Giải tích hàm

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Không gian Hilbert

Không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Euclide)

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ, một tích vô hướng trên V là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thoả mãn các tiên đề sau:

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
3) $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$,
4) $\langle u, u \rangle \geq 0, \langle u, u \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $u = 0$.

V + *tích vô hướng* $\Rightarrow$ *KG tiền Hilbert (Euclide).*

Không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Euclide)

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ, một *tích vô hướng* *trên V là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thoả mãn các tiên đề sau:*

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
3) $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$,
4) $\langle u, u \rangle \geq 0, \langle u, u \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $u = 0$.

V + *tích vô hướng* $\Rightarrow$ *KG tiền Hilbert (Euclide).*

Bổ đề

Mọi không gian tiền Hilbert là một không gian định chuẩn, với chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Độ dài - Khoảng cách - Sự vuông góc

Độ dài

Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó *độ dài* (hay *chuẩn*) của vectơ $v \in V$ là số thực không âm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Độ dài - Khoảng cách - Sự vuông góc

Độ dài

Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó *độ dài* (hay *chuẩn*) của vectơ $v \in V$ là số thực không âm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Khoảng cách

Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó khoảng cách giữa hai vectơ u và v là số thực không âm $d(u, v) = \|u - v\|$.

Độ dài - Khoảng cách - Sự vuông góc

Độ dài

Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó *độ dài* (hay *chuẩn*) của vectơ $v \in V$ là số thực không âm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Khoảng cách

Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó khoảng cách giữa hai vectơ u và v là số thực không âm $d(u, v) = \|u - v\|$.

Sự vuông góc

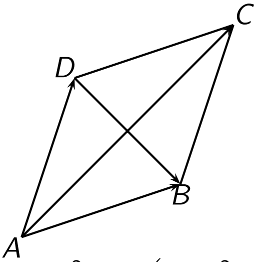
Hai vectơ u và v được gọi là *vuông góc* hay *trực giao* với nhau và được kí hiệu là $u \perp v$ nếu

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Đẳng thức hình bình hành

Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$



$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = 2\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2\right)$$

Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

Ví dụ

Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra $\langle p, q\rangle$ có phải là TVH hay không?

a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $\langle p, q\rangle = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $\langle p, q\rangle$ với
$p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3, q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

Ví dụ

Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra $\langle p, q\rangle$ có phải là TVH hay không?

a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $\langle p, q\rangle = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $\langle p, q\rangle$ với
$p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3, q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

Ví dụ

a) $l_2, \langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$

b) $C[a, b], \langle x, y\rangle = \int\limits_{a}^{b} x(t)y(t)dt.$

Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

Bài tập

Cho $\dim V = n$ với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

$$u, v \in V \Rightarrow \begin{cases} u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n, \\ v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n. \end{cases}$$

Đặt

$$\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Chứng minh $\langle u, v \rangle$ là một tích vô hướng trên V.

Không gian Hilbert

Phần bù trực giao

Định nghĩa

Cho U, V là các KGVT con của không gian Hilbert E.

a) $v \perp U \Leftrightarrow v \perp u, \ \forall u \in U.$

Phần bù trực giao

Định nghĩa

Cho U, V là các KGVT con của không gian Hilbert E.

a) $v \perp U \Leftrightarrow v \perp u, \ \forall u \in U.$

b) $U \perp V \Leftrightarrow u \perp v, \ \forall u \in U, v \in V.$

Định nghĩa

$$U^{\perp} = \{v \in E | v \perp U\}$$

được gọi là phần bù trực giao *của U trong E.*

i) $U^{\perp}$ là một KGVT con đóng của E.

ii) Nếu $\dim E < +\infty$ thì $\dim E = \dim U + \dim U^{\perp}$.

Phần bù trực giao

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^5$ cho $v_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2, 1)$, $v_3 = (2, 3, -1, 2, 1)$. Đặt

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^5 \middle| v \perp v_1, v \perp v_2, v \perp v_3 \right\}.$$

Tìm dim V.

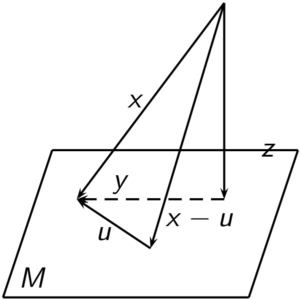
Hình chiếu lên một KGVT con

Định lý

Giả sử M là một KGVT con đóng của không gian Hilbert X. Khi đó mỗi véctơ $x \in X$ đều thừa nhận sự phân tích duy nhất

$$x = y + z \text{ trong đó } y \in M, z \in M^{\perp},$$

thỏa mãn $\|x - y\| \le \|x - u\|$ với mọi $u \in M$.



Hình chiếu lên một KGVT con

Định nghĩa

$$x = y + z \text{ trong đó } \begin{cases} y \in M, \\ z \in M^{\perp} \end{cases} \Rightarrow y \text{ là hình chiếu của } x \text{ lên } M.$$

Hình chiếu lên một KGVT con

Định nghĩa

$$x = y + z \text{ trong đó } \begin{cases} y \in M, \\ z \in M^{\perp} \end{cases} \Rightarrow y \text{ là hình chiếu của } x \text{ lên } M.$$

TH hữu hạn chiều - Đại số tuyến tính

Nếu M có một cơ sở trực chuẩn là $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ thì

$$y = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \ldots \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Hình chiếu lên một KGVT con

Hình chiếu của một véctơ lên một véctơ khác

Bài toán tìm hình chiếu của u lên $v \Leftrightarrow$ hình chiếu của u lên $W = \text{span}\,(v)$

Cách 1: W có một cơ sở trực chuẩn là $S = \left\{ v_1 = \frac{v}{\|v\|} \right\}$. Do đó:

$$w_1 = \langle u, v_1 \rangle \, v_1 = \frac{1}{\|v\|^2} \langle u, v \rangle$$

là hình chiếu của u lên v.

Cách 2: Phân tích $u = w_1 + w_2$, trong đó $w_1 \in W, w_2 \perp W$. Sau đó dựa vào các dữ kiện $w_1 \in W, w_2 \perp W$ để tìm ra w_1, w_2.

Ví dụ

Tìm hình chiếu của véc tơ $u = (1, 3, -2, 4)$ lên véc tơ $v = (2, -2, 4, 5)$

Hình chiếu lên một KGVT con

Ví dụ

Cho $u_1 = (6, 3, -3, 6)$, $u_2 = (5, 1, -3, 1)$. Tìm hình chiếu của $v = (1, 2, 3, 4)$ lên W.

Hình chiếu lên một KGVT con

Ví dụ

Cho $u_1 = (6, 3, -3, 6)$, $u_2 = (5, 1, -3, 1)$. Tìm hình chiếu của $v = (1, 2, 3, 4)$ lên W.

Cách 1: Trước hết ta đi trực giao hoá Gram-Schmidt hệ $\{u_1, u_2\}$ để thu được cơ sở trực chuẩn của W:

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(6, 3, -3, 6), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{260}}(9, -3, -7, -11).$$

Áp dụng công thức

$$w_1 = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 = \left(\frac{-9}{26}, \frac{21}{13}, \frac{10}{13}, \frac{115}{26}\right).$$

Cách 2: Phân tích $v = w_1 + w_2$ trong đó $w_1 \in W$, $w_2 \perp W$ và dẫn tới một hệ hai phương trình hai ẩn.

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

i) Hệ $\{e_n\}$ *trực giao* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$,

ii) Hệ $\{e_n\}$ *trực chuẩn* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ 1 \text{ nếu } i = j. \end{cases}$

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

i) Hệ $\{e_n\}$ *trực giao* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0\ \forall i \neq j$,

ii) Hệ $\{e_n\}$ *trực chuẩn* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ 1 \text{ nếu } i = j. \end{cases}$

Định nghĩa

Nếu hệ $\{e_n\}$ trực chuẩn *thì*

i) $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$ *được gọi là hệ số Fourier,*

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ *được gọi là chuỗi Fourier của* x.

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

Họ véctơ trực giao, trực chuẩn

i) Hệ $\{e_n\}$ *trực giao* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0\ \forall i \neq j$,

ii) Hệ $\{e_n\}$ *trực chuẩn* $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ 1 \text{ nếu } i = j. \end{cases}$

Định nghĩa

Nếu hệ $\{e_n\}$ trực chuẩn *thì*

i) $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$ *được gọi là hệ số Fourier,*

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ *được gọi là chuỗi Fourier của* x*.*

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \leq \|x\|^2$, (Bất đẳng thức Bessel)

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ và $(x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n) \perp e_n,\ \forall n$.

Hệ trực chuẩn đầy đủ

Định nghĩa

Hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ *được gọi là đầy đủ nếu* $x \perp e_n, \forall n \Rightarrow x = 0.$

(còn gọi là cơ sở trực chuẩn)

Hệ trực chuẩn đầy đủ

Định nghĩa

Hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ *được gọi là đầy đủ nếu* $x \perp e_n, \forall n \Rightarrow x = 0.$

(còn gọi là cơ sở trực chuẩn)

Định lý

Các mệnh đề sau tương đương

1) $\{e_n\}$ *là hệ trực chuẩn đầy đủ,*
2) $(\forall x \in X)\ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n,$
3) $(\forall x \in X)\ \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2,$
4) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)\ \ \langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n,$
5) *Hệ* $\{e_n\}$ *là tuyến tính trù mật trong* X.

Ứng dụng vào không gian $\mathcal{L}^2_{[0,2\pi]}$

Trong $\mathcal{L}^2_{[0,2\pi]}$, tập các hàm

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \ldots$$

là một hệ trực chuẩn đầy đủ. Các hệ số Fourier của $f \in \mathcal{L}^2_{[0,2\pi]}$ là

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \begin{cases} a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx, \\ b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx \end{cases}$$

$$f(x) \overset{\mathcal{L}^2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos nx + b_b \sin kx))$$

Phương pháp trực hóa

Định lý

Cho $\{x_n\}$ là một họ các véctơ sao cho với mọi n, các vectơ $x_1, \ldots, x_n$ là ĐLTT. Tồn tại một họ trực chuẩn $\{e_n\}$ cùng lực lượng với $\{x_n\}$ sao cho

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \ \forall n.$$

Chú ý: $\dim X < +\infty \Rightarrow$ Gram-Schmidt.

i) Lý thuyết $\Rightarrow$ vừa chuẩn hoá, vừa trực giao các vectơ.

ii) Thực hành $\Rightarrow$ trực giao trước rồi chuẩn hoá các vectơ sau.

Phương pháp trực hóa

Định lý

Cho $\{x_n\}$ là một họ các véctơ sao cho với mọi n, các vectơ $x_1, \ldots, x_n$ là ĐLTT. Tồn tại một họ trực chuẩn $\{e_n\}$ cùng lực lượng với $\{x_n\}$ sao cho

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \ \forall n.$$

Chú ý: $\dim X < +\infty \Rightarrow$ Gram-Schmidt.

i) Lý thuyết $\Rightarrow$ vừa chuẩn hoá, vừa trực giao các vectơ.

ii) Thực hành $\Rightarrow$ trực giao trước rồi chuẩn hoá các vectơ sau.

Hệ quả

Mọi không gian Hilbert tách được đều có một hệ trực chuẩn đầy đủ đếm được hoặc hữu hạn.

Mọi không gian Hilbert (vô hạn chiều) tách được đều đẳng cấu với nhau.

Phép trực giao hoá Schmidt

Ví dụ

Gram - Schmidt hệ véctơ trong $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (0,0,0,1)$$

Ví dụ

Cho $P_2[x], \langle p, q \rangle = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

a) Gram - Schmidt cơ sở $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ để nhân được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{A}$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{A}$

c) Tìm $[r]_{\mathcal{A}}$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$

Không gian Hilbert

Phiếm hàm tuyến tính trên KG Hilbert

Ví dụ (Bài tập ĐSTT)

Cho V là không gian Euclide n chiều. Chứng minh

$$f : V \to \mathbb{R} \text{ tuyến tính } \Leftrightarrow \exists a \in V : f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V.$$

Phiếm hàm tuyến tính trên KG Hilbert

Ví dụ (Bài tập ĐSTT)

Cho V là không gian Euclide n chiều. Chứng minh

$$f : V \to \mathbb{R} \text{ tuyến tính } \Leftrightarrow \exists a \in V : f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V.$$

F. Riesz

i) $\forall a \in X$ cố định, $f(x) = \langle a, x \rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X với $\|f\| = \|a\|$ và ngược lại,

Phiếm hàm tuyến tính trên KG Hilbert

Ví dụ (Bài tập ĐSTT)

Cho V là không gian Euclide n chiều. Chứng minh

$$f : V \to \mathbb{R} \text{ tuyến tính } \Leftrightarrow \exists a \in V : f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V.$$

F. Riesz

i) $\forall a \in X$ cố định, $f(x) = \langle a, x \rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X với $\|f\| = \|a\|$ và ngược lại,

ii) Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X đều có dạng

$$f(x) = \langle a, x \rangle, a \in X, \|a\| = 1.$$

Không gian Hilbert

Toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert

i) $y \in H$ cố định $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục với x,
ii) $\exists y^* =: A^*y$ sao cho $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert

i) $y \in H$ cố định $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục với x,
ii) $\exists y^* =: A^*y$ sao cho $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Toán tử liên hợp

i) A^* là một toán tử tuyến tính, gọi là toán tử liên hợp của A,
ii) $\|A^*\| = \|A\|$,
iii) $(A^*)^* = A$,
iv) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$,
v) $(AB)^* = B^*A^*$.

Toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert

i) $y \in H$ cố định $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục với x,

ii) $\exists y^* =: A^*y$ sao cho $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Toán tử liên hợp

i) A^* là một toán tử tuyến tính, gọi là toán tử liên hợp của A,

ii) $\|A^*\| = \|A\|$,

iii) $(A^*)^* = A$,

iv) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$,

v) $(AB)^* = B^*A^*$.

Định nghĩa

$A = A^* \Rightarrow$ *Toán tử tự liên hợp (hay đối xứng).*

Toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert

i) $y \in H$ cố định $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục với x,
ii) $\exists y^* =: A^*y$ sao cho $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Toán tử liên hợp

i) A^* là một toán tử tuyến tính, gọi là toán tử liên hợp của A,
ii) $\|A^*\| = \|A\|$,
iii) $(A^*)^* = A$,
iv) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$,
v) $(AB)^* = B^*A^*$.

Định nghĩa

$A = A^* \Rightarrow$ *Toán tử tự liên hợp (hay đối xứng).*

Ví dụ

Toán tử chiếu,

Toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert

i) $y \in H$ cố định $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục với x,
ii) $\exists y^* =: A^*y$ sao cho $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Toán tử liên hợp

i) A^* là một toán tử tuyến tính, gọi là toán tử liên hợp của A,
ii) $\|A^*\| = \|A\|$,
iii) $(A^*)^* = A$,
iv) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$,
v) $(AB)^* = B^*A^*$.

Định nghĩa

$A = A^* \Rightarrow$ *Toán tử tự liên hợp (hay đối xứng).*

Ví dụ

Toán tử chiếu,toán tử $(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ trong $L_2[a,b]$.

Trị riêng và vectơ riêng của toán tử đối xứng

Tính chất

Cho A là một toán tử đối xứng.

i) Các véc tơ riêng của A ứng với hai trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau,

ii) Phần bù trực giao của mọi không gian con bất biến đối với A cũng bất biến đối với A.

Toán tử Unita

Định nghĩa 1

Toán tử tuyến tính bị chặn $U : H \to H$ được gọi là unita nếu

$$UU^* = U^*U = I.$$

Toán tử Unita

Định nghĩa 1

Toán tử tuyến tính bị chặn $U : H \to H$ được gọi là unita nếu

$$UU^* = U^*U = I.$$

Định nghĩa 2

Toán tử tuyến tính bị chặn $U : H \to H$ được gọi là unita nếu

i) U là toàn ánh,

ii) $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H$.

Định nghĩa 3

Toán tử tuyến tính bị chặn $U : H \to H$ được gọi là unita nếu

i) tập ảnh $U(H)$ là trù mật trong H,

ii) $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H$.

Toán tử Unita

Ví dụ

i) $\dim H < +\infty$: phép quay trong $\mathbb{R}^2$, ma trận trực giao (thực), ma trận unita (phức),

ii) Toán tử dịch chuyển (shift operators) trong l^2,

iii) Toán tử Fourier.

Toán tử Unita

Ví dụ

i) $\dim H < +\infty$: phép quay trong $\mathbb{R}^2$, ma trận trực giao (thực), ma trận unita (phức),

ii) Toán tử dịch chuyển (shift operators) trong l^2,

iii) Toán tử Fourier.

Phổ của toán tử Unita

Phổ của toán tử Unita nằm trên vòng trên vòng tròn đơn vị

Toán tử chuẩn tắc

Định nghĩa

Toán tử tuyến tính bị chặn T được gọi là chuẩn tắc nếu nó giao hoán với toán tử liên hợp của nó, i.e., $TT^* = T^*T$.

Toán tử chuẩn tắc

Định nghĩa

Toán tử tuyến tính bị chặn T được gọi là chuẩn tắc nếu nó giao hoán với toán tử liên hợp của nó, i.e., $TT^* = T^*T$.

Định lý

Toán tử tuyến tính bị chặn T là chuẩn tắc khi và chỉ khi

$$\|T(x)\| = \|T^*(x)\|, \forall x \in H.$$

Các tính chất

i) T chuẩn tắc $\Rightarrow (\lambda I - T)$ là chuẩn tắc, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

ii) $\|T^n\| = \|T\|$.