

## מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (\*) מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: בדיקת יעילות פארטו בפייתון

ישנם כמה שחקנים הצריכים לבחור באפשרות אחת מתוך כמה אפשרויות. כל שחקן מייחס ערך מסוים לכל אחת מהאפשרויות, לפי המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    value(option:int)->float:
        """
        INPUT:    the index of an option.
        OUTPUT:   the value of the option to the agent.
        """
```

א. כיתבו פונקציה, המקבלת מערך של שחקנים ושתי אפשרויות (כל אפשרות מיוצגת ע"י מספר שלם), ובודקת האם אפשרות 1 היא שיפור פארטו של אפשרות 2. כותרת הפונקציה:

```
def isParetoImprovement(agents:List[Agent], option1:int,
option2:int)->bool:
```

ב. כיתבו פונקציה, המקבל מערך של שחקנים, מספר אפשרות, ומערך של כל האפשרויות, ובודקת האם האפשרות הנתונה יעילה פארטו:

```
def isParetoOptimal(agents:List[Agent], option:int,
allOptions:List[int])->bool:
```

בדקו את פתרונכם על הדוגמה מההרצאה (כל מספר מייצג את התועלת של השחקן שבשורה למצב שבטור):

אפשרות:	א	ב	ג	ד	ה
עמי	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

### \* שאלה 2: מציאת חלוקה לקסימין-אגליטרית - דוגמאות

המציאו שלוש דוגמאות של בעיות חלוקת משאבים, עם 3 שחקנים ו-4 משאבים, לפי הפירוט הבא:

- א. דוגמה שבה האלגוריתם לחלוקה לקסימין-אגליטרית מסתיים בסיבוב אחד.  
 ב. דוגמה שבה האלגוריתם לחלוקה לקסימין-אגליטרית מסתיים בשני סיבובים.  
 ג. דוגמה שבה האלגוריתם לחלוקה לקסימין-אגליטרית מסתיים בשלושה סיבובים.  
 תארו כל דוגמה בטבלה המתארת את הערך שמייחס כל שחקן לכל משאב, לדוגמה:

	ברזל	נפט	קמח	מים
עמי:				
תמי:				
רמי:				

פרטו את שלבי הריצה של האלגוריתם על כל דוגמה.

### שאלה 3: חלוקה אגליטרית וקנאה

נניח שיש שלושה משאבים וחמישה שחקנים עם הערכים הבאים:

	ברזל	נפט	עצים
שחקן א:	6	9	0
שחקן ב:	0	5	10
שחקן ג:	0	0	15
שחקן ד:	0	0	15
שחקן ה:	0	0	15

- א. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל שחקן מקבל ערך לפחות 5.  
 ב. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל העצים ניתנים לשחקנים ג, ד, ה, וכל הנפט לשחקן ב.  
 ג. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, יש קנאה (מי מקנא במי ומדוע?)

### שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

• עמי: פלדה 1, נפט 0.

• תמי: פלדה  $t$ , נפט 1 פחות  $t$

כאשר  $t$  הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

- א. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום הערכים**, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?  
 ב. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום השורשים** של הערכים, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?  
 ג. חשבו חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?

\* ד. כתבו בעיית אופטימיזציה ב-cvxpy, המוצאת חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t. (רמז: כנראה תקבלו הודעת שגיאה – עליכם למצוא לה פתרון).

## שאלה 5: אלגוריתם חלופי לחלוקת משאבים

נתון האלגוריתם הבא לחלוקת משאבים רציפים:

- לכל משאב  $x$ :

○ תן לכל שחקן i חלק  $V_i(x)/\sum_j V_j(x)$  מהמשאב x.

לדוגמה, בבעייה שהוצגה בהרצאה:

עצים	נפט	פלדה	
80	19	1	עמי:
79	1	20	תמי:

עמי יקבל  $1/21$  מהפלדה,  $19/20$  מהנפט, ו  $80/159$  מהעצים (ותמי תקבל את השאר).

א. האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה פרופורציונלית? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

ב. האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.