

מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תכנות.

שאלה 1: חלוקת חפצים עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של m חפצים בין n אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו x צריך לשלם $x \cdot t$ מס הכנסה, כאשר t הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח $t=0.3$ זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.

- שימו לב: מס הכנסה מתייחס לתשלום נטו, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

שאלה 2: חלוקת ללא-קנאה עם זכויות שונות

נתונים n שחקנים עם זכויות שונות: w_1, \dots, w_n . כזכור, חלוקה ללא קנאה עם זכויות שונות היא חלוקה שבה, לכל שני שחקנים i, j :

$$[V_i(X_i) - p(X_i)] / w_i \geq [V_i(X_j) - p(X_j)] / w_j$$

תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה לשחקנים עם זכויות שונות. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מקיים תכונות אלה.

שאלה 3: אלגוריתם המכרז: אסטרטגיה

n שחקנים מחלקים ביניהם חפץ אחד בעזרת אלגוריתם "המכרז השווה". שחקן 1 הצליח לגלות את הערכים של כל השחקנים $2, \dots, n$ לאותו חפץ. שחקן 1 רוצה להשתמש במידע הזה כדי למסור לאלגוריתם ערך שונה מהערך האמיתי שלו, כך שהתועלת שלו תהיה גדולה ביותר. תארו אלגוריתם שיעזור לשחקן 1 להחליט, איזה ערך למסור לאלגוריתם כדי להשיג את התועלת הגבוהה ביותר האפשרית.

הדרכה: לפני שתנסו לפתח אלגוריתם כללי, נסו לבדוק מקרים פרטיים ולהבין מה קורה. לדוגמה, שני שחקנים עם ערכים 10, 20 או 20, 10.

שאלה 4: האם ייתכן שדייר ישלם יותר מערך החדר?

א. הוכיחו, שאם סכום הערכים של של דייר מסויים לכל החדרים בדירה גדול או שווה R (שכר הדירה הכללי), אז המחיר שישלם על החדר שיקבל, קטן או שווה מהערך שהוא מייחס לחדר.

נניח בשלילה ששחקן i מקבל חדר X_i ומשלם עליו $p(X_i) > V_i(X_i)$. אז התועלת שלו היא שלילית: $V_i(X_i) - p(X_i) < 0$.

מצד שני: סכום התשלומים הוא R וסכום הערכים של דייר i הוא לפחות R :
$$\sum_j V_i(X_j) \geq \sum_j p(X_j)$$

נחסר את אי-השוויון הקודם:

$$\sum_{j \neq i} V_i(X_j) > \sum_{j \neq i} p(X_j)$$

ולכן יש לפחות j אחד שעבורו:

$$V_i(X_j) > p(X_j)$$

שחקן i מקנא בשחקן j – בסתירה לעובדה שהחלוקה ללא קנאה. ***

ב. הראו דוגמה שבה סכום הערכים של דייר מסויים קטן מ- R , ובכל חלוקה ללא-קנאה, הדייר הזה משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל (הוכיחו שבכל החלוקות ללא קנאה, הדייר משלם יותר מערך החדר שקיבל).

שאלה 5: שכר-דירה אגליטרי

נתונה בעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה. כזכור, **חלוקה אגליטרית** היא חלוקה שבה התועלת הנמוכה ביותר של שחקן כלשהו היא גבוהה ככל האפשר.

כתבו קוד בפייתון, המוצא חלוקת חדרים אגליטרית, מבין כל החלוקות ללא-קנאה. הסבירו והדגימו את תשובתכם.

שאלה 6: השמת חפצים ללא כסף

נתונים n שחקנים ו- m חפצים בדידים. צריך לתת חפץ אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב- n) למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

0. השמה אוטיליטרית – הממקסמת את סכום הערכים.
- א. השמה הממקסמת את מכפלת הערכים.
- ב. השמה אגליטרית – הממקסמת את הערך הקטן ביותר.
- * ג. השמה לקסימין-אגליטרית.

הוכיחו את נכונות האלגוריתמים.