

## מטלה - אלגוריתמים מגלי-אמת

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תכנות.

### שאלה 1: אלגוריתם מגלה-אמת למציאת השמה מקסימלית

נתונים  $n$  שחקנים ו- $m$  חפצים בדידים. צריך לתת חפץ אחד בדיוק לכל שחקן, כך שסכום הערכים יהיה גדול ביותר. האלגוריתם צריך להיות **מגלה אמת**.

א. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית השמה עם שני אנשים ושני חפצים.

ב. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית השמה עם שלושה אנשים ושלושה חפצים.

ג. כתבו קוד בפייטון, הפותר את הבעיה באופן כללי.

### שאלה 2: עידוד השתתפות

**הגדרה:** אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות אפס לכל אפשרות, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

\* ב. הוכיחו, שאם כל שחקן  $i$  מייחס ערך לפחות אפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משתתף (האפשרות הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים האחרים כאשר מתעלמים משחקן  $i$ ), אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ג. הוכיחו, שאם התנאי בסעיף ב אינו מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.

### שאלה 3: איזון תקציבי

**הגדרה:** אלגוריתם נקרא **מאוזן תקציבית (budget balanced)** אם סכום התשלומים הוא אפס – כל התשלומים עוברים בין השחקנים לבין עצמם. "המכרז השווה" הוא מאוזן תקציבית, אבל מכרז ויקרי אינו מאוזן תקציבית.

א. ניתן להפוך את "מכרז ויקרי" למאוזן תקציבית ע"י חלוקת הסכום, שמשלם הזוכה, שווה בשווה בין השחקנים. הוכיחו, שהאלגוריתם המתקבל **אינו** מגלה אמת.

\* ב. הוכיחו, שלא קיים אלגוריתם שהוא גם **יעיל-פארטו**, גם **מאוזן תקציבית**, וגם **מגלה אמת**, לחלוקת חפץ אחד בין שני שחקנים.

#### שאלה 4: מכרזי פירסום - איכות המודעה (הקורס של טים, תרגילים 32, 34)

בשיעור הנחנו, שהסתברות ההקלקה על מודעה מסוימת תלויה רק במיקום שלה ולא במודעה. במציאות, הסתברות ההקלקה על מודעה תלויה גם במיקום וגם במודעה עצמה.

א. נניח שלכל מודעה  $j$  יש מקדם איכות  $q_j$ , והסתברות ההקלקה כששמים אותה במקום  $k$  היא:

$$r_{j,k} = r_k * q_j$$

תארו אלגוריתם המשבץ מודעות למיקומים וממקסם את סכום הערכים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

ב. נניח שהסתברות ההקלקה של מודעה נתונה על-ידי פונקציה לא-ליניארית כלשהי:

$$r_{j,k} = f(r_k, q_j)$$

הראו דוגמה לפונקציה  $f$  כלשהי, שבה האלגוריתם מסעיף א לא עובד (לא מוצא שיבוץ הממקסם את סכום הערכים).

#### שאלה 5: אלגוריתם מגלה-אמת להקצאת מעונות לסטודנטים

משרד המעונות של האוניברסיטה מקצה מעונות לסטודנטים בעזרת האלגוריתם הבא:

- כל סטודנט רושם, מבין כל סוגי המעונות הקיימים, את שלושת הסוגים שהוא הכי רוצה, לפי הסדר (עדיפות ראשונה – עדיפות שניה – עדיפות שלישית).
- המשרד מסדר את הסטודנטים לפי סדר עדיפות כלשהו (ותק, ציונים וכד').
- המשרד עובר על הסטודנטים לפי הסדר, ונותן לכל סטודנט את החדר הכי גבוה בדירוג שלו שעדיין זמין. אם כל השלושה לא זמינים, הסטודנט מקבל חדר זמין כלשהו באקראי.

א. הוכיחו שהאלגוריתם אינו מגלה-אמת.

ב. הוכיחו, שגם אם כל הסטודנטים מדווחים את ההעדפות האמיתיות שלהם, האלגוריתם אינו יעיל פארטו.

ג. הציעו שיפור קטן לאלגוריתם, שיהפוך אותו למגלה-אמת וגם יעיל פארטו.

#### שאלה 6: השמת חפצים ללא כסף [שידור חוזר ממטלה קודמת]

נתונים  $n$  שחקנים ו- $m$  חפצים בדידים. צריך לתת חפץ אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב- $n$ ) למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

ב. השמה אגליטרית - הממקסמת את הערך הקטן ביותר.

\* ג. השמה לקסימין-אגליטרית.

הוכיחו את נכונות האלגוריתמים.

**שימו לב:** זמן הריצה צריך להיות פולינומיאלי ב- $n$ . לכן לא יתקבלו פתרונות העוברים על כל ההשמות.