

"וְנִחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻחִיו" (יחזקאל מ"א 14)

מיזוג הצעות תקציב

אראל סגל-הלוי ע"פ:

.Freeman, Pennock, Peters, Wortman (2021)

איפה הכסף?

הקלט:

- כסף בקופה: C .
- נושאים: $1, \dots, m$ (סעיפי תקציב).
- אזרחים: $1, \dots, n$.
- לכל אזרח i יש תקציב אידיאלי:

- $p_{i,1}, \dots, p_{i,m}; \quad p_{i,1} + \dots + p_{i,m} = C$

הפלט:

- וקטור d המייצג תקציב: d_1, \dots, d_m .
- $d_1 + \dots + d_m = C$.
- התועלת של אזרח i מהתקציב d היא:
- $u_i(d) = - \sum_{j=1, \dots, m} |d_j - p_{i,j}|$

חימום: סעיף אחד

- נניח שצריך להחליט רק על תקציב החינוך.
 - כל אזרח i אומר מספר p_i .
 - אלגוריתם א: ממוצע.
 - לא מגלה אמת, אפילו כשיש רק 2 אזרחים.
 - אלגוריתם ב: קבוע שרירותי.
 - לא יעיל פארטו.
 - אלגוריתם ג: דיקטטור.
 - לא אנונימי – מפלה בין אזרחים שונים.
- האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל-פארטו,
ואנונימי? <

אלגוריתם החציון

- סדר את ההצבעות בסדר עולה:

- $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$
- בחר את הצבעה מספר $n/2$ (עגל למעלה).

משפט. אלגוריתם החציון אנונימי ויעיל-פארטו.

הוכחה. אנונימי – ברור לפי הגדרה.

יעיל-פארטו – כי יש אנשים שהצביעו מעל

החציון – והם יפסידו אם הערך הנבחר יקטן; ויש

אנשים שהצביעו מתחת לחציון – והם יפסידו

אם הערך הנבחר יגדל. ***

אלגוריתם החציון

• סדר את ההצבעות בסדר עולה:

• $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$

• בחר את הצבעה מספר $n/2$ (עגל למעלה).

משפט. אלגוריתם החציון מגלה-אמת.

הוכחה. נניח שהחציון האמיתי x , ואזרח כלשהו

i אינו מרוצה מהבחירה הזאת – נניח כי $p_i < x$.

החציון x , ולכן יש $n/2$ אנשים שהצביעו לפחות

x . האזרח i אינו ביניהם. לכן, אם i ישנה את

הצבעתו באופן כלשהו, יהיו לפחות $n/2$ אנשים

שהצביעו לפחות x , והחציון יהיה לפחות x . לכן i

לא ירויח מהשינוי. ההוכחה למקרה $p_i > x$ דומה.

אלגוריתם החציון – עוד שימושים

אלגוריתם החציון יכול לשמש לבחירת ערך בנושאים רבים נוספים שהם חד-ממדיים:

- כמה ימים בשנה צריך להיות שעון קיץ?
- מה צריך להיות מספר השרים בממשלה?
- מה יהיה גובה המס על שדות הגז?
- לאיזו טמפרטורה לכוון את המזגן במשרד?

שני סעיפי תקציב

- נניח שיש רק שני סעיפים בתקציב: התקציב לאיזור הצפון והתקציב לאיזור הדרום.
- אפשר להשתמש באלגוריתם החציון לאיזור הצפון, ואת שאר התקציב לתת לדרום.
- נניח ש:
 - 51% מהאזרחים בצפון, מצביעים 100%;
 - 49% מהאזרחים בדרום, מצביעים 0%.
 - אלגוריתם החציון נותן 100% לצפון.
 - לא הוגן כלפי תושבי הדרום.

תקציב הוגן לקבוצות

הגדרה. אלגוריתם לקביעת התקציב נקרא הוגן לקבוצות אם, כאשר האזרחים מחולקים לקבוצות וכל קבוצה j נותנת 100% מהתקציב לסעיף j , האלגוריתם מחלק את התקציב בין הסעיפים ביחס ישר לגדלי הקבוצות.

- אלגוריתם הממוצע – הוגן לקבוצות, אבל לא מגלה-אמת.

- אלגוריתם החציון – מגלה אמת, אבל לא הוגן לקבוצות.

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת והוגן לקבוצות?

אלגוריתם החציון המוכלל

• בחר מראש קבוצה של הצבעות קבועות:

• f_1, \dots, f_k .

• הוסף אותן לקבוצת הצבעות האזרחים:

• p_1, \dots, p_n .

• הפעל את אלגוריתם החציון המקורי על קבוצת $n+k$ ההצבעות (הקבועות ושל האזרחים).

החציון המוכלל - דוגמאות

- (1) נניח שיש $n-1$ הצבעות קבועות, וכולן שוות 0.
 - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המינימלית של אזרח: $\min_j p_j$.
- (2) נניח שיש $n-1$ הצבעות קבועות, וכולן שוות ∞ .
 - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המקסימלית של אזרח: $\max_j p_j$.
- (3) נניח שחצי מההצבעות הקבועות הן 0 והחצי השני הן ∞ .
 - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את החציון של הצבעות האזרחים.

החציון המוכלל - תכונות

משפט. לכל קבוצה של הצבעות קבועות, החציון המוכלל הוא אנונימי ומגלה-אמת. הוכחה. זהה לאלגוריתם החציון הרגיל. ***

משפט. אם יש לכל היותר $n-1$ הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל יעיל-פארטו. הוכחה. יש $(n+k)/2$ הצבעות גדולות או שוות לחציון, ו- $(n+k)/2$ הצבעות קטנות או שוות לחציון. כאשר $n-1 \leq k$, שתי הקבוצות כוללות הצבעות של אזרחים, כי $k < (n+k)/2$. לכן לא קיים שיפור פארטו. ***

שני סעיפי תקציב - המשך

נפעיל את אלגוריתם החציון המוכלל עם $n-1$ הצבעות קבועות מפוזרות אחיד בין 0 ל- C :

$$f_i := C * i / n.$$

($2n-1$ הצבעות בסה"כ; החציון הוא ההצבעה ה- n).

משפט. כשיש שני סעיפי תקציב, אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות מפוזרות באופן אחיד בין 0 ל- C הוא **הוגן לקבוצות**.

הוכחה. נניח ש- k אנשים תומכים רק בסעיף א (נותנים C), ו- $n-k$ תומכים רק בסעיף ב (נותנים 0). החציון המוכלל יהיה בהצבעה הקבועה מס' k , שערכה הוא בדיוק $C*k/n$. ***

תקציב כללי – m סעיפים

מה יקרה אם נריץ את אלגוריתם החציון על כל סעיף בנפרד?

- נניח שהתקציב 30, יש 3 נושאים, 3 אזרחים.
הצבעות: $(0, 15, 15)$; $(10, 20, 0)$; $(27, 0, 3)$.

א. בלי הצבעות קבועות:

חציונים $= (10, 15, 3)$, סכום $= 28$.

ב. עם הצבעות קבועות מפוזרות אחיד $10, 20$:
 $(10, 15, 10)$; סכום $= 35$.

אפשר לנרמל ע"י הכפלה ב: $30/35$, אבל
האלגוריתם לא יהיה מגלה-אמת.

חציון מוכלל עם פונקציות עולות

- בחר מראש קבוצה של פונקציות:
 $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t); \quad t \in [0,1].$
- כל הפונקציות רציפות ועולות, ומקיימות:
 $f_i(0) = 0; \quad f_i(1) = C.$
- לכל t בין 0 ל-1, אפשר לחשב לכל נושא, חציון מוכלל עם הצבעות קבועות $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)$.
- עבור $t=0$, החציון = המינימום; הסכום $C \geq$.
- עבור $t=1$, החציון = המקסימום; הסכום $C \leq$.
- לפי משפט ערך הביניים, קיים t^* שעבורו סכום הסעיפים $C =$ (ניתן למצוא ע"י חיפוש בינארי).
- התקציב = חציון מוכלל עם: $f_1(t^*), \dots, f_{n-1}(t^*)$.

חציון מוכלל עם פונקציות עולות

משפט: התוצאה של אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות אינה תלויה בבחירה של t^* .

הוכחה: נניח שיש שני ערכים של t , $t_1 < t_2$, נניח שעבורם סכום כל הנושאים שווה C . כאשר t

גדל, החציון בכל הנושאים לא קטן. כיוון שסכום החציונים נשאר זהה, החציון בכל הנושאים נשאר זהה. ***

משפט: לכל $n-1$ פונקציות רציפות עולות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.

הוכחה: במאמר. ***

איזה פונקציות נבחר כדי שהתקציב יהיה הוגן? <

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

נגדיר $n-1$ פונקציות ליניאריות:

$$f_i(t) = C * \min(1, i*t), \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1.$$

• הפונקציות רציפות ועולות.

• $f_i(0) = C * \min(1, 0) = 0.$

• $f_i(1) = C * \min(1, i) = C.$

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

משפט. אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות, $f_i(t) = C * \min(1, i*t)$, מוצא תקציב הוגן לקבוצות.

הוכחה. נניח שהאזרחים מחולקים לקבוצות של k_j אזרחים הרוצים לתת 100% לנושא j בלבד.

בכל נושא j , יש $n-k_j$ אזרחים שמצביעים 0.

כאשר $t=1/n$, ההצבעות הקבועות בכל נושא הן:

$$f_i(t) = C * \min(1, i/n) = C*i/n.$$

החציון המוכלל יהיה בהצבעה ה- n , שהיא הקבוע

ה- k_j , שהוא $f_{k_j}(t) = C*k_j/n$. סכום החציונים הוא

בדיוק C ; לכן זה התקציב שייבחר, והוא הוגן. ***

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

משפט. אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות אינו תמיד יעיל פארטו.

הוכחה. נניח שיש 9 נושאים, 3 אזרחים, $C=30$:

•אזרח א: 0,0,6,6,6,6,6; 0,0,6

•אזרח ב: 0,0,6,6,6,6; 0,6,0.

•אזרח ג: 6,6,0,0,6,6; 6,0,0.

עבור $t=1/15$, הצבעות קבועות 2, 4, מתקבל:

• 4, 4, 4, 4, 4, 4 ; 2, 2, 2 ; סכום=30, הפרש=24.

יש שיפור פארטו:

• 5, 5, 5, 5, 5 ; 0, 0, 0 ; סכום=30, הפרש=20.

מיזוג הצעות תקציב - טרילמה

מגלה אמת	הוגן לקבוצות	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	אוטיליטרי
כן	כן	לא	חציון מוכלל
לא	כן	כן	ממוצע חשבוני