

"וְנִחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻחִיו" (יחזקאל מ"א 14)

# מיזוג הצעות תקציב

אראל סגל-הלוי ע"פ:

.Freeman, Pennock, Peters, Wortman (2021)

איפה הכסף?

# הקלט:

- כסף בקופה:  $C$ .
- נושאים:  $1, \dots, m$  (סעיפי תקציב).
- אזרחים:  $1, \dots, n$ .
- לכל אזרח  $i$  יש תקציב אידיאלי:

- $p_{i,1}, \dots, p_{i,m}; \quad p_{i,1} + \dots + p_{i,m} = C$

# הפלט:

- וקטור  $d$  המייצג תקציב:  $d_1, \dots, d_m$ .
- $d_1 + \dots + d_m = C$ .
- התועלת של אזרח  $i$  מהתקציב  $d$  היא:
- $u_i(d) = - \sum_{j=1, \dots, m} |d_j - p_{i,j}|$

# חימום: סעיף אחד

- נניח שצריך להחליט רק על תקציב החינוך.
  - כל אזרח  $i$  אומר מספר  $p_i$ .
  - אלגוריתם א: ממוצע.
  - לא מגלה אמת, אפילו כשיש רק 2 אזרחים.
  - אלגוריתם ב: קבוע שרירותי.
  - לא יעיל פארטו.
  - אלגוריתם ג: דיקטטור.
  - לא אנונימי – מפלה בין אזרחים שונים.
- האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל-פארטו,  
ואנונימי? <

# אלגוריתם החציון

- סדר את ההצבעות בסדר עולה:

- $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$
- בחר את הצבעה מספר  $n/2$  (עגל למעלה).

**משפט.** אלגוריתם החציון אנונימי ויעיל-פארטו.

**הוכחה.** אנונימי – ברור לפי הגדרה.

יעיל-פארטו – כי יש אנשים שהצביעו מעל

החציון – והם יפסידו אם הערך הנבחר יקטן; ויש

אנשים שהצביעו מתחת לחציון – והם יפסידו

אם הערך הנבחר יגדל. \*\*\*

# אלגוריתם החציון

• סדר את ההצבעות בסדר עולה:

•  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$

• בחר את הצבעה מספר  $n/2$  (עגל למעלה).

**משפט.** אלגוריתם החציון מגלה-אמת.

**הוכחה.** נניח שהחציון האמיתי  $x$ , ואזרח כלשהו

$i$  אינו מרוצה מהבחירה הזאת – נניח כי  $p_i < x$ .

החציון  $x$ , ולכן יש  $n/2$  אנשים שהצביעו לפחות

$x$ . האזרח  $i$  אינו ביניהם. לכן, אם  $i$  ישנה את

הצבעתו באופן כלשהו, יהיו לפחות  $n/2$  אנשים

שהצביעו לפחות  $x$ , והחציון יהיה לפחות  $x$ . לכן  $i$

לא ירויח מהשינוי. ההוכחה למקרה  $p_i > x$  דומה.

\*\*\*

# אלגוריתם החציון – עוד שימושים

אלגוריתם החציון יכול לשמש לבחירת ערך  
בנושאים רבים נוספים שהם חד-ממדיים:

- כמה ימים בשנה צריך להיות שעון קיץ?
- מה צריך להיות מספר השרים בממשלה?
- מה יהיה גובה המס על שדות הגז?
- לאיזו טמפרטורה לכוון את המזגן במשרד?

# שני סעיפי תקציב

- נניח שיש רק שני סעיפים בתקציב: התקציב לאיזור הצפון והתקציב לאיזור הדרום.
- אפשר להשתמש באלגוריתם החציון לאיזור הצפון, ואת שאר התקציב לתת לדרום.
- נניח ש:
  - 51% מהאזרחים בצפון, מצביעים 100%;
  - 49% מהאזרחים בדרום, מצביעים 0%.
  - אלגוריתם החציון נותן 100% לצפון.
  - לא הוגן כלפי תושבי הדרום.

# תקציב הוגן לקבוצות

הגדרה. אלגוריתם לקביעת התקציב נקרא הוגן לקבוצות אם, כאשר האזרחים מחולקים לקבוצות וכל קבוצה  $j$  נותנת 100% מהתקציב לסעיף  $j$ , האלגוריתם מחלק את התקציב בין הסעיפים ביחס ישר לגדלי הקבוצות.

- אלגוריתם הממוצע – הוגן לקבוצות, אבל לא מגלה-אמת.

- אלגוריתם החציון – מגלה אמת, אבל לא הוגן לקבוצות.

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת והוגן לקבוצות?



# אלגוריתם החציון המוכלל

• בחר מראש קבוצה של הצבעות קבועות:

•  $f_1, \dots, f_k$ .

• הוסף אותן לקבוצת הצבעות האזרחים:

•  $p_1, \dots, p_n$ .

• הפעל את אלגוריתם החציון המקורי על קבוצת  $n+k$  ההצבעות (הקבועות ושל האזרחים).

# החציון המוכלל - דוגמאות

- (1) נניח שיש  $n-1$  הצבעות קבועות, וכולן שוות 0.
  - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המינימלית של אזורח:  $\min_j p_j$ .
- (2) נניח שיש  $n-1$  הצבעות קבועות, וכולן שוות  $\infty$ .
  - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המקסימלית של אזורח:  $\max_j p_j$ .
- (3) נניח שחצי מההצבעות הקבועות הן 0 והחצי השני הן  $\infty$ .
  - אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את החציון של הצבעות האזורחים.

# החציון המוכלל - תכונות

**משפט.** לכל קבוצה של הצבעות קבועות, החציון המוכלל הוא אנונימי ומגלה-אמת. הוכחה. זהה לאלגוריתם החציון הרגיל. \*\*\*

**משפט.** אם יש לכל היותר  $n-1$  הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל יעיל-פארטו. הוכחה. יש  $(n+k)/2$  הצבעות גדולות או שוות לחציון, ו- $(n+k)/2$  הצבעות קטנות או שוות לחציון. כאשר  $n-1 \leq k$ , שתי הקבוצות כוללות הצבעות של אזרחים, כי  $k < (n+k)/2$ . לכן לא קיים שיפור פארטו. \*\*\*

# שני סעיפי תקציב - המשך

נפעיל את אלגוריתם החציון המוכלל עם  $n-1$  הצבעות קבועות מפוזרות אחיד בין 0 ל- $C$ :

$$f_j := C * j / n.$$

( $2n-1$  הצבעות בסה"כ; החציון הוא ההצבעה ה- $n$ ).

**משפט.** כשיש שני סעיפי תקציב, אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות מפוזרות באופן אחיד בין 0 ל- $C$  הוא הוגן לקבוצות.

**הוכחה.** נניח ש- $k$  אנשים תומכים רק בסעיף א (נותנים  $C$ ), ו- $n-k$  תומכים רק בסעיף ב (נותנים 0). החציון המוכלל יהיה בהצבעה הקבועה מס'  $k$ , שערכה הוא בדיוק  $C*k/n$ . \*\*\*

# תקציב כללי – $m$ סעיפים

מה יקרה אם נריץ את אלגוריתם החציון על כל סעיף בנפרד?

- נניח שהתקציב 30, יש 3 נושאים, 3 אזרחים.  
הצבעות:  $(0, 15, 15)$ ;  $(10, 20, 0)$ ;  $(27, 0, 3)$ .

א. בלי הצבעות קבועות:

חציונים  $= (10, 15, 3)$ , סכום  $= 28$ .

ב. עם הצבעות קבועות מפוזרות אחיד  $10, 20$ :  
 $(10, 15, 10)$ ; סכום  $= 35$ .

אפשר לנרמל ע"י הכפלה ב:  $30/35$ , אבל  
האלגוריתם לא יהיה מגלה-אמת.

# חציון מוכלל עם פונקציות עולות

- בחר מראש קבוצה של פונקציות:  
 $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t); \quad t \in [0,1].$
- כל הפונקציות רציפות ועולות, ומקיימות:  
 $f_i(0) = 0; \quad f_i(1) = C.$
- לכל  $t$  בין 0 ל-1, אפשר לחשב לכל נושא, חציון מוכלל עם הצבעות קבועות  $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)$ .
- עבור  $t=0$ , החציון = המינימום; הסכום  $\geq C$ .
- עבור  $t=1$ , החציון = המקסימום; הסכום  $\leq C$ .
- לפי משפט ערך הביניים, קיים  $t^*$  שעבורו סכום הסעיפים  $C =$  (ניתן למצוא ע"י חיפוש בינארי).
- התקציב = חציון מוכלל עם:  $f_1(t^*), \dots, f_{n-1}(t^*)$ .

# חציון מוכלל עם פונקציות עולות

**משפט:** התוצאה של אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות אינה תלויה בבחירה של  $t^*$ .

הוכחה: נניח שיש שני ערכים של  $t$ , נניח  $t_1 < t_2$ , שעבורם סכום כל הנושאים שווה  $C$ . כאשר  $t$

גדל, החציון בכל הנושאים לא קטן. כיוון שסכום החציונים נשאר זהה, החציון בכל הנושאים נשאר זהה. \*\*\*

**משפט:** לכל  $n-1$  פונקציות רציפות עולות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.

הוכחה: במאמר. \*\*\*

איזה פונקציות נבחר כדי שהתקציב יהיה הוגן? <

# חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

נגדיר  $n-1$  פונקציות ליניאריות:

$$f_i(t) = C * \min(1, i*t), \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1.$$

• הפונקציות רציפות ועולות.

•  $f_i(0) = C * \min(1, 0) = 0.$

•  $f_i(1) = C * \min(1, i) = C.$



# חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

משפט. אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות,  $f_i(t) = C * \min(1, i*t)$ , מוצא תקציב הוגן לקבוצות.

הוכחה. נניח שהאזרחים מחולקים לקבוצות של  $k_j$  אזרחים הרוצים לתת 100% לנושא  $j$  בלבד.

בכל נושא  $j$ , יש  $n-k_j$  אזרחים שמצביעים 0.

כאשר  $t=1/n$ , ההצבעות הקבועות בכל נושא הן:

$$f_i(t) = C * \min(1, i/n) = C*i/n.$$

החציון המוכלל יהיה בהצבעה ה- $n$ , שהיא הקבוע

ה- $k_j$ , שהוא  $f_{k_j}(t) = C*k_j/n$ . סכום החציונים הוא

בדיוק  $C$ ; לכן זה התקציב שייבחר, והוא הוגן. \*\*\*

# חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

**משפט.** אלאגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות אינו תמיד יעיל פארטו.

הוכחה. נניח שיש 9 נושאים, 3 אזרחים,  $C=30$ :

• אזרח א: 6, 6, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0 ; 6, 0, 0, 0.

• אזרח ב: 0, 0, 6, 6, 6, 6, 6, 0, 0 ; 0, 6, 0, 0.

• אזרח ג: 6, 6, 0, 0, 6, 6, 0, 0, 6 ; 0, 0, 0, 6.

עבור  $t=1/15$ , הצבעות קבועות 2, 4, מתקבל:

• 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2 ; סכום=30, הפרש=24.

יש שיפור פארטו:

• 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 0 ; סכום=30, הפרש=20.

\*\*\*

# מיזוג הצעות תקציב - טרילמה

מגלה אמת	הוגן לקבוצות	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	אוטיליטרי
כן	כן	לא	חציון מוכלל
לא	כן	כן	ממוצע חשבוני