חלוקת-עוגה ללא קנאה

כפי שכבר רמזנו, חלוקה ללא קנאה היא קשה יותר מחלוקה פרופורציונלית. האלגוריתמים שראינו למעלה לא מבטיחים שלא תהיה קנאה - קל למצוא דוגמאות-הרצה שבהן מישהו מקנא באחרים. הבעיה של חלוקה ללא-קנאה היתה פתוחה במשך שנים רבות, ולמעשה עדיין אין לה פתרון מושלם. אנחנו נראה כמה פתרונות חלקיים, לכל אחד יש יתרונות וחסרונות.

מה עושים כשנתקלים בבעיה קשה? מנסים קודם-כל למצוא פתרונות במקרים פרטיים.

נתחיל מהמקרה הפרטי של **שלושה שחקנים**. נניח שאנחנו מתחילים כמו באלגוריתם "חתוך ובחר": מבקשים משחקן אחד (נניח, עמי) לחלק את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו, ומבקשים משני השחקנים האחרים (תמי ורמי) לבחור את הפרוסה הטובה ביותר בעיניהם. המקרה הקל הוא, שתמי ורמי בוחרים פרוסות שונות - אז כל אחד לוקח את הפרוסה שבחר, ועמי את הפרוסה השלישית, ואף אחד לא מקנא באחרים.

אבל מה אם רמי ותמי בוחרים את אותה פרוסה? - אז כנראה שהפרוסה הזאת היא גדולה מדי - צריך "לקצץ" אותה. נבקש מתמי (נניח) לקצץ את הפרוסה כך שתהיה בעיניה **שווה** לפרוסה השניה. עכשיו אנחנו בטוחים שקיימת חלוקה ללא קנאה.

מדוע? כדי להבין את זה נצייר **גרף דו-צדדי** שבו, בצד אחד יש שחקנים ובצד השני יש פרוסות. נצייר קשת משחקן לפרוסה, אם השחקן חושב שהפרוסה היא "טובה ביותר". חלוקה ללא-קנאה שקולה לשידוך מושלם בגרף זה.

אחרי החלוקה הראשונית, הגרף נראה בערך כך:

- עמי -> 1, 2, 3 (כי מבחינת עמי, כל הפרוסות הן "טובות ביותר").
- תמי -> 1, רמי -> 1 (כי מבחינת תמי ורמי, יש פרוסה אחת שהיא ה"טובה ביותר", נניח שזו פרוסה מספר 1).

אחרי הקיצוץ של תמי, הגרף נראה בערך כך:

- עמי -> 2, 3 (כי תמי קיצצה את פרוסה 1, אז עכשיו רק 2,3 הן טובות ביותר).
- תמי -> 1, 2 (כי תמי קיצצה את 1 כך שתהיה שווה לפרוסה השניה הטובה ביותר, נניח שזו היתה 2).
- רמי -> לא ידוע (ייתכן שהוא עדיין חושב ש-1 היא הטובה ביותר, וייתכן שלא).

בכל מקרה, לא משנה לאן רמי מצביע, קיים שידוך מושלם בגרף; אפשר למצוא אותו ע"י בחירה לאחר - רמי יבחר את הפרוסה הטובה ביותר בעיניו, תמי תבחר את פרוסה 1 אם היא נשארה ואחרת את פרוסה 2, ולעמי בטוח תישאר פרוסה אחת טובה-ביותר לבחור.

אז מצאנו חלוקה ללא קנאה, אבל נשארה שארית - שתמי קיצצה מפרוסה 1. מה נעשה איתה?

אפשר לנסות לחלק אותה שוב באותו אופן, אבל אז שוב עלולה להישאר שארית...

הפתרון נמצא ע"י המתמטיקאים סלפרידג' וקונוויי (Selfridge, Conway) בשנת 1960. הם שמו לב, שאחרי החלוקה הראשונה, לעמי יש יתרון על מי שבחר את פרוסה 1 (הפרוסה המקוצצת). נניח לצורך הדיון

שתמי בחרה את פרוסה 1 המקוצצת. כיוון שהפרוסה של עמי שווה כמו פרוסה 1 לפני הקיצוץ, הרי שעכשיו עמי לא יקנא בתמי בשום מקרה, גם אם היא תקבל את **כל** השארית. לפי הרעיון הזה, אפשר לחלק את השארית באופן הבא:

- רמי מחלק את השארית לשלושה חלקים שווים בעיניו;
- השחקנים בוחרים פרוסות לפי הסדר: תמי - עמי - רמי.

תמי לא מקנאת כי היא בחרה ראשונה, עמי לא מקנא בתמי (כמו שהזכרנו) וגם ברמי (כי הוא בחר לפניו), ורמי לא מקנא כי כל הפרוסות שוות בעיניו.

מצאנו חלוקה ללא קנאה של כל העוגה!

זה מעורר כמה שאלות:

- מה קורה כשיש 4 שחקנים או יותר?
- ומה אם רוצים שהפרוסות יהיו קשירות - כמו באלגוריתמים "המפחית האחרון" ו"אבן פז"?

עבור 4 שחקנים או יותר, ישנם כמה אלגוריתמים לחלוקה ללא קנאה, אבל הם מאד מסובכים, וגם זמן-הריצה שלהם מאד גבוה (ראו במאמרים להרחבה).

עבור פרוסות קשירות, בכלל לא קיים אלגוריתם סופי המוצא חלוקה ללא קנאה, אפילו עבור 3 שחקנים!

בסעיף הבא נראה אלגוריתם המוצא חלוקה ללא-קנאה בקירוב.

חלוקת-עוגה כמעט-ללא-קנאה עם פרוסות קשירות

הרעיון באלגוריתם זה הוא להסתכל על **כל** החלוקות הקשירות של עוגה. שוב, נתחיל משלושה שחקנים. נניח שהעוגה היא הקטע [0,1].

כל חלוקה קשירה של העוגה לשלושה קטעים, ניתן לייצג ע"י שלושה מספרים המייצגים את אורכי הקטעים. סכום המספרים הוא 1.

שאלה: איך נראית קבוצת כל השלשות של מספרים החיובים שסכומם הוא 1?

תשובה: משולש! תחשבו על המרחב התלת-מימדי, ותדמיינו משולש שהקודקודים שלו הם: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

מה קורה כשמספר השחקנים שונה מ-3?

כשיש 2 שחקנים - מרחב החלוקות הוא קטע 1-ממדי במרחב 2-ממדי;

כשיש 3 שחקנים - מרחב החלוקות הוא משולש2-ממדי במרחב 3-ממדי;

כשיש 4 שחקנים - מרחב החלוקות הוא טטראדר 3-ממדי במרחב 4-ממדי;

באופן כללי, כשיש n שחקנים - מרחב החלוקות הוא סימפלקס n-1-ממדי במרחב n-ממדי.

אז אוסף כל החלוקות הוא סימפלקס. כל נקודה בסימפלקס מייצגת חלוקה. עבור כל נקודה בסימפלקס, אנחנו יכולים לשאול כל אחד מהשחקנים "איזה פרוסה אתה מעדיף - הימנית, האמצעית או השמאלית?". אם מצאנו נקודה שבה כל שחקן נתן תשובה אחרת - יש לנו חלוקה ללא קנאה!

למצוא נקודה כזאת זה מאד קשה, כי במשולש יש אינסוף נקודות. אבל אנחנו מחפשים חלוקה שהיא "כמעט" ללא קנאה. למשל, נניח שמדובר בחלוקת קרקע, ואנשים לא מתייחסים להבדלים של מילימטר אחד לכאן או לשם. אז מבחינתנו, חלוקה שהיא ללא קנאה "עד כדי מילימטר אחד", היא חלוקה מספיק טובה.

איך נמצא חלוקה כזאת? הנה אלגוריתם של סימונס וסו (משנת 1999):

- נחלק את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים קטנים, שאורך הצלע של כל אחד מהם הוא מילימטר. התהליך הזה נקרא מישלוש (triangulation). עכשיו יש לנו מספר סופי של נקודות (-קודקודי הסימפלקסונים).
- נשייך כל קודקוד לאחד השחקנים, כך שבכל סימפלקסון, כל השחקנים מיוצגים.
- עבור כל קודקוד, נשאל את השחקן שהקודקוד שייך לו "איזו פרוסה אתה מעדיף - 1 2 או 3?" ונסמן את המספר על הקודקוד.
- קיבלנו תיווי (labeling) של המישלוש. נמצא סימפלקסון מגוון – סימפלקסון שבו כל התויות שונות; כל נקודה בסימפלקסון הזה מייצגת חלוקה ללא-קנאה עד-כדי-מילימטר, כמו שרצינו.

נשארה רק שאלה אחת - איך אנחנו יודעים שתמיד קיים סימפלקסון מגוון?

לשם כך נלמד לֶמָה מפורסמת ושימושית מאד - הלמה של שפרנר (Sperner's Lemma). הלמה הזאת אומרת מתייחסת לסימפלקסים בכל מספר של ממדים.

הגדרה. נתון מישלוש של סימפלקס עם n קודקודים. תיווי של קדקדי המישלוש נקרא **תיווי שפרנר (Sperner labeling)** אם בכל פאה, הנמצאת בין הקודקודים הראשיים Fi1, Fi2, ..., Fik, מופיעות רק התוויות i1, i2, ..., ik. בפרט:

* בקודקוד הראשי Fi מופיעה התוית i;

* בצלע בין Fi לבין Fj מופיעות רק התויות i ו־j;

* בפאה המשולשת שקודקודיה הם Fi, Fj, Fk, מופיעות רק התויות i, j, k;

וכן הלאה.

הלמה של שפרנר. בכל תיווי־שפרנר של סימפלקס עם n קודקודים, קיים מספר אי־זוגי של סימפלקסונים מגוונים עם n קודקודים. בפרט, יש לפחות אחד.

הוכחת הלמה של שפרנר.

בסיס: עבור n=2, הסימפלקס הוא קטע, בקודקוד אחד כתוב "1" ובקודקוד השני כתוב "2". כשהולכים מקודקוד אחד לכיוון הקודקוד השני, בהכרח עוברים בין "1" ל"2" מספר איזוגי של פעמים. כל מעבר כזה הוא סימפלקסון (עם 2 קודקודים) מגוון.

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור n. כעת נתון לנו סימפלקס עם n+1 קודקודים, המתוייג בתויות 1,...,n+1. הסימפלקס הגדול מחולק לסימפלקסונים קטנים בני n+1 קודקודים. כל סימפלקסון עם n+1 קודקודים ייקרא "חדר".

לכל חדר יש n+1 פאות; כל פאה היא סימפלקסון עם n קודקודים. כל סימפלקסון עם n קודקודים, המתוייג **בכל** התויות 1,...,n, ייקרא "דלת".

נתבונן תחילה **בדלתות החיצוניות** – המקשרות בין חדר כלשהו לבין העולם החיצון.

- לפי הגדרת תיווי שפרנר, ישנן דלתות חיצוניות **רק** בפאה הראשית שבין הקודקודים $F_1, ..., F_n$ – זו הפאה היחידה שבה מופיעות התויות 1,...,n; בכל פאה ראשית אחרת מופיע צירוף אחר כלשהו של n תויות.
- הפאה הזו היא סימפלקס עם n קודקודים, המתויוגת בתיווי שפרנר. לכן ניתן להפעיל עליה את הנחת האינדוקציה, ולהסיק שיש בה מספר איזוגי של סימפלקסונים קטנים המתוייגים בכל התויות 1,...,n. לכן בפאה זו יש מספר איזוגי של דלתות.
- לכן, המספר הכולל של דלתות חיצוניות הוא איזוגי.

כעת נתבונן ב**דלתות הפנימיות** – המקשרות בין שני חדרים. ישנם שני סוגי חדרים עם דלתות:

- אם הקודקוד ה־(n+1), הקודקוד שנמצא מול הדלת, מתוייג ב־ (n+1), אז החדר הוא **סימפלקסון מגוון**, ויש בו בדיוק **דלת אחת**.
- אם הקודקוד ה־(n+1) מתוייג במספר אחר כלשהו בין 1 ל־n, אז החדר **אינו** סימפלקסון מגוון, ויש בו בדיוק **שתי דלתות**.

כעת, נספור את כל הדלתות בכל החדרים, כולל הדלתות של האיזור החיצוני. יש לנו:

- א. מספר **איזוגי** כלשהו של דלתות באיזור החיצוני;
- ב. מספר **זוגי** כלשהו של דלתות בחדרים עם שתי דלתות;
- ג. מספר כלשהו של דלתות בחדרים עם דלת אחת.

בספירה זו, כל דלת נספרת פעמיים – פעם אחת עבור כל חדר שהיא שייכת אליו. לכן, סכום המספרים א, ב, ג חייב להיות זוגי. כיוון שמספר א איזוגי ומספר ב זוגי, מספר ג חייב להיות איזוגי. לכן, מספר הסימפלקסונים המגוונים הוא איזוגי.

***

איך זה עוזר לנו למצוא חלוקה ללא קנאה? - התיווי של סימפלקסון החלוקות הוא תיווי שפרנר:

- בכל קודקוד ישנה תוית אחרת: כל קודקוד מתאים לחלוקה שבה פרוסה אחת היא כל העוגה, ושאר הפרוסות ריקות. כיוון שכולם מעדיפים לקבל את כל העוגה על-פני קבוצה ריקה, כל שחקן שהקודקוד הזה ישוייך לו, בהכרח יסמן אותו בתוית המתאימה למספר הקודקוד. למשל הקודקוד (1,0,0) מתאים לחלוקה שבה פרוסה 1 היא כל העוגה, ולכן בהכרח התוית בקודקוד זה תהיה 1. באותו אופן התוית בקודקוד (0,1,0) תהיה 2 והתוית בקודקוד (0,0,1) תהיה 3.
- בכל פאה שבין קודקודים, רק הפרוסות המתאימות לקודקודים הן לא ריקות. לדוגמה, בין קודקוד 1 לקודקוד 2, יש נקודות כגון (0.7,0.3,0) שבה רק פרוסות 1,2 לא ריקות ופרוסה 3 ריקה. בהנחה שאף אחד לא רוצה פרוסה ריקה, התוית בכל הנקודות הללו חייבת להיות 1 או 2.

לכן, לפי הלמה של שפרנר, קיים סימפלקסון מגוון, והוא מתאים לחלוקה ללא-קנאה-בקירוב כמו שרצינו!

האם אפשר למצוא חלוקה שהיא לגמרי ללא-קנאה?

אם נריץ את האלגוריתם הנ"ל שוב ושוב, ובכל פעם נחלק את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים יותר ויותר קטנים, נקבל סדרה של חלוקות, שכל אחת מהן יותר ויותר קרובה לחלוקה-ללא-קנאה. התהליך הזה מתכנס לחלוקה שהיא ממש ללא קנאה.

אבל, כמו שאתם יודעים, התכנסות של תהליך אינסופי יכולה לקחת זמן אינסופי.

האם קיים אלגוריתם **סופי** המוצא חלוקה ללא קנאה?

התשובה היא לא! זה התגלה בשנת 2008. ניתן לקרוא על זה בויקיפדיה כאן:
https://en.wikipedia.org/wiki/Envy-free_cake-cutting

לסיכום

אם עובדים עם שחקנים שהם "שמחים בחלקם" ורק רוצים לקבל את החלק הפרופורציונלי שלהם - זה יחסית פשוט - אפשר להשיג את זה בזמן O(n log n) ועם פרוסות קשירות.

אבל, אם השחקנים קנאים וכל אחד מסתכל על "הדשא של השכן" - המצב הרבה יותר קשה - אין שום אלגוריתם סופי המבטיח לכולם פרוסות קשירות, וגם בלי דרישת הקשירות, האלגוריתמים מאד מסובכים ודורשים המון זמן. "קָשָׁה כִּשְׁאוֹל קִנְאָה"...

סיכם: אראל סגל-הלוי.