# חלוקת-תקציב רציפה

בפרק זה נניח, שהתקציב הכולל ניתן לחלוקה בצורה רציפה. ישנם נושאים שונים המועמדים לקבל תקציב ("נושא" יכול להיות ארגון כלשהו המעוניין בתמיכה ממשלתית, או באופן כללי יותר: סעיף תקציבי כלשהו), והמטרה היא להחליט, איזה אחוז מהתקציב הכולל צריך להקצות לכל אחד מהנושאים הללו.

## הגדרת הבעיה

נתונים n אזרחים ו-m נושאים. לכל אזרח i ונושא j, נסמן ב: $u_{i,j}$ את התועלת שאזרח i מייחס לנושא j. לשם פשטות, אנחנו מניחים שהתועלות הן בינאריות – 0 או 1. המשמעות היא, שכל אזרח צריך רק לסמן "וי" ליד הנושאים שהוא תומך בהם. עקרונית, אפשר לאפשר הצבעות מפורטות יותר, כגון: שכל אזרח יוכל לדרג את כל הנושאים לפי סדר חשיבות, או להגיד כמה תקציב בדיוק הוא חושב שצריך להעביר לכל נושא. אבל כשמספר הנושאים גדול מאד, הצבעה מפורטת כזו עלולה להיות קשה מבחינה מנטלית וטכנית. לכן בשלב זה נסתפק בהצבעות בינאריות (באנגלית: approval voting).

הפלט הדרוש הוא חלוקה של התקציב בין הנושאים השונים. פורמלית, הפלט הוא וקטור d באורך m, שבו כל הערכים לפחות אפס, וסכומם שווה לתקציב הכולל ($d_1+...+d_m=C$, כאשר C הוא התקציב הכולל). לכל נושא j, המספר $d_j$ מציין את התקציב שמקבל נושא j.

אנחנו מניחים שהתועלת, שכל אזרח מפיק מוקטור d מסויים, שווה לסכום התקציב המועבר לנושאים שהוא תומך בהם:

$u_i(d) = \text{sum}[j]\ u_{i,j} * d_j.$

לדוגמה, נניח שהעיריה מעוניינת להעביר תקציב לשלושה נושאים: מועדון שחמט, מגרש כדורסל, וספריה. אם עמי תומך בשחמט וכדורסל, והתקציב נותן 1000 לשחמט, 2000 לכדורסל ו-4000 לספריה, אז התועלת של עמי היא 3000.

## הגינות

אנחנו רוצים שהתקציב יהיה הוגן. אבל מה זה בדיוק תקציב הוגן?

- תכונה אחת של הגינות, שאנחנו כבר מכירים, היא פרופורציונליות: התועלת של כל אזרח היא לפחות 1 חלקי n מהתועלת הכללית. כלומר: לכל אזרח i, התקציב הכולל המועבר לנושאים שהוא תומך בהם צריך להיות לפחות C/n. בהקשר של חלוקת תקציב, תכונה זו ידועה גם בשם חלק הוגן ליחידים (Individual Fair-Share).

התכונה הזאת הכרחית, אבל אינה מספיקה. לדוגמה, נניח שיש n=100 אזרחים. מתוכם, 99 אזרחים תומכים בנושא א, ואזרח אחד תומך בנושא ב. התקציב הנותן 1% לנושא א ו-99% לנושא ב הוא פרופורציונלי, אבל בבירור לא הוגן – ההגינות מחייבת לתת חלק גדול יותר מהתקציב לקבוצה הגדולה יותר.

תכונת-הגינות בסיסית, המתייחסת גם לקבוצות, היא: לכל קבוצת-אזרחים K בגודל k, שהדעות שלהם זהות (= הם תומכים באותם נושאים), יש לתת לפחות k/n מהתקציב לנושאים הנתמכים על-ידי חברי

הקבוצה K. תכונה זו נקראת חלק-הוגן לקבוצות אחידות (Unanimous Fair-Share). גם זו תכונה הכרחית, אבל אינה מספיקה, כי היא מתייחסת רק למקרה נדיר שבו לאזרחים יש דעות זהות לגמרי – היא אינה אומרת שום דבר על המקרה הכללי.

הכללה אפשרית של תכונה זו היא **חלק-הוגן לקבוצות** (Group Fair-Share), המוגדרת באופן הבא. לכל קבוצת-אזרחים K בגודל k, יש לתת לפחות k/n מהתקציב לנושאים, שלפחות אחד מחברי-הקבוצה K תומך בהם. ניתן להוכיח, ששתי התכונות הקודמות – חלק-הוגן ליחידים וחלק-הוגן לקבוצות אחידות - נובעות מתכונה זו.

[הכללה אחרת היא: חלק-הוגן ממוצע (Average Fair-Share), המוגדרת באופן הבא: בכל קבוצת-אזרחים K בגודל k, המסכימים על נושא אחד לפחות – התועלת הממוצעת של חברי-הקבוצה היא לפחות kC/n. גם כאן ניתן להוכיח, ששתי התכונות הקודמות – חלק-הוגן ליחידים וחלק-הוגן לקבוצות אחידות - נובעות מתכונה זו].

האם תמיד קיים תקציב הנותן חלק-הוגן לקבוצות? - התשובה היא כן, קל מאד למצוא תקציב כזה: נותנים לכל אזרח C/n שקלים, ואומרים לו לפזר את החלק שלו באופן כלשהו בין הנושאים שהוא תומך בהם. אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה "תקצוב אנארכי" – כל אחד עושה מה שהוא רוצה, ללא תיאום. אבל זה עלול להיות מאד לא יעיל – כמו שנראה מייד.

## יעילות

תקציב d נקרא יעיל פארטו אם לא קיים תקציב אחר, הנותן לכל האזרחים תועלת גדולה באותה מידה, ונותן לאזרח אחד לפחות תועלת גדולה יותר.

לשם דוגמה, נניח שבעיר מסויימת ישנם שלושה מבנים – מגרש כדורסל, מועדון שחמט, וספריה ציבורית. התחזוקה של כל אחד מהמבנים האלה, לשעה יומית, עולה 1000 ש"ח לחודש. התקציב הכולל הוא 6000, ולשם פשטות נניח שיש רק שני אזרחים – עמי ותמי. עמי מעדיף בילויים תחרותיים (כדורסל או שחמט), ותמי מעדיפה בילויים במקומות סגורים (שחמט או ספריה).

אם כל אחד מהם יתרום את החלק היחסי שלו (3000) ללא תיאום, מסתבר שכל אחד יתרום כמות שווה לכל מקום שהוא רוצה לתמוך בו, והתוצאה תהיה: כדורסל = 1.5 שעות ביום, שחמט = 3 שעות ביום, ספריה = 1.5 שעות ביום. כתוצאה מכך, לכל אחד מהאזרחים יהיו 4.5 שעות בילוי ביום (1.5+3). זה כמובן טוב יותר ממה שכל אחד מהם יכל להשיג לבד עם 3000 ש"ח, אבל זה לא אופטימלי. יש אפשרות טובה יותר. האם יש לכם רעיון מהי?

- תשובה: אם גם עמי וגם תמי יתרמו למועדון השחמט, אז יהיה אפשר להפעיל אותו 6 שעות ביום, ואז התועלת של שניהם תהיה 6 – כלומר יש כאן שיפור פארטו חזק לעומת המצב שבו כל אחד תורם לבד.

האם קיים אלגוריתם יעיל-פארטו לחלוקת תקציב? כמובן: כל אלגוריתם, הממקסם פונקציה עולה כלשהי של הערכים, הוא יעיל-פארטו. לדוגמה, **האלגוריתם האוטיליטרי** (utilitarian) מחשב וקטור d שעבורו סכום התועלת של כל האזרחים הוא הגדול ביותר:

max[d] sum[i] $u_i$(d).

איך מוצאים את d הזה? - זה קל: מעבירים את כל התקציב C רק לנושאים, שמספר התומכים בהם הוא הגדול ביותר (אם יש כמה נושאים כאלה, אז מחלקים את התקציב ביניהם באופן שרירותי, או שווה בשווה). במקרה הקיצוני, אם יש נושא אחד שתומכים בו, נניח, 1000 אזרחים, ובשאר הנושאים תומכים 999 אזרחים או פחות, אז האלגוריתם האוטיליטרי ייתן את כל התקציב לנושא זה, כי כל שקל שמשקיעים

בנושא זה מגדיל את סכום התועלות ב-1000, וכל שקל שמשקיעים בנושא אחר מגדיל את סכום התועלות בפחות מ-1000. האלגוריתם הזה יעיל, אבל אינו הוגן אפילו ליחידים.

## פריקות

כדי למצוא תקציב הוגן שהוא גם יעיל, נשתמש בהגדרה הבאה (בהמשך נראה מה הקשר).

**הגדרה**. וקטור-תקציב d נקרא פָּרִיק (באנגלית: decomposable), אם ניתן לבצע אותו באופן הבא: נותנים C/n לכל אזרח, ואומרים לו כמה בדיוק להעביר לכל אחד מהנושאים שהוא תומך בהם, כך שסכום ההעברות שווה בדיוק לווקטור d. הגדרה שקולה: תקציב פריק הוא תקציב שניתן להציג ע"י מספרים $d_{i,j}$ כך ש:

- For every j in 1,…,m:     Sum[i=1,…,n]$d_{i,j}$ = $d_j$ ;
- For every i in 1,…,n:     Sum[j=1,…,m]$d_{i,j}$ = C/n ;
- For every i, j:  $d_{i,j}$ > 0  only if $u_{i,j}$ > 0  .

**משפט**. תקציב d נותן חלק-הוגן לקבוצות, אם-ורק-אם הוא פריק.

הוכחה. כיוון אחד קל: אם d הוא פריק, אז הפירוק שלו נותן לכל קבוצה בגודל k בדיוק kC/n, והכסף מחולק בין הנושאים שחברי הקבוצה תומכים בהם, ולכן התקציב נותן חלק-הוגן לקבוצות.

להוכחת הכיוון השני, נבנה רשת זרימה המייצגת את התקציב. רשת זרימה (flow network) היא גרף מכוון, עם צומת מקור המסומן ב-*s*, וצומת יעד המסומן ב-*t*. לכל קשת יש מספר חיובי המציין את הקיבולת שלה. הזרם יוצא מהמקור s ומתפצל בין הקשתות, כך שהזרם העובר בכל קשת קטן או שווה לקיבולת שלה.סכום הזרם הנכנס לכל צומת (פרט ל-s ו-t) חייב להיות שווה לסכום הזרם היוצא ממנה. בהינתן תקציב כלשהו d, נבנה רשת-זרימה באופן הבא:

- כל אחד מהאזרחים i הוא צומת. יש קשת מכוונת מהמקור s אל כל אזרח i; קיבולת הקשת היא C/n – החלק ההוגן של שחקן i.
- כל אחד מהנושאים j הוא צומת. יש קשת מכוונת מכל אזרח i אל כל נושא j שהוא תומך בו ($u_{i,j}$=1); קיבולת הקשת היא C/n.
- יש קשת מכוונת מכל נושא j אל היעד t; קיבולת הקשת היא $d_j$.

אם בגרף זה קיימת זרימה, שגודלה הכולל הוא C (הגודל המירבי האפשרי), אז התקציב d הוא פריק, כאשר כמות הזרם העובר על כל קשת מאזרח i לנושא j הוא הרכיב $d_{i,j}$ בפירוק.

הוכחה: גודל הזרימה הוא C, ולכן גודל הזרימה על כל קשת מהמקור לאזרח כלשהו חייב להיות C/n. מתכונות הזרימה בצמתים של האזרחים נובע: Sum[j]$d_{i,j}$ = C/n . מתכונות הזרימה בצמתים של הנושאים נובע: Sum[i]$d_{i,j}$ = $d_j$. לכן הזרימה אכן מייצגת פירוק של התקציב d. **

כדי להוכיח שקיימת זרימה שגודלה הכולל הוא C, נשתמש במשפט ידוע מתורת הגרפים: משפט זרימה-מקסימלית-חתך-מינימלי (max-flow-min-cut). המשפט אומר, שגודל הזרימה המקסימלי ברשת שווה לגודל החתך המינימלי. חתך ברשת זרימה הוא חלוקה של הצמתים לשתי קבוצות, קבוצה א כוללת את המקור וקבוצה ב כוללת את היעד. גודל החתך הוא סכום הקיבולות של הקשתות העוברות מצומת בקבוצה א לצומת בקבוצה ב. המשפט אומר, שגודל החתך הקטן ביותר שווה לגודל הזרימה

הגדולה ביותר. לכן, כדי להוכיח שקיימת זרימה בגודל C, נוכיח, שכאשר התקציב הוא הוגן לקבוצות, גודלו של כל חתך ברשת הוא לפחות C. בהינתן חתך כלשהו, נחלק את האזרחים לשלושה סוגים:

- אזרחים בקבוצה א, התומכים רק בנושאים מקבוצה א; נסמן את מספרם ב: $a_1$.
- אזרחים בקבוצה א, התומכים בנושא אחד לפחות מהנושאים בקבוצה ב; נסמן את מספרם ב: $a_2$.
- אזרחים בקבוצה ב; נסמן את מספרים ב: b.

כל חתך כולל קשתות מכמה סוגים:

- קשתות מהמקור אל האזרחים בקבוצה ב; הקיבולת הכוללת שלהן היא $bC/n$.
- קשתות מהאזרחים בקבוצה א אל הנושאים בקבוצה ב; הקיבולת הכוללת שלהן לפחות $a_2C/n$.
- קשתות מנושאים בקבוצה א אל היעד. הקיבולת הכוללת שלהן שווה לתקציב הכולל המועבר לנושאים בקבוצה א. כיוון שהתקציב d הוא הוגן לקבוצות, הוא חייב לתת לאזרחים בקבוצה א, התומכים רק בנושאים מקבוצה א, תקציב כולל לפחות $a_1C/n$. לכן הקיבולת הכוללת של קשתות אלו היא לפחות $a_1C/n$.

כשמחברים את כל הקיבולות, מקבלים:

$$bC/n + a_2C/n + a_1C/n = nC/n = C.$$

לכן גודל החתך המינימלי לפחות C, ולכן קיימת זרימה בגודל C. ***

יתרון גדול של תקציב פריק הוא שקיפות – כל אזרח יכול לוודא, שהחלק שלו בתקציב אכן מועבר לנושאים שהוא תומך בהם. זו סיבה נוספת לדרוש, שאלגוריתם חלוקת-התקציב שלנו ייתן חלק-הוגן לקבוצות.

## הגינות ויעילות

האם קיים אלגוריתם לחלוקת תקציב, שהוא גם הוגן לקבוצות וגם יעיל פארטו? התשובה היא כן. האלגוריתם נקרא על-שם ג'ון נאש (Nash), שחשב על הרעיון לראשונה בהקשר אחר. אלגוריתם נאש מוצא וקטור-תקציב הממקסם את מכפלת התועלות של כל האזרחים. באותיות:

$$\max[d]\ \text{product}[i]\ u_i(d).$$

כידוע, סכום של לוגריתמים שווה לוגריתם של המכפלה; לכן, דרך שקולה לתאר את אלגוריתם נאש היא: מיקסום סכום הלוגריתמים של התועלות:

$$\max[d]\ \text{sum}[i]\ \log(u_i(d)).$$

מיקסום סכום של לוגריתמים הוא בעיית אופטימיזציה קמורה, ולכן ניתן לפתור אותה ביעילות, למשל בעזרת הספריה cvxpy; ראו דוגמה בתיקיית הקוד.

תקציב הממקסם את סכום הלוגריתמים הוא כמובן יעיל-פארטו – כל מצב הממקסם סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים הוא יעיל-פארטו (הוכחנו בשיעור 2). לפני שנוכיח שהוא הוגן, נדגים את האלגוריתמים שראינו עד כה על מצב שבו יש 4 נושאים ו-5 אזרחים, התקציב הכולל הוא 500, והאזרחים תומכים בנושאים הבאים: **אב**, **אג**, **אד**, **בג**, **א**.

- התקציב ה"אנארכי" (ללא תיאום), כשכל אזרח מחלק את החלק שלו שווה בשווה בין הנושאים שהוא תומך בהם, הוא: (250, 100, 100, 50). הוא הוגן לקבוצות, כי הוא פריק, אבל אינו יעיל. למשל, אם נעביר את ה-50 מנושא ד לנושא א, התועלת של אזרחים 1, 2, 5 תגדל, והתועלת של אזרחים 3, 4 לא תשתנה.
- התקציב האוטיליטרי הוא: (500, 0, 0, 0) – כי הכי הרבה אזרחים תומכים בנושא א. הוא יעיל פארטו, אבל אינו הוגן.
- התקציב הממקסם את מכפלת הערכים הוא (לפי הקוד): (370, 65, 65, 0). הוא יעיל פארטו כי הוא ממקסם פונקציה עולה. כדי לראות שהוא הוגן לקבוצות, נראה שהוא פריק. ניתן לפרק אותו באופן הבא:
  - אזרח 1 נותן 85 לנושא א ו-15 לנושא ב.
  - אזרח 2 נותן 85 לנושא א ו-15 לנושא ג.
  - אזרח 3 נותן 100 לנושא א.
  - אזרח 4 נותן 50 לנושא ב ו-50 לנושא ג.
  - אזרח 5 נותן 100 לנושא א.
- ניתן לראות, שסכום כל ההעברות שווה בדיוק לתקציב (370, 65, 65, 0), לכן התקציב פריק, ולכן הוא הוגן לקבוצות.

עכשיו נוכיח שזה נכון באופן כללי.

**משפט**. כל תקציב הממקסם את סכום הלוגריתמים הוא פריק (ולכן גם נותן חלק-הוגן לקבוצות).

הוכחה. נניח שהתקציב d ממקסם את סכום הלוגריתמים. משמעות הדבר היא, שכל העברה של כסף מנושא כלשהו לנושא אחר, לא תגדיל את סכום הלוגריתמים. נניח שאנחנו מעבירים סכום אינפיניטיסימלי לנושא x. התרומה השולית של סכום-כסף זה לתועלת של כל שחקן i היא $u_{i,x}$ (תועלת ליחידת כסף). התרומה השולית שלו לפונקציה f של התועלת נתונה ע"י הנגזרת: $u_{i,x}*f'(u_i)$.

מאד (e, אפסילון) מנושא 1 לנושא 2. נסמן את התקציב החדש ב: d'. השינוי בתועלת של כל שחקן i הוא:

$$u_i(d')-u_i(d) = e*(u_{i,2}-u_{i,1})$$

השינוי בפונקציה כלשהי f של התועלת שווה בקירוב, כאשר e מספיק קטן, לשינוי בתועלת כפול הנגזרת:

$$f(u_i(d'))-f(u_i(d)) \sim e*(u_{i,2}-u_{i,1})*f'(u_i(d))$$

בפרט, כאשר f היא לוגריתם:

$$\log(u_i(d'))-\log(u_i(d)) \sim e*(u_{i,2}-u_{i,1})/u_i(d)$$

מכאן, שהשינוי בסכום הלוגריתמים הוא:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sum}[i]\ e*(u_{i,2}-u_{i,1})/u_i(d)\\ =\ & e * [\ \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,2}/u_i(d) - \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,1}/u_i(d)].\end{aligned}$$

כאמור, כיוון ש-d ממקסם את סכום הלוגריתמים, השינוי חייב להיות קטן או שווה 0. הדבר נכון גם אם הופכים את התפקיד של הנושאים 1,2, ולכן חייב להתקיים שיוויון:

$$\mathrm{Sum}[i]\ u_{i,2}/u_i(d) = \mathrm{Sum}[i]\ u_{i,1}/u_i(d)$$

הדבר נכון לכל שני נושאים 1,2. מכאן, שלכל נושא j, הביטוי הבא הוא קבוע שאינו תלוי ב-j; נסמנו באות Z:

$$\text{Sum}[i]\ u_{i,j}/u_i(d) = Z$$

עכשיו נראה איך בדיוק אפשר לפרק את התקציב d. נסמן:

$$d_{i,j} := (C/n)*(d_j*u_{i,j}/u_i(d))$$

נראה שמתקיימת ההגדרה של פירוק.

א. לכל שחקן i, מתקיים:

$$\text{Sum}[j]d_{i,j} = (C/n) * \text{Sum}[j](d_j*u_{i,j}) * (1/u_i(d))$$

$$= (C/n) * u_i(d) * (1/u_i(d)) = C/n.$$

ב. לכל נושא j, מתקיים:

$$\text{Sum}[i]d_{i,j} = (C/n) * (d_j) * (\text{Sum}[i]\ u_{i,j}/u_i(d))$$

$$= (C/n) * (d_j) * Z$$

אם נסכם את הביטוי הזה על כל הנושאים j נקבל:

$$\text{Sum}[i,j]d_{i,j} = (C/n) * \text{Sum}[j](d_j) * Z = (C/n) * C * Z$$

כי סכום כל סעיפי התקציב הוא בדיוק C. אבל לפי סעיף א למעלה:

$$\text{Sum}[i,j]d_{i,j} = \text{Sum}[i]\ (C/n) = C$$

מכאן ניתן להסיק ש: $Z = n/C$, ולכן:

$$\text{Sum}[i]d_{i,j} = d_j.$$

ג. לכל i,j מתקיים:

$$d_{i,j} > 0 \text{ only if } u_{i,j} > 0 .$$

הראינו פירוק של התקציב, מכאן שהתקציב פריק, ומכאן שהוא הוגן לקבוצות. ***

## גילוי אמת

בנוסף להגינות ויעילות, אנחנו רוצים שהאלגוריתם יהיה מגלה-אמת (truthful), כלומר: לכל אזרח i כדאי לגלות את הקבוצה האמיתית $A_i$ של נושאים תומך בהם, לא משנה מה אומרים האזרחים האחרים. תכונה זו תבטיח שהאזרחים יוכלו להשתתף באלגוריתם בלי לבזבז אנרגיה על שיקולים אסטרטגיים.

האלגוריתם האנארכי הוא כמובן מגלה-אמת, שהרי כל אזרח מחלק את החלק שלו איך שהוא רוצה.

**משפט.** האלגוריתם האוטיליטרי מגלה-אמת.

הוכחה. צריך להוכיח, שאזרח $i$ המשנה את הקבוצה $A_i$ שלו, אינו מגדיל את התועלת שלו, כלומר אינו מגדיל את התקציב המועבר לנושאים בקבוצה $A_i$ המקורית שלו. נבדוק שני מקרים: (א) האזרח מסתיר נושא מסויים הנמצא ב-$A_i$. כתוצאה מכך, מספר התומכים של נושא זה קטֵן ב-1, ומספר התומכים של שאר הנושאים ב-$A_i$ לא משתנה. האלגוריתם האוטיליטרי מעביר תקציב רק לנושאים עם מספר תומכים מקסימלי. לכן, אם נושא מסויים ב-$A_i$ לא היה מקסימלי קודם, אז הוא לא יהיה מקסימלי גם אחרי ההפחתה. (ב) האזרח מוסיף נושא מסויים שאינו נמצא ב-$A_i$ האמיתי. כתוצאה מכך, מספר התומכים של אותו נושא (שהאזרח לא באמת תומך בו) גדל ב-1. לכן, שוב, אם נושא מסויים ב-$A_i$ המקורי לא היה מקסימלי קודם אז הוא לא יהיה מקסימלי גם אחרי ההוספה של נושא לא-אמיתי. ***

**משפט.** אלגוריתם נאש אינו מגלה-אמת.

הוכחה. חישבנו קודם, שאם ההצבעות הן **אב, אג, אד, בג, א**, אז התקציב הממקסם-מכפלה הוא (370, 65, 65, 0). עכשיו נחשב את התקציב הממקסם-מכפלה בדוגמה שניה: **בד, אג, אד, בג, א.** התוצאה היא: (300, 200, 0, 0).

נניח שהקלט האמיתי הוא כמו בדוגמה הראשונה, אבל אזרח 1 מחליט, במקום להגיד **אב,** להגיד **בד**, כמו בדוגמה השניה. אז אזרח 1 מרויח – כשהוא אומר אמת (אב) התועלת שלו היא 370+65=435, וכשהוא אומר לא-אמת (בד) התועלת האמיתית שלו (סכום הכסף המושקע בנושאים שהוא באמת תומך בהם – א +ב) היא 200+300=500. ***

## טרילמה

האם אפשר להשיג בו-זמנית את כל שלוש התכונות – הגינות, יעילות-פארטו, וגילוי-אמת? התשובה היא לא! ההוכחה לכך נמצאה ע"י תוכנת מחשב להוכחות אוטומטיות (ראו במאמר). ההוכחה מאד מסובכת, וכנראה לא היה אפשר למצוא אותה באופן ידני. אבל מתוך ניתוח הפלט של התוכנה, אפשר להוכיח משפט קצת יותר חלש.

**משפט.** לא קיים אלגוריתם המקיים בו-זמנית את התכונות הבאות:

- יעיל-פארטו;
- מגלה-אמת;
- הוגן – אפילו ליחידים;
- אנונימי - לא מושפע משינוי הסדר בין האזרחים (כל האלגוריתמים שראינו למעלה הם אנונימיים – הם מתייחסים רק לקבוצות הנושאים הרצויים ולא לסדר שבו מכניסים את הקלט לאלגוריתם. דוגמה לאלגוריתם לא אנונימי שכבר ראינו: "חתוך ובחר" – התוצאה מושפעת משינוי סדר המשתתפים. דוגמה לאלגוריתם אנונימי לחלוקת עוגה: אבן-פז).
- נייטרלי – לא מושפע משינוי הסדר בין הנושאים (כל האלגוריתמים שראינו למעלה הם נייטרליים – הם מתייחסים רק לקבוצת התומכים בכל נושא, ולא לסדר בין הנושאים).

הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה, ונבדוק מה אמור להיות הפלט שלו על הקלט של הדוגמה מלמעלה:

**אב, אג, אד, בג, א.**

בקלט המקורי, הנושאים **ב,ג** הם סימטריים לחלוטין: כל אחד מהם מופיע פעם אחת עם נושא א, ועוד פעם אחת הם מופיעים יחד. כיוון שהאלגוריתם הוא נייטרלי ואנונימי, הוא חייב לתת לשניהם אותו סכום. והסכום הזה חייב להיות חיובי, כי האזרח הרביעי תומך רק בנושאים אלה, והוא חייב לקבל תועלת חיובית.

עכשיו נניח שהאזרח הראשון, במקום להגיד אב, אומר בד. אז הקלט הופך להיות:

**בד, אג, אד, בג, א.**

מה יחזיר האלגוריתם שלנו על הקלט החדש? בקלט החדש, הנושאים **ג,ד** הם סימטרים (שניהם מופיעים פעם אחת עם ב ופעם אחת עם א), ולכן האלגוריתם חייב לתת להם אותו סכום. עכשיו יש שני מקרים:

- מקרה ראשון: האלגוריתם נותן לנושאים ג, ד סכום אפס. כלומר הוא מחלק את כל הכסף בין נושאים א,ב. במקרה זה, האזרח הראשון מרויח מאי-גילוי-אמת! כי בקלט המקורי (האמיתי) חלק מהכסף הלך לנושא ג שהוא לא תומך בו, ובקלט החדש (הלא-אמיתי) כל הכסף הולך רק לנושאים א,ב שהוא תומך בהם.
- מקרה שני: האלגוריתם נותן לנושאים ג, ד סכום חיובי ממש (וזהה). במקרה זה, התוצאה אינה יעילה פארטו: אפשר להעביר את כל הסכום מנושא ג לנושא א, ומנושא ד לנושא ב. זה שיפור פארטו: לארבעת האזרחים הראשונים זה לא משנה (כי כל אחד מהם תומך בנושא אחד מבין א,ב ובנושא אחד מבין ג,ד), אבל האזרח החמישי מרויח.

הגענו לסתירה: או שהאלגוריתם אינו מגלה-אמת, או שאינו יעיל פארטו. ***

שוב הגענו למצב המוכר של טרילמה – שלוש תכונות רצויות, שאפשר להשיג רק שתיים מתוכן.

## יעילות יחסית

פתרון אפשרי לטרילמה הוא להחליש מעט את דרישת היעילות. במקום לחפש תקציב, שאין לו שיפור-פארטו בכלל, נחפש תקציב, שאין לו שיפור-פארטו שהוא פריק. ההגיון בדרישה זו: אם פריקות (השקולה לעקרונות חשובים כמו שקיפות והגינות) היא תנאי הכרחי, אז תקציבים שאינם פריקים, אינם באים כלל בחשבון, ולכן תכונת היעילות צריכה להיבדק לפי התקציבים הפריקים בלבד.

האלגוריתם **האוטיליטרי-על-תנאי** (conditioned utilitarian). מחשב וקטור, שבו סכום התועלות הוא הגדול ביותר תחת האילוץ שכל אזרח תורם רק לנושאים שהוא תומך בהם. איך מוצאים אותו? - אומרים לכל אזרח i להשקיע את כל החלק שלו בתקציב בנושאים, שמספר התומכים בהם הוא הגדול ביותר, מבין הנושאים שהוא תומך בהם. לדוגמה, אם תמי תומכת במועדון שחמט ובספריה, אבל יש עוד 10 אזרחים התומכים בשחמט ועוד 20 אנשים התומכים בספריה, אז האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי יגיד לתמי להשקיע את כל התקציב שלה בספריה.

בדוגמה למעלה, **אב, אג, אד, בג, א** האלגוריתם נותן את כל כספם של האזרחים התומכים ב-א לנושא א, ואת הכסף של האזרח הרביעי מחלק בין ב לבין ג, ווקטור התקציב הוא **(400, 50, 50, 0).**

בדוגמה השניה, **בד, אג, אד, בג, א,** לנושא א יש שלושה תומכים, ולכן האלגוריתם אומר לכל אזרח שתומך בו לתת לו את כל כספו. לנושאים ב, ג, ד יש שני תומכים, ולכן האלגוריתם אומר לשאר האזרחים לחלק את התרומה שלהם ביניהם. וקטור התקציב המתקבל הוא **(300, 100, 50, 50).**

**משפט**. האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי הוא הוגן-לקבוצות, מגלה-אמת, ומחזיר תקציב יעיל-פארטו בקבוצת התקציבים הפריקים.

הוכחה. מתוך ההגדרה ברור, שהאלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי הוא פריק, ולכן הוגן לקבוצות.

ההוכחה שהוא מגלה-אמת דומה להוכחה של המשפט המקבל לגבי האלגוריתם האוטיליטרי.

התקציב יעיל-פארטו בקבוצות התקציבים הפריקים, כיוון שהוא ממקסם את סכום הערכים בקבוצת התקציבים הפריקים – החלק של כל אזרח מושקע בצורה הממקסמת את סכום הערכים תחת האילוץ שכל הכסף מגיע לנושאים שהוא תומך בהם. ***

בהתאם למשפט ה"טרילמה" שהוכחנו למעלה, האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי אינו יעיל-פארטו בקבוצת כל התקציבים. בדוגמה השניה, וקטור התועלות הוא: [150, 350, 350, 150, 300]. אפשר להשיג שיפור-פארטו ע"י העברת 50 מ-ג ל-א והעברת 50 מ-ד ל-ב. מתקבל וקטור-תקציב **(350, 150, 0, 0)** עם וקטור תועלות: [150, 350, 350, 150, 350] – האזרח החמישי מרויח ואף אחד אינו מפסיד.

# הרחבות

א. הנחנו שלכל האזרחים יש אותו חלק הוגן: C/n. אפשר בקלות להרחיב את התוצאות למצב שבו לכל אזרח יש חלק הוגן אחר. לדוגמה, באיטליה מותר לכל אזרח להעביר 0.5% מתשלומי-המיסים שלו לארגוני צדקה לפי בחירתו; הסכום משתנה מאזרח לאזרח בהתאם לכמות המיסים שהוא משלם.

ב. מעבר לזה: אפשר לחשוב על עולם עתידי, שבו בכלל לא ייגבו מיסים בכפיה, אלא כל התקציב יסתמך על תרומות, וכל אזרח יחליט אם וכמה הוא רוצה לתרום. במצב כזה דרושה תכונה נוספת, מעבר לתכונות שראינו כאן: עידוד תרומה. משמעות התכונה היא, שהתועלת של כל אזרח, כאשר הוא תורם דרך המערכת, גדולה לפחות כמו התועלת שלו כאשר הוא מעביר את התרומה שלו באופן עצמאי לנושאים שהוא תומך בהם. תכונה זו כמובן חזקה יותר מהתכונה של חלק-הוגן ליחידים (אבל לא חזקה/חלשה יותר מהתכונה של חלק-הוגן לקבוצות). ניתן להוכיח, שהאלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי מעודד תרומות, וכן גם האלגוריתם של נאש.

ג. הנחנו שפונקציית התועלת היא חיבורית – התועלת שכל אזרח מפיק מהתקציב שווה לסכום ההעברות לנושאים שהוא תומך בהם. ניזכר בדוגמה הראשונה: התקציב הכולל הוא 6000, יש שני אזרחים, עמי אוהב כדורסל ושחמט, ותמי אוהבת שחמט וספריה. כשאין תיאום, התקציב הוא 1500,3000,1500, והתועלת של כל אזרח היא 1500+3000. כשיש תיאום, התקציב הוא 0,6000,0, והתועלת של כל אזרח היא 6000+0.

היה אפשר להניח הנחות אחרות. למשל, נניח שהתועלת שכל אזרח מפיק מהתקציב שווה למינימום ההעברות לנושאים שהוא תומך בהם (אנשים אוהבים לגוון – כמה כבר אפשר לשחק שחמט?). במקרה זה, כאשר אין תיאום, התועלת של כל אזרח שווה ל 1500 (מינימום בין 1500 ל-3000). כשיש תיאום, התיאום כאן יתבצע בצורה שונה: החלק של עמי יחולק כ: 2000 לכדורסל ו-1000 לשחמט, והחלק של תמי יחולק כ: 1000 לשחמט ו-2000 לספריה. התקציב הכולל יהיה 2000,2000,2000, והתועלת של כל אזרח תהיה 2000, כי כל אחד משני הנושאים שהוא תומך בהם מקבל תקציב של 2000. גם כאן, התיאום מביא לשיפור פארטו חזק לעומת מצב של חוסר-תיאום.

**שאלה פתוחה**. האם קיים אלגוריתם הוגן, יעיל ומגלה-אמת עבור תועלות-מינימום?

## מקורות


- *Bogomolnaia, Anna; Moulin, Hervé; Stong, Richard (2005-06-01).* "Collective choice under dichotomous preferences". *Journal of Economic Theory.* ***122*** *(2): 165–184.* doi:10.1016/j.jet.2004.05.005.
- *Brandl, Florian; Brandt, Felix; Peters, Dominik; Stricker, Christian (2021-07-18).* "Distribution Rules Under Dichotomous Preferences". *Proceedings of the 22nd ACM Conference on Economics and Computation. EC '21. New York, NY, USA: ACM: 158–179.* doi:10.1145/3465456.3467653
- *Aziz, Haris; Bogomolnaia, Anna; Moulin, Hervé (2019-06-17).* "Fair Mixing: the Case of Dichotomous Preferences". *Proceedings of the 2019 ACM Conference on Economics and Computation. EC '19. Phoenix, AZ, USA: Association for Computing Machinery: 753–781.* doi:10.1145/3328526.3329552
- *Brandl, Florian; Brandt, Felix; Greger, Matthias; Peters, Dominik; Stricker, Christian; Suksompong, Warut (2021-10-01).* "Funding Public Projects: A Case for the Nash Product Rule
- *https://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_approval_voting*


סיכם: אראל סגל-הלוי.