מגיש אמיר סבג תז 316049311

5-א'

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) \ = \ 2E(G)$$

הוכחה קומבינטורית: אגף שמאל - סכום כל דרגות הקדקדים בגרף. (דרגה של קדקד - כמות הצלעות המחוברת אליו)
אגף ימין - כל צלע מחברת בין שני קדקדים שונים, כלומר מגדילה ב-1 את הדרגה של שני קדקדים. כלומר מגדילה ב2 את סה"כ הדרגות בגרף.
מכך קיבלנו שסכום כל הדרגות הינו מספר זוגי.

5-ב'
נסמן:

$$A := \ \{v \in V(G) \mid deg(v) \ = \ 1\}$$
$$B := \ \{v \in V(G)| \ deg(v) \ = \ 0 \ or \ deg(v) \ = \ 2\}$$
$$C \ := \ V(G) \setminus (A \cup B)$$

הסבר מילולי:
A - קב' כל הקדקדים שדרגתם 1.
B - קב' כל הקדקדים שדרגתם 2 או 0.
C - קב' כל שאר הקדקדים (כלומר קדקדים שדרגתם לכל הפחות 3)

נניח ש: $|C| \ = \ 1$ (בקבוצה C יש קדקד אחד בלבד) נסמנו $w \in C$ שדרגתו א"ז נסמן $deg(w) \ = \ 2k + 1$ כאשר k מס' שלם אי שלילי.
מכך נקבל:

$$\sum_{v\in A} deg(v) \ + \ \sum_{u\in B} deg(u) \ + deg(w) \ = \ \sum_{v\in V(G)} deg(v) \ = \ 2E(G)$$

השוויון השמאלי הינו רק חלוקה לקבוצות של כל קדקדי הגרף
השוויון הימני נובע מסעיף א

מכיוון שבקבוצה B יש רק קדקדים בדרגה 0 או 2 אז סכום דרגות קדקדי B הינו זוגי. נסמנו 2z כאשר z מספר שלם אי שלילי.
נציב במשוואה לעיל ונקבל:

$$\sum_{v\in A} deg(v) \ + \ \sum_{u\in B} deg(u) \ + deg(w) \ = \sum_{v\in A} deg(v) \ + \ 2z + \ (2k+1) \ = \ 2E(G)$$

כאשר האי שוויון הימני זה רק הצבה מהאי שוויון הקודם
מכך נקבל :

$$\sum_{v\in A} deg(v) \ = \ 2(E(G) \ + \ k \ + \ z) \ - \ 1$$

כלומר קיבלנו כי סכום הדרגות של קדקדי קב' A הינו אי זוגי כנדרש.

5-ג'
נסמן G הגרף המתקבל מהתהליך המוצג בשאלה.
(*) יהי $v \in V(G)$ קדקד המייצג משולשון מגוון. כלומר למשולשון המקורי (לא הקדקד!) יש צלע אחת e שהינה 1,2
כלומר הדרגה של v אשר תלויה בכמות המשולשים שחולקים את אותה הצלע e הינה לכל היותר 1.
אם הצלע 1,2 הינה צלע פנימית אזי קיים משולש החולק את הצלע הזו ולכן בגרף המייצג את המשולשנים יהיה קדקד u המחובר לצלע e בקצה השני שלה. ומכך דרגת v הינה 1.
במידה והצלע 1,2 היא חיצונית (כלומר אין משולשים המשותפים לצלע הזו) אז הדרגה של v תהיינה גם כן 1 מכיוון ש v מחוברת ל"חוץ".

(**) יהי $u \in V(G)$ קדקד המייצג משולשון שאינו מגוון.
אם המשולשון אינו מגוון אזי יש לו 2 צלעות מהסוג 1,2 או 0 צלעות מהסוג הזה.
(משולשונים שאיזומורפים ל"1,2,2' ו '1,1,2' הם היחידים עם שני צלעות מהסוג 1,2 והיתר הם ללא צלעות 1,2 כלל)
כאשר יש שני צלעות 1,2 למשולש, אז וודאי שדרגתו 2 כי הקדקד המייצג אותו מותח 2 צלעות, למשולשונים אחרים או למשולשון אחד ואחד אל ה"חוץ".

כעת, נותר רק להראות ש: דרגת קדקד החוץ הינה אי זוגית ← כמות המשולשים המגוונים הינה א"ז.
נניח דרגת קדקד החוץ הינה אי זוגית. צ"ל כמות המשולשים המגוונים הינה א"ז.
מסעיף (**) יש כמות צלעות זוגית של משולשים לא מגוונים.
כל צלע שמחברת בין שני קדקדים המייצגים משולשונים (לא "חוץ"!) היא בעצם מייצגת שיתוף של צלע 1,2 בין שני משולשונים. כלומר: יש כמות זוגית של צלעות כאלו! נסמן 2k.
מכיוון שדרגת קדקד ה"חוץ" הינה אי זוגית אזי יש כ 2z+1 צלעות "חוץ".
אבל הרי מ (**) כמות צלעות 1,2 הינה זוגית למשולשונים **שאינם מגוונים**. לכן יש כמות אי זוגית של צלעות למשולשונים שהם אכן מגוונים.
ומ(*) לכל משולש מגוון יש בדיוק צלע אחת מסוג 1,2. מכך קיבלנו כי יש כמות אי זוגית של משולשים מגוונים כנדרש.

5-ד'

ראשית נציין כי בין קדקדי המשולש הגדול שהם 2,3 ו 1,3 אין בכלל צלעות 1,2 וזה נובע מהגדרת משולש תיווי ספרנר.

כעת נחשב את כמות הצלעות 1,2 בקטע שבין הקדקדים 1-2 של המשולש הגדול.

בהינתן קטע בעל n נקודות עליו נסמנן $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ כאשר יש בקטע לפחות 2 נקודות (2 קדקדי היקף)

צ"ל כמות הצלעות 1,2 היא איזוגית.

נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס: n=2 טריויאלי - יש בדיוק צלע אחת 1,2. וזו הצלע $e := p_1 p_2$

ה"ה: הטענה נכונה לכל $n > k \geqslant 2$

צעד: נוציא נקודה שרירותי כלשהי i כך ש: $i \neq 1,\ i \neq n$ כלומר היא לא בקצוות.

כעת נותרנו עם n-2 צלעות בדיוק.

כעת מהנחת האינדוקציה יש כמות אי זוגית נסמן 2z+1 של צלעות מסוג 1,2.

נחזיר את נקודה i למקומה ונבחן את הצלעות: $p_{i-1}p_i,\ p_{i-1}p_{i+1},\ p_i p_{i+1}$

נחלק למקרים:

מקרה 1- כאשר הצלע $p_{i-1}p_{i+1}$ היא צלע 1,2. לא משנה אם מספר הקדקד p_i הוא 1 או 2. במצב כזה כמות הצלעות 1,2 לא השתנתה כלל כי קיבלנו צלע אחת 'מגוונת' (1,2) וצלע אחת אינה מגוונת (1,1 או 2,2).

מקרה 2- כאשר כאשר הצלע $p_{i-1}p_{i+1}$ היא צלע שאינה מגוונת (1,1 או 2,2). במצב זה p_i גורמת לכך ששני הצלעות החדשות $p_{i-1}p_i,\ \ p_i p_{i+1}$ הן או מגוונות יחד או אינן מגוונות יחד במקרה זה הוספנו מספר זוגי של צלעות 1,2 לכמות המקורית 2z+1 ועל כן נותרנו עם כמות אי זוגית של צלעות 1,2 כנדרש.

5-ה'

סעיף ד' ← כי יש כמות אי זוגית של צלעות 1,2 בהיקף המשולש הכולל (הגדול).

נזכיר שרק הצלעות בהיקף המשולש משפיעות על דרגת קדקד ה"חוץ" מבניית המשולש של סעיף ג'. כלומר קיבלנו קדקד חוץ בעל דרגה אי זוגית.

מסעיף ג' ← יש כמות משולשים מגוונים אי זוגית!

מכיוון שהמספר האי זוגי הכי קטן הוא 1 אזי יש לפחות משולש מגוון אחד. כנדרש.

משל הלמה של ספרנר.