

אלגוריתמים כלכליים

מיכאל טרושקין

* שאלה 3: איזו שיטה טובה יותר למפלגות קטנות?

נתונות שתי שיטות-מחלק עם פוקנציות-מחלק f, g .

נתון, שלכל a, b כאשר $a < b$, מתקיים:

$$f(a)/f(b) < g(a)/g(b).$$

הוכיחו, ששיטה f טובה למפלגות קטנות לפחות כמו שיטה g .

(כלומר: אם מפלגה א קטנה יותר ממפלגה ב, אז בחלוקת מספר מושבים קבוע בין מפלגה א למפלגה ב, מפלגה א תקבל בשיטה f לפחות אותו מספר מושבים כמו שהיתה מקבלת בשיטה g).

בעצם כל מה שעלינו להוכיח זה שבכל פעם שהשחקן במפלגה הקטנה ביותר זכה במושב לפי שיטה g , הוא היה זוכה גם בשיטה f .

נניח ש $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$ הם מספר הקולות עבור המפלגות. ונניח שבזמן t כלשהו s_1, s_2, \dots, s_n הם מספר המושבים שקיבלו כל אחת מהמפלגות.

נתבונן במקרה שבוא לכל $2 \leq i \leq n$ מתקיים: (המפלגה הקטנה מקבלת מושב בסבב זה)

$$\frac{v_1}{g(s_1)} > \frac{v_i}{g(s_i)}$$

נניח כי g היא פונקציה המקיימת לכל a :

$$g(a) \geq a$$

אפשר גם להראות שעבור g יורדת הטענה פשוט לא נכונה. (האלגוריתם דורש $g(a) \in [a, a+1]$).

כעת נראה שאם המפלגה הקטנה נצחה בסבב כלשהו, אזי $s_1 < s_i$ לכל $2 \leq i \leq n$. נניח שקיימת מפלגה i כך ש $s_i \leq s_1$ ולכן $g(s_i) \leq g(s_1)$, ומהעובדה ש $v_1 < v_i$ נקבל

$$\frac{v_i}{g(s_i)} > \frac{v_1}{g(s_i)} \geq \frac{v_1}{g(s_1)}$$

כלומר למפלגה i הייתה עם מנה קטנה יותר ממפלגה 1, ולכן לפי האלגוריתם מפלגה 1 לא הייתה מנצחת בסבב זה, בניגוד להנחה.

כעת נקבע מפלגה i כלשהי, ונניח כי $s_1 < s_i$ ונראה כי

$$\frac{v_1}{f(s_1)} > \frac{v_i}{f(s_i)}$$

מהעובדה ש $s_1 < s_i$ ומההנתון נובע ש

$$\frac{g(s_1)}{g(s_i)} > \frac{f(s_1)}{f(s_i)}$$

מההנחה שהמפלגה הקטנה ביותר זכתה בסבב נקבל כי

$$v_1 > v_i \frac{g(s_1)}{g(s_i)} > v_i \frac{f(s_1)}{f(s_i)}$$

נחלק ב $f(s_1)$ ונקבל

$$\frac{v_1}{f(s_1)} > \frac{v_i}{f(s_i)}$$

כנדרש.