

מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה j נותנים 100% מהתקציב לנושא j , התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו k תומכים יקבל לפחות $C \cdot k/n$. בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות C/n .

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא j . שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה נניח יש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 30. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 0, 0, 30
- אזרח ב: 0, 15, 15
- אזרח ג: 0, 15, 15

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

הגדרה: אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא j בלבד, נושא j מקבל לפחות C/n .

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה.

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע – יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
~~רמז: השתמשו במשפט (שאוילי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):~~
~~"the mean minimizes the mean squared error"~~

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

* ג. מצאו אלגוריתם, שהוא גם יעיל-פארטו וגם הוגן לקבוצות (לא חייב להיות מגלה-אמת).

שאלה 3: מניפולציה קבוצתית

נתון אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים. נאמר שלתת-קבוצה כלשהי של שחקנים יש **מניפולציה קבוצתית מוצלחת** אם הם יכולים לשנות את הקלט שלהם (להגיד ערכים שונים מהערכים האמיתיים שלהם), כך שלפחות שחקן אחד מהקבוצה ירוויח, וכל השחקנים בקבוצה לא יפסידו.

אלגוריתם הוא **מגלה-אמת לקבוצות** (באנגלית group strategyproof) אם לאף תת-קבוצה של שחקנים אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. שימו לב: אלגוריתם הוא מגלה-אמת (לפי ההגדרה שראינו באחד השיעורים הקודמים) אם לאף תת-קבוצה גודל 1 אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. לכן, כל אלגוריתם מגלה-אמת-לקבוצות הוא גם מגלה-אמת.

א. הוכיחו, שמכרז ויקרי למכירת חפץ יחיד אינו מגלה-אמת-לקבוצות.

ב. הוכיחו, שאלגוריתם החציון הפשוט הוא מגלה-אמת-לקבוצות.

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן i כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו לבין התקציב בפועל:

$$- \sum_j |d_j - p_{i,j}|$$

נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:

$$- \sum_j (d_j - p_{i,j})^2$$

הוכיחו, שאלגוריתם החציון המוכלל עדיין מקיים את כל התכונות שהוכחנו בהרצאה:

א. לכל קבוצה של הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.

ב. לכל קבוצה של לכל היותר $n-1$ הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל יעיל-פארטו.

ג. עם $n-1$ הצבעות קבועות המפולגות אחיד בין 0 ל- C , אלגוריתם החציון המוכלל הוגן-לקבוצות.

שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

א. כתבו פונקציה בפייטון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(
    total_budget:float,
    citizen_votes:List[List]
) → List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

צרפו דוגמאות-הרצה.

* ב. כתבו קוד, הבדק אם הפונקציה compute_budget מסעיף א מחזירה תמיד תקציב הוגן לקבוצות. כותרת הפונקציה:

```
def test_compute_budget(
    num_citizens:int, num_issues:int,
    total_budget:float)
```

ברוך ה' חונן הדעת

הריצו את הפונקציה על עבור תקציב עם 3 נושאים, מדינה עם 10 אזרחים, וכל הצירופים הדרושים על-מנת לוודא שהתקציב הוא אכן הוגן לקבוצות.