מגיש : נחשון בר- סלע

2.א

יהיו k אנשים ו2 נושאים א ,ב . וסכום כסף C

על פי אלגוריתם הממוצע : לפרוייקט א' ניתן $\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}}{n}$. נסמן זאת כי $A1$.

את היתר $C - A1 = C - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}}{n}$ ניתן לנושא ב' .

נחשב את תועלות השחקן ה-i :

$$U_i(d) = -(|p_{i.1} - d_1| + |p_{i,2} - d_2|) = -(|p_{i,1} - A1| + |(C - p_{i,1}) - (C - A1)|) = -2|p_{i,1} - A1|$$

נניח בשלילה שאכן קיים סכום כסף s שאם נעבירו מנושא א' לנושא ב' נקבל שיפור פארטו .

בהכרח קיים שחקן K כלשהו שרוצה לשלם לנושא א' **יותר** מהממוצע A1 כלומר : $A1 < p_{K,1}$

אם כן **התועלת** שלו כתוצאה מהעברת הזו של s מא' לב' :

$$-(|p_{K.1} - d_1| + |p_{K,2} - d_2|) = -(|p_{K,1} - (A1 - s)| + |(C - p_{K,1}) - (C - A1 + s)| = -(|p_{K,1} - A1 + s| + |A1 - s - p_{K,1}|) = -2|p_{k,1} - A1 + s|$$

מתקיים : $A1 < p_{K,1}$ ולכן :

$$-2|p_{k,1} - A1| > -2|p_{k,1} - A1 + s|$$

$\Leftarrow$ קיבלנו שהתועלת שלו קטנה כתוצאה מכך. סתירה.

כעת נניח בשלילה שאכן קיים סכום כסף s שאם נעבירו מנושא ב' לנושא א' נקבל שיפור פארטו .

בהכרח קיים שחקן R כלשהו שרוצה לשלם לנושא א' **פחות** מהממוצע A1 כלומר : $A1 > p_{R,1}$.

אם כן **התועלת** שלו כתוצאה מהעברת הזו של s מב' לא' :

$$-(|p_{R.1} - d_1| + |p_{R,2} - d_2|) = -(|p_{R,1} - (A1 + s)| + |(C - p_{R,1}) - (C - (A1 + s)| = -(|p_{R,1} - (A1 + s)| + |(A1 + s) - p_{R,1}| = -2(|p_{R,1} - (A1 + s)|$$

מתקיים : $A1 > p_{R,1}$ ולכן :

$$-2|p_{R,1} - A1| > -2|p_{R,1} - A1 - s|$$

קיבלנו שהתועלת שלו קטנה כתוצאה מכך. סתירה.

לסיכום בכל אחת מהאפשריות קיבלנו <u>כי העברת סכום כסף מאגף אחד לשני גוררת שתועלת אחד מהשחקנים נפגעת כתוצאה מכך ביחס לתועלת שלהם שנובעת מאלגוריתם הממוצע</u> ולכן אין שיפור פארטו ולכן אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו על פי הגדרה .

2.ב

הסבר לאלגוריתם לפני שנציג אותו:

ראשית כל נעבור באלגוריתם על כל העדפות המשתתפים ונראה האם מדובר בסיטואציה של חלוקת המשתתפים לk_j אזרחים הרוצים לתת 100 אחוז לנושא j בלבד על ידי כך שנעבור על כל העדפות כל שחקן ונראה האם קיים נושא שבו ההעדפה שלו היא לא C ומצד שני גם לא 0 .

במידה וכן - נחשב את הממוצע המחזיר תקציב הוגן לקבוצות ויעיל פארטו (הוא אכן יעיל פארטו בסיטואציה הזו לסיטואציה המיוחדת הזו ונוכיח זאת) .

במידה ולא - התנאי של הוגן לקבוצות לא רלוונטי שכן הוא מדבר על סיטואציה מאוד ספיציפית(*) של חלוקת משתתפים לk_j אזרחים הרוצים לתת 100 אחוז לנושא j בלבד.

במקרה זה נמצא את התקציב האוטוליטרי בעזרת תכנון לינארי מתאים שממקסם את סכום תועלות האזרחים - נוכיח גם כן שהוא יעיל פארטו.

ננסח אלגוריתם יעיל פארטו והוגן לקבוצות :

$Algo$:

$input$:

$citizens\ 1, 2 ... n$

$subjects\ 1, 2 ... m$

$CitizenPreferencesMatrix$ - מטריצה($i*j$) של העדפות שחקנים

$money\ - C$

.

$FairToGroupsSituation = True$

$budjent = []$

$for\ i\ in\ range(0, n)$:

$for\ j\ to\ range(0, m)$:

$if(CitizenPreferencesMatrix[i][j] \notin \{C, 0\}$:

$FairToGroupsSituation = false$ /// (*) אנחנו לא בסיטואציה

$break$

$if(FairToGroupsSituation)$: /// חישוב אלגו' הממוצע

$sumJ = 0$

$for\ j\ in\ range(0, m)$:

$for\ i\ in\ range(0, n)$

$sumJ += CitizenPreferencesMatrix[i][j]$

$sumJ = sumJ / n;$

$add\ sumj\ to\ budjet$

$return\ budget$

/// חישוב אלגו' המחזיר תקציב אוטוטיליטרי

$if(!FairToGroupsSituation)$:

$Solve\ the\ following\ optimization\ problem\ by\ linear\ programming$:

$input$:

$n\ students\ and\ and\ m\ subjects$.

$for\ each\ i\ and\ j\ define\ p_{i,j}\ as\ The\ amount\ of\ payment\ that\ each\ student$

$i\ would\ like\ to\ pay\ for\ subject\ j$

$linear\ program\ :\ found\ a\ vector\ D(d_1, d_2 ...\ d_m)\ witch\ maximize$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} -|p_{i,j} - d_j|$$

$$S.T :\quad for\ each\ d_j\ :\ d_j\ \leqslant c\ ,\ d_j \geqslant 0\ ,\ \sum_{j=0}^{m} d_j\ =\ C$$

ראשית כל נשים לב כי אלגוריתם הממוצע מקיים כי : $\sum_{i=0}^{n} d_i\ = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_j * C}{n} = \frac{C}{n} \sum_{i=0}^{n} kj\ = C\frac{n}{n} = C$

<u>הוכחה כי אלגו' הממוצע הוא יעיל לקבוצות :</u>

בהינתן m נושאים . n שחקנים שחולקים לK קבוצות שכאלה, סכום הכסף שיקבל כל נושא על פי תקציב הממוצע הוא : $\frac{k_j * C}{n}$(שכן מלבד k_j השחקנים שמצביעים לj -כל היתר לא רוצים לתת לj כסף כלל)

$\Leftarrow$ <u>הוכחנו כי אלגוריתם הממוצע הוא הוגן לקבוצות .</u>

הוכחה כי אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו (*)במקרה של חלוקת המשתתפים לk_j אזרחים הרוצים לתת 100

אחוז לנושא j בלבד :

יהיו נושאים j_1, j_2 לכל סכום כסף eps שנעביר מנושא j_1 לנושא j_2 נקבל כי התועלת של כל שחקן i מקבוצה שתומכת אך ורק בנושא j_1 ירדה ב2eps שכן הוא התועלת שלו קטנה בeps מעצם הוספת הכסף ל j_2 $(p_{i,j2} = 0)$ וכן קטנה בeps מעצם הגדלת התקציב עבור j_1 $(p_{1,j1} = C)$. חישוב :

$$old\ BenifitOfI\ -\ newBenifitOfI\ = -|p_{i,j1} - d_{j1}| - |p_{i,j2} - d_{j2}|\ - (-(|p_{i,j1} - d_{j1} + eps|\ - |p_{i,j2} - d_{j2} - eps$$

$$-|C - d_{j1}|\ - |0 - d_{j2}| + |C - d_{j1}\ + eps| + |0 - d_{j2}\ - eps| =$$

$$-|C - d_{j1}| - |d_{j2}|\ + |C - d_{j1}\ + eps| + |d_{j2} + eps|$$

$$=\ 2eps$$

$$\Downarrow$$

<u>אלגוריתם הממוצע יעיל פארטו במקרים המיוחדים הללו של חלוקת משתתפים לk_j אזרחים הרוצים לתת 100 אחוז לנושא j בלבד .</u>

<u>כעת נשאר להוכיח כי האלגוריתם האוטוליטרי יעיל פארטו.</u>

נניח בשלילה כי קיים לתקציב האוטוליטרי d שיפור פארטו, כלומר תקציב תקציב d_* כך שלכל שחקן i מתקיים : $u_{i(}d) \leqslant u_{i(}d_*)$ וקיים שחקן אחד k שמתקיים עבורו : $u_{k(}d) \leqslant u_{k(}d_*)$.

במקרה כזה מתקיים : $\sum_{i=0}^{n} u_i(d*) \leqslant \sum_{i=0}^{n} u_i(d)$

$$\Downarrow$$

קיבלנו סתירה לכך שd הוא תקציב אוטוליטרי .

מ.ש.ל

.