חלוקה הוגנת של חפצים עם כסף

כשמחלקים חפצים שיש להם ערך כספי, ושאפשר לקנות ולמכור בשוק, ניתן להשיג חלוקה הוגנת על־ידי שימוש בכסף. בשפת השמאים, העברת כסף בין שחקנים על־מנת להשיג הוגנות נקראת **תשלומי איזון** (באנגלית settlements או side payments). תשלומי איזון נזכרו כבר בתלמוד, כאמצעי להשיג הוגנות בחלוקת ארץ ישראל בין השבטים:

"ולא נתחלקה ארץ ישראל אלא בכסף" (תלמוד בבלי, בבא בתרא קכב א) –
"מי שעולה לו גורלו בקרוב לירושלים, מעלה מעות למי שעלה גורלו ברחוק מירושלים" (רשב"ם שם).

משתמשים בהם גם בימינו, בתהליכים של חלוקת ירושות, וכן בתהליכי "איחוד וחלוקה": כשמפשירים קרקע חקלאית לבנייה, יש לתת לכל אחד מבעלי־הקרקע דירה כלשהי בשווי יחסי לשווי הקרקע שנלקחה ממנו; אם שווי הדירות אינו מתאים במדוייק לשווי הדרוש לשם כך, החוק קובע שיש לגבות תשלומי־איזון מהשחקנים שקיבלו יותר מהמגיע להם, ולחלק אותם לשחקנים שקיבלו פחות מהמגיע להם. בפרק זה נראה אלגוריתמים המשתמשים בתשלומי־איזון כדי להשיג חלוקה הוגנת ויעילה במצבים שונים.

שני שחקנים וחפץ אחד

האלגוריתם העתיק ביותר (כנראה) לחלוקת חפצים עם כסף נזכר בתלמוד בשם "גוד או אגוד" (תלמוד בבלי, בבא בתרא יג א). בהלכה הוא מתואר כך: "אחד מהשותפים שאמר לחבירו... בדבר שאי אפשר שיחלוקו... 'מכור לי חלקך בכך וכך, או קנה ממני חלקי בשער הזה' – הדין עמו, וכופין את הנתבע למכור לחבירו או לקנות ממנו" (שולחן ערוך, חושן משפט קעא ו). נציג אותו כאלגוריתם:

1. שחקן א מציע מחיר כלשהו p.
2. שחקן ב מחליט אם לקנות או למכור:
   - אם החליט לקנות – הוא משלם p/2 לשחקן א, ומקבל את החפץ.
   - אם החליט למכור – שחקן א משלם לו p/2 ומקבל את החפץ.

האלגוריתם מזכיר מאד את אלגוריתם "חתוך ובחר" לחלוקת עוגה. גם התכונות שלו דומות.

משפט. אלגוריתם "גוד או אגוד" מאפשר לכל שחקן להבטיח שהחלוקה תהיה ללא־קנאה עבורו.

הוכחה. כאשר שחקן א מציע מחיר p, הוא למעשה יוצר שני סלים:

* הסל הראשון כולל את החפץ, וכן יתרה שלילית של p/2. נסמנו ב: (x, −p/2).

* הסל השני כולל יתרה חיובית של p/2. נסמנו ב: (0, +p/2).

כאשר p=0, הסל (x, −p/2) עדיף בבירור (בהנחה שמדובר בחפץ חיובי). כאשר p גדול מאד (גדול הרבה יותר מערכו של החפץ), הסל (0, +p/2) עדיף בבירור. כיוון שניתן לשנות את p באופן רציף, ניתן למצוא p כלשהו שבו שני הסלים שקולים בעיני שחקן א. אם שחקן א מציע מחיר זה, מובטח לו שלא יקנא, לא משנה מה יחליט שחקן ב.

שחקן ב יכול לבחור, מבין שני הסלים הנ"ל, את הסל הטוב ביותר עבורו, ולכן החלוקה ללא קנאה עבורו. ***

אלגוריתם "חתוך ובחר" לחלוקת עוגה מבטיח חלוקה **פרופורציונלית** – בתנאי שלשני השחקנים יש הערכות חיבוריות ורציפות. גם אלגוריתם "גוד או אגוד" מבטיח תכונה דומה, אבל התנאי הדרוש הוא מעט שונה. התנאי שנגדיר כעת הוא תנאי מקובל מאד בבעיות חלוקה עם כסף.

הגדרה. הערכה של שחקן נקראת **קוואזיליניארית** (quasilinear) אם הערך שהוא מייחס לסל, הכולל קבוצה X של חפצים וסכום־כסף p, הוא:

$$v(X) + p$$

כאשר v היא פונקציה כלשהי המייחסת ערך מספרי לקבוצות חפצים. **שחקן קוואזיליניארי** הוא שחקן שיש לו הערכה קוואזיליניארית

הסיבה לשם "קוואזיליניארית" היא, שההערכה היא רק "חצי ליניארית" – היא ליניארית ביחס **לכסף**, אבל לא בהכרח ביחס **לחפצים**: הפונקציה v יכולה להיות פונקציה כלשהי (ליניארית או לא ליניארית) של החפצים.

בפרק זה, נשתמש במונח **ערך (value)** כדי לתאר את ההערכה של השחקנים לחפצים בלבד (ללא כסף), ובמונח **תועלת (utility)** כדי לתאר את ההערכה של השחקנים לסל הכולל חפצים וכסף. במונחים אלה, ניתן לתאר את תכונת הקוואזיליניאריות בקיצור בנוסחה הבאה:

תועלת = ערך + כסף.

שחקנים קוואזיליניאריים יכולים לתאר את ההערכות שלהם במונחים כספיים. לדוגמה, כשמישהו אומר "המכונית הזאת שווה לי 10000 שקל", המשמעות היא, שהוא מייחס את אותה תועלת לשני הסלים: (מכונית, 0 שקל) ו: (אין מכונית, 10000 שקל). אם יקבל את המכונית וישלם, למשל, 7000 שקל, את התועלת הכוללת שלו מהעיסקה הזאת תהיה 10000−7000=3000.

משפט. אלגוריתם "גוד או אגוד" מאפשר לכל שחקן קוואזיליניארי להבטיח שהחלוקה תהיה פרופורציונלית עבורו - התועלת שיקבל תהיה לפחות 0.5 מערך החפץ כולו בעיניו.

הוכחה. נסמן את הערכים הכספיים, שהשחקנים מייחסים לחפץ, ב: v_a, v_b.

שחקן א יכול להציע $p=v_a$. כך הוא יוצר שני סלים הנותנים לו תועלת זהה:

$$p/2 = v_a-p/2 = v_a/2$$

לכן החלוקה פרופורציונלית עבורו לכל בחירה אפשרית של שחקן ב.

שחקן ב יכול לבחור בין שתי אפשרויות: אם $v_b > v_a$, הוא יבחר לקנות. במקרה זה, התועלת שלו תהיה:

$$v_b-p/2 = v_b-v_a/2 > v_b/2.$$

אם $v_b \leq v_a$, הוא יבחר למכור. במקרה זה, התועלת שלו תהיה:

$$p/2 = v_a/2 \geq v_b/2.$$

בשני המקרים החלוקה פרופורציונלית עבורו. ***

תכונה טובה נוספת של האלגוריתם היא, שהוא שומר על **תקציב מאוזן** – סכום התשלומים של השחקנים הוא אפס, שכן שחקן אחד משלם p/2 והשחקן השני משלם ‎–p/2.

הגדרה. אלגוריתם לחלוקת חפצים עם כסף נקרא **מאוזן תקציבית (budget-balanced)** אם סכום התשלומים שמשלמים השחקנים הוא תמיד 0.

ניתן לראות באיזון התקציבי תכונה נוספת של הוגנות: השחקנים – כקבוצה – אינם מפסידים כסף, וגם מנהל המערכת – האדם שאחראי להריץ את האלגוריתם – אינו צריך להפסיד כסף ולסבסד את האלגוריתם מכיסו.

מצאנו פתרון הוגן – אבל האם הוא יעיל?

כשעסקנו בחלוקת עוגה ללא כסף, ראינו שאלגוריתם "חתוך ובחר" אינו יעיל־פארטו. כדי למצוא חלוקה יעילה־פארטו, השתמשנו בעקרונות שונים: **אוטילטרי** (מיקסום סכום הערכים), **אגליטרי** (מיקסום הערך הקטן ביותר), **נאש** (מיקסום מכפלת הערכים) ועוד.

בחלוקה עם כסף, המצב הרבה יותר פשוט: **יעילות־פארטו שקולה ליעילות אוטיליטרית**. לפני שנוכיח טענה זו, עלינו להגדיר במדוייק את תכונת היעילות בחלוקה עם כסף.

הגדרה. חלוקה א נקראת **שיפור פארטו** של חלוקה ב, אם:
1. התועלת של כל השחקנים בחלוקה א גדולה לפחות כמו בחלוקה ב.
2. סכום התשלומים בחלוקה א גדול לפחות כמו בחלוקה ב.
3. התועלת של חלק מהשחקנים בחלוקה א גדולה יותר מבחלוקה ב.
חלוקה נקראת **יעילה פארטו** אם לא קיימת חלוקה שהיא שיפור פארטו שלה.

ניתן להבין הגדרה זו באופן הבא. מנהל המערכת (– האחראי להפעלת האלגוריתם) הוא מעין שחקן, שהתועלת שלו היא סכום התשלומים שמשלמים השחקנים. לכן, כדי שיהיה שיפור פארטו, אנו דורשים שמנהל המערכת לא יפסיד כסף. ללא דרישה זו, לא היתה בכלל חלוקה יעילה־פארטו: לכל חלוקה היה שיפור־פארטו המתקבל ע"י נתינת סכום־כסף כלשהו ("סובסידיה") לכל השחקנים.

משפט. כשכל השחקנים קוואזיליניאריים, חלוקת חפצים היא יעילה־פארטו אם־ורק־אם היא ממקסמת את סכום הערכים.
הוכחה. **כיוון אחד**: נתונה חלוקה א שאינה יעילה־פארטו; נוכיח שאינה ממקסמת את סכום הערכים. תהי חלוקה ב שיפור־פארטו של חלוקה א. לפי הגדרת שיפור-פארטו, בחלוקה ב **סכום התועלות** של השחקנים גדול יותר מבחלוקה א, ו**סכום התשלומים** שמשלמים השחקנים גדול או שווה מבחלוקה א. לכל שחקן קוואזיליניארי, תועלת = ערך + כסף; התשלום הוא כסף שלילי, ולכן תועלת = ערך – תשלום, כלומר, ערך = תועלת + תשלום. לכן:

סכום ערכים = סכום תועלות + סכום תשלומים.

לכן בחלוקה ב סכום הערכים גדול מבחלוקה א. לכן חלוקה א אינה ממקסמת סכום ערכים.

כיוון שני: נתונה חלוקה א שאינה ממקסמת סכום ערכים; נוכיח שאינה יעילה־פארטו. תהי חלוקה ב חלוקה עם סכום ערכים גדול יותר משל חלוקה א. נבנה חלוקה חדשה באופן הבא:

* נתחיל מחלוקה ב, וניקח מכל שחקן סכום־כסף השווה לערך שלו בחלוקה זו. כעת התועלת של כל שחקן היא אפס.

* ניתן לכל שחקן סכום־כסף השווה לערך שלו בחלוקה א. כיוון שסכום הערכים בחלוקה ב גדול יותר, נשאר לנו עודף חיובי כלשהו, שנסמן ב־T.

* נגבה מכל שחקן את אותו תשלום ששילם בחלוקה א. כעת התועלת של כל שחקן שווה לתועלת שהיתה לו בחלוקה א.
* נחלק את העודף T שווה בשווה בין השחקנים. כעת התועלת של כל שחקן גדולה ממש מהתועלת שלו בחלוקה א, וסכום התשלומים שווה לחלוקה א. לכן החלוקה החדשה היא שיפור־פארטו של חלוקה א. לכן חלוקה א אינה יעילה־פארטו. ***

משפט. כשמחלקים חפץ אחד בין שני שחקנים קוואזיליניאריים הפועלים בהתאם לערכים האמיתיים שלהם, אלגוריתם "גוד או אגוד" מחזיר חלוקה יעילה פארטו.
הוכחה. כששני השחקנים פועלים לפי הערכים האמיתיים שלהם, האלגוריתם נותן את החפץ לשחקן שהערך שלו גדול ביותר. לכן החלוקה המתקבלת ממקסמת את סכום הערכים. לפי המשפט הקודם, החלוקה יעילה־פארטו. ***

אם כך, עבור שני שחקנים וחפץ אחד יש לנו פתרון מושלם: גם פרופורציונלי, גם ללא קנאה, וגם יעיל פארטו. כעת נראה מה קורה כשיש יותר משני שחקנים ויותר מחפץ אחד.

הרבה שחקנים והרבה חפצים

כדי להשיג חלוקה יעילה־פארטו, עלינו למצוא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים. אנחנו מניחים שההערכות של השחקנים הן **קוואזיליניאריות** וגם **חיבוריות** – הערך הכספי, שכל שחקן מייחס לקבוצת חפצים, שווה לסכום הערכים שהוא מייחס לחפצים. במצב זה, קל למצוא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים – פשוט ניתן כל חפץ לשחקן המייחס לו ערך גבוה ביותר. לאחר מכן נגבה מכל שחקן, שקיבל חפץ, את ערך החפץ עבורו. נחלק את הכסף בין השחקנים לפי כלל־תשלום כלשהו, שיבטיח שהחלוקה תהיה הוגנת. נקרא לאלגוריתם "אלגוריתם המכרז". המבנה הכללי של האלגוריתם הוא:

1. כל שחקן רושם את הערך שהוא מייחס לכל חפץ.
2. האלגוריתם מוכר כל חפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר, בתמורה לערך שרשם.
3. האלגוריתם מחלק את הכסף, שהתקבל מכל השחקנים, לפי כלל־תשלום כלשהו.

ישנם כמה כללי־תשלום מקובלים. כדי לתאר אותם, נסמן באות S את סכום התשלומים שהתקבלו מכל השחקנים. נסמן ב־V_i את הערך הכולל ששחקן i מייחס לכל החפצים.

- **כלל התשלום השווה**: נחלק את הכסף שווה בשווה בין השחקנים – כל שחקן יקבל S/n.
- **כלל העודף השווה**: נשלם לכל שחקן i את הערך הפרופורציונלי שלו – V_i/n. לאחר מכן, נחלק את העודף שווה בשווה בין השחקנים. כלל זה הוצע לראשונה ע"י המתמטיקאי ברוניסלאו קנאסטר (Bronislaw Knaster) – אחד מממציאי אלגוריתם "המפחית האחרון" לחלוקת עוגה. לכן נקרא לו גם **כלל קנאסטר**.
- **כלל התשלום היחסי**: נחלק את הכסף בין השחקנים באופן יחסי לערך הכולל שלהם – כל שחקן i יקבל $S*V_i/(sum_i\ V_i)$. כלל זה הוצע לראשונה ע"י מתיאס ריית' (Matthias G. Raith). לכן נקרא לו גם **כלל ריית'**.

דוגמה. נתונים שלושה חפצים ושלושה שחקנים עם הערכים הבאים:

	ספה	**פסנתר**	**שטיח**	**סכום**
שחקן א:	**60**	**50**	30	140 =
שחקן ב:	50	40	**40**	130 =
שחקן ג:	50	20	0	70 =
מקסימום:	60	50	40	150 =

בצעד 2, שחקן א מקבל ספה ופסנתר ומשלם 110; שחקן ב מקבל שטיח ומשלם 40; שחקן ג לא מקבל ולא משלם כלום. התשלום הכולל שנאסף הוא 150. חלוקת התשלום לפי הכללים השונים היא:

כלל תשלום:	**שווה**	**קנאסטר**	**ריית'**
שחקן א:	50	58+8/9	61.7647
שחקן ב:	50	55+5/9	57.3529
שחקן ג:	50	35+5/9	30.8824
סכום:	150	150	150

והתשלומים נטו הם:

כלל תשלום:	**שווה**	**קנאסטר**	**ריית'**

שחקן א:	−60	−51−1/9	−48.235
שחקן ב:	+10	+15+5/9	+17.3529
שחקן ג:	+50	+35+5/9	+30.8824
סכום:	0	0	0

משפט. אלגוריתם המכרז עם כל אחד משלושת כללי־התשלום (שווה, קנאסטר, ריית') מחזיר חלוקה יעילה־פארטו ופרופורציונלית.

הוכחה. יעילות פארטו נובעת מכך שכל חפץ נמסר לשחקן המייחס לו ערך גבוה ביותר.

כדי להוכיח פרופורציונליות, צריך להוכיח שהתועלת של כל שחקן i בסוף האלגוריתם היא לפחות V_i/n. בצעד 2, כל שחקן משלם את הערך שהוא מייחס לחפצים שקיבל, ולכן התועלת שלו בסוף צעד 2 היא אפס. לכן התועלת הכוללת שלו שווה לתשלום שהוא מקבל בצעד 3. נוכיח שכל כללי התשלום משלמים לכל שחקן לפחות V_i/n:

התשלום השווה הוא S/n. האלגוריתם גובה, עבור כל חפץ, את הערך הגבוה ביותר שמייחס לו שחקן כלשהו; לכן, סכום התשלומים הוא לפחות סכום הערכים של כל אחד מהשחקנים: $S \geq V_i$ לכל i. לכן התשלום השווה הוא לפחות V_i/n.

כלל קנאסטר משלם תחילה בדיוק V_i/n לכל שחקן i. כאמור, $S \geq V_i$, ולכן סכום התשלומים הניתנים לכל השחקנים הוא לכל היותר S. לכן, העודף גדול או שווה אפס, והתשלום הכולל לכל שחקן i הוא לפחות V_i/n.

כלל ריית' משלם לכל שחקן $V_i*S/(\mathrm{sum}_i\ V_i)$. כאמור, $S \geq V_i$, ולכן $\mathrm{sum}_i\ V_i \leq n*S$. לכן התשלום של ריית' הוא לפחות $V_i*S/(n*S) = V_i/n$. ***

למרות זאת, לא כל הכללים שווים – רק אחד מהם מבטיח חלוקה ללא־קנאה.

משפט. אלגוריתם המכרז מבטיח חלוקה ללא-קנאה עם כלל התשלום השווה, אבל לא עם כלל קנאסטר וכלל ריית.

הוכחה.

(א) נסמן את ההערכה של כל שחקן i בפונקציה v_i, את הסל שמקבל כל שחקן ב- X_i. כיוון שכל חפץ נמסר לשחקן המייחס לו את הערך הגבוה ביותר, מתקיים לכל זוג i, j:

$$v_i(X_j) \leq v_j(X_j)$$

עם כלל התשלום השווה, התועלת של כל שחקן i היא S/n. לעומת זאת, התועלת שכל שחקן i מייחס לסל של שחקן אחר j היא הערך שהוא מייחס לאותו סל, פחות התשלום ששחקן j שילם בצעד 2, ועוד הסכום ששחקן j קיבל בצעד 3:

$$v_i(X_j) - v_j(X_j) + S/n \leq S/n$$

לכן החלוקה ללא־קנאה.

(ב) נניח שיש חפץ אחד ושלושה שחקנים המייחסים לו ערכים שונים: $V_1 > V_2 > V_3$. שחקן 1 זוכה בחפץ ומשלם V_1. כלל קנאסטר וכלל ריית' מחלקים את הסכום באופן לא שווה: שחקן 1 מקבל יותר משחקן 2, ושחקן 2 מקבל יותר משחקן 3. לכן, שחקן 3 מקנא בשחקן 2 (למעשה, **כל** כלל־תשלום הנותן תשלום שונה לשחקנים עם ערך כולל שונה יחזיר חלוקה עם קנאה במקרה זה). ***

שימו לב: כשעסקנו בחלוקת עוגה ומשאבים אחרים ללא כסף, היה לנו קשה להשיג חלוקה שהיא גם הוגנת וגם יעילה. מתברר, שכאשר משתמשים בכסף, השילוב בין הוגנות לבין יעילות נעשה הרבה יותר קל.
אלגוריתם פשוט ומהיר –אלגוריתם המכרז עם כלל התשלום השווה – משיג חלוקה שהיא גם הוגנת וגם יעילה.

בסעיף הבא נראה, שהשימוש בכסף מאפשר לנו לפתור בעיות חלוקה מורכבות ומציאותיות יותר, עם אילוצים חיצוניים נוספים מעבר לדרישת ההוגנות.

סיכם: אראל סגל-הלוי.