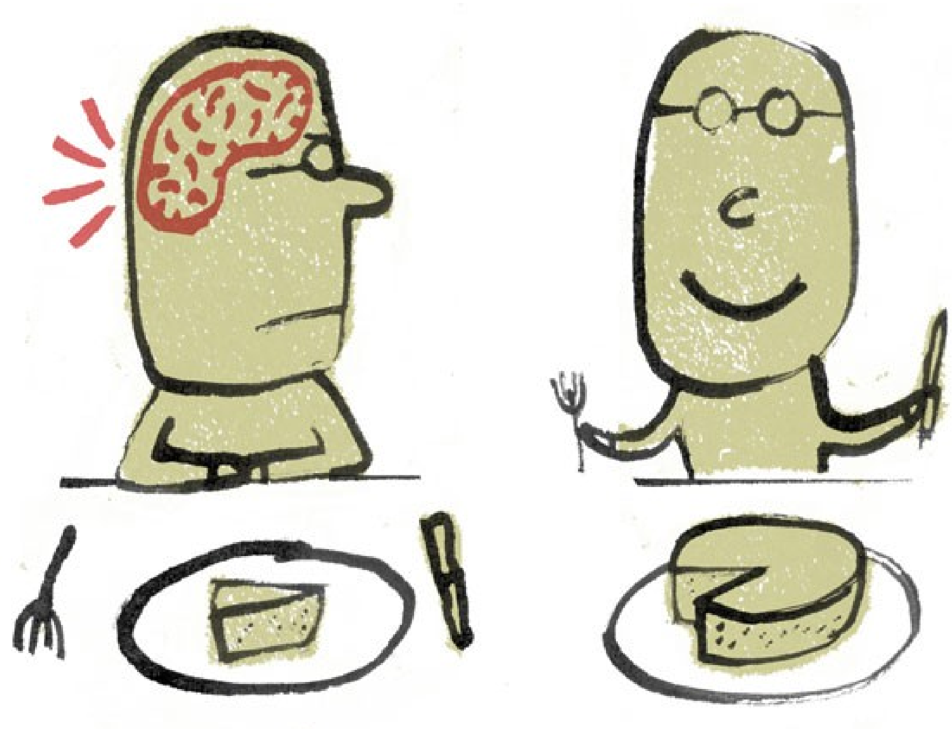
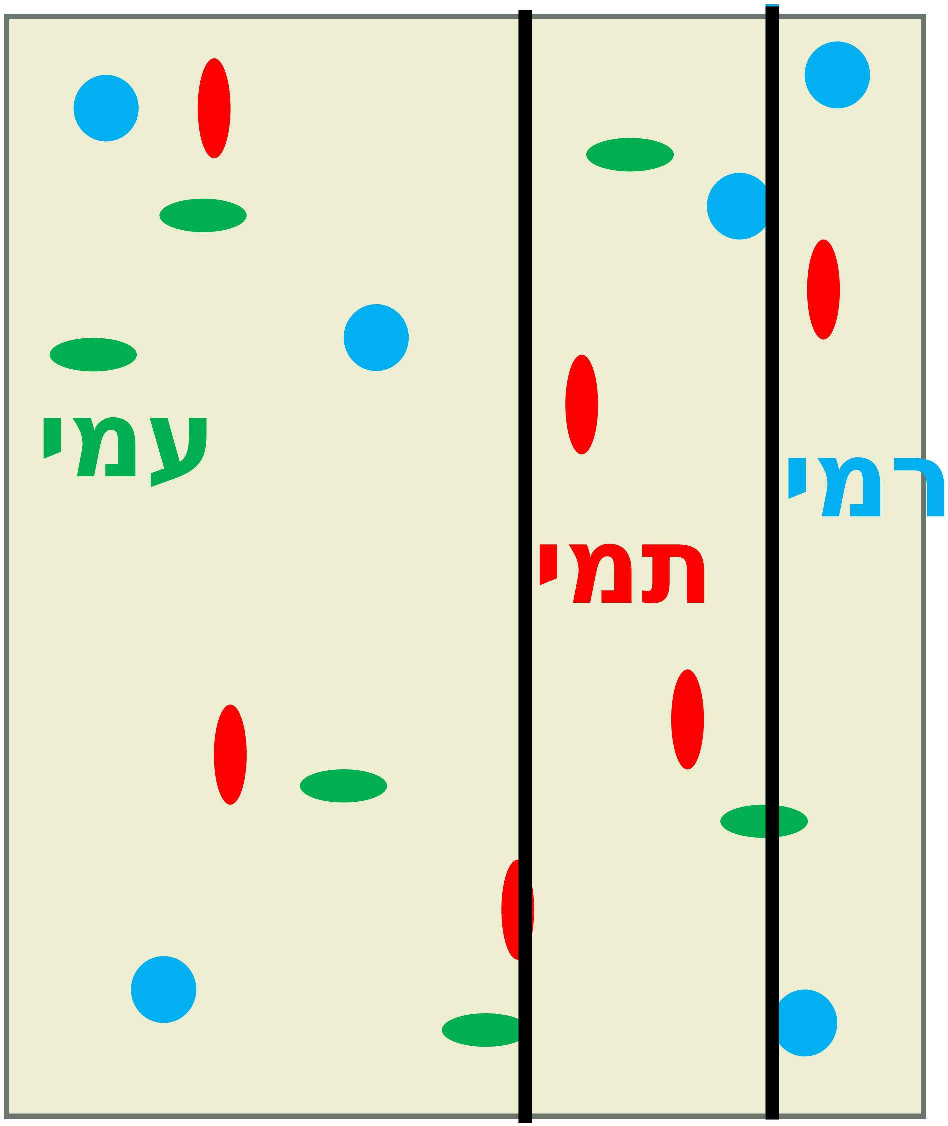
"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה ללא קנאה
Envy-Free Division

אראל סגל-הלוי



קנאה



האלגוריתמים שראינו לא מבטיחים שהחלוקה תהיה ללא קנאה.

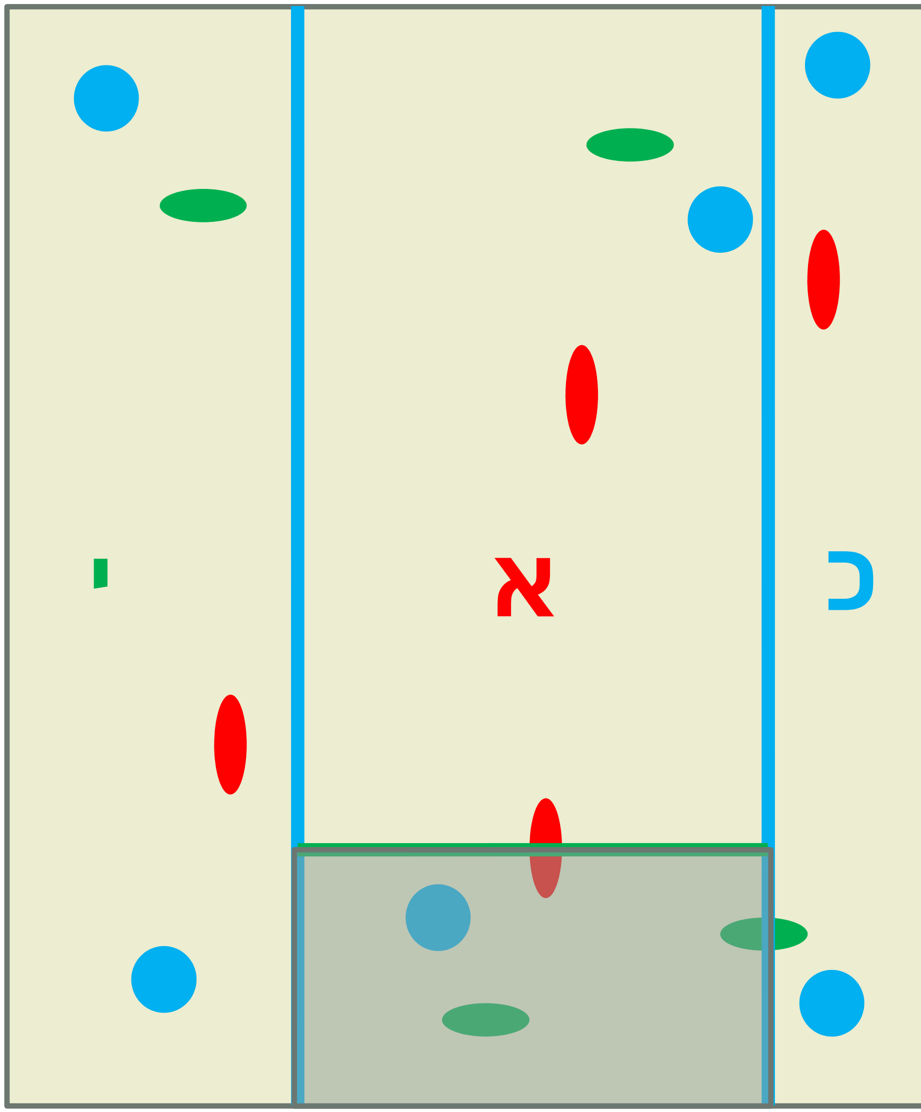
קנאה זה דבר מעצבן – ולא רק בני אדם -

https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment

אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

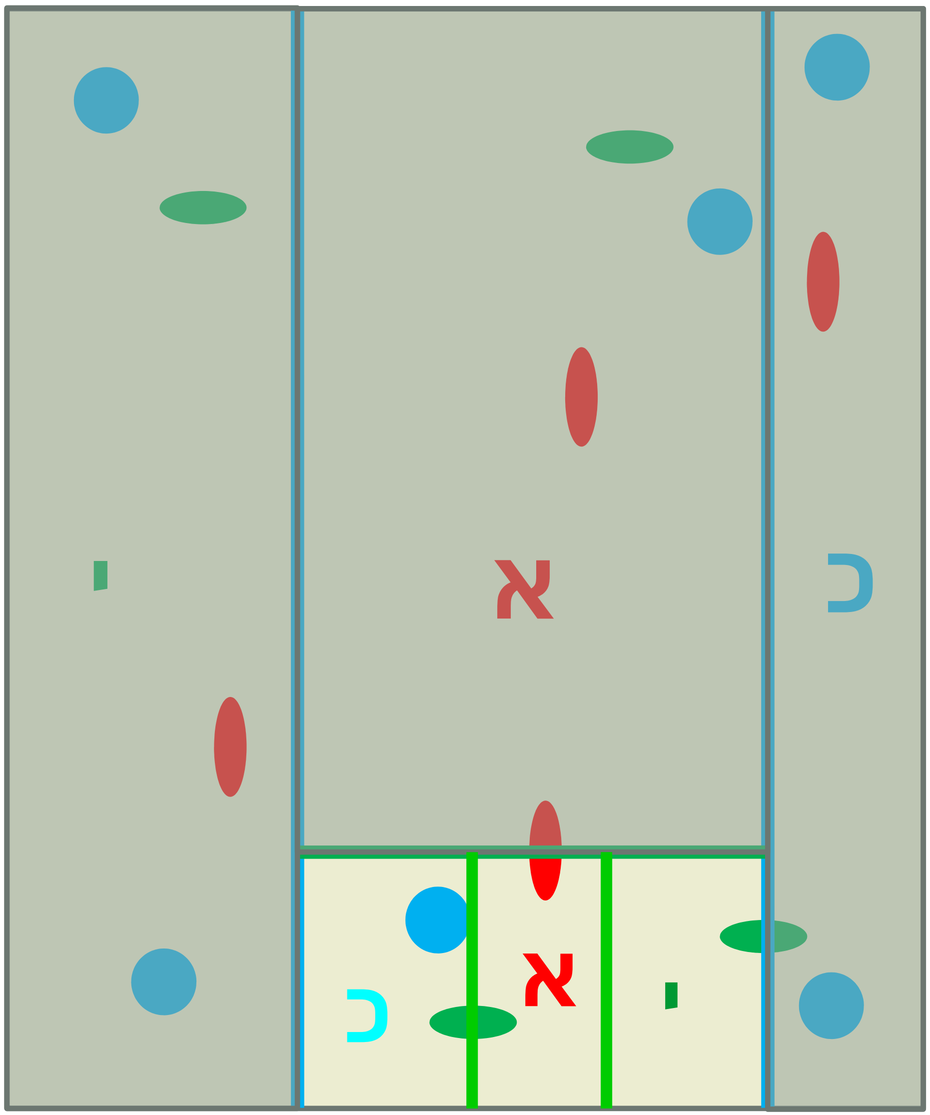
אלגוריתם – Selfridge
Conway, 1963



- כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
- אם א, י מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת -
- י מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ו**משווה** לשניה בעיניו.
- א, י, כ בוחרים חתיכה. י חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.
- קיבלנו חלוקה ללא קנאה, אבל עם שארית.

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

אלגוריתם – Selfridge
חלק ב – Conway, 1963



- [א או י בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א].
- י (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
- א, כ, י בוחרים חתיכה.

סלפרידג'-קונוויי

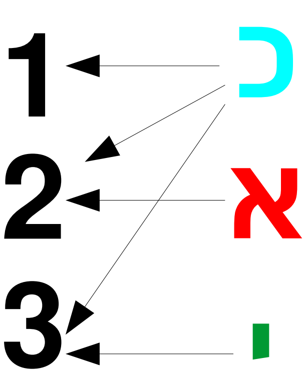
משפט: אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

הוכחה: נבנה גרף דו"צ שבו:

- הצמתים - שחקנים מצד אחד וחתיכות מצד שני.
- הקשתות - מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.

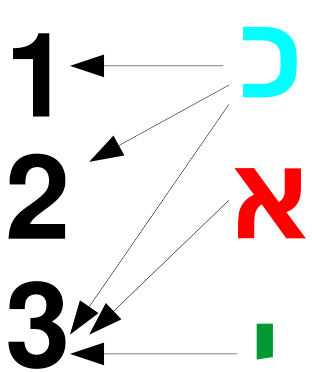
שידוך מושלם בגרף זה = חלוקה ללא קנאה!

אחרי החלוקה הראשונה של כ יש שני מקרים:



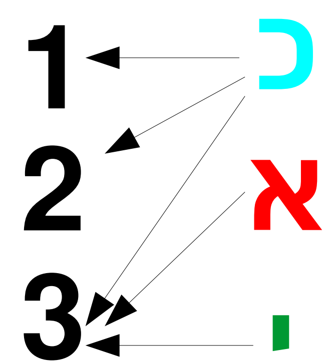
(המקרה הקל)

או

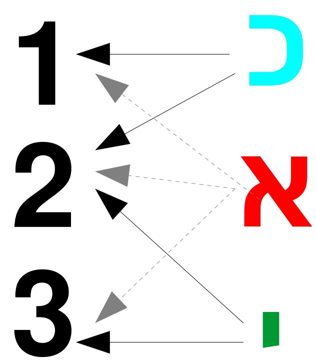


(המקרה הקשה)

סלפרידג'-קונוויי – המשך הוכחה

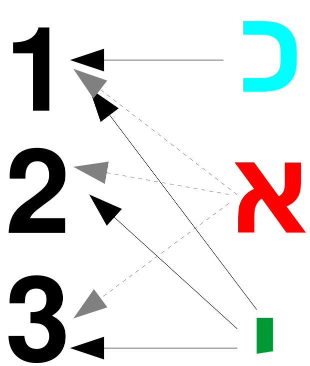


אחרי הקיצוץ
של י הופך ל:



בוחרים לפי הסדר א, י, כ. לא משנה מה א בוחר - ל-י נשאר מה לבחור. הוא חייב לבחור את 3 אם היא קיימת, לכן גם ל-כ נשאר מה לבחור.

חלק ב: נניח ש-**א** לקח את החתיכה המקוצצת. אז י חותך; **א**, **כ**, **י** בוחרים. **א** בוחר ראשון; ל-י יש שלוש חתיכות לבחור; *ו-כ לא יקנא ב-**א** אפילו אם **א** ייקח את כל השארית!* ***



חלוקה ללא קנאה ל-n שותפים

1963: אלג' סלפרידג'-קונוויי ל-3 עם 5 שאילתות

1996: אלג' בראמס-טיילור. #שאילתות לא חסום.

1998: אלג' רוברטסון-ווֶב. #שאילתות לא חסום.

2000: אלג' פיקהורקו. #שאילתות לא חסום.

2009: משפט פרוקצ'יה: #שאילתות לפחות n^2.

2015: אלג' עזיז-מקנזי ל-4. #שאילתות חסום (200).

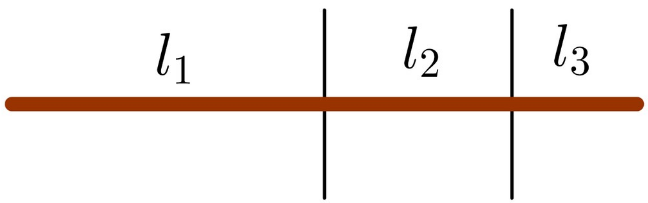
2016: אלג' עזיז-מקנזי ל-n. #שאילתות חסום:

$$O\left(n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}}\right)$$

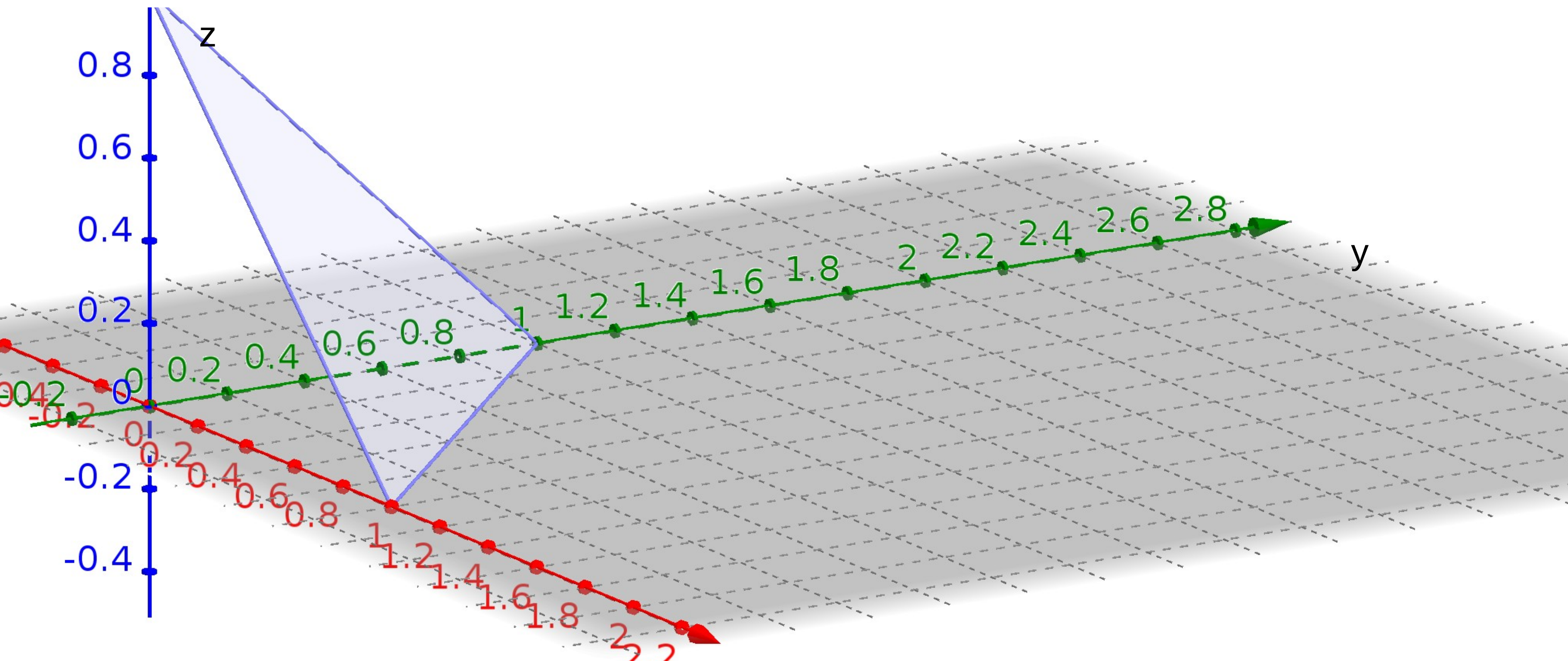
עדיין לא ידוע כמה שאילתות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש n^2 שאילתות?

חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n

- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים חיוביים שסכומם 1

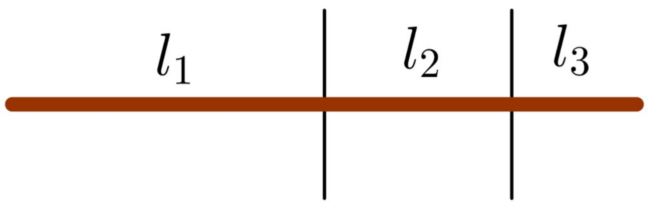


$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$

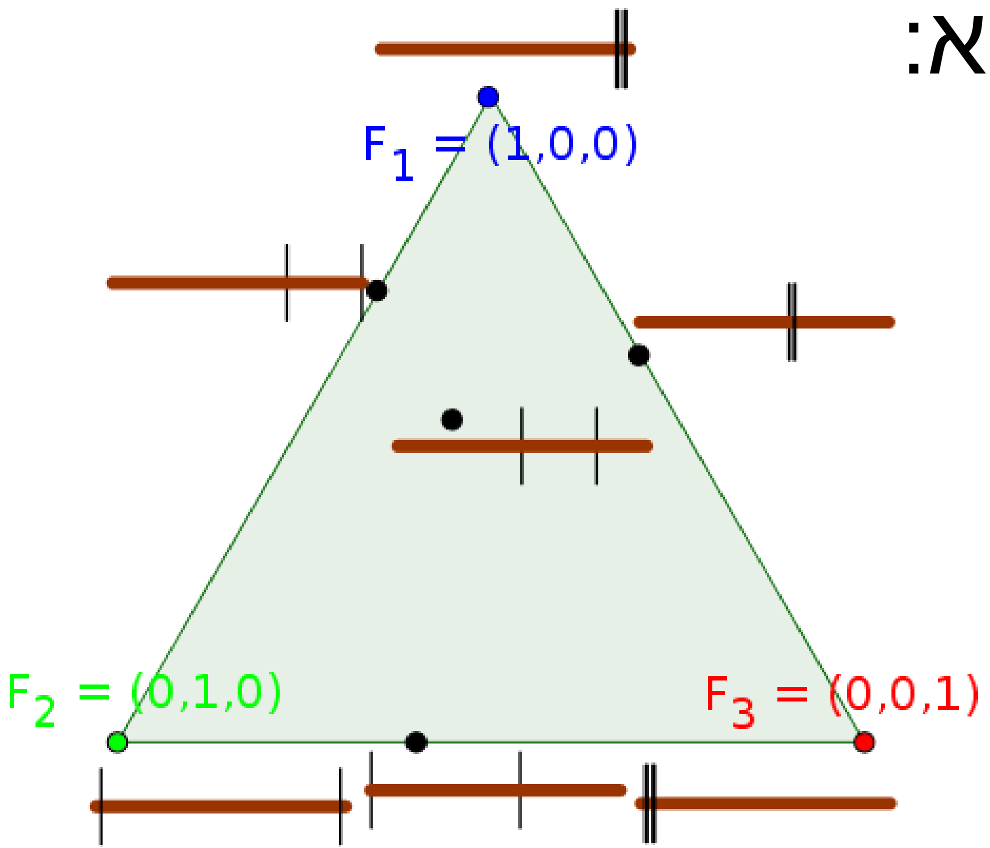


חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n

- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים חיוביים שסכומם 1



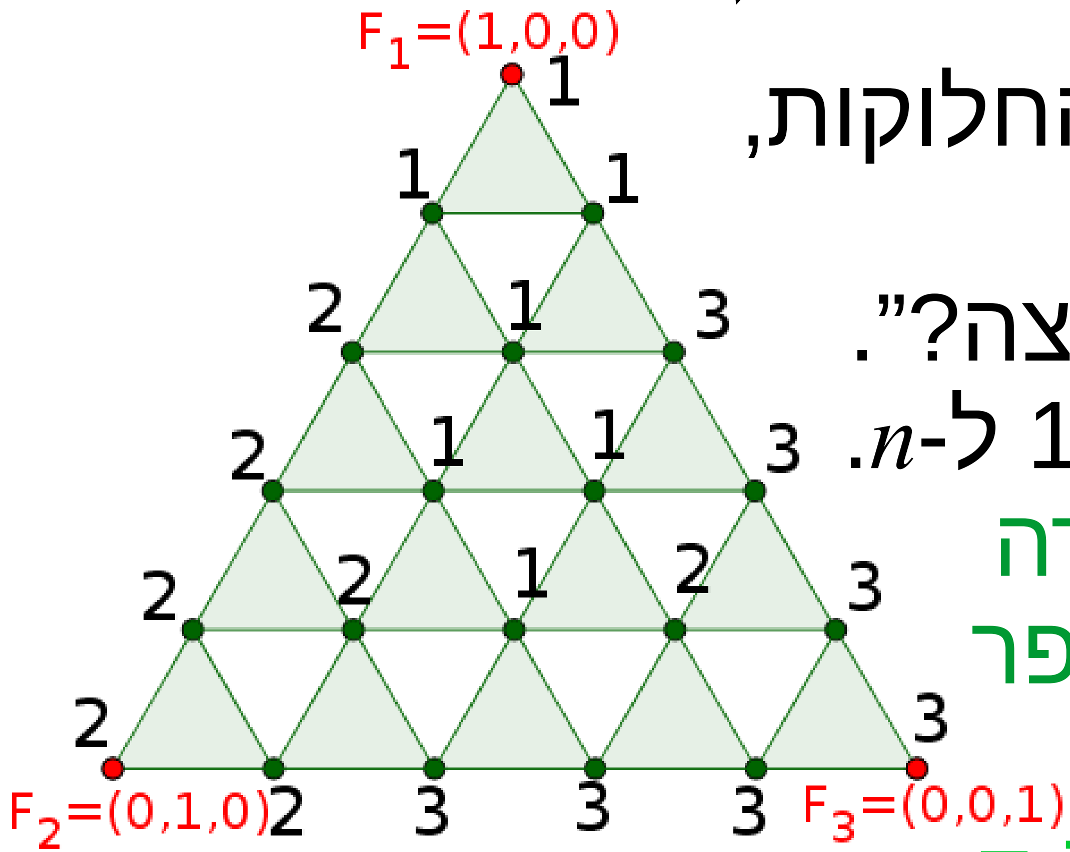
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$



מרחב החלוקות הקשירות הוא:

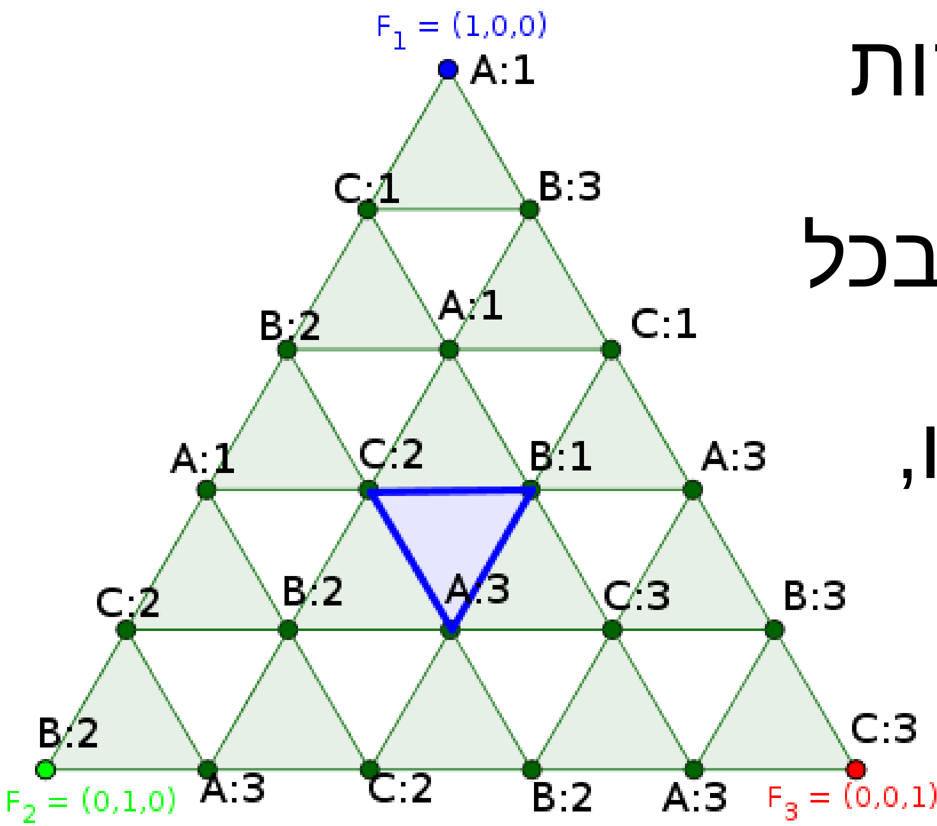
- עבור $n=2$ – **קטע**.
- עבור $n=3$ – **משולש**.
- עבור $n=4$ – **טטראדר**.
- באופן כללי – **סימפלקס**.

חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n



- בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?". התשובה היא מספר בין 1 ל-n.
- חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.
- חלוקה כמעט-ללא-קנאה = סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

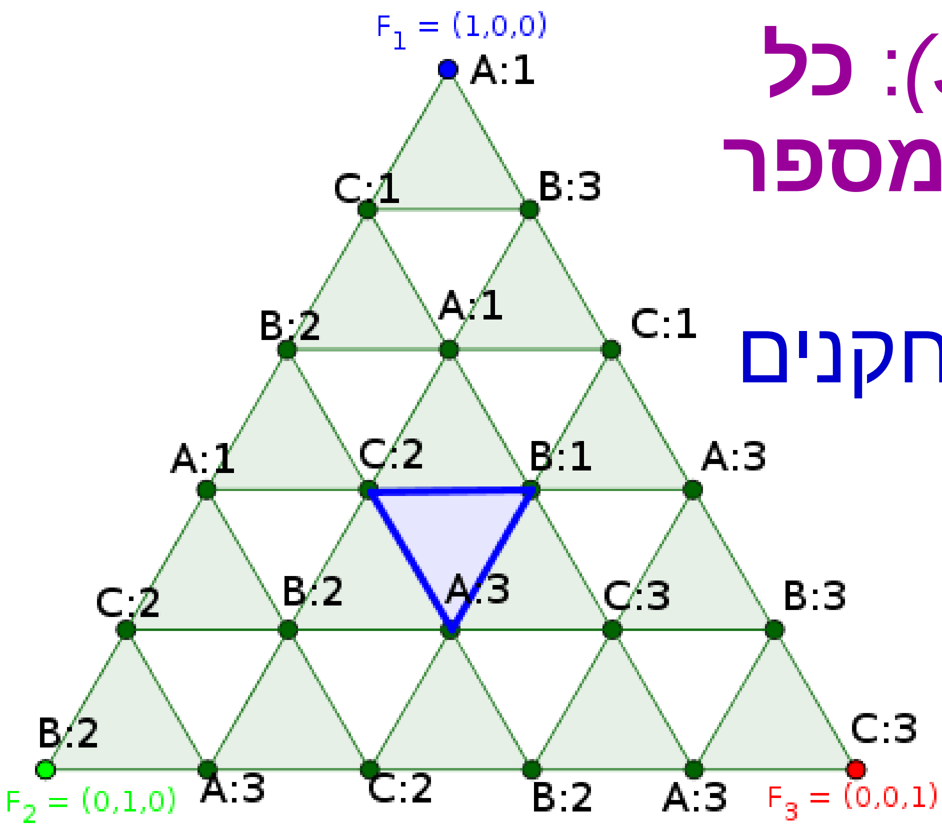
אלגוריתם סימונס-סו (Su 1999)



- מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.
- נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.
- כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.
- מחפשים **סימפלקסון מגוון** = עם n מספרים שונים = חלוקה כמעט-ללא-קנאה.
- טענה: תמיד קיים סימפלקסון מגוון!
- הוכחה: בעזרת הלמה של ספרנר

<--

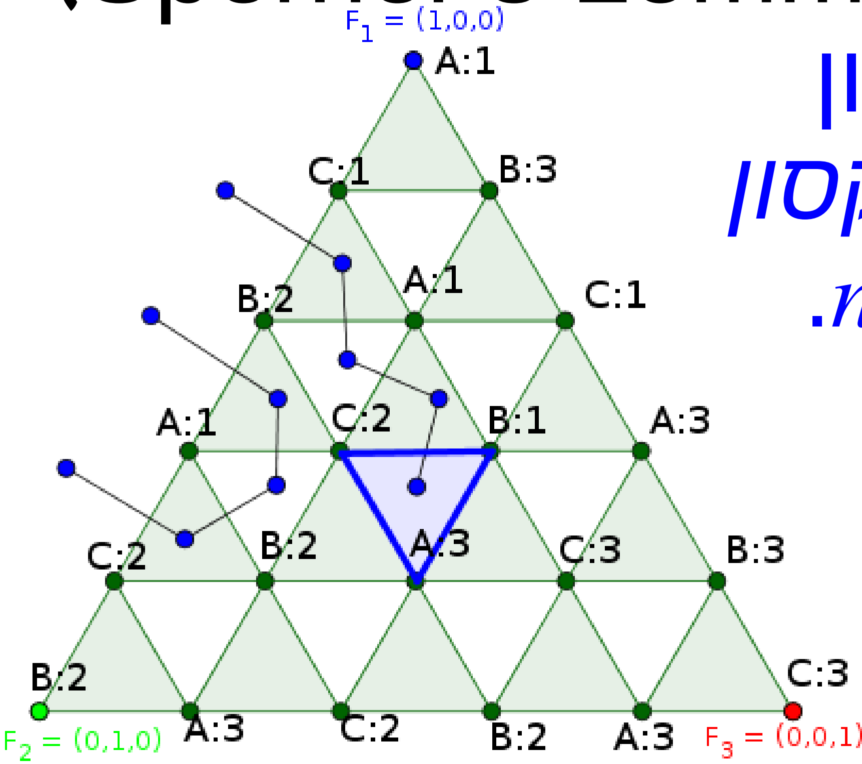
הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



- הגדרה: *תיווי ספרנר (Sperner)*: **כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה**.
- (התיווי הנוצר ע"י תשובות השחקנים הוא תיווי ספרנר, כי כל שחקן בוחר פרוסה לא ריקה).
- **הלמה של ספרנר**: בכל תיווי ספרנר יש מספר איזוגי של סימפלקסונים מגוונים.
- הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: $n=2$. נסתכל על הצלע בין F_1 ל-F_2. המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



צעד: *נגדיר* "**חדר**" = סימפלקסון עם n צמתים; "**דלת**" = *סימפלקסון* *עם* n-1 צמתים, ותויות 1, ... ,n-1.

לפי הנחת האינדוקציה, מספר הדלתות על השפה הוא איזוגי.

בכל חדר עם דלת, יש:

א. *דלת אחת* – אם התוית מול הדלת היא n – ואז זה סימפלקסון מגוון; או -

ב. *שתי דלתות* – אם התוית מול הדלת אינה n.

מספר הדלתות החיצוניות [איזוגי] + מספר הדלתות בחדרים מסוג ב [זוגי] + מספר הדלתות בחדרים מסוג א = מספר הדלתות כפול 2 = מספר זוגי.

לכן מספר החדרים מסוג א איזוגי. ***

חלוקה קשירה ללא קנאה

1980: משפט סטרומקוויסט: תמיד קיימת חלוקה.
1980-1998: אלגוריתמי סכינים, לשלושה אנשים.
1999: אלגוריתם סימונס, #שאילתות אינסופי.
2008: משפט סטרומקוויסט: #שאילתות תמיד אינסופי!

“קָשָׁה כִשְׁאוֹל קִנְאָה”

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	2 שאילתות		
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסוף!
4		200	
n		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	