<u>אלגוריתמים כלכליים</u>

מיכאל טרושקין

שאלה 2: ההסתברות להישאר בחיים

בשאלה זו הניחו, שכל אחד מארבעת סוגי-הדם העיקריים (O, A, B, AB) מופיע באוכלוסיה באותה שכיחות (25%). כמו כן הניחו, שהתאמה בין תורם לחולה תלויה רק בסוג-הדם. הניחו גם, שלכל חולה יש תורם אחד בדיוק, המוכן לתרום כליה כדי לעזור לו.

א. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, ללא החלפת כליות?

ב. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, כאשר יש החלפת כליות עם מעגלים באורך 2 בלבד?

* ג. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, כאשר יש החלפת כליות עם מעגלים באורך 2 או 3?

– ניתן לפתור כל אחד מהסעיפים באחת משתי דרכים לבחירתכם:

- דרך 1: חישוב תיאורטי של ההסתברות.
- דרך 2: הדמיה ממוחשבת: ביצוע מספר גדול של הגרלות וספירת החולים המקבלים כליה בכל הגרלה.

א. נסמן ב T את סוג הדם שם התורם, ונסמן ב R את סוג הדם של הנתרם.
נסמן ב E את המאורע שסוגי הדם מתאימים ולכן

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \wedge T = O) + \mathbb{P}(E \wedge T = A) + \mathbb{P}(E \wedge T = B) + \mathbb{P}(E \wedge T = AB)$$

נראה כי:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E \wedge T = O) &= \mathbb{P}(T = O) = 0.25 \\
\mathbb{P}(E \wedge T = A) &= \mathbb{P}(T = A \wedge R \in \{A, AB\}) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125 \\
\mathbb{P}(E \wedge T = B) &= \mathbb{P}(T = B \wedge R \in \{B, AB\}) = 0.125 \\
\mathbb{P}(E \wedge T = AB) &= \mathbb{P}(T = AB \wedge R \in \{AB\}) = 0.25 \cdot 0.25 = 0.0625
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\mathbb{P}(E) = 0.5625$$

כלומר כל אדם שורד בהסתברות 56.25% בלי החלפות.

ב. נניח שגודל האוכלוסיה זה $N+1$, כלומר יש $N+1$ זוגות של תורמים ומטופלים.
קודם כל הסתברות של כל חולה היא 56.25% עם התורם מתאים, + ההסתברות שאיזשהו מעגל מתאים.

נקבע חולה כלשהו, ונחשב את ההסתברות שהוא מבריא.
יש N מעגלים אפשריים בגרף, שזה כמות האפשרויות לבחור זוג נוסף.
נסמן ב C_i אינדיקטור שהמעגל טוב, כלומר הזוג השני מתאים לראשון.

$$\mathbb{P}(C_i) = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16^2}$$

בעצם, צריך שהתורם הראשון מתאים לחולה השני, והחולה השני מתאים לתורם הראשון.

משום שזה קירוב, אני מניח לשם פשטות במעגלים שמעגל הוא טוב רק אם הסוגי דם ממש אותו הדבר, כלומר O מתאים רק ל O, ו A רק ל A, וכו...
זה חוסך הרבה עבודה, ובסופו של דבר זה עדיין קירוב שיעבוד.

במצב ההפוך יש בעיה, כי כל תורם בעל סוג דם AB יכול לתרום רק למישהו עם סוג דם AB, ולכן אם נאפשר מעגלים שבהם סוג דם AB מקבל מסוג דם O, למשל אז התורם בעל סוג דם AB לא יצליח להיות משודך לאף אחד אחר!

נסמן ב C את כמות המעגלים הטובים, ולכן $\mathbb{E}(C) = \frac{N}{16}$
ההסתברות שיש מעגל טוב היא המאורע ש $C > 0$.

$$\mathbb{P}(\text{יש תורם}) = \mathbb{P}(C > 0) \cdot \mathbb{P}(\text{התורם לא טוב}) + \mathbb{P}(\text{התורם מתאים})$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C > 0) &= 1 - \mathbb{P}(C = 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(|C - \mathbb{E}(C)| \geq \mathbb{E}(C)) \\
&\geq 1 - \frac{Var(C)}{\mathbb{E}(C)^2}
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי שוויון צבישב, שאומר כי:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

לכל $t > 0$ ולכן משתנה מקרי X.

נשים לב ש:

$$Var(C) = \sum_{i=1}^{N} Var(C_i) + \sum_{\substack{i,j \in [N] \\ i \neq j}} Cov(C_i, C_j)$$

ביהנתן שני מעגלים באורך 2, ה COV שלהם הוא:

$$\begin{aligned}
Cov(C_i, C_j) &= \mathbb{E}(C_i C_j) - \mathbb{E}(C_i)\mathbb{E}(C_j) \\
&= \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{16}\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

התורם השני והשלישי מתאימים לראשון, כלומר הזוגות בלתי תלויים.

ולכן:

$$Var(C) = N\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{15}{16}\right)$$

ולכן:

$$\mathbb{P}(C=0) \leq \frac{N\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{15}{16}\right)}{\left(N\cdot\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{15}{N} = 0$$

ולכן:

$$\mathbb{P}(\text{יש תורם}) \geq \frac{9}{16} + \left(1-\frac{15}{N}\right)\cdot\frac{7}{16} \to 1 = 1-\frac{15\cdot 7}{16N}$$

למשל עבור N=30, נקבל שההסתברות שאדם כלשהו מוצא החלפה היא לפחות, הקירוב הזה כמו שרואים לא טוב עבור N שהוא קטן.

ג. עם כמות הזוגות שואף לאינסוף לפי סעיף ג, נובע שההסתברות שואפת ל 1.

אחרת עבור N כלשהו נקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{מבריא}) &= \mathbb{P}(\text{התורם מתאים}) \\ &+\mathbb{P}(\text{התורם לא מתאים})(\mathbb{P}(\text{יש מעגל באורך } 2) \\ &+\mathbb{P}(\text{יש מעגל באורך } 3)\mathbb{P}(\text{אין מעגל באורך } 3))\end{aligned}$$

עבור מעגל באורך 2, וכו כבר חישבנו בסעיף ב.

כנ"ל נסמן ב C_i שהמגעל ה i באורך 3 טוב.
כמות המעגלים האפשריים בגודל 3, זה כל האפשרויות לבחור 2 זוגות נוספים.

נניח שזוג הראשון צריך סוג דם כלשהו, ויש לו סוג דם אחר כלשהו.
הזוג השני, במעגל צריך שהכליה שהוא מקבל תתאים לו, ולכן יש לו את סוג הדם כמו לתורם של הזוג הראשון.
מצד שני התורם שלו בוודעות, לא כמו מה שצריך החולה של הראשון (כלומר בסהתברות 1, הוא משהו אחר).
הזוג השלישי, צריך שהכליה שהוא מקבל תהיה בדיוק מה שמביא הזוג השני, ולהביא את מה שחייב השלישי
ולכן.

$$\mathbb{P}(C_i) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\binom{N}{2}}{64}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} Cov(C_i, C_j) &= \mathbb{E}(C_iC_j) - \mathbb{E}(C_i)\mathbb{E}(C_j) \\ &= \mathbb{P}(C_i = 1, C_j = 1) - \left(\frac{1}{64}\right)^2 \end{aligned}$$

ההסתברות ששני מעגלים טובים, צריך לבדוק כמה "חיתוכים" יש.
אם הזוג השני והשלישי שונים לחלוטין, אז C_i, C_j בת"ל.
אם הזוג השני נשאר אותו הדבר אז נקבל:

$$\mathbb{P}(C_i = 1, C_j = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

הזוג השני בוחר משהו, והזוג השלישי בוחר אותו הדבר.
אם הזוג השלישי אותו הדבר, אז אפשר להגיד שהזוג השלישי, מתאים את עצמו לזוג הראשון.
ונתרם, יכול לקבל כל דבר.

כמות האפשרויות לבחור 2, מעגלים באורך 3 שהזוג השני אותו הדבר. (כלומר לבחור 2 זוגות, ואז עוד 2 זוגות, ככה שאחד מהזוגות אותו הדבר הוא).

$$2\binom{N}{3}$$

כלומר נבחר את 2 הזוגות הראשונים, ואז את מי מבין השניים להחליף.

$$Cov(C_i, C_j) = \frac{1}{64} - \left(\frac{1}{64}\right)^2 = \frac{63}{64 \cdot 64}$$

ולכן,

$$
\begin{aligned}
Var(C) &= \sum_{i=1}^{\binom{N}{2}} Var(C_i) + \sum_{\substack{i,j \in \left[\binom{N}{2}\right] \\ i \neq j}} Cov(C_i, C_j) \\
&= \binom{N}{2}\frac{1}{64}\cdot\frac{63}{64} + 2\binom{N}{3}\frac{63}{64\cdot 64} \\
&= \binom{N}{2}\frac{1}{64}\cdot\frac{63}{64} + 2\binom{N}{2}\frac{N-2}{3}\frac{63}{64\cdot 64} \\
&= \binom{N}{2}\frac{1}{64}\cdot\frac{63}{64}\left(1 + \frac{2N-4}{3}\right) \\
&= \binom{N}{2}\frac{1}{64}\cdot\frac{21}{64}(2N-1)
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = 0) &\leq \frac{Var(C)}{\mathbb{E}(C)^2} \\
&= \frac{\binom{N}{2}\frac{1}{64}\cdot\frac{21}{64}(2N-1)}{\left(\frac{\binom{N}{2}}{64}\right)^2} \\
&= \frac{21(2N-1)}{\binom{N}{2}}
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{יש תורם}) &\geq \frac{9}{16} + \left(1 - \frac{15}{N}\right)\cdot\frac{7}{16} + \underbrace{\left(\frac{15}{N}\cdot\frac{7}{16}\right)}_{\substack{\text{אין מעגל "טוב" באורך 2} \\ \text{והתורים לא מתאים}}}\left(1 - \frac{21(2N-1)}{\binom{N}{2}}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{15}{N}\cdot\frac{7}{16}\right)\cdot\frac{21(2N-1)}{\binom{N}{2}}
\end{aligned}
$$

למשל עבור $N = 150$ כלומר עבור 61 זוגות, נקבל

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{יש תורם}) &\geq 1 + \frac{15}{50}\cdot\frac{7}{16}\cdot\left(1 - \frac{21(60-1)}{\binom{50}{2}}\right) \\
&\geq 0.975
\end{aligned}
$$

הקירוב הזה טוב יותר מהקירוב של 2 מעגלים רק עבור N מספיק גדול.