מטלה – חלוקה עם שיתופים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדוייק ומפורט ברמה של שפת תיכנות.

שאלה 1: אלגוריתם "המנצח המתוקן" - אסטרטגיה

דונאלד ואיוואנה מחלקים ביניהם ארבעה חפצים בעזרת אלגוריתם "המנצח המתוקן". הערכים האמיתיים שלהם הם אותם ערכים מהדוגמה שבהרצאה (נמצאים בקובץ אקסל בתיקיית code).

א. לפני הפעלת האלגוריתם, איוואנה גילתה את המספרים האמיתיים של דונאלד. היא רוצה לנצל את העובדה כדי להשיג ערך כמה שיותר גדול לעצמה. איזה מספרים היא צריכה למסור לאלגוריתם, כך שהסל שלה יהיה בעל הערך הגדול ביותר האפשרי, בהינתן המספרים האמיתיים של דונאלד? **שימו לב**:

- סכום המספרים של איוואנה עדיין חייב להיות 100 – בהתאם לדרישת האלגוריתם.
- יש להריץ את האלגוריתם בהתאם למספרים **הלא-אמיתיים** שאיוואנה כתבה, אבל אחר-כך לחשב את ערך הסל של איוואנה לפי המספרים **האמיתיים** שלה (כי בסופו של דבר זה מה שחשוב לה).

ב. חזרו על סעיף א בכיוון ההפוך - דונאלד גילה את המספרים האמיתיים של איוואנה, והוא רוצה להשיג ערך כמה שיותר גדול לעצמו (בסעיף זה, איוואנה מוסרת את המספרים האמיתיים שלה לאלגוריתם).

ג. איזו חלוקה יחזיר האלגוריתם, אם גם דונאלד וגם איוואנה ידווחו בו-זמנית מספרים לא-אמיתיים – איוואנה לפי סעיף א, ודונאלד לפי סעיף ב? האם החלוקה הוגנת? האם החלוקה יעילה-פארטו?

* ד. כתבו אלגוריתם הפותר את הבעיה של סעיף א באופן כללי, לכל מספר של חפצים. האלגוריתם מקבל כקלט שני וקטורי-מספרים - של דונאלד ושל איוואנה; האלגוריתם מחשב עבור איוואנה את המניפולציה הטובה ביותר - וקטור-המספרים שהיא צריכה למסור לאלגוריתם כדי לקבל את הערך הגבוה ביותר האפשרי עבורה, בהינתן המספרים של דונאלד.

* שאלה 2: חלוקה מסודרת

כתבו אלגוריתם המקבל שני וקטורי-ערכים, וחלוקה בין שני שחקנים, ובודק אם החלוקה מסודרת.

- אם החלוקה מסודרת, האלגוריתם מחזיר "כן".
- אם החלוקה לא מסודרת, האלגוריתם מחזיר שיפור פארטו שלה.

דוגמה לקלט:

- וקטורי-הערכים: שחקן א – [10, 20, 30, 40]; שחקן ב – [40, 30, 20, 10].
- החלוקה: שחקן א – [0.7, 0.4, 0, 1]; שחקן ב – [0.3, 0.6, 1, 0]

- (כלומר: שחקן א מקבל 70% מחפץ 1, 40% מחפץ 2, ואת כל חפץ 4).

פלט אפשרי בדוגמה זו:

- החלוקה לא-מסודרת.
- שיפור פארטו: שחקן א מעביר 0.1 מחפץ 1 לשחקן ב, ושחקן ב מעביר 0.1 מחפץ 2 לשחקן א.
- החלוקה לאחר השיפור: שחקן א - [0.6, 0.5, 0, 1], שחקן ב – [0.4, 0.5, 1, 0]

* שאלה 3: חלוקה עם פחות שיתופים

הגדרה: חלוקה ב נקראת **שיפור פארטו חלש** של חלוקה א, אם כל השחקנים מקבלים בחלוקה ב, לפחות אותו ערך שקיבלו בחלוקה א (אף אחד לא מפסיד; ייתכן שמישהו מרוויח וייתכן שלא).

כתבו אלגוריתם המקבל שני וקטורי-ערכים, וחלוקה בין שני שחקנים, שיש בה שני שיתופים או יותר. האלגוריתם מחזיר חלוקה, שהיא שיפור פארטו חלש של החלוקה המקורית, ויש בה רק שיתוף אחד לכל היותר.

דוגמה לקלט:

- וקטורי-הערכים: שחקן א – [10, 20, 30, 40]; שחקן ב – [40, 30, 20, 10].
- החלוקה: שחקן א – [0.7, 0.4, 0, 1]; שחקן ב – [0.3, 0.6, 1, 0]
  - (כלומר: שחקן א מקבל 70% מחפץ 1, 40% מחפץ 2, ואת כל חפץ 4).

פלט אפשרי בדוגמה זו:

- שחקן א מעביר 0.7 מחפץ 1 לשחקן ב, ושחקן ב מעביר 0.6 מחפץ 2 לשחקן ב.
- החלוקה לאחר השיפור: שחקן א - [0, 1, 0, 1], שחקן ב – [1, 0, 1, 0]

שאלה 4: "המנצח המתוקן" עם ערכים חיוביים ושליליים

תיארנו את אלגוריתם "המנצח המתוקן" עבור שחקנים עם ערכים חיוביים. בשאלה זו נניח שהערכים יכולים להיות מספרים ממשיים כלשהם: כל חפץ יכול להיות חיובי בעיני שני השחקנים, או שלילי בעיני שניהם, או חיובי בעיני אחד מהם ושלילי בעיני השני.

א. הראו דוגמה עם ערכים חיוביים ושליליים, שבה אלגוריתם "המנצח המתוקן" לא עובד (לא מחזיר חלוקה הוגנת ויעילה).

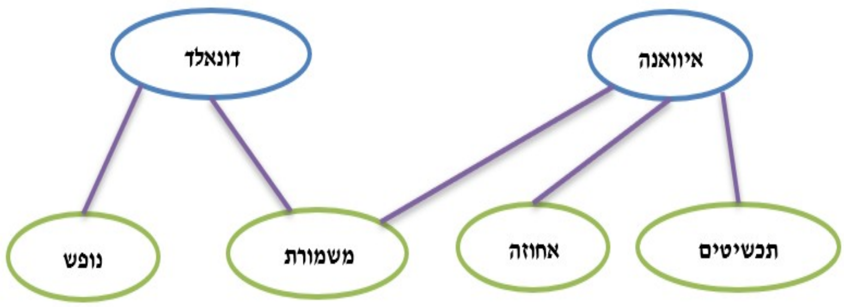
ב. הרחיבו את האלגוריתם כך שיוכל לטפל גם במצב שבו הערכים הם מספרים ממשיים כלשהם. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם מחזיר חלוקה יעילה-פארטו, ללא קנאה, ועם שיתוף אחד לכל היותר.

שאלה 5: גרף הצריכה

הגדרה. **גרף־הצריכה** של חלוקה נתונה הוא גרף דו־צדדי לא־מכוון וללא משקלים, שבו:

- הקודקודים בצד אחד הם השחקנים;
- הקודקודים בצד השני הם החפצים;
- יש צלע בין שחקן `i` לבין חפץ `j`, אם ורק אם שחקן `i` מקבל חלק חיובי של חפץ `j`.

לדוגמה, גרף הצריכה של החלוקה בין איוואנה לדונאלד מההרצאה נראה כך:



נתונה חלוקה של `m` חפצים בין `n` שחקנים.

א. הוכיחו: אם בגרף-הצריכה של החלוקה אין מעגלים, אז בחלוקה יש לכל היותר `n-1` חפצים משותפים.

ב. הראו שהכיוון השני של סעיף א לא בהכרח נכון: ייתכן שבגרף-הצריכה יש מעגלים, ובכל-זאת יש לכל היותר `n-1` חפצים משותפים.

ג. כתבו קוד בפייתון, המקבל מטריצה `m` על `n` המייצגת חלוקה, ובודק אם בגרף-הצריכה של החלוקה יש מעגלים. במטריצת הקלט, בשורה `i` ובעמודה `j` נמצא השבר של חפץ `j` שנמצא בידי שחקן `i`. לדוגמה, החלוקה בין דונאלד לאיוואנה תיוצג ע"י המטריצה הבאה:

```
[[1, 1, 0.07, 0],
 [0, 0, 0.93, 1]]
```

במקרה זה, הקוד שלכם אמור להחזיר שאין מעגלים.