DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales
Armadura

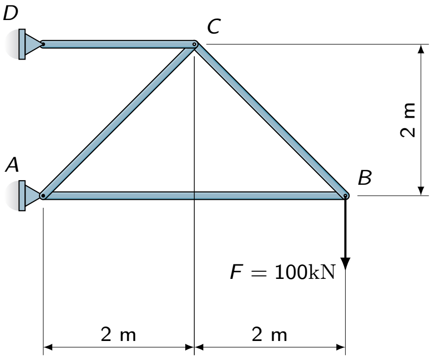
Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
1 de diciembre de 2020

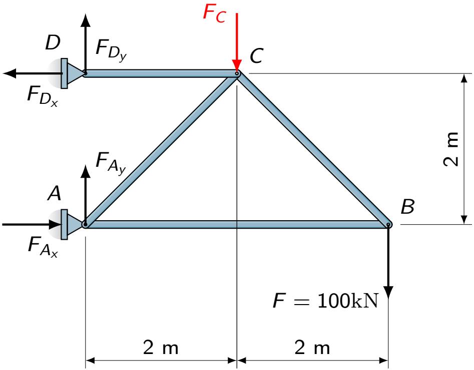
Ejercicio armadura:

Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero. La sección transversal de cada miembro es $A = 400$ [mm^2] y su módulo elástico es E $= 200$ [GPa]. Utilice el teorema de Castigliano.



Ejercicio armadura:

Primero se resuelve la estática en la armadura generando una fuerza ficticia F_C:



$$\sum M_A = 0: \quad 2F_{D_x} - 2F_C - 4F = 0$$

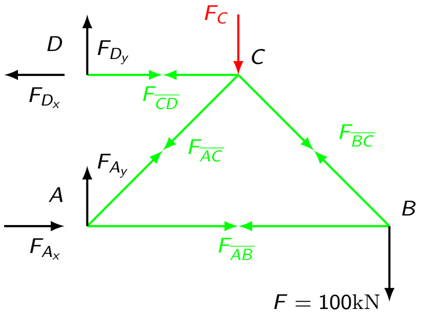
$$\sum M_D = 0: \quad 2F_{A_x} - 2F_C - 4F = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad F_{A_x} - F_{D_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{A_y} + F_{D_y} - F - F_C = 0$$

Ejercicio armadura:

Ahora se obtiene una expresión para las fuerzas de cada barra mediante el método de los nodos (se asume que todas las barras están a **tracción**):



$$
\begin{aligned}
&\textit{Nodo A}: \sum F_x: \; F_{A_x} + F_{\overline{AC}}\cos(45^\circ) + F_{\overline{AB}} = 0 && \sum F_y: F_{A_y} + F_{\overline{AC}}\sin(45^\circ) = 0\\
&\textit{Nodo B}: \sum F_x: \; -F_{\overline{AB}} - F_{\overline{BC}}\cos(45^\circ) = 0 && \sum F_y: F_{\overline{BC}}\sin(45^\circ) - F = 0\\
&\textit{Nodo C}: \sum F_x: \; F_{\overline{BC}}\cos(45^\circ) - F_{\overline{AC}}\cos(45^\circ) - F_{\overline{CD}} = 0 && \sum F_y: \; -F_{\overline{BC}}\sin(45^\circ) - F_{\overline{AC}}\sin(45^\circ) - F_C = 0\\
&\textit{Nodo D}: \sum F_x: \; F_{\overline{CD}} - F_{D_x} = 0 && \sum F_y: F_{D_y} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ejercicio armadura:

Reordenando las ecuaciones de la estática es posible obtener, considerando la ecuación de fuerzas en y del Nodo D, las fuerzas de los soportes en función de F (Fuerza conocida de 100 [kN]) y F_C (Fuerza ficticia):

$$\begin{aligned} F_{D_y} &= 0 \\ F_{A_x} &= F_{D_x} = 2F + F_C \\ F_{A_y} &= F + F_C \end{aligned}$$

Con esta información se obtienen las fuerzas de cada barra:

$$\begin{aligned} F_{\overline{AB}} &= -F \\ F_{\overline{AC}} &= -\frac{1}{\sin(45^\circ)}(F + F_C) \\ F_{\overline{BC}} &= \frac{1}{\sin(45^\circ)}F \\ F_{\overline{CD}} &= 2F + F_C \end{aligned} \tag{2}$$

Ejercicio armadura:

Considerando como elementos deformables las barras **AB**, **AC**, **BC** y **CD**, se obtiene la función que determina el desplazamiento nodal C por **efectos mecánicos** mediante la energía de deformación del sistema:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \sum (\delta_i{}^M) \left(\frac{\partial F_i}{\partial F_j} \right) \\ \delta_C &= \sum F_i \frac{L_i}{AE} \left(\frac{\partial F_i}{\partial F_C} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Calculando las derivadas parciales se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\overline{AB}}}{\partial F_C} &= 0 \\ \frac{\partial F_{\overline{AC}}}{\partial F_C} &= -\frac{1}{\sin(45^\circ)} \\ \frac{\partial F_{\overline{BC}}}{\partial F_C} &= 0 \\ \frac{\partial F_{\overline{CD}}}{\partial F_C} &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Ejercicio armadura:

La ecuación del desplazamiento nodal es:

$$\frac{\partial U}{\partial F_C} = \delta_C = \delta_{\overline{AB}}\left(\frac{\partial F_{\overline{AB}}}{\partial F_C}\right) + \delta_{\overline{AC}}\left(\frac{\partial F_{\overline{AC}}}{\partial F_C}\right) + \delta_{\overline{BC}}\left(\frac{\partial F_{\overline{BC}}}{\partial F_C}\right) + \delta_{\overline{CD}}\left(\frac{\partial F_{\overline{CD}}}{\partial F_C}\right)$$
$$\delta_C = F_{\overline{AB}}\frac{L_{\overline{AB}}}{AE}\left(\frac{\partial F_{\overline{AB}}}{\partial F_C}\right) + F_{\overline{AC}}\frac{L_{\overline{AC}}}{AE}\left(\frac{\partial F_{\overline{AC}}}{\partial F_C}\right) + F_{\overline{BC}}\frac{L_{\overline{BC}}}{AE}\left(\frac{\partial F_{\overline{BC}}}{\partial F_C}\right) + F_{\overline{CD}}\frac{L_{\overline{CD}}}{AE}\left(\frac{\partial F_{\overline{CD}}}{\partial F_C}\right) \tag{5}$$

Ahora se reemplazan las derivadas parciales de la ecuación 4 y las fuerzas en función de F_C de la ecuación 2 en la ecuación 5. Considerando a $F_C = 0$ debido a que es una fuerza ficticia:

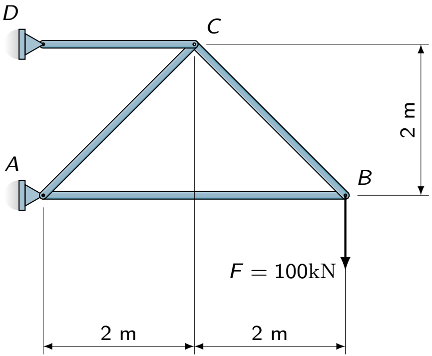
$$\delta_C = F_{\overline{AB}}\frac{L_{\overline{AB}}}{AE}\cancelto{0}{\left(\frac{\partial F_{\overline{AB}}}{\partial F_C}\right)} + F_{\overline{AC}}\frac{L_{\overline{AC}}}{AE}\cancelto{-\frac{1}{\sin(45^\circ)}}{\left(\frac{\partial F_{\overline{AC}}}{\partial F_C}\right)} + F_{\overline{BC}}\frac{L_{\overline{BC}}}{AE}\cancelto{0}{\left(\frac{\partial F_{\overline{BC}}}{\partial F_C}\right)} + F_{\overline{CD}}\frac{L_{\overline{CD}}}{AE}\cancelto{1}{\left(\frac{\partial F_{\overline{CD}}}{\partial F_C}\right)}$$
$$\delta_C = F_{\overline{AC}}\frac{L_{\overline{AC}}}{AE}\left(-\frac{1}{\sin(45^\circ)}\right) + F_{\overline{CD}}\frac{L_{\overline{CD}}}{AE}$$
$$\delta_C = -\frac{F}{\sin(45^\circ)}\frac{L_{\overline{AC}}}{AE}\left(-\frac{1}{\sin(45^\circ)}\right) + 2F\frac{L_{\overline{CD}}}{AE}$$

Con F $=$ 100000 [N], $L_{\overline{AC}} = 2000\sqrt{2}$ [mm], $L_{\overline{CD}} = 2000$ [mm], $A = 400$ [mm^2] y E $=$ 200000 [MPa]. El desplazamiento vertical en el sentido de la fuerza F_C en el Nodo C:

$$\delta_C = 12{,}0710[mm]$$

Ejercicio armadura:

Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero. La sección transversal de cada miembro es $A = 400$ [mm^2], su módulo elástico es E $= 200$ [GPa] y tienen un coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 12{\cdot}10^{-6}$ [1/$^\circ$C]. Considere un aumento de temperatura de 60°C previo a la aplicación de la carga de 100 [kN]. Utilice el teorema de Castigliano.



Ejercicio armadura con variación de temperatura:

El sistema de ecuaciones utilizado es el mismo empleado para la situación sin variación de temperatura, por lo tanto, el ejercicio puede ser resuelto utilizando directamente la ecuación de energía de deformación con variación de temperatura. Considerando como elementos deformables las barras **AB**, **AC**, **BC** y **CD**, se obtiene la función que determina el desplazamiento nodal C por **efectos mecánicos y térmicos** mediante la energía de deformación del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial F_j} &= \delta_j = \sum ({\delta_i}^M + {\delta_i}^T) \left(\frac{\partial F_i}{\partial F_j}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial F_C} &= \delta_C = \sum \left(F_i \frac{L_i}{AE} + \alpha(\Delta T) L_i\right) \left(\frac{\partial F_i}{\partial F_C}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora se reemplazan las derivadas parciales de la ecuación 4 y las fuerzas en función de F_C de la ecuación 2 en la ecuación 6. Considerando a $F_C = 0$ debido a que es una fuerza ficticia, que **todas las barras están a tracción** tal como se observa en la ecuación 1, por lo que δ_T toma un valor positivo en cada barra:

$$\delta_C = \left(-\frac{F}{\sin(45^\circ)} \frac{L_{\overline{AC}}}{AE} + \alpha(\Delta T) L_{\overline{AC}}\right) \left(-\frac{1}{\sin(45^\circ)}\right) + 2F \frac{L_{\overline{CD}}}{AE} + \alpha(\Delta T) L_{\overline{CD}}$$

Con F = 100000 [N], $L_{\overline{AC}} = 2000\sqrt{2}$ [mm], $L_{\overline{CD}} = 2000$ [mm], $A = 400$ [mm^2] y E = 200000 [MPa], $\alpha = 12{\cdot}10^{-6}$ [1/°C], $\Delta T = 60^\circ$. El desplazamiento vertical en el sentido de la fuerza F_C en el Nodo C:

$$\delta_C = 10{,}6310[mm]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales
Armadura

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
1 de diciembre de 2020