פורת אהרון

מטלה 4

* שאלה 3: אלגוריתם הרשימה – יחס קירוב מדוייק יותר

הוכיחו: יחס הקירוב של אלגוריתם הרשימה בחלוקת מטלות ל-n שחקנים הוא לכל היותר:

$2 - 1/n$

הוכחה:

נשתמש בנרמול:

הוכחה. נסמן: OPT = העלות האגליטרית. נחלק את כל העלויות ב־OPT. לאחר החלוקה, סכום העלויות של כל שחקן בחלוקה האגליטרית ≤ 1. לכן, העלות של כל מטלה ≤ 1, וסכום העלויות של כל המטלות $\le n$.

נגדיר: $v(i)$ פונקציה המחשבת את העלות של מטלה i

נניח בשלילה שלאחר החלוקה $\max > 2 - \frac{1}{n}$ נסמן את אותו שחקן ב m.

לפי האלגוריתם קיים סיבוב בו השחקן m היה עם העלות המינימלית.

ולאחריו העלות שלו הייתה $< 2 - \frac{1}{n}$

נחשב : $(1): \min + v(j) > 2 - \frac{1}{n}$ לפי הנרמול:

$$\forall j:\ v(j) \le 1 \to min\ + 1 \ge\ min + v(j) > 2 - \frac{1}{n} \to \min + 1 > 2 - \frac{1}{n} \to$$

$$(2): \min >\ 1 - \frac{1}{n}$$

לכן:

K- מספר המטלות שחולקו.

$v(\hat{t})$- העלות של שחקן t

$$\Sigma_{i=1}^{k} v(i) = \Sigma_{\hat{t}=1}^{n-1} v(\hat{t}) + min + v(j) >^{(2)} \Sigma_{\hat{t}=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + min + v(j)$$

$$>^{(1)} \Sigma_{t=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 - \frac{1}{n} = (n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 - \frac{1}{n} = (n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = n - 1 + 1 = n$$

לכן: $\Sigma_{i=1}^{k} v(i) > n$ בסתירה לנרמול.