Обзор возможностей матричного подхода к некоторым задачам о перестановках

https://github.com/enlacroix

9 февраля 2024 г.

Аннотация

Часть 1. Разбор достаточно громоздкого авторского метода, который позволяет 'извлечь квадратный корень' из перестановки и найти коммутирующие с ней. Часть 2. Обзор некоторых продвинутых понятий, связанных с перестановками - сопряжённость и различные формулы подсчёта.

1. Задача о нахождении квадратного корня из перестановки

Уточним, что же имеется в виду под извлечением квадратного корня. Речь идет о нахождении **всех** таких перестановок x для заданного s, что $x \circ x = x^2 = s$. Сопоставим перестановке $p \in S_n$ матрицу размера $n \times n$ A_p по следующему правилу: в i-строке матрицы все элементы нули, кроме единицы на месте a_i, где a_i - элемент перестановки.

$$p = 3, 1, 4, 2 \Rightarrow A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства:

- Сохранение умножения: Если $p = qr$, то $A_p = A_q \cdot A_r$.
- Перестановка обратная к p имеет матрицу обратную к A_p.

Примечание. Перестановочная матрица ортогональна, следовательно обратная к ней $A^{-1} = A^T$. Перестановка, обратная к данной, может быть получена транспонированием матрицы заданной.
Переведем нашу задачу на матричный язык. Пусть перестановке x соответствует матрица A, а s – B. Тогда имеем

$$A^2 = B \Rightarrow A = B \cdot A^T$$

Итак, получили матричное уравнение. Суть его в том, что элементы, стоящие на одинаковых позициях, будут одинаковыми в левой и правой матрице. Поэтому попробуем понять, что происходит с элементом a_{ij} матрицы A. Шаг первый – транспонирование. Тогда $(i, j) \longrightarrow (j, i)$. Шаг второй - умножение слева на матрицу перестановки. k-ая строка, у которой на n-м месте стоит единица, задает перестановку $k \Rightarrow n$. Строка умножается последовательно на каждый столбец A^T, поэтому k-ая строка новой матрицы будет формироваться из элементов, которые имели n-ый номер в столбце матрицы A^T. Иными словами, осуществляется перестановка строк в A^T. Таким образом, первый индекс остается неизменным, а второй переходит в другое число, согласно перестановке, задаваемой B: $(j, i) \longrightarrow (j, \varphi(i))$. Рассмотрим на конкретном простом примере. Пусть B задает перестановку $\varphi : \{231\}$

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Мы пришли к выводу о том, что элемент, стоящий на (i, j) позиции переместится на $(j, \varphi(i))$-юю. Аналогичные рассуждения можно провести и для новых координат. Можно заметить, что элементы, чьи координаты будут принадлежать такому циклу, будут равными. Снова обратимся к нашему примеру:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = B \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что, например, раскручивая цепочку равенств $a_{13} = a_{32} = a_{21}$, мы больше ничего не сможем узнать. Мы понимаем из равенства матриц, что эти элементы равны. Нетрудно теперь проверить, что их координаты подчиняются сформулированному ранее правилу перехода:

$$(1, 3) \longrightarrow (3, \varphi(1)) \longrightarrow (2, \varphi(3)) \longrightarrow (1, \varphi(2)) = (1, 3)$$

Можно написать код, который автоматизирует эту простую процедуру. Что программа выведет для $\{231\}$:

```
[[(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)], [(1, 3), (3, 2), (2, 1)]]
[6, 3]
```

Мы получаем два непересекающихся между собой равенства. Для того чтобы разрешить матричное уравнение, мы должны определить какие элементы будут равняться 1. Понятно, что нам не подойдет цикл из 6 координат, поэтому единственно возможный вариант это $a_{13} = a_{32} = a_{21} = 1$. Важный момент: мы должны проверить, что все индексы попарно различны, так как в конечном итоге эти элементы должны образовать биективную матрицу перестановки. Далее будут встречаться примеры, когда цикл имеет подходящую длину, но нам не подходит.
Сортируем элементы по первому индексу: a_{13}, a_{21}, a_{32}. Тогда мы видим, что в первой строке на месте 3 стоит единица, поэтому 1 переходит в 3 и так далее. Выписываем вторую координату в получившемся порядке: $\{312\}$. Проверяем: $\{312\} \cdot \{312\} = \{231\}$.
Рассмотрим пример посложнее.
Задача 1. Найти все корни из перестановки $\{561234\} \in S_6$.
Необходимые переходы находятся достаточно быстро и вручную.

```
[[(1, 1), (1, 5), (5, 5), (5, 3), (3, 3), (3, 1)],
[(1, 2), (2, 5), (5, 6), (6, 3), (3, 4), (4, 1)],
[(1, 3), (3, 5), (5, 1)], [(1, 4), (4, 5), (5, 2), (2, 3), (3, 6), (6, 1)],
[(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)],
[(2, 2), (2, 6), (6, 6), (6, 4), (4, 4), (4, 2)], [(2, 4), (4, 6), (6, 2)]]
[6, 6, 3, 6, 6, 6, 3]
```

Обратите внимание на то, что 6-циклы в первой и предпоследней строке нам не подходят, ввиду того, что индексы элементов внутри цикла совпадают. Поэтому всего возможных комбинаций четыре: 6, 6, 6 и 3 + 3. Сортируя по первому индексу, и выписывая вторые в нужном порядке, мы сразу получаем искомые переставновки:

$$\{254163\}, \{4365213\}, \{6123453\}, \{3456123\}$$

2. Задача о нахождении коммутирующих перестановок

Для заданной перестановки s (матрица B) найти все x (A), что

$$x \circ s = s \circ x \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A = B \cdot A \cdot B^T$$

Наши рассуждения будут аналогичны – необходимо понять, какие индексы будет иметь элемент a_{ij} в правой части уравнения. Умножение на матрицу B слева осуществляет перестановку строк, а умножение на B^T справа – перестановку столбцов. Итоговое преобразование запишется, как $(i, j) \longrightarrow (\varphi(i), \varphi(j))$.
Задача 2. Найти все перестановки, коммутирующие с $s = \{24513\} = (124)(35)$

```
[[(1, 1), (2, 2), (4, 4)], [(1, 2), (2, 4), (4, 1)], [(1, 4), (2, 1), (4, 2)]
[(1, 3), (2, 5), (4, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 5)],
[(3, 1), (5, 2), (3, 4), (5, 1), (3, 2), (5, 4)],
[(3, 3), (5, 5)], [(3, 5), (5, 3)]]
[3, 3, 6, 3, 6, 2, 2]
```

Понятно, что нам подходят только сочетания вида $3 + 2$. Имеем $3 \times 2 = 6$ перестановок, коммутирующих с s. Упорядочивая по первому индексу, аккуратно выписываем вторые индексы в нужном порядке, они и нужную образуют перестановку.

$$\{12345\} = s^6, \{12543\} = s^3, \{24315\} = s^4, \{24513\} = s^1, \{41325\} = s^2, \{41523\} = s^5$$

Отметим, что все коммутирующие перестановки исчерпываются перечислением степеней. Действительно, перестановка s^k всегда будет коммутировать с s, но множество коммутирующих может состоять и из других представителей. Рассмотрим иллюстрирующий пример крайней похожей перестановки, но уже с порядком 3.

Задача 3. Найти все перестановки, коммутирующие с $s = \{24315\} = (124)(3)(5)$

```
[[(1, 1), (2, 2), (4, 4)], [(1, 2), (2, 4), (4, 1)], [(1, 3), (2, 3), (4, 3)],
[(1, 4), (2, 1), (4, 2)], [(1, 5), (2, 5), (4, 5)], [(3, 1), (3, 2), (3, 4)],
[(3, 3)], [(3, 5)], [(5, 1), (5, 2), (5, 4)], [(5, 3)], [(5, 5)] ]
{3: 7, 1: 4}
```

Перестановки формируются из комбинаций циклов (остальные не подходят): $11 \to 22 \to 33, 12 \to 24 \to 41, 14 \to 21 \to 42, 33 + 55, 53 + 35$.

$$\{12345\}, \{12543\} = (35), \{24315\} = (124), \{24513\} = (124)(35)$$

$$\{41325\} = (142), \{41523\} = (142)(35)$$

3. Упражнения

(1) Какой цикловой структурой обладает перестановка в S_7, которая имеет максимальное число корней? Сколько их?
(2) Приведите пример перестановки из S_7, которая имеет максимальное число коммутирующих (помимо, разумеется, единичной)? Доказать и найти сколько коммутирующих перестановок к ней можно подобрать.
(3) Доказать, что из перестановки, которая имеет только один цикл четной длины, невозможно извлечь квадратный корень.
(4) Найти количество перестановок из S_6, у которых множество всевозможных степеней совпадает с множеством коммутирующих. Пример такой перестановки можно найти в задаче 2. Сформулировать критерий отбора подобных перестановок. Сработает ли он для группы S_9?

Ответы.

(1) 3-цикл, 10
(2) 2-цикл, 240
(4) 384

4. Сопряжённые перестановки

Перестановки φ и σ называются *сопряженными*, если существует такое τ, что:

$$\varphi = \tau\sigma\tau^{-1}$$

Существует теорема о том, что перестановки φ и σ сопряжены в S_n тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую цикловую структуру. Покажем, как это выглядит на практике. Пусть $\sigma = (124)(56) \in S_6$.

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(4))(\tau(5)\tau(6)) = \varphi$$

(по умолчанию $\tau(3) = 3$).
Задача 4. Найти количество всех возможных перестановок τ, которые удовлетворяют выражению, $\varphi = \tau\sigma\tau^{-1}$ если $\varphi = (12)(34)(576)(8)(9)$ и $\sigma = (127)(34)(5)(6)(89)$.

Существует достаточно элегантный способ, как быстро найти перестановку τ. Пусть $\varphi = (12)(34)(576)(8)(9)$, а $\sigma = (127)(34)(5)(6)(89)$. Они однозначно сопряжены, так как имеют одинаковые цикловые структуры. Формируем таблицу, в *первой строчке* которой запишем цикловую структуру именно φ! Во вторую строчку записываем циклы σ так, чтобы 2-циклы (3-циклы, 1-циклы) стояли друг под другом. Тогда получается готовая запись τ в виде подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 9 & 1 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = \{348917256\}$$

Теперь нетрудно понять, сколько вообще возможно составить τ. Пусть первая строчка определена. Выбрать место для первого 2-цикла: 2 способа, 2 способа записать его через циклический сдвиг, не нарушая логику (иными словами, $(14) = (41)$, $(127) = (712) = (271)$, это одинаковые циклы, но с точки зрения формирования τ разные). Существует 2 способа записать второй 2-цикл (для него место уже определено). Также и для 3-цикла, но существует 3 способа его записать. Два способа выбрать место для первого 1-цикла, оставшийся определен. Итого:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

Согласно теореме мы можем определить, сколько элементов будет в множестве того или иного сопряженного класса. Теорема позволяет свести эту задачу к подсчету перестановок определенной цикловой структуры в S_n. Введем искусственное понятие *паспорта перестановки.* Это структура вида $\{x_1 : k_1, x_2 : k_2, x_3 : k_3, \dots\}$, где x_i - цикл длины i, а k_i - количество циклов длины i. В разделе будет предоставлено полное объяснение данной формулы.

$$\boxed{\varepsilon(s) = n! \cdot \prod_{i=1} \frac{1}{x_i^{k_i} \cdot k_i!}}$$

5. Подсчёт коммутирующих перестановок

Теорему о сопряженных перестановках можно легко свести к частному случаю коммутирующих, когда $\varphi = \sigma$. Для $\sigma = (124)(56) \in S_6$.

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(4))(\tau(5)\tau(6)) = (124)(56)$$

Задача свелась к перебору частных случаев.

$$\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(4) = 4;\ \tau(1) = 4, \tau(2) = 1, \tau(4) = 2;$$

$$\tau(1) = 2, \tau(2) = 4, \tau(4) = 1$$

Подчеркнем, что мы выбираем один из трех образов для 1, остальные элементы должны подстроиться автоматически, чтобы циклы были равны. С вторым циклом два возможных случая:

$$\tau(5) = 5, \tau(6) = 6,\ \tau(5) = 6, \tau(6) = 5$$

Всего 6 вариантов, которые могут получиться из комбинаций циклов. Выведем *общую формулу для вычисления количества коммутирующих перестановок.* Для перестановки s вида $\{x_1\colon k_1,\ x_2\colon k_2,\ x_3\colon k_3,\ \dots\}$ из группы S_n количество коммутирующих перестановок равно:

$$\Phi(s) = k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \dots x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot x_3^{k_3} \dots (n - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - \dots)!$$

Расшифровка: x_i - цикл длины i, где $i > 1$. k_i - количество циклов длины i.
Пример. Найти $\Phi(s)$, если $s \in S_n$ и имеет структуру: a) (3)-цикл?, $n = 7$; b) (2,2,2)-цикл? $n = 7$; c) (2, 2, 3)-цикл, $n = 9$.

$$a)\ \Phi(s_a) = 1! \cdot 3 \cdot (7-3)! = 72$$

$$b)\ \Phi(s_b) = 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (7-6)! = 48$$

$$c)\ \Phi(s_c) = 2! \cdot 1! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (9 - 2 \cdot 2 - 3)! = 48.$$

Поймем, как работает формула. Вспоминаем, как в задаче 4 составлялась перестановка τ: 2-циклы под 2-циклами, 3-цикл под 3-циклами и т.д. Однако циклы можно переставлять относительно друг друга, число место для расстановки и равняется числу циклов определенной длины. По такой же логике формируется и последний множитель, но только для 1-циклов.
Второй множитель это выбор того как будет строиться наша биекция. Выше мы выделили тот факт, что в цикле длины n n способами мы выбираем куда переходит один из участников цикла – остальные уже определены.
Формула приведена в несколько избыточном виде, чтобы не забыть про 1-циклы, которые обычно опускают в записи перестановки. Аккуратная запись выглядит следующим образом:

$$s \in S_n\{x_1 : k_1, x_2 : k_2, x_3 : k_3, \dots\} \Rightarrow \boxed{\Phi(s) = \prod_{i=1} x_i^{k_i} \cdot k_i!}$$

Проверьте упражнения 2 и 4.
Осталось заметить, что $\Phi(s) \cdot \varepsilon(s) = n! = |S_n|$.

6. Подсчёт перестановок с определенной цикловой структурой

Рассмотрим на конкретной задаче - поиск числа перестановок с паспортом 1: 1, 2: 2, 3: 2. В обычной нотации (2, 2, 3, 3)-циклы в S_{11}.

Этап 1. Последовательный выбор чисел, которые войдут в первый 2-цикл, во второй 2-цикл и т.д.

$$C_{11}^2 \cdot C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3 = \frac{11!}{2!2! \cdot 3!3! \cdot 1!} = 277200$$

Отмечаем, что множители вида $n - x$ в сочетании C_n^x последовательно сокращаются. Нетрудно показать, что множитель, показывающий выбор чисел, запишется, как: (последним слагаемым вида $n - x$ и окажется число 1-циклов, что подчеркивается отдельной дробью).

$$\frac{n!}{(x_1!)^{k_1}(x_2!)^{k_2}(x_3!)^{k_3}\dots} \cdot \frac{1}{k_1!}$$

Этап 2. Закрутки циклов.

Снова для наглядности обратимся к примеру. $(123) = (312) \neq (132)$. Компоненты цикла мы уже выбрали, но нужно учесть расстановку элементов внутри него. Мы берем наименьший элемент и ставим его на первое место. Остальные $n - 1$ элементов переставляются как угодно. Эти циклы будут различны, так как их невозможно получить сдвигом. Для нашего примера:

$$(3-1)!(3-1)!(2-1)!(2-1)! = 4$$

В общем виде

$$\prod_{i=1}(x_i - 1)!^{k_i}$$

Этап 3. Убираем повторяющиеся компоненты.

Рассматриваем циклы > 1, так как только они участвуют в записи. Число всевозможных перестановок из этих циклов - 4! (4 - сумма всех k: $x > 1$). Так как у нас есть циклы одинаковой длины, то некоторая часть перестановок была учтена больше чем один раз. Уникальные композиции расчитываются по формуле перестановок с повторениями. У нас 2 2-цикла и 2 3-цикла. Тогда:

$$\frac{4!}{2!2!}$$

Отношение уникальных к общим и показывает сколько настоящих перестановок есть среди тех, которые мы уже насчитали. В общем виде запишется как:

$$\frac{1}{k_2!k_3!\dots}$$

Тогда в нашей задаче:

$$\frac{1}{2!2!} = \frac{1}{4}$$

Перемножаем все, что получили на 3 этапах, и получим : 277200.

В общем виде:

$$\varepsilon(s) = \frac{n!}{\prod_i (x_i)!^{k_i}} \cdot \prod_i \frac{1}{k_i!} \cdot \prod_{i=1}(x_i - 1)!^{k_i} = n! \cdot \prod_{i=1} \frac{1}{x_i^{k_i} \cdot k_i!}$$

7. Визуализация через графы

Сопряженная карта - вершины соединены ребром, если объекты из этих вершин сопряжены.
Коммутирующая карта - вершины соединены ребром, если объекты, принадлежащие этим вершинам(циклам), коммутируют между собой.
Корневая карта - ориентированный граф. Если из вершины A исходит направленное ребро в вершину B, то существует такой представитель вершины B, что его степень (равная *порядку корневой карты*) равен объекту вершины A. Мы рассматриваем карты второго порядка, оставаясь в рамках задачи о извлечении квадратного корня, однако ради интереса приведен пример карты третьего порядка для S_6. (фото 8).
Композиционно-стабилизирующая карта - вершины соединены ребрами, если существует такой представитель, что при умножении не меняет его цикловую структуру (стабилизирует).

(1) Сколько перестановок из группы S_8 стабилизируют (т.е. оставляют неизменной цикловую структуру) (2,2)-цикл?
(2) Как можно охарактеризизовать вершины, соединенные ребром с нейтральным элементом на корневой карте порядка n? Сколько корней четвертой степени имеет единичная перестановка в S_7?