

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע - יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
רמז: השתמשו במשפט (שאולי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):
 "the mean minimizes the mean squared error"

(א)

יהי שני נושאים - 1, 2

יהי C התקציב הכולל

יהי n כמות האנשים כאשר עבור כל נושא - כל אזרח i נותן מספר p_i עבור התקציב.
 נגדיר:

• $p_{i,1}$ התקציב שנותן אזרח i לנושא 1.

• $p_{i,2}$ התקציב שנותן אזרח i לנושא 2.

לכן הממוצע עבור נושא 1 הוא: $A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n}$, הממוצע עבור נושא 2 הוא $A_2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n}$
 כל אזרח נותן תקציב חוקי: $p_{i,1} + p_{i,2} = C$
 כמו כן - $A_1 + A_2 = C$

בנוסף נזכיר כל התועלת של כל אזרח היא $u_i(d) = -\text{Sum}[j_1, j_2] \cdot |d_j - p_{i,j}|$

על מנת להראות שהאלגוריתם יעיל פארטו נראה שעבור כל שינוי של בחירת התקציב מהממוצע יגרור מקרה כאשר אזרח אחד לפחות קיבל תועלת נמוכה יותר ממה שהיה לו קודם.

נתבונן בלי הגבלת הכלליות בממוצע A_1 .

מקרה א' - התקציב החדש הוא - $A'_1 = A_1 + \varepsilon$

כיוון ש $\text{Sum}[j_1, j_2]$ נשאר קבוע נתבונן בהפרש $|d_j - p_{i,j}|$ לפני שינוי הממוצע ואחרי שינוי הממוצע.

לפני השינוי $|A_j - p_{i,j}|$

אחרי השינוי $|A'_j - p_{i,j}|$

עבור $j = 1$ התקציב החדש שלנו $A'_1 > A_1$.

לכל אזרח i שהצביע עבור נושא זה כאשר $p_{i,1} < A_1$ נקבל כי $|A_1 - p_{i,1}| < |A'_1 - p_{i,1}|$

לצורך הנוחות נגדיר: $A'_1 - A_1 = x$

עבור $j = 2$ נקבל כי $A'_2 = A_2 - x$ כי $A'_1 + A'_2 = C$

סך הכל נקבל כי אם $A'_1 > A_1$ אז בהכרח $A'_2 < A_2$

אם נראה כי קיים אזרח i שאם הוא מקיים $p_{i,1} < A_1$ אז בהכרח הוא יקיים $p_{i,2} > A_2$ נסיים את ההוכחה.
 כי עבור $p_{i,1} < A_1 < A'_1$ $|A_1 - p_{i,1}| < |A'_1 - p_{i,1}| \leftarrow$
 עבור $p_{i,2} > A_2 > A'_2$ $|A_2 - p_{i,2}| < |A'_2 - p_{i,2}| \leftarrow$
 נקבל כי: $|A_j - p_{i,j}| < |A'_j - p_{i,j}|$
 ולכן:

$$u_i(d) = -\text{Sum}[j_1, j_2] \cdot |d_j - p_{i,j}| = \\ -\text{Sum}[j_1, j_2] \cdot |A_j - p_{i,j}| > -\text{Sum}[j_1, j_2] \cdot |A'_j - p_{i,j}|$$

קיבלנו תועלת קטנה יותר מהתועלת שהייתה לאותו אזרח לפני השינוי.

טענה:

קיים אזרח i שאם הוא מקיים $p_{i,1} < A_1$ אז בהכרח הוא יקיים $p_{i,2} > A_2$

טענה חזקה יותר:

כל אזרח i המקיים $p_{i,1} < A_1$ בהכרח מקיים $p_{i,2} > A_2$

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים אזרח i שבחר: $p_{i,1} < A_1$ והוא מקיים גם $p_{i,2} < A_2$

על פי ההנחה מתקיים: $p_{i,1} + p_{i,2} < A_1 + A_2$

מצד אחד - $p_{i,1} + p_{i,2} = C$

מצד שני - $A_1 + A_2 = C$

סתירה להנחה.

מקרה ב' - התקציב החדש הוא - $A'_1 = A_1 - \varepsilon$

ההוכחה זזה עם סימנים הפוכים.

זאת אומרת מי שמקיים $p_{i,1} > A_1$ בהכרח גם יקיים $p_{i,2} < A_2$ והתועלת שלו תפגע.

מסקנה:

האלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו עבור 2 נושאים

