DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales
Flexión

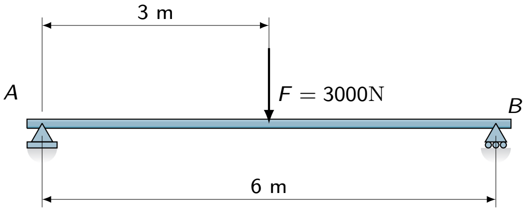
Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

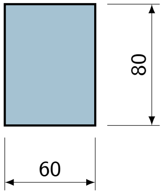
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
6 de enero de 2021

Ejercicio flexión en 3 puntos:

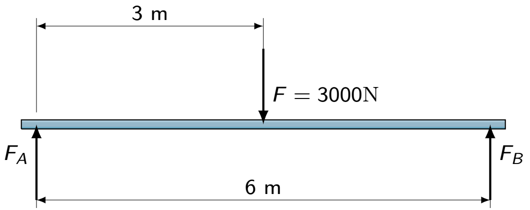
Se aplica una fuerza vertical en el centro de la viga de sección transversal rectangular. Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la viga, junto al diagrama de fuerza cortante y momento flector.





Ejercicio flexión en 3 puntos:

Primero se resuelve la estática en la viga:



$$\sum F = 0 :$$

$$F_A + F_B = F \tag{1}$$

$$\sum M_a = 0 :$$

$$6F_B = 3F \tag{2}$$

$$\rightarrow F_A = 1500[N] \qquad F_B = 1500[N]$$

Ejercicio flexión en 3 puntos:

Se obtiene de la función de la fuerza y momento a lo largo de la viga:

Tramo x: 0-3 [m]

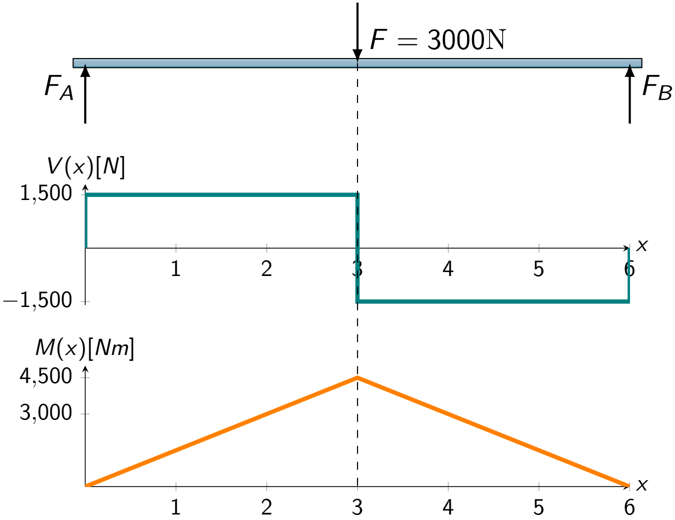
$$\begin{aligned} V(x) &= F_A \\ M(x) &= F_A \cdot x \end{aligned} \tag{3}$$

Tramo x: 3-6 [m]

$$\begin{aligned} V(x) &= F_A - F \\ M(x) &= F_A \cdot x - F \cdot (3 - x) \end{aligned} \tag{4}$$

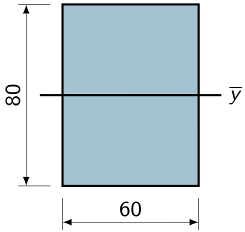
Ejercicio flexión en 3 puntos:

Luego los diagramas



Ejercicio flexión en 3 puntos:

Ahora se calcula la inercia a partir del perfil de la viga:



$$I = \frac{60 \cdot 80^3}{12} = 2560000[mm^4]$$

Ejercicio flexión en 3 puntos:

El esfuerzo cortante se calcula mediante la formulación de *Collignon-Jourawsky*:

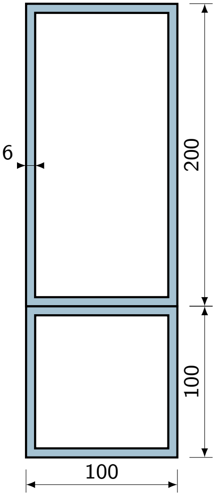
$$
\begin{aligned}
Q &= A\Delta\overline{y} = (60 \cdot 40) \cdot 20 \\
\tau_{max} &= \frac{VQ}{bI} = \frac{\frac{F}{2} \cdot (60 \cdot 40) \cdot 20}{20 \cdot 2560000} = 0{,}468[MPa]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

El Esfuerzo de flexión se calcula mediante la formulación de *Navier*:

$$
\sigma_{max} = \frac{M_{max}c}{I} = \frac{M_{max}y_{max}}{I} = \frac{\frac{F}{2} \cdot 3000 \cdot 40}{2560000} = 70{,}31[MPa] \tag{6}
$$

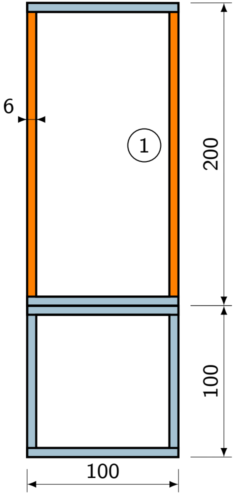
Ejercicio inercia de perfil:

Determinar la inercia del perfil de viga que se presenta a continuación mediante dos formas de cálculo, el primero a partir de la división del perfil en distintas áreas y el segundo mediante la eliminación de áreas sin material.



Ejercicio inercia de perfil:

División de área.

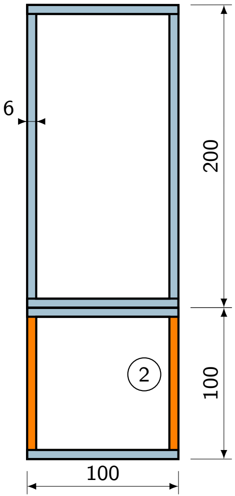


Se calcula la inercia del área 1, considerando que dicha sección de área y centro de gravedad se repite dos veces.

$$A_1 = 6 \cdot (200 - 6 \cdot 2) = 1128[\mathrm{mm}^2] \qquad \overline{y_1} = 200[\mathrm{mm}]$$

Ejercicio inercia de perfil:

División de área.

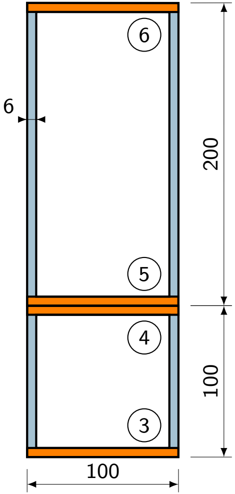


Se calcula la inercia del área 2, considerando que dicha sección de área y centro de gravedad se repite dos veces.

$$A_2 = 6 \cdot (100 - 6 \cdot 2) = 528[\mathrm{mm}^2] \qquad \overline{y_2} = 50[\mathrm{mm}]$$

Ejercicio inercia de perfil:

División de área.



Se calcula las áreas 3, 4, 5 y 6 con sus respectivos centros de gravedad.

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 100 \cdot 6 = 600[\mathrm{mm}^2]$$

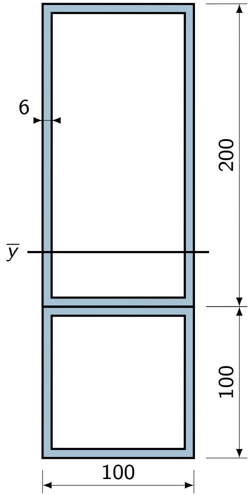
$$\overline{y_3} = 3[\mathrm{mm}] \qquad \overline{y_4} = 97[\mathrm{mm}] \qquad \overline{y_5} = 103[\mathrm{mm}] \qquad \overline{y_6} = 297[\mathrm{mm}]$$

Se calcula el centro de gravedad del perfil

$$\overline{y} = \frac{2\overline{y_1}A_1 + 2\overline{y_2}A_2 + \overline{y_3}A_3 + \overline{y_4}A_4 + \overline{y_5}A_5 + \overline{y_6}A_6}{2A_1 + 2A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} = 140{,}756[\mathrm{mm}]$$

Ejercicio inercia de perfil:

División de área.



Se calcula la inercia considerando el teorema de Steiner.

$$I_1 = \frac{1}{12} 6 \cdot (200 - 6 \cdot 2)^3 = 3322336[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_1' = I_1 + A_1 \left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right)^2 = 7281408{,}09[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 6 \cdot (100 - 6 \cdot 2)^3 = 340736[\mathrm{mm}^4]$$

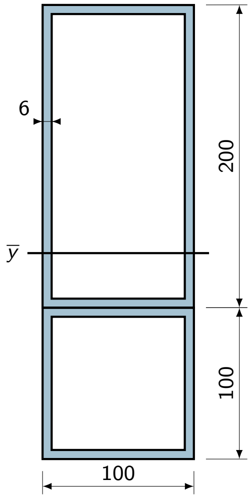
$$I_2' = I_2 + A_2 \left(\overline{y}_2 - \overline{y}\right)^2 = 4689717[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = \frac{1}{12} 100 \cdot 6^3 = 1800[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_{3-6}' = 4 \cdot I_3 + A_3 \cdot \sum_{i=3}^{n=6} \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2 = 28044626{,}56[\mathrm{mm}^4]$$

Ejercicio inercia de perfil:

División de área.

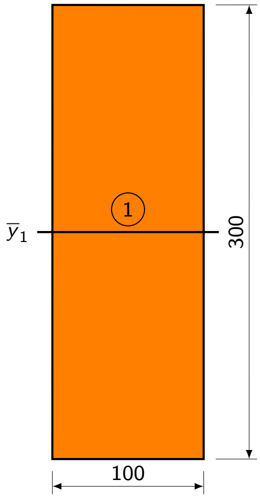


Se calcula la inercia total del sistema restando las áreas con huecos.

$$I = 2 \cdot I_1' + 2 \cdot I_2' + I_{3-6}' = 51986876{,}77[\mathrm{mm}^4]$$

Ejercicio inercia de perfil:

Eliminación de áreas sin material.

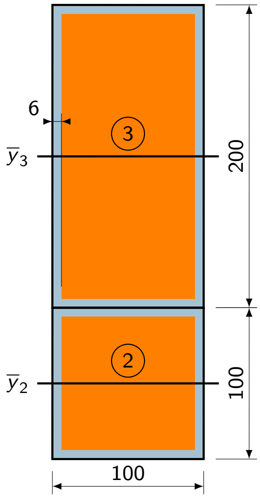


Se calcula el área y centro de gravedad del perfil sin considerar los huecos.

$$A_1 = 100 \cdot 300 = 30000[\mathrm{mm}^2] \qquad \overline{y_1} = 150[\mathrm{mm}]$$

Ejercicio inercia de perfil:

Eliminación de áreas sin material.



Se calcula el área y centro de gravedad de los huecos del perfil.

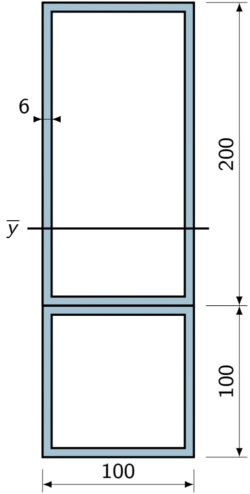
$$A_2 = (100 - 6 \cdot 2) \cdot (100 - 6 \cdot 2) = 7744[\mathrm{mm}^2] \qquad \overline{y_2} = 50[\mathrm{mm}]$$

$$A_3 = (100 - 6 \cdot 2) \cdot (200 - 6 \cdot 2) = 16544[\mathrm{mm}^2] \qquad \overline{y_3} = 200[\mathrm{mm}]$$

$$\overline{y} = \frac{\overline{y_1}A_1 - \overline{y_2}A_2 - \overline{y_3}A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = 140{,}756[\mathrm{mm}]$$

Ejercicio inercia de perfil:

Eliminación de áreas sin material.



Se calcula la inercia considerando el teorema de Steiner.

$$I_1 = \frac{1}{12} 100 \cdot 300^3 = 225000000[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_1' = I_1 + A_1 \left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right)^2 = 227563378{,}29[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_2 = \frac{1}{12}\left(100 - 6 \cdot 2\right) \cdot \left(100 - 6 \cdot 2\right)^3 = 4997461{,}3[\mathrm{mm}^4]$$

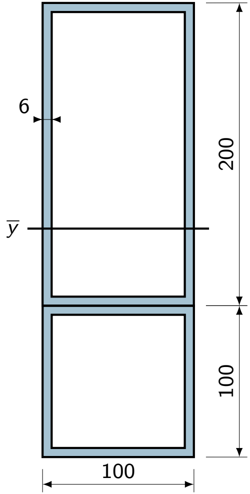
$$I_2' = I_2 + A_2 \left(\overline{y}_2 - \overline{y}\right)^2 = 68782516{,}06[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_3 = \frac{1}{12}\left(100 - 6 \cdot 2\right) \cdot \left(200 - 6 \cdot 2\right)^3 = 48727594{,}6[\mathrm{mm}^4]$$

$$I_3' = I_3 + A_3 \left(\overline{y}_3 - \overline{y}\right)^2 = 106793985{,}45[\mathrm{mm}^4]$$

Ejercicio inercia de perfil:

Eliminación de áreas sin material.

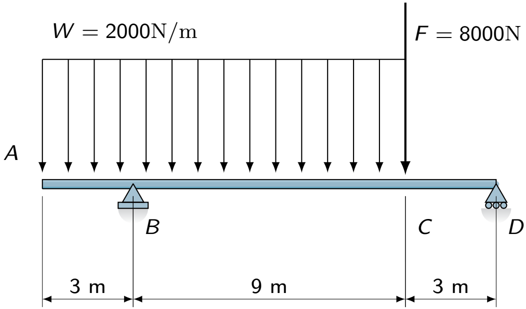


Se calcula la inercia total del sistema restando las áreas con huecos.

$$I = I_1' - I_2' - I_3' = 51986876{,}77[\mathrm{mm}^4]$$

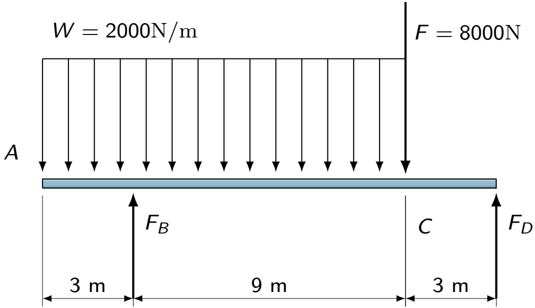
Ejercicio flexión fuerza distribuida:

Se aplica una fuerza vertical en el centro de la viga de sección transversal rectangular. Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la viga, junto al diagrama de fuerza cortante y momento flector.



Ejercicio flexión fuerza distribuida:

Primero se resuelve la estática en la viga:



$\sum F = 0$:

$$F_B + F_D = 8000 + 24000 \tag{7}$$

$\sum M_D = 0$:

$$12 \cdot F_b = 3 \cdot 8000 + 9 \cdot 24000 \tag{8}$$

$$\rightarrow F_B = 20000[N] \qquad F_D = 12000[N]$$

Ejercicio flexión fuerza distribuida:

Se obtiene de la función de la fuerza y momento a lo largo de la viga:

Tramo x: 0-3 [m]

$$\begin{aligned} V(x) &= -2000 \cdot x \\ M(x) &= -1000 \cdot x^2 \end{aligned} \tag{9}$$

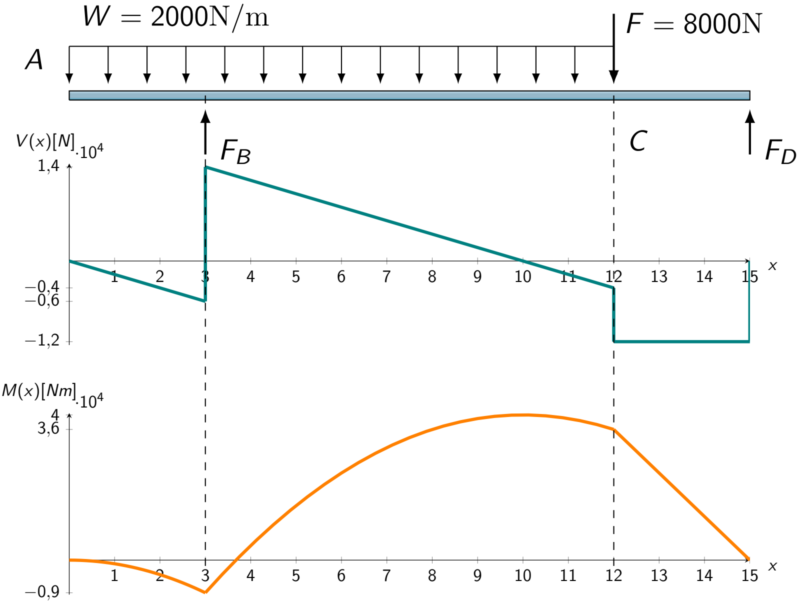
Tramo x: 3-9 [m]

$$\begin{aligned} V(x) &= -2000 \cdot x + 20000 \\ M(x) &= 1000 \cdot x^2 - 20000 \cdot (x-3) \end{aligned} \tag{10}$$

Tramo x: 12-15 [m]

$$\begin{aligned} V(x) &= -24000 + 20000 - 8000 \\ M(x) &= -24000 \cdot (x-6) - 20000 \cdot (x-3) - 80000 \cdot (x-12) \end{aligned} \tag{11}$$

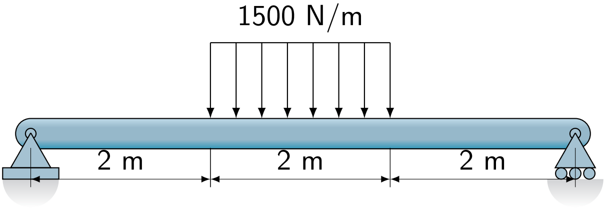
Ejercicio flexión fuerza distribuida:

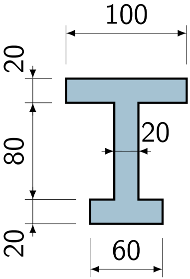


Ejemplo:

Se tiene la viga de la figura cargada con una fuerza distribuida en su centro. El detalle de la sección transversal se muestra en la figura. Determinar:

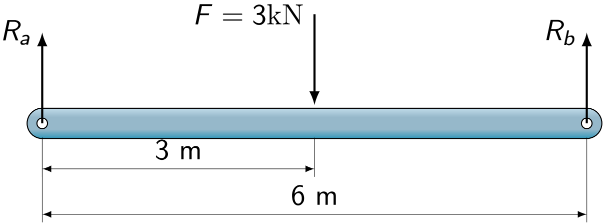
- Las zonas con mayor fuerza de corte y con mayor momento flector
- Los esfuerzos de corte máximo en las placas unidas
- Máximo esfuerzo normal.





Ejemplo:

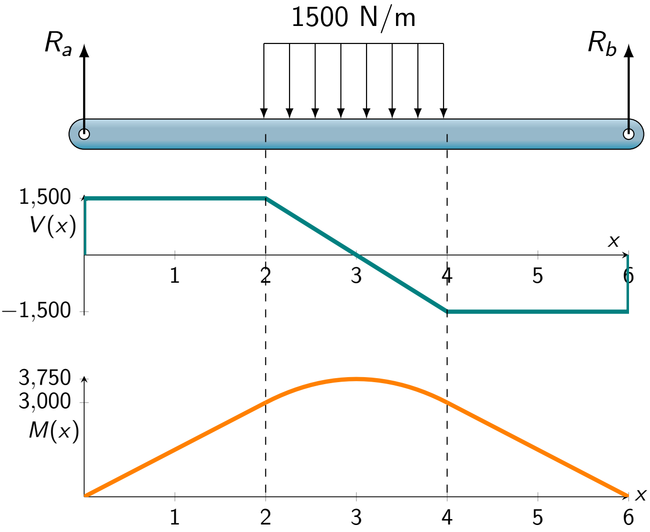
Primero se hace la estática:



$$\sum M_a : \qquad -3F + 6R_b = 0 \implies R_a = R_b = F/2 = 1500\ \mathrm{kN}$$

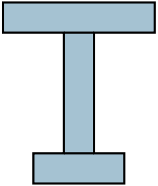
Ejemplo:

Luego los diagramas



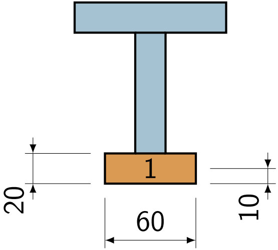
Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



Ejemplo:

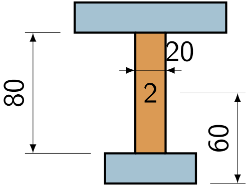
Se calculan las propiedades necesarias:



$$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_1} = 10\mathrm{mm}$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:

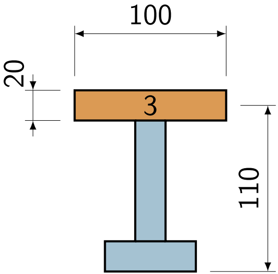


$$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_1} = 10\mathrm{mm}$$

$$A_2 = 20 \cdot 80 = 1600\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_2} = 60\mathrm{mm}$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



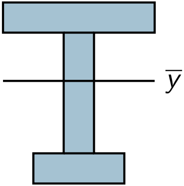
$$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_1} = 10\mathrm{mm}$$

$$A_2 = 20 \cdot 80 = 1600\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_2} = 60\mathrm{mm}$$

$$A_3 = 20 \cdot 100 = 2000\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_3} = 110\mathrm{mm}$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



$$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_1} = 10\mathrm{mm}$$

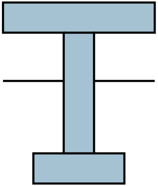
$$A_2 = 20 \cdot 80 = 1600\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_2} = 60\mathrm{mm}$$

$$A_3 = 20 \cdot 100 = 2000\mathrm{mm}^2 \qquad \overline{y_3} = 110\mathrm{mm}$$

$$\overline{y} = \frac{\overline{y_1}A_1 + \overline{y_2}A_2 + \overline{y_3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 68{,}3\mathrm{mm}$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:

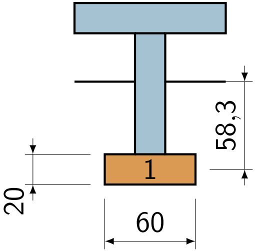


Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:

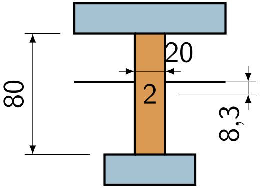
$$I_1 = \frac{1}{12} 60 \cdot 20^3 = 4000\mathrm{mm}^4$$

$$I_1' = I_1 + A_1 \Delta\overline{y}^2 = 4{,}12 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$



Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



$$I_1 = \frac{1}{12} 60 \cdot 20^3 = 4000\mathrm{mm}^4$$

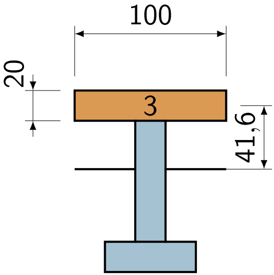
$$I_1' = I_1 + A_1 \Delta\overline{y}^2 = 4{,}12 \cdot 10^6\mathrm{mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 20 \cdot 80^3 = 8{,}5 \cdot 10^5\mathrm{mm}^4$$

$$I_2' = I_2 + A_2 \Delta\overline{y}^2 = 9{,}6 \cdot 10^5\mathrm{mm}^4$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



$$I_1 = \frac{1}{12} 60 \cdot 20^3 = 4000 \mathrm{mm}^4$$

$$I_1' = I_1 + A_1 \Delta \overline{y}^2 = 4{,}12 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 20 \cdot 80^3 = 8{,}5 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^4$$

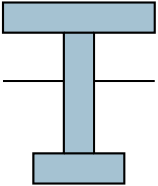
$$I_2' = I_2 + A_2 \Delta \overline{y}^2 = 9{,}6 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} 100 \cdot 20^3 = 6{,}6 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^4$$

$$I_3' = I_3 + A_3 \Delta \overline{y}^2 = 3{,}5 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$

Ejemplo:

Se calculan las propiedades necesarias:



$$I_1 = \frac{1}{12} 60 \cdot 20^3 = 4000 \mathrm{mm}^4$$

$$I_1' = I_1 + A_1 \Delta \overline{y}^2 = 4{,}12 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 20 \cdot 80^3 = 8{,}5 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^4$$

$$I_2' = I_2 + A_2 \Delta \overline{y}^2 = 9{,}6 \cdot 10^5 \mathrm{mm}^4$$

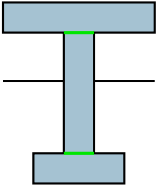
$$I_3 = \frac{1}{12} 100 \cdot 20^3 = 6{,}6 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^4$$

$$I_3' = I_3 + A_3 \Delta \overline{y}^2 = 3{,}5 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$

$$I = I_1' + I_2' + I_3' = 8{,}6 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4$$

Ejemplo:

Momentos de Área:

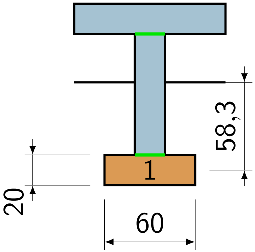


Ejemplo:

Momentos de Área:

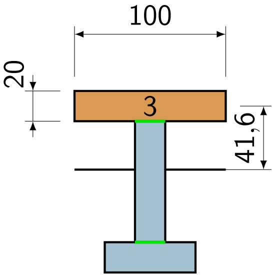
$$Q_1 = A_1 \Delta \overline{y} = 6{,}9 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{Ib} = \frac{1500 \cdot 6{,}9 \cdot 10^4}{8{,}6 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0{,}60 \ \mathrm{MPa}$$



Ejemplo:

Momentos de Área:



$$Q_1 = A_1 \Delta \overline{y} = 6{,}9 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^3$$

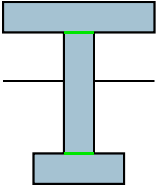
$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{Ib} = \frac{1500 \cdot 6{,}9 \cdot 10^4}{8{,}6 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0{,}60 \text{ MPa}$$

$$Q_2 = A_2 \Delta \overline{y} = 8{,}3 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^3$$

$$\tau_2 = \frac{VQ_2}{Ib} = \frac{1500 \cdot 8{,}3 \cdot 10^4}{8{,}6 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0{,}72 \text{ MPa}$$

Ejemplo:

Momentos de Área:



$$Q_1 = A_1 \Delta \bar{y} = 6{,}9 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{Ib} = \frac{1500 \cdot 6{,}9 \cdot 10^4}{8{,}6 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0{,}60 \ \mathrm{MPa}$$

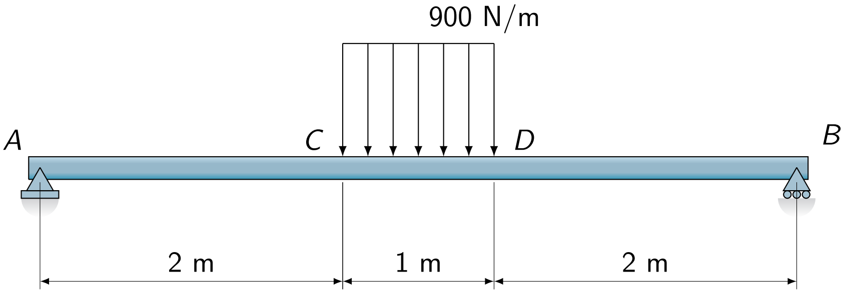
$$Q_2 = A_2 \Delta \bar{y} = 8{,}3 \cdot 10^4 \mathrm{mm}^3$$

$$\tau_2 = \frac{VQ_2}{Ib} = \frac{1500 \cdot 8{,}3 \cdot 10^4}{8{,}6 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0{,}72 \ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{3750 \cdot 10^3 \cdot 68{,}3}{8{,}6 \cdot 10^6} = 29{,}8 \ \mathrm{MPa}$$

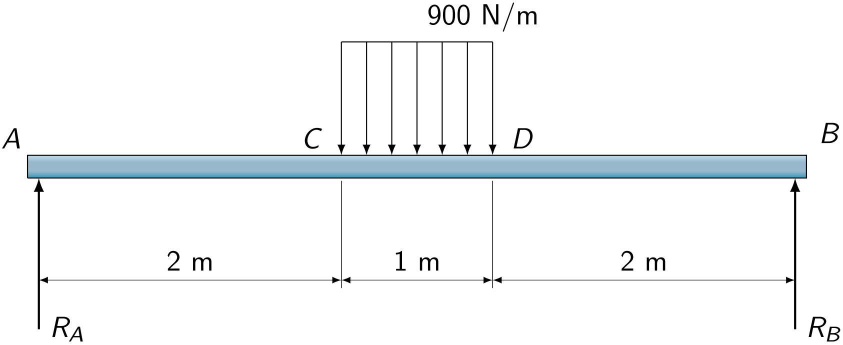
Ejemplo:

Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcule la función de la deformada en toda la viga.



Ejemplo:

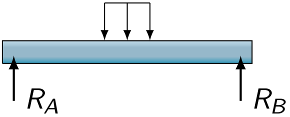
Lo primero es calcular las reacciones, por simetría ambas reacciones son iguales:

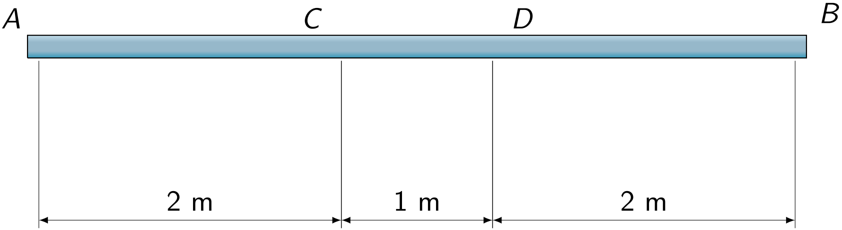


$$\sum F_y : \quad R_A - 950 + R_B = 0 \implies R_A = R_B = 450\text{N}$$

Ejemplo:

Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:

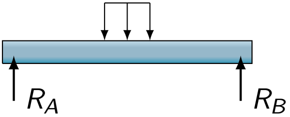


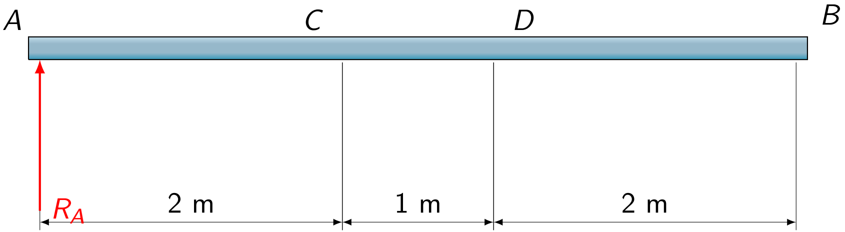


$$V(x) = \quad - \qquad + \qquad +$$

Ejemplo:

Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:

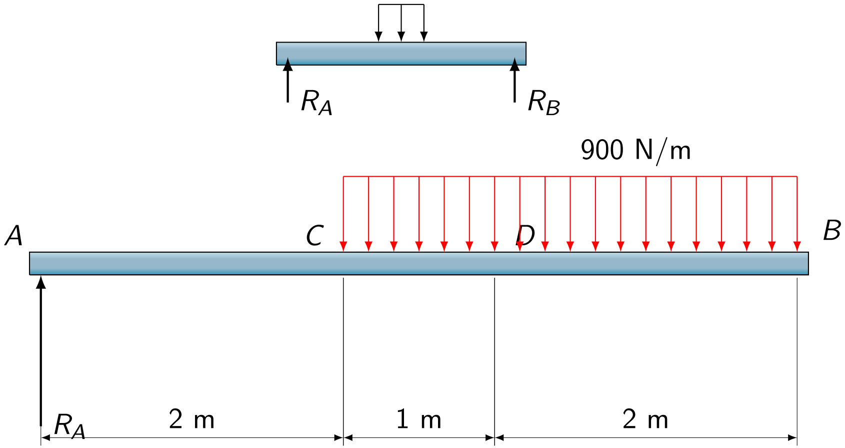




$$V(x) = R_A - \qquad + \qquad +$$

Ejemplo:

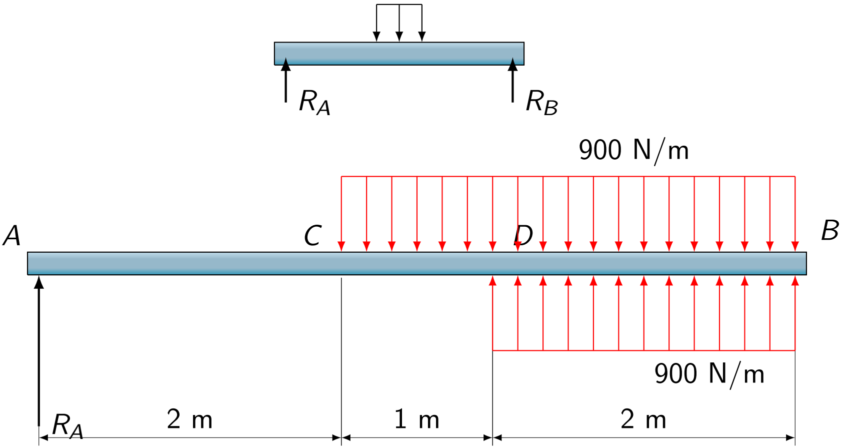
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$V(x) = R_A - 900 < x - 2 > \; + \qquad\qquad + $$

Ejemplo:

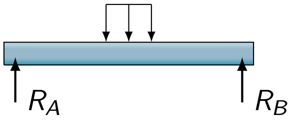
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:

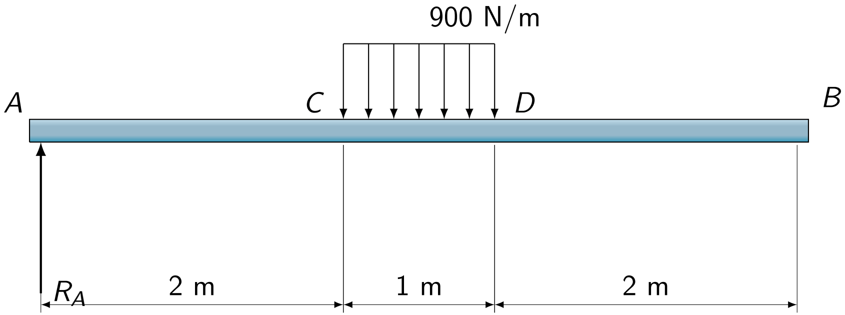


$$V(x) = R_A - 900 < x - 2 > + 900 < x - 3 > +$$

Ejemplo:

Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:

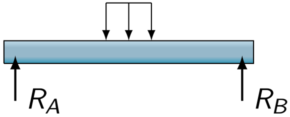


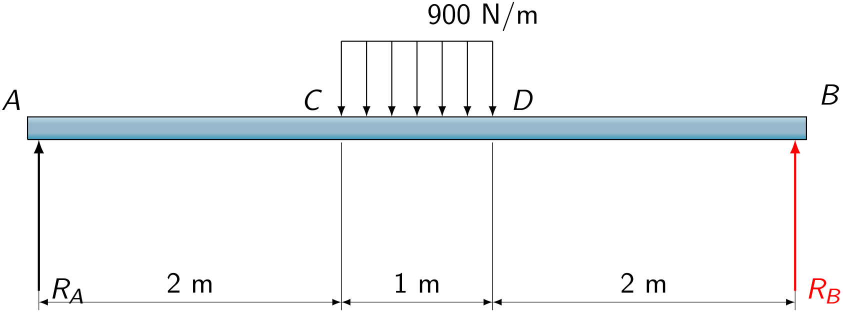


$$V(x) = R_A - 900 < x - 2 > + 900 < x - 3 > +$$

Ejemplo:

Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:





$$V(x) = R_A - 900 < x-2 > + 900 < x-3 > + R_B < x-5 >^0$$

Ejemplo:

Luego se calcula el momento y se integra dos veces, junto con imponer condiciones de borde para obtener la ecuación de la elástica:

$$V(x) = R_A - 900 < x-2 > +900 < x-3 > +R_B < x-5 >^0$$

$$M(x) = R_A x - \frac{900}{2} < x-2 >^2 + \frac{900}{2} < x-3 >^2 + R_B < x-5 >$$

$$IE\ \theta(x) = \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{900}{6} < x-2 >^3 + \frac{900}{6} < x-3 >^3 + \frac{R_B}{2} < x-5 >^2 + C_1$$

$$IE\ y(x) = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{900}{24} < x-2 >^4 + \frac{900}{24} < x-3 >^4 + \frac{R_B}{6} < x-5 >^3 + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \qquad y(5) = 0$$

Ejemplo:

En este caso debido a la simetría existen otras condiciones que se pueden aplicar (aparte de las mencionadas). Para este ejercicio se utilizaran estas alternativas para mostrar su uso.

$$y(0) = 0 \qquad \theta(2{,}5) = 0$$

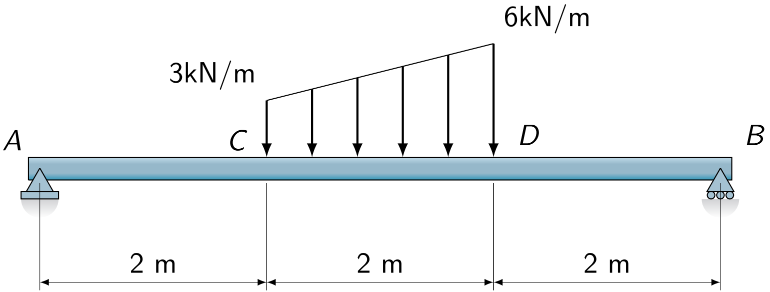
$$y(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$IE\ \theta(2{,}5) = \frac{R_A}{2} 2{,}5^2 - \frac{900}{6} < 2{,}5 - 2 >^3 + C_1 = 0 \implies C_1 = -1387{,}5[\mathrm{N\ m}^2]$$

$$IE\ y(x) = \frac{450}{6} x^3 - \frac{900}{24} < x - 2 >^4 + \frac{900}{24} < x - 3 >^4 + \frac{450}{6} < x - 5 >^3 - 1387{,}5x$$

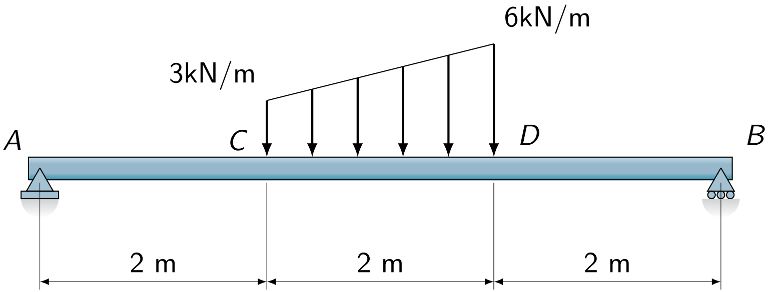
Ejemplo:

Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcule le función de la deformada en toda la viga.



Ejemplo:

Primero se calcula la fuerza equivalente de la carga distribuida y su centroide, solo para calcular las reacciones:

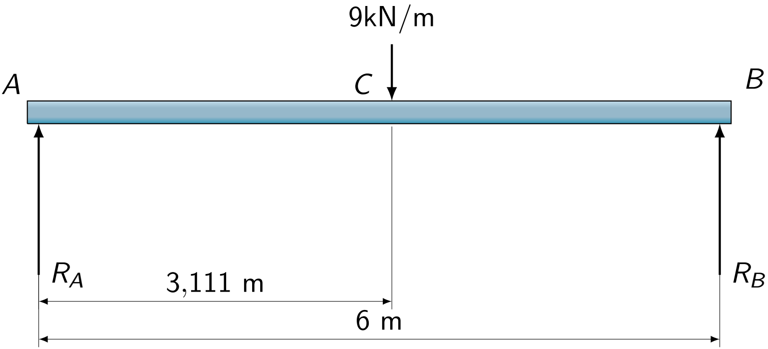


$$F_{eq} = 4{,}5 \cdot 2 = 9 \text{ kN}$$

$$\bar{y} = \frac{(3 \cdot 2) \cdot 1 + (3 \cdot 2 \cdot 0{,}5) \cdot 1{,}33}{4{,}5 \cdot 2} = 1{,}111 \text{ m}$$

Ejemplo:

Se calculan las reacciones:

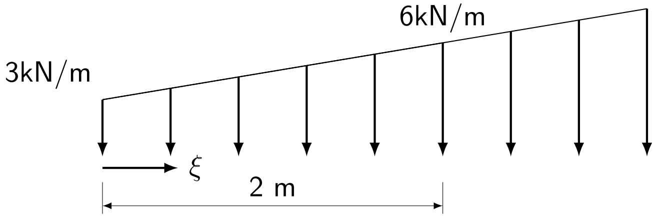


$$\sum M_A : \quad -9000 \cdot 3{,}111 + R_B \cdot 6 = 0 \implies R_B = 4667\text{N}$$

$$\sum F_y : \quad R_A - 9000 + R_B = 0 \implies R_A = 4333\text{N}$$

Ejemplo:

Luego se calcula la función distribuida con su sistema de referencia en el punto inicial.



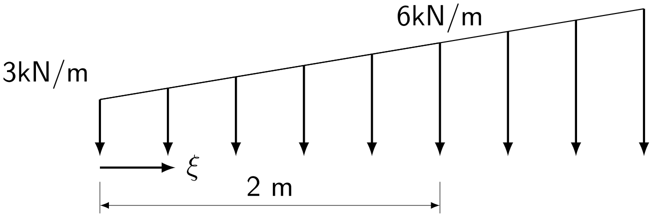
$$w(\xi) = a \cdot \xi + b \qquad w(0) = -3000[\mathrm{N/m}] \qquad w(2\mathrm{m}) = -6000[\mathrm{N/m}]$$

Por lo tanto la función:

$$w(\xi) = -1500 \cdot \xi - 3000$$

Ejemplo:

Se integra para transformarlo en cortante.



Por lo tanto la función:

$$V_w(\xi) = \int_0^{\xi} (-1500 \cdot \xi - 3000) d\xi$$

$$V_w(\xi) = -\frac{1500}{2} \cdot \xi^2 - 3000\xi$$

Ejemplo:

Luego se cambia al sistema de referencia original (x).

$$x = \xi + 2 \implies \xi = x - 2$$

$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot \xi^2 - 3000\xi = -\frac{1000}{2} \cdot (x-2)^2 - 3000(x-2)$$

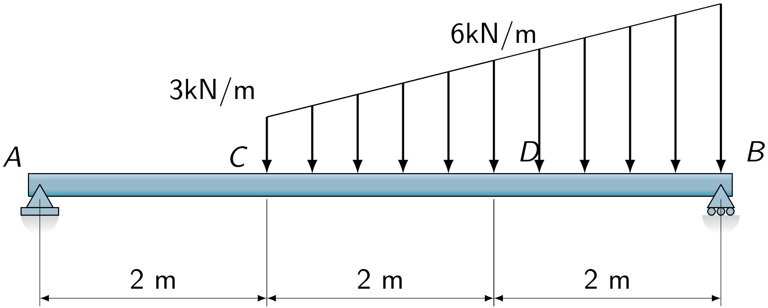
Finalmente se transforma a paréntesis angulares.

$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot (x-2)^2 - 3000(x-2)$$

$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot < x - 2 >^2 -3000 < x - 2 >$$

Ejemplo:

Se calcula el cortante interno

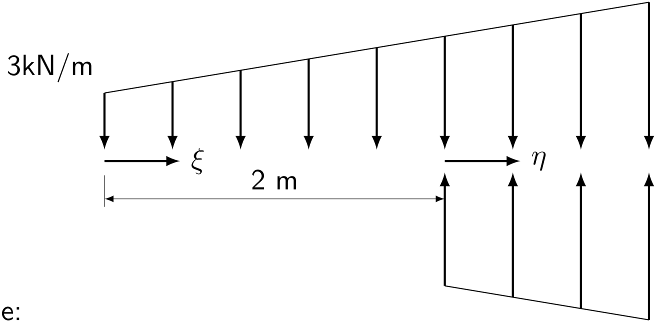


$$V(x) = R_A + V_w(x)$$

$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x-2 >^2 - 3000 < x-2 > \ldots$$

Ejemplo:

Se debe calcular la función que se necesita para anular la primera.



Se sabe que:

$$w_2(\eta) = -w(\xi) = -w(\eta + 2)$$

Por lo tanto la función en base η:

$$w_2(\eta) = 1500 \cdot (\eta + 2) + 3000$$

Se expande

$$w_2(\eta) = 1500 \cdot \eta + 6000$$

Ejemplo:

Se integra para transformarlo en cortante. Por lo tanto la función:

$$V_{w_2}(\eta) = \int_0^{\eta} (1500 \cdot \eta + 6000) d\eta$$

$$V_{w_2}(\eta) = \frac{1500}{2} \cdot \eta^2 + 6000\eta$$

Ejemplo:

Luego se cambia al sistema de referencia original (x).

$$x = \eta + 4 \implies \eta = x - 4$$

$$V_{w_2}(x) = \frac{1500}{2} \cdot \eta^2 + 6000\eta = \frac{1500}{2} \cdot (x-4)^2 + 6000(x-4)$$

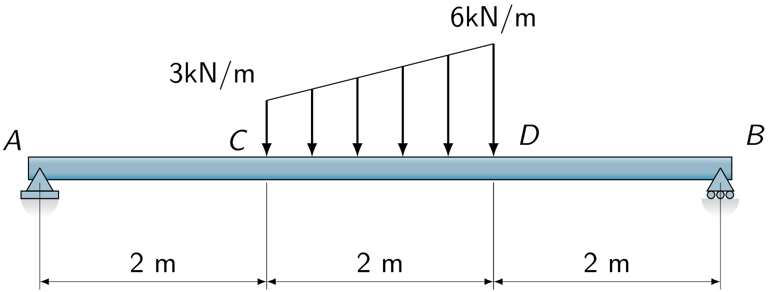
Finalmente se transforma a paréntesis angulares.

$$V_{w_2}(x) = \frac{1500}{2} \cdot (x-4)^2 + 6000(x-4)$$

$$V_{w_2}(x) = \frac{1500}{2} \cdot < x - 4 >^2 + 6000 < x - 4 >$$

Ejemplo:

Se calcula el cortante interno



$$V(x) = R_A + V_w(x) + V_{w_2}(x)$$

$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x-2 >^2 -3000 < x-2 >$$
$$+ \frac{1500}{2} \cdot < x-4 >^2 +6000 < x-4 >$$

Ejemplo:

Se calcula el momento interno integrando el cortante.

$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x-2 >^2 - 3000 < x-2 > \\ + \frac{1500}{2} \cdot < x-4 >^2 + 6000 < x-4 >$$

$$M(x) = R_A x - \frac{1500}{6} < x-2 >^3 - \frac{3000}{2} < x-2 >^2 \\ + \frac{1500}{6} \cdot < x-4 >^3 + \frac{6000}{2} < x-4 >^2$$

Ejemplo:

Se calcula la ecuación de la elástica por doble integración.

$$M(x) = R_A x - \frac{1500}{6} < x-2 >^3 - \frac{3000}{2} < x-2 >^2 + \frac{1500}{6} \cdot < x-4 >^3 + \frac{6000}{2} < x-4 >^2$$

$$IE \cdot \theta(x) = \frac{R_A}{2} x^2 - \frac{1500}{24} < x-2 >^4 - \frac{3000}{6} < x-2 >^3 + \frac{1500}{24} \cdot < x-4 >^4 + \frac{6000}{6} < x-4 >^3 + C_1$$

$$IE \cdot y(x) = \frac{R_A}{6} x^3 - \frac{1500}{120} < x-2 >^5 - \frac{3000}{24} < x-2 >^4 + \frac{1500}{120} \cdot < x-4 >^5 + \frac{6000}{24} < x-4 >^4 + C_1 x + C_2$$

Ejemplo:

Se calculan las constantes

$$
\begin{aligned}
IE \cdot y(x) = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{1500}{120} < x-2 >^5 - \frac{3000}{24} < x-2 >^4 \\
+ \frac{1500}{120} \cdot < x-4 >^5 + \frac{6000}{24} < x-4 >^4 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

$$y(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$y(6) = 0 \implies C_1 = -19267[\mathrm{N\ m}^2]$$

$$
\begin{aligned}
IE \cdot y(x) = \frac{4333}{6}x^3 - \frac{1500}{120} < x-2 >^5 - \frac{3000}{24} < x-2 >^4 \\
+ \frac{1500}{120} \cdot < x-4 >^5 + \frac{6000}{24} < x-4 >^4 - 19267x
\end{aligned}
$$

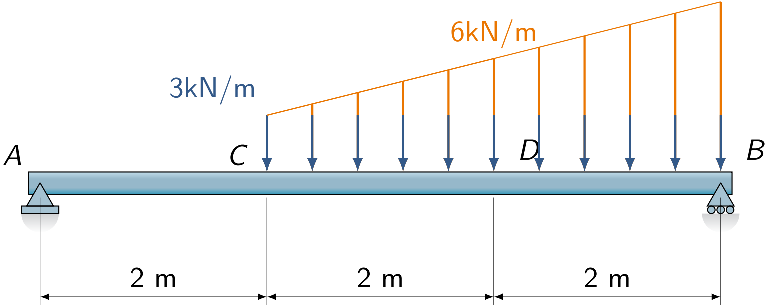
Ejemplo:

Cuando se sabe la representación de las fuerzas distribuidas por partes:

- Rectangular $w < x - a >$
- Triangular $\frac{p}{2} < x - a >^2$

El ejercicio anterior se puede hacer de manera mucho más simple

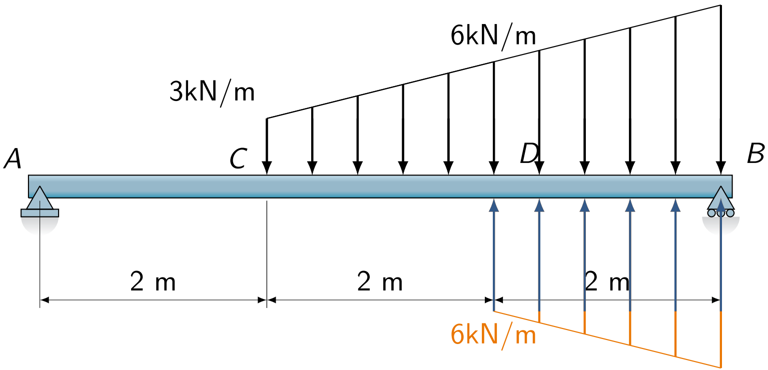
Ejemplo:



$$V(x) = R_A + V_w(x)$$

$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x - 2 >^2 - 3000 < x - 2 > \ldots$$

Ejemplo:



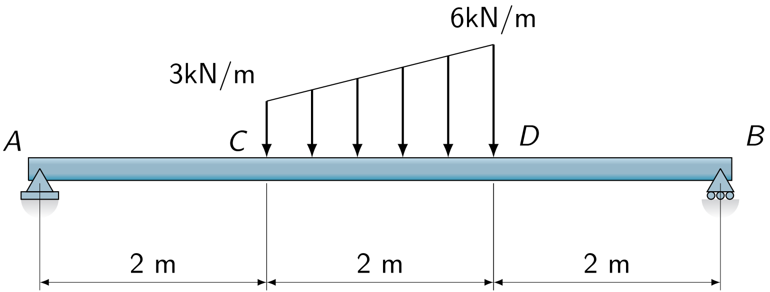
$$V(x) = R_A + V_w(x)$$

$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x-2 >^2 - 3000 < x-2 >$$

$$+ \frac{1500}{2} < x-4 >^2 + 6000 < x-4 >$$

Ejemplo:

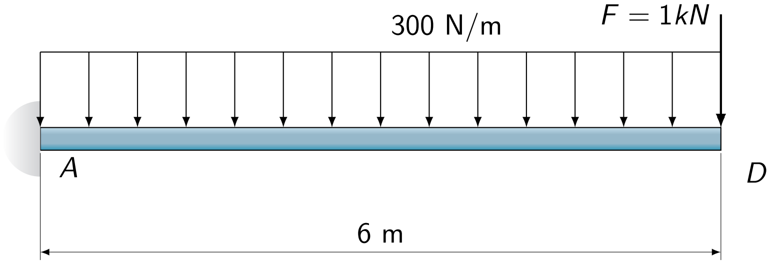
Se calcula el cortante interno



$$V(x) = R_A - \frac{1500}{2} < x-2 >^2 - 3000 < x-2 >$$
$$+ \frac{1500}{2} \cdot < x-4 >^2 + 6000 < x-4 >$$

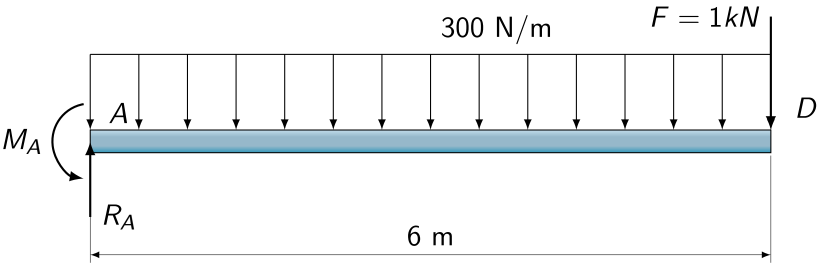
Ejemplo:

Calcular el desplazamiento del punto D, asumiendo un perfil W310x28



Ejemplo:

Se calculan las reacciones.

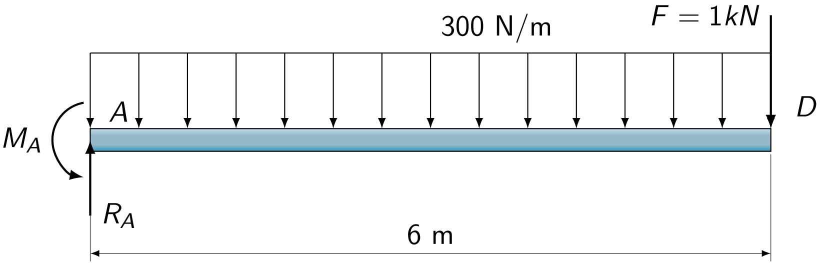


$$\sum M: \quad M_A = 3 \cdot 1800 + 6 \cdot 1000 = 11400[\mathrm{N\ m}]$$

$$\sum R_y: \quad R_A = 1800 + 1000 = 2800[\mathrm{N\ m}]$$

Método de la doble integración

Se calcula la elástica



$$V(x) = R_A - 300x$$

$$M(x) = -M_a + R_A x - \frac{300}{2}x^2$$

Método de la doble integración

Se calcula la elástica

$$M(x) = -M_A + R_A x - \frac{300}{2}x^2$$

$$IE\theta(x) = -M_A x + \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{300}{6}x^3 + C_1$$

$$IEy(x) = -\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{300}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

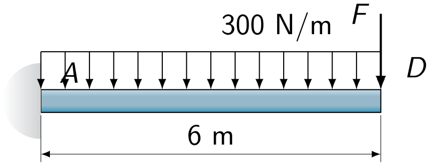
$$y(0) = 0 \implies C_2 = 0 \qquad \theta(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

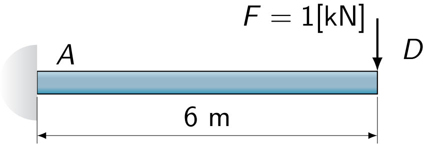
$$y(x) = \frac{-\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{300}{24}x^4}{IE}$$

$$y(6) = \frac{-\frac{11400}{2}6^2 + \frac{2800}{6}6^3 - \frac{300}{24}6^4}{IE}$$

$$y(6) = \frac{-120600}{IE} = -11{,}1\text{mm}$$

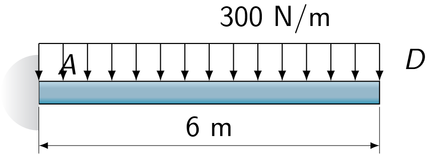
Método de superposición





Según tabla

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$



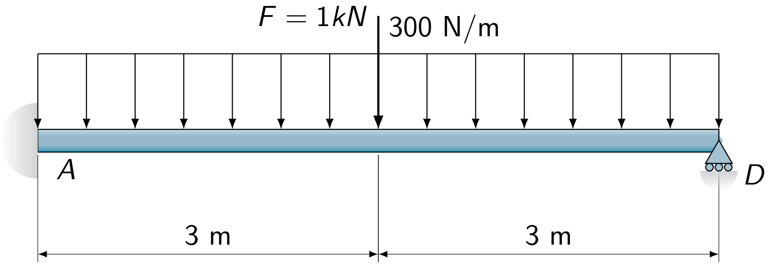
Según tabla

$$\delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{wL^4}{8EI} = \frac{120600}{EI} = 11{,}1\text{mm}$$

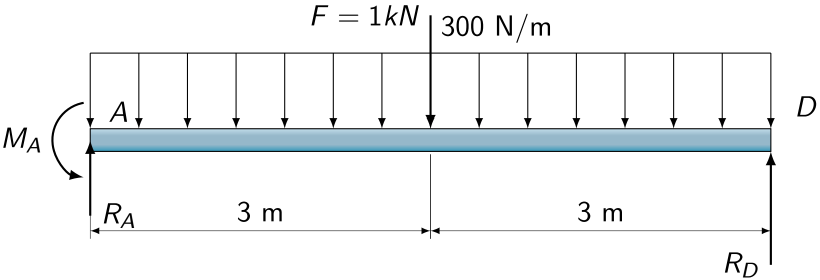
Hiperestático

Calcular las reacciones.



Hiperestático

Se calculan las relaciones de las reacciones.

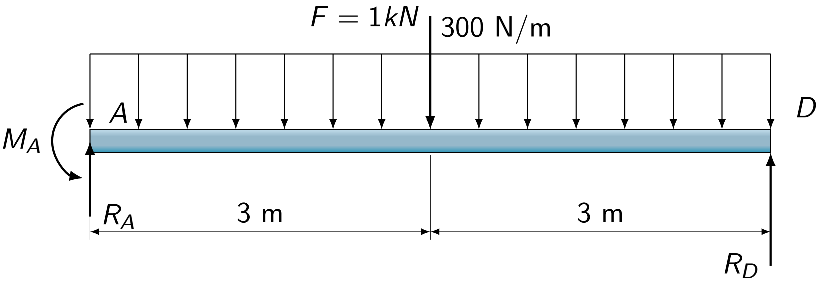


$$\sum M: \quad M_A = 3 \cdot 1800 + 3 \cdot 1000 - 6 \cdot R_D = 8400 - 6 \cdot R_D$$

$$\sum R_y: \quad R_A + R_D = 1800 + 1000 = 2800[\mathrm{N\ m}]$$

Hiperestático: Método de la doble integración

Se calcula la elástica



$$V(x) = R_A - 300x - 1000 < x - 3 >^0$$

$$M(x) = -M_A + R_A x - \frac{300}{2}x^2 - 1000 < x - 3 >$$

Hiperestático: Método de la doble integración

Se calcula la elástica

$$M(x) = -M_A + R_A x - \frac{300}{2}x^2 - 1000 < x - 3 >$$

$$IE\theta(x) = -M_A x + \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{300}{6}x^3 - \frac{1000}{2} < x - 3 >^2 + C_1$$

$$IEy(x) = -\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{300}{24}x^4 - \frac{1000}{6} < x - 3 >^3 + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \implies C_2 = 0 \qquad \theta(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$y(x) = \frac{-\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{300}{24}x^4 - \frac{1000}{6} < x - 3 >^3}{IE}$$

$$y(6) = 0 = -\frac{M_A}{2}6^2 + \frac{R_A}{6}6^3 - \frac{300}{24}6^4 - \frac{1000}{6} < 6 - 3 >^3$$

$$y(6) = 0 \implies M_A = 2R_A - 1150$$

Hiperestático: Método de la doble integración

Ecuaciones:

$$M_A = 2R_A - 1150$$

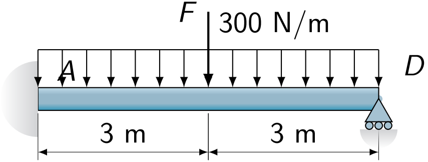
$$M_A = 8400 - 6 \cdot R_D$$

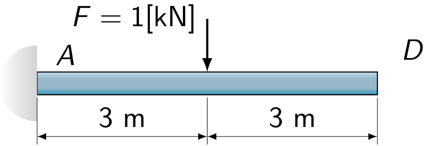
$$R_A + R_D = 2800$$

Solución

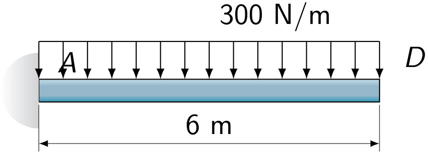
$$R_A = 1812{,}5 \text{ [N]} \quad R_D = 987{,}5 \text{ [N]} \quad M_A = 2475 \text{ [N m]}$$

Hiperestático: Método de superposición

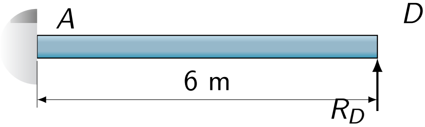




$$\delta = \frac{F \cdot 3^2}{6EI}(3 \cdot 6 - 3) = \frac{22500}{EI}$$



$$\delta = \frac{300 \cdot 6^4}{8EI} = \frac{48600}{EI}$$



$$\delta = \frac{-R_D \cdot 6^3}{3EI} = \frac{-72R_D}{EI}$$

$$\delta = 0 = \frac{22500}{EI} + \frac{48600}{EI} - \frac{72R_D}{EI}$$

$$R_D = 987{,}5 \text{ [N]}$$

Hiperestático: Método de superposición

Ecuaciones:

$$R_D = 987{,}5 \text{ [N]}$$

$$M_A = 8400 - 6 \cdot R_D$$

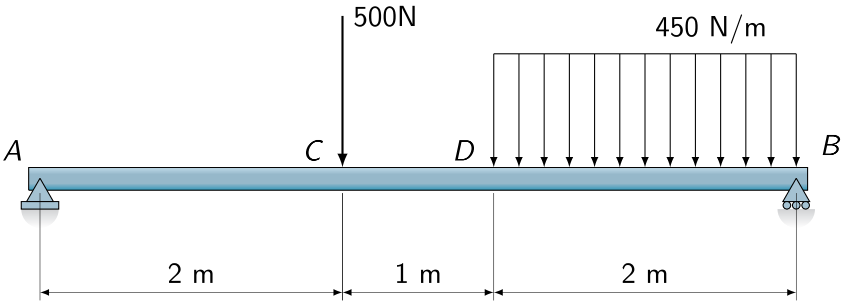
$$R_A + R_D = 2800$$

Solución

$$R_A = 1812{,}5 \text{ [N]} \quad R_D = 987{,}5 \text{ [N]} \quad M_A = 2475 \text{ [N m]}$$

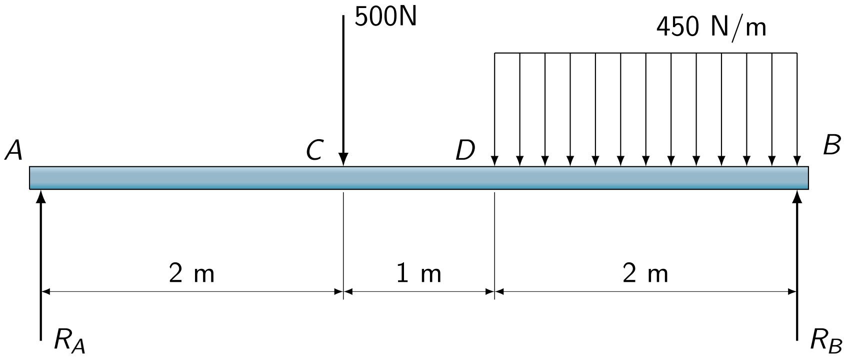
Ejemplo:

Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcule le función de la deformada en toda la viga.



Ejemplo:

Lo primero es calcular las reacciones, por lo tanto se realiza suma de momento en el punto A:

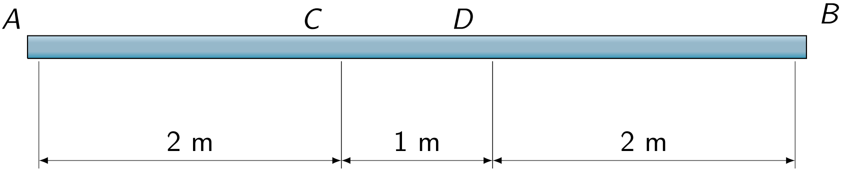


$$\sum M_A : \quad -500 \cdot 2 - 900 \cdot 4 + R_B \cdot 5 = 520 \implies R_B = 920\text{N}$$

$$\sum F_y : \quad R_A - 500 - 900 + R_B = 0 \implies R_A = 480\text{N}$$

Ejemplo:

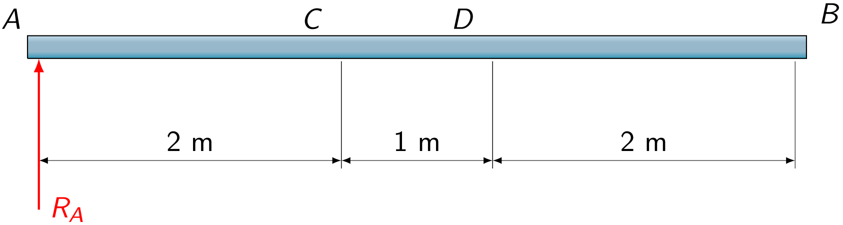
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$v(x) = \quad - \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

Ejemplo:

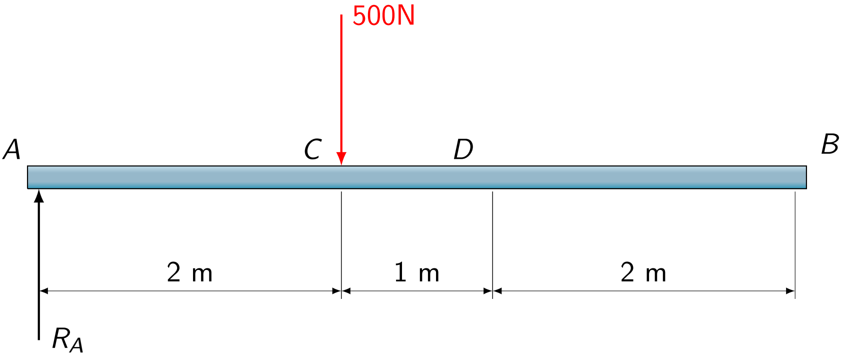
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$v(x) = R_A - \qquad - \qquad +$$

Ejemplo:

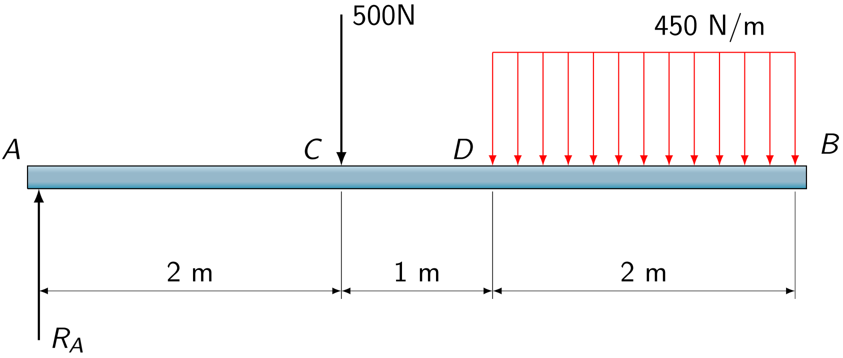
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$v(x) = R_A - 500 < x - 2 >^0 \; - \qquad\qquad + $$

Ejemplo:

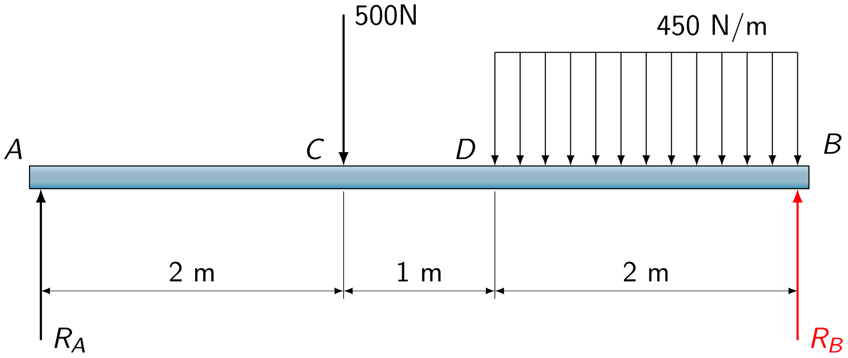
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$v(x) = R_A - 500 < x-2 >^0 \; - 450 < x-3 > \; +$$

Ejemplo:

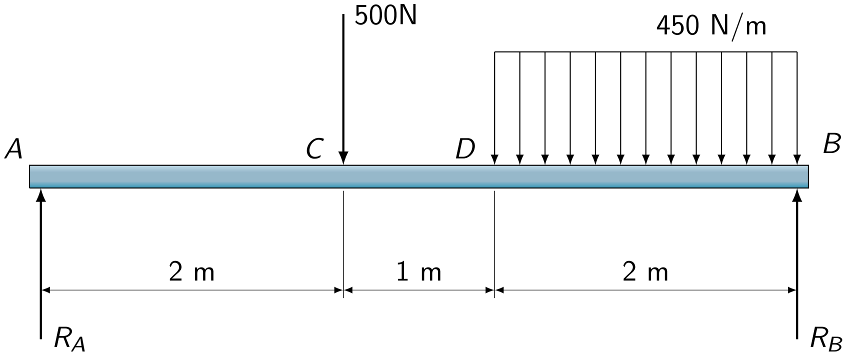
Luego se van agregando las fuerzas por tramo en la ecuación de cortante:



$$v(x) = R_A - 500 < x - 2 >^0 - 450 < x - 3 > + R_B < x - 5 >^0$$

Ejemplo:

Luego observando el caso para ver si existen momentos puntuales, se integra para obtener la ecuación de momento:



$$v(x) = Ra - 500 < x - 2 >^0 - 450 < x - 3 > + Rb < x - 5 >^0$$

$$M(x) = R_A x - 500 < x - 2 > - \frac{450}{2} < x - 3 >^2 + R_B < x - 5 >$$

Ejemplo:

Luego se integra dos veces y se imponen condiciones de borde para obtener la ecuación de la elástica:

$$M(x) = R_A x - 500 < x - 2 > - \frac{450}{2} < x - 3 >^2 + R_B < x - 5 >$$

$$IE\ \theta(x) = \frac{R_A}{2} x^2 - \frac{500}{2} < x - 2 >^2 - \frac{450}{6} < x - 3 >^3 + \frac{R_B}{2} < x - 5 >^2 + C_1$$

$$IE\ y(x) = \frac{R_A}{6} x^3 - \frac{500}{6} < x - 2 >^3 - \frac{450}{24} < x - 3 >^4 + \frac{R_B}{6} < x - 5 >^3 + C_1 x + C_2$$

Ejemplo:

Luego se integra dos veces y se imponen condiciones de borde para obtener la ecuación de la elástica:

$$IE\ y(0) = 0$$

$$IE\ y(0) = \frac{R_A}{6}0^3 - \frac{500}{6} < 0 - 2 >^3 - \frac{450}{24} < 0 - 3 >^4 + \frac{R_B}{6} < 0 - 5 >^3 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Ejemplo:

Luego se integra dos veces y se imponen condiciones de borde para obtener la ecuación de la elástica:

$$IE\ y(5) = 0$$

$$IE\ y(5) = \frac{R_A}{6}5^3 - \frac{500}{6} < 5-2 >^3 - \frac{450}{24} < 5-3 >^4 + \frac{R_B}{6} < 5-5 >^3 + 5C_1$$

$$0 = 7450 + 5C_1 \implies C_1 = -1490[\mathrm{N\ m^2}]$$

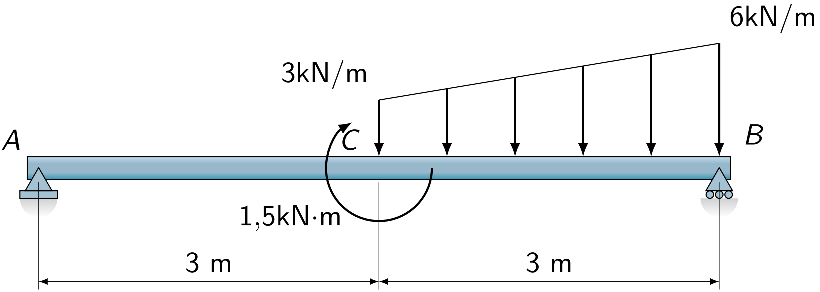
Ejemplo:

Luego se integra dos veces y se imponen condiciones de borde para obtener la ecuación de la elástica:

$$y(x) = \frac{1}{IE}\left(\frac{480}{6}x^3 - \frac{500}{6} < x-2 >^3 - \frac{450}{24} < x-3 >^4 \right.$$
$$\left. + \frac{920}{6} < x-5 >^3 - 1490x \right)$$

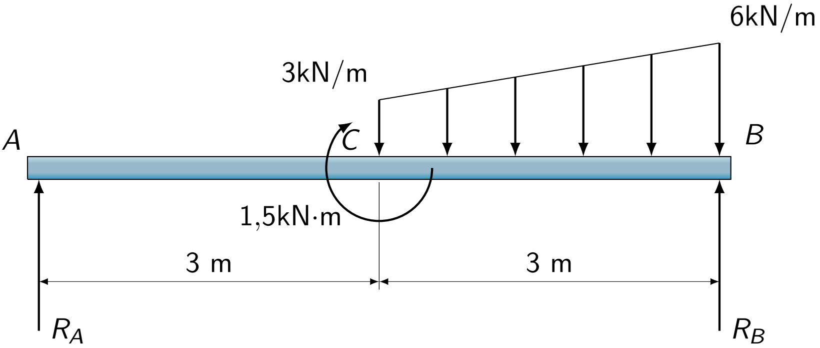
Ejemplo:

Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcule le función de la deformada en toda la viga.



Ejemplo:

Primero se calcula la fuerza equivalente de la carga distribuida y su centroide, solo para calcular las reacciones:

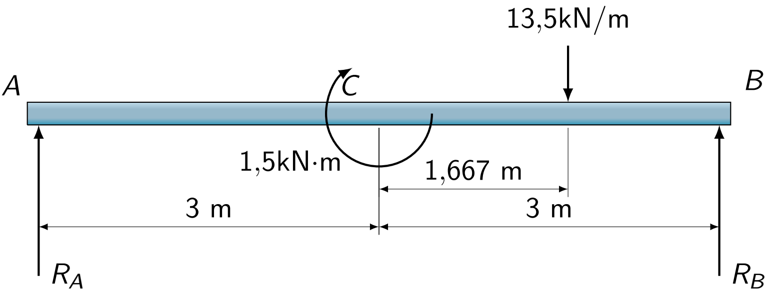


$$F_{eq} = 4{,}5 \cdot 3 = 13{,}5 \text{ kN}$$

$$\bar{y} = \frac{(3 \cdot 3) \cdot 1{,}5 + (3 \cdot 3 \cdot 0{,}5) \cdot 2}{4{,}5 \cdot 3} = 1{,}667 \text{ m}$$

Ejemplo:

Se calculan las reacciones:

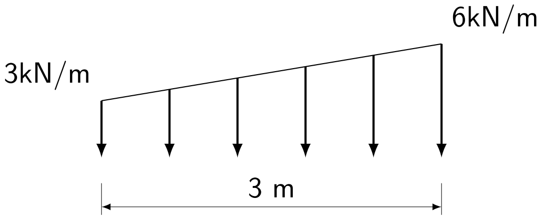


$$\sum M_A: \quad -1500\cdot 2 - 13500\cdot 4{,}667 + R_B\cdot 6 = 0 \implies R_B = 10750\text{N}$$

$$\sum F_y: \quad R_A - 13500 + R_B = 0 \implies R_A = 2750\text{N}$$

Ejemplo:

Luego se calcula la función distribuida con su sistema de referencia en el punto inicial.



con condiciones

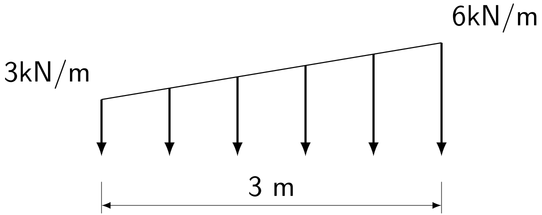
$$w(\xi) = a \cdot \xi + b \qquad w(0) = -3000[\mathrm{N/m}] \qquad w(3\mathrm{m}) = -6000[\mathrm{N/m}]$$

Por lo tanto la función:

$$w(\xi) = -1000 \cdot \xi - 3000$$

Ejemplo:

Se integra para transformarlo en cortante.



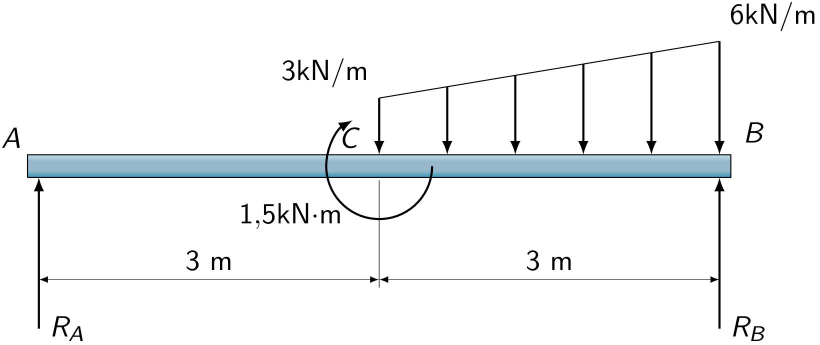
Por lo tanto la función:

$$V_w(\xi) = \int_0^{\xi} (-1000 \cdot \xi - 3000) d\xi$$

$$V_w(\xi) = -\frac{1000}{2} \cdot \xi^2 - 3000\xi$$

Ejemplo:

Luego se cambia al sistema de referencia original (A).

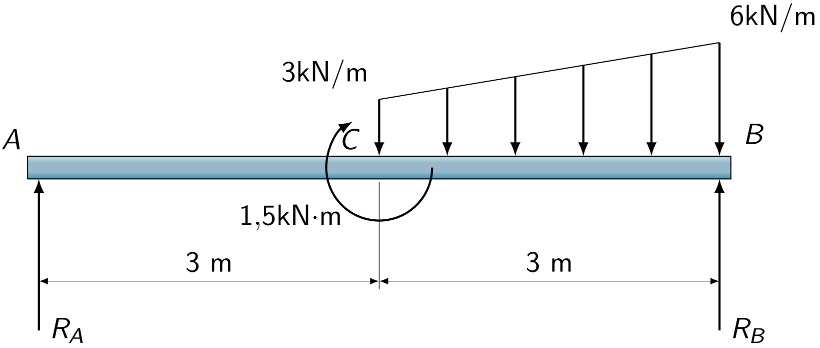


$$x = \xi + 3 \implies \xi = x - 3$$

$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot \xi^2 - 3000\xi = -\frac{1000}{2} \cdot (x-3)^2 - 3000(x-3)$$

Ejemplo:

Finalmente se transforma a paréntesis angulares.

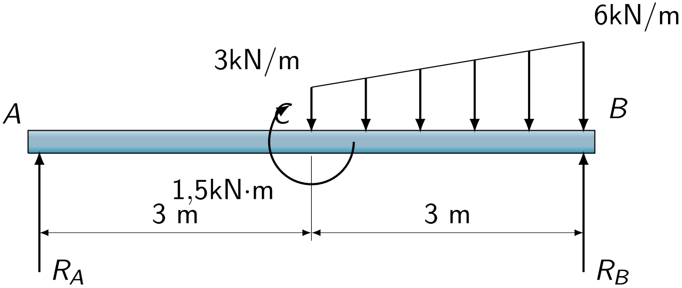


$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot (x-3)^2 - 3000(x-3)$$

$$V_w(x) = -\frac{1000}{2} \cdot < x-3 >^2 - 3000 < x-3 >$$

Ejemplo:

Se calcula el cortante interno



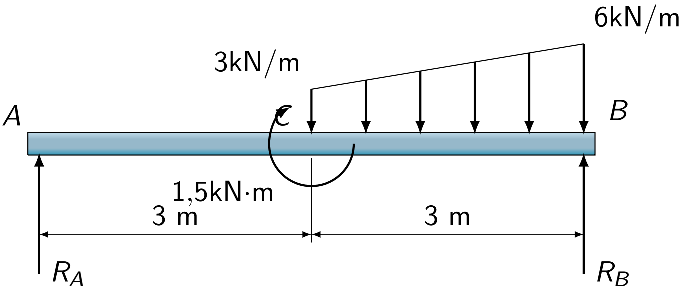
$$v(x) = R_A + V_w(x) + (R_B < x - 6 >^0)$$

$$v(x) = R_A - \frac{1000}{2} < x - 3 >^2 - 3000 < x - 3 > + (R_B < x - 6 >^0)$$

Donde $(R_B < x - 6 >^0)$ es opcional si no existe ninguna información relevante después de este punto.

Ejemplo:

Se calcula el momento interno integrando el cortante, teniendo especial énfasis en los momentos aplicados.



$$V(x) = R_A - \frac{1000}{2} < x-3 >^2 - 3000 < x-3 > + (R_B < x-6 >^0)$$

$$M(x) = R_A x + 1500 < x-3 >^0 - \frac{1000}{6} < x-3 >^3 - \frac{3000}{2} < x-3 >^2 + (R_B < x-6 >)$$

Ejemplo:

Se calcula la ecuación de la elástica por doble integración.

$$M(x) = R_A x + 1500 < x-3 >^0 - \frac{1000}{6} < x-3 >^3 - \frac{3000}{2} < x-3 >^2 + (R_B < x-6 >)$$

$$IE \cdot \theta(x) = \frac{R_A}{2} x^2 + 1500 < x-3 > - \frac{1000}{24} < x-3 >^4 - \frac{3000}{6} < x-3 >^3 + (\frac{R_B}{2} < x-6 >^2) + C_1$$

$$IE \cdot y(x) = \frac{R_A}{6} x^3 + \frac{1500}{2} < x-3 >^2 - \frac{1000}{120} < x-3 >^5 - \frac{3000}{24} < x-3 >^4 + (\frac{R_B}{6} < x-6 >^3) + C_1 x + C_2$$

Ejemplo:

Se calcula la ecuación de la elástica por doble integración.

$$IE \cdot y(x) = \frac{R_A}{6}x^3 + \frac{1500}{2} < x-3 >^2 - \frac{1000}{120} < x-3 >^5 - \frac{3000}{24} < x-3 >^4 + (\frac{R_B}{6} < x-6 >^3) + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$y(6) = 0 \implies C_1 = -15600[\mathrm{Nm}^2]$$

$$IE \cdot y(x) = \frac{2750}{6}x^3 + \frac{1500}{2} < x-3 >^2 - \frac{1000}{120} < x-3 >^5 - \frac{3000}{24} < x-3 >^4 + (\frac{10750}{6} < x-6 >^3) - 15600x$$

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales
Flexión

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
6 de enero de 2021