פורת אהרון

מטלה 8

שאלה 2

* שאלה 2: עידוד השתתפות

הגדרה: אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לכל אפשרות שאינה כוללת אותו, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ב. הראו, שאם התנאי לא מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.

א: הוכחה:

נניח : כל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לאפשרות שהייתה נבחרת אם לא היה משתתף.

נוכיח VGC מעודד אפשרות :

יהי שחקן i כלשהו, כך שאם הוא משתתף תבחר אפשרות x ואם הוא לא משתתף תבחר אפשרות y

*אם x=y אזי שחקן i לא משלם. זאת כיוון שסכום הערכים של שאר השחקנים של אפשרות x שווה לסכום הערכים של שאר השחקנים של אפשרות y . ולכן ההפרש היה 0

נחשב את התועלת של i :

$$V_i(x)-p(i)=V_i(y)-p(i)=V_i(y)\geq 0$$

**אם x =! y אזי שחקן i משלם. התשלום הוא:

$$\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(x)=p(i)$$

נוכיח: $V_i(x)-p(i)\geq 0$

כיוון שאפשרות x נבחרה אזי:

$$\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1}^{n} V_j(y)\geq 0$$

נחשב:

$$\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1}^{n} V_j(y)\geq 0 \rightarrow \Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(x)+V_i(x)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)+V_i(y)\geq 0 \rightarrow$$

$$\left(\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)\right)+\left(V_i(x)-V_i(y)\right)\geq 0 \rightarrow -p(i)+\left(V_i(x)-V_i(y)\right)\geq 0$$

$$\rightarrow V_i(x)-V_i(y)-p(i)\geq 0 \rightarrow V_i(x)-p(i)\geq V_i(y)\geq 0 \rightarrow$$

$$V_i(x)-p(i)\geq 0$$

לכן התועלת של i לפחות 0.

כיוון שלא הגדרנו את שחקן i אזי ההוכחה תקפה לכל השחקנים לכן התועלת של כל שחקן היא לפחות 0 ולכן VGC מעודד השתתפות. ■

ב:

	אפשרות 1	אפשרות 2
ערך א:	5	-6
ערך ב:	5	11
סכום:	10	4
נבחר:	TRUE	FALSE
סכום בלי א:	5	11
סכום בלי ב:	5	-6

	תשלום	ערך	תועלת
א:	6	5	-6
ב:	0	5	5
סה"כ:	6	10	-1

תועלת
-1
5
4

ניתן לראות שהתנאי לא מתקיים כיוון ששחקן א מייחס לאפשרות ב ערך נמוך מ 0

וניתן גם לראות שהאלגוריתם לא מעודד השתתפות כיוון שהתועלת של שחקן א היא -1

נוכיח: אם קיים שחקן המייחס ערך שלילי לאפשרות הנבחרת בלעדיו, אז קיימים ערכים עבור שאר השחקנים, שאיתם האלגוריתם לא מעודד-השתתפות.

קיים שחקן i, כך שאם הוא משתתף תבחר אפשרות x ואם הוא לא משתתף תבחר אפשרות y

ומתקיים: $V_i(y)<0$

נוכיח: קיימים ערכים לשאר השחקנים כך שמתקיים: $V_i(x)-p(i)<0$

לפי האלגוריתם מתקיים:

$$\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(x)=p(i)\geq 0$$

וגם:

$$\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1}^{n} V_j(y)\geq 0$$

לכן:

$$V_i(x)-p(i)<0 \rightarrow V_i(x)-(\Sigma \text{¿¿}\, j=1, j\neq i^n V_j(y)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(x))<0\,\text{¿}$$
$$\rightarrow \Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)<0 \rightarrow -\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)<-\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x) \rightarrow$$

$$\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)>\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1}^{n} V_j(y)\geq 0 \rightarrow \Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)-V_i(y)\geq 0$$
$$\rightarrow -\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)\geq -\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)+V_i(y) \rightarrow$$

$$\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)\leq \Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-V_i(y)$$

אז:

$\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)<\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} V_j(y)\leq\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-V_i(y)$כיוון ש $V_i(y)<0$ אזי $\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)<\Sigma_{j=1}^{n} V_j(x)-V_i(y)$ ולכן קיימים ערכים לשאר השחקנים המקיימים: $V_i(x)-p(i)<0$