

"וְנָחֵלְתֶם אֹתָהּ אִישׁ כְּאֶחָיו" (יחזקאל מ' 14)

# חלוקה הוגנת של חפצים בדידים וכסף אראל סגל-הלוי



# חלוקת חפץ אחד בין שני שותפים

“גוד או אגוד” (תלמוד בבלי, בבא בתרא יג א).

“אחד מהשותפים שאמר לחבירו... בדבר שאי אפשר שיחלוקו... 'מכור לי חלקך בכך וכך, או קנה ממני חלקי בשער הזה' – הדין עמו, וכופין את הנתבע למכור לחבירו או לקנות ממנו” (שולחן ערוך, חושן משפט קעא ו).

1. שחקן א מציע מחיר כלשהו  $p$ .

2. שחקן ב מחליט האם לקנות או לא:

אם כן – ב משלם  $p/2$  ל-א ומקבל את החפץ.

אם לא – א משלם  $p/2$  ל-ב ומקבל את החפץ.

# גוד או אגוד - קנאה

משפט. אלגוריתם "גוד או אגוד" מאפשר לכל שחקן להשיג חלוקה ללא־קנאה עבירו.

הוכחה. כל שחקן מקבל אחד משני סלים:

\* (חפץ, מינוס  $p/2$ );

\* (כלום, פלוס  $p/2$ ).

כאשר  $p=0$ , הסל (חפץ, מינוס  $p/2$ ) עדיף;

כאשר  $p$  גדול, הסל (כלום, פלוס  $p/2$ ) עדיף.

שחקן א יכול לשנות את  $p$  באופן רציף ולמצוא  $p$  כלשהו שבו שני הסלים שקולים בעיניו אם יציע מחיר זה, בוודאי לא יקנא. שחקן ב יכול לבחור את הסל הטוב יותר עבירו, ואז לא יקנא. \*\*\*

# ערך לעומת תועלת

## הגדרות:

- **ערך** = מספר המתאר עד כמה השחקן רוצה סל מסויים של חפצים.
- **תועלת** = מספר המתאר עד כמה השחקן רוצה סל מסויים הכולל חפצים וכסף.
- **פונקציית תועלת קוואזיליניארית** = התועלת של סל כלשהו, הכולל קבוצה  $X$  של חפצים וסכום כסף  $p$ , היא:  $v(X) + p$  כאשר  $v$  היא פונקציית ערך כלשהי.  
(בקיצור: תועלת = ערך + כסף = ערך - תשלום)

# גוד או אגוד - פרופורציונליות

**משפט.** "גוד או אגוד" מאפשר לכל שחקן קוואזיליניארי להשיג חלוקה פרופורציונלית.

**הוכחה.** שחקן א יכול להציע  $p=v_a$ . התועלת שלו:

- אם ב קונה:  $p/2 = v_a/2$ .

- אם ב לא קונה:  $v_a - p/2 = v_a/2$ .

שחקן ב יכול לקנות אם  $p < v_b$ .

- אם קנה:  $v_b - p/2 > v_b/2$ .

- אם לא קנה:  $p/2 \geq v_b/2$ .

בשני המקרים, החלוקה פרופורציונלית. \*\*\*

# יעילות פארטו בחלוקה עם כסף

## הגדרות:

חלוקה א היא שיפור פארטו של חלוקה ב אם:

- התועלת של כל השחקנים בחלוקה א גדולה לפחות כמו בחלוקה ב;

- סכום הכסף שמשלמים השחקנים בחלוקה א גדול לפחות כמו בחלוקה ב (- המנהל לא הפסיד);

- התועלת של חלק מהשחקנים בחלוקה א גדולה יותר מבחלוקה ב (- מישהו הרויח).

חלוקה יעילה פארטו אם אין לה שיפור פארטו.

יעילות פארטו = יעילות אוטיליטרית  
משפט. כשכל השחקנים הם קואזילינאריים,  
חלוקה היא יעילה-פארטו אם ורק אם היא  
ממקסמת את סכום הערכים.

הוכחת כיוון א: נתונה חלוקה א שאינה  
יעילה-פארטו; תהי חלוקה ב שיפור-פארטו שלה.  
בחלוקה ב סכום התועלות של השחקנים גדול  
מבחלוקה א, וסכום התשלומים שמשלמים  
השחקנים גדול או שווה מבחלוקה א.

כיוון שהשחקנים קואזילינאריים:  
סכום ערכים = סכום תועלות + סכום תשלומים.  
לכן חלוקה א אינה ממקסמת סכום ערכים.

# יעילות פארטו = יעילות אוטיליטרית

הוכחת כיוון ב: נתונה חלוקה א שאינה ממקסמת סכום ערכים; תהי חלוקה ב חלוקה עם סכום ערכים גדול יותר.  
נבנה חלוקה ג:

\* נחלק את החפצים כמו בחלוקה ב.

\* ניקח מכל שחקן סכום-כסף השווה לערך שלו בחלוקה ב.

\* ניתן לכל שחקן סכום-כסף השווה לערך שלו בחלוקה א.  
סכום הערכים בחלוקה ב גדול יותר, לכן נשאר עודף  $T > 0$ .

\* ניקח מכל שחקן את אותו תשלום ששילם בחלוקה א.

\* נחלק את העודף  $T$  שווה בשווה בין השחקנים.

התועלת של כל שחקן בחלוקה ג  $>$  התועלת שלו בחלוקה א.  
סכום התשלומים בחלוקה ג = סכום התשלומים בחלוקה א.  
לכן חלוקה ג היא שיפור-פארטו של חלוקה א. \*\*\*



# גוד או אגוד - יעילות

**משפט.** כששני השחקנים קואזיליניאריים ופועלים לפי הערכים האמיתיים שלהם, "גוד או אגוד" משיג חלוקה יעילה-פארטו.

**הוכחה.** כששני השחקנים פועלים לפי הערכים האמיתיים שלהם, האלגוריתם נותן את החפץ לשחקן שהערך שלו גדול ביותר.

**לכן החלוקה המתקבלת ממקסמת את סכום הערכים.**

**\*\*\*. לפי המשפט הקודם, החלוקה יעילה-פארטו**

# הרבה חפצים והרבה שחקנים

## אלגוריתם המכרז השווה:

1. כל שחקן רושם את ערך לכל חפץ.

2. האלגוריתם מוכר כל חפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר, בתמורה לערך שרשם.

3. האלגוריתם מחלק את הכסף, שהתקבל מכל השחקנים, שווה בשווה.

# אלגוריתם המכרז השווה

**משפט.** אלגוריתם המכרז השווה מחזיר חלוקה יעילה-פארטו.

**הוכחה.** כל חפץ נמסר לשחקן המייחס לו ערך גבוה ביותר. לכן החלוקה ממקסמת סכום ערכים. לפי משפט קודם, החלוקה יעילה-פארטו.

\*\*\*

# אלגוריתם המכרז השווה

משפט. אלגוריתם המכרז השווה מחזיר חלוקה  
ללא-קנאה.

הוכחה. נסמן את סכום התשלומים ב-S.

התועלת של כל שחקן i מהסל שלו היא:

$$V_i(X_i) - V_i(X_i) + S/n = S/n$$

התועלת של כל שחקן i מהסל של j היא:

$$V_i(X_j) - V_j(X_j) + S/n.$$

אבל  $V_j(X_j) \geq V_i(X_j)$  כי כל חפץ נמסר לשחקן עם  
הערך הגבוה ביותר. לכן התועלת של כל שחקן i

מהסל של j היא לכל היותר  $S/n$ . לכן אין קנאה. \*\*\*