Giải tích II

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

1. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng
   - Hàm vectơ
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong
   - Độ cong của đường cong
   - Hình bao của họ đường cong phụ thuôc một tham số
2. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong
   - Phương trình tiếp diện của mặt cong.

Chương 1: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

1. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng
   - Hàm vectơ
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong
   - Độ cong của đường cong
   - Hình bao của họ đường cong phụ thuôc một tham số
2. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong
   - Phương trình tiếp diện của mặt cong.

Hàm vectơ

Hàm số "thông thường" $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ánh xạ $(a, b) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ *được gọi là một hàm vectơ.*

- *Nếu* $n = 2$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
- *Nếu* $n = 3$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Hàm vectơ

Hàm số "thông thường" $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ánh xạ $(a, b) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ *được gọi là một hàm vectơ.*

- *Nếu* $n = 2$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
- *Nếu* $n = 3$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Giới hạn - Liên tục

- **Giới hạn:** Ta nói hàm vectơ có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \to t_0$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Hàm vectơ

Hàm số "thông thường" $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ánh xạ $(a, b) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ *được gọi là một hàm vectơ.*

- *Nếu* $n = 2$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
- *Nếu* $n = 3$, *ta viết* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Giới hạn - Liên tục

- **Giới hạn:** Ta nói hàm vectơ có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \to t_0$ nếu $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.
- 2 chiều: $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} x(t)\vec{i} + \lim\limits_{t\to t_0} y(t)\vec{j}$.
- 3 chiều: $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} x(t)\vec{i} + \lim\limits_{t\to t_0} y(t)\vec{j} + \lim\limits_{t\to t_0} z(t)\vec{k}$.

Hàm vectơ

Hàm số "thông thường" $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ánh xạ $(a, b) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một hàm vectơ.

- *Nếu $n = 2$, ta viết $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.*
- *Nếu $n = 3$, ta viết $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.*

Giới hạn - Liên tục

- **Giới hạn:** Ta nói hàm vectơ có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \to t_0$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.
- 2 chiều: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim\limits_{t \to t_0} y(t)\vec{j}$.
- 3 chiều: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim\limits_{t \to t_0} y(t)\vec{j} + \lim\limits_{t \to t_0} z(t)\vec{k}$.
- **Liên tục:** $\vec{r}(t)$ liên tục tại t_0 nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Đạo hàm của hàm vectơ

Định nghĩa

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}.$$

Khi đó ta nói hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi tại t_0.

Đạo hàm của hàm vectơ

1. 2 chiều:
$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}.$$
2. 3 chiều:
$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Đường cong trong mặt phẳng

Mỗi hàm vectơ $\vec{r}(t)$ ứng với phương trình tham số của một đường cong.

1. 2 chiều: Đường cong tương ứng $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$
2. 3 chiều: Đường cong tương ứng $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

Đường cong trong mặt phẳng

Mỗi hàm vectơ $\vec{r}(t)$ ứng với phương trình tham số của một đường cong.

1. 2 chiều: Đường cong tương ứng $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$
2. 3 chiều: Đường cong tương ứng $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

Trường hợp 2 chiều

- Điểm $M\left(x\left(t_0\right), y\left(t_0\right)\right)$ được gọi là điểm chính quy nếu $\exists x'\left(t_0\right), \exists y'\left(t_0\right)$ không đồng thời bằng 0.
- Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là điểm kì dị.

Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi và điểm M chính quy.

Định nghĩa

1. *Vectơ* $\vec{r'}(t)$ *được gọi là vectơ tiếp tuyến của đường cong* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *tại điểm* M.
2. *Vectơ tiếp tuyến đơn vị* $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r}(t)|}$.

Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi và điểm M chính quy.

Định nghĩa

1. *Vectơ* $\vec{r}'(t)$ *được gọi là vectơ tiếp tuyến của đường cong* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *tại điểm* M.
2. *Vectơ tiếp tuyến đơn vị* $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}(t)|}$.

Phương trình tiếp tuyến của đường cong

1. Tiếp tuyến (d) : $\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$.
2. Pháp tuyến (d') : $x'(t_0).[x - x(t_0)] + y'(t_0).[y - y(t_0)] = 0$.

Đường cong cho dưới dạng hàm ẩn $f(x, y) = 0$

Đường cong cho dưới dạng hàm ẩn $f(x, y) = 0$

Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $f(x, y) = 0$

Cho M là một điểm chính quy.

1. Tiếp tuyến (d) : $f'_x(M).(x - x_0) + f'_y(M).(y - y_0) = 0$.
2. Pháp tuyến (P) : $\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)}$.

Đường cong cho dưới dạng hàm ẩn $f(x, y) = 0$

Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $f(x, y) = 0$

Cho M là một điểm chính quy.

1. Tiếp tuyến (d) : $f'_x(M).(x - x_0) + f'_y(M).(y - y_0) = 0$.
2. Pháp tuyến (P) : $\frac{x-x_0}{f'_x(M)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M)}$.

Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

1. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại $(-2, 5)$.
2. $y = e^{1-x^2}$tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.
3. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ tại $A(2, 2)$.
4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại $M(8, 1)$.

Tích phân của hàm vectơ

Tích phân của hàm vectơ

1. 2 chiều $\int\limits_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int\limits_a^b x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int\limits_a^b y(t)dt\right)\vec{j}.$
2. 3 chiều $\int\limits_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int\limits_a^b x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int\limits_a^b y(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int\limits_a^b z(t)dt\right)\vec{k}.$

Tích phân của hàm vectơ

Tích phân của hàm vectơ

1. 2 chiều $\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b y(t)dt\right)\vec{j}.$
2. 3 chiều $\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b y(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b z(t)dt\right)\vec{k}.$

Độ dài đường cong

1. 2 chiều: $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_a^b |\vec{r'}(t)|dt.$
2. 3 chiều: $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \int_a^b |\vec{r'}(t)|dt.$

Độ cong của đường cong

Hàm độ dài

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau \quad (\textbf{Chú ý: } s'(t) = |\vec{r}'(t)|).$$

Độ cong của đường cong

Hàm độ dài

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r'}(\tau)| d\tau \quad (\textbf{Chú ý: } s'(t) = |\vec{r'}(t)|).$$

Cho $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị. Độ cong của đường cong C tại một điểm là một đại lượng đo tốc độ biến thiên của vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm đó theo độ dài cung.

Độ cong của đường cong

Hàm độ dài

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r'}(\tau)| d\tau \quad (\textbf{Chú ý: } s'(t) = |\vec{r'}(t)|).$$

Cho $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị. Độ cong của đường cong C tại một điểm là một đại lượng đo tốc độ biến thiên của vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm đó theo độ dài cung.

Định nghĩa

Độ cong của đường cong là

$$K = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|,$$

ở đó $\vec{T}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị và s là hàm độ dài.

Độ cong của đường cong

Định lý

$$K = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$$

Độ cong của đường cong

Định lý

$$K = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r'}(t)|} = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$

Độ cong của đường cong

Định lý

$$K = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r'}(t)|} = \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}.$$

Độ cong của đường cong phẳng

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow K = \left| \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \right|$
- $y = f(x) \Rightarrow K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

Độ cong của đường cong

Độ cong của đường cong phẳng

- $y = f(x) \Rightarrow K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$
- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow K = \left| \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \right|$

Ví dụ

Tính độ cong của:

1. $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$.
2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ tại điểm bất kì.
3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại điểm bất kì $(a > 0)$.

Độ cong của đường cong trong không gian

Cho đường cong $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ và $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy.

$$K = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ví dụ (Cuối kì K62)

Tính độ cong của đường xoắc ốc cho bởi phương trình
$x = \cos t, y = \sin t, z = t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{2}$.

Hình bao của họ đường cong phụ thuôc tham số

Định nghĩa

Cho họ đường cong $(L) : F(x, y, c) = 0$ *phụ thuộc vào một tham số. Nếu*

- *mỗi đường cong trong họ* (L) *đều tiếp xúc với đường cong* (E) *tại một điểm nào đó trên* E *và,*
- *tại mỗi điểm thuộc* (E) *đều tồn tại một đường cong của họ* (L) *tiếp xúc với* (E)

thì (E) *được gọi là hình bao của họ đường cong* (L).

Hình bao của họ đường cong phụ thuôc tham số

Định nghĩa

Cho họ đường cong $(L) : F(x, y, c) = 0$ *phụ thuộc vào một tham số. Nếu*

- *mỗi đường cong trong họ* (L) *đều tiếp xúc với đường cong* (E) *tại một điểm nào đó trên* E *và,*
- *tại mỗi điểm thuộc* (E) *đều tồn tại một đường cong của họ* (L) *tiếp xúc với* (E)

thì (E) *được gọi là hình bao của họ đường cong* (L)*.*

Định lý (Quy tắc tìm hình bao)

Nếu họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ *không có điểm kì dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử* c *từ hệ phương trình*

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Hình bao của họ đường cong phụ thuôc tham số

Chú ý

Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình (1) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Ví dụ

Tìm hình bao của họ đường cong sau:

a. $y = \frac{x}{c} + c^2$

b. $cx^2 + c^2 y = 1$

c. $y = c^2 (x - c)^2$

Chương 1: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

1. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng
   - Hàm vectơ
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong
   - Độ cong của đường cong
   - Hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số

2. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian
   - Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong
   - Phương trình tiếp diện của mặt cong.

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi và điểm M chính quy.

Định nghĩa

1. *Vectơ* $\vec{r'}(t)$ *được gọi là vectơ tiếp tuyến của đường cong* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *tại điểm* M.
2. *Vectơ tiếp tuyến đơn vị* $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r}(t)|}$.

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi và điểm M chính quy.

Định nghĩa

1. *Vectơ $\vec{r}'(t)$ được gọi là vectơ tiếp tuyến của đường cong $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tại điểm M.*
2. *Vectơ tiếp tuyến đơn vị $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}(t)|}$.*

Phương trình tiếp tuyến tại M

$$(d): \quad \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Phương trình pháp diện tại M

$$(P): \quad x'(t_0).[x - x(t_0)] + y'(t_0).[y - y(t_0)] + z'(t_0).[z - z(t_0)] = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}, (a, b, c > 0)$.

b. $\begin{cases} x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

Phương trình tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong S xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ và $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy của S.

Mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$

Phương trình tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong S xác định bởi phương trình $f(x,y,z)=0$ và $M(x_0,y_0,z_0)$ là một điểm chính quy của S.

Mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x,y)$

$$(P): z - z_0 = z'_x(M).(x-x_0) + z'_y(M).(y-y_0).$$

Mặt cong cho bởi phương trình $f(x,y,z)=0$

Phương trình tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong S xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ và $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy của S.

Mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$

$$(P) : z - z_0 = z'_x(M).(x - x_0) + z'_y(M).(y - y_0).$$

Mặt cong cho bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$

$$(P) : \quad f'_x(M).(x - x_0) + f'_y(M).(y - y_0) + f'_z(M).(z - z_0) = 0.$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong $f(x, y, z) = 0$

$$(d) : \quad \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}.$$

Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Ví dụ

Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $(2, 2, 3)$.

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm $(2, 1, 12)$.

c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm $(-1, 3, 0)$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$

Đặt

- $\vec{n}_f = \left(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\right)$
- $\vec{n}_g = \left(g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M)\right).$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$

Đặt

- $\vec{n}_f = \left(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\right)$
- $\vec{n}_g = \left(g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M)\right).$

vectơ chỉ phương của tiếp tuyến

Khi đó $\vec{n}_f \times \vec{n}_g = (A, B, C)$ là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại M.

Phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

Phương trình pháp diện

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1, 3, 4)$

b. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2, 6, 1)$