

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

* שאלה 4: שיווי-משקל תחרותי

הקצאת-משאבים נתונה נקראת **שיווי משקל תחרותי שווה-תקציב** (competitive equilibrium with equal budgets) אם קיים וקטור-מחיר p (מחיר לכל משאב), כך שלכל משתתף i מתקיימים התנאים הבאים:

- המחיר הכולל של הסל שקיבל משתתף i הוא לכל היותר 1;
- כל משתתף מעדיף את הסל שקיבל על-פני כל שאר הסלים שהמחיר שלהם הוא לכל היותר 1.

בסמלים:

$$p(X_i) \leq 1$$

$$\text{For every } Y: \text{ if } p(Y) \leq 1 \text{ then } V_i(X_i) \geq V_i(Y)$$

א. תנו דוגמה להקצאה שהיא שיווי-משקל תחרותי שווה-תקציב בבעיה כלשהי של חלוקת משאבים, למשל הדוגמה במצגת:

$$\begin{bmatrix} 81, & 19, & 0 \\ 80, & 0, & 20 \end{bmatrix}$$

תארו את ההקצאה ואת וקטור המחיר p , והסבירו מדוע זה אכן ש"מ תחרותי שווה-תקציב.

ב. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא ללא קנאה.

ג. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא יעיל פארטו חלש (ראו הגדרה בשאלה 4).

שאלה 1: חלוקה אגליטרית עם פייתון

תזכורת: בבעיית החלוקה שלמדנו בכיתה, יש n אנשים ו- m משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב.

ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם n שורות ו- m עמודות, שבה הערך בשורה i ועמודה j הוא הערך שמייחס אדם i למשאב j .

כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת (כללית), וכותבת למסך תיאור של חלוקה אגליטרית. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

$$\begin{bmatrix} 81, & 19, & 1 \\ 70, & 1, & 29 \end{bmatrix}$$

אז הפלט הוא (בקירוב):

Agent #1 gets 0.47 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of resource #3.

Agent #2 gets 0.53 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of resource #3.

שאלה 2: קריטריון לקסימין

א. כתבו קוד בשפת פייתון, המקבל שני וקטורים באותו אורך, ומשווה ביניהם לפי קריטריון לקסימין. כותרת הפונקציה:

```
def is_leximin_better (x: list, y:list)->bool
    # return true iff x is leximin-better than y.
```

ב. כתבו בדיקות-יחידה לפונקציה בעזרת doctest. הדגמה של כתיבת בדיקות doctest בפייתון ניתן למצוא כאן:

https://github.com/erelsgl/fairpy/blob/master/cake/cut_and_choose.py

שאלה 3: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו, שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם פונקציות הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

שאלה 5: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הגינות

נתונה בעיית אופטימיזציה עבור חלוקת עוגה בין שני שחקנים:

Maximize $V_1(X_1) + V_2(X_2)$
 such that (X_1, X_2) is a partition of C
 and $V_1(X_1) \geq V_1(C)/2$ and $V_2(X_2) \geq V_2(C)/2$

- כאשר C היא העוגה כולה ו X_i הוא החלק שמקבל שחקן i .
- א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.
- ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו.

ברוך ה' חונן הדעת

ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.