מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

שאלה 2: חלוקת ללא-קנאה עם זכויות שונות

נתונים n שחקנים עם זכויות שונות: w1,...,wn. כזכור, חלוקה ללא קנאה עם זכויות שונות היא חלוקה שבה, לכל שני שחקנים i, j:

[Vi(Xi)-p(Xi)] / wi ≥ [Vi(Xj)-p(Xj)] / wj

תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה לשחקנים עם זכויות שונות. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מקיים תכונות אלה.

פתרון: כמו באלגוריתם "המכרז השווה", ניתן כל חפץ לשחקן המייחס לו את הערך הגבוה ביותר; זה מספיק כדי להבטיח שהחלוקה תהיה יעילה פארטו. נגבה מכל שחקן את הערך שהוא הכריז, ונחלק את הכסף בין השחקנים באופן יחסי לזכויות שלהם, כלומר, שחקן i יקבל:
wi * S / (w1+...+wn)
כאשר S הוא סכום כל התשלומים שהתקבלו. ***

שאלה 4: האם ייתכן שדייר ישלם יותר מערך החדר?

א. הוכיחו, שאם סכום הערכים של של דייר מסויים לכל החדרים בדירה גדול או שווה R (שכר הדירה הכללי), אז המחיר שישלם על החדר שיקבל, קטן או שווה מהערך שהוא מייחס לחדר.

פתרון. נניח בשלילה ששחקן i מקבל חדר Xi ומשלם עליו p(Xi)>Vi(Xi). אז התועלת שלו היא שלילית:
Vi(Xi)-p(Xi)<0.
מצד שני: סכום התשלומים הוא R וסכום הערכים של דייר i הוא לפחות R:
Sum_j Vi(Xj) ≥ Sum_j p(Xj)

נחסר את אי-השיוויון הקודם:
Sum_{j!=i} Vi(Xj) > Sum_{j!=i} p(Xj)
ולכן יש לפחות j אחד שעבורו:
Vi(Xj) > p(Xj)
שחקן i מקנא בשחקן j – בסתירה לעובדה שהחלוקה ללא קנאה. ***

ב. הראו דוגמה שבה סכום הערכים של דייר מסויים קטן מ־R, ובכל חלוקה ללא־קנאה, הדייר הזה משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל (הוכיחו שבכל החלוקות ללא קנאה, הדייר משלם יותר מערך החדר שקיבל).

פתרון – ראינו בקוד של חן לשאלה 5.

שאלה 6: השמת חפצים ללא כסף

נתונים n שחקנים ו־n חפצים בדידים. צריך לתת חפץ **אחד בדיוק** לכל שחקן, **ללא** כספים. תארו אלגוריתמים יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב-n) למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

0. השמה אוטיליטרית – הממקסמת את סכום הערכים.
פתרון: מוצאים שידוך משקל מקסימום.

א. השמה הממקסמת את מכפלת הערכים.
פתרון: מתרגמים כל משקל ללוגריתם שלו, ומוצאים שידוך משקל מקסימום.

סעיפים ב, ג עברו למטלה הבאה.