

## מטלה 5 באלגוריתמים כלכליים- נטע רוט

שאלה מספר 4: אתאר את האלגוריתם הבא:

1. סדר את החפצים בסדר עולה של יחס הערכים: ערך עבור שחקן א' \ ערך עבור שחקן ב'.
2. אתחול: עבור חפצים עם יחסים שליליים- תן את החפץ לשחקן שיחס לו ערך חיובי (יש רק אחד כזה), את כל שאר החפצים תן לשחקן א'.
3. כעת עבור חפצים על יחס ערכים חיובי נפעיל את האלגוריתם של "המנצח המתקן":  
העבר חפצים לשחקן ב' לפי סדר היחסים שלהם רק אם היחס של החפץ חיובי עד ש: 1. סכום הערכים של שחקן א' שווה לסכום הערכים של שחקן ב' או ש- 2. יש חפץ שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

דוגמה הרצה:

	חפץ 1	חפץ 2	חפץ 3	חפץ 4	חפץ 5
שחקן A	-5	15	10	20	60
שחקן B	5	-5	40	20	40
יחס ערכים	-1	-3	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$

אתחול:

שחקן B	שחקן A	
1	2,3,4,5	חפצים
5	105	סכום

הסבר- חפץ 1 ניתן לשחקן B כי הוא יחס לו ערך חיובי, חפץ 2 ניתן לשחקן A כי הוא יחס לו ערך חיובי, חפצים 3-5 ניתנו לשחקן A כי יחסי הערכים שלהם חיוביים. הסכום לא שווה, נעביר את חפץ 3 משחקן A לשחקן B כי הוא החפץ עם היחס ערכים החיובי הכי קטן.

שחקן B	שחקן A	
1,3	2,4,5	חפצים
45	95	סכום

נעביר את חפץ 4 משחקן A לשחקן B כי הוא החפץ הבא עם היחס ערכים החיובי הכי קטן.

שחקן B	שחקן A	
1,3,4	2, 5	חפצים
65	75	סכום

כעת נחלק את חפץ 5, נסמן בx את האחוז מחפץ 5 שיקבל שחקן A (לכן שחקן B יקבל  $x - 1$  ממנו), סכום הסל של שחקן A בלי חפץ 5 הוא 15, סכום הסל של שחקן B בבלי חפץ 5 הוא 65, ולכן נפתור את המשוואה הבאה,

$$15 + 60x = 65 + 40(1 - x)$$

$$100x = 90$$

$$x = \frac{9}{10}$$

סה"כ החלוקה תיתן לשחקן A את חפץ 2 ו- $\frac{9}{10}$  מחפץ 5,

$$15 + \frac{9}{10} \cdot 60 = 69 \text{ : סכום הסל של שחקן A}$$

ולשחקן B את חפץ 1 ת4ת3 ו- $\frac{1}{10}$  מחפץ 5,

$$5 + 40 + 20 + \frac{1}{10} \cdot 40 = 69 \text{ : סכום הסל של שחקן B}$$

**הוכחות:** נגדיר 2 קבוצות- קבוצה X- בה יהיו החפצים שיחס הערכים שלהם חיובי,

קבוצה Y- בה יהיו החפצים שסכום הערכים שלהם שלילי.

**האלגוריתם משתף לכל היותר חפץ אחד:** עבור חפצים מY האלגוריתם נותן אותם בשלמותם

לאחד מהשחקנים (זה שייחס להם ערך חיובי) ולא מאפשר הזזה שלהם בהמשך. עבור

חפצים מX האלגוריתם זהה לאלגוריתם "המנצח המתוקן" שעליו הוכחנו שמשתף לכל

היותר חפץ אחד. לכן סה"כ האלגוריתם משתף לכל היותר חפץ אחד.

**האלגוריתם יעיל פארטו:** אבחנה: עבור חפצים מX האלגוריתם זהה לאלגוריתם "המנצח

המתוקן" שעליו הוכחנו שיעיל פארטו, לכן החפצים היחידים שיכולים "להרוס" את היעילות

פארטו הם חפצים מקבוצה Y.

נניח בשלילה שהאלגוריתם אינו יעיל פארטו ולכן יש חלקה חדשה שהיא שיפור פארטו של

החלוקה המקורית שנתן האלגוריתם. לפי האבחנה מעלה, ההבדל בחלוקה הוא בחפצים

מקב' Y בלבד, נניח בה"כ שהשינוי מינימלי- כלומר רק בחפץ אחד- חפץ i (אחרת אם יש עוד

שינויים ההוכחה הזאת שמתייחסת רק לחפץ i כבר תפריך את זה שהחלוקה החדשה היא

שיפור פארטו של החלוקה המקורית ולכן זה יתפוסד בכל מקרה).

נניח בה"כ שהחלוקה החדש העבירה את חפץ i משחקן A לשחקן B ולכן בהכרח שחקן A

יחס ערך חיובי לחפץ i (החלוקה המקורית נתנה את חפץ i לשחקן A ולכן לפי האלגוריתם

הוא ייחס לו ערך חיובי), מכיוון שחפץ i מקבוצה Y אז יחס הערכים של חפץ i הוא שלילי ולכן

בהכרח שחקן B יחס לחפץ i ערך שלילי.

נתבונן מה העברת חפץ i משחקן A לשחקן B (השינוי שיצר את החלוקה החדשה) עשתה

לסכום הערכים בסל של כל אחד מהשחקנים:

סכום הסל של שחקן A בחלוקה החדשה = סכום הסל של שחקן A בחלוקה הישנה – ערך

חפץ i (כי הוא הועבר לשחקן B), מכיוון ששחקן A ייחס לחפץ i ערך חיובי סכום הסל

בחלוקה החדשה קטן מאשר הסכום בחלוקה המקורית ולכן שחקן A הפסיד.

סכום הסל של שחקן B בחלוקה החדשה = סכום הסל של שחקן B בחלוקה הישנה + ערך חפץ i (כי הוא הועבר לשחקן B), מכיוון ששחקן B ייחס לחפץ i ערך שלילי סכום הסל בחלוקה החדשה קטן מאשר הסכום בחלוקה המקורית ולכן שחקן B גם הפסיד.

סה"כ שני השחקנים הפסידו מהחלוקה הישנה לחלוקה החדשה וזו סתירה לכך שהחלוקה החדשה היא שיפור פארטו של החלוקה המקורית.

כפי שנאמר קודם השינוי היה יכול להעשות רק בחפצים מקבוצה Y אבל לא משנה איזה חפץ היינו מנסים להעביר מאחד לשני שניהם היו מפסידים (כי זה שקיבל אותו ייחס לו ערך חיובי וזה שלא קיבל אותו יחס לו ערך שלילי) ולכן זו חלוקה יעילה פארטו.

[האלגוריתם הוגן](#): האלגוריתם נעצר כאשר סכומי הסלים שווים (ההבדל המאלגוריתם המקורי הוא האתחול והחפצים שמותר להם לזוז מסל לסל) ולכן גם כאן הסכום בהכרח לא קטן מ-50 (אחרת הם יכלו להתחלף וזה היה שיפור פארטו בסתירה לכך שהאלגוריתם יעיל פארטו), לכן הסכום הוא 50 ומעלה אז האלגוריתם הוגן (כי סכום כל החפצים בעיני כל שחקן הוא 100 ולכן כל שחקן מקבל בעיניו לפחות חצי משווי כל החפצים).