



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
CURSO DE GRADUAÇÃO
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

EMANUEL CATÃO MONTENEGRO

MODELAGEM COM GLPK

Palmas, TO

2023

1 O PROBLEMA

Para o problema a ser trabalhado, tomamos o Problema das Camisetas, disponível na página 83 do Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos - Marco Cesar Goldbarg, Henrique Pacca.

Abaixo, as Figura 1 e Figura 2 têm o enunciado das questões.

10 – O Problema das Camisetas



Uma certa fábrica de camisetas deseja aproveitar as finais de um campeonato de futebol para vender camisetas dos times envolvidos. Os jogos vão durar quatro semanas. O custo de produção de cada camiseta é R\$2,00 nas duas primeiras semanas e subirá para R\$2,50 nas duas últimas, quando a concorrência demandar por material no mercado. A demanda semanal de camisetas será de 5.000, 10.000, 30.000 e 60.000. A capacidade máxima de produção da empresa é de 25.000 camisetas. Na primeira e na segunda semana a empresa poderá, em um esforço excepcional, carrear mão de obra em horas extras e fabricar mais 10.000 camisetas em cada semana. Nesse caso, o custo dessas camisetas será de R\$2,80. O excesso de produção pode ser estocado a um custo de R\$0,20 por unidade por semana.

Pedido 1: Formular o modelo de PL que minimize os custos.

Pedido 2: Após o planejamento anterior, a direção da empresa verificou que a demanda iria variar substancialmente dentro dos quatro modelos de camiseta que representavam os quatro times disputando as finais. Apesar de a demanda total ser exatamente aquela anteriormente levantada, o valor das camisetas iria variar em conformidade com o time e sua posição no campeonato. Nas duas primeiras semanas todos os times estariam em pé de igualdade até que fosse decidido os dois finalistas. A partir daí, as camisetas dos times eliminados cairiam em valor e em demanda no mercado, e as dos times finalistas subiriam conforme a Tabela 2.29:

Figura 1: Enunciado.

TABELA 2.29 DEMANDA DE CAMISETAS

	Semana							
	1		2		3		4	
	Demanda	Valor	Demanda	Valor	Demanda	Valor	Demanda	Valor
Time A	1.250	5	2.500	6	500	3	–	–
Time B	1.250	5	2.500	6	500	3	–	–
Time Finalista C	1.250	5	2.500	6	14.500	8	30.000	9
Time Finalista D	1.250	5	2.500	6	14.500	8	30.000	9

Sabendo-se que existe um completo equilíbrio entre os quatro finalistas, formular o modelo que maximize os lucros da empresa produtora de camisetas.

Figura 2: Tabela.

Daí, primeiro é necessário delimitar o problema e definir o problema de programação linear correspondente. Tratando o pedido 1, como parte 1 e o pedido 2, como parte 2, temos:

- **Parte 1:**

- **Variáveis de Decisão:**

x_t : Número de camisetas produzidas na semana t ($t = 1, 2, 3, 4$).

y_t : Número de camisetas extras na semana t ($t = 1, 2$).

- **Função Objetivo**

Minimizar o custo total de produção e estocagem:

$$\text{Min}_z = 2.00(x_1 + x_2) + 2.50(x_3 + x_4) + 2.80(y_1 + y_2) + 0.20s_1 + 0.20s_2 + 0.20s_3 + 0.20s_4$$

Em que:

s_i : estoque na semana i ($i = 1, 2, 3, 4$).

- **Restrições:**

1. De capacidade produtiva:

$$x_1 + y_1 \leq 25,000 + 10,000 \quad (\text{semana 1})$$

$$x_2 + y_2 \leq 25,000 + 10,000 \quad (\text{semana 2})$$

$$x_3 \leq 25,000 \quad (\text{semana 3})$$

$$x_4 \leq 25,000 \quad (\text{semana 4})$$

2. De demanda:

$$x_1 = 5,000$$

$$x_2 = 10,000$$

$$x_3 = 30,000$$

$$x_4 = 60,000$$

3. De estoque:

$$s_t = (x_t + y_t) - \text{demanda}_t, \text{ para } t = 1, 2, 3, 4$$

Tendo definido a forma do problema no pedido 1, partimos para a definição do problema no pedido 2.

- **Parte 2:**

- **Variáveis de Decisão:**

- $x_{t,i}$: Camisetas do time i produzidas na semana t .
- $y_{t,i}$: Camisetas do time i produzidas em horas extras na semana t , para $t = 1, 2$.
- $s_{t,i}$: Camisetas do time i estocadas na semana t .

- **Função Objetivo**

Maximizar os lucros totais da produção e venda de camisetas:

$$\max Z = \sum_{t=1}^4 \sum_{i=A}^D (v_{t,i} \cdot (x_{t,i} + y_{t,i}) - c_t \cdot x_{t,i} - c_t^e \cdot y_{t,i} - c_s \cdot s_{t,i})$$

Ou seja, para cada time em uma dada semana, o lucro é dado pelo numero de peças de camisetas vendidas, subtraído do custo de fabricação normal para a semana, subtraído do custo de fabricação extra para a semana, subtraído do custo do estoque.

Onde:

- $c_t = \begin{cases} 2,00, & \text{se } t \leq 2 \\ 2,50, & \text{se } t > 2 \end{cases}$
- $c_t^e = 2,80$ para $t = 1, 2$
- $c_s = 0,20$

Restrições:

1. $\sum_{i=A}^D x_{t,i} \leq 25,000 \quad \forall t$
2. $\sum_{i=A}^D y_{t,i} \leq 10,000 \quad t = 1, 2$
3. $x_{t,i} + y_{t,i} + s_{t-1,i} - s_{t,i} = \text{Demanda do time } i \text{ na semana } t \quad \forall t, i$
4. $s_{0,i} = 0, \quad s_{4,i} = 0 \quad \forall i$
5. $x_{t,i}, y_{t,i}, s_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, i$

Observações:

- O lucro é calculado a partir da receita de vendas menos os custos.
- O modelo leva em consideração as variações específicas de cada time.

Tendo definido a forma matemática do problema podemos, montar o mathprog correspondente, temos:

Pedido 1:

```

camisetas.mod:

param custoNorm;
param custoExtra;
param custoDuasUltimas; # custo de produção das duas últimas semanas
param custoArm; # custo de armazenamento por semana
param capacidadeNormal;
param capacidadeExtra;

set S; # semanas
set SExtra; # semanas com produção extra

param demanda{S};

var x{S} >= 0; # produzidas normais
var y{SExtra} >= 0; # produzidas extra - primeiras semanas
var s{S} >= 0; # estoque

minimize Ct: # custo total
    sum{i in SExtra} (custoNorm * x[i] + custoExtra * y[i]) # custo de
produção
    + sum{i in 3..4} (custoDuasUltimas * x[i]) # custo de produção das
duas semanas finais
    + sum{i in S} (custoArm * s[i]); # custo estoque

subj to demandaSemana1{t in S: t = 1}:
    x[t] + y[t] - s[t] = demanda[t]; # demanda da semana 1
subj to demandaSemana2{t in S: t > 1 and t <= 2}:
    x[t] + y[t] + s[t-1] - s[t] = demanda[t]; # demanda da semana 2
subj to demandaSemana34{t in S: t > 2}:
    x[t] + s[t-1] - s[t] = demanda[t]; # demanda semana 3 e 4
subj to capProdN{t in S}: x[t] <= capacidadeNormal;
subj to capProde{t in SExtra}: y[t] <= capacidadeExtra;

end;
```

camisetas.dat:

data;

param custoNorm := 2.00;

param custoExtra := 2.80;

param custoDuasUltimas := 2.50;

param custoArm := 0.20;

set S := 1 2 3 4;

set SExtra := 1 2;

param demanda :=

1 5000

2 10000

3 30000

4 60000;

param capacidadeNormal := 25000;

param capacidadeExtra := 10000;

end;

Pedido 1:

camisetas.mod:

param custoNorm;

param custoExtra;

param custoDuasUltimas;

param custoArm;

param capacidadeNormal;

param capacidadeExtra;

set S;

set TIMES;

```

set SExtra;

param preco{T in TIMES, i in S};
param demanda{T in TIMES, i in S};

var x{T in TIMES, i in S} >= 0; # quantidade de camisetas produzidas do
time T na semana i
var y{T in TIMES, i in SExtra} >= 0; # quantidade de camisetas produzidas
extra do time T na semana i
var v{T in TIMES, i in S} >= 0; # quantidade de camisetas vendidas do time
T na semana i
var estoque{T in TIMES, i in S} >= 0; # quantidade de camisetas em estoque
do time T na semana i
var excedente{T in TIMES, i in S} >= 0;

# maximizar lucro
maximize Lucro:
    sum{T in TIMES, i in S} (preco[T,i] * v[T,i] - custoNorm * x[T,i]) #
preço líquido das camisetas sem1 e sem2
    + sum{T in TIMES, i in SExtra} (preco[T,i] * v[T,i] - custoExtra *
y[T,i]) # preço líquido das camisetas prodE
    - sum{T in TIMES, i in 3..4} (custoDuasUltimas * x[T,i]) # custo
fabricação semanas 3 e 4
    - sum{T in TIMES, i in S} (custoArm * estoque[T,i]); # custo total de
armazenamento

# Atualização do estoque
subj to atualiza_estoque{T in TIMES, i in S}:
    estoque[T,i] = (if i == 1 then 0 else estoque[T,i-1]) + x[T,i] + (if i <=
2 then y[T,i] else 0) - v[T,i];
# o estoque é atualizado semana a semana, cada time tem um estoque de
camisetas, ele é resultado
# da soma do estoque do mês anterior com o excedente do mês atual (note que
se o excedente é negativo
#temos que o estoque será reduzido.

# de demanda (não dá para vender mais do que a demanda)
subj to r_demanda{T in TIMES, i in S}:
    v[T,i] <= demanda[T,i];

# de produção (não dá para produzir mais do que a capacidade normal)
subj to prodN{i in S}:
    sum{T in TIMES} x[T,i] <= capacidadeNormal;

```

```

# de produção extra (não dá para produzir mais extras do que a capacidade
extra)
subj to prodE{i in SExtra}:
    sum{T in TIMES} y[T,i] <= capacidadeExtra;

# de estoque e producao (nao da para vender mais do que o estoque +
producao)
subj to venda_estoque_prod{T in TIMES, i in S}:
    v[T,i] <= x[T,i] + (if i <= 2 then y[T,i] else 0) + (if i > 1 then
estoque[T,i-1] else 0);

end;

```

camisetas.dat:

```

data;
param custoNorm := 2.00;
param custoExtra := 2.80;
param custoDuasUltimas := 2.50;
param custoArm := 0.20;

param capacidadeNormal := 25000;
param capacidadeExtra := 10000;

set S := 1 2 3 4;
set TIMES := TimeA TimeB TimeC TimeD;
set SExtra := 1 2;

param demanda :
    1    2    3    4 :=
TimeA 1250 2500 500  0
TimeB 1250 2500 500  0
TimeC 1250 2500 14500 30000
TimeD 1250 2500 14500 30000;

param preco :
    1    2    3    4 :=
TimeA 5    6    3    0
TimeB 5    6    3    0
TimeC 5    6    8    9

```


TimeD 5 6 8 9;

end;

Abaixo, as figuras 3 e 4 contém parte da solução gerada pela execução do gkpl:

Problem: camisetas						
Rows: 11						
Columns: 10						
Non-zeros: 29						
Status: OPTIMAL						
Objective: Ct = 258000 (MINimum)						
No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	Ct	B	258000			
2	demandaSemana1[1]	NS	5000	5000	=	2.6
3	demandaSemana2[2]	NS	10000	10000	=	2.8
4	demandaSemana34[3]	NS	30000	30000	=	3
5	demandaSemana34[4]	NS	60000	60000	=	3.2
6	canProdMF11	MI	25000		25000	-0.6

Figura 3: Resultados para o pedido 1

Problem: camisetasParte2						
Rows: 55						
Columns: 56						
Non-zeros: 214						
Status: OPTIMAL						
Objective: Lucro = 609000 (MAXimum)						
No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	Lucro	B	609000			
2	atualiza_estoque[TimeA,1]	NS	0	-0	=	4.1
3	atualiza_estoque[TimeA,2]	NS	0	-0	=	2.8
4	atualiza_estoque[TimeA,3]	NS	0	-0	=	-0.4
5	atualiza_estoque[TimeA,4]	NS	0	-0	=	-0.2

Figura 4: Resultados para o pedido 2

REFERÊNCIAS:

Ritt, Marcus. **GLPK: Referência rápida**, 2016. Disponível em:
<<https://www.inf.ufrgs.br/~mrpritt/lib/exe/fetch.php?media=inf05010:glpk-quickref.pdf>>.
Acesso em: 30 out. 2023.