

## מטלה – חלוקה מיטבית של חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (\*) מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: חיפוש במרחב המצבים - כללי גיזום משופרים

א. נתונה בעיית חלוקה אגליטרית של חפצים בין ארבעה שחקנים עם הערכות זהות. הציעו כלל גיזום משופר, שיכול להקטין את מספר המצבים בערך פי 24. הוכיחו שהכלל נכון.

ב. בהרצאה הראינו חסם אופטימי, הנותן את כל החפצים שנשארו לכל השחקנים יחד. נניח שלכל השחקנים הערכות זהות, וסכום ערכי כל החפצים הוא  $V$ . אז במצב ההתחלתי, החסם שהראינו נותן ערך אופטימי  $V$ . הוכיחו שבמצב ההתחלתי ישנו חסם אופטימי משופר, שערכו  $V/n$  (אם לא ברור לכם מה צריך להוכיח, קראו שוב את ההגדרה של חסם אופטימי).

\* ג. הסבירו איך אפשר לחשב את החסם האופטימי המשופר של סעיף ב למצב כלשהו (לא רק למצב ההתחלתי). הוכיחו שהאלגוריתם שכתבתם אכן נותן תמיד חסם אופטימי, ושהחסם הזה אכן טוב יותר מהחסם המקורי.

### שאלה 2: חיפוש במרחב המצבים - תיכנות

א. כתבו תוכנית בפייתון, המבצעת חיפוש במרחב המצבים לבעיית חלוקת חפצים אגליטרית בין שני שחקנים עם הערכות זהות. הפונקציה מקבלת את רשימת הערכים של החפצים, ומחזירה חלוקה אגליטרית. לדוגמה:

```
>>> find_egalitarian_allocation([4, 5, 6, 7, 8])
```

```
[[4, 5, 6], [7, 8]]
```

(הערך המינימלי הוא 15, וזה הערך המינימלי הגדול ביותר שאפשר להשיג בחלוקה כלשהי).

ניתן לבצע את החיפוש בסדר BFS או DFS לבחירתכם. הסבירו מה בדיוק עשיתם, וצרפו דוגמאות הרצה.

\* ב. ממשו כלל גיזום אחד כלשהו לבחירתכם. בדקו את מספר המצבים שהתוכנית שלכם מחשבת, עם ובלי הגיזום.

### \* שאלה 3: אלגוריתם הרשימה – יחס קירוב מדויק יותר

הוכיחו: יחס הקירוב של אלגוריתם הרשימה בחלוקת מטלות ל- $n$  שחקנים הוא לכל היותר:

$$2 - 1/n$$

### שאלה 4: האלגוריתם החמדני – יחס קירוב על קלט אקראי

לצורך השאלה, השיגו מימוש של האלגוריתם החמדני מהאינטרנט, או תכנתו אותו בעצמכם – זה קל.

א. הריצו את האלגוריתם על בעיות אקראיות של חלוקת מטלות אגליטרית, עם מספר חפצים שונה ומספר שחקנים שונה. חשבו בכל הרצה את יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני.

ב. ציירו גרף של יחס הקירוב כפונקציה של מספר החפצים, עבור 2, 3, 4 שחקנים. נסו להתאים פונקציה לגרף – מהי הפונקציה הקרובה ביותר שקיבלתם?

**\* שאלה 5: האלגוריתם החמדני – יחס קירוב הדוק**

בסיכום הוכחנו, שלכל  $n$ , **ולכל** בעיית חלוקת מטלות עם  $n$  שחקנים, יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא **לכל היותר  $(4n-1)$  חלקי  $(3n)$** .

הראו, שלכל  $n$ , **קיימת** בעיית חלוקת מטלות עם  $n$  שחקנים, שבה יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא **בדיוק  $(4n-1)$  חלקי  $(3n)$** .

בהרצאה ראינו דוגמה המתאימה ל-  $n=4$ ; נסו להכליל את הדוגמה לכל  $n$ .