

"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

חלוקה הוגנת של קרקע

Fair Division of Land

אראל סגל-הלוי



היעד:

פיתוח תהליכים מעשיים

לחלוקה הוגנת של קרקע

בג"ץ: לפנות מיד מבנים שהוקמו על קרקע פרטית

בג"ץ הורה למדינה לפנות את כל המבנים שהוקמו על קרקע פרטית פרטית במאחזים בבנימין ובשומרון. "ההסדרה מתנהלים בעצליים".

סגנית השר חוטובלי: ברוואבי אין עלויות קרקע אז

המחירים זולים

בתגובה לדברי ראש הממשלה בשיבת הסיעה על הבנייה בנגב, אמרה סגנית שר התחבורה, ציפי חוטובלי, "ברואבי אפשר לקנות דירת תמישה חדרים ב-140,000 דולר. בכלל שאן עלות קרקע. בהשוואה צריכה להיות לחלק קרקעות חנים לזואי צבא בנגב ובגליל כדי להחלי משפחות את מוצרי הדור".

נדל"ן צבאי

מדוע צה"ל הוא שחליט מה יעשו בקרקע המתפנה במרכז הארץ



אביב לביא

רכשתם קרקע להשקעה? כך תאבדו את כל הכסף ברגע

ערעור שהוגש לביהמ"ש המחוזי ביום חמישי צריך להדליק נורת אזהרה לרוכשי קרקע חקלאית: במקרה של הפקעה או שינוי ייעוד לפארק או לגן לאומי - ולא למגורים או לתעסוקה כמו שחלמו - הם לא יקבלו פיצוי אפילו לפי שווי השוק של הקרקע

מעוז: "צעירים יהודים צריכים לתפוס קרקעות בכוח"

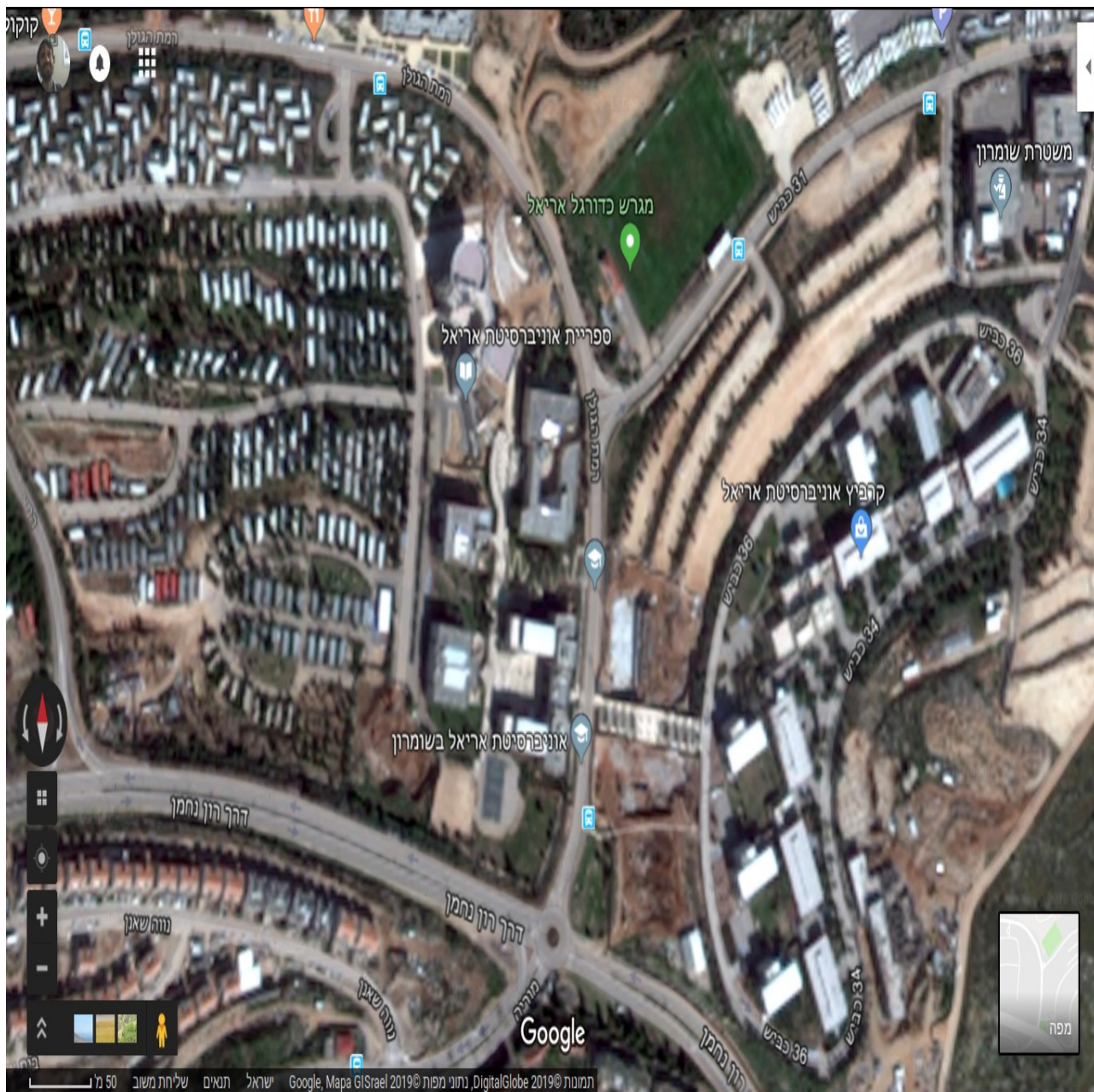
צפו בכלכלן שלמה מעוז בראיון לנלוטב TV בוועידת ישראל לעסקים: "אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח"

הלכלן שלמה מעוז קרא היום (א) לצעירים יהודים הסובלים ממחלת הדור "לכבוש" קרקעות בסגנון "חומה ומגדל".

"אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים כמו בברזיל", אמר מעוז. "כמו שהבדואים עשים את זה בדרום, כמו שהחרדים עשים בבני-ברק - לתפוס שטחים ולקבוע עובדות. ציטור לעשות 'חומה ומגדל' - עוד פעם להקים ולהקים. ממשלת ישראל מספירת בקרקע עגבה עשרות מיליארדי שקלים על הקרקע. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח".

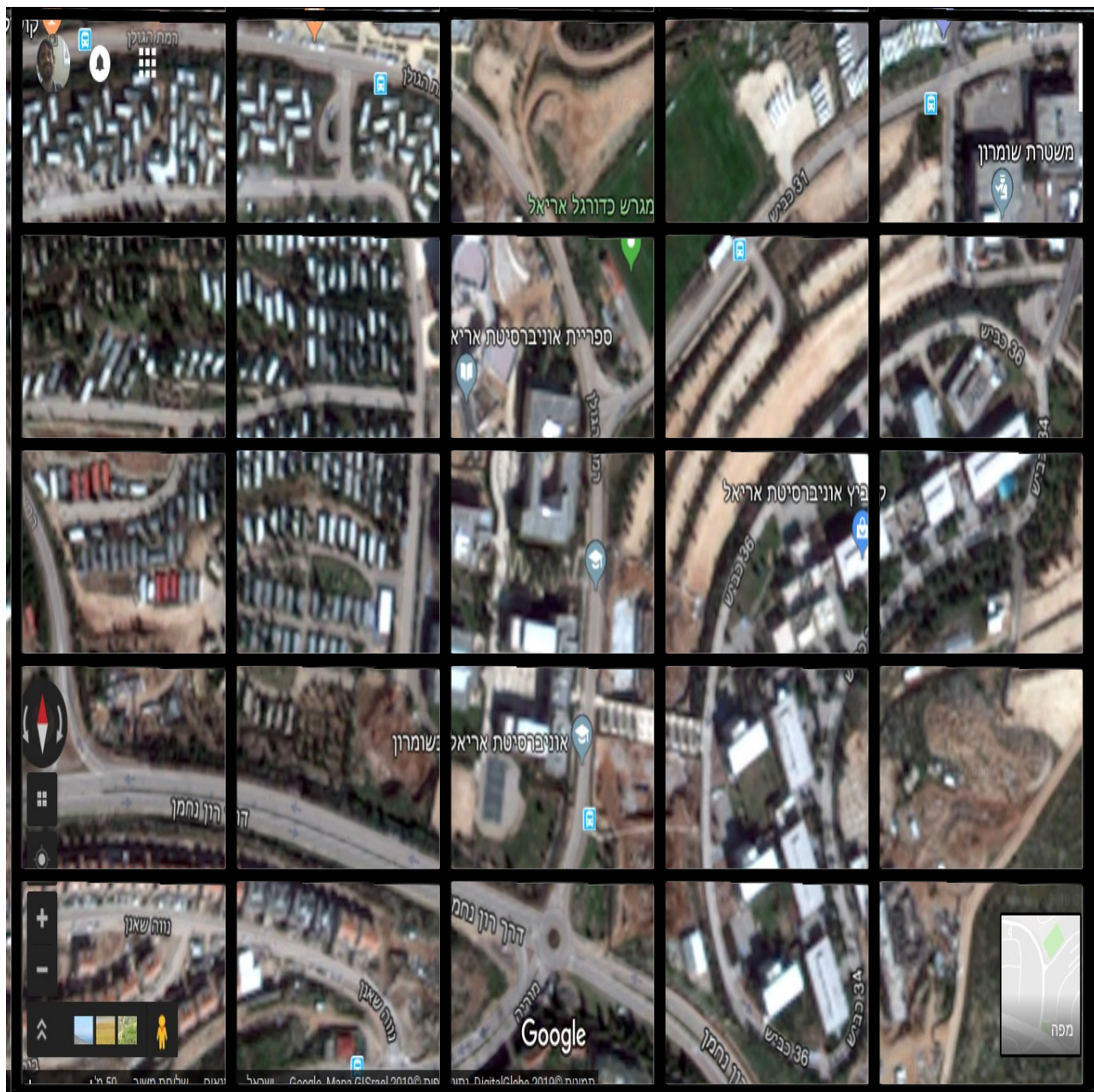


מחלקים את אריאל לסטודנטים!



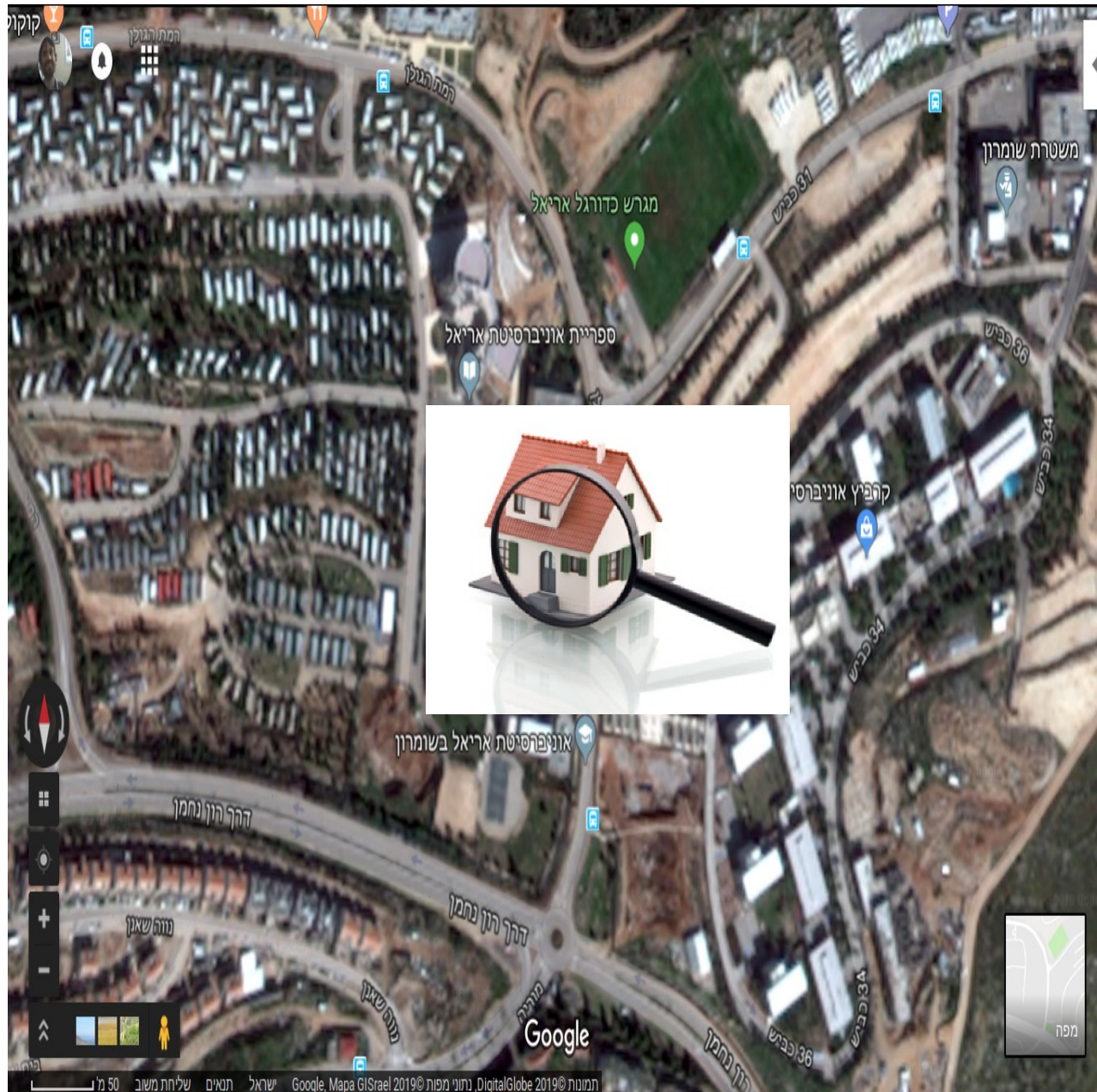
איך נוודא
שכל סטודנט
יקבל חלק
הוגן?

א. חלוקה שוות-שטח



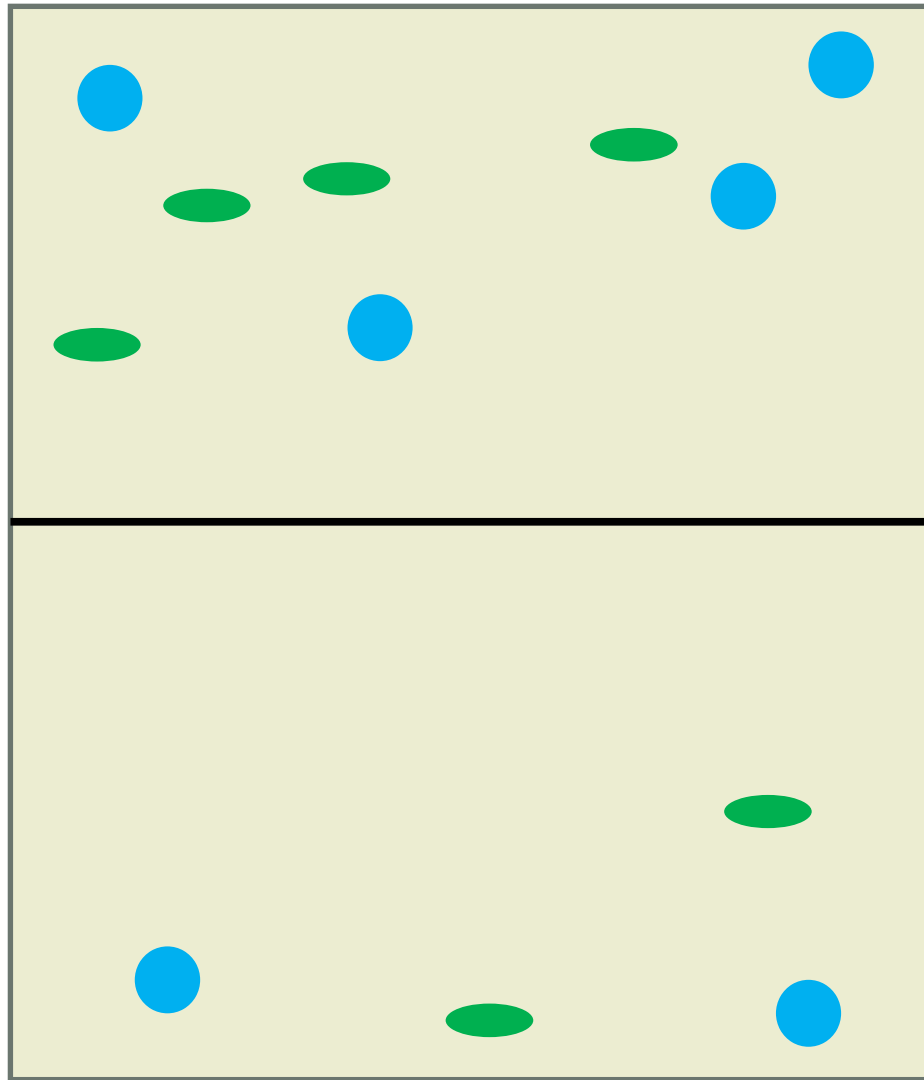
בעיה: הקרקע
לא הומוגנית –
לחלקים שונים
יש ערך שונה.

ב. חלוקה שוות-ערך



בעיה:
ההערכות
סובייקטיביות -
לכל אחד יש
העדפות שונות.

חלוקת עוגה בין שני ילדים

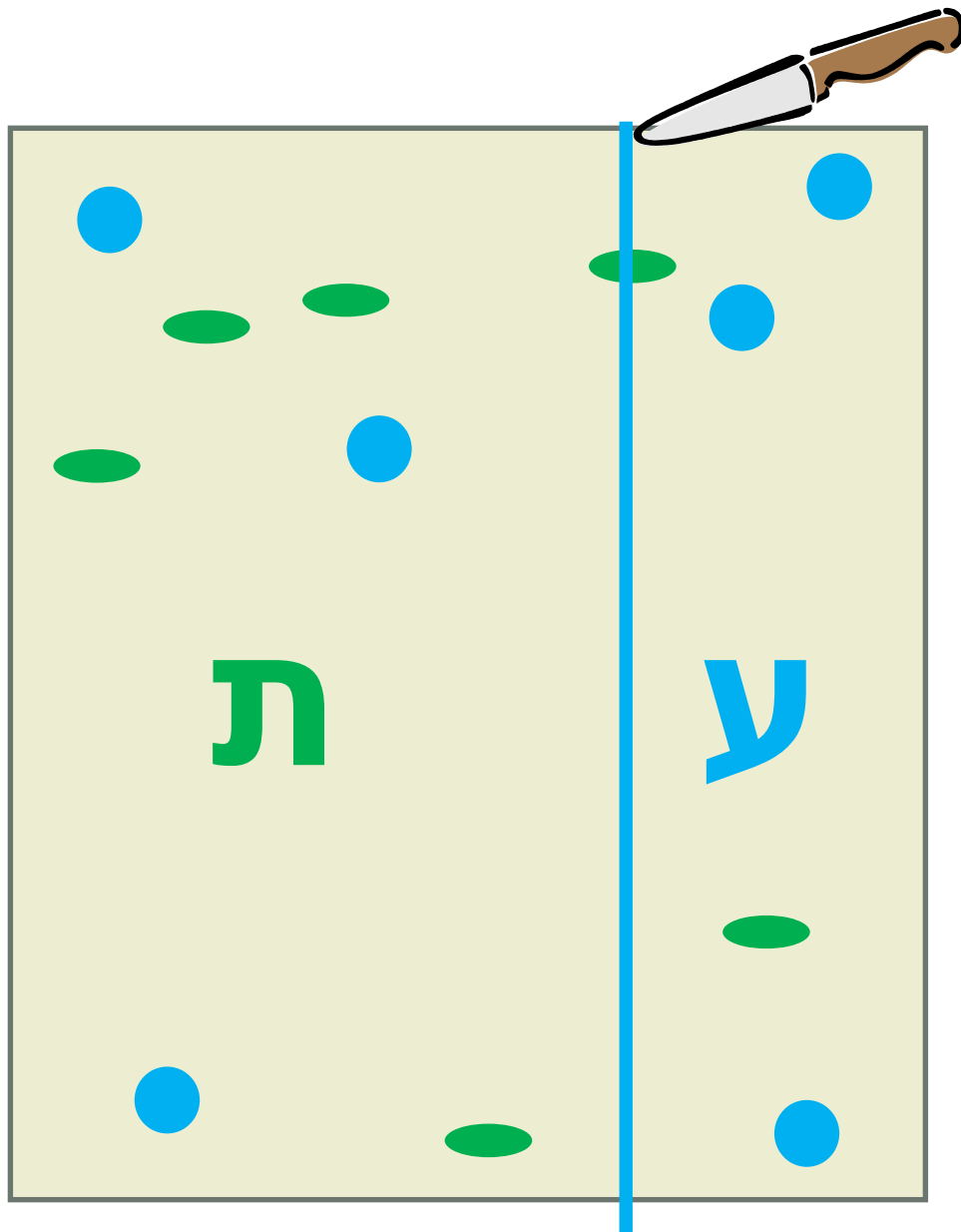


צריך לחלק עוגת
יום-הולדת בין שני
ילדים: **עמי** ו**תמי**.

כל ילד מעדיף סוכריות
בצבע אחר.

אם אנחנו נחלק את
העוגה בצורה שנראית
לנו הוגנת – לא בטוח
שזה יהיה הוגן בעיניהם!

חלוקת עוגה בין שני ילדים



הפתרון: לתת להם
לחלק בעצמם!

- **עמי** מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי $1/2$).
- **תמי** בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- **עמי** מקבל את השאר.

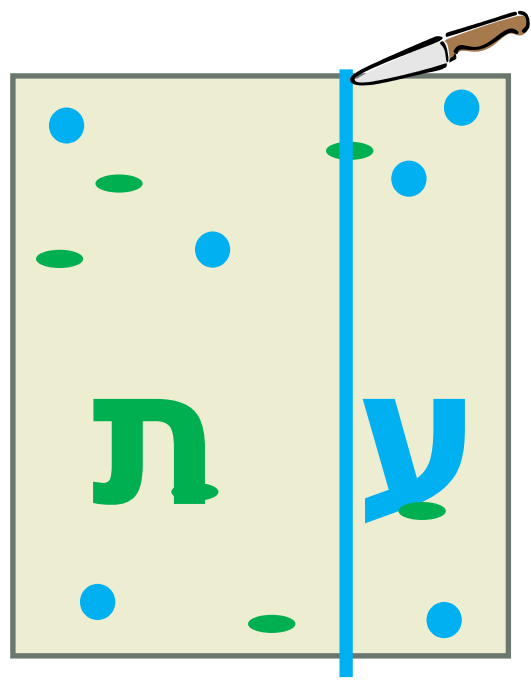
חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יג-8: וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט: אֵל נָא תְהִי
מְרִיבָה בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רְעִי וּבֵין רְעִיךָ כִּי אֲנָשִׁים
אֲחִים אֲנַחְנוּ. הֲלֹא כָל הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הִפְרֵד נָא
מֵעָלַי! אִם הִשְׁמַאל וְאִימָנָה, וְאִם הַיָּמִין וְאִשְׁמֹאֵלָה.

אברם



לוט



אלגוריתם "חתוך ובחר"

תכונות:

(1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות $1/2$ – חלוקה פרופורציונלית (proportional).

(2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

שאלה: האם אפשר להשיג את אותן תכונות כשיש יותר משני אנשים?

חלוקת עוגה – מודל כללי

העוגה C היא קטע (חד ממדי) או מצולע (רב ממדי).
לכל משתתף i יש פונקצית צפיפות ערך על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x) dx$$

The screenshot shows the Madlan website interface. The browser address bar displays https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap_top_menu. The website header includes a search bar and navigation links. The main content area features a map of Israel with a heatmap overlay indicating property prices. A pop-up window titled "שכונה ה" (Neighborhood H) provides details for a specific location:

- מדר: 1,330,000 ש"ח
- מדר למ"ר: 13,800 ש"ח
- מספר עסקאות: 17
- הקליקו לפרטים מלאים בצד מימין

On the right side of the map, there is a summary box for "אריאל" (Ariel) with the following data:

- מדר מדלן: 1,308,000 ש"ח
- מדר למ"ר: 12,100 ש"ח
- מספר עסקאות: 78
- לחצו למידע נוסף במדלן

Below this, a table titled "מדיד מחירי דירות" (Price Index of Apartments) shows data for different apartment types and years:

חדרים	דירות חדשות	מסגרת 90-99	מסגרת 70-79
3	-	864,000	80-89
4	-	993,000	90-99
5	-	1,156,000	1,000,000

חלוקת עוגה ל- n אנשים

סימונים:

C – העוגה כולה.

X_i – הפרוסה שקיבל משתתף i .

V_i – פונקציית הערך של משתתף i .

תכונות:

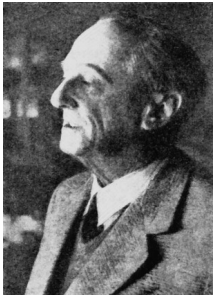
1. חלוקה פרופורציונלית (proportional):

$$\text{For all } i: \quad V_i(X_i) \geq V_i(C) / n$$

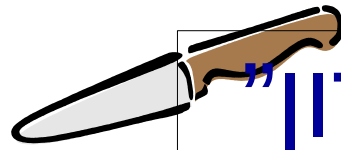
2. חלוקה ללא קנאה (envy-free):

$$\text{For all } i, j: \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

חידה: מה יותר קשה?

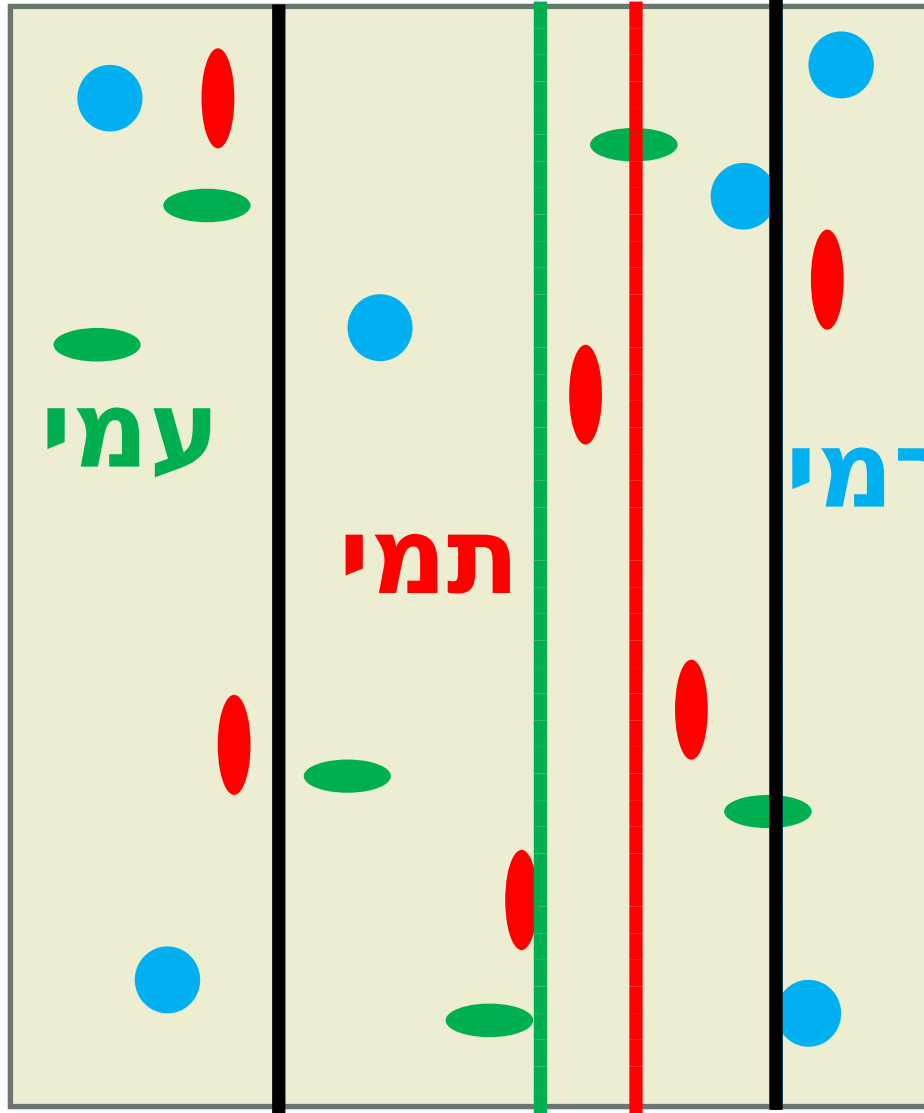


חלוקה פרופורציונלית



אלג. "המפחית האחרון"

– Last Diminisher –
הוגו שטיינהאוס 1948



- **עמי** מסמן $n/1$ בעיניו.
- אם **תמי** חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל- $n/1$.
- וכן **רמי** וכו'.
- האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
- ממשיכים ברקורסיה.

אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $n/1$ מערך העוגה בעיניו. **הוכחה:** נניח שעריך העוגה כולה הוא n . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.

צעד: נניח ל- $n-1$ שחקנים. עכשיו יש n . אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים $n-1$ שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות $n-1$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב- $O(n^2)$ שאילות.

הוכחה: בכל סיבוב שחקן אחד יוצא n סיבובים.

בכל סיבוב צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת.

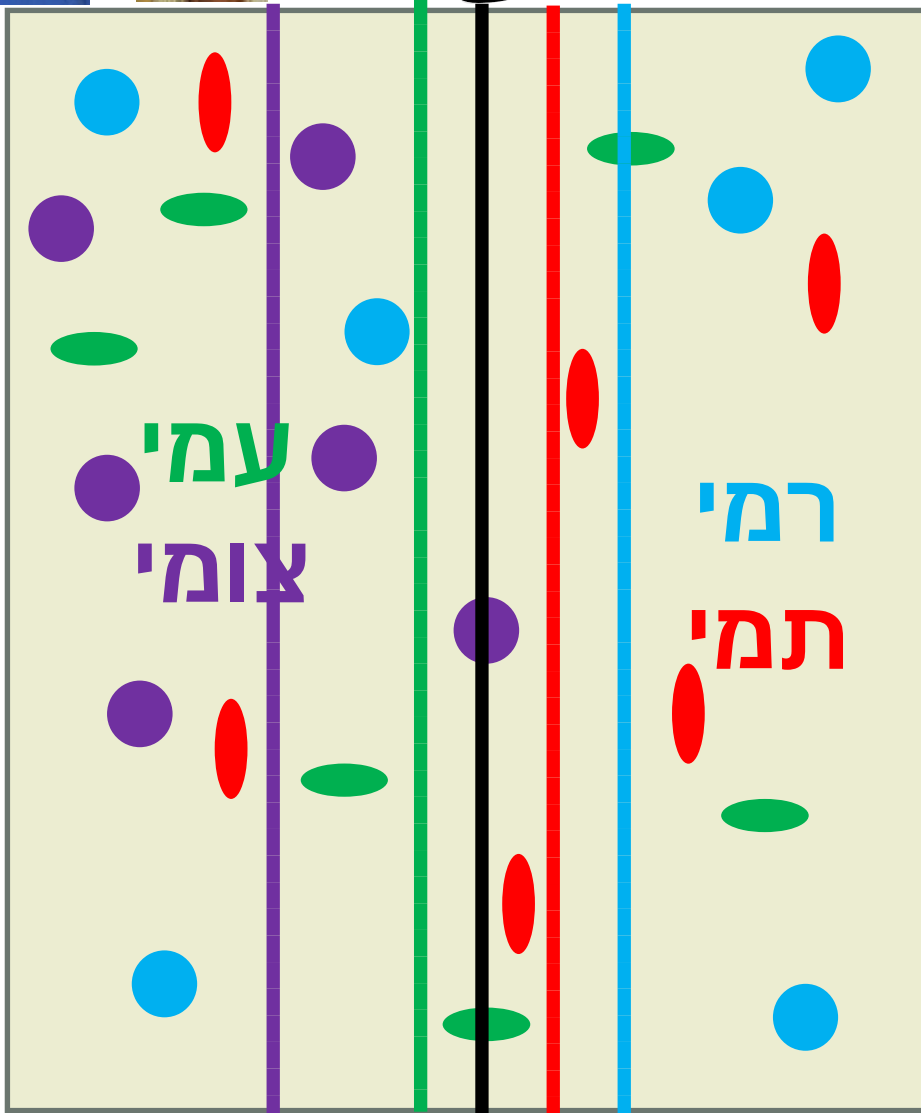
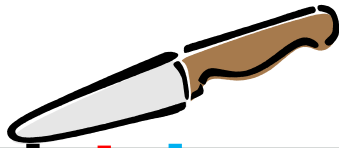
סה"כ $O(n^2)$ שאילות. ***

עבור כלכלנים – זה מספיק.

אבל מדעני-מחשב שואלים:

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

חלוקה פרופורציונלית מהירה



אלגוריתם אבן-פז –

- Even-Paz

שמעון אבן ועזריה פז, '84

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי $1/2$ בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקווים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

אלגוריתם אבן-פז

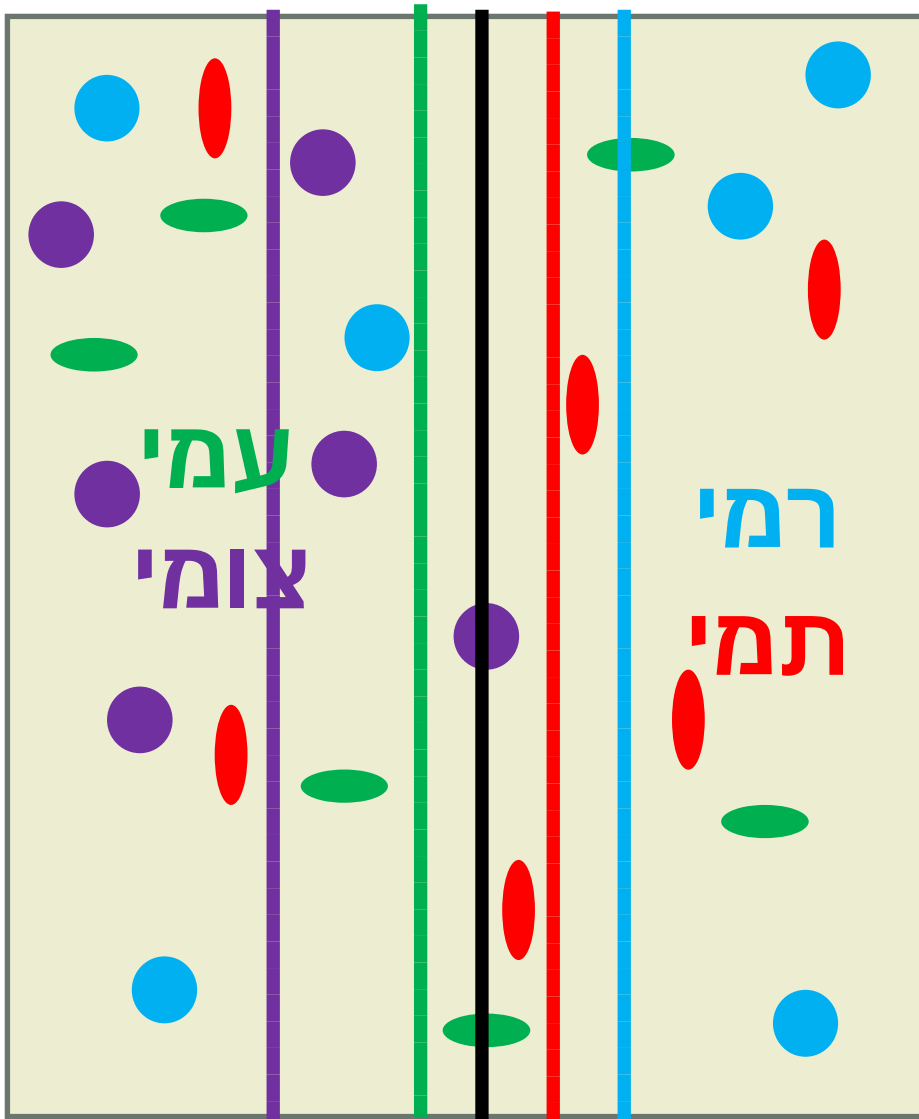
מה עושים כש- n איזוגי?

- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

$$(n-1)/2 : (n+1)/2$$

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו $(n-1)/2$ קוים ובצד שני $(n+1)/2$ קוים.

- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.



אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרפורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1 חלקי n מערך העוגה בעיניו.

הוכחה: נניח שעריך העוגה כולה הוא n . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.

צעד: נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד $n-1$. עכשיו יש n . כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות k , ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא $n/2$ או $(n+1)/2$ או $(n-1)/2$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש

ב- $O(n \log n)$ שאילות.

הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל סיבוב, גודל הקבוצות קטן פי 2. לכן מספר הסיבובים הוא לכל היותר $\log_2(2n)$.
בכל סיבוב, שואלים כל שחקן שאילתה אחת.
לכן הסיבוכיות $O(n \log n)$.

חלוקה פרופורציונלית מהירה

נניח שמותר לשאול את השחקנים שאילתות משני סוגים:

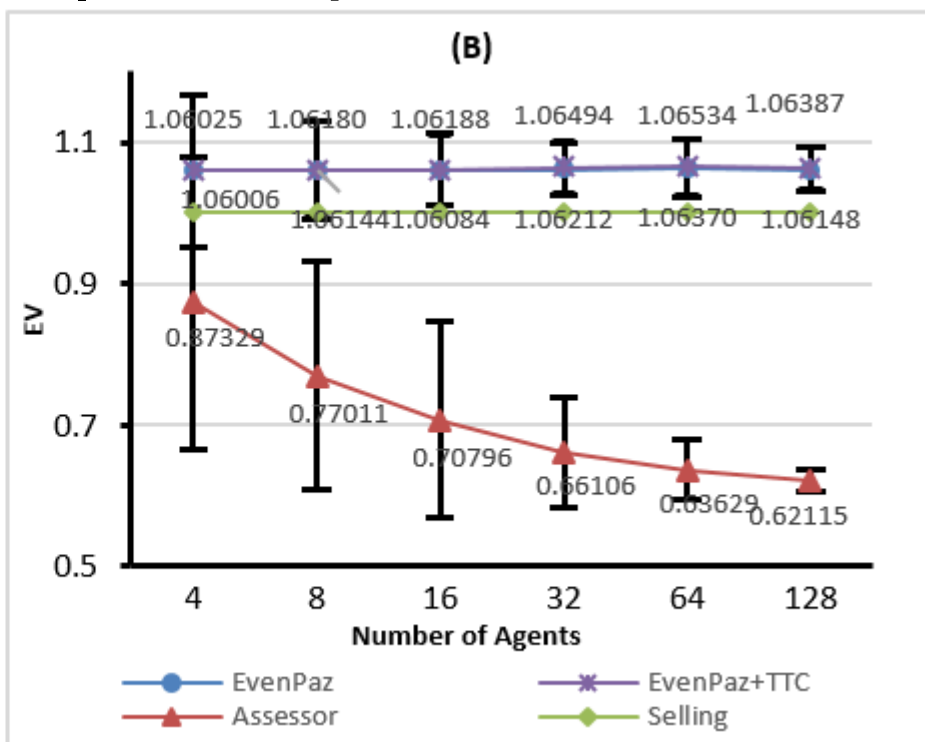
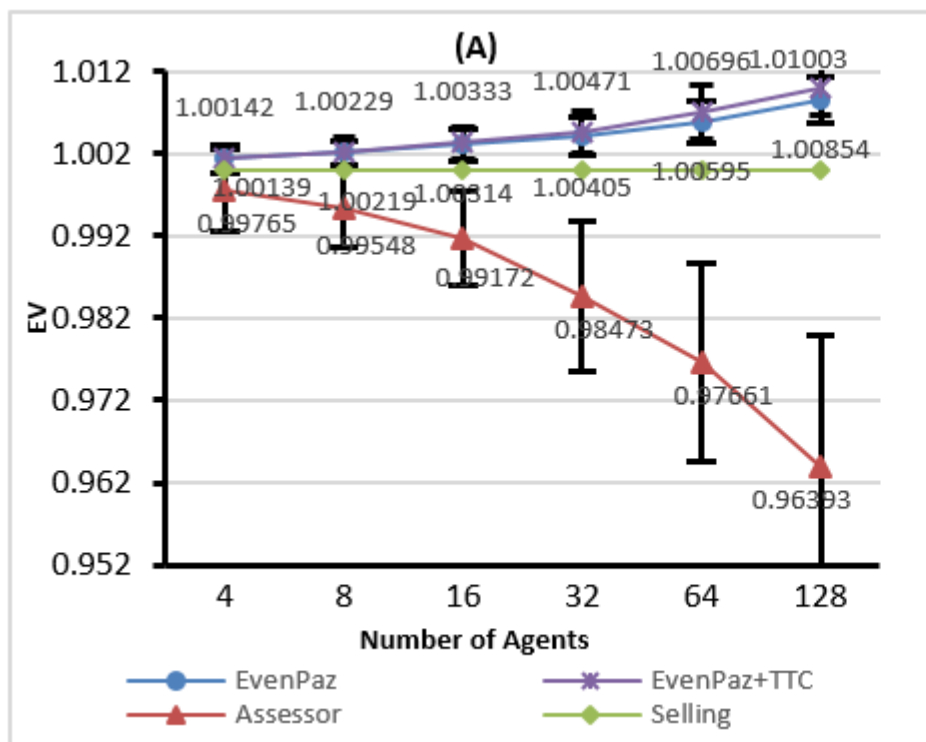
- הערכה (Eval) – חישוב ערך של פרוסה נתונה;
- סימון (Mark) – סימון פרוסה עם ערך נתון.

משפט: כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך לפחות $n \log n$ שאילתות מסוג זה (Edmonds 2006, Woeginger 2007).

מסקנה: אלגוריתם אבן-פז – הכי מהיר שאפשר.

אלגוריתם אבן-פז על נתוני אמת

מחקר של איתי שטכמן (סטודנט לתואר שני) וד"ר ריקה גונן השווה את הביצועים של אלגוריתם אבן-פז לשיטות החלוקה המקובלות, שהן מכירה והערכת שמאי, על ערכי קרקע בישראל (מאתר מדל"ן) ובניו זילנד. נבדקו מדדים רבים, למשל, הערך הנמוך ביותר של משתתף. אבן-פז ניצח:

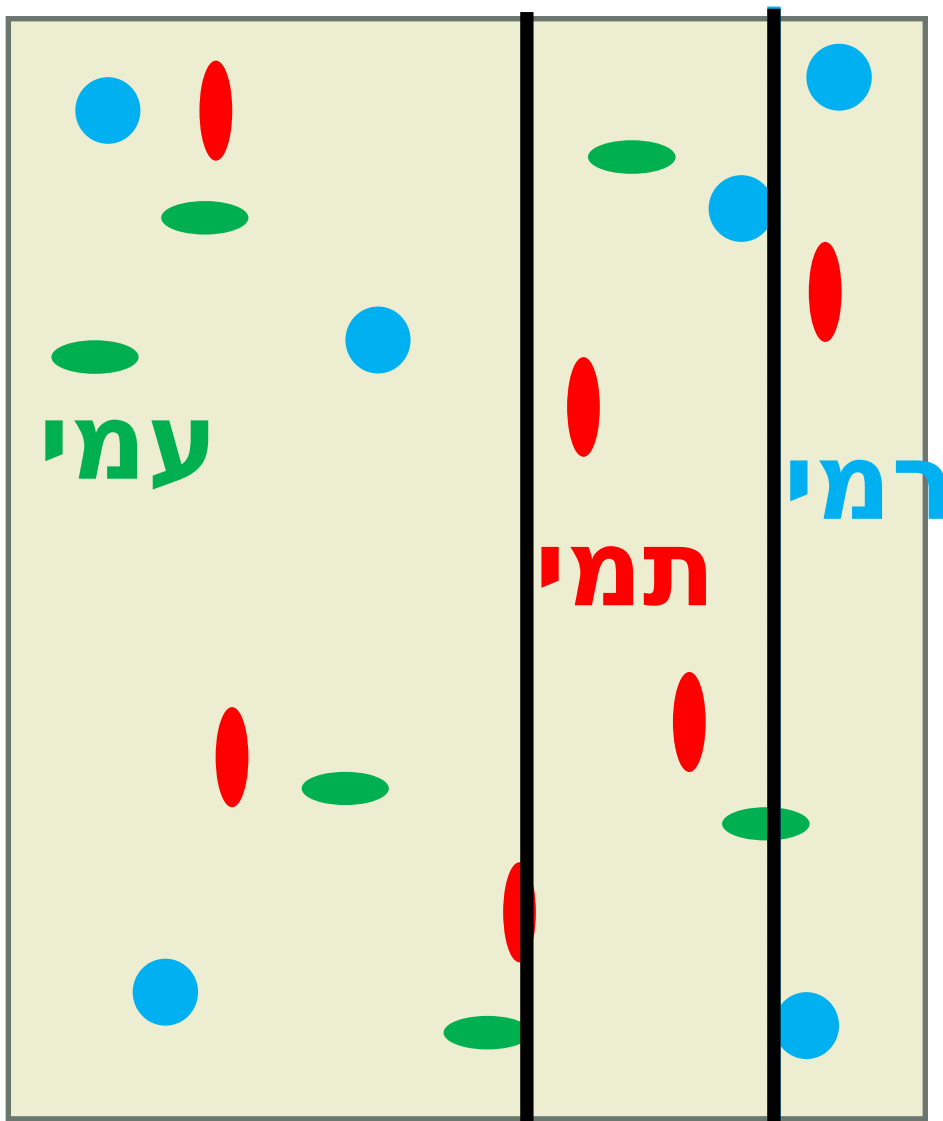


קנאה

האלגוריתמים שראינו
לא מבטיחים שהחלוקה
תהיה ללא קנאה.

קנאה זה דבר מעצבן –
ולא רק בני אדם -

https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment



אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?