## מטלה 4 אלגוריתמים כלכליים

שלמה גליק

# שאלה 5 (האלגוריתם החמדני יחס קירוב הדוק)

הוכיחו, שלכל n, קיימת בעיית חלוקת מטלות עם n שחקנים, שבה יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא

$$\frac{4n-1}{3n}$$
בדיוק

## <u>פתרון:</u>

עבור כל n קיימת בעיית החלוקה כך שיש n+1 מטלות כך ששויים בשניות הוא

$$2n-1,2n-1,2n-2,2n-2,\ 2n-3,\ 2n-3$$
 ......  $2n-(n-1),\ 2n-(n-1),\ n,n,\ n$  נפשט טיפה:

$$2n-1$$
,  $2n-2$ ,  $2n-2$ ,  $2n-3$ ,  $2n-3$  ......  $n+1$ ,  $n+1$ ,  $n$ ,  $n$ 

### <u>אלגוריתם חמדני</u>

nבאלגוריתם החמדני נחלק את הnהמטלות הראשונות (מהגבוה לנמוך) לפי סדר אקראי ואז את את הnמטלות הבאות נחלק בדיוק בסדר ההפוך מזה שחילקנו בהתחלה, ואז נישאר עם מטלה אחרונה שאורכה הוא nשניות

$$2n - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$$
 בסיבוב הראשון זמן המטלה שהשחקן הו יקבל יהיה

$$n-1+\left\lceil rac{i}{2} 
ight
ceil$$
 בסיבוב השני זמן המטלה שהשחקן הו

$$2n-\left\lceil rac{i}{2} 
ight
ceil + \left(n-1+\left\lceil rac{i}{2} 
ight
ceil 
ight) = 3n-1$$
 סה"כ אחרי שני הסיבובים זמן המטלות של השחקן הוֹ יהיה:

שניות 3n-1 שניות באורך של 3n-1 שניות באורך של 3n-1 שניות וקיבלנו שללא קשר לו כל שחקן יקבל אחרי שניות.

כל השחקנים עם זמנים שווים ולכן את המטלה האחרונה יקבל שחקן אקראי ואז זמן המטלות שלו יהיה כל 3n-1+n=4n-1

סה"כ בחלוקה החמדנית: האחרון יסיים את המטלות לאחר 
$$4n-1$$
 שניות.

## טבלה להמחשה:

2n-1	2 <i>n</i> – 1	2n-2	2n – 2	2 <i>n</i> – 3	2n-3	2n – 4	2n – 4	2 <i>n</i> – 5	2 <i>n</i> – 5	
n	n	n+1	n + 1	n + 2	n + 2	n+3	n + 3	n + 4	n + 4	 =
n										III
4n-1	3 <i>n</i> – 1	3n - 1	3n - 1	3n - 1	3n - 1	3n – 1	3n - 1	3n - 1	3n - 1	 סכום:

## <u>חלוקה אגליטרית</u>

לעומת זאת ניתן לחלק את שלושת המטלות ששווין n לשחקן הראשון ואז נחלק לשאר השחקנים כמו בחמדני:  $(2n-1)+(n+1),\ (2n-1)+(n+1),\ (2n-1)+(n+1),$ 

$$2n - \left\lceil rac{i}{2} 
ight
ceil$$
 בסיבוב הראשון זמן המטלה שהשחקן הו יקבל יהיה

$$n + \left\lceil rac{i}{2} 
ight
ceil$$
 יהיה יקבל יהיה בסיבוב השני זמן המטלה שהשחקן היקבל יהיה

$$2n - \left[\frac{i}{2}\right] + \left(n + \left[\frac{i}{2}\right]\right) = 3n$$
 סה"כ אחרי שני הסיבובים זמן המטלות של השחקן הו

ה-i הצטמצם וקיבלנו שללא קשר לi כל שחקן יקבל אחרי שני הסיבובים מטלות באורך של n+n+n=3n שניות בנוסף לשחקן הראשון שכבר הבאנו לו

סה"כ ניתן לראות שכולם יקבלו מטלות שסך אורכם הוא בדיוק 3n שניות ולכן בחלוקה זאת האחרון יסיים לאחר 3n שניות.

### טבלה להמחשה:

n	2 <i>n</i> – 1	2 <i>n</i> – 1	2 <i>n</i> – 2	2 <i>n</i> – 2	2n-3	2n-3	2n – 4	2n-4	2 <i>n</i> – 5	2 <i>n</i> – 5		- 1
n	n + 1	n + 1	n + 2	n + 2	n + 3	n + 3	n + 4	n+4	n + 5	n + 5	:	П
n												III
3n	3n	3n	3n	3n	3n	3n	3n	3n	3n	3n		סכום:

 $3n^2$  סה"כ כמות השניות של כל המטלות ביחד הוא

$$(n-1)(3n-1)+(4n-1)=3n^2-3n-n+1+4n-1=3n^2$$
 חישוב לפי החלוקה האגליטרית:  $3n\cdot n=3n^2$ 

הסכום של כלל המטלות הוא  $3n^2$  ויש n שחקנים ולכן קיים לפחות אחד שיקבל  $n^2$  שניות ולכן זאת חלוקה אגליטרית ומייטבית

### לסיכום:

באלגוריתם החמדני ראינו שהאחרון יסיים לאחר 4n-1 שניות באלגוריתם החמדני ראינו שהאחרון יסיים לאחר 3n שניות ולכן סה"כ

יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא בדיוק 
$$\dfrac{4n-1}{3n}$$
 מש"ל