Đại Số Tuyến Tính

ĐẠI SỐ

MI1140_ 4 (3-2-0-8)

Th.S Nguyễn Hải Sơn

Đại Số Tuyến Tính

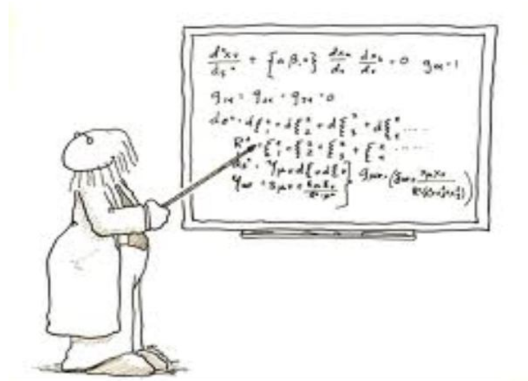
CHƯƠNG I:
LOGIC-TẬP HỢP-ÁNH XẠ-SỐ PHỨC

I. ĐẠI CƯƠNG VỀ LOGIC

II. SƠ LƯỢC VỀ LÍ THUYẾT TẬP HỢP

III. ÁNH XẠ

IV. SỐ PHỨC



BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

George Boole (1815-1864) và De Morgan (1806-1871) sáng lập ngành logic Toán độc lập với triết học. Nhờ những Đại số Boole mà Boole đã định nghĩa các phép toán trên tập các mệnh đề và lập ra đại số các mệnh đề.

http://vi.wikipedia.org/wiki/Logic

Đại Số Tuyến Tính

- **Logic** hay **luận lý học**, từ tiếng Hy Lạp cổ điển λόγος (logos), nghĩa nguyên thủy là *từ ngữ*, hoặc *điều đã được nói*, (nhưng trong nhiều ngôn ngữ châu Âu đã trở thành có ý nghĩa là *suy nghĩ* hoặc *lập luận* hay *lý trí*). *Logic* thường được nhắc đến như là một ngành nghiên cứu về tiêu chí đánh giá các luận cứ, mặc dù định nghĩa chính xác của logic vẫn là vấn đề còn đang được bàn cãi giữa các triết gia. Tuy nhiên khi môn học được xác định, nhiệm vụ của nhà logic học vẫn như cũ: làm đẩy mạnh tiến bộ của việc phân tích các suy luậncó hiệu lực và suy luận ngụy biện để người ta có thể phân biệt được luận cứ nào là hợp lý và luận cứ nào có chỗ không hợp lý.
- Theo truyền thống, logic được nghiên cứu như là một nhánh của triết học. Kể từ giữa thế kỉ 19 logic đã thường được nghiên cứu trong toán học và luật. Gần đây nhất logic được áp dụng vào khoa học máy tính và trí tuệ nhân tạo. Là một ngành khoa học hình thức, logic nghiên cứu và phân loại cấu trúc của các khẳng định và các lý lẽ, cả hai đều thông qua việc nghiên cứu các hệ thống hình thức của việc suy luận và qua sự nghiên cứu lý lẽ trong ngôn ngữ tự nhiên. Tầm bao quát của logic do vậy là rất rộng, đi từ các đề tài cốt lõi như là nghiên cứu các lý lẽ ngụy biện và nghịch lý, đến những phân tích chuyên gia về lập luận, chẳng hạn lập luận có xác suất đúng và các lý lẽ có liên quan đến quan hệ nhân quả. Ngày nay, logic còn được sử dụng phổ biến trong lý thuyết lý luận.
- Qua suốt quá trình lịch sử, đã có nhiều sự quan tâm trong việc phân biệt lập luận tốt và lập luận không tốt, và do đó logic đã được nghiên cứu trong một số dạng ít nhiều là quen thuộc đối với chúng ta. Logic Aristotle chủ yếu quan tâm đến việc dạy lý luận thế nào cho tốt, và ngày nay vẫn được dạy với mục đích đó, trong khi trong logic toán học và triết học phân tích (*analytical philosophy*) người ta nhấn mạnh vào logic như là một đối tượng nghiên cứu riêng, và do vậy logic được nghiên cứu ở một mức độ trừu tượng hơn.
- Các quan tâm về các loại logic khác nhau giải thích rằng logic không phải là được nghiên cứu trong chân không. Trong khi logic thường có vẻ tự cung cấp sự thúc đẩy chính nó, môn học này phát triển tốt nhất khi lý do mà chúng ta quan tâm đến logic được đặt ra một cách rõ ràng.

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

Đại Số Tuyến Tính

1.1 Mệnh đề và trị chân lý.

- Mệnh đề (MĐ) là một khẳng định có giá trị chân lý xác định (đúng hoặc sai nhưng không thể vừa đúng vừa sai hoặc không đúng không sai)

- MĐ đúng ta nói nó có trị chân lý là 1

MĐ sai ta nói nó có trị chân lý là 0

VD1: Các khẳng định sau là mđ:

- Hai Bà Trưng là một quận của Hà Nội.
- “3<1”

VD2: Các câu sau không phải mđ:

- Bạn đi đâu đấy? (câu hỏi)
- Xin đừng giẫm lên cỏ! (câu cầu khiến)
- “x>3”

Bài I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.2 Các phép toán trong tập các mệnh đề.

Giả sử **M** là tập các mệnh đề

1.2.1 Phủ định.

*G/s A∈**M.** Mđ "không phải là A" gọi là mệnh đề phủ định của A, kí hiệu* $\overline{A}$

VD1: A="1<2" thì $\overline{A} = "1 \geq 2"$

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

1.2 Các phép toán trong tập các mệnh đề.

1.2.2 Phép hội.

*G/s A,B∈**M.** Mđ "A và B" gọi là hội của A và B, kí hiệu : A ∧ B*

VD2: A="Hôm nay trời mưa" và B="hôm nay trời lạnh"

A∧B="Hôm nay trời mưa và lạnh".

NX: Mđ A∧B chỉ đúng khi và chỉ khi cả A, B đều đúng.

A	B	A ∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2 Các phép toán trong tập các mệnh đề.

1.2.3 Phép tuyển. *G/s A,B∈**M.** Mđ "A hoặc B" gọi là tuyển của A và B, kí hiệu : A* ∨ *B*

VD3: A="Hôm nay trời mưa" và B="hôm nay trời lạnh"

A ∨ B="Hôm nay trời mưa hoặc lạnh".

NX: Mđ A ∨B chỉ sai khi và chỉ khi cả A, B đều sai.

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.2 Các phép toán trong tập các mệnh đề.

1.2.4 Phép kéo theo.

*G/s A,B∈**M.** Mđ "Nếu A thì B" (A kéo theo B, A là điều kiện cần của B, B là điều kiện đủ của A), kí hiệu : A → B, là mđ chỉ sai nếu A đúng, B sai.*

A: giả thuyết và B: kết luận

VD4: A="Hôm nay trời mưa" và B= "Hôm nay trời lạnh"

A→B=" Nếu hôm nay trời mưa thì trời lạnh".

A	B	A →B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

***NX:** Nếu A sai (hoặc B đúng) thì A→B luôn đúng.*

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.2 Các phép toán trong tập các mệnh đề.

1.2.5 Phép cần và đủ.

*G/s A,B∈**M.** Mđ "A nếu và chỉ nếu B" (B là điều kiện cần và đủ đối với A), kí hiệu : A ↔ B, là mđ chỉ đúng nếu A và B cùng đúng hoặc cùng sai*

VD5: A: "1<2" và B: "1 + a < 2 + a "

A↔B: "1<2 nếu và chỉ nếu 1 + a < 2 + a".

A	B	A ↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tóm lại:

A	B	$\overline{A}$	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Chú ý:

- Một mđ A gọi là mđ đơn giản. Từ các mđ đơn giản và các phép toán ta xây dựng được các mđ phức tạp hơn, gọi là mệnh đề phức hợp (hay biểu thức mđ).

VD: A →B một mệnh đề phức hợp.

1.3 Hằng đúng và mâu thuẫn (hằng sai)

*- Mệnh đề phức hợp A gọi là hằng đúng nếu nó luôn đúng trong mọi trường hợp, kí hiệu là **T** (True).*

*- Mệnh đề phức hợp A gọi là mâu thuẫn nếu nó luôn sai trong mọi trường hợp, kí hiệu là **F** (False).*

1.4 Tương đương logic.

Hai mệnh đề A và B gọi là tương đương logic, kí hiệu: A $\Leftrightarrow$ B nếu mệnh đề A$\leftrightarrow$B là hằng đúng.

NX: Quan hệ "tương đương logic" là một *quan hệ tương đương*.

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

Chú ý:

- Không có khái niệm "bằng nhau" giữa 2 mđ.

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.5 Một số tương đương logic cơ bản

(a) Luật đồng nhất $A \wedge T \Leftrightarrow A$ $\qquad A \vee F \Leftrightarrow A$

(b) Luật thống trị $A \vee T \Leftrightarrow T$ $\qquad A \wedge F \Leftrightarrow F$

(c) Luật lũy đẳng $A \wedge A \Leftrightarrow A \vee A \Leftrightarrow A$

(d) Luật phủ định $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$

Đại Số Tuyến Tính

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.5 Một số tương đương logic cơ bản

(e) Luật giao hoán $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$; $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

(f) Luật kết hợp

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C); \ (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

(g) Luật phân phối $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

(h) Luật De Morgan

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}; \qquad \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

(i) Luật phản đảo

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

Chú ý:

$$\boxed{A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B}$$

Thật vậy, sử dụng bảng trị chân lý, ta có

A	B	A→B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

VD1: Chứng minh các mệnh đề sau là hằng đúng.

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$ b) $(A\to B)\leftrightarrow(\overline{A}\vee B)$

Lời giải: a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$

Cách 1. Dùng bảng trị chân lí

A	B	$\overline{A}$	$A\vee B$	$\overline{A}\wedge(A\vee B)$	Mđ (a)

Mđ (a) luôn có trị chân lí là 1 nên nó là hằng đúng.

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

VD1: Chứng minh các mệnh đề sau là hằng đúng.

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$ b) $(A\to B)\leftrightarrow(\overline{A}\vee B)$

Lời giải: a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$

Cách 1. Dùng bảng trị chân lí

A	B	$\overline{A}$	$A\vee B$	$\overline{A}\wedge(A\vee B)$	Mđ (a)
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Mđ (a) luôn có trị chân lí là 1 nên nó là hằng đúng.

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\rightarrow B$

Cách 2. Dùng lập luận logic.

G/s mđ(a) không là hằng đúng, tức là tồn tại A, B để mđ(a) sai. Khi đó $\overline{A}\wedge(A\vee B)$ đúng và B sai **(1)**.

$$\overline{A}\wedge(A\vee B)\ \textbf{đúng} \Rightarrow \begin{cases}\overline{A} & \textbf{đúng}\\ A\vee B & \textbf{đúng}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A & \textbf{sai}\\ A\vee B & \textbf{đúng}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ B **đúng** (mâu thuẫn với (**1**))

Do đó, điều giả sử là sai.

Vậy $\overline{A}\wedge(A\vee B)$ là hằng đúng.

Đại Số Tuyến Tính

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$

Cách 3. Phương pháp biến đổi tương đương.

$$\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B \Leftrightarrow \overline{\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]}\vee B$$

$$\Leftrightarrow \left[A\vee\overline{(A\vee B)}\right]\vee B \Leftrightarrow \left[A\vee(\overline{A}\wedge\overline{B})\right]\vee B$$

$$\Leftrightarrow \left[(A\vee\overline{A})\wedge(A\vee\overline{B})\right]\vee B$$

$$\Leftrightarrow \left[T\wedge(A\vee\overline{B})\right]\vee B \Leftrightarrow \left[A\vee\overline{B}\right]\vee B$$

$$\Leftrightarrow A\vee\left(\overline{B}\vee B\right) \Leftrightarrow A\vee T \Leftrightarrow T$$

***Chú ý:** $\boxed{A\to B\Leftrightarrow\overline{A}\vee B}$

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

VD1: Chứng minh các mệnh đề sau là hằng đúng.

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee B)\right]\to B$ b) $(A\to B)\leftrightarrow(\overline{A}\vee B)$

VD2: Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương logic:

$(p\to q)\wedge p$ và $p\wedge q$

(Đề 1-hè 2009)

VD3: Chứng minh hai mệnh đề sau là ko tương đương logic:

$(p\to q)\to r$ và $p\to(q\to r)$

Nhận xét: Phép kéo theo các mđ không có tính kết hợp

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.6 Vị từ và lượng từ

1.6.1 Vị từ (Hàm mệnh đề)

- Những câu có chứa các biến mà bản thân nó chưa là một mđ, nhưng khi ta thay các biến bởi các giá trị thuộc miền X thì ta được một mđ, gọi là *hàm mệnh đề*. Tập X gọi là *miền xác định* của *hàm mệnh đề* đó.

VD1: P(x)="x>3" với $\mathbf{x \in N}$.

P(1)="1>3"(sai), P(5)="5>3"(đúng)

VD2: P(x,y)="x^2 +yx-2=0" với $\mathbf{(x,y) \in R^2}$…

Đại Số Tuyến Tính

1.6.2 Lượng từ

Cho P(x) là một vị từ với biến x xác định trên X.

- Lượng từ "với mọi" của P(x) là:

"P(x) đúng với mọi giá trị x trong X"

kí hiệu: $\forall x \in X, P(x)$

- Lượng từ "tồn tại" của P(x) là:

"tồn tại giá trị x trong X sao cho P(x) đúng "

kí hiệu: $\exists x \in X, P(x)$

VD1: $\mathrm{P(x)} = "x^2 > 0"$ là hàm mệnh đề

$"\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$ là mđ sai

$"\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$ là mđ đúng

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.6 Vị từ và lượng từ - 1.6.2 Lượng từ

Định lí. Ta có các tương đương logic

i) $\overline{\forall x \in X, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X, \overline{P(x)}$

ii) $\overline{\exists x \in X, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X, \overline{P(x)}$

VD2. Phủ định các mệnh đề sau

a) $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$

b) $B = "\exists x, \forall y, x^2 + y^2 \leq 0"$

c) $C = "\forall x, (\exists y, P(x, y)) \rightarrow Q(x)"$

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.6 Vị từ và lượng từ - 1.6.2 Lượng từ

Lời giải

a) $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$

$$\overline{A} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \overline{x^2 > 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \le 0$$

b) $B = "\exists x, \forall y, x^2 + y^2 \le 0"$

$$\overline{B} \Leftrightarrow \forall x, \overline{\forall y, x^2 + y^2 \le 0} \Leftrightarrow \forall x, \exists y, \overline{x^2 + y^2 \le 0}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, \exists y, x^2 + y^2 > 0$$

c) $C = "\forall x, (\exists y, P(x,y)) \to Q(x)"$

$$\overline{C} \Leftrightarrow \exists x, \overline{(\exists y, P(x,y)) \to Q(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{\overline{(\exists y, P(x,y))} \vee Q(x)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x, (\exists y, P(x,y)) \wedge \overline{Q(x)}$$

Đại Số Tuyến Tính

BÀI I: ĐẠI CƯƠNG VỀ LÔGIC

1.6 Vị từ và lượng từ - 1.6.2 Lượng từ

VD3. Cho ánh xạ $f : X \to Y$

$$f \text{ lµ®¬n ¸nh} \Leftrightarrow \text{"}\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2)\text{"}$$

Phủ định mệnh đề trên và chỉ ra chứng minh f không đơn ánh ta phải làm gì ?

Lời giải:

$$f \text{ ko lµ®¬n ¸nh} \Leftrightarrow \overline{\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, \overline{(f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2)$$

MỘT SỐ ĐỀ THI

Bài 1. CM hai mệnh đề sau là tương đương logic

(i) $p \rightarrow (q \wedge p)$ và $p \rightarrow q$ (Đề 2-hè 2009)

(ii) $\overline{A \rightarrow B}$ và $A \wedge \overline{B}$ (Đề 3-K56)

(iii) $A \rightarrow B$ và $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ (Đề 4-K56)

Bài 2. Xét xem hai mệnh đề sau có tương đương logic không?

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ và $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (Đề 1-K55)

(ii) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ và $A \wedge B \rightarrow C$ (Đề 2-K55)

(iii) $(A \vee B) \rightarrow C$ và $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ (Đề 1-K49)

(iv) $A \rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ (Đề 2-K49)

MỘT SỐ ĐỀ THI

Bài 3. Xét xem mệnh đề sau đúng hay sai

(i) "Nếu các số thực x và y thỏa mãn x>y và y>x thì suy ra x=y"

(ii) "Nếu số tự nhiên n lẻ và n^2 chẵn thì suy ra n là số nguyên tố"

(Đề 3, Đề 4 –K49)

BÀI II: SƠ LƯỢC VỀ LÍ THUYẾT TẬP HỢP

Đại Số Tuyến Tính

http://vi.wikipedia.org/wiki

- Trong toán học, **tập hợp** (tiếng Trung: 集合, tiếng Anh: Set) có thể hiểu tổng quát là một tụ tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó. Các đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp. *Tập hợp* là một khái niệm nền tảng (*fundamental*) và quan trọng của toán học hiện đại. Ngành toán học nghiên cứu về tập hợp là lý thuyết tập hợp.
- Trong lý thuyết tập hợp, người ta xem tập hợp là một khái niệm nguyên thủy, không định nghĩa. Nó tồn tại theo các tiên đề được xây dựng một cách chặt chẽ. Khái niệm tập hợp là nền tảng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số... trong toán học.
- Nếu a là **phần tử** của tập hợp A, ta ký hiệu a A. Khi đó ta cũng nói rằng phần tử *a* thuộc tập hợp *A*.
- Một tập hợp có thể là một phần tử của một tập hợp khác. Tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp còn được gọi là họ tập hợp.
- Lý thuyết tập hợp cũng thừa nhận có một tập hợp không chứa phần tử nào, được gọi là tập hợp rỗng, ký hiệu là . Các tập hợp có chứa ít nhất một phần tử được gọi là tập hợp không rỗng.
- Ngày nay, một phần của lý thuyết tập hợp đã được nhiều nước đưa vào giáo dục phổ thông, thậm chí ngay từ bậc tiểu học.
- Nhà toán học Georg Cantor được coi là ông tổ của lý thuyết tập hợp. Để ghi nhớ những đóng góp của ông cho lý thuyết tập hợp nói riêng và toán học nói chung, tên ông đã được đặt cho một ngọn núi ở Mặt Trăng.

BÀI II: SƠ LƯỢC VỀ LÍ THUYẾT TẬP HỢP

2.1 Tập hợp và phần tử.

a. Khái niệm

-Tập hợp là khái niệm nguyên sơ không được định nghĩa.

- Tất cả các đối tượng xác định nào đó hợp lại tạo thành một tập hợp, mỗi đối tượng cấu thành tập hợp là một phần tử của tập hợp.

VD: - Tập các sinh viên trong 1 lớp.

- Tập các số tự nhiên nhỏ hơn 10….

BÀI II: SƠ LƯỢC VỀ LÍ THUYẾT TẬP HỢP

2.1 Tập hợp và phần tử.

b.Quan hệ "thuộc"

-Nếu a là phần tử của tập E: "a thuộc E" , kí hiệu: $a \in E$

-Nếu a ko là phần tử của tập E: "a không thuộc E" ,

kí hiệu: $a \notin E$ hoÆc $a \overline{\in} E$

c. Cách mô tả tập hợp

- Liệt kê các phân tử của tập hợp.
- Nêu ra tính chất dặc trưng của các phần tử

d. Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, k/h: $\varnothing$

2.2 Tập con – Hai tập hợp bằng nhau.

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \rightarrow (x \in B))}$$

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}}$$

VD1: A={1;2;3;4}; B={1;2; 3;4;5;6}; C={x∈**N**| 0<x<5}

$$A \subset B, \quad A = C$$

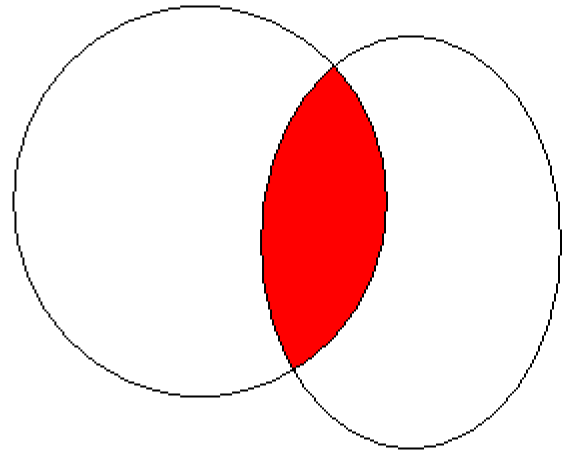
VD2: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2.3. Các phép toán.

Cho các tập hợp A và B.

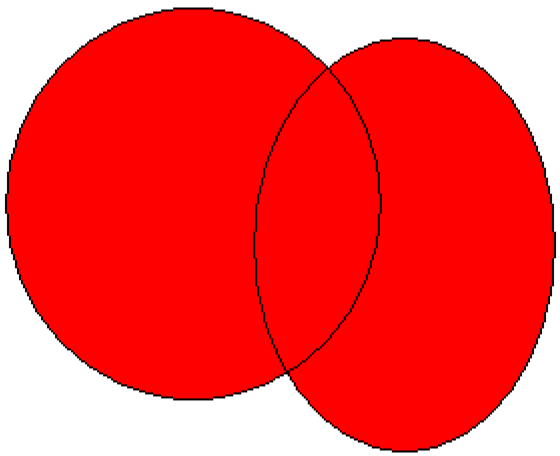
2.3.1. Phép giao.

$$A \cap B = \left\{ x \middle| \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \right\}$$



2.3.2 Phép hợp.

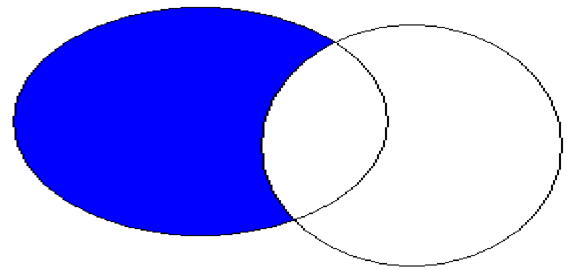
$$A \cup B = \left\{ x \middle| \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right. \right\}$$



2.3. Các phép toán.

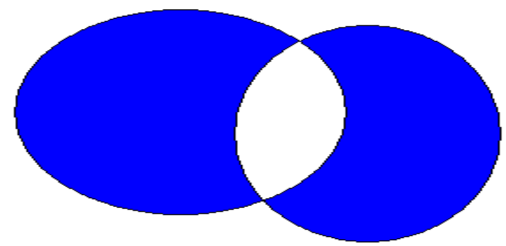
2.3.3. Hiệu của hai tập hợp

$$A \setminus B = \left\{ x \middle| \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \right\}$$



-Hiệu đối xứng của A và B

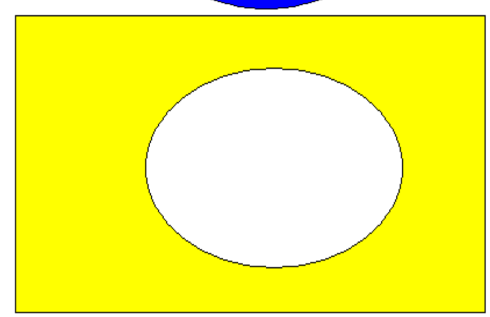
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



- Phần bù.

G / s $A \subset X$. Phçn bï cña A trong X:

$$\overline{A} = C_X(A) = X \setminus A$$



2.3. Các phép toán.

2.3.3. Tính chất

(i) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $A \vartriangle B = B \vartriangle A$.

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$.

(iii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(iv) C¸c c«ng thøc De Morgan

$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$;

$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

2.3. Các phép toán.

VD1: A={1;2;3;4}; B={3;4;5;6}. Tính

$$A \cap B; \quad A \cup B; \quad A \setminus B; \quad A \triangle B$$

LG.

$$A \cap B = \{3;4\}$$

$$A \cup B = \{1;2;3;4;5;6\}$$

$$A \setminus B = \{1;2\}$$

$$A \triangle B = \{1;2;5;6\}$$

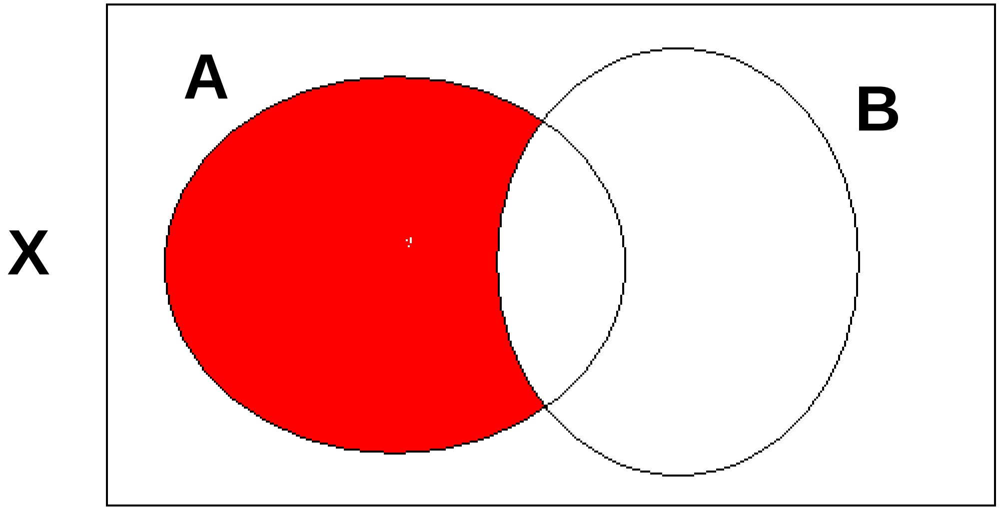
2.3. Các phép toán.

VD2. Cho A, B là tập con của X. CMR:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Lời giải:

$$\forall x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$$



2.3. Các phép toán.

VD3. CMR với A, B, C là các tập hợp bất kì, ta có:

a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Lời giải: b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Cách 1: Phương pháp phần tử.

$$\forall x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$$

Vậy $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Cách 2: Phương pháp biến đổi tương đương.

G/s A, B, C là tập con của một tập X. Khi đó, ta có:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$$

$$= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B \cup C} = A \setminus (B \cup C)$$

Ghi nhớ: **Để chứng minh 2 tập hợp bằng nhau, ta có 3 phương pháp:**

-Phương pháp sử dụng sơ đồ Venn.

- Phương pháp phần tử.

- Phương pháp biến đổi .

2.4 Tích Descartes (Đề các)

2.4.1 Hai bộ số bằng nhau

$$(a_1;a_2;...;a_m) = (b_1;b_2;...;b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_i = b_i; \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$$

2.4.2. Đ/n: Tích Descartes của các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ là một tập hợp

$$C = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

xác định như sau:

(i) $C = \varnothing$ khi $\exists i : A_i = \varnothing$

(ii) C=A_1 khi $n = 1$

(iii) $C = \{(a_1;a_2;...;a_n) \mid a_i \in A_i; i = \overline{1,n}\}$

2.4 Tích Descartes (Đề các)

*Chú ý: Khi $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \ldots = \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$ thì viết $\mathbf{C} = \mathbf{A}^n$

VD: A={a;b}, B={1;2;3}. Xác định

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$; $\mathbf{A}^2$

b) Phần tử (a;2;b) thuộc tập hợp nào? **(Đ/s: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{A}$)**

c) Số phần tử của AxBxAxB. **(Đ/s: 36)**

Lời giải:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \{(1;a),(1;b),(2;a),(2;b),(3;a),(3;b)\}$$

$$\mathbf{A}^2 = \{(a;a),(a;b),(b;a),(b;b)\}$$

Chú ý: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 1. Với A, B, C là các tập hợp bất kì, CMR

(i) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(ii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Bài 2. Cho các tập hợp A, B, C thỏa mãn

$(A \cup B) \subset (A \cup C)$ và $(A \cap B) \subset (A \cap C)$

CMR: $B \subset C$

(Đề 3-K51)

BÀI III: ÁNH XẠ

Đại Số Tuyến Tính

3.1 Định nghĩa.

a. Đ/n: Cho X,Y$\neq \emptyset$. Ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y.

$$\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$y=f(x)$: ảnh của x qua ánh xạ f

X: tập nguồn Y: tập đích

VD1: Ánh xạ đồng nhất của tập X: $\mathbf{I_X}: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$$

VD2: X: tập người, Y: tập tên người. Ánh xạ f từ X đến Y cho mỗi người với 1 tên tương ứng

BÀI III: ÁNH XẠ

3.1 Định nghĩa.

b. Tập ảnh và tập nghịch ảnh.

Cho ánh xạ: $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ và $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}, \mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- *Ảnh của tập A:* $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A}\}$

Đặc biệt, $f(X)=\mathrm{Im}f$ gọi là ảnh của X qua f.

- *Tập nghịch ảnh của B:* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{B}\}$

VD1. Cho ánh xạ $, f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Xác định

a) $\mathbf{f}(\{0;2\}), \mathbf{f}^{-1}(0), \mathbf{f}^{-1}(\{0;7\})$

b) $\mathbf{f}((-1;0]), \mathbf{f}^{-1}([4;7))$ **(Đề1- 08/2010)**

BÀI III: ÁNH XẠ

Đại Số Tuyến Tính

NX: $$\text{(i)}\ \ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$$

$$\text{(ii)}\ \ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

VD2. CM các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ

$$\text{(i)}\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);\ A, B \subset X$$

$$\text{(ii)}\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); A, B \subset Y$$

BÀI III: ÁNH XẠ

3.2 Đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

Đ/n: Cho ánh xạ f: X→Y

(i) $\mathbf{f}$: ®¬n ¸nh $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}, (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)) \to (\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2)$

$\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}, (\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2) \to (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2))$

$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, pt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ có kh«ng qu¸ 1 nghiÖm

(ii) $\mathbf{f}$: toµn ¸nh $\Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$

$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, pt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ lu«n có nghiÖm.

(iii) $\mathbf{f}$: song ¸nh $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{f} : \text{®¬n ¸nh} \\ \mathbf{f} : \text{toµn ¸nh} \end{cases}$

VD1. Phủ định các mệnh đề trên và chỉ ra: để chứng minh *f* không là đơn ánh (toàn ánh, song ánh), ta phải làm gì.

VD2. Xét xem trong các ánh xạ sau có là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh không

a) $\mathbf{f}:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

c) $\mathbf{f}:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

b) $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

d) $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

BÀI III: ÁNH XẠ

3.2 Tích của hai ánh xạ.

Đ/n: Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$.

Ánh xạ $h : X \to Z$ xác định bởi $h(x)=g(f(x))$ với mọi $x \in X$ gọi là ánh xạ tích (ánh xạ hợp thành) của f và g, kí hiệu: $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

VD. Cho các ánh xạ

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}-1} \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

Xác định các ánh xạ $g \circ f$ và $f \circ g$ (nếu có)

Đại Số Tuyến Tính

3.3 Ánh xạ ngược.

Đ/n. Cho song ánh f: X→Y. Khi đó, với mỗi *y* của Y đều tồn tại duy nhất một *x* của X để $f(x)=y$ hay $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Như vậy, ta có ánh xạ:

$$\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$$

$$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$$

Ánh xạ này cũng là một song ánh và gọi là ánh xạ ngược của f.

VD1 Xác định ánh xạ ngược của các ánh xạ sau:

a) $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 + 1$$

b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^3}$$

Đại Số Tuyến Tính

MỘT SỐ ĐỀ THI

Bài 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

Xác định $\mathbf{f}((3;5]),\ \mathbf{f}^{-1}([2;7))$

(Đê 2- hè 2010)

Bài 2. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=z^6+3z^3$

Tìm $f^{-1}(-4)$

(Đề 3-K51)

Bài 3. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=3z^4+5iz^2$

1) *f có là đơn ánh ? toàn ánh không? Vì sao*
2) *Cho B={-2}. Tìm* $f^{-1}(B)$

(Đề 3-K53)

MỘT SỐ ĐỀ THI

Bài 4. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(x-2y,2x+y)$

a) CM *f* là một song ánh.

b) Cho tập $A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=45\}$ Tìm nghịch ảnh $f^{-1}(A)$

(Đề 3- K55)

Bài 5. Như câu 4 với $f(x,y)=(3x+y;x-3y)$

$A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=40\}$ **(Đề 4- K55)**

Bài 6. Cho các ánh xạ $f:X\to Y, g:Y\to Z$ có ánh xạ hợp thành $g_0 f:X\to Z$. Giả sử f là toàn ánh và là $g_0 f$ đơn ánh. CMR g là đơn ánh.

(Đề 4- K51)

BÀI IV: SỐ PHỨC

Đại Số Tuyến Tính

4.1 Phép toán hai ngôi.

4.1.1 Khái niệm. *Phép toán hai ngôi (phép toán) * trên tập E là một quy luật khi tác động lên hai phần tử a và b của E sẽ tạo ra một và chỉ một phần tử cũng của E.*

$$* : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

$$(a,b) \mapsto a * \mathbf{b}$$

VD1: Phép cộng (+) và phép nhân (.) thông thường trên các tập số: **N, Z, Q, R, C.**

VD2: Phép giao và phép hợp trên tập các tập hợp.

?1: Phép chia là phép toán trên tập R hay không?

?2: Hãy cho biết các phép toán trên tập các mệnh đề?

4.1.2 Tính chất của phép toán.

Cho phép toán * trên tập E.

a. Tính kết hợp: *(a*b)*c=a*(b*c) với mọi a,b,c ∈E*

b. Tính giao hoán: *a*b=b*a với mọi a,b∈E*

c. Phần tử trung hòa e: $\exists \mathbf{e} \in \mathbf{E}, \ \forall \mathbf{a} \in \mathbf{E}: \ \mathbf{a} * \mathbf{e} = \mathbf{e} * \mathbf{a} = \mathbf{a}$

d. Phần tử đối (hay đối xứng): G/s có phần tử trung hòa e.
*Xét phần tử a∈E, phần tử b gọi là phần tử đối của a nếu a*b=b*a=e*

** Chú ý: - phép toán được đặt tên là phép cộng (phép nhân) thì phần tử đối xứng gọi là phần tử đối (nghịch đảo) và kí hiệu là –a (a^{-1})*

VD1. Trên tập **N, Z, Q** xét xem phép cộng, phép nhân có những tính chất gì?

(+)	Kết hợp	Giao hoán	Pt trung hòa	Pt đối xứng
N	x	x	X (0)	-
Z	x	x	x	X
Q	x	x	x	x

(.)	Kết hợp	Giao hoán	Pt trung hòa	Pt đối xứng
N	x	x	X (1)	-
Z	x	x	x	-
Q	x	x	x	-

VD2. Trên tập các mệnh đề, các phép hội, tuyển, kéo theo có những tính chất gì?

	Kết hợp	Giao hoán	Pt trung hòa	Pt đối xứng
∧	x	x	x(T)	-
∨	x	x	x(F)	-
→	-	-	-	-

VD3. Trên tập các tập hợp, các phép giao, phép hợp có những tính chất gì?

4.1.3 Cấu trúc đại số

Một tập hợp được trang bị một hay nhiều phép toán với các tính chất xác định gọi là một cấu trúc đại số.

VD: nửa nhóm, nhóm, vành, trường, đại số,…

4.2 Nhóm-vành – trường.

4.2.1 Nhóm (Group)

a. Đ/n. Cho tập G khác rỗng với phép toán * . Khi đó (G,*) là một nhóm nếu thảo mãn 3 tiên đề:

$$\text{(i)} \quad \forall x,\ y,\ z \in G:\ (x*y)*z = x*(y*z)$$

$$\text{(ii)} \quad \exists e \in G:\ \ \forall x \in G,\ x*e = e*x = x$$

$$\text{(iii)} \quad \forall x \in G,\ \exists x' \in G,\ \ x*x' = x'*x = e$$

***e*: phần tử trung hòa, x': phần tử đối của x**

Nhóm (G,*) gọi là nhóm giao hoán (hay nhóm Abel) nếu t/m:

$$\text{(iv)}\ \forall x, y \in G:\ x*y = y*x$$

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Sinh	5 tháng 8, 1802 Nedstrand, Na Uy
Mất	6 tháng 4, 1829 Froland, Na Uy
Nơi cư ngụ	Na Uy
Quốc gia	Na Uy
Ngành	Toán học
Nơi công tác	Đại học Oslo
Học trường	Đại học Christiania
Nổi tiếng vì	hàm số Abelian nhóm Abelian định lý Abel

Tượng Niels Henrik Abel tại Oslo

Vào 5 tháng 6, 2002, bốn tem Norwegian được phát hành để kỉ niệm Abel 2 tháng trước 200 năm ngày sinh của ông. Có một bức tượng của Abel ở Oslo. Hố Abel trên Mặt trăngđược đặt theo tên ông. Vào năm 2002, giải Abel đã được thiết lập để vinh danh ông.

Giải Abel, giải Wolf hay giải Fields đều được xem là "Nobel toán học". Xét về danh tiếng thì giải Abel và Wolf không thua kém gì Fields, mỗi giải đều có một ưu thế nổi trội riêng và tất cả đều là vinh dự lớn của các nhà toán học trên thế giới.

Évariste Galois

Galois khi 15 tuổi, hình vẽ của một người bạn học

Sinh	25 tháng 10, 1811 Bourg-la-Reine, Pháp
Mất	31 tháng 5, 1832 (20 tuổi) Paris, Pháp
Quốc gia	Pháp
Ngành	Toán học
Nổi tiếng vì	lý thuyết phương trình và tích phân Abel

Évariste Galois là một thiên tài toán học người Pháp đoản mệnh, nhưng các công trình toán học ông để lại là một đề tài rất quan trọng cho việc tìm nghiệm của các phương trình đa thức bậc cao hơn 4 thông qua việc xây dựng lý thuyết nhóm trừu tượng mà ngày nay được gọi là lý thuyết nhóm Galois.

4.2.1 Nhóm

b. Một số tính chất của nhóm.

(i) Phần tử trung hòa *e* là duy nhất.

(ii) Phần tử đối x' là duy nhất

(iii) Luật giản ước: $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

(iv) Pt $a * x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a' * b$

VD1. (Z,+), (Q,+), (R,+), (Q*, .), (R*, .) là các nhóm Abel.

(N,+), (Z*,.) không là một nhóm.

VD2. Tập các song ánh trên một tập X với phép hợp thành là một nhóm. Nếu X có nhiều hơn hai phần tử thì nhóm đó không giao hoán.

Đại Số Tuyến Tính

4.2 Nhóm-vành – trường.

4.2.2 Vành (Ring)

a. **Đ/n.** Cho tập G khác rỗng với hai phép toán kí hiệu là "+" và "." . Khi đó (G,+,.) là một vành nếu thảo mãn:

(i) (G,+) là một nhóm giao hoán

(ii) Tính kết hợp của phép "."

$$(x.y).z = x.(y.z)$$

(iii) Tính phân phối của phép "." và phép "+"

$$x.(y+z) = x.y + x.z$$

$$(y+z).x = y.x + z.x$$

4.2.2 Vành

Vành (G,+,.) gọi là giao hoán nếu $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}: \mathbf{x}.\mathbf{y} = \mathbf{y}.\mathbf{x}$

gọi là có đơn vị là 1 nếu phép nhân có phần tử trung hòa là 1.

b. Ví dụ.

VD1. (Z,+,.), (Q,+,.), (R,+,.) là các vành giao hoán có đơn vị là 1.

VD2. $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}\}$ lµ mét vµnh

4.2 Nhóm-vành – trường.

4.2.3 Trường (Field)

a. **Đ/n.** Cho tập G khác rỗng với hai phép toán kí hiệu là "+" và "." . Khi đó (G,+,.) là một trường nếu thảo mãn:

(i) (**G**, $+$,.) lµ mét vµnh giao ho¸n, ®v 1

(ii) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G} \setminus \{0\},\ \exists \mathbf{x}':\ \mathbf{x}.\mathbf{x}' = 1$

b. NX. Nếu (G,+,.) là một trường thì (G\{0},.) là một nhóm

c. VD:

VD1: **(Z,+,.)** không là một trường.

(Q,+,.), (**R**,+,.) là một trường.

VD2. $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}\}$ ko là một trường

$\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}\}$ là một trường

4.3 Số phức

4.3.1 Xây dựng trường số phức

Với **R** là trường số thực, xét tập **C=RxR**={(a,b)|a,b∈**R**}

+ Quan hệ bằng nhau trên **C:**

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

+ Trên **C** trang bị hai phép toán:

- Phép cộng "**+**" : $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

- Phép nhân "**.**" : $(a,b).(c,d)=(ac-bd;ad+bc)$

$\Rightarrow$ **(C,+,.) là một trường với phần tử không là (0;0), pt đơn vị là (1;0) và phần tử nghịch đảo của (a;b) là**

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

4.3 Số phức

4.3.1 Xây dựng trường số phức

+ Xét tập con F={(a,0)|a ∈**R**} của **C** và ánh xạ

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{F}$$

$$x \mapsto (x,0)$$

Khi đó, f là một song ánh thỏa mãn

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ và $f(xy)=f(x)f(y)$

→ đồng nhất **R** với **F** ((x,0) ≡ x)

hay **R** là một trường con của **C.**

4.3 Số phức

4.3.1 Xây dựng trường số phức

Đặt i=(0;1), ta có

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1, 0) = -1$$

Dạng z=a+bi gọi là *dạng chính tắc* của z

a=Re(z) gọi là *phần thực* của z

b=Im(z) gọi là *phần ảo* của z

số *i* gọi là *đơn vị ảo*

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$\Rightarrow$ **Trong C** ,pt $x^2 = -1$ **có nghiệm x=** $\pm$ **i**

Heron xứ Alexandria là người đầu tiên đề cập đến số ảo vào khoảng thế kỷ 1 trước công nguyên trong khi tính toán khối hình lượng kim tự tháp, tuy nhiên, việc nghiên cứu số ảo chỉ thực sự bắt đầu bởi nhà toán học người Ý Rafael Bombelli (1526-1572) trong cuốn sách đại số *L'Algebra* viết năm 1569. Rafael Bombelli là người đưa ra ký hiệu đơn vị ảo *i* và mô tả các tính chất của nó.

Đại Số Tuyến Tính

4.3 Số phức

4.3.2 Các phép toán ở dạng chính tắc.

(i) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(ii) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(iii) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

(iv) Cho số phức z=a+bi.

-Số phức liên hợp của z: $\overline{z}=a-bi$

-Môđun của z: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

NX: $|z|^2=z.\overline{z}$

(v) Các tính chất.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3); \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|; |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

VD1. Tính $A = \dfrac{1+2i}{4-3i} + \dfrac{1}{2i} - \dfrac{3}{4}$

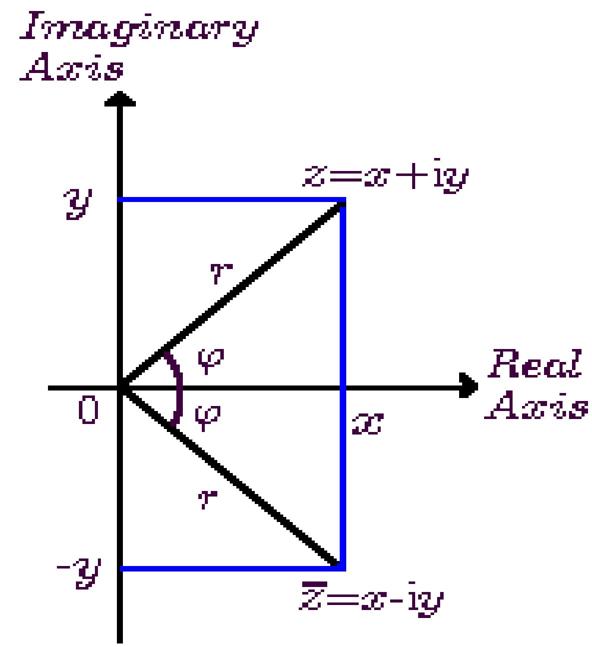
VD2. Cho $|z_1|=1$. CMR với mọi $z_2 \neq z_1$ ta có:

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} \right| = 1$$ **(K50-lần 2)**

4.3.3 Dạng lượng giác của số phức

a. Mặt phẳng phức.

$$z = a + bi \xleftrightarrow{1-1} (a;b) \xleftrightarrow{1-1} M(a;b) \in Oxy$$



Mỗi số phức sẽ được biểu diễn bởi 1 điểm nằm trên mặt phẳng Oxy và một điểm trên mp Oxy biểu diễn một số phức.

Do đó, mp Oxy gọi là mp phức

Ox: trục thực

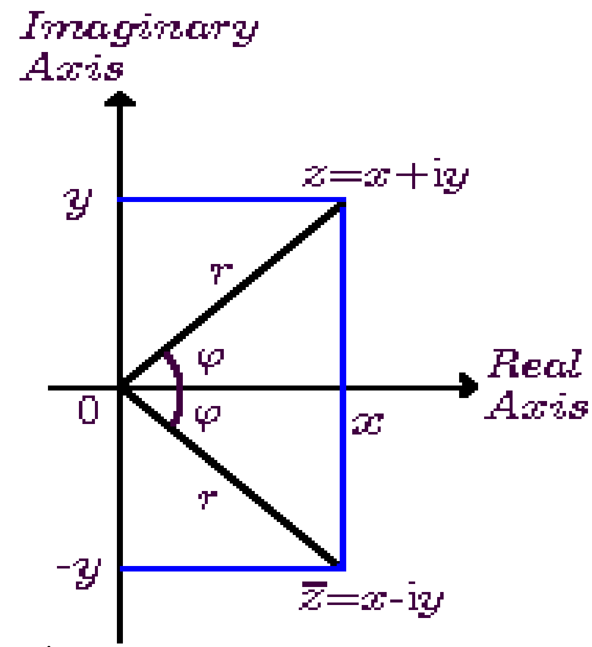
Oy: trục ảo

Đại Số Tuyến Tính

4.3.3 Dạng lượng giác của số phức

b. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức z=a+bi được biểu diễn bởi điểm M(a;b).



$$r = OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$: môđun của z

$$\varphi = \left(\widehat{\mathbf{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right)$$: argument của z

k/h: $\varphi = \mathbf{Ar}g(z) \quad (+k2\pi)$

Khi đó $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

4.3.3 Dạng lượng giác của số phức

$$\boxed{z = a + bi \longrightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

VD1: Viết dạng lượng giác của các số phức sau:

a) $A = \sqrt{3} + i$ b) $B = 2 - 2i$

c) $C = -2$ d) $D = 5$

e) $E = 2i$ f) $F = -3i$

4.3.4 Các phép toán ở dạng lượng giác

(i) Phép nhân và phép chia

$$\left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]\left[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] = (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

-Khi $r_2 \neq 0$, ta có:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

VD1: Cho $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), z_2 = 4\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

Tính $z_1.z_2$ **vµ** $\frac{z_1}{z_2}$

BÀI IV: SỐ PHỨC

Đại Số Tuyến Tính

•**Chú ý:** Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì

$$\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

(ii) Phép lũy thừa

$$\boxed{\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right] \quad (n \in \mathbb{N})}$$

Công thức Moivre (r=1)

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

VD1: Tính $A = (\sqrt{3} + i)^{2011}$

VD2: Biểu diễn sin(5x) và cos(5x) qua sinx và cosx?

(iii) Phép khai căn

a. ĐN1: Căn bậc n của số phức z là các số phức z_0 sao cho

$$z_0^n = z$$

Tập các căn bậc n của z kí hiệu là $\sqrt[n]{z}$

VD1. $\sqrt{4} = \{\pm 2\}$, $\sqrt{-1} = \{\pm i\}$, $\sqrt[3]{8} = \{2, -1 \pm i\sqrt{3}\}$

b. Công thức

$$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\\ &= \left\{ z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right], k = \overline{0, n-1} \right\}\end{aligned}}$$

*__NX:__ __Nếu__ $z \neq 0$ thì $\left|\sqrt[n]{z}\right| = n$

BÀI IV: SỐ PHỨC

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \left\{ z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n}\right)\right], k=\overline{0,n-1} \right\}$$

VD1: Tính $\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

VD2: Tính $\sqrt[3]{8}$

VD3: Tính $\sqrt{1+i}$

Đại Số Tuyến Tính

4.3.5 Giải phương trình bậc hai trên trường số phức

(Tự đọc)

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

Cách giải: - Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

- Tìm z_0 một căn bậc 2 của Δ

-Nghiệm $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm z_0}{2a}$

VD1: Giải các phương trình phức

a) $z^2 + 4iz + 5 = 0$

b) $z^2 - (3+i)z + +14 + 5i = 0$

c) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

4.3.6 Đa thức

Đ/n1. Đa thức với hệ số trên trường số F, có dạng

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \quad (a_i \in F, \forall i = \overline{0,n})$$

Nếu $a_n \neq 0$ thì ta nói đa thức có bậc n và k/h: $\deg P_n(x) = n$

VD1: $\deg(-x^3 + 2x + 1) = 3$

ĐL1. (D'Alember) Mọi đa thực có bậc dương đều có ít nhất một nghiệm thực hoặc phức.

ĐL2 Mọi đa thức bậc n dương có đúng n nghiệm thực hoặc phức (đơn hoặc bội).

ĐL3 Mọi đa thức khác không bậc không lớn hơn n (n>0) không thể có quá n nghiệm thực hoặc phức.

4.3.7 Phân tích đa thức với hệ số thực ra thừa số.

Xét đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad (a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n})$$

ĐL1. Nếu z là một nghiệm của P(x) thì $\overline{z}$ cũng là nghiệm của P(x).

ĐL2 Mọi đa thức bậc n dương, với hệ số thực đều có thể phân tích thành tích các đa thức bậc nhất và bậc hai với biệt thức âm.

VD1. Phân tích đa thức $(x^2-x+3)^2+3$ thành tích của 2 đa thức bậc 2 với hệ số thực. (Đề thi K55)

VD2. Cho đa thức $f(z)=z^4-6z^3+17z^2-24z+52$

a) Tính f(2i)

b) Giải phương trình f(z)=0 (Đề thi K53)

MỘT SỐ ĐỀ THI

Câu 1. **(Đề K49)** Viết các nghiệm phức của phương trình sau dưới dạng chính tắc:

(i) $z^6 - (1+i)^{28} = 0$ (ii) $z^4 - (1-i\sqrt{3})^{21} = 0$

(iii) $z^5 + 9\bar{z} = 0$ (iv) $z^5 = 16\bar{z}$

Câu 2. Tìm các nghiệm phức của phương trình

(i) $z^6 + i\sqrt{3}z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$ **(Đề1- 8/2010)**

(ii) $z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$

(iii) $z^8 + 7z^4 - 8 = 0$ **(Đề 4-K51)**

(iv) $z^6 = \dfrac{1}{\bar{z}^2}$ **(Đề 4-K50)**

(v) $iz^2 + (1+10i)z + 23i + 11 = 0$ **(Hè 2013)**

MỘT SỐ ĐỀ THI

Câu 3. Phân tích đa thức $(x^2+x+3)^2+3$ thành tích của 2 đa thức bậc 2 với hệ số thực. (Đề thi K55)

Câu 4. Cho đa thức $f(z)=z^4-6z^3+17z^2-24z+52$

a) Tính f(2i)

b) Giải phương trình f(z)=0 (Đề thi K53)

Câu 5. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=3z^4+5iz^2$

1) *f có là đơn ánh ? toàn ánh không? Vì sao*
2) *Cho B={-2}. Tìm* $f^{-1}(B)$

(Đề 3-K53)