

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שמעדיפים לשמור בלילה, יש כאלה שמעדיפים לשמור דווקא בצהריים, וכו'. עליכם למצוא חלוקה פרופורציונלית, שבה כל ילד מקבל משמרת קשירה.

א. [חימום]. בסעיף זה הניחו שהילדים **אוהבים** לשמור על התינוקות - כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר. באיזה אלגוריתם תשתמשו?

ב. בסעיף זה הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור - כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות. הסבירו למה האלגוריתם של סעיף א לא עובד.

ג. תארו אלגוריתם חדש המוצא חלוקה פרופורציונלית קשירה של התורנויות. הדגימו את האלגוריתם, והוכיחו את נכונותו.

שאלה 2: אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי לא יעיל

הראו דוגמה, שבה אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי מחזיר חלוקה לא יעילה-פארטו. פרטו את שלבי החישוב.

שאלה 3: חלוקה עם זכויות לא-שוות

נתונים n שותפים בקרקע, שלכל אחד מהם יש חלק אחר בקרקע: לאדם i יש חלק t_i מהקרקע, כאשר הסכום של כל ה- t_i הוא 1. לדוגמה, ייתכן שלשחקן א מגיעה $1/7$ מהקרקע, לשחקן ב מגיעות $2/7$, ולשחקן ג מגיעות $4/7$.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים t_i .

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הדגימו את פעולת האלגוריתם, הוכיחו את נכונותו, וחשבו את סיבוכיות זמן-הריצה שלו.

* ג. כיתבו אלגוריתם כנ"ל, שסיבוכיות זמן הריצה שלו היא $O(2^n \log(D))$, כאשר D הוא המכנה המשותף של כל השברים t_i (בדוגמה למעלה $D=7$).

שאלה 4: חלוקה סופר-פרופורציונלית

חלוקת-עוגה נקראת סופר-פרופורציונלית אם כל שחקן מקבל פרוסה ששווה עבורו יותר מ 1 חלקי- n משווי העוגה כולה.

א. הראו דוגמה לחלוקה סופר-פרופורציונלית בין שלושה אנשים.

ב. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה סופר-פרופורציונלית לשלושה אנשים. הוכיחו את תשובתכם.

* ג. נתונה בעיית חלוקת עוגה לשלושה אנשים. נתון שיש שני אנשים כלשהם (נניח עמי ותמי), שמייחסים ערך שונה לפרוסת-עוגה כלשהי X . כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הפרוסה X , ומוצא חלוקה סופר-פרופורציונלית. רמז: אפשר להעזר באלגוריתם של שאלה 3 (גם אם לא פתרתם אותה).

שאלה 5: שיקולים אסטרטגיים באלגוריתם חלוקה

א. אתם חולקים עוגה עם עוד מישהו בשיטת "חיתוך וברירה", כאשר אתם החותכים. הצלחתם להשיג מידע מדויק על ההערכה של השחקן השני. איך תחתכו את העוגה באופן שייתן לכם את הערך הגבוה ביותר האפשרי? הדגימו מצב שבו תוכלו להשיג 100% מהערך הכולל שלכם, ומצב אחר שבו תוכלו להשיג רק 50% מהערך הכולל שלכם.

ב. הוכיחו, שאם אין לכם מידע מדויק על ההערכה של השחקן השני, אז כל חיתוך עוגה שאינו מתאים להוראות האלגוריתם עלול לתת לכם פרוסה ששווה עבורכם פחות מ-50% מהערך הכולל שלכם.