# Tích phân đường

**TS. Bùi Xuân Diệu**

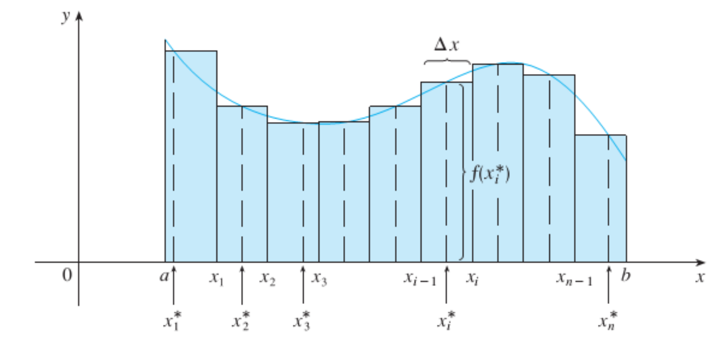
Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

1. Tích phân đường loại I
2. Tích phân đường loại II
   - Công thức Green

# Chương 4: Tích phân đường

# Tích phân đường loại I

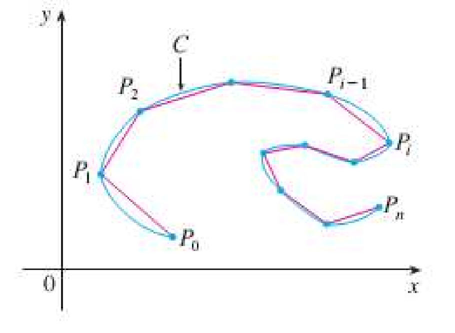
## Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định




$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

# Tích phân đường loại I

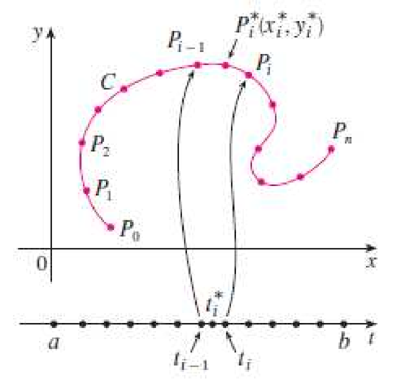
## Bài toán tính khối lượng




Cho $C: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ là một đường cong và dọc theo $C$ có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ tại $(x, y)$ là $f(x, y)$. Tính khối lượng của $C$.

# Tích phân đường loại I

## Định nghĩa




1. $C : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, a \le t \le b.$
2. *Chia đoạn* $[a, b]$ *thành n đoạn bằng nhau*
   $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$
3. *Khi đó,* $P_i(x_i, y_i)$ *sẽ chia C thành n cung nhỏ.*
4. *Chọn* $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ *và lập TTP*
   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

$$\text{Khối lượng} = \int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

# Tích phân đường loại I

## Công thức tính tích phân đường loại I

Đường cong $C$ cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$, thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

## Ví dụ

Tính

1. $\int\limits_C x^2 ds$, $C$ là đường $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. $\int\limits_C (x-y)\, ds$, $C$ là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 2x$.

# Tích phân đường loại I

## Các tính chất của tích phân đường loại I

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của đường cong $C$.
- Nếu cung $C$ có khối lượng riêng tại $M(x, y)$ là $\rho(x, y)$ thì khối lượng của nó là $\int\limits_C \rho(x, y)\, ds$, nếu tích phân đó tồn tại.
- Chiều dài của cung $C$ được tính theo công thức $l = \int\limits_C ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

# Tích phân đường loại I

## Các công thức tính tích phân đường loại I

2. Nếu cung $C$ cho bởi phương trình $y = y(x), a \leq x \leq b$ thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

3. Nếu cung $C$ cho bởi phương trình $x = x(y), c \leq y \leq d$ thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy.$$

## Ví dụ

Tính độ dài cung parabol $y^2 = 2x,\ x \in [0,1]$.

# Các công thức tính tích phân đường loại I

## Ví dụ

Tính

1. $\int\limits_C (x-y)\,ds$, $C$ là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=2x$.
2. $\int\limits_C y^2 ds$, $C$ là đường cong $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$.
3. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, $C$ là đường $\begin{cases} x = (\cos t + t\sin t) \\ y = (\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

# Chương 4: Tích phân đường

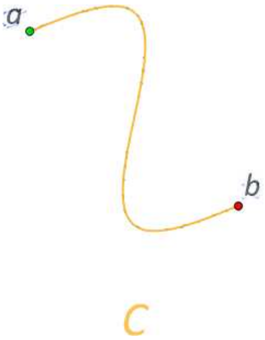
1. Tích phân đường loại I

2. Tích phân đường loại II
   - Công thức Green

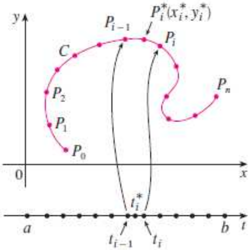
# Tích phân đường của trường véc tơ

## Bài toán

Cho $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ là một trường lực biến đổi liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Tính công thực hiện bởi lực này để di chuyển một hạt dọc theo đường cong $C$.

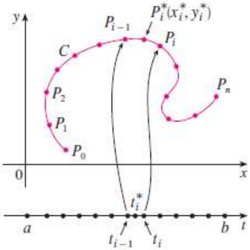


# Tích phân đường của trường véc tơ



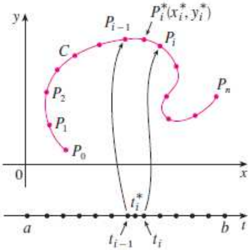

- Cho $C : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.

# Tích phân đường của trường véc tơ



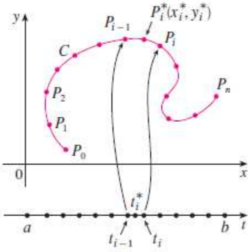

- Cho $C : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.
- Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.
- $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia $C$ thành $n$ cung nhỏ.

# Tích phân đường của trường véc tơ



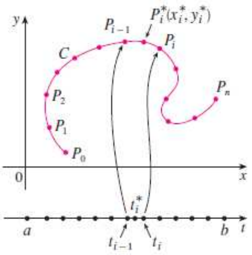

- Cho $C: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.
- Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.
- $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia $C$ thành $n$ cung nhỏ.
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ ứng với $t_i^*$.

# Tích phân đường của trường véc tơ




- Cho $C : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.
- Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.
- $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia $C$ thành $n$ cung nhỏ.
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ ứng với $t_i^*$.
- Công thực hiện bởi lực $\vec{F}$ để di chuyển hạt từ $P_{i-1}$ đến $P_i$ được xấp xỉ bởi
$$[\vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)]\Delta s_i,$$

# Tích phân đường của trường véc tơ




- Cho $C: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.
- Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.
- $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia $C$ thành $n$ cung nhỏ.
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ ứng với $t_i^*$.
- Công thực hiện bởi lực $\vec{F}$ để di chuyển hạt từ $P_{i-1}$ đến $P_i$ được xấp xỉ bởi
$$[\vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)]\Delta s_i,$$
- Công sẽ được xấp xỉ bởi
$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)]\Delta s_i.$$

# Tích phân đường của trường véc tơ

Một cách trực quan, xấp xỉ này càng tốt nếu $n$ càng lớn. Do đó, ta định nghĩa công $W$ thực hiện bởi lực $F$ là giới hạn của tổng tích phân này, nghĩa là,

$$W = \int_C \vec{F}(x,y) \cdot \vec{T}(x,y) ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

# Tích phân đường của trường véc tơ

Một cách trực quan, xấp xỉ này càng tốt nếu $n$ càng lớn. Do đó, ta định nghĩa công $W$ thực hiện bởi lực $F$ là giới hạn của tổng tích phân này, nghĩa là,

$$W = \int_C \vec{F}(x,y) \cdot \vec{T}(x,y)ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

## Công thức tính công của lực biến đổi

$$W = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right] dt$$

$$= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

# Tích phân đường loại II

## Định nghĩa

*Tích phân đường của trường véc tơ* $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *dọc theo đường cong* $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, a \leq t \leq b$ *là*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

# Tích phân đường loại II

## Định nghĩa

*Tích phân đường của trường véc tơ* $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *dọc theo đường cong* $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, a \leq t \leq b$ *là*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

## Các tính chất

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

- Tính chất tuyến tính, tích chất cộng tính.

# Tích phân đường loại II

## Các công thức tính tích phân đường loại II

1. $\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right]dt.$

# Tích phân đường loại II

## Các công thức tính tích phân đường loại II

1. $\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right]dt.$
2. $\overset{\frown}{AB} : y = y\left(x\right)$, điểm đầu $A : x = a$ và điểm cuối $B : x = b$ thì

# Tích phân đường loại II

## Các công thức tính tích phân đường loại II

1. $\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) y'\left(t\right)\right] dt.$
2. $\overset{\frown}{AB} : y = y\left(x\right)$, điểm đầu $A : x = a$ và điểm cuối $B : x = b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y\left(x\right)\right) + Q\left(x, y\left(x\right)\right).y'\left(x\right)\right] dx.$$

# Tích phân đường loại II

## Các công thức tính tích phân đường loại II

1. $\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right]dt.$
2. $\widehat{AB} : y = y\left(x\right)$, điểm đầu $A : x = a$ và điểm cuối $B : x = b$ thì

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y\left(x\right)\right) + Q\left(x, y\left(x\right)\right).y'\left(x\right)\right]dx.$$

3. $\widehat{AB} : x = x\left(y\right)$, điểm đầu $A : y = c$, điểm cuối $B : y = d$ thì

# Tích phân đường loại II

## Các công thức tính tích phân đường loại II

1. $\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right).x'\left(t\right) + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)y'\left(t\right)\right]dt.$
2. $\overset{\frown}{AB}: y = y\left(x\right)$, điểm đầu $A: x = a$ và điểm cuối $B: x = b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y\left(x\right)\right) + Q\left(x, y\left(x\right)\right).y'\left(x\right)\right]dx.$$

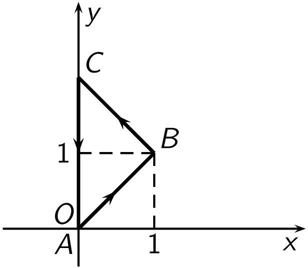
3. $\overset{\frown}{AB}: x = x\left(y\right)$, điểm đầu $A: y = c$, điểm cuối $B: y = d$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_c^d \left[P(x(y), y).x'(y) + Q(x(y), y)\right]dy.$$

# Tích phân đường loại II

## Ví dụ

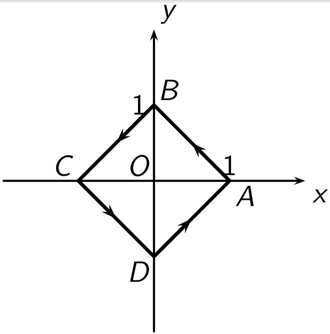
Tính $\int\limits_{ABCA} 2\left(x^2 + y^2\right) dx + x\left(4y + 3\right) dy$ ở đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua các điểm $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$.



# Tích phân đường loại II

## Ví dụ

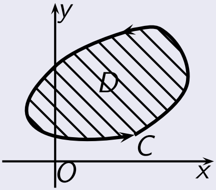
Tính $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc qua các điểm $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.



# Công thức Green

## Hướng dương của đường cong kín

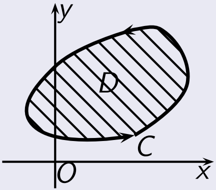
Quy ước: Hướng dương của đường cong kín là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó nằm về phía bên trái.



# Công thức Green

## Hướng dương của đường cong kín

Quy ước: Hướng dương của đường cong kín là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó nằm về phía bên trái.



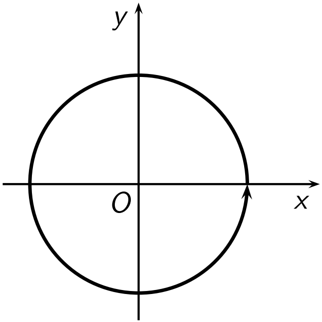

## Công thức Green

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

# Công thức Green

## Ví dụ

Tính tích phân sau $\int\limits_C (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$ bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với $C$ là đường $x^2 + y^2 = R^2$, hướng ngược chiều kim đồng hồ.



# Công thức Green

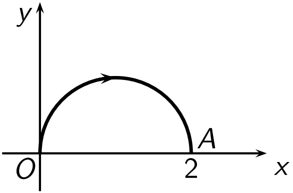
- Nếu $\partial D$ có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.
- Nếu $C$ là đường cong không kín, ta có thể bổ sung $C$ để được đường cong kín và áp dụng công thức Green.

# Công thức Green

- Nếu $\partial D$ có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$
- Nếu $C$ là đường cong không kín, ta có thể bổ sung $C$ để được đường cong kín và áp dụng công thức Green.

## Ví dụ

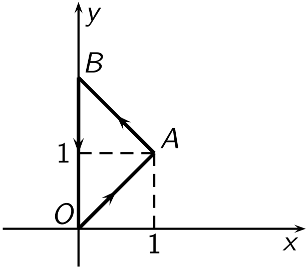
Tính tích phân $\int\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$, với $C$ là đường $x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,0)$.



# Công thức Green

## Ví dụ

Tính $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy\right]$ trong đó $OABO$ là đường gấp khúc đi qua $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$.



# Tích phân đường loại II

## Ứng dụng của tích phân đường loại II để tính diện tích

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có: $S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_C Pdx + Qdy$.

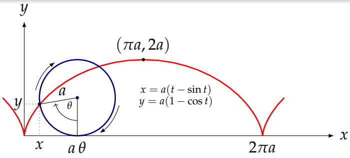
# Tích phân đường loại II

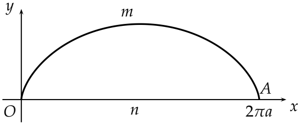
## Ứng dụng của tích phân đường loại II để tính diện tích

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có: $S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_C Pdx + Qdy$.

## Ví dụ

Tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ và $Ox$ $(a > 0)$.



# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Bốn mệnh đề tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Bốn mệnh đề tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín $L$.

# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Bốn mệnh đề tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín $L$.
3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi từ $A$ đến $B$.

# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Bốn mệnh đề tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín $L$.
3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi từ $A$ đến $B$.
4. $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x, y)$ sao cho $du = u'_x dx + u'_y dy = Pdx + Qdy$.

# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Bốn mệnh đề tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín $L$.
3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi từ $A$ đến $B$.
4. $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x, y)$ sao cho $du = u'_x dx + u'_y dy = Pdx + Qdy$.

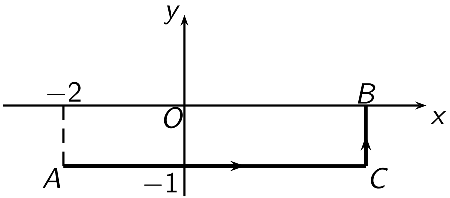
$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt.$$

# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x$.
2. Chọn đường đi sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất.

## Ví dụ

Tính $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy$.



# Tích phân đường không phụ thuộc đường đi

## Ví dụ

Tính $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,2\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$