DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Diseño Computarizado

Métodos numéricos pt.2

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
15 de marzo de 2021

Gauss-Jordan:

- El método de Gauss-Jordan es una variación de la eliminación de Gauss. La principal diferencia consiste en que cuando una incógnita se elimina en el método de Gauss-Jordan, esta es eliminada de todas las otras ecuaciones.
- Todos los renglones se normalizan al dividirlos entre su elemento pivote.
- Al normalizar, se genera una matriz identidad en lugar de una triangular.
- Al crear una matriz identidad, no es necesario la sustitución hacia atrás, como en el método de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & c_3^{(n)} \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & & = c_1^{(n)} \\ & x_2 & = c_2^{(n)} \\ & & x_3 = c_3^{(n)} \end{array} \tag{1}$$

Desarrollo del método Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots c_3 \end{bmatrix} \\
&\frac{a_{(1,:)}}{a_{11}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \vdots c_1^{(n)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots c_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{(2,:)} - a_{(1,:)} * a_{21} \\ a_{(3,:)} - a_{(1,:)} * a_{31} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \vdots c_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} & \vdots c_2^{(n)} \\ 0 & a_{32}^{(n)} & a_{33}^{(n)} & \vdots c_3^{(n)} \end{bmatrix} \\
&\frac{a_{(2,:)}}{a_{22}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \vdots c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(n)} & \vdots c_2^{(n)} \\ 0 & a_{32}^{(n)} & a_{33}^{(n)} & \vdots c_3^{(n)} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{(1,:)} - a_{(2,:)} * a_{12} \\ a_{(3,:)} - a_{(2,:)} * a_{32} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(n)} & \vdots c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(n)} & \vdots c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \vdots c_3^{(n)} \end{bmatrix} \\
&\frac{a_{(3,:)}}{a_{33}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(n)} & \vdots c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(n)} & \vdots c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots c_3^{(n)} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{(1,:)} - a_{(3,:)} * a_{13} \\ a_{(2,:)} - a_{(3,:)} * a_{23} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots c_3^{(n)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Recordando N-R Generalizado:

- Funciones a ingresar:

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{q}) = \begin{Bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{q}) \\ \cdots \\ \phi_m(\boldsymbol{q}) \end{Bmatrix} \tag{3}$$

- Jacobiano:

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

- Sistema a desarrollar:

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_i) * (\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i) = -\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{q}_i) \tag{5}$$

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_i) * \Delta\boldsymbol{q} = -\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{q}_i)$$

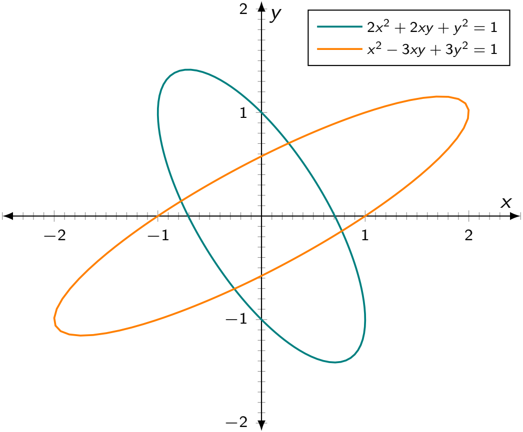
- Error a utilizar:

$$|\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i| < \epsilon \tag{6}$$

Ejercicio Gauss-Jordan y N-R Generalizado:

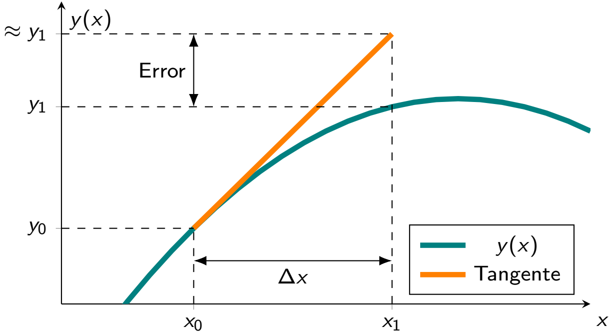
Hallar las 4 intersecciones de las dos siguientes elipses:

$$2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \quad \text{and} \quad x^2 - 3xy + 3y^2 = 1$$



Ecuaciones diferenciales: Euler

El método de Euler **estima** el valor siguiente del eje de las ordenadas (y_{i+1}) a partir de la tangente, de las siguientes ecuaciones $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:



La primera derivada ofrece una estimación del paso siguiente mediante en el punto (x_0)

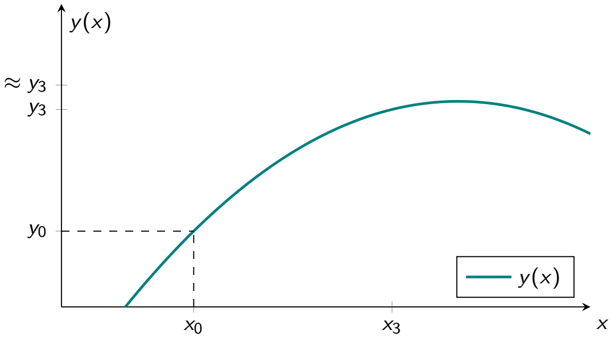
$$\phi = \frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) \tag{7}$$

donde $f(x, y)$ es evaluada en (x_i, y_i). De tal forma que la expresión del método de Euler queda:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot \Delta x \tag{8}$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

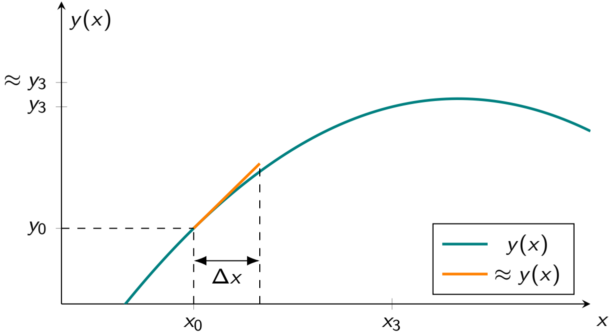
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

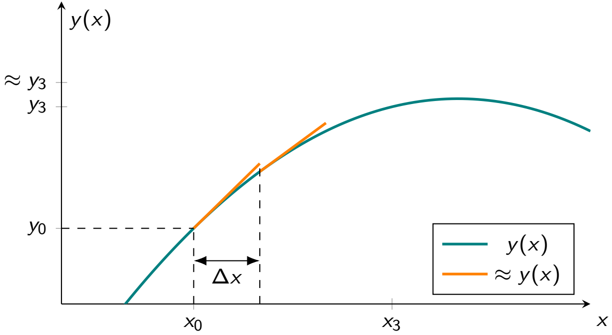
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

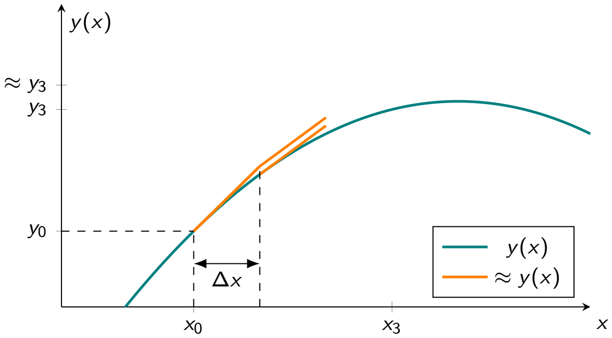
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

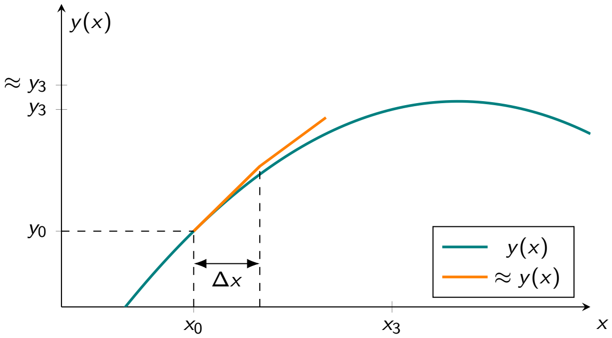
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

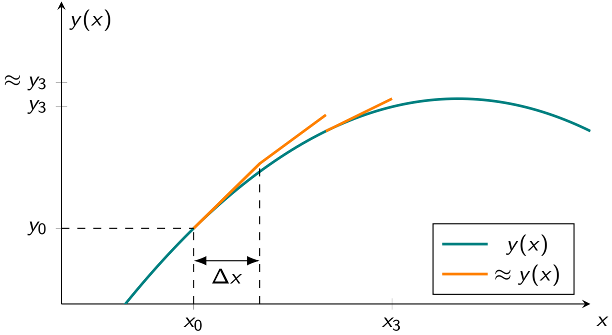
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

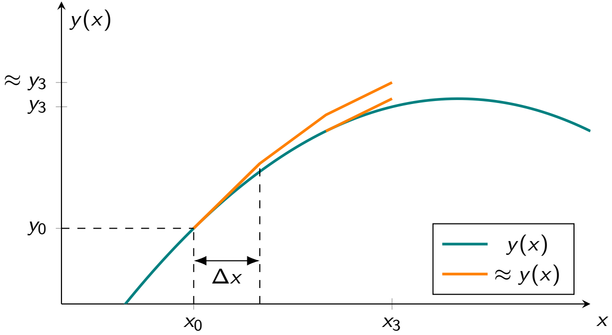
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

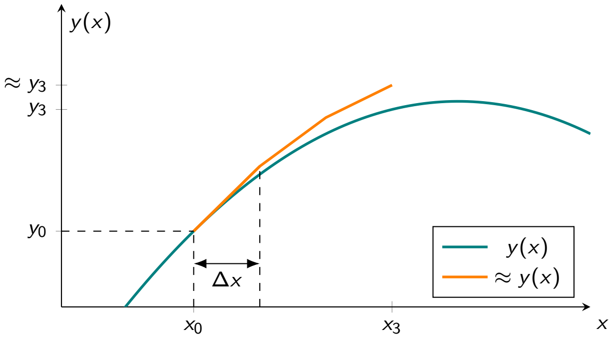
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

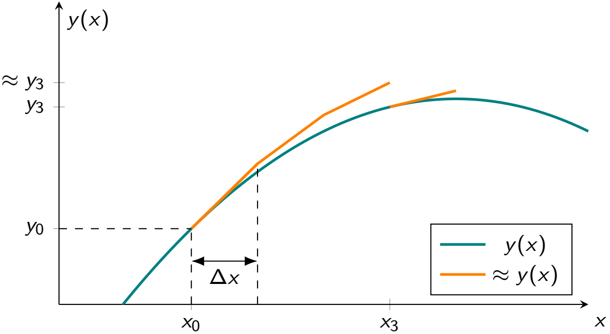
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

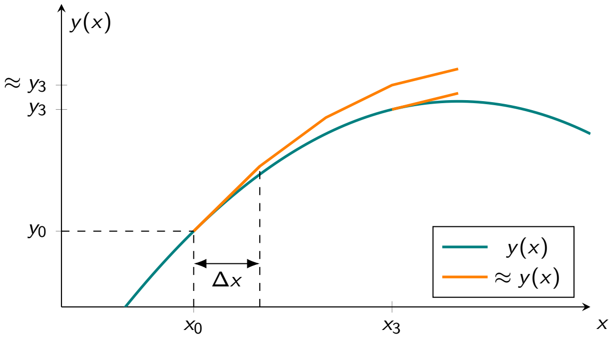
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

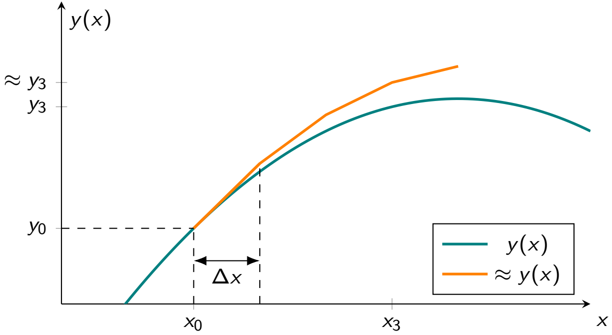
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

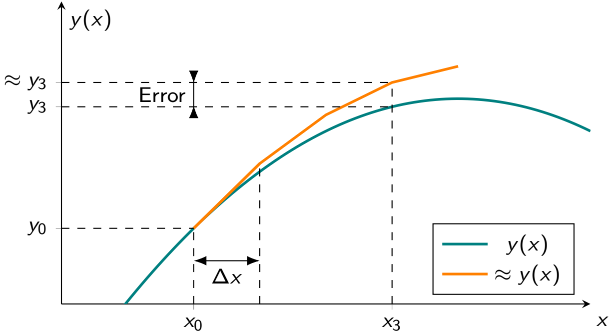
Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ecuaciones diferenciales: Euler

Para una aproximación continua se repite el proceso anterior continuamente:



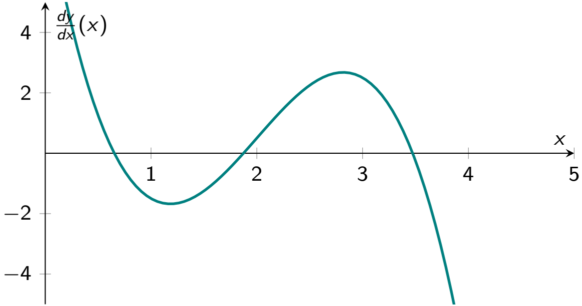
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ejercicio: Método Euler

Aproximar numéricamente, mediante el método de Euler, la función y(x):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5 \tag{9}$$

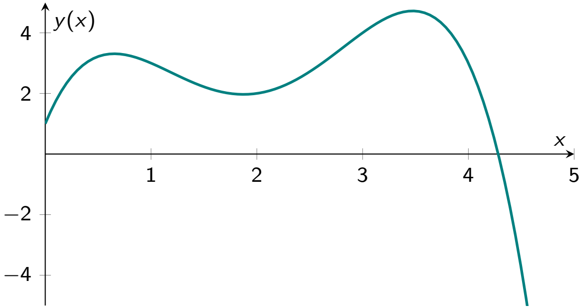
desde x = 0 hasta x = 4 con un tamaño de paso $\Delta x = h = 0,5$. Con condición inicial de $y(0) = 1$.



Ejercicio: Método Euler

La solución exacta está dada por la siguiente ecuación:

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1 \quad (10)$$



Ecuaciones diferenciales: Runge-Kutta

Teniendo un problema del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, se puede resolver promediando varias aproximaciones intermedias para el siguiente paso. Uno de los métodos que realiza esta manera es el de Runge-Kutta 4:
Primero se definen distintas aproximaciones de pendientes:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Luego se hace una ponderación de las pendientes:

$$k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{12}$$

Por lo tanto se aproxima la siguiente posición:

$$y_{i+1} = y_i + k \cdot h = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{13}$$

Orden superior

Cuando existen problemas superior a orden 1, se crean variables auxiliares para poder solucionar el problema, por ejemplo el movimiento de un péndulo se puede representar por la siguiente ecuación, asumiendo ángulos pequeños:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{g}\theta &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{l}{g}\theta \end{aligned}$$

En este caso se crea una variable auxiliar, que a la vez es otra ecuación diferencial a resolver.

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi \quad \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\phi}{dt}$$

Quedando el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{l}{g}\theta = f_\phi(\theta, \phi, t) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \phi = f_\theta(\theta, \phi, t) \end{aligned}$$

Orden superior

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{l}{g}\theta = f_\phi(t, \theta, \phi)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = f_\theta(t, \theta, \phi)$$

A este sistema se pueden aplicar cualquiera de los métodos antes descritos, por ejemplo con el de Euler:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + hf_\phi(t_i, \theta_i, \phi_i)$$
$$\theta_{i+1} = \theta_i + hf_\theta(t_i, \theta_i, \phi_i)$$

Orden superior

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{l}{g}\theta = f_\phi(t,\theta,\phi)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = f_\theta(t,\theta,\phi)$$

En el caso de Runge-Kutta, es más complejo, pues dependen de varios términos, la primera parte es:

$$k_1^\phi = f_\phi(t_i,\phi_i,\theta_i)$$
$$k_1^\theta = f_\theta(t_i,\phi_i,\theta_i)$$
$$k_2^\phi = f_\phi\left(t_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_1^\phi h, \theta_i + \frac{1}{2}k_1^\theta h\right)$$
$$k_2^\theta = f_\theta\left(t_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_1^\phi h, \theta_i + \frac{1}{2}k_1^\theta h\right)$$
$$k_3^\phi = f_\phi\left(t_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_2^\phi h, \theta_i + \frac{1}{2}k_2^\theta h\right)$$
$$k_3^\theta = f_\theta\left(t_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_2^\phi h, \theta_i + \frac{1}{2}k_2^\theta h\right)$$
$$k_4^\phi = f_\phi\left(t_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_1^\phi h, \theta_i + \frac{1}{2}k_1^\theta h\right)$$
$$k_4^\theta = f_\theta\left(t_i h, \phi_i + k_3^\phi h, \theta_i + k_3^\theta h\right)$$

Orden superior

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{l}{g}\theta = f_\phi(t, \theta, \phi)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = f_\theta(t, \theta, \phi)$$

Finalmente

$$\phi_{i+1} = \phi_i + h\frac{h}{6}\left(k_1^\phi + 2k_2^\phi + 2k_3^\phi + k_4^\phi\right)$$
$$\theta_{i+1} = \theta_i + h\frac{h}{6}\left(k_1^\theta + 2k_2^\theta + 2k_3^\theta + k_4^\theta\right)$$

Diseño Computarizado

Métodos numéricos pt.2

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
15 de marzo de 2021