# Giải tích hàm

**TS. Bùi Xuân Diệu**

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

# Chương 2: Không gian định chuẩn

# Khái niệm không gian định chuẩn

## Định nghĩa 1

$(X, d)$: KGVT + metric thỏa mãn

i) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (bất biến đối với phép tịnh tiến),

ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (tính thuần nhất).

$\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

# Khái niệm không gian định chuẩn

## Định nghĩa 1

$(X, d)$: KGVT + metric thỏa mãn

i) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (bất biến đối với phép tịnh tiến),

ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (tính thuần nhất).

$\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

## Định nghĩa (Chuẩn)

*Khi đó,*

$$\|x\| =: d(x, 0)$$

*được gọi là chuẩn (hay độ dài) của véctơ $x$.*

# Khái niệm không gian định chuẩn

## Các tính chất của chuẩn

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác)

# Khái niệm không gian định chuẩn

## Các tính chất của chuẩn

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác)

Ngược lại,

## Định nghĩa 2

KGĐC = KGVT và $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ gọi là chuẩn, sao cho

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k$, $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k$, $\quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq k} |x_i|.$

3) $C[a, b], \quad \|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq k} |x_i|.$

3) $C[a, b], \quad \|x\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|.$

4) $C^L_{[a,b]}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k$, $\quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k$, $\quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le k} |x_i|.$

3) $C[a, b]$, $\quad \|x\| = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|.$

4) $C^L_{[a,b]}$, $\quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt.$

5) $D^k_{[a,b]}$, $\quad \|x\| = \max\limits_{a\le t\le b} \{|x(t), |x'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t)|\}.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq k} |x_i|.$

3) $C[a, b], \quad \|x\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|.$

4) $C^L_{[a,b]}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt.$

5) $D^k_{[a,b]}, \quad \|x\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} \{|x(t), |x'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t)|\}.$

6) $l_\infty, \quad \|x\| = \sup_{k\geq 1} |x_k|.$

# Không gian định chuẩn

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$

2) $\mathbb{R}^k, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|.$

3) $C[a, b], \quad \|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$

4) $C^L_{[a,b]}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt.$

5) $D^k_{[a,b]}, \quad \|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} \{|x(t), |x'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t)|\}.$

6) $l_\infty, \quad \|x\| = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$

7) $l_p, \quad \|x_p\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$

# Sự hội tụ trong không gian định chuẩn

## Một số tính chất

1) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$

# Sự hội tụ trong không gian định chuẩn

## Một số tính chất

1) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$
2) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|,$

# Sự hội tụ trong không gian định chuẩn

## Một số tính chất

1) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$.
2) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$,
3) Hội tụ $\Rightarrow$ bị chặn, i.e. $\exists K > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq K, \forall n$.

# Sự hội tụ trong không gian định chuẩn

## Một số tính chất

1) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$
2) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|,$
3) Hội tụ $\Rightarrow$ bị chặn, i.e. $\exists K > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq K, \forall n.$
4) $\begin{cases} x_n \to x_0, \\ y_n \to y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n + y_n \to x_0 + y_0, \\ \alpha x_n \to \alpha x_0. \end{cases}$

# Sự hội tụ trong không gian định chuẩn

## Một số tính chất

1) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$
2) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|,$
3) Hội tụ $\Rightarrow$ bị chặn, i.e. $\exists K > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq K, \forall n.$
4) $\begin{cases} x_n \to x_0, \\ y_n \to y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n + y_n \to x_0 + y_0, \\ \alpha x_n \to \alpha x_0. \end{cases}$
5) Khác với không gian metric và không gian véctơ, trong không gian định chuẩn ta có thể xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$

# Không gian khả ly

**Định nghĩa**

*Không gian metric* $(X, d)$ *là tách được (khả ly) nếu nó chứa một tập đếm được và trù mật khắp nơi.*

# Không gian khả ly

## Định nghĩa

*Không gian metric* $(X, d)$ *là tách được (khả ly) nếu nó chứa một tập đếm được và trù mật khắp nơi.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$,

# Không gian khả ly

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là tách được (khả ly) nếu nó chứa một tập đếm được và trù mật khắp nơi.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$,
2) $C[a, b]$,

# Không gian khả ly

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là tách được (khả ly) nếu nó chứa một tập đếm được và trù mật khắp nơi.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$,
2) $C[a, b]$,
3) Các không gian $l_p, 1 \leq p < \infty$,

# Không gian khả ly

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là tách được (khả ly) nếu nó chứa một tập đếm được và trù mật khắp nơi.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$,
2) $C[a, b]$,
3) Các không gian $l_p, 1 \leq p < \infty$,
4) $l_\infty$ không khả ly.

# Không gian có cơ sở đếm được

## Định nghĩa

*Hệ đếm được các véctơ* $\{x_n\}$ *là* *cơ sở* *(Schauder) của* $X$ *nếu*

*i)* $\forall x \in X, \quad x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$

*ii) phép biểu diễn đó là duy nhất.*

# Không gian có cơ sở đếm được

## Định nghĩa

*Hệ đếm được các véctơ* $\{x_n\}$ *là* **cơ sở** *(Schauder) của* $X$ *nếu*

*i)* $\forall x \in X, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$

*ii) phép biểu diễn đó là duy nhất.*

## Định lý

*Mọi không gian có cơ sở đếm được đều khả ly.*

# Chuẩn tương đương

Cho $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ là các KGĐC.

### Định nghĩa

*$\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là tương đương nếu* $\exists C_1 > 0, C_2 > 0$ *sao cho*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \forall x \in X.$$

Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

# Chuẩn tương đương

Cho $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ là các KGĐC.

## Định nghĩa

*$\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là tương đương nếu $\exists C_1 > 0, C_2 > 0$ sao cho*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \forall x \in X.$$

Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

## Định lý

*Trong KGĐC hữu hạn chiều, mọi chuẩn đều tương đương.*

# Chương 2: Không gian định chuẩn

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Nhắc lại về ánh xạ tuyến tính

$A : X \to Y$ được gọi là một toán tử tuyến tính nếu

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Nhắc lại về ánh xạ tuyến tính

$A : X \to Y$ được gọi là một toán tử tuyến tính nếu

i) $A(x + y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in X,$

ii) $A(\alpha x) = \alpha Ax, \qquad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}.$

Hạt nhân và ảnh

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Nhắc lại về ánh xạ tuyến tính

$A : X \to Y$ được gọi là một toán tử tuyến tính nếu

i) $A(x+y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in X,$

ii) $A(\alpha x) = \alpha Ax, \qquad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}.$

Hạt nhân và ảnh

i) $\operatorname{Im} A = \{y \in Y | \exists x \in X, Ax = y\},$

ii) $\operatorname{Ker} A = \{x \in X | Ax = 0\}.$

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

$A : X \to Y$ *liên tục tại* $x_0$ *nếu* $\boxed{x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0}$.

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

$A : X \to Y$ *liên tục tại* $x_0$ *nếu* $\boxed{x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0}$.

## Bổ đề

*$A$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow$ liên tục tại mọi $x \in X$.*

## Ví dụ

1) Mọi toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ đều liên tục.

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

*$A : X \to Y$ liên tục tại $x_0$ nếu* $\boxed{x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0}$.

## Bổ đề

*$A$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow$ liên tục tại mọi $x \in X$.*

## Ví dụ

1) Mọi toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ đều liên tục.
2) $X = Y = C[a, b], \quad (Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds,$

   trong đó $K(t, s)$ liên tục theo hai biến $t, s \in [a, b]$.

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

*$A : X \to Y$ liên tục tại $x_0$ nếu* $\boxed{x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0}$.

## Bổ đề

*$A$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow$ liên tục tại mọi $x \in X$.*

## Ví dụ

1) Mọi toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ đều liên tục.
2) $X = Y = C[a, b], \quad (Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds,$

   trong đó $K(t, s)$ liên tục theo hai biến $t, s \in [a, b]$.
3) Toán tử đạo hàm $D : C^1[a, b] \to C[a, b], (Dx)(t) = x'(t)$ không liên tục, nhưng nếu $C^1[a, b]$ với chuẩn $\|x\|_1 = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$ thì nó liên tục.

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Toán tử bị chặn

$A : X \to Y$ bị chặn nếu $\exists K > 0$ sao cho

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X. \quad (1)$$

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Toán tử bị chặn

$A : X \to Y$ bị chặn nếu $\exists K > 0$ sao cho

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X. \qquad (1)$$

## Định lý

$A : X \to Y$ *là liên tục* $\Leftrightarrow$ *bị chặn.*

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Toán tử bị chặn

$A : X \to Y$ bị chặn nếu $\exists K > 0$ sao cho

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X. \tag{1}$$

## Định lý

*$A : X \to Y$ là liên tục $\Leftrightarrow$ bị chặn.*

## Định nghĩa

*Số $K$ nhỏ nhất thỏa mãn (1) được gọi là chuẩn của $A$, kí hiệu $\|A\|$,i.e.,*

# Toán tử tuyến tính liên tục

## Toán tử bị chặn

$A : X \to Y$ bị chặn nếu $\exists K > 0$ sao cho

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X. \qquad (1)$$

## Định lý

*$A : X \to Y$ là liên tục $\Leftrightarrow$ bị chặn.*

## Định nghĩa

*Số $K$ nhỏ nhất thỏa mãn (1) được gọi là chuẩn của $A$, kí hiệu $\|A\|$, i.e.,*

*i)* $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall x \in X$,

*ii) Nếu* $\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X$ *thì* $\|A\| \leq K$.

# Chuẩn của toán tử tuyến tính

## Định lý

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

# Chuẩn của toán tử tuyến tính

## Định lý

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

## Ví dụ

Tìm chuẩn của $A : C[0,1] \to C[0,1]$ sau

1) $(Ax)(t) = tx(t)$,

# Chuẩn của toán tử tuyến tính

## Định lý

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

## Ví dụ

Tìm chuẩn của $A : C[0,1] \to C[0,1]$ sau

1) $(Ax)(t) = tx(t)$,
2) $(Ax)(t) = t^2 x(0)$,

# Chuẩn của toán tử tuyến tính

## Định lý

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

## Ví dụ

Tìm chuẩn của $A : C[0,1] \to C[0,1]$ sau

1) $(Ax)(t) = tx(t)$,
2) $(Ax)(t) = t^2 x(0)$,
3) $(Ax)(t) = x(t^2)$.

# Không gian các toán tử tuyến tính liên tục

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y | A \text{ là toán tử tuyến tính liên tục}\}.$$

# Không gian các toán tử tuyến tính liên tục

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y | A \text{ là toán tử tuyến tính liên tục}\}.$$

i) $(A + B)x = Ax + Bx$,

ii) $(\alpha A)x = \alpha Ax$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là một KGVT

# Không gian các toán tử tuyến tính liên tục

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y | A \text{ là toán tử tuyến tính liên tục}\}.$$

i) $(A + B)x = Ax + Bx$,

ii) $(\alpha A)x = \alpha Ax$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là một KGVT $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là một KGĐC.

# Không gian các toán tử tuyến tính liên tục

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y | A \text{ là toán tử tuyến tính liên tục}\}.$$

i) $(A + B)x = Ax + Bx$,

ii) $(\alpha A)x = \alpha Ax$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là một KGVT $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là một KGĐC.

**Định lý**

*$Y$ Banach $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ Banach.*

Nói riêng, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ Banach.

# Sự hội tụ trong KGĐC

## Định nghĩa

*Cho* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y), A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

*i)* $A_n \to A$ *hội tụ điểm* $\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0,$

*ii)* $A_n \to A$ *hội tụ theo chuẩn (hội tụ đều)* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$

i) Hội tụ đều $\Rightarrow$ Hội tụ,

ii) Hội tụ $\not\Rightarrow$ Hội tụ đều.

# Sự hội tụ trong KGĐC

## Định nghĩa

*Cho* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y), A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

*i)* $A_n \to A$ *hội tụ điểm* $\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$,

*ii)* $A_n \to A$ *hội tụ theo chuẩn (hội tụ đều)* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

i) Hội tụ đều $\Rightarrow$ Hội tụ,

ii) Hội tụ $\not\Rightarrow$ Hội tụ đều.

## Tính chất

Cho $A, \{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y), B, \{B_n\} \subset \mathcal{L}(Y, Z)$.

i) $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$,

ii) $A_n \to A, B_n \to B \Rightarrow B_n A_n \to BA$ (các hội tụ theo chuẩn).

# Chương 2: Không gian định chuẩn

# Toán tử nghịch đảo

## Bổ đề

*Cho* $A : X \to Y$. *Hai mệnh đề sau tương đương*

*i)* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$,

*ii)* $\forall y \in \operatorname{Im} A, \exists! x \in X : Ax = y$.

# Toán tử nghịch đảo

## Bổ đề

*Cho $A : X \to Y$. Hai mệnh đề sau tương đương*

*i)* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$,

*ii)* $\forall y \in \operatorname{Im} A, \exists! x \in X : Ax = y$.

$$\begin{aligned} A^{-1} : \operatorname{Im} A &\to X \\ y &\mapsto x \end{aligned}$$ được gọi là toán tử nghịch đảo.

## Bổ đề

$A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ *là một toán tử tuyến tính và*

$$(\forall x \in X), A^{-1}Ax = x, \quad (\forall y \in \operatorname{Im} A), AA^{-1}y = y.$$

# Toán tử nghịch đảo

## Định lý

*i) Nếu* $A : X \to Y$ *có* $A^{-1}$ *liên tục thì*

$$(\forall x \in X), \|Ax\| \geq m\|x\|, \tag{2}$$

*với mọi số* $m \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

# Toán tử nghịch đảo

## Định lý

*i) Nếu* $A : X \to Y$ *có* $A^{-1}$ *liên tục thì*

$$(\forall x \in X), \|Ax\| \geq m\|x\|, \qquad (2)$$

*với mọi số* $m \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

*ii) Ngược lại, nếu* $\exists m > 0$ *thỏa mãn (2) thì* $A^{-1}$ *tồn tại, liên tục và* $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

# Toán tử nghịch đảo

## Định lý

*i) Nếu $A : X \to Y$ có $A^{-1}$ liên tục thì*

$$(\forall x \in X), \|Ax\| \geq m\|x\|, \tag{2}$$

*với mọi số $m \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.*

*ii) Ngược lại, nếu $\exists m > 0$ thỏa mãn (2) thì $A^{-1}$ tồn tại, liên tục và $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.*

Chương 4: $X, Y$ Banach, mọi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, song ánh đều $\exists A^{-1}$ liên tục.

# Toán tử nghịch đảo

**Định nghĩa**

$A : X \to Y$ *và* $A^{-1} : Y \to X$ *tồn tại và liên tục* $\Rightarrow$ *đẳng cấu.*

# Toán tử nghịch đảo

**Định nghĩa**

*$A : X \to Y$ và $A^{-1} : Y \to X$ tồn tại và liên tục $\Rightarrow$ đẳng cấu.*

Cho $X, Y$ là các không gian Banach.

**Định lý**

*Nếu $A : X \to Y$ là một đẳng cấu thì mọi toán tử tuyến tính liên tục $B : X \to Y$ sao cho $\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ cũng là đẳng cấu.*

# Chuỗi Neumann

## Tính chất

Nếu $X$ là không gian Banach và $A : X \to X, \|A\| < 1$ thì

$$(\mathrm{I} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ được gọi là chuỗi Neumann, $I$ là toán tử đơn vị.

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X$, $Y$ là các KGĐC.

**Định nghĩa**

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối*

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X, Y$ là các KGĐC.

## Định nghĩa

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối $\Leftrightarrow A(B), B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ là compact tương đối.*

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X, Y$ là các KGĐC.

**Định nghĩa**

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối $\Leftrightarrow A(B), B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ là compact tương đối.*

Compact $\Rightarrow$ liên tục.

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X, Y$ là các KGĐC.

## Định nghĩa

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối $\Leftrightarrow A(B), B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ là compact tương đối.*

Compact $\Rightarrow$ liên tục.

## Ví dụ

1) $\dim X, Y < +\infty \Rightarrow$ mọi toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ đều compact.

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X, Y$ là các KGĐC.

## Định nghĩa

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối $\Leftrightarrow A(B), B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ là compact tương đối.*

Compact $\Rightarrow$ liên tục.

## Ví dụ

1) $\dim X, Y < +\infty \Rightarrow$ mọi toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ đều compact.
2) $A : X \to Y, \dim \operatorname{Im}(A) < +\infty$ (finite rank operator) là compact.

# Toán tử compact (hoàn toàn liên tục)

Cho $X, Y$ là các KGĐC.

## Định nghĩa

*$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ được gọi là compact nếu nó biến tập bị chặn thành tập compact tương đối $\Leftrightarrow A(B), B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ là compact tương đối.*

Compact $\Rightarrow$ liên tục.

## Ví dụ

1) $\dim X, Y < +\infty \Rightarrow$ mọi toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ đều compact.
2) $A : X \to Y, \dim \operatorname{Im}(A) < +\infty$ (finite rank operator) là compact.
3) $A : C[a, b] \to C[a, b], (Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds.$

# Các tính chất của toán tử compact

Đặt $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là không gian con đóng của $\mathcal{L}(X, Y)$.*

# Các tính chất của toán tử compact

Đặt $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là không gian con đóng của $\mathcal{L}(X, Y)$.*

**Ví dụ**

$A : l_2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \ldots\right) \in l_2$ compact.

# Các tính chất của toán tử compact

Đặt $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là không gian con đóng của $\mathcal{L}(X, Y)$.*

**Ví dụ**

$A : l_2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \ldots\right) \in l_2$ compact.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là iđêan hai phía trong vành $\mathcal{L}(X, Y)$,*

# Các tính chất của toán tử compact

Đặt $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là không gian con đóng của $\mathcal{L}(X, Y)$.*

**Ví dụ**

$A : l_2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \ldots\right) \in l_2$ compact.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là iđêan hai phía trong vành $\mathcal{L}(X, Y)$,i.e.,*

$$A \in \mathcal{K}(X, Y), B \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow AB, BA \in \mathcal{K}(X, Y).$$

# Các tính chất của toán tử compact

Đặt $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là không gian con đóng của $\mathcal{L}(X, Y)$.*

**Ví dụ**

$A : l_2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2^{n-1}}, \ldots\right) \in l_2$ compact.

**Định lý**

*$\mathcal{K}(X, Y)$ là iđêan hai phía trong vành $\mathcal{L}(X, Y)$,i.e.,*

$$A \in \mathcal{K}(X, Y), B \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow AB, BA \in \mathcal{K}(X, Y).$$

# Toán tử compact

## Bổ đề (Riesz)

*Cho $Y \subsetneq X$ là KG con đóng.*

$$\forall 0 < \delta < 1, \exists x \in X : \|x\| = 1, d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \delta.$$

# Toán tử compact

## Bổ đề (Riesz)

*Cho $Y \subsetneq X$ là KG con đóng.*

$$\forall 0 < \delta < 1, \exists x \in X : \|x\| = 1, d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \delta.$$

## Hệ quả

$$\dim X < +\infty \Leftrightarrow B := \{x \in X : \|x\| = 1\} \text{ compact.}$$

# Toán tử compact

## Bổ đề (Riesz)

*Cho $Y \subsetneq X$ là KG con đóng.*

$$\forall 0 < \delta < 1, \exists x \in X : \|x\| = 1, d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \delta.$$

## Hệ quả

$$\dim X < +\infty \Leftrightarrow B := \{x \in X : \|x\| = 1\} \text{ compact.}$$

## Hệ quả

*Toán tử đơn vị trong KGĐC vô hạn chiều không compact.*

# Toán tử compact

## Bổ đề (Riesz)

*Cho $Y \subsetneq X$ là KG con đóng.*

$$\forall 0 < \delta < 1, \exists x \in X : \|x\| = 1, d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \delta.$$

## Hệ quả

$$\dim X < +\infty \Leftrightarrow B := \{x \in X : \|x\| = 1\} \text{ compact.}$$

## Hệ quả

*Toán tử đơn vị trong KGĐC vô hạn chiều không compact.*

## Hệ quả

*Toán tử compact trong không gian vô hạn chiều không thể có nghịch đảo liên tục.*

# Toán tử song tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

$$\begin{aligned} A : X \times Y &\to Z, \\ (x, y) &\mapsto A(x, y) \end{aligned}$$

*là song tuyến tính nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại.*

# Toán tử song tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

$$\begin{aligned} A : X \times Y &\to Z, \\ (x, y) &\mapsto A(x, y) \end{aligned}$$

*là* ***song tuyến tính*** *nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại.*

## Tính liên tục, bị chặn

$A$ được gọi là

i) **liên tục**: $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \to y \end{cases} \Rightarrow A(x_n, y_n) \to A(x, y),$

# Toán tử song tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

$$\begin{aligned} A : X \times Y &\to Z, \\ (x, y) &\mapsto A(x, y) \end{aligned}$$

*là song tuyến tính nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại.*

## Tính liên tục, bị chặn

$A$ được gọi là

i) liên tục: $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \to y \end{cases} \Rightarrow A(x_n, y_n) \to A(x, y),$

ii) bị chặn: $\exists K > 0$ sao cho

$$(\forall x \in X), (\forall y \in Y), \quad \|A(x, y)\| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\|. \tag{3}$$

# Toán tử song tuyến tính liên tục

**Định lý**

*A liên tục $\Leftrightarrow$ bị chặn.*

# Toán tử song tuyến tính liên tục

## Định lý

$A$ *liên tục* $\Leftrightarrow$ *bị chặn.*

## Chuẩn của toán tử song tuyến tính

Số $K \geq 0$ nhỏ nhất sao cho

$$(\forall x \in X), (\forall y \in Y), \quad \|A(x,y)\| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\|. \tag{4}$$

được gọi là chuẩn của toán tử $A$.

# Toán tử song tuyến tính liên tục

## Định lý

*$A$ liên tục $\Leftrightarrow$ bị chặn.*

## Chuẩn của toán tử song tuyến tính

Số $K \geq 0$ nhỏ nhất sao cho

$$(\forall x \in X), (\forall y \in Y), \quad \|A(x, y)\| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\|. \tag{4}$$

được gọi là chuẩn của toán tử $A$.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \{\|A(x, y)\|\}.$$

# Chương 2: Không gian định chuẩn

# Phiếm hàm tuyến tính

## Định nghĩa

$f : X \to \mathbb{R}$ *được gọi là một phiếm hàm.*

# Phiếm hàm tuyến tính

## Định nghĩa

$f : X \to \mathbb{R}$ *được gọi là một phiếm hàm.*

## Chú ý

*Tất cả các khái niệm và sự kiện đã chứng minh cho toán tử tuyến tính đều áp dụng được cho phiếm hàm tuyến tính như:*

*i) phiếm hàm tuyến tính bị chặn,*

# Phiếm hàm tuyến tính

## Định nghĩa

$f : X \to \mathbb{R}$ *được gọi là một* *phiếm hàm*.

## Chú ý

*Tất cả các khái niệm và sự kiện đã chứng minh cho toán tử tuyến tính đều áp dụng được cho phiếm hàm tuyến tính như:*

*i) phiếm hàm tuyến tính bị chặn,*

*ii) phiếm hàm tuyến tính liên tục,*

# Phiếm hàm tuyến tính

## Định nghĩa

$f : X \to \mathbb{R}$ *được gọi là một phiếm hàm.*

## Chú ý

*Tất cả các khái niệm và sự kiện đã chứng minh cho toán tử tuyến tính đều áp dụng được cho phiếm hàm tuyến tính như:*

*i) phiếm hàm tuyến tính bị chặn,*

*ii) phiếm hàm tuyến tính liên tục,*

*iii) chuẩn của phiếm hàm tuyến tính.*

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}^k$

i) Cho $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Khi đó tích vô hướng

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^k$.

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}^k$

i) Cho $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Khi đó tích vô hướng

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^k$.

ii) Ngược lại, ứng với mỗi phiếm hàm tuyến tính $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, luôn tồn tại véctơ $a \in \mathbb{R}^k$ sao cho $f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $C[a, b]$

i) $t_0 \in [a, b] \Rightarrow f(x) = x(t_0)$.

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $C[a, b]$

i) $t_0 \in [a, b] \Rightarrow f(x) = x(t_0)$.

ii) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$.

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $C[a, b]$

i) $t_0 \in [a, b] \Rightarrow f(x) = x(t_0)$.

ii) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$.

## Phiếm hàm tuyến tính trên không gian tích

Mọi phiếm hàm tuyến tính trên $X \times Y$ đều có dạng

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y),$$

với $f_1(x) = f(x, 0), f_2(y) = f(0, y)$,

# Phiếm hàm tuyến tính liên tục

## Phiếm hàm tuyến tính trên $C[a, b]$

i) $t_0 \in [a, b] \Rightarrow f(x) = x(t_0)$.

ii) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$.

## Phiếm hàm tuyến tính trên không gian tích

Mọi phiếm hàm tuyến tính trên $X \times Y$ đều có dạng

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y),$$

với $f_1(x) = f(x, 0), f_2(y) = f(0, y)$, và $f$ liên tục $\Leftrightarrow f_1, f_2$ liên tục.

# Không gian đối ngẫu

**Định nghĩa**

$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$: *không gian đối ngẫu hay liên hợp của* $X$.

# Không gian đối ngẫu

## Định nghĩa

$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$: *không gian đối ngẫu hay liên hợp của* $X$.

$X^*$ là một không gian Banach.

# Không gian đối ngẫu

## Định nghĩa

$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$: *không gian đối ngẫu hay liên hợp của* $X$.

$X^*$ là một không gian Banach.

## Ví dụ

$\forall f \in (\mathbb{R}^k)^*, \exists a \in \mathbb{R}^k$ sao cho $f(x) = \langle a, x \rangle$. Ánh xạ

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^k)^* &\to \mathbb{R}^k, \\ f &\mapsto a\end{aligned}$$

là một phép đẳng cấu $\Rightarrow$ không gian tự liên hợp.

# Không gian tự liên hợp (phản xạ)

## Định lý

*$X$ nhúng tuyến tính đẳng cự vào $X^{**}$ bởi*

$$X \ni x \mapsto F_x \in X^{**}, \quad F_x(f) = f(x), \forall f \in X^*.$$

Để thuận tiện, ta viết $\langle x, f \rangle = \langle f, F_x \rangle$.

# Không gian tự liên hợp (phản xạ)

## Định lý

*$X$ nhúng tuyến tính đẳng cự vào $X^{**}$ bởi*

$$X \ni x \mapsto F_x \in X^{**}, \quad F_x(f) = f(x), \forall f \in X^*.$$

Để thuận tiện, ta viết $\langle x, f\rangle = \langle f, F_x\rangle$.

## Định nghĩa

*Nếu ánh xạ trên là tràn thì ta nói $X$ là không gian tự liên hợp (phản xạ).*

# Không gian đối ngẫu (liên hợp)

Kí hiệu $\approx$ đẳng cấu, đẳng cự.

**Ví dụ**

1) $c_0 = \{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow (c_0)^* \approx l_1,$
2) $(l_1)^* \approx l_\infty,$
3) $c = \{x_n\}$ hội tụ $\Rightarrow c^* \approx l_1,$
4) $(l_p)^* \approx l_q$, ở đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho* $X$ *là một KGĐC và* $x_n, x \in X$.

*i) hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

i) *hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

ii) *hội tụ yếu,* $x_n \rightharpoonup x$ *hoặc* $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle.$

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

*i) hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

*ii) hội tụ yếu,* $x_n \rightharpoonup x$ *hoặc* $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle.$

## Bài tập

*1) Hội tụ mạnh $\Rightarrow$ hội tụ yếu.*

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

i) *hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

ii) *hội tụ yếu,* $x_n \rightharpoonup x$ *hoặc* $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle.$

## Bài tập

1) *Hội tụ mạnh $\Rightarrow$ hội tụ yếu.*

2) *Hội tụ yếu $\not\Rightarrow$ hội tụ mạnh.*

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

*i) hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

*ii) hội tụ yếu, $x_n \rightharpoonup x$ hoặc $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle$.*

## Bài tập

*1) Hội tụ mạnh $\Rightarrow$ hội tụ yếu.*

*2) Hội tụ yếu $\not\Rightarrow$ hội tụ mạnh.*

*3) Nếu $\dim X < +\infty$, hội tụ mạnh $\Leftrightarrow$ hội tụ yếu.*

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

*i) hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

*ii) hội tụ yếu,* $x_n \rightharpoonup x$ *hoặc* $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle.$

## Bài tập

*1) Hội tụ mạnh $\Rightarrow$ hội tụ yếu.*

*2) Hội tụ yếu $\not\Rightarrow$ hội tụ mạnh.*

*3) Nếu* $\dim X < +\infty$, *hội tụ mạnh $\Leftrightarrow$ hội tụ yếu.*

*4) Trên tập compact tương đối, hội tụ mạnh $\Leftrightarrow$ hội tụ yếu.*

# Hội tụ yếu

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC và $x_n, x \in X$.*

i) *hội tụ mạnh, hay hội tụ theo chuẩn* $x_n \to x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$

ii) *hội tụ yếu*, $x_n \rightharpoonup x$ *hoặc* $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall \mu \in X^*, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle$.

## Bài tập

1) *Hội tụ mạnh* $\Rightarrow$ *hội tụ yếu.*
2) *Hội tụ yếu* $\not\Rightarrow$ *hội tụ mạnh.*
3) *Nếu* $\dim X < +\infty$, *hội tụ mạnh* $\Leftrightarrow$ *hội tụ yếu.*
4) *Trên tập compact tương đối, hội tụ mạnh* $\Leftrightarrow$ *hội tụ yếu.*
5) *Hội tụ yếu* $\Rightarrow$ *giới nội.*

# Hội tụ yếu, yếu *

Cho $\mu_n, \mu \in X^*$.

## Định nghĩa

*Ta nói $\mu_n$ hội tụ yếu * đến $\mu$ và viết $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ nếu*

$$\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} \langle x, \mu_n \rangle = \langle x, \mu \rangle.$$

# Hội tụ yếu, yếu *

Cho $\mu_n, \mu \in X^*$.

## Định nghĩa

*Ta nói $\mu_n$ hội tụ yếu * đến $\mu$ và viết $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ nếu*

$$\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} \langle x, \mu_n\rangle = \langle x, \mu\rangle.$$

## Chú ý

*i)* $\mu_n \to \mu \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\mu - \mu_n\| = 0,$

*ii)* $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \forall T \in X^{**}, \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, T\rangle = \langle \mu, T\rangle,$

*iii)* $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu \Leftrightarrow \forall x \in X, \lim_{n\to\infty} \langle x, \mu_n\rangle = \langle x, \mu\rangle.$

# Hội tụ yếu, yếu *

Cho $\mu_n, \mu \in X^*$.

## Định nghĩa

*Ta nói $\mu_n$ hội tụ yếu * đến $\mu$ và viết $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ nếu*

$$\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} \langle x, \mu_n \rangle = \langle x, \mu \rangle.$$

## Chú ý

*i)* $\mu_n \to \mu \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|\mu - \mu_n\| = 0$,

*ii)* $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \forall T \in X^{**}, \lim\limits_{n\to\infty} \langle \mu_n, T \rangle = \langle \mu, T \rangle$,

*iii)* $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu \Leftrightarrow \forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} \langle x, \mu_n \rangle = \langle x, \mu \rangle$.

## Bài tập

$$\mu_n \to \mu \quad \Rightarrow \quad \mu_n \xrightarrow{w} \mu \quad \Rightarrow \quad \mu_n \xrightarrow{w^*} \mu.$$

# Hội tụ yếu, yếu $*$

**Bổ đề**

*i) Hội tụ yếu là duy nhất,*

*ii) Hội tụ yếu $*$ là duy nhất.*

# Hội tụ yếu, yếu *

## Bổ đề

*i) Hội tụ yếu là duy nhất,*

*ii) Hội tụ yếu * là duy nhất.*

## Bài tập

*Chứng minh rằng*

*a) dãy $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ hội tụ yếu * thì bị chặn.*

*b) dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ hội tụ yếu thì bị chặn.*

# Phiếm hàm song tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC. Một hàm số*

$$\begin{aligned} f: X \times X &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

*được gọi là một phiếm hàm song tuyến tính nếu nó tuyến tính đối với mỗi biến khi cố định biến còn lại.*

# Phiếm hàm song tuyến tính liên tục

## Định nghĩa

*Cho $X$ là một KGĐC. Một hàm số*

$$\begin{aligned} f : X \times X &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

*được gọi là một phiếm hàm song tuyến tính nếu nó tuyến tính đối với mỗi biến khi cố định biến còn lại.*

## Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^k$, TVH $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i$ là một phiếm hàm song tuyến tính.

i) Phiếm hàm song tuyến tính liên tục,
ii) Phiếm hàm song tuyến tính bị chặn,
iii) Chuẩn của phiếm hàm song tuyến tính.