

מטלה - חלוקת שכר-דירה – שאלות נוספות

שאלה 1: בעיית מכפלת הצריחים

נתון לוח שחמט (8 על 8) שבו בכל משבצת כתוב מספר חיובי כלשהו. עליכם להציב שמונה צריחים על הלוח, כך שאף צריח לא מאיים על אף צריח אחר, ומכפלת המספרים הרשומים תחת הצריחים היא הגדולה ביותר.

א. כיתבו את בעיית האופטימיזציה.

ב. הדגימו את פתרון הבעיה על לוח קטן (3 על 3).

כיסוי מינימלי

כיסוי (*covering*) של גרף הוא תת-קבוצה של הצמתים בגרף, כך שכל קשת בגרף סמוכה לפחות לצומת אחד מתוך הקבוצה.

כיתבו בעיית אופטימיזציה למציאת כיסוי מינימלי - כיסוי עם מספר קטן ביותר של צמתים. הגדירו במדויק מה הם המשתנים, מה הם האילוצים, ומה פונקציית המטרה.

וקטור אגליטרי

האם בחלוקה עם וקטור-מחירים אגליטרי יכולה להיות קנאה, כשיש שני שותפים ושני חדרים?

בעיית תחנת המוניות

בתחנת מוניות עובדים שלושה נהגים. כל נהג נמצא עכשיו במקום אחר. התחנה מקבלת בו-זמנית שלוש פניות מנוסעים הנמצאים במקומות שונים. התחנה צריכה להחליט איזה נהג לשלוח לאיזה נוסע. הנתונים:

- המרחק בין נהג i לבין נוסע j הוא: $d[i, j]$ (ק"מ).
- המרחק בין נוסע j לבין היעד שלו הוא $x[j]$ (ק"מ).
- מחיר של דלק לקילומטר הוא p (ש"ח).

כיתבו פקודה בשפת פייתון שתעזור לתחנה למצוא את ההשמה הזולה ביותר של נהגים לנוסעים.

סכום מחירים מקסימלי

נניח שמצאנו השמה המקסימת את סכום הערכים, ואנחנו רוצים למצוא מחיר לכל חדר. במקום למצוא וקטור-מחירים עם סכום מינימלי, אפשר לנסות למצוא וקטור-מחירים עם סכום מקסימלי:

Maximize $\sum_i p[i]$

Such that For all $i, j: w[d[i], i] - p[i] \geq w[d[i], j] - p[j]$

א. מה הבעיה בתוכנית זו? (אפשר לפתור סעיף זה בשתי דרכים: להריץ בפייתון ולראות איזו הודעת שגיאה-מתקבלת, או לנסות לפתור את הבעיה ידנית במקרים פרטיים ולזהות את הבעיה).

ב. איזה אילוץ אפשר להוסיף לתוכנית, כך שיתקבל פתרון הגיוני?

אלגוריתם חלופי לחלוקת שכר-דירה

הציעו אלגוריתם חלופי לחלוקת חדרים ושכר-דירה בין שלושה שותפים, המסתמך על אלגוריתם Selfridge-Conway לחלוקת-עוגה ללא קנאה. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מחזיר חלוקה ללא קנאה.

שאלה: יעילות פארטו בחלוקת שכר דירה

כזכור, בבעיית חלוקת המשאבים הוכחנו, שכל השמה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו. הוכיחו, שבבעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה, גם הכיוון ההפוך נכון: כל השמה יעילה פארטו ממקסמת את סכום הערכים.

שאלה: השמה ממקסמת סכום ערכים - סיבוכיות זמן ריצה

א. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר המוכר כיום למציאת השמת חדרים לדיירים הממקסמת את סכום הערכים? (לפי ויקיפדיה).

* ב [רשות]. בדקו ע"י ניסוי, מהי (בקירוב) סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם `max_weight_matching` הממומש בספריה `networkx` של פייתון? (דרך אפשרית לבדוק היא להריץ את האלגוריתם על גרפים בגדלים שונים, לשרטט גרף של לוגריתם זמן הריצה כפונקציה של לוגריתם גודל הגרף, ולנסות להתאים פונקציה לגרף).