Phần I.Mệnh đề

Biên soạn : TS.Nguyễn Viết Đông

Tài liệu tham khảo

- Toán rời rạc, GS.TS. Nguyễn Hữu Anh
- Michael P.Frank 's slides
- Nguyễn Viết Hưng 's slides
- Toán rời rạc, TS. Trần Ngọc Hội

Mệnh đề và chân trị

- Khái niệm về mệnh đề:

  Mệnh đề toán học là khái niệm cơ bản của toán học không được định nghĩa mà chỉ được mô tả.

  Mệnh đề toán học(gọi tắt là mệnh đề) là một khẳng định có giá trị chân lý xác định(đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng vừa sai).

Mệnh đề và chân trị

- Ví dụ:
  - "Số 123 chia hết cho 3" là 1 mệnh đề đúng
  - "Thành phố Hồ Chí Minh là thủ đô của nước Việt Nam" là một mệnh đề sai.
  - "Bạn có khỏe không ? " không phải là một mệnh đề toán học vì đây là một câu hỏi không thể phản ánh một điều đúng hay một điều sai

Mệnh đề và chân trị

- Kiểm tra xem các khẳng định sau có là mệnh đề không? Nếu có, đó là mệnh đề đúng hay sai?
  - Môn Toán rời rạc là môn bắt buộc chung cho ngành Tin học.
  - 97 là số nguyên tố.
  - N là số nguyên tố.

5

Mệnh đề và chân trị

- Ký hiệu mệnh đề :
  Người ta thường dùng các ký hiệu : P, Q, R, …
- Chú ý: Mệnh đề phức hợp là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết chúng lại bằng các liên từ(và, hay, nếu…thì…) hoặc trạng từ "không"
  - Ví dụ : Nếu trời tốt thì tôi đi dạo.

6

Mệnh đề và chân trị

- Chân trị của mệnh đề:
  Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có ***chân trị đúng***, ngược lại ta nói P có ***chân trị sai***.
  Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1hay Đ(đúng),T(true) và 0 hay S(sai),F(false)

7

Phép tính mệnh đề

- Mục đích của phép tính mệnh đề:
  Nghiên cứu chân trị của một mệnh đề phức hợp từ chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn và các phép nối những mệnh đề này biểu hiện qua liên từ hoặc trạng từ "không"

8

Some Popular Boolean Operators

Formal Name	Nickname	Arity	Symbol
Negation operator	NOT	Unary	¬
Conjunction operator	AND	Binary	∧
Disjunction operator	OR	Binary	∨
Exclusive-OR operator	XOR	Binary	⊕
Implication operator	IMPLIES	Binary	→
Biconditional operator	IFF	Binary	↔

Phép tính mệnh đề

Phủ định của mệnh đề

Mệnh đề phủ định của mệnh đề p, ký hiệu bởi $\bar{p}$ hay ¬p (đọc là "không p" hay "phủ định của p"), là mệnh đề được định bởi: $\bar{p}$ đúng ⇔ p sai

Phép tính mệnh đề

The unary *negation operator* "¬" (*NOT*) transforms a prop. into its logical *negation*.

E.g. If *p* = "I have brown hair."

then ¬*p* = "I do **not** have brown hair."

11

Phép tính mệnh đề

p	$\neg p$
T	F
F	T

Phép tính mệnh đề

- Phép nối liền(phép hội; phép giao):
  Mệnh đề nối liền của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi :
  $P \wedge Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng

13

Phép tính mệnh đề

- Ví dụ: Mệnh đề "Hôm nay, cô ấy đẹp và thông minh " chỉ được xem là mệnh đề đúng khi cả hai điều kiện "cô ấy đẹp" và "cô ấy thông minh" đều xảy ra. Ngược lại, chỉ 1 trong 2 điều kiện trên sai thì mệnh đề trên sẽ sai.

14

Phép tính mệnh đề

- Mệnh đề "Hôm nay, An giúp mẹ lau nhà và rửa chén" chỉ đúng khi hôm nay An giúp mẹ cả hai công việc lau nhà và rửa chén. Ngược lại, nếu hôm nay An chỉ giúp mẹ một trong hai công việc trên, hoặc không giúp mẹ cả hai thì mệnh đề trên sai.

15

The Conjunction Operator

The binary *conjunction operator* "$\wedge$" (*AND*) combines two propositions to form their logical *conjunction*.

$\wedge$ND

E.g. If *p*="I will have salad for lunch." and *q*="I will have steak for dinner.", then $p \wedge q$="I will have salad for lunch **and** I will have steak for dinner."

Remember: "$\wedge$" points up like an "A", and it means "$\wedge$ND"

16

Conjunction Truth Table

- Note that a conjunction $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ of n propositions will have 2^n rows in its truth table.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

- Also: ¬ and ∧ operations together are sufficient to express *any* Boolean truth table!

Operand columns

Phép tính mệnh đề

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Phép tính mệnh đề

- Phép nối rời(phép tuyển; phép hợp)

  Mệnh đề nối rời của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi P ∨ Q (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi :

  P ∨ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai

Phép tính mệnh đề

- Ví dụ: Mệnh đề "Tôi đang chơi bóng đá hay bóng rổ".

  Mệnh đề này chỉ sai khi tôi vừa không đang chơi bóng đá cũng như vừa không đang chơi bóng rổ. Ngược lại, tôi chơi bóng đá hay đang chơi bóng rổ hay đang chơi cả hai thì mệnh đề trên đúng.

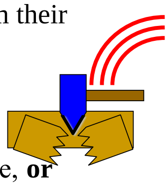
The Disjunction Operator

The binary *disjunction operator* "$\vee$" (*OR*) combines two propositions to form their logical *disjunction*.

p="My car has a bad engine."

q="My car has a bad carburetor."

$p \vee q$="Either my car has a bad engine, **or** my car has a bad carburetor."



Meaning is like "and/or" in English.

After the downward-pointing "axe" of "$\vee$" splits the wood, you can take 1 piece OR the other, or both.

Disjunction Truth Table

- Note that $p \vee q$ means that p is true, or q is true, **or both** are true!
- So, this operation is also called *inclusive or,* because it **includes** the possibility that both p and q are true.
- "$\neg$" and "$\vee$" together are also universal.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	**T**
T	F	**T**
T	T	T

Note difference from AND

Phép tính mệnh đề

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Phép tính mệnh đề

- Chú ý :

  Cần phân biệt "hay" và "hoặc".

  Đưa ra phép toán để thể hiện trường hợp loại trừ

  Ký hiệu : $\veebar$, $\oplus$

  P $\veebar$ Q sai $\Leftrightarrow$ P và Q đồng thời cùng đúng hoặc cùng sai.

The *Exclusive Or* Operator

The binary *exclusive-or operator* "⊕" (*XOR*) combines two propositions to form their logical "exclusive or" (exjunction?).

p = "I will earn an A in this course,"

q = "I will drop this course,"

$p \oplus q$ = "I will either earn an A for this course, or I will drop it (but not both!)"

Exclusive-Or Truth Table

- Note that $p \oplus q$ means that *p* is true, or *q* is true, but **not both**!
- This operation is called *exclusive or,* because it **excludes** the possibility that both *p* and *q* are true.
- "¬" and "⊕" together are **not** universal.

p	*q*	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	**F**

Note difference from OR.

Phép tính mệnh đề

- Phép kéo theo:

  Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu bởi $P \rightarrow Q$(đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi:

  $P \rightarrow Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai .

Phép tính mệnh đề

- Ví dụ: Xét mệnh đề sau :

  "Nếu tôi đẹp trai thì tôi có nhiều bạn gái"

  Ta có các trường hợp sau:
  - Tôi đẹp trai và có nhiều bạn gái : Mệnh đề rõ ràng đúng
  - Tôi đẹp trai và không có nhiều bạn gái : Mệnh đề rõ ràng sai
  - Tôi không đẹp trai mà vẫn có nhiều bạn gái : Mệnh đề vẫn đúng
  - Tôi không đẹp trai và không có nhiều bạn gái : Mệnh đề vẫn đúng

Phép tính mệnh đề

- Mệnh đề "Chiều nay, nếu rảnh tôi sẽ ghé thăm bạn" chỉ sai khi chiều nay tôi rảnh nhưng tôi không ghé thăm bạn.
- Ngược lại, nếu chiều nay tôi bận thì dù tôi có ghé thăm bạn hay không, mệnh đề trên vẫn đúng. Ngoài ra, tất nhiên nếu chiều nay tôi có ghé thăm bạn thì mệnh đề trên đúng (dù tôi có rảnh hay không!).

29

The *Implication* Operator

The *implication* $\underbrace{p}_{\text{antecedent}} \to \underbrace{q}_{\text{consequent}}$ states that p implies q.

I.e., If p is true, then q is true; but if p is not true, then q could be either true or false.

E.g., let p = "You study hard."
q = "You will get a good grade."

$p \to q$ = "If you study hard, then you will get a good grade." (else, it could go either way)

30

Implication Truth Table

- $p \to q$ is **false** only when p is true but q is **not** true.
- $p \to q$ does **not** say that p causes q!
- $p \to q$ does **not** require that p or q **are ever true**!
- *E.g.* "(1=0) $\to$ pigs can fly" is TRUE!

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	**F**
T	T	T

The only False case!

31

Examples of Implications

- "If this lecture ends, then the sun will rise tomorrow." *True* or *False*?
- "If Tuesday is a day of the week, then I am a penguin." *True* or *False*?
- "If 1+1=6, then Bush is president." *True* or *False*?
- "If the moon is made of green cheese, then I am richer than Bill Gates." *True* or *False*?

32

Phép tính mệnh đề

P	q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Phép tính mệnh đề

- **Phép kéo theo hai chiều**:

  Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnhđề P và Q, ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q"), là mệnh đề xác định bởi:

  $P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Phép tính mệnh đề

Mệnh đề "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$" là một mệnh đề đúng vì nếu tam giác ABC vuông tại A thì ta luôn luôn có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ và ngược lại (định lý Pitagore).

Phép tính mệnh đề

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

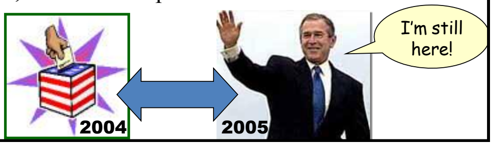
The *biconditional* operator

The *biconditional* $p \leftrightarrow q$ states that p is true *if and only if (IFF)* q is true.

p = "Bush wins the 2004 election."

q = "Bush will be president for all of 2005."

$p \leftrightarrow q$ = "If, and only if, Bush wins the 2004 election, Bush will be president for all of 2005."



Biconditional Truth Table

- $p \leftrightarrow q$ means that p and q have the **same** truth value.
- Note this truth table is the exact **opposite** of $\oplus$'s!
  - $p \leftrightarrow q$ means $\neg(p \oplus q)$
- $p \leftrightarrow q$ does **not** imply p and q are true, or cause each other.

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Boolean Operations Summary

- We have seen 1 unary operator and 5 binary operators. Their truth tables are below.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T

Some Alternative Notations

Name:	not	and	or	xor	implies	iff
Propositional logic:	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Boolean algebra:	$\bar{p}$	pq	$+$	$\oplus$		
C/C++/Java (wordwise):	!	&&	||	!=		==
C/C++/Java (bitwise):	~	&	|	^		
Logic gates:						

Dạng mệnh đề

- *Dạng mệnh đề* là một biểu thức được cấu tạo từ:
  - Các hằng mệnh đề, tức là các mệnh đề đã xét ở trên.
  - Các biến mệnh đề, tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề, thông qua các phép toán mệnh đề đã xét ở mục trên theo một trình tự nhất định nào đó, thường được chỉ rõ bởi các dấu ngoặc.

Dạng mệnh đề

- Với E là một dạng mệnh đề các biến mệnh đề p, q, r ứng với mỗi giá trị cụ thể P, Q, R (là các mệnh đề) của p, q, r thì ta có duy nhất một mệnh đề E(P, Q, R). Ta viết E = E(p, q, r).
- Bảng chân trị là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r. Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Dạng mệnh đề

Cho E và F là hai dạng mệnh đề theo n biến $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ta nói:

a) E là một hằng đúng (tương ứng, hằng sai) ký hiệu bởi **1** (tương ứng, **0**), nếu E luôn luôn nhận chân trị đúng (tương ứng, sai).

b) F là hệ quả của E, ký hiệu $E \Rightarrow F$, nếu dạng mệnh đề $E \rightarrow F$ là một hằng đúng.

c) E tương đương logic (hay tương đương) với F, ký hiệu $E \Leftrightarrow F$, nếu dạng mệnh đề $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Tautologies and Contradictions

A *tautology* is a compound proposition that is **true** *no matter what* the truth values of its atomic propositions are!

Ex. $p \vee \neg p$ [What is its truth table?]

A *contradiction* is a compound proposition that is **false** no matter what! *Ex.* $p \wedge \neg p$ [Truth table?]

Other compound props. are *contingencies*.

Logical Equivalence

Compound proposition p is *logically equivalent* to compound proposition q, written $p \Leftrightarrow q$, **IFF** the compound proposition $p \leftrightarrow q$ is a tautology.

Compound propositions p and q are logically equivalent to each other **IFF** p and q contain the same truth values as each other in all rows of their truth tables.

Proving Equivalence via Truth Tables

Ex. Prove that $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Dạng mệnh đề

1. Quy tắc thay thế thứ 1
   Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.
2. Quy tắc thay thế thứ 2
   Giả sử dạng mệnh đề E(p,q,r…) là một hằng đúng. Nếu ta thay thế những nơi p xuất hiện trong E bởi một F(p’,q’,r’) thì dạng mệnh đề nhận được theo các biến q,r…,p’,q’,r’,… vẫn còn là 1 hằng đúng.

Dạng mệnh đề

Các luật logic : Với p, q, r là các biến mệnh đề, **1** là một hằng đúng và **0** là một hằng sai, ta có các tương đương logic sau đây:

1) Luật luỹ đẳng

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Dạng mệnh đề

2) Luật giao hoán

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

và $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

3) Luật kết hợp

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(\Leftrightarrow p \wedge q \wedge r)$

và $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

4) Luật phân phối (Luật phân bố)

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

và $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5) Luật kéo theo

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

6) Luật phủ định của phủ định

$\overline{(\overline{p})} \Leftrightarrow p$

7) Luật phủ định De Morgan

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

và $\overline{p \rightarrow q} = p \wedge \overline{q}$

8) Luật phản đảo

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \rightarrow \overline{p}$

9) Luật tương đương

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

10) Luật trung hòa

$p \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow p$

và $p \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow p$

11) Luật phần tử bù

$p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow \mathbf{0}$

và $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow \mathbf{1}$

12) Luật thống trị

$p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$

và $p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$

13) Luật hấp thụ

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

và $$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

14) Luật đơn giản

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

15) Luật mở rộng

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

Dạng mệnh đề

16) Luật rút gọn:

$p \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow 1$

$p \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$

$(p \vee q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

$p \rightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow 1$

Equivalence Laws - Examples

- *Identity*: $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$ $\quad p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$
- *Domination*: $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\quad p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
- *Idempotent*: $p \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad p \wedge p \Leftrightarrow p$
- *Double negation:* $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- *Commutative:* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- *Associative:* $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

More Equivalence Laws

- *Distributive*: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- *De Morgan's*:
  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- *Trivial tautology/contradiction*:
  $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\quad p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$


Augustus De Morgan (1806-1871)

Defining Operators via Equivalences

Using equivalences, we can *define* operators in terms of other operators.

- Exclusive or: $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
  $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
- Implies: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- Biconditional: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

57

An Example Problem

- Check using a symbolic derivation whether $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \oplus r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$.

$(p \wedge \neg q) \underline{\rightarrow} (p \oplus r) \Leftrightarrow$

[Expand definition of $\rightarrow$] $\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \underline{\oplus} r)$

[Defn. of $\oplus$] $\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$

[DeMorgan's Law]

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$

$\Leftrightarrow$ [associative law] *cont.*

58

Example Continued...

$(\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)) \Leftrightarrow$ [$\vee$ commutes]

$\Leftrightarrow \underline{(q \vee \neg p)} \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$ [$\vee$ associative]

$\Leftrightarrow q \vee \underline{(\neg p \vee} ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)))$ [distrib. $\vee$ over $\wedge$]

$\Leftrightarrow q \vee (((\underline{\neg p \vee} (p \vee r)) \wedge (\underline{\neg p \vee} \neg(p \wedge r)))$

[assoc.] $\Leftrightarrow q \vee (((\underline{(\neg p \vee p) \vee r}) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$

[trivail taut.] $\Leftrightarrow q \vee ((\underline{\mathbf{T}} \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$

[domination] $\Leftrightarrow q \vee (\underline{\mathbf{T}} \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$

[identity] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee \neg(p \wedge r)) \Leftrightarrow$ *cont.*

59

End of Long Example

$q \vee (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$

[DeMorgan's] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee (\neg p \vee \neg r))$

[Assoc.] $\Leftrightarrow q \vee ((\neg p \vee \neg p) \vee \neg r)$

[Idempotent] $\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee \neg r)$

[Assoc.] $\Leftrightarrow (q \vee \neg p) \vee \neg r$

[Commut.] $\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$

Q.E.D. (quod erat demonstrandum)

(Which was to be shown.)

60

Dạng mệnh đề

- Để chứng minh một dạng mệnh đề là hằng đúng, hằng sai, các dạng mệnh đề là tương đương lôgic, dạng mệnh đề này là hệ quả logic của dạng mệnh đề kia, ta có các cách sau:
  - Lập bảng chân trị.
  - Sử dụng phép thay thế.

Ví dụ

Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$(\neg p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \to q) \to r \qquad (1)$

Chúng ta có thể chứng minh (1) bằng hai cách.

<u>Cách 1</u>: Lập bảng chân trị .

<u>Cách 2</u>: Biến đổi và sử dụng các luật logic ta có:

$(\overline{p} \to r) \wedge (q \to r)$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\overline{q} \vee \neg r)$ (Luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee r$ (Luật phân phối)

$\Leftrightarrow \overline{p \to q} \vee r$ (Luật phủ định De Morgan)

$\Leftrightarrow (p \to q) \to r$ (Luật kéo theo)

Qui tắc suy diễn

- Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng *p*, *q*, *r*…(tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lí của một mệnh đề *h* mà ta gọi là kết luận.
- Nói cách khác, dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh:

$(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots)$ có hệ quả logic là h

.

Qui Tắc Suy Diễn

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ . \\ : \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Qui Tắc Suy Diễn

- **QUI TẮC MODUS PONENS(Phương pháp khẳng định)**

  Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

•Nếu An học chăm thì An học tốt.
•Mà An học chăm
Suy ra An học tốt

•Hình vuông là hình bình hành
•Mà hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
Suy ra hình vuông có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Qui Tắc Suy Diễn

- **QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN(Syllogism)**

  Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

•Hai tam giác vuông có cạnh huyền và 1 cặp góc nhọn bằng nhau thì chúng ta có một cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau.
•Nếu hai tam giác có cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau thì chúng bằng nhau
Suy ra hai tam giác vuông có cạnh huyền và 1 cặp góc nhọn bằng nhau thì bằng nhau

•Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
•Cái gì hiếm thì đắt
Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt (☺)

Qui Tắc Suy Diễn

- **QUI TẮC MODUS TOLLENS**

PHƯƠNG PHÁP PHỦ ĐỊNH

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \to q) \wedge \neg q\right] \to \neg p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

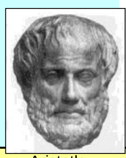
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- Xét chứng minh

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ t \vee \neg s \\ \neg t \vee u \\ \neg u \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- Ta suy luận

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ t \to u \\ \neg u \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$



Aristotle
(ca. 384-322 B.C.)

Qui Tắc Suy Diễn

- **QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN RỜI**

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \to p \qquad \left[(p \vee q) \wedge \neg p\right] \to q$$

Ý nghĩa của qui tắc: nếu trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp sai thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ đúng

Qui Tắc Suy Diễn

- **QUI TẮC MÂU THUẪN**

  CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

  Ta có tương đương logic

$$\left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \rightarrow q\right] \Leftrightarrow \left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q\right) \rightarrow 0\right]$$

- Để chứng minh vế trái là một hằng đúng ta chứng minh nếu thêm phủ định của *q* vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn.

VÍ DỤ

- Hãy chứng minh:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \rightarrow s \end{array}$$

- Cm bằng phản chứng.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \neg r \\ \neg s \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

74

Qui Tắc Suy Diễn

- **CHỨNG MINH THEO TRƯỜNG HỢP**

  Dựa trên hằng đúng:

$$\left[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)\right] \rightarrow \left[(p \vee q) \rightarrow r\right]$$

- Ý nghĩa: nếu *p* suy ra *r* và *q* suy ra *r* thì *p* hay *q* cũng có thể suy ra *r*.

VÍ DỤ

- Chứng minh rằng:

$$\left(n^3 - 4n\right) ⋮ 3$$

Một số luật thêm

$$\frac{p}{\therefore\ p \lor q}$$ Rule of Addition(Phép thêm)

$$\frac{p \land q}{\therefore\ p}$$ Phép đơn giản nối liền

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{\therefore\ p \land q}$$ Luật về phép nối lền

77

VÍ DỤ TỔNG HỢP

1. Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn.
2. Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiềnvé phải trả lại cho người xem.
3. Nhưng tiềnvé đã không trả lại cho người xem.

Vậy nghệ sỹ TB đã trình diễn

- p:Nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn.
- q:số vé bán ra ít hơn 100.
- r:đêm diễn bị hủy bỏ.
- s: ông bầu buồn.
- t:trả lại tiền vé cho người xem

$$\neg p \lor q \to r \land s$$
$$r \to t$$
$$\frac{\neg t}{\therefore\ p}$$

78

Qui Tắc Suy Diễn

- PHẢN VÍ DỤ

  Để chứng minh một phép suy luận là sai hay

  $$p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n \to q$$

  không là một hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

VÍ DỤ

- Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.
- Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ

- p:ông Minh được tăng lương.
- q: ông Minh nghỉ việc.
- r: vợ ông Minh mất việc.
- s: gia đình phải bán xe.
- t: vợ ông hay đi làm trễ.

$$\neg p \to q$$
$$q \land r \to s$$
$$t \to r$$
$$\frac{p}{\therefore\ \neg s \to \neg t}$$

s=0
t=1
p=1
q=0
r=1

80

Formal Proof Example

- Suppose we have the following premises:
  "It is not sunny and it is cold."
  "Only if We will swim is it sunny."
  "If we do not swim, then we will canoe."
  "If we canoe, then we will be home early."
- Given these premises, prove the theorem **"We will be home early"** using inference rules.

81

Proof Example *cont.*

- Let us adopt the following abbreviations:
  - *sunny* = **"It is sunny"**; *cold* = **"It is cold"**; *swim* = **"We will swim"**; *canoe* = **"We will canoe"**; *early* = **"We will be home early"**.
- Then, the premises can be written as:
  (1) $\neg sunny \wedge cold$ (2) $swim \rightarrow sunny$
  (3) $\neg swim \rightarrow canoe$ (4) $canoe \rightarrow early$

82

Proof Example *cont.*

Step	Proved by
1. $\neg sunny \wedge cold$	Premise #1.
2. $\neg sunny$	Simplification of 1.
3. $swim \rightarrow sunny$	Premise #2.
4. $\neg swim$	Modus tollens on 2,3.
5. $\neg swim \rightarrow canoe$	Premise #3.
6. $canoe$	Modus ponens on 4,5.
7. $canoe \rightarrow early$	Premise #4.
8. $early$	Modus ponens on 6,7.

83

Qui Tắc Suy Diễn

- VD1

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \vee s \\ t \rightarrow q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{r} \rightarrow \overline{t} \end{array}$$

84

1) $\overline{s}$ (Tiền đề)
2) $p \vee s$ (Tiền đề)
3) p (Tam đoạn luận rời)
4) $p \to (q \to r)$ (Tiền đề)
5) $q \to r$ (Qui tắc khẳng định)
6) $t \to q$ (Tiền đề)
7) $t \to r$ (Tam đoạn luận)
$\therefore \overline{r} \to \overline{t}$ (Luật phản đảo)

Vậy suy luận trên là đúng.

Qui Tắc Suy Diễn

- VD2

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \to s \end{array}$$

Qui Tắc Suy Diễn

- Giải

Ta có:

1) Giả sử $\overline{\overline{q} \to s}$ (Giả thiết phản chứng)
2) $\overline{q} \wedge \overline{s}$ (Luật phủ định De Morgan)
3) $\overline{q}$ và $\overline{s}$ (Luật đơn giản)
4) $p \to q$ (Tiền đề)
5) $\overline{p}$ (Qui tắc phủ định)

Qui Tắc Suy Diễn

6) $\overline{r} \vee s$ (Tiền đề)
7) $\overline{r}$ (Từ 3, 6, do tam đoạn luận rời)
8) $\overline{p} \wedge \overline{r}$ (Định nghĩa phép nối liền)
9) $\overline{p \vee r}$ (Luật phủ định De Morgan)
10) $p \vee r$ (Tiền đề)
11) **0** (Luật phần tử bù)

$\therefore$ Suy luận trên là đúng (Qui tắc phản chứng).

Qui Tắc Suy Diễn

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \vee \overline{r}) \\ \overline{q} \vee \overline{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Ta xét hệ sau:

$$\begin{cases} p = 1 & (1) \\ p \to r = 1 & (2) \\ p \to (q \vee \overline{r}) = 1 & (3) \\ \overline{q} \vee \overline{s} = 1 & (4) \\ s = 0 & (5) \end{cases}$$

Chú ý rằng nếu hệ trên vô nghiệm thì suy luận đã cho là đúng, còn nếu hệ trên có nghiệm thì suy luận đã cho là sai.

Ta thấy ngay (4) là hệ quả của (5). Mặt khác, từ (1) và (2), (3) ta suy ra:

$$\begin{cases} r = 1 \\ q \vee \overline{r} = 1 \end{cases}$$

Do đó r = 1, q = 1. Thử lại ta thấy p = 1, q = 1, r = 1

Bài tập

1) Đề thi ĐHBK2000

Kiểm tra lại dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$[p \to (q \vee r)] \to [(p \to q) \vee (p \to r)]$

2) Đề thi KHTN 2001

Kiểm tra lại tính đúng đắn của suy luận sau

$$\begin{array}{l} p \\ q \to r \\ p \to \neg r \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Bài tập

3. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh các dạng mệnh đề sau là các hằng đúng:

a) $((p \to q) \wedge p) \to q$.

b) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.

c) $((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$.

d) $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to 0)$.

e) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

f) $((p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$.

g) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

Bài tập

4. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh:

a) $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$

b) $((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$.

c) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$

d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$.

93

Bài tập

5. Hãy kiểm tra các suy luận sau:

- a)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{q} \\ \overline{r} \\ \hline \therefore \overline{p \vee r} \end{array}$$

94

Bài tập

- b)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \overline{s} \\ \hline \therefore t \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \overline{q} \rightarrow \overline{p} \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

95

Bài tập

c)

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \vee \overline{s} \\ \overline{s} \rightarrow \overline{q} \\ \hline \therefore s \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ \overline{p} \rightarrow q \\ (q \wedge r) \rightarrow s \\ t \rightarrow r \\ \hline \therefore \overline{s} \rightarrow \overline{t} \end{array}$$

96