

"וְנָחֲלֶתֶם אֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

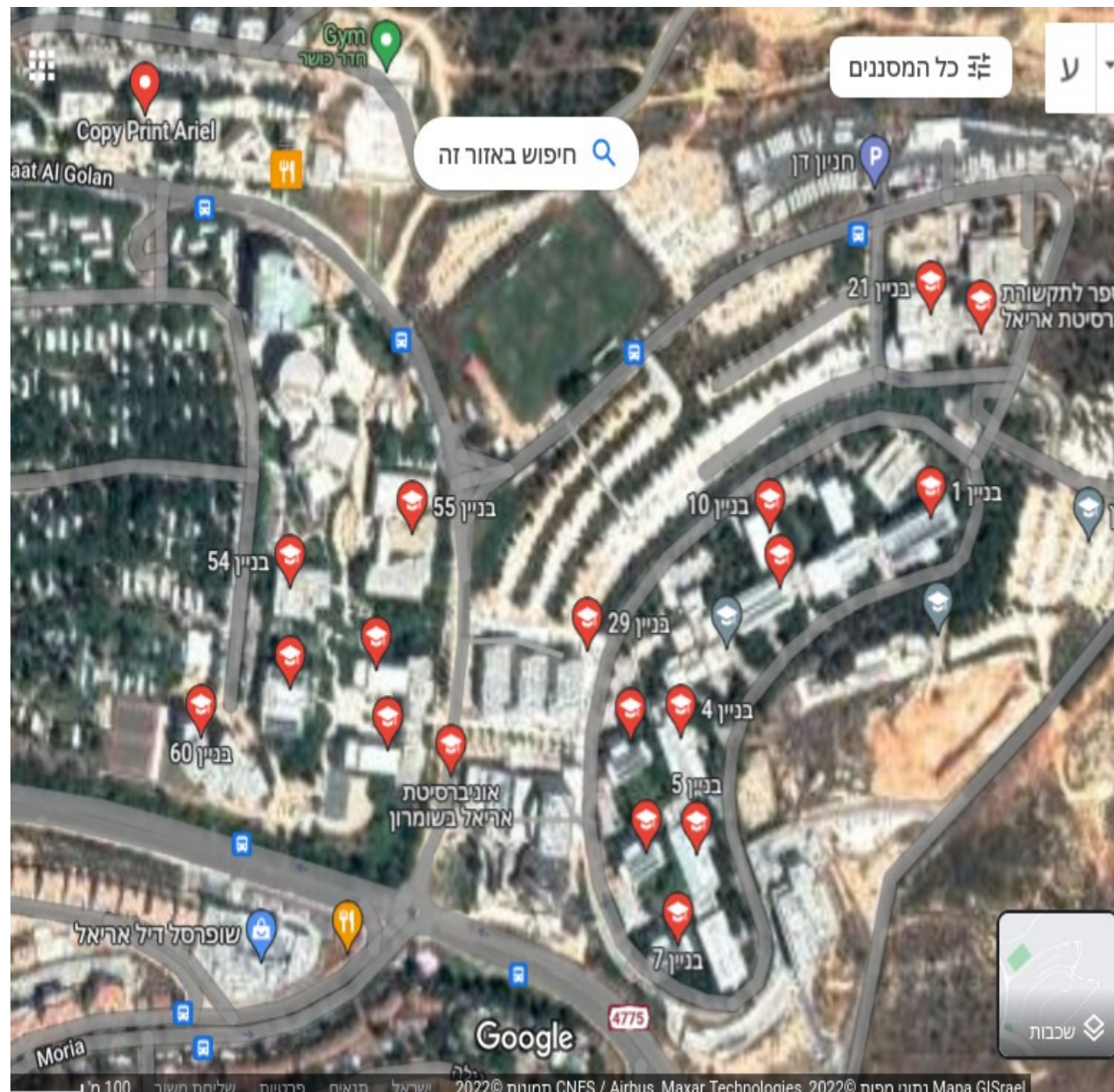
# חלוקה הוגנת של קרקע

## Fair Division of Land

### אראל סגל-הלוי



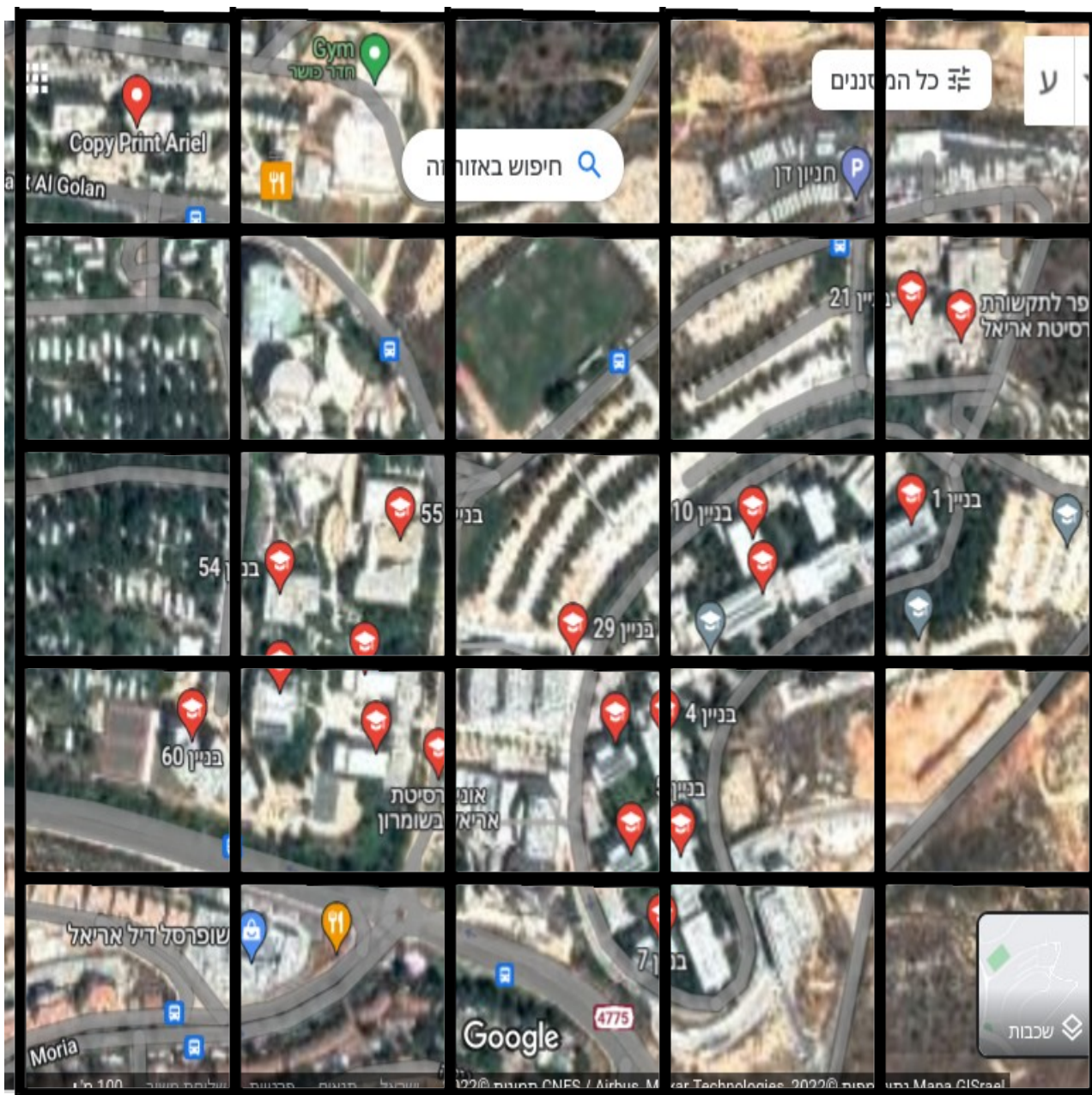
# מחלקים את אריאל לסטודנטים!



איך נוודא  
שכל סטודנט  
יקבל חלק  
הוגן?

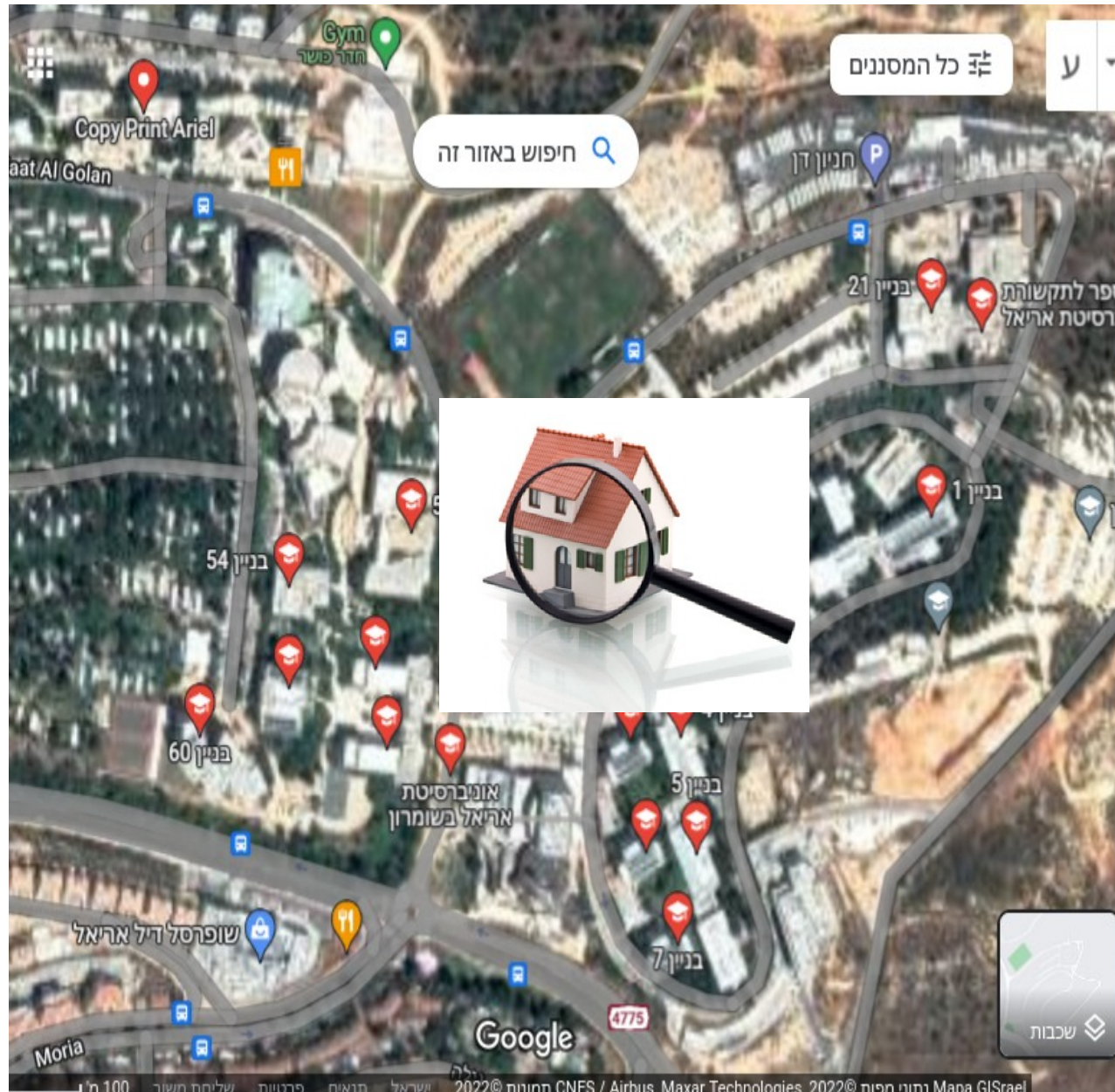


# א. חלוקה שוות-שטח



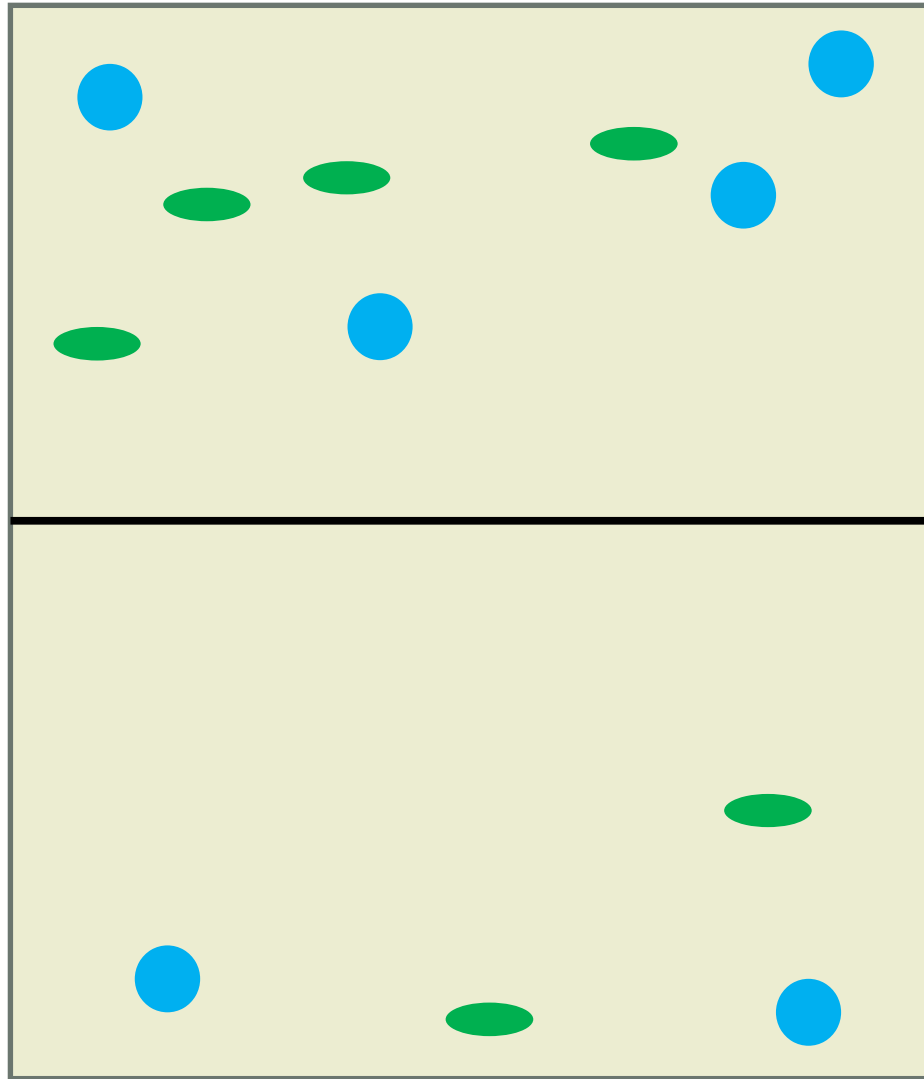
בעיה: הקרקע  
לא הומוגנית –  
לחלקים שונים  
יש ערך שונה.

# ב. חלוקה שוות-ערך



בעיה:  
ההערכות  
סוביקטיביות -  
לכל אחד יש  
העדפות שונות.

# חלוקת עוגה בין שני ילדים



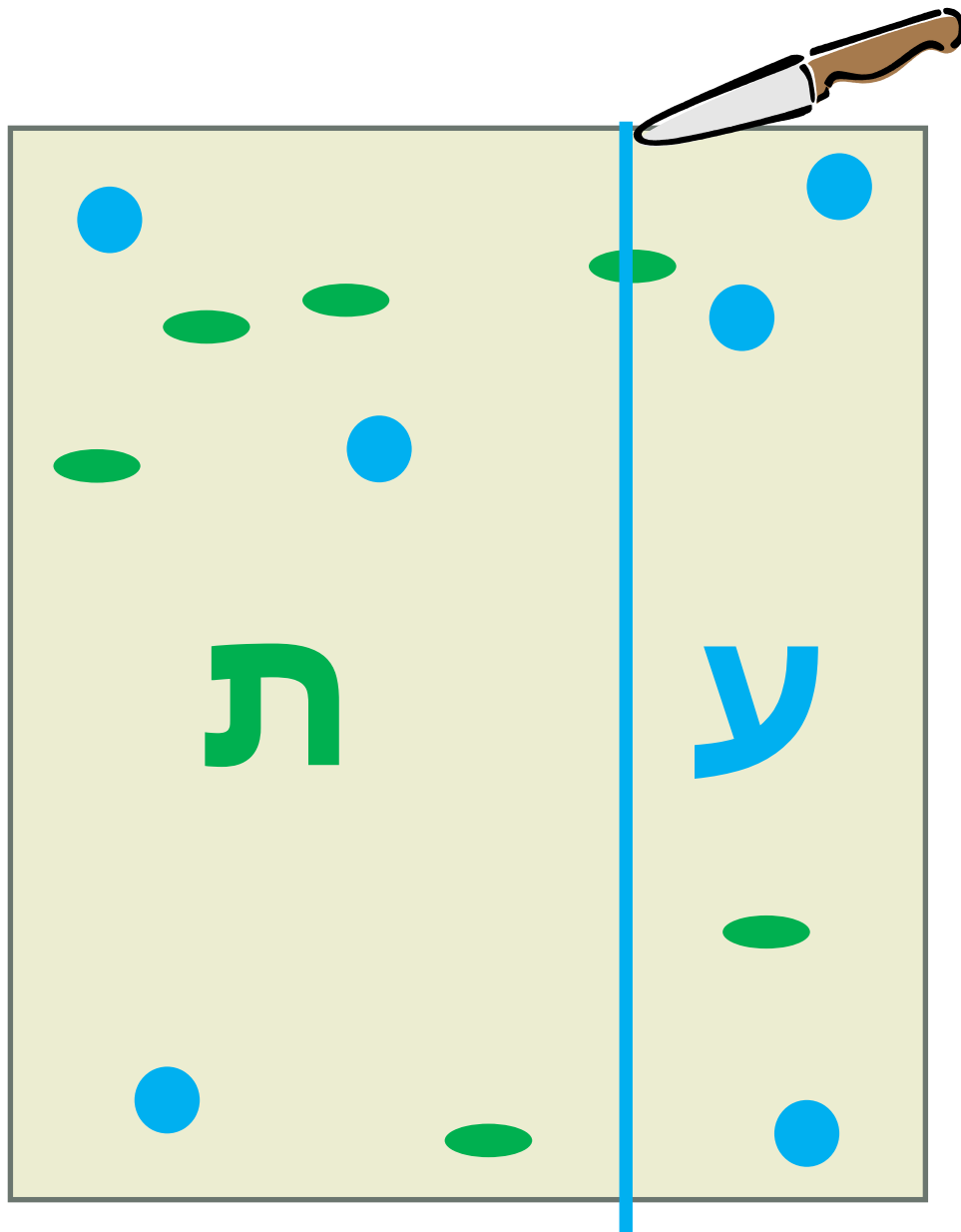
צריך לחלק עוגת  
יום-הולדת בין שני  
ילדים: עמי ותמי.

כל ילד מעדיף סוכריות  
בצבע אחר.

אם אנחנו נחלק את  
העוגה בצורה שנראית  
לנו הוגנת – לא בטוח  
שזה יהיה הוגן בעיניהם!



# חלוקת עוגה בין שני ילדים



הפתרון: לתת להם  
לחלק בעצמם!

- **עמי** מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי  $1/2$ ).
- **תמי** בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- **עמי** מקבל את השאר.

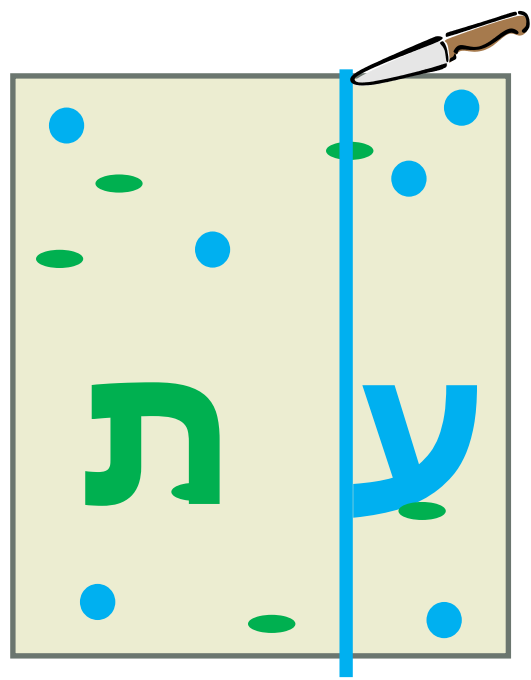
# חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יג-8: וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט: אֵל נָא תְהִי  
מְרִיבָה בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רְעִי וּבֵין רְעִיךָ כִּי אֲנָשִׁים  
אֲחִים אֲנַחְנוּ. הֲלֹא כָל הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הִפְרֵד נָא  
מֵעָלַי! אִם הִשְׁמַאל וְאִימָנָה, וְאִם הַיָּמִין וְאִשְׁמֹאֵלָה.

אברם



לוט



# אלגוריתם "חתוך ובחר"

**תכונות:**

(1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות  $1/2$  – חלוקה פרופורציונלית (proportional).

(2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

**שאלה: האם אפשר להשיג את אותן תכונות כשיש יותר משני אנשים?**



# חלוקת עוגה – מודל כללי

העוגה  $C$  היא קטע (חד ממדי) או מצולע (רב ממדי).  
לכל משתתף  $i$  יש פונקצית צפיפות ערך על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x) dx$$

https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap

מפת הנדל"ן והשכונות של ישראל

המפה לפניכם מציגה מידע על כל השכונות בישראל. בחרו ביישוב שלכם על ידי לחיצה ובחרו את השכונה שלכם בלחיצה נוספת. מידע מחירים, חינוך ועוד יופיע בצד המפה.

**שכונה ה**

מספר: 13,300,000  
מספר: 13,800  
מספר: 17

הקליקו לפרטים מלאים בצד מימין

**אריאל**

מספר: 1,308,000 ש"ח  
מספר: 12,100 ש"ח  
מספר: 78

לחצו למידע נוסף במדלן

חדרים	דירות חדשות	מספר שנים 90-ה	מספר שנים 70-ה
3	-	864,000	80-ה
4	1,156,000	993,000	80-ה
5	1,552,000	1,156,000	80-ה

# חלוקת עוגה ל- $n$ אנשים

סימונים:

$C$  – העוגה כולה.

$X_i$  – הפרוסה שקיבל משתתף  $i$ .

$V_i$  – פונקציית הערך של משתתף  $i$ .

תכונות:

1. חלוקה פרופורציונלית (proportional):

$$\text{For all } i: \quad V_i(X_i) \geq V_i(C) / n$$

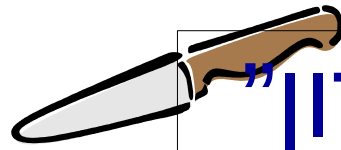
2. חלוקה ללא קנאה (envy-free):

$$\text{For all } i, j: \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

חידה: מה יותר קשה?



# חלוקה פרופורציונלית



אלג. "המפחית האחרון"

– Last Diminisher –  
הוגו שטיינהאוס 1948

- **עמי** מסמן  $n/1$  בעיניו.
- אם **תמי** חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל- $n/1$ .
- וכן **רמי** וכו'.
- האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
- ממשיכים ברקורסיה.



# אלגוריתם המפחית האחרון

**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות  $n/1$  מערך העוגה בעיניו. **הוכחה:** נניח שערך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח ל- $n-1$  שחקנים. עכשיו יש  $n$ . אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים  $n-1$  שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות  $n-1$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*



# אלגוריתם המפחית האחרון

**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב-  $O(n^2)$  שאילות.

**הוכחה:** בכל סיבוב שחקן אחד יוצא  $n$  סיבובים.

בכל סיבוב צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת.

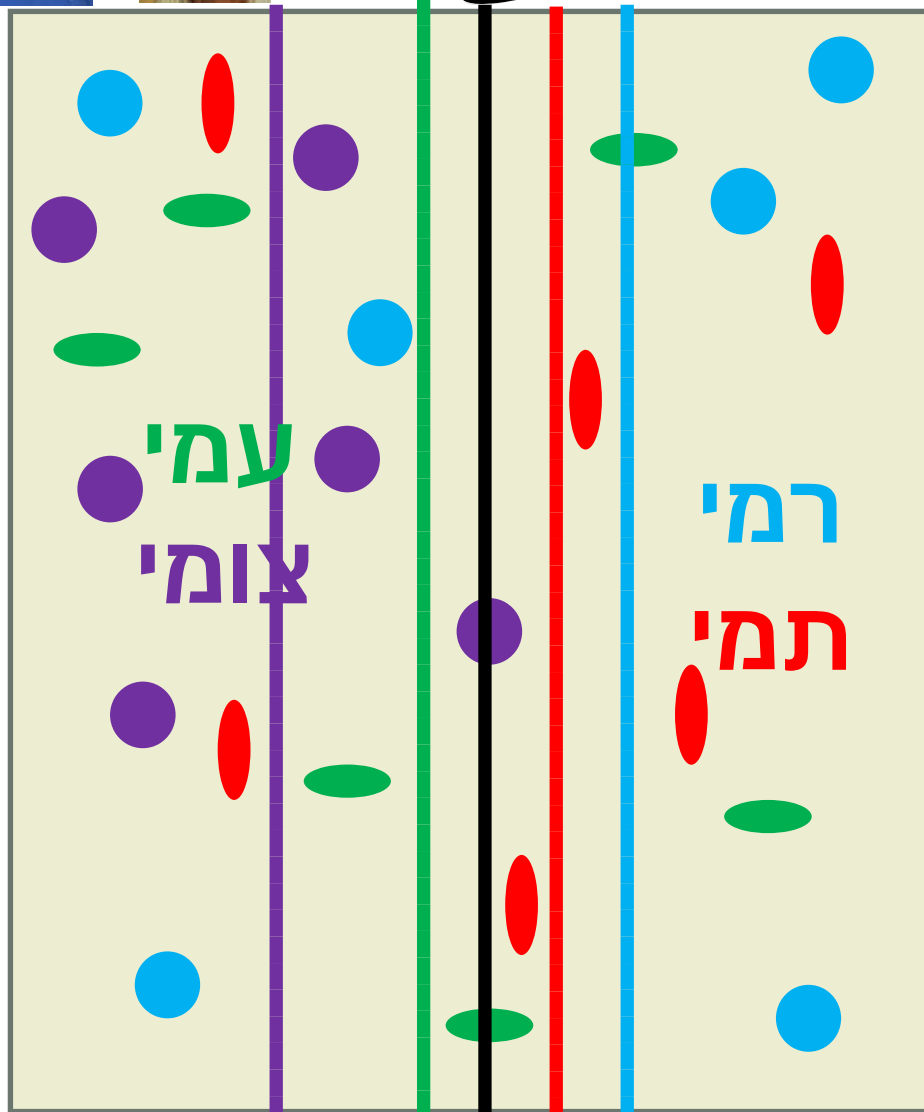
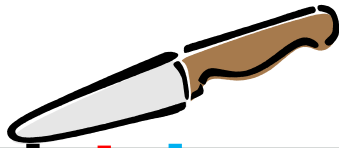
סה"כ  $O(n^2)$  שאילות. \*\*\*

עבור כלכלנים – זה מספיק.

אבל מדעני-מחשב שואלים:

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

# חלוקה פרופורציונלית מהירה



אלגוריתם אבן-פז –

- Even-Paz

שמעון אבן ועזריה פז, '84

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי  $1/2$  בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקווים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

# אלגוריתם אבן-פז

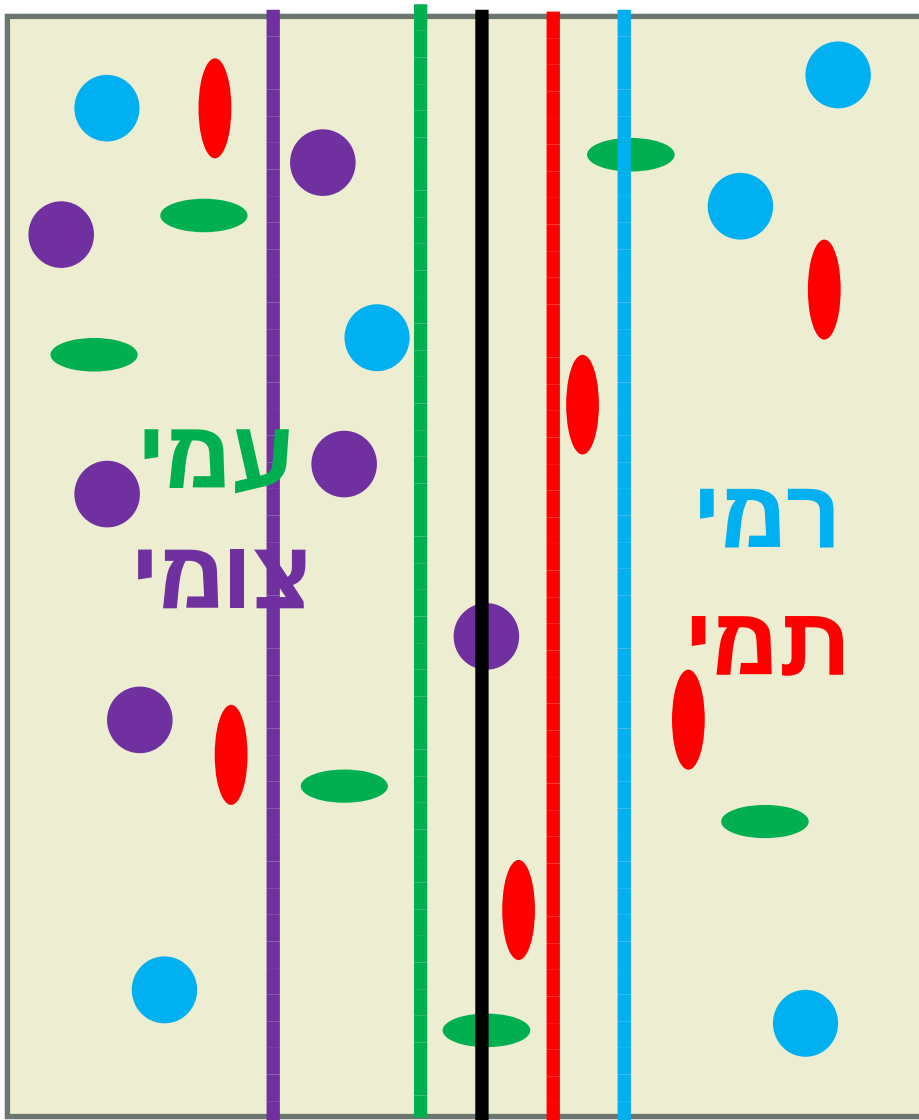
מה עושים כש- $n$  איזוגי?

- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

$$(n-1)/2 : (n+1)/2$$

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו  $(n-1)/2$  קוים ובצד שני  $(n+1)/2$  קוים.

- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.



# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרפורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1 חלקי  $n$  מערך העוגה בעיניו.

**הוכחה:** נניח שערך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד  $n-1$ . עכשיו יש  $n$ . כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות  $k$ , ויש בו  $k$  שחקנים, כאשר  $k$  הוא  $n/2$  או  $(n+1)/2$  או  $(n-1)/2$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*



# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז משתמש

ב-  $O(n \log n)$  שאילות.

**הוכחה:** נעגל את  $n$  למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל סיבוב, גודל הקבוצות קטן פי 2. לכן מספר הסיבובים הוא לכל היותר  $\log_2(2n)$ .  
בכל סיבוב, שואלים כל שחקן שאילתה אחת.  
לכן הסיבוכיות  $O(n \log n)$ .

# חלוקה פרופורציונלית מהירה

נניח שמותר לשאול את השחקנים שאילתות משני סוגים:

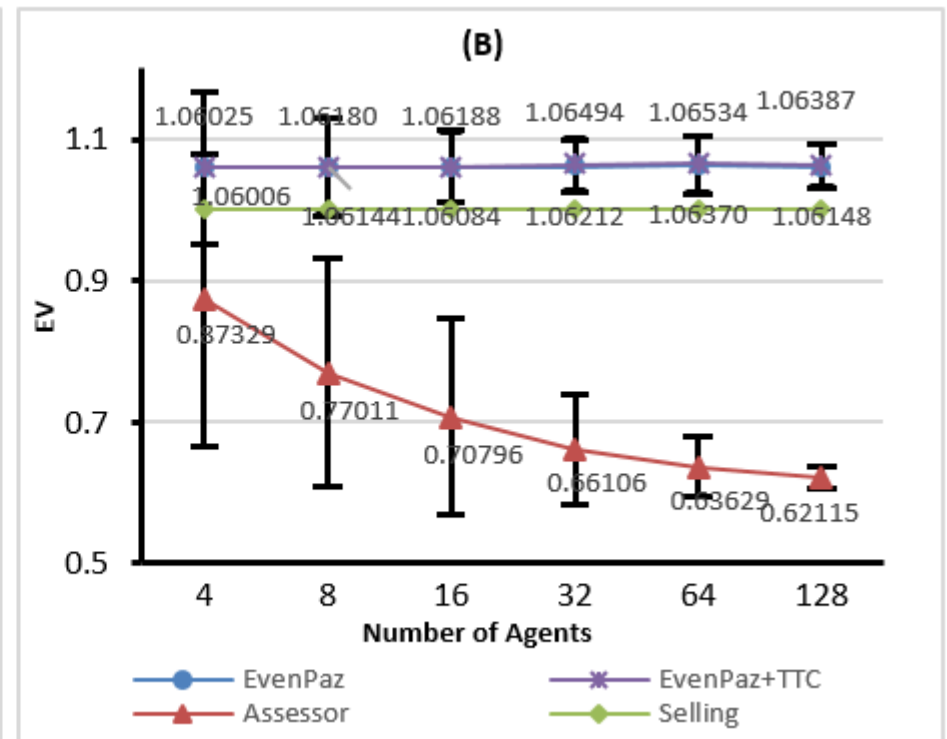
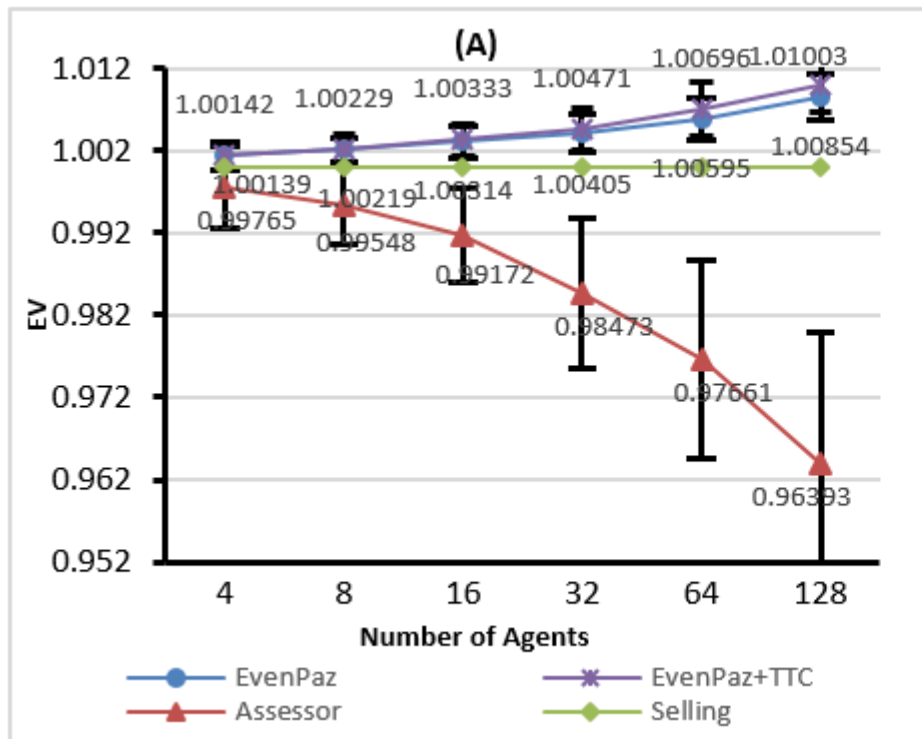
- הערכה (Eval) – חישוב ערך של פרוסה נתונה;
- סימון (Mark) – סימון פרוסה עם ערך נתון.

**משפט:** כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך לפחות  $n \log n$  שאילתות מסוג זה (Edmonds 2006, Woeginger 2007).

**מסקנה:** אלגוריתם אבן-פז – הכי מהיר שאפשר.

# אלגוריתם אבן-פז על נתוני אמת

מחקר של איתי שטכמן (סטודנט לתואר שני) וד"ר ריקה גונן השווה את הביצועים של אלגוריתם אבן-פז לשיטות החלוקה המקובלות, שהן מכירה והערכת שמאי, על ערכי קרקע בישראל (מאתר מדל"ן) ובניו זילנד. נבדקו מדדים רבים, למשל, הערך הנמוך ביותר של משתתף. אבן-פז ניצח:

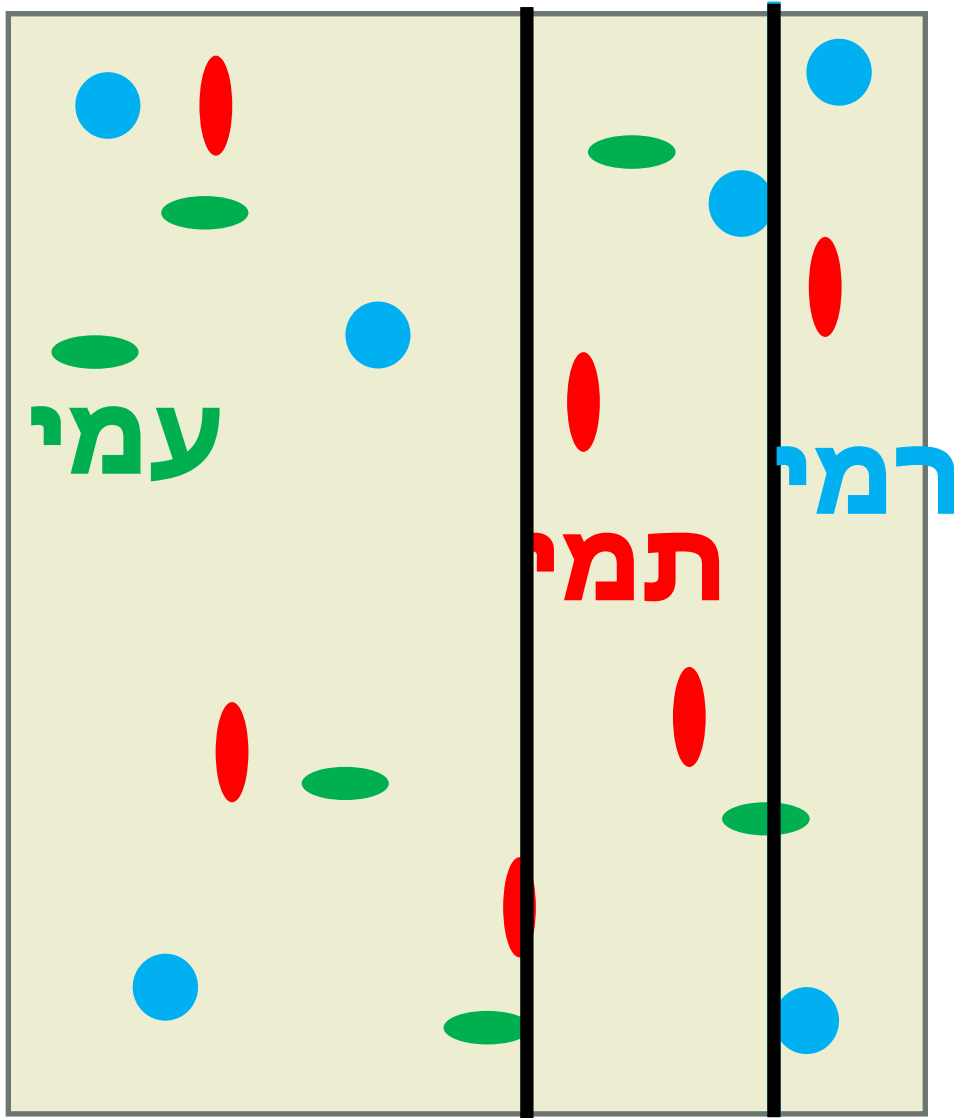


# קנאה

האלגוריתמים שראינו  
לא מבטיחים שהחלוקה  
תהיה ללא קנאה.

קנאה זה דבר מעצבן –  
ולא רק בני אדם -

[https://www.youtube.com/results?search\\_query=monkey+envy+experiment](https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment)



אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?