החלפות ומעגלים

היום נדבר על החלפות. נניח שכמה עובדים משובצים לתורניות, וחלק מהם היו מעדיפים להתחלף עם אחרים. או, כמה סטודנטים משובצים לחדרים במעונות והיו מעוניינים להתחלף. אנחנו רוצים ליצור שיבוץ חדש שיהיה יעיל פארטו. בניגוד לבעיות של חלוקה הוגנת, כאן - בניגוד לאנשים יש זכויות קודמות עוד לפני הפעלת האלגוריתם. כדי שאנשים יסכימו להשתתף באלגוריתם שלנו, אנחנו חייבים להבטיח להם שלא ייגרם להם נזק. אז בנוסף לתכונות של יעילות-פארטו ושל גילוי אמת, אנחנו דורשים תכונה שלישית.

הגדרה: אלגוריתם נקרא **מעודד השתתפות** (במקור individually rational – רציונלי ליחידים – ביטוי פחות ברור לדעתי), אם כל משתתף מעדיף את תוצאת האלגוריתם על-פני המצב לפני האלגוריתם (או לפחות אדיש בין התוצאות).

האם קיים אלגוריתם שהוא גם מעודד השתתפות, וגם מוצא שיבוץ יעיל פארטו?

אלגוריתם מעגלי המסחר - Top Trading Cycles

האלגוריתם פותח ע"י אותם חוקרים שפיתחו את האלגוריתם לשידוך יציב - Gale ו Shapley, עם חוקר שלישי בשם Scarf. הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של **אנשים** ל**בתים** - לכל איש יש בית אחד.

האלגוריתם מחזיק גרף מכוון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

מעדכנים את הגרף באופן הבא:
א. מוצאים מעגל מכוון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדתם בקורס קודם).
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.
הוכחה: מספיק להוכיח שבשלב א תמיד קיים מעגל. הסיבה היא שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק. כיוון שהגרף סופי, אם נתחיל מצומת כלשהו ונלך בכיוון החצים, מתישהו בהכרח נגיע לצומת שכבר היינו בו - זה מעגל. ***

מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? - מציאת מעגל דורשת זמן $O(n)$. אחרי כל מציאת מעגל, מוחקים לפחות צומת אחד, כך שמספר השלבים הוא לכל היותר n. לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n^2)$.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מעודד השתתפות.
הוכחה: האלגוריתם משבץ כל משתתף בבית שהוא הצביע עליו בשלב כלשהו. כל משתתף מצביע תמיד על הבית של עצמו או על בית טוב יותר. ***

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מגלה-אמת.
הוכחה: האבחנה החשובה כאן היא, שהקשת היוצאת מאדם מסויים משפיעה על הגרף רק באותו סיבוב שהוא סוחר, ואז הוא יוצא מהמשחק. למשל, אם יוסי סוחר במעגל 3 כשהוא אמיתי ובמעגל 5 כשהוא

מתחכם, אז המסחר עד למעגל 3 מתנהל בדיוק באותו אופן בשני המצבים - העובדה שיוסי שינה את הקשת שלו, לא גרמה שום שינוי בקשתות אחרות ובמעגלים אחרים.
נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא אמיתי ובמעגל j כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: $k \geq j$. במקרה זה, המסחר עד למעגל k-1 זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל k-1 היא זהה בשני המצבים. וכשיוסי אמיתי, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר בקבוצה זו, כך שההתחכמות לא יכולה להועיל לו.
- מקרה ב: $k < j$. במקרה זה, המסחר עד למעגל j-1 זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא, כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. כשיוסי מתחכם, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל (מעגל j); נניח שהוא סוגר מעגל עם בית כלשהו x. כשיוסי אמיתי, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x. כל עוד יוסי בגרף, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף: הבית של יוסי נשאר בגרף ומצביע על יוסי; מי שהכי רוצה את הבית הזה (נניח, עמי) עדיין נשאר בגרף ומצביע על הבית של יוסי, לכן גם הבית של עמי נשאר בגרף ומצביע על עמי; וכן הלאה עד x. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא אמיתי הוא טוב לפחות כמו x.
  - ההוכחה הזאת מזכירה את דברי בן עזאי בתלמוד: "אין אדם נוגע במוכן לחבירו" (יומא לח.): אם בית x שייך לך – אף אחד לא ייגע בו. הוא יגיע אליך גם אם תגיד אמת – אתה לא צריך לשקר כדי להשיג אותו...

אלגוריתם מעגלי המסחר הוא גם יעיל פארטו. יותר מזה, הוא מקיים תכונה חזקה יותר הנקראת יציבות. בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת** (blocking coalition) כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לפחות לאחד מחברי הקבוצה, ולא פחות טובה לכל שאר חברי הקבוצה. אם אין קבוצה מערערת, השיבוץ נקרא **יציב**. קל לראות, שכל שיבוץ יציב הוא יעיל פארטו ומעודד השתתפות.

קבוצת השיבוצים היציבים נקראת ה**ליבה** (core) של משחק השיבוצים. ניתן להראות שהליבה כוללת בדיוק שיבוץ אחד, והוא השיבוץ המוחזר ע"י אלגוריתם מעגלי המסחר.

משפט: אם כל יחסי ההעדפה חזקים (אין אדישות), אז אלגוריתם מעגלי המסחר מוצא שיבוץ יציב.
הוכחה: נניח שקבוצה כלשהי של שחקנים, שנקרא להם "הבדלנים", שוקלת לפרוש מהאלגוריתם. נסמן:

- שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם משתתפים באלגוריתם;
- שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם פורשים ומבצעים החלפה כלשהי ביניהם.

יהי k המספר הקטן ביותר, כך שבדלן כלשהו ממעגל k (נניח יוסי) מקבל בית אחֵר בעקבות הפרישה. בית זה חייב להיות שייך לבדלן אחֵר – כי אחרי הפרישה הבדלנים יכולים רק להתחלף ביניהם.
כיוון ש-k קטן ביותר, כל הבדלנים ממעגלים k>j מקבלים אותו בית. לכן יוסי מקבל בית של מישהו ממעגל k ומעלה. אבל בשיבוץ א, יוסי מקבל את הבית הטוב ביותר עבורו, מבין הבתים שעדיין זמינים בזמן מעגל k.
כיוון שבשיבוץ ב הוא מקבל בית אחר, וההעדפות חזקות – הבית האחר בהכרח גרוע יותר עבורו. ***

משפט ב: אם כל יחסי ההעדפה חזקים (אין אדישות), אז יש רק שיבוץ יציב אחד - והוא זה שמחזיר אלגוריתם מעגלי המסחר.
הוכחה: נגדיר: שיבוץ א = השיבוץ של האלגוריתם, שיבוץ ב = שיבוץ אחר כלשהו.
יהי k הקטן ביותר כך שמישהו (נניח יוסי) ממעגל k באלגוריתם, משובץ אחרת בשיבוץ ב.
בשיבוץ א, יוסי מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים k>j.
כיוון ש k הוא הקטן ביותר, בשיבוץ ב יוסי לא מקבל בית ממעגל k>j, ולכן מצבו בשיבוץ ב פחות טוב.
אותו שיקול נכון לגבי כל המשתתפים במעגל k המשובצים אחרת בשיבוץ ב.
לכן, משתתפי מעגל k יכולים לפרוש ולערער על שיבוץ ב.
מכאן: שיבוץ ב אינו יציב. ***

למה זה חשוב שהשיבוץ היציב הוא יחיד? - כי אם מישהו יטען שאלגוריתם "מעגלי המסחר" מפלה אותו לרעה, נוכל להוכיח לו שזה לא נכון – כל אלגוריתם אחר שהיה מוצא שיבוץ יציב, היה מוצא את אותו שיבוץ בדיוק.

יישומים

אלגוריתם מעגלי המסחר יכול לשמש תחליף למסחר בכסף, במצבים שבהם לא רוצים מסיבה כלשהי להשתמש בכסף. לדוגמה, אפשר להשתמש בו כדי לבנות מערכת להחלפת ספרים משומשים. כל אחד מציע ספר ובוחר את הספר שהוא הכי רוצה מבין הספרים האחרים, והמערכת מבצעת החלפות במעגל. דוגמה לאפליקציה המשתמשת באלגוריתם זה (פותחה ע"י סטודנטים במסגרת פרוייקט שנה ג באריאל): https://github.com/aricRach/final-project

מעגלי-מסחר יכולים לשמש גם כדי ליישם את מצוות היובל בימינו. ראו מאמרי "אלגוריתם היובל - תהליך הדרגתי לחלוקת קרקעות", בד"ד 28, http://www.tora.us.fm/tryg/yovl/bdd/yovel-bdd-28.pdf .

החלפות כשיש אדישות

אלגוריתם מעגלי-המסחר מחזיר שיבוץ יציב (ויעיל פארטו) רק כאשר כל יחסי ההעדפות הם חזקים. אבל במקרים רבים, המשתתפים עשויים להיות אדישים בין שתי אפשרויות או יותר. המשמעות היא, שלכל שחקן יכולים להיות שניים או יותר "בתים טובים ביותר" בכל שלב. האלגוריתם כמובן יכול לבחור ביניהם באופן שרירותי, אבל אז התוצאה לא תהיה יעילה-פארטו.

דוגמה. יש שני אנשים: אדם א אדיש בין שני בתים, ואדם ב מעדיף את הבית של א. האלגוריתם יכול לבחור שרירותית את המעגל א-א, ולהשאיר כל אחד בבית הנוכחי שלו. אבל יש שיפור פארטו: להחליף בין א ל-ב.

אדישות היא דבר נפוץ במציאות. לדוגמה, כשמחלקים מעונות לסטודנטים, יש הרבה סטודנטים שחשוב להם רק סוג המעון (קרוואן, דירה לבד, דירת שותפים וכו'), והם אדישים בין כל המעונות מאותו סוג. מצד שני, יש סטודנטים שמעדיפים דווקא מעון מסויים (נניח, כי הוא קרוב למחלקה, או רחוק מהכביש). האם ניתן לשפר את אלגוריתם "מעגלי המסחר" כך שישיג תוצאה יעילה-פארטו?

- התשובה היא כן, יש כמה אלגוריתמים כאלו. המבנה הכללי של אלגוריתם כזה דומה לאלגוריתם מעגלי המסחר: מחזיקים גרף מכוון שבו הצמתים הם האנשים, ויש קשת מכל אדם אל כל האנשים המחזיקים בבתים שהוא הכי רוצה. לפני שנסביר איך פועלים האלגוריתמים האלו, נזכיר את מושג מתורת הגרפים. בגרף מכוון, רכיב קשיר חזק (strongly-connected component) הוא אוסף של צמתים, שאפשר להגיע מכל אחד מהם לכל אחד מהם במסלול מכוון (הגדרה שקולה: כל שני צמתים ברכיב נמצאים במעגל מכוון כלשהו). ישנם אלגוריתמים ידועים למציאת רכיבים קשירים חזקים בגרף, לדוגמה על-בסיס אלגוריתם DFS.

רכיב-קשיר-חזק C נקרא סופי (terminal) אם:

- אין קשתות יוצאות משחקנים ב-C לרכיבים אחרים (רכיב שיש לו תכונה זו נקרא גם כיור – sink, או סופג - absorbing).
- יש קשת מכל שחקן ב-C לעצמו. במילים אחרות: כל שחקן ב-C מחזיק באחד הבתים שהוא הכי רוצה, מבין הבתים שיש עכשיו בגרף.

אלגוריתם-מעגלי-המסחר-עם-אדישות מעדכן את הגרף באופן הבא:
א. כל עוד יש בגרף רכיב-קשיר-חזק סופי C:

- נותנים לכל השחקנים ב-C את הבית שהם מחזיקים בו עכשיו.
- מוציאים מהשוק את השחקנים ב-C ואת הבתים שלהם.
- מעדכנים את ההעדפות של השחקנים האחרים, ובונים מחדש את הגרף.

ב. אם אין בגרף רכיב-קשיר-חזק סופי:

- משתמשים בכלל-בחירה מסויים כדי לבחור, לכל שחקן, בית אחד מבין הבתים שהוא הכי רוצה.
- מוצאים מעגל מכוון בגרף שנוצר.
- מבצעים את ההחלפה במעגל (אבל משאירים בשוק את השחקנים והבתים).

ג. חוזרים על סעיפים א, ב עד שהגרף ריק.

ישנם כמה כללי-בחירה שאפשר להשתמש בהם בסעיף ב. נציג כלל-בחירה אחד – כלל **סבן-סתורמן** (פותח ע"י דניאלה סבן וג'יי סתורמן, 2013). כדי להגדיר את הכלל, נשתמש במושגים הבאים:

- שחקן *מקנא* – שחקן, שהבית שהוא מחזיק בו כעת, אינו אחד מהבתים שהוא הכי רוצה (כלומר: אין קשת ממנו לעצמו).
- שחקן *מסודר* – שחקן שכבר בחר, מבין הבתים שהוא הכי רוצה, בית אחד שעליו הוא יצביע.
- בית *נמוך* – אנחנו מגדירים מראש סדר קבוע על הבתים, נניח לפי מספר סידורי; בית "*נמוך*" הוא בית שהמספר הסידורי שלו נמוך ביותר.

בכל שלב, הכלל בוחר בתים לשחקנים באופן הבא:

- כל שחקן מקנא בוחר, מבין הבתים שהוא הכי רוצה, את הבית הנמוך ביותר. עכשיו, כל השחקנים המקנאים הם מסודרים.
- מבין השחקנים הלא-מסודרים, מסתכלים על השחקנים, שאחד הבתים שהם הכי רוצים שייך לשחקן מסודר. מבין השחקנים האלה, בוחרים את זה שמחזיק בבית הכי נמוך. מבין הבתים שהוא הכי רוצה, השייכים לשחקן מסודר, בוחרים עבורו את הבית הכי נמוך. ממשיכים באופן זה עד שכל השחקנים מסודרים.

כאשר כל השחקנים מסודרים, לכל שחקן יש קשת יוצאת אחת בדיוק, ולכן קיים מעגל מכוון, ואפשר להמשיך בשלב ב באלגוריתם.

משפט. אלגוריתם-מעגלי-המסחר-עם-אדישות עם כלל-הבחירה של סבן-סתורמן מסתיים תוך $2n$ צעדים לכל היותר.

הוכחה.
בכל הפעלה של צעד א, לפחות שחקן אחד יוצא מהשוק; לכן צעד א יכול להתבצע לכל היותר n פעמים.
בכל הפעלה של צעד ב, מוצאים לפחות מעגל מכוון אחד. כלל סבן-סתורמן מבטיח, שכל מסלול מכוון המתחיל בשחקן שאינו מקנא, מגיע לשחקן מקנא. לכן, כל מעגל מכוון כולל שחקן מקנא אחד לפחות. לאחר שמחליפים את הבתים במעגל, כל השחקנים במעגל אינם מקנאים, כי הם קיבלו בית שהם הכי רוצים. לכן מספר השחקנים המקנאים קטן ב-1 לפחות. לכן גם צעד ב יכול להתבצע לכל היותר n פעמים.
***

ניתן להוכיח (נדלג על ההוכחה כאן), שהזמן הדרוש לכל צעד הוא $O(n \log n + n g)$, כאשר g הוא גודל קבוצת-האדישות הגדולה ביותר (הקבוצה הגדולה ביותר של בתים, שאחד השחקנים אדיש ביניהם). לכן זמן הריצה הכולל של האלגוריתם כולו הוא: $O(n^2 \log n + n^2 g)$.

משפט. אלגוריתם-מעגלי-המסחר-עם-אדישות מחזיר תמיד שיבוץ יעיל-פארטו.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים שיפור-פארטו. נסמן: שיבוץ א = השיבוץ של האלגוריתם; שיבוץ ב = שיפור-פארטו שלו. נחלק את השחקנים לקבוצות ונמספר אותן לפי הסדר שבו הן יצאו מהשוק בשיבוץ א (ברכיב-קשיר-חזק סופי). נסמן ב-k את המספר הקטן ביותר כך ששחקן כלשהו מרכיב-סופי k (נקרא לו יוסי) מעדיף את הבית שקיבל בשיבוץ ב. כשרכיב-סופי k יצא מהשוק, יוסי קיבל בית שהוא הכי רוצה, מבין הבתים שהיו בשוק באותו זמן. מכאן, בשיבוץ ב, יוסי מקבל בית שיצא מהשוק בשלב מוקדם יותר, נניח ברכיב-סופי $j<k$. אבל כל השחקנים שיצאו מהשוק בשיבוץ א ברכיב-סופי j, לפי הגדרת רכיב-סופי, לא הצביעו לאף בית מחוץ לרכיב. לכן, כל בית אחר שיקבל אחד השחקנים האלה בשיבוץ ב, יהיה פחות טוב עבורו מהבית שקיבל בשיבוץ א. לכן שיבוץ ב אינו שיפור פארטו. ***

שימו לב: ההוכחה של יעילות-פארטו לא השתמשה כלל בכלל-הבחירה של סבן-סתורמן. למעשה, אלגוריתם-מעגלי-המסחר-עם-אדישות מחזיר שיבוץ יעיל-פארטו לכל כלל-בחירה (בתנאי שהאלגוריתם מסתיים). אותו הדבר נכון גם לגבי המשפט הבא.

בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת-חזק** כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לכל חברי הקבוצה אם אין קבוצה מערערת-חזק, השיבוץ נקרא **יציב חלש**. קל לראות, שכל שיבוץ יציב-חלש הוא מעודד-השתתפות.

משפט: אלגוריתם-מעגלי-המסחר-עם-אדישות מחזיר תמיד שיבוץ יציב-חלש.
הוכחה: נניח שקבוצה כלשהי של שחקנים, שנקרא להם "הבדלנים", שוקלת לפרוש מהאלגוריתם. נסמן:

- שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם משתתפים באלגוריתם;
- שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם פורשים ומבצעים החלפה כלשהי ביניהם.

יהי k המספר הקטן ביותר כך שבדלן כלשהו (נניח יוסי) יצא מהשוק ברכיב-סופי k בשיבוץ א. בשיבוץ ב, יוסי יכול לקבל רק בית השייך לבדלן אחֵר – כי אחרי הפרישה הבדלנים יכולים רק להתחלף ביניהם. לכן יוסי מקבל בית של מישהו מרכיב-סופי k ומעלה. אבל בשיבוץ א, יוסי מקבל את הבית הטוב ביותר עבורו, מבין הבתים שעדיין זמינים כאשר קבוצה k יוצאת מהשוק. לכן הבית שמקבל יוסי בשיבוץ ב, אינו טוב יותר עבורו מהבית שקיבל בשיבוץ א. ***

ניתן להוכיח, שאלגוריתם מעגלי-המסחר המוכלל, עם כלל-הבחירה של סבן-סתורמן, הוא גם מגלה-אמת; ההוכחה היא מעבר להיקפו של קורס זה.

מקורות

- Parkes and Seuken, "Economics and Computation" (2018), chapter 12
- Saban, Daniela; Sethuraman, Jay (2013-06-16). "House allocation with indifferences: a generalization and a unified view". Proceedings of EC '13.

סיכם: אראל סגל-הלוי.