

## מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית \* מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם שני שחקנים

הוכיחו: כשיש שני שחקנים, אלגוריתם המכרז מחזיר חלוקה ללא-קנאה גם עם כלל קנאסטר וגם עם כלל ריית'.

### שאלה 2: אלגוריתם המכרז לעומת המנצח המתוקן

חזרו על הגדרת אלגוריתם "המנצח המתוקן" בפרק 6. הפעילו את האלגוריתם על אחת הדוגמאות מההרצאה (זכרו לנרמל את הערכים כך שסכום הערכים של כל שחקן יהיה 100). חשבו את התועלת שמקבל כל אחד מהשחקנים. האם התועלת שמקבלים השחקנים באלגוריתם "המנצח המתוקן" גדולה יותר או קטנה יותר מבאלגוריתם המכרז?

### \* שאלה 3: אלגוריתם המכרז לשחקנים עם זכויות שונות

- הכלילו את אלגוריתם המכרז לשחקנים עם זכויות שונות.
- תארו בפירוט את שלבי האלגוריתם: מי מקבל כל חפץ, כמה משלם כל שחקן לפי כל אחד מכללי-התשלום.
- הגדירו במדויק את תכונות ההוגנות והיעילות שהאלגוריתם מקיים, והוכיחו את נכונותן.

### שאלה 4: אלגוריתם חלופי לחלוקת חדרים

- נסה להתאים את אלגוריתם המכרז לבעיית חלוקת החדרים באופן הבא:
- מצא השמה ממקסמת-סכום-ערכים בין השחקנים לחדרים (בעזרת שידוך משקל-מקסימום).
  - גבה מכל שחקן את הערך שהוא מייחס לחדר שלו.
  - שלם את שכר הדירה.
  - חלק את ההפרש בין השחקנים שווה בשווה.
- הוכיחו, שהאלגוריתם הזה לא תמיד מחזיר חלוקה ללא-קנאה.

### שאלה 5: השמת חפצים ללא כסף

- נתונים  $n$  שחקנים ו- $m$  חפצים. צריך לתת חפץ אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים מהירים למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים (ראו הגדרות בפרק 3):
- השמה יעילה-אוטיליטרית.
  - השמה אופטימלית-נאש (= ממקסמת את מכפלת הערכים).
  - השמה אגליטרית (= ממקסמת את הערך הקטן ביותר).
  - \* השמה לקסימין-אגליטרית.

### שאלה 6: האם ייתכן שדייר ישלם יותר מערך החדר?

א. הוכיחו, שאם סכום הערכים של של דייר מסויים לכל החדרים בדירה גדול או שווה  $R$  (שכר הדירה הכללי), אז המחיר שישלם על החדר שיקבל, קטן או שווה מהערך שהוא מייחס לחדר.

ב. הראו דוגמה שבה סכום הערכים של דייר מסויים קטן מ- $R$ , ובכל חלוקה ללא-קנאה, הדייר הזה משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל.

### שאלה 7: האם ייתכן שדייר ישלם יותר מערך החדר?

א. הוכיחו, שאם סכום הערכים של של דייר מסויים לכל החדרים בדירה גדול או שווה  $R$  (שכר הדירה הכללי), אז המחיר שישלם על החדר שיקבל, קטן או שווה מהערך שהוא מייחס לחדר.

ב. הראו דוגמה שבה סכום הערכים של דייר מסויים קטן מ- $R$ , ובכל חלוקה ללא-קנאה, הדייר הזה משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל.