7. Визуализация через графы

Сопряженная карта - вершины соединены ребром, если объекты из этих вершин сопряжены.
Коммутирующая карта - вершины соединены ребром, если объекты, принадлежащие этим вершинам(циклам), коммутируют между собой.
Корневая карта - ориентированный граф. Если из вершины A исходит направленное ребро в вершину B, то существует такой представитель вершины B, что его степень (равная *порядку корневой карты*) равен объекту вершины A. Мы рассматриваем карты второго порядка, оставаясь в рамках задачи о извлечении квадратного корня, однако ради интереса приведен пример карты третьего порядка для S_6. (фото 8).
Композиционно-стабилизирующая карта - вершины соединены ребрами, если существует такой представитель, что при умножении не меняет его цикловую структуру (стабилизирует).

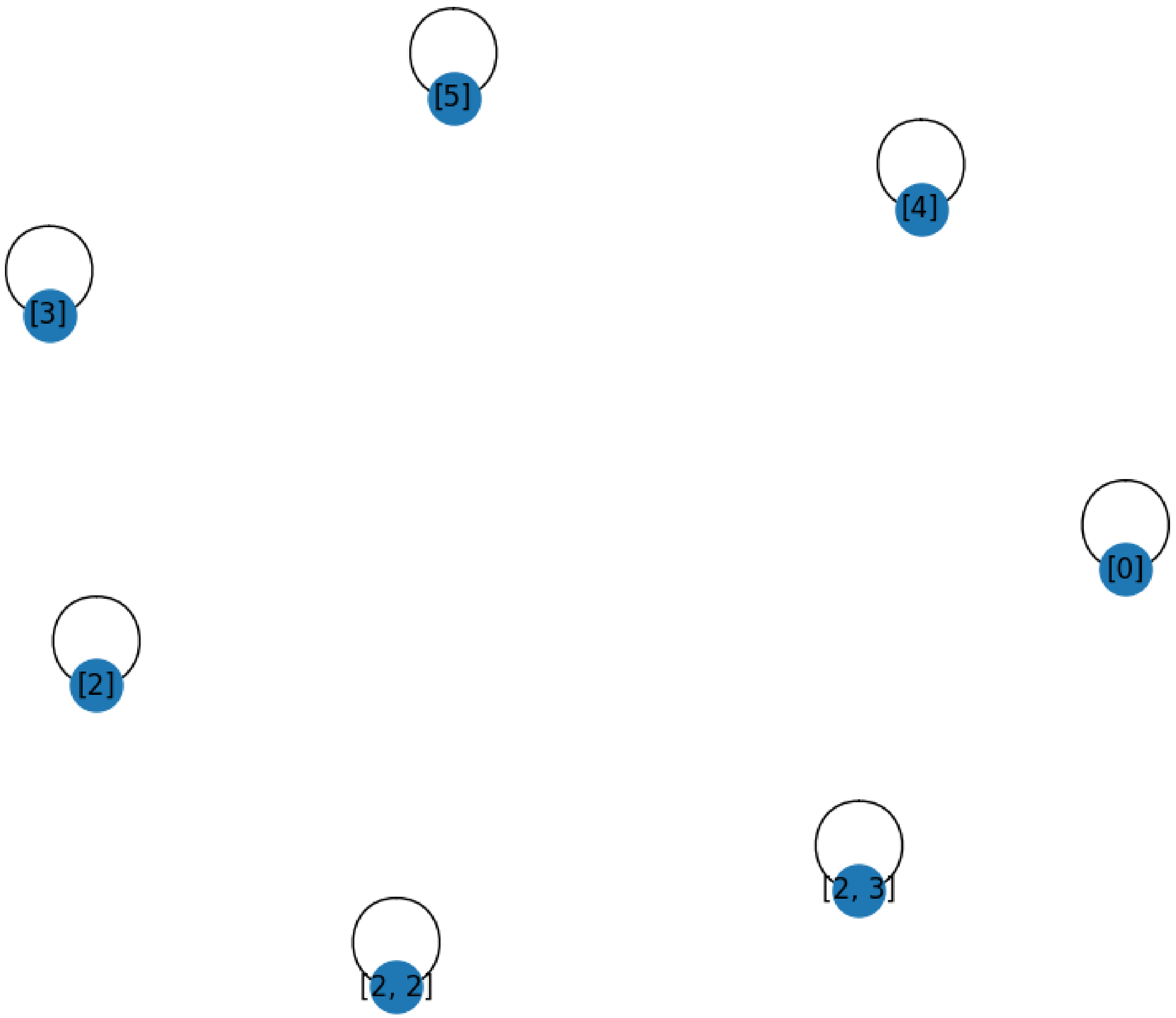
(1) Сколько перестановок из группы S_8 стабилизируют (т.е. оставляют неизменной цикловую структуру) (2,2)-цикл?
(2) Как можно охарактеризовать вершины, соединенные ребром с нейтральным элементом на корневой карте порядка n? Сколько корней четвертой степени имеет единичная перестановка в S_7?

Граф устроен следующим образом: во всех случаях его вершины - цикловые структуры, например [2, 2] обозначает (2)-цикл. Правила, по которому вершины соединяются рёбрами, в каждом случае разные и приведены на первом слайде.

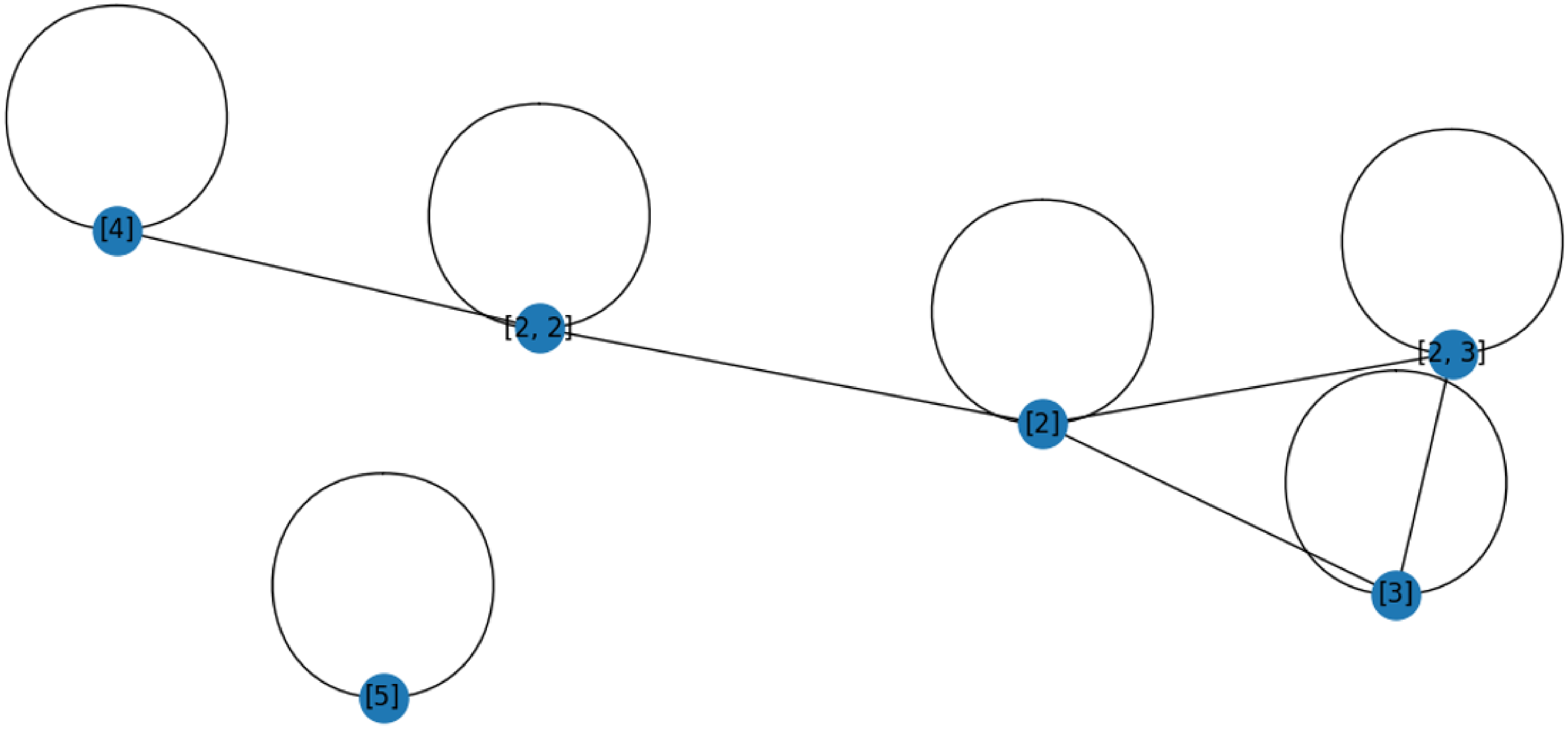
Все скриншоты были получены программным методом посредством библиотеки NetworkX.

Сопряженная карта. Приятное подтверждение справедливости теоремы из второй части - перестановки сопряжены, если их цикловые структуры совпадают. Именно поэтому каждая вершина (цикл) замкнуты на себе.

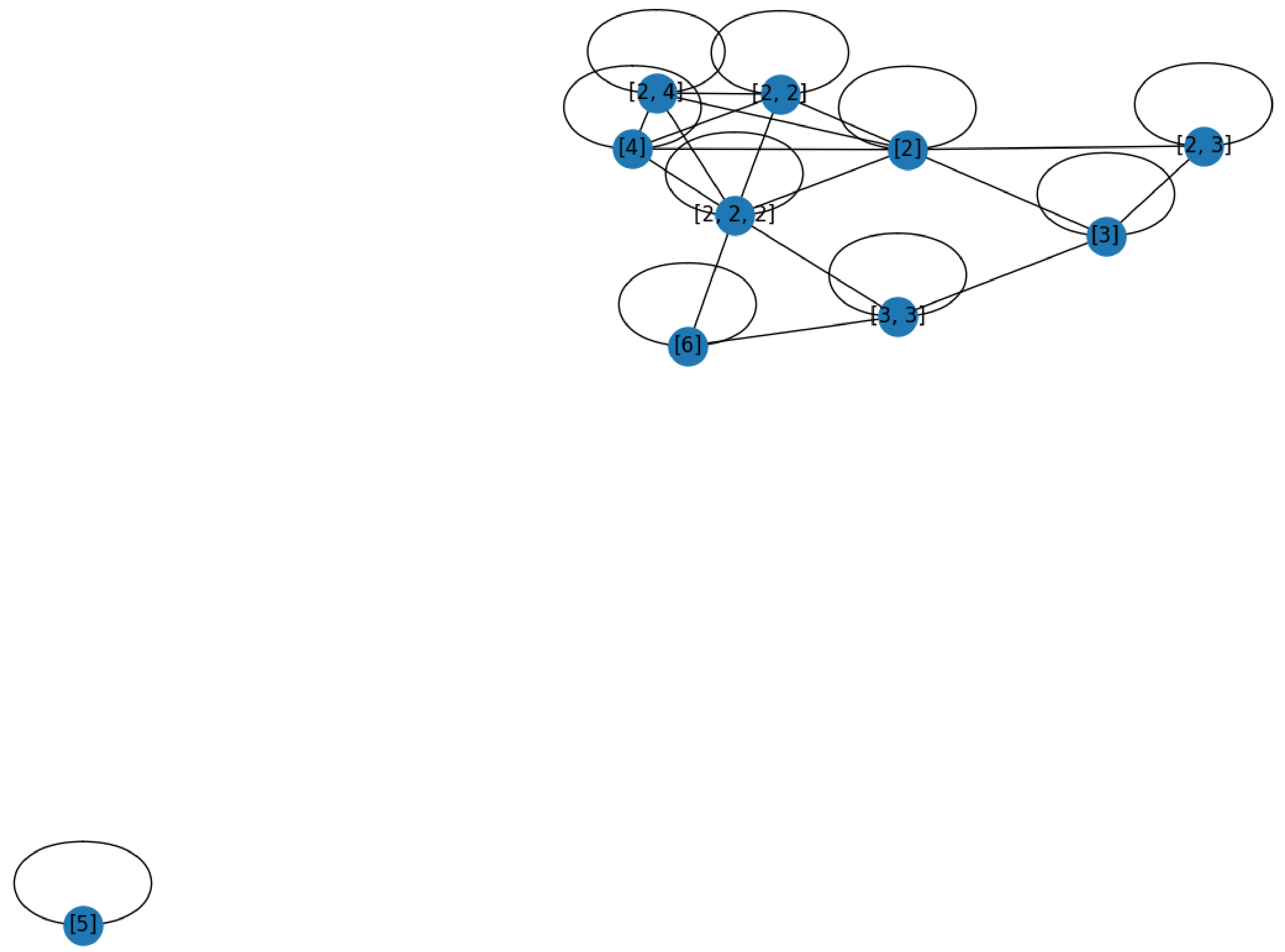
*Примечание***.** [0] - это обозначение единичной перестановки. Для облегчения восприятия она была убрана с коммутирующих карт.



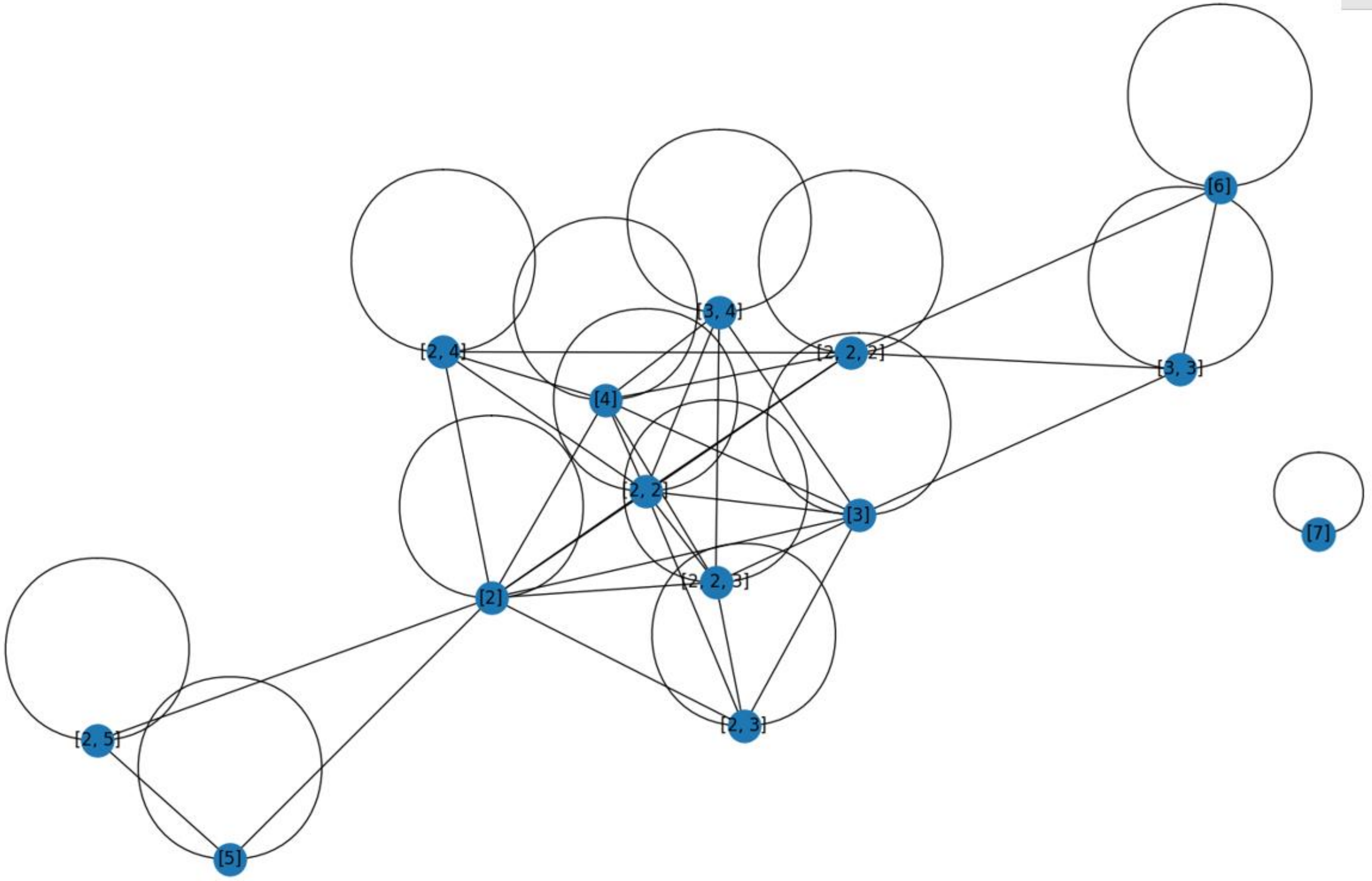
2-4. **Коммутирующие карты**, которые рисуют все более и более сложные узоры. Обратите внимание, что на каждой из них есть "одиночка", выбивающийся из коллектива. Для групп с чётным n это (n-1)-цикл, для нечетных - (n)-цикл.



Группа S5, коммутирующая карта



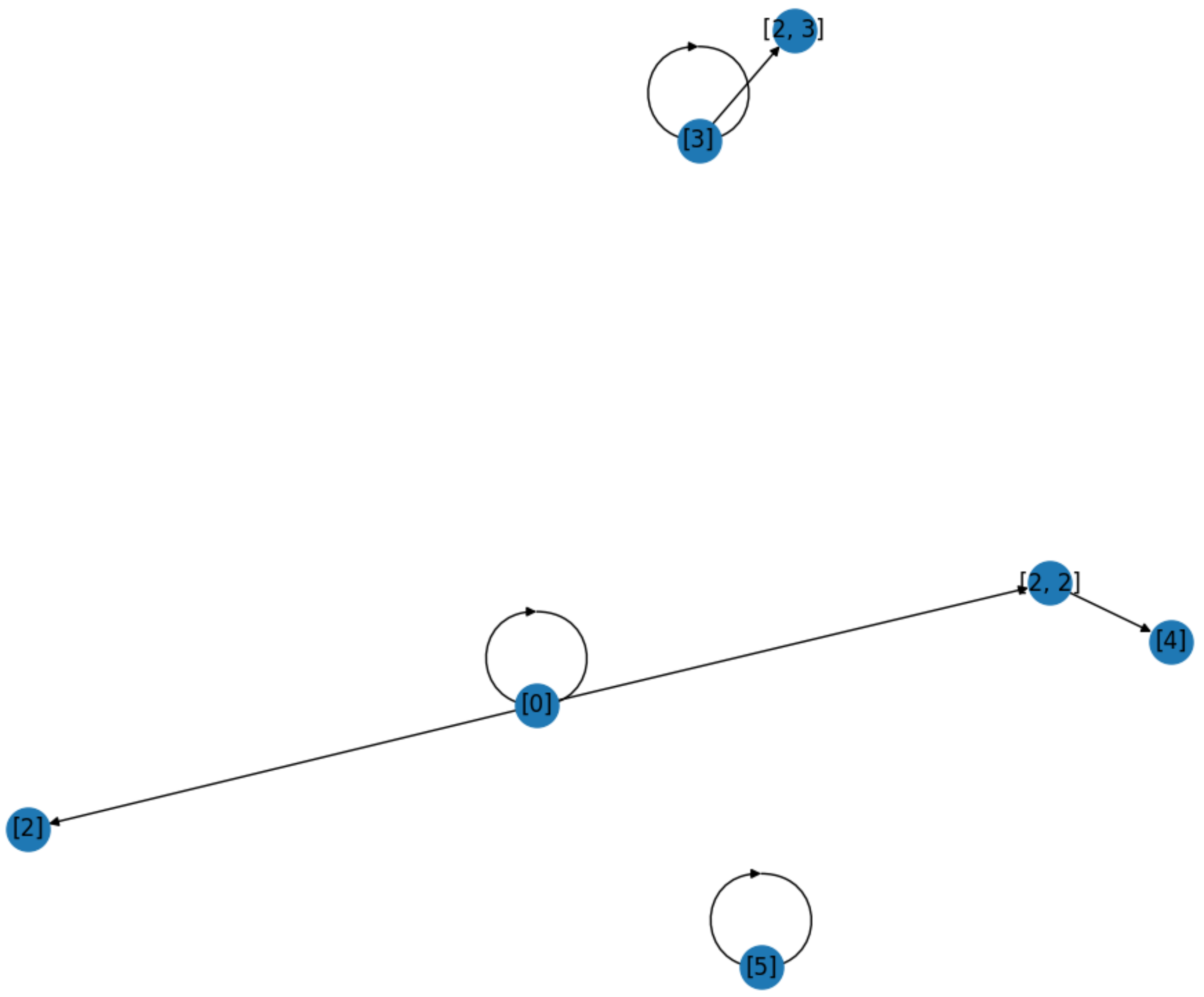
Группа S6, коммутирующая карта



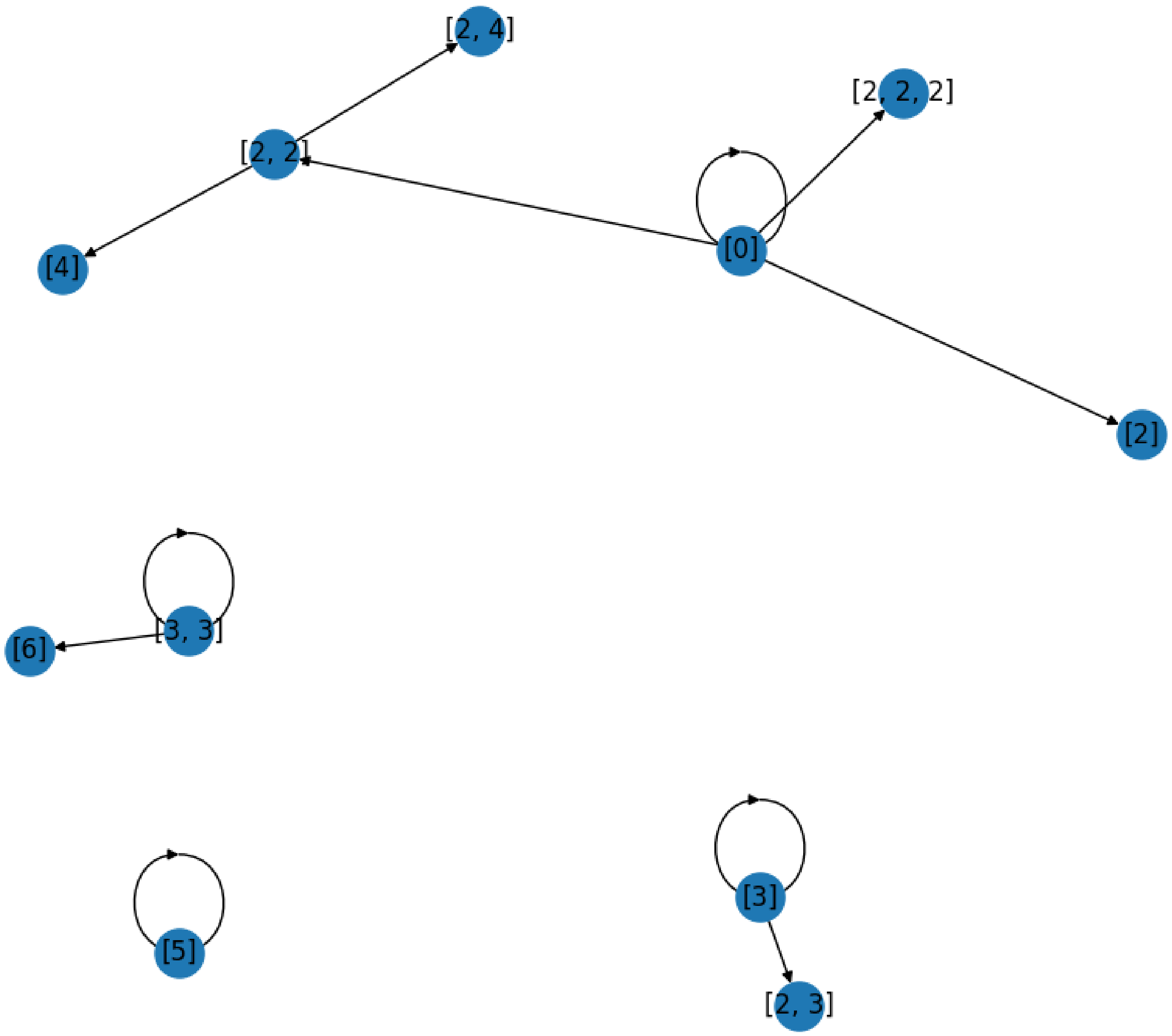
Группа S7, коммутирующая карта

5-7. **Корневые карты.** Принцип, по которому находятся одиночные вершины, остался неизменным.

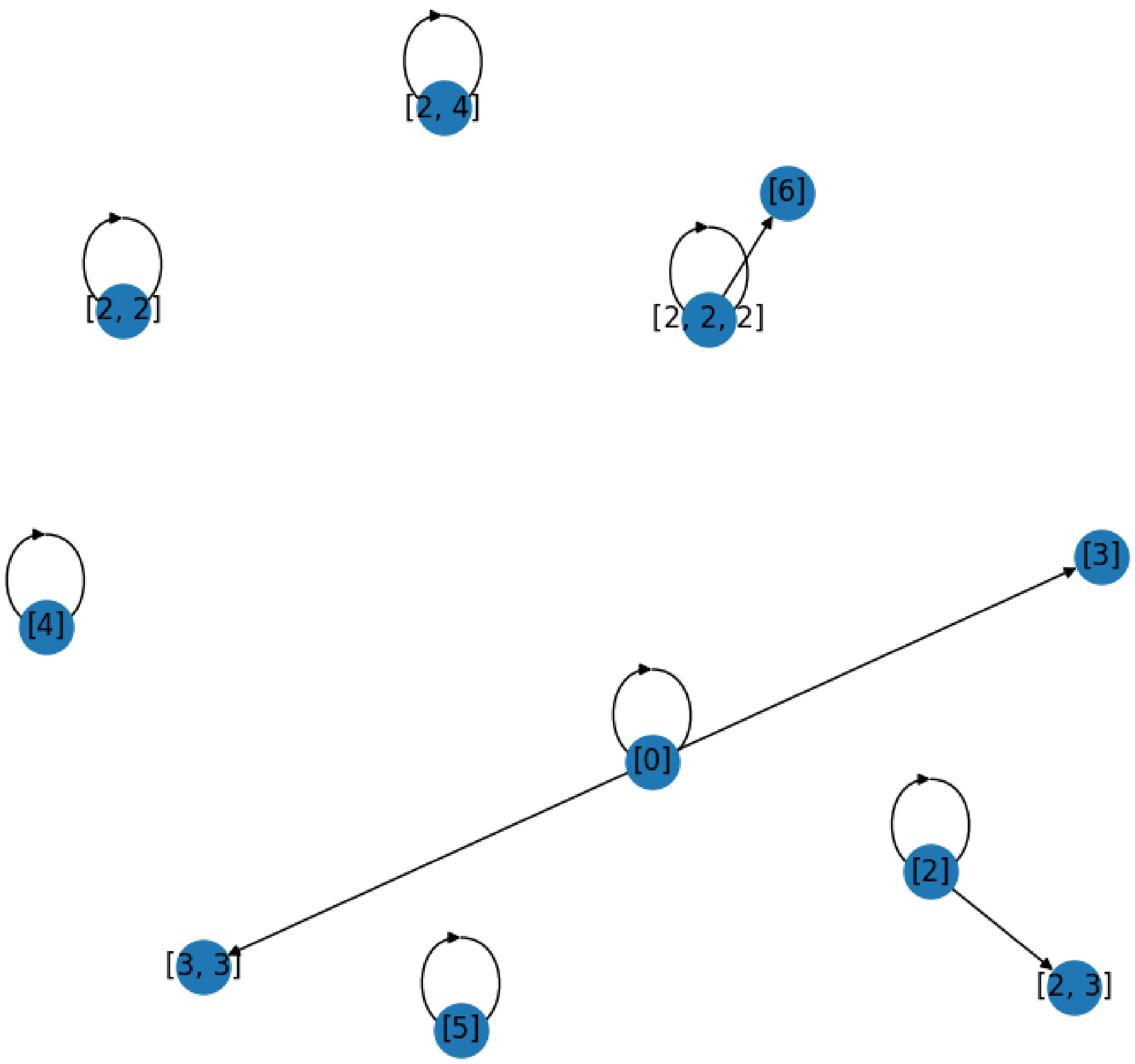
Можно заметить, как с увеличением n, корневая карта планомерно "застраивается", сохраняя прежние этажи неизменными.



Группа S5, корневая карта 2-го порядка



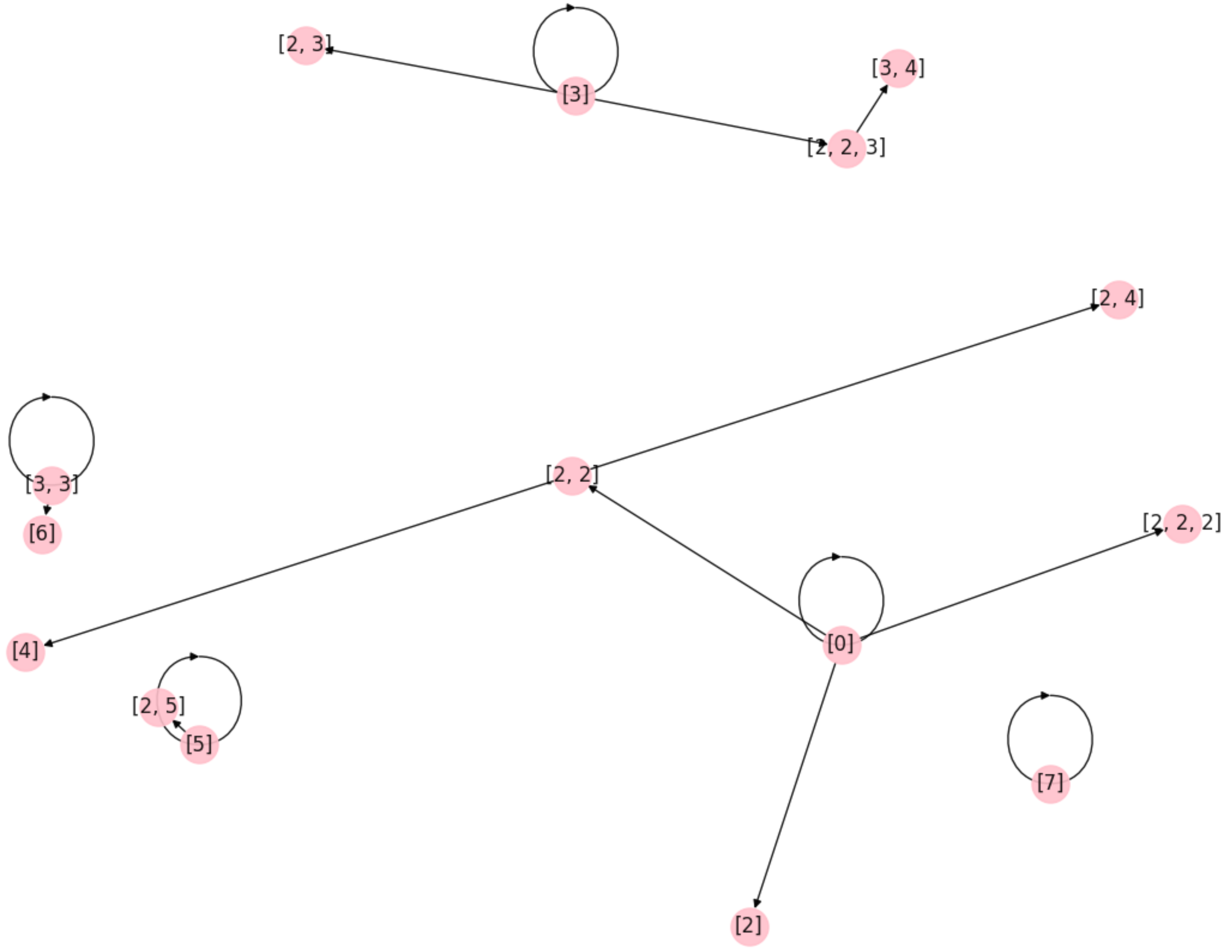
Группа S6, корневая карта 2-го порядка

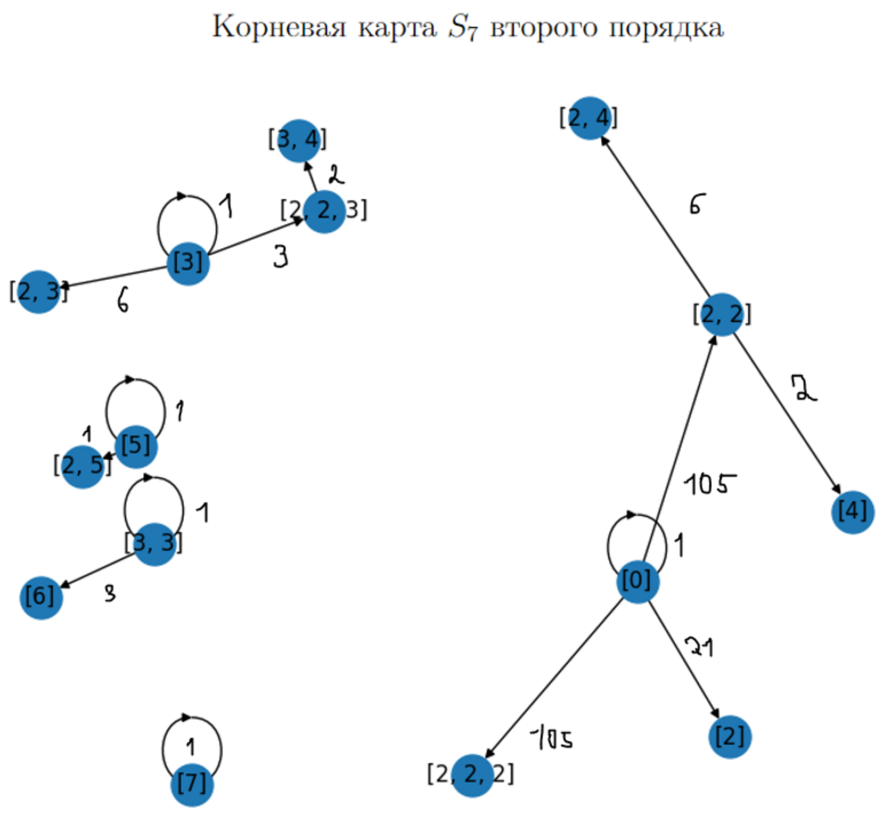


*Группа S6, корневая карта **3**-го порядка*

Вершины карты S7 покрашены в розовый не случайно, так как для ее построения применялся другой метод: от каждой цикловой структуры был "представитель", на примере которого уже и проводились расчеты.

Карты полного и частичного перебора полностью совпали, однако при n > 6 лучше уже использовать оптимизированные методы.





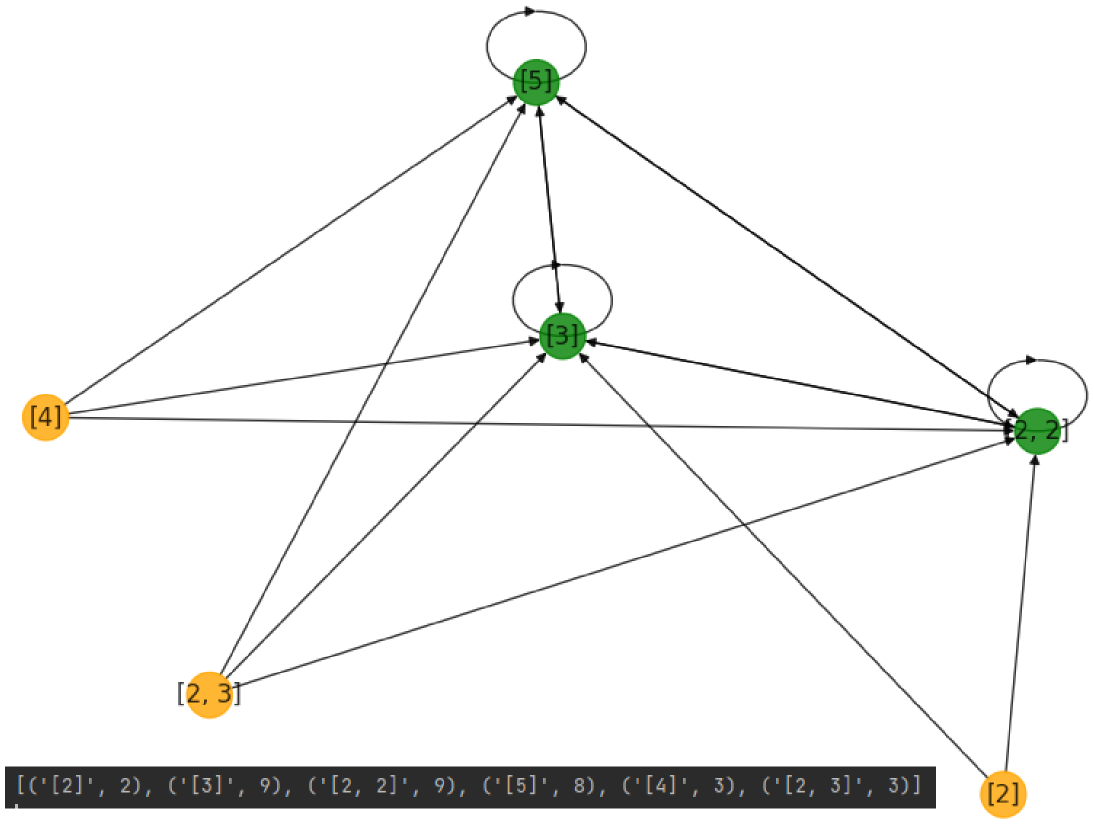
Группа S7, корневая карта 2-го порядка

9. (стрелка от A к B, показывает, что если умножить A на B, то цикл. структура A останется неизменной). *Нечётные перестановки окрашены в оранжевый, чётные - в зеленый*. Нечётная не может стабилизировать чётную, поэтому,

как мы видим, от зелёных вершин не исходит ни одного ребра в сторону оранжевых. Отметим интересную деталь: нечетные перестановки не могут стабилизировать самих себя, так как ни у одной из оранжевых вершин нет петли.

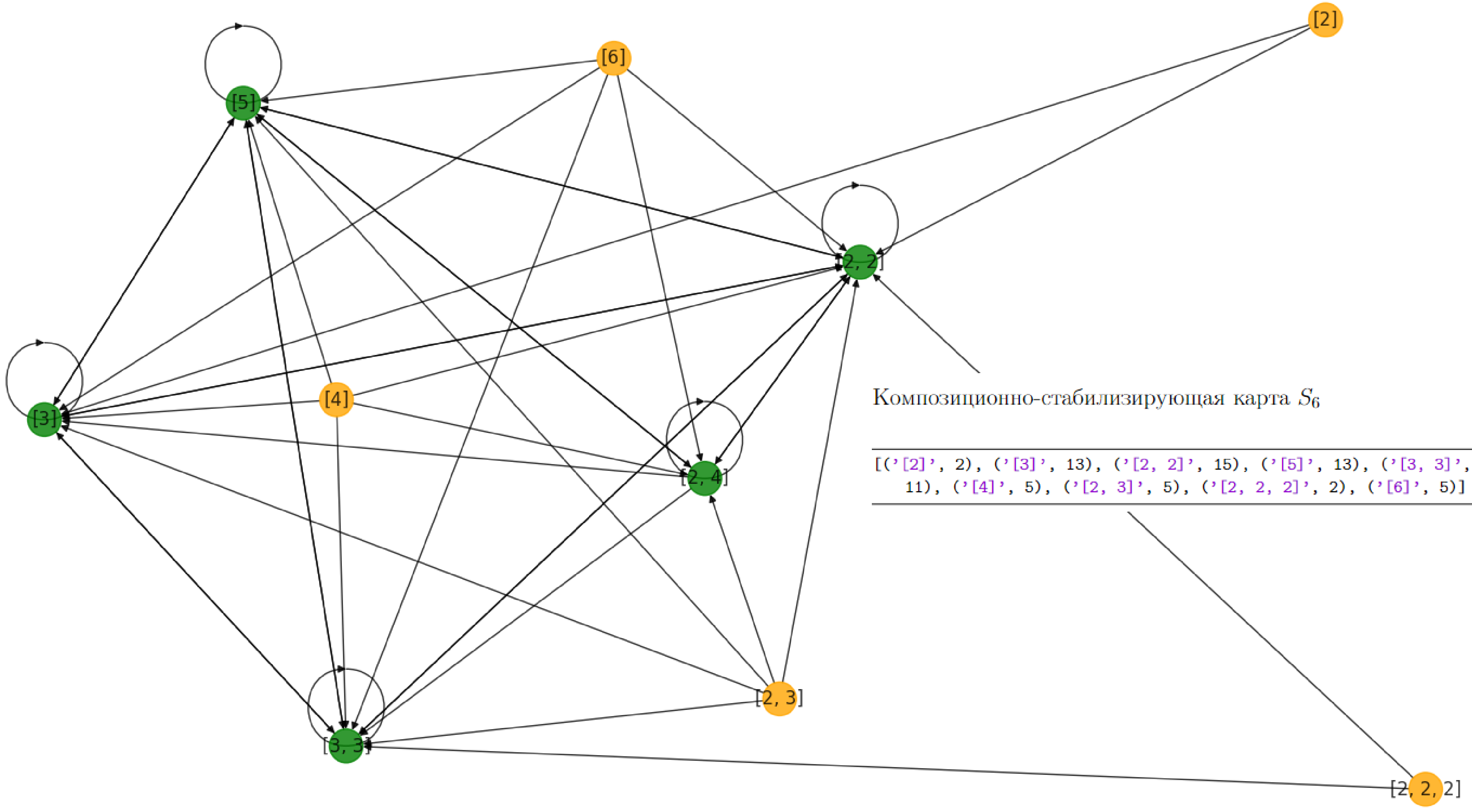
Композиционно-стабилизационные карты и материалы второй части позволяют сделать важный вывод:

Число элементов из группы S_n, стабилизирующих перестановку, принадлежащую к некой цикловой структуре A, является общее количество объектов с цикл. стр. A в группе S_n.




```
[('[2]', 2), ('[3]', 9), ('[2, 2]', 9), ('[5]', 8), ('[4]', 3), ('[2, 3]', 3)]
```

Группа S5, композиционно-стабилизирующая карта



Композиционно-стабилизирующая карта S_6

[('[2]', 2), ('[3]', 13), ('[2, 2]', 15), ('[5]', 13), ('[3, 3]', 13), ('[2, 4]', 11), ('[4]', 5), ('[2, 3]', 5), ('[2, 2, 2]', 2), ('[6]', 5)]

Группа S6, композиционно-стабилизирующая карта