Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội **TS. Bùi Xuân Diệu**
Viện Toán ứng dụng và Tin học **Lớp Việt Pháp K65**

Bài tập Toán 1

1 Đại số đại cương

1.1 Tập hợp, Ánh xạ

1.1.1 Tập hợp

Bài tập 1.1. *Cho*

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | |x - 1| \leq 1\},$$

và

$$C = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}.$$

Tính $(A \cup B) \cap C$ *và* $(A \cap B) \cup C$.

Bài tập 1.2. *Cho* A, B, C, D *là các tập hợp bất kì. Chứng minh rằng*

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

e) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

f) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

g) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

h) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

i) Đẳng thức sau có đúng không? $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$. *Nếu không đúng, hãy chỉ ra một phản ví dụ.*

j) Nếu $(A \cap C) \subset (A \cap B)$ *và* $(A \cup C) \subset (A \cup B)$, *thì* $C \subset B$.

1.1.2 Ánh xạ

Bài tập 1.3. *Cho* $f : X \to Y$ *là một ánh xạ. Chứng minh rằng*

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $A, B \subset X$

b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

e) $A \subset f^{-1}(f(A)), A \subset X$,

f) $B \supset f(f^{-1}(B)), B \subset Y$.

g) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $A, B \subset X$. *Tìm một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại là không đúng.*

Bài tập 1.4. *Cho* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, 2y)$ *và* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 4)^2 + y^2 = 4\}$.
Tính $f(A), f^{-1}(A)$.

Bài tập 1.5. *Ánh xạ nào sau đây là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Giải thích.*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x,$

b) $f : (-\infty, 0] \to [4, +\infty), f(x) = x^2 + 4,$

c) $f : (1, +\infty) \to (-1, +\infty), f(x) = x^2 - 2x,$

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) = \frac{3x+1}{x-1},$

e) $f : [4, 9] \to [21, 96], f(x) = x^2 + 2x - 3,$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2|x|,$

g) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x},$

h) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x},$

Bài tập 1.6. *Cho X, Y, Z là các tập hợp bất kì và $f : X \to Y, g : Y \to Z$ là các ánh xạ. Chứng minh rằng*

a) *Nếu f và g là đơn ánh, thì $g \circ f$ cũng là đơn ánh.*

b) *Nếu f và g là toàn ánh thì $g \circ f$ cũng là toàn ánh.*

c) *Nếu f và g là song ánh, thì $g \circ f$ cũng là song ánh.*

d) *Nếu f là toàn ánh và $g \circ f$ là đơn ánh, thì g là đơn ánh.*

e) *Chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng $g \circ f$ là đơn ánh, nhưng g không phải là đơn ánh.*

f) *Nếu g là đơn ánh và $g \circ f$ là toàn ánh, thì f là toàn ánh.*

g) *Chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng $g \circ f$ là toàn ánh nhưng f không phải là toàn ánh.*

1.1.3 Quan hệ hai ngôi

Bài tập 1.7. *Cho quan hệ $\preceq$ trên $\mathbb{R}^2$ như sau: $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ nếu $x_1 \le x_2, y_1 \ge y_2$. Chứng minh rằng $\preceq$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}^2$.*

Bài tập 1.8. *Cho quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{R}$ như sau: $x \sim y$ nếu $x^2 - y^2 = x - y$. Chứng minh $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.*

Bài tập 1.9. *Cho một quan hệ R trên $\mathbb{R}^2$ như sau:*

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \le y_1^2 + y_2^2.$$

Hỏi R có phải là một quan hệ thứ tự không? Tại sao?

Bài tập 1.10. *Cho E là tập hợp tất cả các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và quan hệ $\mathcal{S}$ xác định bởi*

$$f \mathcal{S} g \Leftrightarrow \left(\exists \varphi \in E : \begin{cases} \varphi \text{ là song ánh,} \\ \varphi \circ f = g \circ \varphi. \end{cases} \right)$$

a) *Chứng minh $\mathcal{S}$ là một quan hệ tương đương trên E.*

b) *Cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = x^2 + px + q$. Tìm điều kiện cần và đủ của $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $f \mathcal{S} g$.*

Bài tập 1.11. *Kí hiệu X là tập hợp các hàm số biến số thực. Trên X ta định nghĩa một quan hệ S như sau:*

$$\forall x, y \in Y, \quad x S y \Leftrightarrow \exists C > 0 : x(t) = y(t) \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C.$$

Quan hệ S có là một quan hệ tương đương trên X không? Tai sao?

Bài tập 1.12. *Cho* $\leq$ *là một quan hệ thứ tự trên một tập* A*. Chứng minh rằng*

a) *Phần tử lớn nhất của* A*, nếu tồn tại, là duy nhất.*

b) *Phần tử nhỏ nhất của* A*, nếu tồn tại, là duy nhất.*

c) *Nếu* a *là phần tử lớn nhất của* A *thì* a *là phần tử cực đại.*

d) *Nếu* b *là phần tử nhỏ nhất của* A *thì* b *là phần tử cực tiểu.*

e) *Cho* A *là một tập được sắp thứ tự toàn phần và* a *là một phần tử cực đại. Chứng minh rằng* a *cũng là phần tử lớn nhất.*

f) *Cho* A *là một tập được sắp thứ tự toàn phần và* b *là một phần tử cực tiểu. Chứng minh rằng* b *cũng là phần tử nhỏ nhất.*

g) *Chỉ ra một ví dụ phần tử cực đại không phải là phần tử lớn nhất, và phần tử cực tiểu không phải là phần tử nhỏ nhất.*

1.2 Số tự nhiên, bản số

Bài tập 1.13. *Hai tập hợp* A *và* B *được gọi là có lực lượng bằng nhau nếu tồn tại một song ánh* $f : A \to B$*. Chứng minh rằng*

a) *các khoảng* $(0, 1)$ *và* $(3, 5)$ *có lực lượng bằng nhau.*

b) *các khoảng* $(0, 1]$ *và* $(0, 1)$ *có lực lượng bằng nhau.*

c) *các khoảng* $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ *và* $\mathbb{R}$ *có lực lượng bằng nhau với* $a < b$ *bất kì.* [1]

d) *tập hợp các số tự nhiên* $\mathbb{N}$*, các số nguyên* $\mathbb{Z}$ *và các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$ *có lực lượng bằng nhau.*[2]

1.3 Cấu trúc đại số

1.3.1 Cấu trúc nhóm

Bài tập 1.14. *Cho* $(G, \circ)$ *là một nhóm. Chứng minh rằng*

a) *Phần tử trung lập* e *là duy nhất.*

b) *Phần tử nghịch đảo* x' *của* x *là duy nhất.*

c) *Luật giản ước* $\begin{cases} x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z, \\ x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y. \end{cases}$

Bài tập 1.15. *Cho* $G \neq \emptyset$ *cùng với phép toán hai ngôi* $*$ *là một nhóm thỏa mãn* $x * x = e$ *với mọi* $x \in G$*, ở đó* e *là phần tử trung hòa của* G*. Hỏi* $(G, *)$ *có phải là môt nhóm giao hoán không? Vì sao?*

[1]Người ta nói rằng các tập hợp này có lực lượng continum

[2]Người ta nói rằng các tập hợp này có lực lượng đếm được

Bài tập 1.16. *Cho* $X = \mathbb{Q} \setminus \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$, *trong đó* $\mathbb{Q}$ *là tập hợp các số hữu tỉ. Trên* X *ta định nghĩa phép toán* $\times$ *như sau:*

$$\forall x, y \in X, \quad x \times y = x + y + 3xy.$$

a) $(X, \times)$ *có là nhóm abel không? Tại sao?.*

b) $(\mathbb{Q}, \times)$ *có là nhóm không? Tại sao?*

Bài tập 1.17. *Cho* $G\{1, 2\}$, *trên* G *ta định nghĩa các phép toán như sau:*

$$1 + 1 = 1, 1 + 2 = 2, 2 + 1 = 1, 2 + 2 = 1$$

Chứng minh rằng $(G, +)$ *là một nhóm.*

Bài tập 1.18. *Cho* $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ *là tập các ánh xạ từ* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *xác định như sau:*

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = 1 - x, f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Chứng minh G *cùng với phép toán là phép hợp thành tích ánh xạ lập thành một nhóm không abel.*

1.3.2 Cấu trúc vành, trường

Bài tập 1.19. *Các tập sau với các phép toán thông thường có lập thành một vành, trường không?*

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X = \left\{ a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

e) $Y = \left\{ a + b\sqrt{3} \,|a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

1.3.3 Số phức

Bài tập 1.20. *Tìm dạng chính tắc của các số phức sau.*

a) $(1 + i\sqrt{3})^9$,

b) $\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}}$,

c) $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$,

d) $(2 + i\sqrt{12})^5(\sqrt{3} - i)^{11}$.

Bài tập 1.21. *Giải các phương trình sau trên trường số phức.*

a) $z^2 + z + 1 = 0$,

b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$,

c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$,

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$,

e) $\frac{(z+i)^4}{(z-i)^4} = 1$,

f) $z^8(\sqrt{3} + i) = 1 - i$,

g) $\overline{z^7} = \frac{1}{z^3}$,

h) $z^4 = z + \overline{z}$.

1.4 Đa thức và phân thức hữu tỉ

Bài tập 1.22. *Tìm điều kiện cần và đủ đối với* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *sao cho* $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ *là bình phương của một đa thức thuộc* $\mathbb{R}[X]$.

Bài tập 1.23. *Cho* $n \in \mathbb{N}$. *Áp dụng* $(1+X)^{2n}(1-X)^{2n} = (1-X^2)^{2n}$, *chứng minh*

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$$

Bài tập 1.24. *Giải các phương trình sau*

a) $X(X-1)P'' + (X+2)P' - P = 0$, *với ẩn* $P \in \mathbb{R}[X]$,

b) $P(2X) = P'(X)P''(X)$, *với ẩn* $P \in \mathbb{C}[X]$.

Bài tập 1.25. *Nhân tử hóa*

a) $X^4 - Y^4 - Z^4 + 2X^2Y^2 + 2X^2Z^2 + 2Y^2Z^2$ *trong* $C[X, Y, Z]$,

b) $(X+Y+Z)^5 - (X^5 + Y^5 + Z^5)$ *trong* $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

Bài tập 1.26. *Chứng minh rằng* $\forall n \in \mathbb{N}, X^2|(X+1)^n - nX - 1$, *trong* $K[X]$.

Bài tập 1.27. *Chứng minh rằng* $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \sum\limits_{i=0}^{n-1} X^i \Big| \left(\sum\limits_{i=0}^{n} X^i\right)^p - X^n$ *trong* $K[X]$.

Bài tập 1.28. *Tìm các số* $a \in \mathbb{R}$ *sao cho* $X^2 - aX + 1 | X^4 - X + a$ *trong* $\mathbb{R}[X]$.

Bài tập 1.29. *Cho* $P \in \mathbb{C}[X]$ *sao cho* $\deg P \geq 1$.

a) *Cho* Q *và* R *là thương và dư của phép chia Euclide* A *cho* B. *Chứng minh rằng thương và dư của phép chia Euclide* $A \circ P$ *cho* $B \circ P$ *là* $Q \circ P$ *và* $R \circ P$.

b) *Từ đó suy ra* $\forall (A, B) \in (K[X])^2, (B|A \Leftrightarrow B \circ P | A \circ P)$.

Bài tập 1.30. *Cho* $A, B, C \in K[X]$. *Chứng minh rằng nếu* A, B, C *nguyên tố cùng nhau từng đôi thì* $AB + BC + CA$ *và* ABC *nguyên tố cùng nhau.*

Bài tập 1.31. *Cho* $A, B \in (K[X] \setminus \{0\})^2$. *Chứng minh rằng hai tính chất sau là tương đương*

i) A *và* B *không nguyên tố cùng nhau,*

ii) $\exists U, V \in (K[X] \setminus \{0\})^2, \begin{cases} \deg U < \deg B, \\ \deg V < \deg A, \\ AU + BV = 0. \end{cases}$

Bài tập 1.32. *Cho* $P \in K[X], n \in \mathbb{N}^*$. *Chứng minh*

a) $X - 1 | P(X^n) \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{2n-1} X^k | P(X^{2n})$.

b) $X - 1 | P(X^n) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*, X^k - 1 | P(X^k))$.

Bài tập 1.33. *Tính dư của phép chia Euclide* $X^{2n+1} + (X+1)^{n+2}$ *cho* $X^2 + X + 1$ *trong* $C[X]$.

Bài tập 1.34. *Cho $x_1, x_2, x_3, \dots$ là các không điểm của phương trình được chỉ ra (trong $\mathbb{C}$). Hãy tính biểu thức E, trong đó $\sum$ là tổng của tất cả các hạng tử nhận được do hoán vị các chỉ số.*

a) $x^3 + px + q = 0, (p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, E = \sum \frac{1}{x_i^2}$ *(ba hạng tử),*

b) $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0, E = \sum x_1^3 x_2^2$ *(sáu hạng tử),*

c) $x^3 + px^2 + qx + r = 0, (p, q, r) \in \mathbb{C}^3, E = \sum (x_1 + x_2)^3$ *(ba hạng tử),*

d) $x^3 + px + q = 0, (p, q) \in \mathbb{C}^2, E = \sum x_1^5 x_2^2$ *(sáu hạng tử),*

e) $x^5 + 4x^4 + 3x^2 + x + 1 = 0, E = \sum x_1^4 x_2$ *(hai mươi hạng tử).*

Bài tập 1.35. *Giải các hệ phương trình sau với ẩn $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:*

a) $\begin{cases} x + y + z & = 3, \\ xy + yz + zx & = 2, \\ x^3 + y^3 + z^3 & = 9. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z & = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 & = -1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z & = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 & = 6, \\ x^5 + y^5 + z^5 & = 30. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z & = -2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = -2, \\ \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} & = 0. \end{cases}$

Bài tập 1.36. *Giải phương trình trên trường số phức $z^6 - 4z^4 + 5z^3 - 41z^2 + 36z - 36 = 0$ biết nó có hai nghiệm đối nhau.*

Bài tập 1.37. *Tìm tất cả các $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $P(0) = 0, P(1) = 0, P'(0) = 0, P'(1) = 1$.*

Bài tập 1.38. *Tìm điều kiện cần và đủ đối với $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ để cho $X^4 + aX^3 + bX + 1 \in \mathbb{C}[X]$ có ít nhất một không điểm bậc không thấp hơn 3.*

Bài tập 1.39. *Cho $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P_n = X^{2n} - n^2 X^{n+1} + 2(n^2 - 1)X^n - n^2 X^{n-1} + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Chứng minh rằng 1 là không điểm của P_n và xác định cấp bội của nó.*

Bài tập 1.40. *Phân tích thành phân thức đơn giản trong $\mathbb{R}[X]$*

a) $\frac{X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1}{(X^2 + 2)(X - 1)}$,

b) $\dfrac{2X^4 + 10X^3 + 17X^2 + 16X + 5}{(X + 1)^2(X^2 + 2X + 3)}$,

c) $\frac{X^2 + 1}{X^4 + 1}$,

d) $\frac{X}{(X^4 + 1)(X^4 - X^2 + 1)}$.

Bài tập 1.41. *Phân tích $\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$ thành phân thức đơn giản trong $\mathbb{C}[X]$.*

2 Đại số tuyến tình và hình học Aphin

2.1 Ma trận

2.1.1 Các phép toán trên ma trận

Bài tập 2.1. *Cho* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Thực hiện các phép tính $A + BC, A^T B - C, A(BC), (A + 3B)(B - C)$.

Bài tập 2.2. *Cho* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $F = A^2 - 3A$,

b) Tìm ma trận X *thỏa mãn* $(A^2 + 5I)X = B^T(3A - A^2)$.

Bài tập 2.3. *Tìm ma trận* X *sao cho*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

b) $\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$.

Bài tập 2.4. *Tính* A^n*, ở đó*

a) $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

2.1.2 Ma trận nghịch đảo

Bài tập 2.5. *Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.1.3 Định thức

Bài tập 2.6. *Tính các định thức sau*

$$a)\ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\ C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \qquad d)\ D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}.$$

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng nếu A là một ma trận phản xứng cấp n lẻ thì* $\det(A) = 0$.

Bài tập 2.8. *Cho ma trận thực A vuông cấp* 2017. *Chứng minh rằng*

$$\det(A - A^T)^{2017} = 2017(\det A - \det A^T).$$

Bài tập 2.9. *Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2017 thỏa mãn $AB + B^T A^T = 0$. Chứng minh rằng một trong hai ma trận có định thức bằng 0.*

Bài tập 2.10. *Cho A, B là các ma trận thực vuông cùng cấp. Chứng minh rằng*

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

Bài tập 2.11. *Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là một ma trận phức thỏa mãn $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$. Chứng minh rằng* $\det(A)$ *là một số thực.*

Bài tập 2.12. *Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $AB = A + B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.*

Bài tập 2.13. *Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017I = 0$. Chứng minh* $\det A > 0$.

Bài tập 2.14. *Chứng minh rằng nếu A là một ma trận thực vuông thỏa mãn $A^3 = A + I$ thì* $\det A > 0$.

2.1.4 Hạng của ma trận

Bài tập 2.15. *Tìm hạng của các ma trận sau*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}. \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

2.2 Không gian véc tơ

2.2.1 Đại cương về không gian véc tơ

Bài tập 2.16. *Tập hợp V cùng với các phép toán sau có phải là một không gian véc tơ không? Tại sao?*

a) $V = \{(x,y,z) \,|x,y,z \in \mathbb{R}\}$,

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$$

$$k(x,y,z) = (|k|\,x, |k|\,y, |k|\,z), \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) $V = \{x = (x_1,x_2) \,|x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$,

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

$$k(x_1,x_2) = (x_1^k, x_2^k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Không gian véc tơ con

Bài tập 2.17. *Cho* V_1, V_2 *là các không gian véc tơ con của* V *và* $V_1 + V_2 := \{x_1 + x_2 \,|x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. *Chứng minh rằng*

a) $V_1 \cap V_2$ *là một không gian véc tơ con của* V.

b) $V_1 + V_2$ *là một không gian véc tơ con của* V.

Bài tập 2.18. *Cho* V_1, V_2 *là các không gian véc tơ con của* V. *Giả thiết*

i) $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ *là một hệ sinh của* V_1, *và*

ii) $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *là một hệ sinh của* V_2.

Chứng minh rằng $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *là một hệ sinh của* $V_1 + V_2$.

Bài tập 2.19. *Chứng minh rằng* $V = V_1 \oplus V_2$ [3] *nếu và chỉ nếu mỗi* $v \in V$ *thừa nhận một phân tích duy nhất*

$$v = v_1 + v_2, \ (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2).$$

2.2.3 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Bài tập 2.20. *Xét xem họ các véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính*

a) $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,6,7)$.

b) $v_1 = (4,-2,6)\,, v_2 = (-6,3,-9)$.

c) $v_1 = (2,3,-1), v_2 = (3,-1,5), v_3 = (-1,3,-4)$.

[3] Ta nói V là tổng trực tiếp của các không gian con V_1 và V_2 và viết $V = V_1 \oplus V_2$ nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

2.2.4 Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

Bài tập 2.21. *Cho* $v_1 = (2, 0, 1, 3, -1), v_2 = (1, 1, 0, -1, 1), v_3 = (0, -2, 1, 5, -3), v_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$.

a) *Tìm một cơ sở và số chiều của* $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) *Cho* $V_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2), V_2 = \operatorname{span}(v_3, v_4)$. *Tìm một cơ sở và số chiều của* $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài tập 2.22. *Cho* V_1, V_2 *là các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Bài tập 2.23. *Tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2.2.5 Hạng của họ véc tơ

Bài tập 2.24. *Tìm hạng của họ véc tơ sau trong* $P_3[x]$*:*

$$v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^2 + 2x^3, v_3 = 2 + x + 3x^3, v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3.$$

2.2.6 Ma trận chuyển cơ sở

Bài tập 2.25. *Cho* $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$ *là các véc tơ trong* $P_3[x]$.

a) *Chứng minh rằng* $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *là một cơ sở của* $P_3[x]$.

b) *Tìm tọa độ của véc tơ* $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ *đối với cơ sở trên.*

c) *Tìm tọa độ của véc tơ* $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ *đối với cơ sở trên.*

Bài tập 2.26. *Cho* $E = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ *là cơ sở chính tắc của* $P_3[x]$ *và* $B = \{1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3\}$.

a) *Chứng minh rằng* B *là một cơ sở của* $P_3[x]$.

b) *Tìm ma trận chuyển cơ sở từ* E *sang* B *và từ* B *sang* E.

c) *Tìm tọa độ của véc tơ* $v = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$ *đối với cơ sở* B.

2.3 Ánh xạ tuyến tính

2.3.1 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Bài tập 2.27. *Cho* $T : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng* *a)* $\operatorname{Ker}(T)$ *là một không gian véc tơ con của* V.

b) $\operatorname{Im}(T)$ *là một không gian véc tơ con của* W.

c) f *là đơn ánh nếu và chỉ nếu* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

d) f *là toàn ánh nếu và chỉ nếu* $\operatorname{Im} f = W$.

e) $\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$ *(Định lý về số chiều).*

Bài tập 2.28. *Cho* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương.*

a) f *là đơn ánh.*

b) f *là toàn ánh.*

c) f *là song ánh.*

Bài tập 2.29. *Cho ánh xạ* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *xác định bởi* $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$.

a) Chứng minh rằng f *là một ánh xạ tuyến tính.*

b) Tìm ma trận của f *trong cặp cơ sở chính tắc.*

c) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

2.3.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài tập 2.30. *Cho ánh xạ* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Tìm ma trận của f *đối với cơ sở* $B = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$.

Bài tập 2.31. *Cho ánh xạ* $f : P_2[x] \to P_4[x]$ *xác định bởi* $f(p) = p + x^2 p, \forall p \in P_2$.

a) Chứng minh rằng f *là một ánh xạ tuyến tính.*

b) Tìm ma trận của f *đối với cặp cơ sở* $E_1 = \left\{1, x, x^2\right\}$ *của* $P_2[x]$ *và* $E_2 = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ *của* $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f *đối với cặp cơ sở* $E_1' = \left\{1 + x, 2x, 1 + x^2\right\}$ *của* $P_2[x]$ *và* $E_2 = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ *của* $P_4[x]$.

Bài tập 2.32. *Cho* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ *là ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f : P_2[x] \to P_2[x]$ *đối với cơ sở* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, *ở đó*

$$v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2.$$

a) Tính $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.

b) Tính $f(1 + x^2)$.

Bài tập 2.33. *Cho* A *là một ma trận cỡ* $m \times n$ *và* B *là một ma trận cỡ* $n \times p$. *Chứng minh rằng* $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Bài tập 2.34. *Cho* A, B *là các ma trận cỡ* $m \times n$. *Chứng minh rằng* $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

2.4 Hình học aphin trong mặt phẳng và trong không gian

Bài tập 2.35. *Chứng minh các tính chất sau của không gian aphin con.*

a) *Cho W là một KG aphin con của E, khi đó tồn tại duy nhất KGVT con của E, kí hiệu là $\vec{W}$, sao cho $W = A + \vec{W}$ với $A \in E$ nào đó. Mọi họ sinh của $\vec{W}$ được gọi là họ chỉ phương của W.*

b) *Với mọi KG aphin con W của E và với mọi $A \in W$, $W = A + \vec{W}$.*

c) *Cho W, W' là các KG aphin con của E. Nếu $W \cap W' \neq \emptyset$ thì $W \cap W'$ là một KG aphin con của E và $\overrightarrow{W \cap W'} = \vec{W} + \vec{W'}$.*

Bài tập 2.36. *Cho $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$. Chứng minh rằng*

a) $f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}), \forall A \in \mathcal{A}_3, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

b) $g \circ f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ *là aphin và* $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

c) *Điều kiện cần và đủ để f là song ánh là $\vec{f}$ cũng là song ánh. Khi đó, f^{-1} cũng là aphin và $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.*

d) $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$ *là một nhóm đối với phép hợp thành ánh xạ $\circ$, gọi là nhóm aphin của $\mathcal{A}_3$ và kí hiệu là* $\mathrm{GAff}(\mathcal{A}_3)$.

e) *Với mọi đường thẳng $D \subset \mathcal{A}_3$, $f(D)$ là một đường thẳng hoặc là một đơn tử của $\mathcal{A}_3$.*

f) *Với mọi mặt phẳng $D \subset \mathcal{A}_3$, $f(D)$ là một mặt phẳng hoặc một đường thẳng hoặc là một đơn tử của $\mathcal{A}_3$.*

g) *Nếu M_1, M_2, M_3 thẳng hàng thì $f(M_1), f(M_2), f(M_3)$ thẳng hàng.*

Bài tập 2.37. *Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}} : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ xác định bởi $T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$. Chứng minh rằng*

a) $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ *là một phép tịnh tiến* $\Leftrightarrow f$ *là aphin và* $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

b) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.

c) $T_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$.

d) $\forall u \in \mathbb{R}^3, T_{\vec{u}}$ *là một song ánh và* $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$.

e) $\{T_{\vec{u}} | u \in \mathbb{R}^3, \circ\}$ *là một nhóm và ánh xạ $\vec{u} \mapsto T_{\vec{u}}$ là một đẳng cấu từ $\{\mathbb{R}^3, +\}$ lên nhóm đó.*

f) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_3$, $\exists!$ *một phép tịnh tiến dời A đến B, đó là* $T_{\overrightarrow{AB}}$.

g) *Với mọi đường thẳng $D \subset \mathcal{A}_3$, $T_{\vec{u}}(D)$ là một đường thẳng $/\!/ D$.*

h) *Với mọi mặt phẳng $P \subset \mathcal{A}_3$, $T_{\vec{u}}(P)$ là một mặt phẳng $/\!/ P$.*

i) *Ngược lại, với mọi* $D /\!/ D', \forall A \in D, \forall A' \in D', T_{\overrightarrow{AA'}}(D) = D'$.

j) *với mọi* $P /\!/ P', \forall A \in P, \forall A' \in P', T_{\overrightarrow{AA'}}(P) = P'$.

k) Cho $A \in \mathcal{A}_3, f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$*. Tồn tại duy nhất một cặp* $(\vec{u}, g) \in (\mathbb{R}^3, \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$ *sao cho* $\begin{cases} f = T_{\vec{u}} \circ g, \\ g(A) = A. \end{cases}$

Bài tập 2.38. *Chứng minh các tính chất sau của phép vị tự*

a) $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ *là vị tự* $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ là ánh xạ aphin,} \\ f \text{ có ít nhất một điểm bất động,} \\ \exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{f} = k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\,. \end{cases}$

b) $H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'} = H_{\Omega,kk'}$.

c) $H_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$.

d) $H_{\Omega,k} \in \mathrm{GAff}(\mathcal{A}_3)$ *và* $H^{-1}_{\Omega,k} = H_{\Omega,k^{-1}}$.

e) Tập hợp các phép vị tự tâm Ω *là một nhóm với* $\circ$ *và* $k \mapsto H_{\Omega,k}$ *là một đẳng cấu từ nhóm* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *lên nhóm đó.*

f) Cho $u \in \mathbb{R}^3, (\Omega, k) \in \mathcal{A}_3 \times \mathbb{R}^*$*. Khi đó*

$$f = T_{\vec{u}} \circ H_{\Omega,k} = H_{A,k},$$

ở đó A *xác định bởi* $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$.

Bài tập 2.39. *Cho họ hữu hạn điểm có trọng số* $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ *sao cho* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$*. Chứng minh các tính chất sau của tâm tỉ cự.*

a) $x_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad y_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad z_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}.$

b) Với mọi $\lambda \neq 0$*, ta có* $T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \lambda\alpha_1 \dots \lambda\alpha_n \end{bmatrix}$

c) Với mọi $p \in \mathbb{N}^*$ *và* $A_{n+1}, \dots, A_{n+p}$ *ta có* $T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n & A_{n+1} & \dots & A_{n+p} \\ \alpha_1 \dots \alpha_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) (Tính giao hoán) Với mọi hoán vị σ *của* $\{1, 2, \dots, n\}$ *ta có* $T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} A_{\sigma_1} \dots A\sigma_n \\ \alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n} \end{bmatrix}$

e) (Tính kết hợp) Với mọi phân hoạch $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ *của* $\{1, 2, \dots, n\}$ *sao cho* $\sum\limits_{i\in I_j} \alpha_i \neq 0$ *ta có*

$$T_{tc}\begin{bmatrix} A_1 \dots A_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{bmatrix} = T_{tc}\begin{bmatrix} T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i\in I_1} & \dots & T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i\in I_k} \\ \sum\limits_{i\in I_1} & \dots & \sum\limits_{i\in I_k} \end{bmatrix}$$

f) Cho $A, B \in \mathcal{A}_3$ *sao cho* $A \neq B$*. Khi đó,*

$$(AB) = \left\{ T_{tc}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, [AB) = \left\{ T_{tc}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

g) Cho $A, B, C \in \mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Ta có

$$(ABC) = \left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma \neq 0. \right\}$$

và nửa mặt phẳng đóng giới hạn bởi AB chứa C là

$$\left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \alpha + \beta + \gamma \neq 0. \right\}$$

h) Cho $A, B, C, D \in \mathcal{A}_3$ không đồng phẳng. Khi đó,

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0. \right\}$$

Nửa không gian đóng giới hạn bởi mặt phẳng ABC chứa D là

$$\left\{ T_{tc} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0. \right\}$$

i) Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một ánh xạ aphin. Khi đó,

$$f(G) = T_{tc} \begin{bmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.40. *Chứng minh rằng*

a) Với mọi họ $(\Gamma_i)_{i \in I}$ gồm những bộ phận lồi, $\cap_{i \in I} \Gamma_i$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

b) Cho $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ là một ánh xạ aphin.

i) Với mọi Γ lồi, tập ảnh $f(\Gamma)$ lồi.

ii) Với mọi G lồi, tập nghịch ảnh $f^{-1}(G)$ lồi.

3 Phép tính vi phân và tích phân

3.1 Hàm số, dãy số

Bài tập 3.1. *Tìm tập xác định của các hàm số*

a) $y = \sqrt[4]{\log(\tan x)}$

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

d) $y = \sqrt{1 + \operatorname{arccot} x}$

e) $y = \arcsin(\sin x)$

f) $y = \sin(\arcsin x)$.

Bài tập 3.2. *Chứng minh các đẳng thức sau* *a)* $\sinh(-x) = -\sinh x$,

b) $\cosh(-x) = -\cosh(x)$,

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

d) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

f) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$,

g) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

Bài tập 3.3. *Tìm miền giá trị của hàm số*

a) $y = \lg(1 - 2\cos x)$

b) $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

c) $y = \arctan(\sin x)$

d) $y = \arctan(e^x)$.

Bài tập 3.4. *Tìm $f(x)$ biết*

a) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

b) $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = x^2$.

Bài tập 3.5. *Tìm hàm ngược của hàm số*

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Bài tập 3.6. *Xét tính chẵn lẻ của hàm số*

a) $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$

b) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$

d) $f(x) = \arcsin x$.

Bài tập 3.7. *Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$, $(a > 0)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.*

Bài tập 3.8. *Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)*

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

b) $f(x) = \sin(x^2)$

c) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$

d) $f(x) = \cos^2 x$

e) $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$

f) $f(x) = \sin x + \sin x\sqrt{2}$.

Bài tập 3.9. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$*, biết*

a) $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ *(n dấu căn),*

b) $x_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots + \frac{1}{2}}}$ *(n phép chia),*

c) $x_0 = 2, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$,

d) $x_0 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$,

e) $x_n = \frac{n}{2^n}$,

f) $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$,

g) $x_n = \sqrt[n]{n}$,

h) $x_n = \frac{\ln n}{n}$.

3.2 Giới hạn hàm số

Bài tập 3.10. *Tìm giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Bài tập 3.11. *Tìm giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

Bài tập 3.12. *Tìm giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

Bài tập 3.13. *Tìm giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\left(\ln(x+1)\right)-\sin\left(\ln x\right)\right]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right), x>0$.

Bài tập 3.14. *Khi $x\to 0^+$ cặp VCB sau có tương đương không?*

$$\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}} \text{ và } \beta(x)=e^{\sin x}-\cos x.$$

3.3 Hàm số liên tục

Bài tập 3.15. *Tìm a để hàm số liên tục tại $x=0$*

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{nếu } x\neq 0,\\ a, & \text{nếu } x=0.\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & \text{nếu } x\geq 0,\\ a\cos x+b\sin x, & \text{nếu } x<0.\end{cases}$

Bài tập 3.16. *Điểm $x=0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số*

a) $y=\dfrac{8}{1-2^{\cot x}}$

b) $y=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

c) $y=\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $(a\neq b)$

3.4 Đạo hàm và vi phân

Bài tập 3.17. *Tìm đạo hàm của hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{nếu } x<1,\\ (1-x)(2-x), & \text{nếu } 1\le x\le 2,\\ x-2, & \text{nếu } x>2.\end{cases}$$

Bài tập 3.18. *Với điều kiện nào thì hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x\neq 0,\\ 0, & \text{nếu } x=0\end{cases}\qquad (n\in\mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại $x=0$ *b) Khả vi tại* $x=0$ *c) Có đạo hàm liên tục tại* $x=0$.

Bài tập 3.19. *Chứng minh rằng hàm số* $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, *trong đó* $\varphi(x)$ *là một hàm số liên tục và* $\varphi(a)\neq 0$, *không khả vi tại điểm* $x=a$.

Bài tập 3.20. *Tìm vi phân của hàm số*

a) $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}, (a\neq 0)$

b) $y=\arcsin\dfrac{x}{a}, (a\neq 0)$

c) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|, (a\neq 0)$

d) $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

Bài tập 3.21. *Tìm*

a) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ *b)* $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ *c)* $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$.

Bài tập 3.22. *Tính gần đúng giá trị của biểu thức*

a) $\log 11$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{2-0.02}{2+0.02}}$.

Bài tập 3.23. *Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số*

a) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, *tính* $y^{(8)}$

b) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, *tính* $y^{(100)}$

c) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, *tính* $y^{(8)}$

d) $y=x^2\sin x$, *tính* $y^{(50)}$.

Bài tập 3.24. *Tính đạo hàm cấp n của hàm số*

a) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

c) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

d) $y=e^{ax}\sin(bx+c)$.

3.5 Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài tập 3.25. *Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.*

Bài tập 3.26. *Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số*

$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad -1 \le x \le 1.$

Bài tập 3.27. *Chứng minh bất đẳng thức*

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$,

b) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}, 0 < b < a.$

Bài tập 3.28. *Tìm giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\tan\dfrac{\pi x}{2}\ln(2-x)$

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(1 - a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

g) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$

h) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{\tan x}$.

Bài tập 3.29. *Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$*

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Bài tập 3.30. *Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a,b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a,b). Chứng minh rằng với mọi $x \in (a,b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho*

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c).$$

Bài tập 3.31. *Khảo sát tính đơn điệu của hàm số*

a) $y = x^3 + x$

b) $y = \arctan x - x$

Bài tập 3.32. *Chứng minh bất đẳng thức*

a) $2x\arctan x \ge \ln\left(1+x^2\right)$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ *với mọi* $x \ge 0$.

Bài tập 3.33. *Tìm cực trị của hàm số*

a) $y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

b) $y = x - \ln(1+x)$

c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 3.34. *Dùng phương pháp Newton, tính* $\sqrt[6]{2}$ *đúng đến* 8 *chữ số thập phân sau dấu phẩy.*

3.6 Khảo sát hàm số, đường cong

Bài tập 3.35. *Khảo sát hàm số*

a) $y = \dfrac{2-x^2}{1+x^4}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^4+8}{x^3+1}$

d) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g) $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \le b)$

h) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0)$.

3.7 Tích phân bất định

Bài tập 3.36. *Tính các tích phân*

a) $\int \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

b) $\int |x^2 - 3x + 2|dx$

c) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

d) $\int \dfrac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$

e) $\int \dfrac{xdx}{(x+2)(x+5)}$

f) $\int \dfrac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

g) $\int \sin x \sin(x+y)dx$

h) $\int \dfrac{1+\sin x}{\sin^2 x}dx$.

Bài tập 3.37. *Tính các tích phân*

a) $\int \arctan x dx$

b) $\int \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$

c) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

d) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

e) $\int \dfrac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

f) $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$

g) $\int e^{-2x}\cos 3x dx$

h) $\int \arcsin^2 x dx$.

Bài tập 3.38. *Lập công thức truy hồi tính* I_n

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \dfrac{dx}{\cos^n x}$.

3.8 Tích phân xác định

Bài tập 3.39. *Tính các đạo hàm*

a) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x}^{y} e^{t^2}dt$ b) $\dfrac{d}{dy}\int\limits_{x}^{y} e^{t^2}dt$ c) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Bài tập 3.40. *Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha}+\dfrac{1}{n\alpha+\beta}+\dfrac{1}{n\alpha+2\beta}+\cdots+\dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right], (\alpha,\beta>0)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$.

Bài tập 3.41. *Tính các giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^{x}(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài tập 3.42. *Tính các tích phân sau*

a) $\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|(x+1)\,dx$

b) $\int\limits_{1}^{e}(x\ln x)^2dx$

c) $\int\limits_{0}^{3\pi/2}\dfrac{dx}{2+\cos x}$

d) $\int\limits_{0}^{3}\dfrac{\sin^2x\cos x}{\left(1+\tan^2x\right)^2}dx$

e) $\int\limits_{0}^{3}\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx$

f) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^nx\cos nxdx$.

Bài tập 3.43. *Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì*

a) $\int\limits_{0}^{\pi/2}f(\sin x)dx=\int\limits_{0}^{\pi/2}f(\cos x)dx$ b) $\int\limits_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{\pi}{2}f(\sin x)dx$.

Bài tập 3.44. *Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a,b]$. Khi đó $f^2(x),g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng khả tích trên $[a,b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a<b$)*

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

3.9 Tích phân suy rộng

Bài tập 3.45. *Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau*

a) $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^xdx$

b) $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos xdx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

d) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Bài tập 3.46. *Xét sự hội tụ của các tích phân sau*

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x} - 1}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}$

e) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Bài tập 3.47. *Nếu* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ thì có suy ra được* $f(x) \to 0$ *khi* $x \to +\infty$ *không? Xét ví dụ* $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx$.

Bài tập 3.48. *Cho hàm* $f(x)$ *liên tục trên* $[a, +\infty)$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. *Hỏi* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *có hội tụ không.*

3.10 Ứng dụng của tích phân xác định

Bài tập 3.49. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi*

a) *Đường parabol* $y = x^2 + 4$ *và đường thẳng* $x - y + 4 = 0$

b) *Parabol bậc ba* $y = x^3$ *và các đường* $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c) *Đường tròn* $x^2 + y^2 = 2x$ *và parabol* $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) *Đường* $y^2 = x^2 - x^4$.

Bài tập 3.50. *Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ* $x^2 + y^2 \leq a^2$ *và* $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$.

Bài tập 3.51. *Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit* $z = 4 - y^2$, *các mặt phẳng tọa độ* $x = 0, z = 0$ *và mặt phẳng* $x = a$ $(a \neq 0)$.

Bài tập 3.52. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường* $y = 2x - x^2$ *và* $y = 0$

a) *Quanh trục* $0x$ *một vòng*

b) *Quanh trục* $0y$ *một vòng.*

Bài tập 3.53. *Tính độ dài đường cong*

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ *khi* x *biến thiên từ* 1 *đến* 2.

b) $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}\right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ *khi* t *biến thiên từ* $\frac{\pi}{3}$ *đến* $\frac{\pi}{2}$ $\quad (a > 0)$.

Bài tập 3.54. *Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau*

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *quay quanh trục* $0x$

b) $y = \frac{1}{3}(1-x)^3, 0 \leq x \leq 1$ *quay quanh trục* $0x$.