

מטלה – החלפת בתים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 2: חיפוש מעגלי החלפה בפייתון

כיתבו פונקציה בפייתון המוצאת מעגל בגרף החלפת בתים. כותרת הפונקציה:

```
def find_trading_cycle(preferences: List[List[int]]): ...
```

הניחו שבתחילת הפונקציה, כל אדם i גר בבית i . הפרמטר `preferences` מתאר את ההעדפות של בעלי-הבתים. לכל i , הוקטור `preferences[i]` מתאר את סדר ההעדפות של אדם i . למשל, אם:

```
preferences[11] = [15, 13, 11, 7, 8, ...]
```

המשמעות היא, שאדם מספר 11 הכי רוצה את בית 15, אחריו את בית 13, אחריו את בית 11 (הבית הנוכחי שלו), וכו'..

הפונקציה מחזירה וקטור המתאר את המעגל, למשל אם מוחזר הוקטור:

```
[11, 15, 17, 11]
```

המשמעות היא, שאדם 11 מקבל את בית 15, אדם 15 מקבל את בית 17, ואדם 17 מקבל את בית 11.

שאלה 3: החלפת משמרות בפייתון

כיתבו פונקציה בפייתון המבצעת החלפת משמרות בין עובדים, בעזרת אלגוריתם מעגלי המסחר. העזרו במחלקה הבאה (ניתן לשנות לפי הצורך):

```
class Agent:
    name: str
    # Worker name, for display.
    preferences: list
    # preferences[0] is the best shift for the worker.
    # preferences[1] is the 2nd-best shift for the worker. etc...
    current_shift: int
    # The shift to which the worker is currently assigned
```

הפונקציה מקבלת כקלט וקטור עם כל העובדים במערכת (לכל עובד רשום סדר העדיפויות שלו והמשמרת הנוכחית שלו), וכותבת למסך את השינויים שיש לבצע בלוח השיבוצים, למשל:

Avraham moves from shift 0 to shift 1.

Isaac moves from shift 1 to shift 2.

Yaakov moves from shift 2 to shift 0.

כותרת הפונקציה:

ברוך ה' חנוך הדעת

```
def exchange_shifts (workers: List[Worker])
```

בדקו את הפונקציה בעזרת doctest.

שאלה 2: הסתברות להחלפה מוצלחת

נניח שיש n אנשים עם n בתים, וההעדפות של כל אדם מתפלגות באופן אחיד (ההסתברות שאדם i הכי רוצה את בית j היא $1/n$). מה ההסתברות שאדם מסוים יהיה חלק ממעגל-החלפה בסיבוב הראשון?

[אם אתם לא מצליחים לפתור לכל n , נסו לפתור לערכים קטנים, למשל 2, 3, וכו'..]

מטלה – החלפת כליות

שאלה 3: החלפת כליות – שני אלגוריתמים

סוג-דם תורם	סוג-דם חולה		בשאלה זו נניח שהתאמה בין תורם לנתרם תלויה רק בסוג הדם. נתון מאגר-נתונים ובו שלושה זוגות עם סוגי-דם לפי הטבלה בצד שמאל. א. ציירו את הגרף המכוון המתאר את ההתאמות בגרף.
0	AB	זוג ראשון	
A	0	זוג שני	
AB	A	זוג שלישי	

ב. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בלי החלפת כליות בכלל?

ג. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בעזרת האלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר (שנלמד בכיתה)?

ד. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בעזרת אלגוריתם למציאת שלשות רבות ביותר (שלא נלמד בכיתה)?

שאלה 4: החלפת כליות בישראל

א. באיזה מרכזים רפואיים בישראל אפשר להירשם להחלפת כליות?

ב. מהו האורך המקסימלי של מעגל-החלפה בתוכנית הישראלית?

ג. באיזו תדירות מריצים את האלגוריתם לחיפוש מעגלים?

ד. האם האלגוריתם הממומש בישראל הוא מעודד השתתפות (individually-rational)? הוכיחו את טענתכם בעזרת שלוש טענות לפחות מתוך אתר משרד הבריאות.

שאלה 4: הסתברות להחלפת כליות

לצורך השאלה, הניחו שהתאמה בין תורם לחולה תלויה רק בסוג הדם, ושהסתברות לכל סוג דם (0, A, B, AB) היא בדיוק רבע.

א. נניח שאדם חולה וזקוק לכליה, ואשתו בריאה ומוכנה לתרום לו. מה ההסתברות שהכליה מתאימה?

ב. נניח שיש שני זוגות כמו בסעיף א. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות מוצלחת? בכמה ההחלפה משפרת את סיכויי ההצלה של כל אחד מהחולים?

* בסעיפים הבאים נניח שיש שלושה זוגות כמו בסעיף א. ניתן לפתור סעיפים אלה ע"י קוד.

ג. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות מוצלחת, אם החלפות מתבצעות בזוגות בלבד?

ד. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות בשלושה, בכמה ההחלפה משפרת את סיכויי ההצלה של החולים?

* שאלה 4: החלפת כליות עם סדרי עדיפויות

במרכז ההשתלות הלאומי החליטו לתת עדיפות לחולים עם משפחות גדולות - כי יותר אנשים ישמחו אם הם יהיו בריאים. הוגדר שרמת ה"שמחה" של כל חולה שווה למספר הנפשות במשפחה שלו.

א. תארו אלגוריתם המוצא החלפת-כליות בזוגות, שבה רמת השמחה היא הגדולה ביותר האפשרית.

ב. הראו דוגמה שבה האלגוריתם של סעיף א נותן תוצאה שונה מהאלגוריתם שלמדנו בהרצאה.

ג. הריצו את האלגוריתם בפיתון על מספר דוגמאות (השתמשו בפונקציה המתאימה מהספריה networkx).

שאלה 5: החלפת כליות בפיתון

כיתבו פונקציה המקבלת מטריצת התאמה בין זוגות, ומוצאת מעגלים **באורך 2 או באורך 3**, כך שמספר המושתלים הכולל הוא הגבוה ביותר. הפונקציה לא חייבת להיות יעילה חישובית (אפשר לכתוב פתרון brute force). כותרת אפשרית לפונקציה:

```
def find_max_matches (compatible: List[List[bool]]): ...
```

המטריצה compatible מתארת התאמה בין תורם לחולה. למשל

compatible[11,22]==True אומר שתורם מספר 11 יכול לתרום לחולה מספר 22;

compatible[22,11]==True אומר שתורם מספר 22 יכול לתרום לחולה מספר 11 (שימו לב - המטריצה לא בהכרח סימטרית).

פלט לדוגמה:

Length 2 cycle: 11→22 and 22→11

Length 3 cycle: 44→55 and 55→99 and 99→44

ברוך ה' חונן הדעת