TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

TOÁN ĐẠI CƯƠNG 4

(lưu hành nội bộ)

TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT, LÝ THUYẾT TRƯỜNG, CHUỖI

Tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, bài tập và lời giải

Hà Nội- 2018
(bản cập nhật Ngày 5 tháng 9 năm 2018)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về địa chỉ “dieu.buixuan@hust.edu.vn”

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos. Use at your own risk!

Hà Nội, Ngày 5 tháng 9 năm 2018.

MỤC LỤC

Mục lục

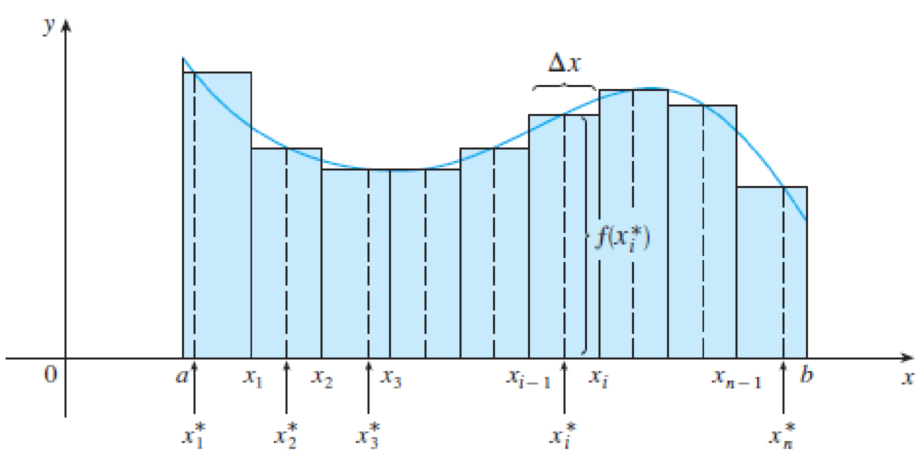
CHƯƠNG 1

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1 Định nghĩa

Diện tích và tích phân xác định



Cho $f(x)$ là một hàm số xác định với $a \leq x \leq b$.

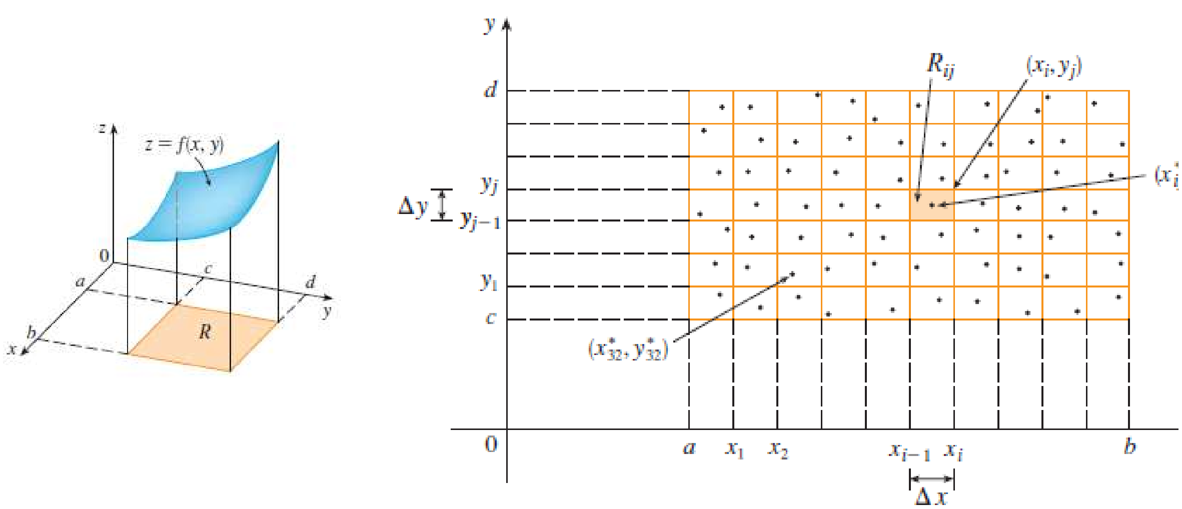
- Chia khoảng $[a, b]$ này thành n khoảng nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài bằng nhau $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì.

- Lập tổng Riemann
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$
Tổng Rieman này chính là diện tích của các hình chữ nhật trên hình vẽ.

- Lấy giới hạn để thu được tích phân xác định từ a đến b của hàm số $f(x)$:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n),$$
(với điều kiện là giới hạn này không phụ thuộc vào cách chọn các điểm x_i^*).

Thể tích và tích phân bội hai trên hình chữ nhật

Một cách hoàn toàn tương tự như trên, xét hàm số f phụ thuộc vào hai biến số x, y xác định trên một hình chữ nhật đóng
$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$
Gọi S là miền nằm phía dưới của mặt $z = f(x,y)$ và phía trên của hình chữ nhật R, nghĩa là
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y), (x,y) \in R\}.$$



- Chia miền R thành các miền hình chữ nhật con, bằng cách chia khoảng $[a,b]$ thành m khoảng con với độ dài bằng nhau và bằng $\frac{b-a}{m}$, chia khoảng $[c,d]$ thành n khoảng con với độ dài bằng nhau và bằng $\frac{d-c}{n}$. Như vậy, miền R được chia thành $m \times n$ hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

mỗi hình chữ nhật con có diện tích $\Delta S = \Delta x \Delta y$.

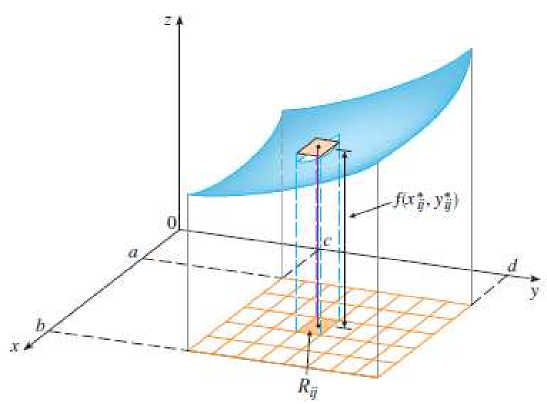
- Trên mỗi hình chữ nhật R_{ij} ta chọn một điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*) bất kì. Khi đó thể tích của phần con của S nằm phía trên của hình chữ nhật R_{ij} có thể được xấp xỉ bằng

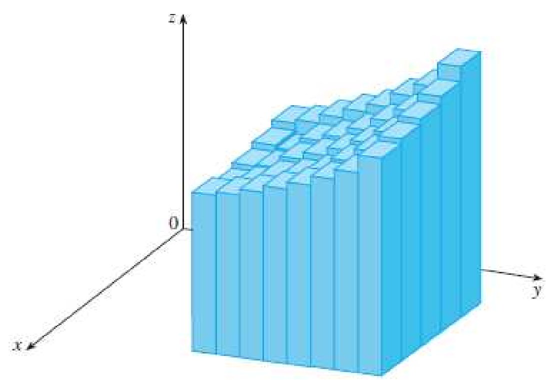
$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S.$$

- Tiếp tục quá trình này và thu được công thức xấp xỉ thể tích của miền S:

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu ta chia miền R càng nhỏ thì công thức xấp xỉ trên càng tốt.





Định nghĩa 1.1. *Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số $f(x)$ trên miền hình chữ nhật R là*

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S,$$

nếu như giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*).

Chú ý 1.1. *Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì thể tích của miền nằm phía dưới mặt cong $z = f(x,y)$ và phía trên hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ là*

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

Tích phân lặp và Định lý Fubini

Giả sử $f(x,y)$ là một hàm số khả tích trên $R = [a,b] \times [c,d]$. Xét hai tích phân lặp sau:

$$I_1 = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx, \quad I_2 = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

Định lý 1.1 (Định lý Fubini). *Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên miền hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ thì*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

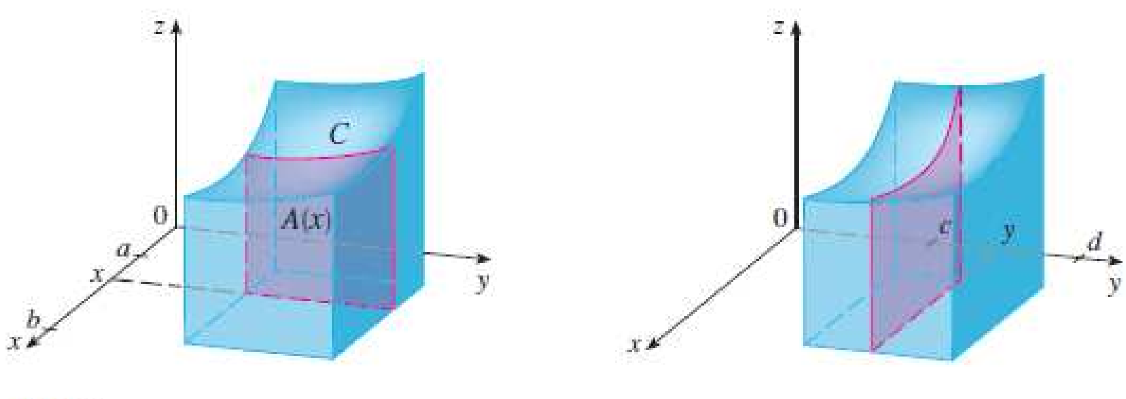
Chứng minh. Trong khuôn khổ của Bài giảng này, thay vì đưa ra chứng minh cho trường hợp tổng quát, chúng ta sẽ chỉ chứng minh cho trường hợp $f(x,y) \geq 0$. Trước hết, thể tích của miền nằm phía dưới mặt $z = f(x,y)$ và phía trên hình chữ nhật R được tính theo công thức.

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy.$$

Trong học phần Giải tích I, phần ứng dụng của tích phân xác định để tính thể tích, chúng ta có một công thức khác, đó là

$$V = \int_a^b A(x)dx,$$

ở đó $A(x)$ là diện tích của thiết diện của miền V cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox.



Nhìn vào hình vẽ, có thể thấy $A(x)$ diện tích của miền là miền nằm phía dưới đường $z = f(x,y)$, ở đó x được cố định và $c \leq y \leq d$. Do đó,

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy \Rightarrow \iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

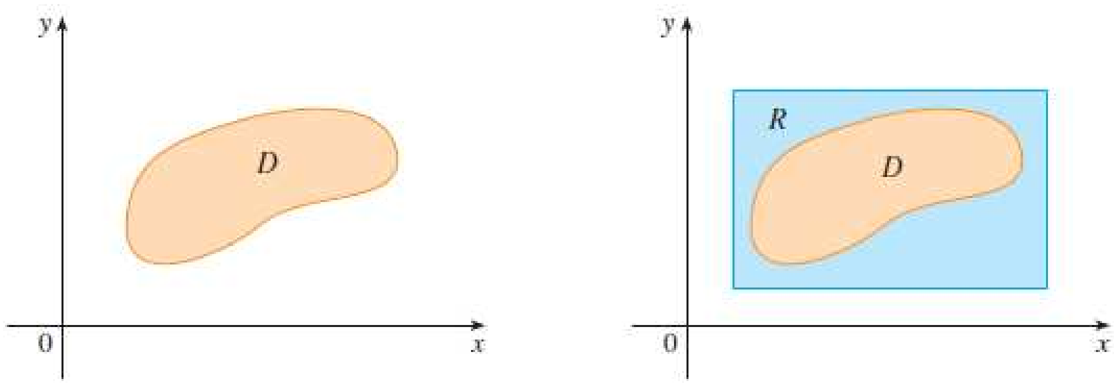
Một cách hoàn toàn tương tự,

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Tích phân kép trên miền bị chặn bất kì

Nếu như miền D không phải là hình chữ nhật mà chỉ là miền bị chặn bất kì thì ý tưởng rất đơn giản là chọn một hình chữ nhật R chứa D và định nghĩa hàm số F với miền xác định là R bởi

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin D. \end{cases}$$



Định nghĩa 1.2. *Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số $f(x,y)$ trên miền D được định nghĩa bằng*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_R F(x,y)dxdy.$$

Có một cách định nghĩa khác của tích phân kép như sau.

Định nghĩa 1.3. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta S_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm $M(x_i, y_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Cách định nghĩa này về cơ bản ý tưởng cũng giống như định nghĩa ở trên. Tuy nhiên, việc chia miền D thành n mảnh nhỏ như vậy dẫn đến việc khó hình dung. Thay vào đó, do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ nên ta "chủ động" chia D thành hai họ đường thẳng song song với các trục toạ độ như trong Định nghĩa 1.1.

Chú ý 1.2. *Nếu tồn tại tích phân kép* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *thì ta nói hàm số* $f(x,y)$ *khả tích trong miền* D.

Tính chất cơ bản:

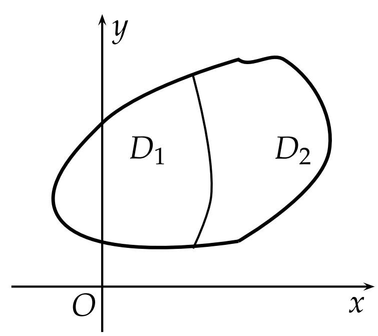
- Tính chất tuyến tính:

$$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$, ở đó D_1 và D_2 không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

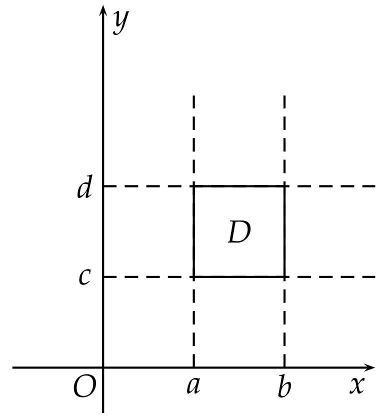


1.2 Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

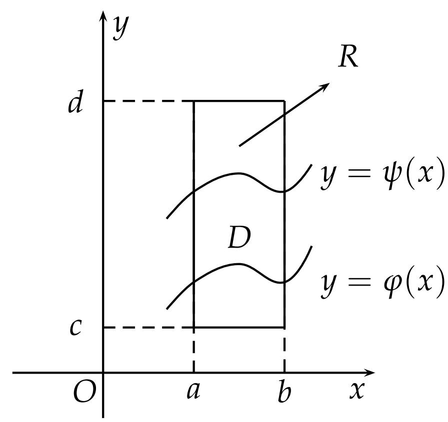
Để tính các tích phân hai lớp, ta cần phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D):\ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_c^d f(x,y)\,dx.$$



2. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Oy, $(D): a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ thì, một cách hết sức đơn giản, ta chọn hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ như hình vẽ.



Khi đó,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_R F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)dy,$$

ở đó, nhắc lại rằng,

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Ta có

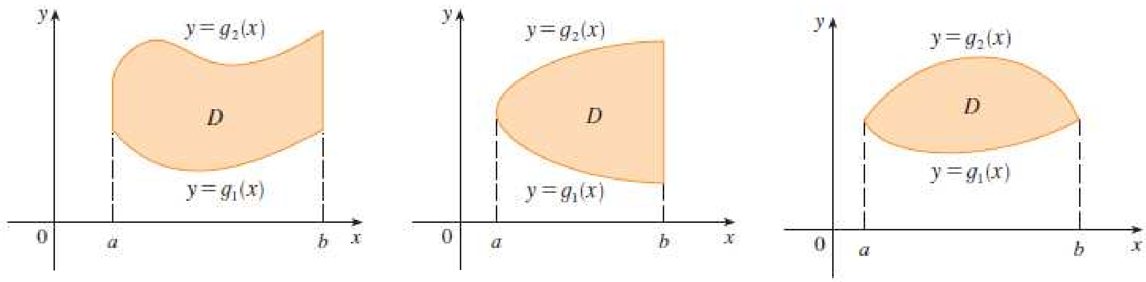
$$\int\limits_c^d F(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

bởi vì với $y > \psi(x)$ hoặc $y < \varphi(x)$ thì $F(x,y) = 0$.

Do đó, tích phân kép trong trường hợp này được chuyển về tích phân lặp với thứ tự như sau:

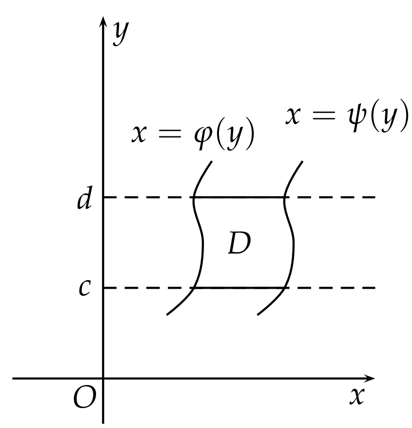
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Một số miền có dạng hình thang cong có cạnh đáy song song với Oy khác được thể hiện ở hình vẽ sau:



3. Một cách hoàn toàn tương tự, nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Ox, $(D): c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$ thì tích phân kép được chuyển về tích phân lặp với thứ tự như sau:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$



4. Nếu D là miền có hình dáng phức tạp, không có dạng 2,3 thì thông thường ta sẽ chia miền D thành một số hữu hạn miền có dạng 2 hoặc 3 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về việc tính toán những tích phân lặp trên miền có dạng 2, 3.

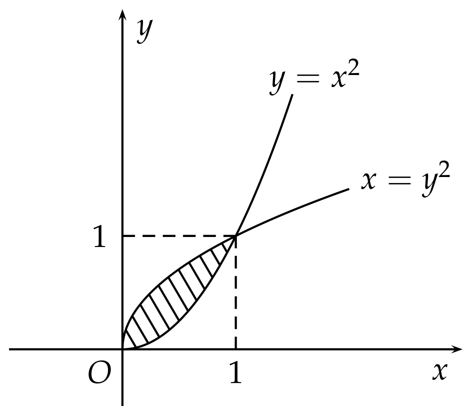
Bài tập 1.1. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}, 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dy = \ldots = \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dx = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

b) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy, D$ giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$.



Hình 1.1

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2y - x^3\right) dy = \ldots = -\frac{1}{504}.$$

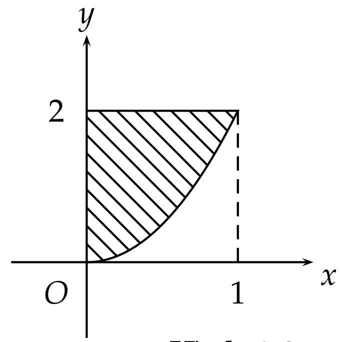
Một số dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Đổi thứ tự lấy tích phân.

Chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài tập 1.2. Tính $I = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 e^{y^2} dy.$

Hàm số $f(x,y) = xe^{y^2}$ liên tục trên miền D nên chắc chắn khả tích trên D. Tuy nhiên, nếu tính tích phân trên mà làm theo thứ tự dy trước dx sau như trong đề bài thì không tính được, vì hàm số e^{y^2} không có nguyên hàm sơ cấp! Do đó, nảy sinh nhu cầu đổi thứ tự lấy tích phân.



Hình 1.2

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu diễn giải tích của miền D là $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq 1. \end{cases}$

Ta vẽ miền D và biểu diễn nó lại dưới dạng $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$

Do đó,

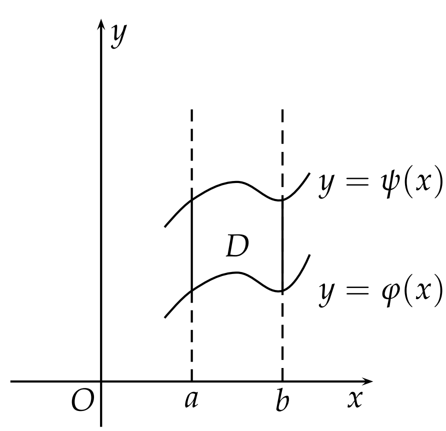
$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx = \int\limits_0^1 e^{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{y^2}.ydy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (e-1).$$

Quy trình làm bài toán đổi thứ tự lấy tích phân

Bài toán 1: Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là $(D): \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x). \end{cases}$

2. Vẽ phác thảo miền D.



3. Chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Ox. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i) : \begin{cases} c_i \leqslant y \leqslant d_i, \\ \varphi_i(y) \leqslant x \leqslant \psi_i(y). \end{cases}$

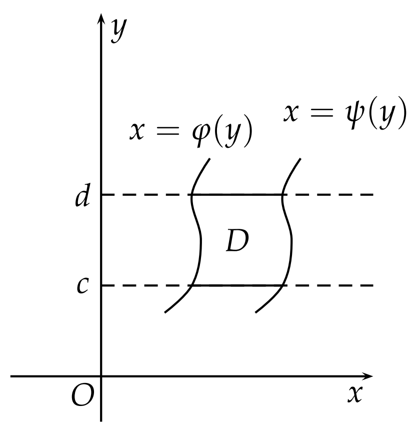
   Sau đó viết
$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \sum_i \int\limits_{c_i}^{d_i} dy \int\limits_{\varphi_i(y)}^{\psi_i(y)} f(x,y)\,dx.$$

Làm tương tự với

Bài toán 2: Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là $(D) : \begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y). \end{cases}$

2. Vẽ phác thảo miền D.

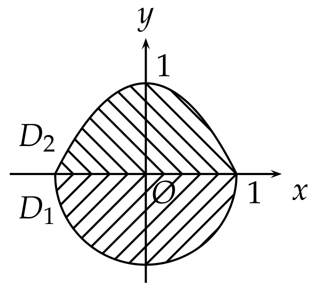


3. Chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Oy. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i) : \begin{cases} a_i \leqslant y \leqslant b_i, \\ \varphi_i(x) \leqslant y \leqslant \psi_i(x). \end{cases}$

   Sau đó viết
$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \sum_i \int\limits_{a_i}^{b_i} dx \int\limits_{\varphi_i(x)}^{\psi_i(x)} f(x,y)\,dy.$$

Bài tập 1.3. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy.$



Hình 1.3 a)

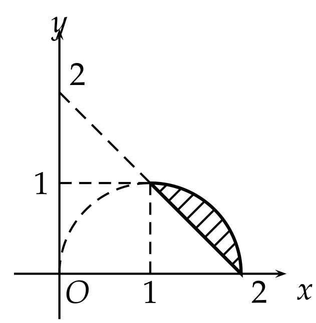
Chia miền D thành hai miền con D_1, D_2 như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y}. \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

b) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

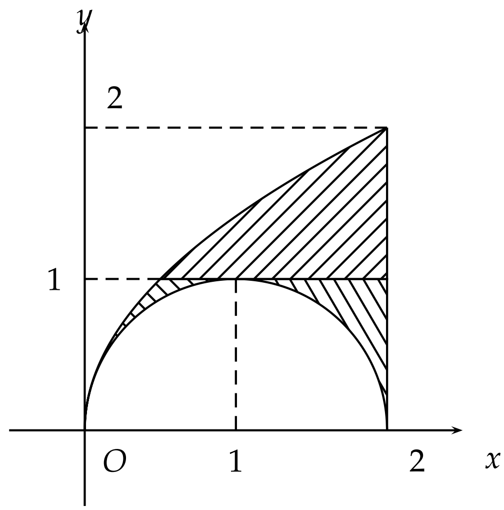


Hình 1.3 b)

Lời giải. Ta có biểu diễn giải tích của D là $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$ nên:

$$I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dx.$



Hình 1.3 c)

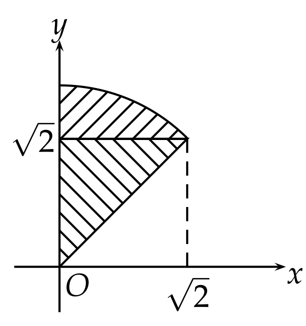
Lời giải. Chia D thành 3 miền như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 + \sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}, D_3 : \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Vậy:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx.$$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$



Hình 1.3 d)

Lời giải. Biểu diễn giải tích của D là $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ nên:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy.$$

Bài tập 1.4. [Cuối kì, K62] Tính các tích phân lặp

a) $\int_0^1 dy \int_{2y}^2 e^{x^2} dx$ b) $\int_0^1 dx \int_{2x}^2 e^{y^2} dy.$

Bài tập 1.5. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

Hãy giải thích tại sao không đổi thứ tự lấy tích phân được trong tích phân trên.

[Gợi ý] Hàm lấy tích phân $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ không liên tục trên miền $D = [0,1] \times [0,1]$ nên

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$$

có thể không tồn tại. Đây thực chất là một tích phân bội suy rộng.

Dạng 2: Tính các tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Giả sử cần tính $\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy$.

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối. Vì vậy ta khảo sát dấu của hàm $f(x,y)$. Do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường cong $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền, D^+ và D^-. Trên miền $D^+, f(x,y) \geqslant 0$, và trên miền $D^-, f(x,y) \leqslant 0$. Ta có công thức:

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D^-} -f(x,y)\, dxdy} \tag{1.1}$$

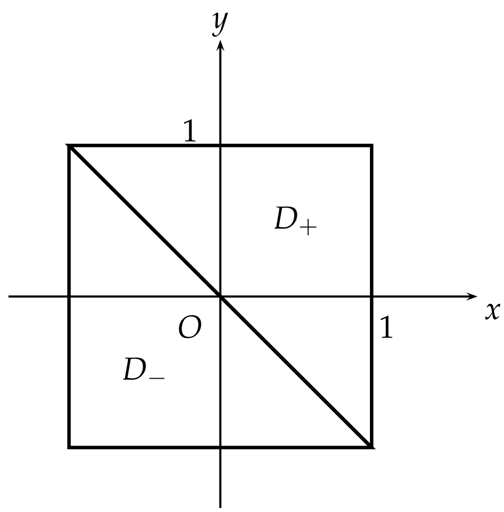
Các bước để làm bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

1. Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để tìm đường cong phân chia miền D.

2. Giả sử đường cong tìm được chia miền D thành hai miền. Để xác định xem miền nào là D^+ , miền nào là D^-, ta xét một điểm (x_0, y_0) bất kì, sau đó tính giá trị $f(x_0, y_0)$. Nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì miền chứa (x_0, y_0) là D^+ và ngược lại.

3. Sau khi xác định được các miền D^+, D^-, sử dụng công thức (1.1) để tính tích phân.

Bài tập 1.6. Tính $\iint\limits_D |x+y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ||x \leqslant 1| \, , |y| \leqslant 1 \right\}$



Hình 1.6

Lời giải. Ta có:

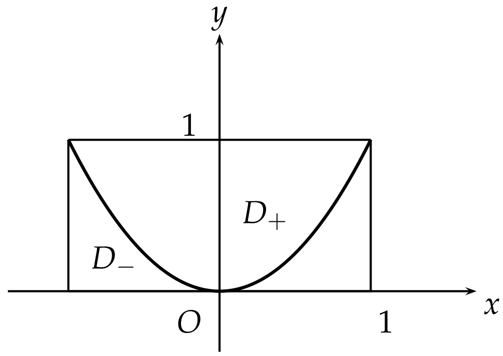
$$D^+ = D \cap \{x+y \geqslant 0\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

$$D^- = D \cap \{x+y \leqslant 0\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant -x. \end{cases}$$

nên

$$I = \iint\limits_{D^+} (x+y)\, dxdy - \iint\limits_{D^-} (x+y)\, dxdy = \ldots = \frac{8}{3}.$$

Bài tập 1.7. Tính $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|} dxdy, D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ||x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$



Hình 1.7

Lời giải. Chia miền D thành hai miền con

$$D^+ = D \cap \left\{(x,y) \,\middle|\, y - x^2 \geqslant 0\right\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

$$D^- = D \cap \left\{(x,y) \,\middle|\, y - x^2 \leqslant 0\right\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant x^2. \end{cases}$$

Do đó

$$I = \iint\limits_{D^+} \sqrt{y - x^2} dxdy + \iint\limits_{D^-} \sqrt{x^2 - y} dxdy = I_1 + I_2,$$

trong đó

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \sqrt{y - x^2} dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx \overset{x=\sin t}{=} \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = ... = \frac{\pi}{4},$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} |x|^3 dx = \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$.

Bài tập 1.8 (Cuối kì,K62). *Tính tích phân*

a) $\iint\limits_D |x + y| dxdy,$ *b)* $\iint\limits_D |x - y| dxdy,$

ở đó $D : x^2 + y^2 \leq 1.$

Dạng 3: Tính tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng.

Định lý 1.2. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và hàm là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0.$$

Định lý 1.3. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và hàm là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì*

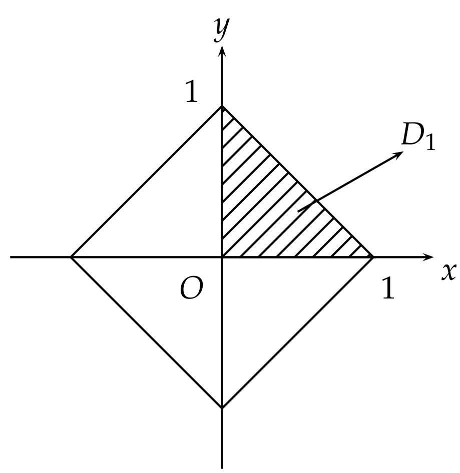
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy,$$

trong đó D^+ là phần nằm bên trên trục Ox của D (tương ứng phía phải trục Oy của D).

Định lý 1.4. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ thoả mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0.$$

Bài tập 1.9. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |x|+|y|dxdy.$



Hình 1.9

Lời giải. Do D đối xứng qua cả Ox và Oy, $f(x,y) = |x|+|y|$ là hàm chẵn với x,y nên

$$I = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy = 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy = \frac{4}{3}.$$

1.3 Phép đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1.2}$$

thoả mãn:

- $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- Công thức (1.2) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- Định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0\ \forall (u,v) \in D_{uv}$.

Khi đó ta có công thức đổi biến số:

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dudv}$$

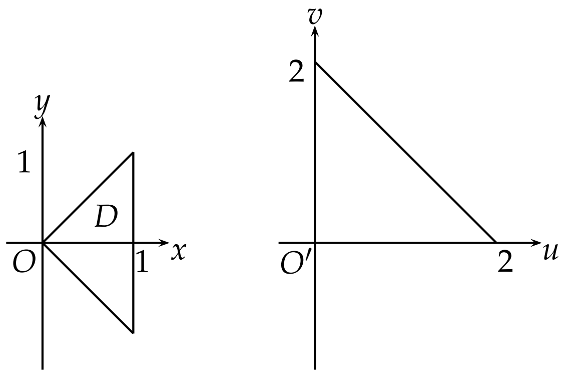
Chú ý:

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x,y)$.
- Để xác định được miền D_{uv}, lưu ý rằng phép đổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}, biến miền D bị chặn thành miền D_{uv} bị chặn.
- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Bài tập 1.10. Chuyển tích phân sau sang hai biến u, v:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dxdy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$.



Hình 1.10

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

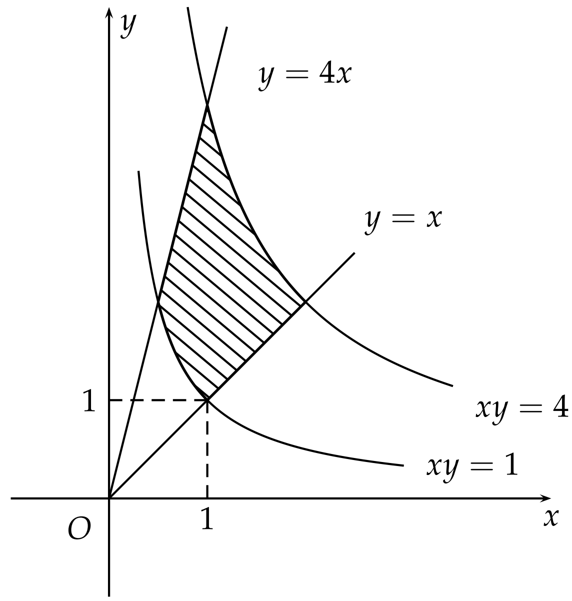
Hơn nữa

$$D \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv} \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2-u \end{cases}$$

nên

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 du \int\limits_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

Bài tập 1.11. Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, trong đó $D : \begin{cases} 1 \leqslant xy \leqslant 4 \\ x \leqslant y \leqslant 4x. \end{cases}$



Hình 1.11

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 4 \\ 1 \leqslant v \leqslant 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Ta có

$$I = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right) . \frac{1}{2v} dv = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int\limits_1^4 -\frac{3}{2} u du = -\frac{45}{4}.$$

Dùng tích phân kép để chứng minh Công thức Euler (Giải tích III)

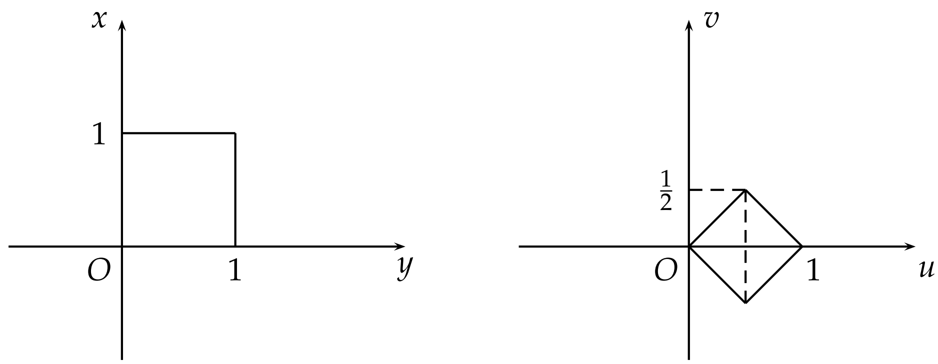
Chứng minh công thức Euler sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier. Sau đây tôi xin giới thiệu một phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép. Trước hết, vì $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 x^n dx \int\limits_0^1 y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (xy)^n dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến $x = u - v, y = u + v$. Khi đó $J = 2$ và miền D sẽ biến thành miền D_{uv} như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}).



Ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{1}{1-xy}dxdy = 2\iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{1-u^2+v^2}dudv \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}dv + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}dv. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vì

$$\int_0^z \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\Big|_0^z = \frac{1}{a}\arctan\frac{z}{a}$$

nên

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}du = I_1 + I_2.$$

Đặt $u = \sin\theta$ đối với tích phân I_1 ta được

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\arctan\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\arctan(\tan\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \quad (1.4)$$

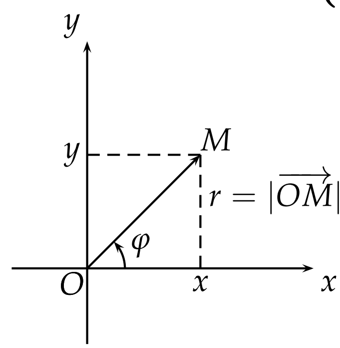
Đặt $u = \cos 2\theta$ đối với tích phân I_2 ta được

$$I_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\arctan\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\right)d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\arctan(\tan\theta)d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$.

Phép đổi biến số trong toạ độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn, cardioids,... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $\left(x^2+y^2\right)$. Toạ độ cực của điểm $M\,(x,y)$ là bộ (r,φ), trong đó $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \varphi = \widehat{Ox,\overrightarrow{OM}} \end{cases}$.

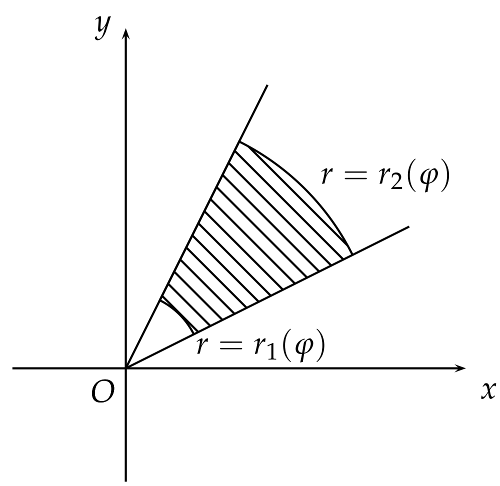


Công thức đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ trong đó miền biến thiên của r,φ phụ thuộc vào hình dạng của miền D. Khi đó

$$J = \frac{D\,(x,y)}{D\,(r,\varphi)} = r \text{ và } I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

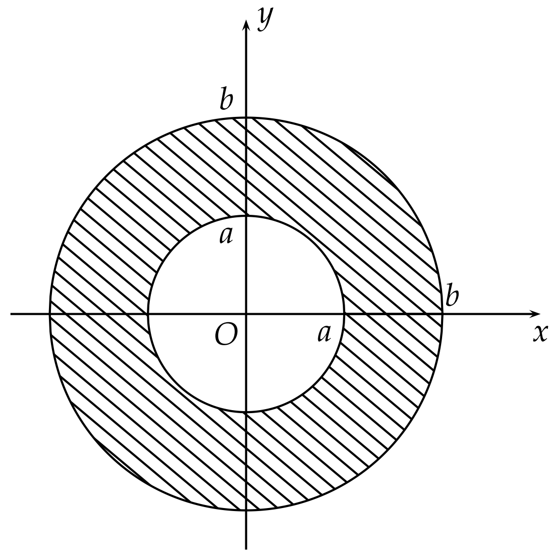
Đặc biệt, nếu miền lấy tích phân có dạng hình quạt $\begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1\,(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2\,(\varphi) \end{cases}$ (xem hình vẽ) thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr.$$



Bài tập 1.12. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$

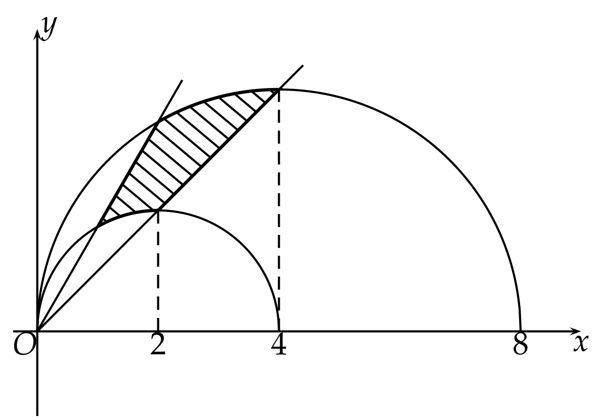


Hình 1.12a

Lời giải.

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ a \leqslant r \leqslant b \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr$$

b) $x^2 + y^2 \geqslant 4x, x^2 + y^2 \leqslant 8x, y \geqslant x, y \leqslant 2x$



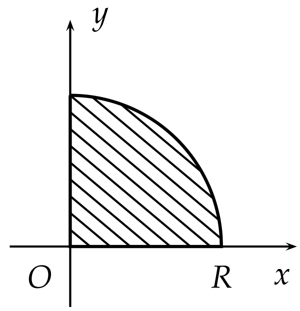
Hình 1.12b

Lời giải. Ta có:

$$D : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\cos\varphi \leqslant r \leqslant 8\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr.$$

Bài tập 1.13. Dùng phép đổi biến số trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) dy \ \ (R>0).$



Hình 1.13 a

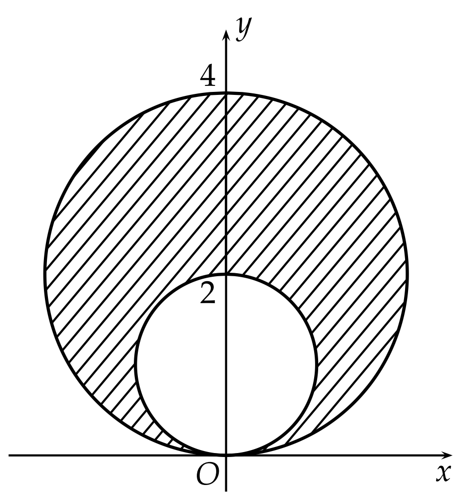
Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền D là:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}. \end{cases}$$

Chuyển sang toạ độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant R. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \ln\left(1+r^2\right) r dr = \frac{\pi}{4}\int\limits_{0}^{R} \ln\left(1+r^2\right) d\left(1+r^2\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\left(R^2+1\right)\ln\left(R^2+1\right) - R^2\right]. \end{aligned}$$

b) Tính $\iint\limits_{D} xy^2 dxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 1 \\ x^2+y^2-4y = 0. \end{cases}$



Hình 1.13 b

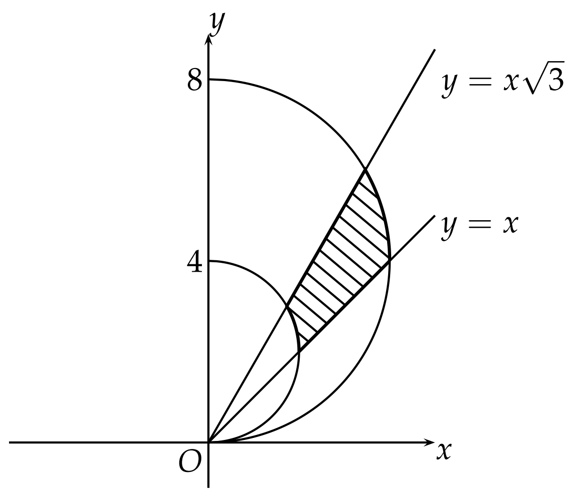
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 4\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\cos\varphi.\,(r\sin\varphi)^2\, rdr \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cách 2: Vì D đối xứng qua Oy và $f(x,y) = xy^2$ là hàm số lẻ đối với x nên $I = 0$.

Bài tập 1.14. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D : \begin{cases} 4y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8y, \\ x \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}. \end{cases}$



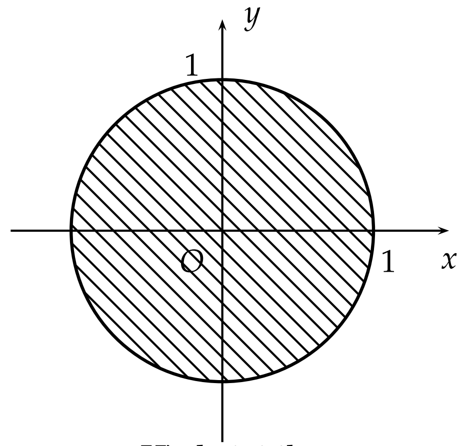
Hình 1.14a

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \leqslant r \leqslant 8\sin\varphi. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} rdr = -\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$ trong đó $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$.



Hình 1.14b

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Ta có:

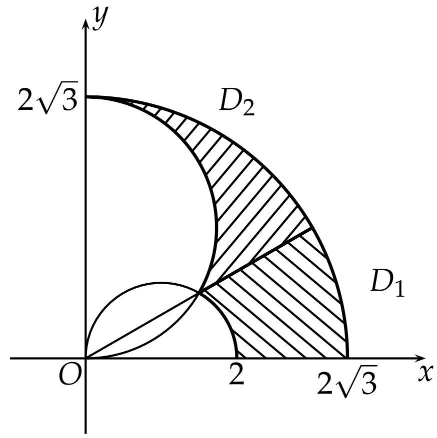
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \overset{u=r^2}{=} 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du.$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \pi \int\limits_0^1 t\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right) dt = -\pi \int\limits_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} + 4\pi \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= -4\pi \arctan t \Big|_0^1 + 4\pi \left[\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan t\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$ trong đó $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 12 \\ x^2+y^2 \geqslant 2x \\ x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{3}y \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$



Hình 1.14c

Lời giải. Chia miền D thành hai miền $D = D_1 \cup D_2$ như hình vẽ,

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy $I = I_1 + I_2$, trong đó

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 4\cos^2\varphi\right) d\varphi = ... = \frac{17}{32},$$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sqrt{3}\sin\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 12\sin^2\varphi\right) d\varphi = ... = \frac{27}{32}.$$

Kết luận $I = \frac{11}{8}$. ■

Phép đổi biến số trong toạ độ cực suy rộng.

Phép đổi biến trong toạ độ cực suy rộng được sử dụng khi miền D có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục toạ độ. Khi sử dụng phép biến đổi này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép biến đổi.

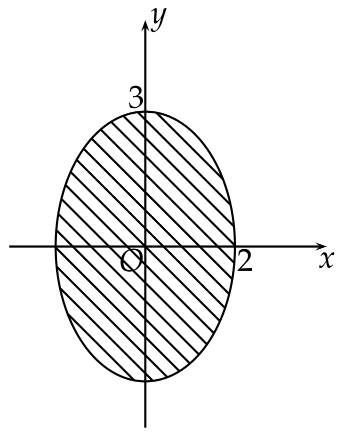
1. Nếu $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, J = abr.$

2. Nếu $D : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}, J = r.$

3. Xác định miền biến thiên của r, φ trong phép đổi biến trong hệ toạ độ cực suy rộng.

4. Thay vào công thức đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

Bài tập 1.15. Tính $\iint\limits_D \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy$, trong đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.



Hình 1.15

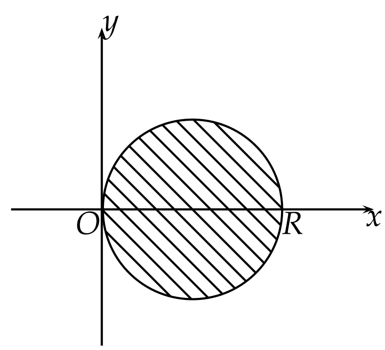
Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Ta có:

$$I = 6 \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left|36r^2\cos^2\varphi - 36r^2\sin^2\varphi\right| rdrd\varphi = 6.36 \int\limits_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = ... = 216$$

Bài tập 1.16. Tính $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2} dy, (R > 0)$.



Hình 1.16

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của D là:

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ -\sqrt{R\mathrm{x} - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R\mathrm{x} - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{R^2}{4}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{R}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{R}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{2}} r\sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2}dr = 2\pi.\frac{-1}{2}\int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2}d\left(\frac{R^2}{4} - r^2\right) = \frac{\pi R^3}{12}.$$

Chú ý 1.3. *Đối với Bài tập 1.16, nếu chỉ đổi biến số trong tọa độ cực thông thường*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad thì \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le R\cos\varphi. \end{cases}$$

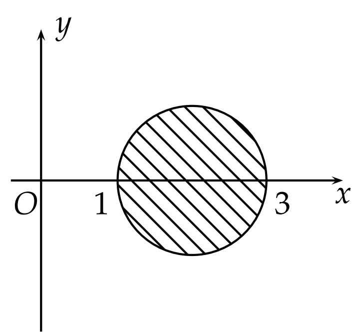
Tích phân đã cho trở thành

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \left(\sqrt{Rr\cos\varphi - r^2}\right) rdr.$$

Tích phân này không dễ tính vì nó chứa biểu thức vô tỉ $\sqrt{Rr\cos\varphi - r^2}$. Đây là một ví dụ điển hình về việc phép đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng không những biến miền lấy tích phân về miền đơn giản, mà còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân.

Bài tập 1.17. Tính $\iint\limits_D xydxdy$, với

a) D là hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$.



Hình 1.17a

Lời giải.

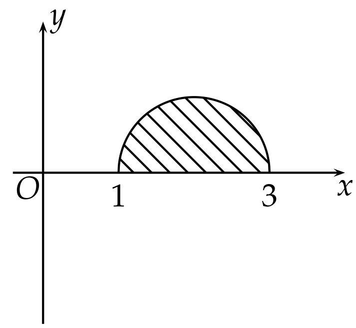
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . rdr = 0.$$

Cách 2. Nhận xét D là miền đối xứng qua Ox và $f(x, y) = xy$ là hàm lẻ đối với y nên $I = 0$. ∎

b) D là nửa hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$.



Hình 1.17b

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . rdr = \frac{4}{3}.$$

1.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 1.18. *Tính*

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[Gợi ý] Nên tính tích phân này theo thứ tự dy trước, dx sau.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bài tập 1.19. *Tính*

a) $I_1 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, *trong đó* D *là miền giới hạn bởi các đường thẳng* $x = 2, y = x$ *và hyperbol* $xy = 1$.

b) $I_2 = \iint\limits_C (x^2 + y) dxdy$, *trong đó* C *là miền giới hạn bởi các parbaol* $y = x^2$ *và* $x = y^2$.

[Đáp số]

a) $I_1 = \frac{9}{4}$

b) $I_2 = \frac{33}{140}$

Bài tập 1.20. *Tính tích phân*

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dxdy,$$

trong đó D *là miền giới hạn bởi bốn parabol*

$$x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx, \ (0 < a < b, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$.

Bài tập 1.21. *Tính tích phân* $I = \iint\limits_D xydxdy$ *trong đó* D *là miền giới hạn bởi các đường cong*

$$y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx, \ (0 < b < a, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số $u = \frac{x^3}{y}, v = \frac{y^2}{x}$.

Bài tập 1.22. *Chứng minh rằng*

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy = \frac{e-1}{2}.$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến $u = x + y, v = y$.

Bài tập 1.23. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường* $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$.

[Gợi ý] Đặt $u = xy, v = xy^3$. Đáp số $S = 2\ln 3$.

Bài tập 1.24. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi bốn parabol* $y^2 = x, y^2 = 8x, x^2 = y, x^2 = 8y$.

[Gợi ý] Đặt $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}$. Đáp số $S = \frac{279\pi}{2}$.

Bài tập 1.25. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường* $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$.

[Đáp số] $S = \frac{1}{8}$.

Bài tập 1.26. *Chứng minh rằng*

$$\iint\limits_{x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \frac{\sin 1}{2}.$$

[Gợi ý] Đặt $u = x - y, v = x + y$.

Bài tập 1.27. *Tính tích phân*

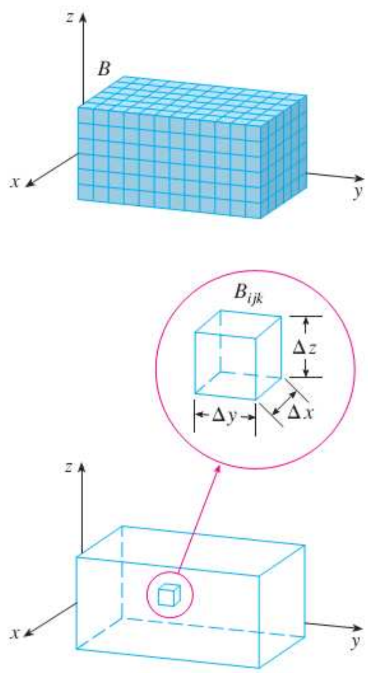
$$I = \iint\limits_{D} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right) dxdy,$$

trong đó D *là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và parabol* $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.

§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1 Định nghĩa và tính chất

Tích phân bội ba trên miền hình hộp



Giống như tích phân xác định của hàm số một biến số $f(x)$ hay tích phân kép của hàm số hai biến số $f(x,y)$, tích phân bội ba của hàm số ba biến số $f(x,y,z)$ được định nghĩa một cách hoàn toàn tương tự. Trước hết, ta xét trường hợp đơn giản nhất, ở đó hàm số $f(x,y,z)$ được định nghĩa trên một hình hộp chữ nhật

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] = \{(x,y,z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}.$$

- Chia B thành các hình hộp nhỏ bằng cách chia $[a,b]$ thành l khoảng con với độ dài bằng nhau Δx, chia $[c,d]$ thành m khoảng con với độ dài bằng nhau Δy, chia $[r,s]$ thành n khoảng con với độ dài bằng nhau Δz. Khi đó, B được chia thành $l \times m \times n$ hình hộp nhỏ
$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$
mỗi hình hộp con với thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

- Chọn mỗi điểm $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$ và lập tổng tích phân
$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Định nghĩa 1.4. *Tích phân bội ba của hàm số $f(x,y,z)$ trên hình hộp B là*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{l,m,n\to+\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{1.5}$$

nếu giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$. Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y,z)$ khả tích trên B.

Chú ý 1.4. *Nếu chọn $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) = (x_i, y_j, z_k)$ thì công thức (1.5) trở thành*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{l,m,n\to+\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x\Delta y\Delta z,$$

Định lý 1.5 (Định lý Fubini). *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên hình hộp $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ thì nó khả tích trên đó, và*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_r^s f(x,y,z)dz.$$

Tích phân bội ba trên miền bị chặn bất kì

Giống như cách định nghĩa tích phân kép, tích phân bội ba trên miền bị chặn V bất kì được định nghĩa như sau:

- Chọn hình hộp chữ nhật B chứa V và định nghĩa hàm số mới

$$g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{nếu } (x,y,z)\in V,\\ 0 & \text{nếu } (x,y,z)\notin V.\end{cases}$$

- Định nghĩa

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz.$$

Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V \left[f(x,y,z)+g(x,y,z)\right]dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\,dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$, ở đó V_1 và V_2 không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì:

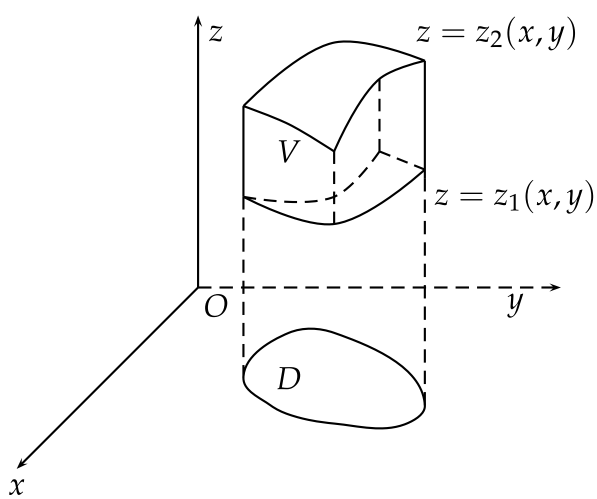
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

2.2 Tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền V. Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng.



Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$, trong đó $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy thì ta có:

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \tag{1.6}$$

Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy.
2. Xác định biên dưới $z = z_1(x,y)$ và biên trên $z = z_2(x,y)$ của V.

3. Sử dụng công thức 1.6 để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

$$\boxed{\text{Xác định } D \text{ và các biên } z = z_1(x,y), z = z_2(x,y) \text{ như thế nào?}}$$

Có hai cách đề xác định: Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền V. Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của V tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Vì thế, chúng ta cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi bạn đọc phải có kĩ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, paraboloit, hyperboloit 1 tầng, hyperboloit 2 tầng, hơn nữa cần có trí tưởng tượng tốt đề hình dung ra sự giao cắt của các mặt.

Chú ý: Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ đôi khi giúp giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 1.6. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$ (Oxy) và $f(x,y,z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 0$.*

Định lý 1.7. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$ (Oxy) và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)\,dxdydz$, trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng $z = 0$ của V.*

Chú ý 1.5. *Vai trò của z trong hai định lý trên có thể được thay đổi bằng x hoặc y. Hai định lý này có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.*

Bài tập 1.28. Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi:

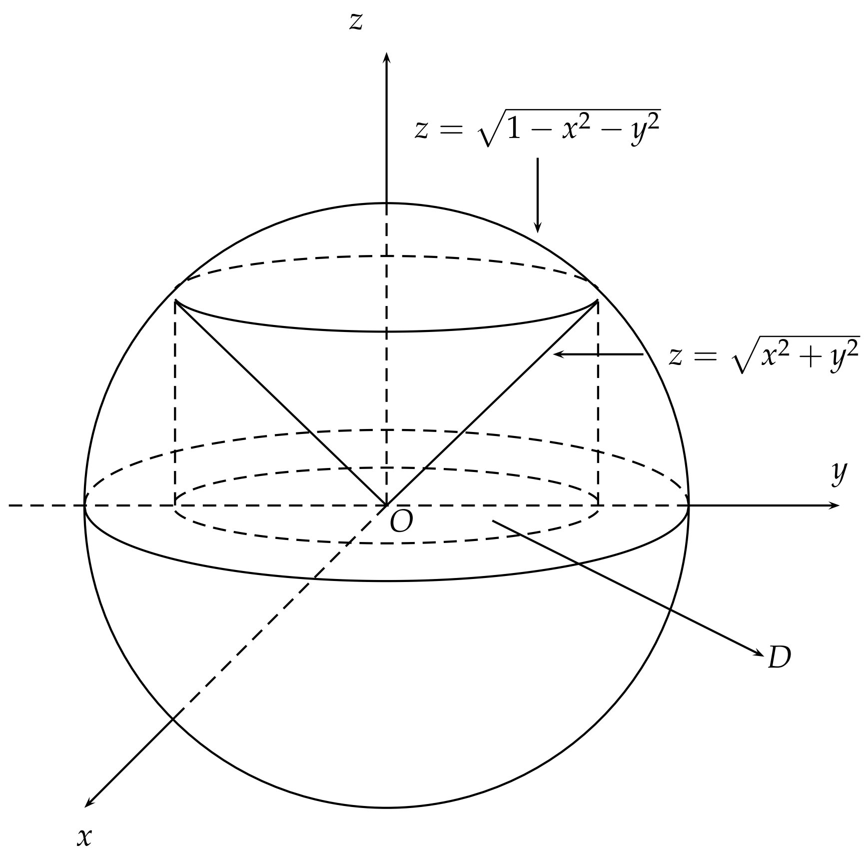
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ x \leqslant y \leqslant 2x \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{43}{3072}.$$ ■

Bài tập 1.29. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=0. \end{cases}$$



Hình 1.29

Lời giải. Do tính chất đối xứng, $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1} \left(x^2+y^2\right) dxdydz = 2I_1$, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy của V. Ta có $\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \\ D : x^2+y^2 \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

với D là hình chiếu của V_1 lên Oxy. Ta có

$$I_1 = \iint\limits_D x^2+y^2 dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr \overset{(r=\cos\alpha)}{=\cdots=} \frac{2\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}.$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}.$$ ■

2.3 Đổi biến số trong tích phân bội ba

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ trong đó $f(x,y,z)$ liên tục trên V.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \tag{1.7}$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw} của mặt phẳng $O'uvw$.
- Công thức 1.7 xác định song ánh $V_{uv\mathrm{w}} \to V$.
- $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})} \neq 0$ trong V_{uvw}. Khi đó

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]|J|\,dudvdw$$

Chú ý 1.6. *1. Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền V thành biên của miền V_{uvw}, biến miền V bị chặn thành miền V_{uvw} bị chặn.*

2. Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$.

Bài tập 1.30. Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z=\pm 3 \\ x+2y-z=\pm 1 \\ x+4y+z=\pm 2 \end{cases}$ biết $V=\iiint\limits_V dxdydz.$

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u=x+y+z \\ v=x+2y-z \\ \mathrm{w}=x+4y+z. \end{cases}$

Vì phép đổi biến biến biên của V thành biên của V_{uvw} nên V_{uvw} giới hạn bởi: $\begin{cases} u=\pm 3 \\ v=\pm 1 \\ \mathrm{w}=\pm 2. \end{cases}$

Ta có

$$J^{-1}=\frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6\Rightarrow J=\frac{1}{6}\Rightarrow V=\frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} dudvdw=\frac{1}{6}.6.2.4=8.$$

■

Bài tập 1.31. Tính

a) $\iiint\limits_V (3x^2+2y+z)dxdydz$, trong đó $V: |x-y|\leq 1, |y-z|\leq 1, |z+x|\leq 1.$

b) $\iiint\limits_V dxdydz$, trong đó $V: |x-y|+|x+3y|+|x+y+z|\leq 1.$

[Gợi ý]

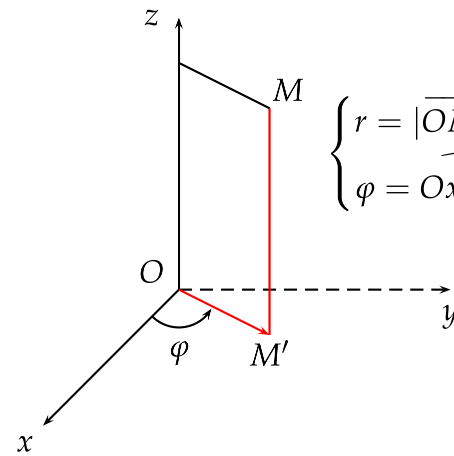
a) Đặt $\begin{cases} u=x-y, \\ v=y-z, \\ w=z+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq u\leq 1, \\ -1\leq v\leq 1, \\ -1\leq w\leq 1. \end{cases}$

b) Đặt $\begin{cases} u=x-y, \\ v=x+3y, \\ w=x+y+z \end{cases} \Rightarrow |u|+|v|+|w|\leq 1.$

Phép đổi biến số trong toạ độ trụ

Khi miền V có biên là các mặt như mặt paraboloit, mặt nón, mặt trụ, và có hình chiếu D lên Oxy là hình tròn, hoặc hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức (x^2+y^2) thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ toạ độ trụ.

Toạ độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ là bộ ba (r,φ,z), trong đó (r,φ) chính là toạ độ cực của điểm M' là hình chiếu của điểm M lên Oxy.



$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM'}| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}} \end{cases}$$

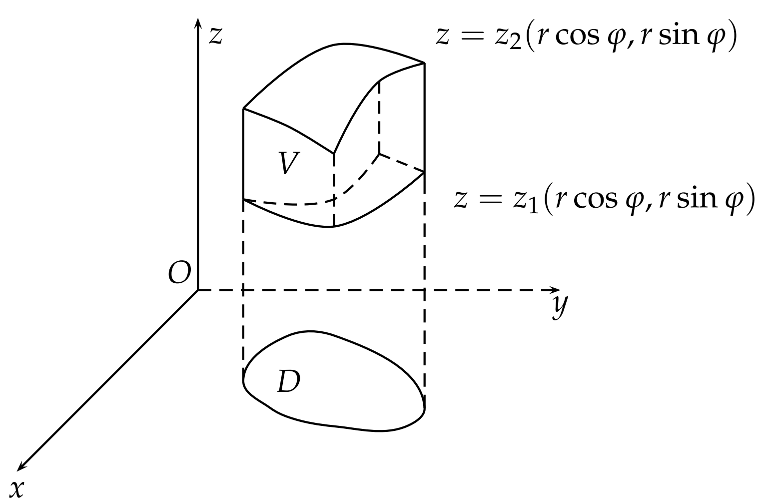
Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$, ta có:

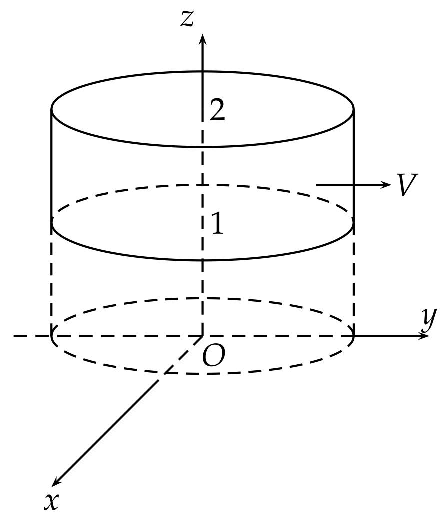
$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\text{cos}\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdrd\varphi dz.$$

Nếu miền $V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y) \end{cases}$, trong đó $D : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi) \end{cases}$ thì:

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz.$$



Bài tập 1.32. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$



Hình 1.32

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$

Ta có

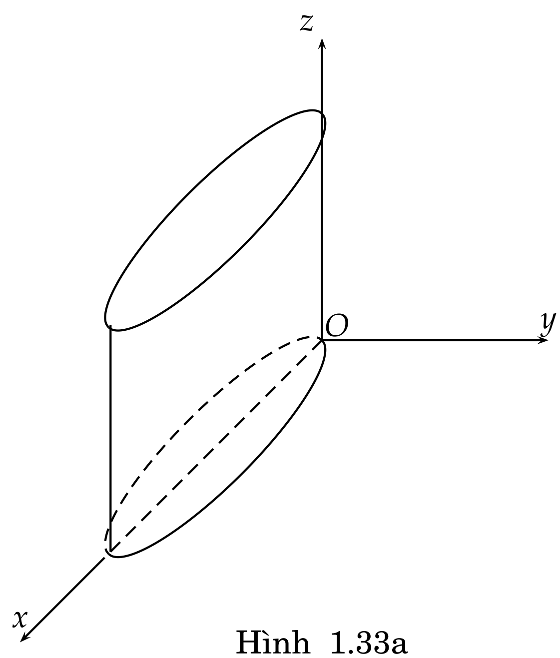
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_1^2 zdz = ... = \frac{3\pi}{4}.$$

■

Bài tập 1.33. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó:

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0, z=a\,(a>0)$.

b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0\,(a>0)$



Hình 1.33a

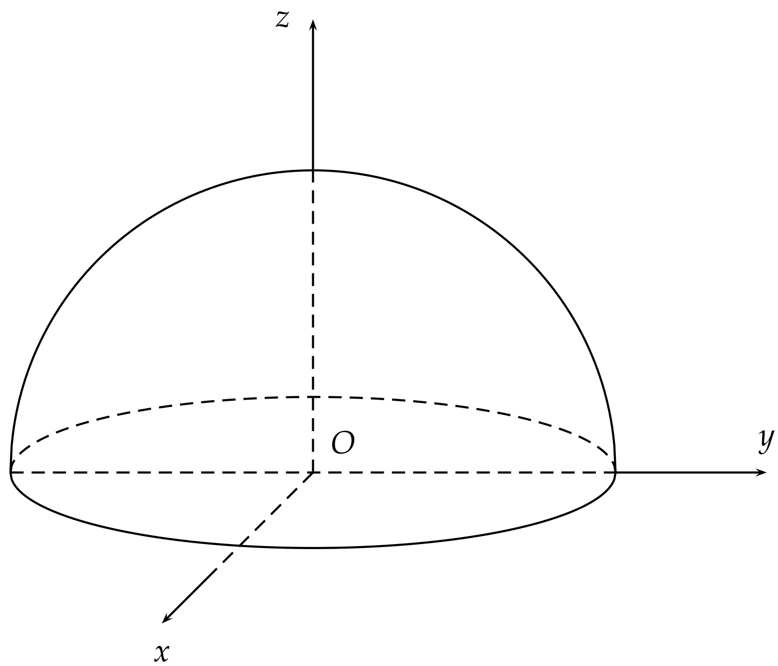
Lời giải. a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$

Từ $x^2 + y^2 = 2x$ suy ra $r = 2\cos\varphi$. Do đó: $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant a. \end{cases}$

Vậy

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_{0}^{a} z dz = ... = \frac{16a^2}{9}.$$

■



Hình 1.33b

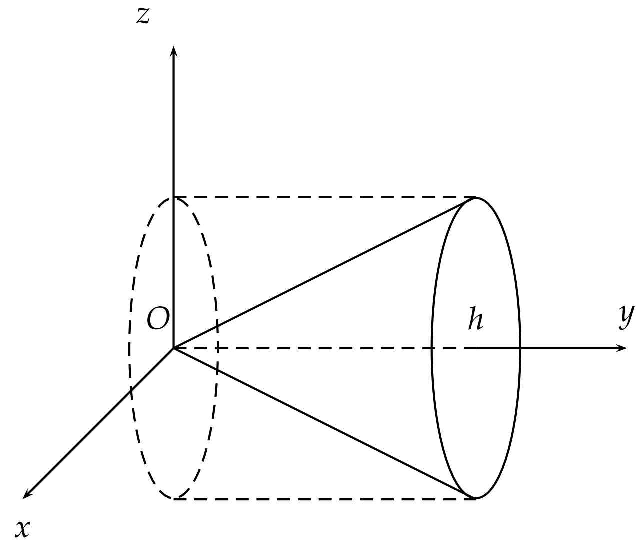
Lời giải. b) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2}. \end{cases}$

Ta có

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr \int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z dz = 2\pi \int\limits_0^a r^2 . \frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}.$$

■

Bài tập 1.34. Tính $I = \iiint\limits_V y dx dy dz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h. \end{cases}$



Hình 1.34

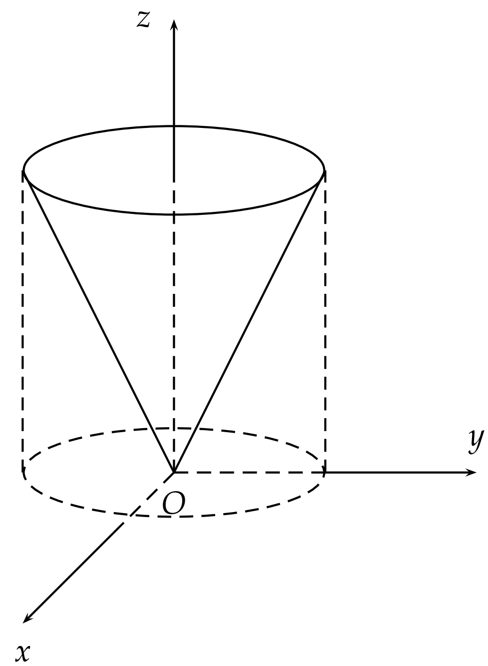
Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant h \\ r \leqslant y \leqslant h. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h rdr \int\limits_r^h ydy = 2\pi \int\limits_0^h r.\frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}.$$

■

Bài tập 1.35. Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1. \end{cases}$



Hình 1.35

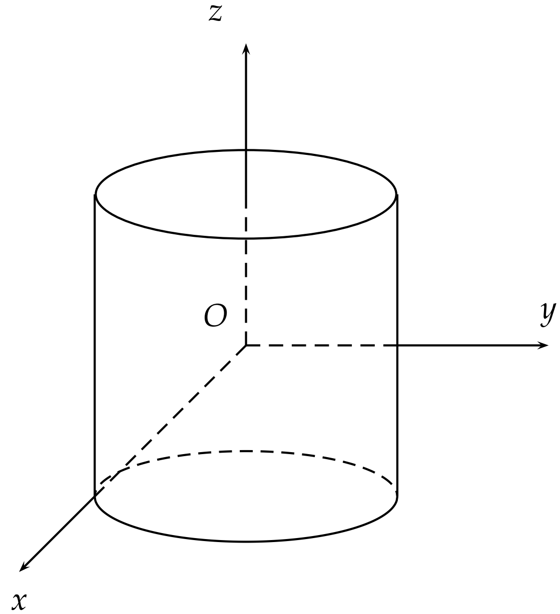
Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r)\, dr = \frac{\pi}{6}.$$

■

Bài tập 1.36. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$



Hình 1.36

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z' = z - 2 \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ -3 \leqslant z' \leqslant -1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{-3}^{-1} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \\
&= \pi \int\limits_0^1 r.\ln\left(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}\right) \Big|_{z'=-3}^{z'=-1} dr \\
&= 2\pi \left[\int\limits_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr - \int\limits_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) dr \right] \\
&= 2\pi \left(I_1 - I_2\right).
\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) = \lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) = 0$ nên thực chất I_1, I_2 là các tích phân xác định.

Đặt $\sqrt{r^2+1} = t \Rightarrow rdr = tdt$, ta có

$$\begin{aligned}
&\int r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr \\
&= \int t\ln(t-1)\,dt \\
&= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-1} dt \\
&= \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C.
\end{aligned}$$

Do đó

$$I_1 = \left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Tương tự, $I_2 = \frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C$ nên

$$I_2 = \left[\frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2}\right]\Big|_3^{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{10}-3\right) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{10}-3\right).$$

Kết luận

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right).$$

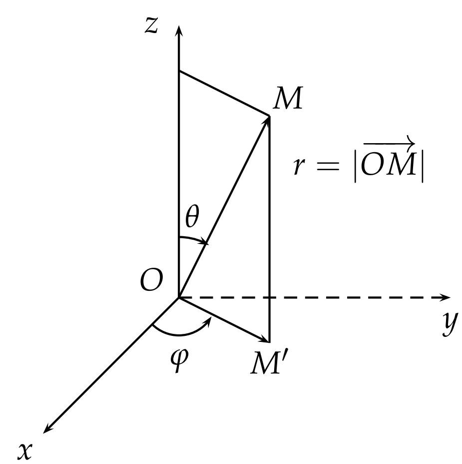
■

Phép đổi biến số trong toạ độ cầu

Trong trường hợp miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,... và khi hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu.

Toạ độ cầu của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,θ,φ), trong đó:

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \left(\widehat{Oz, \overrightarrow{OM}}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}}\right). \end{cases}$$



Công thức của phép đổi biến là: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

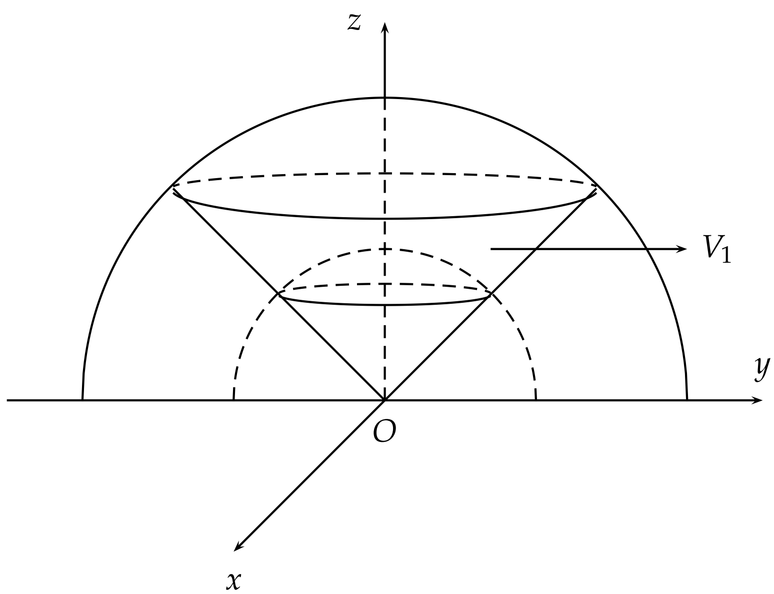
Định thức Jacobian $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2 \sin\theta$. Ta có công thức đổi biến

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Đặc biệt, nếu miền $V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, & (\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr.$$

Bài tập 1.37. Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ x^2+y^2 \leqslant z^2. \end{cases}$



Hình 1.37

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

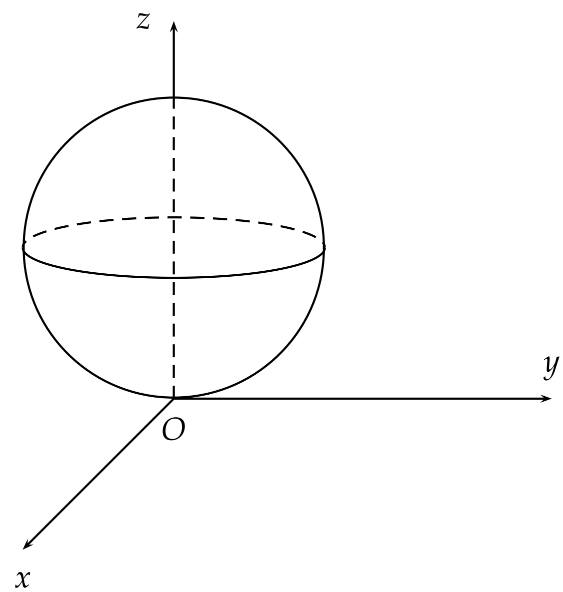
Do $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ nên $1 \leq r \leq 2$. Trên mặt nón có phương trình $x^2+y^2 = z^2$ nên $\theta = \frac{\pi}{4}$. Vậy cận lấy tích phân là $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant r \leqslant 2. \end{cases}$

Ta có

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 r^2.r^2 dr = 2.2\pi.\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{r^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

■

Bài tập 1.38. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó $V:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 1.38

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Do $x^2+y^2+z^2 \leqslant z$ nên $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r.r^2 dr = 2\pi.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\frac{1}{4}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

■

Phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng.

1. Tương tự như khi tính tích phân kép, nếu miền V có dạng *hình ellipsoid hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ* thì ta có thể nghĩ tới phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép biến đổi.

2. – Nếu $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$$

– Nếu $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

3. Xác định miền biến thiên của φ, θ, r.

4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

Bài tập 1.39. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0, (a, b > 0)$.

Lời giải. 1. **Toạ độ trụ suy rộng.**

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z' \leqslant \sqrt{1-r^2}. \end{cases}, J = a^2br$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} bz'.ar.a^2brdz'$$

$$= 2a^3b^2\pi \int_0^1 r^2.\frac{1-r^2}{2}dr$$

$$= \frac{2\pi a^3b^2}{15}.$$

2. **Toạ độ cầu suy rộng.**

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}, J = a^2br^2\sin\theta.$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 br\cos\theta.ar\sin\theta.a^2b\sin\theta dr$$

$$= 2a^3b^2\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\pi d\theta \int_0^1 r^4dr$$

$$= \frac{2\pi a^3b^2}{15}.$$

■

Bài tập 1.40. Tính $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, ở đó $V : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, (a,b,c>0)$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$, ta có

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Vậy

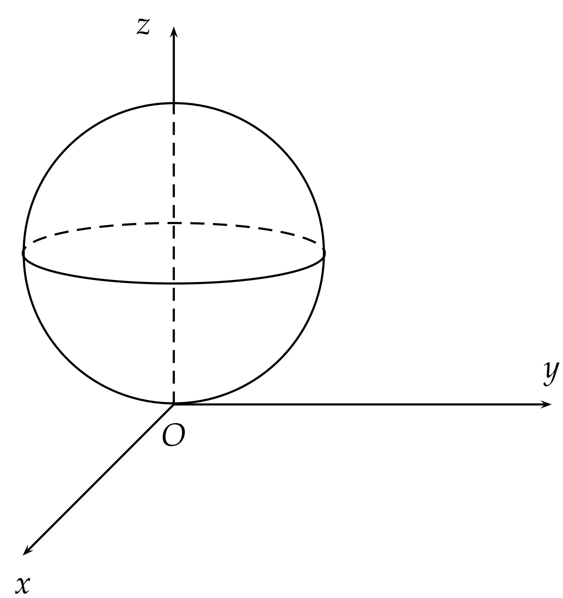
$$I = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^2.r^2\sin\theta = \frac{4\pi}{5}abc.$$

■

Tọa độ cầu vs Tọa độ cầu suy rộng

Phép đổi biến số không những có tác dụng làm đơn giản miền lấy tích phần, mà trong nhiều tình huống nó còn có tác dụng làm đơn giản hóa biểu thức tính tích phân. Trong bài tập sau đây, phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng sẽ làm cho biểu thức tính tích phân đơn giản hơn rất nhiều so với phép đổi biến trong tọa độ cầu thông thường.

Bài tập 1.41. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{z-x^2-y^2-z^2}dxdydz$ trong đó $V:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 1.41

Lời giải.

1. **Tọa độ cầu thông thường**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \cos\theta. \end{cases}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \sqrt{r\cos\theta - r^2}.r^2 \sin\theta dr$$

tích phân này không dễ tính

2. **Tọa độ cầu suy rộng**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{2} + r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - r^2}.r^2 \sin\theta dr = \frac{\pi^2}{64}.$$

■

Bài tập 1.42. [Cuối kì, K62] Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V (4z - x^2 - y^2 - z^2)dxdydz$, ở đó V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$.

Lời giải. 1. **Tọa độ cầu thông thường**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 4\cos\theta. \end{cases}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{4\cos\theta} (4r\cos\theta - r^2)r^2 \sin\theta dr$$

tích phân này tính hơi dài

2. **Tọa độ cầu suy rộng**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = 2 + r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2} (4 - r^2)r^2 \sin\theta dr = \frac{256\pi}{15}.$$

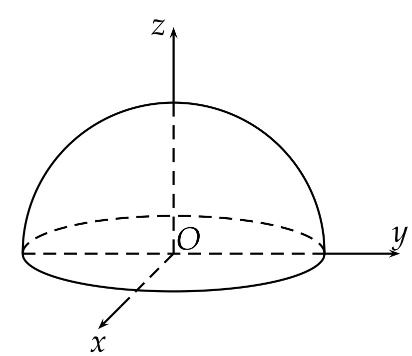
■

Tọa độ cầu vs Tọa độ trụ

Nói chung thì việc sử dụng tọa độ cầu hay tọa độ trụ phụ thuộc vào hai yếu tố chính: hình dáng của miền V và biểu thức tính tích phân.

- Nếu miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu và biểu thức tính tích phân có chứa $x^2 + y^2 + z^2$ thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cầu (khi đó $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$).
- Nếu miền V có dạng hình trụ hoặc có chứa mặt nón, mặt paraboloid và biểu thức tính tích phân có chứa $x^2 + y^2$ thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ trụ (khi đó $x^2 + y^2 = r^2$).

Trong nhiều trường hợp thì chúng ta có thể sử dụng được đồng thời cả tọa độ trụ lẫn tọa độ cầu. Chẳng hạn như, tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, trong đó V là nửa phía trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.



1. **Tọa độ cầu**.

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 r^2 \sin^2\theta . r^2 \sin\theta dr$$
$$= \frac{4\pi}{15}.$$

2. **Tọa độ trụ**.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} r^2 . rdz$$
$$= \frac{4\pi}{15}.$$

Tuy nhiên, cũng có những tình huống mặc dù miền lấy tích phân là hình cầu nhưng việc sử dụng tọa độ trụ lại thuận tiện hơn (vì biểu thức tính tích phân có chứa $x^2 + y^2$). Chẳng hạn như, tính $\iint\limits_V \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdydz$, trong đó V là nửa phía trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ (xem hình vẽ của ví dụ phía trên).

1. **Tọa độ cầu**.

   Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

   Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

   $$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2\sin^2\theta}.r^2\sin\theta dr$$

   (tích phân này không dễ tính).

2. **Tọa độ trụ**.

   Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

   Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$

   $$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1 - r^2}.rdz$$
   $$= \frac{\pi}{2}.$$

Tác giả tin rằng các bạn độc giả sau khi làm một vài ví dụ sẽ tự rút cho mình được kinh nghiệm và quyết định được là sẽ sử dụng phép đổi biến nào thích hợp.

2.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 1.43 (Cuối kì, K62). *Tính tích phân bội ba* $\iiint\limits_V xzdxdydz$*, ở đó* V *là miền thỏa mãn* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

[Gợi ý] Nhận xét rằng miền V có dạng $(x - y)^2 + y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$. Nếu thực hiện phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng $\begin{cases} x = 1 + r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = 1 + r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 (1 + r\sin\theta\cos\varphi)(1 + r\cos\theta)r^2\sin\theta dr.$$

Tích phân này tính được nhưng dài dòng. Nếu tinh tế hơn một chút, đặt $\begin{cases} u = x - 1, \\ v = y - 1, \\ w = z - 1 \end{cases}$ thì

$V' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ và

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V'} (u+1)(w+1) dudvdw \\ &= \iiint\limits_{V'} uwdudvdw + \iiint\limits_{V'} ududvdw + \iiint\limits_{V'} wdudvdw + \iiint\limits_{V'} dudvdw. \end{aligned}$$

Dựa vào tính đối xứng của miền lấy tích phân và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân ta có

$$\iiint\limits_{V'} uwdudvdw = 0, \quad \iiint\limits_{V'} ududvdw = 0, \quad \iiint\limits_{V'} wdudvdw = 0.$$

Do đó,

$$I = \iiint\limits_{V'} dudvdw = \frac{4}{3}\pi.$$

Bài tập 1.44. *Tính*

$$I = \iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

trong đó V *là tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng* $x = 0, y = 0, z = 0$ *và* $x + y + z = 1$.

[Đáp số] $I = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

Bài tập 1.45. *Tính*

$$\iiint\limits_{V} zdxdydz,$$

trong đó V *là nửa trên của ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1, (z \geq 0).$$

[Đáp số] $I = \frac{\pi abc^2}{4}$.

Bài tập 1.46. *Tính các tích phân sau*

a) $I_1 = \iiint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$, *trong đó* B *là ellipsoid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

b) $I_2 = \iiint_C zdxdydz$, *trong đó* C *làm miền giới hạn bởi mặt nón* $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ *và mặt phẳng* $z = h$.

c) $I_3 = \iiint_D z^2 dxdydz$, *trong đó* D *là phần chung của hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ *và hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

d) $I_4 = \iiint_V (x+y+z)^2 dxdydz$, *trong đó* V *là phần chung của paraboloid* $x^2+y^2 \le 2az$ *và hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le 3a^2$.

Bài tập 1.47. *Tính thể tích của vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng* $0xy$, *mặt bên là các mặt phẳng* $x=0, x=a, y=0, y=b$, *phía trên bởi paraboloid elliptic*

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2y}, \ (p>0, q>0).$$

Bài tập 1.48. *Tính tích phân*

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

trong đó V *là miền giới hạn bởi mặt* $x^2+y^2+z^2 = z$.

[Đáp số] $I = \frac{\pi}{10}$.

Bài tập 1.49. *Tính*

$$I = \iiint_V zdxdydz,$$

trong đó V *là miền giới hạn bởi các mặt* $z = x^2+y^2$ *và* $x^2+y^2+z^2 = 6$.

[Đáp số] $I = \frac{11\pi}{3}$.

Bài tập 1.50. *Tính tích phân*

$$I = \iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz,$$

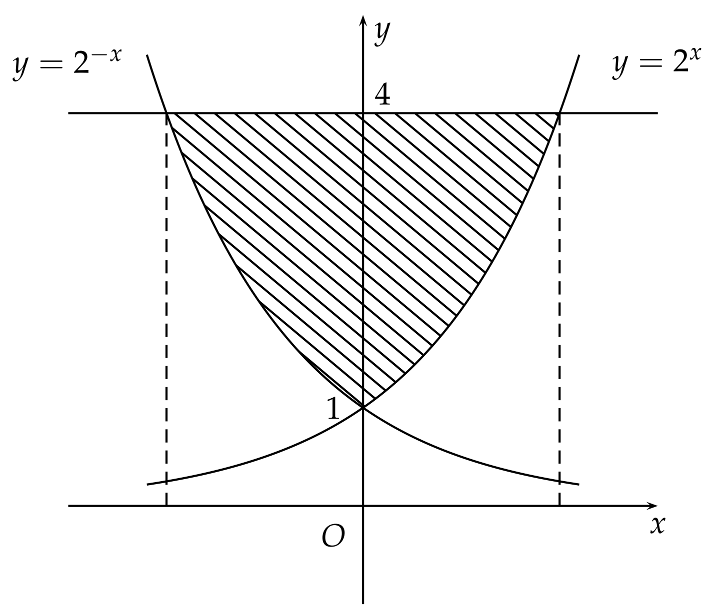
trong đó V *là vật thể giới hạn phía trên bởi mặt* $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2xy$ *và phía dưới bởi mặt* $z=0$.

§3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI

3.1 Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát: $\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$

Bài tập 1.51. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4. \end{cases}$



Hình 1.51

Lời giải. Nhận xét: $D = D_1 \cup D_2$, ở đó

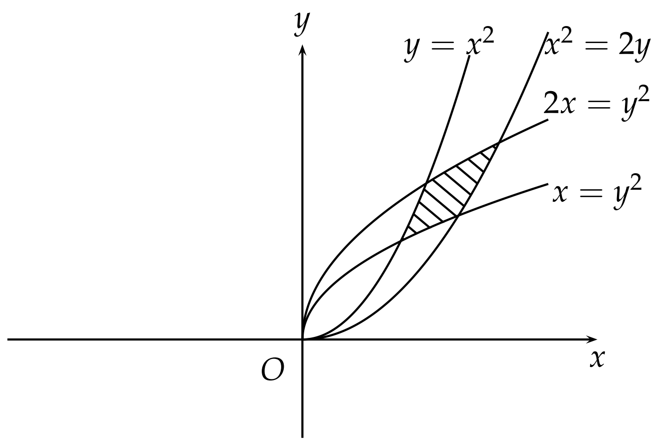
$$D_1 \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2^{-x} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}, D_2 \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2^x \leqslant y \leqslant 4. \end{cases}$$

Do đó

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = 2 \iint\limits_{D_1} dxdy = ... = 2\left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right).$$

■

Bài tập 1.52. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$



Hình 1.52

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases},$$

và

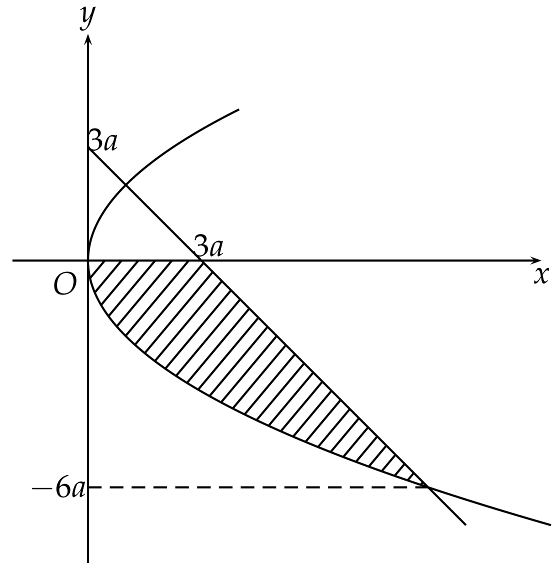
$$J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3.$$

Vậy

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}.$$

■

Bài tập 1.53. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leqslant 0 \ (a > 0). \end{cases}$



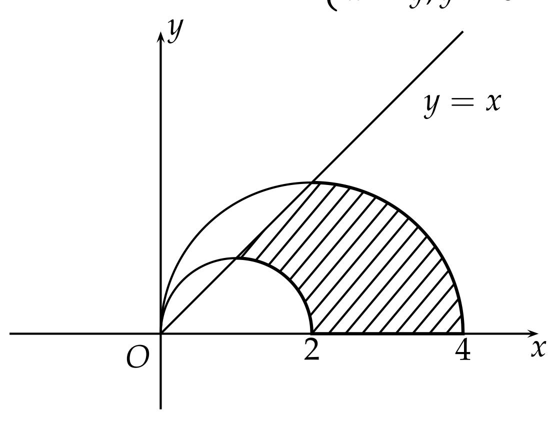
Hình 1.53

Lời giải. Nhìn hình vẽ ta thấy $D : \begin{cases} -6a \leqslant y \leqslant 0 \\ \dfrac{y^2}{4a} \leqslant x \leqslant 3a - y \end{cases}$ nên

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-6a}^{0} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int\limits_{-6a}^{0} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy = 18a^2.$$

■

Bài tập 1.54. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0. \end{cases}$



Hình 1.54

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 4\cos\varphi \end{cases}$ nên

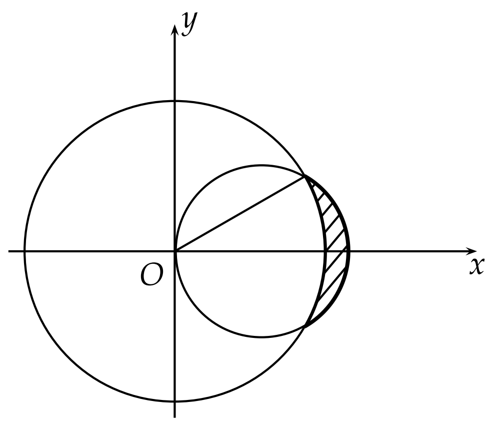
$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 12\cos^2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}.$$

■

Bài tập 1.55. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Chú ý:

- $r = a$ là phương trình đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính a.
- $r = 2a\cos\varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(a,0)$, bán kính a.
- $r = 2a\sin\varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(0,a)$, bán kính a.



Hình 1.55

Lời giải. Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

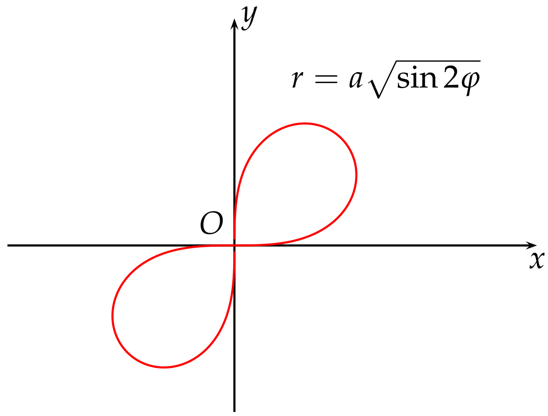
$$r = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Do đó

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} rdr = 2.\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{4}{3}\cos^2\varphi - 1\right) d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}.$$

■

Bài tập 1.56. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy \ \ (a > 0)$.



Hình 1.56

Lời giải. Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 1.56). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

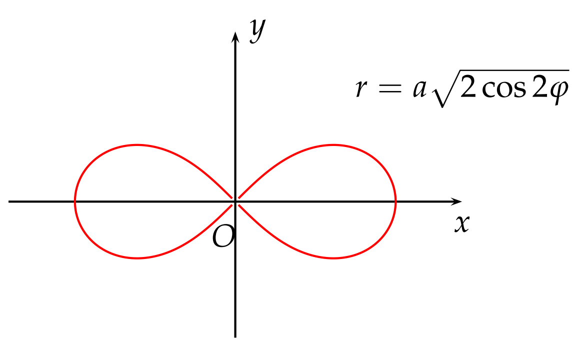
Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

■

Bài tập 1.57. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Lemniscate*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \ (a > 0).$$

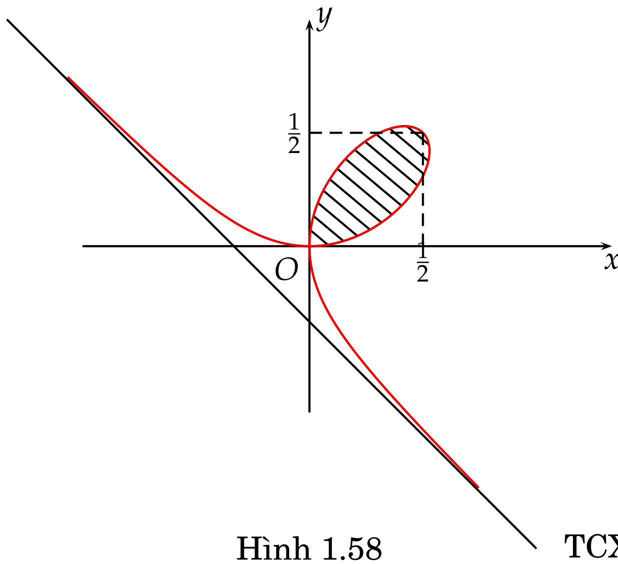


Hình 1.57

[Gợi ý] Phương trình của đường Lemniscate trong tọa độ cực là $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, và do tính đối xứng của miền nên

$$\frac{S}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2}.$$

Bài tập 1.58. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy \ \ (a > 0)$ (Lá Descartes).



Hình 1.58 TCX: $y = -x - \frac{1}{3}$

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

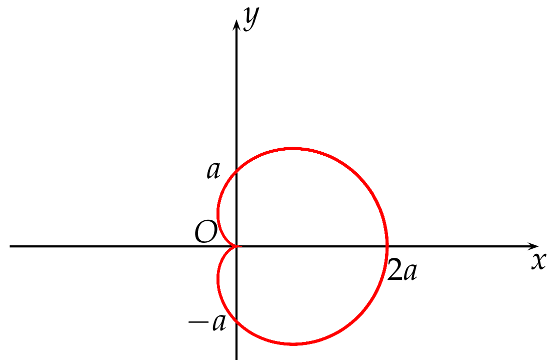
Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 1.58). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}. \end{cases}$$

Do đó

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)^2} d\varphi \overset{t=\tan\varphi}{=} \frac{a^2}{2}.\frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

Bài tập 1.59. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r = a\left(1 + \cos\varphi\right) \ \ (a > 0)$ (đường Cardioids hay đường hình tim)



Hình 1.59

Lời giải. Ta có

$$D = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a\,(1+\cos\varphi)\}$$

nên

$$S = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr = a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \ldots = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

■

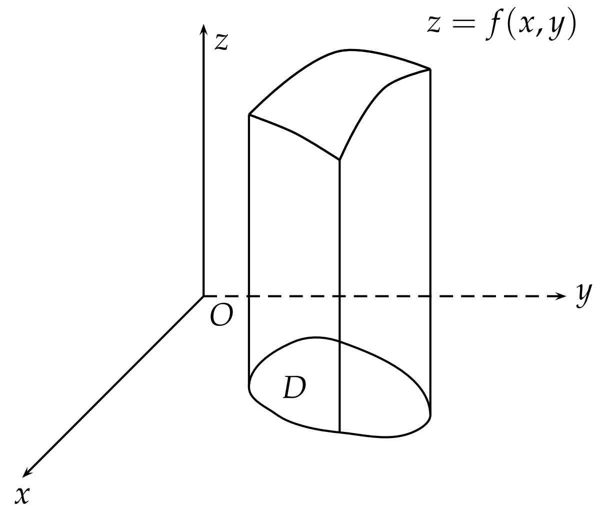
3.2 Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V dxdydz}$$

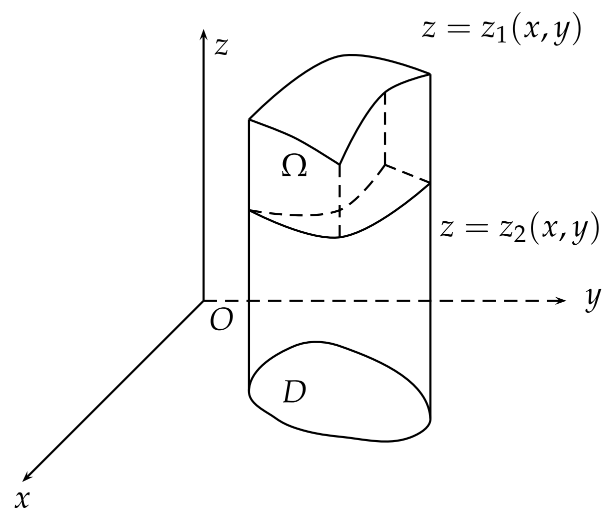
Các trường hợp đặc biệt

1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f\,(x,y)\,, f\,(x,y) \geqslant 0$ và liên tục trên D thì $V = \iint\limits_D f\,(x,y)\, dxdy$. (Xem hình vẽ dưới đây).

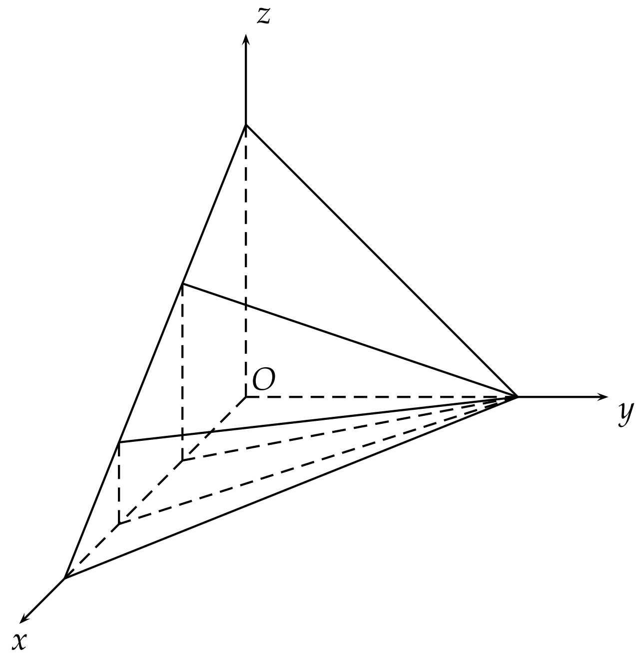


2. Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục Oz, hai mặt $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $z_1(x, y), z_2(x, y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$V = \iint\limits_D |z_1(x, y) - z_2(x, y)| dxdy$$



Bài tập 1.60. Tính thể tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geqslant 1 \\ 3x + 2y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y. \end{cases}$



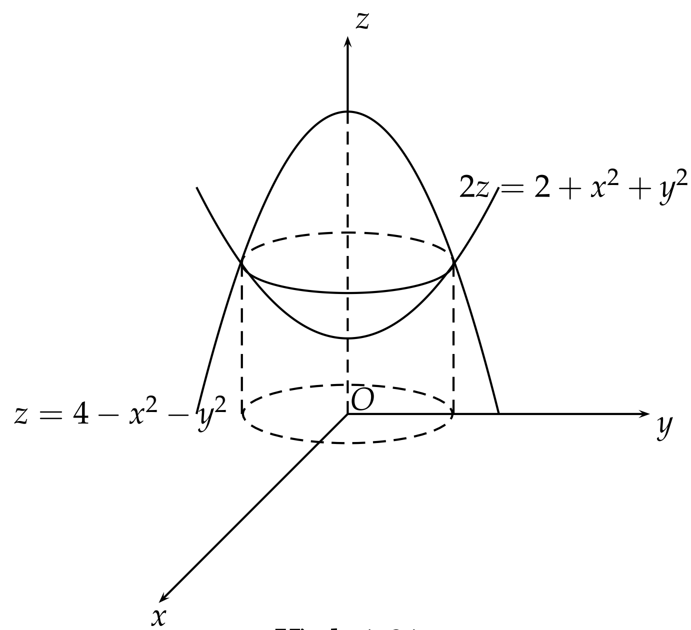
Hình 1.60

Lời giải.

$$V = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}} (1-x-y)\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{1} \left(1-2y+y^2\right) dy = \frac{1}{18}.$$

■

Bài tập 1.61. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2\text{z} = 2 + x^2 + y^2. \end{cases}$



Hình 1.61

Lời giải. Giao tuyến của hai mặt cong: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2, \end{cases}$ nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là $D: x^2+y^2 \leq 2$. Hơn nữa trên D thì $4-x^2-y^2 \geqslant \frac{2+x^2+y^2}{2}$ nên ta có:

$$V = \iint\limits_D \left(4-x^2-y^2-\frac{2+x^2+y^2}{2}\right)dxdy.$$

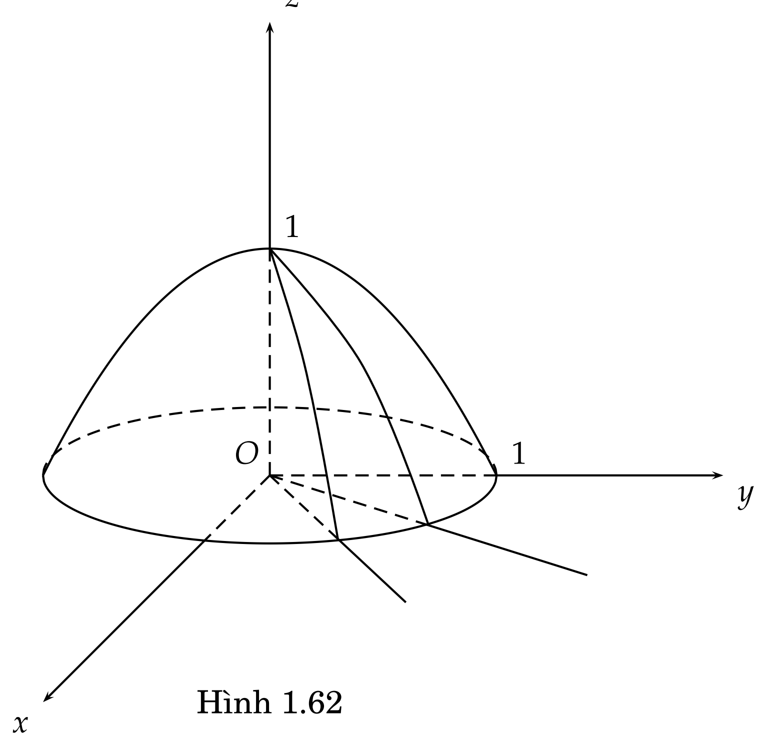
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$

Do đó

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3-\frac{3}{2}r^2\right) rdr = \ldots = 3\pi.$$

■

Bài tập 1.62. Tính thể tích của $V: \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2 \\ y \geqslant x, y \leqslant \sqrt{3}x. \end{cases}$



Hình 1.62

Lời giải. Do $x \leq y \leq \sqrt{3}x$ nên $x, y \geq 0$. Ta có

$$V = \iint\limits_D \left(1-x^2-y^2\right)dxdy.$$

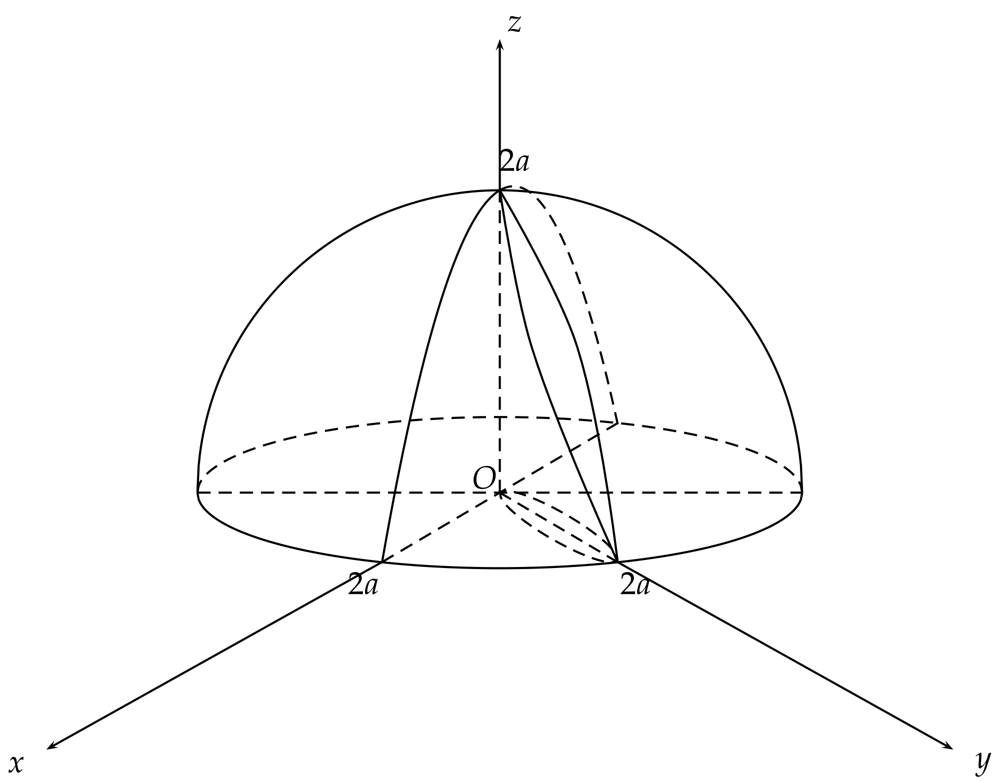
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Vậy

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{0}^{1} \left(1 - r^2\right) r dr = \ldots = \frac{\pi}{48}.$$

■

Bài tập 1.63. Tính thể tích $V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0. \end{cases}$



Hình 1.63

Lời giải. Do tính chất đối xứng của miền V nên

$$V = 4 \iint\limits_{D} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

trong đó D là nửa hình tròn $D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

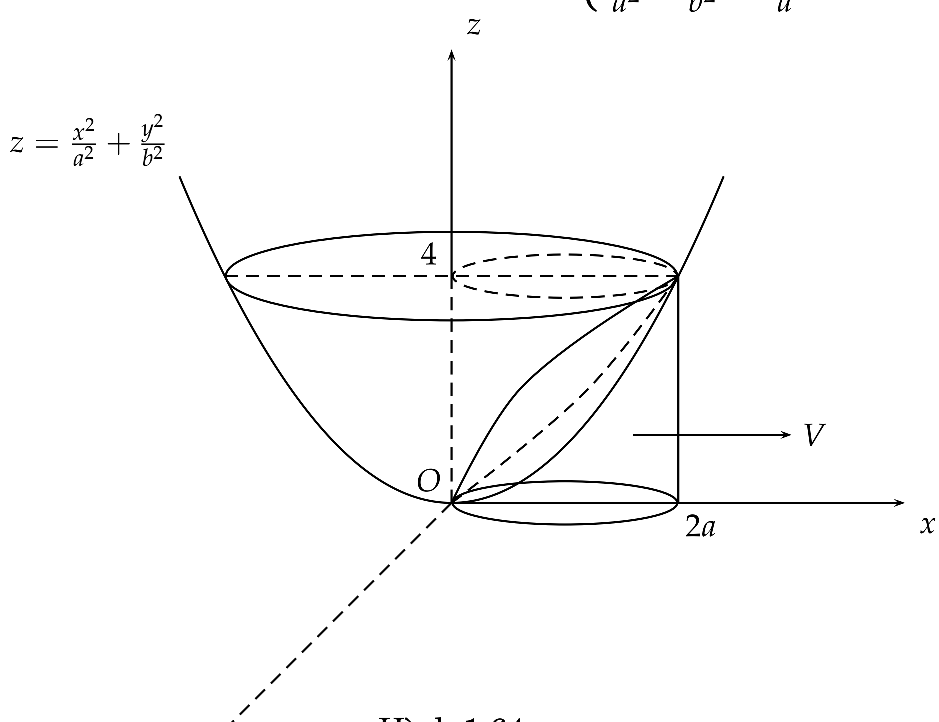
Đặt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2a \sin \varphi. \end{cases}$

Vậy

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{4a^2-r^2}\,rdr \\
&= 4.\frac{-1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3-8a^3\cos^3\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

■

Bài tập 1.64. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z=0 \\ z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2x}{a}. \end{cases}$



Hình 1.64

Lời giải. Ta có hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{2x}{a}$. Do tính chất đối xứng của miền V nên:

$$V = 2\iint\limits_{D^+}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

trong đó D^+ là nửa ellipse $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2x}{a}, y \geqslant 0$

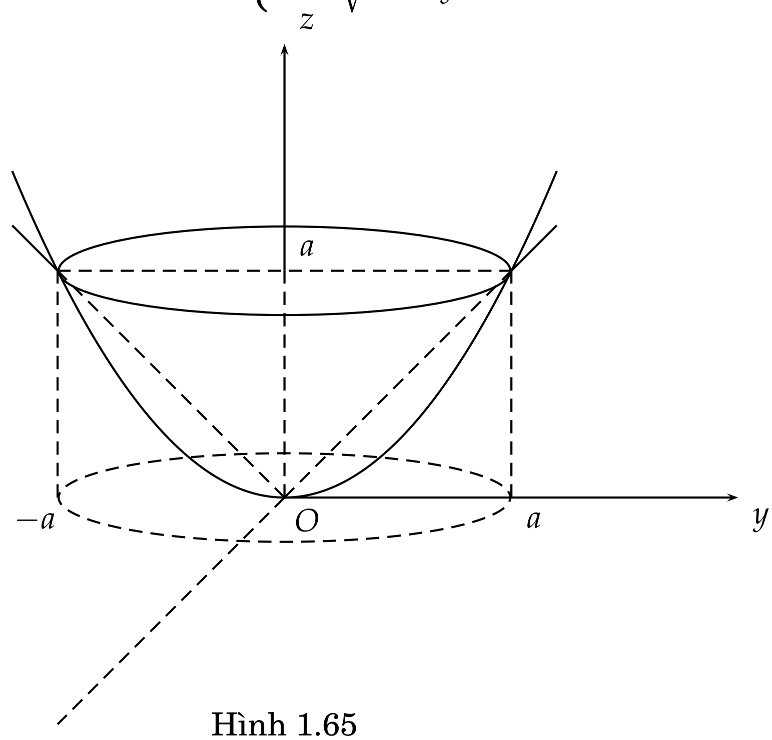
Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ thì $|J| = abr$, $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi. \end{cases}$

Vậy

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 r dr = ... = \frac{3\pi}{2}.$$

■

Bài tập 1.65. Tính thể tích của miền $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$



Hình 1.65

Lời giải. Giao tuyến của hai đường cong:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là

$$D : x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Nhận xét rằng, ở trong miền D thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloit nên:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a}\right) dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a. \end{cases}$

Vậy

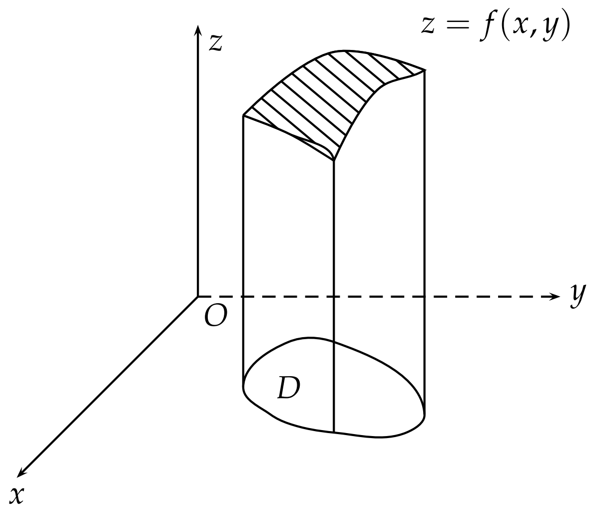
$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr = ... = \frac{\pi a^3}{6}.$$

■

3.3 Tính diện tích mặt cong

Mặt $z = f(x, y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. Giả thiết $f(x, y)$ là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy, p = f'_x, q = f'_y$$



Ví dụ 3.1 (Cuối kì, K62). *Tính diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$.*

Lời giải. i) Ta có miền $D : \begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1, \\ x = 0 \end{cases}$ nên

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dydz = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz.$$

ii) Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi, \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$ ■

3.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 1.66. *Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hình trụ elliptic* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *mặt phẳng* $z = 0$ *và paraboloid elliptic* $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$ $(c > 0)$.

Bài tập 1.67. *Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt hyperbolic* $xy = 1, xy = 9, xz = 4, xz = 36, yz = 25, yz = 49$.

[Gợi ý] Đặt $u = xy, v = xz, w = yz$. Đáp số $V = 64$.

CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ.

§1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ.

1.1 Giới thiệu

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số: $I\left(y\right) = \int\limits_a^b f\left(x, y\right) dx$, trong đó $f\left(x, y\right)$ khả tích theo x trên $[a, b]$ với mỗi $y \in [c, d]$. Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hàm số $I\left(y\right)$như tính liên tục, khả vi, khả tích.

1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

1) Tính liên tục.

Định lý 2.8. *Nếu $f\left(x, y\right)$là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I\left(y\right)$là hàm số liên tục trên $[c, d]$. Tức là:*

$$\lim_{y \to y_0} I\left(y\right) = I\left(y_0\right) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f\left(x, y\right) dx = \int\limits_a^b f\left(x, y_0\right) dx}$$

(có thể chuyển dấu lấy giới hạn vào bên trong biểu thức tính tích phân)

Ví dụ 1.1. *Khảo sát sự liên tục của tích phân $I\left(y\right) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$, với $f\left(x\right)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0, 1]$.*

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x,y) = \frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên mỗi hình chữ nhật $[0,1] \times [c,d]$ và $[0,1] \times [-d,-c]$ với $0 < c < d$ bất kì, nên theo Định lý 2.8, $I(y)$ liên tục trên mỗi $[c,d], [-d,-c]$, hay nói cách khác $I(y)$ liên tục với mọi $y \neq 0$.
Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số $I(y)$ tại điểm $y = 0$. Do $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $m = \min\limits_{[0,1]} f(x) > 0$. Khi đó $f(x) \geqslant m > 0\ \forall x \in [0,1]$ và với $\varepsilon > 0$ thì:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \geqslant \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = m.\text{arctan}\frac{x}{\varepsilon},$$

$$I(-\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = -m.\text{arctan}\frac{x}{\varepsilon}.$$

Suy ra $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)| \geqslant 2m.\operatorname{arctan}\frac{x}{\varepsilon} \to 2m.\frac{\pi}{2}$ khi $\varepsilon \to 0$, tức là $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)|$ không tiến tới 0 khi $\varepsilon \to 0$, $I(y)$ gián đoạn tại $y = 0$. ■

Ví dụ 1.2. *Xét tính liên tục của hàm số* $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

Lời giải. Tại $y = 0$, $I(0) = \int\limits_0^1 -\frac{1}{x^2}dx = -\infty$, nên hàm số $I(y)$ không xác định tại $y = 0$.
Tại $y \neq 0$, cũng có thể sử dụng Định lý 2.8 để khảo sát tính liên tục của $I(y)$. Khi đó phải xét hàm số $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2}$ trong khoảng $[0,1] \times [c,d]$ với $d > c > 0$ bất kì (để tránh điểm $y = 0$) giống như trong Ví dụ 1.1. Tuy nhiên, trong trường hợp này có thể tính được $I(y)$ một cách trực tiếp như sau:

$$I(y) = \int\limits_0^1 \frac{(x^2+y^2) - 2x.x}{(x^2+y^2)^2}dx = \int\limits_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Do đó $I(y)$ xác định và liên tục với mọi $y \neq 0$. ■

2) Tính khả vi.

Định lý 2.9. *Nếu*

i) $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b] \times [c,d]$,

ii) $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b] \times [c,d]$

thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c,d) và

$$\boxed{I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx},$$

nói cách khác, có thể đưa dấu đạo hàm vào trong dấu tích phân.

Ví dụ 1.3. *Tính các tích phân sau:*

a) $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$ *, n là số nguyên dương.*

Lời giải. $*$ Với mỗi $\alpha > 0$, hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x, n = 0,1,2,...$ liên tục theo x trên $[0,1]$

$*$ Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$ nên $\frac{\partial f_n(x,\alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$ liên tục trên $[0,1] \times (0,+\infty)$. ■

Nghĩa là hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 2.9 nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left(x^\alpha \ln^{n-1} x\right) dx = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha).$$

Tương tự, $I'_{n-2} = I_{n-1}, ..., I'_2 = I_1, I'_1 = I_0$, suy ra $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$. Mà

$$I_0(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha+1}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + y\sin^2 x\right) dx$, *với* $y > 1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ thoả mãn các điều kiện sau:

- $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ xác định trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$ và với mỗi $y > -1$ cho trước, $f(x,y)$ liên tục theo x trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Tồn tại $f'_y(x,y) = \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}$ xác định, liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$.

Theo Định lý 2.9, $I'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{\sin^2 x}+y}$.

Đặt $t = \tan x$ thì $dx = \frac{dt}{1+t^2}, 0 \leqslant t \leqslant +\infty$.

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1+t^2+yt^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+(y+1)t^2}\right] dt$$
$$= \frac{1}{y}\left[\arctan t\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{y+1}} \arctan\left(t\sqrt{y+1}\right)\Big|_0^{+\infty}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+y}}.$$

Suy ra

$$I(y) = \int I'(y)\, dy = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+y}} dy = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) + C.$$

Do $I(0) = 0$ nên $C = -\pi \ln 2$ và $I(y) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) - \pi \ln 2$. ■

3) Tính khả tích.

Định lý 2.10. *Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$, và:*

$$\boxed{\int_c^d I(y)\, dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx}$$

Ví dụ 1.4. *Tính* $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $(0 < a < b)$.

Lời giải. Hàm lấy tích phân $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ mặc dù không xác định tại $x = 0$ nhưng $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$ nên có thể xếp tích phân này vào loại tích phân xác định.
Ta có:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int_a^b F'_y(x,y)\, dy = \int_a^b x^y dy; \left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x}\right)$$

nên:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

1.3 Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx, \text{ với } y \in [c,d], a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \ \forall y \in [c,d].$$

1) Tính liên tục

Định lý 2.11. *Nếu*

i) hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$,

ii) các hàm số $a(y), b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và thoả mãn điều kiện $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \ \forall y \in [c,d]$

thì $J(y)$ là một hàm số liên tục (đối với y) trên $[c,d]$.

2) Tính khả vi

Định lý 2.12 (Định lý Leibniz). *Nếu*

i) hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$,

ii) hàm số $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$,

iii) các hàm số $a(y), b(y)$ khả vi trên $[c,d]$ và thoả mãn điều kiện $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b \ \forall y \in [c,d]$

thì $J(y)$ là một hàm số khả vi (đối với y) trên $[c,d]$, và:

$$J'(y) = f(b(y), y)\, b'_y(y) - f(a(y), y)\, a'_y(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ 1.5. *Tìm* $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_{y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được hàm số $I(y) = \int\limits_{y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ liên tục tại $y = 0$ dựa vào định lý 2.11, nên $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_{y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = I(0) = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. ■

1.4 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b F(x,y)\,dx \right) dy.$$

Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$.

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại $I(y)$ bằng cách $I(y) = \int I'(y)\,dy + C$.

B3. Cho một giá trị đặc biệt của y để xác định C.

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 2.10 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 2.9.

Bài tập 2.1. Tính $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $(0 < a < b)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int\limits_a^b F_y'(x,y)\,dy = \int\limits_a^b x^y dy$$
$$\left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x}\right).$$

nên:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b x^y dy\right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^1 x^y dx\right) dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(b) = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

Ta có

$$I'(b) = \int\limits_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

nên

$$I(b) = \int I'(b) db = \ln(b+1) + C.$$

Thay giá trị đặc biệt $b = a$ vào biểu thức tính tích phân $I(b)$ ta được

$$I(a) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln(a+1).$$

Do đó $I = \ln \frac{b+1}{a+1}$. ■

Bài tập 2.2. Tính tích phân sau:

a) $I(y) = \int\limits_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$.

b) $J(y) = \int\limits_0^1 \ln\left(x^2 + y^2\right) dx$.

[Gợi ý]

a) B1. Kiểm tra $I(y)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Nhận xét rằng $I'(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

B3. $I(y) = \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2} + C$.

B4. Thay một giá trị đặc biệt $y = y_0$ vào để tính C. Chẳng hạn, $I(1) = \int_0^1 \arctan x dx$, và tính được $C = 0$.

b) B1. Kiểm tra $J(y)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Tính $I'(y) = 2\arctan\frac{1}{y}$.

B3. $I(y) = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\arctan\frac{1}{y}$.

B4. Thay một giá trị đặc biệt $y = y_0$ vào để tính C. Chẳng hạn, $I(0) = \int_0^1 \ln x^2 dx$, và tính được $C = 0$.

Bài tập 2.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, & 0 < x, y \leq 1, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)dx \right) dy \neq \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)dy \right) dx = -\frac{\pi}{4},$$

nghĩa là hàm số $I(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$ khả tích trên đoạn $[0,1]$ nhưng không thể đổi thứ tự lấy tích phân được trong trường hợp này. Hãy giải thích vì sao.

Bài tập 2.4. Chứng minh hàm Bessel

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

thỏa mãn phương trình Bessel

$$x^2 I_n''(x) + xI_n(x) + (x^2 - n^2)I_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, y $\in [c,d]$. Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận bằng vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn). Mục đích chính cũng là nghiên cứu các tính chất liên tục, khả vi, khả tích của $I(y)$. Tuy nhiên, các điều kiện để $I(y)$ thỏa mãn các tính chất liên tục, khả vi, khả tích sẽ không còn đơn giản như đối với tích phân xác định phụ thuộc tham số nữa.

2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Giả thiết

- $f(x,y)$ là hàm số xác định trên $[a,\infty) \times [c,d]$,
- với mỗi $y \in [c,d]$ cố định, $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$, $\forall b > a$.

Định nghĩa 2.5. *Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là*

- *hội tụ tại* $y_0 \in [c,d]$ *nếu* $\int_a^\infty f(x,y_0)dx$ *hội tụ, nghĩa là với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại* $b(\epsilon,y_0) > a$ *(phụ thuộc vào* ϵ *và* y_0*) sao cho*

$$\left| I(y_0) - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx \right| = \left| \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b(\epsilon,y_0).$$

- *hội tụ trên* $[c,d]$ *nếu* $I(y)$ *hội tụ tại mọi* $y \in [c,d]$*,*
- *hội tụ đều trên* $[c,d]$ *nếu với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại* $b_\epsilon > a$ *(chỉ phụ thuộc vào* ϵ *mà không phụ thuộc vào* y*) sao cho*

$$\left| I(y) - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_b^\infty f(x,y)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b_\epsilon \text{ và với mọi } y \in [c,d].$$

Ví dụ 2.6. $I(y) = \int\limits_1^\infty \sin(yx)dx$ *hội tụ khi* $y = 0$ *và phân kỳ khi* $y \neq 0$.

Ví dụ 2.7. *a) Tính* $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx \quad (y > 0)$.

b) Chứng minh rằng $I(y)$ *hội tụ đều tới* 1 *trên* $[y_0, +\infty)$ *với mọi* $y_0 > 0$.

c) Giải thích tại sao $I(y)$ *không hội tụ đều trên* $(0, +\infty)$.

[Gợi ý]

a) $I(y) = -e^{-yx}\Big|_0^{\infty} = 1$ với mọi $y > 0$.

b) Theo định nghĩa, muốn chỉ ra $I(y)$ hội tụ đều tới 1 trên $[y_0, +\infty)$ ta phải chỉ ra với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại số b_ϵ chỉ phụ thuộc vào ϵ, không phụ thuộc vào y sao cho

$$\left| I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx \right| < \epsilon, \quad \forall b > b_\epsilon.$$

Thật vậy,

$$\left| I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx \right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by} \leq e^{-by_0} < \epsilon \text{ nếu } b > \frac{1}{y_0} \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

Do đó, có thể chọn $b_\epsilon = \frac{1}{y_0} \ln \frac{1}{\epsilon}$.

c) Ta có

$$\left| I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx \right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by}.$$

Muốn $\left| I(y) - \int_0^b ye^{-yx}dx \right| < \epsilon$ thì $e^{-by} < \epsilon \Leftrightarrow b > \frac{1}{y} \ln \frac{1}{\epsilon}$. Tuy nhiên, $\frac{1}{y} \ln \frac{1}{\epsilon} \to +\infty$ khi $y \to 0^+$. Do đó, không thể chọn được hằng số b_ϵ chỉ phụ thuộc vào ϵ thỏa mãn yêu cầu của hội tụ đều.

Ví dụ 2.8. *Chứng minh rằng* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx = \frac{a}{y^2+a^2}$ *với* $a > 0$ *và với mọi* y.

[Gợi ý]

$$\int e^{-ax} \cos yx dx = -\frac{a}{a^2 + y^2} e^{-ax} \cos yx + \frac{y}{a^2 + y^2} e^{-ax} \sin yx,$$

nên $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx = \frac{a}{a^2+y^2}$.

1) Tiêu chuẩn hội tụ đều Weierstrass

Định lý 2.13. *Nếu*

i) $|f(x,y)| \leqslant g(x), \forall (x,y) \in [a,+\infty] \times [c,d]$,

ii) tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ,*

thì tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$.

Ví dụ 2.9. *Chứng minh rằng*

a) $I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1}$ *là hội tụ đều trên* $\mathbf{R}$.

b) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx \quad (y>0)$ *hội tụ đều trên* $[y_0,+\infty)$ *với mọi* $y_0 > 0$.

c) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\cos\alpha x$ *hội tụ đều trên khoảng* $[a,b]$ *với mọi* $0 < a < b$ *và* $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Tính liên tục

Định lý 2.14. *Nếu*

i) hàm số $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$,

ii) tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$

thì $I(y)$ *là một hàm số liên tục trên* $[c,d]$*, nghĩa là*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = I(y_0).$$

Ví dụ 2.10. *Tính* $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1}$.

Ví dụ 2.11. *Chứng minh rằng* $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$ *không liên tục phải tại* $y = 0$, *nghĩa là*

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx\right) \neq \int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to 0^+} ye^{-yx}\right)dx.$$

Hãy giải thích tại sao không chuyển được dấu giới hạn vào trong biểu thức tính tích phân trong trường hợp này.

3) Tính khả vi

Định lý 2.15. *Nếu*

i) các hàm số $f(x,y)$ *và* $f_y'(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty]\times[c,d]$,

ii) tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ với mỗi* $y\in[c,d]$,

iii) tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y\in[c,d]$

thì $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c,d]$ *và* $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx.$

Ví dụ 2.12. *Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số* $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ *là một hàm số liên tục khả vi đối với biến* y. *Tính* $I'(y)$ *rồi suy ra biểu thức của* $I(y)$.

Lời giải. Ta có:

1) $f(x,y) = \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]$.

2) $\left|\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+x^2}$, mà $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2} = \pi$ hội tụ, nên $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$.

Theo Định lý 2.14, $I(y)$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]$.

Hơn nữa $\left|f_y'(x,y)\right| = \frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, ∀y; do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$. Theo Định lý 2.15, $I(y)$ khả vi trên $[-\infty,+\infty]$, và: $I'(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}dx.$

Đặt $\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$, dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta thu được:$A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, B = \frac{2}{y(y^2+4)}, C = \frac{1}{y^2+4}, D = \frac{3}{y^2+4}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
I'(y) &= \frac{1}{y^2+4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2}\right] \\
&= \frac{1}{y^2+4}\left[-\ln\left(1+x^2\right) + y\arctan x + \ln\left(1+(x+y)^2\right) + y\arctan(x+y)\right]\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{4\pi}{y^2+4}
\end{aligned}$$

Suy ra $I(y) = \int I'(y)\,dy = 2\arctan\frac{y}{2} + C$, mặt khác $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx = 0$ nên $C = 0$ và $I(y) = 2\arctan\frac{y}{2}$. ■

Ví dụ 2.13. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

Lời giải. Đặt $I_n(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}, f_n(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$. Khi đó:

$$\left[I_{n-1}(y)\right]'_y = \left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^n}\right]'_y = -n\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n.I_n(y) \Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}\left(I_{n-1}\right)'.$$

Tương tự, $I_{n-1} = -\frac{1}{n-1}\left(I_{n-2}\right)', I_{n-2} = -\frac{1}{n-2}\left(I_{n-3}\right)', ..., I_1 = -\left(I_0\right)'$.

Do đó, $I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[I_0(y)\right]^{(n)}$. Mà $I_0(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+y}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\arctan\frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$ nên $I_n(y) = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{\sqrt{y^{2n+1}}}$.

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

1) Các hàm số $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}, f'_y(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}, ..., f^{(n)}_{y^n}(x,y) = \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}$ liên tục trong $[0,+\infty)\times[\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước.

2) $\frac{1}{x^2+y} \leqslant \frac{1}{x^2+\varepsilon}, \left|\frac{-1}{(x^2+y)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}, ..., \left|\frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}$

   Mà các tích phân $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\varepsilon}dx, ..., \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}dx$ đều hội tụ, do đó $\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)\,dx, \int\limits_0^{+\infty}f'_y(x,y)\,dx, ..., \int\limits_0^{+\infty}f^{(n)}_{y^n}(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên $[\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$. ■

4) Tính khả tích

Định lý 2.16. *Nếu*

i) hàm số $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$,

ii) tích phân suy rộng $I(y)$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$,

thì $I(y)$ *là hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *và ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:*

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Ví dụ 2.14. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, \ (\alpha,\beta > 0)$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx}}{x}\right)}{=} F(x,\alpha) - F(x,\beta) = \int_\beta^\alpha F_y'(x,y) = \int_\alpha^\beta e^{-yx}dy$$

nên:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta e^{-yx}dy \right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{+\infty} e^{-yx}dx \right) dy = \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ∎

Ví dụ 2.15 (Tích phân Gauss).

$$G = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Đặt $x = ut$ ta có

$$G = u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
G^2 &= G \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\
&= \int_0^{+\infty} \left(u e^{-u^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt \right) du \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} du \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$G = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

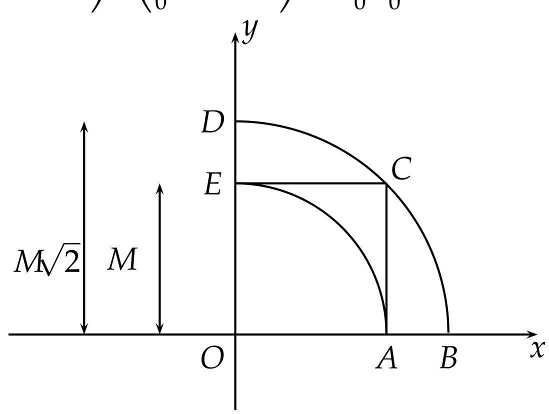
Ví dụ 2.16. *Chứng minh công thức tích phân Gauss*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

bằng tích phân kép.

Lời giải. Đặt $I_M = \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-y^2} dy$ ta có

$$I_M^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^M e^{-y^2} dy \right) = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$



Hình 2.16

Vì $e^{-(x^2+y^2)}dxdy \geq 0$ nên

$$\iint\limits_{OAE} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq I_M^2 = \iint\limits_{OACE} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint\limits_{OBD} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Sử dụng tọa độ cực ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{M} e^{-r^2} r dr \leq I_M^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr$$

hay là

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-M^2}) \leq I_M^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2M^2})$$

Cho $M \to +\infty$ ta được

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

Ví dụ 2.17 (Tích phân Dirichlet).

$$D = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nhận xét

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt,$$

ta có

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{\infty} \sin x \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

Chú ý: Bạn đọc có thể so sánh với một kết quả trong Giải tích III, đó là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Ví dụ 2.18. *Áp dụng công thức tích phân Dirichlet, chứng minh rằng*

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. b) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

[Gợi ý]

a) Áp dụng công thức hạ bậc $\sin^3 x = \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần,

$$\int\limits_{\epsilon}^{M} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\cos x)\Big|_{\epsilon}^{M} + \int\limits_{\epsilon}^{M} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} - \frac{1-\cos M}{M} + \int\limits_{\epsilon}^{M} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ và $M \to +\infty$ ta được

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} = 0, \quad \lim_{M\to+\infty} \frac{1-\cos M}{M} = 0$$

Do đó,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Hơn nữa,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

Ví dụ 2.19 (Tích phân Fresnel).

$$I = \int\limits_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad J = \int\limits_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Đổi biến $x^2 = t$ ta có

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Từ công thức tích phân Gauss $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \sin t \int\limits_0^\infty e^{-tu^2}du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty e^{-tu^2}\sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Kết luận

$$I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

2.2 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} F(x,y)\,dx \right) dy.$$

Dạng 2. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục $I(y)$ bằng cách $I(y) = \int I'(y)\,dy + C$.

B3. Cho một giá trị đặc biệt của y để xác định C.

Chú ý: Phải kiểm tra các điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 2.16 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 2.15.

Bài tập 2.5. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx,\ \ (\alpha,\beta>0)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \quad \left(F(x,y) := \frac{e^{-yx}}{x}\right)$$
$$= F(x,\alpha) - F(x,\beta)$$
$$= \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx}dy.$$

nên

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-yx}dy\right)dx$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx\right)dy$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx.$

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}dx$$
$$= -\frac{1}{\alpha}.$$

Do đó

$$I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha$$
$$= -\ln\alpha + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \ln\beta$.

Kết luận

$$I = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ ta có:

1) $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha,\beta>0$.

2) $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}$ hội tụ đều đối với α trên mỗi khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|-e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-\varepsilon x}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}dx = \frac{1}{\varepsilon}$ hội tụ.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ∎

Bài tập 2.6. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx, \ \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP.**

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} \quad \left(F(x,y) := \frac{e^{-yx^2}}{x^2}\right)$$
$$= F(x,\alpha) - F(x,\beta)$$
$$= \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx^2}dy.$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-x^2y}dy\right)dx$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx\right)dy$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}dy = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP.

Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx.$

Ta có

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2}dx$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$
$$\Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha$$
$$= -\sqrt{\pi}.\sqrt{\alpha} + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \sqrt{\pi}.\sqrt{\beta}$.
Kết luận

$$I(\alpha) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right).$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$ ta có:

1) $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha, \beta > 0$.

2) $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x^2}$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2}dx \overset{x\sqrt{\alpha}=y}{=} -\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ hội tụ đều theo α trên $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leqslant e^{-\varepsilon x^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}dx$ hội tụ.

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Bài tập 2.7. Tính $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}$, $(a>0)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$\begin{aligned}
&e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}\\
=&F(x,b)-F(x,c)\quad\left(F(x,y)=\frac{e^{-ax}\sin yx}{x}\right)\\
=&\int\limits_c^b F'_y(x,y)dy=\int\limits_c^b e^{-ax}\cos yx dx.
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
I&=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_c^b e^{-ax}\cos yx dy\right)dx\\
&=\int\limits_c^b\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx dx\right)dy\\
&=\int\limits_c^b\frac{a}{a^2+y^2}dy\\
&=\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(b)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}dx$. Ta có

$$I'_b(x,b)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx=\frac{a}{a^2+b^2},$$

nên

$$I=\int\frac{a}{a^2+b^2}db=\arctan\frac{b}{a}+C.$$

Mặt khác $I(c)=0$ nên $C=-\arctan\frac{c}{a}$.
Kết luận

$$I=\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{c}{a}.$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,b)=e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}$ ta có

1. $f(x,b)=e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $a,b,c>0$.

2. $f'_b(x,b)=e^{-ax}\cos bx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

3.
$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} f'_b(x,b)\,dx=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx&=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}e^{-ax}\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}e^{-ax}\sin bx\right)\Big|_0^{+\infty}\\
&=\frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

hội tụ đều theo b trên mỗi $(0,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,
$|e^{-ax}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ hội tụ.

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức

$$\int e^{-ax}\cos yxdx = -\frac{a}{a^2+y^2}e^{-ax}\cos yx + \frac{y}{a^2+y^2}e^{-ax}\sin yx,$$

nên $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yxdx = \frac{a}{a^2+y^2}$,

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Bài tập 2.8. Một cách tương tự như Bài tập 2.7, tính

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\cos bx-\cos cx}{x},\ \ (a>0)\,.$$

[Đáp số] $I = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$.

Hệ quả 2.1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos bx-\cos cx}{x} = \ln\frac{c}{b}.$$

Bài tập 2.9. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx.$

Lời giải. Đặt $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx, f(x,y) = e^{-x^2}\cos(yx)$. Ta có:

1) $f(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.

2) $f'_y(x,y) = -xe^{-x^2}\sin yx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.

2)

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin yxdx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2}\cos yxdx$$
$$= \frac{-y}{2}I(y)$$

hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,

$$\left|f'_y(x,y)\right| \leqslant xe^{-x^2},\ \text{mà}\ \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\ \text{hội tụ.}$$

Do đó theo Định lý 2.15, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2} \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$.

Mà $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nên $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$. ■

2.3 Một số tích phân quan trọng

Tích phân Dirichlet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Tích phân Gauss

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Tích phân Fresnel

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 2.10. [Giữa kì, K62] Tính các tích phân

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x} dx$ với $a, b > 0$.

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3}-e^{-bx^3}}{x} dx$ với $a, b > 0$.

Bài tập 2.11. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2} dx, (a > 0)$

b) $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 + y\cos x) dx,$

c) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sin ax dx,$

d) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx, y \geq 0,$

e) $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \ (a > 0),$

f) $\int\limits_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos bx dx, n \in \mathbb{N}.$

g) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx,$

h) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx.$

[Gợi ý]

a) Đặt $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân. Chú ý rằng $I(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos bx}{x^2} dx = b \int_0^\infty \frac{1-\cos bx}{(bx)^2} dbx = \frac{b\pi}{2}$.

b) Đặt $I(y) = \int\limits_0^\pi \ln(1 + y\cos x) dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

c) Đặt $I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \sin ax dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

d) Sử dụng công thức tích phân Dirichlet.

e) Đặt $I(b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

f) Đặt $I_n(b) = \int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \cos bx dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân để ra công thức truy hồi.

g) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và tích phân Dirichlet.

h) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và Hệ quả 2.1.

Bài tập 2.12. Chứng minh rằng

a) $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-y}), \quad y \geq 0.$

b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos yx}{x^2} = \frac{\pi}{2}|y|.$

c) $\int_0^\infty \frac{x \sin yx}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ay}, \quad a, y \geq 0.$

d) $\int_0^\infty e^{-yx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$

Bài tập 2.13. Sử dụng công thức

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a},$$

tính

$$I_n = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Bài tập 2.14. Chứng minh rằng

a) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x}$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

b) $I(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$.

Bài tập 2.15. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}, \quad (a, b > 0).$$

Bài tập 2.16. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{b}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \quad (a, b > 0).$$

Bài tập 2.17. a) Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{1 + x^2} = \pi \ln(1 + \alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

b) Sử dụng câu a), chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \theta) d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Bài tập 2.18. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

Bài tập 2.19. Sử dụng tích phân Fresnel chứng minh rằng

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Bài tập 2.20. Chứng minh rằng

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{y}{x}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Áp dụng, tính $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2 + x^{-2})} dx$.

Bài tập 2.21. Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2}$ không liên tục tại $y = 0$, nghĩa là

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2} \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to 0} y^2 x e^{-yx^2}.$$

Hãy giải thích tại sao?

Bài tập 2.22. Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx}$ không liên tục tại $y = 0$, nghĩa là

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx} \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to 0} y^2 x e^{-yx}.$$

Hãy giải thích tại sao?

§3. TÍCH PHÂN EULER

3.1 Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ xác định trên $(0,+\infty)$.

Thật vậy,

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2.$$

- Với tích phân I_2 ta so sánh với $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Ta có

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+p}}{e^x} = 0,$$

  mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên I_2 hội tụ. Thậm chí, tích phân I_2 hội tụ với mọi $p \in \mathbf{R}$.

- Với tích phân I_1 thì nếu $p \geq 1$ ta có I_1 thực chất là tích phân xác định. Còn nếu $0 < p < 1$ thì ta so sánh I_1 với $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$. Ta có

  $$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^{1-p}}\right) = 1,$$

  mà $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ hội tụ nên I_1 cũng hội tụ. Nếu $p < 0$ thì $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ phân kì nên I_1 sẽ phân kì.

Các tính chất

1. Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Công thức này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng tích phân từng phần. Thật vậy,

   $$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x} = p\Gamma(p).$$

   Ý nghĩa: Để nghiên cứu $\Gamma(p)$ ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leqslant 1$ mà thôi, còn với $p > 1$ chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

2. Đặc biệt,

   - $\Gamma(1) = 1$ (tính trực tiếp) nên $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Từ công thức tích phân Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ suy ra $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$. Do đó, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$.

3. Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \left(\ln^k x\right).e^{-x} dx$.

4. $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ $\forall 0 < p < 1$.

3.2 Hàm Beta

Dạng 1: $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$. Bằng cách đổi biến số $x = \frac{t}{t+1}$ ta sẽ thu được:

Dạng 2: $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$.

Ví dụ 3.20. *Biểu thị* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ *qua hàm* $\mathrm{B}(m,n)$.

Lời giải. Đặt $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} . \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

■

Từ ví dụ này ta suy ra:

Dạng lượng giác: $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt$.

Các tính chất:

1. Tính đối xứng: $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

2. Hạ bậc:
$$\begin{cases} \mathrm{B}(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} \mathrm{B}(p-1,q), & \text{nếu } p > 1 \\ \mathrm{B}(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} \mathrm{B}(p,q-1), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$

Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm bêta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng $(0,1] \times (0,1]$ mà thôi.

3. Đặc biệt, $\mathrm{B}(1,1) = 1$ nên
$$\begin{cases} \mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ \mathrm{B}(p,n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)...(p+1)p} B(p,1) \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma: $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

   Chứng minh.

   Ta có
$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} s^{q-1}e^{-s}ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{p-1}s^{q-1}e^{-(t+s)}dtds.$$

   Áp dụng công thức đổi biến $t = xy$ và $s = x(1-y)$ ta được
$$\begin{cases} 0 \le t < +\infty, \\ 0 \le s < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}, J = \frac{D(t,s)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x.$$

   Do đó,
$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}y^{p-1}x^{q-1}(1-y)^{q-1}xdxdy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p+q-1}dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy \\ &= \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q). \end{aligned}$$

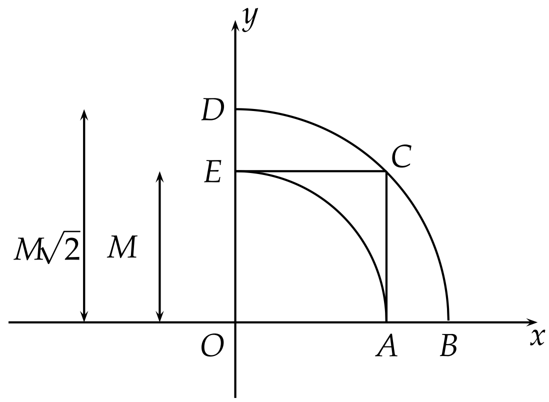
5. $\mathrm{B}(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Ví dụ 3.21. *Chứng minh công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma* $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *bằng tích phân kép.*

Lời giải. Xuất phát từ công thức $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ thực hiện phép đổi biến $x = t^2$ ta được
$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2p-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2p-1}dx.$$

Do đó,
$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Đặt $I_M = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy$. Ta có $\lim\limits_{M\to+\infty]} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4}$.



Hình 2.16

Ta có

$$\iint\limits_{OAE} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy \le I_M \le \iint\limits_{OBD} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy.$$

Thực hiện phép đổi biến số trong tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ ta có

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi \int_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \\ &\le I_M \le \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ta có

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}$$

và

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}.$$

Ngoài ra,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi = \frac{1}{2} B(p,q).$$

Cho $M \to +\infty$ trong bất đẳng thức (2.2) ta được

$$\frac{1}{2}B(p,q)\frac{1}{2}\Gamma(p+q) \leq \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4} \leq \frac{1}{2}B(p,q)\frac{1}{2}\Gamma(p+q).$$

Do đó,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

3.3 Bài tập

Bài tập 2.23.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}.\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

b) $\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx \ (a>0).$

Lời giải. Đặt $x = a\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^1 a^{2n}t^n.a(1-t)^{\frac{1}{2}}.\frac{adt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{2n+2}}{2}.\int\limits_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{a^{2n+2}}{2}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^{2n+2}}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{a^{2n+2}}{2}.\frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(n+1)!} = \pi\frac{a^{2n+2}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

■

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^{10}e^{-x^2}dx.$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} t^5e^{-t}.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{9}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^5} = \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx.$

Lời giải. Đặt $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}.\frac{dt}{2\sqrt{t}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\,(p,q) \text{ với } \begin{cases} p-1 = -\frac{1}{4} \\ p+q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{5}{4} \end{cases} \blacksquare$$

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$

Lời giải. Đặt $x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}dt}{1+t} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)^2}dx,\ (2 < n \in \mathbb{N}).$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{n}}.\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}+1, 1-\frac{2}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}.\frac{\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}+1\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)-1}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}. \blacksquare$$

g) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx,\ n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^{1} \frac{\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^{1} t^{\frac{1}{n}-1}.(1-t)^{-\frac{1}{n}}\,dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Bài tập 2.24. *Chứng minh công thức Jacobi*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

[Gợi ý] Viết

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-y}y^{p-1}dy, \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}y^{q-1}dx.$$

Nên

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{q-1}y^{p-1}dxdy.$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = u(v-1), y = uv$ để suy ra

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

Bài tập 2.25. [Cuối kì, K62] Tính các tích phân

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^3)^2}dx,$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^7}{(1+x^6)^2}dx.$

3.4 Đọc thêm: Tích phân Euler và Phép tính vi tích phân cấp phân số

Chúng ta biết rằng đạo hàm cấp n của một hàm số

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

đòi hỏi cấp của đạo hàm phải là một số tự nhiên, i.e., $n = 0, 1, 2, \ldots$ Bạn đã bao giờ nghe nói đến đạo hàm cấp $\frac{1}{2}$ của hàm số $f(x)$? Vào năm 1695, trong một cuộc thảo luận giữa Leibniz và L'Hospital, L'Hospital đã hỏi Leibniz, "... and what if n be $\frac{1}{2}$". Leibniz đã trả lời rằng "It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn." Đây là sự khởi đầu cho phép tính vi tích phân cấp phân số ra đời. Ý tưởng là mở rộng khái niệm đạo hàm và tích phân cấp $n \in \mathbf{N}$ cho cấp $s \in \mathbf{R}$ tùy ý. Việc này khởi đầu bằng các công trình của Euler khi vào năm 1729 ông đưa ra hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$$

Một năm sau (1730), ông đã công bố một số ý tưởng ban đầu cho việc định nghĩa đạo hàm cấp phân số như sau.

- Trước hết, xét đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = x^m$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n!)} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, & \text{nếu } m \geq n, \\ 0, & \text{nếu } m < n. \end{cases}$$

  Sử dụng hàm Gamma để mở rộng cho $s, \mu \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.

$$f(x) = x^\mu \Rightarrow D^s f = \frac{d^s f}{dx^s} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} x^{\mu-s}.$$

- Bạn đọc có thể kiểm tra tính chất sau của đạo hàm cấp phân số

$$D^s D^t f = D^{s+t} f \Rightarrow D^s D^t f = D^t D^s f.$$

- Công việc tiếp theo là dùng tính chất tuyến tính của đạo hàm cấp phân số để định nghĩa đạo hàm cấp phân số cho các hàm đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$. Rồi sau đó mở rộng cho một hàm giải tích bất kì dựa vào khai triển Maclaurin của nó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Tiếp theo các công trình của Euler là các đóng góp của Riemann và Liouville. Ta biết rằng hàm tích phân

$$J^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)dt.$$

thỏa mãn tính chất $\frac{d}{dx}\left(J^1 f(x)\right) = f(x)$. Công thức này có thể mở rộng cho đếp cấp n (thường được gọi là công thức Cauchy) như sau

$$J^n f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Nghĩa là, tích phân cấp $n \in \mathbf{N}$ của hàm số $f(x)$ được định nghĩa như sau:

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Mở rộng kết quả này cho cấp $\alpha > 0$ ta được

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > 0.$$

Sau khi đã định nghĩa được tích phân cấp $\alpha > 0$ của hàm số $f(x)$, ta định nghĩa đạo hàm cấp α của nó với $n-1 < \alpha \leq n$ như là đạo hàm cấp n của tích phân cấp $n-\alpha$:

$$D^{\alpha} f(x) := D^n J^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Nếu $0 < \alpha \leq 1$, thì

$$D^{\alpha} f(x) := D^1 J^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right).$$

Nói riêng, đạo hàm cấp $\frac{1}{2}$ được định nghĩa như sau

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right).$$

Chú ý 2.7.

- *Đạo hàm cấp phân số của tại điểm x phụ thuộc vào tất cả các giá trị của hàm f trong khoảng từ a đến x. Điều này là khác so với khái niệm đạo hàm theo nghĩa cổ điển, khi mà giá trị của đạo hàm chỉ phụ thuộc một cách địa phương tại điểm mà hàm số đó lấy đạo hàm.*

- *Riemann và Liouville phát triển lý thuyết này một cách độc lập. Liouville công bố các công trình của mình vào khoảng 1832 và sử dụng $a = -\infty$, trong khi đó Riemann công bố các công trình của mình vào khoảng 1848 khi ông thậm chí vẫn còn là sinh viên và sử dụng $a = 0$. Nếu không chú thích gì thêm thì $a = 0$ thường được chọn để làm định nghĩa cho đạo hàm và tích cấp phân số Riemann-Liouville.*

- *Chọn $a = 0$ và quay trở lại trường hợp $f(x) = x^{\mu}$ của Euler:*

$$D^s f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} D^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} x^{\mu-s}.$$

Như vậy, đạo hàm Riemann-Liouville cấp phân số đã mở rộng các kết quả của Euler.

- *Chọn $a = -\infty$ thì ta có*

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(x-t) dt \quad (\text{ đổi biến } t \mapsto x-t).$$

Khi đó, nếu $f(x) = e^{ax}$ thì

$$\begin{aligned}
J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{a(x-t)} dt \\
&= e^{ax} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-at} dt \\
&= a^{-\alpha} e^{ax} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
&= a^{-\alpha} e^{\alpha x}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Một cách tương tự,

$$D^\alpha f(x) = a^\alpha e^{\alpha x}.$$

- *Thuật ngữ đạo hàm (tích phân) cấp phân số (fractional derivatives, fractional integrals, fractional calculus) có lẽ xuất phát từ yếu tố lịch sử của nó, khi mà Euler phát triển khái niệm này cho $\alpha = \frac{1}{2}$. Tuy rằng sau này, đạo hàm cấp α có thể được định nghĩa cho $\alpha > 0$ bất kì, thuật ngữ đạo hàm cấp phân số tiếp tục được sử dụng cho đến ngày nay.*

Ví dụ 3.22.

$$f(x) = 1 = x^0 \Rightarrow \frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0 - \frac{1}{2} + 1)} x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Chú ý rằng trong ví dụ trên, đạo hàm cấp phân số của một hàm số hằng không nhất thiết bằng 0*!!!*

Một cách định nghĩa khác của đạo hàm cấp phân số, được đưa ra bởi Caputo, như sau:

$$D_*^\alpha f(x) := J^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-n}} du,$$

tức là nó bằng tích phân cấp $n - \alpha$ của đạo hàm cấp n.

Ví dụ 3.23 (Bài toán tautochrone). *Tìm đường đi C sao cho dù đặt viên bi ở đâu trên C thì nó cũng mất một khoảng thời gian như nhau để lăn về đáy (giả thiết ma sát bằng không).*

Lời giải của Abel.

- Từ định luật bảo toàn năng lượng,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y_0 - y) \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\frac{ds}{dy}dy,$$

ở đó s là độ dài cung và y là chiều cao.

- Thời gian để vật lăn về đáy là

$$T = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} f(y)dy, \quad \left(\text{ở đó } f(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{ds}{dy}\right).$$

Chú ý rằng chúng ta mong muốn T là một hằng số, và đây chính là $\Gamma(\frac{1}{2})$ lần tích phân cấp $\frac{1}{2}$ của hàm số f.

- Tác động tích phân cấp $\frac{1}{2}$, $J^{\frac{1}{2}}$, vào hai vế của phương trình trên ta được

$$J^{\frac{1}{2}}T = \sqrt{\pi}J^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}f(y_0) = \sqrt{\pi}J^1 f(y_0).$$

- Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$f(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy_0}\int_0^{y_0}(y_0-y)^{-\frac{1}{2}}Tdy = D^{\frac{1}{2}}T.$$

- Công việc tiếp theo là đi tính đạo hàm cấp $\frac{1}{2}$ của hàm hằng số T:

$$D^{\frac{1}{2}}T = T\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy_0}\int_0^{y_0}(y_0-y)^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{2T}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy_0}\sqrt{y_0} = \frac{T}{\sqrt{\pi y_0}}.$$

Vậy

$$f(y_0) = \frac{T}{\sqrt{\pi y_0}}.$$

- Nhớ lại rằng $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{ds}{dy}$, ta có

$$\frac{ds}{dy} = T\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Đây chính là phương trình của đường cong cycloid (ở đây ta đã đổi y_0 thành y).
Thật vậy, bạn đọc có thể kiểm ra dễ dàng rằng đường cong cycloid có phương trình tham số $\begin{cases} x = a(1-\cos t), \\ y = a(t - \sin t) \end{cases}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dy} &= \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}{y'(t)dt} \\
&= \frac{a\sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos t}} \\
&= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} \quad \left(\text{như vậy } T\frac{\sqrt{2g}}{\pi} = \sqrt{2a}\right).
\end{aligned}$$

Điều này, về sau được nhà Vật lý người Hà Lan Huyghens ứng dụng để phát minh ra đồng hồ quả lắc. Ông là người đầu tiền tìm ra công thức toán học

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ở đó T là chu kì dao động của quả lắc, l là độ dài của quả lắc và g là gia tốc trọng trường.

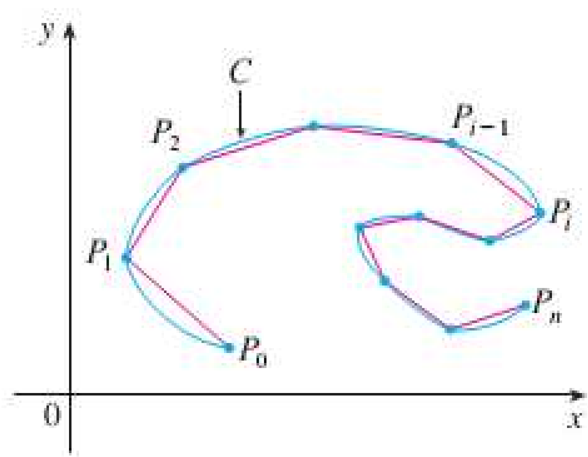
CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1 Định nghĩa và tính chất

Bài toán dẫn đến tích phân đường loại một

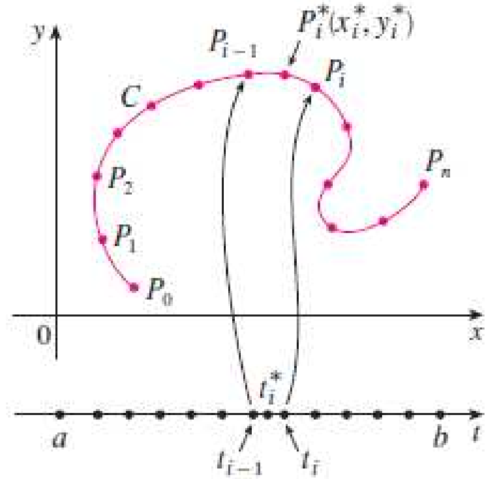


Cho $C: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ là một đường cong và dọc theo C có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ tại (x, y) là $f(x, y)$. Tính khối lượng của C.

Địnhg nghĩa

Tích phân đường của hàm số $f(x, y)$ được định nghĩa giống như tích phân xác định của hàm số một biến số $f(x)$, ngoại trừ việc thay vì lấy tích phân trên đoạn $[a, b]$ ta lấy tích phân dọc theo đường cong C. Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên đường cong C có phương trình $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \le t \le b$.

- Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Khi đó, $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia C thành n cung nhỏ.
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ và lập tổng tích phân $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$.



Định nghĩa 3.6. *Tích phân đường loại một của hàm số $f(x, y)$ dọc theo đường cong C là*

$$\int\limits_C f(x, y)ds = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i, \tag{3.1}$$

nếu giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$.

Trong Chương 1, độ dài của cung C được tính theo công thức

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Một cách hoàn toàn tương tự, nếu hàm $f(x, y)$ là liên tục, thì giới hạn (3.1) luôn luôn tồn tại, và

$$\int\limits_C f(x, y)ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \tag{3.2}$$

hay là dưới dạng véctơ

$$\int\limits_C f(x, y)ds = \int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt. \tag{3.3}$$

Tích phân đường dọc theo đường cong C ứng với x hoặc y

Hai loại tích phân đường khác, thu được bằng cách thay thế Δs_i bởi Δx_i hoặc Δy_i (một dạng đặc biệt của tích phân đường loại II) được định nghĩa một cách tương tự như sau:

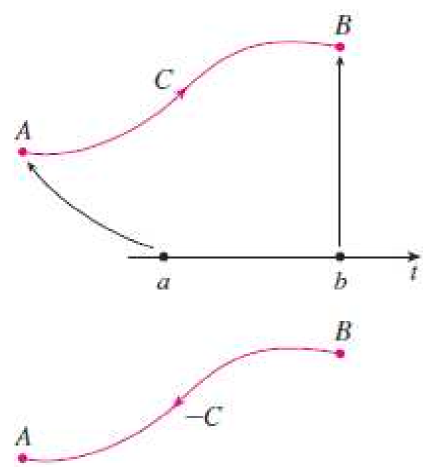
$$\int_C f(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt, \tag{3.4}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt. \tag{3.5}$$

Chú ý 3.8. *Nói chung, phương trình véctơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \le t \le b$ của đường cong C xác định hướng dương của đường cong, tương ứng với chiều khi t tăng. Nếu ta kí hiệu $-C$ vẫn là đường cong $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ nhưng theo hướng ngược lại, thì*

$$\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_{-C} f(x,y)dx, \qquad \int_{-C} f(x,y)dy = -\int_{-C} f(x,y)dy.$$

Nghĩa là các tích phân đường $\int_C f(x,y)dx$ và $\int_C f(x,y)dy$ đổi dấu nếu ta đổi hướng của C.



Tuy nhiên, nếu tích phân đường này được lấy theo ds thay vì dx hay dy thì giá trị của tích phân không đổi khi ta đổi hướng của đường cong,

$$\int_{-C} f(x,y)ds = \int_C f(x,y)ds.$$

Lý do là Δs_i luôn luôn là một đại lượng dương, trong khi đó, Δx_i và Δy_i đổi dấu khi ta đổi hướng của đường cong.

Các tính chất cơ bản

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung C.
- Nếu cung C có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của nó là $\int\limits_C \rho(x,y)\,ds$, nếu tích phân đó tồn tại.

Ví dụ 1.1 (Cuối kì, K62). *Tính khối lượng của đường cong* $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \\ \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ *biết mật độ của nó tại điểm* (x,y) *là* $\rho(x,y) = |xy|$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2}\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin t\cos t|\sqrt{1+\cos^2 t}dt \\ &= -\sqrt{2}\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1+\cos^2 t}d(1+\cos^2 t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

■

- Chiều dài của cung C được tính theo công thức $l = \int\limits_C ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định như tính tuyến tính và tính cộng tính.

1.2 Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu C cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$, thì

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt, \tag{3.6}$$

hay là dưới dạng véctơ

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt. \tag{3.7}$$

2. Nếu cung C cho bởi phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{3.8}$$

3. Nếu cung C cho bởi phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$ thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy. \tag{3.9}$$

4. Nếu cung C cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta được $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$ và

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi. \tag{3.10}$$

1.3 Tích phân đường trong không gian

Cho C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình véctơ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, a \leq t \leq b$$

và $f(x,y,z)$ là một hàm số liên tục trên một miền nào đó của $\mathbf{R}^3$ chứa C. Tích phân đường của hàm số $f(x,y,z)$ dọc theo đường cong C được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã làm trong mặt phẳng

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt, \tag{3.11}$$

hay là dưới dạng véctơ

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt. \tag{3.12}$$

Tích phân đường dọc theo C theo x, y, hoặc z cũng được định nghĩa tương tự

$$\int\limits_C f(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt, \tag{3.13}$$

$$\int\limits_C f(x,y,z)dy = \lim_{n\to\infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta y_i = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt, \tag{3.14}$$

$$\int\limits_C f(x,y,z)dz = \lim_{n\to\infty} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt. \tag{3.15}$$

1.4 Bài tập

Bài tập 3.1. *Tính* $\int\limits_C (x-y)\,ds, C$ *là đường tròn có phương trình* $x^2+y^2=2x$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos t - \sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}dt = 2\pi$$

■

Bài tập 3.2. *Tính* $\int\limits_C y^2 ds, C$ *là đường cong* $\begin{cases} x = a\,(t-\sin t) \\ y = a\,(1-\cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

$$\begin{cases} x'\,(t) = a\,(1-\cos t) \\ y'\,(t) = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2\,(t) + y'^2\,(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} a^2\,(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}.$$

Bài tập 3.3. *Tính* $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds, C$ *là đường* $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t\sin t) \\ y = a\,(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

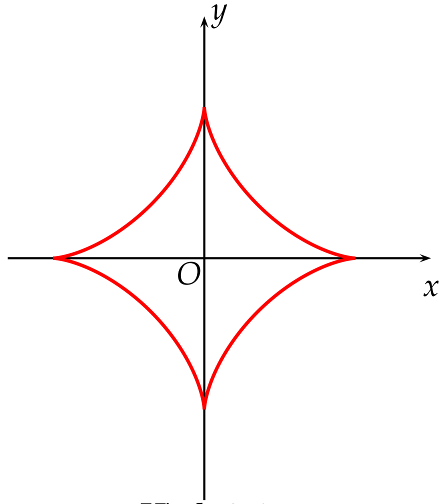
$$\begin{cases} x'(t) = at\cos t \\ y'(t) = at\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}.atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1\right)$$

Bài tập 3.4. *Tính tích phân đường*

$$I = \int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,$$

trong đó L *là đường Astroid* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$.



Hình 3.4

[Gợi ý] Tham số hóa đường cong $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \ (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$ và dựa vào tính đối xứng của đường cong và hàm dưới dấu tích phân để tính I. Đáp số: $I = 4a^{\frac{7}{3}}$.

Bài tập 3.5. *Tính*

$$I = \int\limits_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)ds,$$

trong đó γ *là đường xoắn ốc cho bởi phương trình tham số*

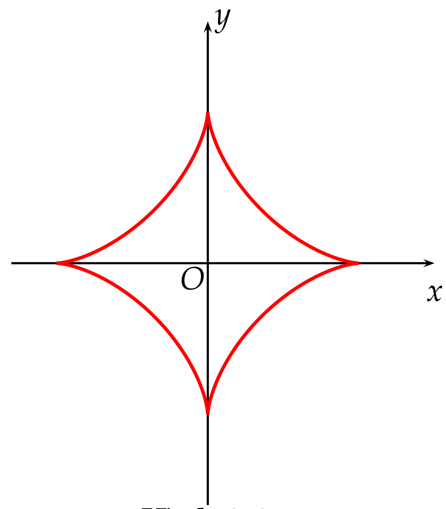
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ z = bt, \ (0 \le t \le 2\pi, a, b > 0). \end{cases}$$

[Đáp số] $I = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2\right)$

1.5 Bài tập ôn tập

Bài tập 3.6. *Tính độ dài các cung sau đây.*

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$.



Hình 3.6a

b) $y^2 = 2px,\ x \in [0, a], p > 0, a > 0$.

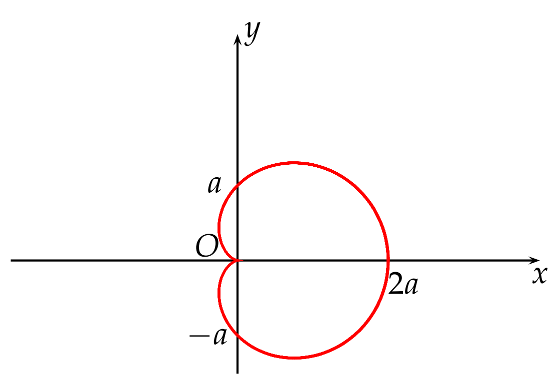
c) $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

d) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),\ (0 \le t \le 2\pi)$.

Bài tập 3.7. *Tính các tích phân đường loại I.*

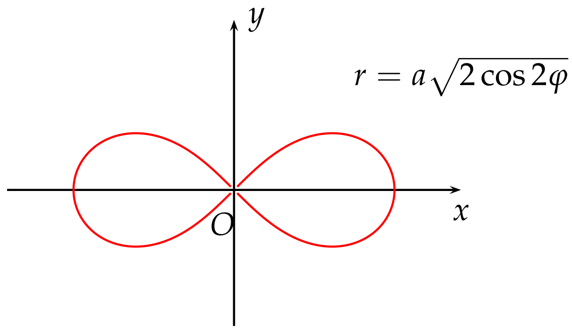
a) $I = \int_L xyds$, *trong đó* L *là cung ellip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *nằm trong góc phần tư thứ nhất.*

b) $I = \int_L |y|ds$, *trong đó* L *là đường Cardioid* $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$.



Hình 3.7b

c) $I = \int_L |y|ds$, *trong đó* L *là cung Lemniscate* $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.



Hình 3.7c

d) $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, *trong đó* L *đường tròn* $x^2+y^2 = ax$.

e) $I = \int_L x^2 ds$, *trong đó* L *là đường tròn* $x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z=0$.

Bài tập 3.8 (Cuối kì, K62). *Tính các tích phân đường*

a) $\int\limits_C (x+y)ds$, *b)* $\int\limits_C (x-y)ds$,

ở đó C *là đường tròn có phương trình* $x^2+y^2 = 2y$.

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1 Định nghĩa và tính chất

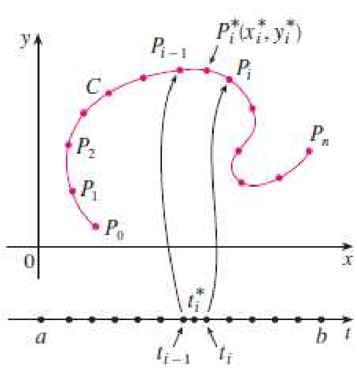
Bài toán dẫn đến tích phân đường loại hai

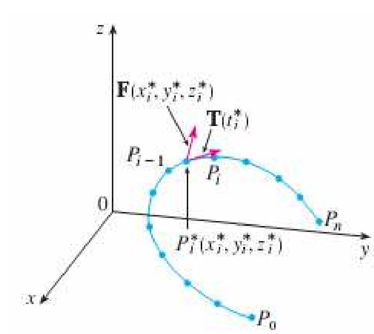
Cho $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ là một trường lực biến đổi liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Tính công thực hiện bởi lực này để di chuyển một hạt dọc theo đường cong C.

Định nghĩa

Cho hai hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên cung C cho bởi phương trình véc tơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \leq t \leq b$.

- Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Khi đó, $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia C thành n cung nhỏ.
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ ứng với t_i^*. Khi đó, công thực hiện bởi lực $\mathbf{F}$ để di chuyển hạt từ P_{i-1} đến P_i được xấp xỉ bởi
$$[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\Delta s_i,$$
ở đó $\mathbf{T}(t_i^*)$ là véc tơ tiếp tuyến đơn vị.
- Toàn bộ công sẽ được xấp xỉ bởi
$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\Delta s_i.$$
- Xấp xỉ này càng tốt nếu ta chia đường cong C càng nhỏ, do đó, ta định nghĩa công thực hiện bởi lực $\mathbf{F}$ là giới hạn
$$W = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\Delta s_i = \int_C \mathbf{F}(x,y)\mathbf{T}(x,y)ds.$$





Định nghĩa 3.7. *Cho* $\mathbf{F}$ *là một trường véc tơ xác đinh trên đường cong* C *trơn cho bởi phương trình véc tơ* $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, a \leq t \leq b$. *Tích phân đường loại II của* $\mathbf{F}$ *dọc theo đường cong* C *là*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Chú ý 3.9. *Vì* $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ *và* $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ *nên*

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_a^b \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{T}(x,y)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b (P(x(t),y(t)), Q(x(t),y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\
&= \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt \\
&= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (\textit{xem lại (3.4), (3.5)}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Các tính chất cơ bản

- Mặc dù $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ và tích phân đường loại I không phụ thuộc vào hướng của đường cong, tích phân đường loại hai lại phụ thuộc vào hướng của đường cong,

$$\int_{-C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

  Lý do là véctơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}$ sẽ được thay thế bởi $-\mathbf{T}$ nếu C được thay bởi $-C$.

- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định, đó là tính chất tuyến tính và tích chất cộng tính.

2.2 Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung C được cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, điểm đầu và điểm cuối tương ứng với $t = a, t = b$ thì

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt. \tag{3.17}$$

2. Nếu cung C được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx. \tag{3.18}$$

3. Nếu cung C được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_c^d \left[P(x(y), y).x'(y) + Q(x(y), y) \right] dy. \tag{3.19}$$

2.3 Tích phân đường trong không gian

Cho C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình véctơ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, a \leq t \leq b$$

và $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường véctơ liên tục trên một miền nào đó của $\mathbf{R}^3$ chứa C. Tích phân đường của trường véctơ $\mathbf{F}$ dọc theo đường cong C được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã làm trong mặt phẳng

$$\begin{aligned}
&\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int\limits_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\
&= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt \\
&= \int\limits_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{(xem lại (3.13), (3.14), (3.15))}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

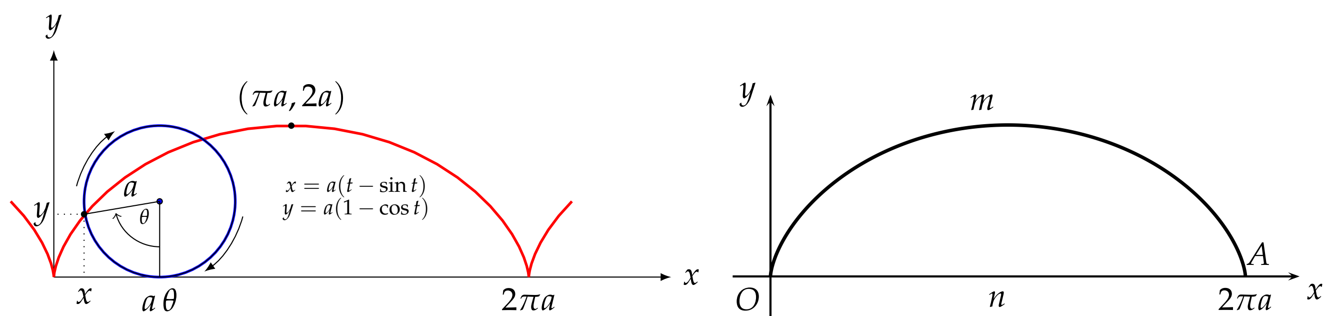
2.4 Bài tập

Bài tập 3.9. *Tính* $\int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy - y^2)\, dy$*, trong đó* $\widehat{AB}$ *là cung parabol* $y = x^2$ *từ* $A(1,1)$ *đến* $B(2,4)$.

Lời giải. Áp dụng công thức (5) ta có:

$$I = \int\limits_1^2 \left[\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x\right] dx = -\frac{41}{30}.$$

Bài tập 3.10. *Tính* $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy - y^2)\, dy$ *trong đó* C *là đường cong xác định bởi một nhịp cycloid* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *theo chiều tăng của* $t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$.



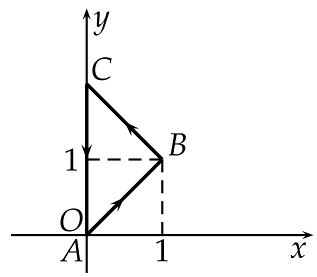
Hình 3.10

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \{[2a(t - \sin t) - a(1 - \cos t)]\, a(1 - \cos t) + a(t - \sin t).a \sin t\}\, dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + \sin 2t + (t - 2)\sin t - (2t - 2)\cos t] dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + t \sin t - 2t \cos t] dt \\ &= a^2 \left(4\pi^2 - 6\pi\right). \end{aligned}$$

■

Bài tập 3.11. *Tính* $\int\limits_{ABCA} 2\left(x^2+y^2\right)dx + x\left(4y+3\right)dy$ *ở đó* $ABCA$ *là đường gấp khúc đi qua các điểm* $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$.



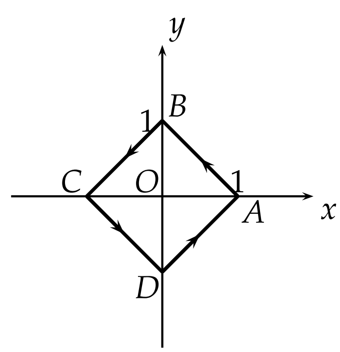
Hình 3.11

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB: x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC: x = 2-y \\ \text{phương trình đường thẳng } CA: x = 0 \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CA} ... \\ &= \int\limits_0^1 \left[2\left(y^2+y^2\right) + y\left(4y+3\right)\right]dy + \int\limits_1^2 2\left[(2-y)^2+y^2\right].(-1) + (2-y)\left(4y+3\right)dy + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Bài tập 3.12. *Tính* $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ *trong đó* $ABCDA$ *là đường gấp khúc qua các điểm* $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.



Hình 3.12

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} AB: x+y=1 & \Rightarrow dx+dy=0 \\ BC: x-y=-1 & \Rightarrow dx=dy \\ CD: x+y=-1 & \Rightarrow dx+dy=0 \\ DA: x-y=1 & \Rightarrow dx=dy \end{cases}$$

nên

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CD} ... + \int\limits_{DA} \\
&= 0 + \int\limits_{BC} \frac{2dx}{x+y} + 0 + \int\limits_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\
&= \int\limits_{0}^{-1} 2dx + \int\limits_{0}^{1} 2dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Bài tập 3.13. *Tính* $\int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ *trong đó* $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \\ 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$ *theo chiều tăng của* t.

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \le u \le \pi$, $\begin{cases} x = u^2 \sin u \\ y = u^2\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u\sin u + u^2\cos u \\ y'(u) = 2u\cos u - u^2 \sin u \end{cases}$

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2}\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u\right] du \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{u^3}{2} + 2u\right)\cos u du \\
&= -\frac{3}{2}\pi^2 + 2
\end{aligned}$$

■

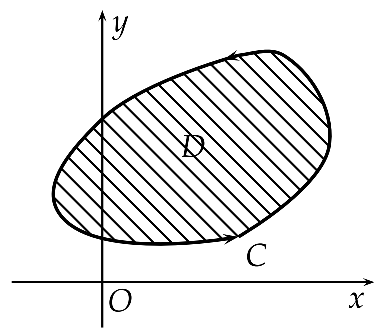
Bài tập 3.14 (Cuối kì, K62). *Tính các tích phân đường*

a) $\oint\limits_L |x|(dx+dy)$, *b)* $\oint\limits_L |y|(dx+dy)$,

ở đó L *là đường tròn* $x^2+y^2=1$ *hướng ngược chiều kim đồng hồ.*

2.5 Công thức Green.

Hướng dương của đường cong kín: Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới ∂D là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D. Khi đó

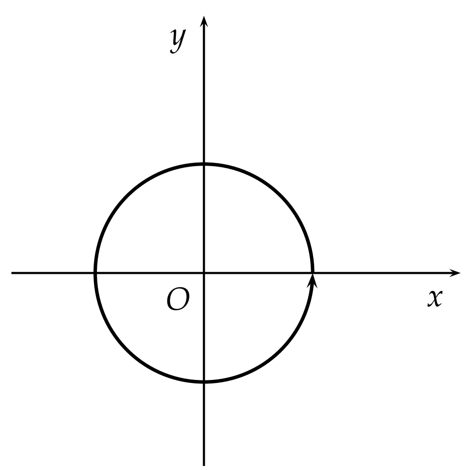
$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy$$

Chú ý:

- Nếu ∂D có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy$
- Trong nhiều bài toán, nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung C để được đường cong kín và áp dụng công thức Green. Tất nhiên, sau đó phải trừ đi phần đã bổ sung.

Bài tập 3.15. *Tính các tích phân sau* $\int\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$ *bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với* C *là đường:*

a) $x^2 + y^2 = R^2$



Hình 3.15 a

1. **Tính trực tiếp**.

Tham số hóa đường cong

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le 2\pi.$$

Ta có

$$I = \ldots$$
$$= \frac{R^3}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t\cos 2t + \sin t\cos 2t)\,dt$$
$$= 0.$$

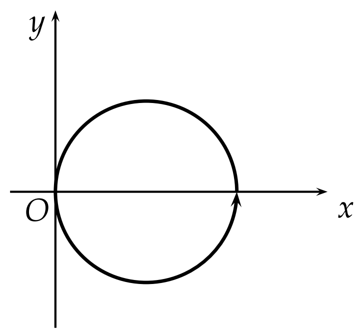
2. **Sử dụng công thức Green**.

$$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases}$$

Ta có $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x,$

$$I = \iint_D (y - x)\,dxdy$$
$$= \iint_D ydxdy - \iint_D xdxdy$$
$$= 0.$$

b) $x^2 + y^2 = 2x$



Hình 3.15 b

1. **Tính trực tiếp.**

Vì $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ *nên tham số hóa đường cong*

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

ta được

$$I = \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t)\sin t + (1 + \cos t) + \sin t]$$
$$\times (-\sin t)dt$$
$$+ \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t)\sin t + (1 + \cos t) - \sin t]$$
$$\times \cos t dt$$
$$= -\pi.$$

2. **Sử dụng công thức Green.**

$$\text{Ta có} \begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x \end{cases}$$

$$I = \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1} (y - x)\,dxdy.$$

$$\textit{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (r\sin\varphi - 1 - r\cos\varphi) r dr$$
$$= -\pi.$$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a,b>0)$.

1. **Tính trực tiếp**

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$

$$I = ... = \int_0^{2\pi} \left(-ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right) dt = 0.$$

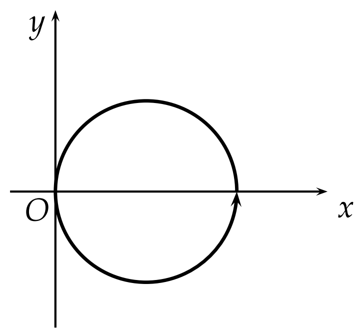
2. **Sử dụng công thức Green**

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D (y-x)\,dxdy = \iint\limits_D ydxdy - \iint\limits_D xdxdy = 0.$$

Bài tập 3.16. *Tính* $\int\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x+\frac{y}{4}\right)dx.$



Hình 3.16

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta có:

$$I = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_D \left(4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right)dxdy = \frac{3}{4}\int\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

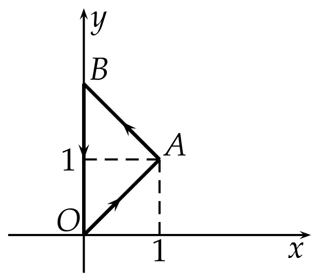
$\left(\text{vì} \int\limits_D 4xydxdy = 0\right)$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$. Vậy

$$I = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2.rdr = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi = \frac{9}{8}\pi.$$

■

Bài tập 3.17. *Tính* $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy\right]$ *trong đó* $OABO$ *là đường gấp khúc* $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Hình 3.17

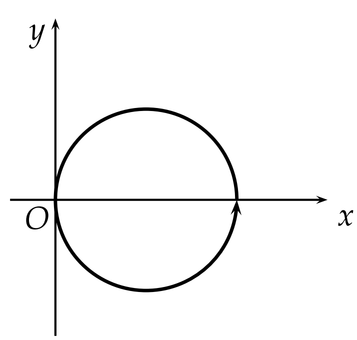
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y)=e^x(1-\cos y) \\ Q(x,y)=-e^x(y-\sin y)\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x y.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -e^x y\,dx\,dy \\ &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} -e^x y\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x(4x-4)\,dx \\ &= 4-2e. \end{aligned}$$

■

Bài tập 3.18. *Tính* $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)\,dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)\,dy$



Hình 3.18

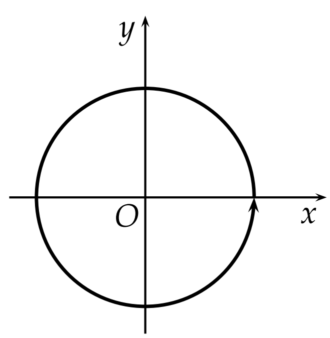
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P\left(x,y\right) = xy + e^x \sin x + x + y \\ Q\left(x,y\right) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -y - x - 2dxdy \\ &= \iint\limits_D -x - 2dxdy \text{ vì } \iint\limits_D ydxdy = 0 \\ &\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \left(-r\cos\varphi - 2\right) rdr \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

■

Bài tập 3.19. *Tính* $\oint\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy$ *trong đó* $C \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (a > 0).$



Hình 3.19

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P\left(x,y\right) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q\left(x,y\right) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1dxdy \\
&= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 1dxdy \text{ vì } \iint\limits_D 4xy^3dxdy = 0 \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le ra \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r^2 - 1\right) rdr \\
&= \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right).
\end{aligned}$$

■

2.6 Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có:

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

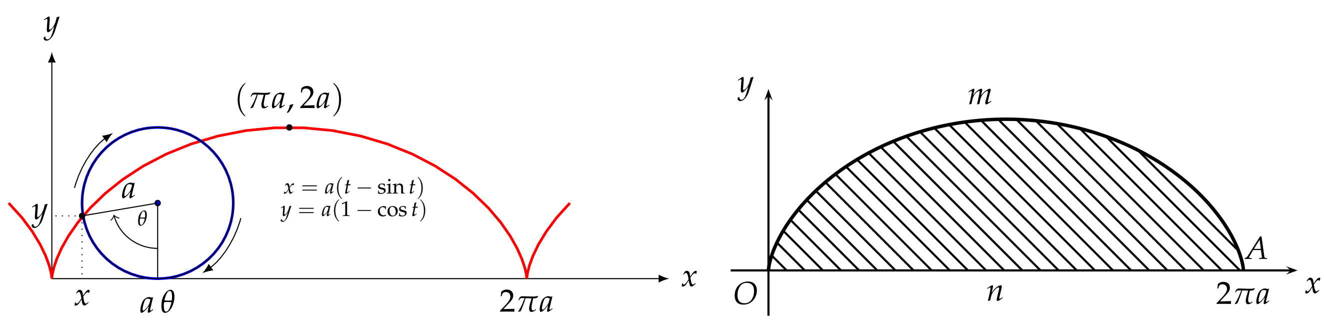
- Lấy $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} xdy$.
- Lấy $P(x,y) = -y, Q(x,y) = 0$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} -ydx$.
- Lấy $P(x,y) = \frac{1}{2}x, Q(x,y) = \frac{1}{2}y$ thì $S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy - ydx$.

Bài tập 3.20. *Tính diện tích của miền elip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

[Gợi ý] Phương trình tham số của đường elip là $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$. Do đó

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\sin\theta)d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta = \pi ab.$$

Bài tập 3.21. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *và* Ox $(a > 0)$.

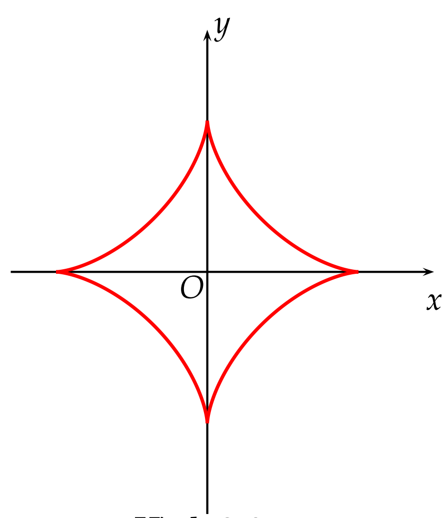


Hình 3.21

Lời giải. Áp dụng công thức

$$S(D) = \int_{\partial D} xdy = \int_{AmO} xdy + \int_{OnA} xdy = \int_{2\pi}^{0} a\,(t - \sin t)\,.a \sin t dt = 3\pi a^2.$$

Bài tập 3.22. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Astroid* $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

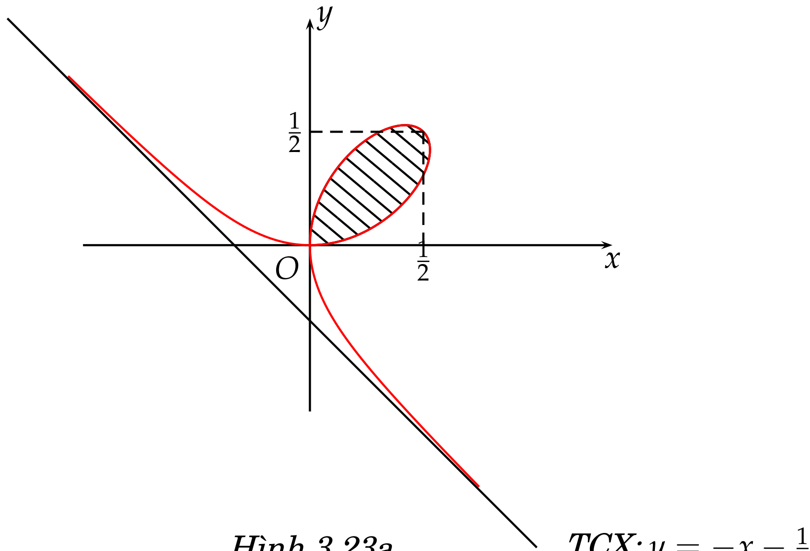


Hình 3.6a

[Đáp số] $S = \frac{3\pi a^2}{8}$.

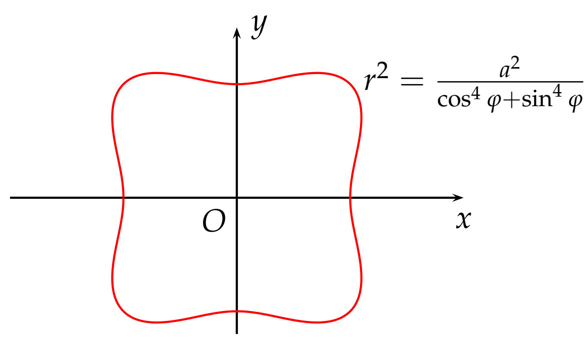
Bài tập 3.23. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường sau*

a) $x^2 + y^3 = 3axy, a > 0$ *(lá Descartes, xem thêm Bài tập 1.58).*



Hình 3.23a

b) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.



Hình 3.23b

2.7 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P, Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x, y) \in D$.

2) $\int\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.

3) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với mọi đường cong AB nằm trong D.

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x, y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:

1) Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x$. (1)

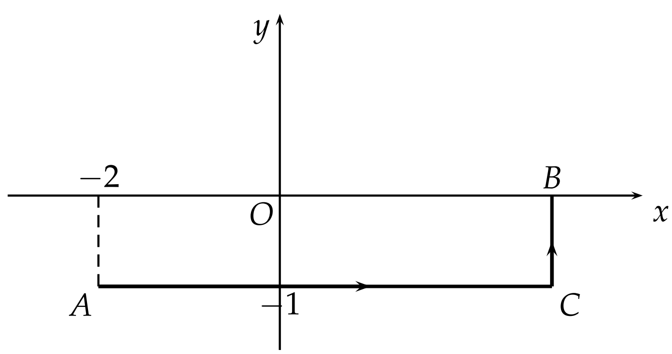
2) Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.

3) Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn là đường thẳng nối A với B, hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm u sao cho $du = Pdx + Qdy$, hay là

$$\mathbf{F} = (P, Q) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} u = (u'_x, u'_y)$$

thì $I = u(B) - u(A)$.

Bài tập 3.24. *Tính* $\displaystyle\int_{(-2,1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy.$

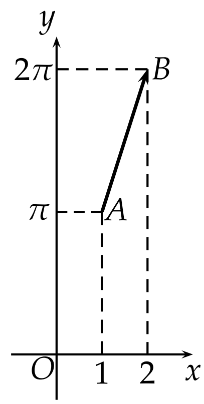


Hình 3.24

Lời giải. Nhận xét rằng $\left(x^4 + 4xy^3\right)'_y = \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)'_x$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là đường gấp khúc ACB như hình vẽ.

$$I = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = 62.$$

Bài tập 3.25. *Tính* $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy.$



Hình 3.25

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B. Khi đó ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB, nó có phương trình $y = \pi x$.

$$I = \int\limits_1^2 \left(1 - \pi^2\cos\pi\right) dx + \int\limits_1^2 (\sin\pi + \pi\cos\pi)\, \pi dx = 1.$$

Bài tập 3.1. [Cuối kì, K62] Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên $\mathbf{R}$ và L là đường đi từ $O(0,0)$ đến $A(a,b)$ thì

$$\int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)du.$$

2.8 Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi

Cho $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ là miền đơn liên, liên thông, $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường véctơ thỏa mãn P, Q, R cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{\Omega}$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1) $\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với mọi đường cong AB nằm trong Ω.

2) **F** là một trường bảo toàn (hay còn gọi là trường thế), nghĩa là có hàm số $u(x,y,z)$ sao cho

$$^{(1)}\overrightarrow{\text{grad}}u = (u'_x, u'_y, u'_z) = \mathbf{F}.$$

Hàm thế vị u có thể được tìm theo công thức:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C. \tag{3.21}$$

Khi đó,

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

2.9 Tích phân đường không phụ thuộc đường đi và định luật bảo toàn năng lượng

Chúng ta áp dụng các kiến thức đã biết trong chương này để liên hệ với định luật bảo toàn năng lượng trong Vật lý. Cho **F** là một trường lực liên tục, để di chuyển một vật dọc theo đường cong C cho bởi $r = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$, ở đó điểm đầu $A = \mathbf{r}(a)$ và điểm cuối $B = \mathbf{r}(b)$. Trước hết, theo định luật II Newton, lực **F** và gia tốc $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ được liên hệ với nhau bởi công thức

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t).$$

Do đó, công thực hiện bởi lực **F** là

$$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot r'(t)dt \\ &= \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|^2 dt \\ &= \frac{m}{2}\left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)^2|\right) \\ &= \frac{m}{2}|\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{m}{2}|\mathbf{v}(a)|^2, \end{aligned} \tag{3.22}$$

(1) Trong các tài liệu tiếng Anh, véctơ gradient $\overrightarrow{\text{grad}}u$ của trường vô hướng u thường được kí hiệu là ∇u

ở đó $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ là vận tốc. Đại lượng $K(t) = \frac{m}{2}|\mathbf{v}(t)|^2$ được gọi là động năng của vật (kinetic energy). Do đó, công thức (3.22) có thể được viết lại thành

$$W = K(B) - K(A),$$

nghĩa là, công thực hiện bởi lực **F** để di chuyển một vật dọc theo đường cong C thì bằng với sự thay đổi động năng của vật đó tại hai điểm đầu và cuối. Bây giờ, giả thiết thêm trường véctơ **F** là một trường lực bảo toàn[(2)] (conservative forced field), nghĩa là

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}} u = (u'_x, u'_y, u'_z).$$

Trong Vật lý, thế năng (potential energy)[(3)] của một vật được định nghĩa bởi

$$\phi(x,y,z) = -u(x,y,z)^{(4)}.$$

Do đó $\mathbf{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$ và

$$W = \int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(A) - \phi(B). \tag{3.23}$$

Từ (3.22) và (3.23) ta có

$$K(B) - K(A) = \phi(A) - \phi(B) \Rightarrow \boxed{\phi(A) + K(A) = \phi(B) + K(B)}.$$

Nói cách khác, nếu một vật di chuyển từ một điểm A đến một điểm B dưới tác dụng của một trường lực bảo toàn thì tổng động năng và thế năng của nó luôn luôn là một hằng số. Đây chính là **Định luật bảo toàn năng lượng** trong Vật lý.

Chú ý 3.10. *Định luật bảo toàn năng lượng trong tiếng Anh là the* **Law of Conservation of Energy**. *Đó là lý do vì sao trường thế* **F** *trong tiếng Anh được gọi là the* conservative field. *Thuật ngữ trường thế trong tiếng Việt (xem Chương 6) có lẽ xuất phát từ việc nó là gradient của một hàm thế vị (potential function)* $\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}} u$. *Một trong những trường lực bảo toàn ai cũng biết (hoặc ít nhất đã từng nghe nói đến), là trường hấp dẫn. Trường hấp dẫn* **g** *xung quanh một hạt khối lượng M là một trường vectơ mà tại mỗi điểm chứa một vectơ chỉ theo hướng ra xa khỏi hạt. Độ lớn của trường tại mỗi điểm được tính bằng định luật của Newton, và miêu tả lực trên một đơn vị khối lượng tác động lên một vật thể bất kỳ nằm tại điểm đó trong không gian. Phương trình trường hấp dẫn là*

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{R}|^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi,$$

(2)Còn gọi là trường thế

(3)Trong nhiều tài liệu, thế năng của một trường véctơ lực bảo toàn **F** được định nghĩa, một cách tương đương, như sau: $\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, ở đó $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ là tích phân đường không phụ thuộc đường đi cụ thể từ $\mathbf{r}_0$ đến $\mathbf{r}$ và $\phi(\mathbf{r}_0)$ là giá trị thế năng quy ước ở mốc $\mathbf{r}_0$. Đôi khi, khái niệm hiệu thế năng thường được dùng khi so sánh thế năng giữa hai điểm, hoặc nói về thế năng của một điểm khi lấy điểm kia là mốc có thế năng bằng 0.

(4)Dấu trừ trong công thức này để cho công thực hiện bởi lực **F** làm giảm thế năng ở đó **F** là lực hấp dẫn, m là khối lượng của hạt thử, **R** là vị trí của hạt thử, **T** là véctơ tiếp tuyến đơn vị theo hướng của **R**, t là thời gian và G là hằng số hấp dẫn.

Nếu chỉ tính về mặt độ lớn, thì theo Định luật này, vật có khối lượng m sẽ bị kéo về gần vật có khối lượng M với gia tốc

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

với r là khoảng cách giữa hai vật. Cũng theo Định luật II Newton, vật có khối lượng m chịu lực hấp dẫn có độ lớn

$$F = mg \Rightarrow \boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}.$$

Công thức được đóng khung trên thường được gọi là định luật vạn vật hấp dẫn Newton, trong đó lực hấp dẫn tỷ lệ thuận với tích của hai khối lượng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách hai vật. Trong công thức này, kích thước các vật được coi là rất nhỏ so với khoảng cách giữa chúng.

CHƯƠNG 4

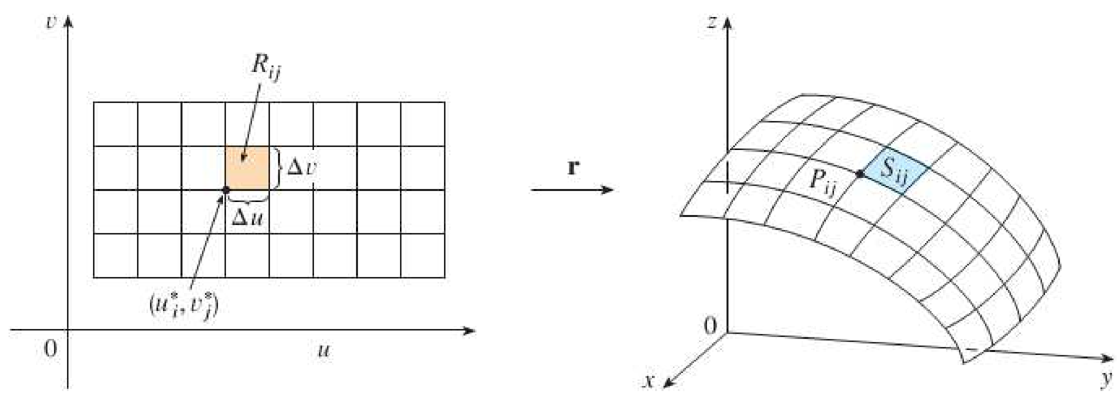
TÍCH PHÂN MẶT

§1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1 Diện tích mặt cong

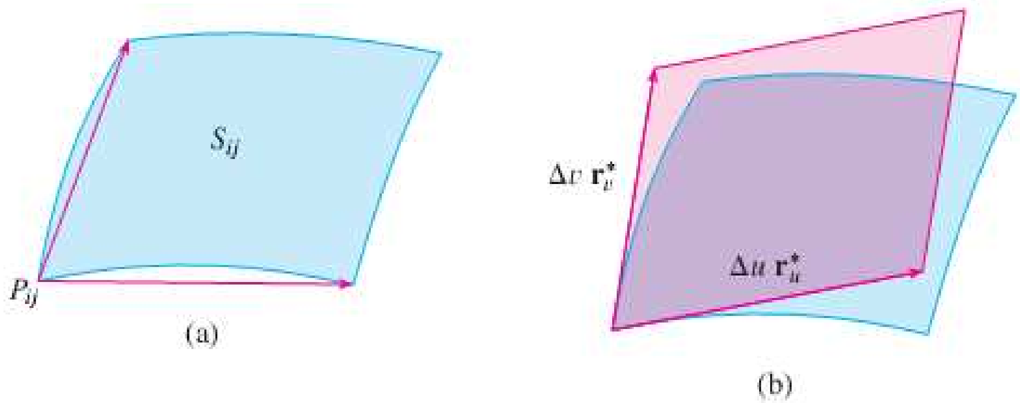
Xét mặt cong cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}.$$



Để đơn giản ta chọn miền D là hình chữ nhật và chia D thành các hình chữ nhật con có các cạnh song song với các trục tọa độ Ou và Ov. Giả sử S_{ij} là ảnh của hình chữ nhật R_{ij}. Khi đó

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(u_i, v_j) \text{ và } \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(u_i, v_j)$$



là các véc tơ chỉ phương của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong S tại điểm P_{ij}.
Diện tích của S_{ij} có thể được xấp xỉ bởi diện tích của hình bình hành có hai cạnh là $\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$ và $\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}$. Do đó,

$$A(S_{ij}) \approx |\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}| \approx |(\Delta u \mathbf{r}_u) \wedge (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Vậy công thức tính xấp xỉ diện tích của mặt S là

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Nhận xét rằng nếu chia miền D thành các mảnh càng nhỏ thì công thức tính xấp xỉ trên càng tốt. Đồng thời, công thức ở vế phải chính là tổng Riemann của tích phân kép $\iint\limits_D |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv$. Điều này dẫn chúng ta tới định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.8. *Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số*

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

và S chỉ được phủ một lần khi (u,v) biến thiên trên miền D. Khi đó diện tích của mặt cong S được định nghĩa bởi

$$A = \iint\limits_D |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv,$$

ở đó

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Ví dụ 1.1. *Tính diện tích của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.*

[Lời giải] Mặt cầu S có phương trình tham số trong tọa độ cầu là $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$

Do đó,

$$\mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} + R^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j} + R^2\sin\theta\cos\theta\mathbf{k}.$$

Vì vậy, $|\mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_\varphi| = R^2\sin\theta$ và

$$A = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Trường hợp đặc biệt, nếu mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x,y)$ thì

$$\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do đó,

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

1.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại I

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

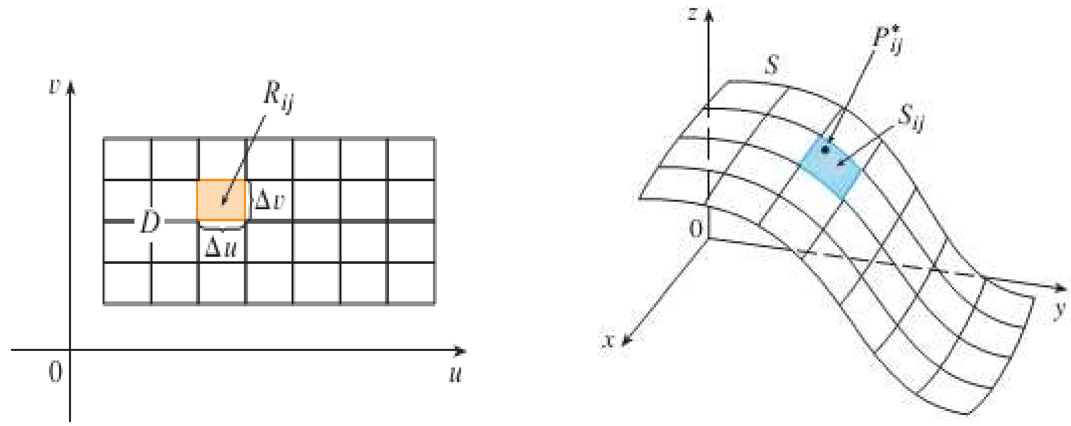
Hơn nữa, giả sử trên S có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ (hay tỉ trọng bề mặt) tại điểm (x,y,z) là $\rho(x,y,z)$, trong đó $\rho(x,y,z$ là một hàm số liên tục trên S. Hãy tính khối lượng mặt S.

[Lời giải] Tương tự như cách tính diện tích mặt S, ta chia miền D thành các miền con bằng các đường song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng Ouv. Khi đó mặt S được chia thành các mặt con S_{ij} và diện tích của nó được xấp xỉ bởi

$$A(S_{ij}) \approx |r_u \wedge r_v|\Delta u\Delta v.$$

Do tính liên tục của ρ, nếu ta chia miền D thành các miền khá nhỏ thì miền S_{ij} cũng khá nhỏ và ta coi hàm ρ không đổi trên S_{ij} và bằng $\rho(x(u_i^*, v_j^*), y(u_i^*, v_j*), z(u_i^*, v_j^*)) = \rho(P_{ij}^*)$. Khi đó khối lượng của S_{ij} là

$$m(S_{ij}) \approx \rho(P_{ij}^*)|r_u \wedge r_v|\Delta u\Delta v$$



Khối lượng của toàn bộ mặt S là

$$m(S) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho(P_{ij}^*)|r_u \wedge r_v|\Delta u \Delta v$$

Đây chính là tổng Riemann của tích phân kép $\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|dudv$.

Điều này dẫn đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 4.9. *Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số*

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

và f là một hàm số xác định trên S. Nếu tồn tại tích phân

$$\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|dudv$$

thì ta gọi giá trị của tích phân này là tích phân mặt loại một của hàm f lấy trên S và kí hiệu là

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

1.3 Các công thức tính tích phân mặt loại I

Mặt S cho bởi phương trình tham số

Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

thì

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|dudv.$$

Mặt S cho bởi phương trình $z = z(x,y)$

Nếu mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x,y), (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, thì đó nó có một tham số hóa tự nhiên là $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u,v). \end{cases}$

Khi đó, $\mathbf{r}_u = (1, 0, z'_u), \mathbf{r}_v = (0, 1, z'_v)$ và do đó, véc tơ pháp tuyến của mặt cong S tại P là

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = (-z'_u, -z'_v, 1) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

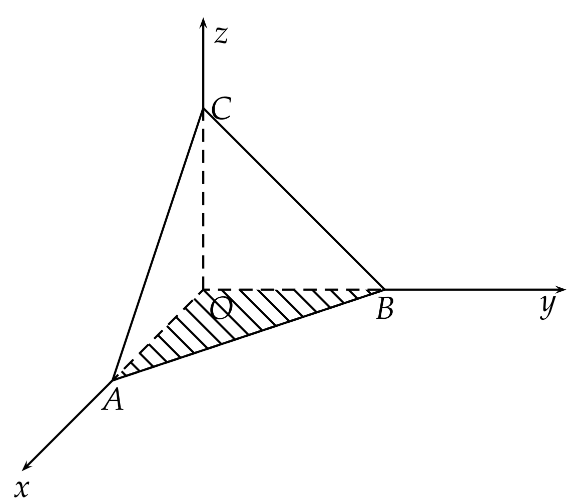
Vậy $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$. Ngoài ra, miền xác định của (u,v) chính là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Do đó

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy.$$

1.4 Bài tập

Bài tập 4.1. *Tính* $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) dS$ *trong đó*

$$S = \left\{(x,y,z) \,|\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\}.$$



Hình 4.1

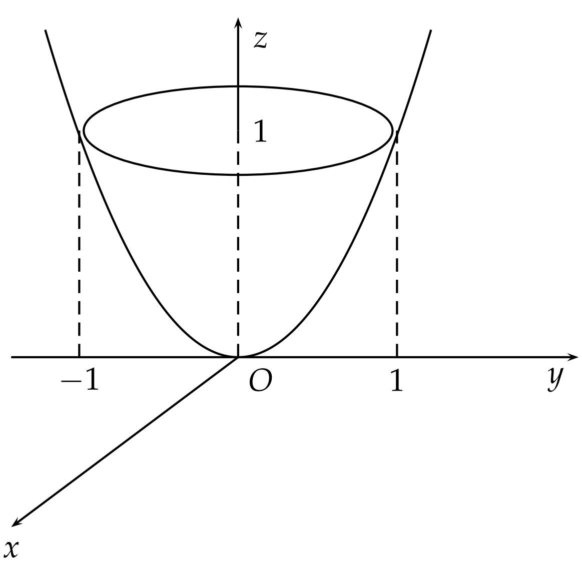
Lời giải. Ta có hình chiều của mặt S lên mặt phẳng Oxy là

$$D = \left\{(x,y) \,|\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\} = \left\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right\}.$$

Mặt khác $z = 4(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}) \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = -2 \\ q = z'_y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$ nên

$$I = \iint\limits_D \left[4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4y}{3}\right]\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy = 4\frac{\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = 4\sqrt{61}.$$

Bài tập 4.2. *Tính* $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dS,\ S = \left\{(x, y, z) \,|z = z^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}.$



Hình 4.2

Lời giải. Ta có hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là $D = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

Mặt khác, $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = 2x \\ q = z'_y = 2y \end{cases}$ nên

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy,$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2} rdr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_0^1 r^2 \sqrt{1+4r^2} d\left(1+4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_1^5 \frac{t-1}{4} \sqrt{t} dt \left(\text{đặt} t = 1 + 4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{16} \left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\right).$$

■

Bài tập 4.3. *Tính tích phân mặt* $\iint\limits_S x^2y^2zdS$, *trong đó* S *là phần mặt nón* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *ở dưới mặt phẳng* $z = 1$.

[Đáp số] $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{28}$.

Bài tập 4.1. [Cuối kì, K62] Tính tích phân mặt $\iint\limits_S \frac{dS}{(2+x+y+z)^2}$, ở đó S là biên của tứ diện $x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Lời giải. Ta có

$$I = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS + 3\iint\limits_D f(x,y,z)dS,$$

ở đó

$$S_1 : \begin{cases} x+y+z = 1, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \end{cases} \quad \text{và } D : \begin{cases} x+y \le 1, x \ge 0, y \ge 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

i) $\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS = \iint\limits_D \frac{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9} \iint\limits_D dxdy = \frac{\sqrt{3}}{9} S(D) = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

ii) $\iint\limits_{D} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(2+x+y)^2} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$ ■

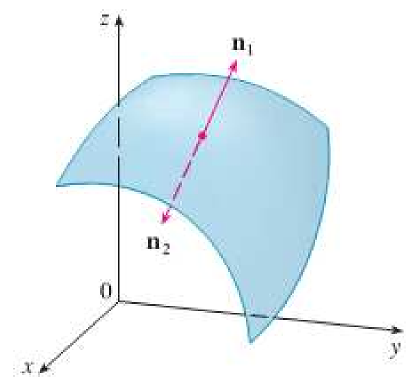
Kết luận: $I = \frac{\sqrt{3}}{18} - 1 + 3\ln\frac{3}{2}.$

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1 Định hướng mặt cong

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

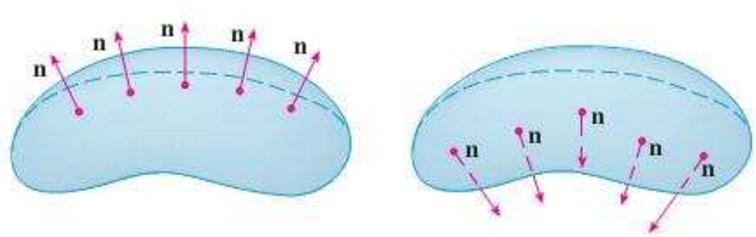


Như đã biết, véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại điểm P chính quy là $\mathbf{n}_1 = \dfrac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|}$, ở đó

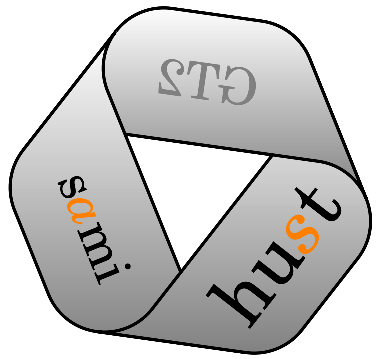
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Tại mỗi điểm P chính quy của mặt cong S có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{n}_1$ và $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Giả sử $P_0 \in S$ và L là một đường cong kín nằm trên S và đi qua P_0. Chọn $\mathbf{n}(P_0)$ là một véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt S tại P_0. Khi P di chuyển dọc theo đường cong kín L từ P_0 và quay trở về P_0 thì véc tơ $\mathbf{n}(P)$ cũng biến thiên liên tục, và khi P trở về P_0 thì $\mathbf{n}(P)$ trở thành $\mathbf{n}'(P_0)$. Có hai khả năng xảy ra

- $\mathbf{n}'(P_0) = \mathbf{n}(P_0)$, tức là, pháp tuyến trở lại như cũ. Khi đó ta nói mặt S định hướng được (hay còn gọi là mặt hai phía).



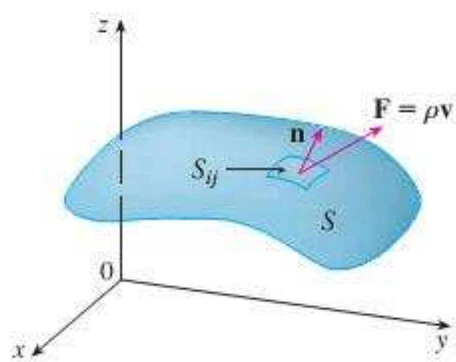
- Ngược lại, $\mathbf{n}'(P_0) = -\mathbf{n}(P_0)$, tức là, pháp tuyến trở về vị trí cũ thì đổi hướng. Khi đó ta nói mặt S gọi là không định hướng được (hay còn gọi là mặt một phía). Ví dụ như lá Mobius sau đây (được mang tên nhà toán học người Đức August Ferdinand Möbius).



Nếu mặt S định hướng được thì ta chọn một hướng làm hướng dương và hướng còn lại được gọi là hướng âm.

2.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại II

Giả sử có một mặt cong hai phía được nhúng vào một môi trường chất lỏng đang chảy với mật độ $\rho(x,y,z)$ và tốc độ $\mathbf{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$. Hãy tính lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.



Ta chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij} như hình vẽ trên. Nếu chia mặt cong đủ nhỏ thì ta coi S_{ij} như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ coi như hằng số trên S_{ij}. Do đó, ta có thể xấp xỉ khối lượng của chất lỏng chảy qua S_{ij} theo hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ trên một đơn vị thời gian bởi

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})A(S_{ij}).$$

Lượng chất lỏng chảy qua S trên một đơn vị thời gian là

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})A(S_{ij}).$$

Nếu chia mặt cong S càng nhỏ thì tổng trên chính là tổng Riemann của tích phân mặt loại I sau

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

ở đó $\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ và $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Định nghĩa 4.10. *Cho mặt cong S trơn, định hướng được, cho bởi phương trình tham số*

$$r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (u,v)\in D\subset\mathbf{R}^2$$

và $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị tại $M(x,y,z)$ theo hướng dương đã chọn của S. Giả sử

$$\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \quad (x,y,z)\in S$$

là một hàm véc tơ xác định trên S. Nếu tồn tại tích phân mặt loại I

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

thì giá trị đó được gọi là tích phân mặt loại II của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ lấy theo hướng đã chọn của mặt S và kí hiệu là

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \text{ hay là } \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

2.3 Các công thức tính tích phân mặt loại II

Mặt cong cho bởi phương trình tham số

Nếu mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v)\in D\subset\mathbf{R}^2.$$

thì một véc tơ pháp tuyến của S tại điểm P chính quy là $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (A,B,C)$.

- Nếu véc tơ này cùng phương cùng hướng với $\mathbf{n}$, tức là, hướng theo phía đã chọn của mặt thì

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ dS &= \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv\end{aligned}$$

nên ta đi đến công thức tính tích phân mặt loại II sau

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_D (AP+BQ+CR)dudv.$$

- Nếu véc tơ $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (A,B,C)$ cùng phương, ngược hướng với $\mathbf{n}$, tức là, ngược hướng với phía đã chọn của S thì

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\beta &= -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\gamma &= -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_D (AP+BQ+CR)dudv.$$

Mặt cong cho bởi phương trình $f(x,y,z)=0$

Giả sử

$$I = \underbrace{\iint\limits_S Pdydz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_S Qdzdx}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_S Rdxdy}_{I_3}.$$

Người ta tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân kép. Chẳng hạn xét tích phân I_3. Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y)$, $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Khi đó, véc tơ $\mathbf{N} = \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$. Véc tơ $\mathbf{N}$ này luôn lập với Oz một góc nhọn (Tại sao?[1]) Do đó, để thuận lợi cho việc xác định xem $\mathbf{N}$ cùng hướng hay ngược hướng với $\mathbf{n}$, người ta xét góc giữa $\mathbf{n}$ và Oz.

[1]vì $\mathbf{N}\cdot\mathbf{k} = (-z'_x, -z'_y, 1)\cdot(0,0,1) = 1 = |\mathbf{N}||\mathbf{k}|\cos(\mathbf{N},\mathbf{k}) \Rightarrow \cos(\mathbf{N},\mathbf{k}) > 0 \Rightarrow (\mathbf{N},\mathbf{k}) < \frac{\pi}{2}$

- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương **n** tạo với Oz một góc nhọn thì

$$\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_S (AP + BQ + CR)dxdy = \iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)dxdy. \qquad \textbf{(4.1)}$$

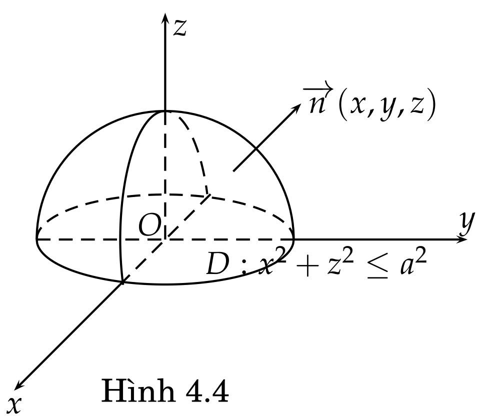
- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương **n** tạo với Oz một góc tù thì

$$\iint\limits_S Rdxdy = -\iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)dxdy. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Tích phân I_1, I_2 được đưa về tích phân kép một cách tương tự.

Bài tập

Bài tập 4.4. *Tính* $\iint\limits_S z\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, *trong đó* S *là nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$, *hướng của* S *là phía ngoài mặt cầu.*



Hình 4.4

Lời giải. Ta có mặt $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền D : $x^2 + y^2 \leq 1$, hơn nữa $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc nhọn nên:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

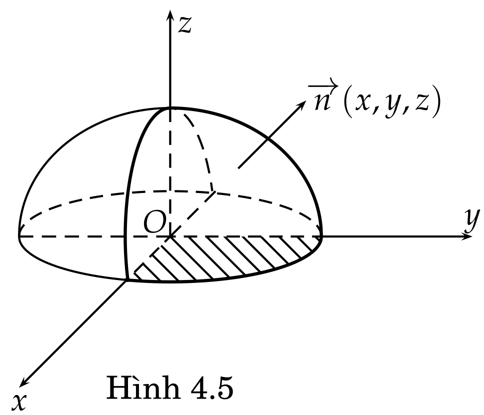
$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}r^3dr$$

$$= \frac{4\pi}{15}.$$

■

Bài tập 4.5. *Tính* $\iint\limits_S ydxdz + z^2dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài mặt* $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$



Hình 4.5

Lời giải. Tính $I_1 = \iint\limits_S ydxdz.$

- Mặt $S : y = 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ hình tròn, $D_1 : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0.$
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oy$ là góc nhọn.

Do đó

$$I = \iint\limits_{D_1} 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}dxdz$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 2\sqrt{1 - r^2}rdr$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

Tính $I_2 = \iint\limits_S z^2dxdy.$

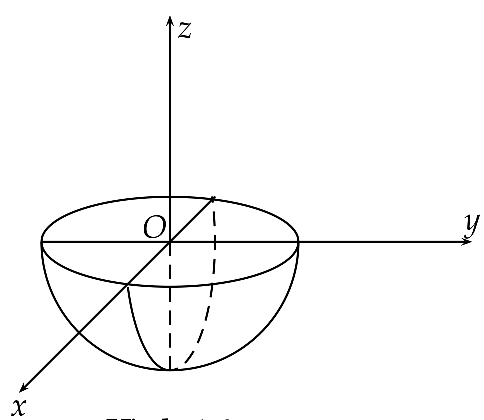
- Mặt $S : z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ elip, $D_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$
- $\gamma = (\overrightarrow{n}, Oz$ là góc nhọn.

Do đó

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_2} 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} dxdy \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1, J = -2r \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - r^2) 2r dr \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Vậy $I = \frac{7\pi}{12}$. ■

Bài tập 4.6. *Tính* $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ *trong đó* S *là mặt trên của nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$.



Hình 4.6

Lời giải. Ta có:

- Mặt $S : z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxy là hình tròn, $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oz)$ là góc nhọn.

Do đó

$$
\begin{aligned}
I &= -\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R, J = -r \\
I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2-r^2}.r^5 dr \\
&= -\frac{2R^7}{105}.
\end{aligned}
$$

■

2.4 Công thức Ostrogradsky

Giả sử P, Q, R là các hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn, đo được trong $V \subset \mathbb{R}^3$. V giới hạn bởi mặt cong kín S trơn hay trơn từng mảnh, khi đó:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz^{(2)},$$

trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

Chú ý:

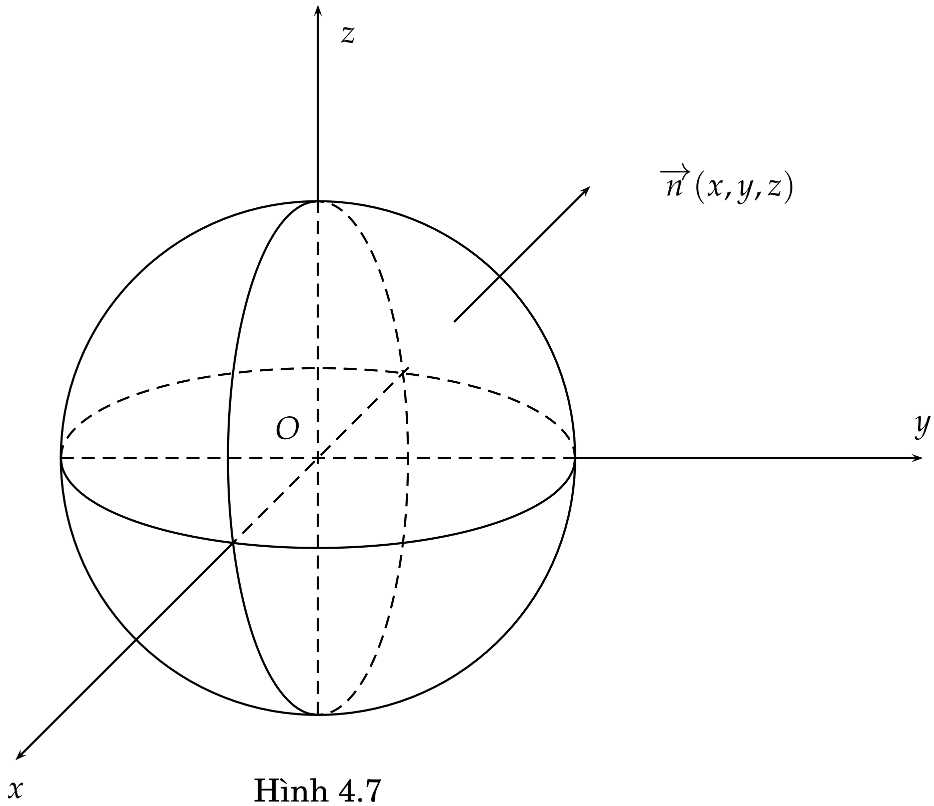
- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

- Nếu mặt cong S không kín, có thể bổ sung thành mặt cong S' kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

Bài tập 4.7. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(2) Trong các tài liệu tiếng Anh, công thức Ostrogradsky thường được gọi là *the Divergence Theorem*, và thường được phát biểu dưới dạng $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}dV$, ở đó $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ và $dV = dxdydz$



Hình 4.7

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2.$$

Bài tập 4.8. *Tính* $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Lời giải. Xem hình vẽ 4.7, áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint_V 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$$

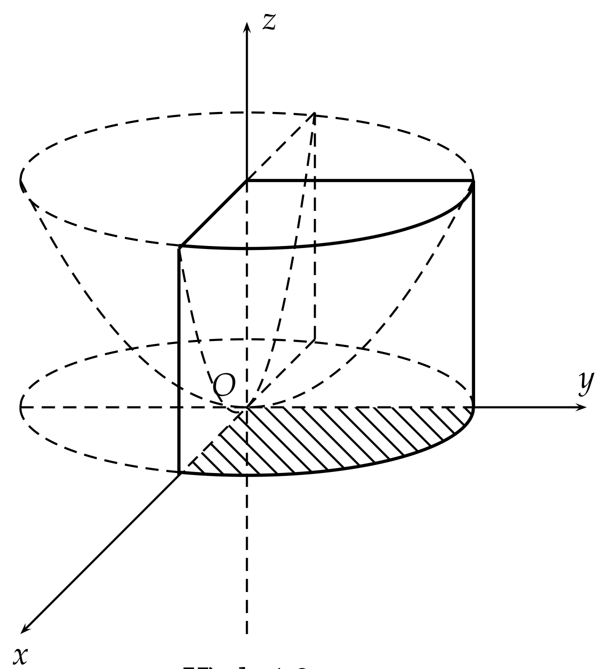
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

■

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^4 \sin\theta dr$$

$$= \frac{12\pi R^5}{5}.$$

Bài tập 4.9. *Tính* $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq x^2 + y^2$.



Hình 4.9

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V \left(y^2 + z + x^2\right) dxdydz$$

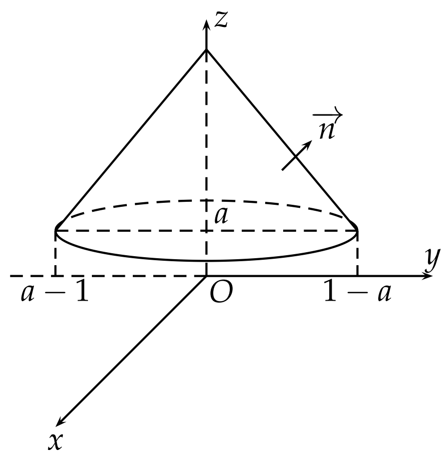
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}, J = -r$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{r^2} \left(r^2 + z\right) rdr$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

■

Bài tập 4.10. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $(z-1)^2 \leqslant x^2 + y^2, a \leqslant z \leqslant 1, a > 0$.



Hình 4.10

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 3.\frac{1}{3}Bh = \pi\left(1-a\right)^3.$$

2.5 Dạng véctơ của công thức Green

Xét trường véctơ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Tích phân đường của trường véctơ này dọc theo đường cong kín C là

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_C Pdx + Qdy.$$

Coi $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, ta định nghĩa véctơ xoáy của trường véctơ $\mathbf{F}$ như sau:

$$^{(3)}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 6Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Do đó,

$$(\mathrm{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Công thức Green có thể được viết lại dưới dạng véctơ như sau:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \iint\limits_D (\mathrm{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}dxdy. \tag{4.3}$$

Công thức này nói rằng tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của trường véctơ **F** dọc theo đường cong kín C bằng với tích phân kép của thành phần thứ ba (ứng với véctơ

(3) Véctơ xoáy của trường véctơ **F** còn được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{F}$

k) của véctơ xoáy của nó, curl **F**, trên miền D được bao bởi C. Tiếp theo, chúng ta biến đổi một chút để thu được một công thức khác, có chứa thành phần pháp tuyến của **F**. Giả sử C cho bởi phương trình

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b,$$

khi đó, véctơ tiếp tuyến đơn vị là

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}.$$

Véctơ pháp tuyến ngoài, đơn vị của C sẽ là

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds &= \int_a^b (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})|\mathbf{r}'(t)|dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t),y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t),y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\right] dt \\
&= \int_a^b \left[P(x(t),y(t))y'(t) - Q(x(t),y(t))x'(t)\right] dt \\
&= \int_C Pdy - Qdx \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy \quad \text{(công thức Green)}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

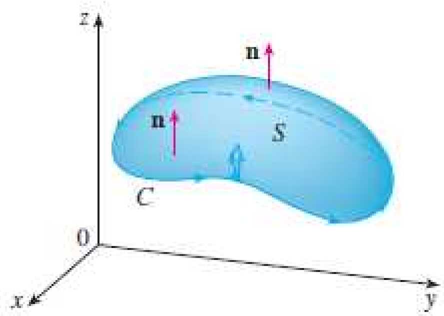
Nói cách khác,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}dxdy.$$

Công thức này nói rằng tích phân đường của thành phần pháp tuyến của trường véctơ **F** dọc theo đường cong kín C bằng với tích phân kép của divergence của nó, div **F**, trên miền D được bao bởi C.

2.6 Công thức Stokes

Giả sử S là mặt hai phía, đơn và trơn có biên giới là đường cong kín L. Giả sử **n** là hướng dương của pháp tuyến của S. Khi đó, ta xác định hướng dương trên biên giới L của mặt S là hướng sao cho, một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến **n**, đi theo hướng đó thì thấy phần của mặt ở gần người đó nhất nằm ở phía tay trái. Ngoài ra, hướng của S và L có thể được xác định theo quy tắc bàn tay phải.



Định lý 4.17 (Định lý Stokes). *Giả sử S là một mặt cong trơn, có biên C là một đường cong trơn. Giả thiết P, Q, R là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở nào đó chứa S. Khi đó*

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của C phù hợp với hướng dương của mặt S.

Chú ý 4.11. *Trong các tài liệu tiếng Anh, công thức Stokes thường được phát biểu dưới dạng ngắn gọn*

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

ở đó

i) $\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$ *là tích phân đường loại II (trong không gian) của trường véctơ* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$,

ii) (4) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k}$ *là véctơ xoáy của trường véctơ* $\mathbf{F}$,

iii) $\iint\limits_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ *là tích phân mặt loại II của trường véctơ* $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

Theo dạng véctơ của công thức Green (4.3), công thức Stokes chính là một dạng mở rộng của công thức Green sang trong không gian ba chiều, ở đó

i) công thức Green liên hệ tích phân kép trên miền D với tích phân đường trên biên của D (trong mặt phẳng), trong khi đó,

ii) công thức thức Stokes liên hệ tích phân mặt trên mặt cong S với tích phân đường trên biên của S (trong không gian).

(4)Véctơ xoáy của trường véctơ $\mathbf{F}$ còn được kí hiệu là $\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{F}$

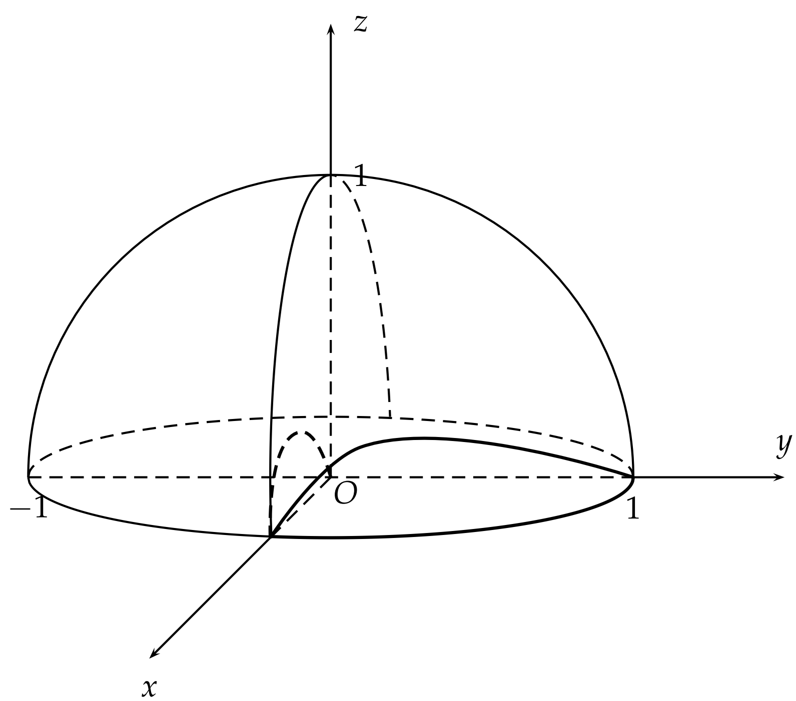
2.7 Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\, dS \\
&= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của véctơ pháp tuyến đơn vị của mặt S.

Bài tập 4.11. *Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $x^2+x+z^2=0, y \geq 0$, hướng S phía ngoài. Chứng minh rằng*

$$\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dxdz = 0.$$



Hình 4.11

Lời giải. Ta có $y = \sqrt{1-x^2-y^2}$ nên véctơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n} = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$. Vì $(\overrightarrow{n}, Oy) < \frac{\pi}{2}$ nên

$$\overrightarrow{n} = (-y'_x, 1, -y'_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right).$$

Do đó $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-z^2} + 1 + \frac{z^2}{1-x^2-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$. Vậy

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\overrightarrow{n}, Ox) = \dfrac{n_1}{|\overrightarrow{n}|} = x \\ \cos\beta = \cos(\overrightarrow{n}, Oy) = \dfrac{n_2}{|\overrightarrow{n}|} = y \\ \cos\gamma = \cos(\overrightarrow{n}, Oz) = \dfrac{n_3}{|\overrightarrow{n}|} = z \end{cases}$$ ■

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II 4.5 ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S \left[(x-y)\cos\gamma + (y-z)\cos\beta + (z-x)\cos\alpha\right] dS \\ &= \iint\limits_S (x-y)z + (y-z)x + (z-x)y dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bài tập 4.12. *Tính tích phân mặt loại II*

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

[Đáp số] $I = 4\pi a^3$.

Bài tập 4.13. *Tính tích phân mặt $\iint\limits_S ydzdx$, trong đó S là phía ngoài của mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ $(0 \leq z \leq 2)$.*

[Đáp số] $I = 2\pi$.

CHƯƠNG 5

LÝ THUYẾT TRƯỜNG

§1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.11. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbf{R}^3$ (hoặc $\mathbf{R}^2$). Một hàm số*

$$\begin{aligned} u : \Omega &\to \mathbf{R} \\ (x, y, z) &\mapsto u = u(x, y, z) \end{aligned}$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

Cho $c \in \mathbf{R}$, khi đó mặt $S = \{(x, y, z) \in \Omega | u(x, y, z) = c\}$ được gọi là mặt mức ứng với giá trị c (đẳng trị).

1.2 Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 5.12. *Cho $u = u(x, y, z)$ là một trường vô hướng xác định trên Ω và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Giả thiết $\overrightarrow{l} = (a, b, c)$ là một véctơ đơn vị bất kì trong $\mathbf{R}^3$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số*

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(M_0 + t\vec{l})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} \tag{5.1}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại M_0 của trường vô hướng u và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)$.

Chú ý:

- Nếu $\vec{l}$ không phải là véc tơ đơn vị thì giới hạn trong công thức 5.1 có thể được thay bằng
$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t},$$
trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

- Nếu $\overrightarrow{l}\uparrow\uparrow Ox$ thì $\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{l}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.

- Đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\overrightarrow{l}$.

Định lý 5.18. *Nếu $u=u(x,y,z)$ khả vi tại $M(x_0,y_0,z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{l}\neq 0$ tại M_0 và*
$$\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{l}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0).\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0).\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0).\cos\gamma, \tag{5.2}$$
trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

Lời giải. Giả sử $\cos\alpha=a, \cos\beta=b, \cos\gamma=c$. Xét hàm số một biết số
$$g(t)=u(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc).$$
Khi đó, theo định nghĩa,
$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}=\frac{\partial u}{\partial\vec{l}}(M_0).$$
Mặt khác, $g(t)$ có thể viết dưới dạng $g(t)=u(x,y,z)$, ở đó $x=x_0+ta, y=y_0+tb, z=z_0+tc$. Vì vậy, theo công thức đạo hàm của hàm hợp,
$$g'(h)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial h}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial h}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial h}=u_x(x,y,z).a+u_y(x,y,z).b+u_z(x,y,z).c$$
Thay $t=0$ vào phương trình trên, ta có $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, và
$$\frac{\partial u}{\partial\vec{l}}(M_0)=u_x(M_0).a+u_y(M_0).b+u_z(M_0).c.$$
■

1.3 Gradient

Định nghĩa 5.13. *Cho $u(x,y,z)$ là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của u tại M_0 là véctơ*
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)$$
và được kí hiệu là [1]$\overrightarrow{\mathrm{grad}}u(M_0)$.

[1]Trong các tài liệu tiếng Anh, véctơ gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u$ của trường vô hướng u thường được kí hiệu là ∇u

Định lý 5.19. *Nếu trường vô hướng* $u(x,y,z)$ *khả vi tại* M_0 *và* $\overrightarrow{l}$ *là một véctơ đơn vị thì*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} u . \vec{l}$$

Chú ý: $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} u.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\text{grad}} u\right| \left|\vec{l}\right| . \cos\left(\overrightarrow{\text{grad}} u, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} u\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}\, u}$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\text{grad}\, u}$.
- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\text{grad}\, u}$.

1.4 Bài tập

Bài tập 5.1. Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ của $u = x^3 + 2y^3 - 3z^3$ tại $A(2,0,1)$, $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{AB}, B(1,2,-1)$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2)$ nên

$$\cos\alpha = \frac{-1}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-1}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 12$$
$$\cos\beta = \frac{2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0$$
$$\cos\gamma = \frac{-2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -9z^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = -9$$

■

Áp dụng công thức 5.2 ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A) = 12.\frac{-1}{3} + 0.\frac{2}{3} + (-9).\frac{-2}{3} = 2$$

Bài tập 5.2. Tính mônđun của $\overrightarrow{\text{grad}} u$ với $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại $A(2,1,1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}} u \perp Oz$, khi nào $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (3x^2 = 3yz, 3y^2 - 3zx, 3z^2 - 3xy)$$

nên $\overrightarrow{\text{grad}} u = (9,-3,-3)$ và $\left|\overrightarrow{\text{grad}} u\right| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{11}$.

- $\overrightarrow{\text{grad}} u \perp Oz \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} u, \overrightarrow{k} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$

- $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ ■

Bài tập 5.3. Tính $\overrightarrow{\text{grad}} u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài tập 5.4. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x \sin z - y \cos z$ từ gốc toạ độ $O(0,0)$ là lớn nhất?

Lời giải. Từ công thức $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) = \overrightarrow{\text{grad}} u . \vec{l} = \left| \overrightarrow{\text{grad}} u \right| \left| \vec{l} \right| . \cos \left(\overrightarrow{\text{grad}} u, \vec{l} \right)$ ta có $\left| \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) \right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left| \overrightarrow{\text{grad}} u \right| \left| \vec{l} \right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}} u(O) = (0, -1, 0)$. ■

Bài tập 5.5. Tính góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{\text{grad}} z$ của các hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$.

Lời giải. Ta có

- $\overrightarrow{\text{grad}} z_1 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}} z_1(M) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$.

- $\overrightarrow{\text{grad}} z_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3 + \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}} \right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}} z_2(M) = \left(2, -\frac{9}{4} \right)$. Vậy ■

$$\cos \alpha = \frac{\left\langle \overrightarrow{\text{grad}} z_1, \overrightarrow{\text{grad}} z_2 \right\rangle}{\left| \overrightarrow{\text{grad}} z_1 \right| . \left| \overrightarrow{\text{grad}} z_2 \right|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

§2. TRƯỜNG VÉCTƠ

2.1 Định nghĩa

Cho Ω là một miền mở trong $\mathbf{R}^3$. Một hàm véctơ

$$\mathbf{F} : \Omega \to \mathbf{R}^3$$
$$M \mapsto \mathbf{F} = \mathbf{F}(M),$$

trong đó

$$\mathbf{F} = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}.$$

2.2 Thông lượng, trường ống

a) Thông lượng: Cho S là một mặt định hướng và $\mathbf{F}$ là một trường véctơ. Đại lượng

$$\phi = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{5.3}$$

được gọi là thông lượng của $\mathbf{F}$ đi qua mặt cong S.

Ví dụ 2.1 (Cuối kì, K62). *Cho trường vectơ $\vec{F} = (xy^2 + z)\vec{i} + (x^2y + z)\vec{j}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$ hướng lên trên.*

Lời giải. Thông lượng $\phi = \iint\limits_S (xy^2 + z)dydz + (x^2y + z)dxdz$. Bổ sung mặt $D : \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ và áp dụng công thức Ostrogradski với véc tơ pháp tuyến trong ta có

$$I = \iint\limits_S + \iint\limits_D = -\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \quad \Rightarrow I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{r^2}^1 r^3 dz = -\frac{\pi}{6}$. Ngoài ra, $\iint\limits_D = 0$ nên

$$\phi = -\frac{\pi}{6}.$$

b) Trường véctơ $\mathbf{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu $\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Tính chất: Nếu $\mathbf{F}$ là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.

2.3 Hoàn lưu, véctơ xoáy

a) Toán tử vi phân "del" được định nghĩa như sau:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

b) Dive: Cho $\mathbf{F}$ là một trường véctơ có thành phần P, Q, R là các hàm số có đạo hàm riêng cấp một thì tổng $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ được gọi là dive của trường véctơ $\mathbf{F}$ và kí hiệu là $\operatorname{div}\mathbf{F}$. Nói cách khác,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

c) Véctơ xoáy: Véctơ

$$^{(2)}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\mathbf{F} := \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \nabla \wedge \mathbf{F}.$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ $\mathbf{F}$.

d) Hoàn lưu (hay lưu số): Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \tag{5.4}$$

được gọi là hoàn lưu của $\mathbf{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{C}$.

Ví dụ 2.2 (Cuối kì, K62). *Tính lưu số của trường vectơ $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ dọc theo đường xoắn ốc $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ đi từ $A(1,0,0)$ đến $B(0,1,\frac{\pi}{2})$.*

Lời giải. Lưu số $\phi = \int\limits_{L}(ydx + zdy + xdz) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) + t\cos t + \cos t)\, dt = \frac{\pi}{4}$. ■

e) Toán tử Laplace. Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số ba biến số. Khi đó

$$\operatorname{div}(\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Toán tử này được viết gọn thành

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla,$$

và được gọi là toán tử Laplace, bởi vì nó có liên hệ với phương trình Laplace sau

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

(2) Trong các tài liệu tiếng Anh, véctơ xoáy $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\mathbf{F}$ của trường véctơ $\mathbf{F}$ thường được kí hiệu là $\operatorname{curl}\mathbf{F}$

Bài tập 5.6. Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số ba biến số có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Chứng minh rằng

$$^{(3)}\,\mathrm{curl}(\nabla f) = 0.$$

Bài tập 5.7. Cho $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường véctơ trong $\mathbf{R}^3$, ở đó P, Q, R có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Chứng minh rằng

$$^{(4)}\,\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,F = 0.$$

2.4 Trường thế - hàm thế vị

Trường véctơ **F** được gọi là trường thế [5] (trên Ω) nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = \mathbf{F}$ (trên Ω). Khi đó hàm u được gọi là hàm thế vị.

Định lý 5.20. *Điều kiện cần và đủ để trường véctơ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$ là một trường thế (trên Ω) là $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.*

Chú ý: Nếu **F** là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C. \tag{5.5}$$

2.5 Tích phân đường (trong không gian) không phụ thuộc đường đi

Cho $D \subset \mathbf{R}^3$ là miền đơn liên, liên thông, $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường véctơ thỏa mãn P, Q, R cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

1) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{F}(M) = 0$ với mọi $M \in D$.

2) $\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.

3) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với mọi đường cong AB nằm trong D.

[3] Theo kí hiệu của môn Giải tích 2 này thì đẳng thức này được viết là $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = 0$

[4] Theo kí hiệu của môn Giải tích 2 này thì đẳng thức này được viết là $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{F} = 0$

[5] Như đã thảo luận ở mục 2.9, thuật ngữ trường véctơ bảo toàn cũng được sử dụng, và có lẽ là hợp lý hơn để ám chỉ tính chất bảo toàn năng lượng (động năng + thế năng = hằng số) của trường véctơ đó

4) **F** là một trường thế, nghĩa là có hàm số $u(x,y,z)$ sao cho $\overrightarrow{\text{grad}}u = \mathbf{F}$. Hàm thế vị u có thể được tìm theo công thức:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C. \tag{5.6}$$

2.6 Bài tập

Bài tập 5.8. Trong các trường sau, trường nào là trường thế?

a. $\mathbf{a} = 5(x^2 - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{b} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

c. $\mathbf{c} = (x+y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$.

Lời giải. a. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0,0,26x) \neq 0$$

nên trường đã cho không phải là trường thế.

b. Ngoài cách tính $\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{b}$, sinh viên có thể dễ dàng nhận thấy tồn tại hàm thế vị $u = xyz + C$ nên **b** là trường thế.

c. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0,0,0)$$

nên **c** là trường thế. Hàm thế vị được tính theo công thức 5.5:

$$\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^{x} F_x(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_z(x,y,t)dt + C \\ &= \int_0^x t\,dt + \int_0^y (x+0)dt + \int_0^z (t+y)dt + C \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C. \end{aligned}$$

■

Bài tập 5.9. Cho $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + zy^2\mathbf{k}$. Tính thông lượng của **F** qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

Lời giải. Theo công thức tính thông lượng 5.3 ta có

$$\phi = \iint_S xz^2dydz + yx^2dxdz + zy^2dxdy.$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\phi = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Thực hiện phép đổi biến trong toạ độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

ta có

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.r^2\sin\theta dr = \frac{4\pi}{5}.$$

Bài tập 5.10. Cho $\mathbf{F} = x(y+z)\mathbf{i} + y(z+x)\mathbf{j} + z(x+y)\mathbf{k}$ và L là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2+y=0$ và nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=2, z \ge 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\mathbf{F}$ dọc theo L bằng 0.

Lời giải. Theo công thức tính lưu số 5.4

$$I = \oint_L x(y+z)dx + y(z+x)dy + z(x+y)dz$$

Áp dụng công thức Stokes ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} dydz + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} dzdx + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_S (z-y)dydz + (x-z)dzdx + (y-x)dxdy \\ &= 0 \text{ (theo bài tập 4.11).} \end{aligned}$$

■

MỘT VÀI CHÚ THÍCH VỀ MẶT KÍ HIỆU VÀ THUẬT NGỮ

Để tránh hiểu nhầm và giúp độc giả thuận lợi khi đọc sách tham khảo (đặc biệt là sách tiếng Anh, theo sự hiểu biết của tác giả), cũng như là thống nhất kí hiệu với các đại lượng trong Vật lý, các kí hiệu sau đây được dùng đồng thời.

1) Véctơ i, j, k, theo như kí hiệu của môn Giải tích II này là $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, tức là có thêm dấu véctơ vào các đại lượng đó. Trong Bài giảng này, các đại lượng có hướng (véctơ) được viết in đậm, chẳng hạn như $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{F}$ hay là $\mathbf{a}$, để phân biệt với các đại lượng vô hướng như a, b, c.

2) Tích có hướng giữa hai véctơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$, theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Tích vô hướng thì có sự thống nhất, được kí hiệu là $\mathbf{ab}$ hay là $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (có dấu chấm ở giữa). Lý do là trong tiếng Anh, tích có hướng giữa hai véctơ gọi là *the cross product* và tích vô hướng được gọi là *the dot product*.

3) Tích phân đường loại I, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân đường của trường vô hướng.

4) Tích phân đường loại II, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân đường của trường véctơ.

5) Tích phân mặt loại I, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân mặt của trường vô hướng.

6) Tích phân mặt loại II, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là tích phân mặt của trường véctơ.

7) Tích phân đường loại II của trường véctơ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, theo cách kí hiệu trong môn Giải tích II này là $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, trong các tài liệu khác có thể được kí hiệu

là $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

8) Tích phân mặt loại II của trường véctơ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, theo cách kí hiệu trong môn Giải tích II này là $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được kí hiệu là $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, chú ý rằng chữ **S** được viết in đậm và có dấu chấm ở giữa **F** và $d\mathbf{S}$, để nhằm phân biệt với tích phân mặt loại một $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$.

9) Các cách kí hiệu $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ và $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ này có những thuận lợi nhất định. Chẳng hạn như,

   i) công thức Stokes
$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},$$
   và công thức Green
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_D (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}dxdy.$$
   nếu viết dưới dạng véctơ như trên thì bạn đọc sẽ hình dung ra công thức Stokes là một phiên bản của công thức Green trong không gian ba chiều. Tương tự như vậy là mối liên hệ giữa công thức Ostrogradsky
$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz$$
   và một dạng véctơ khác của công thức Green
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{F}dxdy.$$
   Cũng chú ý thêm là công thức Ostrogradsky còn được gọi là công thức Gauss hay Ostrogradsky - Gauss trong các tài liệu khác.

   ii) Kí hiệu $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$ thường được dùng trong vật lý, vì nó thể hiện bản chất của tích phân đường này chính là công của lực biến đổi **F** dọc theo đường cong C.

iii) Ngoài ra, kí hiệu $\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dùng để chỉ tích phân đường mà không cần phân biệt đây là tích phân đường trong mặt phẳng $\int\limits_C Pdx + Qdy$ hay trong không gian $\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$.

10) Véctơ gradient của trường vô hướng f, theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là ∇f để thể hiện mối liên hệ với toán tử vi phân "del"
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$
và toán tử Laplace
$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

11) Véctơ xoáy của trường véctơ **F**, theo kí hiệu trong môn Giải tích II này là $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{F}$, các tài liệu tham khảo khác thường kí hiệu là $\mathrm{curl}\,\mathbf{F}$. Bởi vì trong tiếng Anh, curl nghĩa là xoắn hay là xoáy.

12) Trường thế, theo như cách gọi của môn Giải tích II này, trong các tài liệu tham khảo khác có thể được gọi là trường bảo toàn (conservative vector fields), để chỉ rõ tính chất bảo toàn (động năng + thế năng = hằng số) của trường véctơ đó.

13) Về định nghĩa của tích phân kép, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.14. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta S_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm $M(x_i, y_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là*
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận khác, đó là đầu tiên đi định nghĩa tích phân kép trên miền hình chữ nhật, sau đó mở rộng nó ra cho miền D bị chặn bất kì.

14) Một cách tương tự, về định nghĩa của tích phân bội ba, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.15. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn V của $\mathbf{R}^3$. Chia miền V một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Trong mỗi miền Δ_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i, z_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho* $\max\{\Delta V_i \to 0\}$ *mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là* tích phân bội ba *của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V, kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV$ hay $\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz$.*

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận khác, đó là đầu tiên đi định nghĩa tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật, sau đó mở rộng nó ra cho miền V bị chặn bất kì.

15) Về định nghĩa của tích phân đường loại I, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.16. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Trên mỗi cung Δs_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta s_i$ khi $n \to \infty$ sao cho* $\max \Delta s_i \to 0$ *không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại một của hàm số $f(x,y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\, ds$.*

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán thực tế là tính khối lượng của một đường cong C cho bởi phương trình véctơ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \le t \le b.$$

Khi đó ta chủ động chia $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau và định nghĩa tích phân đường giống như cách đã làm với tích phân xác định $\int\limits_a^b f(x)dx$.

16) Về định nghĩa của tích phân đường loại II, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.17. *Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ Δs_i bởi các điểm chia $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$.Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ và lấy điểm M_i bất kì trên mỗi cung Δs_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]$ sao cho* $\max \Delta x_i \to 0$*, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$.*

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán trong Vật lý là tính công của một lực biến đổi và định nghĩa tích phân đường loại II thông qua mối liên hệ với tích phân đường loại I.

17) Về định nghĩa của tích phân mặt loại I, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.18. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt cong S thành n mặt nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ và $\max\limits_{1\le i\le n} d(\Delta S_i) \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia mặt cong S và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân mặt loại I của hàm số $f(M)$ trên mặt cong S, kí hiệu là*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận xuất phát từ bài toán tính khối lượng của mặt cong S và định nghĩa tích phân mặt loại I thông qua tích phân kép và công thức tính diện tích mặt.

18) Về định nghĩa của tích phân mặt loại II, nhiều tài liệu trình bày theo cách sau.

Định nghĩa 5.19. *Cho một mặt cong định hướng S trong miền $V \subset \mathbb{R}^3$ và $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véctơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của S tại điểm $M(x,y,z)$. Giả trường vectơ $\overrightarrow{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ biến thiên liên tục trên V, nghĩa là các toạ độ $P(M), Q(M), R(M)$ của nó là những hàm số liên tục trên V. Chia mặt S thành n mặt cong nhỏ, gọi tên và cả diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì và gọi vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của nó là $n_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$.*
Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$ được gọi là tích phân mặt loại II của các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ trên mặt S, và được kí hiệu là:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Trong Bài giảng này, tác giả trình bày cách tiếp cận dựa trên bài toán tính khối lượng chất lỏng chảy qua mặt S trên một đơn vị thời gian và định nghĩa tích phân mặt loại II thông qua tích phân mặt loại I.

CHƯƠNG 6

CHUỖI (11LT+11BT)

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa 6.20. *Cho* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số. Tổng vô hạn*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *trong đó* a_n *được gọi là số hạng tổng quát và* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *được gọi là tổng riêng thứ* n.

i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ *là hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *tồn tại, thì ta nói chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và có tổng bằng* S *và viết*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ.*

Ví dụ 1.1. *Hãy xét ví dụ trực quan đầu tiên về chuỗi số là như sau. Chúng ta bắt đầu với khoảng* $[0,1]$. *Chia đôi khoảng này ra thì ta được hai khoảng là* $[0,1/2]$ *và* $(1/2,1]$, *mỗi khoảng có độ dài bằng* $1/2$. *Sau đó ta lại tiếp tục chia đôi khoảng* $[0,1/2]$, *thì ta sẽ được hai khoảng, mỗi khoảng có độ dài bằng* $1/4$. *Tiếp tục kéo dài quá trình này ta sẽ được chuỗi số sau:*

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ví dụ 1.2. *Xét chuỗi số sau:*

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có tổng riêng thứ n bằng $n(n+1)/2$ nên tiến ra vô cùng khi n tiến ra vô cùng. Nói cách khác, chuỗi số này là phân kỳ.

Ví dụ 1.3 (Ngụy biện toán học). *Chứng minh rằng* $-1 = +\infty$.

Lời giải. Xét chuỗi số
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$
Ta có
$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + S \Rightarrow S = 1.$$
Áp dụng cũng lập luận đó với chuỗi số
$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots$$
thì
$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1 \Rightarrow S = -1 \Rightarrow -1 = +\infty.$$
Tại sao với cùng một lập luận mà
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$
dẫn đến một kết quả đúng, trong khi đó
$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots = -1$$
lại dẫn đến một kết quả sai? ■

Ví dụ 1.4 (Ngụy biện toán học). *Chứng minh rằng* $0 = 1$.

Lời giải. Xét chuỗi số $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Ta có
$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$
Mặt khác,
$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$
Vậy $0 = 1$. ■

Ví dụ 1.5. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của* [1] *chuỗi hình học* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ *Ta có*
$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

[1] còn gọi là chuỗi cấp số nhân

Do đó $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- *Trường hợp* $q = 1$ *dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì có tổng riêng thứ* n *bằng* an.
- *Trường hợp* $q = -1$ *ta có* $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ *nên không tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Kết luận: chuỗi hình học đã cho hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$ *nếu* $|q| < 1$ *và phân kỳ nếu* $|q| \geq 1$.

Ví dụ 1.6. *Viết số thực sau* $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ *dưới dạng phân số.*

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một hình học với $a = \frac{17}{10^3}$ *và* $q = \frac{1}{10^2}$. *Do đó*

$$2.3\overline{17} = \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

Ví dụ 1.7. *Chứng minh rằng* $1.9999\ldots = 2$.

Lời giải. Ta có

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots = 1 + \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Sau số hạng đầu tiên thì tổng đã cho là một hình học với $a = \frac{9}{10}$ và $q = \frac{1}{10}$. Do đó,

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2.$$

■

Nếu chỉ nhìn thoáng qua thì có vẻ như là $1.9999\ldots < 2$. Chính vì vậy, nếu chưa được học khái niệm về giới hạn hoặc chuỗi số, đẳng thức này có lẽ sẽ gây bối rối cho nhiều người.

Ví dụ 1.8 (Nghịch lý Zeno). [2] *Có lẽ, một trong những nghịch lý nổi tiếng nhất của toán học là nghịch lý Zeno, được đưa ra bởi nhà triết học Hy Lạp cổ đại Zeno of Elea (c. 490–430*

[2] Một nghịch lý tương đương với nó là nghịch lý Achilles và rùa như sau. Achilles chạy đua với rùa. Vì Achilles chạy nhanh hơn rùa nên đồng ý rằng Achilles chấp rùa một đoạn 100 mét. Nếu chúng ta giả sử rằng mỗi tay đua đều bắt đầu chạy với một tốc độ không đổi (Achilles chạy rất nhanh và rùa rất chậm), thì sau một thời gian hữu hạn, Achilles sẽ chạy được 100 mét, tức anh ta đã đến được điểm xuất phát của con rùa. Nhưng trong thời gian này, con rùa cũng đã chạy được một quãng đường ngắn, ví dụ 10 mét. Sau đó Achilles lại tốn một khoảng thời gian nữa để chạy đến điểm cách 10 mét ấy, mà trong thời gian đó thì con rùa lại tiến xa hơn một chút nữa, và cứ như thế mãi. Vì vậy, bất cứ khi nào Achilles đến một vị trí mà con rùa đã đến, thì con rùa lại cách đó một đoạn. Bởi vì số lượng các điểm Achilles phải đến được mà con rùa đã đi qua là vô hạn, do đó anh ta không bao giờ có thể bắt kịp được con rùa

BC). Giả sử bạn thả một quả bóng từ điểm A có độ cao 1 đơn vị độ dài nào đó so với mặt đất. Bạn nghĩ quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất (dưới tác dụng của lực hấp dẫn). Tuy nhiên, điều này là không thể. Gọi B là điểm hình chiếu của A xuống mặt đất.

1) *Để di chuyển từ A đến B, quả bóng phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{2}$ đến điểm A_1 là trung điểm A và B.*

2) *Sau khi di chuyển đến A_1, quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đươcng bằng $\frac{1}{4}$ đến điểm A_2 là trung điểm giữa A_1 và B.*

3) *sau đó, quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{8}$ đến điểm A_3 là trung điểm của A_2 và B.*

4) *Quá trình này sẽ tiếp tục, đến bước thứ n quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{2^n}$ đến điểm A_n là trung điểm giữa A_{n-1} và B.*

Vì chuỗi này là vô hạn nên quả bóng sẽ không bao giờ chạm đến mặt đất.

Một số giải pháp được đề xuất. Từ xưa đến nay đã có nhiều giải pháp được đề xuất, trong đó có những giải pháp đầu tiên của Aristotle và Archimedes

1) Aristotle (384 TCN-322 TCN) nhận xét rằng, vì khoảng cách giảm dần nên thời gian cần thiết để thực hiện di chuyển những khoảng cách đó cũng giảm dần

2) Archimedes đã trình bày một phương pháp để tìm ra một kết quả hữu hạn cho một tổng gồm vô hạn phần tử giảm dần, tức là lượng thời gian thực hiện ở mỗi bước giảm theo cấp số nhân, và có vô số khoảng thời gian nhưng tổng thời lượng cần thiết dành cho sự di chuyển từ điểm này đến điểm kia lại là một số hữu hạn, do đó vẫn có thể thực hiện được chuyển động này.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Ví dụ 1.9. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Trước hết ta phân tích $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ta có*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Định lý 6.21 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).
Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Lời giải. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Vì $n-1\to\infty$ khi $n\to\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý 6.12.

1. *Mệnh đề đảo của Định lý 6.21 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \to 0$ *khi* $n\to\infty$, *nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 2.12 dưới đây).*

2. *Định lý 6.21 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ *nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. *Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kì của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=2016}^{\infty} a_n$ *sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Ví dụ 1.10. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ là phân kì bởi vì khi $n\to\infty$

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$

Ví dụ 1.11 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cos\frac{1}{n}$. *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cos\frac{2}{n}$.

Định lý 6.22 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ). *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *cũng là một chuỗi số hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bài tập 6.1. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2016}{n(n+1)}+\frac{2017}{2^n}\right)$.

Bài tập 6.2. *Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.*

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$.

[Gợi ý]

(a) Tách $\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$.

(b) Tách $\ln\frac{n}{n+1}=\ln n-\ln(n+1)$.

(c) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3}=\infty$ (bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^3}=\infty$). Chuỗi đã cho phân kì.

(d) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln\frac{1}{2}$. Chuỗi đã cho phân kì.

(e) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Chuỗi đã cho phân kì.

(f) Tách $\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Bài tập 6.3. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau*

(a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots$

(c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$

[Gợi ý]

(a) Viết chuỗi số đã cho thành tổng của hai chuỗi hình học (hội tụ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

(b) Tách $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

(c) Tách $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Định nghĩa 6.21. *Chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một là chuỗi số dương.*

Nhận xét rằng một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n của chúng là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

2.1 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 6.23. *Cho* $f(x)$ *là một hàm số liên tục, dương, giảm trên đoạn* $[1, \infty)$ *và* $a_n = f(n)$. *Khi đó chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tích phân suy rộng* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,*

i) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

Lời giải. Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ n đến $n+1$ ta được

$$a_{n+1} \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tổng từ 1 đến $M - 1$ ta được

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \cdots + \int\limits_{M-1}^{M} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}$$

hay

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int\limits_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}. \tag{6.1}$$

i) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S$ thì từ bất đẳng thức (6.1) ta có $S_M - a_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} (S_M - a_1) = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A + a_1$.

ii) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ phân kì, trong trường hợp này vì hàm $f(x)$ dương nên điều này có nghĩa là $\lim\limits_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = +\infty$. Bất đẳng thức (6.1) suy ra $\lim\limits_{M\to\infty} S_{M-1} = +\infty$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. ■

Chú ý 6.13. *Khi sử dụng tiêu chuẩn tích phân, không nhất thiết chuỗi số phải bắt đầu từ $n = 1$. Chẳng hạn như chúng ta có thể kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ bằng cách kiểm tra sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx$.*

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ là liên tục, dương, và giảm trên đoạn $[1,\infty)$. Xét tích phân suy rộng

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.12. *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$.*

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ là liên tục, dương, và giảm trên $[1,\infty)$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ là hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$.■

Chú ý 6.14.

a) *Hàm zeta được định nghĩa như sau $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ông cũng là người tìm ra công thức $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Hai công thức này sẽ được chứng minh ở Hệ quả 6.2 (Bài về chuỗi hàm số) và Hệ quả* **??** *(Bài về chuỗi Fourier).*

b) *Tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ là khác nhau. Chẳng hạn như $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ trong khi đó $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.*

Bài tập 6.4. *Dùng tiêu chuẩn tích phân chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *là hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

Bài tập 6.5. *Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem các chuỗi số sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2}$

Bài tập 6.6. *Giải thích tại sao không thể dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 6.24 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có* $a_n \le b_n$ *với mọi* n *hoặc kể từ một số* n *nào đó. Khi đó*

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *cũng là phân kỳ.*

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \tag{6.2}$$

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B$ và $B_n \le B$ với mọi n. Bất đẳng thức (6.2) chứng tỏ dãy tổng riêng A_n là một dãy số bị chặn, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (6.2). ■

Ví dụ 2.13. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 2.12, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ■

Ví dụ 2.14. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Lời giải. Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.12, nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ■

Ví dụ 2.15 (Cuối kì, K62). *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$.

[Lời giải] Ta có

$$u_n = \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln[\ln(\ln(n+1))]}} = \frac{1}{n^{\ln[\ln(\ln(n+1))]}}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln[\ln(\ln(n+1))] = +\infty$ nên tồn tại $N_0 > 0$ sao cho $\ln[\ln(\ln(n+1))] > 2\ \forall n > N_0$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^2} \forall n > N_0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

Ví dụ 2.16 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n-1)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$.

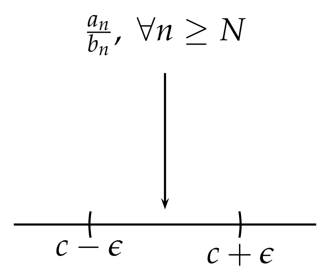
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Định lý 6.25 (Định lý so sánh 2). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Lời giải. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(c-\epsilon, c+\epsilon)$.



Hình 6.25

Theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số N sao cho

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n.$$

Lấy tổng từ $n = N$ đến ∞ ta được

$$(c-\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c+\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n. \tag{6.3}$$

Không mất tính tổng quát số ϵ có thể chọn sao cho $c - \epsilon > 0$. Khi đó

- vế phải của bất đẳng thức (6.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,
- vế trái của bất đẳng thức (6.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ. ■

Chú ý 6.15.

a) *Các trường hợp đặc biệt*

- *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *suy ra với* n *đủ lớn thì* $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ *hay* $a_n \leq b_n$ *với mọi* $n \geq N$ *nào đó.*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kì thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng phân kì. Điều này cũng dễ hiểu vì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *suy ra với* n *đủ lớn thì* $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ *hay* $a_n \geq b_n$ *với mọi* $n \geq N$ *nào đó*

b) *Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dáng điệu" của số hạng tổng quát* a_n *tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:*

- *Chuỗi hình học* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kì nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- *Chuỗi hàm zeta* $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kì nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 2.17. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

Lời giải. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là n^2 và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n).n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.12 nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

Ví dụ 2.18. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Lời giải. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là 3^n và số hạng trội của mẫu số là 5^n. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} = 1.$$

Mà chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.5, do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ■

Chú ý 6.16. *Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:*

1. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của n hoặc là các lũy thừa của n, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0+a_1n^{\alpha_1}+a_2n^{\alpha_2}+\cdots+a_mn^{\alpha_m}}{b_0+b_1n^{\beta_1}+b_2n^{\beta_2}+\cdots+b_kn^{\beta_k}}, \text{ với } 0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m, 0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k.$$

   Khi đó số hạng trội của tử số là $a_mn^{\alpha_m}$ và số hạng trội của mẫu là $b_kn^{\beta_k}$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k-\alpha_m}}$. Theo Ví dụ 2.12, chuỗi đã cho là hội tụ nếu $\beta_k-\alpha_m>1$ và phân kỳ nếu $\beta_k-\alpha_m\le 1$.

2. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là n, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1a_1^n+\alpha_2a_2^n+\cdots+\alpha_ma_m^n}{\beta_1b_1^n+\beta_2b_2^n+\cdots+\beta_kb_k^n}, \text{ với } 0<a_1<a_2<\cdots<a_m, 0<b_1<b_2<\cdots<b_k.$$

Khi đó số hạng trội của tử số là $\alpha_m a_m^n$ và số hạng trội của mẫu số là $\beta_k b_k^n$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Theo Ví dụ 1.5, chuỗi đã cho hội tụ nếu $\frac{a_m}{b_k} < 1$ và phân kỳ nếu $\frac{a_m}{b_k} \geq 1$.

3. *Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

ở đó $o(x^3)$ *là kí hiệu VCB bậc cao hơn* x^3*, ta có*

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \textit{ khi } x \to 0.$$

Khi $n \to \infty$ *thì* $\frac{1}{n} \to 0$*, do đó*

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \textit{ khi } n \to \infty.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ *hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{e} - 1 - \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n-1}{n^2-n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Một số VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \dfrac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$,
- $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \ln \sqrt[m]{1+\alpha x} = \dfrac{1}{m}\ln(1+\alpha x) \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Ví dụ 2.19 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+1})$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+3})$.

Ví dụ 2.20.

a) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{\pi}{2^n}$

Đây là một chuỗi số dương, khi $n \to \infty$, ta có $\arctan \dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{\pi}{2^n}$ cũng hội tụ.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

Khi $n \to \infty$: $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \dfrac{2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$, do đó

Nếu $\alpha > \dfrac{1}{2}$: chuỗi số là hội tụ; nếu $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, chuỗi số là phân kì.

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Để sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi số kiểu này, chúng ta ghi nhớ hai giới hạn quan trọng sau.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, (a > 1, \forall \alpha)$, hay $n^\alpha \leq e^n$ khi n là đủ lớn.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^\beta n} = +\infty, (\forall \beta)$, hay $\ln^\beta n \leq n$ khi n là đủ lớn.

Nói một cách khác thì khi $n \to \infty$, hàm số mũ, hàm đa thức và hàm số logarit của n đều là các VCL. Tuy nhiên, hàm số mũ tiến ra vô cùng "nhanh hơn" hàm đa thức, và hàm đa thức "nhanh hơn" hàm số logarit.

Chúng ta sẽ dùng giới hạn đầu tiên: $(\sqrt{n})^\alpha \leq e^{\sqrt{n}}$ khi n đủ lớn, hay là tương đương, $e^{-\sqrt{n}} \leq n^{-\frac{\alpha}{2}}$, với n đủ lớn và với mọi α. Chọn $\alpha = 4$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ; nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ cũng là hội tụ.

Bài tập 6.7. *Dùng tiêu chuẩn so sánh để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(n+2)^4}$ *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2016^n}{2015^n + 2017^n}$ *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin^2 n}{1+n^3}$ *4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + \sin n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ *7)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n+1}{n^3+n+1}$ *8)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \dfrac{1}{3n^2}\right]$

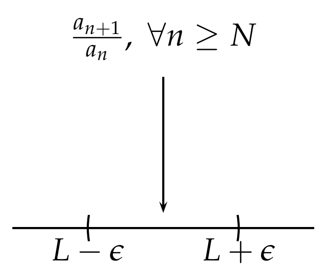
2.3 Tiêu chuẩn d'Alambert

Định lý 6.26. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

ii) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

Lời giải. 1. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 6.26

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L + \epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \ \forall n \geq N.$$
Do đó
$$a_n < (L+\epsilon)a_{n-1} < (L+\epsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < a_N (L+\epsilon)^{n-N} = \frac{a_N}{(L+\epsilon)^N}.(L+\epsilon)^n, \ \forall n > N.$$
Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L+\epsilon)^n$ hội tụ ($L + \epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

2. Nếu $L > 1$ thì $u_{n+1} > u_n$ với n đủ lớn, chẳng hạn với mọi $n \geq N$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a_N > 0$. Chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. ■

Chú ý:

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.
- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn d'Alambert, giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$

  Lời giải. Giới hạn trên có thể được chứng minh bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số như sau.

  Ta có
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} = \alpha.$$

  Do đó
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}.$$
■

Ví dụ 2.21. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Lời giải. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.22. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n n!}{n^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.23. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{3^n}$. *Ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+5}{3(n^2+5)} = \frac{1}{3} < 1$$

nên chuỗi đa cho hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alambert.

Ví dụ 2.24 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$

Bài tập 6.8. *Dùng tiêu chuẩn d'Alambert để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n!)^2}{n^{2n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n\ln(n+1)}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{n+\sin n}{3n+1}\right)^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+n+1}{n!\pi^n}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{n+1}{2^n+1}\right)$.

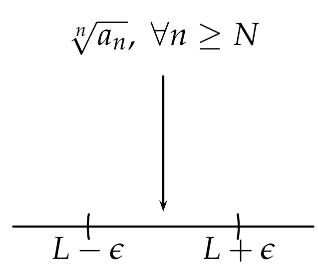
2.4 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 6.27. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

ii) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

Lời giải. i) Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 6.27

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L+\epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\epsilon \Leftrightarrow a_n < (L+\epsilon)^n,\ \forall n \geq N.$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ (do $L+\epsilon<1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $L>1$ ta chọn số $\epsilon>0$ bất kì nào đó sao cho $L-\epsilon>1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\sqrt[n]{a_n}>L-\epsilon \Leftrightarrow a_n>(L-\epsilon)^n,\ \forall n\geq N.$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)^n$ phân kì (do $L-\epsilon>1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kì. ∎

Chú ý:

- Nếu $L=1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L=1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn Cauchy, các giới hạn sau đây thường hay được sử dụng

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ \forall a>0.$$

Lời giải. Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh hai giới hạn trên bằng cách đưa về giới hạn của các hàm số sau đây:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x}}=1,\ \forall a>0.$$

∎

- Thậm chí là, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1$ với mọi đa thức $P(n)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Thật vậy,

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{P(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln P(n)}{n}.$$

Mặt khác, theo công thức L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln P(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)'}{P(x)}=0$$

($P'(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $P(x)$). Vậy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln P(n)}{n}=0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1.$$

Ví dụ 2.25. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Lời giải. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.26. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Lời giải. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.27 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$

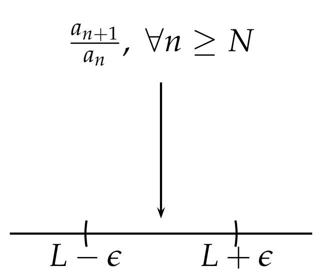
2.5 Đọc thêm: Tiêu chuẩn d'Alambert vs Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý dưới đây khẳng định rằng tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, theo nghĩa là nếu có thể dùng tiêu chuẩn d'Alambert để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của một chuỗi số dương thì tiêu chuẩn Cauchy cũng có thể sử dụng được.

Định lý 6.28. *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Nếu tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, \infty]$ *thì*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Lời giải. Định lý trên được chứng minh một cách *rất đơn giản* chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 6.28

Một cách chính xác, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Do đó

$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_{N+1}}{a_N}.\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < (L+\epsilon)^{n-N}$$

hay

$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_n}{a_N} < (L+\epsilon)^{n-N}, \ \forall n > N.$$

Từ đó suy ra

$$a_N(L-\epsilon)^{n-N} < a_n < a_N(L+\epsilon)^{n-N}, \ \forall n > N.$$

Lấy căn bậc n và cho $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} \lim_{n\to+\infty} (L-\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} \lim_{n\to+\infty} (L+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}}$$

Do đó

$$L - \epsilon \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \epsilon. \tag{6.4}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} = 1$. Bất đẳng thức (6.4) đúng với mọi $\epsilon > 0$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

■

Mặc dù tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, nhưng đôi khi việc này chỉ *mang tính chất lý thuyết*. Có những bài tập "đặc thù" mà việc dùng tiêu chuẩn d'Alambert dễ dàng hơn rất nhiều so với tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn như,

Ví dụ 2.28. *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ta có*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

nên chuỗi đã cho hội tụ. Nếu muốn dùng tiêu chuẩn Cauchy trong trường hợp này các bạn phải đi tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. Giới hạn này không dễ tính, mặc dù theo Định lý 6.28,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Bài tập 6.9. *Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Lời giải. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên theo định nghĩa giới hạn của dãy số, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Do đó,

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1.2.\ldots N \ldots n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}.\sqrt[n]{\frac{1}{(N+1)(N+2)\ldots n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\sqrt[n]{\epsilon^{n-N}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}}.$$

Vì vậy

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}} = \epsilon. \tag{6.5}$$

■

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}} = 1$, với mỗi số N cho trước.

Bất đẳng thức (6.5) đúng với mỗi số $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$.

Cuối cùng, để chỉ ra tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.29. *Xét chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$. *Chứng minh rằng*

- *Không tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *nói cách khác tiêu chuẩn d'Alambert không sử dụng được trong trường hợp này.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, *do đó theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.*

Bài tập 6.10. *Hãy xây dựng thêm các ví dụ khác mà tiêu chuẩn d'Alambert không áp dụng được nhưng có thể dùng tiêu chuẩn Cauchy để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đó.*

Bài tập 6.11. *Dùng tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{3n^2+n+1}\right)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+4)}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+\sqrt{n}+\sin n}{2n^2+1}\right)^{3n}$

2.6 Bài tập ôn tập

Bài tập 6.12. *Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh, d'Alembert, Cauchy, Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n^2+1}$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$,

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$,

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$,

(g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$,

(h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1}$,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{1+n}{n}\right)$,

(j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2}$,

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$,

(l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho phân kì.

(b) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Nhân liên hợp và dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Dùng tiêu chuẩn so sánh, với gợi ý $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(g) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{\ln}{\sqrt{n}} > \frac{\ln 2}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(h) Viết $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{2}{n-1}$ khi $n\to\infty$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Nhớ lại khai triển Maclaurin trong học phần Giải tích I, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, do đó $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$ khi $x \to 0$. Vậy $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n\to\infty$.

(j) $\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2} = \ln\left(1+\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\frac{1}{n^2} \sim \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}.\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3}$ khi $n\to\infty$.

(k) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(l) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho phân kì.

Bài tập 6.13. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$,

(i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$.

[Gợi ý]

(a) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(c) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Có thể sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. Nếu sử dụng tiêu chuẩn Cauchy thì các bạn nên nhớ một giới hạn quan trọng sau $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Chứng minh giới hạn này bằng cách $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

(g) $\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}=-\frac{\ln n}{n^2}$. Ta có $\ln n<\sqrt{n}$ với mọi $n\geq 4$, nên $\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ với mọi $n\geq 4$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ. Tại sao lại nghĩ đến bất đẳng thức $\ln n<\sqrt{n}$ với mọi $n\geq 4$? Chúng ta biết rằng $\ln n$ là vô cùng lớn bậc thấp hơn x^α với mọi $\alpha>0$. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Chính vì vậy, với mọi $\alpha>0$ thì "đến một lúc nào đó", hay là với n "đủ lớn", hoặc chính xác hơn, tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\ln n<n^\alpha \text{ với mọi } n\geq N.$$

Cụ thể, trong bài tập này chúng ta có thể chọn $\alpha=\frac{1}{2}$ như gợi ý trên, hoặc có thể chọn $\alpha\in(0,1)$ bất kì.

(h) $\{S_n\}, S_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2}=4S_{n+1}-S_n$, với mọi $n\geq 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng S_n là chia hết cho 4, do đó nó là số chẵn với mọi n.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]=-\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n]\sim-\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n\to\infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0<\pi(2-\sqrt{3})<1$, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Dùng tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

§3. CHUỖI SỐ VỚI SỐ HẠNG CÓ DẤU BẤT KÌ

3.1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 6.29. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

Lời giải. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \\ &\leq 2T, \end{aligned} \tag{6.6}$$

ở đó $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vậy $\{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại

$$A = \lim_{n\to+\infty} (S_n + T_n).$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = A - \lim_{n\to+\infty} T_n = A - T,$$

chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A - T$. ∎

Chú ý 6.17. *Mệnh đề đảo của Định lý 6.29 là không đúng. Nghĩa là nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì không kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *cũng là hội tụ, xem Ví dụ 3.33 dưới đây. Điều này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.*

Định nghĩa 6.22 (Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ). *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *được gọi là*

i) hội tụ tuyệt đối nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ,*

ii) bán hội tụ nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ.*

Ví dụ 3.30. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.

Lời giải. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ là hội tụ (theo tiêu chuẩn d'Alambert) nên chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối. ∎

Ví dụ 3.31. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$.

Lời giải. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right|$ có $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ là hội tụ, do đó chuỗi số đã cho là hội tụ tuyệt đối. ■

Chú ý 6.18. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ, ví dụ như trường hợp chuỗi bán hội tụ trong Ví dụ 3.33 dưới đây chẳng hạn. Tuy nhiên, nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alambert hoặc theo tiêu chuẩn Cauchy thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

Định lý 6.30 (Tiêu chuẩn d'Alambert mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. *Khi đó*

i) *Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) *Nếu* $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

Định lý 6.31 (Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|} = L$. *Khi đó*

i) *Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) *Nếu* $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

Ví dụ 3.32. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{an}{(1-a^2)^n} (0 < |a| \neq 1)$. *Ta có*

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a|n}}{|1-a^2|} = \frac{1}{|1-a^2|}.$$

Nếu $0 < |a| < \sqrt{2}$ *thì* $l = \frac{1}{|1-a^2|} > 1$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn Cauchy.*

Nếu $|a| > \sqrt{2}$ *thì* $l = \frac{1}{a^2-1} < 1$, *chuỗi đã cho hội tụ.*

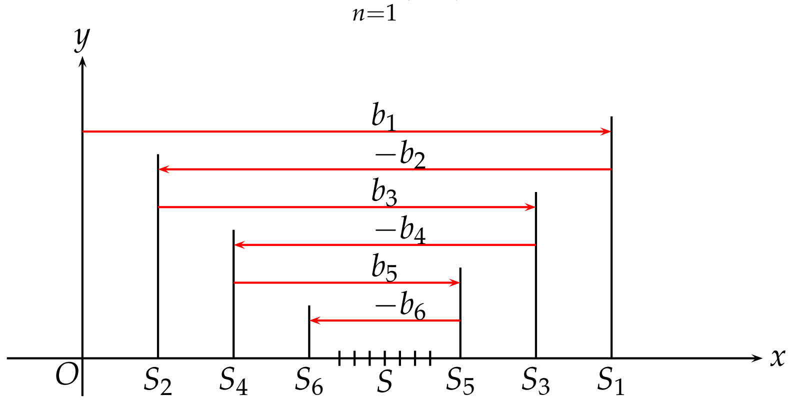
Nếu $|a| = \sqrt{2}$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần.*

Để chỉ ra cho bạn đọc các ví dụ về chuỗi bán hội tụ, chúng ta cần đến khái niệm chuỗi đan dấu sau.

3.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 6.23. *Chuỗi số có dạng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một chuỗi đan dấu.*

Định lý 6.32 (Định lý Leibniz). *Nếu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số dương, giảm và* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *là một chuỗi số hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \le a_1$.



Lời giải. Xét dãy tổng riêng S_{2n} có

$$S_{2n+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+2}) \ge S_{2n}.$$

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1.$$

Như vậy dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi a_1 nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S \le a_1$. Bây giờ xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S2n + a_{2n+1}$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Kết luận: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là một chuỗi số hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S \le a_1$. ■

Ví dụ 3.33. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

Lời giải. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ là phân kỳ. Mặt khác $a_n = \frac{1}{n+1}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, do đó chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ là hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho là bán hội tụ. ■

Ví dụ 3.34. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

Lời giải. Dễ nhận thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ là phân kỳ. Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$ có $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$. Trong trường hợp này sẽ không dễ dàng để nhìn thấy ngay a_n là một chuỗi số giảm. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ có

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

$f'(x) < 0$ nếu $x > \sqrt[3]{2}$, do đó $f(x)$ là hàm số giảm trên $(2,\infty)$. Do đó $a_n > a_{n+1}$ với $n > 2$. Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi đan dấu đã cho hội tụ và do đó bán hội tụ. ■

Bài tập 6.14. *Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+4}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\pi^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

3.3 Hội tụ tuyệt đối vs Bán hội tụ

Chuỗi hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ khác nhau căn bản ở nhận xét sau đây.

- Với chuỗi hội tụ tuyệt đối, cho dù có thay đổi vị trí các số hạng một cách tùy ý như thế nào đi nữa, chuỗi số mới nhận được vẫn hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng chuỗi ban đầu.
- Còn với chuỗi bán hội tụ thì với mọi $M \in \mathbf{R}$ (thậm chí bằng ∞), tồn tại một cách thay đổi thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi đã cho để nhận được chuỗi mới có tổng bằng M.

Đó chính là nội dung của hai Định lý rất sâu sắc, Định lý Dirichlet và Định lý Riemann.

Định lý 6.33.

1. *(Dirichlet) Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ là hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = S$. Gọi $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một phép hoán vị (hay phép thế, phép song ánh, hay nói nôm na là một cách sắp xếp lại thứ tự các phần tử) bất kì của $\mathbb{N}$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\pi(n)}$ cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S.*

2. *(Riemann) Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là bán hội tụ và M là một số thực bất kì. Khi đó tồn tại một phép hoán vị π trên $\mathbb{N}$ sao cho chuỗi $a_{\pi(n)}$ hội tụ và có tổng bằng M.*

Lời giải. 1. Hiển nhiên

$$T_n = |a_{\pi(1)}| + |a_{\pi(2)}| + \cdots + |a_{\pi(n)}| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S, \forall n,$$

nên dãy các tổng riêng $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ là một dãy số tăng và bị chặn. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T \le S$. Bất đẳng thức ngược lại được chứng minh một cách tương tự. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = T.$$

Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Để chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ cũng có tổng bằng A, ta viết

$$\begin{aligned} a_{\pi_n} &= \left(\frac{|a_{\pi_n}| + a_{\pi_n}}{2}\right) - \left(\frac{|a_{\pi_n}| - a_{\pi_n}}{2}\right) \\ &= a'_{\pi_n} - a''_{\pi_n}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n}$ là các chuỗi số dương và theo chứng minh ở trên thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T + A),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T - A).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n} = \frac{1}{2}(T + A) + \frac{1}{2}(T - A) = A.$$

2. Ta thừa nhận Định lý này. ■

Ví dụ 3.35. *Chúng ta biết rằng chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ là bán hội tụ. Giả sử*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách sắp xếp lại chuỗi đan dấu trên để được một chuỗi mới có tổng chỉ bằng $\frac{1}{2}S$. Chuỗi mới như sau

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

tức là thay vì dấu cộng và dấu trừ xen kẽ thì cứ một dấu cộng rồi đến hai dấu trừ. Như vậy mỗi block sẽ gồm ba phần tử là $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k}$. Vậy chuỗi mới có thể viết dưới dạng như sau:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\
=&\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k} + \cdots \\
=&\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right) \\
=&\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

3.4 Phép nhân chuỗi

Định nghĩa 6.24. *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi bất kì. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, ở đó*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

được gọi là tích của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Định lý 6.34. *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là các chuỗi hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$. Khi đó chuỗi tích $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ cũng hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.*

Tại sao lại định nghĩa phép nhân chuỗi của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ theo cách như trên mà không phải là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$? Có lẽ chúng xuất phát từ phép nhân hai đa thức. Giả sử

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m, \quad Q_p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^p.$$

Khi đó tích của hai đa thức trên sẽ là đa thức $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m+p} x^{m+p}$ mà hệ số của x^n sẽ được tính theo công thức:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Cũng tương tự như vậy, nếu ta có hai đa thức (chuỗi hình thức) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ thì phép nhân hai đa thức này sẽ được thực hiện như sau:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{6.8}$$

với

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức (6.8) ta được $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ người ta có nghiên cứu không? Câu trả lời là có, và sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ được thể hiện qua hai tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet và Abel thú vị sau.

Định lý 6.35. *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

1. *(Tiêu chuẩn Dirichlet) Nếu*
   - *dãy các tổng riêng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*
   - b_n *là dãy đơn điệu hội tụ đến* 0

   thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

2. *(Tiêu chuẩn Abel) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* b_n *là một dãy số đơn điệu bị chặn thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *cũng hội tụ.*

Lời giải. 1. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n b_n$ và $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Vì $a_k = A_k - A_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + (A_4 - A_3) b_4 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + A_3(b_3 - b_4) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Theo giả thiết, dãy tổng riêng A_n bị chặn, giả sử $|A_n| < M$ với mọi n. Khi đó

$$0 \le |A_n b_n| \le M |b_n|.$$

Vì thế $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_n = 0$ theo nguyên lý giới hạn kẹp.

Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to Mb_1 \text{ (khi } n \to \infty).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (6.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S.$$

2. Cũng xuất phát từ công thức (6.9). Vì $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số đơn điệu bị chặn nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, hơn nữa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n b_n = Ab.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy các tổng riêng A_n của nó bị chặn, tức là tồn tại số M sao cho $|A_n| < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M|b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_n| \to M(|b_1 - b|).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (6.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S + Ab.$$

■

3.5 Khi nào dùng tiêu chuẩn nào?

Như vậy có nhiều tiêu chuẩn khác nhau để kiểm tra xem một chuỗi là hội tụ hay phân kỳ. Sẽ là lãng phí thời gian và công sức nếu chúng ta lần lượt sử dụng các tiêu chuẩn cho đến khi nào thu được kết quả mong muốn. Gợi ý sau đây sẽ giúp độc giả dựa vào công thức của số hạng tổng quát a_n để quyết định xem nên sử dụng tiêu chuẩn nào.

1. Nếu nhìn thấy ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì kết luận ngay chuỗi số đã cho là phân kì. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

2. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của n hoặc chứa các lũy thừa của n, chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_m n^{\alpha_m}}{b_0 + b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_k n^{\beta_k}}, \text{ với } 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m, 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k.$$

Khi đó so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k - \alpha_m}}$. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}+1}{n^{4+n}}$.

3. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là n, chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \cdots + \alpha_m a_m^n}{\beta_1 b_1^n + \beta_2 b_2^n + \cdots + \beta_k b_k^n}, \text{ với } 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k.$$

Khi đó so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

4. Một số chuỗi dùng tiêu chuẩn so sánh có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

5. Nếu chuỗi số là một hàm phân thức mà cả tử số và mẫu số có chứa cả các hàm đa thức, hàm số mũ, hàm số logarit, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n + 2^n}{n + \log_2 n + e^n}$$
thì xử lý như thế nào? Trong trường hợp này, số hạng trội của tử số là 2^n và số hạng trội của mẫu số là e^n. Do đó, so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$, ta có chuỗi số đã cho hội tụ. Nói cách khác, hàm đa thức, hàm số mũ (với cơ số > 1) và hàm số logarit (với cơ số > 1) đều tiến ra vô cùng khi $n \to +\infty$. Tuy nhiên, hàm số logarit tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số đa thức (là VCL bậc thấp hơn), và hàm số đa thức tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số mũ (là VCL bậc thấp hơn).

$$\boxed{\textbf{Hàm số logarit}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số mũ}}$$

Cụ thể, bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng hai giới hạn sau (bằng cách đưa về giới hạn của hàm số và dùng quy tắc L'Hospital):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0,\ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

6. Nếu chuỗi là chuỗi đan dấu có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ hoặc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ thì có thể nghĩ đến dùng tiêu chuẩn Leibniz. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2+1}}$.

7. Nếu chuỗi có số hạng tổng quát là một biểu thức có chứa $a^n, n!, (2n)!!, (2n+1)!!$ hoặc n^n thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn d'Alambert. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

8. Nếu chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n)^n$ thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

9. Nếu $a_n = f(n)$, ở đó $\int_1^{\infty} f(x)dx$ có thể tính được, thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn tích phân. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Bạn đọc nên hiểu rằng **có thể nghĩ đến** ở đây là một lời khuyên, chứ không phải lúc nào cũng luôn luôn như vậy. Chẳng hạn như:

a) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$ tuy là một chuỗi đan dấu, nhưng nó phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. Thật vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$.

b) Bài số 2e trong đề cương bài tập, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ tuy có hình thức làm ta liên tưởng đến tiêu chuẩn Cauchy, nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Nói cách khác, tiêu chuẩn Cauchy không áp dụng được trong trường hợp này. Chúng ta sẽ dùng tiêu chuẩn so sánh để so sánh chuỗi số đã cho với $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ với nhận xét như sau:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

3.6 Ví dụ về chuỗi bán hội tụ không phải là chuỗi đan dấu

Hầu hết các ví dụ về chuỗi bán hội tụ mà các bạn đã gặp đều có dạng chuỗi đan dấu. Để chỉ ra một ví dụ không tầm thường về chuỗi bán hội tụ mà không phải là chuỗi đan dấu chúng ta cần đến tiêu chuẩn Dirichlet (mở rộng của tiêu chuẩn Leibniz) sau.

Định lý 6.36 (Tiêu chuẩn Dirichlet). *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$*. Nếu*

i) dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*

ii) b_n *là dãy đơn điệu hội tụ đến* 0

thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

Tiêu chuẩn Leibniz là một trường hợp riêng của tiêu chuẩn Dirichlet. Thật vậy, xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = (-1)^{n-1}$. Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ có dạng $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1$ nên $S_n \leq 1$ với mọi n.

Ví dụ 3.36. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ *là một chuỗi bán hội tụ.*

Lời giải. Trước hết, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$. Hiển nhiên, dãy b_n là đơn điệu và hội tụ về 0. Bây giờ ta đi chứng minh $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin n$ là một dãy số bị chặn. Thật vậy,

$$2\sin\frac{1}{2}S_N = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\sin n = \sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right).$$

Do đó

$$S_N = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Theo tiêu chuẩn Dirichlet, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ là một chuỗi số hội tụ.

Việc tiếp theo là đi chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ là một chuỗi số phân kì. Thật vậy, với mỗi số tự nhiên k, khoảng $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$ có độ dài bằng $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} > 1$ nên chứa ít nhất một số tự nhiên n_k nào đó. Khi đó

$$|\sin(n_k)| \geq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|\sin n_k|}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{\pi(k+1)}.$$

Chuỗi điều hòa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ là phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$ cũng là phân kì. Cũng theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ là phân kì. ■

Chú ý 6.19. *Người ta thậm chí còn tính được*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Xem chứng minh trong Bài tập **??**.

3.7 Bài tập ôn tập

Bài tập 6.15 (Cuối kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{4^{n^2}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\right)$,

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n-1}\right)$.

Bài tập 6.16. *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ *là*

a) *hội tụ tuyệt đối nếu* $p > 1$,

b) *bán hội tụ nếu* $p = 1$,

c) *bán hội tụ nếu* $0 < p < 1$.

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$ đã được chứng minh ở Ví dụ 3.36. Trường hợp $p > 1$ sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}.$$

Trường hợp $p < 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^p}\right|$ là phân kì vì sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \geq \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

Bài tập 6.17. *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ *là*

a) *hội tụ tuyệt đối nếu* $p > 1$,

b) *bán hội tụ nếu* $p = 1$,

c) *bán hội tụ nếu* $0 < p < 1$.

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$, xem lại cách chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ bán hội tụ trong Ví dụ 3.36. Các trường hợp $p > 1$ và $0 < p < 1$ chứng minh tương tự như Bài tập 6.16.

Bài tập 6.18. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau.*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$,

(h) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}, (\alpha,\beta>0)$,

(i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}, 0<|a|\neq 1$.

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Nhận xét $a_{2n+1}=0$ với mọi n. Sau đó dùng tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0<\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\pi, \forall n$, khi n đủ lớn, $\left\{\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ là một dãy số dương hội tụ về 0, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

(e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(g) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(h) Biện luận theo tham số α, chia làm 3 trường hợp là $\alpha>1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh), $\alpha<1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh) và $\alpha=1$ (dùng tiêu chuẩn tích phân).

(i) Dùng tiêu chuẩn so sánh kết hợp với tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert và biện luận theo tham số a.

Bài tập 6.19. *Tính tổng của các chuỗi số sau đây*

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$

$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{1+n+n^2}$

[Gợi ý]

a) $\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, n \geq 2$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 2e$

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow S = -\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big)$

$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)$

$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{4}$

e) $\arctan \frac{1}{1+n+n^2} = \arctan \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \arctan(n+1) - \arctan n$

$S_n = \arctan(n+1) - \arctan 1 \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$

Bài tập 6.20. *Chứng minh rằng các chuỗi số sau là phân kì*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2^n}{n}$

[Gợi ý] Tất cả các chuỗi số này đều không thỏa mãn điều kiện cần, do đó đều phân kì.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan \frac{2^n}{n} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

Bài tập 6.21. *Sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, d'Alembert, Cauchy hoặc tiêu chuẩn tích phân để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an})$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ldots + \ln^2 n}{n^\alpha}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, (a \neq e)$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n}(n-1)!}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ k) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ l) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, (p > 0)$

[Gợi ý]

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(n \to \infty)$, chuỗi đã cho hội tụ.

b) $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} = \frac{(2-a)n+1}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} \sim \frac{(2-a)n+1}{2n^2}$

Nếu $a = 2$, $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $a \neq 2$, $u_n \sim \frac{a-2}{2n}$, chuỗi đã cho phân kì.

c) Với số n đủ lớn: $n^3 e^{-n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, chuỗi đã cho hội tụ.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^2+5} = \frac{1}{3} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

e) $\alpha > 2$: $a_n \leq \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}; (0 < \varepsilon < \alpha - 2)$, chuỗi đã cho hội tụ.

$\alpha \leq 2$: $a_n \geq \frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$, chuỗi đã cho phân kì.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}$. chuỗi đã cho hội tụ nếu $a < e$, phân kì nếu $a > e$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^{2(n+1)}n!} \frac{2^{2n}(n-1)!}{(2n-1)!!} = \frac{1}{2} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{5} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{5e} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^2 = \frac{1}{16} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b}$.

Nếu $a > b$ thì $e^{a-b} > 1$ chuỗi đã cho phân kì.

Nếu $a < b$ thì $e^{a-b} < 1$ chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $a = b$, $a_n = 1$ không thỏa mãn điều kiên cần để chuỗi hội tụ, do đó chuỗi đã cho phân kì.

k) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^2}, x \geq 3$

$\int\limits_3^{\infty} f(x)dx = -\dfrac{1}{\ln\ln x}\Big|_3^{\infty} < +\infty$, chuỗi đã cho hội tụ.

l) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}, x \geq 2$

$$\int\limits_2^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} \ln\ln x\Big|_2^{\infty} & \text{nếu } p = 1 \\ \dfrac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^{\infty} & \text{nếu } p \neq 1 \end{cases}$$

chuỗi đã cho hội tụ nếu $p > 1$, phân kì nếu $0 < p \leq 1$.

Bài tập 6.22. *Sử dụng tiêu chuẩn Leibnitz để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+e} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+3}{n^2+n}$$

[Gợi ý]

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$; $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+e} = 0$; $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+e}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+e}; f'(x) = \frac{e-x}{2\sqrt{x}(x+e)^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5n+3}{n^2+n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} + 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, chuỗi đã cho hội tụ bởi vì cả hai chuỗi ở vế phải đều hội tụ.

Bài tập 6.23. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}; (\alpha > 1)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^p}; (p > 0)$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n+2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\Big)$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}); a \in \mathbf{R}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$

g) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0)$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\cos\dfrac{a}{n}\Big)^{n^3}; a \in \mathbf{R}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

[Gợi ý]

a) Chọn $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, khi n là đủ lớn $\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}} \le \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$, $\alpha - \varepsilon > 1$ do đó chuỗi đã cho hội tụ.

b) Với $1 > \varepsilon > 0$ bất kì, ta có, với số n đủ lớn: $\dfrac{1}{(\ln n)^p} \ge \dfrac{1}{n^{\varepsilon}}$, chuỗi đã cho phân kì.

c) $\dfrac{2n}{n+2^n} \sim \dfrac{2n}{2^n}$ khi $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$, the chuỗi đã cho hội tụ.

d) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ khi $x \to 0$, nên

$$n - \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{2n^2}, \text{ khi } n \to \infty$$

chuỗi đã cho hội tụ.

e) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi) = (-1)^n \sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0 < \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \pi, \forall n$, khi n đủ lớn, $\Big\{\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\Big\}$ là một dãy số dương hội tụ về 0, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

f) $\{S_n\}, S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$, với mọi $n \ge 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng S_n là số chẵn với mọi n.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n] \sim -\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n \to \infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0 < \pi(2-\sqrt{3}) < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

g) $\alpha > 1$: $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \le \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

$0 < \alpha < 1$: $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \ge \dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, chuỗi đã cho phân kì.

$\alpha = 1$.

Kết luận, chuỗi đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha = 1, \beta > 1$; và phân kì nếu $0 < \alpha < 1$ hoặc $\alpha = 1, 0 < \beta \leq 1$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$, chuỗi đã cho hội tụ.

§4. CHUỖI HÀM SỐ

4.1 Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa 6.25. *Cho dãy các hàm số $\{a_n(x)\}$. Chuỗi hàm số được định nghĩa như sau:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là hội tụ.

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là phân kỳ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là phân kỳ.

Tập hợp các điểm hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là miền hội tụ.

Ví dụ 4.37. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.*

Lời giải. Tại mỗi điểm $x = x_0$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là một chuỗi hình học. Do đó, theo Ví dụ 1.5 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là hội tụ nếu $|x_0| < 1$ và phân kỳ nếu $|x_0| \geq 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(-1, 1)$. ■

Ví dụ 4.38. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.*

Lời giải. Tại mỗi điểm $x = x_0$ xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Theo Ví dụ 2.12 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $x_0 > 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(1, +\infty)$. ■

Bài tập 6.24. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{n^2 + x^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n (n+1)}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} x^n$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} x^n}{5^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n + \sin x}{3n+1}$.

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ **R**.

c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ **R**.

d) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < \frac{e}{2}$ và phân kì nếu $|x| > \frac{e}{2}$. Tại $x = \frac{e}{2}$, chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}\left(\frac{e}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$.

Ví dụ 4.39 (Cuối kì, K62). *Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$.

Ta có
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Trong trường hợp này các tiêu chuẩn Cauchy và d'Alambert đều không có hiệu quả. Tuy nhiên,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n > \ldots > u_1 = e \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$$

nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ là $|x| < \frac{e}{2}$.

Sẽ là khó hơn nhiều, nếu như ta thay đổi đề bài đi một chút như sau.

Ví dụ 4.40. *Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$.

Lúc này, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ nên không thể dùng tiêu chuẩn điều kiện cần để chứng minh chuỗi phân kì như trên được. Chúng ta cần sử dụng đến các công cụ mạnh hơn của giải tích như:

- Công thức Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ hoặc
- Tiêu chuẩn Raabe (xem Phụ lục **??**, Ví dụ **??**): Giả thiết
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = R.$$
Khi đó, $R > 1$ thì chuỗi hội tụ, $R < 1$ thì chuỗi phân kì.

e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ $|x| < \frac{5}{4}$.

f) Miền hội tụ bằng $\emptyset$ vì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sin\frac{1}{3} \neq 0$ với mọi x.

4.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

Đặt vấn đề: Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Giả thiết rằng miền hội tụ của chuỗi hàm số này là X, và chuỗi hàm số này hội tụ đến hàm số $S(x)$ trên X, i.e.,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X.$$

- Nếu với mỗi n, hàm số $u_n(x)$ có tính chất A nào đó (liên tục, khả tích, khả vi), thì liệu hàm số $S(x)$ cũng có tính chất này?
- Phải chăng
$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$
nghĩa là chuyển dấu đạo hàm vào phía trong biểu thức $\sum$ được?

Chẳng hạn như, chuỗi hàm số sau đây đã gặp ở học phần Giải tích I:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Phải chăng

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Để trả lời được các câu hỏi này chúng ta cần đến khái niệm **hội tụ đều** sau.

Định nghĩa 6.26. *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều đến* $S(x)$ *trên tập* X *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon, \forall n > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

- Chú ý rằng trong định nghĩa trên, $n(\epsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ϵ mà không phụ thuộc vào x.
- Ý nghĩa hình học: với n đủ lớn thì $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \epsilon, S(x) + \epsilon), x \in X$.

Định lý 6.37 (Tiêu chuẩn Cauchy). *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* X *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \epsilon, \forall p, q > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

Định lý 6.38 (Tiêu chuẩn Weierstrass). *Nếu*

i) $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X,$

ii) chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

thì chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ tuyệt đối và đều trên* X.

Ví dụ 4.41.

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Thật vậy,

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbf{R}$$

và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ.

ii) Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$.

Với mỗi $x \in \mathbf{R}$, chuỗi số tương ứng là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Kí hiệu tổng của chuỗi đã cho là $S(x)$, chính là tổng của chuỗi số tương ứng với x. Với mỗi $x \in \mathbf{R}$, ta có

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó, chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ hội tụ đều đến $S(x)$ (tại sao? gợi ý: dựa vào định nghĩa).

Bài tập 6.25. *Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}, x \in \mathbf{R}.$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}, x \in \mathbf{R}.$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n \sqrt[3]{n}}, x \in [-2, 2].$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n, x \in [-1, 1].$

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

b) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

c) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

d) Đặt $y = \frac{2x+1}{x+2}$. Khảo sát hàm số này trong đoạn $[-1, 1]$ ta được $-1 \leq y \leq 1$. Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

4.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 6.39 (Tính liên tục). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên* X *với mọi* n,

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* X

thì $S(x)$ *liên tục trên* X, *i.e.,*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Ví dụ 4.42. *Xét tính liên tục của chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+1}}$.

[Gợi ý] Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên **R**, do đó liên tục.

Định lý 6.40 (Tính khả tích). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *với mọi* n,

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* $[a,b]$

thì $S(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

Ví dụ 4.43. *Tính tổng của chuỗi số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} = 1 + \sqrt{2} + \dfrac{3}{2} + \cdots + \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} + \cdots$

Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n =: f(x)$. *Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên* $\int (n+1)x^n dx = x^{n+1}$ *và chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ *thì tính được và bằng* $\frac{x}{1-x}$ *(là cấp số nhân với công bội bằng* x*).*

Do đó, chúng ta tích phân từng thành phần của chuỗi hàm số $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ *trong khoảng* $[0, x]$*:*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Đạo hàm 2 vế phương trình này ta được, $f(x) = \Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Tổng của chuỗi số đã cho bằng

$$1 + \sqrt{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n+1}{(\sqrt{2})^n} + \ldots = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(3+2\sqrt{2}).$$

Chú ý 6.20. *Việc còn lại là đi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều trong Định lý 6.40. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu* $-1 < x < 1$*, hơn nữa chuỗi hàm số này hội tụ đều trên khoảng* $[0, \epsilon]$ *với mỗi* $\epsilon \in (0, 1)$ *(theo tiêu chuẩn Weierstrass).*

Ví dụ 4.44. *Chứng minh rằng*

a) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$.

b) $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Lời giải. Thật vậy, ta biết rằng

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n, |x| < 1,$$

vì đây là tổng của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^2$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Chuỗi bên phải hội tụ tại $x = \pm 1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), đặc biệt nó hội tụ đều trên $[-1, 1]$. Ta có công thức sau:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

■

Bài tập 6.26. *Tìm miền hội tụ và tính tổng* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\int(n+1)(x-1)^n dx = (x-1)^{n+1}$, $\int(2n+1)x^{2n}dx = x^{2n+1}$.

a) Để đơn giản, có thể đặt $x-1=t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)t^n$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

Định lý 6.41 (Tính khả vi). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *khả vi liên tục trên* (a,b) *với mọi* n*,*

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *hội tụ về* $S(x)$ *trên* (a,b)*,*

iii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ *hội tụ đều trên* (a,b)

thì $S(x)$ *khả vi trên* (a,b) *và*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

Ví dụ 4.45. *Tính tổng của chuỗi hàm số* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$*. Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính tổng được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên,* $\left(\frac{x^n}{n}\right)' = x^{n-1}$ *và chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ *tính được tổng và bằng* $\frac{1}{x-1}$ *(vì là chuỗi hình học với công bội bằng* x*).*

Do đó, đạo hàm 2 vế của biểu thức $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ *ta được*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Nên

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Kết luận

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \qquad (6.10)$$

Chú ý 6.21. *Việc còn lại là tìm miền hội tụ và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều của chuỗi hàm số trong Định lý 6.41. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu* $-1 < x < 1$.

- *Tại* $x = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *là phân kì.*
- *Tại* $x = -1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *là hội tụ.*

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-1, 1)$.

Hệ quả 6.2. *Chứng minh công thức Euler* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải. Xuất phát từ công thức (6.10), suy ra

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế phương trình này ta được

$$-\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

■

Hệ quả 6.3. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Lời giải. Vì chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ tại $x = -1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), nên thay $x = -1$ trong công thức (6.10) ta được

$$S(-1) = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ví dụ 4.46. *Tính tổng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Ý tưởng: *Để "đánh bay" số hạng* $3n+1$ *ở dưới mẫu số, ta xét chuỗi hàm*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$$

và đi tính $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3}$ *(tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng* $-x^3$*). Do đó,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Bài tập 6.27. *Tìm miền hội tụ và tính tổng*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^n$, *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\left[\frac{(x+1)^n}{n}\right]' = (x+1)^{n-1}, \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = x^{2n}$.

a) Để đơn giản, đặt $x+1=t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ và tính $S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}$, đây là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-t$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ và tính $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$. Đây là là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng x^2.

4.4 Một số chú ý về chuỗi hàm

Có ba vấn đề chính đối với các bài toán về chuỗi hàm số.

1. **Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số.** Tại mỗi $x = x_0$, coi $\sum_{n=1}^{\infty} u(x_0)$ là một chuỗi số thông thường và tìm miền hội tụ bằng các phương pháp đã biết (so sánh, d'Alambert, Cauchy, tích phân). Khi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số bằng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert, tại các điểm đầu mút (làm cho $L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, hoặc $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$) ta phải xét riêng.

   Ví dụ 4.47 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của chuỗi hàm*

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$.

2. **Chứng minh chuỗi hàm số hội tụ đều** (định nghĩa, tiêu chuẩn Weierstrass, tiêu chuẩn Cauchy).

Ví dụ 4.48 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ đều trên* $[0, +\infty)$ *của chuỗi hàm số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-nx}}{4^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-nx}}{3^n}$.

3. **Tính tổng của chuỗi hàm số** $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu có sử dụng đến tính khả vi hoặc khả tích của nó, phải dựa vào biểu thức của $u_n(x)$ để quyết định xem sẽ đi tính $S'(x)$ hay $\int_0^x S(t)dt$. Chẳng hạn như

- $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha n+1)x^{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $\int_0^x S(t)dt$, vì $\int_0^x (\alpha n+1)t^{\alpha n}dt = x^{\alpha n+1}$.
- $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $S'(x)$ vì $\left(\frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}\right)' = x^{\alpha n-1}$.

Ví dụ 4.49 (Giữa kì, K61). *Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi (hàm) số*

a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x](1+nx)}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1-(n-1)x](1-nx)}$.

Ví dụ 4.50 (Cuối kì, K62). *Tính tổng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi^n}$.

4.5 Bài tập ôn tập

Bài tập 6.28. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{xn^x}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{n^n}}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$.

Bài tập 6.29. *Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ *trên* $\mathbf{R}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ *trên* $[-1,1]$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ *trên* $[0,\infty)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ *trên* $\mathbf{R}$.

§5. Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 6.27. *Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{6.11}$$

ở đó x là biến số còn a_n là các hệ số.

Tại mỗi điểm $x = x_0$ cố định, chuỗi đã cho có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Tập hợp tất cả các điểm mà chuỗi đã cho hội tụ được gọi là miền hội tụ. Khi đó tổng của nó là

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

ở đó tập xác định của hàm số $f(x)$ là miền hội tụ của chuỗi (6.11).

Chẳng hạn như, nếu $a_n = 1$ với mọi n, thì chuỗi (6.11) đã cho trở thành chuỗi hình học

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

sẽ hội tụ nếu $-1 < x < 1$ và phân kỳ nếu $|x| \geq 1$.

Ví dụ 5.51. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.*

Lời giải. Đặt $a_n = \frac{x^n}{n}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{a_n} . \frac{n}{x^n}\right| \to x \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < 1$ và phân kỳ nếu $|x| > 1$. Chú ý rằng tiêu chuẩn d'Alambert không đưa thông tin gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi tại $x = \pm 1$. Vì thế chúng ta sẽ xét riêng 2 trường hợp này. Tại $x = 1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, chuỗi này phân kì. Tại $x = -1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Chuỗi này là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz (xem lại Ví dụ 3.33). Kết luận: miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-1, 1)$. ■

Ví dụ 5.52. *Tìm tập xác định của hàm số Bessel được định nghĩa bởi*

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} . \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi hàm số đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Nói cách khác, tập xác định của hàm số Bessel là $\mathbf{R}$. ■

Định lý 6.42 (Định lý Abel). *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng hội tụ tại mọi điểm* x *mà* $|x| < |x_0|$*.*

Lời giải. Ta có
$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0$. Do đó, tồn tại số M sao cho $|a_n x_0^n| \leq M$ với mọi n. Vậy
$$|a_n x^n| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \forall n.$$

Do đó, nếu $|x| < |x_0|$ thì $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ. ■

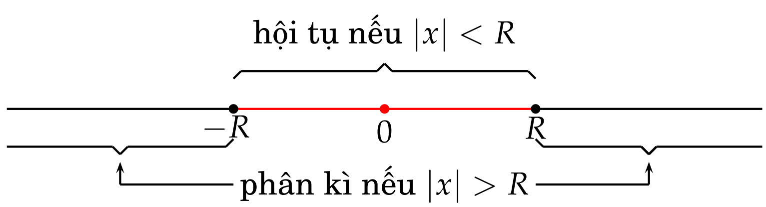
Hệ quả 6.4. *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* x *mà* $|x| > |x_0|$*.*

Hệ quả 6.5. *Với mỗi chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cho trước, chỉ có 3 khả năng sau có thể xảy ra.*

i) Chuỗi hội tụ tại duy nhất điểm $x = 0$*.*

ii) Chuỗi hội tụ tại mọi điểm $x \in \mathbf{R}$*.*

iii) Tồn tại một số thực dương R *sao cho chuỗi đã cho hội tụ nếu* $|x| < R$ *và phân kỳ nếu* $|x| > R$*.*



Định nghĩa 6.28. *Bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa được định nghĩa là bằng*

- 0 *trong trường hợp i),*
- ∞ *trong trường hợp ii),*
- *số thực dương* R *trong trường hợp iii)*

của Hệ quả 6.5 nêu trên.

Định lý 6.43 (Cách tìm bán kính hội tụ). *Nếu* $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *hoặc* $\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là* $R = \frac{1}{\rho}$*, với quy ước là*

- $R = 0$ *nếu* $\rho = \infty$ *và*
- $R = \infty$ *nếu* $\rho = 0$*.*

Lời giải. Nếu $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = \rho|x|.$$

Do đó, theo tiêu chuẩn d'Alambert,

- Nếu $\rho|x| < 1$ hay $|x| < \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ,
- Nếu $\rho|x| > 1$ hay $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

Theo Định nghĩa 6.28 thì $R = \frac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = 0,\ \forall x,$$

chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$, nghĩa là $R = +\infty$.

Nếu $\rho = +\infty$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = +\infty,\ \forall x \neq 0,$$

chuỗi đã cho hội tụ tại điểm duy nhất $x = 0$, nghĩa là $R = 0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự cho trường hợp $\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. ■

Ví dụ 5.53. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^nx^n}{\sqrt{n+1}}$*.*

Lời giải. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| \to 3 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = \frac{1}{3}$.

1. Tại $x = -\frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này là một chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
2. Tại $x = \frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. ■

Ví dụ 5.54 (Giữa kì, K61). *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}(x-1)^n$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}(x+1)^n$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}(x-2)^n$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n}(x+2)^n$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{3n-1}$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$.

Bài tập 6.30. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau.*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+1)^n}{4^n}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

5.1 Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý 6.44. *Giả sử rằng chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ bằng $R > 0$ và đặt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $|x| < R$. Khi đó*

1. *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng $[a,b] \subset (-R,R)$.*

2. *$f(x)$ là hàm số liên tục trên $(-R,R)$.*

3. *$f(x)$ là hàm số khả vi (và do đó liên tục) trên khoảng $(-R,R)$ và*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}a_n x^n dx\right) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots.$$

4. *$f(x)$ là hàm số khả tích trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-R,R)$ và*

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Sau đây chúng ta sẽ áp dụng các tính chất trên để khai triển một số hàm số đơn giản thành chuỗi lũy thừa. Trước hết, hãy xét một chuỗi hàm số đơn giản (chuỗi hình học) mà ta đã gặp ở Ví dụ 1.5:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

Thay x bằng $-x$ trong phương trình đã cho ta được

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \tag{6.12}$$

Đặt $f(x) = \ln(1+x)$, ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Vậy ta có biểu thức chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ là

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Ví dụ 5.55. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Lời giải. Thay x bởi x^2 trong phương trình 6.12 ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{6.13}$$

■

Ví dụ 5.56. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \arctan x$.

Lời giải. Theo Phương trình 6.13 ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Kết luận:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bài tập 6.31. *Một cách tương tự, tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \operatorname{arccot} x$.

[Gợi ý] Có thể sử dụng đẳng thức $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \operatorname{arccot} x$.

Bài tập 6.32. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của các hàm số sau:*

a) $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-x-2}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

5.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

Trong bài trước, chúng ta đã áp dụng các tính chất của chuỗi lũy thừa để tìm biểu diễn lũy thừa của một số hàm số phân thức nhất định. Trong trường hợp $f(x)$ là một hàm số bất kỳ, thì tìm biểu diễn lũy thừa của $f(x)$ như thế nào? Mục đích của bài này là để trả lời câu hỏi đó.

Định lý 6.45. *Nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại điểm a, nghĩa là*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

thì các hệ số của chuỗi lũy thừa được xác định bởi công thức $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Như vậy nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại a, thì

- nó phải có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm a, và
- biểu diễn chuỗi lũy thừa của nó phải có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6.14}$$

Lời giải. Theo giả thiết,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{6.15}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (6.15) ta được

$$f(a) = a_0.$$

Đạo hàm 2 vế của phương trình (6.15):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \tag{6.16}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (6.16) ta được

$$f'(a) = a_1.$$

Tiếp tục quá trình này ta được $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. ■

Điều kiện hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm a chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Nghĩa là, có những hàm số khả vi vô hạn nhưng lại không khai triển được thành chuỗi Taylor. Ví dụ như hàm số sau đây

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

có $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi n nên chuỗi Maclaurin của nó bằng 0.

Định nghĩa 6.29. *Chuỗi lũy thừa trong Phương trình 6.14 được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại điểm a. Trường hợp $a = 0$ thì chuỗi Taylor trở thành*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{6.17}$$

Chuỗi 6.17 được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 5.57. *Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$ và tìm bán kính hội tụ của nó.*

Lời giải. $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$. Do đó $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi n. Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Để tìm bán kính hội tụ, xét $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó bán kính hội tụ $R = \infty$, i.e., chuỗi đã cho hội tụ với mọi x. ■

Định nghĩa 6.30. *Nếu chuỗi Taylor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ hội tụ đến hàm số $f(x)$ trong một lân cận $B_a(R) = \{x : |x-a| < R\}$ nào đó của điểm a thì ta nói hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận đó.*

Hai câu hỏi đặt ra đối với chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$:

- Chuỗi Taylor $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ có hội tụ không?
- Nếu nó hội tụ thì liệu nó có hội tụ đến hàm số $f(x)$ hay không?

Định lý sau đây trả lời các câu hỏi đó.

Định lý 6.46. *Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận $B_a(R) = \{x : |x-a| < R\}$ của điểm a và $|f^{(n)}(\xi)| \leq M$ với mọi $\xi \in B_a(R)$, thì chuỗi Taylor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ hội tụ đến $f(x)$ trong lân cận $B_a(R)$. Nghĩa là $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại a,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Ví dụ 5.58. *Chứng minh rằng $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.*

Lời giải. Xét lân cận $B_0(R) = \{x : |x| < R\}$ với $R > 0$ nào đó. Hàm số $f(x) = e^x$ có

$$|f^n(x)| = e^x < e^R = M, \ \forall x \in B_0(R).$$

Theo Định lý 6.46, $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại $x = 0$ trong lân cận $B_0(R)$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in B_0(R).$$

Vì số R có thể chọn một cách tùy ý nên $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbf{R}$. ■

5.3 Khai triển Maclaurin một số hàm số sơ cấp

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$	$R = 1$
$\frac{1}{1+x}$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$R = 1$
e^x	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$R = \infty$
$\sin x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\sinh x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cosh x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\arctan x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$R = 1$
$\arcsin x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1-x)$	$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + \cdots$	$R = 1$

Để khai triển một hàm số thành chuỗi Taylor (Maclaurin) có hai phương pháp.

Phương pháp 1: Tính các đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(x)$ để suy ra chuỗi lũy thừa của $f(x)$ tại $x = a$ là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Tuy nhiên, không phải lúc nào việc tính các đạo hàm cấp cao của $f(x)$ cũng dễ dàng. Vì thế người ta thường làm theo cách sau.

(2) Các hàm số hyperbolic: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Phương pháp 2: Dựa vào khai triển Maclaurin của các hàm số sơ cấp đã biết. Chẳng hạn như:

Ví dụ 5.59. *a) Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arcsin x$.

b) Tính đạo hàm cấp cao $\arcsin^{(n)}(0)$.

[Lời giải]

a) Nhận xét $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Trong trường hợp này có lẽ "không có" hoặc "rất khó" để tìm ra công thức tính đạo hàm cấp cao của hàm số $\arcsin x$. Vì vậy, ta xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Thay $\alpha = -\frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^n.$$

Thay x bằng $-x^2$ ta được

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

Do đó

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

b) Dựa vào công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$ suy ra

$$\begin{cases} \arcsin^{(2n)}(0) = 0, \\ \arcsin^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)!!]^2. \end{cases}$$

Bài tập 6.33. *Một cách tương tự, tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arccos x$.

[Gợi ý] Có thể dựa vào đẳng thức $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.

Ví dụ 5.60. *Khai triển hàm số* $f(x) = \sin 2x + x\cos 2x$ *thành chuỗi Maclaurin.*

[Lời giải] Thay x bằng $2x$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta có:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Do đó

$$\sin 2x + x\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{2n+3}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Ví dụ 5.61. *Khai triển $f(x) = \cos\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-2$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$.

$$\cos\frac{\pi x}{3} = \cos\frac{\pi}{3}(t+2) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t.$$

Thay x bằng $\frac{\pi}{3}t$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta được

$$\cos\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi x}{3} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}(x-2)^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-2)^{2n+1}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Ví dụ 5.62. *Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(t+1)^2+5(t+1)+6} = \frac{1}{t^2+7t+12} = \frac{1}{t+3} - \frac{1}{t+4} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{t}{3}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{t}{4}}.$$

Thay x lần lượt bằng $\frac{t}{3}$ và $\frac{t}{4}$ trong khai triển của hàm số $\frac{1}{1+x}$ ta được

$$\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3}\right)^n, \quad \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{4}\right)^n.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

Ví dụ 5.63 (Giữa kì, K61). *Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm số*

a) $f(x) = \ln(1+2x)$,

b) $f(x) = \ln(1-2x)$,

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$,

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

5.4 Đọc thêm: Công thức Euler

Chứng minh công thức Euler sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

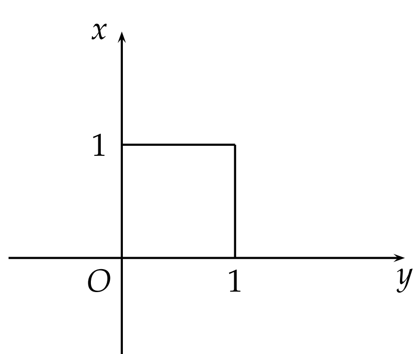
Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier (xem Hệ quả **??**). Sau đây, tác giả giới thiệu hai phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép (Giải tích II) và dựa vào khai triển Maclaurin.

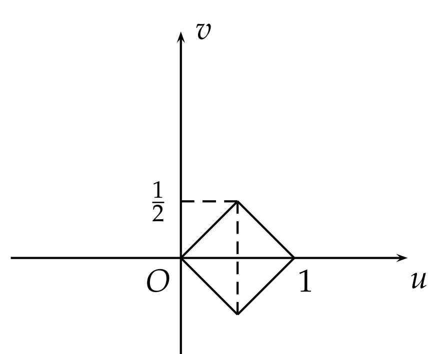
Dùng tích phân kép (Giải tích II) để chứng minh Công thức Euler

Trước hết, vì $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến $x = u - v, y = u + v$. Khi đó $J = 2$ và miền D sẽ biến thành miền D_{uv} như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}).





Ta có

$$I = \int\limits_D \frac{1}{1-xy}dxdy = 2\int\limits_{D_{uv}} \frac{1}{1-u^2+v^2}dudv$$
$$= 4\int\limits_0^{\frac{1}{2}} du \int\limits_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}dv + 4\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 du \int\limits_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}dv. \tag{6.19}$$

Vì

$$\int\limits_0^z \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\Big|_0^z = \frac{1}{a}\arctan\frac{z}{a}$$

nên

$$I = 4\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}du = I_1 + I_2.$$

Đặt $u = \sin\theta$ đối với tích phân I_1 ta được

$$I_1 = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\arctan\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta)d\theta = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \tag{6.20}$$

Đặt $u = \cos 2\theta$ đối với tích phân I_2 ta được

$$I_2 = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\arctan\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\right)d\theta = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta)d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dùng khai triển Maclaurin để chứng minh công thức Euler

Trước hết

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{6.21}$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (|x| \le 1)$$

thay x bởi $\sin t$ ta được

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}, \quad (|t| \leq \frac{\pi}{2}).$$

Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ cả hai vế ta được

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt. \tag{6.22}$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x d\cos x \\ &= -\sin^{2n} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \sin^{2n-1} x \cos^2 x dx \\ &= 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1}). \end{aligned}$$

suy ra công thức truy hồi

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n} = \cdots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Thay vào (6.22)

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(6.21) được chứng minh.

5.5 Ứng dụng của chuỗi lũy thừa

Tính gần đúng (xem lại trong học phần Giải tích I)

Ví dụ 5.64. *Tính gần đúng* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *với độ chính xác* 10^{-3}.

Tính giới hạn (xem lại trong học phần Giải tích I)

Ví dụ 5.65. *a) Tính* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

5.6 Bài tập ôn tập

Bài tập 6.34. *Chứng minh các công thức sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \ln 2$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(n+1)(n+2)} = 2\ln 2 - 1$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2\ln 2 - 1$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = \ln 2$

f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right)\frac{1}{n} = \ln 2$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \ln 2$

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e}$

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$

Bài tập 6.35. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau đây*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+\frac{1}{n})}{\sqrt{x-e}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{x+n}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan^n(x+\frac{1}{n})$

[Gợi ý]

a) Tập xác định: $x > e$. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có $\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) \to \ln x > 1$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi hàm số đã cho phân kì nếu $x > e$. Kết luận: miền hội tụ là $\emptyset$.

b) Nếu $x = 0$ thì $|a_n| = 1$, chuỗi phân kì.

Nếu $x \neq 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x} = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{x}+n^2}$.

Với mỗi x, $\left\{\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2}\right\}$ là một dãy số dương, giảm về 0 khi $n \to \infty$, nên chuỗi đã cho hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibniz). Miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $\mathbb{R}^*$.

c) Ta có $a_n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n \frac{1}{n^x} \sim e^x \frac{1}{n^x}$, nên chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 1$. Miền hội tụ là $(1, +\infty)$.

d) Nếu $x > 0$ thì $\left|\frac{\cos nx}{2^{nx}}\right| \leq \frac{1}{2^{nx}}$. Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^x}\right)^n$ là hội tụ vì $2^x > 1$, do đó chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$ là hội tụ nếu $x > 0$.

Nếu $x \leq 0$, giả sử rằng chuỗi đã cho hội tụ tại x. Khi đó, theo điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos nx = 0,$$

điều này là không thể xảy ra. Miền hội tụ là $(0, +\infty)$.

e) $|x| > 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$ as $n \to \infty$; $\dfrac{1}{|x|} < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| < 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim |x|^n$ as $n \to \infty$; $|x| < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| = 1$, $|a_n| = \dfrac{1}{2} \nrightarrow 0$, chuỗi hàm số đã cho phân kì. Miền hội tụ là $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

f) $\sqrt[n]{|a_n|} = \tan\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \to \tan x$ khi $n \to \infty$.

Nếu $\tan x < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

Nếu $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$: $a_n \to e^{\pm 2} \neq 0$ khi $n \to \infty$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Nếu $\tan x > 1$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Miền hội tụ: $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right); (k \in \mathbb{Z})$.

Bài tập 6.36. *Kiểm tra tính hội tụ đều của các chuỗi hàm số sau đây*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ *trong khoảng* $[0, 1]$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2 \ln n}\right)$ *trong khoảng* $[-a, a], (a > 0)$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}$ *trong khoảng* $[-a, a], (a > 0)$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^n$ *trong khoảng* $[-1, 1]$, $(|a| < 1)$.

[Gợi ý]

a) $S_n(x) = x - x^{n+1} \to x$ nếu $0 \leq x < 1$, và $S_n(1) \to 0$ khi $n \to \infty$. Vì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 1, \\ x, & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

không liên tục trên $[0, 1]$, nên chuỗi hàm số đã cho không hội tụ đều.

b) Ta có $\ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$, nên

$$\ln\Big(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\Big) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n\ln^2 n}, \forall x \in [-a,a]$$

Mặt khác, chuỗi $a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) $\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq a\Big(\frac{2}{3}\Big)^n$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n$ là hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trong khoảng $[-a,a]$.

d) Ta có $\frac{2x+1}{x+2} \in [-1,1]$ với mọi $x \in [-1,1]$, nên $\left|a^n\Big(\frac{2x+1}{x+2}\Big)^n\right| \leq |a|^n$. Mặt khác, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a|^n$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Bài tập 6.37. *Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau*

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\ln(n+1)$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2}x^n$

$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n!}{(2n)!}x^{2n}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{x^{3n+1}}{n+1}$ $\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}.x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$

[Gợi ý]

a) $R=1$, miền hội tụ là $[-1,1)$.

b) $R=1$, miền hội tụ là $(-1,1)$.

c) $R=\frac{1}{e}$, miền hội tụ là $\Big(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\Big)$.

d) $R=+\infty$, miền hội tụ là $(-\infty,+\infty)$.

e) $R=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, miền hội tụ là $\Big(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Big]$.

f) $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, miền hội tụ là $\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\Big]$.

Bài tập 6.38. *Tìm tổng của các chuỗi hàm số sau*

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!!}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$ $\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

[Gợi ý]

a) $S(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $R = 1$, $\forall x \in (-1,1)$: $S(x) = x \arctan x$.

c) $R = 1$, $\forall x \in (-1,1)$: $S(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \arctan x$.

d) $R = 1$, $\forall x \in (-1,1)$: $S(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

e) $R = 1$, $\forall x \in (-1,1)$: $S(x) = \dfrac{x^2-3x}{(x-1)^3}$

f) Xét chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2+1}{2x} \arctan x$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} S(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

Bài tập 6.39. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x-1)^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$.

Bài tập 6.40. *Tính tổng của các chuỗi sau*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}, x \in (-3,3)$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in (-1,1)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right) x^n, x \in (-1,1)$.

Bài tập 6.41. *Khai triển thành chuỗi Maclaurin*

a) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$,

b) $f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

d) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$.

Bài tập 6.42. *a) Khai triển $f(x) = \sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-4$,*

b) Khai triển $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$, *c) Khai triển* $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $x+4$*,*

d) Khai triển $f(x) = \ln x$ *thành chuỗi lũy thừa của* $\frac{1-x}{1+x}$*.*

Bài tập 6.43. *Chứng minh rằng*

a) $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right), -\infty < x < \infty.$

b) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \le x \le 1.$

c) $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots, -1 < x < 1.$

d) $(\ln(1+x))^2 = x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4} - \cdots, -1 < x \le 1.$