

## אלגוריתמים לחלוקה הוגנת של שכר דירה

נניח שאתם שוכרים דירה עם שותפים. יש שלושה שותפים ובדירה יש שלושה חדרים, כך שכל שותף צריך לקבל חדר. אבל החדרים לא שווים, נניח, יש סלון גדול הפונה לים, חדרון הפונה לכביש, והחדר השלישי הוא בכלל מרתף טחוב... בניגוד לעוגה, כאן אי אפשר "לחתוך" חדרים - כל אחד צריך לקבל חדר אחד בדיוק. האם אפשר לוודא שהחלוקה תהיה ללא קנאה?

-- התשובה היא כן - אם מכניסים לחישוב גם את המחיר של כל חדר. הרי בנוסף לחדרים, צריך לחלק גם את דמי-השכירות בין השותפים. אם המחיר של המרתף יהיה נמוך משמעותית מהמחיר של הסלון, אז ייתכן שמי שיקבל אותו לא יקנא (כלומר, ברור שהוא היה מעדיף לגור בסלון, אבל הוא מעדיף מרתף בזול על-פני סלון ביוקר).

אם כך, האתגר שלנו בשיעור הזה הוא: **איך לקבוע את הקצאת החדרים ואת המחיר לכל חדר, כך שאף אחד מהשותפים לא יקנא?**

אנחנו נראה שני פתרונות, ובאמצעותם גם נכיר שתי דרכים לייצג העדפות של בני-אדם:

\* העדפות קרדינליות - אנשים יודעים לתת ערך מספרי לכל חפץ, למשל "המרתף שווה בעיני 500 והסלון שווה בעיני 900".

\* העדפות אורדינליות - אנשים יודעים להגיד מה הם מעדיפים, אבל לא יודעים להגיד מספרים. לדוגמה, הם יכולים להגיד "אני מעדיף את המרתף שעולה 300 על-פני הסלון שעולה 800".

לכל דרך יש יתרונות וחסרונות: לרוב האנשים קל יותר להביע העדפות אורדינליות, אבל למחשב קל יותר כמובן לעבוד עם העדפות קרדינליות (מספרים).

## המודל האורדינלי

במודל האורדינלי, אנחנו מניחים שכל אחד מהשותפים יודע להגיד, עבור כל וקטור מחירים, איזה חדר הוא מעדיף בוקטור המחירים הזה. אנחנו מניחים שההעדפות מקיימות את התנאים הבאים:

- החדרים הם סבירים - ולכן, עבור כל וקטור-מחירים שסכום שכר הדירה הכולל, כל דייר מוכן לקבל לפחות חדר אחד.

- השותפים הם עניים - ולכן כל שותף מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.

עבור שני שותפים, יש פתרון פשוט לחלוקת החדרים: שותף אחד מחליט מה יהיה המחיר של כל חדר, והשותף השני בוחר חדר. הפתרון הזה נותן חלוקה ללא קנאה - בדיוק כמו אלגוריתם "חתוך ובחר" לחלוקת עוגה. האם אפשר להכליל את זה לשלושה שותפים או יותר?

התשובה היא כן - אפשר להשתמש באלגוריתם של סימונס-סו לחלוקת עוגה!

נניח ששכר-הדירה הכולל הוא  $R$ . כל חלוקה של שכר-דירה בין החדרים היא וקטור של מחירים שסכומם  $R$ . ניקח את סימפלס היחידה, ונתאים לכל נקודה בסימפלס  $(x_1, \dots, x_n)$  וקטור של מחירים  $(p_1, \dots, p_n)$ , כאשר לכל  $i$ :

$$p_i = R \cdot x_i$$

שימו לב שבכל נקודה בסימפלקס, סכום המחירים הוא בדיוק  $R$ , ולכן כל נקודה מתאימה לחלוקה אפשרית של שכר-הדירה בין החדרים.

עכשיו נבצע מישלוש של הסימפלקס - נחלק אותו לסימפלקסונים קטנים, נניח, בגודל של אגורה אחת (אנחנו מניחים שהשותפים לא מקפידים על הבדלים של אגורה אחת בשכר הדירה). עבור כל וקטור-מחיר שנמצא על קודקוד של המישלוש, נשאל כל אחד מהשותפים "איזה חדר אתה מעדיף?".

הנחת "הדיירים העניים" אומרת, שבכל קודקוד ראשי, כל דייר יבחר את אחת הפרוסות הריקות (= אחד מ  $n-1$  החדרים שהמחיר שלו בקודקוד זה הוא 0). לדוגמה, אם יש שלושה חדרים ושלושה דיירים, אז בקודקוד מספר 1, כל דייר יכתוב 2 או 3. באותו אופן, בקודקוד 2 כל דייר יכתוב 1 או 3, ובקודקוד 3 כל דייר יכתוב 1 או 2. בקוים המחברים בין הקודקודים, כל דייר יבחר את החדר שהמחיר שלו 0. למשל, בקו בין קודקוד 1 לקודקוד 2, כל דייר יבחר את חדר מספר 3, וכו' (זה בדיוק הפוך מהמצב בבעיית חלוקת העוגה).

אנחנו רוצים להשתמש בלמה של שפרנר, אבל לשם כך אנחנו צריכים להחליט איזו תווית תהיה על כל קודקוד ראשי - יש שתי אפשרויות. אם נבחר בכל קודקוד מספר אחר, התוויות על הצלעות יתאימו לתנאי של שפרנר - בדקו ותראו. אפשר לבחור תוויות באופן דומה גם כשיש  $n$  חדרים ו- $n$  שותפים.

לכן, לפי הלמה של שפרנר, קיים סימפלקסון שבו כל דייר בוחר חדר אחר. הסימפלקסון הזה מייצג חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

האלגוריתם של סימונס-סו לחלוקת שכר-דירה מומש ע"י הניו-יורק טיימס, ואפשר להשתמש בו כאן:

<https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rentdivisioncalculator.html>

## החיסרון של המודל האורדינלי

החיסרון העיקרי של המודל האורדינלי הוא "הנחת הדיירים העניים". רוב הדיירים לא בהכרח מעדיפים חדר בחינם על חדר בתשלום. לדוגמה, אם המרתף הטחוב הוא בחינם, והסלון הענק עולה שקל לחודש, גם דיירים עניים במיוחד כנראה יעדיפו את הסלון.

הלקח מסיפור זה: לא מספיק לדעת אלגוריתמים - צריך גם להבין את ההנחות שלהם, ולוודא שהן מתאימות למציאות.

כדי להתמודד עם בעיה זו, נציג אלגוריתם המסתמך על **המודל הקרדינלי** - ואינו מניח את הנחת הדיירים העניים.

סיכום: אראל סגל-הלוי.