

מטלה 12 אלגוריתמים כלכליים

שלמה גליק

שאלה 2 (ההסתברות להישאר בחיים)

בשאלה זו הניחו, שכל אחד מארבעת סוגי-הדם העיקריים (O, A, B, AB) מופיע באוכלוסיה באותה שכיחות (25%). כמו כן הניחו, שהתאמה בין תורם לחולה תלויה רק בסוג-הדם. הניחו גם, שלכל חולה יש תורם אחד בדיוק, המוכן לתרום כליה כדי לעזור לו.

א. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, ללא החלפת כליות?

פתרון סעיף א:

במקרה זה ההסתברות היא פשוט ההסתברות להתאמה בין החולה הספציפי לתורם היחיד שלו. במילים אחרות זאת ההסתברות שהחולה יהיה מסוג דם שמתאים לקבל תרומה מהסוג דם של התורם. נחשב עבור כל סוג דם של התורם מה ההסתברות של החולה להתאמה.

- עבור תורם מסוג O כל סוגי הדם מתאימים ולכן ההסתברות היא $\frac{4}{4} = 1$

- עבור תורם מסוג A סוגי הדם המתאימים הם A, AB והלא מתאימים הם B, O ולכן ההסתברות היא

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- עבור תורם מסוג B סוגי הדם המתאימים הם B, AB והלא מתאימים הם A, O ולכן ההסתברות היא

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- עבור תורם מסוג AB סוג הדם המתאם הוא רק AB הלא מתאימים הם O, A, B ולכן ההסתברות היא

$$\frac{1}{4}$$

עבור כל סוג דם של התורם יש הסתברות של $\frac{1}{4}$ ולכן נכפיל כל אופציה מהאופציות למעלה ב- $\frac{1}{4}$ ונקבל

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

סה"כ ההסתברות של חולה לקבל כליה במצב כזה היא $\frac{9}{16}$

ב. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, כאשר יש החלפת כליות עם מעגלים באורך 2 בלבד?
פתרון סעיף ב:

חישוב ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה:

נחלק למקרים:

סך הכל יש 16 מקרים (4 סוגים לחולה * 4 סוגים לתורם הישיר).

1-4. החולה עם סוג AB: במקרים אלה תמיד תהיה לו תרומה מהתורם הישיר שלו
5-7. התורם הישיר עם סוג O והחולה לא מסוג AB: גם במקרים אלה תהיה לחולה תרומה מהתורם הישיר שלו

8. החולה והתורם שניהם A: גם במקרה זה תהיה לחולה תרומה מהתורם הישיר שלו

9. החולה והתורם שניהם B: גם במקרה זה תהיה לחולה תרומה מהתורם הישיר שלו

10. התורם A החולה O: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה A) או (תורם O וחולה AB) - סה"כ 2/16 מקרים

11. התורם A החולה B: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה A) או (תורם O וחולה AB) או (תורם B וחולה A) או (תורם B וחולה AB) - סה"כ 4/16 מקרים

12. התורם B החולה O: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה B) או (תורם O וחולה AB) - סה"כ 2/16 מקרים

13. התורם B החולה A: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה B) או (תורם O וחולה AB) או (תורם A וחולה B) או (תורם A וחולה AB) - סה"כ 4/16 מקרים

14. התורם AB החולה O: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה AB) - סה"כ 1/16 מקרים

15. התורם AB החולה A: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה AB) או (תורם A וחולה AB) - סה"כ 2/16 מקרים

16. התורם AB החולה B: יכול להתקיים מעגל עם (תורם O וחולה AB) או (תורם B וחולה AB) - סה"כ 2/16 מקרים

נפתור על דרך השלילה. נחשב את אחד פחות ההסתברות של חולה לא לקבל כליה מתאימה.

ב9 המקרים הראשונים תמיד יש התאמה עם התורם הישיר.

עבור שאר המקרים נחשב עבור כל מקרה הסיכוי למקרה הוא $\frac{1}{16}$ ונכפיל את זה בסיכוי לאי התאמה לחילוף

עבור כל זוג משתתפים מלבד הזוג הנוכחי.

סה"כ עבור n זוגות משתתפים:

$$1 - \left(\frac{1}{16} * \left(\frac{14}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{12}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{14}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{12}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{15}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{14}{16} \right)^{n-1} + \frac{1}{16} * \left(\frac{14}{16} \right)^{n-1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{16} \left(4 * \left(\frac{14}{16} \right)^{n-1} + 2 * \left(\frac{12}{16} \right)^{n-1} + \left(\frac{15}{16} \right)^{n-1} \right) = 1 - \frac{1}{16^n} (4 * 14^{n-1} + 2 * 12^{n-1} + 15^{n-1})$$

$$= 1 - \frac{4 * 14^{n-1} + 2 * 12^{n-1} + 15^{n-1}}{16^n} \quad \leftarrow \text{ת"ס סעיף ב}$$

* ג. מה ההסתברות של חולה לקבל כליה מתאימה, כאשר יש החלפת כליות עם מעגלים באורך 2 או 3?

פתרון לסעיף זה בעזרת סימולצייה במחברת המצורפת בקישור

https://github.com/shlomog12/economic-algorithms/blob/master/hw12/q2_c.ipynb