Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội **TS. Bùi Xuân Diệu**
Viện Toán ứng dụng và Tin học **Lớp Toán Tin K64**

Bài tập Giải tích hàm

(cập nhật Ngày 20 tháng 10 năm 2020)

1 Không gian metric

Bài tập 1.1. *Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương.*

i) $\forall r > 0, \exists$ *ít nhất một* $y \in S^*(x, r) \cap A$.

ii) $\forall r > 0, \exists$ *vô số* $y \in S^*(x, r) \cap A$,

iii) $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \neq x, x_n \to x$.

Bài tập 1.2. *Chứng minh rằng nếu tập* A *trong không gian metric* (X, d) *bị chặn thì bao đóng của nó* $\overline{A}$ *cũng bị chặn.*

Bài tập 1.3. *Chứng minh rằng nếu* F *là tập đóng thì có một dãy các tập mở* G_n *sao cho* $F = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Bài tập 1.4. *Chứng minh rằng nếu* G *là tập mở thì có một dãy các tập đóng* F_n *sao cho* $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Bài tập 1.5. *Chứng minh rằng* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0$, $S(x, r)$ *chứa vô số các điểm hữu tỉ và vô tỉ.*
Hệ quả: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Bài tập 1.6. *Chứng minh rằng tập các đa thức trên* $[0, 1]$ *không đóng và không mở trong* $C[0, 1]$.

Bài tập 1.7. *Trên tập nền các số tự nhiên* $\mathbb{N}$ *ta xây dựng metric sau:*

$$d(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{nếu } m \neq n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{N}, d)$ *là một không gian metric đủ.*

Bài tập 1.8. *Chứng minh nguyên lý Cantor: Trong một không gian metric đủ, mọi dãy hình cầu đóng thắt dần*

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots, \quad r_n \to 0$$

đều có một điểm chung duy nhất.

Bài tập 1.9. *Dùng nguyên lý ánh xạ co chứng minh dãy số* $x_n = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots+\frac{1}{2}}}$ *(n phép chia) hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Bài tập 1.10. *Trên tập nền* $X = C[0, a]$ *các hàm số liên tục trên* $[0, a]$ *xét các metric*

$$d_0(x, y) = \max_{[0,a]} |x(t) - y(t)|, \quad d(x, y) = \max_{[0,a]} e^{-Lt}|x(t) - y(t)|.$$

Chứng minh rằng (X, d_0) *và* (X, d) *là các không gian đủ.*

Bài tập 1.11. *Chứng minh rằng ánh xạ* $A(x) := x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$ *là co trong* (X, d) *của bài tập 1.10, từ đó suy ra bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{CP}$$

ở đó $f(t, x)$ *là hàm liên tục theo* $t \in [0, a]$ *và liên tục Lipschitz theo* x

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y|, \quad \forall t \in [0, a], \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (L > 0).$$

có nghiệm (duy nhất) trên đoạn $[0, a]$ *bất kì.*

Bài tập 1.12. *Chứng minh rằng nếu tập con* $F \subset C[0, 1]$ *là liên tục đồng bậc thì bao đóng* $\overline{F}$ *của nó cũng liên tục đồng bậc.*

Bài tập 1.13. *Những tập nào dưới đây là compact tương đối trong* $C[0, 1]$*?*

a) $x_n(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$,

b) $x_n(t) = \sin nt, n \in \mathbb{N}$,

c) $x_n(t) = \sin(t + n), n \in \mathbb{N}$,

d) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$,

e) $x_n(t) = \sin \alpha t, \alpha \in [1, 2]$,

f) $x_n(t) = \arctan \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$,

g) $x_n(t) = e^{t-\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \ge 0$.

Bài tập 1.14. *Chứng minh rằng hợp hữu hạn của các tập compact là compact.*

Bài tập 1.15. *Chứng minh mọi ánh xạ đẳng cự đưa tập compact vào trong nó là toàn ánh.*

Bài tập 1.16 (Định lý Dini). *Một dãy tăng dần các hàm số liên tục* $f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$ *mà hội tụ trên một tập compact* M *tới một hàm số liên tục* $f(x)$ *thì nó phải hội tụ đều trên* M.

2 Không gian tuyến tính định chuẩn

Bài tập 2.1. *Chứng minh rằng trong* $X = C[a, b]$*, các chuẩn* $\|x\|_0 = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$ *và* $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$ *là không tương đương.*

Bài tập 2.2. *Cho* $A_n : C[0, 1] \to C[0, 1], (A_n x)(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$*. Chứng minh rằng:*

a) A_n *là toán tử tuyến tính liên tục,*

b) A_n *hội tụ điểm đến toán tử đơn vị* I,

c) A_n *không hội tụ đều đến* I.

Bài tập 2.3. *Cho* $L = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$*. Chứng minh*

a) L *là không gian con của* l_2,

b) L *không đóng trong* l_2.

Bài tập 2.4. *Chứng minh rằng không gian* $Ł(X, Y)$ *là đủ khi và chỉ khi* Y *là đủ.*

Bài tập 2.5. *Chứng minh rằng* $l_p(1 \leq p \leq \infty)$ *là các không gian định chuẩn đủ (Banach).*

Bài tập 2.6. *Chứng minh rằng* $l_p(1 \leq p < \infty)$ *là các không gian khả ly,* l_∞ *không khả ly.*

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng các không gian* $c = \{x_n\}_1^\infty$ *hội tụ và* c_0 *là đầy đủ và khả ly.*

Bài tập 2.8. *Chứng minh rằng toán tử đạo hàm* $\frac{d}{dt} : C^1[0,1] \to C[0,1]$ *là compact nếu* $C^1[0,1]$ *với chuẩn* $\|x\| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$.

Bài tập 2.9. *Cho toán tử compact* $A : X \to Y$*, ở đó* X, Y *là các không gian Banach và* $\operatorname{Im} A = Y$*. Chứng minh* $\dim Y < +\infty$.

3 Độ đo và tích phân Lebesgue

3.1 Độ đo Lebesgue

Bài tập 3.1 (Characterisation of Jordan measurability)**.** *Các mệnh đề sau là tương đương.*

i) E *là đo được Jordan,*

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *các tập sơ cấp* $A \subset E \subset B$ *sao cho* $m(B \setminus A) < \epsilon$,

iii) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập sơ cấp* A *sao cho* $m^{*,J}(A \triangle E) < \epsilon$.

Bài tập 3.2. *Cho* $E \subset \mathbb{R}^d$ *là một tập bị chặn. Chứng minh rằng*

a) $\mu^{*,J}(E) = \mu^{*,J}(\overline{E})$,

b) $\mu_{*,J}(E) = \mu_{*,J}(E^o)$,

c) E *là đo được Jordan* $\Leftrightarrow \mu^{*,J}(\partial E) = 0$,

d) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ *và* $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *không đo được Jordan.*

Bài tập 3.3 (Criteria for measurability)**.** *Cho* $E \subset \mathbb{R}^d$*. Các mệnh đề sau là tương đương.*

1) E *là đo được Lebesgue,*

2) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở* $U \supset E$ *sao cho* $m^{*,L}(U \setminus E) \leq \epsilon$,

3) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở* U *sao cho* $m^{*,L}(U \triangle E) \leq \epsilon$,

4) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng* $F \subset E$ *sao cho* $m^{*,L}(E \setminus F) \leq \epsilon$,

5) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng* F *sao cho* $m^{*,L}(E \triangle F) \leq \epsilon$,

6) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đo được Lebesgue* E_ϵ *sao cho* $m^{*,L}(E \triangle E_\epsilon) \leq \epsilon$.

Bài tập 3.4. *Chứng minh rằng*

a) E đo được Jordan $\Rightarrow$ đo được Lebesgue, $m^J(E) = m^L(E)$.

b) tập Cantor là một tập hợp compact, không đếm được, và có độ đo Lebesgue bằng không.

Bài tập 3.5 (Carathéodory criterion)**.** *Cho $E \subset \mathbb{R}^d$. Các mệnh đề sau là tương đương*

i) E là đo được Lebesgue,

ii) Với mọi tập sơ cấp A, $m(A) = m^{*,L}(A \cap E) + m^{*,L}(A \setminus E)$,

iii) Với mọi hình hộp B, $m(B) = m^{*,L}(B \cap E) + m^{*,L}(B \setminus E)$.

Bài tập 3.6 (Inner measure)**.** *Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập bị chặn và $E \subset A$, ở đó A là một tập sơ cấp.*

$$m_{*,L}(E) := m(A) - m^{*,L}(A \setminus E).$$

Khi đó,

i) $m_{*,L}(E)$ không phụ thuộc vào cách chọn tập sơ cấp A (well-defined),

ii) $m_{*,L}(E) \le m^{*,L}(E)$ và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow E$ là đo được Lebesgue.

Bài tập 3.7 (Inner regularity)**.** *Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là tập đo được Lebesgue. Chứng minh rằng*

$$m^L(E) = \sup_{K \subset E, K \text{ compact}} m^L(K).$$

3.2 Hàm số đo được

Bài tập 3.8. *Chứng minh rằng*

1) Nếu $f(x)$ đo được thì $\forall \alpha > 0, |f(x)|^\alpha$ đo được.

2) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ đo được và hữu hạn thì

$$f \pm g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$$

đo được, và nếu $g(x) \neq 0\ \forall x$ thì $\frac{1}{g}$ cũng đo được.

3) Nếu $\{f_n(x)\}$ đo được thì

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

đo được. Nói riêng, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, nếu tồn tại, cũng đo được.

Bài tập 3.9. *Hàm số Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ có đo được hay không?*

3.3 Tích phân Lebesgue

Bài tập 3.10. *Chứng minh rằng nếu*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s} \beta_i 1_{B_j}(x),$$

ở đó A_i là các tập đôi một rời nhau, B_j là các tập đôi một rời nhau thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_i)$.

Bài tập 3.11. *Chứng minh các tính chất sau của tích phân Lebesgue*

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.

2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A)$.

3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i \cap A)$.

4) $\mu(A) = 0$ *và* f *đo được thì* $\int\limits_A f d\mu = 0$.

5) $\mu(A) < +\infty$, f *đo được và bị chặn trên* A *thì* f *khả tích trên* A.

6) *Cộng tính: Nếu* $A \cap B = \emptyset$ *thì* $\int\limits_{A\cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu$.

7) *Bảo toàn thứ tự: i)* $f \sim g \Rightarrow \int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, *ii)* $f \leq g$ *(h.k.n)* $\Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A g d\mu$.

8) *Tuyến tính:* $\int\limits_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_A f d\mu + \beta \int\limits_A g d\mu$.

Bài tập 3.12. *Chứng minh rằng*

1) f *khả tích* $\Leftrightarrow |f|$ *khả tích, và* $|\int\limits_A f| \leq \int\limits_A |f|$.

2) $\begin{cases} |f| \leq g \text{ h.k.n trên } A, \\ g \text{ khả tích} \end{cases} \Rightarrow f$ *khả tích.*

3) f, g *khả tích* $\Rightarrow f \pm g$ *khả tích.*

4) f *khả tích và* g *bị chặn* $\Rightarrow fg$ *khả tích.*

Bài tập 3.13. *Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ là hai dãy đơn điệu tăng các hàm đơn giản không âm và $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu.$$

Bài tập 3.14. *Cho f là một hàm đo được không âm. Chứng minh rằng $\int\limits_A f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (h.k.n).*

Bài tập 3.15. *Chứng minh rằng hàm số f khả tích Riemann trên $[a, b]$ thì cũng khả tích Lebesgue trên đó, và*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f dm^L.$$

4 Không gian Hilbert

4.1 Bài tập ĐSTT (nhắc lại)

Bài tập 4.1. *Cho V là không gian tiền Hilbert. Chứng minh:*

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \forall u, v \in V$.

Bài tập 4.2. *Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có phân tích duy nhất*

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n, \quad v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n.$$

Đặt $< u, v >= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

a) *Chứng minh $< u, v >$ là một tích vô hướng trên V.*

b) *Áp dụng cho trường hợp $V = \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (0,1,1), u = (2,-1,-2), v = (2,0,5)$. Tính $< u, v >$.*

c) *Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $B = \left\{1, x, x^2\right\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.*

d) *Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $B = \left\{1 + x, 2x, x - x^2\right\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.*

Bài tập 4.3. *Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $< p, q >$ sau có phải là tích vô hướng hay không?*

a) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $< p, q >= \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ *Trong trường hợp là tích vô hướng tính $< p, q >$ với $p = 2-3x+5x^2-x^3, q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$*

Bài tập 4.4. *Dùng phương pháp trực chuẩn hóa Gram - Schmidt xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ véctơ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (0,0,0,1)$ trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc*

Bài tập 4.5. *Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $< p, q >= \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.*

a) *Trực chuẩn hoá Gram - Schmidt cơ sở $\mathbb{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ để nhân được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{A}$.*

b) *Xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathbb{B}$ sang $\mathcal{A}$*

c) *Tìm $[r]_{\mathcal{A}}$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$*

Bài tập 4.6. *Cho không gian tiền Hilbert V hữu hạn chiều, W là không gian con của V và u là một véctơ của V. Chứng minh:*

a) Tồn tại véc tơ u' của W sao cho $(u - u') \perp W$

b) Khi đó $\|u - u'\| \leq \|u - w\|, \forall w \in W$

Bài tập 4.7. *Tìm hình chiếu của véc tơ này lên véc tơ kia*

a) $u = (1, 3, -2, 4), v = (2, -2, 4, 5)$

b) $u = (4, 1, 2, 3, -3), v = (-1, -2, 5, 1, 4)$

Bài tập 4.8. *Cho V là không gian tiền Hilbert n chiều, chứng minh điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f : V \to \mathbb{R}$ tuyến tính là tồn tại vécto a cố định của V để $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$*

Bài tập 4.9. *Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ $v_1 = (1, 1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1, 2, 1), v_3 = (2, 3, -1, 2, 1)$ .Gọi $V = \left\{ x \in R^5 \middle| x \perp v_i, i = 1, 2, 3 \right\}$*

a) Chứng minh V là không gian vécto con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm $\dim V$.

4.2 Không gian Hilbert

Bài tập 4.10. *Cho L là không gian con đóng của không gian Hilbert H. Chứng minh rằng*

$$x \in L^\perp \Leftrightarrow \forall y \in L, \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Bài tập 4.11. *Cho $f : H \to \mathbb{R}$ là một toán tử tuyến tính không bị chặn, ở đó H là một không gian Hilbert. Chứng minh rằng $\overline{\ker f} = H$.*

Bài tập 4.12. *Cho L là một không gian con đóng của không gian Hilbert H. Chứng minh rằng*

$$\forall x \in H, \min_{u \in L} \|x - u\| = \max_{v \in L^\perp, \|v\|=1} |(x, v)|.$$

Bài tập 4.13. *Tìm toán tử liên hợp của*

a) $R : l_2 \to l_2, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$

b) $L : l_2 \to l_2, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$

Bài tập 4.14. *Cho H là không gian tiền Hilbert sao cho mọi không gian con đóng $L \subset H$ có tính chất $(L^\perp)^\perp = L$. Chứng minh rằng H là một không gian Hilbert.*

Bài tập 4.15. *Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn thỏa mãn đẳng thức hình bình hành $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Chứng minh rằng X là một không gian có tích vô hướng.*

4.3 Lý thuyết phổ của toán tử

Bài tập 4.16. *Cho các toán tử $l_2 \to l_2$*

$$R : (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

$$L : (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$$

Chứng minh rằng

a) $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_c(L) = \{\lambda \in C, |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_r(L) = \emptyset.$

b) $\sigma_p(R) = \emptyset, \quad \sigma_c(R) = \{\lambda \in C, |\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0\}, \quad \sigma_r(R) = \{0\}.$

Bài tập 4.17. *Cho* $X = C[a,b], \phi \in X$ *và* $A_\phi : X \to X, A_\phi(f) = \phi f$ *(toán tử nhân). Chứng minh rằng*

a) Nếu ϕ *là đơn điệu thì* A_ϕ *không có trị riêng.*

b) $\sigma(A_\phi) = \phi([a,b])$.

Bài tập 4.18. *Chứng minh rằng nếu* $A : H \to H$ *là một toán tử tuyến tính liên tục, tự liên hợp trên không gian Hilbert* H *thì*

a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. *Nói riêng, các trị riêng của toán tử tuyến tính tự liên hợp đều là các số thực.*

b) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$,

c) $r(A) = \|A\|$,

d) $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Bài tập 4.19. *Chứng minh rằng nếu* $A : H \to H$ *là một toán tử tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert* H *thì* $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Bài tập 4.20. *Chứng minh rằng nếu* λ *là phổ dư của toán tử tuyến tính liên tục* A *trên không gian Hilbert* H *thì* $\overline{\lambda}$ *là một trị riêng của* A^*.

Bài tập 4.21. *Cho* A *là một toán tử tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert* H *và* $\lambda, \mu \in \rho(A)$. *Chứng minh rằng các toán tử dải* R_λ, R_μ *thỏa mãn*

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \text{ và } R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu.$$