"וְנִחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

תקציב השתתפותי רציף

אראל סגל-הלוי ע"פ:

Brandl, Brandt, Greger, Peters, Stricker, Suksompong (2021).

הקלט:

- כסף בקופה: C.
- נושאים: 1,...,m (עמותות, ארגונים...).
- אזרחים: 1,...,n.
- התועלת של אזרח i לנושא j היא: $u_{i,j}$.
  - הנחה: התועלות *בינאריות* – 0 או 1.

הפלט:

- וקטור **d** המייצג תקציב: $d_1,\ldots,d_m$.
- $d_1 + \ldots + d_m = C$.
- התועלת של אזרח i מהתקציב d היא:
- $u_i(d) = \mathrm{Sum}[j=1,\ldots,m]\ \ u_{i,j} * d_j$

מהו תקציב הוגן?

א. הוגנות ליחידים (Individual Fair Share):

$u_i(d) \geq$ **C/n**.

- הכרחי, אבל לא מספיק. לדוגמה:

- 99 תומכים בנושא א, 1 תומך בנושא ב.
- נותנים 1% לנושא א, 99% לנושא ב.

ב. הוגנות *לקבוצות* (Group Fair Share):

לכל קבוצה בגודל k, הסכום הכולל המועבר לנושאים שאחד מחברי-הקבוצה תומך בהם הוא לפחות: **k*C/n**.

האם קיים תקציב הוגן לקבוצות? <

תקציב אנארכי

הגדרה. *תקציב אנארכי* נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב C/n, ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.

משפט. כל תקציב אנארכי הוא הוגן-לקבוצות.

הוכחה. לכל קבוצה בגודל k, סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה הוא k*C/n, וכל הסכום הזה מפוזר על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. ***

משפט. תקציב אנארכי עלול להיות לא-יעיל <

חוסר-יעילות

דוגמה: ביישוב יש 3 מבנים שצריך לתפעל: מגרש כדורסל, מועדון שחמט, ספריה.

- 1000 ש"ח מאפשרים לתפעל את המבנה לשעה ביום. התקציב הכולל: 6000.
- עמי אוהב תחרויות (כדורסל, שחמט).
- תמי בעד מקומות סגורים (שחמט, ספריה)
- תקציב אנארכי יכול להיות: 1500, 3000, 1500. התועלת – 4.5 שעות לכל אחד.
- קיים שיפור פארטו: תקציב 0,6000,0. התועלת – **6 שעות** לכל אחד. ***

תקציב אוטיליטרי

הגדרה. *תקציב אוטיליטרי* הוא תקציב הממקסם את *סכום התועלות* של האזרחים.

- אלגוריתם: תן את כל התקציב לנושאים שיש להם הכי הרבה תומכים.

משפט. כל תקציב אוטיליטרי הוא יעיל-פארטו.
הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. ***

משפט. תקציב אוטיליטרי עלול להיות לא-הוגן אפילו ליחידים.
דוגמה. אזרחים 1,2 בעד א, אזרח 3 בעד ב. ***
האם יש תקציב *הוגן-לקבוצות* וגם *יעיל-פארטו*?<

תקציב פריק

הגדרה: תקציב $d_1,\ldots,d_m$ נקרא פָּרִיק (decomposable) אם קיימים סכומים $d_{i,j}$ לכל אזרח i ולכל נושא j כך ש:

- $\mathrm{Sum}[i]\ d_{i,j} = d_j$ - לכל נושא ;
- $\mathrm{Sum}[j]\ d_{i,j} = C/n$ – לכל אזרח ;
- $d_{i,j} > 0$ only if $u_{i,j} > 0$.

משמעות: אפשר לממש את התקציב באופן הבא: נותנים לכל אזרח את החלק היחסי שלו בתקציב C/n, ואומרים לו לפזר את התקציב בין הנושאים שהוא תומך בהם, לפי $d_{i,1},\ldots,d_{i,m}$.

הגינות-לקבוצות ופריקוּת

משפט. כל תקציב פָּרִיק הוא הוגן לקבוצות.

הוכחה. נניח שהתקציב d הוא פריק. לכל קבוצה בגודל k, סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה על-ידי הפירוק של d הוא k*C/n. לפי הגדרת הפירוק, כל הסכום הזה מפוזר רק על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. לכן התקציב הוגן לקבוצות. ***

הערה. *גם הכיוון ההפוך נכון: כל תקציב הוגן לקבוצות הוא פריק [הוכחה בסיכום בגיטהאב].*

אלגוריתם נאש – מיקסום המכפלה

הגדרה. *תקציב נאש* הוא תקציב הממקסם את *מכפלת התועלות* של האזרחים:

max[d] product[i] $u_i(d)$.

- *הגדרה שקולה*: מיקסום סכום הלוגריתמים: max[d] sum[i] log(u_i(d)).
- *חישוב*: פתרון בעיית אופטימיזציה קמורה – ראו בתיקיית הקוד.

משפט. כל תקציב נאש הוא יעיל-פארטו.

הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. ***

משפט. כל תקציב נאש הוא פָּרִיק >

תקציב נאש - פריקוּת

משפט. כל תקציב נאש הוא פָּרִיק.

הוכחה. נתון תקציב **d** הממקסם סכום הלוגריתמים. נבנה תקציב חדש **d'** ע"י העברת סכום קטן *e* מנושא 1 לנושא 2. השינוי בתועלת של כל שחקן i הוא:

$u_i(d')–u_i(d) = e*(u_{i,2}-u_{i,1})$

השינוי בפונקציה כלשהי *f* של התועלת שווה בקירוב:

$f(u_i(d'))–f(u_i(d)) =\sim e*(u_{i,2}-u_{i,1}) * f'(u_i(d))$

בפרט, כאשר f היא לוגריתם:

$log(u_i(d'))–log(u_i(d)) =\sim e*(u_{i,2}-u_{i,1}) / u_i(d)$

--> השינוי בסכום הלוגריתמים הוא:

$Sum[i=1,…,n] e*(u_{i,2}-u_{i,1})/u_i(d)$

$= e * [Sum[i] u_{i,2}/u_i(d) - Sum[i] u_{i,1}/u_i(d)].$

תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך].

התקציב המקורי **d** ממקסם סכום לוגריתמים. לכן השינוי בסכום הלוגריתמים הוא לכל היותר 0:

$\mathrm{Sum}[i]\ u_{i,2}/u_i(d)\ -\ \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,1}/u_i(d) \leq 0$

אותו הדבר נכון אם הופכים את התפקיד של 1,2:

$\mathrm{Sum}[i]\ u_{i,1}/u_i(d)\ -\ \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,2}/u_i(d) \leq 0$

ולכן חייב להתקיים שיוויון:

$\mathrm{Sum}[i]\ u_{i,1}/u_i(d)\ =\ \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,2}/u_i(d)$

ולכן הסכום הנ"ל קבוע לכל נושא j:

$\mathrm{Sum}[i]\ u_{i,j}/u_i(d) = Z$ for all j in $1,\ldots, m$.

[בהמשך נראה למה שווה הקבוע Z].

תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך]. נפרק את התקציב באופן הבא:

$d_{i,j} := (C/n) * (d_j * u_{i,j} / u_i(d))$

א. לכל שחקן i, מתקיים:

$Sum[j]\ d_{i,j} = (C/n) * Sum[j](d_j*u_{i,j}) * (1/u_i(d))$

$= (C/n) * u_i(d) \qquad * (1/u_i(d)) = C/n.$

ב. לכל נושא j, מתקיים:

$Sum[i]d_{i,j} = (C/n) * (d_j) * (Sum[i]\ u_{i,j}/u_i(d))$

$= (C/n) * (d_j) * Z$

$Sum[i,j]d_{i,j} = (C/n) * (C) * Z$

מצד שני, מסעיף א נובע:

$Sum[i,j]d_{i,j} = Sum[i](C/n) = C \quad \rightarrow \quad Z = n/C.$

ולכן:

$Sum[i]d_{i,j} = d_j.$ ***

גילוי אמת

הגדרה. אלגוריתם תקצוב השתתפותי נקרא *מגלה-אמת* (truthful) אם לכל אזרח i, כאשר הבחירות של שאר האזרחים קבועות, התועלת של i גדולה ביותר כאשר ה-$u_{i,j}$ אמיתיים.

משפט. האלגוריתם האנארכי מגלה-אמת.

הוכחה. כל אזרח עושה מה שהוא רוצה. ***

משפט. האלגוריתם האוטיליטרי מגלה אמת.

הוכחה. כל הצבעה של אזרח בעד נושא שהוא תומך בו, מגדילה את מספר התומכים בנושא זה, ולכן מגדילה את הסיכוי שיתוקצב. ***

אלגוריתם נאש – גילוי-אמת

משפט. אלגוריתם נאש אינו מגלה-אמת.

הוכחה. נניח שיש ארבעה נושאים (א,ב,ג,ד), חמישה אזרחים, והסכום הכולל 500.

- קלט: ***אב,אג,אד,בג,א***; פלט **(370, 65, 65, 0)**.
- התועלת של אזרח "א+ב" היא 435=370+65.

- קלט: ***בד,אג,אד,בג,א***; פלט **(300, 200, 0, 0)**.
- התועלת של אזרח "א+ב" היא 500=300+200 - שווה לו להגיד "ב+ד"! ***

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל, והוגן? <

טרילמה

משפט. לא קיים אלגוריתם שהוא: *יעיל-פארטו*, וגם *מגלה-אמת*, וגם *הוגן* (ליחידים או לקבוצות).

ההוכחה המלאה ארוכה מאד. נוכיח משפט חלש יותר: לא קיים אלגוריתם כנ"ל שהוא גם *סימטרי* (=מתייחס באופן שווה לאזרחים זהים ולנושאים זהים).

הוכחה. כשהקלט **אב,אג,אד,בג,א**, הנושאים ב,ג סימטריים, לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם הסכום אפס, אז אין הוגנות לאזרח 4. לכן הסכום חייב להיות *חיובי*. בפרט, לא כל התקציב הולך ל: א+ב.

כשהקלט **בד,אג,אד,בג,א**, הנושאים ג,ד סימטריים, לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם הסכום אפס, אז אזרח 1 מרויח מהשינוי אב>בד; אם הסכום חיובי, אז קיים שיפור פארטו: ג->א , ד->ב. ***

אלגוריתם - אוטיליטרי-על-תנאי

האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי

(conditional utilitarian) – ממקסם את סכום

התועלות *תחת האילוץ שהתקציב פריק.* *איך?*

-- כל אזרח תורם לנושאים, *מאלה שהוא תומך*
בהם, עם הכי הרבה תומכים אחרים.

- בדוגמה אב,אג,אד,בג,א: **(400, 50, 50, 0)**.
- בדוגמה בד,אג,אד,בג,א: **(300, 100, 50, 50)**.
- *פריק* – לפי הגדרה.
- *מגלה אמת* – כמו האלגוריתם האוטיליטרי.
- *לא יעיל פארטו* - בדוגמה השניה יש שיפור פארטו: (350, 150, 0, 0).
- *אבל לא קיים שיפור-פארטו שהוא פריק.*

תקציב השתתפותי רציף - טרילמה

	יעיל פארטו	הוגן	מגלה אמת
אוטיליטרי	כן	לא	כן
אוטיליטרי על-תנאי	לא (* יעיל מבין התקציבים הפריקים)	כן	כן
מיקסום המכפלה	כן	כן	לא