

## מטלה 2 קורס אלגוריתמים כלכליים

שאלה 1: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא שיפור פארטו חזק של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
  - מצב ב נקרא יעיל פארטו חלש אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור פארטו חזק שלו.
- א. תנו דוגמא לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה פארטו.
- ב. הוכיחו שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה פארטו-חלשה
- ג. הוכיחו, שאם כל השאר כל השחקנים מייחסים ערך חיובי ממש לכל משאב, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.
- ד. הוכיחו, שאם לכל השחקנים יש הערכות זהות, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

## תשובה:

- א. תנו דוגמא לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה פארטו.
- דוגמא לחלוקה שהיא יעילה פארטו חלש: שדה עגבניות ומלפפונים חצי **מלפפונים** חצי **עגבניות**, שני שחקנים **עמי** אוהב רק **מלפפונים** **תמי** אוהב רק **עגבניות**. נבחין במקרה הבא:
- עמי** לקח את כל הירקות בשדה למרות שהוא אוהב רק **מלפפונים**
- במקרה הזה לא קיים שיפור פארטו חזק כי **עמי** קיבל את כל **המלפפונים**. זה גורר שזו חלוקה יעילה-פארטו-חלשה, אך אם הוא יוותר על החצי **עגבניות**, עבור **תמי**, מכאן החלוקה יעילה-פארטו. לכן הראנו דוגמא לחלוקה יעילה-פארטו-חלשה אבל לא יעילה-פארטו. (בגלל שעמי לא השתפר זה לא שיפור פארטו חזק)

תמי

עמי	תמי

עמי	תמי

ב. הוכיחו שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה פארטו-חלשה  
הגדרה: חלוקה אגליטרית היא חלוקה הממקסמת את  $z = \max_x \min_i V_i(X_i)$ , כאשר  $x$  רץ על כל החלוקות.  
i רץ על כל השחקנים. צריך להוכיח שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלשה.

**הוכחה:**

נקח חלוקה אגליטרית נניח בשלילה שהיא לא יעילה-פארטו-חלשה, לכן מההגדרה קיימת חלוקה שהיא שיפור-פארטו-חזק, שיפור פארטו חזק בהגדרה הוא שיפור טוב יותר של כל המשתתפים, כלומר לכל השחקנים יש ערך גבוהה יותר מהחלוקה הקודמת לפי הגדרת שיפור פארטו חזק, כלומר שיפרנו את הערך הקטן ביותר, גבוהה יותר מהבחירה האגליטרית, בסתירה למקסימאליות של הבחירה של  $z$ . מכאן נובע שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלשה.

**יעילות אגליטרית**

הגדרה: חלוקה אגליטרית (egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר:  

$$\max_x \min_i V_i(X_i)$$

אלגוריתם: הגדר משתנה  $z$  המייצג את הערך הקטן ביותר. פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z \\ &\text{subject to} && V_i(X_i) \geq z \text{ for all } i \text{ in } 1, \dots, n \end{aligned}$$

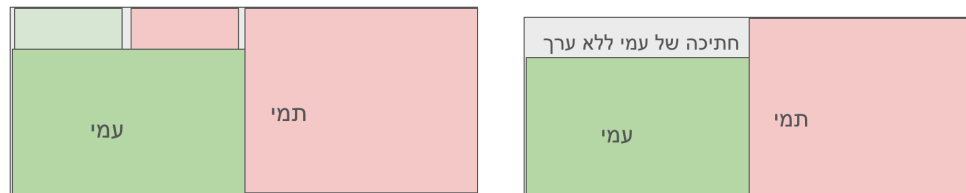
עמים	נפט	פלדה	
40.25, 39.75	19	1	עמי:
39.75, 39.25	1	20	תמי:

ג. הוכיחו. שאם כל השחקנים מייחסים ערך חיובי ממש לכל משאב, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

נתונה חלוקה יעילה-פארטו-חלשה וקבוצת משתתפים בגודל  $n$  שמעריכים כל משאב עם ערך חיובי.

#### הוכחה:

נניח בשלילה שחלוקה זו לא יעילה-פארטו, לכן קיים משתתף שיש עבורו שיפור-פארטו, כלומר קיים משתתף שיכול לחלק משאב למשתתף אחר מבלי לגרוע מעצמו. נחלק את המשאב הזה ל  $n$  המשתתפים כך שכל משתתף יקבל חתיכה בגודל  $1/n$  וכך קיבלנו חלוקה חדשה שבה כל אחד מהמשתתפים העלאה את הערך שלו כי כולם מעריכים את המשאבים במספר חיובי - סתירה לכך שהחלוקה היא יעילה-פארטו-חלשה. לדוגמא:



המצב הבא יש לנו את עמי ותמי שניהם שווים, בשלילה אך לעמי קיימת חתיכה עם משאב שהוא יכול לחלק, נחלק את החתיכה האפורה לעמי ותמי מהנתון שהשחקנים מעריכים כל משאב עם ערך חיובי נקבל שיפור-פארטו-חזק בסתירה לנתון שהחלוקה היא יעילה-פארטו-חלשה

ד. הוכיחו. שאם לכל השחקנים יש הערכות זהות, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו. נתונה חלוקה יעילה-פארטו-חלשה וקבוצת משתתפים בגודל  $n$ , שמעריכים בצורה זהה.

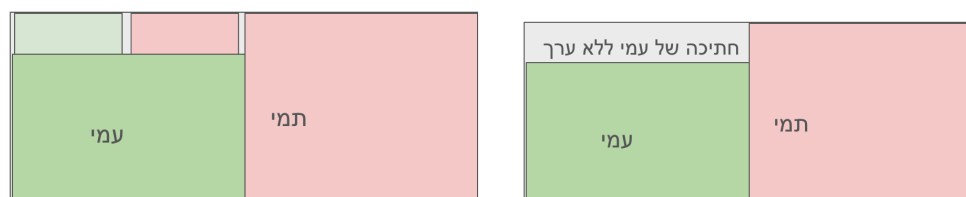
#### הוכחה:

נניח בשלילה שחלוקה זו לא יעילה-פארטו

#### מקרה א אותו מקרה כמו סעיף ג'

לכן קיים משתתף שיש עבורו שיפור-פארטו, כלומר קיים משתתף שיש לו משאב שאפשר לחלק למשתתף אחר מבלי לגרוע מעצמו, אבל מפני שכל המשתתפים מעריכים במידה שווה ניתן לחלק את החתיכה ל  $n$  חלקים ולשפר את כולם, כך נוצר שיפור-פארטו-חזק מה שבא בסתירה לנתון שהחלוקה הנתונה היא יעילה-פארטו-חלשה.

לדוגמא:



המצב הבא יש לנו את עמי ותמי שניהם שווים, בשלילה אך לעמי קיימת חתיכה עם משאב שהוא יכול לחלק, נחלק את החתיכה האפורה לעמי ותמי מהנתון שהשחקנים מעריכים כל משאב עם ערך חיובי נקבל שיפור-פארטו-חזק בסתירה לנתון שהחלוקה היא יעילה-פארטו-חלשה

#### מקרה ב

במקרה והחתיכה שניתנת לחלק למשתתף אחר היא מוערכת כאפס (חסרת ערך) אז אין שיפור פארטו כי היא לא מעלה את ערכם של המשתתפים האחרים מכיוון שכולם מעריכים במידה שווה ולכן החלוקה מלכתחילה היא יעילה-פארטו.