Tích phân bội

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 2: Tích phân bội

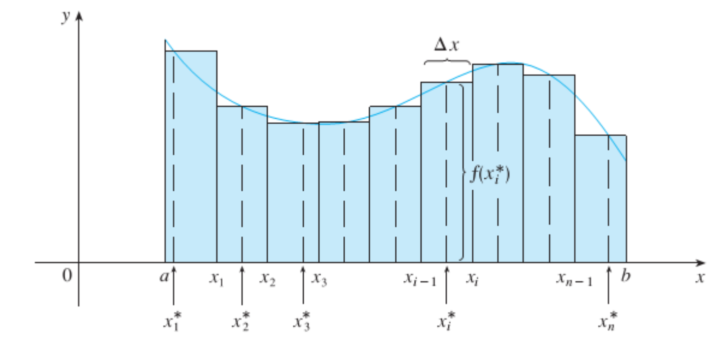
1. Tích phân kép
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân kép
   - Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
   - Ứng dụng của tích phân kép
2. Tích phân bội ba
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân bội ba
   - Ứng dụng của tích phân bội ba

Chương 2: Tích phân bội

1. Tích phân kép
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân kép
   - Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
   - Ứng dụng của tích phân kép
2. Tích phân bội ba
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân bội ba
   - Ứng dụng của tích phân bội ba

Tích phân kép

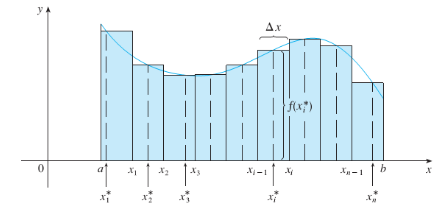
Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tích phân kép

Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



- Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau $[x_{i-1}, x_i]$ với $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,
- Thành lập tổng Riemann $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
- Lấy giới hạn $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

Tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể - Tích phân kép

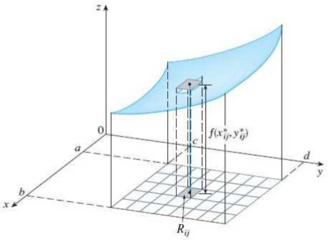


FIGURE 4

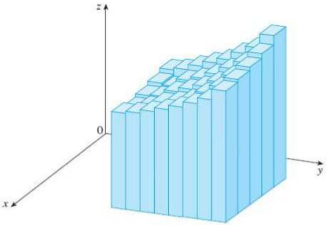
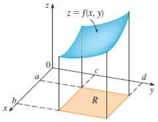
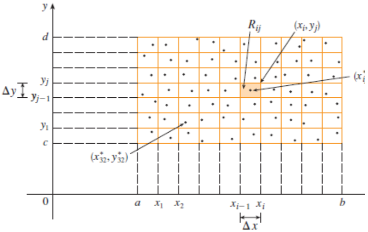


FIGURE 5

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y.$$

Tính thể tích và tích phân kép





1. Chia $[a, b]$ thành m khoảng và chia $[c, d]$ thành n khoảng bằng nhau.
2. Chọn $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
3. Tổng Riemann

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

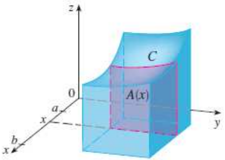
4. $\iint\limits_R f(x, y) dxdy = \lim\limits_{m,n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$

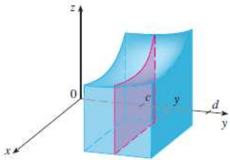
TP kép trên miền hình chữ nhật

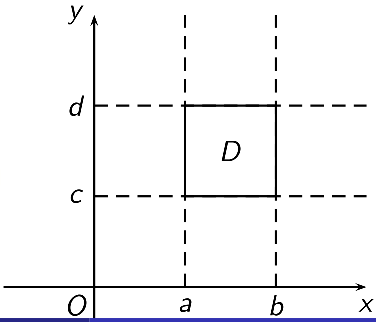
Nguyên tắc chung: Đưa về tính các tích phân lặp.

Fubini

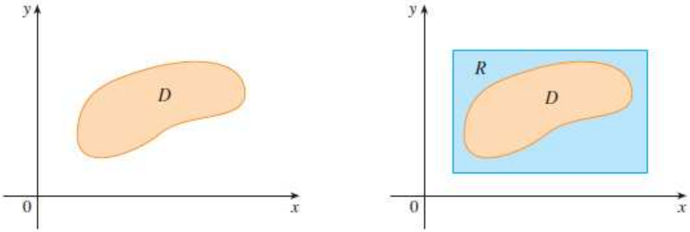
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$







Tích phân kép trên miền bị chặn bất kì



$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{nếu } (x,y)\in R\setminus D.\end{cases}$$

và

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{R} F(x,y)dxdy.$$

Tích phân kép

Ví dụ

$$\iint\limits_R x \sin(x+y)\, dxdy, R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Tích phân kép

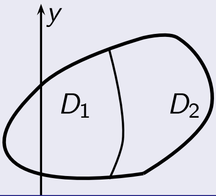
Ví dụ

$\iint\limits_R x \sin(x+y)\, dxdy,\ R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}.$

Tính chất cộng tính

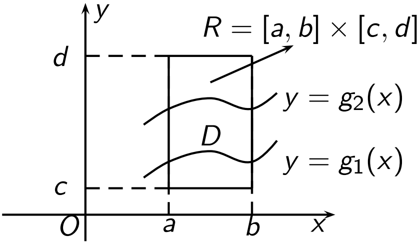
Nếu $D = D_1 \cup D_2$, ở đó D_1 và D_2 không chồng lên nhau thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy.$$



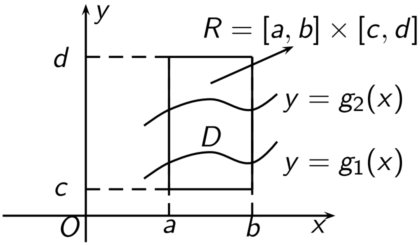
TP kép trên miền $(D): a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



TP kép trên miền (D) : $a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)$

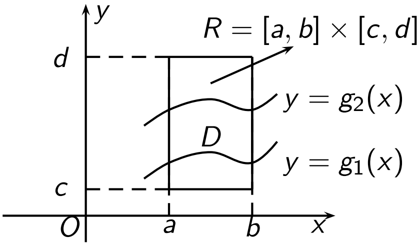
$$D = \{(x,y) | a \le x \le b,\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R F(x,y)dxdy$$

TP kép trên miền (D) : $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

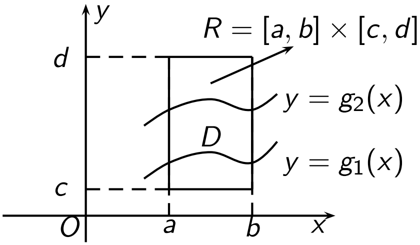
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R F(x, y)dxdy$$

TP kép trên miền $(D): a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)$

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

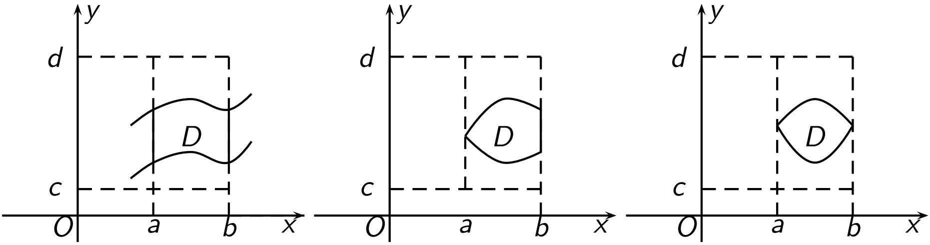


$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R F(x,y)dxdy$$
$$= \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

Tích phân kép trên miền $(D): a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

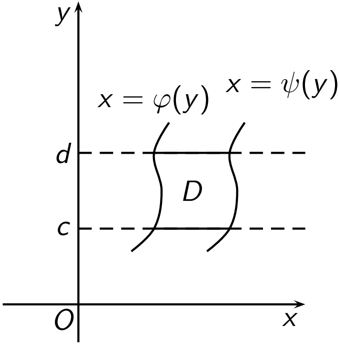
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$



Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

Tích phân kép trên miền $(D): c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$

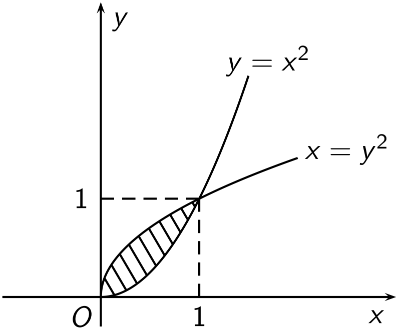
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$



Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy$ với D giới hạn bởi $y=x^2$ và $x=y^2$.



Tích phân kép

Các tính chất

- Tính chất tuyến tính:

$$\iint\limits_{D} [f(x,y) + g(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D} g(x,y)\, dxdy$$

$$\iint\limits_{D} \alpha f(x,y) = \alpha \iint\limits_{D} f(x,y).$$

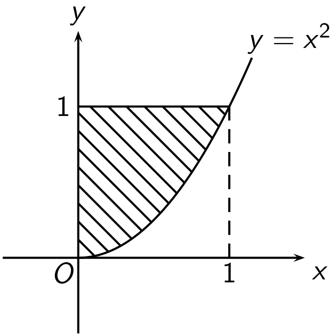
- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và D_1 và D_2 không giao nhau, ngoại trừ phần biên chung, thì

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

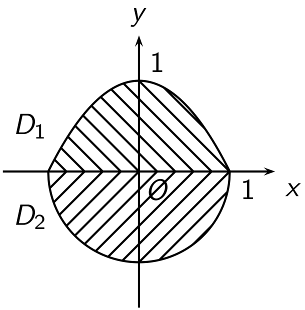
Tính $I = \iint\limits_D xe^{y^2}dxdy$, ở đó $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

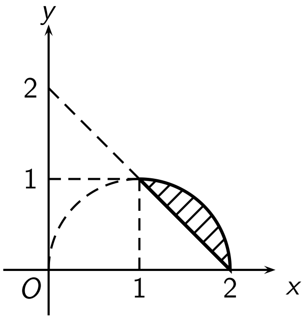
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

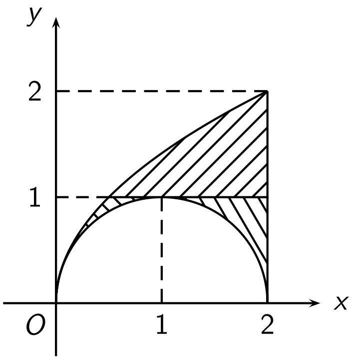
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

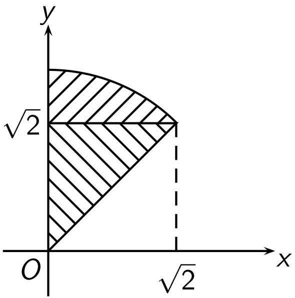
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dx$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$



Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Tính $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$. **Nguyên tắc chung:** Phá dấu giá trị tuyệt đối.

Đường cong $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền,

$$D^+ = D \cap \{f(x,y) \geq 0\}, D^- = D \cap \{f(x,y) \leq 0\}.$$

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)\,dxdy} \tag{1}$$

Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Tính $\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy$. **Nguyên tắc chung:** Phá dấu giá trị tuyệt đối.

Đường cong $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền,

$$D^+ = D \cap \{f(x,y) \geq 0\}, D^- = D \cap \{f(x,y) \leq 0\}.$$

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\, dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)\, dxdy} \quad (1)$$

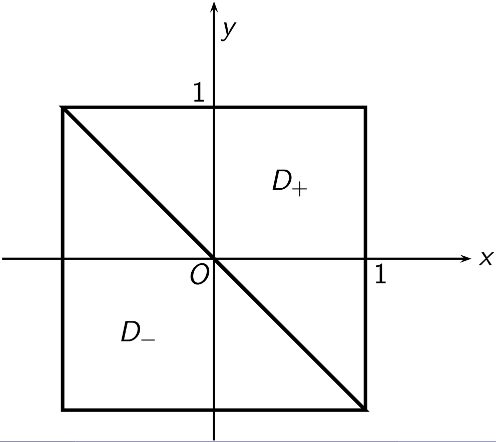
Các bước thực hiện

1. Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để phân chia miền D.
2. Để xác định xem miền nào là D^+, miền nào là D^-, ta chỉ cần xét một điểm (x_0, y_0) bất kì và xét dấu $f(x_0, y_0)$.
3. Sử dụng công thức (1) để tính tích phân.

Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ

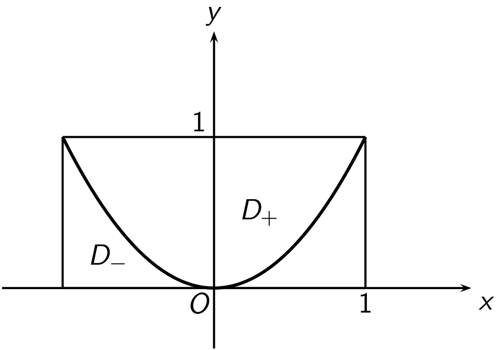
Tính $\iint\limits_D |x+y|dxdy$, $D : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,||x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$.



Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy, D:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\big||x|\le 1, 0\le y\le 1\right\}.$



Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x,y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0.$$

Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x,y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 0.$$

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x,y)$ là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy.$$

Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ *thoả mãn* $f(-x,-y) = -f(x,y)$ *thì* $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$.

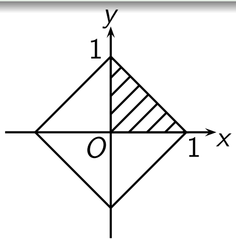
Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ thoả mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$.

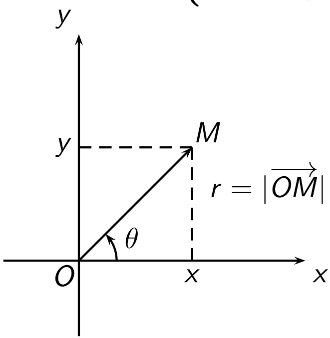
Ví dụ

Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |x| + |y| dxdy$.



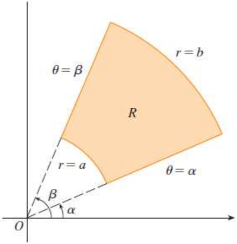
Tích phân kép trong tọa độ cực

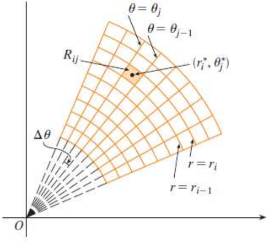
Tọa độ cực của điểm M là bộ số (r,θ), ở đó $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \widehat{\overrightarrow{OM},Ox}. \end{cases}$



Tọa độ cực vs Tọa độ Đề các: $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

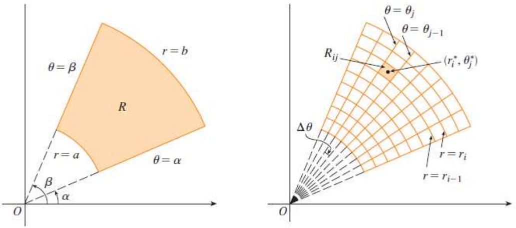
Tích phân kép trong tọa độ cực





$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta.\end{aligned}$$

Tích phân kép trong tọa độ cực



$$\iint\limits_R f(x,y)\Delta A = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_i$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta$$

$$= \iint\limits_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\boxed{r}drd\theta.$$

Tích phân kép trong tọa độ cực

Tích phân kép trong tọa độ cực

Nếu f là một hàm số liên tục trên miền $\begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \boxed{r} dr$$

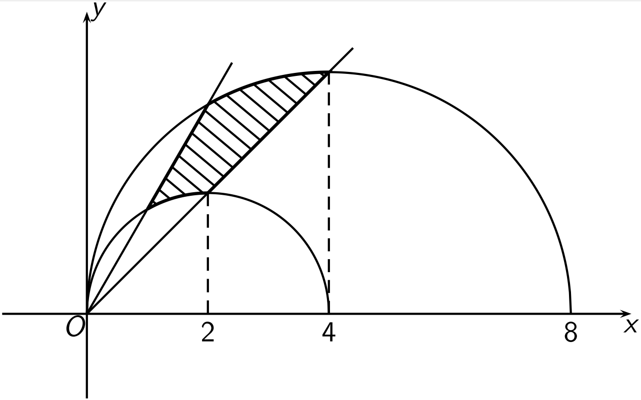
Chú ý

Trong một số sách, tọa độ cực được viết dưới dạng $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

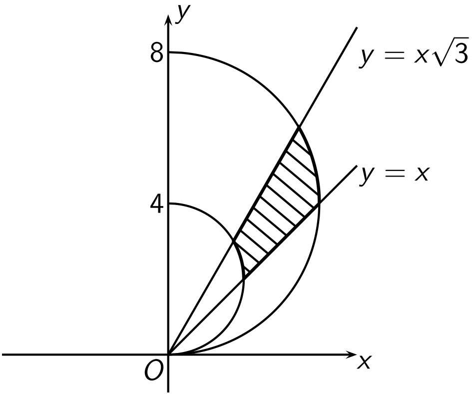
Tính $I = \iint\limits_D dxdy$, ở đó $D : \begin{cases} 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

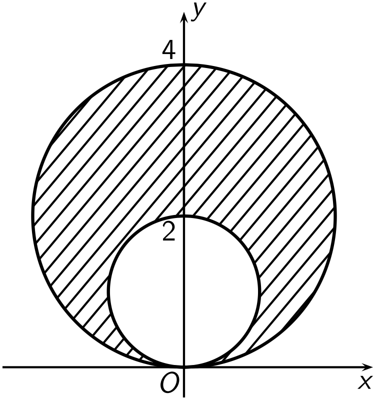
Tính $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, ở đó $D : \begin{cases} 4y \leq x^2 + y^2 \leq 8y \\ x \leq y \leq x\sqrt{3}. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

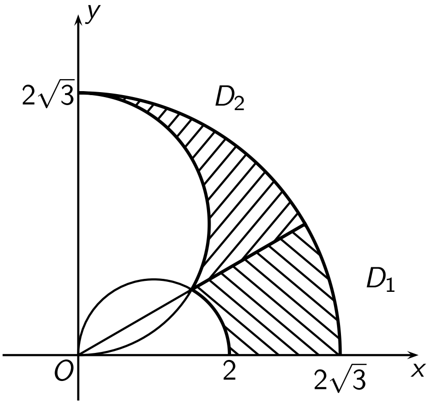
Tính $\iint\limits_D xy^2 dxdy$ với D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ trong đó $D : \begin{cases} x^2+y^2 \le 12, x^2+y^2 \ge 2x \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y, x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$



Đổi biến số trong tích phân kép

- Giải tích 1, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(x(u))\boxed{\dfrac{dx}{du}}dt$, ở đó $x = x(u)$.
- Mong muốn, $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v))\boxed{\text{hệ số}}dudv$,

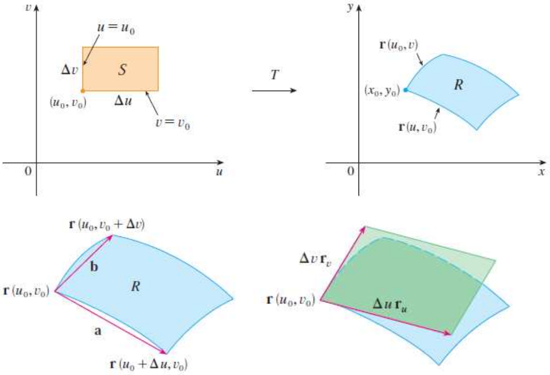
  ở đó $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$

Ví dụ

Xét phép biến đổi $T : \begin{cases} x = x(u,v) = u^2 - v^2, \\ y = y(u,v) = 2uv. \end{cases}$

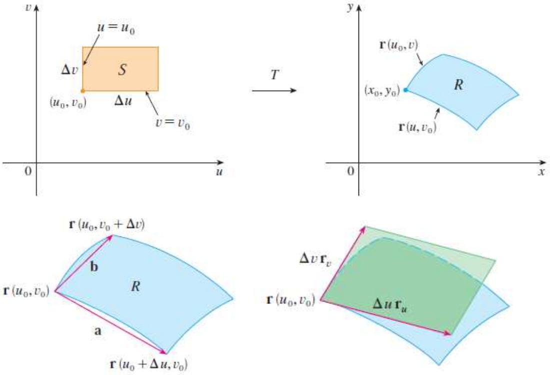
Tìm ảnh của hình vuông $S = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ qua phép biến đổi T.

Đổi biến số trong tích phân kép



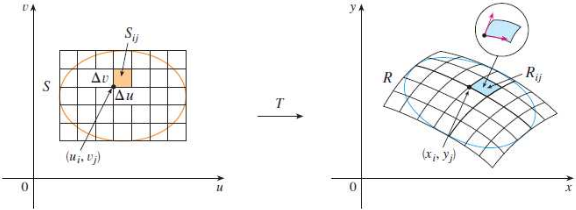
$$\Delta A \approx |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v,$$

Đổi biến số trong tích phân kép



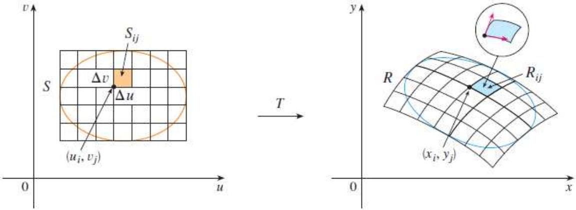
$$\Delta A \approx |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v, \quad J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Đổi biến số trong tích phân kép



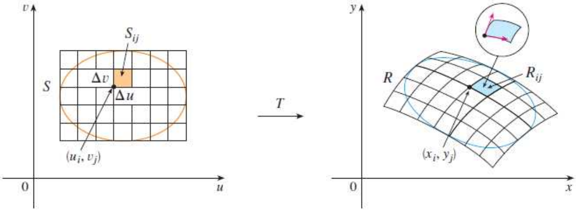
$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A$$

Đổi biến số trong tích phân kép



$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A$$

Đổi biến số trong tích phân kép



$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta A$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

$$= \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv.$$

Đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số

Cho $T : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}, S \to R,$

- $x(u, v), y(u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên S,
- phép biến đổi này là ánh xạ $1 - 1$.
- Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên S.

Khi đó $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv.$

Đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số

Cho $T : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}, S \to R,$

- $x(u, v), y(u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên S,
- phép biến đổi này là ánh xạ $1 - 1$.
- Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên S.

Khi đó $\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \iint\limits_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| dudv.$

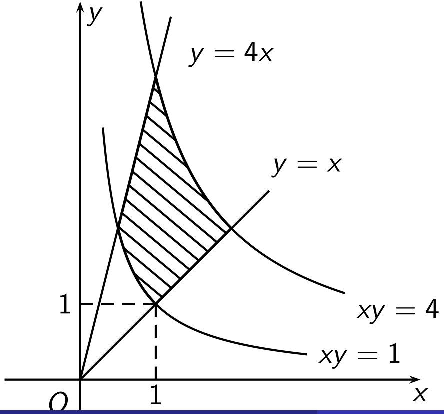
Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, ở đó $D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân kép

Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, ở đó $D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$



Đổi biến số trong tích phân kép

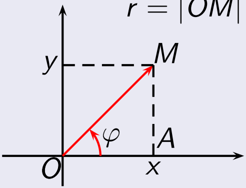
Chú ý

- Mục đích
  - đưa miền D có hình dáng phức tạp về miền D_{uv} đơn giản hơn.
  - làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x, y)$.
- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Đổi biến số trong tọa độ cực

Công thức đổi biến

$$r = |\overrightarrow{OM}|$$

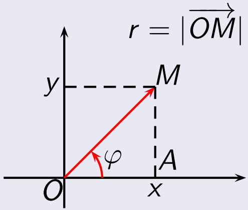


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Đổi biến số trong tọa độ cực

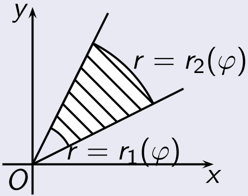
Công thức đổi biến



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Miền D có dạng hình quạt



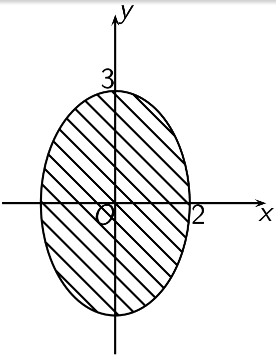
$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr.$$

Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Nếu $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, thì đổi biến $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$, $\boxed{J = abr}$

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy$, ở đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

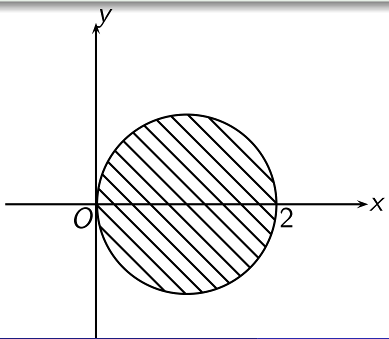


Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Nếu $D : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$, thì $\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}$, $\boxed{J = r}$

Ví dụ

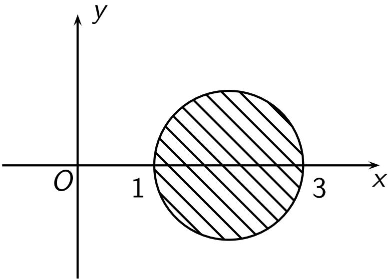
Tính $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{2x - x^2 - y^2}\,dy.$



Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Ví dụ

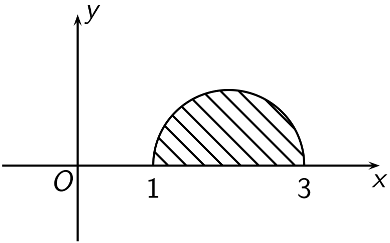
Tính $\iint\limits_D xy dxdy$, với D là mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$.



Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D xydxdy$, với D là nửa mặt tròn $(x-2)^2+y^2 \leq 1, y \geq 0$

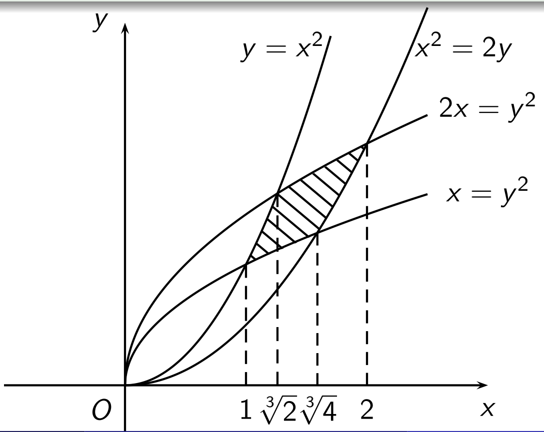


Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$

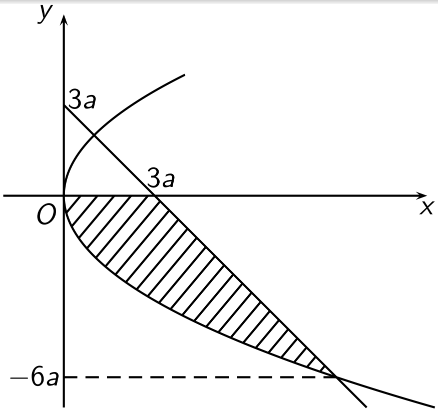
$$S(D) = \iint\limits_D dxdy$$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

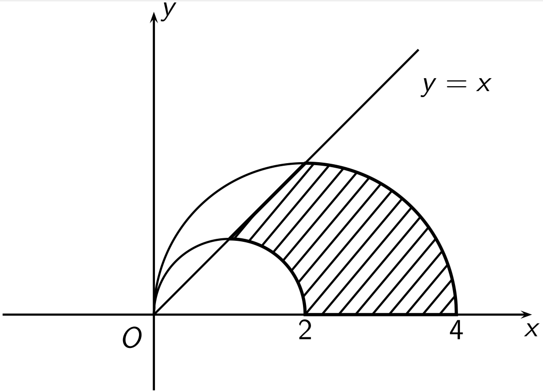
Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0 \ \ (a > 0)\,. \end{cases}$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

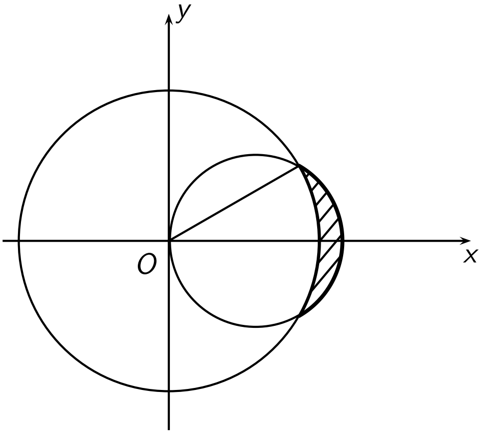
Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x \\ x=y, y=0. \end{cases}$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

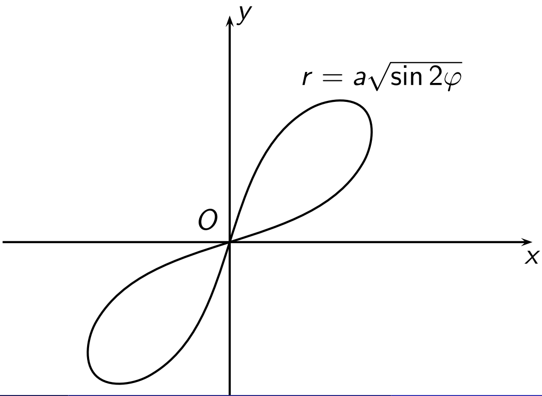
Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy \ \ (a>0)$.

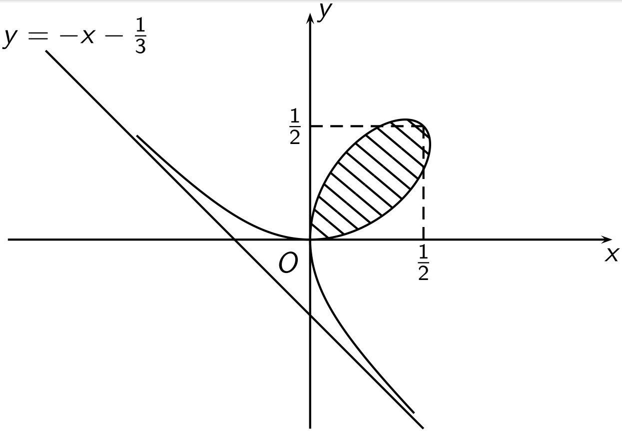


Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy \ (a > 0)$ (Lá Descartes)

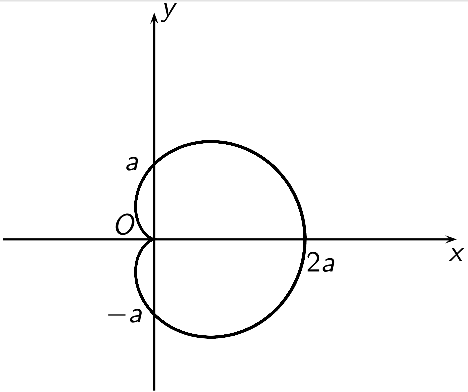
TCX: $y = -x - \frac{1}{3}$



Tính diện tích hình phẳng

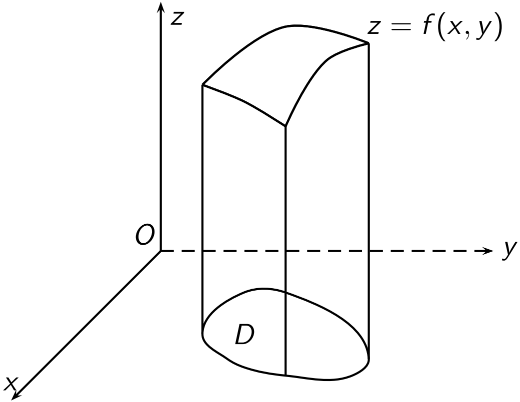
Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$ (đường Cardioids hay đường hình tim)



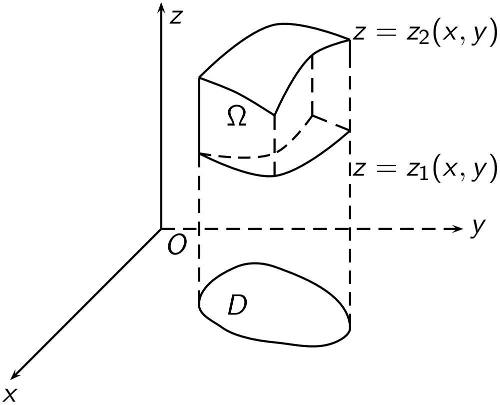
Tính thể tích vật thể

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le f(x,y), \\ (x,y) \in D \end{cases} \quad \Rightarrow V(\Omega) = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$



Tính thể tích vật thể

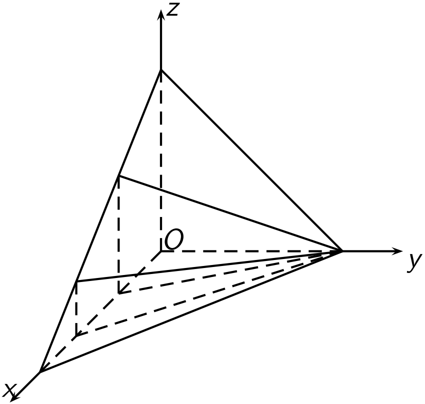
$$\Omega : \begin{cases} z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y), \\ (x,y) \in D \end{cases} \Rightarrow V(\Omega) = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))dxdy.$$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

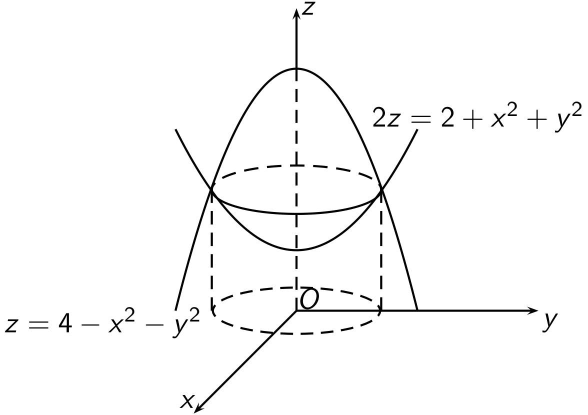
Tính thể tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geq 1, y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 2, 0 \leq z \leq 1 - x - y. \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

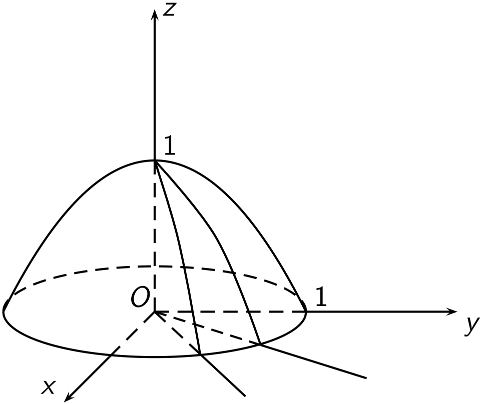
Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2. \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

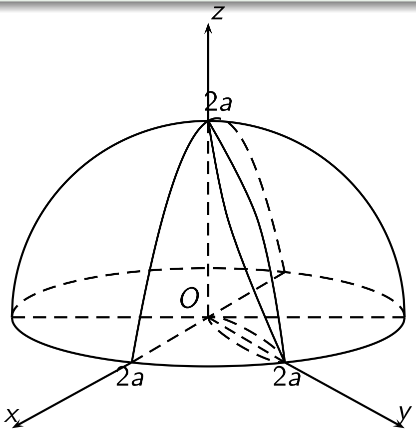
Tính thể tích của $V: \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \\ y \geq x, y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

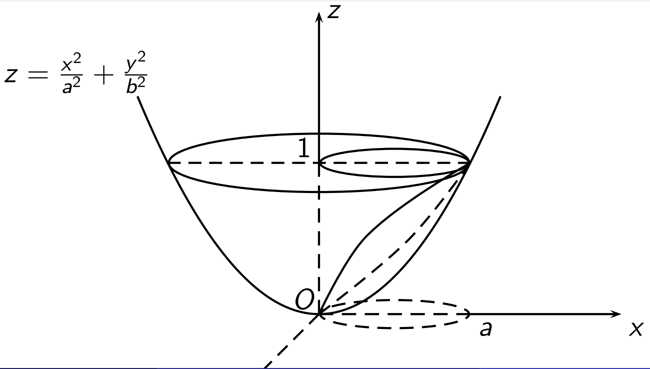
Tính thể tích $V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2 \\ x^2+y^2-2ay \leq 0 \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

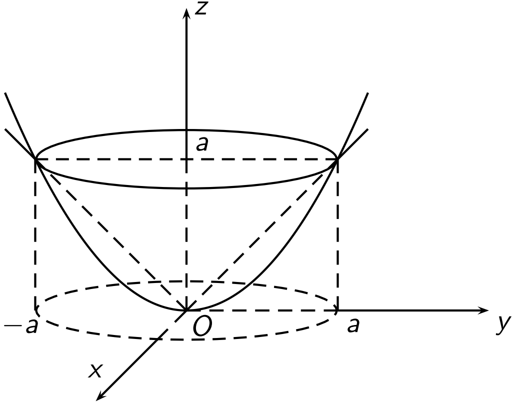
Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a} \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

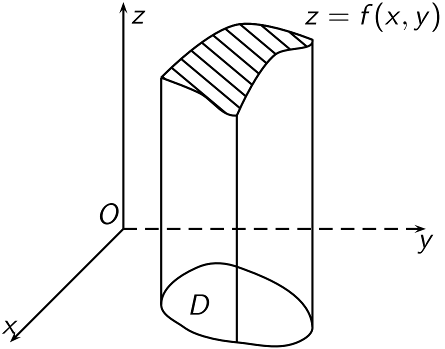
Ví dụ

Tính thể tích của miền V : $\begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$



Tính diện tích mặt cong

$$S : \begin{cases} z = f(x,y), \\ (x,y) \in D \end{cases} \Rightarrow \sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy.$$



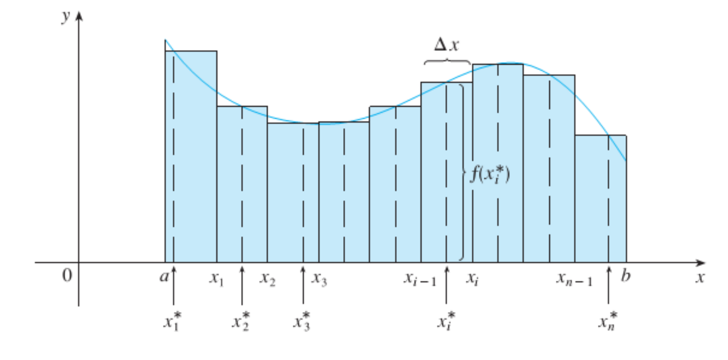
Chương 2: Tích phân bội

1. Tích phân kép
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân kép
   - Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
   - Ứng dụng của tích phân kép

2. Tích phân bội ba
   - Định nghĩa, tính chất, cách tính
   - Đổi biến số trong tích phân bội ba
   - Ứng dụng của tích phân bội ba

Tích phân bội ba

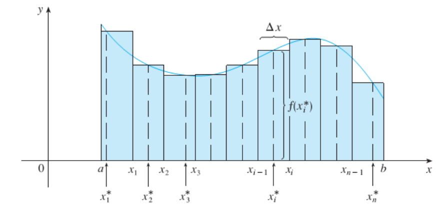
Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tích phân kép

Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



- Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau $[x_{i-1}, x_i]$ với $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,
- Thành lập tổng Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
- Lấy giới hạn $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

Tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể - Tích phân kép

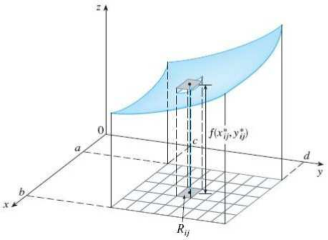


FIGURE 4

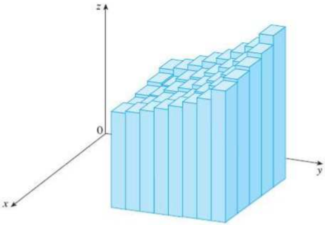
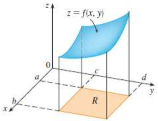
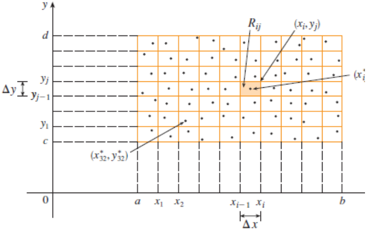


FIGURE 5

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y.$$

Tính thể tích và tích phân kép





1. Chia $[a, b]$ thành m khoảng và chia $[c, d]$ thành n khoảng bằng nhau.
2. Chọn $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
3. Tổng Riemann

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

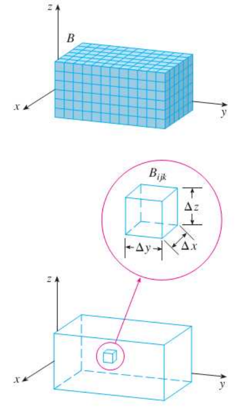
4. $\iint\limits_R f(x, y) dxdy = \lim\limits_{m,n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$

Tích phân bội ba trên hình hộp

Định nghĩa

Cho $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$.

1. Chia $[a, b]$ thành l khoảng bằng nhau
   Chia $[c, d]$ thành m khoảng bằng nhau
   Chia $[r, s]$ thành n khoảng bằng nhau
2. Chọn $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$
3. Tổng Riemann
   $$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V$$
4. $\iiint\limits_B f(x, y, z) dV = \lim\limits_{l,m,n \to \infty} S_{lmn}.$



Tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Định lý (Fubini)

Nếu f là một hàm số liên tục trên $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_r^s f(x,y,z)dz.$$

Tích phân bội ba

Tích phân bội ba trên miền bị chặn bất kì

Cho E là một miền bị chặn bất kì, chọn $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \supset E$ và

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{nếu } (x,y,z) \in V, \\ 0, & \text{nếu } (x,y,z) \in B \setminus V. \end{cases}$$

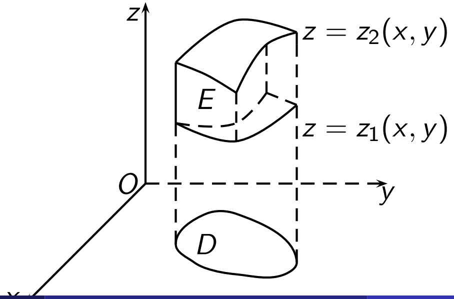
Định nghĩa

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \iiint\limits_B F(x,y,z)dV.$$

Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Nếu $E: \begin{cases} z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases}$ thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$



Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền E lên mặt phẳng Oxy.
2. Xác định biên dưới $z = z_1(x, y)$ và biên trên $z = z_2(x, y)$ của V.
3. Sử dụng công thức

$$I = \iiint\limits_E f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

để hoàn tất việc chuyển đổi.

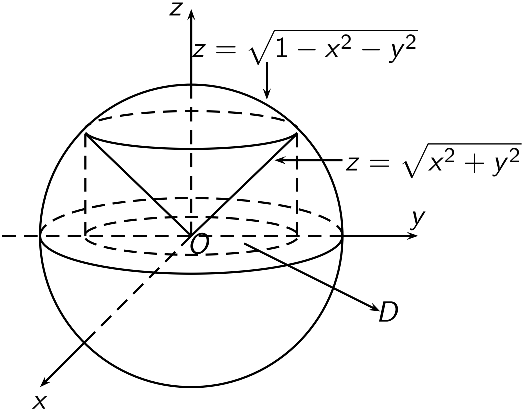
Nguyên tắc chung:

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$



Các tính chất cơ bản của tích phân bội ba

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]\, dxdydz =$$
$$\alpha \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)\, dxdydz.$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ và V_1, V_2 không giau nhau (ngoại trừ phần biên) thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz =$$
$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Tích phân bội ba trên miền đối xứng

Định lý

Nếu

1. *V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$,*
2. *$f(x, y, z)$ là hàm số lẻ đối với z*

thì $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = 0.$

Tích phân bội ba trên miền đối xứng

Định lý

Nếu

1. V *là miền đối xứng qua mặt phẳng* $z = 0$,
2. $f(x, y, z)$ *là hàm số lẻ đối với* z

thì $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = 0$.

Định lý

Nếu

1. V *là miền đối xứng qua mặt phẳng* $z = 0$,
2. $f(x, y, z)$ *là hàm số chẵn đối với* z

thì $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x, y, z)\, dxdydz$, *trong đó* $V^+ = V \cap \{z \geq 0\}$.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

1. Giải tích 1, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(x(u))\boxed{\dfrac{dx}{du}}du$, ở đó $x = x(u)$.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

1. Giải tích 1, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(x(u))\boxed{\frac{dx}{du}}du$, ở đó $x = x(u)$.
2. $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$, $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

1. Giải tích 1, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(x(u))\boxed{\frac{dx}{du}}du$, ở đó $x = x(u)$.
2. $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$, $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$
3. Mong muốn,

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\boxed{\text{hệ số}}dudvdw,$$

ở đó $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Bài toán:

Tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} : V_{uvw} \to V \qquad (1)$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó liên tục trên V_{uvw}.
- Công thức (1) xác định song ánh $V_{uvw} \to V$.
- $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$ trong V_{uvw}.

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f\left[x(.,.,.), y(.,.,.), z(.,.,.)\right]|J|\,dudvdw$$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Ví dụ

Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z=\pm 3 \\ x+2y-z=\pm 1 \\ x+4y+z=\pm 2 \end{cases}$ biết $V=\iiint\limits_V dxdydz$.

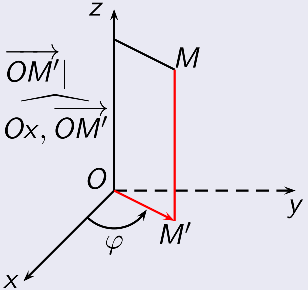
Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u=x+y+z \\ v=x+2y-z \\ w=x+4y+z \end{cases}$ ta có

$$J^{-1}=\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6 \Rightarrow J=\frac{1}{6}.$$

Đổi biến số trong tọa độ trụ

Công thức đổi biến

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM'}| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$$

$$I = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

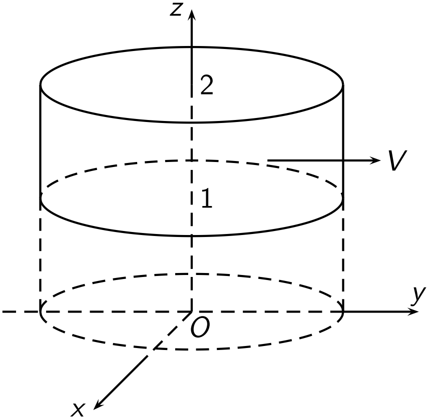
Mục đích: Đưa TP bội ba về TP lặp

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right) dz.$$

Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$



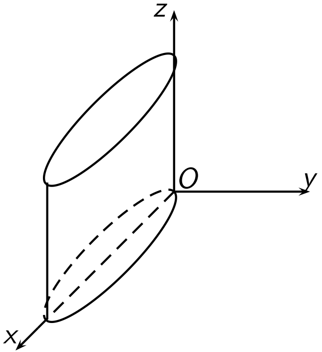
Đổi biến số trong tọa độ trụ

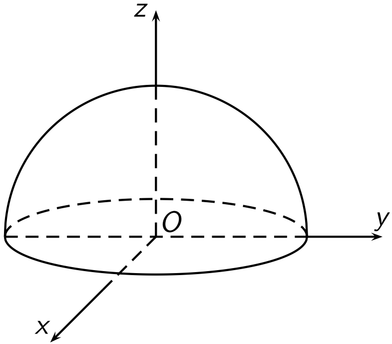
Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó:

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và $z=0, z=a\,(a>0)$.

b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0\,(a>0)$

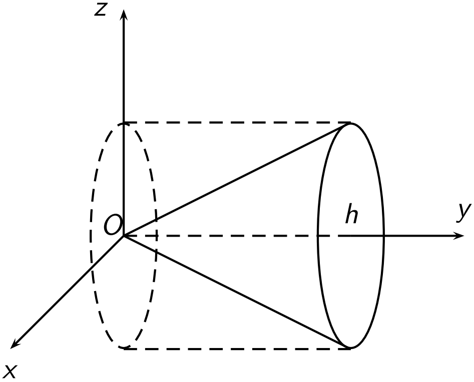




Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

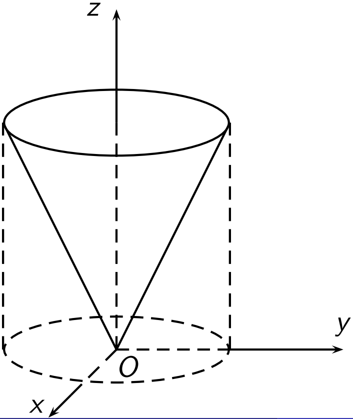
Tính $I = \iiint\limits_V y\,dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

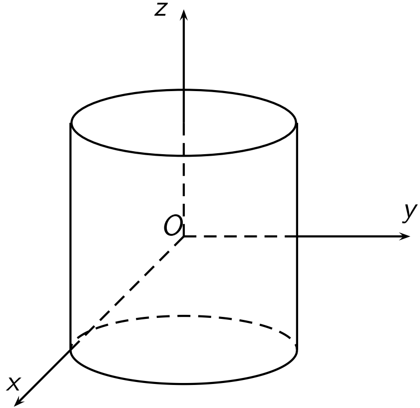
Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=1. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ trụ

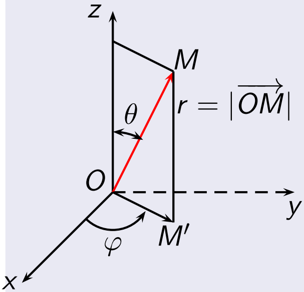
Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2+y^2 =\leq 1 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ cầu

Công thức đổi biến



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2\sin\theta$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Trường hợp đặc biệt

Nếu $V_{r\theta\varphi}:\begin{cases}\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad (\varphi_2-\varphi_1 \le 2\pi)\\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi)\\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi)\end{cases}$ thì

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Trường hợp đặc biệt

Nếu $V_{r\theta\varphi}: \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad (\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leq r \leq r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr$$

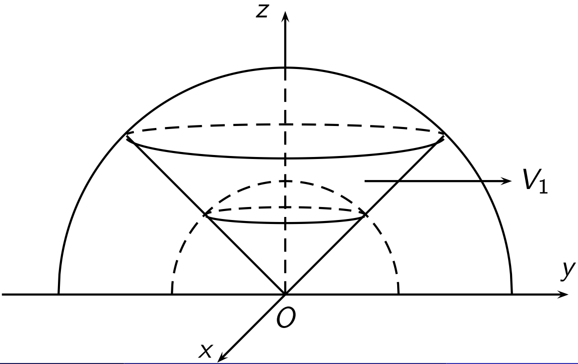
Khi nào đổi biến trong tọa độ cầu?

- Miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,
- hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $(x^2+y^2+z^2)$.

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Ví dụ

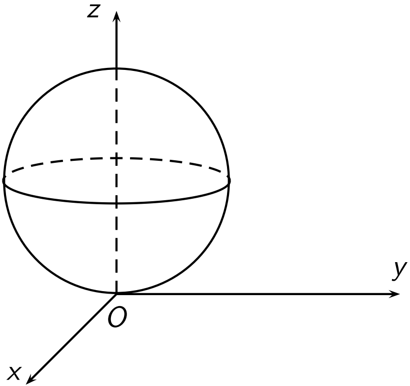
Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \leq z^2. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ cầu

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó $V: \ x^2+y^2+z^2 \leq z$.



Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

1. $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$

Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

1. $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$

2. $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

1. $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$

2. $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

3. $V : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{cases}$

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, với $V : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, với $V : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Toạ độ trụ suy rộng.

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{cases}$, ta có

Cách 2: Toạ độ cầu suy rộng.

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases}$, ta có

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, với $V : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Toạ độ trụ suy rộng.

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{cases}$, ta có

$J = a^2br$ và $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z' \leq \sqrt{1-r^2}. \end{cases}$

Cách 2: Toạ độ cầu suy rộng.

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases}$, ta có

$J = -a^2br^2\sin\theta$ và

$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, với $V : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Toạ độ trụ suy rộng.

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{cases}$, ta có

$J = a^2br$ và $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z' \leq \sqrt{1-r^2}. \end{cases}$

Cách 2: Toạ độ cầu suy rộng.

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases}$, ta có

$J = -a^2br^2\sin\theta$ và

$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

$$I = \frac{2\pi a^3b^2}{15}.$$

Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát: $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ

Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z = \pm 3 \\ x+2y-z = \pm 1 \\ x+4y+z = \pm 2. \end{cases}$

Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y-z \\ w = x+4y+z \end{cases}$ ta có

$$J^{-1} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6}, V = \frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} dudvdw = 8.$$