

אלגוריתמים כלכליים - מטלה 4

ניר סון - 323918599

3.

הוכיחו: יחס הקירוב של אלגוריתם הרשימה לחלוקת מטלות ל-n שחקנים הוא לכל היותר $2 - 1/n$

הוכחה:

נסתכל על החלוקה האגליטרית, ונסמן ב OPT את הערך האגליטרי.

\leq סכום העלויות של כל שחקן הוא לכל היותר OPT

\leq סכום העלויות הכולל של המטלות הוא לכל היותר $n \cdot OPT$

\leq נתבונן במצב החלוקה רגע לפני שחולקה המטלה האחרונה באלגוריתם הרשימה. נסמן את עלות המטלה האחרונה ב- x .

\leq סכום כל המטלות שחולקו עד עכשיו (כולן חוץ מאחת) הוא $n \cdot OPT - x \geq$

\leq לפי עקרון שובר היונים, קיים שחקן שסכום העלויות של המטלות שקיבל עד כה \geq

$$\frac{n \cdot OPT - x}{n}$$

ניקח את השחקן עם סכום העלויות הגדול ביותר שמקיים את זה (אם יש יותר מאחד).

\leq לאחר חלוקת המטלה האחרונה, במקרה הגרוע ביותר, השחקן "שלנו" קיבל אותה.

\leq הסכום הכולל של עלויות המטלות שלו לאחר קבלת המטלה האחרונה:

$$\text{sum-of-tasks} \leq \frac{n \cdot OPT - x}{n} + x \leq OPT - \frac{x}{n} + x = OPT + \frac{x(n-1)}{n}$$

באופן טריוויאלי, עלות של מטלה בודדת $\geq OPT$, ובפרט $OPT \geq x$

\leq

$$\text{sum-of-tasks} \leq OPT + \frac{x(n-1)}{n} \leq OPT + \frac{OPT(n-1)}{n} = 2 \cdot OPT - \frac{OPT}{n}$$

\leq יחס הקירוב בין אלגוריתם הרשימה לבין החלוקה האופטימלית הוא:

$$\frac{\text{sum-of-tasks}}{OPT} \leq 2 - \frac{1}{n}$$