מטלה 5. שאלות 2, 3.

שאלה 2: כתבו אלגוריתם המקבל שני וקטורי-ערכים, וחלוקה בין שני שחקנים, ובודק אם החלוקה מסודרת.

- אם החלוקה מסודרת, האלגוריתם מחזיר "כן".
- אם החלוקה לא מסודרת, האלגוריתם מחזיר שיפור פארטו שלה.

<u>האלגוריתם:</u> // בהנחה שיש שני שחקנים A ו-B, ו-m חפצים.

קלט:

- שני וקטור ערכים $(v_a(1), v_a(2), \dots, v_a(m))$, $(v_b(1), v_b(2), \dots, v_b(m))$,
- חלוקה בין שחקנים $(1_a,\ 2_a, \dots, m_a)$ כאשר לכל $i \in [m]$ נייצג את החלק ש-A קיבל מהחפץ ה-i על ידי i_a וכמובן שעבור המשתתף B, מתקיים $i_b \coloneqq 1 - i_a$

מהלך:

1. מצא את $maxB \coloneqq \max_{i\in[m]}\left\{\frac{v_a(i)}{v_b(i)}\right\}$ ושמור את האינדקס בתור k

ואת $minA \coloneqq \min_{i\in[m]}\left\{\frac{v_a(i)}{v_b(i)}\right\}$ ושמור את האינדקס בתור j

2.1. אם $maxB \le minA$ החזר "כן".

2.2. אחרת, הגדר את החלוקה הבאה: $(1_a,\ 2_a, \dots, j_a - y, \dots, k_a + z, \dots, m_a)$ והשב אותה.

כמובן שהדוגמה היא בה"כ אם זה הסידור, אם למשל $k < j$ או $j = 1$ אז נעשה את ההתאמות הנדרשות פשוט.

** את הערכים y, z נקבע לפי יחסי הערכים של k, j

ארצה להוכיח שאם החלוקה מסודרת האלגוריתם מחזיר 'כן', ואם לא אז החלוקה שתוחזר תהווה שיפור פארטו של החלוקה הנתונה.

תחילה, אם החלוקה הנתונה בקלט מהווה חלוקה מסודרת, אז יחס הערכים של כל חפץ בסל של A הוא לכל הפחות יחס הערכים של כל חפץ ב-B. אם כך, בפרט החפץ ב-A בעל יחס הערכים המינימלי הוא לכל הפחות ערך יחס הערכים המקסימלי מבין כל החפצים ב-B.

כיוון שהחלוקה לא מסודרת, מתקיים:

$$\frac{v_a(j_a)}{v_b(j_a)} = \frac{v_a(j)}{v_b(j)} < \frac{v_a(k)}{v_b(k)} = \frac{v_a(k_a)}{v_b(k_a)}$$

$$\frac{v_a(j)}{v_a(k)} < \frac{v_b(j)}{v_b(k)}$$

לכן, קיימים איזשהם $y,z \in (0,1)$ כך ש:

$$\frac{v_a(j)}{v_a(k)} < \frac{z}{y} < \frac{v_b(j)}{v_b(k)} \Rightarrow (1)\quad y \cdot v_a(j) < z \cdot v_a(k) \ \wedge \ (2)\ z \cdot v_b(k) < y \cdot v_b(j)$$

ואם כך, אם החלוקה הישנה לעומת החלוקה החדשה:

עבור A:

$$\sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_a(i_a) + v_a(j_a) + v_a(k_a) <_{(1)} \sum_{i\in[m]} v_a(i_a) + \left(z \cdot v_a(k) - y \cdot v_a(j)\right)$$

עבור B:

$$\sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_b(i_b) + v_b(j_b) + v_b(k_b) <_{(2)} \sum_{i\in[m]} v_b(i_b) + \left(y \cdot v_b(j) - z \cdot v_b(k)\right)$$

ולכן, החלוקה החדשה מהווה שיפור פארטו של זו שהתקבלה, בהנחה שזו שהתקבלה איננה מסודרת.

שאלה 3: // להתחלה.

נריץ את האלגוריתם מהתרגיל הקודם מספר פעמים (אוכיח בהמשך את החסם), עד שנקבל את התשובה 'כן' מהאלגוריתם.

ארצה להוכיח:

1. שבין הרצה להרצה נקבל שיפור פארטו (לכל הפחות חלש) של החלוקה הנוכחית.
2. שהאלגוריתם ירוץ מספר פולינומי של פעמים.

תחילה, בין הרצה להרצה יתקבל שיפור פארטו בגלל ההוכחה מהתרגיל הקודם.
לכל היותר נריץ $O(m)$ פעמים את האלגוריתם. זאת כיוון שהאלגוריתם בכל פעם יפחית שיתוף אחד ולכן מספר האיטרציות הוא סך כל החפצים שיש.

<u>טענה:</u> בכל איטרציה יהיה פחות שיתוף אחד.

הוכחה: נגדיר את $z = k_b$ ולפיכך ייקבע $z \cdot \frac{v_b(k)}{v_b(j)} < y < z \cdot \frac{v_a(k)}{v_a(j)}$.

אם כך, אם החלוקה הישנה לעומת החלוקה החדשה:

עבור A:

$$\sum_{i\in[m]} v_a(i_a) + \left(z \cdot v_a(k) - y \cdot v_a(j)\right)$$
$$= \sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_a(i_a) + (k_a + k_b) \cdot v_a(k) + (j_a - y) \cdot v_a(j)$$
$$= \sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_a(i_a) + 1 \cdot v_a(k) + (j_a - y) \cdot v_a(j)$$

עבור B:

$$\sum_{i\in[m]} v_b(i_b) + \left(y \cdot v_b(j) - z \cdot v_b(k)\right)$$
$$= \sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_b(i_b) + (k_b + y) \cdot v_b(j) + (k_b - z) \cdot v_b(k)$$
$$= \sum_{i\in[m]\setminus\{j,k\}} v_b(i_b) + (k_b + y) \cdot v_b(j) + 0 \cdot v_b(k)$$

וסה"כ לפי הגדרה $k_a + k_b = 1$ נקבל: $k'_a = k_a + k_b = 1$ כאשר k'_a הוא החלק ש-A מקבל מהחפץ k בחלוקה החדשה.