin
   - Mốc Đề Các

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ánh xạ $T : V \to W$ *từ không gian véctơ* V *tới không gian véctơ* W *được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

(ii) $T(ku) = kT(u), \forall k \in \mathbb{R}, u \in V$

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ánh xạ $T: V \to W$ *từ không gian véctơ* V *tới không gian véctơ* W *được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

(ii) $T(ku) = kT(u), \forall k \in \mathbb{R}, u \in V$

Một số tính chất ban đầu

a) $T(0) = 0$.

b) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$.

c) $T(u-v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in V$.

Ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$,

ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(X) = AX$, *ở đó* $A \in M_{m\times n}$,

iii) $f : P_n[x] \to P_n[x], f \mapsto f'$.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T : V \to W$ *là một AXTT. Khi đó*

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x | x \in V, T(x) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của T.

$$\mathrm{Im}(T) := \{y | y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\} = \{T(x) | x \in V\}$$

được gọi là ảnh của T.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T : V \to W$ là một AXTT. Khi đó

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x | x \in V, T(x) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của T.

$$\mathrm{Im}(T) := \{y | y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\} = \{T(x) | x \in V\}$$

được gọi là ảnh của T.

Các tính chất của hạt nhân và ảnh

i) $\mathrm{Ker}(T)$ là một không gian véctơ con của V.

ii) $\mathrm{Im}(T)$ là một không gian véctơ con của W.

iii) $\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Bổ đề

Cho $T : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính và* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *là một cơ sở của* V. *Khi đó* $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Bổ đề

Cho $T : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính và* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *là một cơ sở của* V. *Khi đó* $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$.

Bổ đề

Cho $f : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng*

a) f *là đơn ánh khi và chỉ khi* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

b) f *là toàn ánh khi và chỉ khi* $\operatorname{Im} f = W$.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Bổ đề

Cho $T : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính và* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *là một cơ sở của* V. *Khi đó* $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

Bổ đề

Cho $f : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng*

a) f *là đơn ánh khi và chỉ khi* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

b) f *là toàn ánh khi và chỉ khi* $\operatorname{Im} f = W$.

Hệ quả

Cho V, V' *là 2 KGVT n chiều và* $f : V \to V'$ *là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:*

a) f *là đơn ánh.* *b)* f *là toàn ánh.* *c)* f *là song ánh.*

Không gian thương

Nếu W là một KGVT con của V thì V có thể được phân thành lớp các tập con như sau:

$$M_v = \{x \in V | x - v \in W\}.$$

Khi đó trên tập thương

$$V/W = \{M_v | v \in V\},$$

xây dựng một cấu trúc tuyến tính bằng cách đặt $\begin{cases} \lambda M_v = M_{\lambda v}, \\ M_v + M_{v'} = M_{v+v'}. \end{cases}$

Không gian thương

Nếu W là một KGVT con của V thì V có thể được phân thành lớp các tập con như sau:

$$M_v = \{x \in V | x - v \in W\}.$$

Khi đó trên tập thương

$$V/W = \{M_v | v \in V\},$$

xây dựng một cấu trúc tuyến tính bằng cách đặt $\begin{cases} \lambda M_v = M_{\lambda v}, \\ M_v + M_{v'} = M_{v+v'}. \end{cases}$

Định nghĩa

Không gian V/W được gọi là không gian thương của V modulo W

Ánh xạ

$$p : V \to V/W, p(v) = M_v,$$

được gọi là phép chiếu chính tắc. Hiển nhiên, $\mathrm{Ker}\, p = W$ và $\mathrm{Im}\, p = V/W$.

Không gian thương

Cho W là một KGVT con của V và V/W là không gian thương của V modulo W.

Bổ đề

$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

Định lý

i) $(U/W)/(V/W) \cong U/V$ *nếu* $W \subset V \subset U$;

ii) $V/V \cup W \cong (V+W)/W$ *nếu* $V, W \subset U$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đặt vấn đề

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian véctơ m chiều W. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V và $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của W với

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Tìm mối liên hệ giữa $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ với $[x]_{\mathcal{B}}$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Đặt vấn đề

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian véctơ m chiều W. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V và $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của W với

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Tìm mối liên hệ giữa $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ với $[x]_{\mathcal{B}}$.

Định nghĩa

Ma trận A cỡ $m \times n$ thoả mãn tính chất

$$[T(x)]_{\mathcal{B}'} = A.[x]_{\mathcal{B}}, \forall x \in V,$$

nếu tồn tại, được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ trong V và $\mathcal{B}'$ trong W.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Đối với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ của V và $\mathcal{B}'$ của W, ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức:

$$A = [[T(u_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(u_2)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [T(u_n)]_{\mathcal{B}'},]$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Đối với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ của V và $\mathcal{B}'$ của W, ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức:

$$A = [[T(u_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(u_2)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [T(u_n)]_{\mathcal{B}'},]$$

Ví dụ

Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2 p, \forall p \in P_2$.

a) *Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.*

b) *Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.*

c) *Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1 + x, 2x, 1 + x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.*

Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\text{Tính trực tiếp}} & T(x) \\ (1)\downarrow & & \uparrow(3) \\ [x]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[\text{Tính gián tiếp (2)}]{\text{Nhân } A[x]_{\mathcal{B}}} & [T(x)]_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

Tính $T(x)$ gián tiếp qua 3 bước

1) Tìm ma trận toạ độ $[x]_{\mathcal{B}}$.
2) Tính $[T(x)]_{\mathcal{B}'} = [T(x)]_{\mathcal{B}'}$.
3) Từ $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ ta suy ra $T(x)$.

Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "\text{Tính trực tiếp}"] \arrow[d, "(1)"'] & & T(x) \\
{[x]_{\mathcal{B}}} \arrow[rr, "\text{Nhân } A[x]_{\mathcal{B}}", "\text{Tính gián tiếp (2)}"'] & & {[T(x)]_{\mathcal{B}'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}
$$

Tính $T(x)$ gián tiếp qua 3 bước

1) Tìm ma trận toạ độ $[x]_{\mathcal{B}}$.
2) Tính $[T(x)]_{\mathcal{B}'} = [T(x)]_{\mathcal{B}'}$.
3) Từ $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ ta suy ra $T(x)$.

Tầm quan trọng của cách tính gián tiếp

i) Thứ nhất là nó cung cấp một phương tiện để tính toán các ánh xạ tuyến tính trên máy tính điện tử.

ii) Thứ hai là chúng ta có thể chọn các cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ sao cho ma trận A càng đơn giản càng tốt. Khi đó có thể cung cấp những thông tin quan trọng về ánh xạ tuyến tính.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Tìm ma trận của các ánh xạ sau đây

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2, \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

   a) *trong cặp cơ sở chính tắc,*
   b) *đối với cơ sở* $B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,2)\}$.

2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2, \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$

   a) *trong cặp cơ sở chính tắc,*
   b) *trong cặp cơ sở* $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *của* $\mathbb{R}^3$ *và* $B = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ *của* $\mathbb{R}^4$.

Hạng của một ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của không gian $\operatorname{Im}(T)$ *được gọi là hạng của T, kí hiệu là* $\operatorname{rank}(T)$*:*

$$\operatorname{rank}(T) = \dim \operatorname{Im}(T)$$

Hạng của một ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nếu $T : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của không gian* $\operatorname{Im}(T)$ *được gọi là hạng của* T*, kí hiệu là* $\operatorname{rank}(T)$*:*

$$\operatorname{rank}(T) = \dim \operatorname{Im}(T)$$

Định lý về số chiều

Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian W thì

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{rank}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T).$$

Hạng của một ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của không gian $\operatorname{Im}(T)$ được gọi là hạng của T, kí hiệu là $\operatorname{rank}(T)$:

$$\operatorname{rank}(T) = \dim \operatorname{Im}(T)$$

Định lý về số chiều

Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian W thì

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{rank}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T).$$

Hệ quả

Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$ bằng $n - \operatorname{rank}(A)$.

Hạng của ánh xạ tuyến tính vs Hạng của ma trận

Định lý

Hạng của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ bằng hạng của ma trận của nó trong bất kì cặp cơ sở nào.

Hệ quả

i) $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, *nếu* $A, B \in M_{m \times n}$.

ii) $\operatorname{rank}(AB) \leq \min \{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$, *nếu* $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times p}$.

Hạng của ánh xạ tuyến tính vs Hạng của ma trận

Định lý

Hạng của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ bằng hạng của ma trận của nó trong bất kì cặp cơ sở nào.

Hệ quả

i) $\text{rank}(A+B) \le \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, *nếu* $A, B \in M_{m\times n}$.

ii) $\text{rank}(AB) \le \min\{\text{rank}\, A, \text{rank}\, B\}$, *nếu* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$.

Định lý (Định lý Sylvester)

Cho A, B *là các ma trận cỡ* $m \times n$ *và* $n \times p$ *tương ứng. Khi đó*

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) - \dim(\text{Im}\, B \cap \text{Ker}\, A)$$

Nói riêng,

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \le \text{rank}(AB) \le \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính qua phép đổi cơ sở

Định lý

Cho $T : V \to V$ *là một toán tử tuyến tính,* $\dim V = n$*. Nếu*

i) A là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}$ và

ii) A' là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}'$

thì

$$A' = P^{-1}BP,$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính qua phép đổi cơ sở

Định lý

Cho $T : V \to V$ *là một toán tử tuyến tính,* dim $V = n$*. Nếu*

i) A là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}$ và

ii) A' là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}'$

thì

$$A' = P^{-1}BP,$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Ví dụ

Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2, \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc.

b) Tìm ma trận của T đối với cơ sở $u_1 = (1, 1), u_2 = (1, 2)$.

Ma trận đồng dạng

Chú ý

Ma trận của T đối với cơ sở mới là

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A' này có dạng chéo, nó đơn giản hơn A và có nhiều tính chất đáng chú ý như

$$(A')^n == \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = (PA'P^{-1})^n = P(A')^n P^{-1}.$$

Ma trận đồng dạng

Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Ta nói B đồng dạng với A, kí hiệu $B \sim A$, nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Đặt vấn đề

Cho $f: V \to V$ là một tự đồng cấu. Việc nghiên cứu f trên toàn không gian V đôi khi gặp khó khăn, vì V quá lớn. Người ta muốn tránh điều đó bằng cách hạn chế f lên một số lớp không gian con nào đó U của V.

Định nghĩa

Không gian véctơ con U của V được gọi là một không gian con ổn định *đối với f nếu $f(U) \subset U$.*

i) Các không gian con sau đây là ổn định: $\{0\}, V, \operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$.

ii) Nếu có các không gian con ổn định U_1, U_2 sao cho $V = U_1 \oplus U_2$ thì $f|_{U_1}$ và $f|_{U_2}$ đều là các tự đồng cấu. Khi đó việc nghiên cứu f trên V có thể quy về việc nghiên cứu f_i trên U_i.

Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Định nghĩa

Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Số thực λ gọi là trị riêng của A nếu phương trình

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

có nghiệm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Định nghĩa

Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Số thực λ gọi là trị riêng của A nếu phương trình

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

có nghiệm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Để tìm trị riêng của ma trận vuông A cấp n, ta viết $Ax = \lambda x$ dưới dạng

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{4}$$

Để λ là trị riêng của A, điều kiện cần và đủ là

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

Định nghĩa

i) Phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng,

ii) đa thức $\det(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Trị riêng của hai ma trận đồng dạng

Hai ma trận đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng, nghĩa là có các trị riêng như nhau.

Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Trị riêng của hai ma trận đồng dạng

Hai ma trận đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng, nghĩa là có các trị riêng như nhau.

Nhắc lại: VTR của ma trận A ứng với trị riêng λ là nghiệm khác không của phương trình $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$.

Định nghĩa

Ta gọi không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$ là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ.

Ví dụ

Tìm các cơ sở của không gian riêng của $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính

Định nghĩa

Giả sử V là một không gian véctơ. Số λ gọi là trị riêng của của toán tử tuyến tính $T : V \to V$ nếu tồn tại véctơ $v \neq 0$ sao cho $T(v) = \lambda v$.

Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính

Định nghĩa

Giả sử V là một không gian véctơ. Số λ gọi là trị riêng của của toán tử tuyến tính $T : V \to V$ nếu tồn tại véctơ $v \neq 0$ sao cho $T(v) = \lambda v$.

Định lý

Cho $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính có ma trận là A đối với một cơ sở nào đó $\mathcal{B}$ của V. Khi đó,

i) λ là trị riêng của $T \Leftrightarrow \lambda$ là trị riêng của A.

ii) Véctơ v là véctơ riêng của T ứng với trị riêng $\lambda \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$ là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ.

Ví dụ

Tìm các trị riêng và véc tơ riêng của $T : P_2[X] \to P_2[X]$ xác định bởi

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2.$$

Chéo hoá ma trận

Đặt vấn đề

Cho $T : V \to V$ là một TTTT, $\dim V = n$. Tìm một cơ sở $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ của V sao cho ma trận của T đối với $\mathcal{B}$ là ma trận chéo,

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Chéo hoá ma trận

Đặt vấn đề

Cho $T : V \to V$ là một TTTT, dim $V = n$. Tìm một cơ sở $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ của V sao cho ma trận của T đối với $\mathcal{B}$ là ma trận chéo,

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} T(p_1) & = \lambda_1 p_1, \\ T(p_1) & = \lambda_2 p_2, \\ & \vdots \\ T(p_n) & = \lambda_1 p_n. \end{cases}$$

Chéo hoá ma trận

Đặt vấn đề

Cho $T : V \to V$ là một TTTT, dim $V = n$. Tìm một cơ sở $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ của V sao cho ma trận của T đối với $\mathcal{B}$ là ma trận chéo,

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} T(p_1) & = \lambda_1 p_1, \\ T(p_1) & = \lambda_2 p_2, \\ & \vdots \\ T(p_n) & = \lambda_1 p_n. \end{cases}$$

Cách giải

i) Tìm ma trận A của T trong một cơ sở E nào đó của V.

ii) Xét một phép đổi cơ sở từ E sang $\mathcal{B}$. Khi đó, ma trận mới của T là $A' = P^{-1}AP$.

Chéo hoá ma trận

Hai bài toán tương đương

i) Tìm một cơ sở $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ của V sao cho ma trận của T đối với $\mathcal{B}$ là ma trận chéo,

ii) Cho một ma trận vuông A. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $A' = P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

Sự chéo hoá

i) Nếu $\exists P$ khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo thì ta nói ma trận A *chéo hoá được* và ma trận P làm chéo hoá ma trận A.

ii) Toán tử tuyến tính $f : V \to V$ được gọi là *chéo hoá được* nếu ma trận của nó trong một cơ sở nào đó của V là một ma trận chéo.

Hệ quả

Điều kiện cần và đủ để A chéo hoá được là nó có n véctơ riêng ĐLTT.

Chéo hoá một ma trận

Quy trình chéo hoá một ma trận

1) Tìm các trị riêng của A,
2) Tìm n véctơ riêng ĐLTT $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ứng với $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (kể cả bội).
3) Lập ma trận P có $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các cột.
4) Khi đó ma trận P sẽ làm chéo hoá ma trận A, và

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Ví dụ

Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Chéo hoá một ma trận

Ví dụ

Ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ *có chéo hóa được hay không?*

Ví dụ

Cho $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *xác định bởi* $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$.
Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ *sao cho ma trận của* T *trong cơ sở đó là một ma trận chéo.*

Ví dụ

Cho $T : P_2[X] \to P_2[X]$, $T(a + bx + cx^2) = (2a) + (3b)x + (-2a + 3c)x^2$.
Tìm một cơ sở của $P_2[X]$ *sao cho ma trận của* T *trong cơ sở đó là một ma trận chéo.*

Chéo hóa một ma trận có n trị riêng khác nhau

Bổ đề

Các véc tơ riêng ứng với trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Nếu ma trận A vuông cấp n có n trị riêng khác nhau thì A chéo hoá được.

Ví dụ

Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Vết của ma trận

Định nghĩa

Vết của ma trận A là tổng của các phần tử trên đường chéo của nó, được kí hiệu là $\operatorname{tr} A$.

Dễ thấy

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \operatorname{tr} BA.$$

Do đó,

$$\operatorname{tr} PAP^{-1} = \operatorname{tr} P^{-1}AP = \operatorname{tr} A,$$

nghĩa là, hạng của ma trận của toán tử tuyến tính không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian.

Vết của ma trận

Một số tính chất

i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, \operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A, \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$,

ii) $\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}(BCDA) = \operatorname{tr}(CDAB) = \operatorname{tr}(DABC)$, tuy nhiên $\operatorname{tr} ABC \neq \operatorname{tr} ACB$.

iii) Nếu A là đối xứng và B là phản đối xứng thì $\operatorname{tr} AB = 0$.

iv) $\operatorname{tr} A$ bằng tổng các trị riêng của A (kể cả bội), nghĩa là $\operatorname{tr} A = \sum_i \lambda_i$. Tổng quát hơn, $\operatorname{tr} A^k = \sum_i \lambda_i^k$. Nói riêng, nếu A là ma trận lũy đẳng ($A^2 = A$) thì $\operatorname{tr} A = \operatorname{rank} A$, nếu A là ma trận luỹ linh thì $\operatorname{tr} A = 0$.

Đa thức tối tiểu

Định nghĩa

Đa thức có bậc nhỏ nhất triệt tiêu ma trận A và có hệ số cao nhất bằng 1 được gọi là đa thức tối tiểu *của A.*

Định lý

Mọi đa thức triệt tiêu A đều chia hết cho đa thức tối tiểu của nó.

Định lý (Cayley - Hamilton)

Mỗi ma trận đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.

Một số tính chất sâu hơn về ĐTĐT, trị riêng, véctơ riêng

Bổ đề

Giả sử λ là nghiệm bội p của ĐTĐT của ma trận A vuông cấp n. Khi đó,

a. $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \leq p$.

b. $1 \leq n - \operatorname{rank}(A - \lambda I) \leq p$.

Bổ đề

i) *Các trị riêng của ma trận A^{-1} bằng bằng nghịch đảo của các trị riêng của A (kể cả bội).*

ii) *Các trị riêng của ma trận A^2 bằng bằng bình phương của các trị riêng của A (kể cả bội).*

iii) *Các trị riêng của ma trận A^p bằng luỹ thừa p của các giá trị riêng của A (kể cả bội).*

Một số tính chất sâu hơn về ĐTĐT, trị riêng, véctơ riêng

Bổ đề

Cho A là một ma trận vuông cấp n với các phần tử trong một trường đóng đại số $\mathbb{K}$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng (kể cả bội) của ma trận A. Khi đó,

$$\det f(A) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n),$$

ở đó $f(X)$ là một đa thức với các hệ số trong $\mathbb{K}$ bất kì.

Bổ đề

Nếu $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{s_i}$ là đa thức đặc trưng của A thì đa thức đặc trưng của $f(A)$ với f là một đa thức là $P_{f(A)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (f(\lambda_i - \lambda))^{s_i}$.

Chú ý: Hai Bổ đề trên vẫn đúng nếu thay đa thức $f(x)$ bởi phân thức $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.

Một số ma trận đặc biệt

Ma trận đối xứng - phản xứng

i) Ma trận thực A được gọi là đối xứng nếu $A^T = A$.

ii) Ma trận thực A được gọi là phản đối xứng nếu $A^T = -A$.

Một số tính chất

i) Nếu A là một ma trận phản xứng thì A^2 là một ma trận đối xứng.

ii) Các trị riêng khác 0 của ma trận phản xứng là thuần ảo.

iii) Hạng của một ma trận phản xứng là một số chẵn.

iv) Nếu A là một ma trận phản xứng thì $I + A$ là một ma trận khả nghịch.

v) Nếu A là một ma trận phản xứng, khả nghịch thì A^{-1} cũng là một ma trận phản xứng.

vi) Mọi nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận AB, ở đó A và B là các ma trận phản xứng cấp $2n$, đều có bội lớn hơn 1.

Một số ma trận đặc biệt

Ma trận lũy linh

Ma trận vuông A được gọi là luỹ linh nếu tồn tại số k sao cho $A^k = 0$. Nếu có thêm $A^{k-1} \neq 0$ thì k được gọi là bậc lũy linh của ma trận A.

Một số tính chất

1) $k \leq n$ và $P_A(\lambda) = \lambda^n$.
2) A lũy linh khi và chỉ khi $\mathrm{tr}(A^p) = 0$ với mọi $p = 1, 2, \ldots, n$.
3) A là ma trận lũy linh nếu và chỉ nếu tất cả giá trị riêng của A đều bằng 0.
4) Nếu A là ma trận lũy linh thì $I - A$ là ma trận khả nghịch.
5) Mọi ma trận vuông A luôn có thể phân tích $A = B + C$ với C là một ma trận lũy linh và B là ma trận chéo hóa được và $BC = CB$.
6) Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn B là ma trận lũy linh và $AB = BA$. Khi đó, $\det(A + B) = \det A$.

Một số ma trận đặc biệt

Ma trận lũy đẳng - Toán tử chiếu

i) Ma trận A được gọi là lũy đẳng nếu $A^2 = A$.

ii) Toán tử P được gọi là toán tử chiếu (hay luỹ đẳng) nếu $P^2 = P$.

Một số tính chất

1) Tồn tại một cơ sở sc ma trận của P có dạng $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

2) Nếu P là toán tử chiếu thì $\operatorname{rank} P = \operatorname{tr} P$.

3) Nếu P là toán tử chiếu thì $I - P$ cũng là một toán tử chiếu, hơn nữa $Ker(I - P) = \operatorname{Im} P$ và $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$.

4) Các điều kiện sau là tương đương

a. A là ma trận lũy đẳng.

b. $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A$.

c. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(I - A)$

d. $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$

e. $\operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Im}(I - A) = \{0\}$

Các ma trận đặc biệt

Một số tính chất của ma trận lũy đẳng - Toán tử chiếu

5) A là lũy đẳng $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{tr}(A)$ và $\operatorname{rank}(I - A) = \operatorname{tr}(I - A)$.
6) Nếu $AB = A$ và $BA = B$ thì A, B là các ma trận lũy đẳng.
7) Cho A là ma trận lũy đẳng. Khi đó, $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A \forall k \in \mathbb{N}$.
8) Cho A, B lũy đẳng và $I - (A + B)$ khả nghịch. Khi đó, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
9) Cho P_1 và P_2 là các toán tử chiếu. Khi đó,
   a) $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.
   b) $P_1 - P_2$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$.
10) Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các TTTT trên KGVT n chiều V sao cho $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = I$. Các điều kiện sau là tương đương
    a) $A_1, \ldots, A_k$ là các toán tử chiếu.
    b) $A_iA_j = 0$ với mọi $i \neq j$.
    c) $\operatorname{rank} A_1 + \ldots + \operatorname{rank} A_k = n$.

Các ma trận đặc biệt

Ma trận đối hợp

Toán tử tuyến tính (hoặc ma trận) A được gọi là đối hợp nếu $A^2 = I$.

Một số tính chất

1) P là ma trận lũy đẳng nếu và chỉ nếu $2P - I$ là ma trận đối hợp.
2) Tồn tại một cơ sở của không gian sao cho ma trận của toán tử đối hợp có dạng $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.
3) Nếu A là toán tử đối hợp thì $V = \operatorname{Ker}(A + I) \oplus \operatorname{Ker}(A - I)$.
4) Ma trận A có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu các ma trận A và A^{-1} là đồng dạng.
5) Nếu B là một ma trận khả nghịch sao cho $X^T B X = B$ thì X có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp.
6) A là ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu $\frac{1}{2}(I + A)$ là ma trận lũy đẳng.

Các ma trận đặc biệt

Ma trận hoán vị (giao hoán)

Ma trận hoán vị là ma trận có dạng $C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hoán vị cơ sở.

Các ma trận đặc biệt

Một số tính chất của ma trận hoán vị

1) $P^n = I; P^T = P^{-1}$. Hãy tìm các giá trị riêng của P.
2) Nếu A, B là các ma trận hoán vị thì A và B giao hoán và AB cũng là một ma trận hoán vị.
3) Nếu A là một ma trận hoán vị thì $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A)$ với mọi k.
4) Cho $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$. Khi đó,
   a. $C = f(P)$, ở đó P là ma trận hoán vị cơ sở.
   b. Các rị riêng của C là $f(\omega^k)$, với ω là căn bậc n của 1.
   c. $\det C = \prod_{i=0}^{n-1} f(\omega^i)$.

Chương 2: Đại số tuyến tính và hình học Aphin

1. Phép tính ma trận
   - Ma trận và các phép tính trên ma trận
   - Hạng của một ma trận, Ma trận nghịch đảo
   - Hệ phương trình tuyến tính
2. Không gian véctơ
   - Không gian véctơ, KGVT con, Tổng trực tiếp của các KGVT con
   - Hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh, hạng của một hệ các véctơ
   - Số chiều, cơ sở của một không gian vectơ
3. Ánh xạ tuyến tính
   - Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân
   - Ma trận của một ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở
   - Hạng của một ánh xạ tuyến tính, định thức của một tự đồng cấu
   - Không gian $\mathcal{L}(E, F)$, đại số $\mathcal{L}(E)$
4. Hình học aphin trong mặt phẳng và trong không gian
   - Phép tịnh tiến, các không gian aphin con
   - Ánh xạ aphin, biến đổi aphin
   - Mốc Đề Các

Các không gian affin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Nhắc lại về các KGVT $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

Các không gian affin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Cho E là một KGVT hữu hạn chiều. Khi các phần tử của E được coi như điểm thì ta nói E được trang bị cấu trúc aphin chính tắc và E được gọi là KG aphin.

i) Kí hiệu $\mathcal{A}_2$ là tập hợp các điểm của $\mathbb{R}^2$ hay mặt phẳng aphin.

ii) Kí hiệu $\mathcal{A}_3$ là tập hợp các điểm của $\mathbb{R}^3$ hay không gian aphin.

Một số tính chất

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$,

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,

4) $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$,

5) $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow B = A + \vec{u}$,

6) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

Không gian aphin con

Định nghĩa

i) Cho $A \in E, \vec{F}$ là một KGVT con của E. Ta gọi tập hợp

$$\{A + \vec{x}, \vec{x} \in \vec{F}\} = \{M : \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\}$$

được gọi là KG aphin con của E đi qua A và định phương bởi $\vec{F}$, và được kí hiệu là $A + \vec{F}$ hoặc $T_A(\vec{F})$.

ii) Một bộ phận W của E được gọi là không gian aphin con của E khi và chỉ khi tồn tại $A \in E$ và một KGVT con $\vec{F}$ của $\vec{E}$ sao cho $W = A + \vec{F}$.

Không gian aphin con

Một số tính chất

1) $A + \vec{F} = A' + \vec{F'} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{F'}, \\ \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F}. \end{cases}$

2) Cho W là một KG aphin con của E, khi đó tồn tại duy nhất KGVT con của $\vec{E}$, kí hiệu là $\vec{W}$, sao cho $W = A + \vec{W}$ với $A \in E$ nào đó. Mọi họ sinh của $\vec{W}$ được gọi là họ chỉ phương của W.

3) Với mọi KG aphin con W của E và với mọi $A \in W$, $W = A + \vec{W}$.

Không gian aphin con

Một số tính chất

1) $A + \vec{F} = A' + \vec{F'} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{F'}, \\ \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F}. \end{cases}$
2) Cho W là một KG aphin con của E, khi đó tồn tại duy nhất KGVT con của $\vec{E}$, kí hiệu là $\vec{W}$, sao cho $W = A + \vec{W}$ với $A \in E$ nào đó. Mọi họ sinh của $\vec{W}$ được gọi là họ chỉ phương của W.
3) Với mọi KG aphin con W của E và với mọi $A \in W$, $W = A + \vec{W}$.

Định nghĩa

Số chiều của một KG aphin con W của E là số chiều của phương $\vec{W}$ của W. Các TH đặc biệt:

i) *KG aphin con 1 chiều: đường thẳng aphin,*

ii) *KG aphin con 2 chiều: mặt phẳng aphin,*

iii) *KG aphin con $\dim E - 1$ chiều: siêu phẳng aphin.*

Không gian aphin con

Chú ý

1) Mọi đơn tử $\{A\}$ *là một KG aphin con, vì* $\{A\} = A + \{\vec{0}\}$.

2) Tập rỗng không phải là một KG aphin con của E.

Mệnh đề

Cho W, W' *là các KG aphin con của* E. *Nếu* $W \cap W' \neq \emptyset$ *thì* $W \cap W'$ *là một KG aphin con của* E *và* $\overrightarrow{W \cap W'} = \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$.

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$

i) Cho $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tập hợp các điểm

$$A + \mathbb{R}\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

được gọi là đường thẳng aphin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$

i) Cho $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tập hợp các điểm

$$A + \mathbb{R}\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

được gọi là đường thẳng aphin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

ii) Ta gọi mọi cặp $(D, \vec{u})$ trong đó D là một đường thẳng aphin và $\vec{u}$ là một VTCP của D, là trục của $\mathcal{A}_2$. Khi đó, số thực t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ được gọi là số đo đại số của cặp điểm A, B trên trục $(D, \vec{u})$, và được kí hiệu là $\overline{AB}$.

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$

i) Cho $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tập hợp các điểm

$$A + \mathbb{R}\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

được gọi là đường thẳng aphin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

ii) Ta gọi mọi cặp $(D, \vec{u})$ trong đó D là một đường thẳng aphin và $\vec{u}$ là một VTCP của D, là trục của $\mathcal{A}_2$. Khi đó, số thực t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ được gọi là số đo đại số của cặp điểm A, B trên trục $(D, \vec{u})$, và được kí hiệu là $\overline{AB}$.

iii) Với mọi hai điểm phân biệt M_1, M_2 tồn tại duy nhất đường thẳng aphin chứa M_1 và M_2, kí hiệu là (M_1, M_2).

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$

i) Cho $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tập hợp các điểm

$$A + \mathbb{R}\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

được gọi là đường thẳng aphin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

ii) Ta gọi mọi cặp $(D, \vec{u})$ trong đó D là một đường thẳng aphin và $\vec{u}$ là một VTCP của D, là trục của $\mathcal{A}_2$. Khi đó, số thực t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ được gọi là số đo đại số của cặp điểm A, B trên trục $(D, \vec{u})$, và được kí hiệu là $\overline{AB}$.

iii) Với mọi hai điểm phân biệt M_1, M_2 tồn tại duy nhất đường thẳng aphin chứa M_1 và M_2, kí hiệu là (M_1, M_2).

iv) Cho $F \subset \mathcal{A}_2$, ta nói các điểm của F là thẳng hàng nếu tồn tại một đường thẳng aphin D sao cho $F \subset D$.

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$

i) Cho $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tập hợp các điểm

$$A + \mathbb{R}\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

được gọi là đường thẳng aphin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

ii) Ta gọi mọi cặp $(D, \vec{u})$ trong đó D là một đường thẳng aphin và $\vec{u}$ là một VTCP của D, là trục của $\mathcal{A}_2$. Khi đó, số thực t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ được gọi là số đo đại số của cặp điểm A, B trên trục $(D, \vec{u})$, và được kí hiệu là $\overline{AB}$.

iii) Với mọi hai điểm phân biệt M_1, M_2 tồn tại duy nhất đường thẳng aphin chứa M_1 và M_2, kí hiệu là (M_1, M_2).

iv) Cho $F \subset \mathcal{A}_2$, ta nói các điểm của F là thẳng hàng nếu tồn tại một đường thẳng aphin D sao cho $F \subset D$.

v) Phương trình Descartes của đường thẳng: $ax + by + c = 0$.

Nửa đường thẳng, nửa mặt phẳng trong $\mathcal{A}_2$

Định nghĩa

i) Cho D là một đường thẳng trong $\mathcal{A}_2$ và $A \neq B$ là hai điểm thuộc D. Tập hợp $A + \mathbb{R}_+\overrightarrow{AB}$ (tương ứng $A + \mathbb{R}_+^*\overrightarrow{AB}$) được gọi là nửa đường thẳng đóng (tương ứng, mở) có gốc A và đi qua B, kí hiệu $[AB)$ (tương ứng, $AB)$).

ii) Cho D là một đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_2$ và $B \notin D$. Tập hợp $D + \mathbb{R}_+\overrightarrow{AB}$ (tương ứng, $D + \mathbb{R}_+^*\overrightarrow{AB}$), không phụ thuộc vào việc chọn $A \in D$, được gọi là nửa mặt phẳng đóng (tương ứng, mở) giới hạn bởi D và chứa B.

Mặt phẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$

i) Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Tồn tại một và chỉ một mặt phẳng aphin chứa M_1, M_2, M_3. Mặt phẳng này được kí hiệu là $(M_1M_2M_3)$ và đó chính là mặt phẳng đi qua M_1, định phương bởi $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Mặt phẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$

i) Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Tồn tại một và chỉ một mặt phẳng aphin chứa M_1, M_2, M_3. Mặt phẳng này được kí hiệu là $(M_1M_2M_3)$ và đó chính là mặt phẳng đi qua M_1, định phương bởi $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$.

ii) Một bộ phận F của $\mathcal{A}_3$ được gọi là đồng phẳng nếu có một mặt phẳng aphin P sao cho $F \subset P$.

Mặt phẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$

i) Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Tồn tại một và chỉ một mặt phẳng aphin chứa M_1, M_2, M_3. Mặt phẳng này được kí hiệu là $(M_1M_2M_3)$ và đó chính là mặt phẳng đi qua M_1, định phương bởi $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$.

ii) Một bộ phận F của $\mathcal{A}_3$ được gọi là đồng phẳng nếu có một mặt phẳng aphin P sao cho $F \subset P$.

iii) Phương trình Descartes của mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$:
$ax + by + cz + d = 0$.

Mặt phẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$

i) Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Tồn tại một và chỉ một mặt phẳng aphin chứa M_1, M_2, M_3. Mặt phẳng này được kí hiệu là $(M_1M_2M_3)$ và đó chính là mặt phẳng đi qua M_1, định phương bởi $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$.

ii) Một bộ phận F của $\mathcal{A}_3$ được gọi là đồng phẳng nếu có một mặt phẳng aphin P sao cho $F \subset P$.

iii) Phương trình Descartes của mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$: $ax + by + cz + d = 0$. Đặc biệt, phương trình Descartes của mặt phẳng P xác định bởi một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và định phương bởi hệ độc lập $(\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3))$

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ phụ thuộc } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Các nửa không gian

Định nghĩa

Cho P là một mặt phẳng aphin, $A \in P, B \notin P$. Tập hợp

$$P + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB} (\text{ tương ứng } P + \mathbb{R}_+^* \overrightarrow{AB}$$

không phụ thuộc vào việc chọn $A \in \mathcal{P}$, và được gọi là nửa không gian đóng (tương ứng, mở) giới hạn bởi P và chứa B.

Đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$

Tập hợp các điểm của $\mathcal{A}_3$

$$\{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

là đường thẳng đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

Một số tính chất

1) Với hai điểm phân biệt M_1, M_2 bất kì thuộc $\mathcal{A}_3$, tồn tại duy nhất đường thẳng aphin qua M_1, M_2, kí hiệu là (M_1M_2).
2) Hệ phương trình Descartes của đường thẳng aphin trong $\mathcal{A}_3$:
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Tính song song

Định nghĩa

Cho W, W' là các KG aphin con của E. Ta nói rằng W song song với W', và kí hiệu $W /\!/ W'$, khi và chỉ khi $\vec{W} \subset \vec{W}'$.

Chú ý

i) *Tính song song vừa định nghĩa ở trên đôi khi còn được gọi là tính song song yếu, nhằm phân biệt với khái niệm tính song song mạnh, định nghĩa như sau W song song với W' khi và chỉ khi $\vec{W} = \vec{W}'$.*

ii) *Nếu $\dim \overrightarrow{W} = \dim \overrightarrow{W'}$ thì hai khái niệm song song yếu và song song mạnh là trùng nhau.*

iii) *Quan hệ song song (yếu) trên tập hợp các KG aphin con của E có tính chất phản xạ và bắc cầu (nhưng không có tính đối xứng).*

Tính song song

Tính song song của hai đường thẳng

Cho D và D' là các đường thẳng của $\mathcal{A}_2$ (hoặc $\mathcal{A}_3$). $D /\!/ D' \Leftrightarrow \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D'}$.

Khảo sát tính song song của hai đường thẳng

Cho $(D, \vec{u}), (D', \vec{v})$ là hai trục của $\mathcal{A}_2$ (hoặc $\mathcal{A}_3$).

$$D /\!/ D' \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ phụ thuộc.}$$

Đặc biệt, $D|ax + by + c = 0 /\!/ D'|a'x + b'y + c'z = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$

Tính song song

Định lý Thalés

Cho

i) $(D, \vec{u}), (D', \vec{v})$ là hai trục sao cho $D \neq D'$,

ii) $(A, B, C) \in D^3, (A', B', C') \in D^3$,

iii) $A \neq A', B \neq B', C \neq C', A \neq B, A' \neq B'$,

iv) $(AA') /\!/ BB'$.

Khi đó,

$$(AA') /\!/ (CC') \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong $\mathcal{A}_2$

Định nghĩa

Cho D, D' là hai đường thẳng aphin.

i) *Nếu $D \not\parallel D'$ thì $D \cap D'$ là một đơn tử và ta nói D và D' cắt nhau.*

ii) *Nếu $D \parallel D'$ thì*

  a) $D \cap D' = \emptyset$ *nếu* $D \neq D'$,

  b) $D \cap D' = D$ *nếu* $D = D'$.

Định nghĩa

Ba đường thẳng aphin D, D', D'' được gọi là đồng quy nếu $D \cap D' \cap D'' \neq \emptyset$.

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$

Định nghĩa

Cho P, P' là hai mặt phẳng aphin. Chúng được gọi là song song nếu $\vec{P} = \vec{P'}$.

Quan hệ song song này là một quan hệ tương đương trong tập hợp các mặt phẳng của $\mathcal{A}_3$. Đặc biệt, nó có tính chất đối xứng.

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$

i) Giao của hai mặt phẳng không song song là một đường thẳng.

ii) Mọi đường thẳng đều có thể xem, theo vô số cách, như giao của hai mặt phẳng không song song.

Ánh xạ aphin

Định nghĩa

Một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ *được gọi là ánh xạ aphin khi và chỉ khi tồn tại* $A \in \mathcal{A}_3$ *sao cho ánh xạ* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *xác định bởi*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{x})}$$

là tuyến tính.

Ánh xạ aphin

Định nghĩa

Một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ được gọi là ánh xạ aphin khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathcal{A}_3$ sao cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{x})}$$

là tuyến tính.

Tập hợp các ánh xạ aphin từ $\mathcal{A}^3$ vào $\mathcal{A}^3$ được kí hiệu là $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$.

Chú ý

Với mọi $B, M \in \mathcal{A}_3$ ta có $\varphi(\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{f(B)f(M)}$.

Bộ phận tuyến tính

Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một ánh xạ aphin. Khi đó $\exists!$ ánh xạ tuyến tính $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $\forall (B, M) \in \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3, \vec{f}(\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{f(B)f(M)}$.

Ánh xạ aphin

Cho $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$.

Một số tính chất

1) $f(A+\vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}), \forall A \in \mathcal{A}_3, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$.
2) $g \circ f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là aphin và $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.
3) Điều kiện cần và đủ để f là song ánh là $\vec{f}$ cũng là song ánh. Khi đó, f^{-1} cũng là aphin và $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.
4) $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$ là một nhóm đối với phép hợp thành ánh xạ $\circ$, gọi là nhóm aphin của $\mathcal{A}_3$ và kí hiệu là $\mathrm{GAff}(\mathcal{A}_3)$.
5) Nếu M_1, M_2, M_3 thẳng hàng thì $f(M_1), f(M_2), f(M_3)$ thẳng hàng.
6) Nếu M_1, M_2, M_3 đồng phẳng thì $f(M_1), f(M_2), f(M_3)$ đồng phẳng.

Các ví dụ về ánh xạ aphin

Phép tịnh tiến

$T_{\vec{u}} : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ xác định bởi $T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$

Một số tính chất

1) $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một phép tịnh tiến $\Leftrightarrow f$ là aphin và $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
2) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.
3) $T_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$.
4) $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $T_{\vec{u}}$ là một song ánh và $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$.
5) $\{T_{\vec{u}} | u \in \mathbb{R}^3, \circ\}$ là một nhóm và ánh xạ $\vec{u} \mapsto T_{\vec{u}}$ là một đẳng cấu từ $\{\mathbb{R}^3, +\}$ lên nhóm đó.
6) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3$, $\exists!$ một phép tịnh tiến dời A đến B, đó là $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Phép tịnh tiến

Một số tính chất của phép tịnh tiến

7) Với mọi đường thẳng $D \subset \mathcal{A}_3$, $T_{\vec{u}}(D)$ là một đường thẳng $/\!/D$.
8) Với mọi mặt phẳng $P \subset \mathcal{A}_3$, $T_{\vec{u}}(P)$ là một mặt thẳng $/\!/P$.
9) Ngược lại, với mọi $D /\!/ D', \forall A \in D, \forall A' \in D'$, $T_{\overrightarrow{AA'}}(D) = D'$.
10) với mọi $P /\!/ P', \forall A \in P, \forall A' \in P'$, $T_{\overrightarrow{AA'}}(P) = P'$.
11) Cho $A \in \mathcal{A}_3, f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$. Tồn tại duy nhất một cặp $(\vec{u}, g) \in (\mathbb{R}^3, \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3))$ sao cho $\begin{cases} f = T_{\vec{u}} \circ g, \\ g(A) = A. \end{cases}$

Các ví dụ về ánh xạ aphin

Phép vị tự

Cho $\Omega \in \mathcal{A}^3, k \in \mathbb{R}^*$. Phép vị tự tâm Ω và tỉ số k, kí hiệu $H_{\Omega,k}$, là ánh xạ $H_{\Omega,k} : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3, M \mapsto M'$ xác định bởi

$$\forall M \in \mathcal{A}_3, \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

Nói cách khác, $H_{\Omega,k}(M) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$.

Với mọi $\Omega, \Omega' \in \mathcal{A}_3$, với mọi $k, k' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$H_{\Omega,k} = H_{\Omega',k'} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ k = k'. \end{cases}$$

Như vậy mỗi phép vị tự (ngoài phép đồng nhất) có duy nhất một tâm và một tỉ số.

Phép vị tự

Một số tính chất của phép vị tự

1) $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là vị tự $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ là ánh xạ aphin,} \\ f \text{ có ít nhất một điểm bất động,} \\ \exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{f} = k \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\,. \end{cases}$

2) $H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'} = H_{\Omega,kk'}$.

3) $H_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$.

4) $H_{\Omega,k} \in \mathrm{GAff}(\mathcal{A}_3)$ và $H_{\Omega,k}^{-1} = H_{\Omega,k^{-1}}$.

5) Tập hợp các phép vị tự tâm Ω là một nhóm với $\circ$ và $k \mapsto H_{\Omega,k}$ là một đẳng cấu từ nhóm $(\mathbb{R}^*, \times)$ lên nhóm đó.

6) Cho $u \in \mathbb{R}^3, (\Omega, k) \in \mathcal{A}_3 \times \mathbb{R}^*$. Khi đó

$$f = T_{\vec{u}} \circ H_{\Omega,k} = H_{A,k},$$

ở đó A xác định bởi $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$.

Phép vị tự

Một số tính chất của phép vị tự

7) Vì $H_{\Omega,k} \circ T_{\vec{u}} = T_{-\vec{u}} \circ H_{\Omega,k^{-1}}$ nên $H_{\Omega,k} \circ T_{\vec{u}}$ là một phép vị tự nếu $k \neq 1$.

8) Xét $g = H_{\Omega',k'} \circ H_{\Omega,k}$.

   a) $g = H_{A,kk'}$, ở đó $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

   b) $g = T_{k'\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$.

Tâm tỉ cự

Định nghĩa

Ta gọi họ $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ là họ hữu hạn điểm có trọng số trong $\mathcal{A}_3$.

Mệnh đề

Với mọi họ hữu hạn điểm có trọng số $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, tồn tại một điểm duy nhất $G \in \mathcal{A}_3$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Điểm G này gọi là tâm tỉ cự của họ $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ và được kí hiệu

$$G = T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} \text{ hoặc } G = T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n},$$

hơn nữa $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}, \forall O \in \mathcal{A}_3$. Khi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ ta có khái niệm trọng tâm.

Tâm tỉ cự

Cho họ hữu hạn điểm có trọng số $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Một số tính chất

1) $x_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad y_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad z_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}.$

2) Với mọi $\lambda \neq 0$, ta có $T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \lambda\alpha_1 \dots \lambda\alpha_n \end{bmatrix}$

3) Với mọi $p \in \mathbb{N}^*$ và $A_{n+1}, \dots, A_{n+p}$ ta có

$$T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n & A_{n+1} & \dots & A_{n+p} \\ \alpha_1 \dots \alpha_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) (Tính giao hoán) Với mọi hoán vị σ của $\{1, 2, \dots, n\}$ ta có

$$T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_n} \\ \alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

Tâm tỉ cự

Cho họ hữu hạn điểm có trọng số $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Một số tính chất

5) (Tính kết hợp) Với mọi phân hoạch $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\sum\limits_{i\in I_j} \alpha_i \neq 0$ ta có

$$T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i\in I_1} & \dots & T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i\in I_k} \\ \sum\limits_{i\in I_1} & \dots & \sum\limits_{i\in I_k} \end{bmatrix}$$

6) Cho $A, B \in \mathcal{A}_3$ sao cho $A \neq B$. Khi đó,

$$(AB) = \left\{ T_{tc}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R} \right\}, [AB) = \left\{ T_{tc}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}^+ \right\}.$$

Tâm tỉ cự

Một số tính chất

7) Cho $A, B, C \in \mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Ta có

$$(ABC) = \left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma \neq 0. \right\}$$

và nửa mặt phẳng đóng giới hạn bởi AB chứa C là

$$\left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \alpha + \beta + \gamma \neq 0. \right\}$$

Tâm tỉ cự

Một số tính chất

8) Cho $A, B, C, D \in \mathcal{A}_3$ không đồng phẳng. Khi đó,

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0. \right\}$$

Nửa không gian đóng giới hạn bởi mặt phẳng ABC chứa D là

$$\left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0. \right\}$$

9) Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một ánh xạ aphin. Khi đó,

$$f(G) = T_{tc} \begin{bmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Tính lồi

Định nghĩa

Cho $A, B \in \mathcal{A}_2$. Bộ phận của $\mathcal{A}_2$ xác định bởi

$$[AB] = \left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}, t \in [0,1] \right\}$$

được gọi là đoạn thẳng có các đầu mút A, B.

Tính lồi

Một bộ phận Γ của $\mathcal{A}_2$ được gọi là lồi nếu với mọi $A, B \in \Gamma, [AB] \subset \Gamma$.

Các ví dụ

1) $\emptyset$ và $\mathcal{A}_2$ là lồi.
2) Mọi đơn tử, nửa đường thẳng, đường thẳng, nửa mặt phẳng, mặt phẳng đều lồi.

Tính lồi

Các tính chất

1) Với mọi họ $(\Gamma_i)_{i\in I}$ gồm những bộ phận lồi, $\cap_{i\in I}\Gamma_i$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.
2) Cho $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ là một ánh xạ aphin.
   a) Với mọi Γ lồi, tập ảnh $f(\Gamma)$ lồi.
   b) Với mọi G lồi, tập nghịch ảnh $f^{-1}(G)$ lồi.

The main concern of this lecture