

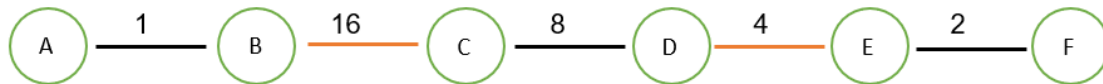
## אלגוריתמים כלכליים מטלה – 12

שאלה 5: שידוך עדיפויות ומספר ההשתלות

בהרצאה למדנו אלגוריתם למציאת שידוך בגרף, כאשר יש סדר עדיפויות על הצלעות.

א. הראו, שבשידוך הנמצא ע"י האלגוריתם, ייתכן שמספר הצלעות המשודכות לא יהיה גדול ביותר.

דוגמא:



כאשר נפעיל את האלגוריתם שנלמד בשיעור נקבל שידוך בגודל 2  $\{B \rightarrow C, D \rightarrow E\}$ , אבל כפי שאנו רואים בדוגמא קיים מסלול שיפור, כלומר קיים שידוך בעל מספר צלעות גדול יותר  $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, E \rightarrow F\}$ .

ב. הסבירו איך לתקן את האלגוריתם, כך שימצא תמיד שידוך עם מספר צלעות גדול ביותר. בכפוף לזה, מספר הצלעות בעדיפות ראשונה יהיה גדול ביותר. בכפוף לזה, מספר הצלעות בעדיפות שניה גדול ביותר, וכו'. האלגוריתם עדיין צריך לרוץ בזמן פולינומיאלי. הוכיחו והדגימו את תשובתכם.

**אלגוריתם:**

נפעיל תחילה את האלגוריתם שנלמד בשיעור ונקבל שידוך התחלתי עם הצלע בעלת המשקל הגדול ביותר.

לאחר מכן נבדוק האם קיים מסלול שיפור (יותר צלעות בשידוך) עם הצלעות בעלות המשקל השני הכי גדול – אם כן, תעדכן את השידוך ותמשיך לצלע הבאה (בעלת המשקל השלישי הכי גדול וכו') אם לא, תמשיך לצלעות בעדיפות הבאה.

כאשר סיימנו לעבור על הצלעות קיבלנו את השידוך המקסימלי מבחינת כמות צלעות בכפוף לעדיפויות.

האלגוריתם רץ בזמן פולינומי נפעיל אותו E פעמים (ככמות הצלעות) ונקבל סה"כ זמן פולינומי.

**הוכחה:**

נוכיח שהאלגוריתם מוצא שידוך עם מספר צלעות גדול ביותר, בכפוף לכך שמספר הצלעות בעדיפות גבוה יותר תהיה הגדולה ביותר.

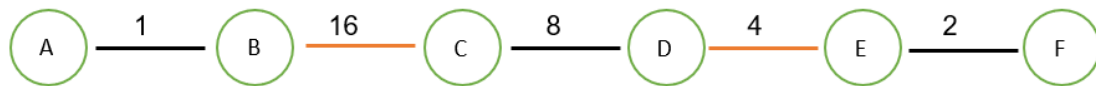
מקרה 1: השידוך שהאלגוריתם המקורי בחר הוא גם השידוך המקסימלי.

במקרה זה לא יהיו מסלולי שיפור ולכן נחזיר את השידוך המקסימלי הממקסם את העדיפויות.

מקרה 2: קיים שידוך גדול יותר עם צלעות בעדיפות נמוכה יותר.

במקרה זה האלגוריתם ינסה למצוא מסלול שיפור ע"י בחירה של הצלעות עם העדיפות הגבוהה ביותר שלא בשידוך הנוכחי, אם קיים מסלול שיפור אזי השידוך הקודם לא מקסימלי ולכן כעת זהו השידוך המקסימלי הממקסם את העדיפויות. נמשיך לצלעות בעדיפות הבאה וננסה להשתמש בהם למסלול שיפור, אם קיים מסלול שיפור אזי זהו השידוך המקסימלי הממקסם את העדיפויות. האלגוריתם יעצור כאשר עבר על כל הצלעות מהעדיפות הגבוהה לנמוכה, ובסופו של דבר יבחר את השידוך המקסימלי (המסלול שיפור האחרון שנמצא) הממקסם את העדיפויות (כי מחפש מסלול שיפור מהצלעות עם העדיפות הגבוהה ביותר לנמוכה).

**דוגמא:**



נריץ תחילה את האלגוריתם ונקבל את השידוך הבא -  $\{B \rightarrow C, D \rightarrow E\}$ .  
 לאחר מכן נריץ את האלגוריתם כאשר הצלע  $C \rightarrow D$  (הצלע בעלת המשקל השני הגדול) היא חלק מהשידוך ובדוק האם קיבלנו מסלול שיפור.



ואכן קיבלנו מסלול שיפור  $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, E \rightarrow F\}$  ולכן נעדכן את השידוך.

לאחר מכן נעבור לצלע  $D \rightarrow E$  ונריץ שוב את האלגוריתם – לא קיבלנו מסלול שיפור ולכן נעבור לצלע הבאה.

נריץ את האלגוריתם על הצלע  $E \rightarrow F$  ולא נקבל מסלול שיפור.  
 נריץ את האלגוריתם על הצלע  $A \rightarrow B$  ולא נקבל מסלול שיפור.  
 עברנו על כל הצלעות ולכן סיימנו.  
 קיבלנו שידוך מקסימלי עם עדיפות לצלעות הגבוהות.