

"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

חלוקת חדרים ושכר-דירה

Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי



חלוקת שכר דירה

נתונים:

- דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים R .
- שותפים n שרוצים לשכור יחד את הדירה.
- האתגר: להחליט מי יגור איפה, וכמה ישלם, כך שלא תהיה קנאה. הפלט הדרוש הוא:
- השמה: = לכל שחקן i מתאימים חדר אחד X_i .
- תמחור: = לכל חדר j מתאימים מחיר $p(j)$.
- ללא קנאה: אף שותף לא מעדיף את החבילה (חדר+מחיר) של שותף אחר.

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה
+תימחור ללא קנאה.

הוכחה: נבנה את סימפלקס התימחורים. כל
נקודה בסימפלקס, עם קואורדינטות (x_1, \dots, x_n) ,
מתאימה לתימחור עם:

$$p_j = T - (Tn - R) * x_j$$

כאשר T הוא מחיר גבוה מדי.

הערה: בכל נקודה, סכום כל המחירים הוא
רדיוק R

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

הנחה: קיים "מחיר גבוה מדי".

הגדרה: מחיר גבוה מדי הוא מחיר כלשהו T , כך שאם המחיר של חדר כלשהו $\leq T$, והמחיר של חדר אחר כלשהו ≥ 0 , אז אף שחקן לא בוחר בחדר עם מחיר $\leq T$.

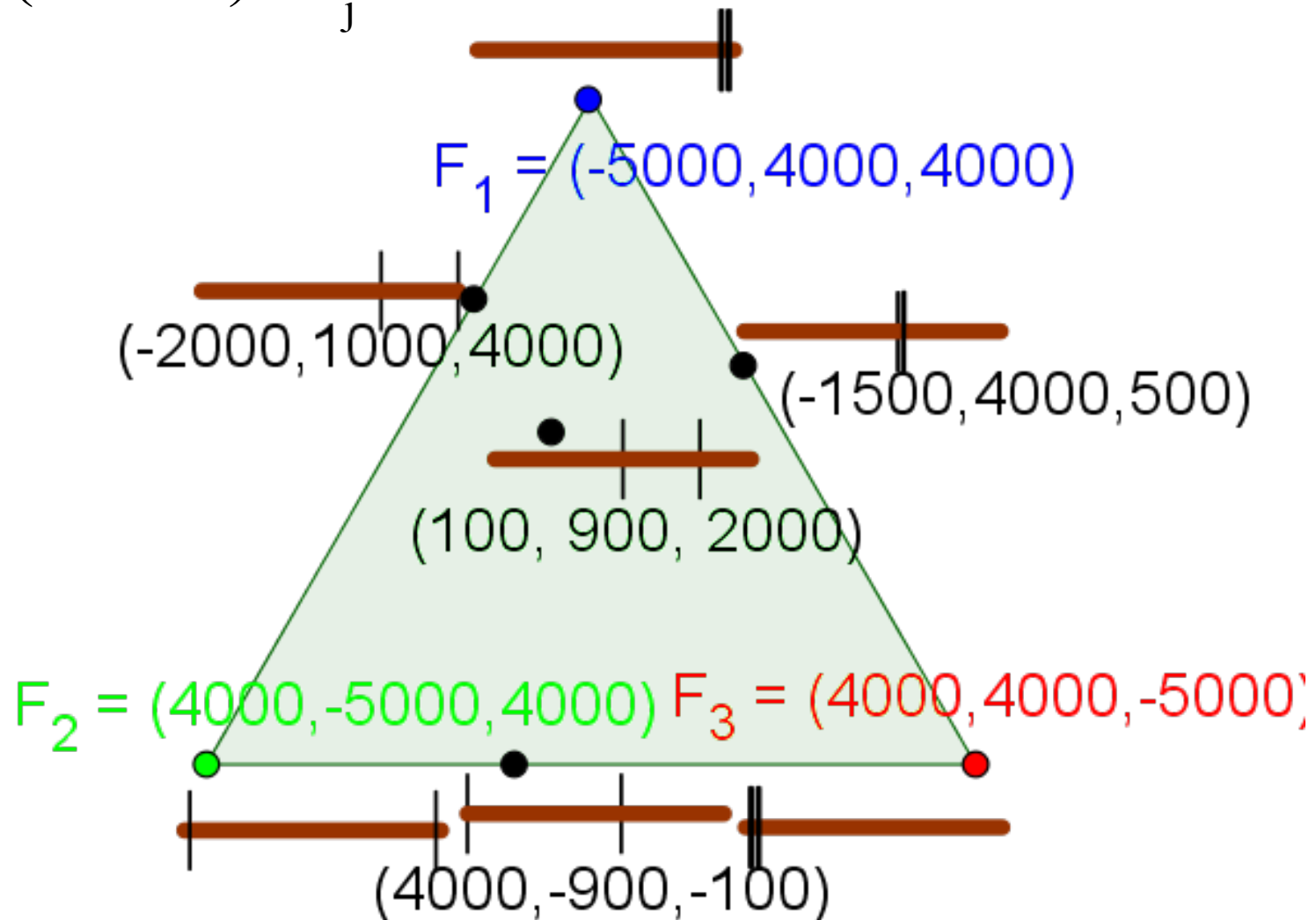
הערה: אם השחקנים קואזיליניאריים, אז קיים מחיר גבוה מדי – למשל הערך הגבוה ביותר ששחקן כלשהו מייחס לחדר כלשהו.

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה +תימחור ללא קנאה. \Leftarrow

סימפלקס התימחורים

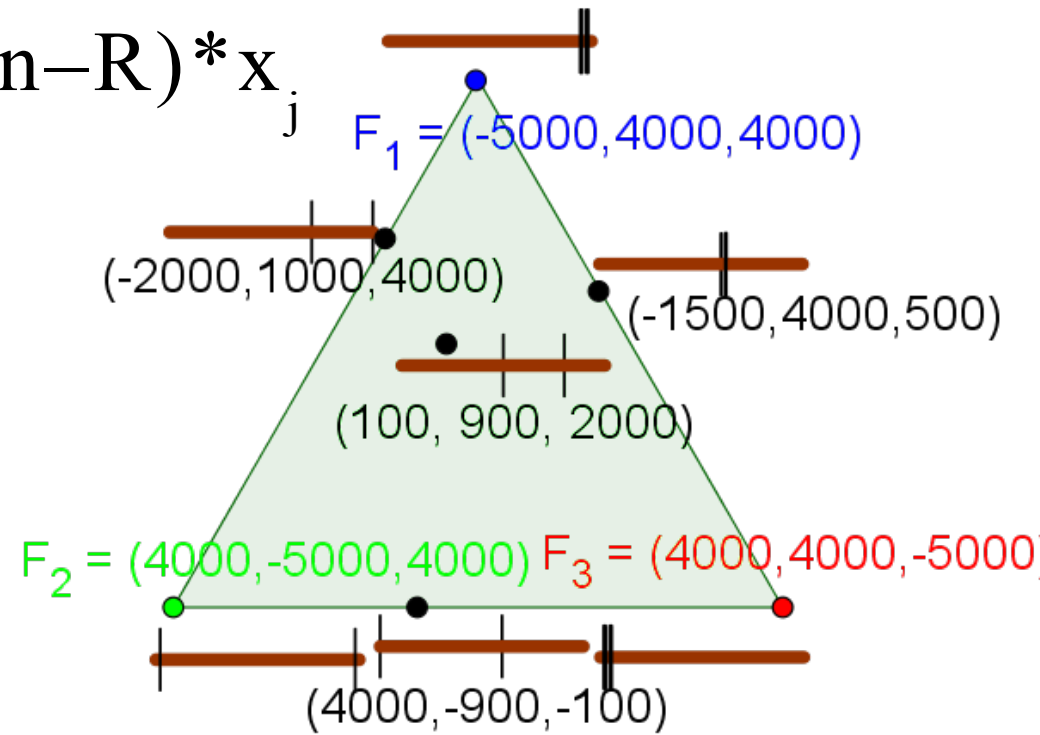
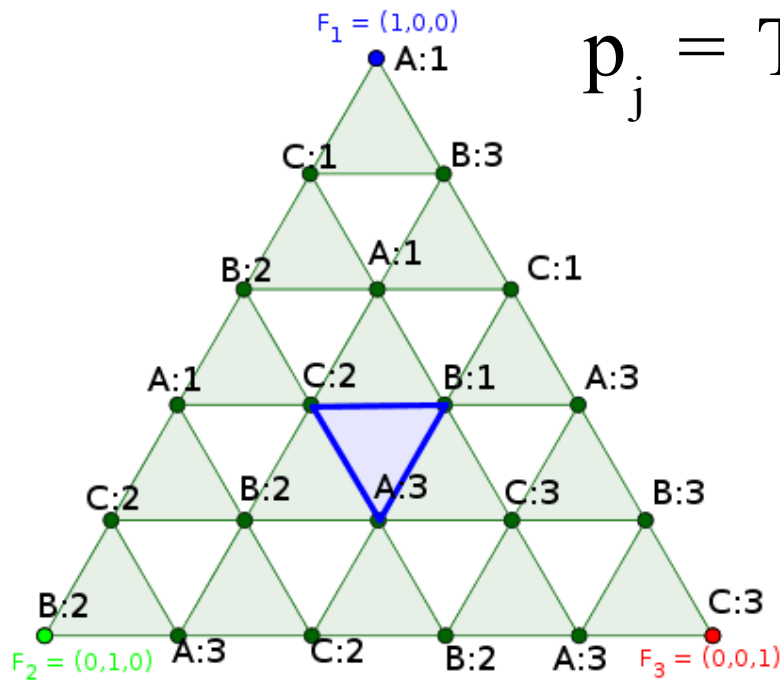
דוגמה עם $n=3$, $R=3000$, $T=4000$

$$p_j = T - (Tn - R) * x_j$$



סימפלקס התימחורים

$$p_j = T - (Tn - R) * x_j$$

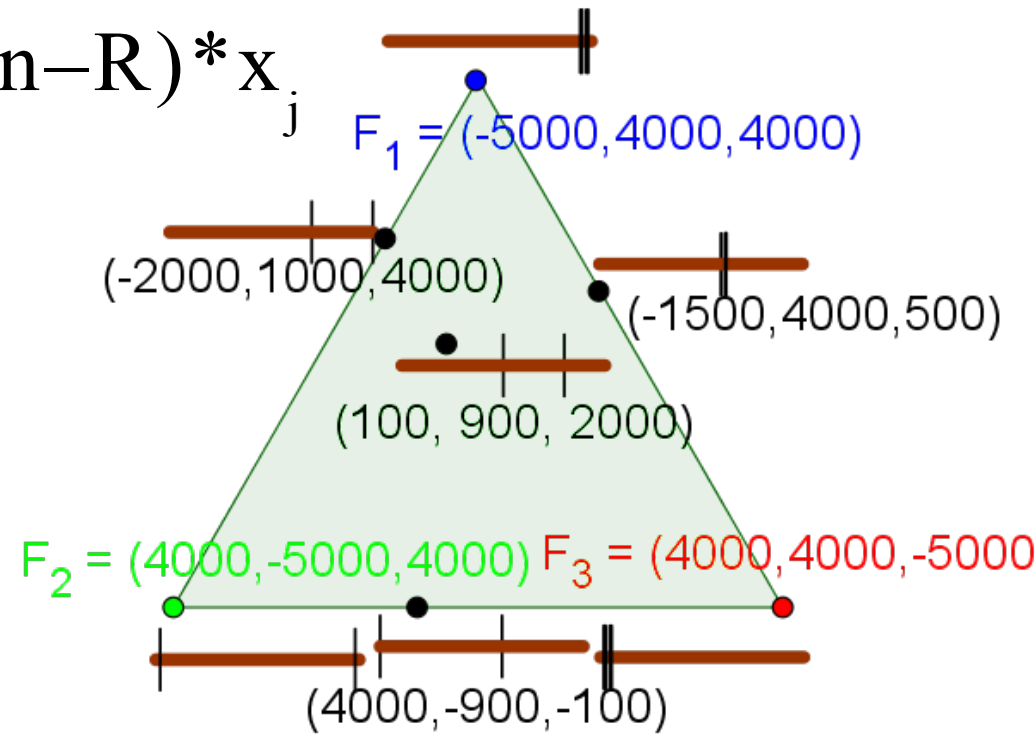
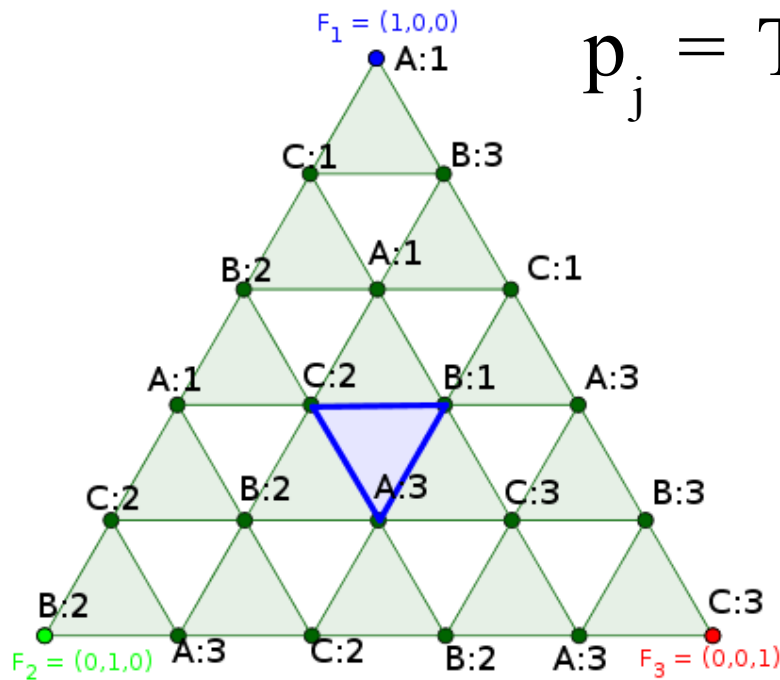


כמו בחלוקת עוגה ללא קנאה:

נחלק את סימפלקס התימחורים לסימפלקסונים;
ניתן כל קודקוד לשחקן; נשאל אותו איזה חדר הוא
מעדיף בתימחור המתאים לקודקוד.

סימפלקס התימחורים

$$p_j = T - (Tn - R) * x_j$$



המספור המתקבל מקיים את התנאי של ספרנו!

לכן קיים סימפלקסון מגוון.

לכן קיים תימחור שבו (בקירוב) כל שותף רוצה

חדר אחר --> תימחור ללא קנאה. מימוש:

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

הנחה: כל הדיירים הם קואזילינאריים.

הקלט: מטריצה $n \times n$ המתארת את ערכי החדרים לכל אחד מהדיירים:

1	2	3	חדר ←
v11	v12	v13	דייר 1
v21	v22	v23	דייר 2
v31	v32	v33	דייר 3

הפלט: השמה X , תימחור p .

אין קנאה: לכל שני שחקנים i, j :

$$V_i(X_i) - p(X_i) \geq V_i(X_j) - p(X_j)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 1: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X, P השמת-חדרים ללא קנאה. תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה לדיירים קוואזיליניאריים, לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל- n :

$$\sum (V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum (V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 2: כל תימחור ללא קנאה יישאר ללא-קנאה
לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X, P השמת-חדרים
ללא קנאה. לפי המשפט הקודם, X ממקסמת סכום ערכים.
תהי Y השמה אחרת הממקסמת סכום ערכים:

$$\sum V_i(X_i) = \sum V_i(Y_i)$$

$$\sum [V_i(X_i) - P(X_i)] = \sum [V_i(Y_i) - P(Y_i)]$$

נתון ש- X ללא קנאה. לכן לפי הגדרת קנאה, לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

לכן חייב להתקיים שיוויון בכל איבר --- לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) = V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

מסקנה: האלגוריתם הבא מוצא חלוקת חדרים
ללא קנאה:

• א. מצא חלוקה כלשהי X הממקסמת
סכום-ערכים;

• ב. מצא תמחור p שאיתו החלוקה X ללא
קנאה.

א. מיקסום סכום הערכים

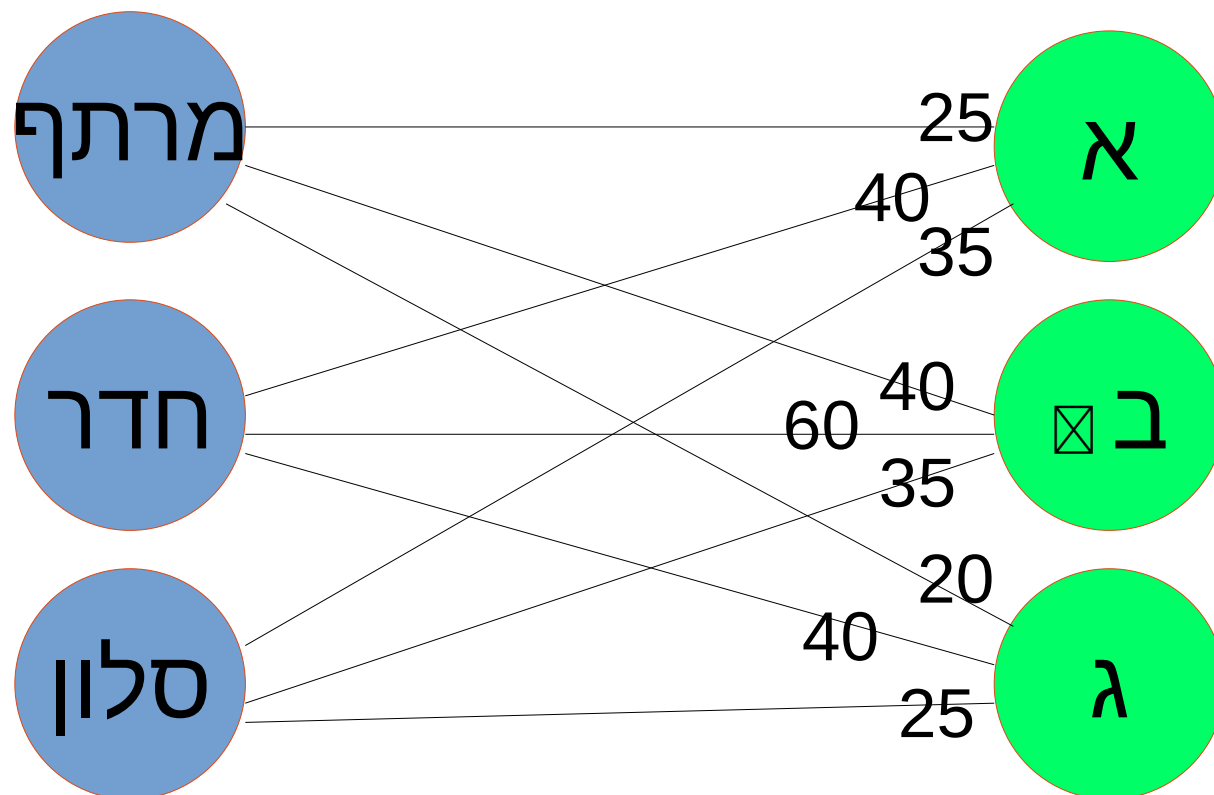
מציאת השמה הממקסמת את סכום הערכים =
מציאת שידוך עם משקל מקסימום בגרף דו-צדדי.

דוגמה:

סלון	חדר	מרתף	
35	40	25	דייר א
35	60	40	דייר ב
25	40	20	דייר ג

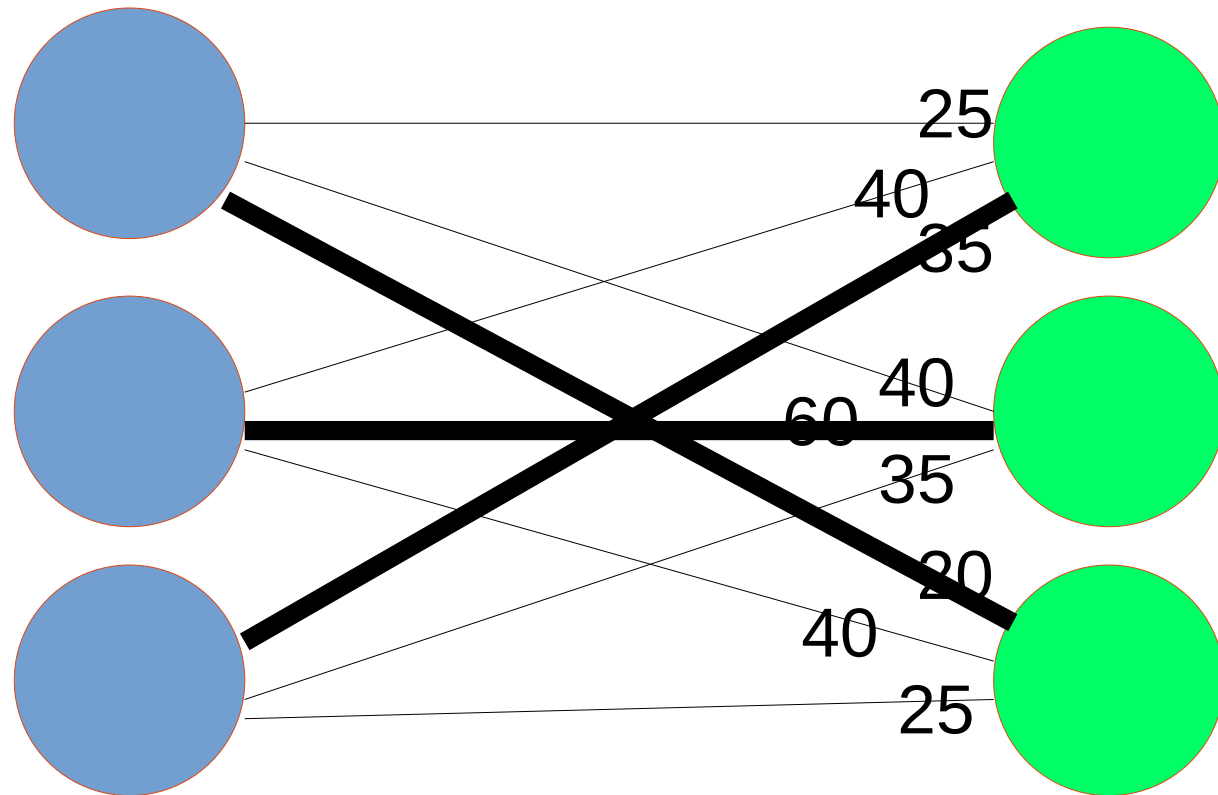
שידוך עם משקל מקסימום

- הקלט: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימום

- הפלט: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



- אלגוריתמים: למשל "האלגוריתם ההונגרי".
- יש מימוש בפייתון בספרייה networkx.

ב. קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. איך?
- בעיית תיכנות ליניארי –
linear programming

For all i, j :

$$w[d[i], i] - p[i] \geq w[d[i], j] - p[j]$$

– אפשר לפתור בעזרת **cvxpy**.