"וּנְחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי
Fair Division with Minimal Sharing

אראל סגל-הלוי

http://haris-aziz.blogspot.com/2015/05/new-results-about-adjusted-winner.html

איך "חותכים" חפץ בדיד?

החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות **משותפת**.

לא קל, אבל בדרך-כלל אפשרי:

- **ילדים** - משמורת משותפת;
- **דירת מגורים** – השכרה וחלוקת הרווחים;
- **דירת נופש, רכב** – שימוש בזמנים שונים;
- **משרדי ממשלה** – רוטציה או פיצול;
- פשרה יצירתית כלשהי.

המטרה: למצוא חלוקה הוגנת ויעילה עם **הכי מעט שיתופים שאפשר**.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שחקנים.
- m חפצים (או נושאים שיש עליהם מחלוקת).
- כל שחקן מייחס ערך באחוזים לכל חפץ (סכום הערכים = 100).

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ כך ש:

- החלוקה תהיה פרופורציונלית וללא קנאה.
- החלוקה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך (לשתף) חפץ אחד לכל היותר.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"
(Adjusted Winner)
Brams and Taylor, 1996

א. סדר חפצים בסדר עולה של יחס הערכים:

ערך-עבור-שחקן-א / *ערך-עבור-שחקן-ב*.

ב. אתחול: תן את כל החפצים לשחקן א.

ג. העבר חפצים לשחקן ב לפי הסדר, עד ש:

(1) סכום הערכים של א שווה לסכום של ב, **או** -

(2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

חלוקה מסודרת

"המנצח המתוקן" מחזיר תמיד **חלוקה מסודרת**:

הגדרה: **חלוקה מסודרת** = יחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן ב קטנים או שווים ליחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן א.

משפט: כל חלוקה מסודרת בין שני שחקנים היא יעילה־פארטו.

הוכחה: בחלוקה מסודרת קיים מספר r, כך ש:

- שחקן א מקבל חפצים עם יחס־ערכים ≥ r.
- שחקן ב מקבל חפצים עם יחס־ערכים ≤ r,
- <==

חלוקה מסודרת [המשך]

המשך הוכחה: נגדיר, עבור כל חפץ:

- va = הערך לשחקן א;
- vb = הערך לשחקן ב;
- vc=r*vb = הערך לשחקן ב כפול r.

לפי הגדרת חלוקה מסודרת:

לחפצים בסל של שחקן א : $va \geq vc \rightarrow va/vb \geq r$

לחפצים בסל של שחקן ב : $vc \geq va \rightarrow va/vb \leq r$

מכאן, שהחלוקה הסופית ממקסמת את הסכום:

$$vc + va = r*vb + va$$

וכל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה־פארטו. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה-פארטו, פרופורציונלית, וללא קנאה.

הוכחה:

יעילות-פארטו: כי החלוקה מסודרת.

הוגנות: לשני השותפים סל עם ערך שווה. אילו הערך הזה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. לכן הערך הוא לפחות 50. לכן החלוקה פרופורציונלית וללא קנאה. ***

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של **חפץ אחד לכל היותר**. שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת **בלי שיתוף בכלל**, אם אפשר.

משפט: כל חלוקה יעילה פארטו היא מסודרת.

הוכחת המשפט: נניח בשלילה ששחקן א קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ושחקן ב קיבל את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$va1 \,/\, vb1 < va2 \,/\, vb2$$

$$va1 \,/\, va2 < vb1 \,/\, vb2$$

<==

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

המשך ההוכחה:

נבחר שני מספרים קטנים מ־1, y ו־z, שהיחס ביניהם נמצא בין היחסים באי־השיוויון הקודם:

$$va1 / va2 \quad < \quad z / y \quad < \quad vb1 / vb2$$

נעביר y מחפץ 1 משחקן א לשחקן ב, ונעביר z מחפץ 2 משחקן ב לשחקן א.

שחקן א הפסיד y va1 אבל הרוויח z va2, ושחקן ב הפסיד z vb2 אבל הרוויח y vb1. זה שיפור פארטו, כי:

$$\mathbf{z\ va2 > y\ va1} \qquad \mathbf{y\ vb1 > z\ vb2}$$

מכאן, שהחלוקה הלא-מסודרת אינה יעילה-פארטו. ***

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

הוכחת המשפט - דוגמה מהקובץ winner.ods, שני החפצים מימין:

נושא:	תכשיטים	אחוזת גריניץ
דונאלד:	**15**	**15**
איוואנה:	40	25
יחס:	0.375	0.6

נניח שדונאלד קיבל את התכשיטים (חפץ 1) ואיוואנה את האחוזה (חפץ 2). אז:

$$v_{d1} = 15,\; v_{d2} = 15,\quad \boldsymbol{v_{d1}/v_{d2} = 1}$$

$$v_{i1} = 40,\; v_{i2} = 25,\quad \boldsymbol{v_{i1}/v_{i2} = 1.6}$$

נבחר למשל: $\boldsymbol{z / y = 1.2};\quad z = 0.6,\, y = 0.5$

דונאלד נותן לאיוואנה 0.5 מהתכשיטים תמורת 0.6 מהאחוזה. הוא מפסיד 7.5 אבל מרויח 9;

איוואנה מפסידה 15 אבל מרויחה 20. שיפור פארטו!

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

חישוב חלוקה יעילה והוגנת עם מינימום שיתופים:

- אם יחס-הערכים הוא *שונה* לכל חפץ, אז יש רק *דרך אחת* לסדר את החפצים לפי יחס-הערכים. לכן, יש רק $m+1$ חלוקות יעילות-פארטו בלי שיתופים. אפשר לבדוק את כולן בזמן פולינומיאלי: אם אחת מהן פרופורציונלית – מחזירים אותה; אחרת – מריצים את "המנצח המתוקן".
- אם יש הרבה חפצים עם יחס-ערכים *שווה*, אז בעיית השיתוף המינימלי היא NP-קשה. ניתן לפתור אותה בעזרת חיפוש במרחב המצבים, עם גיזום של חלוקות לא-מסודרות.

שלושה שחקנים ויותר

משפט 1. כשיש n שחקנים, ייתכן שנצטרך n-1 שיתופים כדי להשיג חלוקה פרופורציונלית.

הוכחה. ייתכן שיש n-1 חפצים זהים.

משפט 2. לכל n שחקנים, קיימת חלוקה יעילה-פארטו ופרופורציונלית עם n-1 שיתופים כל היותר.

הוכחה. בהמשך השיעור.

n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

חלוקה מסודרת היא תנאי הכרחי ליעילות, אבל לא תנאי מספיק:

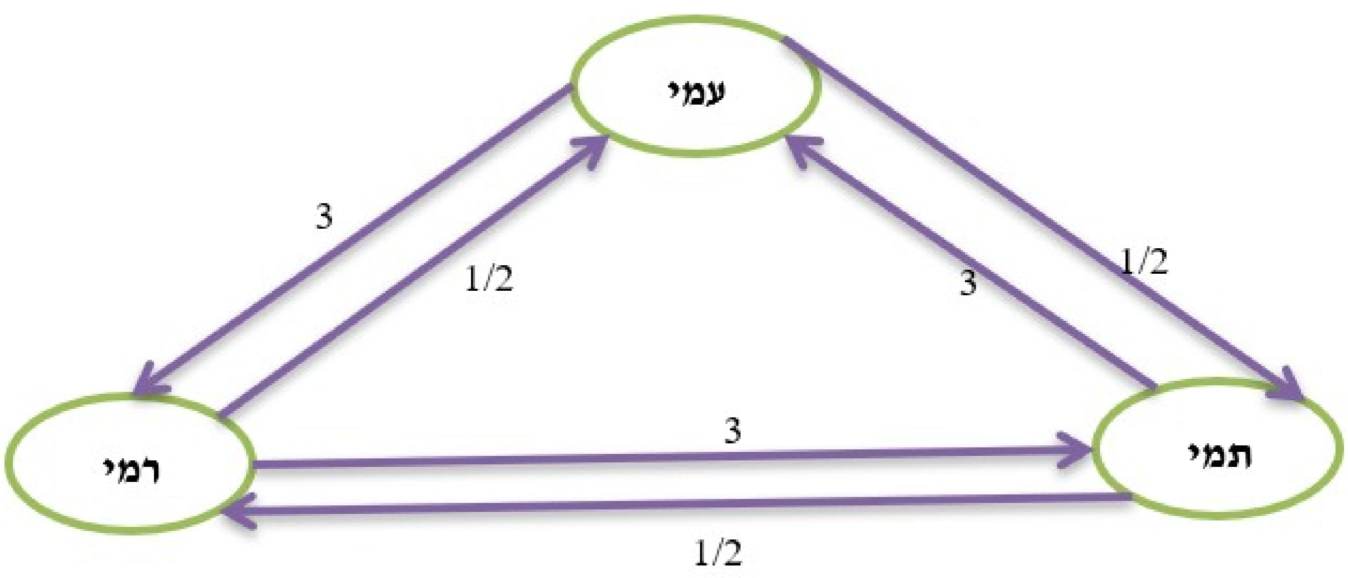
	אוהל	דירה	מחסן
עמי:	**3**	1	6
תמי:	6	**3**	1
רמי:	1	6	**3**

החלוקה המודגשת היא מסודרת לכל זוג של שחקנים (כי 1/3<3/6), אבל לא יעילה פארטו.

גרף ההחלפות

הגדרה. גרף־ההחלפות של חלוקה נתונה הוא גרף מכוון שלם, עם

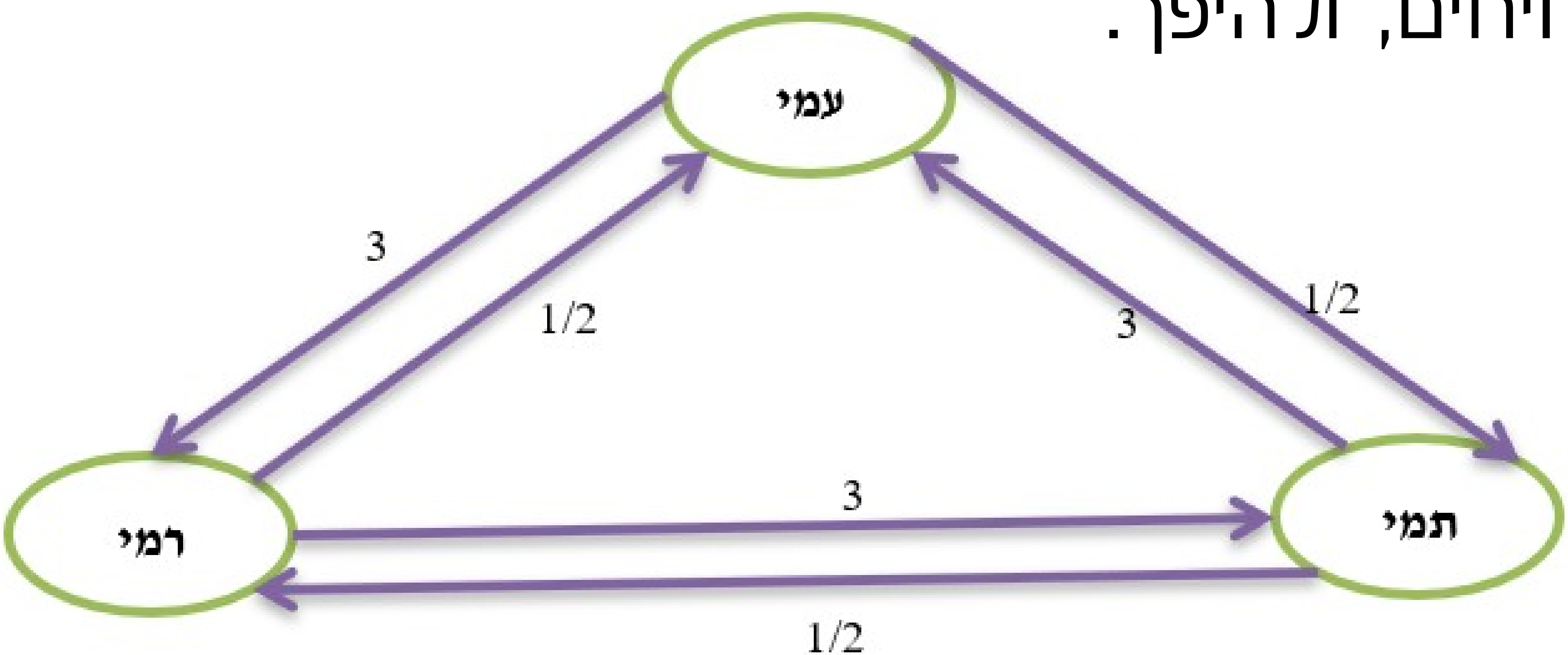
- n צמתים – צומת לכל שחקן.
- קשת מכוונת בין כל שני שחקנים i,j.
- משקל הקשת i -> j = היחס (ערך של i / ערך של j) הקטן ביותר של חפץ הנמצא בסל של שחקן i.



n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

משפט. חלוקה היא יעילה־פארטו אם־ורק־אם בגרף־ההחלפות שלה, בכל מעגל מכוון, *מכפלת־המשקלים* גדולה או שווה **1**.

רעיון ההוכחה: כל מעגל מכוון עם מכפלה < 1 מתאים להחלפה שבה כל השחקנים במעגל מרויחים, ולהיפך.



n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

דוגמה. נניח שיש מעגל מכוון באורך 3:

א ← ב ← ג ← א

ויחסי-הערכים: r | s | t כאשר $rst < 1$.

של החפצים: x | y | z

שחקן א מעביר חלק מ-x ששווה לו e לשחקן ב.

- לשחקן ב, זה שווה e/r.

שחקן ב מעביר חלק מ-y ששווה לו e/r לשחקן ג.

- לשחקן ג, זה שווה e/rs.

שחקן ג מעביר חלק מ-z ששווה לו e/rs ל-א

- לשחקן א, זה שווה $e/rst > e$.

א הרויח והשאר לא הפסידו – שיפור פארטו!

n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

איך מחפשים מעגל עם מכפלת-משקלים < 1?

1) הופכים כל משקל ללוגריתם שלו;

2) מחפשים מעגל עם סכום-משקלים שלילי

- (למשל, בעזרת אלגוריתם בלמן-פורד).

איך מחפשים חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים?

- מבצעים חיפוש במרחב המצבים;
- גוזמים מצבים המתאימים לחלוקות לא יעילות.

אבל מה עושים אם לא מצאנו חלוקה הוגנת ויעילה בלי שיתופים? ==>

n שחקנים, n-1 שיתופים

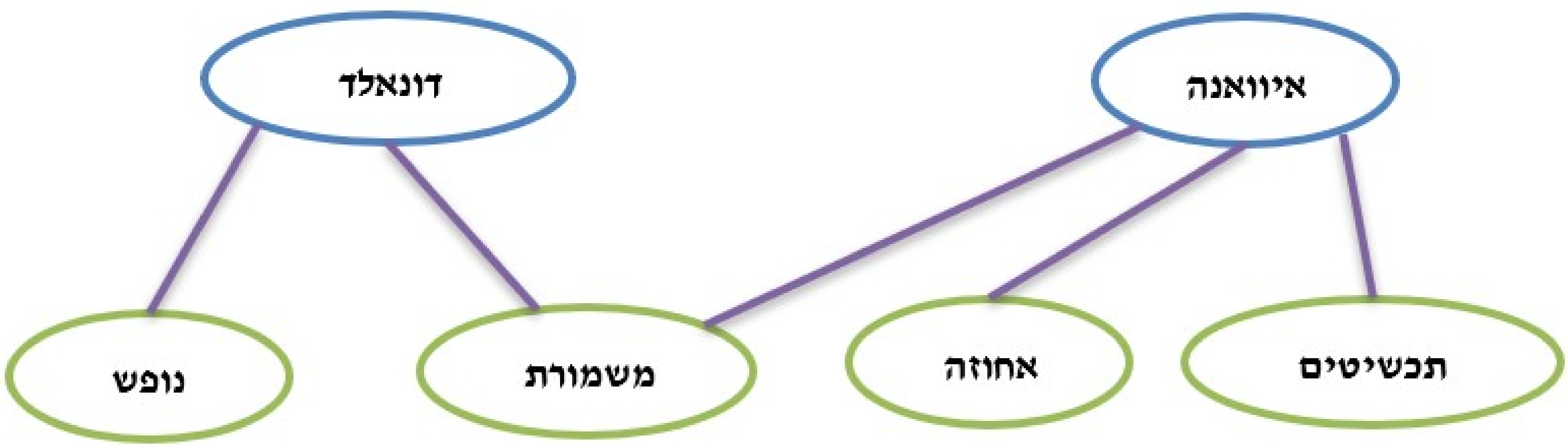
הגדרה. חלוקה ב היא **שיפור פארטו חלש** של חלוקה א, אם הערך שמקבל כל שחקן בחלוקה ב גדול לפחות כמו הערך שהוא מקבל בחלוקה א.

משפט. קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור־פארטו־חלש עם לכל היותר n-1 שיתופים.

גרף הצריכה

הגדרה. **גרף־הצריכה** של חלוקה נתונה הוא גרף דו־צדדי לא־מכוון וללא משקלים, שבו:

- הקודקודים בצד אחד הם n השחקנים;
- הקודקודים בצד השני הם m החפצים;
- יש צלע בין שחקן i לבין חפץ j, אם ורק אם שחקן i מקבל חלק חיובי של חפץ j.



גרף הצריכה

משפט*. קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור־פארטו־חלש עם **גרף צריכה ללא מעגלים** (<== לכל היותר m+n-1 צלעות <== לכל היותר n-1 שיתופים).

הוכחה. אם אין מעגל בגרף-הצריכה – סיימנו!

נניח שבגרף הצריכה יש מעגל – למשל:

א – x – **ב** – y – **ג** – z – **א**

בגרף ההחלפות יש שני מעגליים מכוונים מנוגדים:

א ← **ב** ← **ג** ← **א**; **א** ← **ג** ← **ב** ← **א**

המשקל על קשת **א** ← **ב** ≥ $v_a(x)/v_b(x)$

המשקל על קשת **ב** ← **א** ≥ $v_b(x)/v_a(x)$

<== מכפלת המשקלים על קשתות מנוגדות ≥ 1.

גרף צריכה ללא מעגלים

המשך ההוכחה.

<== מכפלת הערכים במעגל הראשון * מכפלת הערכים במעגל השני ≥ 1. לכן, לפחות לאחד משני מעגלי־ההחלפה יש מכפלת ערכים ≥ 1.

- אם מכפלת הערכים באחד המעגלים > 1, אז אפשר לבצע החלפה ולקבל שיפור-פארטו.
- אם מכפלת הערכים בשני המעגלים = 1, אז אפשר לבצע החלפה ולקבל שיפור-פארטו-חלש, ולקבוע את גודל ההחלפה כך שאחת הצלעות במעגל תיעלם.

נמשיך בתהליך זה עד שלא יישארו מעגלים בגרף הצריכה. ***

חלוקה הוגנת ויעילה עם n-1 שיתופים

1) נמצא חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות).
2) נמצא שיפור-פארטו-חלש עם גרף-צריכה ללא מעגלים.

החלוקה החדשה היא:

- יעילה-פארטו – כי היא שיפור-פארטו-חלש של חלוקה יעילה-פארטו.
- פרופורציונלית – כי היא שיפור-פארטו-חלש של חלוקה פרופורציונלית.
- יש בה לכל היותר n-1 שיתופים – לפי המשפט.

חלוקה הוגנת ויעילה עם n-1 שיתופים – זכויות שונות

אם לשחקנים יש זכויות **שונות**, ניתן להשתמש באותו אלגוריתם, אבל להתחיל מחלוקה שהיא יעילה-פארטו ופרופורציונלית בהתחשב בזכויות השונות

- (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות בהתאם לזכויות השונות).

פתרון לבעיית הרכבת הממשלה

ניתן להקים ממשלה עם n מפלגות,
ולחלק את התיקים בהוגנות **מדוייקת,**
בהתאם לגדלים השונים של המפלגות,
כך שיהיו לכל היותר **n-1** תיקים עם רוטציה.