"וּנְחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

# חלוקה יעילה של משאבים
# Efficient Resource Division

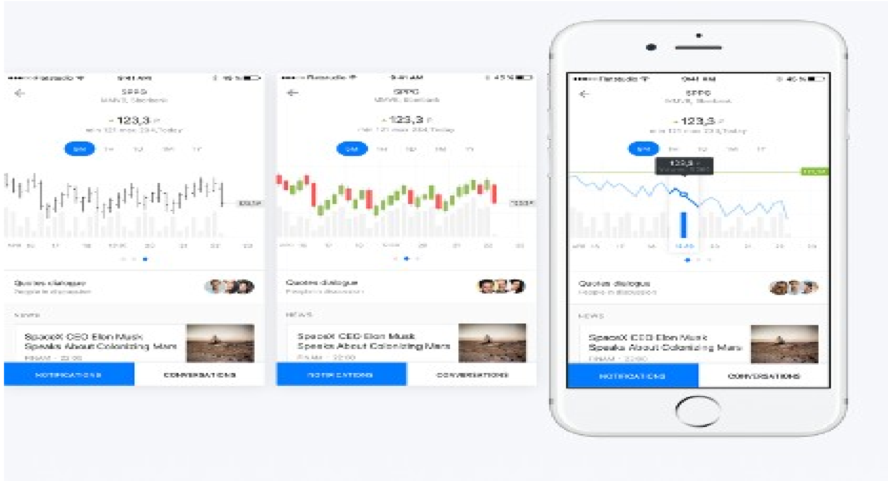
אראל סגל-הלוי

# חלוקת משאבים הומוגניים

סחורות:

משאבי
מחשוב:

מניות:



# חלוקה הוגנת - קל

אבל לא יעיל...

# מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור.

כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

| מסעדה: | א | ב | ג | ד | ה |
|---|---|---|---|---|---|
| עמי: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| תמי: | 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| רמי: | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 |

איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?

--- **ב**! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

# יעילות כללית

**הגדרות:**

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto improvement) של מצב ב, אם הוא *טוב יותר* לחלק מהמשתתפים, וטוב *לפחות באותה מידה* לכולם.
  - בעברית: "**זה נהנה וזה לא חסר**".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** (Pareto efficient) אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- יעילות פארטו – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כללית.

# חלוקה לא יעילה (כנראה)

# חלוקה יעילה פארטו - קל

אבל לא הוגן...

# האתגר

## האם תמיד קיימת חלוקה
## שהיא גם הוגנת וגם יעילה?

# האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

**אלגוריתם**:
- נשים את המשאבים על קו ישר.
- נחלק את הקו כמו שמחלקים עוגה.

| | פלדה | נפט | עצים |
|---|---|---|---|
| **עמי:** | 1 | 19 | 80 |
| **תמי:** | 20 | 1 | 79 |

# האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

עמי תמי

| | פלדה | נפט | עצים |
|---|---|---|---|
| עמי: | 1 | 19 | **50**, 30 |
| תמי: | **20** | **1** | 49.4, **29.6** |

התוצאה **לא יעילה**: התועלות הן (50.6 ,50)
אבל אפשר לשפר ל~(59.7 ,59).

| | פלדה | נפט | עצים |
|---|---|---|---|
| עמי: | 1 | **19** | **40**, 40 |
| תמי: | **20** | 1 | 39.3, **39.7** |

# יעילות אוטיליטרית

הגדרה: חלוקה **יעילה-אוטיליטרית** (utilitarian) היא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים:

$$\max_{X} \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$$

**חישוב**: אפשר בפייתון.

| | פלדה | נפט | עצים |
|---|---|---|---|
| **עמי:** | 1 | **19** | **80** |
| **תמי:** | **20** | 1 | 79 |

האם החלוקה יעילה פארטו? -->

# יעילות אוטיליטרית

**משפט**: כל חלוקה יעילה-אוטיליטרית (ממקסמת סכום ערכים) היא יעילה פארטו.

**הוכחה**: נתונה חלוקה **א** הממקסמת סכום ערכים.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
- אז קיימת חלוקה **ב** שהיא שיפור-פארטו שלה.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה **א**, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
- לכן בחלוקה **ב** סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה **א** ממקסמת את סכום הערכים. ***

החלוקה יעילה – אבל לא הוגנת.

# חלוקה אגליטרית

הגדרה: חלוקה **אגליטרית** (egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר:

$$\max_X \min_i V_i(X_i)$$

**אלגוריתם**: הגדר משתנה $z$ המייצג את הערך הקטן ביותר. פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z \\ \text{subject to} & V_i(X_i) \geq z \quad \text{for all } i \text{ in } 1,\ldots,n \end{array}$$

| | **פלדה** | **נפט** | **עצים** |
|---|---|---|---|
| **עמי:** | 1 | **19** | **40.25**, 39.75 |
| **תמי:** | **20** | 1 | 39.75, **39.25** |

# חלוקה אגליטרית והגינות

**משפט**: אם הערכים של השחקנים *מנורמלים*, כך שכל השחקנים מייחסים את אותו ערך לעוגה כולה, אז כל חלוקה אגליטרית היא פרופורציונלית.

**הוכחה**:
- קיימת חלוקה פרופורציונלית, למשל חלוקה שבה כל שחקן מקבל *1* חלקי $n$ מכל משאב.
- יהי $V$ ערך העוגה כולה (בעיני כולם). בחלוקה פרופ.., הערך הקטן ביותר הוא לפחות $V$ חלקי $n$.
- לכן, בחלוקה *הממקסמת* את הערך הקטן ביותר, הערך הקטן ביותר הוא לפחות $V$ חלקי $n$.
- לכן, חלוקה זו גם היא פרופורציונלית. ***

# חלוקה אגליטרית ויעילות

**משפט**: אם כל השחקנים מייחסים ערך *גדול מ-0* לכל משאב, אז כל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו.

**הוכחה**: נתונה חלוקה אגליטרית **א**, שבה הערך הקטן ביותר הוא x. נניח בשלילה שקיים לה שיפור-פארטו - חלוקה **ב**.

- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות x, ולחלק מהשחקנים יש ערך גדול מ-x.
- נבחר שחקן שערכו בחלוקה **ב** גדול מ-x. ניקח ממנו כמות קטנה מאד של משאב כלשהו, כך שערכו יישאר גדול מ-x. נחלק את המשאב בשווה בין כל שאר השחקנים. קיבלנו חלוקה חדשה; נקרא לה **ג**.
- כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, ולכן בחלוקה **ג**, לכל השחקנים יש ערך גדול מ-x. לכן, הערך הקטן ביותר בחלוקה **ג** גדול מ-x – סתירה להנחה שחלוקה **א** ממקסמת את הערך הקטן ביותר. ***

# חלוקה אגליטרית ויעילות

אם חלק מהשחקנים מייחסים ערך 0 לחלק מהמשאבים, אז לא כל חלוקה אגליטרית היא יעילה.

דוגמה:

| | פלדה | נפט |
|---|---|---|
| **עמי:** | 100 | 0 |
| **תמי:** | 0 | 50 |

- החלוקה שנותנת חצי מהפלדה לעמי, ואת כל השאר לתמי, היא אגליטרית (מדוע?).
- אבל היא לא יעילה פארטו (מדוע?).

# סדר לקסימין

**הגדרה**: חלוקה **לקסימין-אגליטרית** (leximin-egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את *וקטור הערכים המסודר מהקטן לגדול*, לפי סדר *מילוני*.
כלומר: ממקסמת את הערך הקטן ביותר;
- בכפוף לזה, את הערך השני הכי קטן;
- בכפוף לזה, את הערך השלישי הכי קטן; וכו'.

**דוגמה**:
- חלוקה עם ערכים (50, 100) טובה יותר, בסדר לקסימין, מחלוקה עם ערכים (50, 50).
- חלוקה עם ערכים (3, 1, 3) טובה יותר, בסדר לקסימין, מחלוקה עם ערכים (1, 99, 2).

# לקסימין – יעילות והגינות

**משפט**: כל חלוקה לקסימין-אגליטרית היא *יעילה-פארטו*, ואם הערכים מנורמלים - גם *פרופורציונלית*.

**הוכחה**:

- פרופורציונליות – הוכחנו כבר לכל חלוקה אגליטרית.
- נתונה חלוקה לקסימין-אגליטרית **א**. נניח בשלילה שקיים לה שיפור-פארטו - חלוקה **ב**.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך *לפחות* כמו ב-א, ולחלק מהשחקנים יש ערך *גדול יותר*.
- לכן וקטור-הערכים המסודר בחלוקה **ב** גדול יותר, בסדר מילוני, מבחלוקה **א** – סתירה להנחה שחלוקה **א** היא לקסימין-אגליטרית. ***

# חישוב חלוקה לקסימין

- מחשבים חלוקה אגליטרית; נניח שהמקסימום = $z_{max}$.
  - *(מכאן: בחלוקה לקסימין, שחקן אחד לפחות מקבל בדיוק $z_{max}$, והשאר מקבלים לפחות $z_{max}$).*
- עבור כל שחקן, נחשב את הערך המקסימלי שהוא יכול לקבל, תחת האילוץ שכל שאר השחקנים מקבלים לפחות $z_{max}$.
- אם הערך המקסימלי המתקבל הוא $z_{max}$. אז השחקן הוא "רווי" – ערכו בחלוקה לקסימין = בדיוק $z_{max}$.
- נחשב חלוקה אגליטרית עבור כל השחקנים שנשארו *לא רוויים*, תחת האילוץ שהערך של כל השחקנים הרוויים הוא בדיוק ערך-הרוויה שלהם.
- נמשיך כך עד שכל השחקנים הופכים להיות רוויים.

# חישוב חלוקה לקסימין - דוגמה

**שלב 1**:

- ערך אגליטרי = 3.
- ערכים מקס. לשחקנים
  א, ב, ג, ד = 4, 3, 8.25, 8.25
- שחקן ב רווי.

**שלב 2**: נשארו שחקנים א,ג,ד.

- ערך אגליטרי = 4.
- ערכים מקס. לשחקנים
  א, ג, ד = 4, 6, 6.
- שחקן א רווי.

| | עצים | נפט | פלדה |
|---|---|---|---|
| **א:** | 4 | 0 | 0 |
| **ב:** | 0 | 3 | 0 |
| **ג:** | 5 | 5 | 10 |
| **ד:** | 5 | 5 | 10 |

**שלב 3**: נשארו שחקנים ג,ד.
ערך אגליטרי = 5.
ערכים מקס. לשחקנים
ג, ד = 5, 5.
כולם רוויים – סיימנו!

# חישוב חלוקה לקסימין-אגליטרית - אלגוריתם

1. **אתחול**: $F$ =: קבוצת כל השחקנים ($F$=Free=לא רווי).
2. פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

Maximize $z$

such that $(X_1,...,X_n)$ is a partition;

$v_i(X_i)$ = saturated_value[i] for all i not in F;

$z \le v_j(X_j)$ for all j in F.

יהי $z_{max}$ הערך המקסימלי שהתקבל בבעיה זו.

3. לכל שחקן $j$ בקבוצה $F$, פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

Maximize $v_j(X_j)$

such that $(X_1,...,X_n)$ is a partition;

$v_i(X_i)$ = saturated_value[i] for all i not in F;

$z_{max} \le v_j(X_j)$ for all j in F.

אם הערך המתקבל שווה ל- $z_{max}$, אז $j$ הוא שחקן רווי: הורד אותו מ-$F$ ושמור את ערך-הרוויה שלו: saturated_value[j]=$z_{max}$.

4. אם הקבוצה $F$ ריקה - **סיים** (כולם רוויים); אחרת - חזור לשורה 2.

**משפט**. האלגוריתם שהוצג למעלה מסתיים תוך n איטרציות לכל היותר.

**הוכחה**. מספיק להוכיח, שבכל איטרציה, לפחות שחקן חופשי אחד הופך להיות רווי.
נניח בשלילה, שבאיטרציה מסויימת, אף שחקן חופשי לא נעשה רווי. נסמן ב-$z_{max}$ את הערך של בעיית המקסימיזציה הראשונה באיטרציה זו, וב-f את מספר השחקנים החופשיים.
המשמעות היא, שקיימות f חלוקות אפשריות, שבכל אחת מהן, כל השחקנים מקבלים לפחות $z_{max}$, כל השחקנים הרוויים מקבלים את ערך-הרוויה שלהם, ואחד מ-f השחקנים החופשיים מקבל ערך גדול ממש מ-$z_{max}$.

**הוכחה [המשך].**

ניקח את כל f החלוקות האלו, ונחשב את **הממוצע החשבוני** שלהן. החלוקה הממוצעת היא חלוקה אפשרית, וערכי השחקנים בחלוקה הממוצעת הם הממוצעים של ערכי השחקנים ב-f החלוקות. מכאן:

- א. בחלוקה הממוצעת, כל השחקנים הרוויים מקבלים את ערך-הרוויה;
- ב. בחלוקה הממוצעת, כל השחקנים החופשיים מקבלים ערך גדול ממש מ- $z_{max}$.

משתי הנקודות הללו נובע, שהערך של בעיית המקסימיזציה הראשונה באיטרציה זו היה צריך להיות גדול ממש מ- $z_{max}$ - סתירה. ***

**משפט.** האלגוריתם שהוצג למעלה מוצא חלוקה לקסימין-אגליטרית.

**הוכחה.** באינדוקציה על שלבי האלגוריתם.