מטלה 7 – שאלה 1

שני והב

שאלה 1: חלוקת חפצים עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של m חפצים בין n אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו x, צריך לשלם t*x מס הכנסה, כאשר t הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח t=0.3 זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

א. יהי חפץ שגם עמי וגם תמי מייחסים לו 100, ויהי $t = 0.1$.

- נניח בה"כ כי האלגוריתם מוכר את החפץ לעמי.
- האלגוריתם מחלק את הכסף (100 ₪) לעמי ותמי שווה בשווה.

התועלת של עמי בעיניו: $\mathbf{50}$
התועלת של תמי בעיניה (יש לקחת מס t): $50 - 0.1 \cdot 50 = \mathbf{45}$

מכיוון שעמי ותמי מייחסים לחפץ את אותו הערך אז גם תמי רואה את התועלת של עמי כ50, ולכן מקנאה בו כי לה יש 45.

ב. אלגוריתם "המכרז השווה" הכולל ניכוי מס:
1. כל שחקן רושם ערך לכל חפץ.
2. האלגוריתם מוכר כל חפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר, בתמורה לערך שרשם.
3. האלגוריתם מחלק את הכסף שהתקבל מכל השחקנים באופן הבא:
   i. k לכל שחקן שהאלגוריתם מכר לו חפץ.
   ii. את הכסף הנותר האלגוריתם מחלק בין אלו שהוא לא מכר להם חפץ.

כאשר: $k = \frac{S(1-t)}{n-d\cdot t}$
S – סכום התשלומים, n – מספר השחקנים, t – כמות המס
d – מספר השחקנים שהאלגוריתם מכר להם לפחות חפץ אחד

<u>הוכחה שהחלוקה יעילה-פארטו - בדומה להוכחה של האלגוריתם הרגיל:</u>

נזכיר משפט שהוכחנו בכיתה:
"כשכל השחקנים הם קוואזיליניאריים, חלוקה היא יעילה-פארטו אם ורק אם היא ממקסמת את סכום הערכים"

מכיוון שאנחנו מניחים שהשחקנים הם *קוואזיליניאריים*, וכל חפץ נמסר לשחקן המייחס לו ערך גבוה ביותר - החלוקה ממקסמת את סכום הערכים (סכום הערכים = סכום תועלות + סכום תשלומים) ולכן היא יעילה פארטו.

הוכחה שהחלוקה היא ללא קנאה:

האלגוריתם מחלק k כסף לכל שחקן שהוא מכר לו חפץ, נרצה להראות שכל שחקן שהוא לא מכר לו חפץ (ולכן היה צריך לנכות מס) נשאר לאחר הניכוי גם הוא עם k כסף בדיוק:

- לאחר שהאלגוריתם חילק k לכל שחקן שמכר לו חפץ, סכום התשלומים הנותר הוא $S - d \cdot k$
- הסכום הנ"ל צריך להתחלק בין אלו שצריכים לנכות מס, לכן לאחר הורדת המס סכום התשלומים הנותר הוא: $(S - d \cdot k) - (S - d \cdot k) \cdot t$
- לכן כל שאר השחקנים יקבלו: $\frac{(S - d \cdot k) - (S - d \cdot k) \cdot t}{n - d}$

נראה כי מתקיים:

$$\frac{(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}} = \boldsymbol{k}$$

$$\downarrow$$

$$S(1-t) = k(n - dt)$$

לאחר הצבה של k מתקבל פסוק אמת:

$$S(1-t) = \frac{S(1-t)}{n - dt}(n - dt)$$

כלומר סכום הכסף של שחקן לאחר ניכוי מס שווה לסכום הכסף של שחקן שלא היה צריך לנכות מס = k.

ומכאן,

התועלת של כל שחקן i מהסל שלו היא:

$$V_i(X_i) - V_i(X_i) + k = k$$

אך מצד שני, התועלת של כל שחקן i מהסל של שחקן j היא:

$$V_i(X_j) - V_j(X_j) + k$$

אבל $V_j(X_j) \geq V_i(X_j)$ כי כל חפץ נמסר לשחקן עם הערך הגבוה ביותר. לכן התועלת של כל שחקן i מהסל של j היא לכל היותר k.

■

דוגמאות

__דוגמא 1:__

	דירה
עמי	**100**
תמי	100

יהי $t = 0.1$

- האלגוריתם מוכר את הדירה לעמי ($S = 100$)
- האלגוריתם מחלק את S כך:
  - עמי מקבל: $\frac{S(1-t)}{n-d\cdot t} = \frac{100(1-0.1)}{2-(1\cdot 0.1)} = \mathbf{\frac{900}{19}}$
  - תמי מקבלת את השאר: $\frac{1000}{19} = \frac{900}{19} - 100$, אבל צריכה לשלם מס לכן נשארת עם: $\mathbf{\frac{900}{19}}$

התועלת של כל שחקן מהסל שלו היא $\mathbf{\frac{900}{19}}$, אבל התועלת של כל שחקן i מהסל של שחקן j היא $\mathbf{\frac{900}{19}} + V_i(X_j) - V_j(X_j)$, אבל $V_j(X_j) \geq V_i(X_j)$ כי כל חפץ נמסר לשחקן עם הערך הגבוה ביותר. לכן התועלת של כל שחקן i מהסל של j היא לכל היותר $\mathbf{\frac{900}{19}}$, ולכן לא מקנא.

עבור $t = 0.9$:

עמי מקבל: $\frac{S(1-t)}{n-d\cdot t} = \frac{100(1-0.9)}{2-(1\cdot 0.9)} = \mathbf{\frac{100}{11}}$

תמי מקבלת את השאר: $\frac{1000}{11} = \frac{100}{11} - 100$, אבל היא צריכה לשלם מס ולכן נשארת עם: $\mathbf{\frac{100}{11}}$

__דוגמא 2:__

	דירה	חדר
עמי	**100**	50
תמי	80	**300**
רמי	50	200

יהי $t = 0.3$

- האלגוריתם מוכר את הדירה לעמי ואת החדר לתמי ($S = 400$)
- האלגוריתם מחלק את S כך:
  - עמי ותמי כל אחד מקבל: $\frac{S(1-t)}{n-d\cdot t} = \frac{400(1-0.3)}{3-(2\cdot 0.3)} = \mathbf{\frac{350}{3}}$
  - רמי מקבל את השאר: $\frac{500}{3} = \frac{350}{3} \cdot 2 - 400$, אבל צריך לשלם מס ולכן נשאר עם: $\mathbf{\frac{350}{3}}$

התועלת של כל שחקן מהסל שלו היא $\mathbf{\frac{350}{3}}$, אבל התועלת של כל שחקן i מהסל של שחקן j היא $\mathbf{\frac{350}{3}} + V_i(X_j) - V_j(X_j)$, **אבל $V_j(X_j) \geq V_i(X_j)$ כי כל חפץ נמסר לשחקן עם הערך הגבוה ביותר. לכן התועלת של כל שחקן i מהסל של j היא לכל היותר** $\mathbf{\frac{350}{3}}$, ולכן לא מקנא.

דוגמא 3:

	דירה	חדר	מרתף
עמי	**100**	50	**50**
תמי	80	**300**	30
רמי	50	200	20
דני	80	100	40

יהי $t = 0.7$

- האלגוריתם מוכר את הדירה והמרתף לעמי ואת החדר לתמי ($S = 450$)
- האלגוריתם מחלק את S כך:
  - עמי ותמי כל אחד מקבל: $\mathbf{\frac{675}{13}} = \frac{450(1-0.7)}{4-(2\cdot 0.7)} = \frac{S(1-t)}{n-d\cdot t}$
  - הכסף שנשאר: $\frac{4500}{13} = 450 - 2\cdot\frac{675}{13}$
  - רמי ודני מתחלקים בשאר – כל אחד מקבל: $\frac{2250}{13}$ אבל צריך לשלם מס ולכן כל אחד נשאר עם: $\mathbf{\frac{675}{13}}$

דוגמא 4:

	דירה	חדר	מרתף
עמי	**100**	**400**	**50**
תמי	80	300	30
רמי	50	200	20
דני	80	100	40

יהי $t = 0.2$

- האלגוריתם מוכר את הכל לעמי ($S = 550$)
- האלגוריתם מחלק את S כך:
  - עמי מקבל: $\mathbf{\frac{2200}{19}} = \frac{550(1-0.2)}{4-(1\cdot 0.2)} = \frac{S(1-t)}{n-d\cdot t}$
  - הכסף שנשאר: $\frac{8250}{19} = 550 - \frac{2200}{19}$
  - תמי רמי ודני מתחלקים בשאר – כל אחד מקבל: $\frac{2750}{19}$ אבל צריך לשלם מס ולכן כל אחד נשאר עם: $\mathbf{\frac{2200}{19}}$