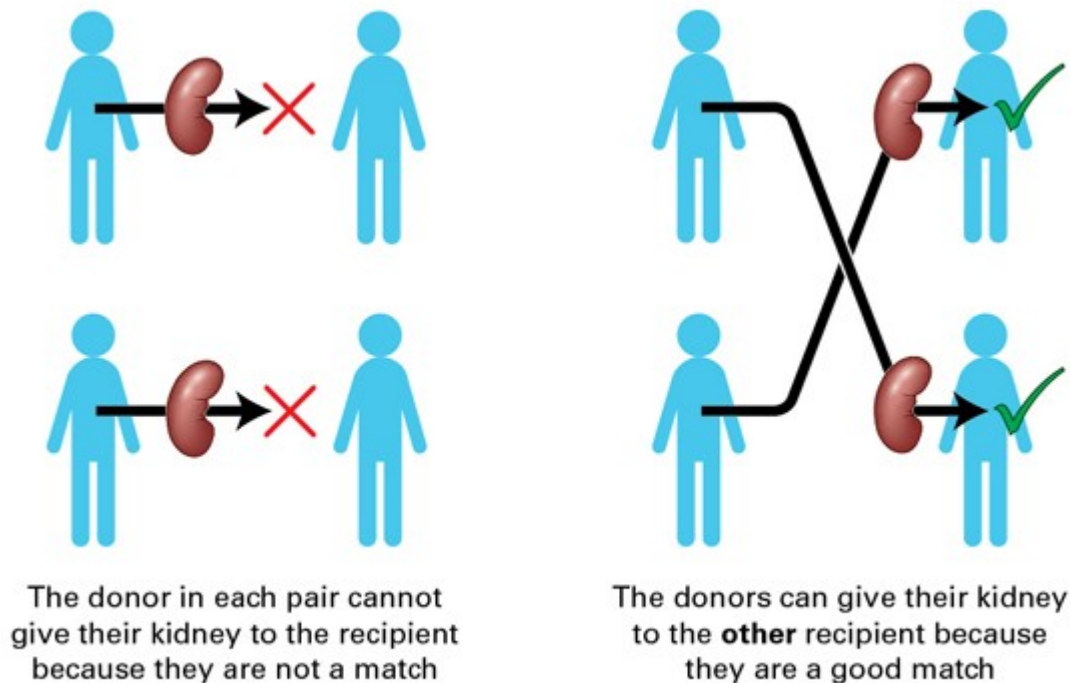


# החלפת כליות

אראל סגל-הלוי

חלק מהשקפים של: Wayne Racey

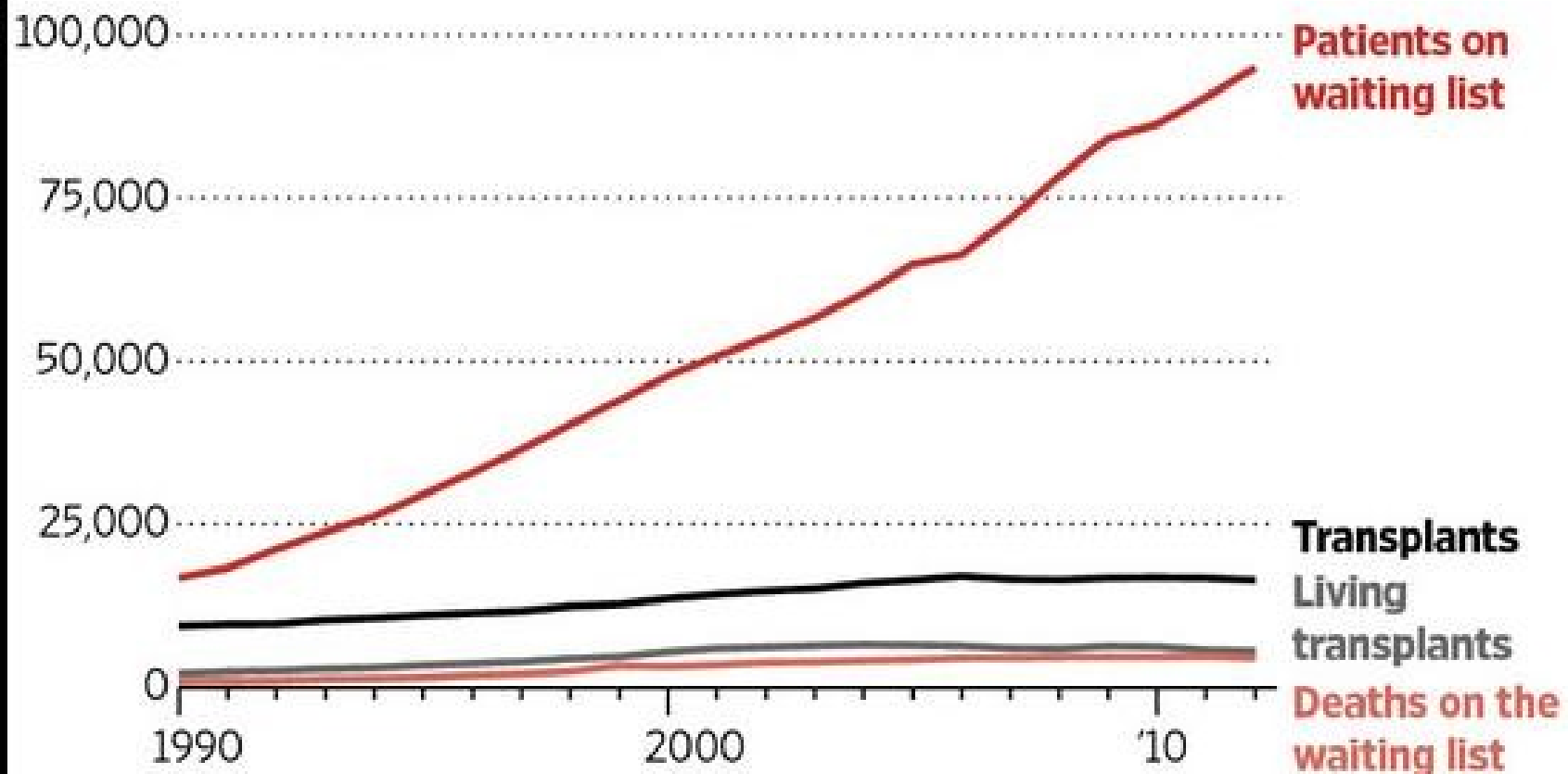


© UHN Patient Education

# התור להשתלת כליות

## A Long Wait for a Kidney

Since 1990, the number of people on the waiting list for a kidney transplant has grown sharply, while the number of transplants has increased only slightly.



Source: The Organ Procurement and Transplantation Network

The Wall Street Journal

# החלפת כליות

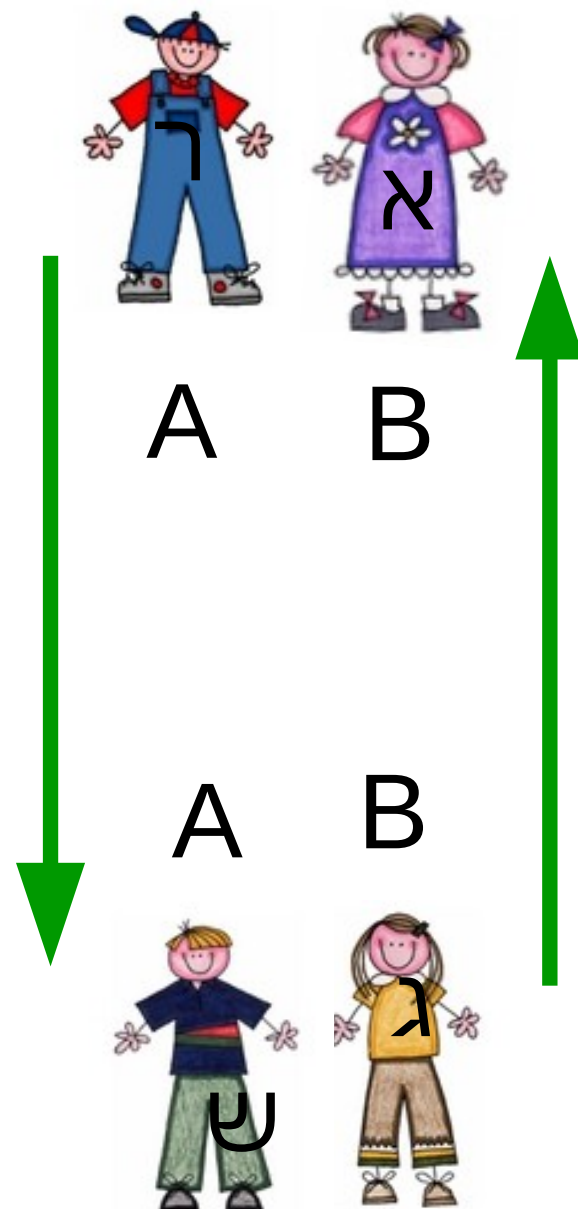
כמעט בכל המדינות:

- יש מחסור בכליות להשתלה.
- אסור לתרום כליות תמורת כסף.
- מותר לתרום כליה תמורת כליה.

# למה להחליף כליות?

תורם מוכן לתרום לחולה  
אבל לא מתאים, בגלל סוג  
הדם או סיבות נוספות:

> נתרם תורם V	O	A	B	AB
O	כן	כן	כן	כן
A	לא	כן	לא	כן
B	לא	לא	כן	כן
AB	לא	לא	לא	כן



# החלפת כליות אופטימלית

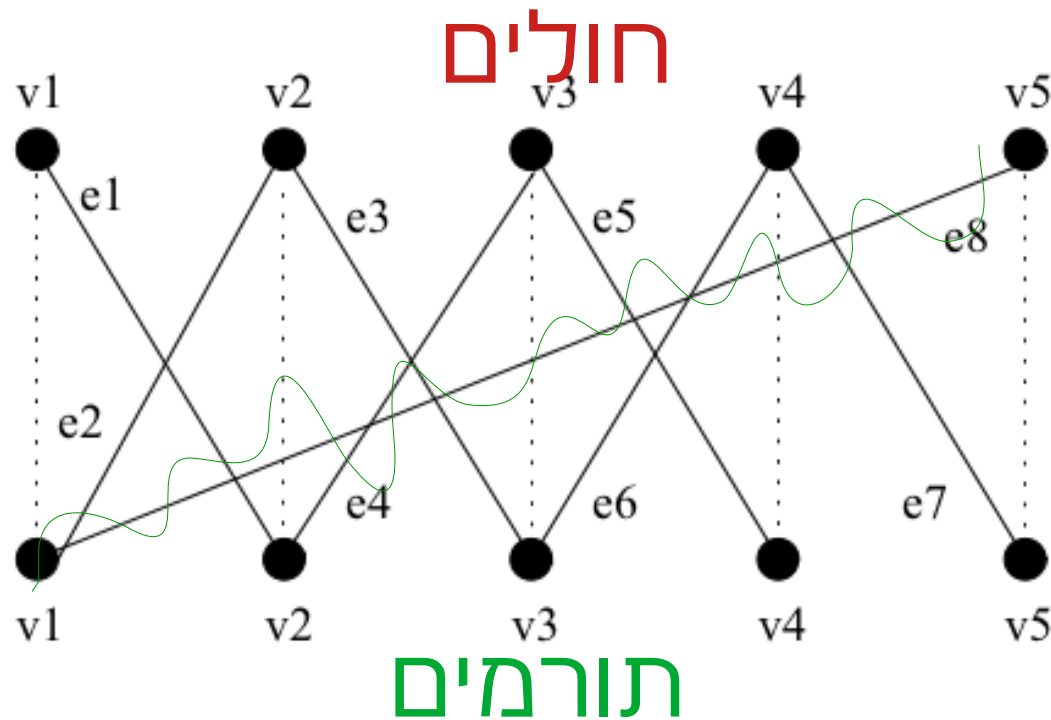
**נתון:** מאגר נתונים של זוגות של חולים ותורמים, ומידע רפואי על ההתאמות בין חולים לתורמים.

**המטרה:** לתת כליות לכמה שיותר חולים, בכפוף לתנאי של **עידוד השתתפות:**

- כל תורם הנותן כליה שלו,
- מקבל כליה עבור החולה שלו.

# החלפת כליות אופטימלית – פתרון א

נבנה גרף דו-צדדי של חולים ותורמים, עם קשת בין חולה לתורם תואם, ונמצא שידוך (איזה?)



הגרף מתוך המאמר:

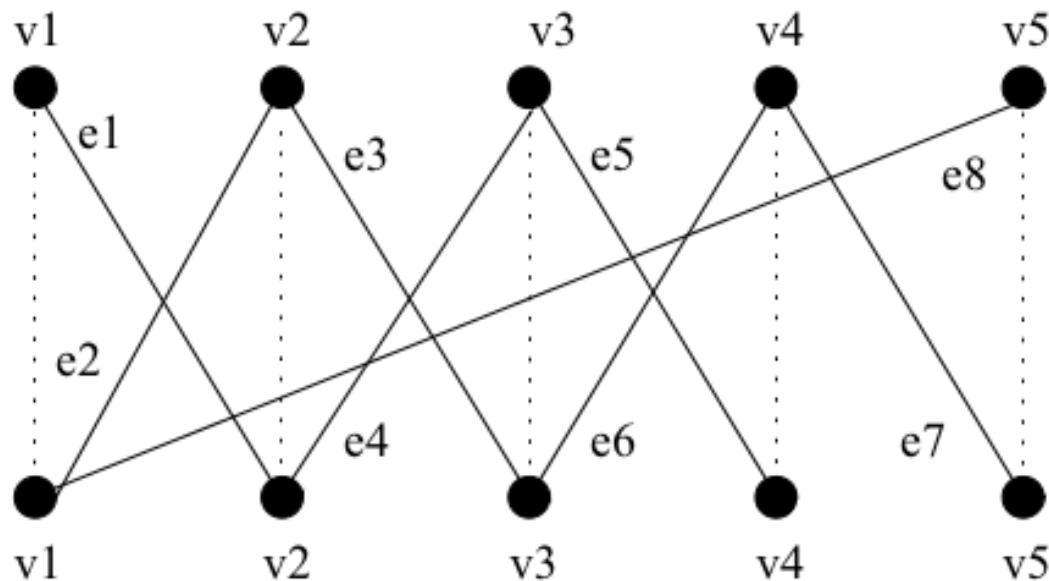
Abraham, David J.; Blum, Avrim; Sandholm, Tuomas (2007-06-11).

"Clearing algorithms for barter exchange markets: enabling nationwide kidney exchanges".

# החלפת כליות אופטימלית – פתרון א

נמצא שידוך גדול ביותר, ובכפוף לזה, שידוך עם מספר קשתות רציפות גדול ביותר (איך?)

חולים



תורמים

הגרף מתוך המאמר:

Abraham, David J.; Blum, Avrim; Sandholm, Tuomas (2007-06-11).

"Clearing algorithms for barter exchange markets: enabling nationwide kidney exchanges".

# החלפת כליות אופטימלית – פתרון א

ניתן לכל צלע מקווקוות משקל  $x$  ולכל צלע  
רציפה משקל  $y$ , כך ש:

$$y > x$$

$$B \cdot x > A \cdot y \text{ for all } A, B \text{ in } \{0, \dots, n\}, B > A$$

$$\implies 1 < y/x < n/(n-1)$$

$$\text{E.g. } y = n+1, x = n$$

נשתמש באלגוריתם מוכר למציאת שידוך עם  
משקל מקסימום בגרף דו-צדדי. \*\*\*



# מעגלי החלפה באורך מוגבל

- בהחלפת כליות כל הניתוחים צריכים להתבצע בו-זמנית.
- כשמעגל ההחלפה בגודל  $k$ , צריך לבצע  $2k$  ניתוחים בו-זמנית.
- לכן, מבחינה לוגיסטית, אורך המעגלים חייב להיות מוגבל – בדרך-כלל עד 2 או 3.
- אלגוריתם השידוך שראינו אינו מספק דרישה זו.

# מעגלי החלפה באורך 2

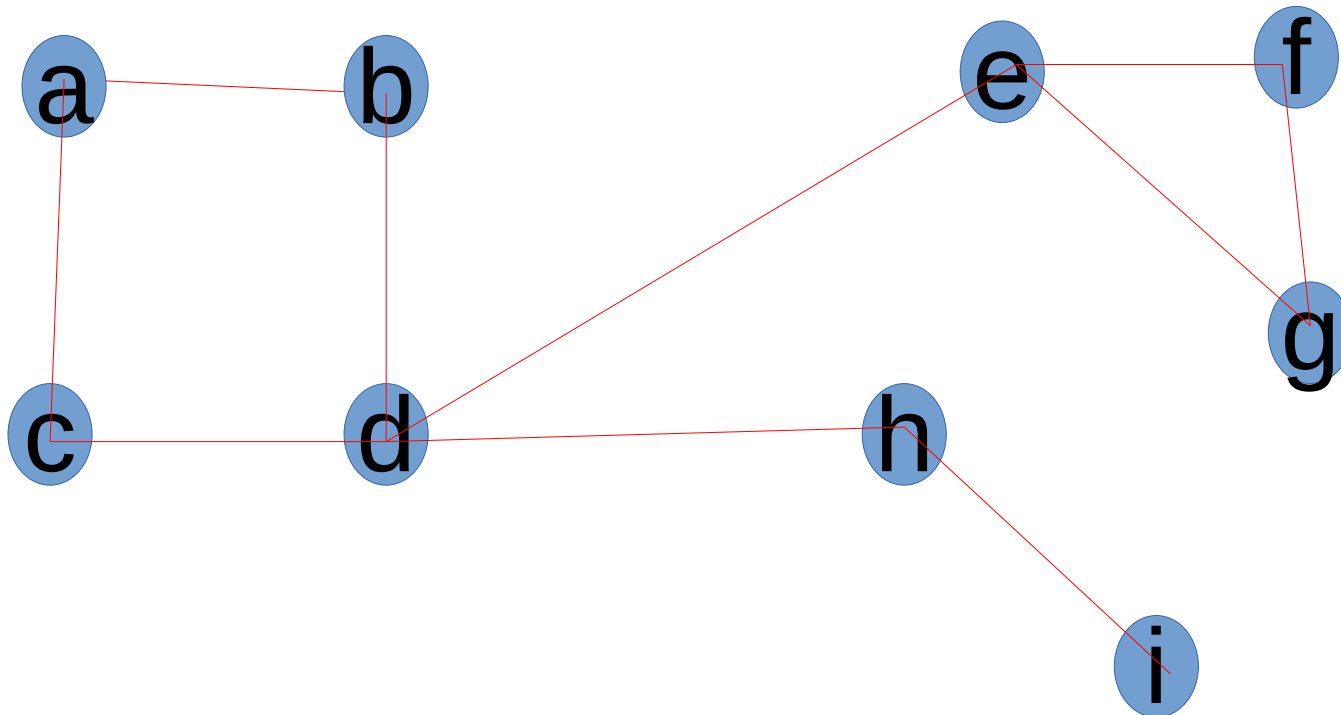
- נניח שאפשר לבצע רק מעגלי-החלפה באורך 2.

- במקרה זה, אפשר לייצג את הבעיה כגרף אחר (איזה)?

# גרף ההתאמות

נבנה גרף שבו:

- כל קודקוד מייצג זוג (תורם+חולה).
- כל צלע א—ב מייצגת התאמה הדדית:
- התורם מזוג א מתאים לחולה מזוג ב;
- התורם מזוג ב מתאים לחולה מזוג א.

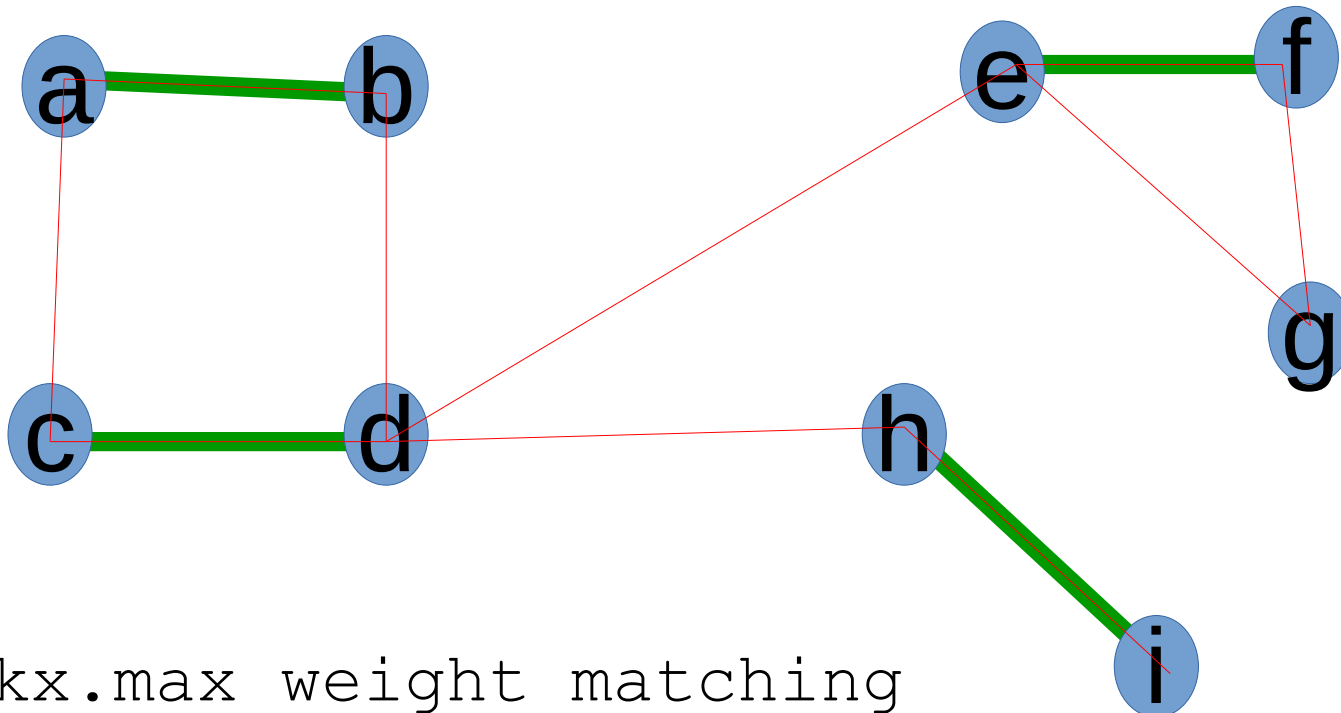


# מציאת שידוך גדול ביותר

נחפש שידוך גדול ביותר בגרף ההתאמות.

\* שימו לב שהגרף אינו דו-צדדי.

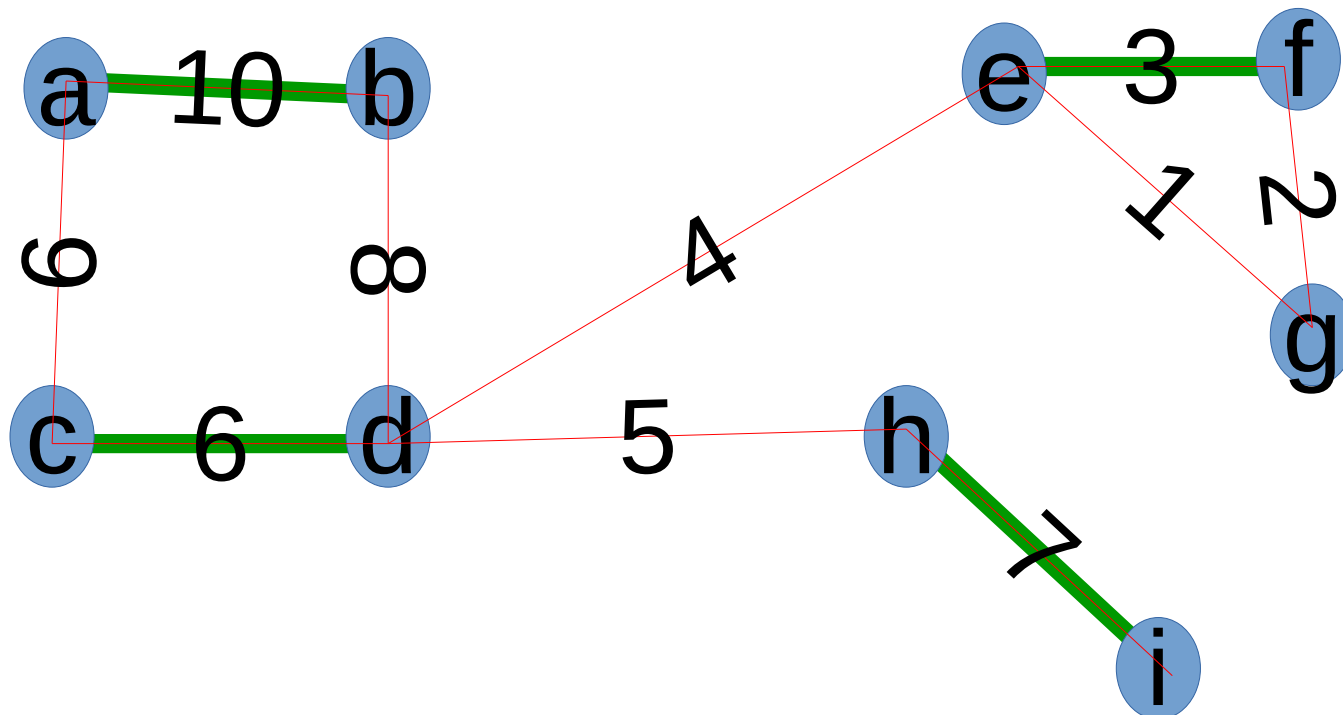
\* אלגוריתם "הפרחים" (blossom) של אדמונדס (Edmonds) מוצא שידוך בגרף כללי בזמן פולי.



`networkx.max_weight_matching`

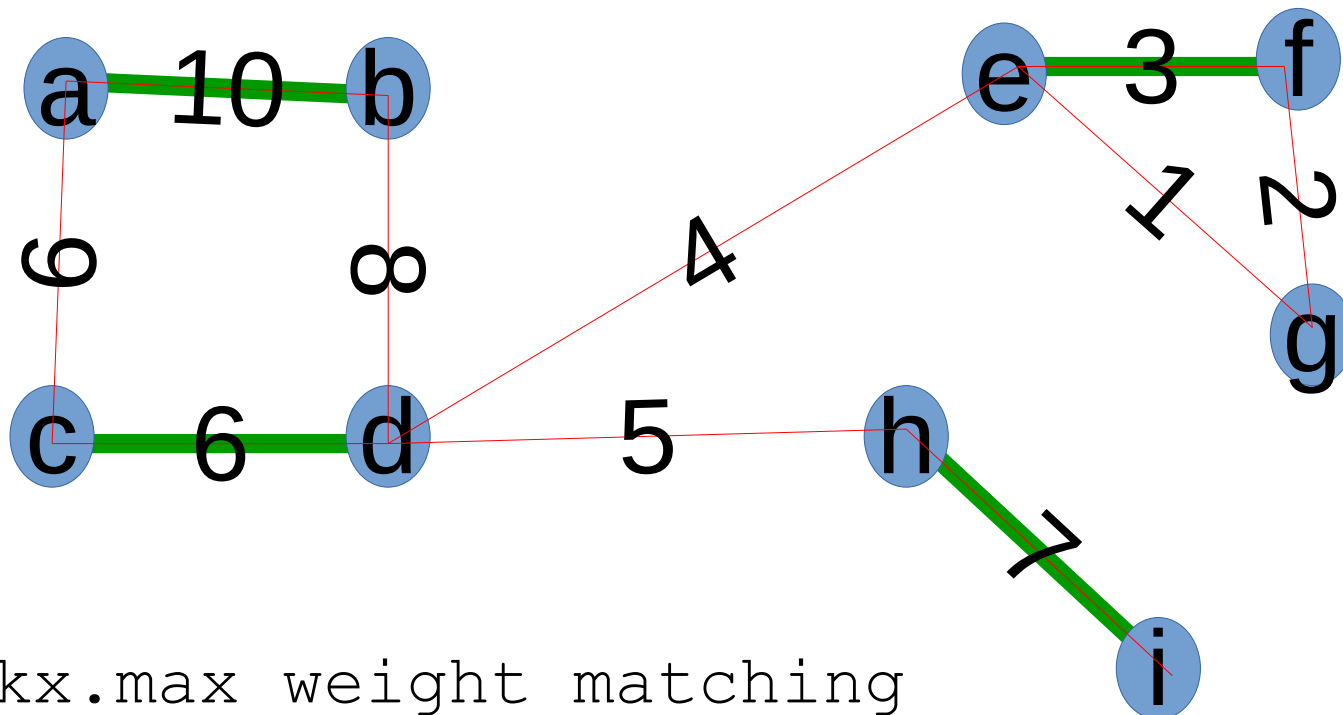
# מציאת שידוך גדול ביותר - עדיפויות

במציאות, לצלעות שונות יש עדיפויות שונות, למשל:  
בגלל דחיפות רפואית, סיכויי הצלחה, וכו'. **אנחנו**  
**רוצים להבטיח, שצלעות בעדיפות גבוהה ייבחרו לפני**  
**צלעות בעדיפות נמוכה.**



# מציאת שידוך גדול ביותר - עדיפויות

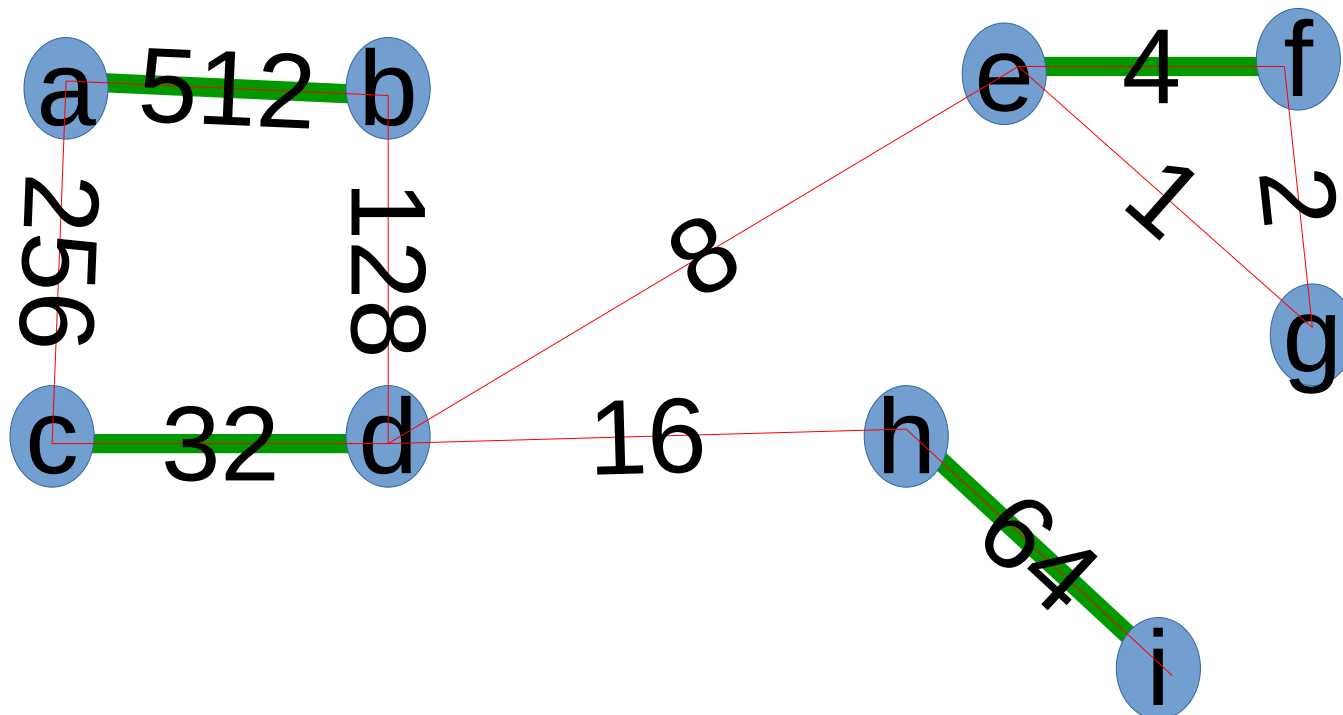
האלגוריתם הקיים מוצא שידוך שבו סכום המשקלים הוא הגדול ביותר. איך נתאים אותו לעדיפויות?



`networkx.max_weight_matching`

# רדוקציה מעדיפויות למשקלים

- נסדר את הצלעות מהעדיפות הנמוכה לגבוהה.
- ניתן לצלע ה- $i$  בסדר הזה משקל 2 בחזקת  $i$ .
- המשקל של כל צלע  $e <$  סכום המשקלים של כל הקשתות עם עדיפות נמוכה מ- $e$ . לכן האלגוריתם יעדיף שידוך עם  $e$  על פני כל שידוך עם קשתות בעדיפות נמוכה יותר.



# מעבר לזוגות – מעגלי-החלפה באורך 4



## השתלת כליות בין יבשתית

2 כליות נתרמות משתי תורמות  
בביה"ח בלינסון



5:00

אחת הכליות מועברת במזוודה  
לנתב"ג ושם עוברת שיקוף.  
הכליה השנייה מושתלת בבלינסון



8:00

הכליה מוטסת לצ'כיה



9:00

כליה מתורמת בהדסה הועברה  
לביה"ח בלינסון



12:00

כליה מצ'כיה מוטסת לישראל  
ומושתלת בהדסה



13:00

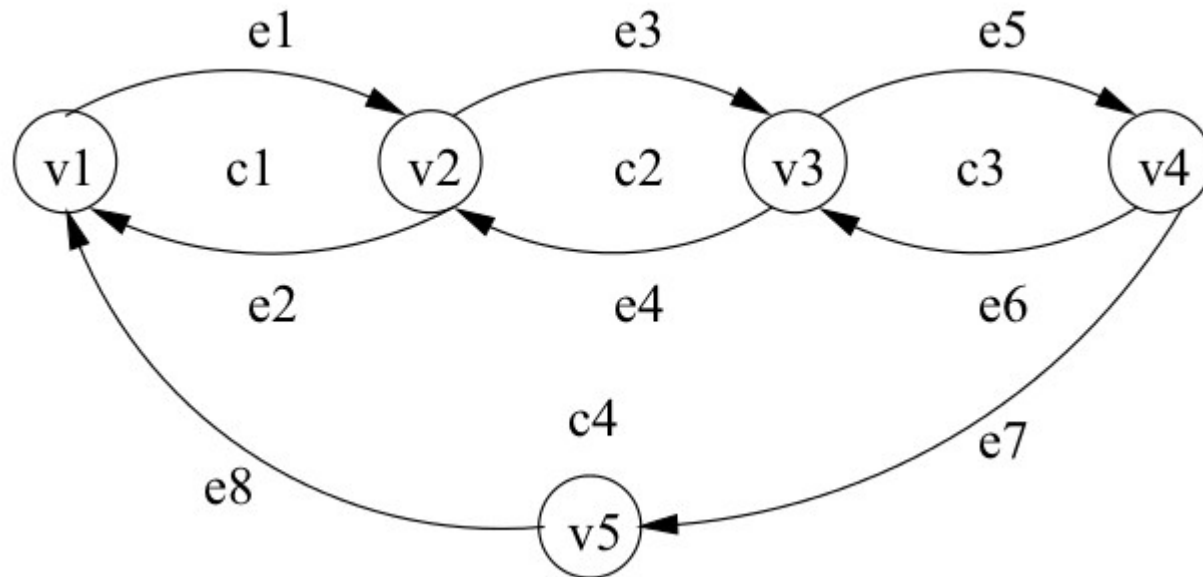
Ynet 17/12/2019

משרד הבריאות



# מעגלי-החלפה באורך $L$

נניח שאפשר לבצע מעגלי-החלפה באורך לכל היותר  $L$ , כאשר  $L$  לפחות 3.  
• נייצג את הבעיה כגרף מכון של זוגות:



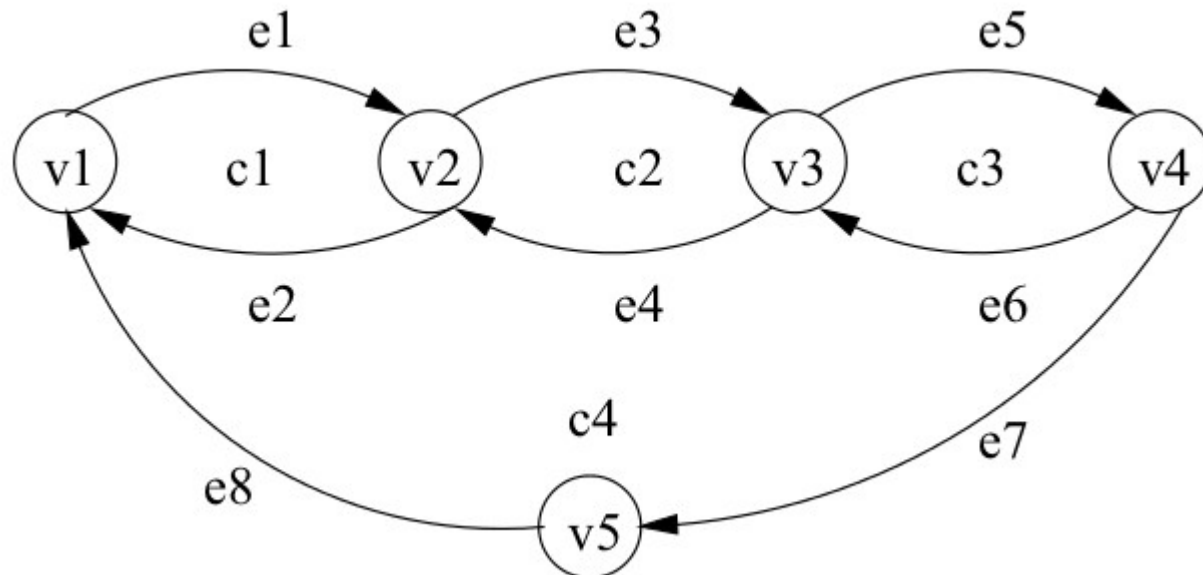
הגרף מתוך המאמר:

Abraham, David J.; Blum, Avrim; Sandholm, Tuomas (2007-06-11).

"Clearing algorithms for barter exchange markets: enabling nationwide kidney exchanges".

# מעגלי-החלפה באורך $L$

המטרה: למצוא אוסף של מעגלי-החלפה זרים  
באורך לכל היותר  $L$ , כך שמספר הצמתים  
המכוסים הוא גדול ביותר.

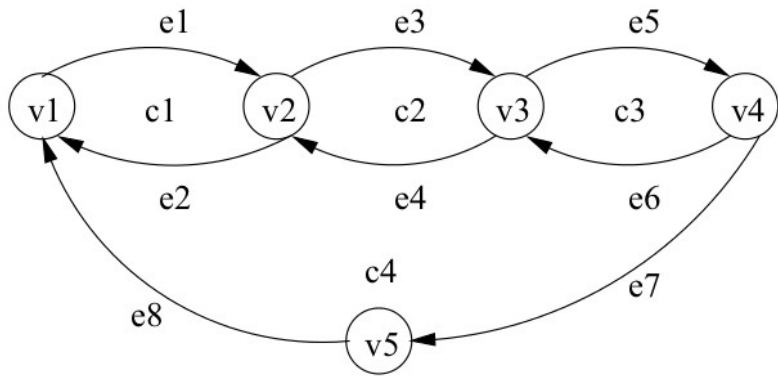


הבעיה NP-קשה לכל  $L \geq 3$  ! מה עושים?

# מעגלי-החלפה באורך L

- יש שתי גישות לפתרון בעיה NP-קשה:
  - א. פתרון אופטימלי-בקירוב בזמן פולינומי;
  - ב. פתרון אופטימלי-ממש בזמן מעריכי.
- מה לדעתכם הפתרון המתאים לבעיה שלנו?

# מעגלי-החלפה באורך $L$ – תיכנות ליניארי בשלמים



נכתוב בעייה של תיכנות ליניארי  
עם משתנים שלמים (ראו בקוד).

לכל מסלול באורך  $L$ ,  
שאינו נסגר למעגל,

נוסיף אילוץ: מספר הקשתות הנבחרות  
במסלול זה הוא לכל היותר  $L-1$ .

# מעגלי-החלפה באורך $L$ – תיכנות ליניארי בשלמים (המשך)

מספר המסלולים באורך 3:  $O(n^3)$

$n \sim 10,000$

מספר האילוצים גדול מדי – אי אפשר לכתוב  
את כולם!

הפתרון: יצירת אילוצים דינאמית (constraint generation):

(1) יוצרים בעיה בלי שום אילוצים של מסלולים.

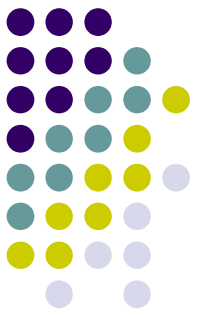
(2) פותרים את הבעיה.

(3) אם אין מעגלים באורך  $L+1$  – סיימנו.

(4) אחרת, מוצאים את המסלולים באורך  $L$ ,

מוסיפים את האילוצים שלהם, וחוזרים ל-2.

# מעבר למעגלים – שרשראות-החלפה מתחילות בתורם אחד חסיד (אלטרואיסט)



- In July 2007, Alliance for paired donations started an “Altruistic Donor Chain”
- Altruistic donor in Michigan donated kidney to woman in Phoenix.
- Husband of Phoenix woman gave kidney to woman in Toledo.
- Her mom gave kidney to patient A in Columbus, whose daughter simultaneously gave kidney to patient B in Columbus.
- And so on....

# שרשרת החלפה באורך 60

