Đại học Bách Khoa Hà Nội **Viện Toán ứng dụng và Tin học**

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH II

Nhóm ngành 2 **Mã học phần: MI 1122**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.
   Nội dung: Từ Chương 1 đến hết bài Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian.
2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Hàm số nhiều biến số

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

b) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài 2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^4+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

b) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+3xy}, \quad (x \to \infty, y \to \infty)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x(e^y-1)-y(e^x-1)}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

Bài 3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b) $z = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$

c) $z = x^{y^3}, (x>0)$

d) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

Bài 4. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0;0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0;0) \end{cases}$

Bài 5. Giả sử $z = yf(x^2-y^2)$, trong đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}{z_x}' + \frac{1}{y}{z_y}' = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 6. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau:

a) $z = e^{u^2-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $z = \ln\left(u^2+v^2\right), u = xy, v = \dfrac{x}{y}$

c) $z = \arcsin\left(x-y\right), x = 3t, y = 4t^3$

Bài 7. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $\omega(x,t) = f(x-3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$.

Bài 8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $z = \sin(x^2+y^3)$

b) $z = \ln\tan\dfrac{y}{x}$

c) $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $u = x^{y^2z}$

Bài 9. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt{(2,02)^3 + e^{0,03}}$

b) $B = (1,02)^{1,01}$

Bài 10. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y'

b) $x^2 + y + z^3 + e^z = 0$, tính ${z_x}', {z_y}'$

c) $\arctan\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y'

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính ${z_x}', {z_y}'$

Bài 11. Cho hàm số ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0;1), \dfrac{\partial z}{\partial y}(0;1)$.

Bài 12. Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$, tính ${u_x}', {u_y}'$ biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Bài 13. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z_x{}' + \frac{1}{y} z_y{}' = \frac{1}{z}.$$

Bài 14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau:

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 15. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2 y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 16. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 17. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$.

Bài 18. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 19. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Chương 2

Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

Bài 20. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2; 5)$

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$

c) $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$

Bài 21. Tính độ cong của

a) $y = \ln(\cos x)$ tại điểm ứng với $x = \pi/4$

b) $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \ln(2t-1) \end{cases}$ tại điểm $M(3; 0)$

Bài 22. Tìm điểm M trên parabol $P\colon y = x^2 - 4x + 6$ sao cho độ cong của P tại M đạt lớn nhất.

Ứng dụng trong hình học không gian

Bài 23. Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}\vec{q}(t)$

b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$

Bài 24. Đường cong C được biểu diễn bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Giả sử $\vec{r}(t)$ là hàm khả vi và $\vec{r'}(t)$ luôn vuông góc với $\vec{r}(t)$. Chứng minh rằng C nằm trên một mặt cầu tâm tại gốc tọa độ.

Bài 25. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \pi/4,\ (a, b, c > 0)$

b) $x = 2\cos t, y = 4\sin t, z = 4\cos^2 t + 1$ tại điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3)$

Bài 26. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

a) $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại điểm $(2; -1; 1)$

b) $z = \ln(2 + 3x^2 - 4y^2)$ tại điểm $(1; 1; 0)$

c) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ tại điểm $(1; -1; 1)$

d) $x^2 + 2y^3 - yz = 0$ tại điểm $(1; 1; 3)$

e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ tại điểm $(4; 1; -4)$

Bài 27. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ tại điểm $A(4; -3; 0)$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2; 1; 6)$

Chương 3

Tích phân kép

Tích phân kép

Bài 28. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\sin x}^{1+x^2} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

Bài 29. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (2y-x)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $y = 1$

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x-y|dxdy$, trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{y^2-x^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x, x = 0$ và $y = 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} 2xydxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = -1, y = 0$ và $y = 1$

f) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$

g) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[4]{x}}^{1} \frac{dy}{y^5+1}$

Bài 30. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực của $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau

a) $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$

b) $x^2 + y^2 \ge x, x^2 + y^2 \le 2x, x \le y, y \le \sqrt{3}x$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \ge 0, (a, b > 0)$

Bài 31. Dùng phép đổi biến trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_0^R dx \int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2}dy, \quad (R > 0)$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le x$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy$, với $\mathcal{D} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$

d) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} xydxdy$, với

1) $\mathcal{D}$ là mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \le 1$

2) $\mathcal{D}$ là nửa mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} |x-y|dxdy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le 1$

Bài 32. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v

a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$.

Bài 33. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} y \le x^2 + y^2 \le 2y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \le 1$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 12 \\ x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |9x^2 - 4y^2| dxdy$, trong đó $\mathcal{D} : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (4xy + 3y) dxdy$, trong đó $1 \leq xy \leq 4, x \leq y \leq 9x$

3.1 Ứng dụng của tích phân bội

Bài 34. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$

Bài 35. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0, (a > 0). \end{cases}$

Bài 36. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $\begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$

Bài 37. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $r \geq 1; r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Bài 38. Tính diện tích của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos \varphi)$, $(a > 0)$.

Bài 39. Chứng minh rằng diện tích miền $\mathcal{D}$ xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \leq 4$ không đổi $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 40. Tính thể tích của miền xác định bởi

$$x + y \geq 1,\ x + 2y \leq 2,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2 - x - y.$$

Bài 41. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2.$$

Chương 4

Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

Bài 42. $\int\limits_C (xy + x + 2y)ds$, trong đó C là đường cong $x = \cos t, y = \sin t$ với $0 \leq t \leq \pi/2$

Bài 43. $\int\limits_C xyds$, trong đó C là nửa đường elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, y \geq 0$

Bài 44. $\int\limits_C (x - y)ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Bài 45. $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0) \end{cases}$

Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

Bài 46. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (3xy + 1)dy$, trong đó L là cung parabol $y = x^2$ từ $O(0; 0)$ đến $M(1; 1)$

Bài 47. $\int\limits_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của $t, (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$

Bài 48. $\int\limits_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$ trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$

Bài 49. $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ và $D(0; -1)$

Bài 50. Tính tích phân sau

$$\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường

a) $x^2+y^2=R^2$ b) $x^2+y^2=2x$ c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$

Bài 51. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\dfrac{x}{4}\right)dy-y^2\left(x+\dfrac{y}{4}\right)dx$

Bài 52. $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$ và $B(0;2)$

Bài 53. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$

Bài 54. $\oint\limits_C \left(xy^4+x^2+y\cos(xy)\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy)\right)dy$, trong đó C là đường cong $x=a\cos t, y=a\sin t, (a>0)$

Bài 55. Dùng tích phân đường loại hai tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid: $x=a(t-\sin t); y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

Bài 56. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

Bài 57. $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$

Bài 58. Tính tích phân đường $\int\limits_C (y^2-e^y\sin x)dx+(x^2+2xy+e^y\cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $x=\sqrt{2y-y^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $P(0;2)$.

Bài 59. Tìm hằng số a, b để biểu thức $(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

Bài 60. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(y)[y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0;1)$ đến $B(-3;2)$.

Chương 5

Lý thuyết trường

Bài 61. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = 3x^3 + y^2 + 2z^3 - 2xyz$ tại điểm $A(1;2;1)$ với $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}, B(2;4;2)$.

Bài 62. Cho hàm số $u(x,y,z) = x^3 + 3x^2y + 2yz^3$. Tính đạo hàm $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}$ tại điểm $A(1;1;-1)$, trong đó $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm A.

Bài 63. Tính môđun của $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u$, với

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u = \overrightarrow{0}$?

Bài 64. Tính $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r, \text{ với } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài 65. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x\sin z - y\cos z$ từ gốc $O(0;0;0)$ là lớn nhất?

Bài 66. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\mathrm{grad}}z$ của các hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $(3;4)$.

Bài 67. Trong các trường vectơ sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có)

a) $\vec{F} = (x^2 - 4xy)\vec{i} + (2x^3 - 2z)\vec{j} + e^z\vec{k}$

b) $\vec{F} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$

d) $\vec{F} = C\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $C \neq 0$ hằng số

e) $\vec{F} = (3x^2 + 2yz)\vec{i} + (y^2 + 2xz + e^y)\vec{j} + (9z^2 + 2xy)\vec{k}$

Viện Toán ứng dụng và Tin học