מטלה 1 שאלה 3:

א. במצב כזה, נרצה שכל אחד ייקבל פרוסה ביחס פרופרציונלי לתרומה שלו כלומר,

תמי תקבל: $V_T(X_T) \geq \frac{n \cdot V_T(C)}{n+k}$

ועמי יקבל: $V_A(X_A) \geq \frac{k \cdot V_A(C)}{n+k}$

עבור n משתתפים, כאשר תרומת כל משתתף היא $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה פרופרציונלית תהיה:

$$\forall\, i \in [n]\; V_i(X_i) \geq \frac{a_i \cdot V_i(C)}{\sum_{j=1}^{n} a_j}$$

ב. נוכל להשתמש באלגוריתם "המפחית האחרון" שהוא ללא קנאה (ובמגוון דרכים הסברנו שחלוקה ללא קנאה היא גם חלוקה פרופרציונלית).
כאשר עמי ישחק עבור k משתתפים, ותמי עבור n משתתפים.
כאשר בכל שלב תחתך שלדעת המשתתף הראשון מהווה $\frac{1}{n+k}$ מהעוגה.
הסבבים יתבצעו באופן הבא:
עמי יחתוך מה שלדעתו מהווה $\frac{1}{n+k}$ מהעוגה.-

- אם תמי תסכים איתו היא תיקח את החתיכה
- אם היא תחשוב שהחתיכה גדולה מידי היא תפחית ובדומה לאלגו' המקורי, תיקח את החתיכה המופחתת
- אם תחשוב שקטן מידי- עמי ייקח את החתיכה

אם אחד מהם קיבל את מספר החתיכות המגיע לו- השני יקבל את היתר והאלגוריתם ייגמר.

סיבוכיות: $n+k$ סבבים לכל היותר כאשר בכל סבב יישאלו 2 שאלות. סה"כ $O(n+k)$, כאשר ייתכן שעוד קודם לכן עמי או תמי יקבלו מספיק חתיכות והשני יוותר עם היתר.

אוכיח באינדוקציה שבכל שלב עמי ותמי נמצאים עם

אפצל את ההוכחה לכך שהחלוקה שהאלגו' מניב היא פרופרציונלית, ל-3 חלקים:

1. אם עמי קיבל k פרוסות ראשון, הוא יהיה מרוצה כיוון שהוא בחר בכל פעם מה שלדעתו מהווה $\frac{1}{n+k}$ מהעוגה.
   באותה מידה, בכל k הפעמים שתמי לא בחרה באותה החתיכה- זה היה משום שהיא חשבה שהיא קטנה יותר מ- $\frac{1}{n+k}$ מהעוגה, ולכן, כשנסכום את הערכתה של תמי לסך החתיכות שעמי קיבל- לדעתה זה יהיה פחות ממש מ-$\frac{k}{n+k}$ מהעוגה, ולכן היא תקבל יותר מ-$\frac{n}{n+k}$ מהעוגה.
2. אם תמי סיימה קודם, בכל שלב מבין n השלבים שבהם בחרה את הפרוסה שעמי חתך, לדעתה זה היווה $\frac{1}{n+k}$ מהעוגה. לכן, היא תקבל סה"כ לפחות $\frac{n}{n+k}$ מההערכה שלה לעוגה ותהיה מרוצה.
   באותה מידה, בכל פעם עמי חתך מה שלדעתו מהווה $\frac{1}{n+k}$ מערך העוגה, ואז אם תמי החלק מהשלבים לקחה חתיכה מופחתת או את אותה חתיכה שעמי חתך- מבחינת עמי "נלקח" לו לכל היותר $\frac{n}{n+k}$ מהעוגה והוא נותר עם לפחות $\frac{k}{n+k}$ מהערכתו לעוגה.

3. אם שניהם סיימו באיטרציה האחרונה. בכל שלב תמי לקחה חתיכה בגודל שהוא $\frac{1}{n+k}$ מהערכתה לעוגה, לכן, היא לקחה $n-1$ פעמים חתיכות מהעוגה (שכן אחרת לא היינו מגיעים לשלב האחרון כי אם הייתה מקבלת n חתיכות, עמי היה מקבל את היתר) וכעת בשלב האחרון עמי יחתוך חתיכה, היא אם תרצה תפחית ולכן תהיה מרוצה ואם לא אז תיקח את החתיכה הנותרת.
ועמי יהיה מרוצה כי בכל הפעמים שהוא חתך חתיכה וקיבל זה כי לדעתו ערך החתיכה היה $\frac{1}{n+k}$ ולכן יהיו לו $k-1$ חתיכות שהוא מרוצה מהן (מרוצה מהן הכוונה שהוא באמת חושב שערכן הוא לפחות $\frac{k-1}{n+k}$ מהערכתו לעוגה), בחיתוך האחרון הוא יחתוך מה שלדעתו שווה ל-$\frac{1}{n+k}$ – אם תמי לא רצתה את החתיכה האחרונה הוא ייקח אותה ולכן יהיה מרוצה.
במקרה שבו תמי הפחיתה או לקחה את החתיכה יש כאן נקודה שווה להבהיר.
מבחינתו מה שנותר זה בעיניו שווה ללפחות $\frac{2}{n+k}$ מערך העוגה, ולכן לא משנה מה תמי תבחר הוא יהיה מרוצה.
למה זה? כי בכל שלב נלקח לכל היותר פרוסה שבעיניו שווה ל-$\frac{1}{n+k}$ ולכן ב-$n+k-2$ איטרציות נלקחו פרוסות בשווי, בעיניו, לכל היותר $\frac{n+k-2}{n+k}$.