"וּנְחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקת חדרים ושכר-דירה

Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

https://blogs.ams.org/mathgradblog/2013/10/12/splitting-apartment-rent-case-fair-division/

חלוקת שכר דירה

נתונים:

- דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים R.
- שותפים n שרוצים לשכור יחד את הדירה.

האתגר: להחליט מי יגור איפה, וכמה ישלם, כך שלא תהיה קנאה. הפלט הדרוש הוא:

- **השמה**: =: לכל שחקן i מתאימים חדר אחד X_i.
- **תמחור**: =: לכל חדר j מתאימים מחיר p(j).
- **ללא קנאה**: אף שותף לא מעדיף את החבילה (חדר+מחיר) של שותף אחר.

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

הנחה: קיים "מחיר גבוה מדי".

הגדרה: **מחיר גבוה מדי** הוא מחיר כלשהו T, כך שאם המחיר של חדר כלשהו ≤ T, והמחיר של חדר אחר כלשהו ≥ 0, אז אף שחקן לא בוחר בחדר עם מחיר ≤ T.

הערה: אם השחקנים קוואזיליניאריים, אז קיים מחיר גבוה מדי – למשל הערך הגבוה ביותר ששחקן כלשהו מייחס לחדר כלשהו.

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה +תימחור ללא קנאה. <===

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה+תימחור ללא קנאה.

הוכחה: נבנה את **סימפלקס התימחורים**. כל נקודה בסימפלקס, עם קואורדינטות $(x_1,\ldots,x_n)$, מתאימה לתימחור עם:

$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$

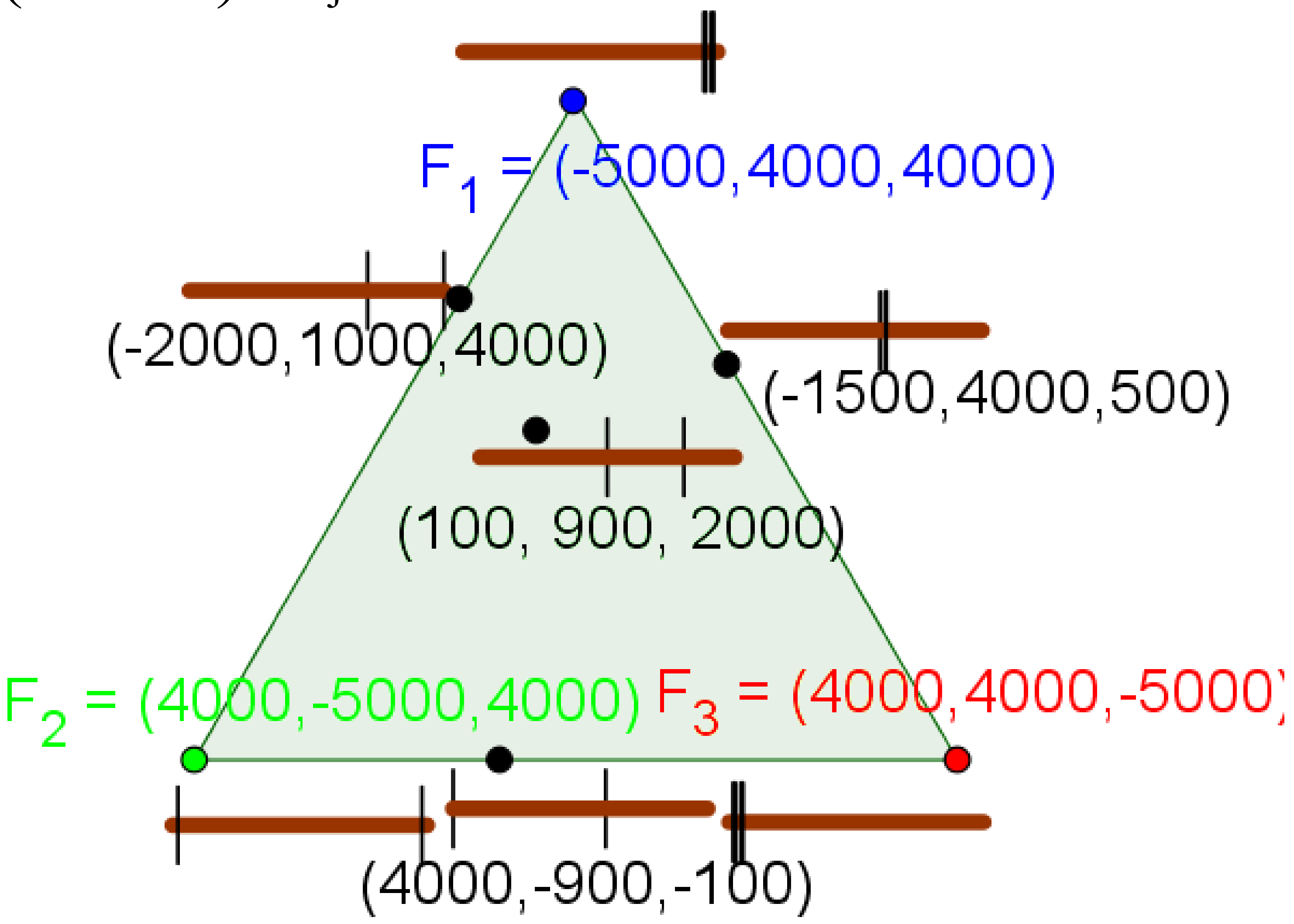
כאשר T הוא מחיר גבוה מדי.

הערה: בכל נקודה, סכום כל המחירים הוא בדיוק R.

סימפלקס התימחורים

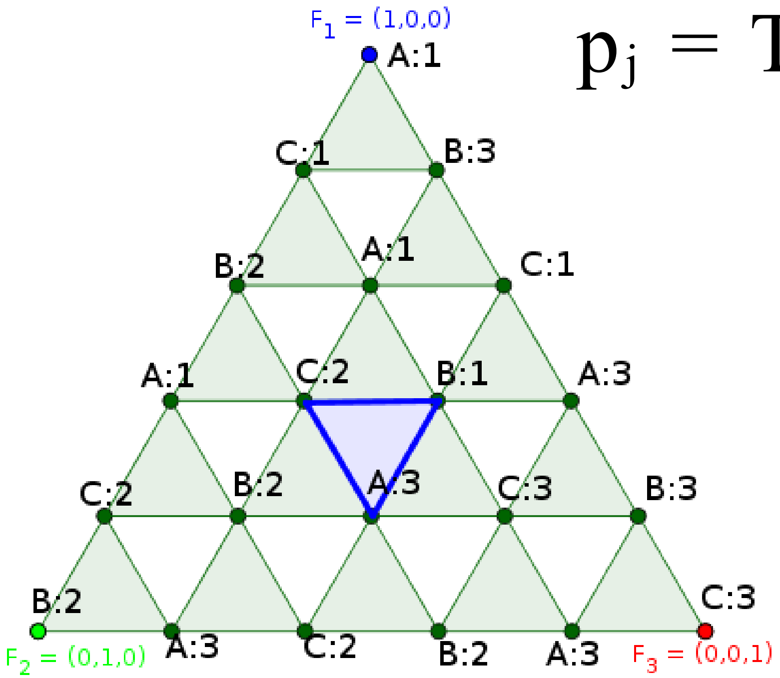
דוגמה עם n=3, R=3000, T=4000:

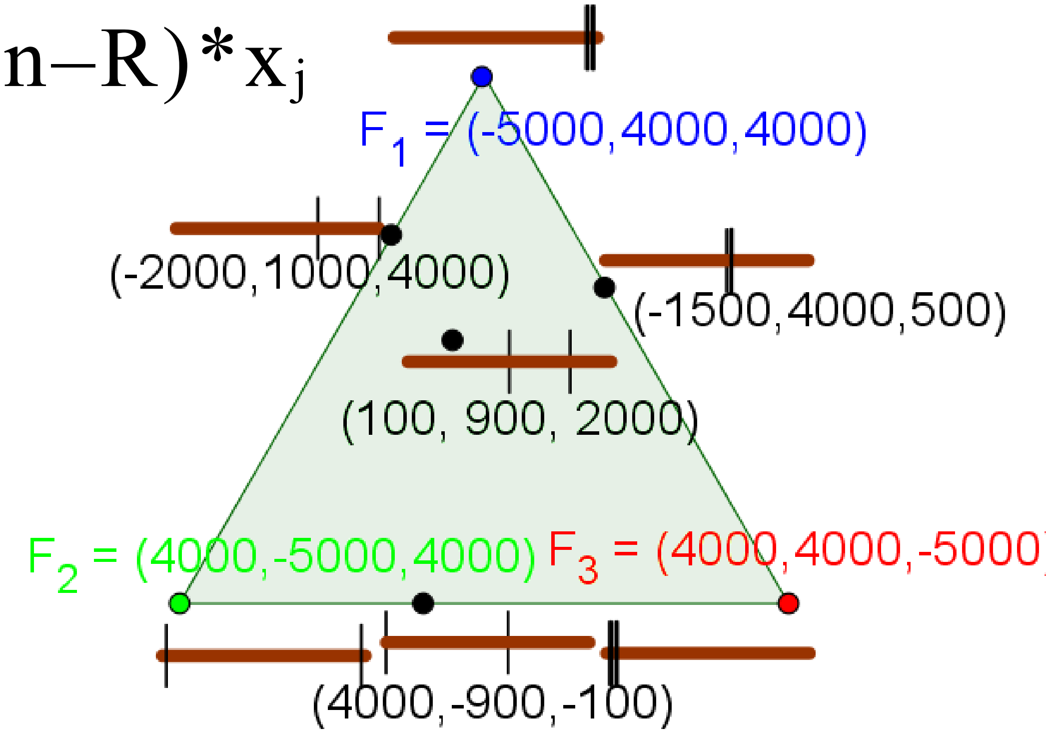
$p_j = T - (Tn-R)^* x_j$



סימפלקס התימחורים

$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$



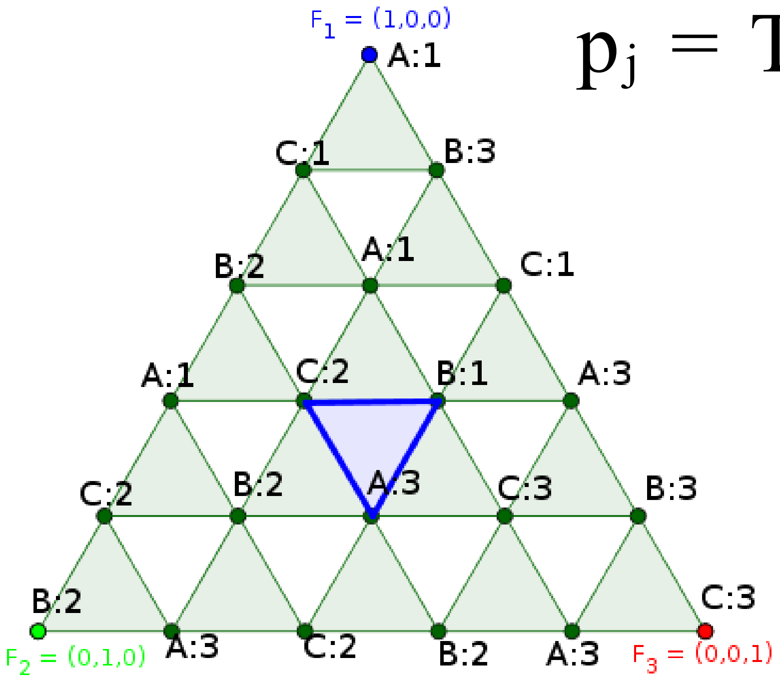


כמו בחלוקת עוגה ללא קנאה:

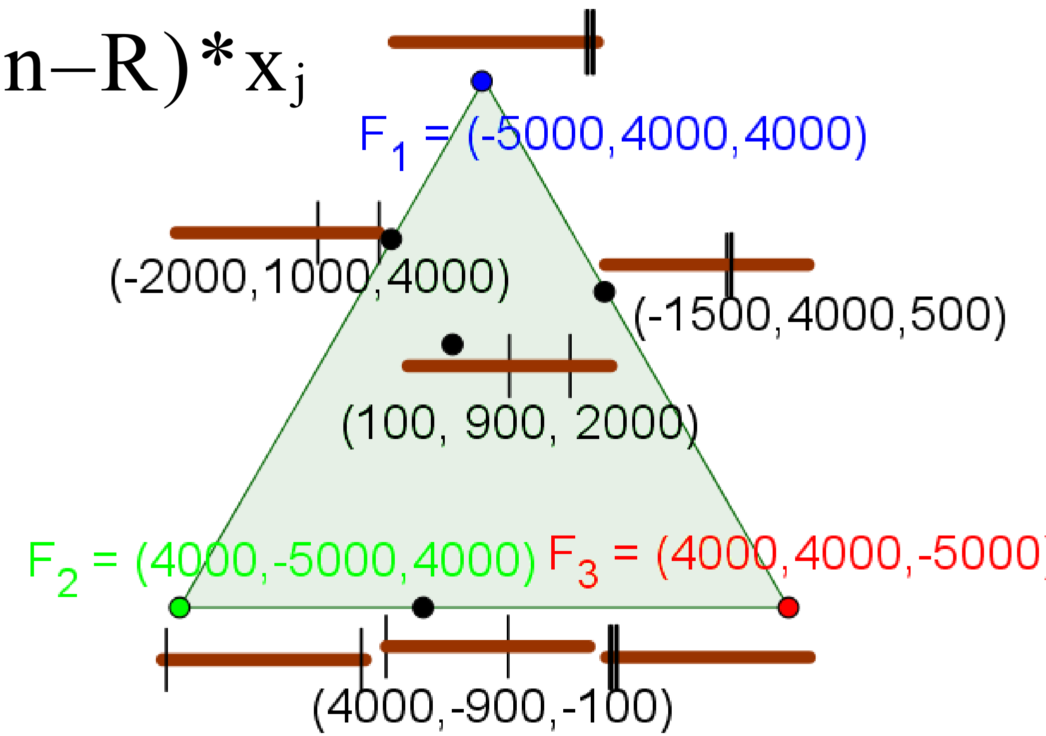
נחלק את סימפלקס התימחורים לסימפלקסונים;

ניתן כל קודקוד לשחקן; נשאל אותו איזה חדר הוא מעדיף בתימחור המתאים לקודקוד.

סימפלקס התימחורים



$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$



המספור המתקבל מקיים את התנאי של ספרנר!

לכן קיים סימפלקסון מגוון.

לכן קיים תימחור שבו (בקירוב) כל שותף רוצה חדר אחר --> תימחור ללא קנאה.

מימוש:

https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

הנחה: כל הדיירים הם קוואזיליניאריים.

הקלט: מטריצה n x n המתארת את ערכי החדרים לכל אחד מהדיירים:

חדר←	3	2	1
דייר 1	v13	v12	v11
דייר 2	v23	v22	v21
דייר 3	v33	v32	v31

הפלט: השמה X, תימחור p.

אין קנאה: לכל שני שחקנים i, j:

$$V_i(X_i) - p(X_i) \geq V_i(X_j) - p(X_j)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 1: *בכל השמה ללא קנאה*, *סכום הערכים* של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה לדיירים קוואזיליניאריים, לכל i:

$$\boldsymbol{V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)}$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum(V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum(V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 2: כל תימחור ללא קנאה יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. לפי המשפט הקודם, X ממקסמת סכום ערכים. תהי Y השמה אחרת הממקסמת סכום ערכים:

$$\sum V_i(X_i) = \sum V_i(Y_i)$$

$$\sum[V_i(X_i)\text{-}P(X_i)] = \sum[V_i(Y_i)\text{-}P(Y_i)]$$

נתון ש-X ללא קנאה. לכן לפי הגדרת קנאה, לכל i:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

לכן חייב להתקיים שיוויון בכל איבר --- לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) = V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

מסקנה: האלגוריתם הבא מוצא חלוקת חדרים ללא קנאה:

- א. מצא חלוקה כלשהי X הממקסמת סכום-ערכים;
- ב. מצא תמחור p שאיתו החלוקה X ללא קנאה.

א. מיקסום סכום הערכים

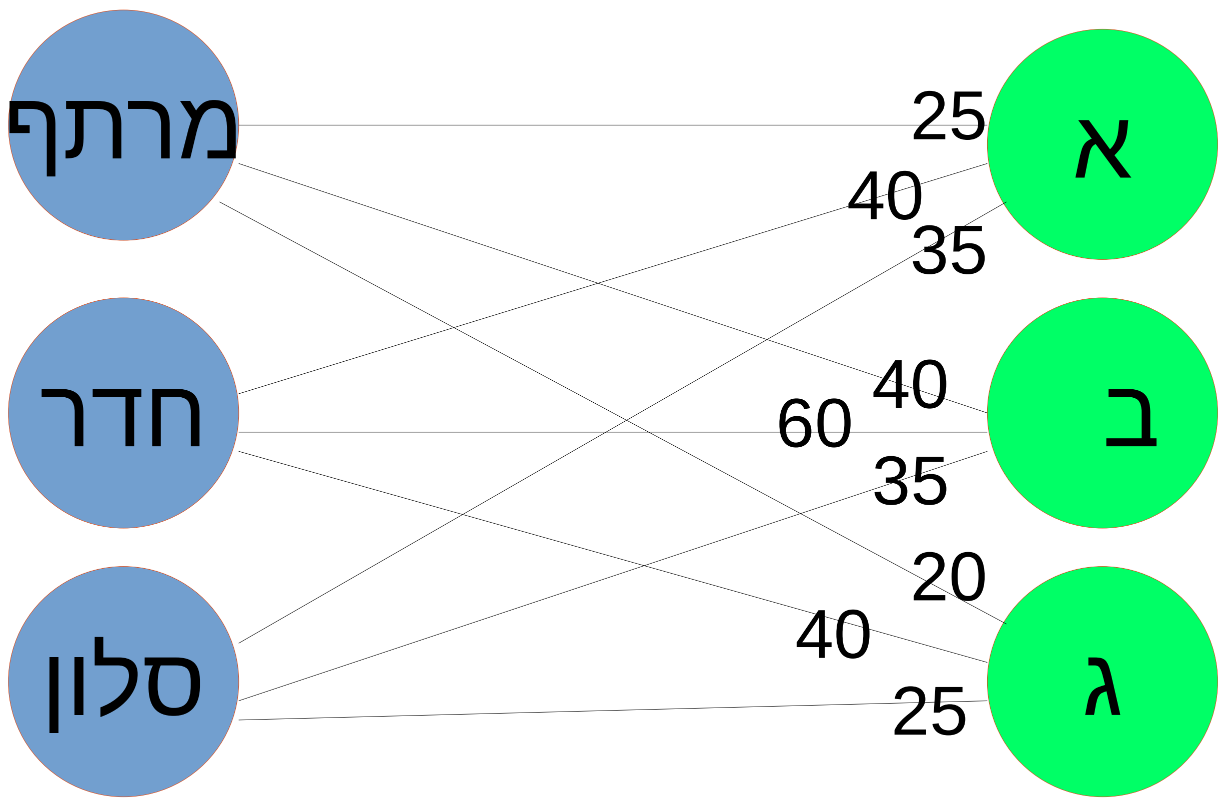
מציאת השמה הממקסמת את סכום הערכים =
מציאת שידוך עם משקל מקסימום בגרף דו-צדדי.

דוגמה:

	מרתף	**חדר**	**סלון**
דייר א	25	40	**35**
דייר ב	40	**60**	35
דייר ג	**20**	40	25

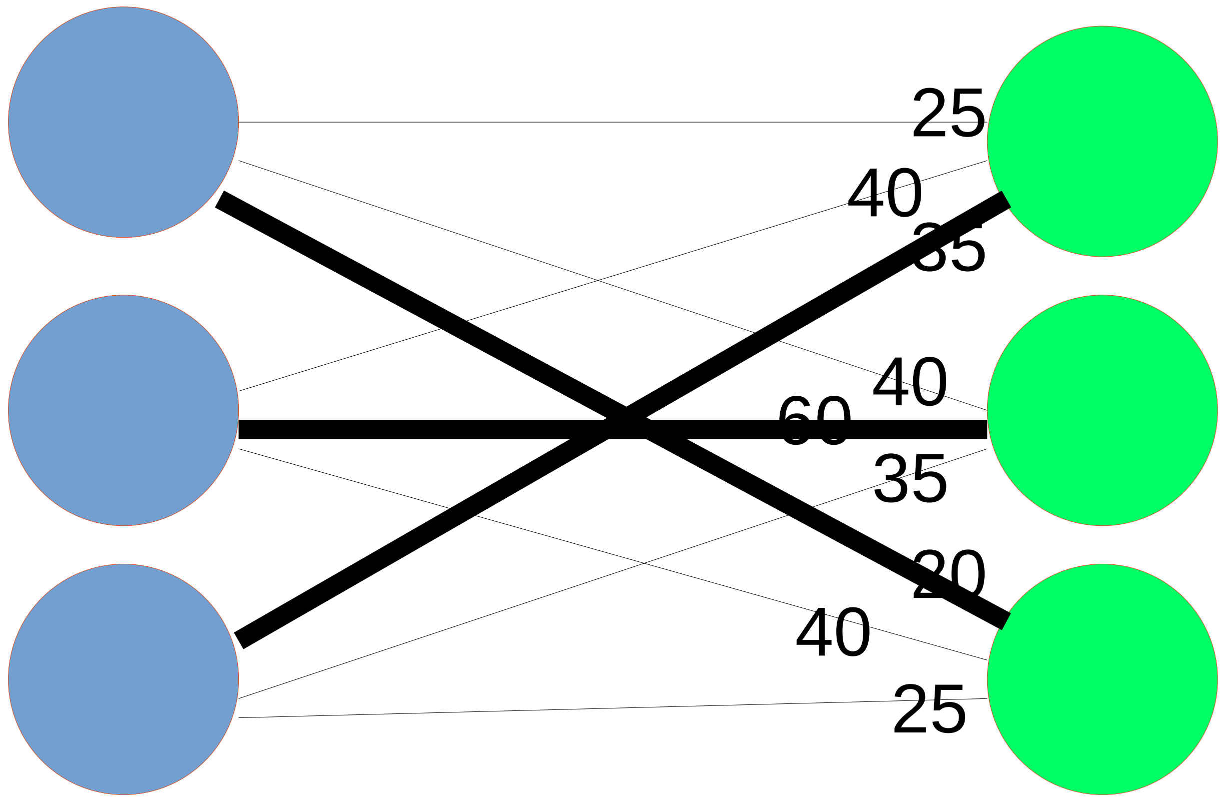
שידוך עם משקל מקסימום

- **הקלט**: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימום

- **הפלט**: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



- **אלגוריתמים**: למשל "האלגוריתם ההונגרי".
- יש מימוש בפייתון בספריה networkx.

ב. קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. **איך?**
- בעיית **תיכנות ליניארי** – **linear programming**.

For all i, j:

$$w[d[i], i] - p[i] \geq w[d[i], j] - p[j]$$

– אפשר לפתור בעזרת cvxpy.