

Tích phân phụ thuộc tham số

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

- 1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số
- 2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
- 3 Tích phân Euler
 - Hàm Gamma
 - Hàm Beta

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

- 1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số
- 2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
- 3 Tích phân Euler
 - Hàm Gamma
 - Hàm Beta

Giới thiệu

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$. Khi đó,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

là một hàm số xác định trên $[c, d]$, và được gọi là một TP PTTS.

Mục đích: Khảo sát tính **liên tục, khả vi, khả tích** của $I(y)$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tích liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

Ví dụ

Tính $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos xy dx$.

Tính liên tục

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e., $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0, 1]$.

Tính liên tục

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e.,
$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0, 1]$.

- Xét tính liên tục của $I(y)$ trên mỗi hình chữ nhật $[0, 1] \times [c, d]$ và $[0, 1] \times [-d, -c]$ với $0 < c < d$ bất kì.
- Xét tính liên tục của $I(y)$ tại 0.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

- i) $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - ii) $f'_y(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$
- thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c, d) và

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)'_y =$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

- i) $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - ii) $f'_y(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$
- thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c, d) và

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

- i) $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - ii) $f'_y(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$
- thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c, d) và

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Ví dụ

Tính tích phân $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz'

B2. Nhận xét rằng $I'_{n-1} = I_n$ nên $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz'

B2. Nhận xét rằng $I'_{n-1} = I_n$ nên $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$.

Ví dụ

Tính $I(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz.

B2. Tính $I'(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

B3. $I(y) = \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c, d]$, và:

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy =$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c, d]$, và:

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c, d]$, và:

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Ví dụ

Tính

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad (0 < a < b).$$

Tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx, \text{ với } y \in [c, d].$$

Định lý (Tích liên tục)

Nếu

- i) $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - ii) $a(y), b(y)$ liên tục trên $[c, d]$ và $a \leq a(y), b(y) \leq b \forall y \in [c, d]$
- thì $J(y)$ là một hàm số liên tục đối với y trên $[c, d]$.

Ví dụ

Tìm $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$

Tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx, \text{ với } y \in [c, d]$$

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

- i) $f(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - ii) $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$,
 - iii) $a(y), b(y)$ khả vi trên $[c, d]$ và $a \leq a(y), b(y) \leq b \forall y \in [c, d]$
- thì $J(y)$ là một hàm số khả vi đối với y trên $[c, d]$, và

$$J'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx + f(b(y), y) b'_y(y) - f(a(y), y) a'_y(y)$$

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

- 1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số
- 2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
- 3 Tích phân Euler
 - Hàm Gamma
 - Hàm Beta

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$, $y \in [c, d]$.

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) **hội tụ** tại $y_0 \in [c, d]$ nếu $\int_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ hội tụ, i.e.,

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$, $y \in [c, d]$.

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) **hội tụ** tại $y_0 \in [c, d]$ nếu $\int_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ hội tụ, i.e., $\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon, y_0)$

$$\left| I(y_0) - \int_a^A f(x, y_0)dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y_0)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b.$$

ii) **hội tụ trên** $[c, d]$ nếu $I(y)$ hội tụ tại mọi $y \in [c, d]$,

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$, $y \in [c, d]$.

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) **hội tụ** tại $y_0 \in [c, d]$ nếu $\int_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ hội tụ, i.e., $\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon, y_0)$

$$\left| I(y_0) - \int_a^A f(x, y_0)dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y_0)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b.$$

ii) **hội tụ** trên $[c, d]$ nếu $I(y)$ hội tụ tại mọi $y \in [c, d]$,

iii) **hội tụ đều** trên $[c, d]$ nếu $\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon) > a$ sao cho

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b, \forall y \in [c, d].$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $I(y) = \int_1^{\infty} \sin(yx) dx$ hội tụ khi $y = 0$ và phân kỳ khi $y \neq 0$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $I(y) = \int_1^{\infty} \sin(yx) dx$ hội tụ khi $y = 0$ và phân kỳ khi $y \neq 0$.

Ví dụ

a) Tính $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$ ($y > 0$).

b) Chứng minh rằng $I(y)$ hội tụ đến 1 đều trên $[y_0, +\infty)$ với mọi $y_0 > 0$.

c) Giải thích tại sao $I(y)$ không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx \right) \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} ye^{-yx} \right) dx$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx \right) \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} ye^{-yx} \right) dx$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu

i) $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) TPSR $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$

thì $I(y)$ liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx \right) \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} ye^{-yx} \right) dx$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu

i) $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) TPSR $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$

thì $I(y)$ liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx.$$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Định lý (Dấu hiệu hội tụ Weierstrass)

Nếu

$$i) |f(x, y)| \leq g(x) \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d],$$

$$ii) \text{TPSR } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ hội tụ}$$

$$\text{thì TPSR } I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ hội tụ đều trên } [c, d].$$

Ví dụ

Chứng minh rằng

$$a) I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2+1} dx \text{ là hội tụ đều trên } \mathbb{R}.$$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ trên $[c, d]$,

iii) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$

thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên $[c, d]$ và $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$.

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Định lý (Tính khả tích)

Nếu

i) $f(x, y)$ liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$

thì $I(y)$ là khả tích trên $[c, d]$ và

$$\int_c^d I(y) dy := \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Các phương pháp tính TPSR phụ thuộc tham số

Đạo hàm qua dấu tích phân

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$.

B2. $I(y) = \int I'(y) dy + C$.

B3. Tính $I(y_0)$ với một giá trị đặc biệt nào đó của y_0 để suy ra C .

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện chuyển dấu đạo hàm qua tích phân.

Ví dụ

Tính các tích phân sau ($a, b, \alpha, \beta > 0$):

a) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx.$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx.$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}.$

Các phương pháp tính TPSR phụ thuộc tham số

Đổi thứ tự lấy tích phân

B1. Biểu diễn $f(x, y) = \int_c^d F(x, y) dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d F(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} F(x, y) dx \right) dy.$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân.

Ví dụ

a) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx.$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx.$

d) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx.$

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

- 1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số
- 2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
- 3 Tích phân Euler
 - Hàm Gamma
 - Hàm Beta

Hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ xác định trên } (0, +\infty).$$

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ xác định trên } (0, +\infty).$$

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Các tính chất

1) Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$ mà thôi.

Nếu $\alpha \in (n, n+1]$ thì $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)$.

Đặc biệt, $\begin{cases} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{cases}$ nên $\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{cases}$

Hàm Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ xác định trên } (0, +\infty).$$

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Các tính chất

1) Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$ mà thôi.

Nếu $\alpha \in (n, n+1]$ thì $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)$.

Đặc biệt, $\begin{cases} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{cases}$ nên $\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{cases}$

2) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \forall 0 < p < 1.$

Hàm Beta

Dạng 1: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$

Hàm Beta

Dạng 1: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$

Dạng 2: $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và Beta

i) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

ii) $B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$

Hàm Beta

Dạng 1: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$

Dạng 2: $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và Beta

i) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

ii) $B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$

Các tính chất

1) Tính đối xứng: $B(p, q) = B(q, p).$

2) Hạ bậc:
$$\begin{cases} B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), & \text{nếu } p > 1 \\ B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), & \text{nếu } q > 1. \end{cases}$$

Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu hàm Beta trong khoảng $(0, 1] \times (0, 1]$.

Đặc biệt, $B(1, 1) = 1$ nên $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Tích phân Euler

Ví dụ

Biểu thị $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$ qua hàm Beta.

Gợi ý: Đặt $\sin x = \sqrt{t}$ để suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$.

Tích phân Euler

Ví dụ

Biểu thị $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$ qua hàm Beta.

Gợi ý: Đặt $\sin x = \sqrt{t}$ để suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$.

Dạng lượng giác của hàm Gamma

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt.$$

Ví dụ

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

b) $\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

c) $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx.$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx.$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$

f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$