# Giải tích hàm

**TS. Bùi Xuân Diệu**

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

# Chương 1: Không gian metric

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho $X \neq \emptyset$. Một ánh xạ $d : X \times X \to [0, +\infty)$ được gọi là một metric (hay khoảng cách) nếu*

i) $d(x,y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho* $X \neq \emptyset$. *Một ánh xạ* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *được gọi là một* *metric* *(hay* *khoảng cách*) *nếu*

i) $d(x,y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

ii) $d(x,y) = d(y,x);$

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho $X \neq \emptyset$. Một ánh xạ $d : X \times X \to [0, +\infty)$ được gọi là một metric (hay khoảng cách) nếu*

i) $d(x,y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$.

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho* $X \neq \emptyset$. *Một ánh xạ* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *được gọi là một metric (hay khoảng cách) nếu*

i) $d(x, y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

*Một tập hợp* $X$ *được trang bị một metric như trên được gọi là một không gian metric.*

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho $X \neq \emptyset$. Một ánh xạ $d : X \times X \to [0, +\infty)$ được gọi là một metric (hay khoảng cách) nếu*

i) $d(x,y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$.

*Một tập hợp $X$ được trang bị một metric như trên được gọi là một không gian metric.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|$,

# Định nghĩa, ví dụ

## Định nghĩa

*Cho* $X \neq \emptyset$. *Một ánh xạ* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *được gọi là một metric (hay khoảng cách) nếu*

i) $d(x,y) \begin{cases} > 0, & \text{nếu } x \neq y \\ = 0, & \text{nếu } x = y, \end{cases}$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$.

*Một tập hợp* $X$ *được trang bị một metric như trên được gọi là một không gian metric.*

## Ví dụ

1) $\mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|$,

2) $\mathbb{R}^k, d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$.

# Định nghĩa, ví dụ về không gian metric

**Ví dụ**

3) $C[a,b], d(x,y) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|,$

# Định nghĩa, ví dụ về không gian metric

**Ví dụ**

3) $C[a, b], d(x, y) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$

4) $C[a, b], d(x, y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)| dt \Rightarrow$ kí hiệu là $C^L_{[a,b]}$.

# Định nghĩa, ví dụ về không gian metric

## Ví dụ

3) $C[a,b], d(x,y) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|,$

4) $C[a,b], d(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)| dt \Rightarrow$ kí hiệu là $C^L_{[a,b]}$.

5) $X$ bất kì, $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \neq y, \\ 0, & \text{nếu } x = y. \end{cases} \Rightarrow$ metric rời rạc.

# Chương 1: Không gian metric

# Sự hội tụ trong không gian metric

Nhờ có khoảng cách, ta có thể định nghĩa giới hạn.

## Định nghĩa

*Ta nói dãy điểm* $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ đến điểm* $x \in X$ *nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.
*Khi đó ta viết* $x_n \to x$ *hoặc* $\lim x_n = x$.

# Sự hội tụ trong không gian metric

Nhờ có khoảng cách, ta có thể định nghĩa giới hạn.

## Định nghĩa

*Ta nói dãy điểm* $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ đến điểm* $x \in X$ *nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$
*Khi đó ta viết* $x_n \to x$ *hoặc* $\lim x_n = x.$

## Tính chất

1) Giới hạn của một dãy điểm, nếu có, là duy nhất.

# Sự hội tụ trong không gian metric

Nhờ có khoảng cách, ta có thể định nghĩa giới hạn.

## Định nghĩa

*Ta nói dãy điểm* $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ đến điểm* $x \in X$ *nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.
*Khi đó ta viết* $x_n \to x$ *hoặc* $\lim x_n = x$.

## Tính chất

1) Giới hạn của một dãy điểm, nếu có, là duy nhất.
2) Nếu $x_n \to x, y_n \to y$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

# Sự hội tụ trong không gian metric

Nhờ có khoảng cách, ta có thể định nghĩa giới hạn.

## Định nghĩa

*Ta nói dãy điểm* $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ đến điểm* $x \in X$ *nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.

*Khi đó ta viết* $x_n \to x$ *hoặc* $\lim x_n = x$.

## Tính chất

1) Giới hạn của một dãy điểm, nếu có, là duy nhất.
2) Nếu $x_n \to x, y_n \to y$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

## Ví dụ

1) Sự hội tụ trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ sự hội tụ của dãy số thông thường.
2) Trong $\mathbb{R}^k, x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}) \to x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow ?$

# Sự hội tụ trong không gian metric

## Ví dụ

3) $C[a,b], x_n(t) \to x(t) \Leftrightarrow$

# Sự hội tụ trong không gian metric

## Ví dụ

3) $C[a,b], x_n(t) \to x(t) \Leftrightarrow \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \to 0 \Leftrightarrow$ sự hội tụ đều.

4) Trong $C^L_{[a,b]}, x_n(t) \to x \Leftrightarrow$

# Sự hội tụ trong không gian metric

**Ví dụ**

3) $C[a,b], x_n(t) \to x(t) \Leftrightarrow \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \to 0 \Leftrightarrow$ sự hội tụ đều.

4) Trong $C^L_{[a,b]}, x_n(t) \to x \Leftrightarrow \int_a^b |x_n(t) - x(t)| dt \to 0 \Leftrightarrow$ sự hội tụ trung bình.

# Chương 1: Không gian metric

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),
ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),
iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),
ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),
iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,
iv) Lân cận của $x$: là một tập $\mathcal{N} \subset X$ sao cho $\mathcal{N} \supset S(a,r)$.

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),

iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,

iv) Lân cận của $x$: là một tập $\mathcal{N} \subset X$ sao cho $\mathcal{N} \supset S(a,r)$.

## Các khái niệm

Cho $A \subset X$ và $x \in X$ bất kì. Có thể xảy ra ba trường hợp.

1) **Điểm trong:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \in A$

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),

iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,

iv) Lân cận của $x$: là một tập $\mathcal{N} \subset X$ sao cho $\mathcal{N} \supset S(a,r)$.

## Các khái niệm

Cho $A \subset X$ và $x \in X$ bất kì. Có thể xảy ra ba trường hợp.

1) **Điểm trong:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \in A$

2) **Điểm ngoài:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A^c \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \notin A$

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),

iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,

iv) Lân cận của $x$: là một tập $\mathcal{N} \subset X$ sao cho $\mathcal{N} \supset S(a,r)$.

## Các khái niệm

Cho $A \subset X$ và $x \in X$ bất kì. Có thể xảy ra ba trường hợp.

1) **Điểm trong:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \in A$

2) **Điểm ngoài:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A^c \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \notin A$

3) **Điểm biên:** $\forall r > 0, \begin{cases} S(x,r) \cap A \neq \emptyset, \\ S(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

# Tô pô trong không gian metric

## Lân cận

Cho $x \in X, r > 0$. Kí hiệu:

i) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (hình cầu mở),

ii) $\overline{S}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (hình cầu đóng),

iii) $S^*(x,r) = S(x,r) \setminus \{x\}$,

iv) Lân cận của $x$: là một tập $\mathcal{N} \subset X$ sao cho $\mathcal{N} \supset S(a,r)$.

## Các khái niệm

Cho $A \subset X$ và $x \in X$ bất kì. Có thể xảy ra ba trường hợp.

1) **Điểm trong:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \in A$

2) **Điểm ngoài:** $\exists r > 0 : S(x,r) \subset A^c \Rightarrow$ Đương nhiên, $x \notin A$

3) **Điểm biên:** $\forall r > 0, \begin{cases} S(x,r) \cap A \neq \emptyset, \\ S(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow (x \in A) \vee (x \notin A)$

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x, r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x, r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x, r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x, r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.
6) **Điểm giới hạn** $=$ (điểm biên $\cup$ điểm trong)$\setminus$ (điểm cô lập).

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x, r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x, r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.
6) **Điểm giới hạn** $=$ (điểm biên $\cup$ điểm trong)$\setminus$ (điểm cô lập).

## Tập đóng và tập mở

i) Tập $A \subset X$ là tập đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó,

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x,r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x,r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.
6) **Điểm giới hạn** $=$ (điểm biên $\cup$ điểm trong)$\setminus$ (điểm cô lập).

## Tập đóng và tập mở

i) Tập $A \subset X$ là tập đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó,
$\Leftrightarrow$ nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x, r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x, r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.
6) **Điểm giới hạn** $=$ (điểm biên $\cup$ điểm trong)$\setminus$ (điểm cô lập).

## Tập đóng và tập mở

i) Tập $A \subset X$ là tập đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó,
$\Leftrightarrow$ nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

ii) Tập $A \subset X$ là tập mở nếu $\forall x \in A$ thì $x$ là điểm trong của $A$,

# Tô pô trong không gian metric

## Các khái niệm

4) **Điểm giới hạn (điểm tụ):**
   i) $\forall r > 0, \exists$ ít nhất một $y \in S^*(x,r) \cap A$.
   ii) $\forall r > 0, \exists$ vô số $y \in S^*(x,r) \cap A$,
   iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.
5) **Điểm cô lập:** $x \in A$ và $x$ không phải là điểm giới hạn của $A$.
6) **Điểm giới hạn** $=$ (điểm biên $\cup$ điểm trong)$\setminus$ (điểm cô lập).

## Tập đóng và tập mở

i) Tập $A \subset X$ là tập đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó,
   $\Leftrightarrow$ nó chứa tất cả các điểm biên của nó.
ii) Tập $A \subset X$ là tập mở nếu $\forall x \in A$ thì $x$ là điểm trong của $A$,
   $\Leftrightarrow$ nếu nó không chứa điểm biên nào của nó cả.

# Tập hợp đóng và mở

**Ví dụ**

i) Xét các tập hợp $(a, b)$, $[a, b]$, $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

# Tập hợp đóng và mở

**Ví dụ**

i) Xét các tập hợp $(a, b)$, $[a, b]$, $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ii) Trong không gian metric $X$, xét các tập hợp $X, \emptyset, S(x, r), \overline{S}(x, r)$.

# Tập hợp đóng và mở

**Ví dụ**

i) Xét các tập hợp $(a, b)$, $[a, b]$, $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ii) Trong không gian metric $X$, xét các tập hợp $X, \emptyset, S(x, r), \overline{S}(x, r)$.

iii) Trong không gian metric rời rạc $X$, xét tập $A \subset X$.

# Tập hợp đóng và mở

**Ví dụ**

i) Xét các tập hợp $(a, b)$, $[a, b]$, $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ii) Trong không gian metric $X$, xét các tập hợp $X, \emptyset, S(x, r), \overline{S}(x, r)$.

iii) Trong không gian metric rời rạc $X$, xét tập $A \subset X$.

**Định lý**

*$A$ là mở khi và chỉ khi $A^c = X \setminus A$ là đóng.*

# Hợp và giao của các tập hợp đóng và mở

**Định lý**

*i) Giao của một số hữu hạn các tập mở cũng là một tập mở,*

*ii) Hợp của một họ bất kì các tập mở cũng là tập mở.*

# Hợp và giao của các tập hợp đóng và mở

## Định lý

*i) Giao của một số hữu hạn các tập mở cũng là một tập mở,*

*ii) Hợp của một họ bất kì các tập mở cũng là tập mở.*

## Định lý

*i) Hợp của một số hữu hạn các tập đóng cũng là một tập đón,*

*ii) Giao của một họ bất kì các tập đóng cũng là một tập đóng.*

# Phần trong và bao đóng của một tập hợp

## Định nghĩa

*i)* $A^\circ := \operatorname{int} A := \{x \in X, x$ *là điểm trong của* $A\}$, *gọi là* *phần trong*,

# Phần trong và bao đóng của một tập hợp

## Định nghĩa

*i)* $A^\circ := \operatorname{int} A := \{x \in X, x$ *là điểm trong của* $A\}$, *gọi là* *phần trong*,

*ii)* $\overline{A} := \{x \in X, x$ *là điểm giới hạn của* $A\} \cup A$, *gọi là* *bao đóng*,

# Phần trong và bao đóng của một tập hợp

## Định nghĩa

*i)* $A^\circ := \operatorname{int} A := \{x \in X, x$ *là điểm trong của* $A\}$, *gọi là* *phần trong*,

*ii)* $\overline{A} := \{x \in X, x$ *là điểm giới hạn của* $A\} \cup A$, *gọi là* *bao đóng*,

*iii)* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ *gọi là* *biên* *của* $A$.

# Phần trong và bao đóng của một tập hợp

## Định nghĩa

*i)* $A^\circ := \operatorname{int} A := \{x \in X, x$ *là điểm trong của* $A\}$, *gọi là* *phần trong*,

*ii)* $\overline{A} := \{x \in X, x$ *là điểm giới hạn của* $A\} \cup A$, *gọi là* *bao đóng*,

*iii)* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ *gọi là* *biên* *của* $A$.

## Định lý

*1)* *Phần trong có các tính chất sau:*

- *i)* $A^\circ$ *là tập mở,*
- *ii)* $A^\circ$ *là tập mở lớn nhất bị chứa trong* $A$,
- *iii)* $A^\circ = A \Leftrightarrow A$ *là tập mở.*

# Phần trong và bao đóng của một tập hợp

## Định nghĩa

*i)* $A^\circ := \operatorname{int} A := \{x \in X, x$ *là điểm trong của* $A\}$, *gọi là* **phần trong**,

*ii)* $\overline{A} := \{x \in X, x$ *là điểm giới hạn của* $A\} \cup A$, *gọi là* **bao đóng**,

*iii)* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ *gọi là* **biên** *của* $A$.

## Định lý

*1)* **Phần trong** *có các tính chất sau:*

- *i)* $A^\circ$ *là tập mở,*
- *ii)* $A^\circ$ *là tập mở lớn nhất bị chứa trong* $A$,
- *iii)* $A^\circ = A \Leftrightarrow A$ *là tập mở.*

*2)* **Bao đóng** *có các tính chất sau:*

- *i)* $\overline{A}$ *là tập đóng,*
- *ii)* $\overline{A}$ *là tập đóng bé nhất chứa* $A$,
- *iii)* $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ *là tập đóng.*

# Tập mở và đóng trên đường thẳng thực

**Định lý**

*Mỗi tập mở trên đường thẳng thực là hợp của một số hữu hạn hay đếm được các khoảng rời nhau.*

# Tập mở và đóng trên đường thẳng thực

**Định lý**

*Mỗi tập mở trên đường thẳng thực là hợp của một số hữu hạn hay đếm được các khoảng rời nhau.*

**Hệ quả**

*Mỗi tập đóng trên đường thẳng thực là phần còn lại sau khi rút khỏi đường thẳng một số hữu hạn hay đếm được các khoảng rời nhau.*

# Chương 1: Không gian metric

# Dãy Cauchy (cơ bản)

## Định nghĩa

*Dãy* $\{x_n\} \subset (X, d)$ *là* *dãy Cauchy* *nếu*

$$\lim_{m,n\to+\infty} d(x_m, x_n) \to 0,$$

$$\Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0), \exists N, (\forall m \geq N), (\forall n \geq N), d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Chú ý:** $N = N(\epsilon)$.

# Dãy Cauchy (cơ bản)

## Định nghĩa

*Dãy* $\{x_n\} \subset (X, d)$ *là dãy Cauchy nếu*

$$\lim_{m,n\to+\infty} d(x_m, x_n) \to 0,$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0), \exists N, (\forall m \geq N), (\forall n \geq N), d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Chú ý:** $N = N(\epsilon)$.

## Tính chất

i) Nếu $\{x_n\}$ là dãy hội tụ thì nó là dãy Cauchy,

# Dãy Cauchy (cơ bản)

## Định nghĩa

*Dãy* $\{x_n\} \subset (X, d)$ *là dãy Cauchy nếu*

$$\lim_{m,n\to+\infty} d(x_m, x_n) \to 0,$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0), \exists N, (\forall m \geq N), (\forall n \geq N), d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Chú ý:** $N = N(\epsilon)$.

## Tính chất

i) Nếu $\{x_n\}$ là dãy hội tụ thì nó là dãy Cauchy,

ii) Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy thì nó bị chặn,

# Dãy Cauchy (cơ bản)

## Định nghĩa

*Dãy* $\{x_n\} \subset (X, d)$ *là* *dãy Cauchy* *nếu*

$$\lim_{m,n\to+\infty} d(x_m, x_n) \to 0,$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0), \exists N, (\forall m \geq N), (\forall n \geq N), d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Chú ý:** $N = N(\epsilon)$.

## Tính chất

i) Nếu $\{x_n\}$ là dãy hội tụ thì nó là dãy Cauchy,

ii) Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy thì nó bị chặn,

iii) Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và $\{x_{n_k}\}$ là dãy con của nó sao cho $x_{n_k} \to x$ thì $x_n \to x$.

# Không gian metric đủ

**Định nghĩa**

*Không gian metric $(X, d)$ là **đủ** nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều hội tụ.*

# Không gian metric đủ

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là đủ nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều hội tụ.*

## Ví dụ

i) $(\mathbb{R}, d)$ là một không gian metric đủ.

ii) $(\mathbb{R}^k, d)$ là một không gian metric đủ.

# Không gian metric đủ

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là **đủ** nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều hội tụ.*

## Ví dụ

i) $(\mathbb{R}, d)$ là một không gian metric đủ.

ii) $(\mathbb{R}^k, d)$ là một không gian metric đủ.

iii) Không gian $C[a, b]$ là đủ.

# Không gian metric đủ

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là* ***đủ*** *nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều hội tụ.*

## Ví dụ

i) $(\mathbb{R}, d)$ là một không gian metric đủ.
ii) $(\mathbb{R}^k, d)$ là một không gian metric đủ.
iii) Không gian $C[a, b]$ là đủ.
iv) Không gian $C^L_{[a,b]}$ là không đủ.

# Không gian metric đủ

## Định nghĩa

*Không gian metric $(X, d)$ là đủ nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều hội tụ.*

## Ví dụ

i) $(\mathbb{R}, d)$ là một không gian metric đủ.

ii) $(\mathbb{R}^k, d)$ là một không gian metric đủ.

iii) Không gian $C[a, b]$ là đủ.

iv) Không gian $C^L_{[a,b]}$ là không đủ.

## Định lý

*Cho $(X, d)$ là không gian metric và $Y \subset X$.*

*i) Nếu $(Y, d)$ là đủ thì $Y$ là đóng.*

*ii) Nếu $(X, d)$ là đủ và $Y$ đóng thì $(Y, d)$ là đủ.*

# Nguyên lý Cantor

## Định lý (Nguyên lý Cantor)

*Trong một không gian metric đủ, mọi dãy hình cầu đóng thắt dần*

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots, \quad r_n \to 0$$

*đều có một điểm chung duy nhất.*

# Nguyên lý Cantor

## Định lý (Nguyên lý Cantor)

*Trong một không gian metric đủ, mọi dãy hình cầu đóng thắt dần*

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots, \quad r_n \to 0$$

*đều có một điểm chung duy nhất.*

Ý tưởng chứng minh:

i) Nếu $m > n$ thì $d(x_m, x_n) < r_n \to 0 \Rightarrow \{x_n\}$ là dãy Cauchy $\Rightarrow x_n \to x$.

ii) $S_n$ đóng $\Rightarrow x \in S_n \ \forall n \Rightarrow x \in \cap_{n=1}^{\infty} S_n$.

iii) Chứng minh $x$ là duy nhất.

# Làm đầy không gian metric

**Định lý (Hausdorff)**

*Cho trước một không gian metric* $(X, d)$ *bất kì, bao giờ cũng tồn tại một không gian metric đủ* $\hat{X}$ *thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) $X$ *đẳng cự với một bộ phận của* $\hat{X}$*,*

ii) $X$ *trù mật trong* $\hat{X}$*.*

*Không gian* $\hat{X}$ *được gọi là bổ sung của không gian* $X$*.*

# Làm đầy không gian metric

## Định lý (Hausdorff)

*Cho trước một không gian metric $(X, d)$ bất kì, bao giờ cũng tồn tại một không gian metric đủ $\hat{X}$ thỏa mãn hai điều kiện sau:*

*i) $X$ đẳng cự với một bộ phận của $\hat{X}$,*

*ii) $X$ trù mật trong $\hat{X}$.*

*Không gian $\hat{X}$ được gọi là bổ sung của không gian $X$.*

Ý tưởng chứng minh:

i) Gọi $\hat{X}$ là tập hợp các dãy Cauchy $\hat{x} = \{x_n\}, x_n \in X$ và coi

$$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

ii) Metric $d(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$

# Nguyên lý ánh xạ co

## Định nghĩa

*Ánh xạ* $f : X \to X$ *được gọi là một ánh xạ co nếu* $\exists q \in [0, 1)$ *sao cho*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

# Nguyên lý ánh xạ co

## Định nghĩa

*Ánh xạ* $f : X \to X$ *được gọi là một ánh xạ co nếu* $\exists q \in [0, 1)$ *sao cho*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

## Nguyên lý ánh xạ co

Cho $(X, d)$ là một không gian metric đầy đủ không rỗng. Mọi ánh xạ co $f : X \to X$ có một điểm bất động duy nhất $x^* \in X$ sao cho

$$\forall x_0 \in X, \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_0) = x^*.$$

# Ứng dụng: Bài toán Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad (CP)$$

ở đó $f(t, x)$ là hàm liên tục theo $t \in [0, a]$ và liên tục Lipschitz theo $x$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in [0, a], \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (L > 0).$$

Chứng minh rằng (CP) có nghiệm (duy nhất) trên đoạn $[0, a]$ bất kì.

# Chương 1: Không gian metric

# Không gian metric compact

## Định nghĩa (Tập compact)

*Một tập $M \subset X$ được gọi là*

*i) compact* $\quad \forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in M$

# Không gian metric compact

## Định nghĩa (Tập compact)

*Một tập $M \subset X$ được gọi là*

i) *compact* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in M$

ii) *compact tương đối* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in X$

# Không gian metric compact

## Định nghĩa (Tập compact)

*Một tập $M \subset X$ được gọi là*

i) *compact* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in M$

ii) *compact tương đối* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in X$
$\Leftrightarrow \overline{M}$ *là compact.*

# Không gian metric compact

## Định nghĩa (Tập compact)

*Một tập $M \subset X$ được gọi là*

i) *compact* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in M$

ii) *compact tương đối* $\forall \{x_n\} \subset M$ *đều chứa một dãy con* $\{x_{n_k}\} \to x \in X$ $\Leftrightarrow \overline{M}$ *là compact.*

## Định nghĩa (Tập hoàn toàn bị chặn)

*Một tập $M \subset X$ được gọi là hoàn toàn bị chặn nếu $\forall \epsilon > 0$, tồn tại một số hữu hạn hình cầu $S_1, S_2, \cdots, S_k$ bán kính $\epsilon$ sao cho*

$$M \subset \cup_{i=1}^{k} S_i.$$

Chú ý: Mọi tập hoàn toàn bị chặn đều bị chặn.

# Đặc trưng của một tập compact

Trong $\mathbb{R}$, compact $=$ đóng $+$ bị chặn.

**Định lý (Hausdorff)**

*Mọi tập compact thì đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại, một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong không gian metric đủ thì compact.*

# Đặc trưng của một tập compact

Trong $\mathbb{R}$, compact $=$ đóng $+$ bị chặn.

**Định lý (Hausdorff)**

*Mọi tập compact thì đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại, một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong không gian metric đủ thì compact.*

**Hệ quả**

i) *Mọi tập compact đều bị chặn,*

# Đặc trưng của một tập compact

Trong $\mathbb{R}$, compact = đóng + bị chặn.

**Định lý (Hausdorff)**

*Mọi tập compact thì đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại, một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong không gian metric đủ thì compact.*

**Hệ quả**

*i) Mọi tập compact đều bị chặn,*

*ii) Mọi tập con đóng của một tập compact đều compact,*

# Đặc trưng của một tập compact

Trong $\mathbb{R}$, compact $=$ đóng $+$ bị chặn.

**Định lý (Hausdorff)**

*Mọi tập compact thì đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại, một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong không gian metric đủ thì compact.*

**Hệ quả**

i) *Mọi tập compact đều bị chặn,*

ii) *Mọi tập con đóng của một tập compact đều compact,*

iii) *Đối với các tập đóng trong $\mathbb{R}^k$, các khái niệm bị chặn, hoàn toàn bị chặn, compact là tương đương nhau.*

# Đặc trưng của một tập compact

**Định lý (Heine-Borel)**

*Một tập M được gọi là compact nếu với mọi phủ mở*

$$\cup_\alpha G_\alpha \supset M$$

*đều có chứa một phủ con hữu hạn*

$$\cup_{i=1}^m G_{\alpha_i} \supset M.$$

# Đặc trưng của tập compact

**Định lý**

*Mọi ánh xạ liên tục trên tập compact thì liên tục đều trên đó.*

# Đặc trưng của tập compact

**Định lý**

*Mọi ánh xạ liên tục trên tập compact thì liên tục đều trên đó.*

**Định lý**

*Ảnh liên tục của một tập compact là compact.*

# Đặc trưng của tập compact

**Định lý**

*Mọi ánh xạ liên tục trên tập compact thì liên tục đều trên đó.*

**Định lý**

*Ảnh liên tục của một tập compact là compact.*

**Định lý**

*Hàm liên tục trên một tập compact thì bị chặn và đạt GTLN, GTNN trên đó.*

# Không gian compact

**Định nghĩa**

$(X, d)$ *được gọi là* *compact* *nếu nó là một tập compact trong chính nó.*

# Không gian compact

## Định nghĩa

$(X, d)$ *được gọi là* compact *nếu nó là một tập compact trong chính nó.*

## Tính trù mật và không gian khả ly

i) $A$ trù mật trong $B$ nếu $A \subset B \subset \overline{A}$.

# Không gian compact

## Định nghĩa

*$(X, d)$ được gọi là compact nếu nó là một tập compact trong chính nó.*

## Tính trù mật và không gian khả ly

i) $A$ trù mật trong $B$ nếu $A \subset B \subset \overline{A}$.

ii) $(X, d)$ được gọi là tách được (hay khả ly) nếu nó có một tập con hữu hạn hoặc đếm được trù mật trong nó.

# Không gian compact

## Định nghĩa

$(X, d)$ *được gọi là* compact *nếu nó là một tập compact trong chính nó.*

## Tính trù mật và không gian khả ly

i) $A$ trù mật trong $B$ nếu $A \subset B \subset \overline{A}$.

ii) $(X, d)$ được gọi là tách được (hay khả ly) nếu nó có một tập con hữu hạn hoặc đếm được trù mật trong nó.

## Định lý

*Mọi không gian metric compact là đủ và tách được.*

# Định lý Arzela- Ascoli

## Định nghĩa

$F \subset C[a, b]$ *liên tục đồng bậc nếu*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in F, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

# Định lý Arzela- Ascoli

## Định nghĩa

$F \subset C[a,b]$ *liên tục đồng bậc* nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in F, \forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

## Định lý Arzela- Ascoli

$F \subset C[a,b]$ compact $\Leftrightarrow$ nó đóng, bị chặn, và liên tục đồng bậc.

# Định lý Arzela- Ascoli

**Định nghĩa**

$F \subset C[a,b]$ *liên tục đồng bậc* nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in F, \forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

**Định lý Arzela- Ascoli**

$F \subset C[a,b]$ compact $\Leftrightarrow$ nó đóng, bị chặn, và liên tục đồng bậc.

**Hệ quả**

$F \subset C[a,b]$ *compact tương đối* $\Leftrightarrow$ *nó bị chặn và liên tục đồng bậc.*

i) $F$ liên tục đồng bậc $\Rightarrow \overline{F}$ liên tục đồng bậc,

ii) $F$ bị chặn $\Rightarrow \overline{F}$ bị chặn.

# Định lý Arzela- Ascoli

**Định lý Arzela- Ascoli**

Cho $X$ là một không gian metric compact và $Y$ là một không gian metric. Tập con $F \subset C(X, Y)$ là compact nếu nó

i) đóng,

ii) bị chặn, và

iii) liên tục đồng bậc.

# Chương 1: Không gian metric

# Ánh xạ liên tục

## Định nghĩa

*Cho* $f : X \to Y$.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X), d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

# Ánh xạ liên tục

## Định nghĩa

*Cho* $f : X \to Y$.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X), d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

## Chú ý

*i)* $\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *với mọi dãy* $x_n \to x, x_n \neq x$.

# Ánh xạ liên tục

## Định nghĩa

*Cho* $f : X \to Y$.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X), d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

## Chú ý

*i)* $\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *với mọi dãy* $x_n \to x, x_n \neq x$.

*ii)* $f$ *được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi* $x \in X$.

# Ánh xạ liên tục

## Định nghĩa

*Cho* $f : X \to Y$.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X), d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

## Chú ý

*i)* $\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *với mọi dãy* $x_n \to x, x_n \neq x$.

*ii)* $f$ *được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi* $x \in X$.

## Định lý

*Các mệnh đề sau là tương đương:*

*i)* $f$ *liên tục,*

*ii)* $f^{-1}(B)$ *đóng,* $\forall B$ *đóng,* $B \subset Y$,

*iii)* $f(A)$ *mở,* $\forall A$ *mở,* $A \subset X$.