

אלגוריתמים כלכליים מטלה – 11

שאלה 2: שיבוצים יציבים יחידים חזקים וחלשים

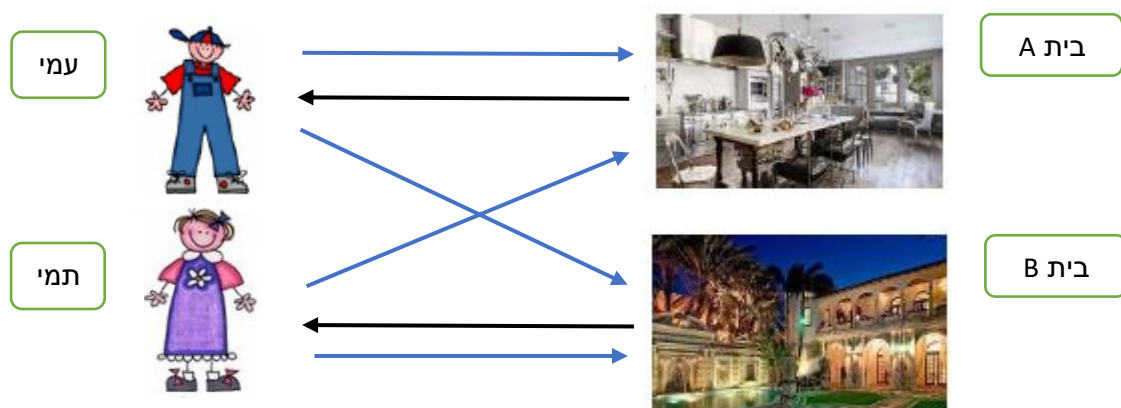
א. למדנו בהרצאה, שכאשר יחסי-ההעדפה חזקים, יש שיבוץ יציב אחד ויחיד. הראו שהמשפט אינו נכון כאשר יחסי-ההעדפה חלשים [הסבירו קודם במילים שלכם מה בדיוק צריך להראות].

הגדרות:

- **קואליציה מערערת** (blocking coalition) = קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע החלפה שהיא טובה באותה מידה לכל חברי הקבוצה וטובה יותר לפחות לאחד מחבריה.
- **שיבוץ יציב** (core-stable allocation) = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת.
- **יציבות** ← עידוד השתתפות, יעילות פארטו.

א. **הסבר:** נראה דוגמא שכאשר יחסי ההעדפה חלשים, כלומר אדישים בין כמה אפשרויות (אין להם העדפה אחת ויציבה אלא יש להם כמה העדפות ולא אכפת להם איזו מהן הם יקבלו), קיים יותר משיבוץ יציב אחד.

דוגמא 1:



שני משתתפים: עמי, תמי.

שני בתים: A, B.

{עמי: A, תמי: B}.

עמי אדיש (כלומר לא אכפת לו איזה בית יקבל).

תמי אדישה (כלומר לא אכפת לה איזה בית תקבל).

בדוגמא קיימים שני שיבוצים יציבים:

השיבוצים האפשריים:

- {עמי: A, תמי: B}.

- {עמי: B, תמי: A}.

אנו רואים שלעמי ותמי יש 2 העדפות לכל אחד (הבית שלהם או של האחר) ולכן תמי תקבל את הבית שלה ועמי את הבית שלו, או שתמי תקבל את הבית של עמי ועמי יקבל את הבית של תמי.

בשני המקרים עמי ותמי מרוצים ולכן קיבלנו שני שיבוצים יציבים.

* ב. למדנו בהרצאה, שאלגוריתם ההחלפה של סבן-סתורמן מחזיר תמיד שיבוץ יציב-חלש. הראו שהאלגוריתם לא תמיד מחזיר שיבוץ יציב-חזק [הסבירו קודם במילים שלכם מה בדיוק צריך להראות].

הגדרות:

• **קואליציה מערערת חזק** = קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע החלפה שהיא טובה יותר לכל חברי הקבוצה.

• **שיבוץ יציב-חלש** (weak core allocation) = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת-חזק.
יציבות חלשה ← עידוד השתתפות.

ב. שיבוץ יציב חזק = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת.

הסבר: נראה דוגמא כך שבכל שיבוץ לא נקבל שיבוץ יציב חזק, כלומר קיים שיבוץ שבו קיימת קואליציה מערערת (קואליציה שיכולה לפרוש ולקבל חלוקה יותר טובה בשביל אחד המשתתפים ולשאר לא יגרע).

דוגמא:

שלושה משתתפים: עמי, תמי, רמי.

שלושה בתים: A, B, C.

{עמי: A, תמי: B, רמי: C}.

עמי אדיש בין שלושת הבתים (כלומר לא אכפת לו איזה בית יקבל משלושתם).

תמי רוצה את בית A.

רמי רוצה את בית A.

ישנן 6 אפשרויות לשיבוץ הבתים בין המשתתפים.

- {עמי: A, תמי: B, רמי: C}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ותמי או עמי ורמי.
- {עמי: A, תמי: C, רמי: B}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ותמי או עמי ורמי.
- {עמי: B, תמי: A, רמי: C}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ורמי.
- {עמי: B, תמי: C, רמי: A}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ותמי.
- {עמי: C, תמי: A, רמי: B}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ורמי.
- {עמי: C, תמי: B, רמי: A}: קיימת קואליציה מערערת של עמי ותמי.

מכיוון שלעמי לא משנה איזה בית יקבל, ותמי ורמי שניהם רוצים את בית A אז בכל שיבוץ רמי או עמי (או שניהם) לא מרוצים ויוכלו לפרוש עם עמי ולהחליף את הבתים המקוריים שלהם ולהרוויח.

ובכך הראנו שכל אלגוריתם שיבוץ לא יחזיר שיבוץ יציב חזק.