

שאלה 1: מציאת שרשרת גדולה ביותר

במרכזי השתלות בימינו, נעזרים גם בתורמים חסידים (= אלטרואיסטים), המוכנים לתרום כליה בלי לקבל כליה בחזרה. הדבר מאפשר לבצע לא רק מעגלי החלפה, אלא גם שרשראות החלפה.

שאלה 1:

נסמן את כמות החולים כ n (תחת הנחה שלכל חולה יש תורם)

נניח שיש לנו k חסידים, פשוט נמספר אותם כ $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ כדי שיהיה לכל אחד מספר סידורי

א. נניח שאורך המעגלים ואורך השרשראות אינו מוגבל. תארו אלגוריתם פולינומיאלי המוצא החלפה עם מספר השתלות גדול ביותר (הסבירו את ההבדל לעומת האלגוריתם שלמדנו).

סעיף א':

המטרה שלנו זה להשתמש באלגוריתם הפולינומי הקיים אשר מוצא החלפה עם מספר השתלות הגדול ביותר ע"י זיווג עם משקל מקסימלי.

על כן, ניקח את הקלט של הגרף $G(V, E)$ שבו יש צלע בין כל חולה לתורם שמגיע איתו במשקל 1 ובין כל

תורם לנתרם שהוא מתאים לו מבחינת כליה - צלע במשקל $\frac{n+1}{n}$

ונוסיף את קבוצת האלטרואיסטים:

על כל תורם שהוא חסיד i נוסיף זוג קדקדים $u_{give}^{n+i}, u_{get}^{n+i}$

כעת נבנה את הוספת הצלעות:

לכל התאמה בין חסיד i לבין חולה j נמתח צלע (i, j) (נזכיר שהגרף שלנו הוא לא מכוון)

משקל הצלע יהיה $\frac{(n+1)}{n}$

ובין כל זוג קדקדים $u_{give}^{n+i}, u_{get}^{n+i}$ נמתח צלע עם משקל 1 !

בנוסף, כל קדקדק המייצג אחד מן n התורמים (מגיעים עם אחד מ n החולים) יקושר בצלע אל כל u_{get}^{n+i} במשקל

0 - שהרי הוספת צלע כזו אינה תורמת לנו דבר, אך כן היינו רוצים שתהיה לנו אפשרות לסגור

כעת נריץ את האלגוריתם מן ההרצאה אשר מוצא זיווג מקסימלי ממושקל ולאחריו מוצא מעגל.

ההבדל המשמעותי כאן הוא שהאלגוריתם משתמש בחסידים כדי להגדיל את כמות התרומות. אך כמובן שגם

לא בכל מחיר שהרי אין סיבה שכמות התרומות כליות הכולל בסוף ההרצה עם חסיד, תהיינה פחותה מללא

חסיד (לכן נתתי משקל זהה לתרומת חסידים ביחס לתורמים רגילים)

דבר נוסף, שרשראות יכולות להיווצר כאשר אכן תורם חסיד נבחר ואז אין שום חשיבות ל"סגירת מעגל" מכיוון

שהנתרם אינו קיים באמת.

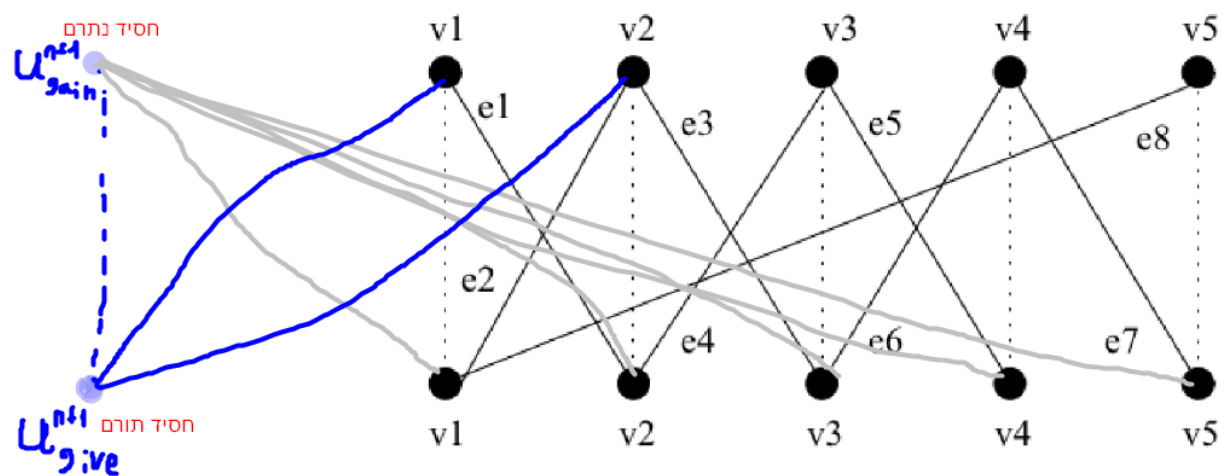
*הערת צד - חשבתי על זה בדיעבד, לא היה חייב להוסיף את הצלעות האפורות ששוקלות 0, הן חסרות

משמעות, אבל לא נורא זה לא משפיע מבחינת מחלקת הפתרון לזמן הריצה (הפתרון נשאר פולינומי ביחס

לגודל הקלט של התורמים נתרמים וחסידים)

איור אילוסטרציה של התוספת ביחס לדוגמה מהכיתה:

חולים



תורמים

ב. נניח שאורך המעגלים ואורך השרשראות הוא לכל היותר 2. תארו אלגוריתם פולינומיאלי המוצא החלפה עם מספר השתלות גדול ביותר (הסבירו את ההבדל לעומת האלגוריתם שלמדנו).

סעיף ב':

אותו האלגוריתם שלמדנו בכיתה בו הופכים את התורם והנתרם לקדקד יחיד ומחברים צלעות בין זוגות שהתורמים והנתרמים שלהם מתאימים זה לזה כלומר:

תורם א' מתאים לחולה ב'

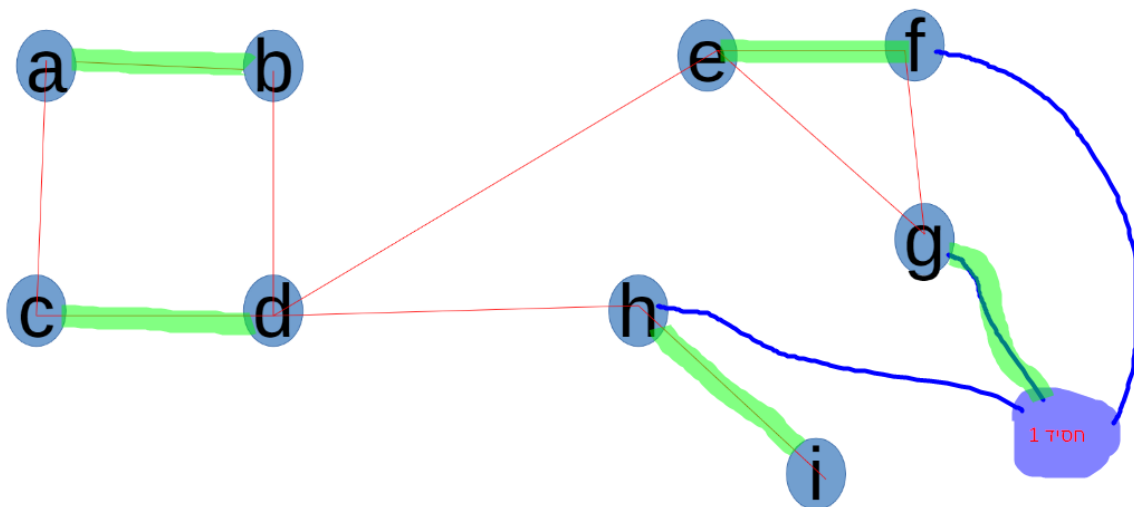
תורם ב' מתאים לחולה א'

הטוויסט הוא שנוסיף את החסידים כקדקד לכל חסיד כאשר הוא יחובר לכל מי שהוא מתאים אליו, מכיוון שהוא אינו צריך לקבל תרומת כליה אז זה יהיה תלוי אך ורק בהאם החסיד מתאים לחולה ללא תלות בתורם.

*הערת צד - בזכות זה שאורך השרשרת המקסימלי הוא 2 האלגוריתם הוא פשוט, אם אורך השרשרת

המקסימלי היה גדול יותר, זה היה דורש כבר פתרון מורכב יותר משמעותית

איור אילוסטרציה: (עם חסיד יחיד ביחס לדוגמה שהייתה בכיתה, הוא מציל את המצב! כל הנתרמים זוכים!) בסגול החסיד, בכחול למי הוא יכול לתרום. בירוק - צלעות שיבחרו לשידוך מקסימלי (שרשרת/מעגל באורך לכל היותר 2)



ג. נניח שאורך המעגלים לכל היותר 3, ואורך השרשראות אינו מוגבל. הסבירו מדוע האלגוריתם שלמדנו, המסתמך על תכונות ליניארי בשלמים, אינו מתאים.

סעיף ג':

בדומה למה שלמדנו בכיתה, לבצע הגבלות (constrains) על כל המעגלים באורך לכל היותר 3 ידרוש מאיתנו להעיק את כל המסלולים באורך 3 בדיוק שאינם סוגרים מעגל כלומר $O(n^3)$ $\binom{n}{3}$ הגבלות.

בנוסף כדי לאפשר כל שרשרת עם אלטרואיסט לכל אורך שהוא, נצטרך מצד שני לאפשר כל אורך מסלול בכל אורך אשר יש בתוכו חסיד

אורי כל המסלולים האפשריים כאשר החסיד ביניהם הינו חסום מלמעלה בכל האפשרויות כלומר: עבור כל חסיד!

$$\left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right] - 1 = 2^n - 1$$

לצערי אני לא רואה דרך ליצור הגבלות בצורה ליניארית שמצד אחד כל המסלולים באורך לכל היותר 3 לא יתקיימו ללא חסיד ומצד שני כל המסלולים שיש בהם חסיד אחד לפחות יתקיימו.

שורה תחתונה: לכל הפחות נזדקק ל $O(n^3)$ הגבלות, דבר שהוא אינו פרקטי כמו שכבר הסברנו בהרצאה (מה קורה כשיש במעגל אלפים ועשרות אלפי זוגות ויותר של תורמים-נתרמים ? זמן חישוב לא סביר)

סעיף ד':

גם כאן נערוך את האלגוריתם שלמדנו בכיתה - הפעם הדינאמי, כדי להגיע לתוצאה. השינוי כאן ביחס לאלגוריתם הדינאמי מהכיתה הוא שאנחנו כן רוצים לאפשר מעגלים ארוכים כל עוד יש בתוכם חסיד כי הם לא באמת מעגלים אלא שרשראות (כי אין את החלק של התרומה לקדקד המייצג את הבן זוג של החסיד שהינו חולה - זה קדקד fake) האלגוריתם:

1. יצירת הבעיה בלי שום אילוצים של מסלולים (כמו בסעיף א')
2. פתרון הבעיה (כמו בסעיף א')
3. אם אין מעגלים באורך 4 אשר אין בהם אלטרואיסט(חסיד) אחד לפחות:
 - 3.1 החזר את התוצאה (סיימנו)
 4. אחרת - מצא את כל המסלולים באורך 3 צלעות שאין בהם אלטרואיסט(חסיד)
 - 4.1 הוסף את האילוצי המסלולים הנ"ל.
 - 4.2 חזור לסעיף 2.

