
שאלה 2: אלגוריתם הממוצע - יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
רמז: השתמשו במשפט (שאולי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):
"the mean minimizes the mean squared error".

<u>סימונים:</u>

תחילה עבור המקרה הכללי עם m שחקנים ו n נושאים נסמן ב $C_{i,j}$ את התקציב שהציע שחקן $i \in [m]$ עבור נושא $j \in [n]$. נסמן ב A_j את התקציב שקיבל נושא j בעזרת תקציב ממוצע.

לפי ההגדרה לכל שחקן $i \in [m]$ התקציב האידיאלי של השחקן חייב לקיים ש:

$$\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} = C$$

טענה תקציב ממוצע מקיים:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = C$$

הוכחה, לפי ההגדרה התקציב עבור נושא j הוא

$$A_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} C_{i,j}}{m}$$

ולכן

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{i,j}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{i,j}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} C}{m} = \frac{mC}{m} = C$$

לכן נובע בלי הנחת הכלליות שקיימים שני שחקנים $i_1, i_2 \in [m]$ וקיימים $0 \le a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j\right) + a_1 = \sum_{j=1}^{n-1} C_{i_1,j} \quad and \quad \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j\right) - a_2 = \sum_{j=1}^{n-1} C_{i_2,j}$$

$$A_n - a_1 = C_{i_1,n} \qquad\qquad A_n + a_2 = C_{i_2,n}$$

כלומר קיים נושא כלשהו (בלי הנחת כלליות נושא n), כך ששחקן i הציע עבור נושא n ב a פחות מהממוצע, ולשאר הנושאים הוא הביא איכשהו ביחד ב a יותר מהממוצע (של כולם ביחד).

נשים לב, גם שאם לכל שחקן $a = 0$ אז זה אומר שכל השחקנים הציעו את אותו תקציב עבור נושא n.

<u>הוכחה של סעיף א:</u>

עבור שני נושאים זה אומר:

$$A_1 + a_1 = C_{i_1,1}$$
$$A_2 - a_1 = C_{i_1,2}$$

$$A_1 - a_2 = C_{i_2,1}$$
$$A_2 + a_2 = C_{i_2,2}$$

אם $a_1 = 0$ או $a_2 = 0$, אז לא ניתן להעביר כלום מנושא 2 לנושא 1, ולהפך, ולכן אין שיפור פארטו.

נניח עם כך בלי הנחת הכלליות ש $a_1 \geq a_2 > 0$.

נשים לב כי התועלת של שחקן כלשהו היא:

$$-\sum_{j=1}^{n} |C_{i,j} - A_j|$$

ולכן תועלת של השחקן i_1 היא:

$$-2a_1$$

ותועלת שחקן 2, היא

$$-2a_2$$

נניח שאנו מעבירים מנושא 2, לנושא 1, ε.
ולכן עבור שחקן 2, מתקיים

$$A_1^* - a_2 - \varepsilon = C_{i_2,1}$$
$$A_2^* + a_2 + \varepsilon = C_{i_2,2}$$

כלומר, כעת שחקן 2, רחוק ב $a_2 + \varepsilon$ מהתקציב של נושא 2, ומאותה סיבה רחוק ב $a_2 + \varepsilon$ מנושא 1,
כלומר הרסנו, את התועלת של שחקן 2, ב 2ε.

באופן דומה, עם נעביר מנושא 1, לנושא 2, נפגע בתועלת של שחקן 1, ב 2ε.
ולכן לא קיים שיפור פראטו, כלומר תקציב ממוצע הוא יעיל פראטו.

ב. אלגוריתם שמוצא תקציב יעיל פרטו והוגן לקבוצות.

הרץ את אלגוריתם הממוצע, שאנו יודעים שהוא הוגן לקבוצות.
כנ"ל כמו בסעיף א, סמן $A_1,\dots,A_m$ את התקציבים שקיבלנו.
נסמן ב $V_1,\dots,V_n$ את התועלות המתקבלות מהאלגוריתם הממוצע עבור כל שחקן.

כעת, נבנה את התוכנית הליארית הבאה:

$$x_1 + \dots + x_m = C$$

$$\forall i \in [n]: -\sum_{j=1}^{m} |C_{i,j} - A_j| \geq V_i$$

נשים לב כי אם לכל i,j נגדיר $|C_{i,j} - A_j| \leq z_{i,j}$, אז, לכל שחקן j מתקיים:

$$-\sum_{j=1}^{m} |C_{i,j} - A_j| \geq -\sum_{j=1}^{m} z_{i,j}$$

ולכן מספיק לדרוש ש:

$$-\sum_{j=1}^{m} z_{i,j} \geq V_i$$

מצד שני נשים לב כי

$$|C_{i,j} - A_j| \leq z_{i,j}$$

מתקיים אם"ם:

$$(C_{i,j} - A_j) \leq z_{i,j}$$

וגם

$$(A_j - C_{i,j}) \leq z_{i,j}$$

אם כך נרצה לפתור את הבעיה הלינארית הבאה:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} -z_{i,j}$$

$$\begin{aligned} &Constrains: \\ &A_1 + \dots + A_m = C \\ &\forall i \in [n]: \ -\sum_{j=1}^{m} z_{i,j} \geq V_i \\ &\forall i \in [n],\ \forall j \in [m] : (C_{i,j} - A_j) \leq z_{i,j} \\ &\qquad (A_j - C_{i,j}) \leq z_{i,j} \end{aligned}$$

כלומר יש לנו בעיה לינארית בעלת $1 + n + 2nm = O(nm)$ משוואות.

הבעיה עם כך תחזיר תקציב $A_1,\dots,A_m$, שהוא יעיל פרטו, כי אנחנו ממקסמים את סכום התועלות.
והוא גם הוגן לקבוצות, כי המשוואות הנוספות שלנו דורשות כי התקציב הוא שיפור פרטו של חלוקה ממוצעת שאנו יודעים שהיא הוגנת לקבוצות.

בהנחה ומותר תקציב ממשי, יש לאגוריתמים שפותרים בעיות לינאריות בממשיים בזמן פולינומי.
וזה יגיד לנו אלגוריתם לחלוקה הוגנת ויעילה פרטו עבור n נושאים ו m שחקנים.