Toán I

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 1: Đại số đại cương

Khái niệm tập hợp

1) Tập hợp có thể hiểu tổng quát là một sự tụ tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó. Người ta khẳng định những đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp.
2) Nếu a là phần tử của tập hợp A, ta ký hiệu $a \in A$. Khi đó ta cũng nói rằng phần tử a thuộc tập hợp A.
3) Tập hợp là một khái niệm nền tảng, được dùng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số... trong toán học.
4) Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy (không định nghĩa). Nó tồn tại theo các tiên đề được xây dựng một cách chặt chẽ.
5) Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, ký hiệu là $\emptyset$.
6) Nhà toán học Georg Cantor được coi là ông tổ của lý thuyết tập hợp.
7) Hai cách biểu diễn một tập hợp:
   i) Liệt kê các phần tử của tập hợp,
   ii) Mô tả tính chất đặc trưng của tập hợp đó.

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ \end{cases}$$

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$

4) Phép giao

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$

4) Phép giao

$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ \end{cases}$$

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$

4) Phép giao

$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$

5) Phép trừ

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$

4) Phép giao

$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$

5) Phép trừ

$$\begin{cases} x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \\ \end{cases}$$

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp
$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$
4) Phép giao
$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$
5) Phép trừ
$$\begin{cases} x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \\ x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B \end{cases}$$
6) Phép lấy phần bù

Các phép toán trên tập hợp

1) Tập con $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
2) Hai tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$
3) Phép hợp
$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$
4) Phép giao
$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$
5) Phép trừ
$$\begin{cases} x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \\ x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B \end{cases}$$
6) Phép lấy phần bù
Nếu $A \subset X$ thì $\overline{A} = X \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong X.

Các tính chất

1) Tính giao hoán:

Các tính chất

1) Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2) Tính kết hợp

Các tính chất

1) Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2) Tính kết hợp
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) Tính phân phối

Các tính chất

1) Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2) Tính kết hợp
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) Tính phân phối
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) Tính chất của phép trừ

Các tính chất

1) Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2) Tính kết hợp
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) Tính phân phối
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) Tính chất của phép trừ
   Nếu $A, B \subset X$ thì $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
5) Công thức De Moorgan

Các tính chất

1) Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2) Tính kết hợp
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) Tính phân phối
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) Tính chất của phép trừ
   Nếu $A, B \subset X$ thì $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
5) Công thức De Moorgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\cap A_i} = \cup \overline{A_i}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\cup A_i} = \cap \overline{A_i}$$

Sự tương ứng giữa các phép toán logic và tập hợp

1) Phép phủ định $\overline{A}$
2) Phép hội $A \wedge B$
3) Phép tuyển $A \vee B$
4) Phép kéo theo $A \Rightarrow B$
5) Phép tương đương $A \Leftrightarrow B$

1) Phép lấy phần bù $\overline{A} = X \setminus A$
2) Phép giao $A \cap B$
3) Phép hợp $A \cup B$
4) Tập con $A \subset B$
5) Tập hợp bằng nhau $A = B$

Sự tương ứng giữa các phép toán logic và tập hợp

1) Phép phủ định $\overline{A}$
2) Phép hội $A \wedge B$
3) Phép tuyển $A \vee B$
4) Phép kéo theo $A \Rightarrow B$
5) Phép tương đương $A \Leftrightarrow B$

1) Phép lấy phần bù $\overline{A} = X \setminus A$
2) Phép giao $A \cap B$
3) Phép hợp $A \cup B$
4) Tập con $A \subset B$
5) Tập hợp bằng nhau $A = B$

Các PP chứng minh hai tập hợp bằng nhau

1) Phương pháp phần tử
2) Phương pháp biến đổi tập hợp
3) Phương pháp chứng minh bằng phản chứng

Các PP chứng minh hai tập hợp bằng nhau

Ví dụ

Chứng minh rằng $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Các PP chứng minh hai tập hợp bằng nhau

Ví dụ

Chứng minh rằng $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Phương pháp phần tử

$\boxed{\Rightarrow}$ Giả sử $x \in A \cap (B \setminus C)$, ta có $x \in A$ và $x \in B \setminus C$. Suy ra $x \in A, x \in B, x \notin C$.

i) Vì $x \in A$ và $x \in B$ nên ta có $x \in A \cap B$.

ii) Mặt khác $x \notin C \supset A \cap C$ nên $x \notin A \cap C$.

Vậy $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, ta có $x \in A, x \in B$ và $x \notin A \cap C$.

i) Do $x \notin A \cap C$ nên hoặc $x \notin A$ hoặc $x \notin C$.

ii) Nhưng vì $x \in A$ nên ta có $x \notin C$. Vì vậy ta có $x \in A \cap (B \setminus C)$.

Các PP chứng minh hai tập hợp bằng nhau

Ví dụ

Chứng minh rằng $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Các PP chứng minh hai tập hợp bằng nhau

Ví dụ

Chứng minh rằng $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Phương pháp biến đổi tập hợp

Coi $A, B, C \subset X$ nào đó. Khi đó

$$\begin{aligned} & (A \cap B) \setminus (A \cap C) \\ = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ = & [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [A \cap B \cap \overline{C}] \\ = & A \cap (B \setminus C). \end{aligned} \tag{1}$$

Chương 1: Đại số đại cương

Ánh xạ

Định nghĩa

Cho X, Y là các tập hợp. Một ánh xạ f đi từ tập X vào tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Ánh xạ

Định nghĩa

Cho X, Y là các tập hợp. Một ánh xạ f đi từ tập X vào tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Tập ảnh, tập nghịch ảnh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

i) Tập ảnh
Kí hiệu $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) | x \in A\}$.

Ánh xạ

Định nghĩa

Cho X, Y là các tập hợp. Một ánh xạ f đi từ tập X vào tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Tập ảnh, tập nghịch ảnh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

i) Tập ảnh
Kí hiệu $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) | x \in A\}$.

ii) Tập nghịch ảnh
Kí hiệu $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$.

Ánh xạ

Định nghĩa

Cho X, Y là các tập hợp. Một ánh xạ f đi từ tập X vào tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Tập ảnh, tập nghịch ảnh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

i) Tập ảnh
Kí hiệu $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) | x \in A\}$.

ii) Tập nghịch ảnh
Kí hiệu $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$.Vì vậy ta có

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

Ánh xạ

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ

a) Đơn ánh
Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu
i) Với mọi $x_1 \neq x_2 \in X$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ hoặc
ii) Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$.

b) Toàn ánh
Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$, hay với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm* với mọi $y \in Y$.

c) Song ánh.
Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* với mọi $y \in Y$.

Ánh xạ

Ví dụ

Chứng minh các tính chất sau của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ A, B \subset X$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),\ A, B \subset X$. *Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.*

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\ A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),\ A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B),\ A, B \subset Y$

f) *Chứng minh* f *là đơn ánh khi và chỉ khi* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \forall A, B \subset X$

Ánh xạ hợp, Ánh xạ ngược

Ánh xạ hợp

Cho X, Y, Z là các tập hợp và $f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$.

i) Khi đó $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

ii) Nếu f là song ánh thì $f^{-1} : Y \to X$ sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Các tính chất

i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,

ii) $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$,

iii) $(f^{-1})^{-1} = f$,

iv) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$,

v) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,

Đơn ánh - Toàn ánh - Song ánh

i) Nếu f và g là đơn ánh thì $g \circ f$ là đơn ánh,

ii) Nếu f và g là toàn ánh thì $g \circ f$ là toàn ánh,

iii) Nếu f và g là song ánh thì $g \circ f$ là song ánh.

Ánh xạ hạn chế, Hàm đặc trưng

Ánh xạ hạn chế

i) Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ và $A \subset X$. Ánh xạ hạn chế của f lên A là ánh xạ $f_A : A \to Y$ cho bởi $f_A(x) = f(x)\ \forall x \in A$.

ii) Nếu g là ánh xạ hạn chế của f lên A, ta cũng nói f là ánh xạ mở rộng của g.

Hàm đặc trưng

Cho $A \subset X$, ánh xạ $f : A \to \{0, 1\}$ cho bởi $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A, \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$

được gọi là hàm đặc trưng

Phép chiếu chính tắc

Cho $X = X_1 \times X_2$. Ánh xạ $p_1 : X \to X_1$ cho bởi $p(x_1, x_2) = x_1$ được gọi là phép chiếu chính tắc lên X_1.

Quan hệ hai ngôi

Quan hệ hai ngôi

Cho X là một tập hợp. Một quan hệ R trên X là một tập con của tích Descartes $X \times X$. Nếu $(a, b) \in R$ ta nói a có quan hệ với b và viết aRb.

Ví dụ

Cho $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ là một quan hệ cho bởi $(a, b) \in S$ nếu và chỉ nếu $a \leq b$.

Định nghĩa

Cho R là một quan hệ trên X. Ta nói R có tính chất

i) phản xạ nếu aRa với mọi $a \in X$,

ii) đối xứng nếu $aRb \Leftrightarrow bRa$,

iii) phản đối xứng nếu $(aRb) \wedge (bRa) \Rightarrow a = b$,

iv) bắc cầu nếu $(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow (aRc)$.

Quan hệ thứ tự

Quan hệ thứ tự

Một quan hệ $\leq$ trên X được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu,i.e.,

i) $a \leq a$ với mọi $a \in X$,

ii) Nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì $a = b$,

iii) Nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$.

Quan hệ thứ tự toàn phần: nếu với mọi $a, b \in X$, hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Quan hệ thứ tự

Cho $\leq$ là một quan hệ trên X và $A \subset X$.

Phần tử lớn nhất - Phần tử nhỏ nhất

i) Phần tử $x \in A$ được gọi là phần tử lớn nhất nếu nó lớn hơn hoặc bằng tất cả các phần tử khác của A, i.e., $a \leq x \ \forall a \in A$.

ii) Phần tử $x \in A$ được gọi là phần tử nhỏ nhất nếu nó nhỏ hơn hoặc bằng tất cả các phần tử khác của A, i.e., $x \leq a \ \forall a \in A$.

Phần tử cực đại - Phần tử cực tiểu

i) Phần tử $x^* \in A$ được gọi là một phần tử cực đại của A nếu nó không nhỏ hơn bất kì phần tử nào của A, i.e., nếu $a \in A$ sao cho $x^* \leq a$ thì $x^* = a$.

ii) Phần tử $y^* \in A$ được gọi là một phần tử cực tiểu của A nếu nó không lớn hơn bất kì phần tử nào của A, i.e., nếu $a \in A$ sao cho $a \leq y^*$ thì $y^* = a$.

Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) vs Phần tử cực đại (cực tiểu)

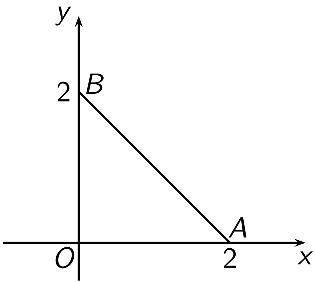
Cho $\mathbb{R}^2$ với quan hệ thứ tự: $(a,b) \leq (c,d)$ nếu và chỉ nếu $\begin{cases} a \leq c \\ b \leq d. \end{cases}$

Xét $S = \{(x,y) | x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Khi đó

i) $A(2,0$ và $B(0,2$ là các phần tử cực đại.

ii) $O(0,0)$ là phần tử nhỏ nhất (do đó, là phần tử cực tiểu).

iii) S không có phần tử lớn nhất.



Quan hệ thứ tự

Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) vs Phần tử cực đại (cực tiểu)

i) Phần tử lớn nhất, nếu tồn tại, là duy nhất.
ii) Phần tử nhỏ nhất, nếu tồn tại, là duy nhất.
iii) Có thể không tồn tại phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất.
iv) Khái niệm phần tử cực đại "yếu" hơn khái niệm phần tử lớn nhất, theo nghĩa phần tử lớn nhất là phần tử cực đại. Tương tự, phần tử nhỏ nhất là phần tử cực tiểu.
v) Nếu S là một tập hợp được sắp thứ tự toàn phần, thì phần tử cực đại là phần tử lớn nhất và phần tử cực tiểu là phần tử nhỏ nhất.

Quan hệ tương đương

Định nghĩa

Một quan hệ $\sim$ trên X được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu, i.e.,

i) $x \sim x$ với mọi $x \in X$,

ii) nếu $x \sim y$ thì $y \sim x$,

iii) nếu $x \sim y$ và $y \sim z$ thì $x \sim z$.

Lớp tương đương

Cho X và quan hệ tương đương $\sim$ trên X. Với $x \in X$, tập hợp $\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$ được gọi là một lớp tương đương chứa x.

i) Nếu $y \in \bar{x}$ thì $\bar{x} = \bar{y}$.

ii) Hai lớp tương đương hoặc là trùng nhau hoặc là phân biệt.

Quan hệ tương đương

Cho X và quan hệ tương đương $\sim$ trên X.

Phân hoạch

i) Tập hợp tất cả các lớp tương đương là một phân hoạch của X.

ii) Ngược lại, mỗi một phân hoạch $X = \cup_{i\in I} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset$ sinh ra một quan hệ tương đương trên X.

Phân hoạch sinh bởi ánh xạ

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Khi đó f cảm sinh một quan hệ tương đương trên X như sau:

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Khi đó f cảm sinh quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$ như sau: $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

Chương 1: Đại số đại cương

Số tự nhiên

Định nghĩa (Không chuẩn tắc (Informal))

Một số tự nhiên là một phần tử của tập hợp

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

được gọi là tập hợp các số tự nhiên, bắt đầu từ 0 *và sau đó được đếm vô hạn lần ("start at* 0 *and count indefinitely").*

Như vậy, để biểu thị tập hợp các số tự nhiên ta cần 2 yếu tố: số 0 và phép đếm $++$.

Số tự nhiên

Năm tiên đề Peano

1) 0 là một số tự nhiên.

Số tự nhiên

Năm tiên đề Peano

1) 0 là một số tự nhiên.
2) Nếu n là một số tự nhiên thì $n++$ là một số tự nhiên.

Số tự nhiên

Năm tiên đề Peano

1) 0 là một số tự nhiên.
2) Nếu n là một số tự nhiên thì $n++$ là một số tự nhiên.
3) $n++ \neq 0$ với mọi số tự nhiên n.

Số tự nhiên

Năm tiên đề Peano

1) 0 là một số tự nhiên.
2) Nếu n là một số tự nhiên thì $n++$ là một số tự nhiên.
3) $n++ \neq 0$ với mọi số tự nhiên n.
4) Nếu $m \neq n$ thì $m++ \neq n++$.

Số tự nhiên

Năm tiên đề Peano

1) 0 là một số tự nhiên.
2) Nếu n là một số tự nhiên thì $n++$ là một số tự nhiên.
3) $n++ \neq 0$ với mọi số tự nhiên n.
4) Nếu $m \neq n$ thì $m++ \neq n++$.
5) (Nguyên lý quy nạp) Cho $P(n)$ là bất kì tính chất nào phụ thuộc vào số n. Giả sử rằng $P(0)$ là đúng, và giả sử thêm rằng bất cứ khi nào $P(n)$ đúng thì $P(n++)$ cũng đúng. Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi n.

Tính chia hết trong $\mathbb{N}$

Định nghĩa

Cho $(a, b) \in \mathbb{N}^2$*. Ta nói rằng a chia hết b và kí hiệu* $a|b$ *khi và chỉ khi tồn tại* $c \in \mathbb{N}$ *sao cho* $b = ac$*.*

Mệnh đề

Quan hệ $|$ *là một quan hệ thứ tự không toàn phần trên* $\mathbb{N}$*.*

Định nghĩa

Một phần tử p của $\mathbb{N}$ *được gọi là số nguyên tố khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} p \geq 2, \\ \forall a \in \mathbb{N}, (a|p) \to [(a = 1) \vee (a = p)]. \end{cases}$$

Mệnh đề

Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Bản số (lực lượng của một tập hợp)

Đối với các tập hợp hữu hạn, khi cần xét xem tập nào có nhiều phần tử hơn, người ta đếm số phần tử của chúng. Tuy nhiên, động tác đơn giản ấy không thực hiện được với các tập có vô hạn phần tử.

Bản số (lực lượng của một tập hợp)

Đối với các tập hợp hữu hạn, khi cần xét xem tập nào có nhiều phần tử hơn, người ta đếm số phần tử của chúng. Tuy nhiên, động tác đơn giản ấy không thực hiện được với các tập có vô hạn phần tử.

Định nghĩa

Ta nói tập X có cùng lực lượng với tập Y nếu có một song ánh từ X vào Y.

Mệnh đề

Quan hệ có "cùng lực lượng" là một quan hệ tương đương giữa các tập hợp.

Bản số (lực lượng của một tập hợp)

Đối với các tập hợp hữu hạn, khi cần xét xem tập nào có nhiều phần tử hơn, người ta đếm số phần tử của chúng. Tuy nhiên, động tác đơn giản ấy không thực hiện được với các tập có vô hạn phần tử.

Định nghĩa

Ta nói tập X có cùng lực lượng với tập Y nếu có một song ánh từ X vào Y.

Mệnh đề

Quan hệ có "cùng lực lượng" là một quan hệ tương đương giữa các tập hợp.

Định nghĩa

Một tập hợp E được gọi là hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại số $n \in \mathbb{N}$ sao cho E có cùng lực lượng với $F_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Số n đó được gọi là bản số (hay lực lượng) của tập E và được kí hiệu là $\operatorname{card} E$.

Tập hợp hữu hạn

Các tính chất

Cho $\operatorname{card} E < +\infty, \operatorname{card} F < +\infty$. Khi đó,

i) $E \cup F < +\infty$ và

$$\operatorname{card}(E \cup F) + \operatorname{card}(E \cap F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F.$$

ii) $\operatorname{card}(E \times F) < +\infty$ và $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card} E . \operatorname{card} F$.

iii) Tồn tại $f : E \to F$ đơn ánh $\Leftrightarrow \operatorname{card} E \leq \operatorname{card} F$,

iv) Tồn tại $f : E \to F$ toàn ánh $\Leftrightarrow \operatorname{card} E \geq \operatorname{card} F$,

v) Nếu $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$ và $f : E \to F$ là một ánh xạ thì

$$f \text{ là đơn ánh} \Leftrightarrow f \text{ là toàn ánh} \Leftrightarrow f \text{ là song ánh.}$$

Tập hợp đếm được

Định nghĩa

Tập X được gọi là đếm được nếu tồn tại một đơn ánh $f : X \to \mathbb{N}$, i.e.,

i) *nó có lực lượng hữu hạn,*

ii) *nó có cùng lực lượng với tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.*

Một số tính chất

1) Nếu A, B đếm được thì $A \cup B$ đếm được.
Hệ quả: Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ là đếm được.

Tập hợp đếm được

Định nghĩa

Tập X được gọi là đếm được nếu tồn tại một đơn ánh $f : X \to \mathbb{N}$, i.e.,

i) *nó có lực lượng hữu hạn,*

ii) *nó có cùng lực lượng với tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.*

Một số tính chất

1) Nếu A, B đếm được thì $A \cup B$ đếm được.
   Hệ quả: Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ là đếm được.
2) Mọi tập con của một tập đếm được cũng là một tập hợp đếm được.
   Hệ quả: Tập hợp các số nguyên tố (chẳng hạn) là đếm được.

Tập hợp đếm được

Định nghĩa

Tập X được gọi là đếm được nếu tồn tại một đơn ánh $f : X \to \mathbb{N}$, i.e.,

i) *nó có lực lượng hữu hạn,*

ii) *nó có cùng lực lượng với tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.*

Một số tính chất

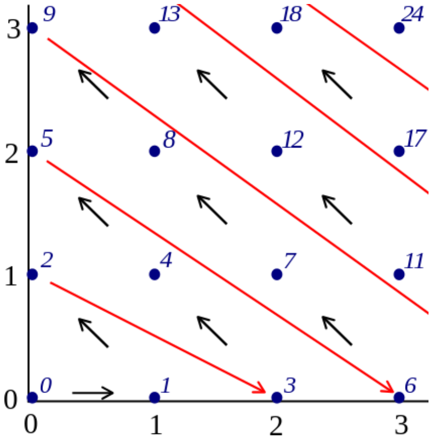
1) Nếu A, B đếm được thì $A \cup B$ đếm được.
Hệ quả: Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ là đếm được.

2) Mọi tập con của một tập đếm được cũng là một tập hợp đếm được.
Hệ quả: Tập hợp các số nguyên tố (chẳng hạn) là đếm được.

3) Tích trực tiếp của hai tập đếm được cũng là một tập đếm được.
Hệ quả: Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là một tập đếm được.

Tập hợp đếm được

Tích trực tiếp của hai tập đếm được cũng là một tập hợp đếm được.



Tập hợp không đếm được

Tập hợp không đếm được

Mọi tập hợp vô hạn không có cùng lực lượng với tập $\mathbb{N}$ được gọi là không đếm được.

Mệnh đề

Tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực là không đếm được.

Người ta nói tập hợp các số thực có lực lượng continum.

Số học trong $\mathbb{Z}$

Định nghĩa

Cho $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Ta nói rằng a chia hết b hay a là ước của b (trong $\mathbb{Z}$) nếu tồn tại số $c \in \mathbb{Z}$ sao cho $b = ac$.

Một số tính chất đơn giản

i) Kí hiệu $a\mathbb{Z} = \{b \in \mathbb{Z} | \exists c \in \mathbb{Z}, b = ac\}$. Ta có $a|b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \supset b\mathbb{Z}$,

ii) $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0, a|a$,

iii) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a|b, \\ b|a \end{cases} \Rightarrow$

Số học trong $\mathbb{Z}$

Định nghĩa

Cho $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Ta nói rằng a chia hết b hay a là ước của b (trong $\mathbb{Z}$) nếu tồn tại số $c \in \mathbb{Z}$ sao cho $b = ac$.

Một số tính chất đơn giản

i) Kí hiệu $a\mathbb{Z} = \{b \in \mathbb{Z} | \exists c \in \mathbb{Z}, b = ac\}$. Ta có $a|b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \supset b\mathbb{Z}$,

ii) $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0, a|a$,

iii) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a|b, \\ b|a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$,

iv) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, \begin{cases} a|b, \\ b|c \end{cases} \Rightarrow a|c$.

Số học trong $\mathbb{Z}$

Phép chia có dư

Cho $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Tồn tại duy nhất một cặp $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho

$$\begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$$

Ta nói rằng q là thương của phép chia Euclide a cho b và r là số dư.

Đồng dư

Cho $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{Z}$. Ta nói rằng a là đồng dư modulo n với b và kí hiệu $a \equiv b[n]$ khi và chỉ khi $n|(b - a)$.

Mệnh đề

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, quan hệ $\equiv [n]$ là một quan hệ tương đương trong $\mathbb{Z}$.

Kí hiệu $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Số học trong $\mathbb{Z}$

Ước chung lớn nhất, Bội chung nhỏ nhất

Cho $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$.

a) Tập hợp các ước chung của $x_1, \ldots, x_n$ là hữu hạn và có một phần tử lớn nhất (đối với thứ tự $\leq$ thông thường), gọi là UCLN của $x_1, \ldots, x_n$, và kí hiệu $\text{UCLN}(x_1, \ldots, x_n)$.

b) Tập hợp các phần tử thuộc $\mathbb{N}^*$ là bội chung của $x_1, \ldots, x_n$ có một phần tử nhỏ nhất (đối với thứ tự $\leq$ thông thường), gọi là BCNN của $x_1, \ldots, x_n$, và kí hiệu $\text{BCNN}(x_1, \ldots, x_n)$.

Thuật toán Euclide tính UCLN(a, b)

i) Nếu $b|a$ thì $\text{UCLN}(a, b) = b$.

ii) Nếu $b \not| a$ thì $\begin{cases} a = bq_1 + r_1, \\ 0 < r_1 < b \end{cases} \Rightarrow \text{UCLN}(a, b) = \text{UCLN}(b, r_1)$.

iii) Tiếp tục quá trình trên với cặp (b, r_1).

Số học trong $\mathbb{Z}$

Cho $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$.

Số nguyên tố cùng nhau

i) $x_1, \ldots, x_n$ nguyên tố cùng nhau nếu $\mathrm{UCLN}(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

ii) $x_1, \ldots, x_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau nếu $\mathrm{UCLN}(x_i, x_j) = 1, \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$.

Định lý Bezout

$x_1, \ldots, x_n$ nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu tồn tại $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}^n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 1.$$

Chương 1: Đại số đại cương

1. Tập hợp
   - Tập hợp, các phép toán trên tập hợp
2. Ánh xạ
   - Quan hệ hai ngôi
3. Số tự nhiên, bản số
   - Số tự nhiên
   - Tập hợp hữu hạn, đếm được, không đếm được
4. Cấu trúc đại số - Số phức
   - Cấu trúc nhóm
   - Cấu trúc vành
   - Cấu trúc thể - trường
5. Đa thức và phân thức hữu tỉ
   - Vành đa thức, trường - thể phân thức
   - Hàm đa thức và hữu tỉ
   - Số học trong vành đa thức
   - Đa thức tách được
   - Khảo sát cục bộ một phân thức hữu tỉ

Phép toán hai ngôi

Phép toán hai ngôi

Giả sử G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \to G$$

được gọi là một *phép toán hai ngôi* (hay một *luật hợp thành*) trên G. Ảnh của cặp phần tử (x, y) được kí hiệu là $x \circ y$.

Cấu trúc nhóm

Định nghĩa

Một nhóm là một bộ $(G, \circ)$ *thỏa mãn*

(G1) *Phép toán có tính chất kết hợp:*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$$

(G2) $\exists e \in G$ *(được gọi là* phần tử trung hoà*) với tính chất*

$$x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$$

(G3) $\forall x \in G, \exists x' \in G$ *(được gọi là* nghịch đảo *của x) sao cho*

$$x \circ x' = x' \circ x = e$$

Nhóm G được gọi là nhóm giao hoán *hay* abel *nếu*

$$x \circ y = y \circ x, \quad \forall x, y \in G.$$

Cấu trúc nhóm

Một số tính chất

1) Phần tử trung lập e là duy nhất.
2) Phần tử nghịch đảo x' của x là duy nhất.
3) Luật giản ước $\begin{cases} x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z, \\ x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y. \end{cases}$

i) Theo thói quen, luật hợp thành của nhóm abel thường được kí hiệu theo lối cộng $" + "$. Khi đó, phần tử trung lập của nhóm cộng được gọi là phần tử không, kí hiệu là 0, phần tử nghịch đảo của x được gọi là phần tử đối, kí hiệu là $-x$.

ii) Trường hợp TQ, phép $\circ$ thường được kí hiệu theo lối nhân $\cdot$. Khi đó, phần tử trung lập được gọi là phần tử đơn vị, kí hiệu là 1, phần tử nghịch đảo được kí hiệu là x^{-1}.

Cấu trúc nhóm

Một số ví dụ về nhóm

1) $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{N},+)$ có phải là nhóm không?
2) $(\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}, \times), (\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{R}^*, \times)$.
3) $(\mathbb{Z}/n, +)$.
4) $(S_n, \circ)$, ở đó S_n là tập tất cả các phép thế trên n phần tử.

Đồng cấu nhóm

Giả sử G và G' là các đồng cấu nhóm (viết theo lối nhân). Ánh xạ $\varphi : G \to G'$ là một đồng cấu nhóm nếu

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),\ \forall x, y \in G.$$

Nhận xét:

$$\varphi(e) = e', \quad \varphi(x^{-1}) = [\varphi(x)]^{-1}$$

Đồng cấu nhóm

Định nghĩa

1) *Đồng cấu nhóm + đơn ánh = đơn cấu nhóm,*
2) *Đồng cấu nhóm + toàn ánh = toàn cấu nhóm,*
3) *Đồng cấu nhóm + song ánh = đẳng cấu nhóm. Khi đó ta viết $G \cong G'$.*

Các ví dụ

i) Phép nhúng $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ là một đơn cấu nhóm.

ii) Phép chiếu $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$ là một toàn cấu nhóm.

iii) Ánh xạ mũ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$ là một đẳng cấu nhóm từ $(\mathbb{R}, +)$ vào $(\mathbb{R}^+, \times)$.

Cấu trúc vành

Định nghĩa

Một vành là một bộ $(R, +, \times)$ *thỏa mãn*

(R1) *R là một nhóm abel với phép cộng.*

(R2) *Phép nhân có tính chất kết hợp:*

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R$$

(R3) *Phép nhân phân phối từ hai phía đối với phép cộng:*

$$(x + y)z = xz + yz$$
$$z(x + y) = zx + zy, \forall x, y, z \in R$$

i) *Vành R được gọi là* giao hoán *hay* abel *nếu phép nhân có tính chất giao hoán.*

ii) *Vành R được gọi là có đơn vị nếu phép nhân có đơn vị.*

Cấu trúc vành

Các vị dụ về vành

a) $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times)$ là các vành giao hoán có đơn vị. $(\mathbb{N}, +, \times)$ không là một vành.

b) $(\mathbb{Z}/n, +, \times)$ là một vành giao hoán, có đơn vị, được gọi là vành các số nguyên modulo n.

Định nghĩa

Cho R, R' là các vành. Ánh xạ $\varphi : R \to R'$ là một đồng cấu vành nếu

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \end{cases} \quad \forall x, y \in R.$$

Chú ý

Các khái niệm đơn cấu vành, toàn cấu vành, đẳng cấu vành được định nghĩa tương tự như với nhóm.

Cấu trúc trường - thể

Định nghĩa

i) *Một thể là một vành có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch.*

ii) *Một thể giao hoán được gọi là một trường.*

Các ví dụ

a) $(\mathbb{Q}, +, \times)$ là một trường.

b) Vành $(\mathbb{Z}, +, \times)$ không là một trường.

c) $\mathbb{Q}\sqrt{2} := \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường đối với các phép toán cộng và nhân thông thường.

d) Trường số thực.

e) Trường số phức.

Cấu trúc trường

Định nghĩa

i) *Nếu vành R chứa các phần tử* $a \neq 0, b \neq 0$ *sao cho* $ab = 0$ *thì ta nói R có ước của không.*

ii) *Ngược lại, nếu từ đẳng thức* $ab = 0$ *suy ra* $a = 0$ *hoặc* $b = 0$ *ta nói vành R không có ước của không.*

Mệnh đề

Mỗi trường đều là một vành không có ước của không.

Mệnh đề

$\mathbb{Z}/n$ *là một trường nếu và chỉ nếu n là một số nguyên tố.*

Đặc số của một trường

Định nghĩa

Cho R là một vành có đơn vị 1. Nếu có số nguyên n sao cho $\overset{1+1+\cdots+1}{n} = 0$, *thì số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất đó được gọi là đặc số của vành R, kí hiệu là* $\mathrm{Char}(R)$. *Ngược lại, ta nói R có đặc số bằng* 0.

Ví dụ

a) $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Char}(\mathbb{Q}) = 0$,

b) $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}/n) = n$.

Mệnh đề

Nếu R là một trường thì $\mathrm{Char}(R)$ *hoặc là bằng* 0 *hoặc là một số nguyên tố.*

Vành số nguyên

Định nghĩa

Cho m và n là các số nguyên. Ta nói n chia hết cho m và viết $m|n$ nếu tồn tại một số nguyên k sao cho $n = km$. Khi đó ta cũng nói m là một ước số của n.

Định nghĩa

Cho $a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}, d \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất các số nguyên q và r sao cho

$$a = qd + r, 0 \leq r < d.$$

q được gọi là phần thương và and r được gọi là phần dư của phép chia a cho d.

Định nghĩa

Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Hai số nguyên a và b được gọi là đồng dư mô đun n nếu $n|(a - b)$. Nói cách khác, chúng có cùng phần dư khi chia cho n.

Vành số nguyên

Mệnh đề

Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Quan hệ đồng dư mô đun n là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

Tập tất cả các lớp đồng dư mô đun n được kí hiệu bởi $\mathbb{Z}_n := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Mệnh đề

$\mathbb{Z}_n$ cùng với các phép toán cộng và nhân được định nghĩa dưới đây là một vành

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a}.\overline{b} = \overline{ab}.$$

Thuật toán Euclidean

Định nghĩa

Cho hai số tự nhiên khác không a, b.

i) *Ước chung lớn nhất của a và b là số tự nhiên n lớn nhất thỏa mãn $n|a, n|b$ và được kí hiệu là* $\mathrm{GCD}(a, b)$.

ii) *Bội chung nhỏ nhất của a và b là số tự nhiên nhỏ nhất m thỏa mãn $a|m, b|m$ và được kí hiệu là* $\mathrm{LCD}(a, b)$.

Mệnh đề

$$ab = \mathrm{GCD}(a, b).\,\mathrm{LCD}(a, b).$$

Mệnh đề

Nếu $a, b, q, r \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a = bq + r$, thì $\mathrm{GCD}(a, b) = \mathrm{GCD}(b, r)$.

Ước chung lớn nhất

Thuật toán Euclidean

1) Viết $a = bq_1 + r_1$,
2) $b = r_1 q_2 + r_2$,
3) $r_1 = r_2 q_3 + r_3$,
4) $\cdots$
5) $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$,
6) Bước cuối cùng $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$.

Khi đó, $r_n = \mathrm{GCD}(a, b)$.

Ví dụ

Tìm $\mathrm{GCD}(3195, 630), \mathrm{GCD}(1243, 3124), \mathrm{GCD}(123456789, 987654321)$

Ví dụ

Tìm các số nguyên a, b sao cho $1243a + 3124b = 11$.

Biểu diễn số nguyên

Định nghĩa

Cho b là một số nguyên dương. Nếu $n \in \mathbb{N}$ có biểu diễn

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0, \quad 0 \leq a_j < b, a_k \neq 0,$$

thì biểu diễn đó được gọi là biểu diễn của n dưới dạng cơ số b và ta viết $n = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b$.

Nếu $b = 2$ thì ta có biểu diễn cơ số hai của n.

Thuật toán tìm biểu diễn cơ số b của n

1) Viết $n = bq_0 + a_0$,
2) $q_0 = bq_1 + a_1$,
3) $\cdots$
4) Bước cuối cùng $q_{m-1} = bq_m + a_m$ if $q_m = 0$.

Khi đó, $n = (a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$.

Biểu diễn các số nguyên

Bài tập

Biểu diễn các số sau dưới dạng cơ số 6:

a) 2011, *b)* 3125.

Bài tập

a) $3145_{(7)} + 5436_{(7)}$,

b) $6145_{(7)} - 5451_{(7)}$,

c) $3142_{(7)} : 6_{(7)}$,

d) $3142_{(7)} \times 54_{(7)}$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Trường số phức

Mở đầu

i) Phương trình $X^2 - 2 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ $\Rightarrow$ Xây dựng trường số thực,

ii) Phương trình $X^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực $\Rightarrow$ Xây dựng thêm các số mới.

iii) Gọi i là một "kí hiệu hình thức" thỏa mãn $i^2 = -1$. Như vậy, ta sẽ gặp các số có dạng $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Một cặp có thứ tự hai số thực (a, b) được gọi là một số phức. Tập hợp tất cả các số phức được kí hiệu bởi $\mathbb{C}$, nói cách khác $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Đến đây, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ là một tập hợp "đơn thuần", chưa có "cấu trúc".

Trường số phức

Ta định nghĩa các phép toán $+$ và $\times$ trên $C := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ như sau:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, c)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mệnh đề

Tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ cùng với hai phép toán cộng và nhân định nghĩa ở trên lập nên một trường có đặc số bằng 0.

Nhận xét

i) Phần tử trung lập của phép cộng là $(0, 0)$.

ii) Phần tử đơn vị của phép nhân là $(1, 0)$.

iii) Nghịch đảo của số phức $(a, b) \neq (0, 0)$ là $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Trường số phức

Trường số thực "nhúng" vào trường số phức

Các phép toán cộng và nhân trên trường số phức vừa định nghĩa ở trên "phù hợp" với các phép toán cộng và nhân trên trường số thực, theo nghĩa

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0), \quad (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

Vì thế, mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$ có thể được đồng nhất với số phức $(a,0)$. Người ta nói trường số thực là một trường con của trường số phức.

Dạng đại số của số phức

Đặt $i=(0,1)$, khi đó $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)\equiv -1$. Đây chính là "vật liệu mới" để xây dựng trường số phức. Thật vậy,

$$z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

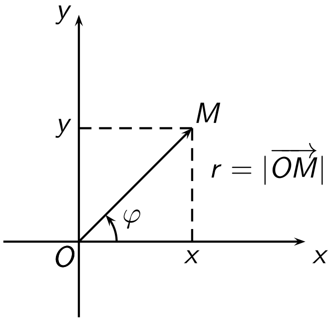
gọi là dạng đại số của số phức, $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$.

Dạng lượng giác của số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng Oxy. Điểm M được gọi là ảnh của số phức z và (a, b) được gọi là toạ vị của số phức z. Đặt $\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$ thì $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

i) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là độ dài (hay mô đun) của số phức z, kí hiệu là $|z|$.

ii) φ được gọi là Argument của số phức, kí hiệu là $\operatorname{Arg} z$.



Dạng lượng giác của số phức

Các phép toán trên dạng lượng giác của số phức

1) Phép nhân

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2.[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\text{Vậy } |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

2) Phép chia

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$\text{Vậy } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Dạng lượng giác của số phức

Các phép toán trên dạng lượng giác của số phức

3) Phép luỹ thừa (Công thức Moirve)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\text{Vậy } |z^n| = |z|^n$$

4) Phép khai căn
Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ thì

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right], k = \overline{0, n-1}.$$

Nhận xét rằng mỗi số phức $z \neq 0$ đều có n số căn bậc n khác nhau.

Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$.

i) số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z.

ii) Ở dạng lượng giác, số phức liên hợp của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Tính chất của số phức liên hợp

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$
3) $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
4) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
5) $|\overline{z}| = |z|$
6) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
8) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Chương 1: Đại số đại cương

Đa thức

Định nghĩa

Giả sử K là một trường. Biểu thức hình thức

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$$

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_N \in K$ được gọi là một đa thức của ẩn X (hay biến X) với các hệ số trong K.

i) Bậc của đa thức:

$$\deg f(X) = \begin{cases} N & \text{nếu } a_N \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } a_N = a_{N-1} = \cdots = a_0 = 0. \end{cases}$$

ii) Kí hiệu $K[X]$: tập hợp các đa thức ẩn X với hệ số trong K.

iii) Các phép toán trong $K[X]$: cộng, nhân.

Đại số $K[X]$ - Monier

Trong sách Đại số - Monier định nghĩa đa thức như sau:

Định nghĩa

i) *Với mọi dãy* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, *ta gọi tập hợp các n sao cho* $a_n \neq 0$ *là giá của* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) *Đa thức (một ẩn và lấy hệ tử trong* K*) là dãy* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bất kì có giá hữu hạn, nghĩa là ,*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ là đa thức } \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow a_n = 0).$$

Mệnh đề

$K[X]$ *cùng với hai phép toán cộng và nhân lập thành một vành giao hoán, có đơn vị.*

Đại số $K[X]$ - Monier

Trong sách Đại số - Monier định nghĩa đa thức như sau:

Định nghĩa

i) Với mọi dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, ta gọi tập hợp các n sao cho $a_n \neq 0$ là giá của $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Đa thức (một ẩn và lấy hệ tử trong K) là dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bất kì có giá hữu hạn, nghĩa là ,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ là đa thức } \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow a_n = 0).$$

Mệnh đề

$K[X]$ cùng với hai phép toán cộng và nhân lập thành một vành giao hoán, có đơn vị.

Đơn thức: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \neq n_0 \Rightarrow n = 0)$. Kí hiệu

$$X = (0,1,\dots,0,\dots) \Rightarrow X^n = (0,0,\dots,1,0,\dots,0,\dots)$$

Phép hợp đa thức

Định nghĩa

Cho $P = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n X^n \in K[X]$ *và* $Q \in K[X]$. *Ta định nghĩa đa thức hợp* $P \circ Q$ *là*

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{n=0}^{N} a_n Q^n.$$

Một số tính chất

a) $\deg(P \circ Q) = \deg P + \deg Q, \ \forall P, Q \in (K[X] \setminus \{0\})^2$.

b) $(\alpha P + \beta Q) \circ R = \alpha P \circ R + \beta Q \circ R$,

c) $(PQ) \circ R = (P \circ R)(Q \circ R)$,

d) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$,

e) $X \circ P = P \circ X = P$.

Chú ý: Luật $\circ$ không giao hoán, không phân phối trái với $+$ trong $K[X]$.

Đa thức đạo hàm

Định nghĩa

i) Cho $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in K[X]$. *Đa thức đạo hàm của đa thức P, kí hiệu là* P', *là đa thức* $P' = \sum_{n=1}^{N} n a_n X^{n-1}$.

ii) Kí hiệu $P^{(0)} = P, P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$.

Một số tính chất

i) $\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{nếu } \deg P \geq 1, \\ -\infty & \text{nếu } \deg P \leq 0. \end{cases}$

ii) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$,

iii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$,

iv) (Công thức Leibniz) $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Hàm đa thức

Định nghĩa

Với mọi $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in K[X]$, *hàm số*

$$\begin{aligned} \widetilde{P} : K &\to K \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \end{aligned} \tag{2}$$

được gọi là hàm đa thức liên kết với P.

Hàm đa thức

Một số tính chất

i) $\widetilde{\alpha P + \beta Q} = \alpha \widetilde{P} + \beta \widetilde{Q}$,

ii) $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$,

iii) $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$,

iv) $\widetilde{P'} = (\widetilde{P})'$.

Mệnh đề

Ánh xạ $K[X] \to K^K, P \to \widetilde{P}$ *là đơn ánh khi và chỉ khi* K *vô hạn.*

Ý nghĩa: Khi K vô hạn (như $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$), ta có thể đồng nhất P và $\tilde{P}$

Định lý (Định lý Taylor đối với đa thức)

Cho $P \in \mathbb{C}[X], N \in \mathbb{N}$ *thỏa mãn* $\deg P \leq N, a \in \mathbb{C}$. *Ta có*

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\widetilde{P^{(n)}(a)}}{n!} X^n.$$

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,
4) $A|B$ và $B|C \Rightarrow A|C$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,
4) $A|B$ và $B|C \Rightarrow A|C$,
5) $A|B \Rightarrow A|BC$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,
4) $A|B$ và $B|C \Rightarrow A|C$,
5) $A|B \Rightarrow A|BC$,
6) $A|B, A|C \Rightarrow A|(B + C)$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,
4) $A|B$ và $B|C \Rightarrow A|C$,
5) $A|B \Rightarrow A|BC$,
6) $A|B, A|C \Rightarrow A|(B + C)$,
7) $A|B, P|Q \Rightarrow AP|BQ$,

Số học trong $K[X]$

Tính chia hết

i) Cho $(A, P) \in (K[X])^2$. Ta nói rằng A là ước của P (trong $K[X]$) và kí hiệu $A|P$ nếu tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $P = AQ$.

ii) Thay cho A là ước của P ta cũng nói P là một bội của A.

Kí hiệu $AK[X] = \{P \in K[X] | \exists Q \in K[X], P = AQ\}$.

Một số tính chất

1) $A|0, A|A, \ \forall A \in K[X]$,
2) $0|P \Leftrightarrow P = 0$,
3) $A|P, P|A \Leftrightarrow P = \alpha A, \alpha \in K \setminus \{0\}$,
4) $A|B$ và $B|C \Rightarrow A|C$,
5) $A|B \Rightarrow A|BC$,
6) $A|B, A|C \Rightarrow A|(B + C)$,
7) $A|B, P|Q \Rightarrow AP|BQ$,
8) $A|P \Leftrightarrow AK[X] \supset PK[X]$.

Số học trong $K[X]$

Định lý (Phép chia Euclide có dư)

Giả sử $f(X)$ và $g(X) \neq 0$ là các đa thức của vành $K[X]$. Khi đó, tồn tại duy nhất các đa thức $q[X]$ và $r[X]$ trong $K[X]$ sao cho

$$f(X) = g(X)q(X) + r(X), \quad \deg r(X) < \deg g(X).$$

Nếu $r(X) = 0$ ta nói $f(X)$ chia hết cho $g(X)$ trong $K[X]$.

Ví dụ

Thực hiện phép chia Euclide

a) $P = X^4 + 2X^3 - X + 6$ *cho* $Q = X^3 - 6X^2 + X + 4$ *trong* $\mathbb{R}[X]$.

b) $P = iX^3 - X^2 + (1 - i)$ *cho* $Q = (1 + i)X^2 - iX + 3$ *trong* $\mathbb{C}[X]$.

UCLN - BCNN

Mệnh đề

Cho $P_1, \ldots, P_n \in (K[X] \setminus \{0\})^n$.

i) *Tồn tại duy nhất một và chỉ một đa thức* Δ, *chuẩn tắc, khác không, là ước chung của* $P_1, \ldots, P_n$, *được gọi là ước chung lớn nhất của* $P_1, \ldots, P_n$ *và được kí hiệu là* $\mathrm{UCLN}(P_1, \ldots, P_n)$.

ii) *Tồn tại duy nhất một và chỉ một đa thức* M, *chuẩn tắc, khác không, là bội chung của* $P_1, \ldots, P_n$, *được gọi là bội chung nhỏ nhất của* $P_1, \ldots, P_n$ *và được kí hiệu là* $\mathrm{BCNN}(P_1, \ldots, P_n)$.

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\text{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1 \le i \le n} = \text{UCLN}(P_i)_{1 \le i \le n}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\text{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \text{UCLN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
2) $\text{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \text{BCNN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\mathrm{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \mathrm{UCLN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
2) $\mathrm{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \mathrm{BCNN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
3) $\mathrm{UCLN}(AP_i)_{1\leq i\leq n} = A.\,\mathrm{UCLN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\text{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1\le i\le n} = \text{UCLN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
2) $\text{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1\le i\le n} = \text{BCNN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
3) $\text{UCLN}(AP_i)_{1\le i\le n} = A.\,\text{UCLN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
4) $\text{BCNN}(AP_i)_{1\le i\le n} = A.\,\text{BCNN}(P_i)_{1\le i\le n}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\text{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \text{UCLN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
2) $\text{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1\leq i\leq n} = \text{BCNN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
3) $\text{UCLN}(AP_i)_{1\leq i\leq n} = A.\,\text{UCLN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
4) $\text{BCNN}(AP_i)_{1\leq i\leq n} = A.\,\text{BCNN}(P_i)_{1\leq i\leq n}$,
5) $A|\Delta = \text{UCLN}(P_1, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A|P_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\text{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1 \le i \le n} = \text{UCLN}(P_i)_{1 \le i \le n}$,
2) $\text{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1 \le i \le n} = \text{BCNN}(P_i)_{1 \le i \le n}$,
3) $\text{UCLN}(AP_i)_{1 \le i \le n} = A.\,\text{UCLN}(P_i)_{1 \le i \le n}$,
4) $\text{BCNN}(AP_i)_{1 \le i \le n} = A.\,\text{BCNN}(P_i)_{1 \le i \le n}$,
5) $A | \Delta = \text{UCLN}(P_1, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A | P_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$,
6) $M = \text{BCNN}(P_1, \ldots, P_n) | B \Leftrightarrow P_i | B, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$,

UCLN - BCNN

Một số tính chất

1) $\mathrm{UCLN}(\alpha_i P_i)_{1\le i\le n} = \mathrm{UCLN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
2) $\mathrm{BCNN}(\alpha_i P_i)_{1\le i\le n} = \mathrm{BCNN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
3) $\mathrm{UCLN}(AP_i)_{1\le i\le n} = A.\,\mathrm{UCLN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
4) $\mathrm{BCNN}(AP_i)_{1\le i\le n} = A.\,\mathrm{BCNN}(P_i)_{1\le i\le n}$,
5) $A|\Delta = \mathrm{UCLN}(P_1,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A|P_i,\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$,
6) $M = \mathrm{BCNN}(P_1,\ldots,P_n)|B \Leftrightarrow P_i|B,\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$,
7) (Tính kết hợp của UCLN và BCNN)
$$\begin{cases}\mathrm{UCLN}(P,Q,R) = \mathrm{UCLN}(\mathrm{UCLN}(P,Q),R),\\ \mathrm{BCNN}(P,Q,R) = \mathrm{BCNN}(\mathrm{BCNN}(P,Q),R).\end{cases}$$

UCLN - BCNN

Thuật toán Euclide

UCLN(P, Q) chính là số dư cuối cùng khác không chuẩn tắc hóa trong dãy các phép chia Euclide liên tiếp.

Ví dụ

Tìm UCLN của $P = X^5 + X + 1$ *và* $Q = X^4 - 2X^3 - X + 2$ *trong* $\mathbb{R}[X]$.

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Kí hiệu $\mathrm{UCLN}(A, B) = A \wedge B, \quad \mathrm{BCNN}(A, B) = A \vee B.$

Một số tính chất

1) $A \wedge B = 1, C|B \Rightarrow A \wedge C = 1,$

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Kí hiệu $\text{UCLN}(A, B) = A \wedge B, \quad \text{BCNN}(A, B) = A \vee B.$

Một số tính chất

1) $A \wedge B = 1, C | B \Rightarrow A \wedge C = 1,$
2) (Định lý Bezout) Điều kiện cần và đủ để $(P_1, \ldots, P_n) \in (K[X] \setminus \{0\})^n$ nguyên tố cùng nhau trong toàn thể là tồn tại $(U_1, \ldots, U_n) \in (K[X])^n$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i U_i = 1.$

Ví dụ

Chứng minh rằng các đa thức $P = X^4 + 1$ *và* $Q = X^3 - 1$ *là nguyên tố cùng nhau và tìm* $U, V \in \mathbb{R}[X]$ *thỏa mãn* $PU + QV = 1$.

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Một số tính chất

3) (Định lý Gauss) $\forall A, B, C \in K[X] \setminus \{0\}, \begin{cases} A|BC, \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A|C.$

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Một số tính chất

3) (Định lý Gauss) $\forall A, B, C \in K[X] \setminus \{0\}, \begin{cases} A|BC, \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A|C.$

4) Cho $A, P_1, \ldots, P_n \in K[X] \setminus \{0\}$. Ta có

$$(A \wedge P_i = 1,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}) \Rightarrow A \wedge \left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right) = 1.$$

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Một số tính chất

3) (Định lý Gauss) $\forall A, B, C \in K[X] \setminus \{0\}, \begin{cases} A|BC, \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A|C.$

4) Cho $A, P_1, \ldots, P_n \in K[X] \setminus \{0\}$. Ta có

$$(A \wedge P_i = 1,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}) \Rightarrow A \wedge \left(\prod_{i=1}^{n} P_i \right) = 1.$$

5) $\forall A, B \in K[X] \setminus \{0\}, \forall k, l \in \mathbb{N}^*, A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A^k \wedge B^l = 1.$

Đa thức nguyên tố cùng nhau

Một số tính chất

3) (Định lý Gauss) $\forall A, B, C \in K[X] \setminus \{0\}, \begin{cases} A|BC, \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A|C.$

4) Cho $A, P_1, \ldots, P_n \in K[X] \setminus \{0\}$. Ta có

$$(A \wedge P_i = 1,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}) \Rightarrow A \wedge \left(\prod_{i=1}^{n} P_i \right) = 1.$$

5) $\forall A, B \in K[X] \setminus \{0\}, \forall k, l \in \mathbb{N}^*, A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A^k \wedge B^l = 1.$

6) Nếu $P_i | A, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ và nếu $P_1, \ldots, P_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau thì $\prod_{i=1}^{n} P_i | A$.

7) Với mọi $A, B \in K[X] \setminus \{0\}$, $(A \wedge B)(A \vee B)$ là đa thức chuẩn tắc của AB.

Số học trong $K[X]$

Định nghĩa

Đa thức $P(X) \in K[X]$ được gọi là bất khả quy (hay đa thức nguyên tố) trên K nếu nó có bậc dương và nếu nó không thừa nhận một phân tích nào có dạng $P(X) = Q(X)H(X)$, trong đó $\deg g < \deg f, \deg h < \deg f$.

Số học trong $K[X]$

Định nghĩa

Đa thức $P(X) \in K[X]$ được gọi là bất khả quy (hay đa thức nguyên tố) trên K nếu nó có bậc dương và nếu nó không thừa nhận một phân tích nào có dạng $P(X) = Q(X)H(X)$, trong đó $\deg g < \deg f, \deg h < \deg f$.

Mọi đa thức bậc nhất đều bất khả quy, đa thức bậc hai bất khả quy trên K nếu và chỉ nếu nó vô nghiệm trong K.

Ví dụ

Cho K là một trường con của L. Khi đó, nếu P bất khả quy trong $L[X]$ thì nó bất khả quy trong $K[X]$, nhưng điều ngược lại không đúng.

Số học trong $K[X]$

Định nghĩa

Đa thức $P(X) \in K[X]$ được gọi là bất khả quy (hay đa thức nguyên tố) trên K nếu nó có bậc dương và nếu nó không thừa nhận một phân tích nào có dạng $P(X) = Q(X)H(X)$, trong đó $\deg g < \deg f, \deg h < \deg f$.

Mọi đa thức bậc nhất đều bất khả quy, đa thức bậc hai bất khả quy trên K nếu và chỉ nếu nó vô nghiệm trong K.

Ví dụ

Cho K là một trường con của L. Khi đó, nếu P bất khả quy trong $L[X]$ thì nó bất khả quy trong $K[X]$, nhưng điều ngược lại không đúng.

a) *Đa thức $X^2 - 2$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nhưng khả quy trên $\mathbb{R}$.*

b) *Đa thức $X^2 + 1$ bất khả quy trên $\mathbb{R}$ nhưng khả quy trên $\mathbb{C}$.*

Đa thức bất khả quy (đa thức nguyên tố)

Một số tính chất

i) Cho $P \in K[X]$ bất khả quy, $A \in K[X] \setminus \{0\}$, khi đó hoặc $P|A$ hoặc $P \wedge A = 1$.

ii) Cho $P \in K[X]$ bất khả quy, $A_1, \ldots, A_n \in K[X] \setminus \{0\}$. Khi đó, $P| \prod\limits_{i=1}^{n} A_n \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $P|A_i$.

iii) Mọi đa thức thuộc $K[X]$ có bậc ≥ 1 đều có một dạng phân tích thành những đa thức bất khả quy, duy nhất sai khác thứ tự các nhân tử.

Ví dụ

Phân tích thành nhân tử đa thức $X^4 + X^3 + X + 1$ trong $\mathbb{R}[X]$ và $C[X]$ tương ứng.

Số học trong $K[X]$

Định nghĩa

Phần tử $c \in K$ được gọi là nghiệm (hay không điểm) của đa thức $P(X)$ nếu $\tilde{P}(c) = 0 \in K$, ở đó $\tilde{P}$ là ánh xạ đa thức liên kết với P.

Định lý (Bézout)

c là nghiệm của $P(X) \Leftrightarrow \exists q(X) \in K[X]$ sao cho $P(X) = (x - c)Q(X)$.

Hệ quả

i) *Cho $P \in K[X]$. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ đôi một khác nhau là các không điểm của $P[X]$ thì $\prod\limits_{i=1}^{n} (X - x_i) | P$.*

ii) *Nếu $\deg P < n$ và P có ít nhất n không điểm đôi một khác nhau thì $P = 0$.*

iii) *Nếu một đa thức $P \in K[X]$ triệt tiêu tại một số vô hạn các phần tử thuộc K thì $P = 0$.*

Đa thức nội suy Lagrange

Bài toán

Cho $x_0, \ldots, x_n \in K$ đôi một khác nhau và $b_0, \ldots, b_n \in K$.

Tìm đa thức $P \in K[X]$ sao cho $\begin{cases} \deg P \leq n, \\ \tilde{P}(x_i) = b_i, \forall i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$

Đa thức nội suy Lagrange

Bài toán

Cho $x_0, \dots, x_n \in K$ đôi một khác nhau và $b_0, \dots, b_n \in K$.

Tìm đa thức $P \in K[X]$ sao cho $\begin{cases} \deg P \leq n, \\ \tilde{P}(x_i) = b_i, \forall i = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$

Đa thức nội suy tại các điểm

Với mỗi $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,∃! đa thức $L_i \in K[X]$ sao cho

i) $\deg L_i \leq n$,

ii) $\tilde{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j, \\ 0, & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$

$$L_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j)$$

Đa thức nội suy Lagrange

Bài toán

Cho $x_0, \ldots, x_n \in K$ đôi một khác nhau và $b_0, \ldots, b_n \in K$.

Tìm đa thức $P \in K[X]$ sao cho $\begin{cases} \deg P \leq n, \\ \tilde{P}(x_i) = b_i, \forall i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$

Đa thức nội suy tại các điểm

Với mỗi $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,$\exists!$ đa thức $L_i \in K[X]$ sao cho

i) $\deg L_i \leq n$,

ii) $\tilde{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j, \\ 0, & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$

$$L_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j) \Rightarrow P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i.$$

Đa thức tách được

Định nghĩa

Một đa thức P của $K[X]$ được gọi là đa thức tách (hay tách được) nếu tồn tại $\lambda \in K \setminus \{0\}, x_1, \cdots, x_n \in K$ (không nhất thiết khác nhau từng đôi) sao cho

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i),$$

Ví dụ

Cho K là một trường con của L và $P \in K[X]$. Khi đó, P có thể tách được trên L nhưng không tách được trên K.

Đa thức tách được

Định nghĩa

Một đa thức P của $K[X]$ được gọi là đa thức tách (hay tách được) nếu tồn tại $\lambda \in K \setminus \{0\}, x_1, \cdots, x_n \in K$ (không nhất thiết khác nhau từng đôi) sao cho

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i),$$

Ví dụ

Cho K là một trường con của L và $P \in K[X]$. Khi đó, P có thể tách được trên L nhưng không tách được trên K.

i) Đa thức $X^2 - 2$ là tách được trên $\mathbb{R}$, không tách được trên $\mathbb{Q}$

ii) Đa thức $X^2 + 1$ là tách được trên $\mathbb{C}$, không tách được trên $\mathbb{R}$.

Trong phần sau của Bài giảng, ta sẽ chỉ ra mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}(X)$ đều tách được trên $\mathbb{C}$.

Đa thức tách được

Mệnh đề (Hệ thức giữa hệ tử và không điểm (Vieta))

Cho $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$. *Giả thiết* P *tách được và kí hiệu* $x_1, \cdots, x_n$ *là các không điểm của* P *(không nhất thiết khác nhau) sao cho*

$$P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - x_i).$$

Khi đó,

i) $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$,

ii) $\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$,

iii) $\sigma_n = x_1 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *được gọi là các hàm đối xứng cơ bản của* $x_1, \cdots, x_n$.

Bội của không điểm

Định lý

Cho $P \in K[X], a \in K, n \in \mathbb{N}^*$.

i) Để a là không điểm bội không thấp hơn n của P, điều kiện cần và đủ là

$$P^{(k)}(a) = 0, \forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

ii) Để a là không điểm bội n của P, điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} P^{(k)}(a) = 0, \forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \\ P^{(n)}(a) \neq 0. \end{cases}$$

Trường hợp $C[X]$

Định lý (Định lý d'Alambert - Định lý cơ bản của Đại số học)

Mọi đa thức khác hằng số thuộc $\mathbb{C}[X]$ có ít nhất một không điểm trong $\mathbb{C}$. Ta nói $\mathbb{C}$ là một trường đóng đại số.

Hệ quả

Mọi đa thức khác hằng số trên $\mathbb{C}[X]$ đều tách được trên $\mathbb{C}$.

Hệ quả

Các đa thức bất khả quy thuộc $\mathbb{C}[X]$ đều là các đa thức bậc nhất.

Trường hợp $\mathbb{R}(X)$

Định lý

Mọi phân tích nguyên tố của $P \in \mathbb{R}[X]$ bất kì có dạng

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{N} (X - x_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{M} (X^2 + p_j X + q_j)^{s_j},$$

trong đó x_i khác nhau đôi một, $\Delta_j = p_j^2 - 4q_j < 0$.

Một số hệ quả

i) Các đa thức bất khả quy của $\mathbb{R}[X]$ là
  a) Các đa thức bậc nhất,
  b) Các đa thức bậc hai có biệt thức $\Delta < 0$.

ii) Mọi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[X]$ đều có ít nhất một không điểm thực.

iii) Mọi đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ bậc lớn hơn hoặc bằng 3 đều khả quy.

Trường phân thức hữu tỉ $K(X)$

Tập hợp $K(X)$

Kí hiệu $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ và xét quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên E

$$(A, S)\mathcal{R}(B, T) \Leftrightarrow AT = BS.$$

$K(X) := E/\mathcal{R}$ tập hợp các phân thức hữu tỉ một ẩn số lấy hệ tử trong K.

Trường phân thức hữu tỉ $K(X)$

Tập hợp $K(X)$

Kí hiệu $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ và xét quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên E

$$(A, S)\mathcal{R}(B, T) \Leftrightarrow AT = BS.$$

$K(X) := E/\mathcal{R}$ tập hợp các phân thức hữu tỉ một ẩn số lấy hệ tử trong K.

Các phép toán trên $K(X)$

a) Phép cộng $(A, S) + (B, T) = (AT + BS, ST)$,

b) Phép nhân $(A, S)(B, T) = (AB, ST)$.

c) Luật ngoài trong $K(X)$: $\lambda(A, S) = (\lambda A, S)$.

Trường phân thức hữu tỉ $K(X)$

Tập hợp $K(X)$

Kí hiệu $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ và xét quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên E

$$(A, S)\mathcal{R}(B, T) \Leftrightarrow AT = BS.$$

$K(X) := E/\mathcal{R}$ tập hợp các phân thức hữu tỉ một ẩn số lấy hệ tử trong K.

Các phép toán trên $K(X)$

a) Phép cộng $(A, S) + (B, T) = (AT + BS, ST)$,

b) Phép nhân $(A, S)(B, T) = (AB, ST)$.

c) Luật ngoài trong $K(X)$: $\lambda(A, S) = (\lambda A, S)$.

Mệnh đề

$(K(X), +, \times)$ là một trường, gọi là trường các phân thức hữu tỉ lấy hệ tử trong K.

Trường phân thức hữu tỉ $K(X)$

Tập hợp $K(X)$

Kí hiệu $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ và xét quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên E

$$(A, S)\mathcal{R}(B, T) \Leftrightarrow AT = BS.$$

$K(X) := E/\mathcal{R}$ tập hợp các phân thức hữu tỉ một ẩn số lấy hệ tử trong K.

Các phép toán trên $K(X)$

a) Phép cộng $(A, S) + (B, T) = (AT + BS, ST)$,

b) Phép nhân $(A, S)(B, T) = (AB, ST)$.

c) Luật ngoài trong $K(X)$: $\lambda(A, S) = (\lambda A, S)$.

Mệnh đề

$(K(X), +, \times)$ là một trường, gọi là trường các phân thức hữu tỉ lấy hệ tử trong K.Chú ý: $K[X]$ là một vành con của $K(X)$.

Bậc của phân thức hữu tỉ

Chú ý

i) *Phần tử nghịch đảo của* $G = (A, S) \in K(X)$ *là* (S, A) *và được kí hiệu là* G^{-1}. *Khi đó, người ta có thể định nghĩa "phép chia"* $\frac{F}{G} = FG^{-1}$.

ii) *nếu* $(A, S) = (B, T)$ *thì* $\deg A - \deg S = \deg B - \deg T$.

Định nghĩa

Cho $(A, S) \in K(X)$, *bậc của phân thức hữu tỉ* (A, S) *được định nghĩa bởi* $\deg(A, S) = \deg A - \deg S$.

Một số tính chất

i) $\deg F + G \leq \max(\deg F, \deg G)$,

ii) $\deg(kF) = \deg F$,

iii) $\deg(FG) = \deg F + \deg G$.

Phân thức hữu tỉ đạo hàm

Định nghĩa

i) Cho $F = \frac{A}{S} \in K(X)$. Phân thức hữu tỉ đạo hàm của F, kí hiệu F', được định nghĩa bởi $F' = \frac{A'S - AS'}{S^2}$.

ii) Đạo hàm cấp cao $F^{(n)} = (F^{(n-1)})'$.

Chú ý: Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn đại diện $\frac{A}{S}$ của F.

Một số tính chất

i) $(F + G)' = F' + G'$,

ii) $(\lambda F)' = \lambda F'$,

iii) $(FG)' = F'G + FG'$,

iv) $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$,

v) $(F^{(i)})^{(j)} = F^{(i+j)}$,

vi) (Công thức Leibniz)

$$(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^{(k)} G^{(n-k)}.$$

Dạng bất khả quy của một phân thức hữu tỉ

Định nghĩa

Đại diện bất khả quy của một phân thức hữu tỉ khác không thuộc $K(X)$ là một cặp $(A, S) \in (K[X] \setminus \{0\})^2$ sao cho $A \wedge S = 1$.

Tính chất

i) Mọi phân thức hữu tỉ khác không đều có ít nhất một đại diện BKQ.

ii) Cho $F \in K(X)$ và (A, S) là một đại diện BKQ, các đại diện BKQ của F là $(kA, kS), k \in K \setminus \{0\}$.

iii) Cho $F \in K(X)$ và (A, S) là một đại diện BKQ, mọi đại diện của F đều có dạng $(QA, QS), Q \in K[X] \setminus \{0\}$.

Không điểm và cực điểm của phân thức hữu tỉ

Định nghĩa

Cho $F \in K(X) \setminus \{0\}$ và (A, S) là một đại diện BKQ của F.

i) Các không điểm của A được gọi là không điểm của F. Cấp bội không điểm a của A đồng thời là cấp bội không điểm a của F.

ii) Các không điểm của S được gọi là các cực điểm của F. Cấp bội của không điểm a của S được gọi là cấp bội của cực điểm a của F.

Hàm hữu tỉ

Định nghĩa

i) Cho $F \in K(X)$ và (A, S) là một đại diện BKQ của F. Hàm số $\widetilde{F} : K \to K, x \mapsto \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{S}(x)}$ được gọi là hàm hữu tỉ liên kết với F.

ii) Ngược lại, mọi hàm $f : K \to K$ sao cho tồn tại phân thức hữu tỉ $F \in K[X]$ mà $f = \widetilde{F}$ được gọi là một hàm hữu tỉ trong K.

Khảo sát cục bộ một phân thức hữu tỉ

Bổ đề

Cho $F = (A, S) \in K(X)$. *Tồn tại duy nhất một cặp* $(E, R) \in (K[X])^2$ *sao cho*

$$F = E + \frac{R}{S}, \quad \deg R < \deg S$$

Hơn nữa, nếu $A \wedge S = 1$ *thì* $R \wedge S = 1$. *Đa thức* E *được gọi là phần nguyên của* F, *còn phân thức hữu tỉ* $\frac{R}{S}$ *(đôi khi) được gọi là phần phân thức của* F.

Bổ đề

Cho $A \in K[X], S_1, S_2, \ldots, S_n \in K[X] \setminus \{0\}$ *sao cho* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó, tồn tại* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K[X]$ *sao cho*

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n} = \frac{A_1}{S_1} + \cdots + \frac{A_n}{S_n}.$$

Khảo sát cục bộ một phân thức hữu tỉ

Bổ đề

Cho $A \in K[X], S_1, \cdots, S_n \in K[X] \setminus \{0\}$ *sao cho* $S_1, \cdots, S_n$ *đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó, tồn tại duy nhất* $(E, R_1, \cdots, R_n) \in (K[X])^{n+1}$ *sao cho*

$$\frac{A}{S_1 \cdots S_n} = E + \frac{R_1}{S_1} + \cdots + \frac{R_n}{S_n}, \quad \deg R_i < \deg S_i.$$

Bổ đề

Cho $(A, S) \in (K[X])^2$ *sao cho* $\deg S \geq 1$. *Khi đó, tồn tại* $(E, C_1, C_2, \cdots, C_n) \in K[X]^{n+1}$ *duy nhất sao cho*

$$\frac{A}{S^n} = E + \frac{C_n}{S^n} + \frac{C_{n-1}}{S^{n-1}} + \cdots + \frac{C_1}{S}.$$

Khảo sát cục bộ một phân thức hữu tỉ

Các phân thức đơn giản của $K(X)$

Các phân thức đơn giản của $K(X)$ bao gồm:

i) Các đơn thức của $K(X)$,

ii) $\frac{C}{S^\alpha}$, trong đó $(C, S) \in (K[X] \setminus \{0\})^2, \deg S \geq 1$, S là bất khả quy, $\deg C < \deg S$.

Phân tích một phân thức hữu tỉ thành phân thức đơn giản

Cho $F = \frac{A}{S_1^{\alpha_1} \ldots S_n^{\alpha_n}} \in K(X)$, trong đó $S_1, \cdots, S_n$ là bất khả quy và đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại duy nhất phân tích

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{\alpha_i,j}}{S_i^j}, \quad \deg C_{\alpha_i,j} < \deg S_i.$$

Trường hợp $\mathbb{C}(X)$

Cho $F = \frac{A}{S} \in \mathbb{C}(X)$ sao cho $\deg S \geq 1$. Vì $\mathbb{C}$ là một trường đóng đại số nên tồn tại $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ khác nhau đôi một sao cho

$$S = \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)^{\alpha_i}.$$

Khi đó, F thừa nhận phân tích

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - z_i)^j},$$

trong đó E là phần nguyên của F và $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$.

Trường hợp $R(X)$

Bằng phép chia đa thức, chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta luôn đưa được một hàm phân thức hữu tỷ về dạng

$$f(x) = H(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

trong đó $H(x)$ là đa thức thương, $r(x)$ là phần dư trong phép chia. Khi đó $\frac{r(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỷ thực sự.

i) Phân tích đa thức ở mẫu số $Q(x)$

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}...(x-\alpha_m)^{a_m}(x^2+p_1x+q_1)^{b_1}...(x^2+p_nx+q_n)^{b_n}.$$

ii) Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện $(x-\alpha)^a$, thì trong phân tích của phân thức $\frac{r(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$, $1 \leq i \leq a$.

iii) Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện $(x^2+px+q)^b$, thì trong phân tích của phân thức $\frac{r(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j}$, $1 \leq j \leq b$.