Giải tích hàm

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 3: Độ đo và tích phân Lebesgue

Bài toán độ đo

Bài toán hình học Euclide

Đo $m(E)$, ở đó $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp bất kì.

Bài toán độ đo

Bài toán hình học Euclide

Đo $m(E)$, ở đó $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp bất kì.

i) Một chiều: Độ dài,

Bài toán độ đo

Bài toán hình học Euclide

Đo $m(E)$, ở đó $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp bất kì.

i) Một chiều: Độ dài,

ii) Hai chiều: Diện tích,

Bài toán độ đo

Bài toán hình học Euclide

Đo $m(E)$, ở đó $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp bất kì.

i) Một chiều: Độ dài,
ii) Hai chiều: Diện tích,
iii) Ba chiều: Thể tích.

Bài toán độ đo

Bài toán hình học Euclide

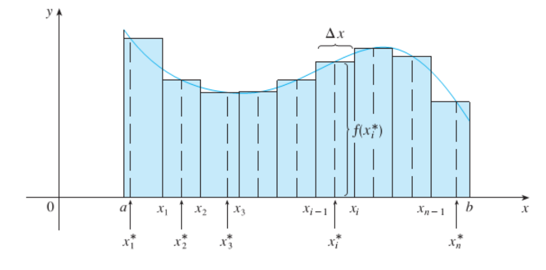
Đo $m(E)$, ở đó $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp bất kì.

i) Một chiều: Độ dài,

ii) Hai chiều: Diện tích,

iii) Ba chiều: Thể tích.

Cách tiếp cận cổ điển



Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum\limits_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

iii) Nghịch lý Banach - Tarski.

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum\limits_{x\in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

iii) Nghịch lý Banach - Tarski.

Bài toán độ đo

1) Thế nào là một tập hợp đo được?

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

iii) Nghịch lý Banach - Tarski.

Bài toán độ đo

1) Thế nào là một tập hợp đo được?

2) Nếu tập E đo được, độ đo của nó được định nghĩa như thế nào?

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum\limits_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

iii) Nghịch lý Banach - Tarski.

Bài toán độ đo

1) Thế nào là một tập hợp đo được?

2) Nếu tập E đo được, độ đo của nó được định nghĩa như thế nào?

3) Những tính chất nào mà một độ đo cần thỏa mãn?

Bài toán độ đo

Một số vấn đề gặp phải

i) Vật lý: $m(E) = \sum_{x \in E} m(\{x\}) \Rightarrow$ Dạng vô định $\infty \cdot 0$.

ii) Hai tập hợp cùng lực lượng $m([0,1]) = 1, m([0,2]) = 2$.

iii) Nghịch lý Banach - Tarski.

Bài toán độ đo

1) Thế nào là một tập hợp đo được?
2) Nếu tập E đo được, độ đo của nó được định nghĩa như thế nào?
3) Những tính chất nào mà một độ đo cần thỏa mãn?
4) Các tập hợp thông thường có đo được hay không?

Độ đo Jordan $\Leftarrow$ **Lời giải không duy nhất** $\Rightarrow$ **Độ đo Lebesgue**

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$
2) $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$
2) $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3) $\Rightarrow m((a, b)) = m((a, b]) = m([a, b)) = b - a.$

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$
2) $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3) $\Rightarrow m((a, b)) = m((a, b]) = m([a, b)) = b - a.$
4) $m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(\{a\}) = 0?$

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$
2) $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3) $\Rightarrow m((a, b)) = m((a, b]) = m([a, b)) = b - a.$
4) $m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \sum\limits_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(\{a\}) = 0?$
5) $m([0, 1]) = \sum\limits_{a \in [0,1]} m(\{a\}) = 0? \Rightarrow$ Không được!!!

Bài toán độ đo

Độ đo trong $\mathbb{R}$

1) $\Delta = [a, b] \Rightarrow m(\Delta) = b - a \Rightarrow m(\{a\}) = 0.$
2) $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3) $\Rightarrow m((a, b)) = m((a, b]) = m([a, b)) = b - a.$
4) $m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \sum\limits_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(\{a\}) = 0?$
5) $m([0, 1]) = \sum\limits_{a \in [0,1]} m(\{a\}) = 0? \Rightarrow$ Không được!!!

Bài toán

Tìm một lớp tập $\mathcal{M}$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $\mathcal{M} \ni A \mapsto m(A)$,

a) $0 \leq m(A) \leq +\infty$,
b) Mỗi $\Delta = [a, b] \in \mathcal{M}$ và $m(\Delta) = b - a$,
c) $A, B \in \mathcal{M}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Độ đo sơ cấp

Định nghĩa

i) Khoảng trong $\mathbb{R}$*:* $I = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$*, ở đó* $a \leq b$.

$$\textit{Độ dài } |I| = b - a.$$

Độ đo sơ cấp

Định nghĩa

i) Khoảng trong $\mathbb{R}$*:* $I = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$*, ở đó* $a \leq b$*.*

$$\text{Độ dài } |I| = b - a.$$

ii) Hình hộp trong $\mathbb{R}^d$: $B := I_1 \times \cdots \times I_d$

$$\text{Thể tích } |B| = |I_1| \cdots |I_d|.$$

Độ đo sơ cấp

Định nghĩa

i) *Khoảng trong* $\mathbb{R}$: $I = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$, *ở đó* $a \le b$.

$$\text{Độ dài } |I| = b - a.$$

ii) *Hình hộp trong* $\mathbb{R}^d$: $B := I_1 \times \cdots \times I_d$

$$\text{Thể tích } |B| = |I_1| \cdots |I_d|.$$

iii) *Tập sơ cấp trong* $\mathbb{R}^d$: $E = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ *hợp của một số hữu hạn các hình hộp (không nhất thiết rời nhau* $\Rightarrow$ *rời nhau)*

$$m(E) = |B_1| + \cdots + |B_k|$$

không phụ thuộc vào cách chia E.

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng Δ sơ cấp và $m(\Delta) = b - a$.

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng Δ sơ cấp và $m(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng Δ sơ cấp và $m(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
4) **Bất biến đối với phép dịch chuyển** $m(E + x) = m(E)$.

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng Δ sơ cấp và $m(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
4) **Bất biến đối với phép dịch chuyển** $m(E + x) = m(E)$.
5) **Đơn điệu tăng** $m(E) \leq m(F)$ nếu $E \subset F$.

Độ đo sơ cấp

Các tính chất của độ đo sơ cấp

1) Không âm $0 \leq m(E)$ và $m(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng Δ sơ cấp và $m(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
4) **Bất biến đối với phép dịch chuyển** $m(E + x) = m(E)$.
5) **Đơn điệu tăng** $m(E) \leq m(F)$ nếu $E \subset F$.
6) **Đóng với các phép toán Boolean** $E \cup F, E \cap F, E \setminus F, E \triangle F$.

Độ đo Peano - Jordan

Cho $\mathbb{R}^d \supset E$ bị chặn.

Cách giải quyết của Peano-Jordan

i) Độ đo ngoài

$$m^{*,J}(E) = \inf_{B \supset E, B \text{ là tập sơ cấp}} m(B)$$

Độ đo Peano - Jordan

Cho $\mathbb{R}^d \supset E$ bị chặn.

Cách giải quyết của Peano-Jordan

i) Độ đo ngoài

$$m^{*,J}(E) = \inf_{B \supset E, B \text{ là tập sơ cấp}} m(B)$$

ii) Độ đo trong

$$m_{*,J}(E) = \sup_{A \subset E, A \text{ là tập sơ cấp}} m(A)$$

Độ đo Peano - Jordan

Cho $\mathbb{R}^d \supset E$ bị chặn.

Cách giải quyết của Peano-Jordan

i) Độ đo ngoài

$$m^{*,J}(E) = \inf_{B \supset E, B \text{ là tập sơ cấp}} m(B)$$

ii) Độ đo trong

$$m_{*,J}(E) = \sup_{A \subset E, A \text{ là tập sơ cấp}} m(A)$$

iii) E đo được Jordan nếu $m^{*,J}(E) = m_{*,J}(E) =: m^J(E)$.

Kí hiệu $\mathcal{M}$ là lớp các tập đo được theo nghĩa Peano-Jordan.

Độ đo Jordan - Peano

Hệ quả

Mọi tập sơ cấp E đều đo được Jordan và $m^J(E) = m(E)$.

Độ đo Jordan - Peano

Hệ quả

Mọi tập sơ cấp E đều đo được Jordan và $m^J(E) = m(E)$.

Bài tập (Characterisation of Jordan measurability)

Các mệnh đề sau là tương đương.

i) *E là đo được Jordan,*

ii) *$\forall \epsilon > 0, \exists$ các tập sơ cấp $A \subset E \subset B$ sao cho $m(B \setminus A) < \epsilon$,*

iii) *$\forall \epsilon > 0, \exists$ tập sơ cấp A sao cho $m^{*,J}(A \triangle E) < \epsilon$.*

Độ đo Peano - Jordan

Các tính chất của độ đo Jordan

1) Không âm $0 \leq m^J(E)$ và $m^J(\emptyset) = 0$,

Độ đo Peano - Jordan

Các tính chất của độ đo Jordan

1) Không âm $0 \leq m^J(E)$ và $m^J(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng $\Delta \in \mathcal{M}$ và $m^J(\Delta) = b - a$.

Độ đo Peano - Jordan

Các tính chất của độ đo Jordan

1) Không âm $0 \leq m^J(E)$ và $m^J(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng $\Delta \in \mathcal{M}$ và $m^J(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m^J(E_1 \cup E_2) = m^J(E_1) + m^J(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

Độ đo Peano - Jordan

Các tính chất của độ đo Jordan

1) Không âm $0 \leq m^J(E)$ và $m^J(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng $\Delta \in \mathcal{M}$ và $m^J(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m^J(E_1 \cup E_2) = m^J(E_1) + m^J(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
4) **Bất biến đối với phép dịch chuyển** $m^J(E + x) = m^J(E)$,

Độ đo Peano - Jordan

Các tính chất của độ đo Jordan

1) Không âm $0 \leq m^J(E)$ và $m^J(\emptyset) = 0$,
2) Mọi khoảng $\Delta \in \mathcal{M}$ và $m^J(\Delta) = b - a$.
3) Hữu hạn cộng tính $m^J(E_1 \cup E_2) = m^J(E_1) + m^J(E_2)$ nếu $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
4) **Bất biến đối với phép dịch chuyển** $m^J(E + x) = m^J(E)$,
5) **Đơn điệu** $m^J(E) \leq m^J(F)$ nếu $E \subset F$,
6) **Đóng với các phép toán Boolean** $E \cup F, E \cap F, E \setminus F, E \triangle F$.

Một số tập hợp đo được Jordan

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

Ví dụ (Một số tập hợp đo được Jordan)

a) $A = \{(x, f(x)) | x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2, m^J(A) =$

Một số tập hợp đo được Jordan

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

Ví dụ (Một số tập hợp đo được Jordan)

a) $A = \{(x, f(x))|x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2, m^J(A) = 0,$

b) $B = \{(x, y)|0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2, m^J(B) =$

Một số tập hợp đo được Jordan

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

Ví dụ (Một số tập hợp đo được Jordan)

a) $A = \{(x, f(x)) | x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2, m^J(A) = 0,$

b) $B = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2, m^J(B) = \int\limits_a^b f(x)dx$ (Riemann)

c) Các hình cầu đóng và mở trong $\mathbb{R}^d$.

d) Các hình đa giác trong $\mathbb{R}^d$.

Độ đo Jordan-Peano

Bài tập

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập bị chặn. Chứng minh rằng

a) $\mu^{*,J}(E) = \mu^{*,J}(\overline{E})$,

b) $\mu_{*,J}(E) = \mu_{*,J}(E^o)$,

c) E *là đo được Jordan* $\Leftrightarrow \mu^{*,J}(\partial E) = 0$,

d) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ *và* $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *không đo được Jordan.*

Độ đo Jordan-Peano

Bài tập

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập bị chặn. Chứng minh rằng

a) $\mu^{*,J}(E) = \mu^{*,J}(\overline{E})$,

b) $\mu_{*,J}(E) = \mu_{*,J}(E^o)$,

c) *E là đo được Jordan* $\Leftrightarrow \mu^{*,J}(\partial E) = 0$,

d) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ *và* $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *không đo được Jordan.*

Lớp các tập đo được theo nghĩa Peano-Jordan

Lớp $\mathcal{M}$ không chứa

i) mọi tập mở và đóng trên $\mathbb{R}$,

ii) các tập không bị chặn,

iii) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Độ đo Jordan-Peano

Các bước xây dựng độ đo Jordan

1) Định nghĩa hình hộp và thể tích của chúng $|B|$,
2) Định nghĩa tập sơ cấp (hợp của một số hữu hạn các hình hộp) và độ đo $m(E)$ của chúng,
3) Định nghĩa độ đo Jordan ngoài $m^{*,J}(E)$ và độ đo trong $m_{*,J}(E)$ của một tập bị chặn E bất kì. Nếu

$$m^{*,J}(E) = m_{*,J}(E) =: m^J(E)$$

thì E là đo được Jordan.

Sáng kiến của Lebesgue

i) Định nghĩa độ đo ngoài của tập bị chặn A

$$m^{*,L}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}|\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i \supset A\right\},$$

Sáng kiến của Lebesgue

i) Định nghĩa độ đo ngoài của tập bị chặn A

$$m^{*,L}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supset A \right\},$$

ii) Mở rộng ra cho cả những tập không bị chặn.

Sáng kiến của Lebesgue

i) Định nghĩa độ đo ngoài của tập bị chặn A

$$m^{*,L}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}|\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i \supset A\right\},$$

ii) Mở rộng ra cho cả những tập không bị chặn.

iii) Xây dựng được một lớp tập $\mathcal{L}$ trong $\mathbb{R}$ và độ đo m thỏa mãn

1) $0 \leq m(A) \leq +\infty$,
2) Mỗi đoạn $\Delta = [a, b] \in \mathcal{L}$ và $m(\Delta) = b - a$,
3') Nếu $A_i \in \mathcal{L}, i = 1, 2, \ldots$ đôi một rời nhau thì

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(A_i)$$ (tính chất σ-cộng tính).

Hai cách xây dựng độ đo Lebesgue

Thác triển độ đo

1) Xây dựng độ đo sơ cấp m trên đại số $\mathcal{C}$, lớp các tập sơ cấp của $\mathbb{R}$,
2) Sử dụng Định lý Hahn về thác triển độ đo $\Rightarrow$ độ đo ngoài

$$m^{*,L}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathcal{C} \right\}$$

3) Sử dụng Định lý Carathéodory $\Rightarrow$ Độ đo m trên σ-đại số $\mathcal{L}$.

Hai cách xây dựng độ đo Lebesgue

Thác triển độ đo

1) Xây dựng độ đo sơ cấp m trên đại số $\mathcal{C}$, lớp các tập sơ cấp của $\mathbb{R}$,
2) Sử dụng Định lý Hahn về thác triển độ đo $\Rightarrow$ độ đo ngoài

$$m^{*,L}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathcal{C}\right\}$$

3) Sử dụng Định lý Carathéodory $\Rightarrow$ Độ đo m trên σ-đại số $\mathcal{L}$.

Xây dựng trực quan thông qua các tập mở

i) $E \subset \mathbb{R}^d$ đo được Lebesgue nếu $\forall \epsilon > 0, \exists$ tập mở $U \supset E$:

$$m^{*,L}(U \setminus E) \leq \epsilon.$$

ii) Nếu E đo được Lebesgue thì $m^L(E) := m^{*,L}(E)$: độ đo Lebesgue.

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Độ đo Jordan ngoài vs Độ đo Lebesgue ngoài

$$m^{*,L}(E) \leq m^{*,J}(E).$$

i) $m^{*,J}(\mathbb{Q}) = +\infty, \quad m^{*,J}(\mathbb{Q} \cap [-R, R]) = m^{*,J}([-R, R]) = 2R.$
Tuy nhiên,

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Độ đo Jordan ngoài vs Độ đo Lebesgue ngoài

$$m^{*,L}(E) \leq m^{*,J}(E).$$

i) $m^{*,J}(\mathbb{Q}) = +\infty, \quad m^{*,J}(\mathbb{Q} \cap [-R, R]) = m^{*,J}([-R, R]) = 2R.$
Tuy nhiên,

ii) $m^{*,L}(\text{tập đếm được}) = 0.$

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Độ đo Jordan ngoài vs Độ đo Lebesgue ngoài

$$m^{*,L}(E) \le m^{*,J}(E).$$

i) $m^{*,J}(\mathbb{Q}) = +\infty, \quad m^{*,J}(\mathbb{Q} \cap [-R, R]) = m^{*,J}([-R, R]) = 2R.$
Tuy nhiên,

ii) $m^{*,L}(\text{tập đếm được}) = 0.$

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

i) Độ đo của tập rỗng $m^{*,L}(\emptyset) = 0,$

ii) Đơn điệu tăng $E \subset F \subset \mathbb{R}^d \Rightarrow m^{*,L}(E) \le m^{*,L}(F),$

iii) σ-dưới cộng tính $m^{*,L}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^{*,L}(E_n).$

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

The outer measure axioms

i) Độ đo của tập rỗng $m^*(\emptyset) = 0$,

ii) Đơn điệu tăng: Nếu $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$ thì $m^*(E) \leq m^*(F)$,

iii) σ-dưới cộng tính: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

Chú ý

i) Độ đo của tập rỗng, đơn điệu tăng và σ-dưới cộng tính $\Rightarrow$ độ đo ngoài trên một tập X bất kì.

ii) Mặt khác, độ đo Jordan ngoài không phải là một độ đo ngoài (dễ gây hiểu lầm).

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Bổ đề (Outer measure of elementary sets)

E là một tập sơ cấp $\Rightarrow m^{*,L}(E) = m(E)$ *(độ đo sơ cấp).*

Hệ quả

$$m_{*,J}(E) \leq m^{*,L}(E) \leq m^{*,J}(E), \quad \forall E \in \mathbb{R}^d.$$

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Bổ đề (Outer measure of elementary sets)

E là một tập sơ cấp $\Rightarrow m^{*,L}(E) = m(E)$ (độ đo sơ cấp).

Hệ quả

$$m_{*,J}(E) \le m^{*,L}(E) \le m^{*,J}(E), \quad \forall E \in \mathbb{R}^d.$$

Bổ đề

Nếu $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ là hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau thì

i) $m^{*,L}(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |B_n|.$

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Bổ đề (Outer measure of elementary sets)

E là một tập sơ cấp $\Rightarrow m^{*,L}(E) = m(E)$ (độ đo sơ cấp).

Hệ quả

$$m_{*,J}(E) \le m^{*,L}(E) \le m^{*,J}(E), \quad \forall E \in \mathbb{R}^d.$$

Bổ đề

Nếu $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ là hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau thì

i) $m^{*,L}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$.

ii) Hệ quả: $m^{*,L}(E) = m_{*,J}(E)$.

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Không phải tập hợp nào cũng biểu diễn được dưới dạng hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau, chẳng hạn như $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tuy nhiên,

Bổ đề

Nếu $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập mở thì E có thể biểu diễn được dưới dạng hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau.

Các tính chất của độ đo Lebesgue ngoài

Không phải tập hợp nào cũng biểu diễn được dưới dạng hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau, chẳng hạn như $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tuy nhiên,

Bổ đề

Nếu $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập mở thì E có thể biểu diễn được dưới dạng hợp đếm được của các hình hộp hầu rời nhau.

Bổ đề (Outer regularity)

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập hợp bất kì. Khi đó,

$$m^{*,L}(E) = \inf_{E \subset U, U \text{ là tập mở}} m^{*,L}(U).$$

Tính đo được Lebesgue

Ví dụ

Các tập hợp sau đây là đo được Lebesgue.

1) Các tập hợp mở,
2) Các tập hợp đóng,
3) Các tập hợp có độ đo Lebesgue ngoài bằng 0,
4) Tập hợp rỗng,
5) $R^d \setminus E$, nếu E là đo được Lebesgue,
6) $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, nếu $E_1, E_2, \ldots$ là họ đếm được các tập đo được Lebesgue,
7) $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$, nếu $E_1, E_2, \ldots$ là họ đếm được các tập đo được Lebesgue.

Tính đo được Lebesgue

Bổ đề (Criteria for measurability)

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$. Các mệnh đề sau là tương đương.

1) *E là đo được Lebesgue,*
2) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở $U \supset E$ sao cho* $m^{*,L}(U \setminus E) \leq \epsilon$,
3) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở U sao cho* $m^{*,L}(U \triangle E) \leq \epsilon$,
4) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng $F \subset E$ sao cho* $m^{*,L}(E \setminus F) \leq \epsilon$,
5) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng F sao cho* $m^{*,L}(E \triangle F) \leq \epsilon$,
6) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đo được Lebesgue E_ϵ sao cho* $m^{*,L}(E \triangle E_\epsilon) \leq \epsilon$.

Tính đo được Lebesgue

Bổ đề (Criteria for measurability)

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$. Các mệnh đề sau là tương đương.

1) *E là đo được Lebesgue,*
2) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở $U \supset E$ sao cho* $m^{*,L}(U \setminus E) \leq \epsilon$,
3) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập mở U sao cho* $m^{*,L}(U \triangle E) \leq \epsilon$,
4) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng $F \subset E$ sao cho* $m^{*,L}(E \setminus F) \leq \epsilon$,
5) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đóng F sao cho* $m^{*,L}(E \triangle F) \leq \epsilon$,
6) $\forall \epsilon > 0, \exists$ *tập đo được Lebesgue E_ϵ sao cho* $m^{*,L}(E \triangle E_\epsilon) \leq \epsilon$.

Bài tập

Chứng minh rằng

a) *E đo được Jordan $\Rightarrow$ đo được Lebesgue,* $m^J(E) = m^L(E)$.
b) *tập Cantor là một tập hợp compact, không đếm được, và có độ đo Lebesgue bằng không.*

Độ đo Lebesgue

Các tính chất của độ đo Lebesgue

i) Độ đo của tập rỗng $m(\emptyset) = 0$,

ii) Đơn điệu tăng Nếu $E \subset F \in \mathcal{L}$ thì $m(E) \leq m(F)$,

iii) σ-cộng tính $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ nếu $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{L}$ là đôi một rời nhau.

Chú ý

Các tính chất Độ đo của tập rỗng, đơn điệu tăng và σ-cộng tính kể trên được dùng để định nghĩa độ đo trên một σ-đại số của một tập X bất kì.

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bài tập (Carathéodory criterion)

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$. Các mệnh đề sau là tương đương

i) *E là đo được Lebesgue,*

ii) *Với mọi tập sơ cấp A, $m(A) = m^{*,L}(A \cap E) + m^{*,L}(A \setminus E)$,*

iii) *Với mọi hình hộp B, $m(B) = m^{*,L}(B \cap E) + m^{*,L}(B \setminus E)$.*

Bài tập (Inner measure)

Cho $E \subset \mathbb{R}^d$ là một tập bị chặn và $E \subset A$, ở đó A là một tập sơ cấp.

$$m_{*,L}(E) := m(A) - m^{*,L}(A \setminus E).$$

Khi đó,

i) *$m_{*,L}(E)$ không phụ thuộc vào cách chọn tập sơ cấp A (well-defined),*

ii) *$m_{*,L}(E) \leq m^{*,L}(E)$ và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ E là đo được Lebesgue.*

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Cho X là một tập hợp bất kì và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là một độ đo nếu

a) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

b) $\mu(\emptyset) = 0$,

c) μ *là σ-cộng tính.*

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Cho X là một tập hợp bất kì và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là một độ đo nếu

a) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

b) $\mu(\emptyset) = 0$,

c) μ là σ-cộng tính.

Ví dụ

i) Độ đo hằng số $\mu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Cho X là một tập hợp bất kì và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là một độ đo nếu

a) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

b) $\mu(\emptyset) = 0$,

c) μ *là σ-cộng tính.*

Ví dụ

i) Độ đo hằng số $\mu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

ii) Độ đo Dirac tại điểm x_0 trên $\mathcal{P}(X)$: $\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x_0 \in A, \\ 0, & \text{nếu } x_0 \notin A. \end{cases}$

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Cho X là một tập hợp bất kì và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên X. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là một độ đo nếu

a) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

b) $\mu(\emptyset) = 0$,

c) μ là σ-cộng tính.

Ví dụ

i) Độ đo hằng số $\mu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}$,

ii) Độ đo Dirac tại điểm x_0 trên $\mathcal{P}(X)$: $\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x_0 \in A, \\ 0, & \text{nếu } x_0 \notin A. \end{cases}$

iii) Độ đo đếm trên $\mathcal{P}(X)$: $\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{nếu } |A| < +\infty, \\ +\infty, & \text{nếu } |A| = +\infty. \end{cases}$

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) *hữu hạn, nếu* $\mu(X) < +\infty$,

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) hữu hạn, nếu $\mu(X) < +\infty$,

ii) σ-hữu hạn, nếu

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) hữu hạn, nếu $\mu(X) < +\infty$,

ii) σ-hữu hạn, nếu

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Các tính chất của độ đo

1) μ là cộng tính,

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) hữu hạn, nếu $\mu(X) < +\infty$,

ii) σ-hữu hạn, nếu

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Các tính chất của độ đo

1) μ là cộng tính,

2) μ là đơn điệu tăng, nghĩa là $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) hữu hạn, nếu $\mu(X) < +\infty$,

ii) σ-hữu hạn, nếu

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Các tính chất của độ đo

1) μ là cộng tính,
2) μ là đơn điệu tăng, nghĩa là $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,
3) Nếu $A \subset B$ và $\mu(A) < +\infty$ thì $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Độ đo trên một đại số tập hợp

Định nghĩa

Độ đo μ trên X được gọi là

i) hữu hạn, nếu $\mu(X) < +\infty$,

ii) σ-hữu hạn, nếu

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Các tính chất của độ đo

1) μ là cộng tính,
2) μ là đơn điệu tăng, nghĩa là $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,
3) Nếu $A \subset B$ và $\mu(A) < +\infty$ thì $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
4) $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Các tính chất của độ đo

Định lý (Upward monotone convergence)

Nếu $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *là một dãy các tập hợp thỏa mãn*

i) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ *và*

ii) $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Các tính chất của độ đo

Định lý (Upward monotone convergence)

Nếu $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *là một dãy các tập hợp thỏa mãn*

i) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ *và*

ii) $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Định lý (Downward monotone convergence)

Nếu $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *là một dãy các tập hợp thỏa mãn*

i) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots,$

ii) tồn tại n_0 *sao cho* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ *và*

iii) $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Thác triển độ đo

Định nghĩa (Độ đo ngoài)

Một ánh xạ $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *được gọi là một* *độ đo ngoài* *nếu*

i) $\mu^*(A) \geq 0$ *với mọi* $A \subset X$,

ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

iii) *Nếu* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *thì* $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Thác triển độ đo

Định nghĩa (Độ đo ngoài)

Một ánh xạ $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *được gọi là một* *độ đo ngoài* *nếu*

i) $\mu^*(A) \geq 0$ *với mọi* $A \subset X$,

ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

iii) *Nếu* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *thì* $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Độ đo ngoài vs Độ đo

1) Độ đo ngoài xác định trên $\mathcal{P}(X)$, chỉ đòi hỏi σ-dưới cộng tính.
2) Độ đo ngoài là hàm tập đơn điệu tăng, nếu $A \subset B$ thì $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3) Mọi độ đo trên $\mathcal{P}(X)$ cũng là độ đo ngoài.
4) Độ đo ngoài + cộng tính = độ đo trên $\mathcal{P}(X)$.

Thác triển độ đo

Định nghĩa

Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X. Tập $A \subset X$ được gọi là μ^*- đo được nếu

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall E \subset X.$$

Nói cách khác, A cắt mọi tập hợp thành hai thành phần một cách cộng tính.

Thác triển độ đo

Định nghĩa

Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X. Tập $A \subset X$ được gọi là μ^*- đo được nếu

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall E \subset X.$$

Nói cách khác, A cắt mọi tập hợp thành hai thành phần một cách cộng tính.

Định lý (Carathéodory)

Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X và $\mathcal{L}$ là tập tất cả các tập μ^* đo được. Khi đó

1) *$\mathcal{L}$ là một σ-đại số.*
2) *$\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}}$ là một độ đo trên $\mathcal{L}$.*

Độ đo μ được gọi là độ đo cảm sinh bởi độ đo μ^*.

Thác triển độ đo

Định lý Hahn về thác triển độ đo

Cho μ là một độ đo trên một đại số $\mathcal{C}$ những tập con của X. Nếu ta đặt

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathcal{C} \right\}$$

thì μ^* là một độ đo ngoài và $\mu^*(A) = \mu(A)$ với mọi $A \in \mathcal{C}$, đồng thời, mọi tập thuộc σ-đại số sinh bởi $\mathcal{C}$ đều là μ^* đo được.

Độ đo trên $\mathbb{R}$

Quy trình thác triển độ đo

Độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ Độ đo ngoài (Hahn) $\Rightarrow$ Độ đo trên σ-đại số $\mathcal{M}$.

Độ đo trên $\mathbb{R}$

Quy trình thác triển độ đo

Độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ Độ đo ngoài (Hahn) $\Rightarrow$ Độ đo trên σ-đại số $\mathcal{M}$.

Thác triển độ đo trên $\mathbb{R}$

i) Các *gian* hay các *khoảng* trên $\mathbb{R}$:

$(a, b), [a, b], [a, b), (a, b], (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty)$

ii)

$$\mathcal{C} = \left\{ P : P = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \ (i \neq j) \right\}$$

iii) $\mathcal{C}$ là một đại số và định nghĩa $\mu(P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|$ là một độ đo trên $\mathcal{C}$.

Độ đo trên $\mathbb{R}$

Xác định độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supset A, \Delta_i \in \mathcal{C}\right\}. \tag{1}$$

Độ đo trên $\mathbb{R}$

Xác định độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supset A, \Delta_i \in \mathcal{C}\right\}. \tag{1}$$

Bổ đề

Hàm tập μ^* xác định bởi công thức (1) là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$.

Độ đo trên $\mathbb{R}$

Xác định độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supset A, \Delta_i \in \mathcal{C}\right\}. \tag{1}$$

Bổ đề

Hàm tập μ^* xác định bởi công thức (1) là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$.

Thác triển độ đo ngoài thành độ đo trên $\mathbb{R}$

Theo Định lý Caratheodory, lớp $\mathcal{L}$ tất cả các tập $A \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall E \subset \mathbb{R}$$

là một σ-đại số và hàm tập $\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}}$ là một độ đo trên $\mathcal{L}$, gọi là độ đo Lebesgue.

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a,$

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$,

b) $\mu(A) = 0$ *với mọi tập A hữu hạn hoặc đếm được.*

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$,

b) $\mu(A) = 0$ *với mọi tập A hữu hạn hoặc đếm được.*

c) Mọi tập Borel đều $\mathcal{L}$*- đo được.*

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b-a$,

b) $\mu(A) = 0$ *với mọi tập* A *hữu hạn hoặc đếm được.*

c) *Mọi tập Borel đều* $\mathcal{L}$- *đo được.*

d) *Độ đo Lebesgue là* σ- *hữu hạn.*

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$,

b) $\mu(A) = 0$ *với mọi tập* A *hữu hạn hoặc đếm được.*

c) *Mọi tập Borel đều* $\mathcal{L}$- *đo được.*

d) *Độ đo Lebesgue là* σ- *hữu hạn.*

e) *Độ đo Lebesgue là một độ đo đủ.*

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Bổ đề

a) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$,

b) $\mu(A) = 0$ *với mọi tập A hữu hạn hoặc đếm được.*

c) *Mọi tập Borel đều $\mathcal{L}$- đo được.*

d) *Độ đo Lebesgue là σ- hữu hạn.*

e) *Độ đo Lebesgue là một độ đo đủ.*

Đặc trưng của tập có độ đo không

$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ hữu hạn hay đếm được các khoảng Δ_k sao cho

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A \text{ và } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) < \epsilon.$$

Các tính chất của độ đo Lebesgue

Đặc trưng của một tập $\mathcal{L}$- đo được

Các điều kiện sau là tương đương

i) A là $\mathcal{L}$- đo được,

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists$ tập mở $G \supset A$ sao cho $\mu^*(G \setminus A) < \epsilon$,

iii) $\forall \epsilon > 0, \exists$ tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu^*(A \setminus F) < \epsilon$.

Chương 3: Độ đo và tích phân Lebesgue

Hàm số đo được

Đặt vấn đề

i) Giải tích I: Cho $\{f_n(x)\}$ liên tục và $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$f(x)$ chưa chắc đã liên tục.

ii) Xây dựng một lớp hàm mới, rộng hơn lớp các hàm số liên tục, và đóng kín với các phép toán giải tích.

Hàm số đo được

Đặt vấn đề

i) Giải tích I: Cho $\{f_n(x)\}$ liên tục và $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$f(x)$ chưa chắc đã liên tục.

ii) Xây dựng một lớp hàm mới, rộng hơn lớp các hàm số liên tục, và đóng kín với các phép toán giải tích.

Nhận xét

Hàm số $f: X \to \mathbb{R}$ là liên tục $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a))$ mở, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Hàm số đo được

Đặt vấn đề

i) Giải tích I: Cho $\{f_n(x)\}$ liên tục và $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$f(x)$ chưa chắc đã liên tục.

ii) Xây dựng một lớp hàm mới, rộng hơn lớp các hàm số liên tục, và đóng kín với các phép toán giải tích.

Nhận xét

Hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ là liên tục $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a))$ mở, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Cho bộ ba $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Hàm số $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là đo được nếu

$$(\forall a \in \mathbb{R}), \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$$

Hàm số đo được

Chú ý

i) $X = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{L} \Rightarrow f$ *đo được theo nghĩa Lebesgue.*

ii) $X = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B} \Rightarrow f$ *đo được theo nghĩa Borel.*

Hàm số đo được

Chú ý

i) $X = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{L} \Rightarrow f$ *đo được theo nghĩa Lebesgue.*

ii) $X = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B} \Rightarrow f$ *đo được theo nghĩa Borel.*

Các điều kiện tương đương

Điều kiện

$$(\forall a \in \mathbb{R}), \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

có thể được thay thế bởi một trong các điều kiện sau

$$(\forall a \in \mathbb{R}), \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F} \tag{2}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}), \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F} \tag{3}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}), \{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F} \tag{4}$$

Hàm số đo được

Các tính chất cơ bản của hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.

Hàm số đo được

Các tính chất cơ bản của hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.
2) $f(x) = c, \forall x \in X$, là đo được.

Hàm số đo được

Các tính chất cơ bản của hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.
2) $f(x) = c, \forall x \in X$, là đo được.
3) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, kf(x)$ đo được.

Hàm số đo được

Các tính chất cơ bản của hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.
2) $f(x) = c, \forall x \in X$, là đo được.
3) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, kf(x)$ đo được.

Các phép toán trên hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall \alpha > 0, |f(x)|^{\alpha}$ đo được.

Hàm số đo được

Các tính chất cơ bản của hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{F}$.
2) $f(x) = c, \forall x \in X$, là đo được.
3) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, kf(x)$ đo được.

Các phép toán trên hàm số đo được

1) $f(x)$ đo được $\Rightarrow \forall \alpha > 0, |f(x)|^\alpha$ đo được.
2) $f(x)$ và $g(x)$ đo được và hữu hạn thì

$$f \pm g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$$

đo được, và nếu $g(x) \neq 0\ \forall x$ thì $\frac{1}{g}$ cũng đo được.

Các phép toán giải tích với hàm số đo được

Định lý

$\{f_n(x)\}$ *đo được thì*

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

đo được. Nói riêng, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*, nếu tồn tại, cũng đo được.*

Các phép toán giải tích với hàm số đo được

Định lý

$\{f_n(x)\}$ *đo được thì*

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

đo được. Nói riêng, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*, nếu tồn tại, cũng đo được.*

Chú ý

i) {đo được} đóng.

ii) {liên tục} $\subset$ *{đo được}.*

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *đo được, nếu* $f_n(x)$ *liên tục.*

iv) Hàm số Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Cấu trúc của hàm số đo được

Hàm đặc trưng

Cho $A \subset X$ bất kì, $1_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \notin A, \\ 1, & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$

Cấu trúc của hàm số đo được

Hàm đặc trưng

Cho $A \subset X$ bất kì, $1_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \notin A, \\ 1, & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$

Bổ đề

$1_A(X)$ là đo được $\Leftrightarrow$ A đo được ($A \in \mathcal{F}$).

Cấu trúc của hàm số đo được

Hàm đặc trưng

Cho $A \subset X$ bất kì, $1_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \notin A, \\ 1, & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$

Bổ đề

$1_A(X)$ là đo được $\Leftrightarrow$ A đo được $(A \in \mathcal{F})$.

Cấu trúc của hàm đo được

i) Hàm đơn giản $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x)$.

ii) Mỗi hàm số đo được, không âm là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản.

Cấu trúc của hàm số đo được

Hàm đặc trưng

Cho $A \subset X$ bất kì, $1_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \notin A, \\ 1, & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$

Bổ đề

$1_A(X)$ *là đo được* $\Leftrightarrow$ *A đo được* $(A \in \mathcal{F})$.

Cấu trúc của hàm đo được

i) Hàm đơn giản $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x)$.

ii) Mỗi hàm số đo được, không âm là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản.

iii) Mỗi hàm số đo được là giới hạn của một dãy các hàm đơn giản.

Dãy các hàm đơn giản

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm số đo được, hữu hạn.

Hội tụ hầu khắp nơi

$$f_n \stackrel{h.k.n}{\rightarrow} f \Leftrightarrow \mu(\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0.$$

Dãy các hàm đơn giản

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm số đo được, hữu hạn.

Hội tụ hầu khắp nơi

$$f_n \overset{h.k.n}{\to} f \Leftrightarrow \mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Hội tụ theo độ đo

$$f_n \overset{\mu}{\to} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Dãy các hàm đơn giản

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm số đo được, hữu hạn.

Hội tụ hầu khắp nơi

$$f_n \overset{h.k.n}{\to} f \Leftrightarrow \mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Hội tụ theo độ đo

$$f_n \overset{\mu}{\to} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Các tính chất

1) $f_n \overset{\mu}{\to} f$ và $g \sim f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} g$.

Dãy các hàm đơn giản

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm số đo được, hữu hạn.

Hội tụ hầu khắp nơi

$$f_n \overset{h.k.n}{\to} f \Leftrightarrow \mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Hội tụ theo độ đo

$$f_n \overset{\mu}{\to} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Các tính chất

1) $f_n \overset{\mu}{\to} f$ và $g \sim f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} g$.

2) $f_n \overset{\mu}{\to} f, f_n \overset{\mu}{\to} g \Rightarrow f \sim g$.

Dãy các hàm đơn giản

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm số đo được, hữu hạn.

Hội tụ hầu khắp nơi

$$f_n \xrightarrow{h.k.n} f \Leftrightarrow \mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Hội tụ theo độ đo

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Các tính chất

1) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $g \sim f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} g.$

2) $f_n \xrightarrow{\mu} f, f_n \xrightarrow{\mu} g \Rightarrow f \sim g.$

3) $\begin{cases} f_n \xrightarrow{h.k.n} f, \\ \mu(X) < +\infty \end{cases} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$

4) $f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\} \xrightarrow{h.k.n} f.$

Chương 3: Độ đo và tích phân Lebesgue

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Cho $(X, \mathcal{F}, \mu), A \in \mathcal{F}$ và

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) \geq 0,$$

ở đó $A_i \in \mathcal{F}$ rời nhau, và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Cho $(X, \mathcal{F}, \mu), A \in \mathcal{F}$ và

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) \geq 0,$$

ở đó $A_i \in \mathcal{F}$ rời nhau, và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.Định nghĩa

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Cho $(X, \mathcal{F}, \mu), A \in \mathcal{F}$ và

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) \geq 0,$$

ở đó $A_i \in \mathcal{F}$ rời nhau, và $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$.Định nghĩa

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Ví dụ

Cho $f(x)$ là hàm số Dirichlet. Tính $\int\limits_{[0,1]} f(x) d\mu$.

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Nếu
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s} \beta_i 1_{B_j}(x).$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_i).$

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Nếu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s} \beta_i 1_{B_j}(x).$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_i)$.

Các tính chất của tích phân các hàm đơn giản

i) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A g d\mu$.

Tích phân Lebesgue

Tích phân các hàm đơn giản

Nếu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s} \beta_i 1_{B_j}(x).$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_i)$.

Các tính chất của tích phân các hàm đơn giản

i) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A g d\mu$.

ii) $\{f_n\}, \{g_n\} \geq 0$ đơn điệu tăng, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu.$$

Tích phân Lebesgue

Tích phân một hàm đo được bất kì

i) $f(x) \geq 0$ trên $A \Rightarrow \exists$ dãy hàm đơn giản $\{f_n(x)\} \geq 0$, đơn điệu tăng và hội tụ tới f,

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu$$

không phụ thuộc vào cách chọn dãy f_n.

Tích phân Lebesgue

Tích phân một hàm đo được bất kì

i) $f(x) \geq 0$ trên $A \Rightarrow \exists$ dãy hàm đơn giản $\{f_n(x)\} \geq 0$, đơn điệu tăng và hội tụ tới f,

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu$$

không phụ thuộc vào cách chọn dãy f_n.

ii) $f(x)$ có dấu bất kì $\Rightarrow f = f^+ - f^-$, với

$$f^+ = \max\{f, 0\} \geq 0, \quad f^- = \max\{-f, 0\} \geq 0$$

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A f^+(x)d\mu - \int_A f^-(x)d\mu,$$

Nếu tích phân ấy hữu hạn thì ta nói $f(x)$ khả tích.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu =$

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}.$

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.
2) $\int_A \alpha 1_B(x) d\mu =$

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A)$.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}.$
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A).$
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu =$

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A)$.
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i \cap A)$.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A)$.
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i \cap A)$.
4) $\mu(A) = 0$ và f đo được thì $\int\limits_A f d\mu = 0$.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}.$
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A).$
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i \cap A).$
4) $\mu(A) = 0$ và f đo được thì $\int\limits_A f d\mu = 0.$
5) $\mu(A) < +\infty$, f đo được và bị chặn trên A thì f khả tích trên A.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}.$

2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A).$

3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i \cap A).$

4) $\mu(A) = 0$ và f đo được thì $\int\limits_A f d\mu = 0.$

5) $\mu(A) < +\infty$, f đo được và bị chặn trên A thì f khả tích trên A.

6) Cộng tính: Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\int\limits_{A\cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}$.
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A)$.
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i \cap A)$.
4) $\mu(A) = 0$ và f đo được thì $\int\limits_A f d\mu = 0$.
5) $\mu(A) < +\infty$, f đo được và bị chặn trên A thì f khả tích trên A.
6) Cộng tính: Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\int\limits_{A\cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu$.
7) Bảo toàn thứ tự:
   i) $f \sim g \Rightarrow \int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, ii) $f \leq g$ (h.k.n) $\Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A g d\mu$.

Tích phân Lebesgue

Các tính chất cơ bản

1) $\int\limits_A c d\mu = c\mu(A), \forall c \in \mathbb{R}.$
2) $\int\limits_A \alpha 1_B(x) d\mu = \alpha\mu(B \cap A).$
3) $\int\limits_A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(x) d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i \cap A).$
4) $\mu(A) = 0$ và f đo được thì $\int\limits_A f d\mu = 0.$
5) $\mu(A) < +\infty$, f đo được và bị chặn trên A thì f khả tích trên A.
6) Cộng tính: Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\int\limits_{A \cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$
7) Bảo toàn thứ tự:
   i) $f \sim g \Rightarrow \int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu,$ ii) $f \leq g$ (h.k.n) $\Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A g d\mu.$
8) Tuyến tính: $\int\limits_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_A f d\mu + \beta \int\limits_A g d\mu.$

Tích phân Lebesgue

Tính khả tích Lebesgue

1) f khả tích $\Leftrightarrow |f|$ khả tích, và $\left|\int\limits_A f\right| \leq \int\limits_A |f|$.

Tích phân Lebesgue

Tính khả tích Lebesgue

1) f khả tích $\Leftrightarrow |f|$ khả tích, và $|\int\limits_A f| \leq \int\limits_A |f|$.

2) $\begin{cases} |f| \leq g \text{ h.k.n trên } A, \\ g \text{ khả tích} \end{cases} \Rightarrow f$ khả tích.

Tích phân Lebesgue

Tính khả tích Lebesgue

1) f khả tích $\Leftrightarrow |f|$ khả tích, và $|\int\limits_A f| \leq \int\limits_A |f|$.

2) $\begin{cases} |f| \leq g \text{ h.k.n trên } A, \\ g \text{ khả tích} \end{cases} \Rightarrow f$ khả tích.

3) f, g khả tích $\Rightarrow f \pm g$ khả tích.

Tích phân Lebesgue

Tính khả tích Lebesgue

1) f khả tích $\Leftrightarrow |f|$ khả tích, và $\left|\int\limits_A f\right| \leq \int\limits_A |f|$.

2) $\begin{cases} |f| \leq g \text{ h.k.n trên } A, \\ g \text{ khả tích} \end{cases} \Rightarrow f$ khả tích.

3) f, g khả tích $\Rightarrow f \pm g$ khả tích.

4) f khả tích và g bị chặn $\Rightarrow fg$ khả tích.

Tích phân Lebesgue

Hội tụ đơn điệu Beppo Levi

$\{f_n\}$ là dãy tăng các hàm đo được không âm hội tụ tới f trên A thì

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Tích phân Lebesgue

Hội tụ đơn điệu Beppo Levi

$\{f_n\}$ là dãy tăng các hàm đo được không âm hội tụ tới f trên A thì

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Định lý hội tụ bị chặn Lebesgue

Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm đo được trên A thỏa mãn

i) $|f_n(x)| \leq g(x), \forall n \geq 1, \forall x \in A$,

ii) g khả tích trên A.

iii) f_n hội tụ h.k.n hoặc theo độ đo μ tới f.

Khi đó f khả tích và

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Riemann vs Lebesgue

Định lý

Hàm số f khả tích Riemann trên $[a, b]$ thì cũng khả tích Lebesgue trên đó, và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} fdm^L.$$

Riemann vs Lebesgue

Định lý

Hàm số f khả tích Riemann trên $[a, b]$ thì cũng khả tích Lebesgue trên đó, và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} fdm^L.$$

Hệ quả

Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là khả tích Riemann khi và chỉ khi f liên tục hầu khắp nơi trên $[a, b]$.