אלחי מנצבך

אלגוריתמים כלכליים מטלה- 3

1.

א. הראו דוגמה עם שלוש מפלגות, שבה שיטת ג'פרסון נותנת למפלגה יותר מהמיכסה העליונה שלה.

3 מושבים, 300 בוחרים, א: 50, ב: 60, ג: 190.

	א	**ב**	**ג**
חלוקה	0	0	0
מנות	50	60	**190**
חלוקה	0	0	1
מנות	50	60	**95**
חלוקה	0	0	2
מנות	60	50	**63.3**
חלוקה סופית	**0**	**0**	**3**

המספר המדויק: א:0.5, ב:0.6, ג:1.9 – מפלגה א לא צריכה לקבל מושב מפלגה ב צריכה לקבל מושב 1 ומפלגה ג צריכה לקבל 2 מושבים.
אנו רואים ששיטת ג'פרסון הכי טובה למפלגות הגדולות.
(חישוב המנה לפי שיטת ג'פרסון ← (מספר הקולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1).

ב. הראו דוגמה עם שלוש מפלגות, שבה שיטת אדאמס נותנת למפלגה פחות מהמיכסה התחתונה שלה.

דוגמה של שלוש מפלגות, שבה שיטת אדאמס נותנת למפלגה ג פחות מהמכסה התחתונה שלה.
3 מושבים, 300 בוחרים, א: 40, ב: 50, ג: 210.

	א	**ב**	**ג**
חלוקה	1	1	1
מנות	40	50	**210**
חלוקה סופית	**1**	**1**	**1**

המספר המדויק: א:0.4, ב:0.5, ג:2.1.
מפלגה א לא צריכה לקבל כיסא, מפלגה ב צריכה לקבל כיסא 1 ומפלגה ג צריכה לקבל 2 כיסאות.
בדוגמא שלנו לפי שיטת אדאמס כולם קיבלו כיסא אחד.
אנו רואים ששיטת אדאמס הכי טובה למפלגות הקטנות.
(חישוב המנה לפי שיטת אדאמס היא (מספר הקולות) / (מספר מושבים נוכחי).

* ג. הוכיחו, שכאשר יש שתי מפלגות, כל שיטת-מחלק עם פונקציה f המקיימת לכל s
$s \le f(s) \le s+1$
נותנת לכל מפלגה את המיכסה העליונה שלה או את המיכסה התחתונה שלה.

נניח בשלילה (בה"כ) שמפלגה א קבלה מספר מושבים גדול מהמכסה העליונה שלה.
כלומר מפלגה א קבלה $A+x$ קולות (כאשר A מספר שלם ו-x שבר) והיא קבלה $A+2$ מושבים.
כל שיטת מחלק שנריץ (עם פונקציה f המקיימת לכל s- $s \le f(s) \le s+1$) פועלת עד אשר לא נותרו מושבים לחלק, ולכן בשלב בו קבלה מפלגה א את מושב ה- $A+2$ בהכרח מפלגה ב לא קבלה את מספר המושבים שלה היא זכאית.
כלומר אם מפלגה ב קבלה $B+y$ קולות (כאשר B מספר שלם ו-y שבר) אז היא קבלה $B-1$ מושבים.
כאשר מפלגה א קבלה את המושב ה- $A+2$ יש לה כרגע $A+1$ מושבים ומאחר והיא קבלה את המושב הבא ז"א שהמנה שלה היא הגדולה ביותר.
המנה של א לפי חישוב האלגוריתמים של שיטות החלוקה : $\frac{A+x}{f(s)}$ כאשר $f(s)$ הוא בין כמות מספר המושבים הנוכחי כולל לבין כמות מספר המושבים הנוכחי +1 כולל.
נבדוק כאשר $f(s)$ שווה לקצוות.
כאשר $s=f(s)$: $\frac{A+x}{A+1}$ המנה הזו קטנה מ-1 כי המונה קטן מהמכנה.
כאשר $s+1=f(s)$: $\frac{A+x}{A+2}$ המנה הזו קטנה מ-1 כי המונה קטן מהמכנה.

והמנה של ב לפי חישוב האלגוריתם של שיטות החלוקה : $\frac{B+y}{f(s)}$ כאשר $f(s)$ הוא בין כמות מספר המושבים הנוכחי כולל לבין כמות מספר המושבים הנוכחי +1 כולל.
נבדוק כאשר $f(s)$ שווה לקצוות.
כאשר $s=f(s)$: $\frac{B+y}{B-1}$ המנה הזו גדולה מ-1 כי המונה גדול מהמכנה.
כאשר $s+1=f(s)$: $\frac{B+y}{B}$ המנה הזו גדולה מ-1 כי המונה קטן מהמכנה.

המנה של מפלגה ב גדולה מזו של מפלגה א- סתירה לכך שהמנה של מפלגה א היא הגדולה ביותר.
ולכן הוכחנו שלא יתכן שמפלגה תקבל יותר מושבים מהערך העליון שלה אם עובדים לפי אלגוריתם כלשהו משיטות החלוקה.

- $f(s)$ היא פונקציה המתארת את כל שיטות המחלק, כל השיטות נותנות מכנה שבין כמות המושבים הנוכחי(אדאמס) לבין כמות המושבים הנוכחי + 1 (ג'פרסון).
כאשר אנו מראים שמקבלים סתירה כאשר $f(s)$ שווה לקצוות זה גורר שכמובן אם נציב מספר שבניהם (דין, הנטינגטון, וובסטר) נקבל סתירה.

כעת נניח בשלילה (בה"כ) שמפלגה א קבלה מספר מושבים קטן מהמכסה התחתונה שלה.
כלומר מפלגה א קבלה $A + x$ קולות (כאשר A מספר שלם ו-x שבר) והיא קבלה $A - 1$ מושבים.
כל שיטת מחלק שנריץ (עם פונקציה f המקיימת לכל s- $s \leq f(s) \leq s + 1$) פועלת עד אשר לא נותרו מושבים לחלק, ולכן בסוף האלגוריתם מפלגה ב בהכרח קבלה מספר מושבים יותר מהערך העליון שלה.
כלומר אם מפלגה ב קבלה $B + y$ קולות (כאשר B מספר שלם ו-y שבר) אז היא קבלה $B + 2$ מושבים.
כאשר מפלגה ב קבלה את המושב ה- $B + 2$ יש לה כרגע $B + 1$ ומאחר והיא קבלה את המושב הבא ז"א שהמנה שלה היא הגדולה ביותר.

המנה של ב לפי חישוב האלגוריתם של שיטות החלוקה : $\frac{B+y}{f(s)}$ כאשר $f(s)$ הוא בין כמות מספר המושבים הנוכחי כולל לבין כמות מספר המושבים הנוכחי +1 כולל.
נבדוק כאשר $f(s)$ שווה לקצוות.
כאשר $s = f(s)$: $\frac{B+y}{B+1}$ המנה הזו קטנה מ-1 כי המונה קטן מהמכנה.
כאשר $s + 1 = f(s)$: $\frac{B+y}{B+2}$ המנה הזו קטנה מ-1 כי המונה קטן מהמכנה.

והמנה של א לפי חישוב האלגוריתמים של שיטות החלוקה : $\frac{A+x}{f(s)}$ כאשר $f(s)$ הוא בין כמות מספר המושבים הנוכחי כולל לבין כמות מספר המושבים הנוכחי +1 כולל.
נבדוק כאשר $f(s)$ שווה לקצוות.
כאשר $s = f(s)$: $\frac{A+x}{A-1}$ המנה הזו גדולה מ-1 כי המונה גדול מהמכנה.
כאשר $s + 1 = f(s)$: $\frac{A+x}{A}$ המנה הזו גדולה מ-1 כי המונה גדול מהמכנה.

בסתירה לכך שהמנה של מפלגה ב היא הגדולה ביותר.
ולכן הוכחנו שלא יתכן שמפלגה תקבל פחות מושבים מהערך התחתון שלה אם עובדים לפי אלגוריתם כלשהו משיטות החלוקה.