# חלוקה הוגנת ויעילה של חפצים בדידים

אראל סגל-הלוי

# חלוקת חפצים הוגנת ויעילה

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF** ויעילה.

*האם כשהחפצים בדידים קיימת חלוקה **EF1** ויעילה?*

כשה"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה.

*האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו?*

**כן!** התגלה ב-2016.

# מיקסום מכפלת הערכים

(Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, 2016)

**משפט**: נניח ש:

* ההעדפות חיבוריות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

**הוכחה**: יעילות פארטו – ברורה.

EF1 – בשקף הבא.

# מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

**המשך**: נניח ש-$i$ מקנא ב-$j$. נסתכל על כל החפצים בסל של $j$. לכל חפץ $g$, נבדוק את יחס הערכים:

$$V_i(g) / V_j(g)$$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ-$j$ ל-$i$. המכפלה בחלוקה החדשה  שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$[V_i(X_i)+V_i(g)]*[V_j(X_j)-V_j(g)] \quad \leq \quad V_i(X_i)*V_j(X_j)$$

$$\rightarrow \; V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

# מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

$$\rightarrow\ V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

**המשך:** החפץ g נבחר כך שיחס הערכים שלו הוא הכי גדול ב-$X_j$:

$$V_i(X_j) / V_j(X_j) \quad \leq \quad V_i(g) / V_j(g)$$

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_j(X_j) * V_i(X_j) / V_j(X_j) \quad \leq \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) \quad \leq \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) - V_i(g) \quad \leq \quad V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את $g$ מהסל של $j$, אז $i$ כבר לא מקנא. ***

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

הבננו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת?

א. חיפוש במרחב המצבים;

ב. תיכנות ליניארי -->

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

- נסמן: $V_i(g)$ = Value of good $g$ to player $i$.
- $x_{i,g}$ = quantity of good $g$ given to player $i$.
- אנחנו רוצים לפתור את הבעיה:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

- כאשר ה- $x_{i,g}$ רציפים, זה קל.
- כאשר ה- $x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

הבעיה המקורית היא קמורה אבל לא ליניארית, ולכן קשה.

**משפט**: בעיית מיקסום מכפלת הערכים עם חפצים בדידים היא NP-קשה.

הטריק: ננסה להפוך את הבעיה לליניארית.

צעד ראשון:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$\text{s.t.} \quad W_i \leq \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$\max \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$\text{s.t.} \quad W_i \le \log(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g))$$

$$\forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

צעד ראשון:
הבעיה עדיין לא
ליניארית.

צעד שני: נניח שכל
הערכים הם בין 1
ל-1000. נחליף את
האילוץ האמצעי
ב-1000 אילוצים
ליניאריים:

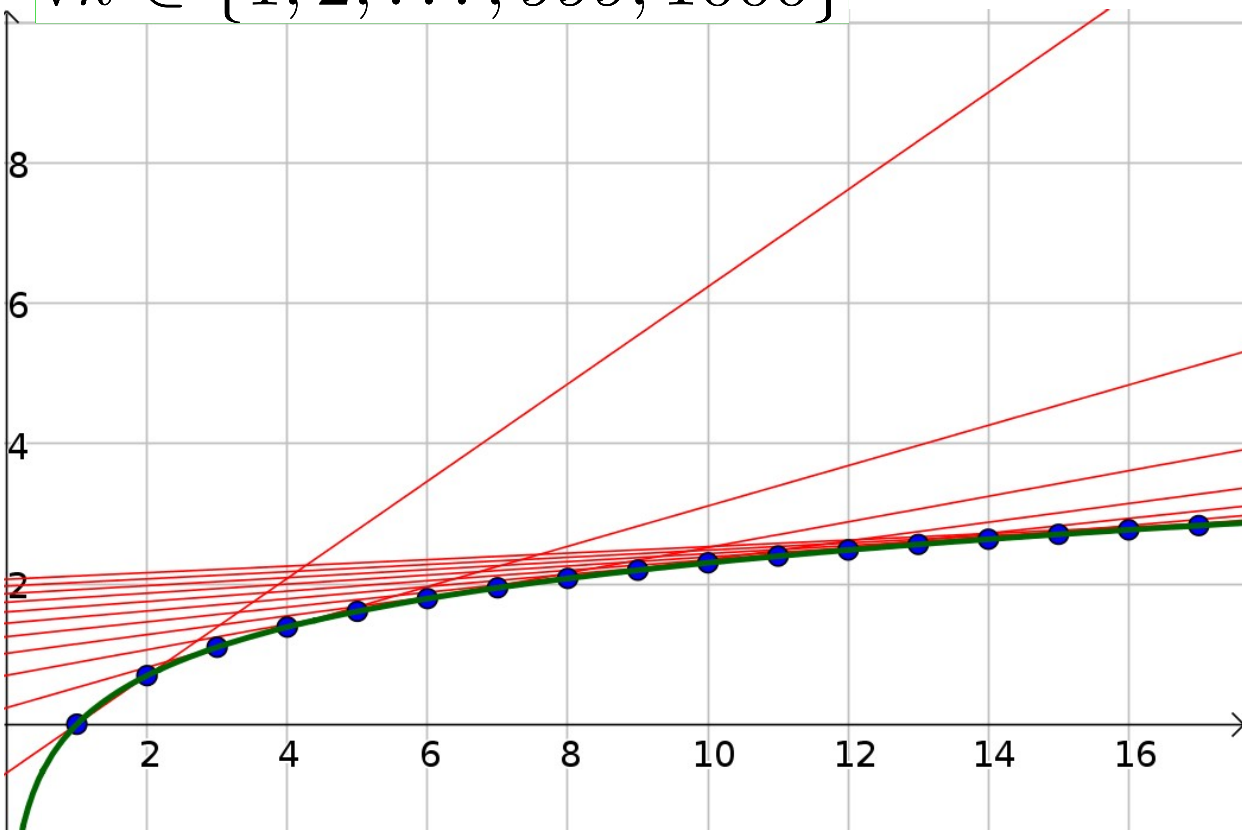
$$W_i \le \log k + [\log(k+1) - \log k] \cdot \left[\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g) - k\right]$$

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, 999, 1000\}$$

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$W_i \leq \log k + [\log(k+1) - \log k] \cdot \left[\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g) - k\right]$$

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, 999, 1000\}$$




הרעיון: מחליפים את הפונקציה הלוגריתמית באוסף של 1000 פונקציות ליניאריות שחוסמות אותה מלמעלה.

פתרון אופטימלי לבעיה הליניארית הוא גם פתרון אופטימלי לבעיה המקורית!

# מיקסום מכפלת הערכים – מימוש

http://www.spliddit.org/apps/goods

# שאלה פתוחה

בעיית מיקסום מכפלת הערכים היא NP-קשה.

אבל, המטרה שלנו היא לא מיקסום מכפלת הערכים – המטרה שלנו היא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה-עד-חפץ-1.

תיאורטית, אפשר להשיג את המטרה הזאת גם בדרכים אחרות.

**האם קיים אלגוריתם פולינומיאלי המוצא חלוקה יעילה-פארטו ו-EF1?**