

שאלה 5 :

א. התקציב אכן הוגן ליחידים.

הוכחה : לפי הגדרה תקציב אגיליטרי הוא תקציב שממקסם את התועלת הנמוכה ביותר למשתתף שנובעת מהתקציב.  
ראינו בשיעור תקציב אנרכי שנותן לכל אזרח את חלקו בתקציב C/n ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם. לכן תקציב כזה מקיים, **שלכל קלט** התועלת של כל אזרח תהיה :  $c/n \geq$  .  
תקציב אגיליטרי מקיים  $max (min(uid))$  (ממקסם תועלת מינימלית), ולכן **בהינתן קלט כלשהו** של פרוייקטים שנתמכים על ידי משתתפים. התועלת המינימלית בתקציב האגיליטרי תהיה גדולה-שווה מהתועלת המינימלית בתקציב האנרכי שגדולה-שווה ל:  $\frac{c}{n}$  . כלומר תקציב אנרכי תמיד מקיים את ההגדרה של יעילה ליחידים.

ב. תקציב איגיליטרי לא בהכרח יעיל לקבוצות.

דוגמא נגדית: ישנם 99 תומכים בנושא א'. 1 תומך בנושא ב'. C = 100 .  
נגדיר תקציב כך:

פרוייקט א	פרוייקט ב
50	50

תועלת כל אדם שתומך בנושא א'- 50 . תועלת האדם, שתומך בנושא ב'- 50 .  
ברור, כי התקציב הוא אגלטירי, כי לכל סכום כסף, שנעביר מאגף אחד לאגף אחר (בשביל להשיג תועלת מינימלית גבוהה יותר למשתתפים) נקבל, שבאחד הפרוייקטים מושקעים פחות מ50 שקלים, כך שיהיה קיים אדם עם תועלת  $50 >$  .  
מנגד: נגדיר את כל התומכים בקבוצה א' כקבוצה k .  
נראה, כי עבור הקבוצה k לא מתקיימת ההגדרה של הוגנות לקבוצות :

סכום הכסף הכולל , שמועבר לנושאים שלפחות אחד מחברי הקבוצה תומך בהם  $= 50 > 99 \cdot \frac{100}{100} = 99 \cdot k \frac{c}{n}$

ג. תקציב אגיליטרי אינו בהכרח יעיל פארטו:

דוגמא נגדית:  
כסף בקופה: 30.  
נתונים שלושה שחקנים: אב, א, גב .  
נגדיר תקציב האגיליטרי:

פרוייקט א	פרוייקט ב	פרוייקט ג
15	0	15

במקרה זה התועלת של השחקנים היא:

אב	א	גב
15	15	15

(תקציב זה הוא אכן אגיליטרי, כיוון שאם נניח בשלילה שבקלט הנתון הערך האגיליטרי יכול להיות  $15 +$  , כלומר קיים תקציב עם הקלט הנתון שבו התועלת המינימלית של שחקן כלשהו היא גדולה מ15 .  
תנאי זה מחייב שבפרויקט א' יושקעו יותר מ15 שקלים (רק כך התועלת של א יכולה להיות גדולה מ15 שכן א תומך רק בפרויקט א' ) ואז אם כך ישארו פחות מ15 שקלים להשקיע בפרוייקטים ב/ג , ולכן התועלת של בג תהיה קטנה מ15- סתירה. )

כעת נראה כי ישנו שיפור פארטו:

פרוייקט א	פרוייקט ב	פרוייקט ג
15	15	0

במקרה זה התועלת של השחקנים היא:

אב	א	גב
30	15	15

התועלת של א , גב נשארה אותו דבר(15) והושג שיפור בתועלת עבור אב(30).

**ד. תקציב אגיליטרי אינו בהכרח מגלה אמת:**

דוגמא נגדית : כסף בקופה : 30 . נתונים 3 שחקנים: א, ב, גב, נגדיר תקציב אגיליטרי:

פרוייקט א	פרוייקט ב	פרוייקט ג
15	15	0

במקרה זה התועלת של השחקנים היא:

א	ב	גב
15	15	15

הוכחה, כי התקציב אגיליטרי בתחילת סעיף קודם( קלט זהה).  
 כעת אם שחקן גב ישקר ויגיד כי הוא תומך בנושא ג' בלבד אז התקציב האגיליטרי עבור משתתפים : א, ג, ב, הוא:

פרוייקט א	פרוייקט ב	פרוייקט ג
10	10	10

(תקציב זה הוא אכן אגיליטרי כיוון שאם נניח בשלילה, שבקלט הנתון הערך האגיליטרי יכול להיות גדול מ10, כלומר קיים תקציב עם הקלט הנתון, שבו התועלת המינימלית של שחקן כלשהו היא גדולה 10. תנאי זה יחייב שבפרויקט א' יושקעו +10 שקלים (רק כך התועלת של א יכולה להיות שווה גדולה מ10 שכן א תומך רק בפרויקט א' ) אם כך - נשארו פחות מ20 שקלים לחלק בין שני הפרוייקטים הנותרים. על פי שוברך היונים פרויקט ב' או ג' יקבלו פחות מ10 שקלים כך שהתועלת של שחקן ג או שחקן ב תיהיה קטנה מ-10-סטירה)

במקרה זה התועלת **האמיתית** של שחקן גב (לאחר השקר) היא:  $20 = 10 + 10 < 15$  = תועלתו אם יגיד אמת .

