

机械制图

# 机械制图基础

申铁龙 著

清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

TP24

S42

457732

# 机器人鲁棒控制基础

申铁龙 著



5



00457732

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

DW13/30  
内 容 简 介

本书详细叙述了具有不确定性的机器人系统鲁棒控制理论及应用。内容分为三部分：第1章至第3章主要介绍了描述机器人静态位姿和动态过程的基础；第4章和第5章叙述了机器人鲁棒控制问题的描述、基于耗散性的鲁棒跟踪、鲁棒干扰抑制以及具有自适应功能的鲁棒控制等设计方法；第6章至第8章介绍了多关节机械臂、主从式机械手以及两足行走式机器人等鲁棒控制系统的设计实例。

本书不仅可做为高等院校自动化类相关专业高年级学生、研究生的教科书，也可供机械设计类工程技术人员及高校学生了解机器人鲁棒控制的基本思想。

书 名：机器人鲁棒控制基础

作 者：申铁龙 著

出版者：清华大学出版社（北京清华大学学研楼，邮编 100084）

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者：北京人民文学印刷厂

发行者：新华书店总店北京发行所

开 本：850×1168 1/32 印张：8 字数：208千字

版 次：2000年1月 第1版 2000年1月 第1次印刷

书 号：ISBN 7-302-03721-3/TP · 2076

印 数：0001～3000

定 价：16.00 元

## 代序

机器人技术是一门以机械、电子及信息技术为基础，自动控制理论为媒介，有机结合起来的综合性工程技术。如果说在电子信息革命以前，汽车是一个国家机械制造工业综合水准的代表，则可以说机器人是衡量一个国家现代机电制造技术的样品。因此，研究普及机器人控制技术，不仅是机器人学自身的需要，同时对促进我国产业技术的发展也具有普遍意义。

从控制的角度来看，机器人是一个非线性系统。为了获得理想的控制品质，应该充分利用现代控制理论研究的最新成果，开发有效的高级控制策略。现代控制理论一般是基于被控对象的数学模型来设计控制器的。但是，在工程实际中不可避免地存在着许多无法用数学模型精确描述的不确定性，如果在设计控制系统时忽视了这些不确定性，那么预期的性能品质就有可能得不到实现。鲁棒控制正是以具有不确定性的系统为研究对象的控制技术。

机器人鲁棒控制是近几年机器人控制领域的一个热门课题，而且已经取得了相当丰富的成果。但是，据笔者所知，国内尚没有系统地反映这些研究活动的教材或专著。目前旅居日本的申铁龙博士用中文所著的《机器人鲁棒控制基础》一书，在一定程度上弥补了这个不足。这本书及时反映了机器人鲁棒控制理论的最新成果，特别是后 5 章的主要内容是作者自身近几年来的研究成果，相信这些内容一定能为国内同行提供有益的参考。

本书的特点，首先是叙述过程注重工程概念，用尽可能少的数学工具来描述设计思想。其次，内容精炼，同时兼顾了自动化工程和机械设计不同领域的读者。例如，第 2 章和第 3 章所涉及的内容

在一般机器人学的教科书中都占有较大的篇幅,但本书只用两章概括介绍了机器人静态位姿和动态过程描述的基础知识,这将有助于自动化类读者能更多地了解掌握后续章节的内容。另外,书中所介绍的基于无源性和耗散性的设计方法,不仅是机器人控制领域中普遍受到关注的工程概念很强的理论方法,而且也是近来鲁棒控制理论研究领域的热点之一。

相信这本书能够引起更多的青年读者的兴趣,以推动我国机器人研究活动的开展。

杨汝清

1999年5月

## 前　　言

电子技术不断向机械制造技术渗透,使机械产品越来越向智能化、机电一体化方向发展,是现代机械制造技术发展的一个重要特征。所谓机电一体化,并不是机电两种因素的简单堆积,而是两者通过有机融合,赋予机械产品以崭新的机能。机器人正是这种现代机电一体化制造技术的典型产物。由古老的连杆和关节结构组成的机器人,通过微电子或油压的巧妙驱动,就可以模仿人类的举动,甚至实现人类无法实现的复杂作业。实现这种机电有机融合的重要媒介之一就是自动控制。本书的主题就是从自动控制的角度研究机器人。

其实,机器人本身还是一个正在发展中的新学科,甚至很难划清机器人学与其他相关学科的界限。但是就机器人的控制技术而言,它几乎与自动控制理论同步发展。即,现代控制理论的几乎所有的新成果都在机器人上得到了应用的尝试。这是因为不仅机器人控制技术本身具有工程意义,而且由于机器人是一个特殊的非线性系统,其控制问题还具有普遍的理论意义。

目前,现代控制理论研究的焦点之一是所谓的鲁棒性问题。即,当用于设计的被控对象的数学模型具有不确定性因素时,如何预先设计不依赖于其不确定性的控制器,使得实际控制系统在有不确定性存在的情况下也能满足预期的性能品质。显然,机器人系统也同样存在这类问题。本书主要介绍机器人的鲁棒控制系统的  
设计问题。主要讨论当机器人的数学模型具有未知的模型误差或干扰时,如何根据机器人的标称模型设计控制器,使得机器人的动态响应品质满足要求。本书尽管是从控制的角度讨论机器人,但只

要求读者具有工科院校的应用数学基础和有关状态空间理论的基本知识。因此,相信本书同样能为从机械制造的角度研究机器人的人员提供有益的参考。

应该指出,到目前为止我国机器人技术的研究并不活跃,笔者认为其主要原因是机电技术领域的相互渗透意识还不够普及,其次是还未能普遍认识到“机器人学是现代机电制造技术的基础学科”这样一种被工业发达国家已经验证了的事实。为机械和电子及控制领域的读者,特别是年轻的读者介绍目前机器人鲁棒控制的新动向以及必要的基础知识正是作者写作本书的初衷。

笔者愿借此机会向中国科学院院士、中国自动化学会理事长陈翰馥教授和中国自动化学会机器人专业委员会主任、上海交通大学杨汝清教授表示衷心的感谢。两位教授的热情推荐使本书的出版得到了清华大学出版社学术专著出版基金的支持。

浙江大学薛安克博士对本书的内容安排提出了有益的建议,清华大学慕春棣教授和大连海事大学王兴成教授在访问上智大学期间,对本书的初稿进行了细心地校阅并提出了许多可贵的意见,在此,一并向他们表示谢意。

此外,笔者还愿在此记下石井千春君(足利工业大学讲师)、中岛佳树君(三菱重工)、鲤沼裕介君(石川岛播磨重工)、殿生勋君(日挥)和古谷真之君的名字,以示感谢。他们曾是上智大学理工学院机械系的博士或硕士研究生,本书第5章至第8章的内容离不开他们在校期间刻苦研究的成果。

作者 于东京上智大学  
1999年3月

# 目 录

<b>第 1 章 序论</b>	.....	1
1.1 自动控制与机器人的诞生	.....	1
1.2 机器人系统的基本构成	.....	5
1.3 机器人的动态控制	.....	7
1.4 机器人动态的不确定性与鲁棒控制	.....	8
1.5 鲁棒控制的特征	.....	16
<b>第 2 章 机器人的位姿描述</b>	.....	19
2.1 位姿描述	.....	19
2.2 运动学正向问题	.....	24
2.3 运动学逆向问题	.....	26
2.4 雅可比矩阵	.....	30
<b>第 3 章 机器人的动态数学模型</b>	.....	35
3.1 刚体的运动方程	.....	35
3.2 拉格朗日动力学方程	.....	43
3.3 二自由度机械臂的数学模型	.....	51
3.4 状态空间模型及线性化	.....	56
3.5 电机驱动机械臂的动态模型	.....	60
<b>第 4 章 鲁棒控制基础</b>	.....	65
4.1 稳定性概念	.....	66
4.2 稳定性理论	.....	70
4.3 干扰抑制问题	.....	77
4.4 $L_2$ 增益与 HJI 不等式	.....	80
4.5 不确定性与系统的鲁棒性能	.....	84

4.6	$L_2$ 增益与鲁棒性能	88
4.7	$L_2$ 标准设计问题	98
4.8	不确定性摩擦特性的鲁棒补偿控制	102
<b>第 5 章 基于耗散性的鲁棒控制</b>		112
5.1	无源性与稳定性	112
5.2	耗散性与 $L_2$ 增益	121
5.3	机器人的物理特征与李亚普诺夫函数	125
5.4	李亚普诺夫函数的递推设计	130
5.5	机器人的鲁棒干扰抑制控制器设计	138
5.6	具有自适应功能的鲁棒控制器设计	144
<b>第 6 章 机械臂的鲁棒动态控制</b>		151
6.1	二自由度机械臂的动态控制问题	151
6.2	鲁棒模型跟踪控制	153
6.3	鲁棒轨迹跟踪控制	164
6.4	电机驱动机械臂的 $L_2$ 控制器	176
<b>第 7 章 基于观测器的主从式机器人的鲁棒控制</b>		187
7.1	数学模型	188
7.2	状态反馈控制律	191
7.3	观测器的设计	196
7.4	实验结果	200
<b>第 8 章 两足行走式机器人控制</b>		205
8.1	数学模型	205
8.2	两腿支撑姿态的控制	213
8.3	单腿支撑姿态的控制	226
8.4	两足行走控制	235
<b>参考文献</b>		245

# 第1章 序 论

在现代社会中“机器人”已经成了一个非常司空见惯的词汇。但是,若问“机器人”究竟是什么?恐怕很难得到令人满意的答复。如果仅从工程技术的角度去回答这个问题,我们不妨说,所谓机器人不外乎是一种可以通过编程来完成多种作业、并具有一些自由度和一定操作功能的自动化机器。这里用于作业的自由度和操作功能依赖于机械因素,而自动化则离不开自动控制技术。当机器人的机械结构确定下来以后,如何使它在实际现场按照预想的程序操作、满足理想的性能要求,则主要取决于自动控制系统。

正如许多关于机器人的著作所强调的那样,机器人大学是一门包罗万象、多种学科相互渗透、相互交叉的综合性学科。本书将从控制的角度研究机器人,主要讨论当机器人的操作现场与用于理论设计的数学模型有偏差时,如何通过预先设计具有鲁棒性的控制器来获得满意的性能。因此,我们将不涉及有关机器人的一般背景以及诸如机器人的结构、执行机构、传感器、机器人的规划、智能化等技术领域。不过本章我们将简要地介绍有关的背景知识,这将有助于那些不熟悉机器人领域的读者理解本书的主题和内容。

## 1.1 自动控制与机器人的诞生

英语的机器人(robot)一词来源于捷克语,有趣的是这个带有浓厚的工程技术色彩的词汇最初却始于艺术。1921年捷克斯洛伐克的剧作家 Karel Capek 创作了一部新剧,描写一个科学家为了将人类从繁重的劳动中解放出来,大量制造只会劳动而没有思维

的人造人的科幻故事。他给那些被科学家造出来的人造人起了一个名字——Robot。

实际上，这个剧正反映了人类长期以来欲摆脱单纯、枯燥的机械性操作行为，使身边的装置或机器能够自己操纵自己而不需要人的干预的愿望，即反映了人类对器械自动化的追求。人类的这种美好追求由来已久，古今中外随处可见这种追求的痕迹。比如古代运用沙或水的漏斗制成的各种定时装置、利用浮标原理制作的各种反馈装置等等，这些装置经巧妙地组合就能够自动开启大门、自动敲钟报时，我国古代人们把这种巧妙的装置称为“机关”。事实上，每一种“机关”都蕴藏着“反馈控制”这一近代自动控制技术的基本思想。

下面不妨以瓦特的蒸汽机的调速装置为例来进一步考察自动化器械的控制原理。1788年瓦特为了使蒸汽机的转速能够自动地保持一定，在蒸汽机的蒸汽供给阀上安装了如图1.1所示的离心式自动调速装置。其具体工作原理如下：当转速 $y$ 高于期望值时，通过齿轮传动的小钢球 $g$ 沿 $\theta$ 方向的旋转速度加快，由于离心力的作用小球位置上升，通过连杆使 $B$ 点的位置上升，而与 $B$ 相连、以 $N$ 为支点的连杆的另一端 $C$ 位置下降，从而使阻塞式阀 $F$ 的位置下降，减少送蒸汽机的蒸汽流量，其结果使得蒸汽机的转速 $y$ 下降。反之，当 $y$ 低于期望值时，小球下降带动阀 $F$ 上升，蒸汽流

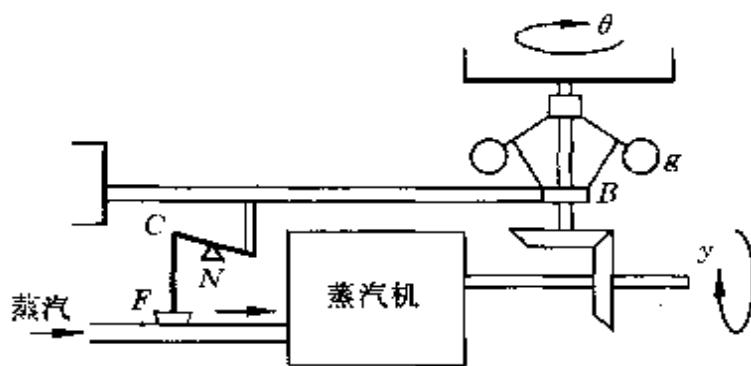


图 1.1 蒸汽机的调速装置

量增大致使转速回升。最终小球平衡在期望的转速所产生的离心力与重力的平衡点上。

实际上,尽管当时尚未出现自动控制理论,但这个自动调速机构却运用了最基本的控制原理——反馈。即,将被调节量  $y$  反馈回来,与期望值进行比较,根据其偏差决定调节输入量  $u$ 。用近代的自动控制理论的语言来描述这个自动装置的话,系统的结构框图如图 1.2 所示。其中期望值  $r$  可以通过调节小球的重量设定。从现代控制理论的角度来看,这个反馈系统显然存在稳定性问题。即对于任何初始偏差,小球是否最终收敛到期望的位置上,会不会出现小球在期望值附近上下抖动甚至发散的现象。这在瓦特的时代当然无法澄清,但是调速装置发散造成蒸汽机爆炸的现象屡屡发生。二十多年后,数学家们发现了调速装置发散的原因与微分方程的解的收敛性有关,这正是自动控制理论的源头。关于离心式调速机的数学模型及稳定性分析可参见参考文献[1]的第 6 章。

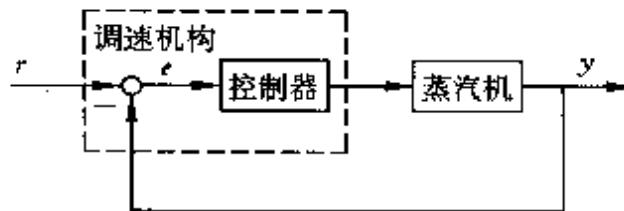


图 1.2 调速装置闭环系统框图

如上述实例所示,自古人们创造的各种自动装置都有意无意地运用了自动控制理论的基本原理。所以,当机器人作为被人们理想化了的自动装置,从艺术的世界走入现实生活的时候,也正是自动控制理论从其经典阶段开始迈入现代控制理论的鼎盛时期。20世纪 50~60 年代,以卡尔曼为代表的一批学者将状态空间方法引入自动控制理论,取得了最优调节理论、系统的可控性以及可观性等重要结果。几乎与此同时,美国的 G. C. Dovel 于 1954 年将他所提出的关于实现机器自动化的“示教——再现 (teaching/playback)”的概念申报了专利,为工业机器人的诞生奠定了基础。

1961 年和 1962 年,美国的 UNIMATION 公司和 AMF 公司将这个概念变成了现实,分别制作了世界上第一代工业机器人,如图 1.3 所示。1966 年斯坦福大学开发了具有 6 个关节自由度的夏矣曼机械臂(图 1.4)。

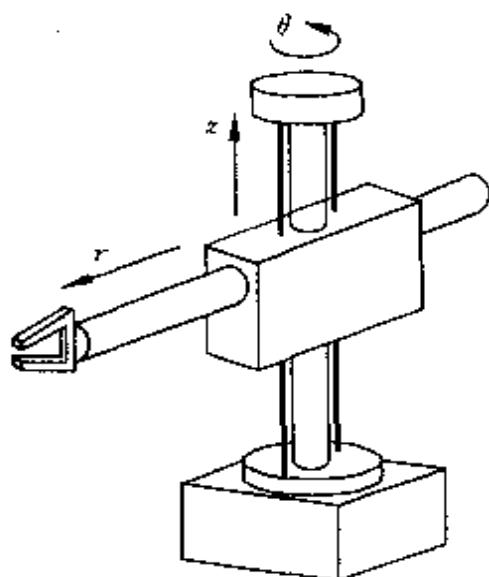


图 1.3 AMF 公司开发的机器人

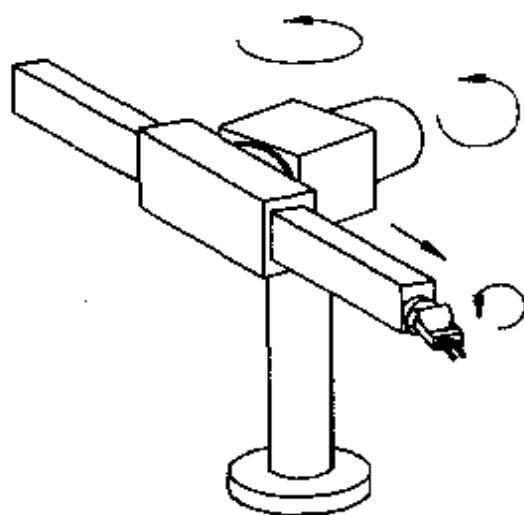


图 1.4 斯坦福大学开发的机器人示意图

这些初期的机器人其形状和功能都和科幻艺术中的机器人形

象相差甚远。但是它们的确具备了通过编程可以自动地完成多种操作作业这一基本功能,使艺术家们的美好愿望变成了现实,将人类从那些单纯、枯燥、危险的劳动中解放了出来。其实,在机器人应用非常普遍的今天,尽管机器人的执行机构、传感元件以及控制策略等变得更先进、更巧妙,但是在现场活跃的大部分机器人的形状和结构仍然基本保持着当初的特征。当然,那些为特殊目的而开发的貌似人类、能弹琴作画的机器人则另当别论。

## 1.2 机器人系统的基本构成

图 1.5 是一般机器人系统的示意图。一个能够完成多种操作作业的具有多自由度的机器人系统除了用于具体操作的机械臂和抓手等主体以外,还应该具有监控机构、伺服控制机构、各种能源、移动机构、视觉反馈机构、通信机构、操作对象以及作业环境等等。

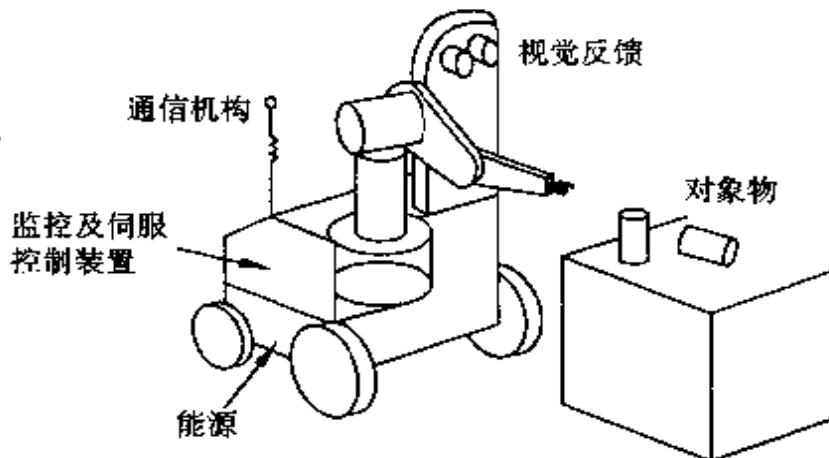


图 1.5 机器人系统示意图

当然,对于具体的工业机器人来讲,并不一定需要把这些机构全部配齐搭载在一个单体上。比如,组装机器人只需把主体固定在组装线上即可。有些机器人从操作内容需要由各种传感器反馈位置、力、温度等信息,而不一定要求视觉反馈。但无论系统的具体构

成如何,机器人系统的工作原理框图都可以用图 1.6 表示。

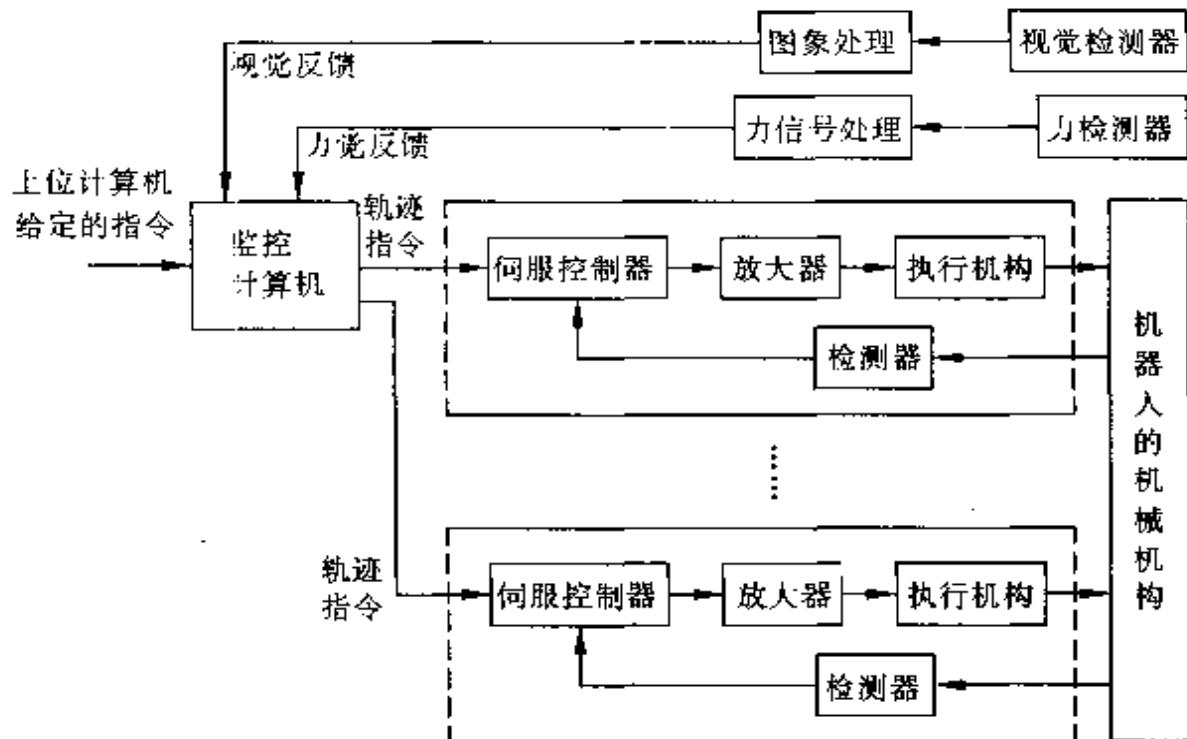


图 1.6 机器人控制系统的结构框图

首先,通信机构将上位计算机系统下达的作业指令传给监控机构,监控机构则根据指令内容生成机械臂或抓手为完成作业所必需的理想轨迹,必要的话包括机器人的理想移动轨迹。其次,由伺服机构来控制机器人的位姿和运动使其跟踪由监控系统给定的理想轨迹。一般监控机构和伺服机构由计算机来实现,所以由伺服控制机构给出的驱动信号功率较小,需经过功率放大以后再去驱动机器人的各个机构。视觉反馈机构以及各种传感器则将机器人的位姿以及运动状态等信息传给监控机构,由监控机构根据需要将这些信息加以整理后通过通信机构回馈给上位计算机。

在上述过程中,一个很重要的部分就是伺服系统。当机器人的结构和理想轨迹给定以后,如何设计伺服控制器是机器人实现高精度操作的关键,而研究其一般性设计理论的正是自动控制理论。

### 1.3 机器人的动态控制

对于具有多个自由度的多关节机器人来说,每个关节的驱动力矩都由伺服控制器根据各个关节的期望轨迹给定。由于机器人本身具有固有的动态特性,所以为了使各个关节能够以理想的动态性能无静差地跟踪期望轨迹,伺服控制系统必须采用反馈结构。而反馈伺服控制系统的参考输入信号,就是由监控系统根据上位计算机的操作指令而生成的期望轨迹。

下面以二自由度机械臂为例概要说明机器人的具体操作与动态过程的伺服控制之间的关系。图 1.7 是二自由度机械手的示意

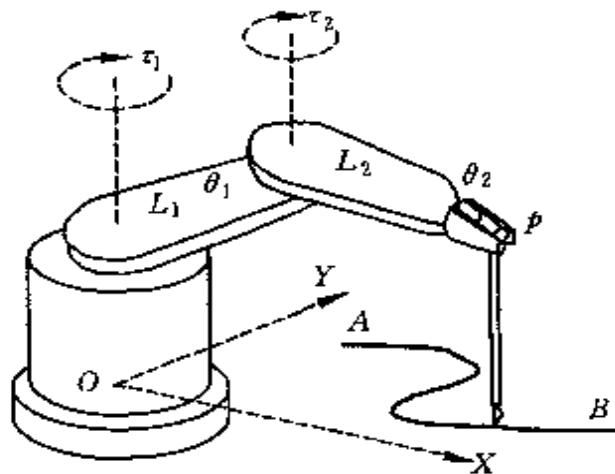


图 1.7 二自由度机械手作业示意图

图。由电机给出的驱动力矩  $\tau_1$  和  $\tau_2$  分别驱动连杆  $L_1$  和  $L_2$ , 各连杆的位置分别由  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  描述。假设我们要求该机械手完成自动焊接作业, 即要求机械手的端点  $p(t)$  沿着曲线  $AB$  以给定的速度  $\dot{p}_d(t)$  运动。那么, 端点的期望轨迹可以用  $XOY$  坐标系的坐标来描述, 即给定  $x_d(t)$ ,  $y_d(t)$ ,  $\dot{x}_d(t)$  及  $\dot{y}_d(t)$ 。但是, 对于伺服控制系统来讲, 需要以  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  及其速度  $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$  的期望值作为参考输

入信号。因此,我们必须把上述期望轨迹的  $x, y$  坐标,换算成各个自由度的期望值  $\theta_{d1}(t), \theta_{d2}(t)$  及其期望速度  $\dot{\theta}_{d1}(t), \dot{\theta}_{d2}(t)$ 。

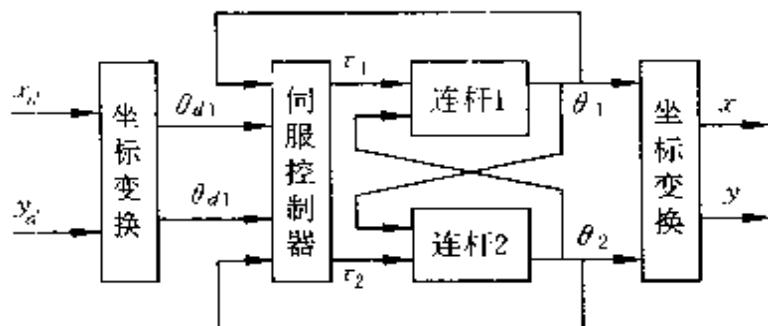


图 1.8 机械手伺服系统框图

二自由度机械手的动态控制系统框图如图 1.8 所示。由图可见,各个关节的控制环并不是完全独立的,相互之间存在耦合。因此,各个关节的控制环并不能单独设计,必须以多输入多输出系统处理。而且,各关节之间的这种耦合关系,使得一般的多自由度机器人呈现较严重的非线性特性,给机器人的动态控制带来了不便。

## 1.4 机器人动态的不确定性与鲁棒控制

机器人伺服控制系统的主要目的就是通过给定各关节的驱动矩,使得机器人的位置、速度等状态变量跟踪给定的理想轨迹。与一般的机械系统一样,当机器人的结构及其机械参数确定以后,其动态特性将由运动方程即数学模型来描述。因此,我们可以应用自动控制理论所提供的设计方法,基于这个数学模型来设计机器人的伺服控制器。

但是,在实际工程中要想得到精确的数学模型是一件困难的事情,因此我们在建立机器人的数学模型时,需要做合理的近似处理,而忽略一些不确定性因素,诸如参数误差、未建模动态、观测噪声以及不确定性的外界干扰等等,然而这些不确定性的存在可能

会引起控制系统品质的恶化,甚至成为系统不稳定的原因。鲁棒控制就是针对这种不确定性而被提出来的现代自动控制理论。它在设计控制器时不仅考虑数学模型的标称参数,同时还考虑不确定性对系统性能的最坏影响,使得所设计的控制器在不确定性对系统品质的破坏最严重时也能够满足设计要求。

下面通过简单的实例,来考察不确定性的影响和鲁棒控制器的具体设计方法。考虑具有一个关节的单臂机械手如图 1.9 所示。这个机械臂是由质量为  $m$ ,长度为  $2l$  的连杆  $A$  和驱动电机  $D$  以及底座  $B$  构成。我们的目的就是要设计反馈控制器使得机械臂的位置  $\theta(t)$  和速度  $\dot{\theta}(t)$  跟踪给定的期望轨迹  $\theta_d(t), \dot{\theta}_d(t)$ 。控制输入信号是电机给出的驱动力矩  $\tau$ 。

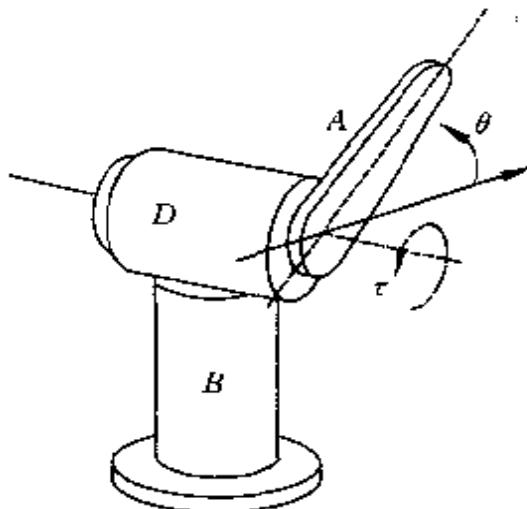


图 1.9 单臂机械手

首先,我们建立这个系统的运动方程。为此先将这个系统理想化,考虑如图 1.10 所示的力学模型,即假设连杆的质量均匀分布,质心距连杆的转动中心为  $l$ 。假设连杆转动的粘性摩擦系数为  $d$ ,并忽略弹性摩擦,那么根据牛顿定律得其运动方程:

$$I\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\cos\theta = \tau \quad (1.1)$$

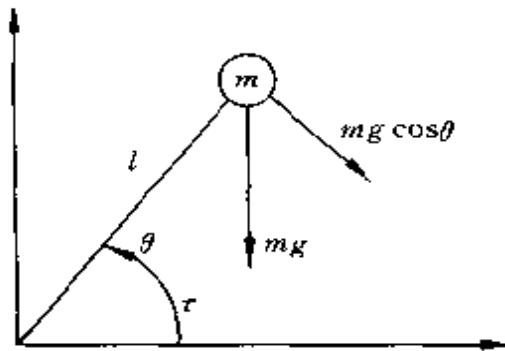


图 1.10 单臂机械手的力学模型

其中,  $mg$  为重力,  $I = \frac{4}{3}ml^2$  为转动惯量。

对于给定的期望轨迹  $\theta_d(t)$ ,  $\dot{\theta}_d(t)$ ,  $\ddot{\theta}_d(t)$ , 定量跟踪误差为

$$e = \theta - \theta_d$$

并引入辅助控制信号  $u$ , 令

$$\tau = u + I\ddot{\theta}_d + d\dot{\theta}_d + mg l \cos \theta \quad (1.2)$$

则系统(1.1),(1.2)满足

$$I\ddot{e} + d\dot{e} = u \quad (1.3)$$

所以,如果我们希望跟踪误差  $e(t)$  收敛于零,且其动态特性满足特征方程

$$\ddot{e} + ae + be = 0 \quad (1.4)$$

其中,  $a > 0, b > 0$  为给定常数。那么,只要取

$$u = (d - aI)\dot{e} - bIe \quad (1.5)$$

即可。此时,满足跟踪性能要求的控制器为

$$\tau = (d - aI)\dot{e} - bIe + I\ddot{\theta}_d + d\dot{\theta}_d + mg l \cos \theta \quad (1.6)$$

图 1.11(a)是数字仿真结果,机械臂的参数为  $m=1\text{kg}$ ,  $l=0.25\text{m}$ ,  $d=2.0\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ , 控制器的参数为  $a=20.0$ ,  $b=25.00$ 。该图表示了期望轨迹为正弦信号时的控制结果。上图和中图分别表示机械臂的位置和速度,下图为控制器给出的控制力矩。图中虚线表

示期望轨迹，实线表示机械臂的实际响应。可以看出位置跟踪误差为零，速度误差也很快趋于零。

但是，如果我们用于设计的数学模型(1.1)具有不确定性，那么按上述设计的控制器(1.6)就不一定能满足要求。

我们不妨来考察一下数学模型中的粘性摩擦系数不准确、且弹性摩擦不容忽略的情况。假设粘性摩擦系数的真值为 $\bar{d}$ ，且弹性摩擦系数为 $\delta_0$ 。这时，机械臂的动特性将由

$$I\ddot{\theta} + \bar{d}\dot{\theta} + \delta_0\theta + mgl\cos\theta = \tau \quad (1.7)$$

描述。记参数误差为

$$\delta_1 = \bar{d} - d$$

如果仍然用基于标称模型(1.1)设计的控制器(1.6)来控制具有不确定性的被控对象(1.7)，那么闭环系统的动特性将不再满足(1.4)式，而是由下式描述

$$\ddot{e} + \left(a + \frac{\delta_1}{I}\right)\dot{e} + \left(b + \frac{\delta_0}{I}\right)e = w(\theta_d, \dot{\theta}_d) \quad (1.8)$$

其中， $w = -(\delta_1\dot{\theta}_d + \delta_0\theta_d)/I$ 。

显然，由上式可知，如果给定的期望轨迹不满足 $\theta_d(t) \rightarrow 0$ ，那么跟踪误差就不能保证趋于零。图1.11(b)表示粘性系数误差 $\delta_1 = 0.2$ ，弹性系数 $\delta_0 = 0.2$ 时的数值仿真结果。显然，由于不确定性的存在，位置跟踪误差和速度跟踪误差均不趋于零。

所以，在设计控制器时我们必须考虑不确定性的影响。当然，如果 $\delta_0$ 和 $\delta_1$ 准确已知的话，将上述的设计过程稍微修改一下，就能够得到满意的控制器。问题是不确定性是未知的，我们在设计时无法知道它的准确值。不过可以不失一般性地假定未知参数等是有界的，且其上界是已知的。即，假设 $\delta_0, \delta_1$ 和 $w$ 满足

$$|\delta_0| \leq k_1, |\delta_1| \leq k_2, |w(\dot{\theta}_d, \theta_d)| \leq \rho(\dot{\theta}_d, \theta_d) \quad (1.9)$$

其中， $k_1, k_2$ 为给定常数， $\rho$ 为给定的界函数。为了简便起见，以下令 $k_1 = k_2 = 1$ 。

引入新的辅助控制输入信号  $v$ , 将基于标称模型设计的控制器(1.6)修改如下:

$$\tau = (d - aI)\dot{e} - bIe + I\theta_d + d\dot{\theta}_d + mgl\cos\theta + Iv \quad (1.10)$$

以下可以通过选择适当的  $v$  来抵消不确定性对系统品质的影响, 进而实现鲁棒控制的目的。

将控制律(1.10)用于具有不确定性的系统(1.7), 得闭环系统如下:

$$\ddot{e} + a\dot{e} + be = v + \Delta f(\dot{\theta}_d, \theta_d, \dot{e}, e) \quad (1.11)$$

其中,

$$\Delta f = w(\dot{\theta}_d, \theta_d) - \frac{\delta_1}{I}\dot{e} - \frac{\delta_0}{I}e$$

显然, 令

$$\tilde{\rho}(\dot{\theta}_d, \theta_d, \dot{e}, e) = \rho(\dot{\theta}_d, \theta_d) + \frac{1}{I}(|\dot{e}| + |e|) \quad (1.12)$$

则对于所有的不确定性,  $\Delta f$  满足

$$|\Delta f| \leq \tilde{\rho}, \quad \forall e, \dot{e} \quad (1.13)$$

令状态变量为  $x^T = [e \quad \dot{e}]$ , 则闭环系统(1.11)可以用状态方程描述如下:

$$\dot{x} = Ax + B(v + \Delta f) \quad (1.14)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于  $A$  是稳定阵, 所以对任意给定的正定阵  $Q$ , 存在正定解  $P > 0$  满足如下李雅普诺夫方程:

$$A^T P + PA = -Q \quad (1.15)$$

定义二次型正定函数  $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ , 沿闭环系统(1.11)的

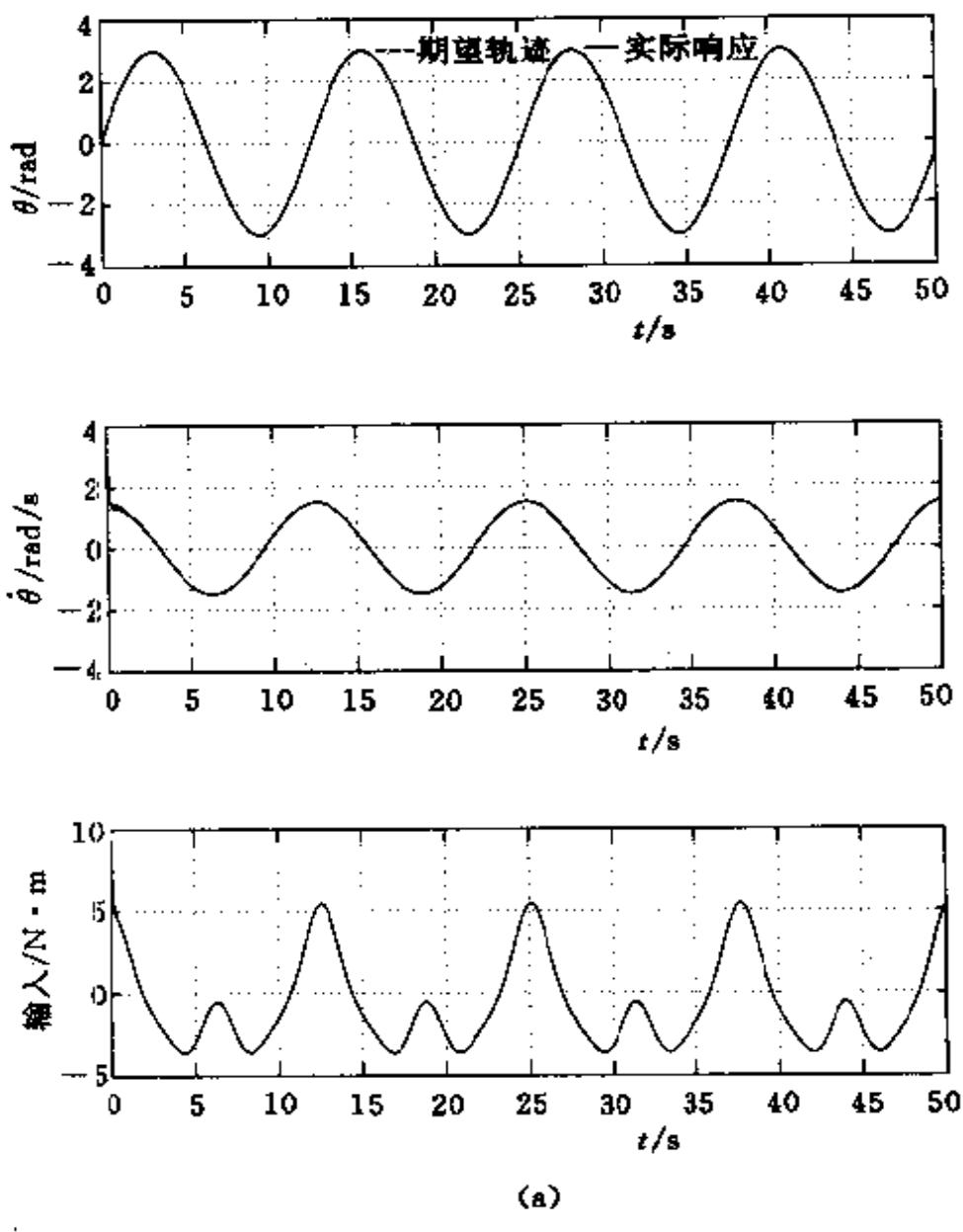


图 1.11(a) 标称系统控制结果

轨迹,求其对时间  $t$  的微分,得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}x^T(A^TP - PA)x + x^TPB(v + \Delta f) \\ &= -\frac{1}{2}x^TQx + x^TPBv + x^TPB\Delta f\end{aligned}$$

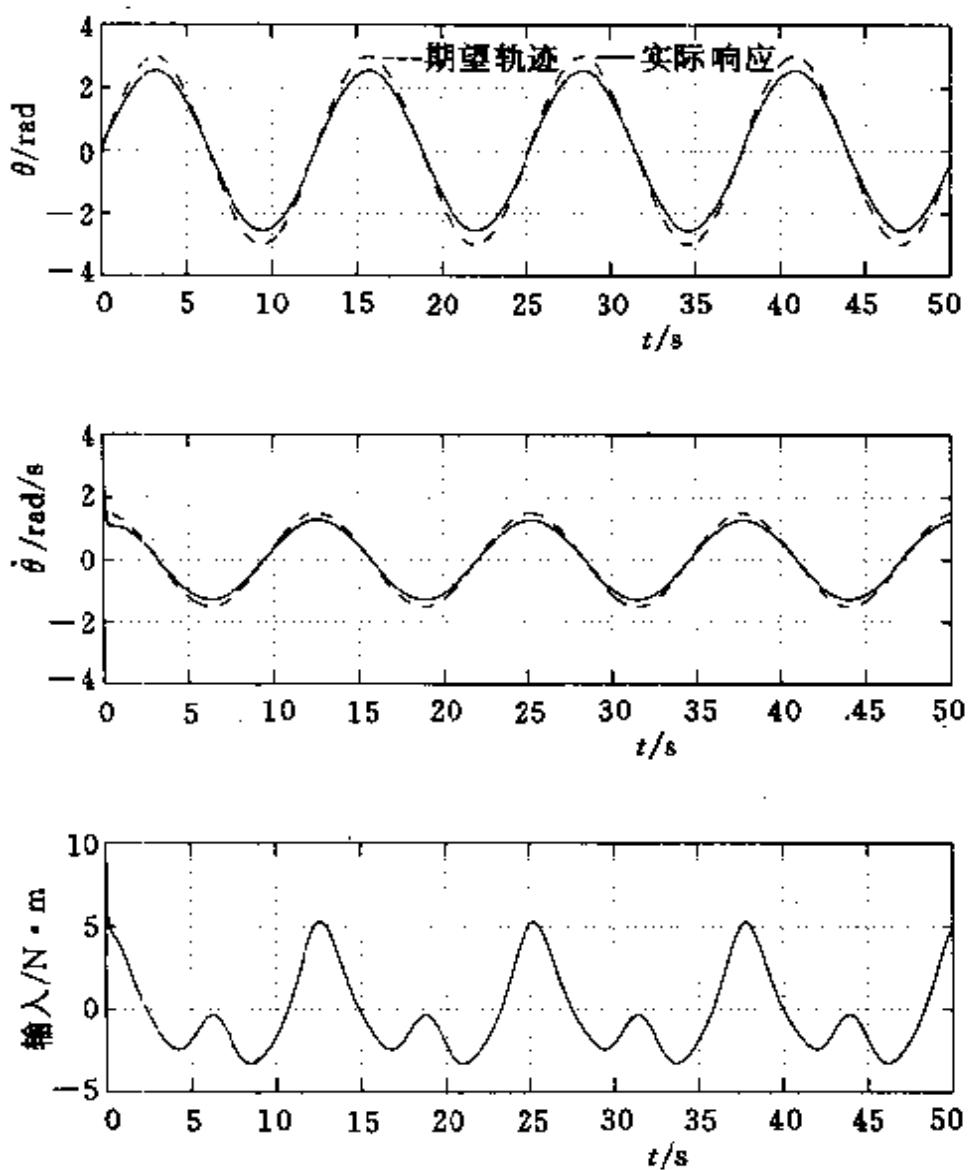


图 1.11(b) 不确定性对控制品质的影响

$$\begin{aligned}
 &\leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{v} + |\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \|\Delta f\| \\
 &\leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{v} + |\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \bar{\rho}
 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{x}^T$  表示向量  $\mathbf{x}$  的转置。因此, 令

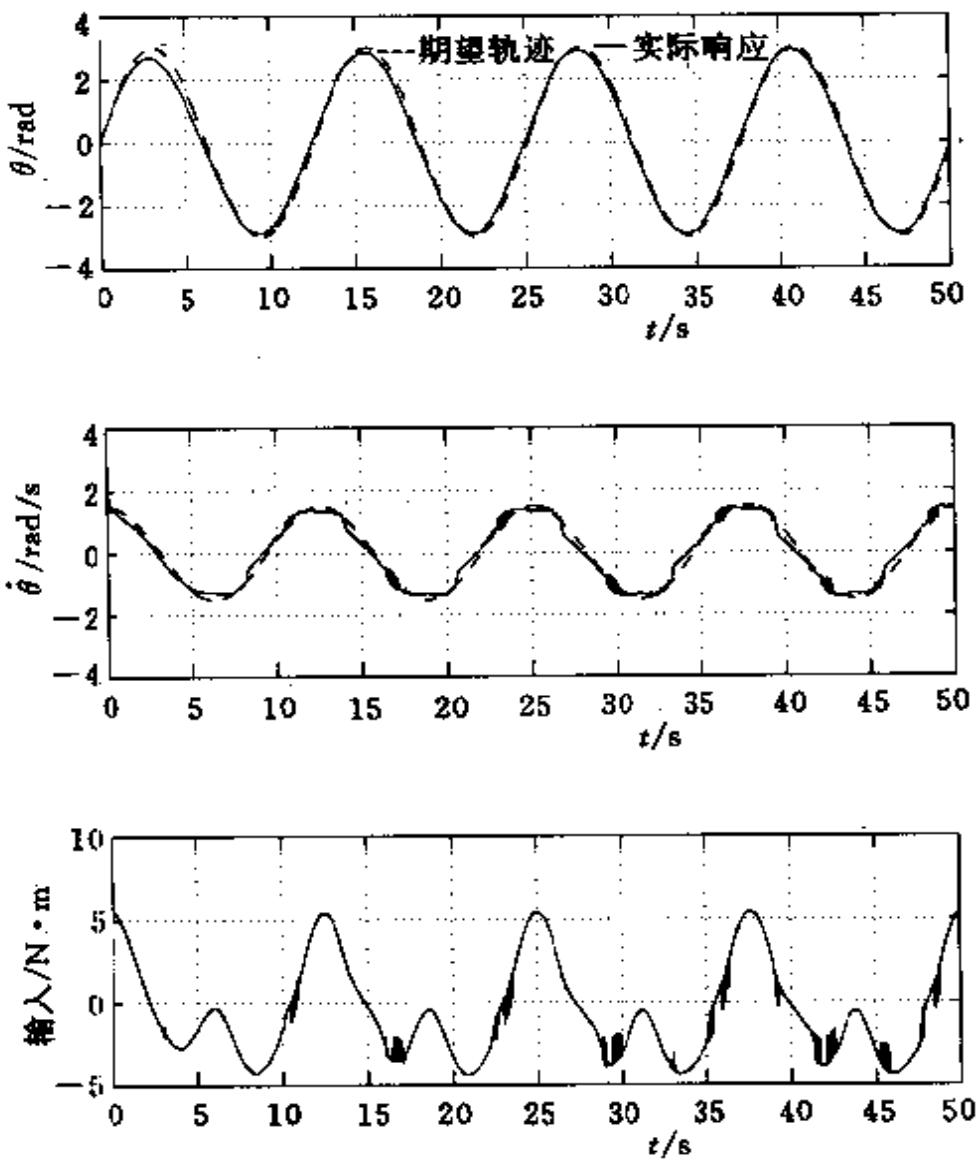


图 1.11(c) 鲁棒控制结果

$$v = -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \tilde{\rho}^2}{|\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{P}| \tilde{\rho} + \gamma e^{-\beta t}} \quad (1.16)$$

并代入上式, 得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^2 \tilde{\rho}^2}{|\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{P}| \tilde{\rho} + \gamma e^{-\beta t}} + |\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}| \tilde{\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{P}| \tilde{\rho}}{|\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{P}| \tilde{\rho} + \gamma e^{-\beta t}} \gamma e^{-\beta t} \\
&\leq -\frac{1}{2} \lambda V(\mathbf{x}) + \gamma e^{-\beta t} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

对所有的不确定性成立。其中  $\gamma > 0$  为给定的充分小的常数,  $\lambda = \lambda_u / \lambda_p > 0$ ,  $\lambda_u > 0$ ,  $\lambda_p > 0$  分别为正定阵  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{P}$  的最小、最大特征值。

解微分不等式(1.17)可知,对于任意有界的不确定性,从任意初始误差出发的  $V(\mathbf{x})$  都趋于零。故,  $\mathbf{x}(t)$  也趋于零。

所以,期望的鲁棒控制器由(1.10)式和(1.16)式给定。令  $\gamma = 9$ ,  $\beta = 0.1$ 。图 1.11(c) 表示有不确定性存在时的鲁棒控制结果。与图(b)相比较可知,鲁棒控制结果的跟踪误差要比没有考虑不确定性的—般控制结果(图(b)所示)小得多。

## 1.5 鲁棒控制的特征

如前所述,多自由度机器人一般是非线性系统。但是,如果能够得到其精确的数学模型的话,可以通过状态反馈实现精确线性化,从而可以运用线性系统的伺服控制理论来设计控制器。问题是由于不确定性的存在使得机器人数学模型的精确线性化无法实现。我们在设计伺服控制器时必须考虑机器人数学模型本身的不确定性和不确定的外部干扰。

其实,抑制系统的不确定性对控制性能的影响正是反馈控制理论最基本的课题。作为在现代控制理论的鼎盛时期问世的工业机器人,其控制技术的成长与现代控制理论的发展有着密切的关系。在机器人技术三十多年成长过程中,现代控制理论所提供的几乎所有设计方法都在机器人上做过应用的尝试。其中,应用最为普遍的是所谓的 PID 或 PD 控制器。PD 控制器结构简单,根据位置跟踪误差和速度跟踪误差乘以相应的静态增益来确定控制

量。最近提出来的许多鲁棒控制器其基本结构仍然是 PD 型结构(参见第 6 章)。除此而外,针对数学模型的不确定性,采用现代控制理论的机器人控制技术可分为三大类,即自适应控制、变结构控制以及现代鲁棒控制。

首先,自适应控制假设机器人的不确定性可以用其数学模型中的未知参数来描述,通过在线估计未知参数,并根据其估计值随时修正控制策略,使得实际的闭环控制系统满足性能要求。在 80 年代初,机器人的自适应控制的研究非常活跃,详细可参阅文献 [2]~[4]。这种控制策略的成功取决于对未知参数的准确估计,但这在实际工程中往往是难以实现的,由于不确定的外部干扰和无法由定常参数表示的未建模动态等影响,参数估计误差往往不收敛于零,甚至会发散。

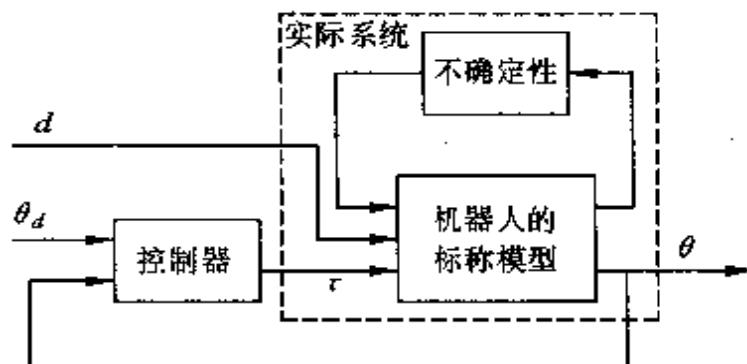


图 1.12 鲁棒控制系统的结构框图

至于变结构控制,其基本思想是在误差系统的状态空间中,找到一个合适的超平面,它能够保证超平面内的所有状态轨迹都收敛于零。然后,以这个超平面为基准不断切换控制器的结构,使得误差系统的状态在即使存在一定范围不确定性的情况下也能到达该超平面,进而趋于零。关于机器人的变结构控制可参见文献[5]~[6]。但是,这种控制方法的缺陷是控制器频繁的切换动作有可能造成跟踪误差在零点附近产生抖动现象,而不能收敛于零。

鲁棒控制的基本特征,正如上节的设计例所示,是用一个结构和参数都是固定不变的控制器,来保证即使不确定性对系统的性能品质影响最恶劣的时候也能满足设计要求。机器人的鲁棒控制系统的一般结构如图 1.12 所示。不确定性分为两大类,不确定的外部干扰  $d$  和模型误差  $\Delta$ 。显然,  $\Delta$  受系统本身状态的激励,同时又反过来作用于系统的动态。机器人系统的各种参数误差、各种降阶处理以及建模时忽略的动态特性等等,都可以用  $\Delta$  来描述。但是在设计鲁棒控制器时,一般假设  $\Delta$  属于一个可描述集,比如增益有界,且上界已知等等。对于不确定的干扰信号也是如此,  $d$  可以是不可检测的信号,但必须属于可描述集。鲁棒控制器就是基于这些不确定性的描述参数和标称系统的数学模型设计的。一般来说,鲁棒控制是比较保守的控制策略。即,对于所考虑集合内的个别元素,该系统并不是最佳控制。但是,它能以固定的控制器,保证在不确定性破坏最严重的情况下系统也能满足设计要求,而这正是实际现场所期望的,也是近几年对机器人鲁棒控制的研究非常活跃的一个重要原因。关于机器人的鲁棒控制可参阅近几年出版发表的有关论述(比如文献[7]~[9])。

## 第 2 章 机器人的位姿描述

描述被控对象的动态特性的数学模型是运用现代控制理论设计自动控制系统的基础。本章和第 3 章将介绍建立机器人数学模型的基础。本章将概要介绍机器人的位姿描述方法,各关节连杆之间的位置关系和速度关系。在机器人的控制系统中,一般直接的检测量是各关节连杆的位置和速度。如何根据各连杆的位置或速度计算出机器人所载的操作机构(或称为末端执行器)在操作空间中的位姿,被称为机器人的运动分析或运动学正向问题。与此相反,根据末端执行器在操作空间的位置或速度的期望值,反向计算出各关节连杆相应的位置和速度,被称为机器人的运动综合或运动学逆向问题。

### 2.1 位姿描述

机器人一般由多个连杆(link)通过转动或移动关节(joint)连接而成。图 2.1 是三个连杆通过两个转动关节和一个移动关节相连而成的机械手的示意图。

所谓机器人的位姿是指机器人各关节连杆的位置和姿态。为了描述连杆在同一个位置所处的不同姿态,一般在每个连杆上固定一个坐标系。因此,每个关节的连杆在操作空间的位置就可以用固定在该连杆的坐标系的原点在操作空间的坐标值来描述,而其姿态则可以用该坐标系的坐标向量在操作空间的坐标给定。比如,图 2.1 所示机械手各连杆上分别固定一个坐标系,而操作空间则用固定在基座上的坐标系 XYZ 描述。通过移动关节与连杆  $L_2$  相

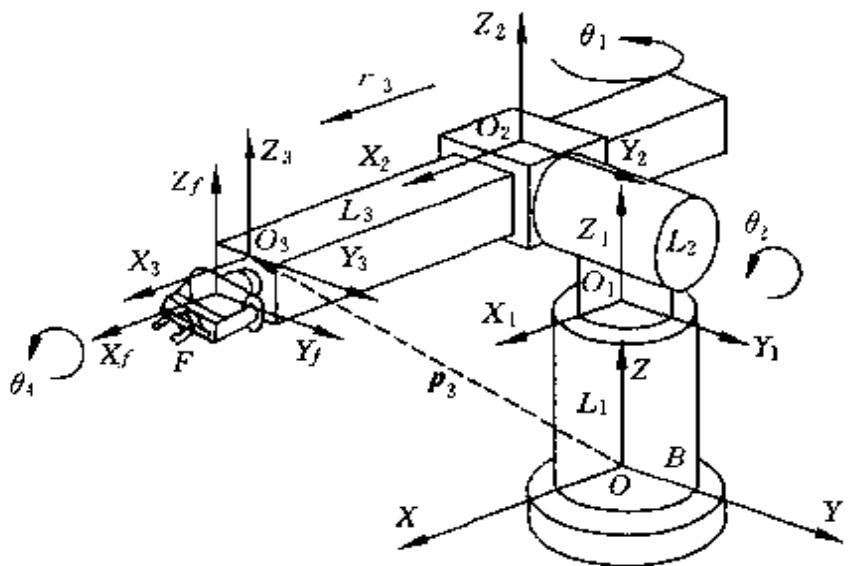


图 2.1 机器人的位姿描述

连的连杆  $L_3$  在操作空间中的位置可以用以  $O_3$  为端点的向量  $p_3$  (以下文中如无特殊说明,向量均指列向量)在  $XYZ$  的坐标描述,而其姿态就可以用连杆坐标系的单位坐标向量  $i_3, j_3, k_3$  在  $XYZ$  坐标系的坐标描述。

因此,机器人各关节连杆之间的位置关系和速度关系,实际上就是各相对坐标系之间的关系。一个连杆的位姿相对于操作空间坐标系的变化,或者两个连杆之间位姿的相对变化,可以通过两个坐标系的相对变化来描述。而这个变化无论多么复杂,都可以用相对平行移动和相对旋转这两个基本的变化来合成。

### 1. 平行移动

平行移动后的两个坐标系如图 2.2 所示。这两个坐标系的坐标向量相互平行,但原点不一致。考虑给定  $X_1Y_1Z_1$  坐标系下的点  $P$ ,求该点在坐标系  $XYZ$  下的坐标值的问题。为此,我们需要已知  $X_1Y_1Z_1$  坐标系的原点  $O_1$  在坐标系  $XYZ$  下的坐标值。

设以  $O$  为始点,  $O_1$  为终点的向量  $p_0$  已知,并用向量  $p_1$  和  $p$

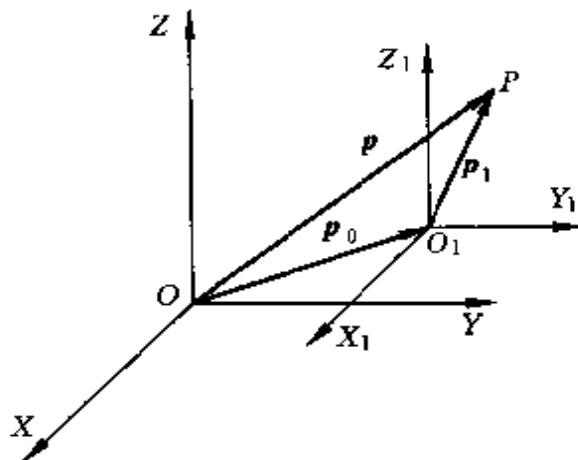


图 2.2 平行移动关系

分别表示点  $P$  在两个坐标系下的坐标向量。即,设

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

则有如下关系:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 \quad (2.1)$$

由此可知,平行移动的坐标系之间的位置关系取决于坐标原点之间的位置关系。

## 2. 旋转

如果两个坐标系共有一个原点,且有一个坐标轴方向相同,则称它们是旋转关系。例如, $Z$  轴方向相同,且其中一个坐标系围绕  $Z$  轴旋转  $\theta$  角度的两个坐标系关系如图 2.3 所示。

如果已知点  $P$  在坐标系  $X_1Y_1Z_1$  下的坐标  $\mathbf{p}_1$ ,则可以用下式求点  $P$  在坐标系  $XYZ$  下坐标  $\mathbf{p}$ :

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta$$

$$z = z_1$$

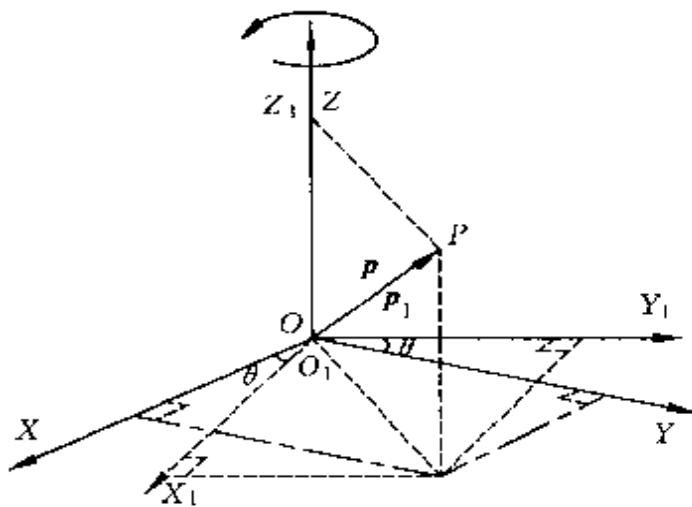


图 2.3 旋转关系

即

$$p = R(z, \theta) p_1 \quad (2.2)$$

其中,  $R(z, \theta)$  称为旋转变换阵, 其参数  $z, \theta$  分别表示旋转轴和旋转角度, 由下式给定:

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

对于处于旋转关系的两个坐标系来讲, 只要知道其中一个坐标系相对于另一个坐标系的旋转变换阵, 就可以按(2.2)式进行坐标变换。

同理可以求得分别围绕  $Y$  轴和  $X$  轴时的旋转变换阵如下:

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

下面我们来考察旋转变换阵的物理意义。以  $R(z, \theta)$  为例, 记

$$R(z, \theta) = [n \ t \ b]$$

其中  $n, t, b$  分别为与(2.3)式对应的列向量。不难验证, 它们满足

$$n^T n = 1, t^T t = 1, b^T b = 1$$

$$n^T t = 0, t^T b = 0, b^T n = 0$$

这意味着向量  $n, t, b$  构成了正交系。实际上, 可以证明, 向量  $n, t, b$  的坐标, 正是坐标系  $X_1Y_1Z_1$  中的单位坐标向量

$$I_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, I_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在坐标系  $XYZ$  下的坐标。

对于旋转阵  $R(y, \theta), R(x, \theta)$  也可以证明类似的关系。

### 3. 齐次变换

如前所述, 坐标系之间的关系更为复杂时, 我们可以通过反复运用上述的平移和旋转来进行坐标变换。考虑如图 2.4 的情况。为了描述连杆在操作空间  $XYZ$  的位姿, 坐标系  $X_2Y_2Z_2$  是固定在连杆上的。如果给定连杆上一点  $P$  在  $X_2Y_2Z_2$  下的坐标  $p_2$ , 欲求该点在操作空间  $XYZ$  下的坐标  $p$  的话, 我们可以引进一个假想的坐标系  $X_1Y_1Z_1$ , 使得它和  $XYZ$  是平移关系, 而和  $X_2Y_2Z_2$  是旋转关系。因此可以运用(2.1)式和(2.4)式求得坐标变换如下。

$$\begin{aligned} p_1 &= R(y, \theta) p_2 \\ p &= p_0 + p_1 = p_0 + R(y, \theta) p_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

如果我们定义一个四维的变换阵

$$T_{20} = \begin{bmatrix} R(y, \theta) & p_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

和表示三维空间的点  $p$  的四维向量

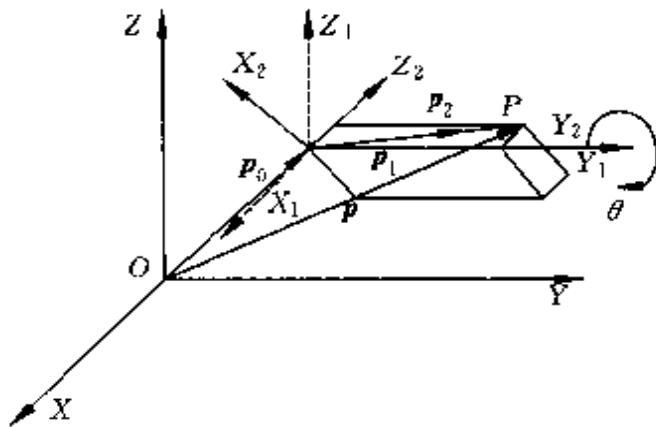


图 2.4 连杆的位姿描述

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

其中,(2.7)式的  $\mathbf{O}$  表示  $1 \times 3$  维零矩阵。那么,变换式(2.6)就可以表示为齐次变换形式

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{T}_{20} \hat{\mathbf{p}}_2 \quad (2.9)$$

四维矩阵  $\mathbf{T}_{20}$  称为齐次变换阵,而  $\hat{\mathbf{p}}$  称为  $P$  的齐次坐标。

显然,当  $\theta=0$  时,旋转变换阵均为三维单位矩阵。因此,令

$$\mathbf{T}_{01} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{O} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

那么,平行变换式(2.1)也同样可以表示成齐次变换形式。

## 2.2 运动学正向问题

已知各关节的位置或角度,求末端执行器的位姿坐标的问题,称为机器人运动学的正向问题。

对于由  $n$  个关节构成的机器人来讲,如果假设各个关节只有一个自由度,即各连杆之间只通过平行移动关节或旋转关节相连,那么就可以把这个机器人看成是由  $n$  节连杆串联而成的链。固定

在底座上的连杆  $L_1$  是链的一端,而链的另一端的连杆  $L_n$  与末端执行器相连。为了描述各个连杆的位姿,通常各连杆  $L_i$  上都固定一个坐标系  $X_iY_iZ_i$ 。

记坐标系  $X_iY_iZ_i$  到坐标系  $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$  的齐次变换阵为  $T_{i(i-1)}$ ,则点  $P$ (其在  $X_iY_iZ_i$  坐标系内的齐次坐标为  $\hat{p}_i$ )在  $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$  下的坐标  $\hat{q}_{i-1}$  就可以由下式求出:

$$\hat{p}_{i-1} = T_{i(i-1)} \hat{p}_i$$

应该注意,齐次变换阵  $T_{i(i-1)}$  并不是常数阵,它的值取决于连杆  $L_i$  和  $L_{i-1}$  的相对位姿,即固定在  $L_i$  上的坐标系  $X_iY_iZ_i$  相对于  $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$  的旋转角度或者其原点相对于  $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$  坐标原点的移动距离。

因此,如果给定各关节连杆的相对位姿,求固定在连杆  $L_n$  上的末端执行器相对于坐标空间  $XYZ$  的位姿,就可以沿着上述的连杆链,依次递推进行坐标变换。容易验证,总的坐标变换阵如下:

$$T_{n0} = T_{10}T_{21}\cdots T_{n(n-1)} \quad (2.11)$$

即,一旦各个关节的位姿固定,且末端执行器在连杆  $L_n$  的坐标系下的齐次坐标  $\hat{p}_n$  已知,那么末端执行器在作业空间  $XYZ$  下的齐次坐标  $\hat{p}$  为

$$\hat{p} = T_{n0} \hat{p}_n \quad (2.12)$$

这就是正向问题的解。当然如果各关节的连杆的位姿发生变化,那么  $T_{n0}$  的值也随之而变,但是由(2.12)式给定的变换关系不变。

下面以如图 2.1 所示的机械手为例,介绍机器人运动学正向问题的具体解法。该机械手由三个连杆和末端执行器构成。连杆  $L_1$  与底座  $B$  通过旋转关节相连结,其旋转角度由  $\theta_1$  表示。 $L_1$  与连杆  $L_2$  也通过旋转关节相连结,其旋转角度由  $\theta_2$  表示。 $L_2$  与连杆  $L_3$  则通过移动关节相连结,其移动距离由  $r_3$  表示。末端执行器  $F$  本身也是一个连杆,它通过旋转关节与连杆  $L_3$  连结,其旋转角度

由  $\theta_4$  表示。固定在各个连杆上的坐标系的原点之间相对位置由机械手的结构参数所确定，其中  $L_3$  和  $L_2$  的坐标系的关系例外，坐标系  $X_3Y_3Z_3$  的原点和  $X_2Y_2Z_2$  的原点之间的相对位置则由  $r_3$  所确定。分析图中各关节坐标的关系可得各相邻关节之间的齐次变换阵如下：

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(z, \theta_1) & \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} r_0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(y, \theta_2) & \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} r_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{F3} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(x, \theta_4) & \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

其中， $x_2, x_4, y_2, y_4, z_1, z_2, z_4$  均为机械手的结构所确定的参数。因此，如果给定末端执行器上一点  $P$  的坐标  $\hat{\mathbf{p}}$ ，和各关节的位置  $\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4$ ，那么该点在操作空间  $XYZ$  的坐标就可以由(2.11)，(2.12)式求出，即有

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{T}_{F0} \hat{\mathbf{p}}_4 \quad (2.13)$$

其中， $\mathbf{T}_{F0} = \mathbf{T}_{10}\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{F3}$ 。

## 2.3 运动学逆向问题

所谓机器人运动学的逆向问题与上述的正向问题相反，即给

定末端执行器的位姿,求各个关节的位姿坐标。以图 2.1 的机械手为例,就是给定末端执行器上点  $P$  在操作空间上的坐标,反过来求各关节的参数  $\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4$ 。一般机器人控制问题就是要通过驱动机构来调整各关节的位姿即这些关节的坐标,使得末端执行器的位姿跟踪给定的轨迹或稳定在指定的位姿上。因此,从机器人控制的角度来讲,逆向问题是一个很重要的课题。

逆向问题的解法可分为数值解法和解析解法。考虑到在实际的数值式机器人动态控制系统中,需要在较短的控制周期内在线计算各关节坐标的期望值,理想的解法是应该能够给出解析解。但是,并不是所有的机器人其逆向问题都存在解析解,这一般取决于机器人的几何结构。对于如前介绍的通过旋转和平移关节串联连结的机械手来讲,其逆问题一般都能够推导出解析解。本节以两个连杆的二自由度机械手为例,介绍逆向问题的几何解法。有关更一般的采用逆变换阵的解析解法可参阅机器人大学的教科书。

图 2.5 为二自由度平面机械手的示意图。该机械手是由两个长度分别为  $l_1$  和  $l_2$  的连杆  $L_1$  和  $L_2$  通过旋转关节连接,各关节的旋转角度由  $\theta_1, \theta_2$  表示,操作平面由坐标系  $XOY$  描述。正如上节所述,如果给定各关节的参数  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的具体值,那么固定在末端执行器的点  $P$  在操作平面上的位置就可以确定下来。现在我们来考虑其逆向问题,即给定点  $P$  在坐标系  $XOY$  下的坐标  $(x, y)$ ,求各个关节的旋转角度  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。

首先,根据几何关系得

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.14)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.15)$$

因此,有

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2$$

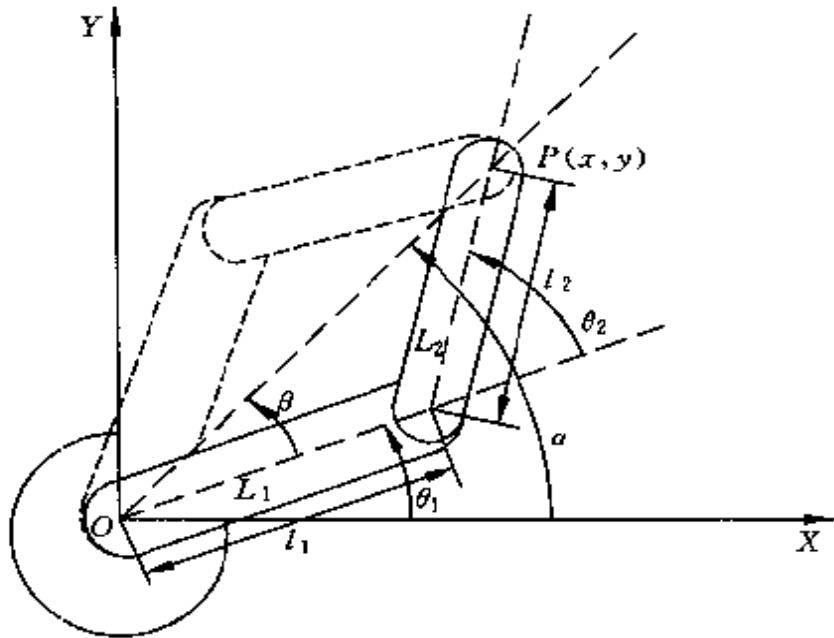


图 2.5 机械臂的运动学逆问题

由此得

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \quad (2.16)$$

利用上式可以求出  $\theta_2$ 。为了保证有解,给定的端点  $P$  必须在机械手所能到达的范围之内。即,其坐标必须满足

$$x^2 + y^2 \leq (l_1 + l_2)^2$$

并且由于余弦函数是偶函数,(2.16)式存在正负两个解,如图 2.5 所示,这两个解都是可实现的解。

为了求出与正负解对应的  $\theta_1$ ,先分别求出角  $\alpha$  和  $\beta$ 。

$$\alpha = \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

根据余弦定理,得

$$\beta = \arccos \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

由此得出

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha - \beta, & \theta_2 > 0 \\ \alpha + \beta, & \theta_2 \leq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

对于更一般的具有串联链式结构的多关节机器人来讲,可以通过齐次变换阵来获得逆向问题的解析解。如前所述,两个相对坐标系之间的四阶的齐次变换阵含有三阶的旋转变换阵和原点的平移向量,且旋转变换阵的三个列向量是其中一个坐标系的单位坐标向量在另一个坐标系下的坐标值,其具体的值是旋转角的函数。因此,给定齐次变换阵的具体值,就可以反过来求出两个坐标系的相对旋转角度和平移距离。将这个思路运用于机器人运动学的逆向问题,给定末端执行器的位姿坐标就意味着给定了从固定在末端执行器的坐标系到操作空间坐标系的齐次变换阵的具体值,因此就可以反过来求各个关节的旋转角度和平行位移。

考虑如图 2.1 所示的机械手。从末端执行器的坐标系  $X_f, Y_f, Z_f$  到操作空间坐标系  $XYZ$  的齐次变换阵可以表示为

$$T_{F0} = \begin{bmatrix} R & p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_f & t_f & b_f & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

其中,  $n_f, t_f, b_f$  和  $p$  分别是  $X_f, Y_f, Z_f$  的三个单位坐标向量和其原点在  $XYZ$  下的坐标值。因此,给定末端执行器的位置,  $T_{F0}$  的具体值也就随之确定。但是,另一方面如(2.13)式所示,

$$T_{F0} = T_{10} T_{21} T_{32} T_{F3} \quad (2.19)$$

且  $T_{10}, T_{21}, T_{32}, T_{F3}$  分别是各关节自由度参数  $\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4$  的函数。所以,比较(2.18)式右端和(2.19)式右端的两个四阶矩阵,就可以得到  $\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4$  所应该满足的解析方程式,从而求得  $\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4$  的具体值。

比如,假设已经求得  $\theta_1, \theta_2, \theta_4$ ,欲求  $r_3$ 。这时  $T_{10}, T_{21}, T_{F3}$  均为已知定常矩阵。(2.19)式等价于

$$\mathbf{T}_{F_0}\mathbf{T}_{F_3}^{-1} = \mathbf{T}_{10}\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{32} \quad (2.20)$$

将  $\mathbf{T}_{32}$  代入上式，并记四阶的已知定常阵为

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{F_3}^{-1}\mathbf{T}_{F_0},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{10}\mathbf{T}_{21}$$

则(2.20)式可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{BT}_{32} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

比较上式两端矩阵的第 1 行、第 4 列元素，求得

$$r_3 = \frac{a_{11} - b_{14}}{b_{11}} \quad (2.21)$$

其中， $a_{11}, b_{14}, b_{11}$  分别为定常阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的相应元素。

## 2.4 雅可比矩阵

前几节介绍了多关节机器人的末端执行器与各关节连杆之间的位置关系。为了有效地控制机械系统的动态，我们不仅需要被控对象的位置信息，而且还需要速度信息。这一节就来讨论末端执行器与各关节连杆的速度关系。

考虑由  $n$  个连杆通过串联关节联接起来的机器人。假设末端执行器固定在第  $n$  个关节上，其位姿由固定在第  $n$  个关节上的坐标系描述，而第 1 个关节与底座相连。记各关节的自由度即关节连杆的移动距离或旋转角度分别为  $q_1, q_2, \dots, q_n$ 。

正如本章所示，如果指定末端执行器上一点  $p$ ，并给定该点在操作空间坐标系（固定在底座上）的坐标  $p$ ，我们就可以通过解运动学的逆向问题求得各关节自由度参数  $q_1, q_2, \dots, q_n$  的值；反之亦

然。这表明  $\mathbf{p}$  的坐标值是各关节自由度参数的函数,即

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (2.22)$$

其中  $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \cdots q_n]$ ,  $\mathbf{F}$  为函数矩阵,可以用如同上节所介绍的方法,通过几何方法或分析齐次变换阵得到。

所以,末端执行器位置的变化率即速度和各关节连杆的移动或转动速度的关系,就可以从(2.22)式求出。记

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{q}) \\ f_y(\mathbf{q}) \\ f_z(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

求(2.22)式两边微分,得

$$d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (2.23)$$

其中

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

由此得出

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (2.25)$$

其中

$$\frac{dp}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}, \quad \frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix}$$

显然,(2.25)式正是我们欲求的速度关系。 $J(q)$ 称为机器人的雅可比矩阵,它描述了各关节连杆与末端执行器的速度之间的齐次变换关系。由(2.23)式可知,雅可比矩阵的另一个意义还在于它给出了两者之间的微分位移关系。即,如果给定各关节连杆微小的平移或转动量  $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$ ,就可以利用(2.23)式求出与其所对应的末端执行器位置坐标的微小变化量  $dx, dy, dz$ 。

下面以图 2.5 所示的二自由度机械手为例,具体求该机械手的雅可比阵。首先,根据(2.14)式和(2.15)式的结果可知,固定在连杆  $L_2$  端点  $P$  处的末端执行器的位置坐标  $x, y$  和各关节连杆的旋转角度  $\theta_1, \theta_2$  的关系如下:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} f_x(\theta_1, \theta_2) \\ f_y(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$f_x(\theta_1, \theta_2) = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.26)$$

$$f_y(\theta_1, \theta_2) = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.27)$$

由此求得

$$\frac{\partial f_x}{\partial \theta_1} = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial \theta_2} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial \theta_1} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial \theta_2} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

故,得到雅可比矩阵如下:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

如果用控制理论中常用的记号  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ , 来表示各自的速度量,根据此雅可比阵得到该机械手的速度变换关系如下:

$$\dot{x} = -[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y} = [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2$$

如果给定各关节的旋转角度  $\theta_1, \theta_2$ ,那么雅可比阵的各元素的值也就随之确定。因此,已知各关节的旋转速度,就可以通过上式求出末端执行器的移动速度  $\dot{x}, \dot{y}$ 。反之,给定末端执行器的移动速度,也可以用上式求出各关节的旋转速度  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 。即

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

显然,这时的雅可比阵必须可逆,才能使上式有解。这就意味着如果各关节连杆的位姿恰好使得雅可比阵成为奇异阵的话,对于任意指定的末端执行器的移动速度,未见得一定能够求出对应各关节的速度。

比如对于上述的二自由度机械手来说,如果两个关节的位置如图 2.6 所示,即  $\theta_2=180^\circ$  或  $\theta_2=0^\circ$ 。这时,

$$J(\theta_1, 180^\circ) = \begin{bmatrix} (l_2 - l_1) \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_1 \\ -(l_2 - l_1) \cos \theta_1 & -l_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$J(\theta_1, 0) = \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2)\sin\theta_1 & -l_2\sin\theta_1 \\ (l_1 + l_2)\cos\theta_1 & l_2\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

均为奇异阵。不难看出,当机械手处于这个位置时,期望末端执行器沿箭头方向移动是不可能的。

这种使雅可比阵成为奇异阵的位姿称为机器人的奇异位姿或奇异点。

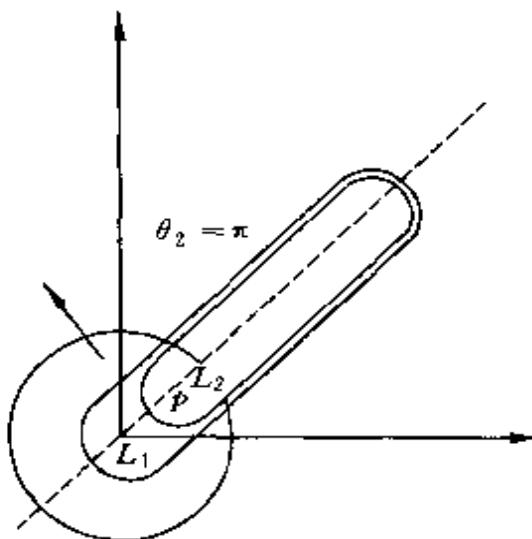


图 2.6 机械臂的奇异位姿

## 第3章 机器人的动态数学模型

由第2章的讨论可知,机器人各关节连杆的位置关系及速度关系取决于机器人的几何结构,而与各连杆的质量无关。但是,对于给定的各关节连杆的驱动力或力矩,机器人的位姿将发生什么样的变化,其运动的动态过程如何,不仅取决于其几何结构,而且还依赖于各关节连杆的惯性,即质量。这个运动过程一般用微分方程来描述,这就是机器人动态的数学模型,它是机器人动态控制的基础。本章主要介绍利用牛顿定律和拉格朗日方法建立机械系统的运动方程的基本原理。将介绍两个典型的机械系统和机械臂数学模型的建立过程。

### 3.1 刚体的运动方程

一般情况下,机器人各关节的连杆可以看做是一个刚体。其运动可以通过位于质心且具有同等质量的质点的运动来描述。因此,对于一个孤立的连杆来讲,我们就可以用牛顿定律来建立其运动方程。

考虑如图3.1所示的一自由度连杆的运动过程。设连杆的质量为 $m$ ,电机通过链条施加到该连杆上的驱动力为 $F$ ,而 $s$ 表示位移。该连杆的运动就可以通过质量为 $m$ 的质点的运动描述,如图3.2所示。

记该质点的速度为 $v$ ,那么其动量 $p$ 为

$$p = mv \quad (3.1)$$

质点的运动必须遵守牛顿定律,即

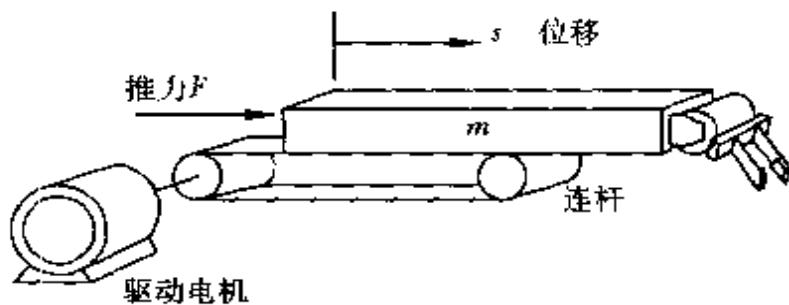


图 3.1 连杆驱动机构示意图

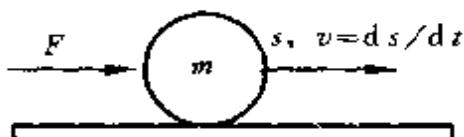


图 3.2 质点的运动

- (1) 质点在没有外力作用时,保持静止或匀速运动;
- (2) 质点动量的变化率与作用在该质点上的合力成正比,方向与合力的方向相同;
- (3) 两个质点之间的相互作用力的大小相同,方向相反。

根据这个定律,可以得到运动方程为

$$k \frac{d}{dt} p = k \frac{d}{dt} (mv) = k \frac{d}{dt} (m\dot{s}) = F \quad (3.2)$$

其中,  $k$  是比例系数,如果上式中各量的单位分别采用  $m, s, kg$  和  $N$ ,那么  $k=1$ 。

假设连杆的质量  $m$  是常数,则上式为

$$m\ddot{s} = F \quad (3.3)$$

其中,  $\ddot{s}$  表示质点的加速度。当然,如果考虑作用在连杆上的其他力,诸如链条的摩擦力等,那么上式的右端应该用驱动力和摩擦力等其他外力的合力取代。

上述讨论只考虑了一个自由度且运动方向和坐标轴方向一致,因此(3.3)式中的速度和力均为标量。如果我们考虑如图 3.3

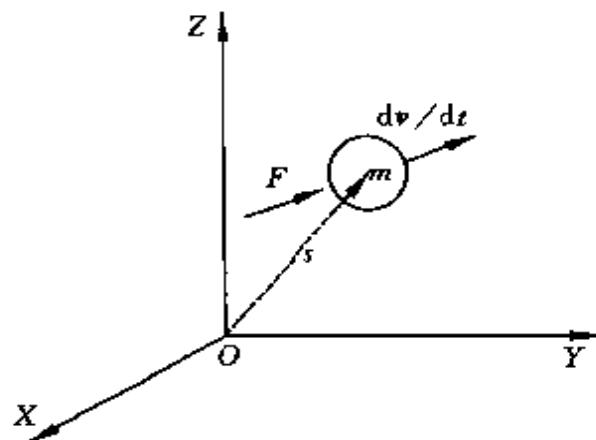


图 3.3 在三维空间运动的质点

所示的三维空间里的直线运动，则速度、加速度和力均应用向量表示。即，运动方程应该表示为

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(m\dot{s}) = F \quad (3.4)$$

或者，

$$m\ddot{s} = F \quad (3.5)$$

这时，向量  $s$  表示质点在三维空间的坐标。

对于旋转关节连杆的旋转运动，我们可以得到同样的方程。设刚体绕质心的轴线旋转，在刚体上固定一个坐标系 XYZ 使得其原点与刚体的质心重合，并记该坐标系下的旋转角速度向量为  $\omega$ ，各坐标值分别是刚体绕对应坐标轴的旋转角速度分量。则根据牛顿定律有

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \quad (3.6)$$

其中， $\tau$  为作用在刚体上的力矩向量， $I$  是由下式给出的三阶对称矩阵，被称为惯性张量。

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dV$$

$$I_{zz} = \iiint_V (y^2 + x^2) \rho dV$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \rho dV$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz \rho dV$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz \rho dV$$

式中,  $\rho$  为密度, 微分单元  $dV$  的位置由坐标  $x, y, z$  给定。

选取合适的坐标轴方向可以使惯性张量成为对角阵。比如, 考虑如图 3.4 所示的质量为  $m$  的均匀分布的长方体和圆柱体。如果我们选择坐标轴如图所示, 不难求出对于长方体有

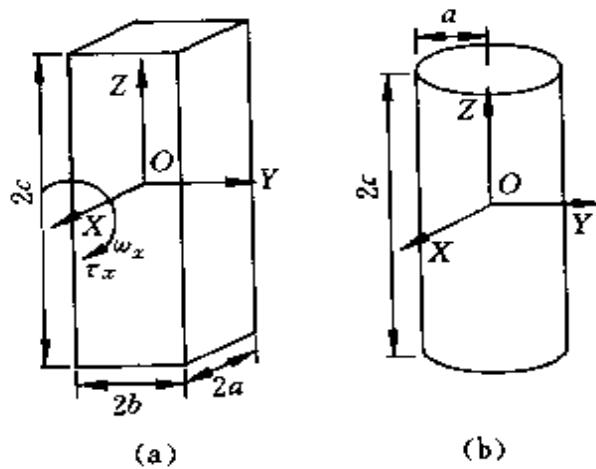


图 3.4 物体的转动惯量

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

而对于圆柱体则有

$$I = \begin{bmatrix} m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{bmatrix}$$

这就意味着绕各坐标轴的旋转运动分量可以相互独立描述。例如，记长方体绕  $X$  轴的旋转角速度为  $\omega_x$ ，对应的驱动力矩为  $\tau_x$ ，假设  $c = l$  且其值远远大于  $a, b$ ，则

$$I_{xx} = \frac{1}{3}ml^2 \quad (3.8)$$

故有

$$\frac{d}{dt}(I_{xx}\omega_x) = \frac{1}{3}ml^2\dot{\omega}_x = \tau_x \quad (3.9)$$

如果我们讨论刚体绕任意指定的坐标系  $X'Y'Z'$  旋转的运动，则必须将上述的绕固定在刚体自身上的坐标系旋转的惯性张量和角速度转换成  $X'Y'Z'$  坐标下的惯性张量  $I'$  和角速度  $\omega'$ ，然后再应用牛顿定律。这实际上就是第 2 章所介绍的两个坐标系之间的位置及速度向量的变换问题。一般来讲，其变换过程比较繁琐。

但是，如果任意指定的坐标系与固定在刚体质心上的坐标系平行，那么情况就要简单得多。因为角速度向量不变，而在新坐标下的惯性张量可以通过平行轴原理求得如下：

$$I' = I_0 + I \quad (3.10)$$

其中,  $I_0$  是将刚体的质量  $m$  集中于坐标系  $XYZ$  的原点时, 该质点对于  $X'Y'Z'$  的惯性张量, 设刚体质心即  $XYZ$  的原点在  $X'Y'Z'$  下的坐标为  $x_0, y_0, z_0$ , 那么,

$$I_0 = \begin{bmatrix} m(y_0^2 + z_0^2) & -mx_0y_0 & -mx_0z_0 \\ -mx_0y_0 & m(x_0^2 + z_0^2) & -my_0z_0 \\ -mx_0z_0 & -my_0z_0 & m(y_0^2 + x_0^2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

下面以单连杆机械臂为例, 简单介绍利用平行轴原理求运动方程的过程。考虑如图 3.5 所示的机械臂, 臂长为  $2l$ , 质量为  $m$ , 且沿  $l$  方向均匀分布。该机械臂的一端与驱动电机连接, 其转角和驱动力矩分别用  $\theta$  和  $\tau$  表示。求该机械臂的运动方程。

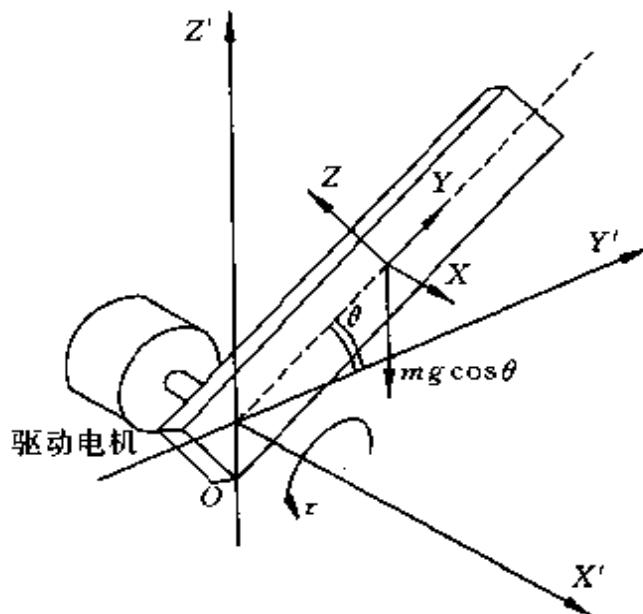


图 3.5 单连杆机械臂

首先固定两个坐标系如图。则臂绕  $X$  轴的旋转角速度为  $\dot{\theta}$ , 而绕其他坐标轴的旋转角速度均为零。机械臂对于坐标系  $XYZ$  的  $X$  坐标轴的惯性矩由(3.8)式给定。而机械臂的质心在  $X'Y'Z'$  下的坐标满足

$$x_0 = 0, y_0^2 + z_0^2 = l^2$$

所以,由(3.11)式得  $I_0$  为对角阵,与  $X$  轴相对应分量为

$$I_{0x} = ml^2 \quad (3.12)$$

而绕  $X$  轴旋转所对应的合力矩为电机提供的驱动力矩  $\tau$  和由重力引起的反向力矩  $mg\cos\theta$  之和。故,根据平行轴原理得该机械臂的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\{(I_{xx} + I_{0x})\dot{\theta}\} = \tau - mg\cos\theta \quad (3.13)$$

即,

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} = \tau - mg\cos\theta \quad (3.14)$$

以上讨论的建立刚体运动方程的方法适用于独立的单体连杆。对于多关节的机器人来讲,牛顿定律同样适用。但是,由于一个连杆的驱动力矩同样会影响作用到相邻的其他连杆,而来自其他连杆的反作用力矩又将反过来引起本连杆动量的变化。因此,在分析各个连杆时,我们必须考虑相邻连杆之间的这种力矩耦合和坐标关系。

作为本节结束,下面通过一个典型的机械系统——倒立摆的数学模型建立过程,来考察这种耦合关系。

考虑如图 3.6 所示的倒立摆系统。该系统由质量为  $M$  的小车和质量为  $m$ ,长度为  $2l$  的连杆即摆构成。连杆的一端与小车通过旋转关节自由连接,即该关节无驱动力矩。该机械系统的目的就是要操作小车的驱动力  $F$ ,使得摆稳定在倒立点上,即连杆保持垂直姿态。实际上这个倒立摆系统可以看作是由平移关节小车和旋转关节摆构成的机械手,只不过并非所有关节都加驱动力。

用  $y$  和  $\theta$  分别表示小车的位置和摆的角度,并假设摆与小车的接点有粘性摩擦存在,其摩擦系数为  $f$ 。以下利用牛顿定律来求该机械系统的动态运动方程。首先考虑小车的运动,因为只有沿  $y$  方向的运动,显然有

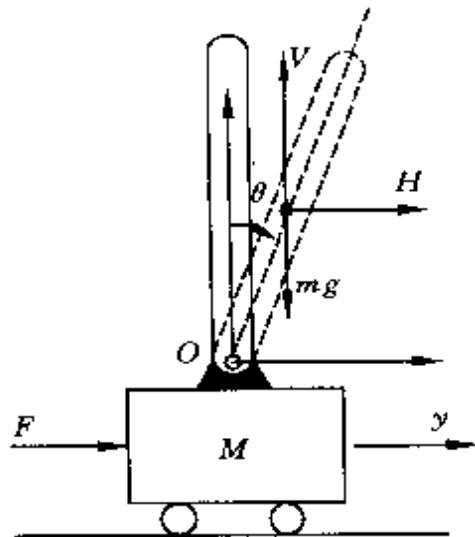


图 3.6 倒立摆系统

$$M\ddot{y} = F - H \quad (3.15)$$

其中,  $H$  是使得摆向水平方向移动的力对小车的反作用力。其次考虑摆绕接点  $O$  的旋转运动。这个摆没有外加的驱动力矩,但是,小车的运动对摆产生水平方向的推力  $H$  和垂直方向的支撑力  $V$ 。这两个力和重力沿旋转方向的分力之和将引起摆的旋转动量的变化。所以,考虑了摩擦力后,根据牛顿定律得出

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta - f\dot{\theta} \quad (3.16)$$

式中的最后一项是粘性摩擦引起的阻力矩,而惯性力矩  $I$  则可参照上述方法求出,得

$$I = \frac{4}{3}ml^2$$

为了最后得到完整的运动方程,必须消除上述两式中的耦合力  $H, V$ 。为此,我们分析摆的水平方向和垂直方向的运动。摆的水平方向和垂直方向的速度分别为

$$v_y = \frac{d}{dt}(y + l\sin\theta)$$

$$v_z = \frac{d}{dt}(l \cos \theta)$$

所以,根据牛顿定律得

$$\frac{d}{dt}(mv_y) = m\ddot{y} + ml(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = H \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt}(mv_z) = -ml(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = V - mg \quad (3.18)$$

将上式代入(3.15)式和(3.16)式,并整理得

$$(M+m)\ddot{y} + ml(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = F \quad (3.19)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{y} + mgl\sin\theta + f\dot{\theta} = 0 \quad (3.20)$$

以上两个微分方程描述了倒立摆运动的动态过程。记坐标向量  $q^T = [y \quad \theta]$  和驱动力矩  $\tau^T = [F \quad 0]$ , 则上式可以表示为如下矩阵形式

$$J(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

其中

$$J(q) = \begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & I+ml^2 \end{bmatrix}, f(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin\theta \end{bmatrix}$$

### 3.2 拉格朗日动力学方程

上一节介绍了运用牛顿力学定律建立机械系统的运动方程的基本方法。对于多关节的机器人来讲,利用这种方法建立数学模型的关键是处理好各关节驱动力和各关节连杆位移之间的相互耦合关系。如上节所述,对于一个单独的关节连杆来说,如果坐标系选取得当的话,力学分析变得很容易,用牛顿定律可以得到很简洁的运动方程。但是,即使一个连杆做简单的平移或旋转运动,如果从

三维空间中任意指定的坐标系来看,就可能成为复合运动。因此,在三维空间分析由多个坐标系描述的各关节连杆运动之间的耦合关系并不容易。这主要是因为利用牛顿定律建立的方程实际上是力的平衡方程,必须在三维空间进行向量分析。而本节所要介绍的拉格朗日动力学方程则是能量的平衡方程,它更适合于分析相互约束下的多个连杆的运动。

考虑由  $n$  个连杆通过移动或旋转关节连接起来的机械系统。设  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$  表示各个关节的位移或旋转角,而其速度或角速度由  $\dot{q}_i (i=1, 2, \dots, n)$  来表示。那么,该系统的状态可以用广义坐标  $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^T = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]$  来描述。记该系统各关节所具有的动能之总和为  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 势能之总和为  $U(\mathbf{q})$ 。则拉格朗日动力学的结论可以用如下的拉格朗日方程描述:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.21)$$

其中,  $\tau_i$  是作用在第  $i$  个关节连杆上的外部力或力矩之和,  $L$  是按下式定义的拉格朗日函数:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (3.22)$$

下面以二维空间为例,证明上述结论。考虑在平面运动的质点  $p$ 。设其质量为  $m$ ,位置坐标用  $x, y$  来表示。根据牛顿定律,该质点沿各坐标方向的运动可描述如下:

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y$$

其中,  $F_x, F_y$  分别是作用在该质点上的合力在  $x$  和  $y$  方向上的分量。

在同一个平面指定一个任意的坐标系,它可以是非直角坐标系,所以称其为广义坐标系。记质点  $P$  在广义坐标系下的坐标为  $q_1, q_2$ ,且两个坐标系之间的坐标变换关系为

$$x = x(q_1, q_2), y = y(q_1, q_2)$$

那么,两个坐标系间的速度关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J(q_1, q_2) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

式中的雅可比阵给定如下:

$$J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

由此得出

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \quad (3.25)$$

下面求作用力  $F$  在广义坐标系下沿各坐标方向的分力  $Q_1$  和  $Q_2$ 。假设在外力作用下质点在各坐标系下的位移分别为  $\delta x, \delta y$  和  $\delta q_1, \delta q_2$ 。由于外力所作的功  $\delta W$  不因坐标系不同而变化。故得

$$\delta W = \delta x F_x + \delta y F_y = \delta q_1 Q_1 + \delta q_2 Q_2 \quad (3.26)$$

考虑  $\delta q_2 = 0, \delta q_1 \rightarrow 0$  的情况。则由上式得

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lim_{\delta q_1 \rightarrow 0} \left\{ F_x \frac{\delta x}{\delta q_1} + F_y \frac{\delta y}{\delta q_1} \right\} \\ &= F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

现在,我们来考虑该质点的动能。同理,由于能量不因坐标系不同而改变。因此,有

$$V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = V(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \quad (3.28)$$

式中具体的函数关系可以根据速度关系(3.23)式求出。由此式得

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \right) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} \right) \quad (3.30)$$

因此,利用(3.25)式,有

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \right) = m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) + m \left( \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + \dot{y} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) \right) \quad (3.31)$$

可以证明,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}$$

将上式及(3.25)式,(3.29)式代入(3.31)式,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \right) &= \left( F_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \right) + m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} \right) \\ &= F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \\ &= Q_1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} = Q_1 \quad (3.32)$$

如果  $q_1$  方向的力  $Q_1$  中,由势能  $U$  引起的阻力  $Q_U$ ,而其他的作用力之和为  $\tau_1$ ,即

$$Q_1 = \tau_1 - Q_U = \tau_1 - \frac{\partial U}{\partial q_1} \quad (3.33)$$

将上式代入(3.32)式,即得关于  $q_1$  方向的运动的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = \tau_1 \quad (3.34)$$

对于互相受约束的多个质点的运动,同理可以得出沿每个广义坐标方向运动的拉格朗日方程。

下面以由刚性球和连杆臂构成的机械系统为例,介绍利用拉格朗日方程建立机械系统的动态模型的具体过程。该系统的结构如图 3.7 所示。连杆  $L$  在驱动力矩  $\tau$  的作用下绕轴心  $O$  点作旋转运动,而刚性球  $Q$  则在重力作用下沿连杆滚动。连杆的转角和刚

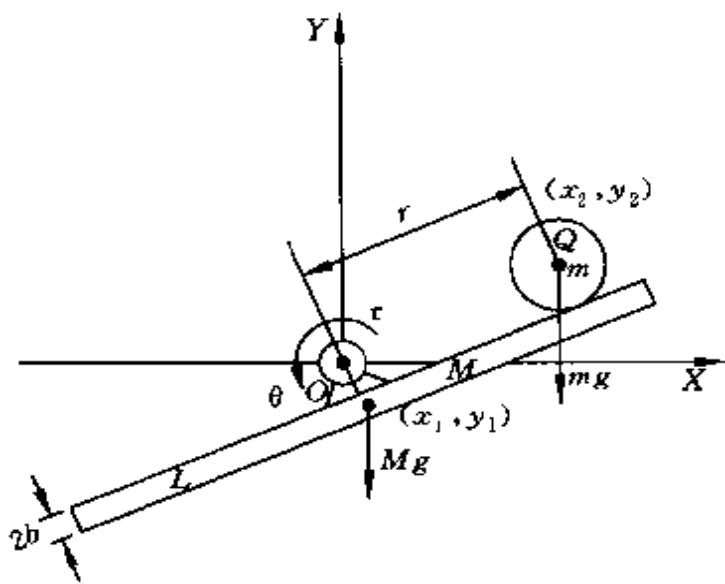


图 3.7 刚性球与臂系统

性球在连杆上的位置分别用  $\theta$  和  $r$  来表示。设刚性球的半径为  $R$ , 且其值与连杆表面即刚性球滚动的平面至  $O$  点的距离相等。刚性球与连杆臂是非线性控制理论的一个典型的实验室课题, 其目的是通过操作驱动力矩使得刚性球稳定在连杆的中心位置同时连杆保持平衡状态。即, 使系统的状态稳定在平衡点  $\theta=0, r=0$ 。

显然, 该系统可以看成是在二维空间运动的相互约束的两个质点。我们选取  $\theta$  和  $r$  作为广义坐标, 利用拉格朗日动力学建立其运动方程。取二维的直角坐标系如图 3.7。

首先, 分析系统的动能。设刚性球在直角坐标下的位置坐标为  $x_1, y_1$ , 则与广义坐标的关系为

$$x_1 = r\cos\theta, y_1 = r\sin\theta$$

所以, 其速度关系为

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y}_1 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

由此求出刚性球沿广义坐标  $r$  方向平移运动的动能如下:

$$V_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (3.35)$$

为了求刚性球自身滚动的动能,用 $\phi$ 来表示与滚动距离 $r$ 所对应的圆心角(见图3.8),其中刚性球自身围绕过球心的径向轴线旋转的角度为 $\alpha$ ,由连杆转角所引起的刚性球的相对滚动角为 $\theta$ 。即满足

$$\begin{aligned} R\phi &= R(\alpha + \theta) = r \\ \alpha &= \frac{r}{R} - \theta \end{aligned} \quad (3.36)$$

其角速度为

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{R} - \theta\right) = \frac{1}{R}\dot{r} - \dot{\theta}$$

因此,刚性球绕轴线旋转的动能为

$$V_2 = \frac{1}{2}J_q\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}J_q\left(\frac{1}{R^2}\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 - \frac{2}{R}\dot{r}\dot{\theta}\right) \quad (3.37)$$

式中 $J_q$ 表示刚性球的转动惯量。

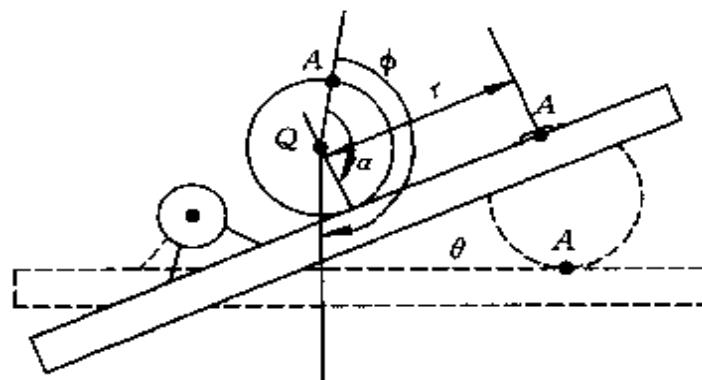


图3.8 滚动角与位移的关系

下面再求连杆臂的动能。设连杆重心的坐标为 $x_2, y_2$ ,连杆重心距表面距离为 $b$ ,则有

$$x_2 = (R + b)\sin\theta, y_2 = (R + b)\cos\theta$$

其速度为

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= (R + b)\theta \cos \theta \\ \dot{y}_2 &= -(R + b)\theta \sin \theta\end{aligned}$$

由此求出连杆绕点  $O$  旋转时的动能为

$$\begin{aligned}V_3 &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}M(R + b)^2\theta^2\end{aligned}\quad (3.38)$$

而连杆绕自身的重心旋转的动能为

$$V_4 = \frac{1}{2}J_s\theta^2 \quad (3.39)$$

所以,系统动能的总和为

$$V(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^4 V_i \quad (3.40)$$

其次,求系统的势能如下。刚性球沿  $r$  方向的位移引起的势能以  $r=0$  时为基准,得

$$U_1 = m gr \sin \theta \quad (3.41)$$

而连杆臂的角度引起的势能以  $\theta=0$  时为基准,则有

$$U_2 = Mg(R + b)(1 - \cos \theta) \quad (3.42)$$

由此得出,系统势能的总和为

$$U(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 U_i \quad (3.43)$$

最后分析沿各广义坐标的外力可知,  $r$  方向无外力作用,  $\theta$  方向作用力矩为连杆的驱动力矩  $\tau$ 。

综上所述,可以根据拉格朗日方程建立该机械系统的运动方程。首先,  $r$  方向的运动方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (3.44)$$

分别求得上式中的各项为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \left( m + \frac{J_s}{R^2} \right) \dot{r} - \frac{J_s}{R} \theta \right]$$

$$= \left( m + \frac{J_q}{R^2} \right) \ddot{r} - \frac{J_q}{R} \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = mg\sin\theta$$

将上述结果代入(3.44)式,得

$$\left( m + \frac{J_q}{R^2} \right) \ddot{r} - \frac{J_q}{R} \dot{\theta} - mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta = 0 \quad (3.45)$$

其次,  $\theta$  方向的运动方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \tau \quad (3.46)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left[ (mr^2 + J_q + J_t)\dot{\theta} + M(R+b)^2\dot{\theta} - \frac{1}{R}\ddot{r} \right] \\ &= (mr^2 + J_q + J_t)\ddot{\theta} + M(R+b)^2\ddot{\theta} - \frac{1}{R}\ddot{r} + 2mrr\dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgrcos\theta + Mg(R+b)\sin\theta \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} (mr^2 + J_q + J_t)\ddot{\theta} + M(R+b)^2\ddot{\theta} - \frac{J_q}{R}\ddot{r} \\ + 2mrr\dot{\theta} + mgrcos\theta + Mg(R+b)\sin\theta = \tau \end{aligned} \quad (3.47)$$

所以,刚性球与机械臂的动态方程由(3.45)式和(3.47)式描述。令,  $\mathbf{q}^T = [r \quad \theta]$ ,  $\boldsymbol{\tau}^T = [0 \quad \tau]$ , 则该机械系统的运动方程可以表示为矩阵形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m + \frac{J_q}{R^2} & -\frac{J_q}{R} \\ -\frac{J_q}{R} & mr^2 + J_q + J_t + M(R+b)^2 \end{bmatrix}$$

$$f(\dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta} \\ 0 & 2mrr \end{bmatrix},$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} mgsin\theta \\ mgrcos\theta + Mg(R+b)sin\theta \end{bmatrix}$$

### 3.3 二自由度机械臂的数学模型

二自由度机械臂的动态方程及其控制问题是理解机器人控制技术的基础。本节详细介绍运用拉格朗日动力学方法推导其动态方程的过程。对于三维空间的三关节或更多个自由度的机械臂来讲，其动态方程推导过程的思路与这里介绍的完全一致。

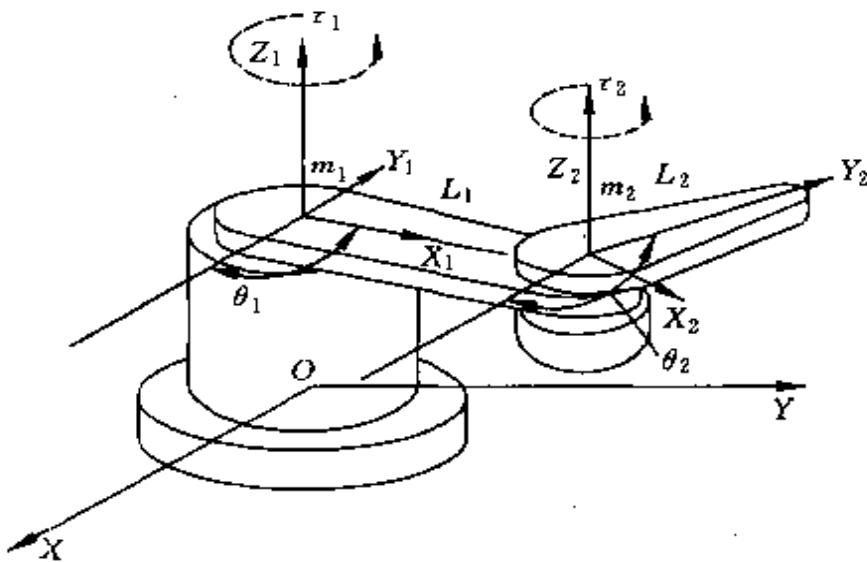


图 3.9 二自由度机械手的示意图

考虑如图 3.9 所示的机械臂。它由质量分别为  $m_1, m_2$  的连杆臂  $L_1, L_2$  构成。 $L_1$  通过旋转关节与底座连接， $L_2$  通过旋转关节与连杆  $L_1$  连接。各关节连杆的驱动力矩分别由  $\tau_1, \tau_2$  表示。为了描述各关节的位姿，在各关节接点处分别固定坐标系  $X_1Y_1Z_1$  和

$X_2Y_2Z_2$ , 其  $X$  轴方向均与连杆方向相同。而操作空间用坐标系  $XYZ$  表示, 其原点及  $Z$  轴与  $X_1Y_1Z_1$  重合。设连杆臂长分别为  $l_1$ ,  $l_2$ , 质心位置分别在距连杆关节接点  $r_1$  和  $r_2$  处。则该机械臂可以看作是两个运动相互约束的质点。其力学模型可以表示如图 3.10。下面我们就来分析各质点的能量并由此建立运动方程。

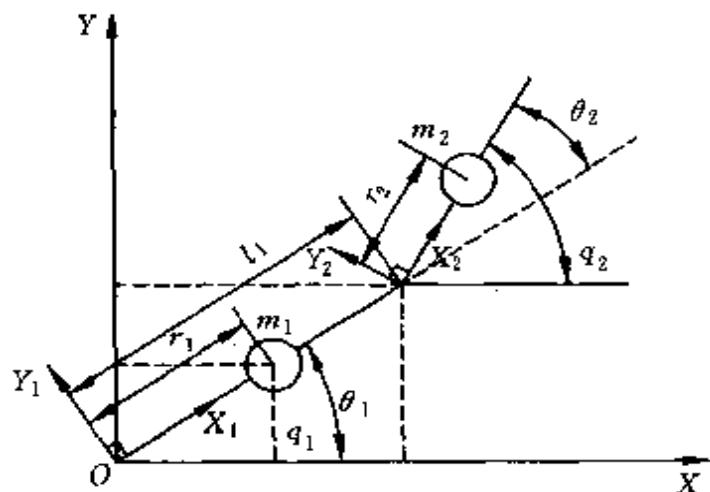


图 3.10 二自由度机械臂的力学模型

首先, 在各个连杆坐标系下质点  $m_1, m_2$  的坐标分别为

$$\mathbf{q}_1^1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2^2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

记各关节连杆的旋转角度分别为  $\theta_1, \theta_2$ , 如图。则根据第 2 章的结果可知, 由坐标系  $X_1Y_1Z_1$  到坐标系  $XYZ$  的齐次变换阵为

$$T_{10} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理, 由坐标系  $X_2Y_2Z_2$  到  $X_1Y_1Z_1$  的齐次变换阵为

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此,由此可以求出质点  $m_1, m_2$  在操作空间坐标系 XYZ 下的坐标  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$  如下:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{10} \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos\theta_1 \\ r_1 \sin\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{21} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos\theta_1 \\ y_1 = r_1 \sin\theta_1 \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = l_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (3.50)$$

所以,由此求得各连杆沿水平方向运动的速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -r_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \\ \dot{y}_1 = r_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (3.52)$$

由上述分析可知,机械臂沿水平方向运动的动能为

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2l_1^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ &\quad - m_2r_2l_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

而连杆绕质心作旋转运动的转动能量为

$$V_2 = \frac{1}{2}I_{z1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{z2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (3.54)$$

其中,  $I_{z1}, I_{z2}$  分别是连杆  $L_1, L_2$  的转动惯量, 即有

$$I_{z1} = \frac{1}{3}m_1r_1^2, \quad I_{z2} = \frac{1}{3}m_2r_2^2$$

故该机械臂系统的总动能为

$$V(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) = V_1 + V_2$$

如果以机械臂运动的平面为基准,且忽略各关节的弹性摩擦,那么该系统所具有的势能为零。因此,将(3.53)式和(3.54)式代入上式,根据拉格朗日方程得出用关节坐标  $\theta_1$  和  $\theta_2$  描述的机械臂系统的动态方程如下。

首先,沿  $\theta_1$  方向有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (J_1 + J_2 + 2m_2r_2l_1\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + (J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\dot{\theta}_2 - m_2r_2l_1\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= 0, \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} J_1 &= I_{z1} + m_1r_1^2 + m_2l_1^2 \\ J_2 &= I_{z2} + m_2r_2^2 \end{aligned}$$

由此得出,  $\theta_1$  方向的运动方程为

$$(J_1 + J_2 + 2m_2r_2l_1\cos\theta_2)\dot{\theta}_1 + (J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\dot{\theta}_2 - m_2r_2l_1\dot{\theta}_1(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 = \tau_1 \quad (3.55)$$

同理可以求出,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= (J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2 - 2m_2r_2l_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} &= -m_2r_2l_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned}$$

即,  $\theta_2$  方向的运动方程为

$$(J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2 + m_2r_2l_1\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 = \tau_2 \quad (3.56)$$

令  $\mathbf{q}^T = [\theta_1 \ \theta_2]$ ,  $\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_1 \ \tau_2]$ , 则机械臂的运动方程(3.55)式和(3.56)式可以表示为矩阵形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + 2m_2r_2l_1\cos\theta_2 & J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2 \\ J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2 & J_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -2m_2r_2l_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & -m_2r_2l_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ m_2r_2l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在许多情况下, 取各关节的广义坐标  $q_1, q_2$  如图 3.10 更为方便。重复上述过程, 同样可以根据拉格朗日方法求出在  $q_1, q_2$  坐标下的运动方程。下面根据(3.55)式和(3.56)式并利用坐标变换推导用  $q_1, q_2$  描述的运动方程。

因为  $q_1, q_2$  和  $\theta_1, \theta_2$  之间满足

$$\theta_1 = q_1, \theta_2 = q_2 - q_1$$

因此, 将上述坐标代入方程(3.55)式, 得

$$(J_1 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\ddot{q}_1 + (J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2)\ddot{q}_2$$

$$-m_2r_2l_1(\dot{q}_2^2 - \dot{q}_1^2)\sin\theta_2 = \tau_1 \quad (3.58)$$

同理由(3.56)式得出

$$m_2r_2l_1\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + m_2r_2l_1\dot{q}_1^2\sin(q_2 - q_1) = \tau_2 \quad (3.59)$$

(3.58)式和(3.59)式两边相减,得

$$J_1\ddot{q}_1 + m_2r_2l_1\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 - m_2r_2l_1\dot{q}_1^2\sin(q_2 - q_1) = \tau_1 - \tau_2 \quad (3.60)$$

故机械臂的动态特性由(3.59)式和(3.60)式描述。令状态向量和驱动力矩向量为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

同样可以得到矩阵形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.61)$$

式中,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_1 & m_2r_2l_1\cos(q_2 - q_1) \\ m_2r_2l_1\cos(q_2 - q_1) & J_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2r_2l_1\dot{q}_2\sin(q_2 - q_1) \\ m_2r_2l_1\dot{q}_1\sin(q_2 - q_1) & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.4 状态空间模型及线性化

从前几节的分析可知,尽管机械系统各自的结构不同,但是描述其动态特性的运动方程具有相类似的结构。即,如果用向量  $\mathbf{q}$  和  $\boldsymbol{\tau}$  表示各关节连杆的广义坐标和驱动力矩的话,其运动方程满足

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.62)$$

这个运动方程的意义在于,如果给定各关节的驱动力矩  $\boldsymbol{\tau}$ ,那么可以通过解微分方程(3.62)求出各关节坐标的移动轨迹。相反,如果指定各关节坐标  $\mathbf{q}$  的轨迹,那么我们可以根据方程(3.62)反

解出应该施加的力矩  $\tau$ 。前者在机器人学里被称为机器人动力学的正向问题，而后者则被称为机器人动力学的逆向问题。从机器人控制的角度来讲，前者可以用于机器人运动的动态仿真，而后者可以用来进行非线性补偿，将机器人的非线性运动方程线性化。本节主要讨论后者。

可以证明在上述机器人模型中， $J(q)$  在坐标空间内是可逆矩阵，因此，由(3.62)式得

$$\ddot{q} = -J^{-1}(q)\{f(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)\} + J^{-1}(q)\tau \quad (3.63)$$

引入辅助输入变量  $u$ ，并令

$$\tau = J(q)u + f(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (3.64)$$

则运动方程(3.63)式可以表示为

$$\ddot{q} = u \quad (3.65)$$

这就是说，如果机器人的数学模型准确已知且其位置和速度可精确检测的话，我们可以引入非线性反馈补偿(3.64)，使得补偿后的系统的动态呈线性关系(3.65)。因此，我们可以针对这个线性模型，应用线性控制理论来设计控制系统。

上述过程可以用非线性系统理论中的反馈线性化理论解释如下。选取机器人各关节的位置坐标  $q$  和其速度坐标  $\dot{q}$  作为系统的状态变量。令

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

则运动方程(3.62)可以表示为状态空间形式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau \quad (3.66)$$

其中，

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -J^{-1}(q)\{f(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)\} \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1}(q) \end{bmatrix}$$

根据非线性系统的反馈线性化理论可知，对于非线性状态方程(3.66)，如果我们能够找到适当的输出信号

$$y = h(x) \quad (3.67)$$

使得该输出信号对输入信号  $\tau$  的相关阶数等于 2, 即满足

$$\frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \right) g(x) \neq 0 \quad (3.68)$$

那么, 反馈补偿

$$\tau = (L_g L_f h(x))^{-1} \{ u - L_f^2 h(x) \} \quad (3.69)$$

将使得补偿后的闭环系统在新的坐标  $\bar{y}, \dot{\bar{y}}$  下成为如下的完全可控的线性系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{y}} \\ \ddot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \quad (3.70)$$

即

$$\ddot{\bar{y}} = u$$

式(3.69)中

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \right) g(x)$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \right) f(x)$$

不难证明, 如果令

$$y = h(x) = q$$

则有

$$\frac{\partial h}{\partial x} = [I \quad 0]$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \right) g(x) = I \neq 0$$

而反馈补偿控制(3.64)正是(3.69)给出的控制律。

反馈线性化的结构如图 3.11 所示。

以上是以各关节的位置和速度作为状态变量, 讨论了机器人的状态空间模型及其反馈线性化问题。但是, 对于实际的机器人控制问题来讲, 往往要求机器人各关节的位置和速度跟踪给定的轨

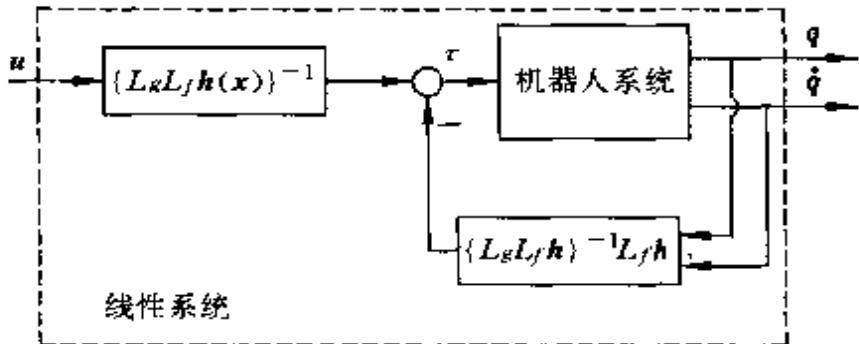


图 3.11 机器人系统的反馈线性化

迹。这时更需要的是跟踪误差的动态方程。下面就以位置误差和速度误差为状态变量来建立运动方程。

假设理想的轨迹由位置  $q_d(t)$ 、速度  $\dot{q}_d(t)$  及加速度  $\ddot{q}_d(t)$  来描述。且位置误差和速度误差分别表示为

$$e(t) = q(t) - q_d(t), \dot{e}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \quad (3.71)$$

首先, 基于动力学逆问题的解, 考虑非线性补偿

$$\tau = v + J(q)\ddot{q}_d + f(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) \quad (3.72)$$

将上式代入(3.62)式得出

$$J(q)\ddot{e} + f(q, \dot{q})\dot{e} = v \quad (3.73)$$

如果定义误差系统的状态变量为

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$$

并注意到(3.73)式, 就可以得到状态方程

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) v \quad (3.74)$$

其中,

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -J^{-1}(q_d + e)f(q_d + e, \dot{q}_d + \dot{e})\dot{e}_d \end{bmatrix}$$

$$g(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1}(q_d + e) \end{bmatrix}$$

应该注意,与(3.66)式不同,(3.74)式是时变非线性系统,即非自治系统。同样,对于该系统进一步施于非线性反馈补偿

$$v = J(q)u + f(q, \dot{q})\dot{e} \quad (3.75)$$

就可以将误差系统线性化

$$\ddot{e} = u \quad (3.76)$$

跟踪误差系统线性化补偿器的结构如图 3.12 所示。

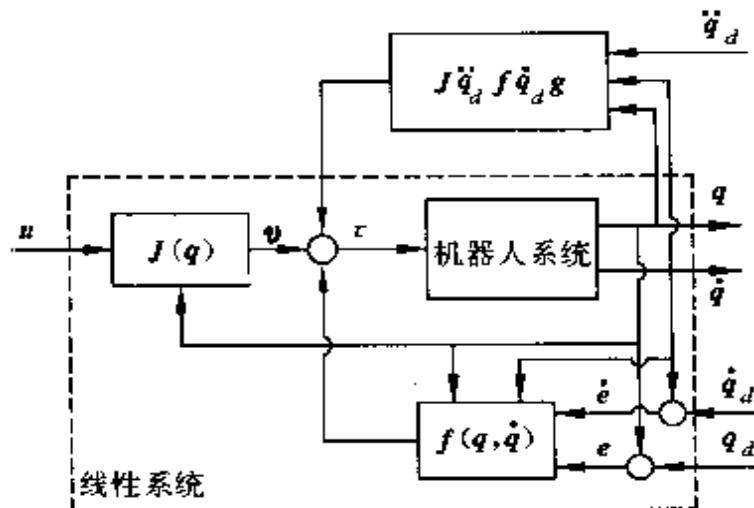


图 3.12 轨迹跟踪误差系统的反馈线性化

### 3.5 电机驱动机械臂的动态模型

上节讨论的机械臂的运动方程没有考虑为各个连杆提供力矩的驱动器的动特性。一般机器人的驱动力矩由电气、液压或气动等装置提供。与机械系统相比,这些装置的时间常数很小,其动态过程很快,所以,在设计机器人控制系统时,常常可以忽略驱动回路的动特性而只考虑其静态增益。但是,对于控制精度要求很高的小型或者微型机器人来讲,就不能忽略驱动回路的动特性。本节以电机驱动的机械臂为例,来讨论如何建立其动态方程。

直流电机驱动的电气回路示意图如图 3.13 所示。图中,L,R

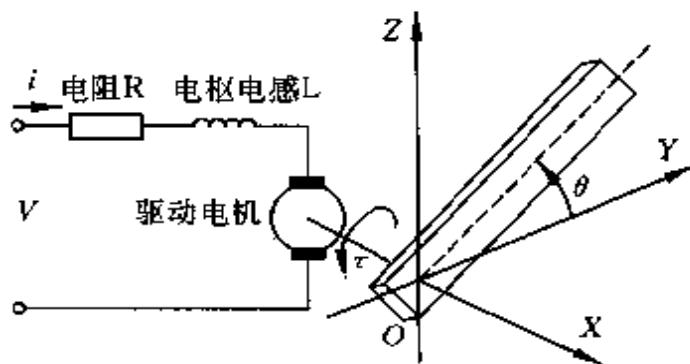


图 3.13 机械臂驱动回路

分别表示电枢电感和电枢电阻,  $V_a$  为逆电势,  $i$  表示电枢电流。设由外部施加的电枢电压为  $V$ , 则该驱动回路的电气方程如下:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + V_a = V \quad (3.77)$$

由于电机的输出力矩  $\tau$  与电枢电流成正比, 而逆电势与电机的驱动轴的角速度  $\dot{\theta}$  成正比, 因此, 电机内部的电信号和外部的机械信号之间的关系由以下两式给定:

$$K_M i = \tau \quad (3.78)$$

$$K_a \frac{d\theta}{dt} = V_a \quad (3.79)$$

其中  $K_M, K_a$  为由电机的机电参数所决定的常数。

假设上节讨论的二自由度机械臂的两个关节均由直流电机驱动, 如图 3.14 所示, 这时机械臂的两个控制输入信号就成为电机的电枢电压  $V_1, V_2$ 。设各关节驱动电机的参数分别为  $L_j, R_j, K_{Mj}, K_{aj}$  ( $j=1, 2$ ), 电机的电枢电流分别为  $i_1$  和  $i_2$ 。则根据上述讨论, 驱动回路满足

$$L_j \frac{di_j}{dt} + R_j i_j + V_{aj} = V_j \quad (3.80)$$

$$K_{Mj} i_j = \tau_j \quad (3.81)$$

$$K_{aj} \frac{d\theta_j}{dt} = V_{aj} \quad (3.82)$$

式中, 对应各关节  $j=1$  或  $j=2$ 。如果定义电流向量和电枢电压向

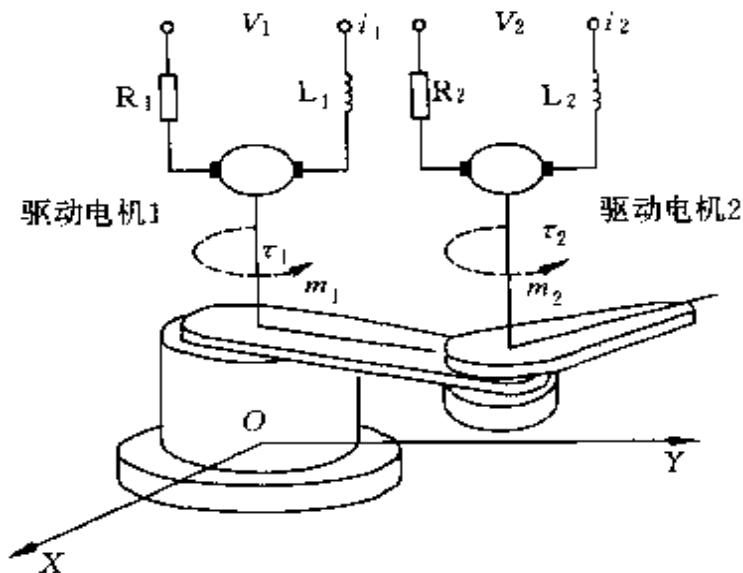


图 3.14 二自由度机械手示意图

量为

$$\mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

则驱动回路的动态过程可以表示为矩阵形式

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}}_a + \mathbf{R}\mathbf{I}_a + \mathbf{K}_a \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} K_{a1} & 0 \\ 0 & K_{a2} \end{bmatrix}$$

因此, 根据上式和(3.57)式得出电机驱动机械臂的运动方程为

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_M \mathbf{I}_a \\ \mathbf{L}\dot{\mathbf{I}}_a + \mathbf{R}\mathbf{I}_a + \mathbf{K}_a \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \end{cases} \quad (3.84)$$

其中,

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} K_{m1} & 0 \\ 0 & K_{m2} \end{bmatrix}$$

上式还可以表示为状态空间形式。定义状态变量为

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T \quad \mathbf{I}_a^T]$$

则(3.84)式可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{V} \quad (3.85)$$

其中，

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_M \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\dot{\mathbf{I}}_a - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_M \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix}$$

与上节的结果一样，非线性运动方程(3.85)也可以通过状态反馈实现线性化。下面讨论给定期望轨迹  $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d$  的情况下，将跟踪误差的动态模型进行线性化的问题，其他情况基本思路相同。

与不考虑驱动回路的情况相类似，首先我们根据动力学逆问题的解，求出期望轨迹所对应的电机的电枢电流和电压，并进行如下的非线性补偿

$$\begin{cases} \mathbf{I}_a = \mathbf{K}_M^{-1}(\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{u}_1) \\ \mathbf{V} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{I}}_d + \mathbf{R}\mathbf{I}_d + \mathbf{K}_a \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (3.86)$$

上式中  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  是辅助控制输入信号。定义  $\mathbf{e}_i = \mathbf{I}_a - \mathbf{I}_d$ ，将上式代入(3.84)式，得

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{L}\dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{R}\mathbf{e}_i + \mathbf{K}_a \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (3.87)$$

令新的控制输入信号为

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\{\mathbf{u}_1 - f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}}\}$$

则上述方程变成如下线性方程式：

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{u}_1' \\ \boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{K}_a\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{u}_2 \end{cases} \quad (3.88)$$

其状态空间表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}_a & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{L}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

其中，状态变量和控制输入变量分别为

$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \\ \boldsymbol{e}_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1' \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$$

应该注意，与不考虑驱动电动机特性的情况相比，上述线性化实现起来有一点不同之处。即，在实际系统中欲实现上述补偿(3.86)式，除了需要精确已知机械臂的机械参数和电机的机电参数以外，还需要计算  $\boldsymbol{I}_a$  的值，这需要检测加速度  $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 。

最后还应该指出，直流电机的输出轴一般不能直接驱动负载，通常需要介于齿轮来驱动相应的连杆。这时应该注意的是电机的电气方程中的逆电势与电机的输出轴的角速度成正比，而不是机械臂的角速度。另外，电机的输出力矩与机械臂连杆的驱动力矩之间也相差齿轮比倍数。详细推导过程可参阅有关参考文献(例如文献[3])。

## 第4章 鲁棒控制基础

机器人动态控制的目的就是要使机器人的各关节或末端执行器的位姿能够以理想的动态品质跟踪给定的轨迹或稳定在指定的位姿上。因此,机器人动态控制所研究的主要课题有两个,一个是如何实现误差系统的稳定性,即位姿跟踪误差尽快地趋近于零;另一个是抑制干扰,即尽可能减小干扰信号对跟踪精度的影响。如果能够得到描述机器人动态的精确的数学模型,并且干扰信号可检测的话,那么解决这两个课题并不是特别困难的事情。比如,可以运用前一章介绍的线性化方法,先将误差系统进行线性化处理,然后再运用线性系统的设计理论得到保证误差系统稳定性的控制器。而对于可检测的干扰信号则可以运用各种有效的前馈补偿等控制手段。

但是,正如第1章所述,对于实际系统来讲,很难得到精确的数学模型。例如,建立数学模型时忽略的各种高频动特性,机器人各连杆机构的各种摩擦,齿轮等传动机构的死区特性,各种信号的检测误差等等不确定性因素,都是引起模型误差的原因。而实际机器人装置中存在的来自各种机械的或电气、液压等系统的干扰信号往往也不是单一的可检测信号。因此,在设计实际的机器人动态控制系统时,必须考虑这些不确定性对控制品质的影响,实现鲁棒控制。本章和下一章将介绍机器人鲁棒控制系统设计的理论方法。本章主要介绍不确定性以及系统鲁棒性能的描述方法和鲁棒系统设计的基本理论。

## 4.1 稳定性概念

正如前一章所介绍,包括机器人在内的机械系统,一般可以用状态空间模型描述如下:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

其中  $x$  是系统的状态向量,  $x$  的各个元素表示机器人各关节的位移和速度。 $u$  则表示控制输入向量, 其元素表示机器人各关节的驱动力,  $f(x)$  和  $g(x)$  分别是状态的非线性向量函数和矩阵函数。

考虑定位控制问题。我们希望机器人系统的状态  $x(t)$ , 对于任意的非零初始值  $x(0)$ , 都能够渐近地趋于零并且稳定在零点上, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.2)$$

对于一般机器人系统来讲, 要想使其动特性满足上述定位要求, 就必须对各关节施加适当的驱动力。因为, 如果不施加任何驱动力, 即, 令  $u=0$ , 则系统状态  $x(t)$  的动态过程将满足微分方程

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.3)$$

但是, 对于任意给定的初始条件  $x(0) \neq 0$ , 该方程的解  $x(t)$  一般不满足(4.2)式。因此, 需要选择适当的控制输入, 即驱动力矩, 来实现定位控制。如果, 状态  $x$  的各元素均可检测, 就可以通过反馈状态来确定控制输入, 令

$$u(t) = k(x) \quad (4.4)$$

式中,  $k$  为函数矩阵。这时系统的状态  $x(t)$  将沿着微分方程

$$\dot{x} = f(x) + g(x)k(x) \quad (4.5)$$

的轨迹运动。所以, 我们可以选择适当的  $k$  使得上述微分方程的解对于任意给定的初始值都趋于零。

(4.4)式称为状态反馈控制律或控制器, 而(4.5)式称为对应的闭环系统, (4.3)式称为开环系统。可以看出, 机器人的定位控制

问题就是设计控制器使得闭环系统稳定在原点上。在后续章节中，我们将看到轨迹跟踪问题也同样可以归结为类似的误差系统的稳定性问题。以下先介绍系统稳定性的基本概念。下一节将给出有关稳定性的基本结论。

研究由下式描述的非线性系统：

$$\dot{x} = F(x) \quad (4.6)$$

其中， $x$  是  $n$  维状态向量， $F$  表示  $n$  维非线性向量函数。

**定义 4.1.1** 若给定的状态  $x_*$  满足

$$F(x_*) = 0$$

则称  $x_*$  是系统(4.6)的平衡状态或者平衡点。

显然，对于一个系统，平衡点并非唯一。为了叙述简便，下面只讨论  $x_* = 0$  的情况。对于机器人系统来讲，定位控制和轨迹跟踪问题都可以归结为这种情况。所谓系统的稳定性，是指平衡状态而言。其定义可以叙述如下。

**定义 4.1.2** 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ ，一定存在正数  $\delta(\epsilon)$ ，使得对于所有满足  $\|x(0)\| \leq \delta$  的初始状态  $x(0)$ ，(4.6)式的解满足

$$\|x(t)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0 \quad (4.7)$$

则该系统的平衡点  $x_* = 0$  是稳定的。

本书中简称非线性系统是稳定的，系指该系统的原点是稳定的平衡点。

**定义 4.1.3** 若系统的平衡点  $x_* = 0$  是稳定的，且存在一个正数  $R$ ，使得对于所有满足  $\|x(0)\| \leq R$  的初始状态  $x(0)$ ，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.8)$$

成立，则称该平衡点是渐近稳定的。

**定义 4.1.4** 若系统的平衡点  $x_* = 0$  是渐近稳定的，且存在正数  $R, \gamma$  和  $\beta$ ，使得对于满足  $\|x(0)\| \leq R$  的所有初始状态  $x(0)$ ，

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.9)$$

成立，则称该平衡点是指数渐近稳定的，简称系统是指数稳定的。

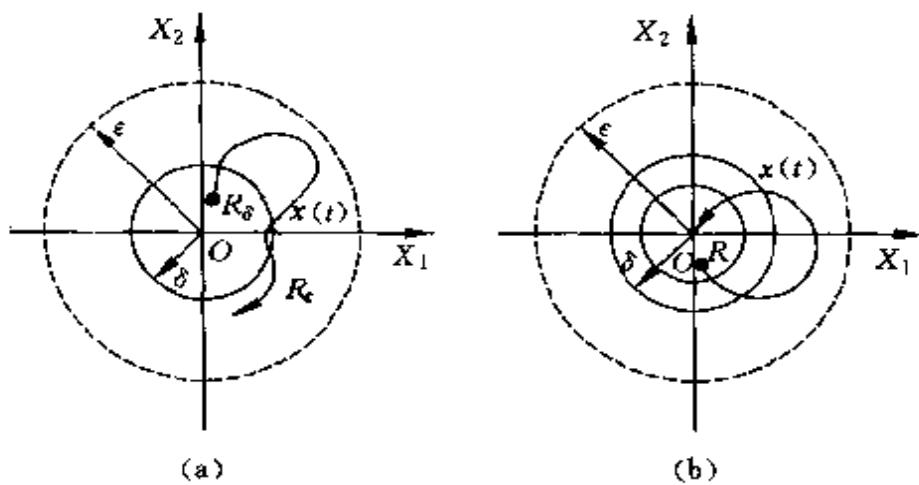


图 4.1 稳定性的示意图

(a) 稳定性 (b) 渐近稳定性

上述定义的意义可以通过图 4.1 来解释。考查  $n=2$  的系统，即  $\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]$ 。则系统的状态轨迹可以在二维平面上表示。如图 4.1(a)所示，所谓平衡点  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$  稳定，是指对于任意给定的  $\epsilon>0$ ，我们都可以找到适当的正数  $\delta>0$ ，使得所有从圆形域  $R_s$  出发的状态轨迹不离开圆形域  $R_\epsilon$ 。但是，状态  $x(t)$  最终并不一定趋于平衡点。而渐近稳定性则要求状态最终一定趋于平衡点(如图 4.1(b)所示)。指数稳定性则要求状态不仅趋于零，而且状态的范数即状态至原点的线段  $\overline{XO}$  的长度的衰减率要快于指数函数(见图 4.2)。

上述定义只要求状态空间中存在一个半径为  $R$  的球域，使得所有从该球域内出发的状态轨迹趋于零或指数衰减，而并不关心球域的大小。对于机器人系统来讲，状态表示各关节的位移和速度的偏差值。所以，如果机器人系统在上述意义下渐近稳定的话， $R$  给出了能够保证偏差收敛于零的初始偏差的范围。显然，一般  $R$  越大越好。如果  $R$  可以取无限大，即从状态空间中的任意点出发

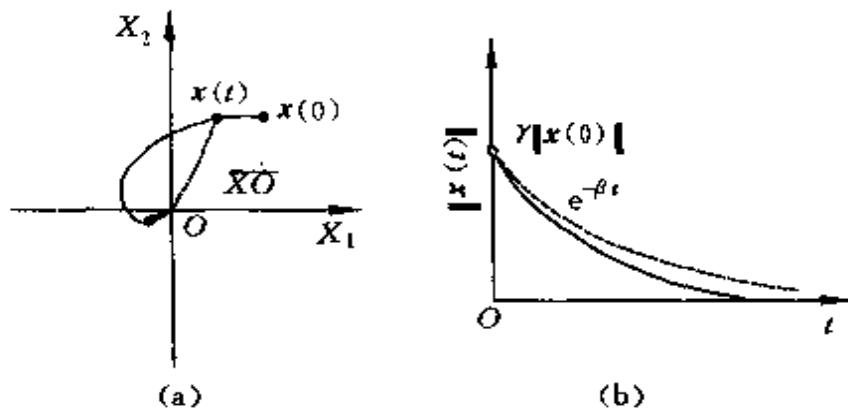


图 4.2 指数稳定性示意图

的状态轨迹都满足(4.8)式或(4.9)式,则称该系统是全局渐近稳定的或全局指数稳定的。与此相应,如果  $R$  只能取有限值,那么称系统是局部渐近稳定的或局部指数稳定的。

根据非线性系统的线性近似理论,非线性系统(4.6)在平衡点  $x_* = 0$  的邻域内的局部的动态过程可以用如下的一阶线性近似模型表示:

$$\dot{x} = A_F x \quad (4.10)$$

式中  $A_F$  为  $n \times n$  矩阵,可以由下式求出:

$$A_F = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0}$$

即,  $A_F$  是  $F(x)$  的雅可比矩阵在  $x=0$  处的值。

线性系统(4.10)的稳定性取决于其极点,即矩阵  $A_F$  的特征值。该线性系统是渐近稳定的充分必要条件是其所有极点均位于复平面的开左半平面。我们感兴趣的问题是能否从非线性系统的近似描述方程得出有关原非线性系统稳定性的结论。

**命题 4.1** 考虑非线性系统(4.6)及其线性近似方程(4.10)。以下命题成立。

(1) 若线性近似系统(4.10)是渐近稳定的,则  $x=0$  是原非线性系统的局部渐近稳定的平衡点。

(2) 若线性近似系统(4.10)是非稳定的,则  $x=0$  是原非线性系统的不稳定的平衡点。

(3) 若线性近似系统(4.10)的所有极点均位于复平面的闭左半平面,且至少有一个极点位于虚轴上,则原非线性系统的平衡点  $x=0$  有可能稳定,也有可能是不稳定的。

上述命题的意义在于它告诉我们在考察非线性系统的稳定性时,即使只关心局部稳定性,也不能仅仅根据其线性近似方程来做结论。正因为如此,在工程实际中即使是只需考虑平衡点附近的稳定性,也不能轻易忽视系统所固有的非线性特性。

最后应该注意,以上讨论的系统中, $f$ , $g$  或  $F$  的函数结构与时间  $t$  无关,这类系统称为自治系统。与此对应,如果这些描述系统动特性的矩阵函数的结构随时间变化的话,则称为非自治系统。这时系统的动态方程可以表示为

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (4.11)$$

或者

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (4.12)$$

由上一章 3.5 节可知,经过基于逆运动学补偿后的轨迹跟踪误差的动态过程,可以表示如(4.11)式。在研究机器人轨迹跟踪控制问题时,其误差方程一般是非自治系统。

对于这类非自治系统,平衡点系指满足  $F(t, x_*) = 0$  的状态  $x_*$ 。而上述的稳定性、渐近稳定性以及指数稳定性的定义同样适用于非自治系统。不过,其稳定性的条件比自治系统更强。这一点将在下一节说明。

## 4.2 稳定性理论

目前,研究非线性系统稳定性的有效方法仍然是李雅普诺夫稳定性理论。利用这种理论分析系统的稳定性,并不要求解系统

的运动方程来考察状态的具体动向,而只需寻找或构造一个被称为李雅普诺夫函数的正定函数,并考察其沿状态轨迹的时间微分。实际上,这个关于微分方程的数学理论,其基本思想基于具有工程意义的能量的概念。即,若系统只能消耗能量且内部并不产生能量,那么该系统的状态只能收敛而不会发散。这一点在下一章体现得更明显。这一节我们将介绍李雅普诺夫稳定性定理的基本内容及其推广——拉萨尔不变集定理。

**定义 4.2.1** 标量函数  $V(x)$  称为局部正定的,系指存在一个正数  $R$ ,使得对于满足  $\|x\| \leq R$  的  $x$ ,有  $V(x) > 0$  成立,且  $V(\mathbf{0}) = 0$ 。若  $R$  可以取无穷大,则  $V(x)$  称为全局正定函数。

**定义 4.2.2** 正定函数  $V(x)$  称为是径向无界的,系指当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,有  $V(x) \rightarrow \infty$  成立。

在上述定义中,如果只要求  $V(x) \geq 0$ ,则  $V(x)$  称为准正定函数。类似地可以定义负定或准负定函数。为叙述方便起见,今后我们把满足  $\|x\| \leq R$  的  $x$  的集合称为球域  $B_R$ ,即

$$B_R = \{x \mid \|x\| \leq R\}$$

**定理 4.2.1** 设  $x=0$  是自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.13)$$

的平衡点。若存在正数  $R$  和在球域  $B_R$  内正定的连续可微分的函数  $V(x)$ ,使得

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in B_R \quad (4.14)$$

成立,则  $x=0$  是该系统局部稳定的平衡点。如果  $\dot{V}(x)$  在  $B_R$  是严格负定的,即

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in B_R \quad (4.15)$$

则  $x=0$  是局部渐近稳定的。

**定理 4.2.2** 考查系统(4.13)。若存在连续可微分且径向无界的正定函数  $V(x)$ ,使得

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \quad (4.16)$$

成立,则  $x=0$  是该系统全局渐近稳定的平衡点。

**定理 4.2.3** 考查系统(4.13)。若存在正数  $R, \gamma_1, \gamma_2$  和  $\mu$ , 以及连续可微分且径向无界的正定函数  $V(x)$ , 使得

$$(1) \gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2, \quad \forall x \in B_R$$

$$(2) \dot{V}(x) \leq -\mu \|x\|^2, \quad \forall x \in B_R$$

成立,则  $x=0$  是该系统局部指数稳定的平衡点。若  $R$  可以取无穷大, 则该系统是全局指数稳定的。

满足上述稳定性条件的正定函数  $V(x)$  称为李雅普诺夫函数。这些定理的证明,可以在许多有关的文献中找到。比较简洁的证明,可参见文献[8]。下面以简单的数值例说明定理的应用。以二维的状态空间为例,图 4.3 描述了状态轨迹及与其对应的李雅普诺夫函数值的变化。

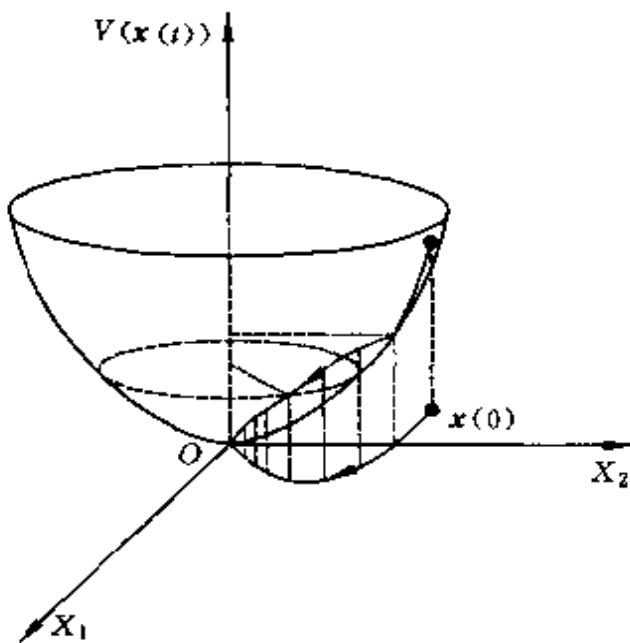


图 4.3 李雅普诺夫函数与状态轨迹

**例题 4.1** 试分析如下系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

这是一个二阶系统。显然,  $\mathbf{x}^T = [0 \ 0]$  是该系统平衡点。考察李雅普诺夫函数

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

该函数是全局正定且径向无界的。因为,

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = [x_1 \ x_2]$$

所以,容易验证

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -x_1^4 - x_2^2 < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

故,根据定理 4.2.2 可知,该系统是全局渐近稳定的。

**例题 4.2** 考察线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

其中  $A$  为  $n \times n$  阶定常矩阵。试证明如下命题。若存在  $n \times n$  阶的严格正定阵  $P$  和  $Q$ , 满足李雅普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q$$

则该系统是全局指数稳定的。

设存在满足上述李雅普诺夫方程的正定阵  $P$  和  $Q$ 。选取李雅普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

则可以证明

$$\begin{aligned} V &= \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T (A^T P + PA) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \leq -\mu \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

其中,  $\mu = \lambda_{\min}(Q) > 0$  表示矩阵  $Q$  的最小特征值。

令,  $\gamma_1 = \lambda_{\min}(\mathbf{P})$ ,  $\gamma_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{P})$ , 其中  $\lambda_{\max}$  表示矩阵  $\mathbf{P}$  的最大特征值。那么, 有

$$\gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2, \quad \forall x$$

故, 根据定理 4.2.3, 该系统是指数稳定的。

对于机器人系统来讲, 往往要求系统做到无静差定位或无静差跟踪。所以, 我们更感兴趣的是渐近稳定性和指数稳定性。为此, 在实际系统设计中, 我们必须构造适当的李雅普诺夫函数, 并证明其时间微分是严格负定的。但是, 这往往是比较困难的事情。其实, 即使李雅普诺夫函数沿状态轨迹的时间微分为准正定函数, 有时也可以得到渐近稳定的结论, 或至少状态收敛于有界的集合。下面介绍的拉萨尔不变集定理正是描述了动态系统的这种特性。

**定义 4.2.3** 研究非线性系统(4.13)。状态的集合  $M$  称为该系统的不变集, 系指对于任意初始状态  $x(0) \in M$ , 有  $x(t) \in M, \forall t \geq 0$  成立。

考查非线性系统(4.13), 设  $f(x)$  是连续的函数向量。对于给定的标量函数  $V(x)$ , 在状态空间定义如下集合:

$$\Omega_l = \{x | V(x) \leq l\}$$

$$R = \{x | \dot{V}(x) = 0, x \in \Omega_l\}$$

**定理 4.2.4** 对于给定的系统(4.13), 若存在一次连续可微的标量函数  $V(x)$ , 满足

- (1) 存在适当的正数  $l$ , 使得  $\Omega_l$  是有界的。
- (2)  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_l$

则对于任意初始状态  $x(0) \in \Omega_l$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 状态轨迹  $x(t)$  将趋于  $R$  内的最大不变集  $M$ 。其中, 最大不变集系指  $R$  内所有不变集之并集。

这个定理称为局部不变集定理, 其几何意义如图 4.4 所示, 其简洁的证明可参阅文献[2]。与上述的李雅普诺夫稳定性定理相比较, 有两点值得注意。其一, 这里并不要求标量函数  $V(x)$  是正定

的。其二,如果满足  $\dot{V}(x)=0$  的状态集合  $R$  中,只有一个不变集且其元素只有一个状态  $x=0$  的话,那么即使  $V(x)$  不满足严格负定的条件,根据不变集定理也可以得出渐近稳定性的结论。

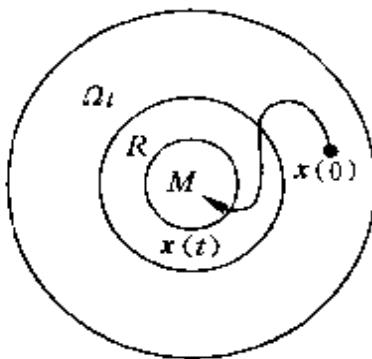


图 4.4 不变集定理

如果  $\Omega$  可以取全状态空间,则同样可以得出全局不变集定理如下。

**定理 4.2.5** 对于给定的系统(4.13),若存在一次连续可微的标量函数  $V(x)$ ,满足

- (1)  $V(x)$  是径向无界的,即当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,有  $V(x) \rightarrow \infty$ 。
- (2)  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x$

则对于任意初始状态  $x(0)$ ,当  $t \rightarrow \infty$  时,状态轨迹  $x(t)$  将趋于  $R_0$  内的最大不变集  $M$ 。其中,  $R_0$  表示所有满足  $V(x)=0$  的状态的集合。

以上介绍的李雅普诺夫稳定性定理和拉萨尔不变集定理都是针对自治系统的。如前所述,在研究机器人的轨迹跟踪问题时,系统往往是非自治的。李雅普诺夫稳定性理论同样适用于非自治系统,为此应该考虑时变的李雅普诺夫函数。以下介绍的有关非自治系统稳定性的结果,详细证明可参阅文献[2],[10]。

**定义 4.2.4** 在区间  $(0, +\infty)$  定义的连续正值函数  $k(s)$  称为是  $K$  类函数,系指  $k(s)$  满足  $k(0)=0$ ,并且是严格递增的。若  $k$  进

一步满足  $k(\infty) = \infty$ , 则称为是  $K_\infty$  类函数。

**定义 4.2.5** 时变标量函数  $V(t, x)$  称为是局部正定的, 系指存在正数  $R$  和  $K$  类函数  $k$ , 使得

$$k(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)), \forall x \in B_R, \forall t \geq 0$$

成立。

考察非自治系统

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4.17)$$

若  $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$ , 则  $x = 0$  称为该系统的平衡点。

**定理 4.2.6** 对于给定的非自治系统(4.17), 考察连续可微分的正定函数  $V(t, x)$ 。

(1) 若存在正数  $R, K$  类函数  $k_1, k_2, k_3$ , 使得

$$k_1(\|x(t)\|) \leq V(x) \leq k_2(\|x(t)\|) \quad (4.18)$$

$$V(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3(\|x(t)\|) \quad (4.19)$$

对于所有  $t \geq 0$  和所有  $x \in B_R$  成立, 则  $x = 0$  是该系统局部渐近稳定的平衡点。

(2) 若(1)的条件成立, 并且  $K$  类函数  $k_1, k_2, k_3$  可以取为

$$k_1(\|x\|) = c_1 \|x\|, k_2(\|x\|) = c_2 \|x\|, k_3(\|x\|) = c_3 \|x\| \quad (4.20)$$

其中  $c_i > 0 (i=1, 2, 3)$  为常数, 则  $x = 0$  是该系统局部指数稳定的平衡点。

如果  $R$  可以取无穷大, 并且  $k_1$  是径向无界的正定函数, 那么, 在上述(1)和(2)的条件下, 平衡点  $x = 0$  分别是全局渐近稳定的和全局指数稳定的。

以上介绍的李雅普诺夫定理所给出的都是关于稳定性的充分条件。实际上, 如果附加一些条件, 这些条件也可能成为稳定性的必要条件。这就是所谓的李雅普诺夫逆定理。下面以指数稳定性为例, 介绍逆定理(证明见文献[11])。

**定理 4.2.7** 设  $x=0$  是系统(4.17)的平衡点, 在域  $B_R$  上  $f(t, x)$  是一阶连续可微分的, 且

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right\| \leq M < \infty, \forall x \in B_R, \forall t \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.21)$$

其中,  $f_i(t, x)$  是函数向量  $f$  的各个元素,  $M > 0$  为定常数。若存在正数  $\gamma, \beta$ , 使得

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(0)\| e^{-\beta t}, \forall x(0) \in B_R, \forall t \geq 0$$

成立, 则存在标量函数  $V(t, x)$  和常数  $c_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ , 使得(4.20)式定义的  $K$  类函数  $k_1, k_2, k_3$  满足(4.18)和(4.19)式, 并且存在正数  $c_4$  满足

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \forall x \in B_R \quad (4.22)$$

如果系统是自治的, 则  $V$  也是非时变函数。

最后介绍在机器人控制系统设计中常用的指数收敛性定理, 其详细证明可参见文献[9]。

**定理 4.2.8** 考查非自治系统(4.17)。如果存在  $K$  类函数  $k_1, k_2$  和李雅普诺夫函数  $V(t, x)$  满足(4.18), 且使得

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\beta \gamma(x) \|x(t)\|^2 + \epsilon e^{-\beta t}, \forall x \quad (4.23)$$

成立, 则有

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\beta t} + \epsilon t e^{-\beta t}, \forall t \geq 0 \quad (4.24)$$

故对于任意初始状态  $x(0)$ ,  $x(t)$  将趋于零。其中  $\epsilon > 0, \beta > 0$  是给定常数,  $\gamma$  是满足  $\gamma \|x\| \geq \gamma_0 > 0$  的函数。

### 4.3 干扰抑制问题

前两节讨论了系统在没有外界激励下, 从初始状态恢复到平

衡状态的性能。这对机器人控制系统来讲,反映了系统由于某种原因产生跟踪误差后,在没有外力作用下误差状态恢复到零的性能。因此,机器人控制系统设计的主要目的就是要实现误差闭环系统的稳定性。

但是,即便是全局稳定的系统,当有外界干扰信号作用时,其状态也有可能偏离平衡点。而实际系统中各种干扰是不可避免的,机器人系统也同样存在诸如操作环境及负荷的变化等机械和电气的干扰。因此,在设计机器人控制系统时除了确保误差系统的稳定性以外,还必须考虑对干扰的抑制能力。

显然,如果干扰信号是可检测的,就可以运用各种前馈补偿手段,来消除干扰的影响。对高频干扰信号,我们也可以借助于线性系统频域响应的概念,降低系统的频带宽度,使得系统对高频干扰不敏感从而达到抑制高频干扰影响的目的。而对于机器人这类非线性系统,干扰又不可检测且频谱非单一的情况,一种有效的干扰抑制手段是基于系统的  $L_2$  增益的设计方法。本节和下一节介绍其基本概念和方法。

一般在机器人系统中,各种外界干扰可以用等效的干扰力矩来描述,因此,在建立动态数学模型时,如果考虑干扰力矩的影响,机器人的动态方程具有如下结构:

$$\dot{x} = f(x) + g_2(x)u + g_1(x)w \quad (4.25)$$

其中,  $w$  表示干扰力矩。假设  $w$  是不可检测的。

在这种情况下,对控制器(4.4)的设计要求就不仅是保证当  $w=0$  时的闭环系统的渐近稳定性,而且还要保证当  $w \neq 0$  时闭环系统的状态  $x$  仍然能趋近于零,或距平衡点的偏差尽可能小。为此,我们需要引进衡量信号大小的量来作为评价系统抑制干扰能力的尺度。一般采用  $L_2$  范数来衡量信号的大小。对于信号  $w(t)$ ,其  $L_2$  范数定义为

$$\|w(t)\|_2 = \left\{ \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \right\}^{1/2} \quad (4.26)$$

如果考虑标量信号  $w(t)$ , 上述定义就变成

$$\|w(t)\|_2 = \left\{ \int_0^\infty w^2(t)dt \right\}^{1/2}$$

实际上, 在许多情况下上式定义的范数可以解释为信号所具有的能量。

如果采用状态反馈控制器  $u=k(x)$ , (4.25) 的闭环系统就可以表示为

$$\dot{x} = f_t(x) + g_t(x)w \quad (4.27)$$

式中,  $f_t(x) = f(x) + g_t(x)k(x)$

设系统的初始状态为  $x(0)=0$ , 对于给定的干扰信号  $w$ , 系统的动态响应可以通过解上述微分方程得出。为了描述系统对干扰的抑制能力, 定义评价信号

$$z = h(x) \quad (4.28)$$

其中,  $h$  是加权函数向量。对于给定的干扰信号  $w(t)$ ,  $z(t)$  的  $L_2$  范数越小就表示系统受干扰的影响越小, 即系统具有较强的对外界干扰的抑制能力。这表明系统的抑制干扰的性能可以用评价信号的范数与干扰信号的范数之比来描述。如果考虑属于某个集合或者使 (4.26) 式的积分有界的所有的信号, 那么可以定义如下的性能指标:

$$J = \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (4.29)$$

显然,  $J$  描述了干扰信号对系统的破坏最严重时的评价信号与干扰信号的范数之比值。 $J$  越小, 所有的  $w$  所对应的  $\|z\|_2$  也越小。若  $J$  小于给定的充分小正数  $\epsilon$ , 那么对于所考虑的集合内的所有  $w$ ,

$$\|z(t)\|_2 < \epsilon \|w(t)\|_2, \quad \forall w \quad (4.30)$$

成立。 $J$  反映了系统对干扰的抑制能力。因此, 抑制干扰问题就可

以归结为设计控制器使得由(4.29)式定义的  $J$  尽可能小或者小于给定的值。

实际上,(4.29)式所给出的  $J$  正是由(4.27)和(4.28)式描述的系统从输入  $w$  到输出  $z$  的诱导范数,或称为  $L_2$  增益。如果,考虑线性系统,即

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$z = Cx$$

且干扰为所有使(4.26)有界的信号的集合,那么(4.29)式所定义的  $J$  就是该系统的传递函数阵的最大奇异值,即  $H_\infty$  范数。于是有

$$J = \|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \{\max \sigma[G(j\omega)]\}$$

其中, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , $\sigma[G]$  表示矩阵的奇异值。

#### 4.4 $L_2$ 增益与 HJI 不等式

这一节主要介绍系统增益与哈密尔顿-雅可比偏微分不等式(Hamilton-Jacobi-Isaacs Inequality,以下简称 HJI 不等式)的关系,详细证明可参见文献[8]的第 6 章和第 2 章。这些结果是设计鲁棒稳定控制器和抑制干扰控制器的基础。

研究由下式描述的系统:

$$\Sigma_N : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) \end{cases}$$

其中, $w$  表示外界干扰等输入信号, $z$  表示评价信号等系统输出。

**定义 4.4.1** 令系统  $\Sigma_N$  的初始状态为  $x(0) = x_0$ 。若对于任意给定的  $x_1$ ,一定存在时刻  $t_1 > 0$  和输入信号  $w(t)$  使得

$$x_1 = \phi(t_1, 0, x_0, w)$$

则称该系统在状态  $x_0$  是能达的,上式中  $\phi(t, 0, x_0, w)$  表示系统对应于初始状态  $x_0$  和输入  $w$  的解。

**定义 4.4.2** 若  $w(t) \equiv 0$  时,任意满足  $z(t) \equiv 0$  的解  $x(t) \rightarrow 0$ ,

则称系统  $\Sigma_N$  是零状态可检测的。

在实际系统中,评价系统的性能指标只要考虑有限时间即可。因此,令  $T > 0$  为充分大常数,定义

$$\| w(t) \|_T = \left\{ \int_0^T w^T(t) w(t) dt \right\}^{1/2}$$

并且考虑性能评价指标

$$J_T = \sup_{\| w \| \neq 0} \frac{\| z \|_T}{\| w \|_T} \quad (4.31)$$

**定理 4.4.1** 给定正数  $\gamma > 0$ 。如果存在可微的准正定函数  $V(x) \geq 0$  满足如下 HJI 不等式:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (4.32)$$

或者,等价地满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) w \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \}, \forall w \quad (4.33)$$

则系统  $\Sigma_N$  的  $L_2$  增益小于  $\gamma$ ,即性能指标满足

$$J_T \leq \gamma \quad (4.34)$$

**证明** 沿系统  $\Sigma_N$  的轨迹,求准正定函数  $V(x)$  对时间  $t$  的微分

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) w \quad (4.35)$$

将(4.32)式代入上式,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{\partial V}{\partial x} g(x) w - \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \\ &= \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \} - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\gamma} g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} - \gamma w \right\|^2 \end{aligned}$$

其中,  $\| n \|$  表示向量  $n$  的欧几里得范数,其定义为  $\| n \| =$

$\sqrt{n^T n}$ 。

所以,有

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \}, \forall w \quad (4.36)$$

将上式两端积分,并注意  $V(x_0) = V(0) = 0$ , 得

$$0 \leq V(x(T)) \leq \frac{1}{2} \left\{ \gamma^2 \int_0^T \| w \|^2 dt - \int_0^T \| z \|^2 dt \right\}$$

故  $\| z \|_T \leq \gamma \| w \|_T, \forall w$  成立。

(4.32)式和(4.33)式的等价性可由(4.35)式和(4.36)式的推导过程得证。  $\triangle\triangle\triangle$

上述定理表明,HJI 不等式具有准正定解  $V$  是系统的增益小于给定值的充分条件。实际上,在一定的条件下可以证明这个条件也是必要的,下述定理的证明可参见文献[8]的第 6 章。定义准正定函数

$$V_a(x) = - \liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_w \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2) dt \quad (4.37)$$

**定理 4.4.2** 假设系统  $\Sigma_N$  在初始状态  $x_0 = \mathbf{0}$  是能达的,并且  $V_a(x)$  存在且可微。给定  $\gamma > 0$ , 如果对于任意  $T > 0$ , 系统  $\Sigma_N$  满足  $J_T \leq \gamma$ , 那么存在准正定函数  $V(x)$  满足 HJI 不等式(4.32)。

应该注意,定理 4.4.1 只保证系统的增益小于给定值,但并没有涉及  $w = \mathbf{0}$  时系统的稳定性。以下称  $w = \mathbf{0}$  时的系统为  $\Sigma_N$  的自由系统。

**定理 4.4.3** 假设系统  $\Sigma_N$  是零状态可检测的。若存在准正定函数  $V(x)$  满足 HJI 不等式(4.32),则  $\Sigma_N$  的自由系统的平衡点  $x = \mathbf{0}$  是渐近稳定的。

**证明** 由于系统是零状态可检测的,所以任意满足

$$\dot{x} = f(x), h(x) \equiv \mathbf{0} \quad (4.38)$$

的状态都趋于零,即  $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 。换句话说,满足上式的状态的集合

是不变集。而从定理 4.4.1 的证明中,令  $w=0$ ,由(4.36)式得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} h^T(x) h(x)$$

即,满足  $\dot{V}=0$  的集合  $R=\{x|\dot{V}=0\}$  本身就是不变集。所以,根据定理 4.2.4,对于任意初始状态  $x(0), x(t)$  都将收敛于该不变集,进而趋于零。  
△△△

最后我们来考虑线性系统的情况。

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases}$$

考察二次型的正定函数

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad (4.39)$$

式中  $P$  为  $n$  阶正定矩阵。因为

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^T P \quad (4.40)$$

所以,很容易验证,(4.32)式所对应的 HJI 可以表示为

$$x^T P A x + \frac{1}{2\gamma^2} x^T P B B^T P x + \frac{1}{2} x^T C^T C x \leq 0$$

上式等价于代数里卡蒂(Riccati)不等式

$$A^T P + P A + \frac{1}{\gamma^2} P B B^T P + C^T C \leq 0 \quad (4.41)$$

正如前面指出,对于线性系统来讲,  $L_2$  增益等价于系统传递函数阵的  $H_\infty$  范数,即频域增益的极值。因此,可以看出上述定理实际上是线性系统传递函数阵的  $H_\infty$  范数与代数里卡蒂不等式的关系在非线性系统中的推广。这一基本关系正是线性系统  $H_\infty$  控制理论的基础。当然,对于线性系统,上述定理的结论仍然成立。另外,自由系统的稳定性等价于系统矩阵  $A$  的所有特征值的实部均为负,此时称  $A$  为稳定阵。其实对于线性系统,我们可以证明更为简洁和严紧的结论,而不需要有关的附加假设条件。下述定理的严

格证明可参阅文献[8]。

**定理 4.4.4** 考查系统  $\Sigma_L$ 。对于给定的  $\gamma > 0$ ,  $A$  为稳定阵且

$$\|C(sI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma \quad (4.42)$$

的充分必要条件是存在正定阵  $P$  满足

$$A^T P + PA + \frac{1}{\gamma^2} PBB^T P + C^T C < 0 \quad (4.43)$$

## 4.5 不确定性与系统的鲁棒性能

所谓不确定性是指在建立被控对象的数学模型时未能考虑或者有意忽略的诸因素。对于机器人系统来讲, 不确定性表现为各种参数误差以及寄生在机器人各环节和操作环境上的高频动态特性。正如第1章的例子所示, 如果我们在设计机器人的控制系统时, 完全忽视这些不确定性的存在, 那么所得到的实际系统有可能无法实现性能指标的要求。为了实现鲁棒控制, 我们必须在设计控制器时考虑不确定性对性能指标的影响。因此, 我们必须基于具有不确定性的数学模型来设计控制器。

在状态空间, 具有不确定性的系统的动态过程, 可以描述如下:

$$\dot{x} \in S(x, u, t) \quad (4.44)$$

其中  $S(x, u, t)$  表示向量的集合。上式的意义可以解释如图 4.5。根据数学模型并不能唯一地确定状态  $x(t)$  在每一时刻的变化方向  $\dot{x}(t)$ , 而只能确定  $\dot{x}(t)$  所属的集合, 即只能估计状态变化方向的范围。

显然, 根据这种模型提供的信息决定控制输入  $u$  使系统沿理想的方向运动是比较困难的。因此, 我们采用如下的数学模型:

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + g(x)u \quad (4.45)$$

其中  $\Delta f(x)$  是描述不确定性的未知的函数向量, 一般假设它是有

界的且属于一个给定的集合。比如，假设  $\Delta f(x)$  属于如下定义的集合：

$$\Omega = \{\Delta f \mid \|\Delta f(x)\| \leq n(x), \\ \forall x, \Delta f(0) = 0\} \quad (4.46)$$

其中  $n(x)$  为给定的标量函数，如图 4.6 所示，它描述了不确定性的界。实际上 (4.45) 式的右端给出了集合  $S(x, u, t)$  的元素的一个描述。

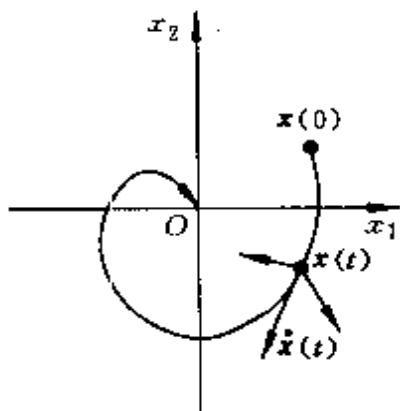


图 4.5 具有不确定性的系统的状态轨迹

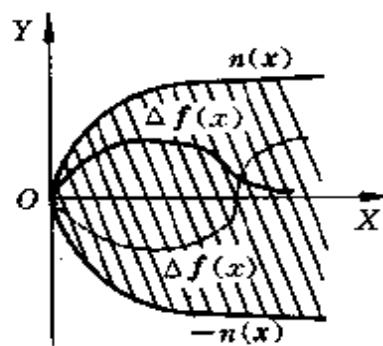


图 4.6 不确定性的界

对于 (4.45) 式所描述的系统，我们称  $\Delta f(x) = 0$  时的模型

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.47)$$

为 (4.45) 式的标称模型。而  $\Delta f(x)$  称为模型误差。在 (4.45) 式中，模型误差是由有界的摄动函数来描述的。在实际系统中，不确定性有时是由未知的参数误差引起的。这时模型误差可以用参数误差来表示，即

$$\Delta f(x) = \varphi(x, \theta), \varphi(x, 0) = 0 \quad (4.48)$$

式中  $\varphi$  为已知函数向量， $\theta$  表示参数误差。

以上介绍的不确定性，主要依赖于系统本身的状态，模型误差是状态的静态函数，故也被称为静态不确定性。与此相对应，有些

情况下不确定性本身具有动态特性,比如建立模型时忽略的高频动特性就是如此。这类不确定性被称为动态不确定性,可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + e(x)\xi + g(x)u \\ \dot{\xi} = \psi(\xi, y) \\ y = p(x) \end{cases} \quad (4.49)$$

其中,  $\xi$  表示不确定性的状态变量,  $\psi$  为未知函数向量。具有这两类不确定性的系统的结构分别表示如图 4.7 和图 4.8。

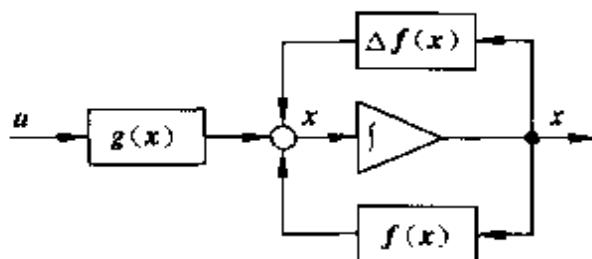


图 4.7 静态不确定性的描述

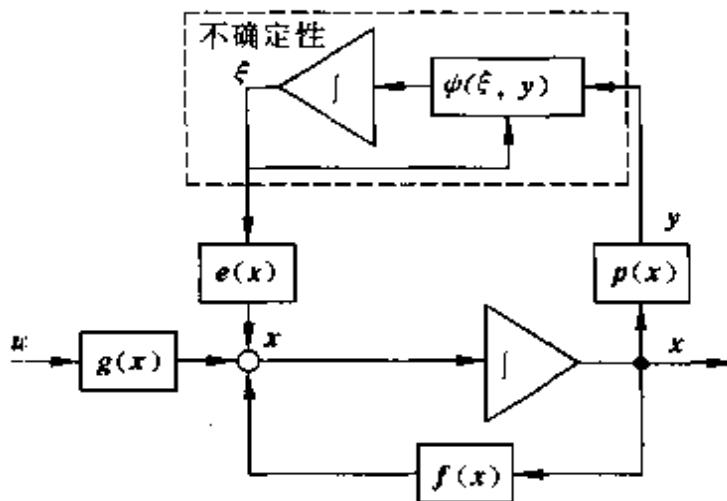


图 4.8 动态不确定性的描述

对于线性系统来讲,静态不确定性就可以表示为

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu \quad (4.50)$$

其中,  $\Delta A$  表示未知且有界的定常矩阵,表示模型的参数误差。而

动态不确定性可以用线性状态方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + P\xi + Bu \\ \dot{\xi} = A_\delta\xi + B_\delta y \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.51)$$

来表示,或者用频域的传递函数表示为

$$G(s) = G_N(s) + \Delta G(s) \quad (4.52)$$

上式中, $G(s)$ 表示实际系统的传递函数, $G_N(s)$ 表示标称传递函数, $\Delta G(s)$ 表示模型误差。假设 $\Delta G(s)$ 未知,但是存在已知界函数 $R(s)$ 使得

$$\bar{\sigma}\{\Delta G(j\omega)\} \leq R(j\omega), \forall \omega$$

成立。这意味着实际系统的频率特性存在于以 $G_N(s)$ 的频域特性曲线为中心, $R(j\omega)$ 为半径的带域内。其几何意义如图 4.9 所示。

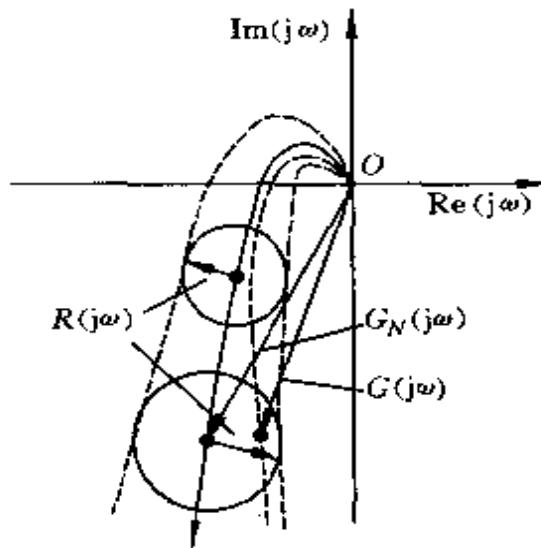


图 4.9 不确定性的频域描述

所谓鲁棒设计问题,就是要基于上述数学模型设计控制器,使得闭环系统对所考虑的所有不确定性都满足设计要求,这时的闭环系统称为具有鲁棒性能。比如,设计要求只考虑稳定性的话,就称该系统是鲁棒稳定的。如果设计要求还考虑干扰抑制能力的话,

就称该系统具有鲁棒干扰抑制性能。

## 4.6 $L_2$ 增益与鲁棒性能

由本章 4.3 节的内容可知, 系统对干扰的抑制性能可以通过降低闭环系统的  $L_2$  增益来实现。这一节我们将看到鲁棒干扰抑制性能同样可以通过约束  $L_2$  增益来实现。而且鲁棒稳定性条件也可以用  $L_2$  增益的约束条件来描述。因此, 无论是鲁棒稳定控制器还是鲁棒干扰抑制控制器, 都可以通过解所谓的  $L_2$  标准设计问题得到, 对于线性系统来讲这等价于解  $H_\infty$  标准设计问题。

下面我们考察鲁棒稳定性与  $L_2$  增益的关系。首先考虑具有动态不确定性的系统, 即如图 4.10 所示结构的系统。

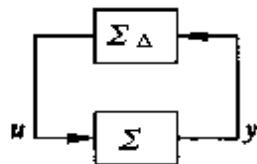


图 4.10 反馈连接系统的鲁棒稳定性

图中  $\Sigma$  为已知的标称系统,  $\Sigma_\Delta$  表示未知的不确定性动态特性。 $\Sigma$  和  $\Sigma_\Delta$  分别由以下的动态方程描述:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\Sigma_\Delta : \begin{cases} \dot{\xi} = \varphi(\xi) + \phi(\xi)y \\ u = \psi(\xi) \end{cases} \quad (4.54)$$

假设  $\varphi, \phi, \psi$  是未知的非线性向量函数, 但是对于任意的  $\Sigma_\Delta$  存在准正定阵  $W_\Delta(\xi)$ , 使得

$$W_\Delta \leqslant \frac{1}{2} \{ \gamma_1^2 \|y\|^2 - \|u\|^2 \}, \forall y \quad (4.55)$$

成立。即,不确定性系统  $\Sigma_\Delta$  的  $L_2$  增益小于或等于  $\gamma_1$ 。因此,我们可以用集合

$$\Omega_\Delta = \left\{ \Sigma_\Delta \mid \exists W_\Delta \geq 0 \text{ s.t. } \dot{W}_\Delta \leq \frac{1}{2} \{ \gamma_1^2 \|y\|^2 - \|u\|^2 \}, \forall y \right\}$$

来描述这类不确定性。

对这类系统的鲁棒稳定性,容易证明有下述定理成立。

**定理 4.6.1** 设  $\gamma_1 < 1$ ,且任意  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$  都是零状态可检测的。若系统  $\Sigma$  也是零状态可检测的,且存在准正定函数  $V_0(x)$  和正数  $\gamma_0 < 1$ ,使得

$$V_0 \leq \frac{1}{2} \{ \gamma_0^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 \}, \forall u \quad (4.56)$$

成立,那么,对于任意  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ ,  $(x, \xi) = (0, 0)$  是如图 4.10 所示反馈连接系统的稳定的平衡点。

**证明** 对于任意的  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ ,根据假设存在准正定函数  $W_\Delta(\xi)$  满足(4.55)式。对于整个系统,选取李雅普诺夫函数

$$V(x, \xi) = V_0(x) + W_\Delta(\xi)$$

利用(4.55)式和(4.56)式求  $V$  沿系统轨迹  $(x, \xi)$  的时间微分,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_0 + \dot{W}_\Delta \\ &\leq \frac{1}{2} \{ \gamma_0^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 \} + \frac{1}{2} \{ \gamma_1^2 \|y\|^2 - \|u\|^2 \} \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \gamma_0^2) \|u\|^2 - \frac{1}{2} (1 - \gamma_1^2) \|y\|^2 \\ &< 0, \quad \forall u \neq 0, \forall y \neq 0 \end{aligned}$$

且  $\dot{V}=0$ ,当且仅当  $u=0, y=0$ 。故,由零状态可检测假设条件和拉萨尔不变集定理,稳定性得证。  $\triangle\triangle\triangle$

上述定理表明,如果标称系统的  $L_2$  增益小于 1,那么  $L_2$  增益同样小于 1 的任意未知系统与其反馈连接所得到的系统都是稳定的。当然,严格地讲为此还需要定理 4.4.2 所示的附加条件。应该

指出,上述定理的结论是小增益定理的一个特例。

对于线性系统,  $L_2$  增益等价于传递函数阵的  $H_\infty$  范数,而且如果线性系统的传递函数阵的  $H_\infty$  范数小于给定值  $\gamma$ ,那么就存在二次型正定函数满足类似(4.55)式的不等式。因此类似定理 4.6.1,有如下结论成立。

设  $\Sigma$  和  $\Sigma_\Delta$  由下式描述:

$$\Sigma : y = G(s)u$$

$$\Sigma_\Delta : u = \Delta G(s)y$$

其中,不确定性  $\Delta G$  属于如下定义的集合:

$$\Omega_\Delta = \{\Delta G(s) \mid \|\Delta G(s)\| \leq \gamma_1\}$$

**定理 4.6.2** 设  $\Delta G(s)$  的极点的实部均为负,  $\gamma_1 < 1$ 。若  $G(s)$  的所有极点的实部也均为负,且

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma_0 < 1 \quad (4.57)$$

则对于任意  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ , 图 4.11 所示的反馈连接系统是稳定的。

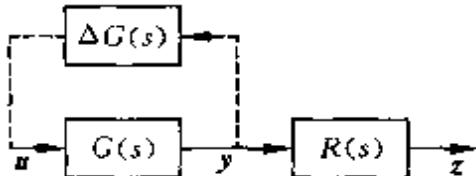


图 4.11 频域系统的鲁棒稳定性

如果该定理的条件成立,那么有

$$\|G(s)\Delta G(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty \|\Delta G(s)\|_\infty \leq \gamma_0 \gamma_1 < 1$$

所以,该反馈系统的鲁棒稳定性同样可以根据奈奎斯特判据得出。即,如果上式成立,那么对任意  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$  开环系统的奈奎斯特曲线将位于单位圆内,所以闭环系统是稳定的。

在上述讨论中所考虑的不确定性的增益在整个频域上是一致小于给定值  $\gamma_1$  的。但是在实际工程中,在各个频率上不确定性的增益是不同的,其上界可以用给定的复变函数  $R(s)$  来描述。因此,

我们可以定义频域不确定性的集合如下：

$$\Omega_R = \{\Delta G(s) | \bar{\sigma}\{\Delta G(j\omega)\} \leq |R(j\omega)|, \forall \omega\} \quad (4.58)$$

其中  $\bar{\sigma}\{\Delta G\}$  表示最大奇异值，对标量系统就是模。

**定理 4.6.3** 给定  $R(s)$ 。设所有  $\Delta G \in \Omega_R$  在  $s$  闭右半平面是解析的。则由  $G(s)$  和  $\Delta G(s)$  反馈连接构成的闭环系统是鲁棒稳定的充分必要条件是  $G(s)$  在  $s$  闭右半平面解析且满足

$$\|R(s)G(s)\|_{\infty} < 1 \quad (4.59)$$

该定理的物理意义如图 4.11 所示。即，若经频域加权后的标准开环系统  $R(s)G(s)$  的  $H_{\infty}$  范数小于 1，则加虚线所示的闭环系统对于任意  $\Delta G(s)$  是稳定的。这个定理可以运用频域的奈奎斯特稳定性判据证明，详细可参见文献[8]的第 4 章。应该指出，这个定理和前两个定理一样是小增益定理的另一种表现形式。但是，小增益定理一般只保证充分性，而定理 4.6.3 则描述了鲁棒稳定性的充分与必要条件。

下面考察具有静态不确定性的系统的鲁棒稳定性。假设系统由如下状态方程描述：

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) \quad (4.60)$$

其中  $\Delta f(x)$  可以表示为

$$\Delta f(x) = E(x)\delta(x)$$

$E(x)$  是具有适当维数的已知函数矩阵， $\delta(x)$  是属于以下定义的集合的未知函数向量：

$$\Omega_\delta = \{\delta(x) | \|\delta(x)\| \leq \|n(x)\|, \forall x\}$$

**定理 4.6.4** 若存在正定函数  $V(x)$  使得 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} E(x)E^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} n \backslash + T(x)n(x) < 0 \quad (4.61)$$

对所有  $x \neq 0$  成立，则对于任意  $\delta \in \Omega_\delta, x=0$  是系统(4.60)的稳定的平衡点。

**证明** 设(4.61)成立。对任意 $\delta \in \Omega_0$ , 沿(4.60)式的解的轨迹求正定函数 $V(x)$ 对时间的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \{ f(x) + E(x)\delta(x) \} \\ &\leq \frac{\partial V}{\partial x} E(x)\delta(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} E(x)E^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2} n^T(x)n(x) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} E(x)\delta(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} E(x)E^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2} n^T(x)n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \| E^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - \delta(x) \|^2 - \frac{1}{2} \{ n^T(x)n(x) - \delta^T(x)\delta(x) \} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

所以, 根据李雅普诺夫稳定性定理 4.2.2, 给定系统的鲁棒稳定性得证。  $\triangle\triangle\triangle$

定义输入信号 $w = \delta(x)$ 和辅助输出信号 $y = n(x)$ , 则系统(4.60)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + E(x)w \\ y = n(x) \end{cases} \quad (4.62)$$

$$w = \delta(x) \quad (4.63)$$

由定理 4.4.1 可知, HJI 不等式(4.6.1)等价于

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} E(x)w < \frac{1}{2} (\| w \|^2 - \| y \|^2), \forall w$$

即, 系统(4.62)的 $L_2$ 增益小于 1。因此, 上述定理表明如果标称开环系统(4.62)的 $L_2$ 增益小于 1, 那么由系统状态驱动的任意静态不确定性(4.63)所构成的闭环系统是鲁棒稳定的。

假设标称系统是线性的, 即

$$\dot{x} = Ax + E\delta(x) \quad (4.64)$$

并且,  $n(x) = Fx$ ,  $F$  为给定矩阵。那么, 根据定理 4.6.4 和定理 4.4.4, 有如下推论成立。

**推论 4.6.1** 若存在正定矩阵  $P > 0$  使得代数里卡蒂不等式

$$A^T P + PA + PEE^T P + F^T F < 0 \quad (4.65)$$

成立,或者等价地

$$\| F(sI - A)^{-1} E \|_{\infty} < 1 \quad (4.66)$$

则系统(4.64)对于任意满足  $\|\delta(x)\| \leq \|Fx\|$  的未知的  $\delta$  是稳定的。

实际上,可以证明在上述条件下,该系统对于不确定性  $\delta(x)$  是一致指数稳定的。

**定理 4.6.5** 考虑系统(4.64)。若存在正定矩阵  $P > 0$  满足代数里卡蒂不等式(4.65),则存在正数  $\gamma > 0, \beta > 0$  使得

$$\|x(t)\|_2 \leq \gamma \|x(0)\|_2 e^{-\beta t}, \forall t > 0 \quad (4.67)$$

对于任意满足  $\|\delta(x)\| \leq \|Fx\|$  的未知的  $\delta$  成立。

**证明** 设存在  $P > 0$  满足(4.66)。考察二次型正定函数

$$V(x) = x^T Px$$

显然有

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_M \|x\|^2, \forall x \quad (4.68)$$

其中,  $\lambda_m > 0, \lambda_M > 0$  分别表示  $P$  的最小和最大特征值。

定义正定矩阵  $Q > 0$  为

$$Q = -\{A^T P + PA + PEE^T P + F^T F\}$$

利用(4.65)式,沿系统的状态轨迹求  $V$  对时间的微分,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P(Ax + E\delta(x)) \\ &= -x^T Qx + 2x^T PEE^T Px - x^T F^T Fx \\ &= -x^T Qx - \|E^T Px - \delta(x)\|^2 - (\|Fx\|^2 - \|\delta(x)\|^2) \end{aligned}$$

故,对于任意满足  $\|\delta(x)\| \leq \|Fx\|$  的  $\delta$ ,有

$$\dot{V} \leq -x^T Qx \leq -\lambda_q \|x\|^2, \forall x$$

其中,  $\lambda_q > 0$  是正定阵  $Q$  的最小特征值。将(4.68)式的右端代入上式,得

$$\dot{V} \leq -\beta V, \forall t$$

式中,  $\beta_0 = \lambda_g / \lambda_M > 0$ 。因此, 有

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\beta_0, \forall t$$

求上式两端从 0 至  $t$  的积分, 得

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\beta_0 t}, \forall t$$

再次利用(4.68)式, 得

$$\lambda_m \|x(t)\|^2 \leq \lambda_M \|x(0)\|^2 e^{-\beta_0 t}, \forall t \quad (4.69)$$

所以, 令

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}}, \beta = \sqrt{\beta_0}$$

则根据(4.69)式定理得证。  $\triangle\triangle\triangle$

最后, 我们来考察鲁棒干扰抑制问题。设具有动态不确定性的系统结构如图 4.12 所示。其中  $w$  和  $z$  分别表示干扰信号和干扰抑制性能的评价信号,  $\Sigma$  为已知的标称系统,  $\Sigma_\Delta$  表示未知的不确定性动态特性。 $\Sigma$  和  $\Sigma_\Delta$  分别由以下的动态方程描述:

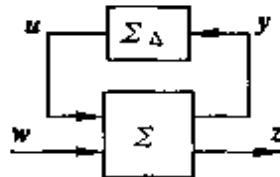


图 4.12 鲁棒干扰抑制特性

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_0(x)u + g_1w \\ y = h_0(x) \\ z = h_1(x) \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\Sigma_\Delta : \begin{cases} \dot{\xi} = \varphi(\xi) + \phi(\xi)y \\ u = \psi(\xi) \end{cases} \quad (4.71)$$

假设任意  $\Sigma_\Delta$  是零状态可检测的且存在准正定阵  $W_\Delta(\xi)$  使得

(4.55)成立,即  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ 。

给定  $\gamma > 0$ 。如果,当  $w(t) = 0$  时,图 4.12 所示的系统是鲁棒稳定的,并且  $w(t) \neq 0$  时,对于任意  $w \in \Omega_\Delta$  该系统的  $L_2$  增益小于  $\gamma$ ,即  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \forall w$  成立,则称该系统具有鲁棒干扰抑制性能。下述结果表明,如果适当定义的标称系统的  $L_2$  增益小于 1,那么原系统就具有鲁棒干扰抑制性能。

**定理 4.6.6** 设系统(4.70)对于输出信号  $y$  是零状态可检测。若存在正定函数  $V(x)$ ,使得 HJI 不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma_0^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_0(x) g_0^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\ + \frac{1}{2} h_0^T(x) h_0(x) + \frac{1}{2} h_1^T(x) h_1(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

对所有  $x \neq 0$  成立,则该系统具有鲁棒干扰抑制系统。

**证明** 考察如下定义的广义标称系统:

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \tilde{g}(x)\tilde{w} \\ \tilde{z} = \tilde{h}(x) \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_0} g_0(x) & \frac{1}{\gamma} g_1(x) \end{bmatrix}, \tilde{h}(x) = \begin{bmatrix} h_0(x) \\ h_1(x) \end{bmatrix}, \tilde{w} = \begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix} \\ u' &= \gamma_0 u, w' = \gamma w \end{aligned}$$

如果存在满足(4.61)的正定函数  $V(x)$ ,那么根据(4.32)式和(4.33)式的等价性,不难证明  $V(x)$  满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} \tilde{g}(x) \tilde{w} \leq \frac{1}{2} \{ \|\tilde{w}\|^2 - \|\tilde{z}\|^2 \}, \forall \tilde{w}$$

对于任意的  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ , 定义正定函数

$$U(x, \xi) = V(x) + W_\Delta(\xi)$$

其沿  $\Sigma$  和  $\Sigma_\Delta$  构成的闭环系统的轨迹  $(x, \xi)$  的时间微分为

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= \dot{V} + \dot{W}_\Delta \\
&\leq \frac{1}{2} \{ \| \tilde{w} \|^2 - \| \tilde{z} \|^2 \} + \frac{1}{2} \{ \gamma_0^2 \| y \|^2 - \| u \|^2 \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \} - \frac{1}{2} (1 - \gamma_0^2) \| u \|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (1 - \gamma_0^2) \| y \|^2 \\
&< \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \}, \quad \forall u \neq 0, \forall y \neq 0
\end{aligned}$$

令  $x(0)=0$ 。将上式两端积分，并注意  $V(x_0)=V(0)=0$ ，得

$$0 \leq V(x(T)) \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \int_0^T \| w \|^2 dt - \int_0^T \| z \|^2 dt \}$$

故，对于任意的  $\Sigma_\Delta \in \Omega_\Delta$ ，系统  $L_2$  增益小于  $\gamma$ 。鲁棒稳定性由定理 4.6.1 得证。  $\triangle\triangle\triangle$

对于具有静态不确定性系统，可以得出类似的结论。下述定理的证明思路与定理 4.6.7 的证明相同，详细可参阅文献[12]。

研究如下具有不确定性的系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + E(x)\delta(x) + g_1(x)w \\ z = h(x) \end{cases} \quad (4.73)$$

其中  $\delta \in \Omega_\delta$ 。

**定理 4.6.7** 设系统(4.73)是零状态可检测。若存在正定函数  $V(x)$  使得 HJI 不等式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x)g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} E(x)E^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\
+ \frac{1}{2} h^T(x)h(x) + \frac{1}{2} n^T(x)n(x) \leq 0
\end{aligned} \quad (4.74)$$

对所有  $x \neq 0$  成立，则该系统具有鲁棒干扰抑制性能。

这个定理的条件同样等价于广义标称系统

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = f(x) + \tilde{g}(x)\tilde{w} \\ \tilde{z} = \tilde{h}(x) \end{cases}$$

的  $L_2$  小于 1。式中，

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \left[ E(x) \quad \frac{1}{\gamma} g(x) \right], \tilde{h}(x) = \begin{bmatrix} n(x) \\ h_1(x) \end{bmatrix}, \tilde{w} = \begin{bmatrix} u \\ w' \end{bmatrix} \\ u &= \delta(x), w' = \gamma w \end{aligned}$$

最后考察标称系统为线性的情况。假设具有静态不确定性的系统描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + E\delta(x) + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (4.75)$$

未知向量函数  $\delta$  满足  $\|\delta(x)\| \leq \|Fx\|$ ,  $F$  为给定矩阵。那么，根据定理 4.6.8 有如下推论成立。

定义广义标称系统如下：

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = Ax + \tilde{B}\tilde{w} \\ \tilde{z} = \tilde{C}x \end{cases}$$

其中，

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \left[ E \quad \frac{1}{\gamma} B \right], \tilde{C} = \begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix}, \tilde{w} = \begin{bmatrix} u \\ w' \end{bmatrix} \\ u &= \delta(x), w' = \gamma w \end{aligned}$$

**推论 4.6.2** 若存在正定矩阵  $P > 0$  使得代数里卡蒂不等式

$$A^T P + PA + P \left( \frac{1}{\gamma^2} BB^T + EE^T \right) P + C^T C + F^T F < 0 \quad (4.76)$$

成立，或者等价地

$$\left\| \begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \left[ E \quad \frac{1}{\gamma} B \right] \right\|_{\infty} < 1 \quad (4.77)$$

则系统(4.75)对于任意满足  $\|\delta(x)\| \leq \|Fx\|$  的未知的  $\delta$  是一

致指数稳定的且

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2, \forall w$$

成立。

#### 4.7 $L_2$ 标准设计问题

综合以上各节的讨论可知,无论是鲁棒稳定性问题,还是鲁棒干扰抑制问题,最终都可以归结为要求适当定义的广义标称系统具有理想的  $L_2$  增益。因此,机器人的鲁棒定位,鲁棒跟踪或鲁棒干扰抑制问题均可以通过设计控制器使得广义的标称闭环系统的  $L_2$  增益小于给定的值来求解。这类设计问题在现代控制理论中被称为  $L_2$ (或  $H_\infty$ )标准设计问题,并且已经给出了比较圆满的设计手段。本节主要介绍具有状态反馈结构的控制器的设计方法,详细证明及具有输出反馈结构的控制器的设计方法可参见参考文献 [13]~[15]。

考虑具有如图 4.13 所示结构的系统,其中  $\Sigma$  表示广义的被控对象,  $K$  表示反馈控制器。 $u$  为控制输入信号,  $y$  为可检测信号,  $w$  和  $z$  分别为广义的干扰输入和评价信号。

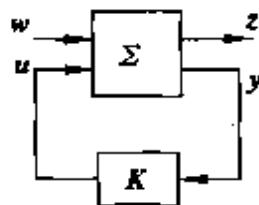


图 4.13 标准设计问题

**定义 4.7.1** 如图 4.13 所示的系统被称为是内部渐近稳定的,系指当  $w(t)=0$  时,系统的状态对于任意的初始状态  $x(0)=x_0$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

所谓  $L_2$  标准设计问题是,对于给定的被控对象  $\Sigma$  和正数  $\gamma > 0$ ,求反馈控制器  $\mathbf{K}$  使得如图 4.13 所示的闭环系统是内部稳定的,且对于任意给定的正数  $T > 0$  满足

$$\|\mathbf{z}(t)\|_T \leq \gamma \|\mathbf{w}(t)\|_T, \forall \mathbf{w} \quad (4.78)$$

假设被控对象  $\Sigma$  由如下状态方程描述:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{w} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.79)$$

由于该系统可检测信号是系统的全状态,故以下我们考虑状态反馈控制器

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) \quad (4.80)$$

由被控对象(4.79)和反馈控制器(4.80)构成的闭环控制系统可以描述如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_*(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \mathbf{h}_*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.81)$$

其中

$$\mathbf{f}_*(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}_*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

根据定理 4.4.3 可知,如果存在正定函数  $V(\mathbf{x})$  满足

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_*(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \mathbf{g}_1^T(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{1}{2} \mathbf{h}_*^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}_*(\mathbf{x}) < 0 \quad (4.82)$$

那么该闭环系统是内部稳定的且满足(4.80)。即,这时状态反馈(4.80)就是  $L_2$  标准设计问题的一个解。假设  $\mathbf{k}^T(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x})$  对于所有  $\mathbf{x}$  是非齐异的,则不难验证,上式等价于

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \\
& - \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x) \{ k^T(x) k(x) \}^{-1} g_2^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\
& + \| \{ k^T(x) k(x) \}^{-\frac{1}{2}} g_2^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} \\
& - \{ k^T(x) k(x) \}^{\frac{1}{2}} \alpha(x) \| < 0
\end{aligned} \tag{4.83}$$

所以,如果 HJI 不等式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) \{ k^T(x) k(x) \}^{-1} g_2^T(x) \right\} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\
& < 0
\end{aligned} \tag{4.84}$$

有正定解  $V(x)$ ,我们就可以利用该正定解构造状态反馈控制律

$$\alpha(x) = - \{ k^T(x) k(x) \}^{-1} g_2^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \tag{4.85}$$

使得(4.83)式成立。这意味着该正定函数  $V(x)$  满足(4.82),即由(4.85)给出的反馈控制器正是  $L_2$  标准设计问题的一个解。

上述讨论表明,HJI 不等式具有正定解是被控对象(4.78)所对应的  $L_2$  可解的充分条件。严格地讲,为了保证闭环系统的内部稳定性,( $f_a(x), h_a(x)$ ) 应该满足零状态可检测条件。实际上,可以证明对于状态反馈(4.85)来讲,这个条件等价于( $f(x), h(x)$ ) 是零状态可检测的。综上所述得如下结论。

**定理 4.7.1** 假设被控对象(4.79)满足如下条件:

[H1] 对于所有  $x, k^T(x)k(x)$  是可逆的。

[H2] ( $f(x), h(x)$ ) 是零状态可检测的。

对于给定的  $\gamma > 0$ ,若存在正定函数  $V(x)$  ( $V(\mathbf{0}) = 0$ ) 使得 HJI

不等式(4.84)成立,则  $L_2$  标准设计问题有解且理想的状态反馈控制律由(4.85)给出。

正如前面指出,当系统为线性时可以通过解适当的里卡蒂方程得到上述 HJI 不等式的解。实际上,即使是非线性系统,当系统具有一定的结构时,也同样可以通过解适当的结构形如里卡蒂方程的不等式来求解  $L_2$  标准设计问题。比如,考虑由下式描述的非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u \\ z = [C(x)x] \\ y = x \end{cases} \quad (4.86)$$

容易验证,如果存在正定阵  $P(x) > 0$  ( $P(0) = 0$ ) 使得

$$A(x)^T P(x) + P(x)A(x) + C^T(x)C(x) \\ + P(x) \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1(x)B_1^T(x) - B_2(x)(D^T(x)D(x))^{-1}B_2^T(x) \right) P(x) < 0 \quad (4.87)$$

成立,且能够找到一个适当的正定函数  $V(x)$  满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) = x^T P(x) \quad (4.88)$$

那么,该正定函数  $V(x)$  将满足 Hamilton-Jacobi 不等式(4.84)。因此,对于结构如(4.86)式的非线性系统,只要存在在状态空间处处正定的  $P(x)$  满足(4.87),那么  $L_2$  标准设计问题的解可由(4.85)得出

$$\alpha(x) = -\{D^T(x)D(x)\}^{-1}B_2^T(x)P(x)x \quad (4.89)$$

当然严格地讲,(4.87)仍然是关于系统状态  $x$  的非线性方程,而且对于给定的正定阵  $P(x)$  构造满足(4.88)式的正定函数  $V(x)$  还需要一些条件。但是,对于固定的  $x$  来说,(4.87)是代数里卡蒂方程。在目前尚未有求解 Hamilton-Jacobi 偏微分不等式的有效的

解析方法的情况下,如果系统结构满足要求,通过在状态空间逐点求解代数方程得到 Hamilton-Jacobi 方程的解不失是一种有效的数值解法。另外,应该指出在机器人系统中许多广义的被控对象可以表示为这种结构。

如果描述系统(4.86)的矩阵函数均为常数阵,即

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = [Cx] \\ y = x \end{cases}$$

那么,(4.81)式等价于闭环系统满足

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$$

而方程(4.87)则成为

$$A^T P + PA - C^T C + P \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 (D^T D)^{-1} B_2^T \right) P < 0 \quad (4.90)$$

实际上,在线性系统  $H_\infty$  控制理论中已经证明了上述里卡蒂方程有正定解  $P > 0$  不仅是存在状态反馈控制器使得闭环系统满足  $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  的充分条件,同时也是必要条件(详见文献[8]第 5 章)。这时一个理想的反馈控制器根据(4.89)式求得如下:

$$u = - (D^T D)^{-1} B_2^T P x$$

#### 4.8 不确定性摩擦特性的鲁棒补偿控制

在机器人系统中,不论是旋转还是平移关节或多或少都具有摩擦特性。机械系统的这种摩擦特性是造成位置伺服系统的控制性能恶化的重要原因。但是摩擦力特别是静摩擦是尚未解明的物理现象,因此精确建立其数学模型,并根据数学模型来完全补偿静摩擦的影响是不可能的。本节介绍一种基于摩擦力的上界进行鲁

棒控制的设计方案。

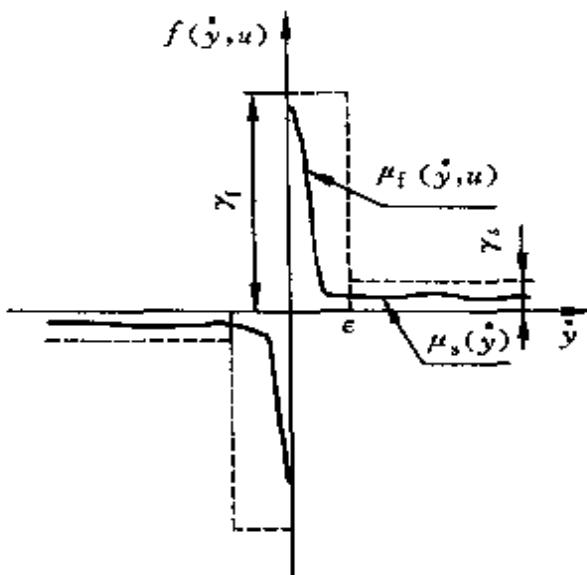


图 4.14 静摩擦特性

静摩擦力的特点是当物体的运动速度为零时作用于物体的阻抗力较大，而当物体的运动速度不为零时阻抗力较小。因此，尽管严格地描述静摩擦力仍然是有待解决的课题，我们不妨用如图 4.14 所示的非线性函数  $f(\dot{y}, u)$  来近似表示静摩擦力。即，摩擦力  $f$  为未知但是其上界  $\hat{f}$  为已知，且由下式描述：

$$\begin{aligned}\hat{f}(\dot{y}, u) &= \mu_s(\dot{y}, u)\lambda(\dot{y}) + u_t(\dot{y}, u)(1 - \lambda(\dot{y})) \quad (4.91) \\ |\mu_s(\dot{y}, u)| &\leq \gamma_s, |\mu_t(\dot{y}, u)| \leq \gamma_t, \forall u, \dot{y}\end{aligned}$$

其中， $\mu_s, \mu_t$  分别表示未知的静摩擦和动摩擦力，而正常数  $\gamma_s, \gamma_t$  为其上界， $u$  为外界信号， $\lambda$  为如下定义的开关函数：

$$\lambda(\dot{y}) = \begin{cases} 1, & |\dot{y}| > \epsilon \\ 0, & |\dot{y}| \leq \epsilon \end{cases}$$

$\epsilon > 0$  为充分小的常数。

因此，具有静摩擦特性的机械系统一般可以表示为

$$\ddot{y} + b\dot{y} + ay = u - f(\dot{y}, u) \quad (4.92)$$

式中,  $y$  和  $u$  分别表示机械系统的位置和驱动力。对于这类系统的位置伺服问题, 如果采用经典的 PID 控制, 往往会引起振荡现象。比如图 4.15 是采用 PID 控制器控制静摩擦特性较严重的气动阀位置的实验结果(详细被控对象参见文献[16])。如前所述, 由于静摩擦和控制律中积分动作的作用, 位置伺服误差在零点附近往复振荡而不趋于零。

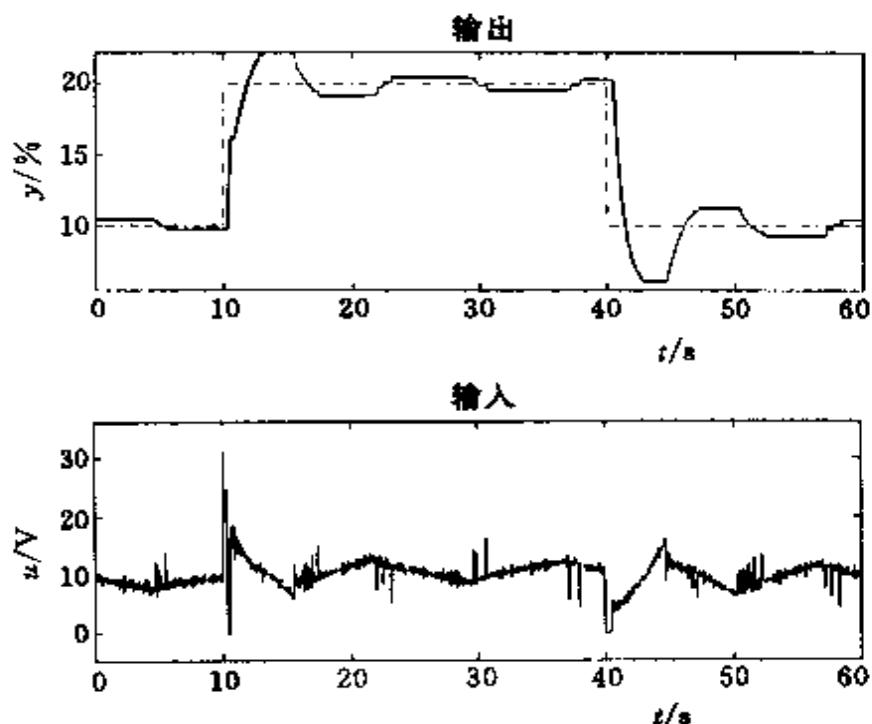


图 4.15 PID 控制结果

以下讨论这类系统的鲁棒控制问题。这里介绍的方法同样适用于具有参数不确定性的控制。假设被控对象(4.92)的参数未知但是满足

$$0 \leq m \leq a \leq M$$

$$0 \leq n \leq b \leq N$$

式中  $m, M, n, N$  为给定常数, 分别表示参数的上界和下界。而不确定的摩擦力的界由(4.91)式描述。

为设计控制器, 我们引入参考模型如下:

$$\ddot{y}_m + \beta \dot{y}_m + \alpha y_m = \alpha r \quad (4.93)$$

其中,  $\alpha > 0, \beta > 0$  是由设计者根据所期望的动特性给定的常数, 而  $r$  为位置指令。不难验证, 此时的位置伺服误差将由下式描述:

$$\ddot{e} + \beta \dot{e} + \alpha e = \alpha r - u + f(\dot{y}, u) + (a - \alpha)y + (b - \beta)\dot{y} \quad (4.94)$$

其中  $e = y_m - y$  表示位置伺服误差。

如果定义状态变量  $x^T = [e \quad \dot{e}]$ , 则上式可以表示为

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(r, y, \dot{y}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}r \quad (4.95)$$

式中,

$$\begin{aligned} \Delta &= f(\dot{y}, u) + (a - \alpha)y + (b - \beta)\dot{y} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于  $A$  是稳定阵, 根据李雅普诺夫稳定性理论可知对于任意给定的正定矩阵  $Q$ , 存在正定矩阵  $P$  满足李雅普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (4.96)$$

利用该正定阵  $P$  定义辅助信号

$$\hat{e} = [0 \quad 1]P\dot{x} = p_2e + p_3\dot{e}$$

式中,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

设控制器的结构给定如下:

$$u = \alpha r + K_p(\hat{e}, y)y + K_d(\hat{e}, \dot{y})\dot{y} + K_i(\hat{e}, \dot{y}) \quad (4.97)$$

其中,  $K_p, K_d, K_i$  为待设计的增益函数。因此, 我们的设计目的就是选择适当的增益函数, 使得对于满足假设条件的任意未知参数  $a, b$  以及未知摩擦力  $f$ , 误差系统(4.95)的状态  $x$  趋于零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \forall e(0)$$

令控制器的增益函数给定如下：

$$K_p(\hat{e}, y) = \frac{1}{2} \{(1 - \text{sgn}(\hat{e} - y))k_p + (1 + \text{sgn}(\hat{e} - y))g_p\} \quad (4.98)$$

$$K_d(\hat{e}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \{(1 - \text{sgn}(\hat{e} - \dot{y}))k_d + (1 + \text{sgn}(\hat{e} - \dot{y}))g_d\} \quad (4.99)$$

$$K_s(\hat{e}, \dot{y}) = \lambda(\dot{y})\text{sgn}(\hat{e})\gamma_s + (1 - \lambda(\dot{y}))\text{sgn}(\hat{e})\gamma_f \quad (4.100)$$

式中,  $k_p, k_d, g_p, g_d$  分别是增益常数。而  $\lambda$  是前面定义的开关函数,  $\text{sgn}$  为如下定义的开关函数:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

此时, 我们可以证明如下命题成立。

**定理 4.8.1** 考察系统(4.92)和参考模型(4.93)。令控制器由式(4.97)~式(4.100)给定, 且控制器的增益为

$$k_p = m - \alpha, \quad g_p = M - \alpha$$

$$k_d = n - \beta, \quad g_d = N - \beta$$

则对于满足(4.91)的任意摩擦力  $f$  和任意有界参数  $a$  和  $b$ , 误差系统(4.94)是全局渐近稳定的。

**证明** 闭环误差系统给定如下:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(r, y, \dot{y}) - C(x) \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

其中

$$C(x) = K_p(\hat{e}, y)y + K_d(\hat{e}, \dot{y})\dot{y} + K_s(\hat{e}, \dot{y})$$

对于该系统构造如下的李雅普诺夫函数:

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

式中  $\mathbf{P}$  为满足李雅普诺夫方程(4.96)的任意正定矩阵。求该正定函数沿方程(4.101)的解轨迹的对时间的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Delta(r, y, \dot{y}) - \mathbf{C}(\mathbf{x})) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \hat{e} (\Delta(r, y, \dot{y}) - \mathbf{C}(\mathbf{x})) \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2} \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \hat{e} (\Delta(r, y, \dot{y}) - \mathbf{C}(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

其中,  $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$  表示正定阵  $\mathbf{Q}$  的最小特征值。因为,

$$\begin{aligned}\hat{e} (\Delta(r, y, \dot{y}) - \mathbf{C}(\mathbf{x})) &= \{(a - \alpha) - K_p\} \hat{e} y + \{(b - \beta) \\ &\quad - K_d\} \hat{e} \dot{y} + (f - K_i) \hat{e}\end{aligned}\quad (4.102)$$

不难验证,

$$\{(a - \alpha) - K_p\} = \begin{cases} a - m \geq 0, & \hat{e} y < 0 \\ a - M \leq 0, & \hat{e} y > 0 \end{cases}$$

$$\{(b - \beta) - K_d\} = \begin{cases} b - n \geq 0, & \hat{e} \dot{y} < 0 \\ b - N \leq 0, & \hat{e} \dot{y} > 0 \end{cases}$$

故,(4.102)式右端的第一项和第二项为负。考察第三项可知, 当  $e > 0$  时, 有

$$\begin{aligned}f - K_i &= \begin{cases} \mu_f(u, \dot{y}) - \gamma_f, & |\dot{y}| \leq \epsilon \\ \mu_i(u) - \gamma_i, & |\dot{y}| > \epsilon \end{cases} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

而当  $e < 0$  时, 有

$$\begin{aligned}f - K_i &= \begin{cases} \mu_f(u, \dot{y}) + \gamma_f, & |\dot{y}| \leq \epsilon \\ \mu_i(u) + \gamma_i, & |\dot{y}| > \epsilon \end{cases} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

故,第三项亦为负。综上所述可知,对于任意的  $f, a, b$ , 有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min} \|x\|^2, \quad \forall x$$

成立。且根据定义可知  $V$  满足

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2$$

因此,根据李雅普诺夫稳定性定理可知,对于任意的  $f, a, b$ , 误差系统(4.101)是全局渐近稳定的。  $\triangle\triangle\triangle$

由于这一类控制器在实际运行时需要做频繁的开关动作,这反而会引起系统高频震荡现象。为此,在应用时应该引入死区。即,当控制误差的绝对值小于一定水准时,停止切换控制增益。比如,引入带有死区特性的开关函数

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & e > \delta \\ 0, & |e| \leq \delta \\ -1, & e < -\delta \end{cases}$$

其中  $\delta > 0$  为充分小正数,体现了允许控制误差。利用上述定义的开关函数,修改控制器中的开关函数如下:

$$\text{mds}(x, y) = \text{sat}(x)\text{sig}(y\text{sgn}(x))$$

即,修改控制器为

$$K_p(\hat{e}, y) = \frac{1}{2} \{(1 - \text{mds}(e, \hat{e}, y))k_p + (1 + \text{mds}(e, \hat{e}, y))g_p\} \quad (4.103)$$

$$K_d(\hat{e}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \{(1 - \text{mds}(e, \hat{e}, \dot{y}))k_d + (1 + \text{mds}(e, \hat{e}, \dot{y}))g_d\} \quad (4.104)$$

$$K_r(\hat{e}, \dot{y}) = \lambda(\dot{y})\text{mds}(e, \hat{e}, \dot{y})\gamma_r + \{1 - \lambda(\dot{y})\}\text{mds}(e, \hat{e}, \dot{y})\gamma_f \quad (4.105)$$

这时仿上述定理的证明,不难得出如下结论。详细证明可参见文献[18]。

**定理 4.8.2** 令控制器(4.97)的开关函数由(4.103)式~(4.105)式给定。对于满足(4.91)式的任意摩擦力  $f$  和任意有界参数  $a$  和  $b$ ,存在一个正数  $T > 0$  使得

$$|e(t)| \leq \delta, \quad \forall t > T$$

对任意初始误差成立。

下面介绍该控制器在一个机械位置控制系统中应用的结果。被控对象的模型由(4.92)式描述,模型参数为未知但存在于如下区间:

$$0.1183 \leq a \leq 0.1447, \quad 1.1623 \leq b \leq 1.4207$$

因此,我们可以取参数的上下界分别为

$$m = 0.1183, M = 0.1447$$

$$n = 1.1623, N = 1.4207$$

而描述不确定性静摩擦特性的界的系数分别为

$$\gamma_f = 0.3, \gamma_s = 0.05, \epsilon = 1.00$$

对于该系统,考虑参考模型

$$\ddot{y}_m + 4\dot{y}_m + 4y_m = 4r$$

即,模型参数为  $\alpha = \beta = 4$ 。根据上面所述,首先求李雅普诺夫方程(4.95)。令正定矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并将

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

代入(4.95)式求解,得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.625 & -0.5 \\ -0.5 & 0.625 \end{bmatrix}$$

因此,定义辅助信号为

$$\hat{e} = -0.5e + 0.625\dot{e}$$

根据定理 4.8.1,得出控制器增益为

$$k_p = -3.8917, \quad g_p = -3.8553$$

$$k_d = -2.8377, \quad g_d = -2.5793$$

取  $\delta=0.02$ ,并利用(4.103)式~(4.105)式构造开关函数,得出控制器(4.96)式。

该控制系统的结构如图 4.16 所示。参考输入信号  $r$  为矩形波时的动态响应过程如图 4.17 所示。可以看出没有出现具有静摩擦特性的系统响应中常见的振荡现象。与常规 PI 控制器的控制效果(图 4.15)相比,具有良好的控制效果。实际上,分析可知常规 PI 控制器中,只要含有积分动作,那么如图 4.15 的振荡就是不可避免的,且其振荡周期与静摩擦力的大小以及控制器的积分常数有关。

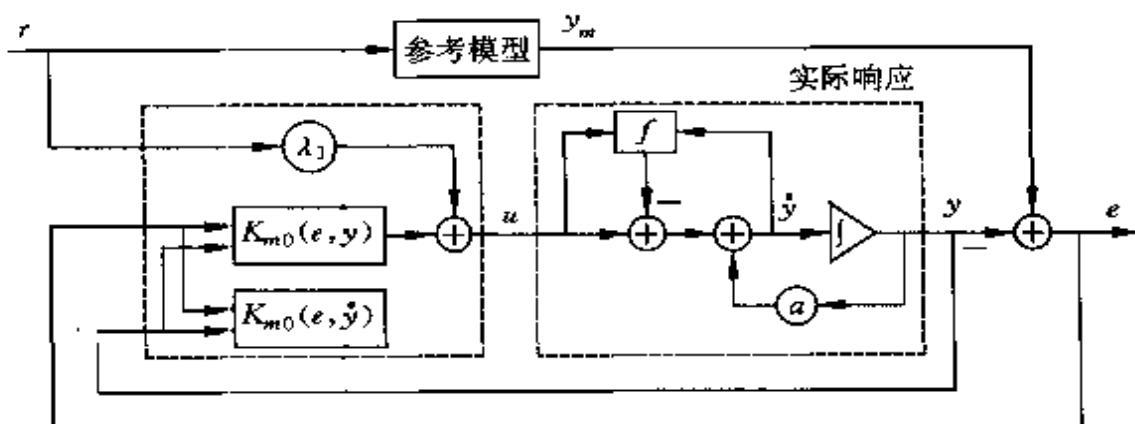


图 4.16 控制系统的结构框图

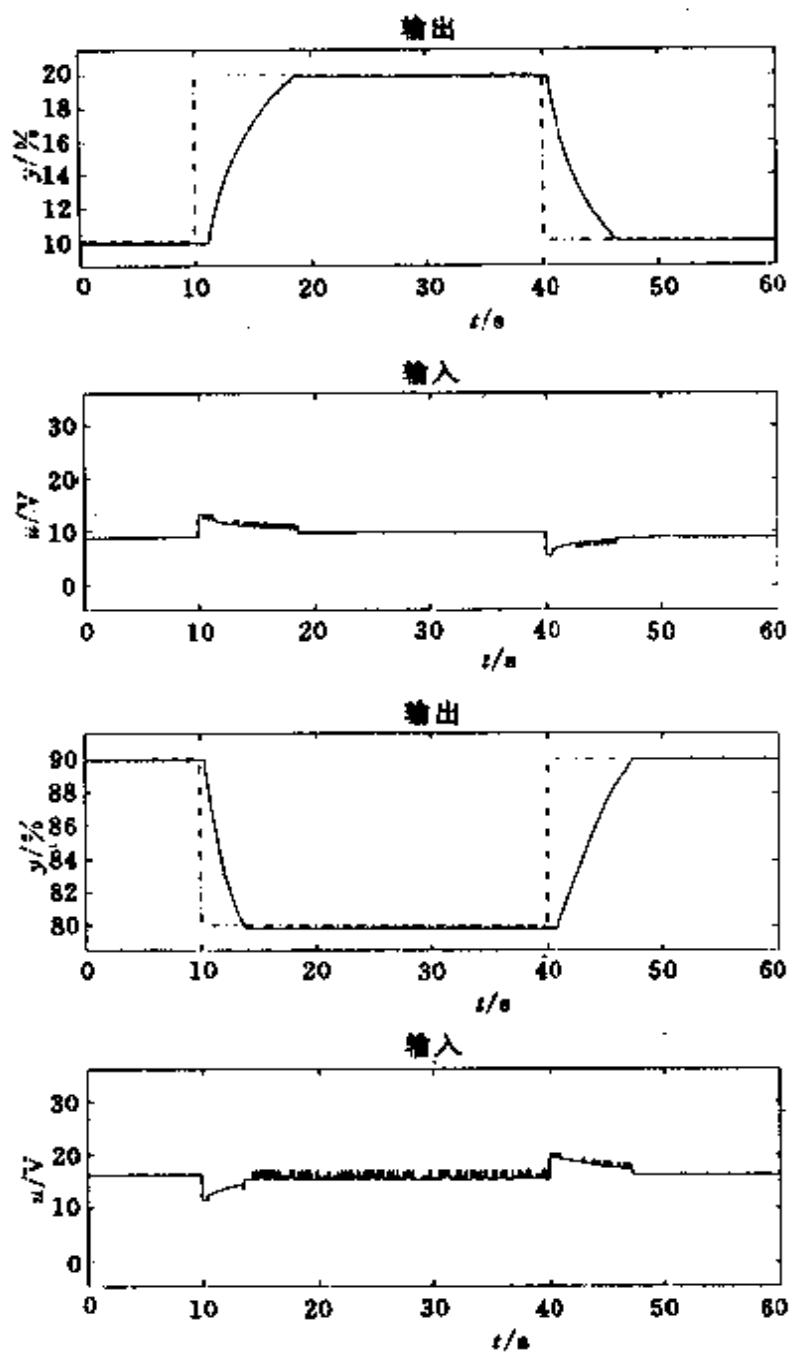


图 4.17 控制实验结果

## 第 5 章 基于耗散性的鲁棒控制

前一章主要介绍了机器人鲁棒控制系统的一般设计理论。但是在应用这些设计理论时,我们还应该充分利用机器人结构上的物理特征。机器人系统所固有的这些特征,往往能够为构造理想的李雅普诺夫函数提供依据,而且使得控制器的推导变得简洁。本章所介绍的基于耗散性概念的设计方法,更加注重控制误差系统能量的衰减过程,并利用机器人的特征来构造能量函数。实际上,这种能量函数同时也能够成为保证系统稳定性的李雅普诺夫函数。

### 5.1 无源性与稳定性

粗略地讲,系统的状态发散一般也需要能量。例如一个机械系统,如果我们能够证实,在没有外力施加能量的条件下,其动能和势能均趋近于零的话,那么该系统的位置和速度都会趋于零,即该系统是稳定的。或者,我们能够证明不论外力如何施加能量,该系统只会消耗能量而不能将外部提供的能量加以放大,那么一旦外力停止作用,系统的能量就会衰减为零,从而使系统保持稳定。因此,对于一个系统,如果我们能够定义一个表示能量的正定函数,使得其值为零的充分必要条件是该系统的所有状态变量均为零,且其值始终小于外界能量输入的总和,那么该系统就是稳定的。本节和下一节介绍的系统的无源性和耗散性的概念,正是基于这种思路来考察系统自身的稳定性以及对外界输入的响应的。

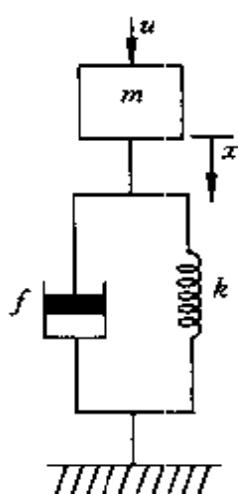
首先,我们来考察如图 5.1 所示的由重物、弹簧和阻尼器组成的简单机械系统。记其质量、弹簧和阻尼系数分别为  $m, k, f$ , 外界

作用力为  $u$ , 位置坐标为  $x$ , 且无外界作用力时的平衡点为  $x=0$ 。该系统的运动方程为

$$m\ddot{x} = u - f\dot{x} - kx \quad (5.1)$$

显然, 该系统是渐近稳定的。即, 当外力停止作用后, 系统能从任何初始状态渐近地恢复到平衡状态。实际上, 我们可以定义该系统的能量函数为质量  $m$  所具有的势能及动能之和。

即



$$V(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \quad (5.2)$$

其中,  $t$  表示时间。求该能量函数对时间的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \\ &= kx\dot{x} + \dot{x}(u - f\dot{x} - kx) \\ &= -f\dot{x}^2 + u\dot{x} \\ &\leq u\dot{x} \quad \forall u\end{aligned}$$

图 5.1 弹簧-阻尼器系统

考虑外力为零的情况, 即令  $u=0$ , 则上式表明  $\dot{V} \leq 0, \forall t$ , 系统的总能量是单调衰减的。

当有外力作用时, 求上式两端从初始时刻 0 到时间  $t$  的积分, 得

$$\int_0^t \dot{V} d\tau \leq \int_0^t u\dot{x} d\tau$$

显然, 上式右端是外力向该系统提供的能量的总和, 而该式等价于

$$V(\dot{x}(t), x(t)) \leq V(\dot{x}(0), x(0)) + \int_0^t u\dot{x} d\tau \quad (5.3)$$

即, 系统的能量总是小于或等于初始时刻系统所具有的能量与由外部提供的能量之和。这表明系统只从外部吸收能量, 而系统本身并不向外部释放能量, 这类系统称为是无源的。无源性是研究非线性系统稳定性的一个非常重要的概念, 其一般定义描述如下。

#### 定义 5.1.1 考察非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.4)$$

其中  $u$  和  $y$  分别是系统的输入和输出信号,且其维数相同。 $f$  和  $h$  分别满足  $f(0)=0, h(0)=0$ 。该系统称为是无源的,系指存在一个正定函数  $V(x)$ 使得无源性不等式

$$\dot{V} \leq u^T y, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.5)$$

对于任意输入信号  $u$  成立。

**定义 5.1.2** 对于系统(5.4)如果存在正定函数  $V(x)$ 使得(5.5)式严格成立,即,对于给定的正定函数  $Q(x)>0(Q(\mathbf{0})=0)$ ,

$$\dot{V} + Q(x) \leq u^T y, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.6)$$

则称该系统是严格无源的。

显然,对于上述弹簧阻尼器系统,如果定义系统的状态变量为  $x^T = [x \ \dot{x}]$ ,输出为

$$y = h(x) = \dot{x}$$

那么,由(5.2)式定义的正定函数  $V$  满足无源不等式(5.5)。

应该指出,一般无源性的定义不一定要求  $V$  是严格正定函数,且  $V$  也可以不满足平滑可微的要求。本书只考虑  $V$  是正定且平滑连续可微的情况,主要是为了利用其设计控制器。

可以看出,系统的无源性是电子网络的无源性概念的推广。以下例题中的无源网络满足上述无源性定义的条件。

**例题 5.1** 考察如图 5.2 所示的由电感、电容和电阻构成的无源电子网络。该网络的状态变量可以取流过电感的电流  $x_1$  和电容两端的电势差  $x_2$ 。分别求电流和电压方程得该系统的状态方程式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R_2}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2 C}x_2 \end{cases}$$

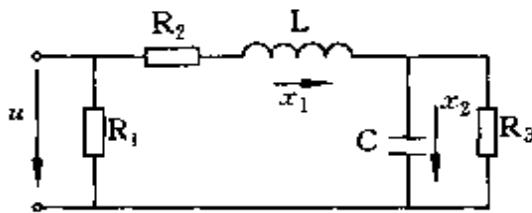


图 5.2 无源电子网络

设该系统的输出为电感电流,即

$$y = x_1$$

该系统的电能量的总和为

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2$$

对于任意的外部输入电压  $u$ , 沿该系统的状态轨迹求能量的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(u - R_2x_1 - x_2) + x_2\left(x_1 - \frac{1}{R_3}x_2\right) \\ &= uy - R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2\end{aligned}$$

令正定函数为

$$Q(\mathbf{x}) = R_2x_1^2 + \frac{1}{R_3}x_2^2$$

故,  $V$  满足

$$\dot{V} + Q(\mathbf{x}) \leqslant uy, \quad \forall u$$

根据定义可知该系统是严格无源的。

对于结构如(5.4)式的非线性系统, 我们有如下所述的无源性的充分必要条件。

**引理 5.1.1** 考察系统(5.4)。存在正定且可微的函数  $V(\mathbf{x})$  ( $V(\mathbf{0})=0$ )使得该系统是无源的充分必要条件是  $V$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = f(x) \leqslant 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (5.7)$$

该引理称为 KYP(Kalman-Yacubovitch-Popov)引理,其必要性的证明可参见文献[19]。容易验证其充分性如下:假设存在正定函数  $V$  使得(5.7)成立,那么对于任意输入信号  $u$ ,求  $V$  沿系统(5.4)的轨迹的时间微分,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u \\ &\leqslant \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u = h^T(x)u = y^T u \end{aligned}$$

无源系统的重要意义在于它与稳定性有密切联系。首先,由定义可知,如果存在正定函数  $V$ ,使得系统(5.4)是严格无源的话,那么如果考察输入为零( $u=0$ )时的无源不等式(5.6),显然有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leqslant -Q(x) < 0, \forall x \neq 0$$

成立。这就意味着  $x=0$  是自由系统

$$\dot{x} = f(x)$$

的全局渐近稳定的平衡点。

其次,我们来考虑一般无源系统。实际上,如果无源系统满足一定的条件,那么,我们就可以通过静态输出反馈使得闭环系统是渐近稳定的。

**定义 5.1.3** 系统(5.4)称为是零状态可检测的,系指当  $u=0, y=0, \forall t \geqslant 0$  时,必有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (5.8)$$

成立。

**引理 5.1.2** 设存在正定函数  $V(x)$  使得系统(5.4)是无源的, 并假设系统(5.4)是零状态可检测的。令

$$u = -\varphi(y) \quad (5.9)$$

其中,  $\varphi$  是满足  $\varphi(\mathbf{0})=0$ , 且  $\varphi^T(y)y > 0, \forall y \neq 0$  的任意向量函数。则对于(5.4)式和上式所构成的闭环系统,  $x=0$  是全局渐近稳定的平衡点。

**证明** 因为系统(5.4)是无源的, 所以, 沿闭环系统的状态轨迹求正定函数  $V$  的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ &\leqslant y^T u \\ &= -y^T \varphi(y) \leqslant 0\end{aligned}$$

根据函数  $\varphi(x)$  的性质, 有  $\dot{V} \leqslant 0, \forall t$ , 且  $\dot{V}=0$  仅当  $y=0$ 。在状态空间中, 记集合

$$\Omega = \{x | \dot{V}(x) = 0\} = \{x | y = h(x) = 0\}$$

因为,  $u = \varphi(\mathbf{0}) = 0$ 。故, 根据零状态可检测条件可知, 在上述集合内必有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

成立。即  $\Omega$  是该系统的不变集, 且所有位于该集合内的状态轨迹最终都趋于零。所以, 由第4章的拉萨尔不变集定理可知该闭环系统是全局渐近稳定的。  $\triangle\triangle\triangle$

该引理表明, 非线性系统的镇定问题可以归结为使系统无源化的问题。对于系统(5.4), 如果能够找到适当的反馈控制律

$$u = \alpha(x) + v$$

使得由辅助输入  $v$  至输出  $y$  是无源的, 那么, 使  $x=0$  成为闭环系统的全局稳定平衡点的控制率将由下式给出:

$$u = \alpha(x) - \varphi(y)$$

该闭环系统的结构如图 5.3 所示。实际上, 这个思路可以推广到鲁

棒控制器的设计问题。为此，我们先引入鲁棒无源性的概念。

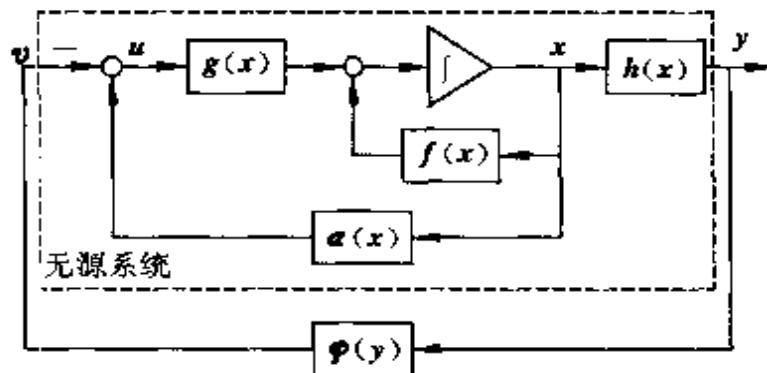


图 5.3 无源性与稳定性

考察具有不确定性的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + e(x)\delta(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.10)$$

其中  $f, e, g, h$  分别是已知函数,  $\delta$  是未知函数, 满足

$$\|\delta(x)\|^2 \leq \rho^2(x), \quad \forall x$$

$\rho$  为给定的已知函数且满足  $\rho(\mathbf{0})=0$ , 式中  $\|\delta\| = \sqrt{\delta^T \delta}$ 。

**定义 5.1.4** 考察系统 (5.10)。如果存在正定函数  $V(x)$  ( $V(\mathbf{0})=0$ ), 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + e(x)\delta(x)) \leq 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (5.11)$$

对于所有未知函数  $\delta$  成立, 则系统 (5.10) 称为是鲁棒无源的。

显然, 如果 (5.11) 对所有未知函数  $\delta$  成立, 那么, 引理 5.1.1 的条件对所有未知函数  $\delta$  成立。根据引理 5.1.2 很容易得出如下结论。

**引理 5.1.3** 假设系统 (5.10) 对于所有  $\delta$  是零状态可检测。如果存在正定函数  $V(x)$  使得系统 (5.10) 是鲁棒无源的, 那么  $x =$

0 是输出反馈

$$u = -\phi(y)$$

和(5.10)所构成的闭环系统的全局渐近稳定的平衡点。其中,  $\phi$  是满足  $\phi(0)=0$ , 且  $\phi^T(y)y>0, \forall y \neq 0$  的任意向量函数。

下面介绍在定义 5.1.2 下的鲁棒无源性的充分必要条件。

**引理 5.1.4** 存在正定函数  $V(x)$  ( $V(0)=0$ ), 使得系统(5.10)是鲁棒无源的充分必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| \rho(x) \leq 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (5.12)$$

对于所有  $x$  成立。

**证明** 充分性。因为

$$\frac{\partial V}{\partial x} e(x) \delta(x) \leq \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| \rho(x), \quad \forall \delta, \forall x$$

由(5.11)式得

$$\frac{\partial V}{\partial x} \{f(x) + e(x)\delta(x)\} \leq \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| \rho(x) \leq 0$$

故根据引理 5.1.2, 鲁棒无源性得证。

必要性。为了叙述简便, 以下记

$$a(x) = \frac{\partial V}{\partial x} e(x), \quad b(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

根据定义, 有

$$b(x) \leq \inf_{\|\delta\| \leq \rho} \{-a(x)\delta(x)\} = -\sup_{\|\delta\| \leq \rho} \{a(x)\delta(x)\} \quad (5.13)$$

因为  $\|\delta\| \leq \rho(x)$  时,  $\delta' = -\delta$  也满足  $\|\delta'\| \leq \rho(x)$ 。所以, 由上式得

$$b(x) \leq -\sup_{\|\delta\| \leq \rho} |a(x)\delta(x)|$$

又因为  $|a(x)\delta(x)| \leq \|a(x)\| \rho(x), \forall \delta$ , 故

$$\sup_{\|\delta\| \leq \rho} |a(x)\delta(x)| \leq \|a(x)\| \rho(x) \quad (5.14)$$

实际上,当  $a(x) \neq 0$  时,令

$$\delta_0(x) = \frac{\rho(x)}{\|a(x)\|} a(x)$$

则有

$$|a(x)\delta_0(x)| = \|a(x)\|\rho(x) \quad (5.15)$$

当  $a(x)=0$ ,上式对任意  $\delta$  均成立。因此,根据(5.13),(5.14)和(5.15)式,可知

$$b(x) \leq -\|a(x)\|\rho(x) \quad (5.16)$$

△△△

对于鲁棒严格无源性,我们可以进一步得如下结论。

**引理 5.1.5** 以下命题是等价的。

1. 存在正定函数  $V(x)$  ( $V(\mathbf{0})=0$ )使得系统(5.10)是鲁棒严格无源的。

2. 对于任意  $x$ ,  $V(x)$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| \rho(x) < 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (5.17)$$

3. 存在正定函数  $\lambda(x) > 0$ ,使得下式成立。

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\lambda(x)}{2} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| + \frac{1}{2\lambda(x)} \rho(x) < 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (5.18)$$

**证明** 命题 1 和命题 2 的等价性的证明与引理 5.1.3 的证明相同。下面证明命题 2 和命题 3 的等价性。

如果命题 3 成立,显然有

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) \right\| \rho(x) < -\frac{\lambda}{2} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} e(x) - \frac{1}{\lambda} \rho(x) \right\| \leq 0$$

反之,如果命题 2 成立,仿(5.16)式的证明,得

$$b(x) < -\|a(x)\|\rho(x)$$

即,

$$b^2(x) > \|a(x)\|^2\rho^2(x), \forall x \quad (5.19)$$

故,存在  $\lambda(x) > 0$  使得

$$\frac{1}{2}\|a(x)\|^2\lambda^2(x) + b(x)\lambda(x) + \frac{1}{2}\rho^2(x) < 0, \forall x \quad (5.20)$$

△△△

## 5.2 耗散性与 $L_2$ 增益

系统的无源性概念的更一般的推广是所谓的耗散性。前者是后者的特例。非线性系统的  $L_2$  增益约束条件,可以从耗散性的角度来描述。

考察非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.21)$$

其中  $u$  和  $y$  分别是该系统的输入和输出信号。对于该系统考虑适当的函数  $s(u, y)$ 。

**定义 5.2.1** 称系统(5.21)对于给定的  $s(u, y)$  是耗散的,系指存在一个正定函数  $V(x)$  使得耗散不等式

$$\dot{V} \leq s(u, y) \quad \forall t \geq 0 \quad (5.22)$$

对于任意输入信号  $u$  成立。这时  $s(u, y)$  称为供给率,  $V(x)$  称为存储函数。

显然,如果系统是耗散的,那么,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t s(u, y)d\tau \quad (5.23)$$

对于任意输入成立。由于上式中供给率的积分项可以解释为外部

向该系统提供的能量之总和,因此耗散系统在任意  $t$  时刻所具有的能量  $V(t)$  总是小于等于初始时刻的能量  $V(x(0))$  与外部提供的能量之和。耗散系统的这种物理意义与无源性完全相同。只是耗散性考虑的能量供给方式比无源性更具有般性。实际上,如果考虑

$$s(u, y) = u^T y$$

则该系统的耗散性就等价于无源性。

与无源性一样,我们同样可以定义严格耗散性的概念如下。

**定义 5.2.2** 对于给定的供给率  $s(u, y)$ , 系统(5.21)称为是严格耗散的,系指存在正定函数  $V(x)$  和正定函数  $Q(x) > 0$  ( $Q(0) = 0$ ),使得

$$\dot{V} + Q(x) \leq s(u, y), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.24)$$

对于任意输入  $u$  成立。

系统耗散性的一个重要应用就是它可以用来自描述  $L_2$  条件。比如,我们来考虑如下定义的供给率:

$$s(u, y) = \frac{1}{2} \{\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2\} \quad (5.25)$$

如果系统(5.21)对于上述供给率是耗散的,那么就存在正定函数  $V(x)$  使得

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \{\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2\} \quad (5.26)$$

对于任意输入  $u$  成立。正如第四章所述,这个耗散不等式等价于  $L_2$  增益约束条件

$$\|y\|^2 \leq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \forall u$$

即,由输入  $u$  至输出  $y$  的  $L_2$  增益小于  $\gamma$ 。因此,我们不妨称(5.25)定义的供给率为  $L_2$  供给率。

根据 4.4 节的讨论可知,如果存在正定函数  $V(x)$  满足(5.26),那么该正定函数将满足 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq 0$$

因此,我们可以通过解 HJI 不等式来求出耗散系统的存储函数。这就表明,对于  $L_2$  供给率来讲,求使闭环系统成为耗散的状态反馈控制器的问题,可以像  $L_2$  标准设计问题那样通过解适当的 HJI 不等式来解决。

但是,应该强调的是,如果着眼于耗散不等式本身,而不是 HJI 不等式,那么对于有些系统就可以直接构造存储函数而不必解 HJI 不等式。下面通过例题来说明其基本思路。

**例题 5.2** 给定系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f(x_1) + \phi(x_1, x_2)x_2 \\ \dot{x}_2 = u + g(x_1, x_2)w \\ z = x_2 \end{cases} \quad (5.27)$$

其中,  $u$  为控制输入,  $w$  为干扰输入,  $z$  表示评价信号。  $g, \phi$  分别为给定函数。设给定函数  $f$  满足  $f(0)=0$ , 且子系统  $\dot{x}_1=f(x_1)$  是渐近稳定的。即, 存在正定函数  $U(x_1)$  使得其沿该子系统轨迹的微分满足

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x_1} f(x_1) < 0, \quad \forall x_1 \neq 0 \quad (5.28)$$

试求状态反馈控制律

$$u = \alpha(x_1, x_2)$$

使得闭环系统的  $L_2$  增益小于  $\gamma$ , 即, 对于如下  $L_2$  供给率是耗散的:

$$s(w, z) = \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \| w \|^2 - \| z \|^2 \}$$

以下通过直接构造存储函数的方法解这个设计问题。令正定函数给定如下:

$$V(x_1, x_2) = U(x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (5.29)$$

定义

$$H(w, u, z) = \dot{V} + \frac{1}{2} \{ \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \}$$

其中,  $\dot{V}$  表示沿系统轨迹的微分, 则有

$$\begin{aligned} H &= U + x_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \{ \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \{ f(x_1) + \phi(x_1, x_2) x_2 \} \\ &\quad + x_2 \{ u + g(x_1, x_2) w \} + \frac{1}{2} \{ \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \} \end{aligned}$$

将(5.27)式代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} H &= U + x_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \{ \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1} f(x_1) - \frac{1}{2} \left\{ \gamma^2 \|w\|^2 - \frac{1}{\gamma^2} \|g(x_1, x_2) x_2\|^2 \right\} \\ &\quad + x_2 \left\{ u + \phi(x_1, x_2) \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma^2} g^2(x_1, x_2) x_2 + \frac{1}{2} x_2 \right\} \end{aligned}$$

令反馈率为

$$u = -\phi(x_1, x_2) \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{1}{\gamma^2} g^2(x_1, x_2) x_2 - \frac{1}{2} x_2$$

则  $H \leq 0$ 。即

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \}$$

由这个例题我们得到这样一个启发, 即在有些情况下李雅普诺夫函数可以成为保证系统耗散性的存储函数, 而且解  $L_2$  设计问题可以不必解 HJI 偏微分不等式。上述例题就是如此。不难验证, 由(5.29)定义的存储函数实际上也是保证原点的渐近稳定性的李雅普诺夫函数。而且当  $U(x_1)$  已知时, 可以构造存储函数  $V(x_1, x_2)$ 。例如, 若  $f(x) = -x_1$ , 我们可以取  $U(x_1) = x_1^2$ 。

关于这种直接构造存储函数的设计方法, 我们将在后续章节

陆续介绍。在机器人系统中,我们可以基于机械和电能量函数直接构造存储函数。

正如第4章所述,系统的鲁棒干扰抑制性能可以用鲁棒  $L_2$  增益来描述。根据系统的耗散性与  $L_2$  增益的关系,我们同样可以引入鲁棒耗散性的概念,来描述系统的鲁棒干扰抑制能力。

**定义 5.2.3** 对于给定的供给率  $s(u, y)$ ,具有不确定性的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + e(x)\delta(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.30)$$

称为是鲁棒耗散的,系指存在一个存储函数  $V(x)$  使得耗散不等式(5.22)对所有未知函数  $\delta(x)$  成立。

根据定理 4.6.7 以及系统耗散性与  $L_2$  增益的关系,不难得出如下结论。

**引理 5.2.1** 设描述不确定性的未知函数  $\delta(x)$  满足

$$\|\delta(x)\|^2 \leq \rho^2(x), \forall x$$

其中,  $\rho(x)$  为给定的正定函数。如果存在正定函数  $V(x)$  满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}f(x) + \frac{1}{2\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)g^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}e(x)e^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \\ + \frac{1}{2}h^T(x)h(x) + \frac{1}{2}\rho^2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

则系统(5.30)对于  $L_2$  供给率是鲁棒耗散的。

### 5.3 机器人的物理特征与李雅普诺夫函数

从前两节的讨论可知,不论是镇定问题还是  $L_2$  设计问题,一个很关键的步骤就是构造李雅普诺夫函数或者能量存储函数。对于一般的非线性系统来讲,这并不是很容易的事情。但是,如果我们充分利用机器人系统的物理特征,将很容易找到理想的李雅普

诺夫函数。而且如果定义适当的输出信号,这个函数同样可以成为保证系统耗散性的存储函数。

根据第3章可知,基于拉格朗日运动学建立的机器人的动态模型一般具有如下形式:

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) = \tau \quad (5.31)$$

其中,  $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$  分别表示机器人各关节的位置和速度,  $\tau$  为驱动力矩向量。 $J, f, g$  分别是由机器人的具体结构所决定的函数矩阵。

尽管各类机器人的具体结构和参数不同,但是对于如(5.31)式所示的拉格朗日运动学方程,可以证明其满足如下性质。

(1) 正定性 对于任意  $\boldsymbol{q}$  矩阵  $J(\boldsymbol{q})$  是正定的。

(2) 有界性 矩阵函数  $J(\boldsymbol{q})$  和  $f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  对于所有  $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$  是一致有界的,即存在正数  $\lambda_m, \lambda_M$  和正定函数  $\eta(\dot{\boldsymbol{q}})$ ,使得

$$0 < \lambda_m I \leq J(\boldsymbol{q}) \leq \lambda_M I,$$

$$f^T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \leq \eta(\dot{\boldsymbol{q}})I$$

对于任意  $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$  成立。

(3) 斜对称性 矩阵函数  $J(\boldsymbol{q}) - 2f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  对于任意  $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$  是斜对称的。即对任意向量  $\xi$ ,有

$$\xi^T(J(\boldsymbol{q}) - 2f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}))\xi = 0$$

(4) 线性特征 机器人的数学模型对于物理参数是线性的。即,如果将矩阵函数  $J, f, g$  中的定常系数表示为一个向量  $\theta$ ,那么可以定义适当的矩阵  $\Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ ,使得

$$J(\boldsymbol{q})\boldsymbol{a} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v} + g(\boldsymbol{q}) = \Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})\theta \quad (5.32)$$

成立。

机器人的这些物理特征,在许多有关机器人学的教科书中都有详细介绍(可参见文献[3])。下面以第3章得到的二自由度机械臂的动态模型(3.57)为例,验证其线性特征。并且利用这些特征建立机器人系统的李雅普诺夫函数。

**例题 5.3** 对于由(3.61)式描述的二自由度机械臂,试求  $\Phi$

和  $\theta$  使得(5.32)式成立。

由于(3.61)式没有考虑重力的作用,所以  $g(q)=0$ 。观察可知,矩阵函数  $J, f$  中有三个独立的定常系数,分别是

$$\theta_1 = J, \theta_2 = J_2, \theta_3 = m_2 r_2 l_1$$

所以,记速度向量  $v$  和加速度向量  $a$  的各分量以及参数向量为

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

那么,不难验证,只要取

$$\Phi(q, \dot{q}, v, a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 \cos(q_2 - q_1) - v_2 \dot{q}_2 \sin(q_2 - q_1) \\ 0 & a_2 & a_1 \cos(q_2 - q_1) - v_1 \dot{q}_1 \sin(q_2 - q_1) \end{bmatrix}$$

则,

$$J(q)a + f(q, \dot{q})v = \Phi(q, \dot{q}, v, a)\theta$$

模型(3.61)就可以表示为

$$\Phi(q, \dot{q}, v, a)\theta = \tau \quad (5.33)$$

由(5.33)式所描述的这种机器人的动态模型对物理参数的线性关系将有利于自适应控制技术的应用。这一点后续章节将进一步说明。

下面我们来考虑在机器人轨迹跟踪问题中,如何利用这些物理特征构造李雅普诺夫函数。

对于由(5.31)式所描述的机器人,假设理想的轨迹由  $q_d, \dot{q}_d$  以及  $\ddot{q}_d$  描述。所谓轨迹跟踪问题,就是设计控制器使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0 \quad (5.34)$$

其中  $e(t) = q(t) - q_d(t)$  是跟踪误差向量。正如第3章所示,我们可以通过适当的非线性补偿,使得机器人的这类跟踪问题转化成为渐近稳定控制问题。

$$\tau = u + J(q)\dot{q}_d + f(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) \quad (5.35)$$

为此,基于动力学逆问题的解,考虑非线性补偿,将上式代入(5.31)式,得

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{e}} - f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{u} \quad (5.36)$$

对于该系统,首先进行坐标变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

其中,  $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}$ ,  $\boldsymbol{x}_2 = \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{e}$ 。显然,(5.34)式成立,当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0 \quad (5.37)$$

在新的坐标下,系统(5.36)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ J\dot{\boldsymbol{x}}_2 = -(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{f})\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{f})\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u} \end{cases} \quad (5.38)$$

因此,如果我们能够找到反馈控制器

$$\boldsymbol{u} = \alpha(t, \boldsymbol{x}) \quad (5.39)$$

使得闭环系统是渐近稳定的,那么该控制器就能满足设计要求(5.34)。

因为,  $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ ,  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  均是随时间而变化的函数,所以,系统(5.38)是非自主的。我们考虑如下形式的李雅普诺夫函数:

$$V(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}_2 \quad (5.40)$$

沿系统的状态轨迹,求其时间微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}_1^T \dot{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{x}_2 \\ &= \boldsymbol{x}_1^T \dot{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_2^T \{ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{f}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{u} \} + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_2^T \{ \boldsymbol{J} - 2\boldsymbol{f} \} \boldsymbol{x}_2 \\ &= -\boldsymbol{x}_1^T \dot{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_2^T \{ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{f}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{u} \} \end{aligned}$$

令反馈控制律为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \quad (5.41)$$

则由上式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}) &= -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 \\ &\leq -\left\| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{array} \right\|^2 < 0, \quad \forall \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}, t \geq 0\end{aligned}\quad (5.42)$$

又根据定义(5.40)及前述的惯性矩阵的有界性,容易验证,

$$m \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(t, \mathbf{x}) \leq M \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x}, t \geq 0 \quad (5.43)$$

其中,

$$m = \min \left\{ \frac{1}{2}, \lambda_m \right\}, \quad M = \max \left\{ \frac{1}{2}, \lambda_M \right\}$$

故根据定理 4.2.6 及(5.42)和(5.43)式,由(5.38)式和反馈律(5.41)构成的闭环系统是全局渐近稳定的。

将坐标变换代入(5.41)式的原坐标下的控制率

$$u = -J\dot{e} - f\dot{e} - \dot{e} - e \quad (5.44)$$

因此,将上式代入(5.35)式得机器人的轨迹跟踪控制器。控制系统的结构如图 5.4 所示。在上述设计过程中,机器人的物理特性(1)~(3)起到了很重要的作用。(5.40)式所定义的正定函数能够成为该系统的李雅普诺夫函数,正是因为  $J$  和  $f$  满足这些条件。

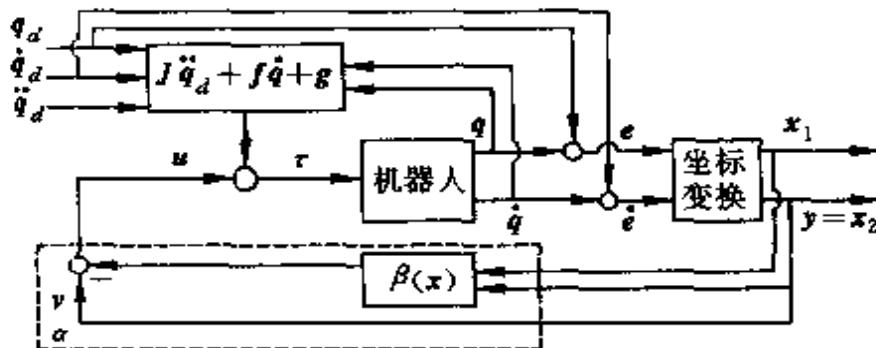


图 5.4 机器人闭环控制系统框图

实际上,上述设计过程还可以从无源性和渐近稳定性关系解释,而李雅普诺夫函数(5.40)正是存储函数。为了说明这一点,

对于系统(5.38), 定义输出信号为

$$y = x_2 \quad (5.45)$$

并记(5.41)式的控制律为

$$u = \beta(x) + v \quad (5.46)$$

式中,

$$\begin{aligned}\beta(x) &= -J(x_2 - x_1) - f x_1 - x_1 \\ v &= -y\end{aligned}$$

则与(5.42)式的证明相同, 可以验证, 沿由系统(5.38)和控制律(5.46)构成的闭环系统的轨迹, 有

$$\dot{V}(t, x) = -x_1^T x_1 + y^T v \leqslant y^T v \quad \forall v$$

成立。这表明由输入  $v$  至输出  $y$  的闭环系统是无源的。因此, 根据无源性和渐近稳定性的关系, 令  $v = \varphi(y) = -y$  所得的闭环系统是渐近稳定的。

## 5.4 李雅普诺夫函数的递推设计

本章 5.2 节的例题和 5.3 节所讨论的系统的结构特征是两个子系统通过积分环节的串联连接。因此, 所对应的存储函数或李雅普诺夫函数, 都是以第一个子系统的李雅普诺夫函数为基础, 再加上第二个子系统的状态变量的二次项所构成的。这种设计李雅普诺夫函数的思路, 实际上可以推广到更为一般的通过积分环节串联连接的非线性系统, 并称为 Backstepping 或李雅普诺夫递推设计方法。本节简要介绍其基本设计思想, 详细可参见文献[20]。

考察如下非线性串联系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + \phi(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (5.47)$$

其中,  $f(\mathbf{0}) = 0$ 。假设该系统满足如下条件:

(1)  $x_1 = \mathbf{0}$  是子系统  $\dot{x}_1 = f(x_1)$  的渐近稳定的平衡点, 即存在

正定函数  $W(x_1)$  使得

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} f(x_1) < 0, \quad \forall x_1 \neq 0$$

(2) 子系统之间的耦合项满足  $\phi(x_1, 0) = 0$ , 即存在适当的函数矩阵  $\phi$  可以表示为

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2)x_2$$

此时, 基于该函数  $W$  构造如下正定函数:

$$V(x) = W(x_1) + \frac{1}{2}x_2^T x_2 \quad (5.48)$$

则可以通过选择适当的反馈控制律  $u = \alpha(t, x)$  使其成为闭环系统的李雅普诺夫函数。

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial W}{\partial x_1} \dot{x}_1 + x_2^T \dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial W}{\partial x_1} f(x_1) + \frac{\partial W}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2)x_2 + x_2^T u \\ &= \frac{\partial W}{\partial x_1} f(x_1) + x_2 \left\{ \phi^T(x_1, x_2) \frac{\partial^T W}{\partial x_1} + u \right\} \end{aligned}$$

式中  $\frac{\partial^T W}{\partial x_1} = \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} \right]^T$ 。因此, 根据条件(1)可知, 令反馈控制律

$$u = -\phi^T(x_1, x_2) \frac{\partial^T W}{\partial x_1} - \epsilon x_2 \quad (5.49)$$

则对于闭环系统

$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0, \quad \forall x_1 \neq 0, \forall x_2 \neq 0$$

成立。故由李雅普诺夫理论可知  $x_1 = 0, x_2 = 0$  是该闭环系统的渐近稳定的平衡点。而且当  $W$  是径向无界的话, 由定义可知  $V$  也是径向无界的, 此时系统则是全局渐近稳定的。

系统(5.47)的结构如图 5.5 所示。该系统是两个子系统串联连接的。条件(1)表明被驱动的子系统当驱动输入  $x_2$  等于零时是渐近稳定的, 且此时耦合项为零。而子系统  $x_2$  则通过积分器驱动

子系统  $x_1$ 。实际上,这两个结构特征是进行上述递推设计的基本条件。

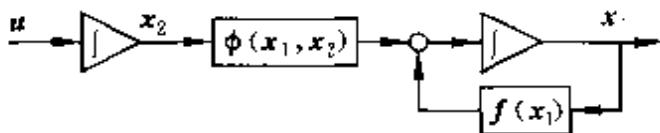


图 5.5 串联系统

如果被驱动子系统不是渐近稳定的话,可以先视  $x_2$  为  $x_1$  子系统的控制输入,并通过适当选取  $x_2 = \alpha_1(x_1)$  镇定被驱动子系统,然后通过实际控制输入  $u$  使  $x_2$  趋近  $\alpha_1(x_1)$  从而达到使整个系统稳定的目的。这个设计过程被称为 Backstepping 法,可以从坐标变换的观点加以解释。

现在我们用如下假设条件来代替前述条件(1)。

(3) 子系统的平衡点  $x_1 = 0$  是可镇定的,即存在

$$x_2 = \alpha_1(x_1), \quad \alpha_1(0) = 0$$

使得  $x_1 = 0$  是系统  $\dot{x}_1 = f(x_1) + \phi(x_1, \alpha_1)$  的渐近稳定的平衡点,或等价地存在正定函数  $W(x_1)$ ,使得

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} \{f(x_1) + \phi(x_1, \alpha_1(x_1))\} < 0, \quad \forall x_1 \neq 0$$

成立。

如果系统(5.47)满足条件(3),那么我们可以首先进行如下坐标变换:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - \alpha_1(x_1) \end{cases} \quad (5.50)$$

若  $\phi$  是充分平滑的,则可以定义适当的函数矩阵  $\eta(y_1, y_2)$  使得下式成立:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= \phi(y_1, y_2 + \alpha_1(y_1)) \\ &= \phi(y_1, \alpha_1(y_1)) + \eta(y_1, y_2)y_2 \end{aligned}$$

因此,在新的坐标下系统(5.47)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(y_1) + \phi(y_1, \alpha_1(y_1)) + \eta(y_1, y_2)y_2 \\ \dot{y}_2 = u + \mu(y_1, y_2) \end{cases} \quad (5.51)$$

其中

$$\mu(y_1, y_2) = \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \{f(y_1) + \phi(y_1, \alpha_1(y_1)) + \eta(y_1, y_2)y_2\}$$

令控制输入为

$$u = v - \mu(y_1, y_2) \quad (5.52)$$

式中  $v$  是新的控制输入信号,并记

$$\tilde{f}(y_1) = f(y_1) + \phi(y_1, \alpha_1(y_1))$$

则系统(5.51)可描述如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \tilde{f}(y_1) + \eta(y_1, y_2)y_2 \\ \dot{y}_2 = v \end{cases} \quad (5.53)$$

由于坐标变换(5.50)是正则的,所以系统(5.47)的镇定问题完全等价于系统(5.53)的镇定问题。而条件(3)意味着正定函数  $W$  满足

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} \tilde{f}(y_1) < 0, \quad \forall y_1 \neq 0$$

所以,考察(5.53)式可知,该系统的结构满足前述条件(1)和(2),故可以运用上述的李雅普诺夫递推设计方法设计系统(5.53)的反馈镇定控制器

$$v = \alpha_2(y_1, y_2)$$

将其代入(5.52)得系统(5.47)的原坐标下镇定控制器如下:

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x_1, x_2) \\ &= \alpha_2(y_1, y_2) - \mu(y_1, y_2) \\ &= \alpha_2(x_1, x_2 - \alpha_1(x_1)) - \mu(x_1, x_2 - \alpha_1(x_1)) \end{aligned} \quad (5.54)$$

**例题 5.4** 给定系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (5.55)$$

试设计状态反馈镇定控制器。

显然该系统具有如同(5.47)的串联结构,且  $f(x_1)=0$ ,即被驱动的子系统不满足条件(1)。但是,观察该系统可知,令

$$x_2 = \alpha_1(x_1) = -x_1$$

则  $x_1$  子系统是渐近稳定的,即正定函数

$$W(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

沿子系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 \alpha_1(x_1) = -x_1^3$$

轨迹的微分满足

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(-x_1^3) = -x_1^4 < 0$$

因此,进行坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + x_1 \end{cases}$$

系统(5.55)可以描述如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1^2(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = y_1^2(y_2 - y_1) + u \end{cases}$$

令,  $u = -y_1^2(y_2 - y_1) + v$ , 整理得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1^3 + y_1^2 y_2 \\ \dot{y}_2 = v \end{cases} \quad (5.56)$$

故按照递推设计方法,令李雅普诺夫函数为

$$V(y_1, y_2) = W(y_1) + \frac{1}{2}y_2^2$$

并求其微分,得

$$\dot{V} = y_1 \{-y_1^3 + y_1^2 y_2\} + y_2 v$$

$$= -y_1^4 + y_2\{v + y_1^3\}$$

取状态反馈为

$$v = -y_1^3 - y_2 \quad (5.57)$$

则有

$$\dot{V} = -y_1^4 - y_2^2 < 0$$

即(5.57)式是系统(5.56)的反馈镇定控制器。由此,得原系统(5.55)的状态反馈镇定控制器为

$$\begin{aligned} u &= -y_1^2(y_2 - y_1) - y_1^3 - y_2 \\ &= -y_1^2 y_2 - y_2 \\ &= -(x_2^2 + 1)(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (5.58)$$

以上介绍的递推设计方法实际上还可以推广到更多个子系统串联连接的情况。为叙述简便起见,下面以三个一维系统串联连接的情况为例,说明其基本思路。考察具有如下结构的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + u \end{cases} \quad (5.59)$$

式中  $u$  为控制输入,  $f_1, f_2, f_3$  分别为满足  $f_1(0)=0, f_2(0,0)=0, f_3(0,0,0)=0$  的充分可微的函数。

设存在正定函数  $W(x_1)$  使得

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} f_1(x_1) < 0, \quad \forall x_1 \neq 0 \quad (5.60)$$

成立。如果我们只考虑前两个由  $x_1, x_2$  构成的串联系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + x_3 \end{cases} \quad (5.61)$$

并暂且把  $x_3$  看做控制输入,那么这个假设意味着该串联系统满足条件(1)和条件(2)。因此,可以应用上述的递推设计方法,令

$$V(x_1, x_2) = W(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (5.62)$$

并求其微分,得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial W}{\partial x_1} \{f_1(x_1) + x_2\} + x_2 \dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial W}{\partial x_1} f_1 + x_2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2) + x_3 \right\}\end{aligned}$$

故,取状态反馈律

$$x_3 = \alpha_1(x_1, x_2) = -\frac{\partial W}{\partial x_1} - f_2(x_1, x_2) - x_2 \quad (5.63)$$

则根据(5.61)式有

$$\dot{V} = \frac{\partial W}{\partial x_1} f_1(x_1) - x_2^2 < 0$$

这表明(5.62)式定义的正定函数  $V$  是闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \alpha_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.64)$$

的李雅普诺夫函数。记

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) + x_2 \\ f_2(x_1, x_2) + \alpha_1(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

根据上述讨论,得

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \quad (5.65)$$

为了构造原系统的李雅普诺夫函数,对系统(5.59)进行如下的坐标变换:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 - \alpha_1(x_1, x_2) \end{cases}$$

并用  $\tilde{\mathbf{x}}$  表示前两个状态变量,那么系统(5.61)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}y_3 \\ \dot{y}_3 = \tilde{f}_3(\tilde{x}, y_3) + u \end{cases} \quad (5.66)$$

式中

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{f}_3(\tilde{x}, y_3) = f_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial a_1}{\partial x}(\tilde{f} + \tilde{g}y_3)$$

再令

$$u = -\tilde{f}_3(\tilde{x}, y_3) + v \quad (5.67)$$

则系统(5.66)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}y_3 \\ \dot{y}_3 = v \end{cases} \quad (5.68)$$

由(5.65)式可知,上述系统满足条件(1)和条件(2),因此我们可以再次应用递推设计方法,构造系统(5.68)的李雅普诺夫函数如下:

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, y_3) &= V(\tilde{x}) + \frac{1}{2}y_3^2 \\ &= W(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

基于该李雅普诺夫函数,并根据(5.49)式,得反馈稳定控制律

$$v = -\tilde{g}^T \left( \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} \right)^T - \epsilon y_3 = -x_2 - \epsilon x_3 \quad (5.70)$$

其中  $\epsilon > 0$  为任意给定正数。

综上所述,我们通过重复应用递推设计方法,得到了原系统的李亚普诺夫函数(5.69)和反馈稳定控制器

$$u = -\tilde{f}_3(\tilde{x}, y_3) - x_2 - \epsilon x_3 \quad (5.71)$$

实际上,这种递推设计方法同样适用于更多个子系统串联而成的系统。但是,各子系统的结构必须满足如(5.59)式所示的条件,即函数  $f_i (i=1, 2, \dots, n)$  必须只和前  $i$  个状态变量相关。系统

结构的这种特征被称为严格反馈型结构(strict feedback form)，是李雅普诺夫递推设计的必要条件。

本章及下一章将进一步推广这种递推设计思想，解决机器人系统的鲁棒跟踪控制问题。更一般的鲁棒控制系统的递推设计可参阅文献[21]~[27]。

## 5.5 机器人的鲁棒干扰抑制控制器设计

考察由下式描述的机器人系统：

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \Delta f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d} \quad (5.72)$$

其中， $\boldsymbol{d}$  表示外界干扰信号，未知的非线性函数向量  $\Delta f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  表示模型误差，其他记号的意义与 5.3 节相同。

设系统的期望轨迹由  $\boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d$  以及  $\ddot{\boldsymbol{q}}_d$  描述，而跟踪误差定义为  $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d$ 。对于该系统，首先进行如(5.35)式所示的非线性补偿，可得误差动态方程如下：

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{e}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{e}} + \Delta f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \quad (5.73)$$

为了描述系统的鲁棒干扰抑制能力，定义如下评价信号：

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} p_1 \boldsymbol{e} \\ p_2 \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

其中， $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$  为给定的加权系数。本节所讨论的控制器设计问题可以描述如下。

**鲁棒干扰抑制问题** 给定正数  $\gamma > 0$  及加权系数  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ ，求反馈控制器

$$\boldsymbol{u} = \alpha(\boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{e}}) \quad (5.75)$$

使得  $\boldsymbol{e} = \dot{\boldsymbol{e}} = \mathbf{0}$  是闭环系统(5.73)和(5.75)的鲁棒渐近稳定的平衡点，且对于任意的干扰信号  $\boldsymbol{d}$  下式成立：

$$\int_0^T \| \boldsymbol{z}(t) \|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \| \boldsymbol{d}(t) \|^2 dt, \quad \forall \Delta f \quad (5.76)$$

其中,  $T > 0$  是给定常数。

首先考虑没有模型误差的情况。即, 令  $\Delta f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ 。此时, 对系统(5.73)进行坐标变换

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{e} \\ \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \end{cases}$$

则(5.73)式可以用状态方程表示如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \\ J\dot{\mathbf{x}}_2 = -(\mathbf{J} - \mathbf{f})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{J} - \mathbf{f})\mathbf{x}_2 + \mathbf{u} + \mathbf{d} \end{cases} \quad (5.77)$$

根据第4章的分析可知, 如果我们能够找到适当的能量存储函数  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  和反馈控制律(5.75)使得耗散不等式

$$\dot{V} \leq \{\gamma^2 \|\mathbf{d}(t)\|^2 - \|\mathbf{z}(t)\|^2\} \quad (5.78)$$

成立, 那么该闭环系统满足(5.76)式。其实, 对于任意给定的  $T > 0$ , 令  $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}$ , 并求上式两端的积分, 得

$$0 \leq V(T) \leq \int_0^T \{\gamma^2 \|\mathbf{d}(t)\|^2 - \|\mathbf{z}(t)\|^2\} dt$$

可以证明, 如果适当选择反馈控制律, (5.40)式定义的能量函数就可以成为满足上述耗散不等式的存储函数。

**定理 5.5.1** 对于系统(5.77), 令反馈控制律如下:

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \quad (5.79)$$

$$\alpha(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + 2p_2^2\mathbf{x}_1 - k\mathbf{x}_2$$

其中,  $\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1$ ,  $k > 0$  为增益系数。对于给定的  $\gamma > 0$ , 如果如下条件成立:

$$(1) p_1^2 + p_2^2 \leq 1 - \epsilon_1$$

$$(2) k \geq \frac{1}{4\gamma^2} + 2p_2^2 + \epsilon_2$$

其中  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$  是充分小的正数。那么, 对该闭环系统, 由(5.40)式定义的正定函数  $V$  满足耗散不等式(5.78)。

**证明 定义**

$$H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{d}, \mathbf{z}, t) = \dot{V} + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 \quad (5.80)$$

其中  $\dot{V}$  表示  $V$  沿系统(5.77)的轨迹对时间的微分。与 5.3 节中的证明相同,根据机器人的物理特征容易验证,

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T \{\mathbf{J}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{f}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 + \mathbf{u} + \mathbf{d}\}$$

其中  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T]$ 。将上式和(5.74)代入(5.80)并配平方,得

$$\begin{aligned} H &= -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T \{\mathbf{u} + \mathbf{d} - \beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\} + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 \\ &= -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T \{\mathbf{u} + \mathbf{d} - \beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\} \\ &\quad + p_1^2 \|\mathbf{x}_1\|^2 + p_2^2 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 \\ &= -(1 - p_1^2 - p_2^2) \|\mathbf{x}_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} \mathbf{x}_2 - \gamma \mathbf{d} \right\|^2 \\ &\quad + \mathbf{x}_2^T \left\{ \mathbf{u} - \beta - 2p_2^2 \mathbf{x}_1 + \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) \mathbf{x}_2 \right\} \end{aligned}$$

因此,将(5.79)式代入上式,并利用定理的条件(1)和(2),得

$$\begin{aligned} H &= -(1 - p_1^2 - p_2^2) \|\mathbf{x}_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} \mathbf{x}_2 - \gamma \mathbf{d} \right\|^2 \\ &\quad + \mathbf{x}_2^T \left\{ -k \mathbf{x}_2 + \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) \mathbf{x}_2 \right\} \\ &\leq -(1 - p_1^2 - p_2^2) \|\mathbf{x}_1\|^2 - \left\{ k - \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) \right\} \|\mathbf{x}_2\|^2 \\ &\leq -\epsilon_1 \|\mathbf{x}_1\|^2 - \epsilon_2 \|\mathbf{x}_2\|^2 \\ &\leq -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\|^2, \quad \forall \mathbf{x}_1, \forall \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

其中,  $\epsilon$  为充分小正数。故对于任意  $\mathbf{d}$ , 有

$$H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{d}, \mathbf{z}, t) < 0, \quad \forall \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0} \quad (5.81)$$

△△△

上述定理只证明了闭环系统满足  $L_2$  增益条件。为了证明状态反馈控制律(5.79)是干扰抑制问题的解,我们还必须证明该闭环系统是渐近稳定的,即当  $\mathbf{d}=0$  时,对任意初始状态,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0 \quad (5.82)$$

实际上,考虑(5.81)式  $d=0$  的情况可知,

$$\dot{V}(t, x) \leq -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|$$

并且根据定义及 5.3 节所述的惯性矩阵的有界性,容易验证,存在常数  $m > 0, M > 0$ ,使得

$$m \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq M \|x\|^2, \forall x, t \geq 0$$

成立。所以根据李雅普诺夫稳定性理论,稳定性得证。即,对任意初始条件,  $x(t) \rightarrow 0$ 。由于坐标变换是正则的,故(5.82)式成立。

下面就来讨论模型误差不等于零的情况。假设模型误差可以表示如下:

$$\Delta f(q, \dot{q}) = E(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) \delta(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) \quad (5.83)$$

式中,  $E$  为已知函数矩阵,  $\delta$  为未知函数向量且关于  $e, \dot{e}$  是有界的。假设  $\delta$  满足

$$\|\delta(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e})\| \leq \left\| \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \right\|, \quad \forall \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

应该指出,这个假设并不具有一般性。因为,(5.84)式意味着当  $e=0, \dot{e}=0$  时,必须满足  $\delta=0$ 。但是,一般模型误差只与机器人的状态有关,而与跟踪误差无关。第 6 章将继续讨论不满足(5.84)式的情况。

如果描述不确定性的函数向量  $\delta$  的增益有界,但不满足上式,我们可以通过适当的函数变换使其满足上式。设  $\Delta f = E' \delta'$ ,且存在正定函数  $\rho(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}_d)$  使得

$$\frac{\|\delta'(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e})\|}{\left\| \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \right\|} \leq \rho(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}), \quad \forall \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \neq 0$$

成立。令

$$E(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) = \rho E', \delta(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) = \frac{1}{\rho} \delta$$

显然,  $\Delta f$  可以表示如(5.83), 且  $\delta$  满足(5.84)。

当  $\Delta f \neq 0$  时, 与(5.77)式相对应, 跟踪误差的动态方程可以用上述的坐标  $x_1, x_2$  表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ J\dot{x}_2 = -(J-f)x_1 + (J-f)x_2 - E\delta + u + d \end{cases} \quad (5.85)$$

可以证明, 通过修改控制器(5.79), 可以使(5.40)式定义的函数  $V$  成为满足耗散不等式的存储函数。

**定理 5.5.2** 考察系统(5.85)。设未知函数  $\delta$  满足(5.84)式。令状态反馈控制律如下:

$$u = \alpha(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) + \frac{1}{\lambda} x_1 - \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} E E^T \right) x_2 \quad (5.86)$$

其中, 增益函数向量  $\alpha$  如定理 5.5.1 给定,  $\lambda > 0$  为常数。对于给定的  $\gamma > 0$ , 如果定理 5.5.1 的条件(1)和条件(2)成立, 且  $\lambda > 0$  满足

$$(3) \quad \lambda > \frac{1}{\varepsilon_1}$$

则对于满足(5.84)式的任意函数  $\delta$ , 当  $d = 0$  时该闭环系统的原点是渐近稳定的, 并且(5.76)式成立。

**证明** 与定理 5.5.1 的证明相同, 我们只需证明对任意  $\delta$ , (5.40)式定义的函数  $V$  满足耗散不等式。与(5.81)式的推导类似, 可以证明, 对闭环系统下式成立

$$\begin{aligned} H = & - (1 - p_1^2 - p_2^2) \|x_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} x_2 - \gamma d \right\|^2 \\ & - x_2^T E \delta + x_2^T \left\{ u - \beta - 2p_2^2 x_1 + \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) x_2 \right\} \end{aligned} \quad (5.87)$$

因为, 对于任意正数  $\lambda$ , 不难证明

$$- x_2^T E \delta \leq \frac{\lambda}{2} x_2^T E E^T x_2 + \frac{1}{2\lambda} \delta^T \delta$$

所以,根据(5.84)式,对任意  $\delta$  有

$$-\mathbf{x}_2^T \mathbf{E} \delta \leq \frac{\lambda}{2} \mathbf{x}_2^T \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2\lambda} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ -\dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \right\|^2$$

成立。因此,将  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_1$ ,  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  代入上式,得

$$-\mathbf{x}_2^T \mathbf{E} \delta \leq \frac{\lambda}{2} \mathbf{x}_2^T \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{x}_2 + \frac{1}{\lambda} \|\mathbf{x}_1\|^2 - \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2\lambda} \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2$$

现将上式代入(5.87),得

$$\begin{aligned} H &\leq - \left( 1 - p_1^2 - p_2^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \|\mathbf{x}_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} \mathbf{x}_2 - \gamma \mathbf{d} \right\|^2 \\ &\quad + \mathbf{x}_2^T \left\{ \mathbf{u} - \beta - \left( 2p_2^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{x}_1 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^T \right) \mathbf{x}_2 \right\} \end{aligned}$$

将反馈控制律(5.86)代入上式,得

$$\begin{aligned} H &\leq - \left( 1 - p_1^2 - p_2^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \|\mathbf{x}_1\|^2 - \left\{ k - \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) \right\} \|\mathbf{x}_2\|^T \\ &\leq -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\|^2, \quad \forall \mathbf{x}_1, \forall \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

其中  $\epsilon > 0$  为充分小的常数。故对于任意  $\mathbf{d}$ ,

$$H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{d}, \mathbf{z}, t) < 0, \quad \forall \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$$

即,对于任意不确定性  $\delta$ ,  $V$  满足耗散不等式。

与定理 5.5.1 同理,可以证明该闭环系统的鲁棒稳定性。

△△△

定理 5.5.2 给出的状态反馈控制器正是本节鲁棒干扰抑制控制问题的解。与 5.3 节比较可知,当机器人的动态模型含有不确定性且存在外界干扰时,我们可以用与 5.3 节相同的李雅普诺夫函数去构造控制器。但是,为了获得理想的干扰抑制能力和鲁棒性能,我们必须增大控制器的反馈增益。

本节所给出的控制系统框图如图 5.6。

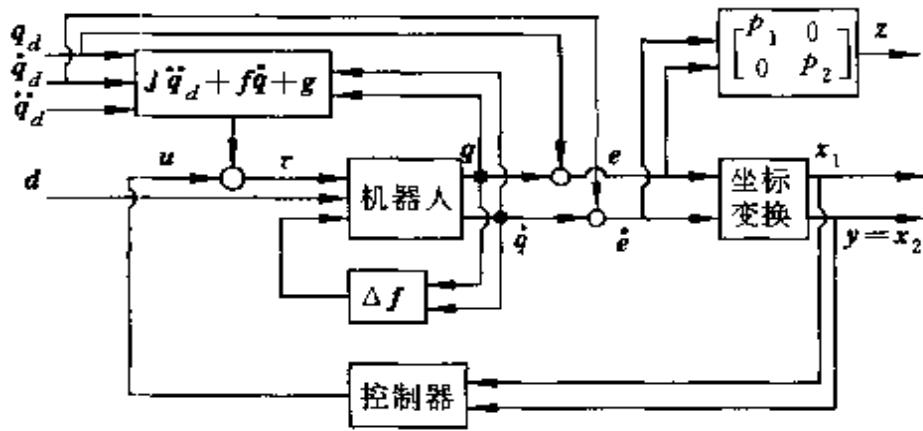


图 5.6 鲁棒控制系统框图

## 5.6 具有自适应功能的鲁棒控制器设计

在前一节的讨论中, 我们假设系统的不确定性可以通过机器人动态方程中的未知非线性函数来描述。这种描述方法可以描述诸如未知的摩擦特性以及观测误差等与机器人的状态  $q, \dot{q}$  相关的不确定性, 但是, 并没能有效地利用设计者对被控对象结构的信息。其实像机器人这种机械系统, 一般来说设计者对其结构比较清楚, 不确定性更多地体现在设计参数的不精确性。这种不确定性体现在机器人的动态模型上就是  $J(q)$ ,  $f(q, \dot{q})$  和  $g(q)$  的系数出现摄动。即

$$\begin{aligned} J(q) &= J_0(q) + \Delta J(q) \\ f(q, \dot{q}) &= f_0(q, \dot{q}) + \Delta f(q, \dot{q}) \\ g(q) &= g_0(q) + \Delta g(q) \end{aligned} \quad (5.88)$$

其中,  $J_0, f_0, g_0$  表示参数为标称值时的函数矩阵或向量, 而  $\Delta J, \Delta f, \Delta g$  则表示参数误差所对应的摄动函数,  $J, f, g$  表示参数的真值对应的函数。

如同 5.3 节所示, 如果我们将机器人的参数表示成一个向量

$\theta$ , 并用  $\theta_0$  和  $\theta_e$  分别表示其标称值和误差, 即

$$\theta = \theta_0 + \theta_e \quad (5.89)$$

那么根据 5.3 节介绍的机器人的物理特征, 有

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + g(\boldsymbol{q}) &= \Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{\boldsymbol{q}}_d)\theta \\ J_0(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + f_0(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + g_0(\boldsymbol{q}) &= \Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{\boldsymbol{q}}_d)\theta_0 \end{aligned} \quad (5.90)$$

将(5.89)式代入上式,

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + g(\boldsymbol{q}) \\ = J_0(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + f_0(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + g_0(\boldsymbol{q}) + \Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{\boldsymbol{q}}_d)\theta_e \end{aligned} \quad (5.91)$$

本节介绍一种鲁棒控制器的设计方法, 它在线估计参数误差  $\theta_e$ , 基于其估计值进行鲁棒控制。

考察由(5.72)式描述的机器人系统, 并假设  $J(\boldsymbol{q})$ ,  $f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  和  $g(\boldsymbol{q})$  的参数存在如(5.88)式所示的不确定性。基于参数的标称值, 首先进行如下基于逆向运动学的补偿:

$$\tau = u + J_0(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + f_c(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + g_0(\boldsymbol{q}) \quad (5.92)$$

则根据(5.91)式, 跟踪误差方程可以描述如下:

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{e}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{e}} + \Phi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{\boldsymbol{q}}_d)\theta_e + \Delta f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = u + d \quad (5.93)$$

与前一节讨论类似, 通过坐标变换  $x_1 = \boldsymbol{e}$ ,  $x_2 = \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{e}$ , 上述误差系统可以通过如下状态方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ J\dot{x}_2 = -(J - f)x_1 + (J - f)x_2 - E\delta - \Phi\theta_e + u + d \end{cases} \quad (5.94)$$

下面设计具有结构

$$\begin{cases} u = c(x_1, x_2, \boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d, \theta_e) \\ \dot{\theta}_e = \psi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.95)$$

的反馈控制器, 使得闭环系统满足鲁棒干扰抑制性能要求, 即  $e =$

$\dot{e}=0$  是该闭环系统的鲁棒渐近稳定的平衡点,且对于任意的干扰信号  $d$ , (5.76)式成立。(5.95)式中,  $\hat{\theta}_e$  表示参数误差  $\theta_e$  的估计值。

按照一般自适应控制系统的设计方法,首先假设参数误差  $\theta_e$  的真值为已知,根据真值设计鲁棒控制器,然后再用其估计值代替真值,并给出估计参数的修正律,使闭环系统满足设计要求。但是,由于被控对象(5.94)中  $J, f$  仍然含有未知系数,所以在设计鲁棒控制器时必须考虑对这种系数不确定性的鲁棒性。

其实,根据机器人的物理特征,可以通过定义适当的  $\Phi_e(q, \dot{q}, e, \dot{e})$  使得

$$J(q)\dot{e} + f(q, \dot{q})e = \Phi_e(q, \dot{q}, e, \dot{e})\theta \quad (5.96)$$

成立。因此,(5.94)式中的第1,2项就可以表示为

$$\begin{aligned} (J - f)(x_2 - x_1) &= J\dot{e} + fe - fx_2 \\ &= \Phi_e\theta - fx_2 \end{aligned} \quad (5.97)$$

将(5.89)式代入上式,得

$$(J - f)(x_2 - x_1) = \Phi_e\theta_0 + \Phi_e\theta_e - fx_2 \quad (5.98)$$

故系统(5.94)式可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ J\dot{x}_2 = \Phi_e(q, \dot{q}, e, \dot{e})\theta_0 - fx_2 - E\delta - \Phi_e\theta_e + u + d \end{cases} \quad (5.99)$$

其中,

$$\Phi_e = \Phi(q, \dot{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) - \Phi_e(q, \dot{q}, e, \dot{e})$$

与定理 5.5.2 类似,当参数向量  $\theta_e$  为已知时,可以求得鲁棒干扰抑制控制器如下。

**定理 5.6.1** 对于控制系统(5.99),令反馈控制律如下:

$$\begin{aligned} u &= \Phi_e\theta_e + c_0(x_1, x_2, q_d, \dot{q}_d) - \Phi_e(q, \dot{q}, e, \dot{e})\theta_0 \\ c_0(x_1, x_2, q_d, \dot{q}_d) &= \left(2p_2^2 + \frac{1}{\lambda} - 1\right)x_1 + \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}EE^\top - k\right)x_2 \end{aligned} \quad (5.100)$$

其中,  $k > 0$  为增益系数。对于给定的  $\gamma > 0$ , 如果如下条件

- (1)  $p_1^2 + p_2^2 \leq 1 - \varepsilon_1$
- (2)  $k \geq \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 + \varepsilon_2$
- (3)  $\lambda > \frac{1}{\varepsilon_1}$

成立, 则对于任意函数  $\delta$ , 当  $d = 0$  时该闭环系统的原点是渐近稳定的, 并且(5.76)式成立。其中  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  是充分小的正数。

**证明** 令存储函数  $V(t, x_1, x_2)$  给定如(5.40)式。沿系统(5.99)的轨迹, 考察(5.80)式定义的  $H$ , 利用 5.3 节介绍的斜对称性, 得

$$\begin{aligned} H &= -x_1^T x_1 + x_2^T \{u + d + x_1 - E\delta - \Phi_e \theta_e + \Phi_g \theta_0 - f x_2\} \\ &\quad + \|z\|^2 - \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} x_2^T J(q) x_2 \\ &= -x_1^T x_1 + x_2^T \{u + d + x_1 - \Phi_e \theta_e + \Phi_g \theta_0\} - x_2^T E\delta \\ &\quad + p_1^2 \|x_1\|^2 + p_2^2 \|x_2 - x_1\|^2 - \gamma^2 \|d\|^2 \end{aligned}$$

与(5.87)式的推导类似, 配平方得

$$\begin{aligned} H &= -(1 - p_1^2 - p_2^2) \|x_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} x_2 - \gamma d \right\|^2 \\ &\quad - x_2^T E\delta + x_2^T \{u + x_1 + \Phi_g \theta_0 - \Phi_e \theta_e - 2p_2^2 x_1 \\ &\quad + \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) x_2 \} \end{aligned} \quad (5.101)$$

同定理 5.5.2 的证明, 因为对于任意正数  $\lambda$ , 有

$$-x_2^T E\delta \leq \frac{\lambda}{2} x_2^T E E^T x_2 + \frac{1}{\lambda} \|x_1\| - \frac{1}{\lambda} x_2^T x_1 + \frac{1}{2\lambda} x_2^T x_2$$

将上式代入(5.101)式, 得

$$\begin{aligned} H &\leq -\left(1 - p_1^2 - p_2^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \|x_1\|^2 - \left\| \frac{1}{2\gamma} x_2 - \gamma d \right\|^2 \\ &\quad + x_2^T \left\{ u + \Phi_g \theta_0 - \Phi_e \theta_e - \left(2p_2^2 + \frac{1}{\lambda} - 1\right) x_1 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_1^2 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{E}\mathbf{E}^\top \right) \mathbf{x}_2 \Big\}$$

故,将反馈控制律(5.100)代入上式,得

$$\begin{aligned} H &\leq - \left( 1 - p_1^2 - p_2^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \| \mathbf{x}_1 \|^2 - \left\{ k - \left( \frac{1}{4\gamma^2} + p_2^2 \right) \right\} \| \mathbf{x}_2 \|^2 \\ &\leq -\epsilon \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{array} \right\|^2, \quad \forall \mathbf{x}_1, \forall \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (5.102)$$

$\epsilon > 0$  为充分小正数。  $\triangle\triangle\triangle$

上述定理给出的控制器,关于未知参数误差  $\theta_e$  是线性的,因此,当  $\theta_e$  未知时我们可以用其估计值代替,并在线修正其估计值使得闭环系统满足设计要求。这种具有自适应功能的鲁棒干扰抑制控制器可描述如下。

记参数估计误差为

$$\tilde{\theta}_e = \theta_e - \hat{\theta}_e,$$

由于我们假设参数为定常数,故有

$$\dot{\tilde{\theta}}_e = -\dot{\hat{\theta}}_e. \quad (5.103)$$

**定理 5.6.2** 给定  $\gamma > 0$ 。对于控制系统(5.99),给定自适应反馈控制律如下:

$$\begin{aligned} u &= \Phi_e \dot{\theta}_e + c_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \Phi_e \theta_0 \\ \dot{\hat{\theta}}_e &= -\Phi_e^\top (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (5.104)$$

其中,  $c$  为满足定理 5.6.1 的增益函数。对于任意函数  $\delta$ ,闭环系统满足如下性质:

(1) 当  $d = \mathbf{0}$  时,对于任意初始状态有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{0}$$

(2) 当  $d \neq \mathbf{0}$  时,对于零初始状态(5.76)式成立。

**证明** 由(5.99)和(5.104)式构成的闭环系统的动态特性可以描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ J\dot{x}_2 = -fx_2 - E\delta - \Phi_e \tilde{\theta}_e + c + d \\ \dot{\tilde{\theta}}_e = \Phi_e^T(q, \dot{q}, \ddot{q}_d, \ddot{q}_d, e, \dot{e})x_2 \end{cases} \quad (5.105)$$

为了证明该系统的鲁棒稳定性和干扰抑制性能, 定义存储函数如下:

$$\begin{aligned} U(t, x_1, x_2, \tilde{\theta}_e) &= V(t, x_1, x_2) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_e^T \tilde{\theta}_e \\ &= \frac{1}{2} x_1^T x_1 + \frac{1}{2} x_2^T J(q) x_2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_e^T \tilde{\theta}_e \end{aligned} \quad (5.106)$$

同理定义

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= U + \|z\|^2 - \gamma^2 \|d\| \\ &= V + \|z\|^2 - \gamma^2 \|d\| + \tilde{\theta}_e^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (5.107)$$

因此, 重复定理 5.6.1 的证明过程, 并代入(5.104)式给出的参数修正律, 不难验证,

$$\tilde{H} \leq -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|^2 - x_2^T \Phi_e \tilde{\theta}_e + \tilde{\theta}_e^T \tilde{\theta}_e = -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (5.108)$$

即, 对于任意  $\delta$ , 耗散不等式

$$\dot{U} \leq \gamma^2 \|d\| - \|z\|^2$$

对于任意干扰输入  $d$  成立, 故定理的命题(2)得证。

为了证明命题(1)的鲁棒渐近稳定性, 只需考察(5.108)式  $d = 0$  的情况。因为, 此时

$$\dot{U}(t, x_1, x_2, \tilde{\theta}_e) \leq -\epsilon \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \leq 0 \quad (5.109)$$

而且根据定义, 选取适当的常数  $\eta_m > 0, \eta_M > 0$  可以使得正定函数  $U$  满足

$$\eta_m \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bar{\theta}_e \end{vmatrix} \leq U(t, x, \dot{x}, \bar{\theta}_e) \leq \eta_M \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bar{\theta}_e \end{vmatrix}$$

所以,根据李雅普诺夫稳定性理论可知,对于任意  $\delta$  正定函数  $U$  是保证闭环系统稳定性的李雅普诺夫函数。且当  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$  时,  $U$  为严格负定。故由拉萨尔定理可知,定理的命题(1)成立。

△△△

应该注意,上述定理给出的自适应控制器并不能保证参数的估计值收敛于真值。上述证明中,拉萨尔定理只表明对于任意初始状态,闭环系统的状态  $x_1(t), x_2(t), \bar{\theta}_e(t)$  将进入  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , 且  $\bar{\theta}_e$  为有界的集合。这意味着参数误差的估计值不一定收敛于零。

控制系统的框图如图 5.7 所示。

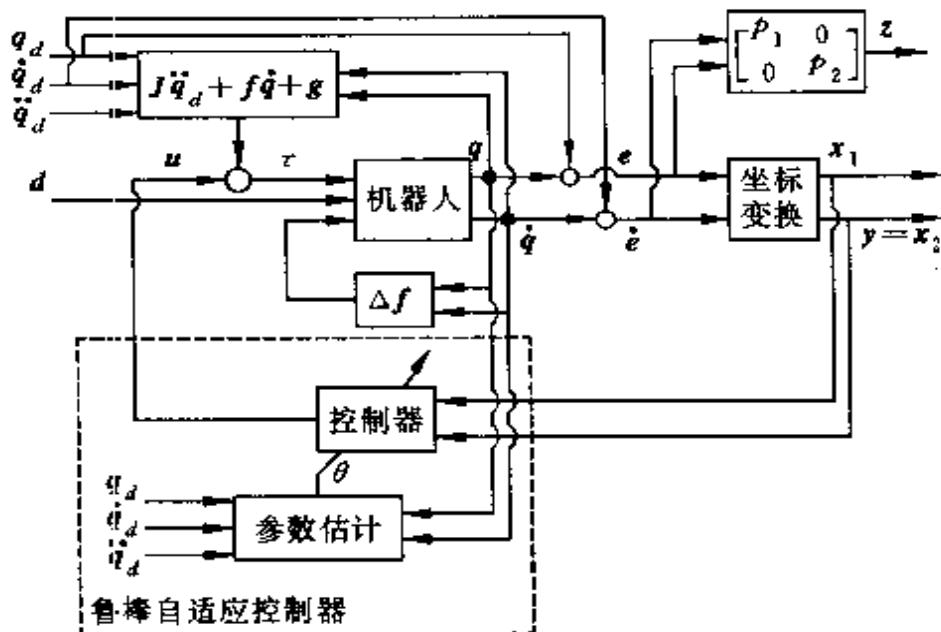


图 5.7 鲁棒自适应控制系统框图

## 第6章 机械臂的鲁棒动态控制

前面几章介绍了机器人鲁棒控制系统设计的理论基础。在实际应用中，简单套用这些基本理论的结果一般不会得到令人满意的效果，还必须在此基础上针对具体问题进行必要的再设计。在这个再设计过程中，不仅可以充分运用前面介绍的设计思想和技巧，而且还可以融合多种设计方法为一体。本章及后续几章将具体介绍几种机器人鲁棒控制系统的设计方法及其仿真实验结果。

### 6.1 二自由度机械臂的动态控制问题

二自由度机械臂的动态控制是多自由度机械臂系统控制的基础。本章以图3.9所示的二自由度机械臂为例，讨论三种鲁棒控制方案。如3.3节所示，如果假设机械臂的运动平面与水平面平行，那么机器人的运动方程中的重力项就可以省略。即，二自由度机械臂的运动将由下式描述：

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\theta_i(i=1,2)$ 是各关节的位置坐标， $\tau_i(i=1,2)$ 是各关节的驱动力矩。函数矩阵 $J(\boldsymbol{q}), f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 给定如下：

$$J(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + 2m_2r_2l_1\cos\theta_2 & J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2 \\ J_2 + m_2r_2l_1\cos\theta_2 & J_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2m_2r_2l_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & -m_2r_2l_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ m_2r_2l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

其系数与机械臂物理参数的关系参见 3.3 节。

从机械臂运动的动态控制而言,主要有如下两类基本的控制问题:

(1) 位置控制 设机械臂的期望位置由  $\mathbf{r}^T = [\theta_{1d} \quad \theta_{2d}]$  给定,其中  $\theta_{id}$  ( $i=1,2$ ) 表示各关节的位置指令。位置控制问题要求设计反馈控制器,使得机械臂的位置渐近地趋于期望位置,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{r} \quad (6.4)$$

且其动态响应过程尽可能逼近  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ ,而  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$  是如下参考模型的输出。

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = f_M(\dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{q}_d, \mathbf{r}) \quad (6.5)$$

(2) 轨迹跟踪控制 设机械臂的期望轨迹由时间函数  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ ,  $\mathbf{q}_d(t)$  描述。轨迹跟踪控制问题要求设计反馈控制器,使得机械臂的运动渐近地趋于期望轨迹,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)\} = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow \infty} \{\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t)\} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

如果有外界干扰信号作用时,在设计上述控制系统时还应该考虑系统对干扰的抑制能力。为了评价这种干扰抑制性能,我们可以定义适当的评价信号  $z$  如 4.3 节所示,并通过抑制  $L_2$  增益的方法来尽可能地减小评价信号。这就是前面介绍的具有干扰抑制功能的稳定或跟踪控制问题。

如果用于设计的数学模型具有不确定性,那么在设计时还必须考虑上述控制性能对不确定性的鲁棒性。这正是本书的主题。

最后还应该指出,对于那些时间常数较小的微小型机械手,还应该考虑驱动回路动特性对机械手运动的影响。如果机械手是由

直流电机来驱动的话,如3.5节所述,机械手动态方程中的驱动力矩将与电机的电枢电流成正比,即

$$\tau = K_M I_a = \begin{bmatrix} K_{m1} & 0 \\ 0 & K_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

其中, $i_n(n=1,2)$ 是各关节驱动电机的电枢电流。其动态过程由(3.83)式描述,即

$$L\ddot{I}_a + RI_a + K_a \dot{q} = V \quad (6.8)$$

而 $V^T = [V_1 \ V_2]$ 是电枢电压,此时就是系统的控制输入。被控对象则是(6.1)和(6.8)串联连接的系统。

## 6.2 鲁棒模型跟踪控制

本节介绍具有干扰抑制性能的鲁棒模型跟踪控制器的设计方案。其理论基础是第4章鲁棒 $L_2$ 设计理论的进一步推广。

考察由下式描述的二自由度机械臂:

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} = \tau - D\dot{\boldsymbol{q}} \quad (6.9)$$

这里我们考虑了各关节驱动轴的滑动摩擦, $D$ 表示摩擦系数阵。

假设机械臂的模型参数具有不确定性,且分别用 $J_0, f_0, D_0$ 表示参数取标称值时所对应的函数阵。那么,根据5.3节的线性特性,有

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + D\dot{\boldsymbol{q}} \\ = J_0\ddot{\boldsymbol{q}} + f_0\dot{\boldsymbol{q}} + D_0\dot{\boldsymbol{q}} + \Delta J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \Delta C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

式中, $\Delta J, \Delta C$ 表示未知的参数误差所对应的函数阵,即

$$J = J_0 + \Delta J, \quad C = f_0 + D_0, \quad C_0 = C_0 + \Delta C, \quad C_0 = f_0 + D_0$$

设参考模型由如下二阶线性微分方程给出:

$$\ddot{q}_d + k_2 q_d + k_1 q_d = r \quad (6.11)$$

其中, $k_1 > 0, k_2 > 0$ 是给定常数, $r$ 是位置指令信号。

本章的目的是设计反馈控制器使得对于一定范围内的误差 $\Delta J, \Delta C$ , 机械臂的位置都能够渐近跟踪参考模型的输出。为此, 首先基于参数的标称值进行如下逆向运动学补偿:

$$\tau = J_0 u + f_0 \dot{q} + D_0 \ddot{q} \quad (6.12)$$

式中,  $u$  为欲设计的控制输入信号。将上式代入(6.9)式, 得

$$\ddot{q} + J^{-1}(q)\Delta J(q)\dot{q} = u + J^{-1}(q)\Delta C(q, \dot{q}) \quad (6.13)$$

定义跟踪误差为  $e = q_d - q$ , 则根据上式和(6.11)式, 跟踪误差的动态描述如下:

$$\begin{aligned} \ddot{e} + J^{-1}(q)\Delta J(q)\dot{e} &= -u - J^{-1}(q)\Delta C(q, \dot{q}) \\ &\quad + \{I + J^{-1}\Delta J\}(r - k_1 q - k_2 \dot{q}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

其中  $I$  表示二阶单位阵。令

$$u = r + u_c \quad (6.15)$$

并定义广义的状态变量

$$x^T = [e^T \quad \dot{e}^T \quad q_d^T \quad \dot{q}_d^T]$$

那么整理(6.11)式和(6.15)式, 得

$$\dot{x} + \Delta H(x, \dot{x}) = Ax + \Delta A(x) + B_1 r + \Delta B(x)r + B_2 u_c \quad (6.16)$$

式中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 I & -k_2 I \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -k_1 I & -k_2 I \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta H(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1}(q)\Delta J(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}$$

$$\Delta A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 J^{-1} \Delta J & -k_2 J^{-1} \Delta J \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \Delta C \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Delta B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J^{-1} \Delta J$$

观察与不确定性相关的矩阵可知,  $\Delta H$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  的各元素有些是精确已知, 有些是部分已知的。在进行鲁棒控制器设计时, 我们应该尽可能地利用有关被控对象的已知信息。

设不确定性矩阵可以表示为

$$\Delta H = E_i \delta_i(x, \dot{x}), \Delta A = E_a \delta_a(x), \Delta B = E_b \delta_b(x) \quad (6.17)$$

其中,  $E_i, E_a, E_b$  是已知的常数阵,  $\delta_i(x, \dot{x}), \delta_a(x), \delta_b(x)$  为未知函数向量。根据 5.3 节介绍的  $J(q)$  和  $C(q, \dot{q})$  的有界性特征, 对于机械臂系统来讲, 如下假设并不失一般性。

**[假设 1]** 存在常数矩阵  $W_i, W_a, W_b$  使得以下不等式成立:

$$\|\delta_i(x, \dot{x})\| \leq \|W_i x\|, \forall \dot{x}$$

$$\|\delta_a(x)\| \leq \|W_a x\|, \forall x$$

$$\|\delta_b(x)\| \leq \|W_b r\|, \forall r$$

显然,  $W_i, W_a, W_b$  描述了未知函数增益的界。为了评价跟踪误差, 我们定义评价信号如下:

$$z = \begin{bmatrix} Q_1^{\frac{1}{2}} e \\ Q_2^{\frac{1}{2}} \dot{e} \\ R^{\frac{1}{2}} u_c \end{bmatrix} = Cx + Du_c$$

其中,  $\mathbf{Q}_i^{1/2}$  ( $i=1, 2$ ) 和  $\mathbf{R}^{1/2}$  为加权系数阵,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  定义如下:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

根据定义, 有

$$\begin{aligned} z^T z &= \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + u_c^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} u_c \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{e}} + u_c^T \mathbf{R} u_c \end{aligned} \quad (6.18)$$

因此,  $\|z\|_2$  越小就意味着跟踪误差  $\|\mathbf{e}\|_2$ ,  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_2$  越小。故, 我们可以通过抑制从指令信号  $\mathbf{r}$  到评价信号  $z$  的  $L_2$  增益来达到抑制  $\|z\|_2$  的目的。即, 本节所讨论的设计问题可以描述如下: 对于给定的被控对象(6.16)式和(6.18)式, 求状态反馈控制器

$$u_c = \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (6.19)$$

使得闭环系统是全局鲁棒渐近稳定的, 同时对于任意给定的  $T > 0$ ,

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \int_0^T \|\mathbf{r}(t)\|^2 dt \quad (6.20)$$

成立。

令  $\lambda_i > 0, \lambda_a > 0, \lambda_b > 0$  为任意给定常数, 以下称为标定系数。定义辅助系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_2 u_c \\ \tilde{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{D}_2 u_c \end{cases} \quad (6.21)$$

式中,

$$\widetilde{\mathbf{B}}_1 = [\mathbf{B}_1 \quad \lambda_i \mathbf{E}_i \quad \lambda_a \mathbf{E}_a \quad \lambda_b \mathbf{E}_b]$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda_i} W_i A \\ \frac{1}{\lambda_a} W_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} D \\ \frac{1}{\lambda_i} W_i B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\lambda_i} W_i B_1 & W_1 E_1 & \frac{\lambda_a}{\lambda_i} W_i E_a & \frac{\lambda_b}{\lambda_i} W_i E_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\lambda_b} W_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

**定理 6.2.1** 设加权矩阵  $D$  满足  $I - D^T D > 0$ , 且未知函数向量  $\delta_i(x, \dot{x}), \delta_a(x), \delta_b(x)$  满足假设 1。如果存在标定系数及充分小正数  $\epsilon > 0$ , 使得  $S = I - D_2^T D_2 > 0$ , 且代数里卡蒂方程

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + C_1^T S_c C_1 + P \{ \tilde{B}_1^T N^{-1} \tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 M^{-1} \tilde{B}_2 \} P + \epsilon I = 0 \quad (6.22)$$

有正定解  $P > 0$ , 则对于任意指令信号  $r$  使得(6.16)式和(6.19)式构成的闭环系统满足鲁棒跟踪性能(6.20)的反馈控制器给定如下:

$$K = -M^{-1} \{ \tilde{B}_2^T P + D_2^T S_D^{-1} C_1 \} \quad (6.23)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + \tilde{B}_1 N^{-1} D_1 C_1 - \tilde{B}_2 M^{-1} D_2 S_D C_1 \\ \tilde{B}_2 &= B_2 + \tilde{B}_1 N^{-1} D_1^T D_2 \\ N &= I - D_1^T D_1, \quad M = I - D_1 S_D D_1^T, \quad S_D = I - D_1 D_1^T \\ S_c &= I + D_1 N^{-1} D_1^T - S^{-1} D_2 M^{-1} D_2^T S^{-1} \end{aligned}$$

**证明** 闭环系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_k x + B_k r + \Delta(x, \dot{x}, r) \\ z = C_k x \end{cases} \quad (6.24)$$

其中,  $\Delta = \mathbf{E}_i \delta_i + \mathbf{E}_a \delta_a + \mathbf{E}_b \delta_b r$ ,  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}$ ,

$$\tilde{\mathbf{E}} = [\mathbf{E}_i \quad \mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b], \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_a \\ \delta_b r \end{bmatrix}$$

且令正定函数给定如下:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

以下我们证明该正定函数满足耗散不等式

$$H = V + \|z\|^2 - \|r\|^2 < 0 \quad (6.25)$$

利用(6.23)和(6.24)式, 容易验证  $\mathbf{P}$  满足

$$\begin{aligned} & A_k^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_k + \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{C}_{1k} + \varepsilon I \\ & + \{\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{D}_1\} \mathbf{N}^{-1} \{\mathbf{D}_1^T \mathbf{C}_{1k} + \tilde{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{P}\} = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

式中  $\mathbf{C}_{1k} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}$ 。

沿闭环系统(6.24)式的状态轨迹, 求耗散不等式的左端, 得

$$H = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_k) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{r} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \Delta + \|z\|^2 - \|r\|^2$$

将(6.26)式代入上式, 并配平方得

$$\begin{aligned} H &= -\varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \|N^{\frac{1}{2}} \mathbf{W} - N^{-\frac{1}{2}} (\tilde{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_1^T \mathbf{C}_{1k}) \mathbf{x}\|^2 \\ &= \|\mathbf{C}_{1k} \mathbf{x} + \mathbf{D}_1 \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + \|z\|^2 - \|r\|^2 \end{aligned} \quad (6.27)$$

其中,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\frac{1}{\lambda_i} \delta_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ -\frac{1}{\lambda_a} \delta_a(\mathbf{x}) \\ -\frac{1}{\lambda_b} \delta_b(\mathbf{x}) \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

不难验证,

$$C_{1k}x + D_1w = \begin{bmatrix} C_kx \\ -\frac{1}{\lambda_i}W_i\dot{x} \\ -\frac{1}{\lambda_a}W_ax \\ -\frac{1}{\lambda_b}W_bx \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

将上式代入(6.27)式,整理得

$$\begin{aligned} H = & -\epsilon x^T x - \|N^{\frac{1}{2}}w - N^{-\frac{1}{2}}(\tilde{B}_1^T P + D_1^T C_{1k})x\|^2 \\ & - \frac{1}{\lambda_i}\{\|W_i\dot{x}\|^2 - \|\delta_i\|^2\} - \frac{1}{\lambda_a}\{\|W_ax\|^2 - \|\delta_a\|^2\} \\ & - \frac{1}{\lambda_b}\{\|W_bx\|^2 - \|\delta_b\|^2\} - \|C_kx\|^2 \\ & + \|r\|^2 + \|z\|^2 - \|r\|^2 \end{aligned}$$

即,对于满足假设 1 的任意不确定性阵  $\Delta H, \Delta A, \Delta B$ , 耗散不等式  $H < 0$  成立。  $\triangle\triangle\triangle$

利用上述定理设计鲁棒控制器时,需要找到适当的标定系数和黎卡提方程的正定解。目前标定系数只能借助于试探法寻找。另外,不难证明定理 6.2.1 给出的控制器实际上是辅助系统(6.21)所对应的  $H_\infty$  标准设计问题的解。

在上述设计过程中,矩阵  $E_i, E_a, E_b$  和  $W_i, W_a, W_b$  的选择将直接影响到控制器的保守性和鲁棒性的好坏。一般的讲,选择  $E_i, E_a, E_b$  时要尽可能地利用系统结构上的已知信息,而尽可能取奇异值大的  $W_i, W_a, W_b$ ,以获得较强的鲁棒性能。

对于二自由度的机械臂,观察  $\Delta H, \Delta A, \Delta B$  的各元素可知,实际上只存在两个 2 维的未知函数矩阵  $J^{-1}\Delta J$  和  $J^{-1}\Delta C$ ,其元素共有 8 个标量函数。令其各元素为

$$J^{-1}(q)\Delta J(q) = \begin{bmatrix} \mu_1(q) & \mu_2(q) \\ \mu_3(q) & \mu_4(q) \end{bmatrix}$$

$$J^{-1}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mu_5(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mu_6(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mu_7(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mu_8(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}$$

如果,令  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_a = \mathbf{E}_b = \mathbf{E}$ ,且

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [\Sigma_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{O}] \mathbf{x},$$

$$\delta_a(\mathbf{x}) = [\Sigma_2(\mathbf{x}) \quad \Sigma_3(\mathbf{x})] \mathbf{x},$$

$$\delta_b(\mathbf{x}) = \Sigma_1(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中,

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & \mu_3(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_5(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_6(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & \mu_7(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_8(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -k_1 \mathbf{I} & -k_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} - \Sigma_2$$

则  $\Delta \mathbf{H}, \Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{B}$  可以表示如(6.17)式所示。

设上述各标量函数一致有界,且其界  $\sigma_i (i=1, 2, \dots, 8)$  为已知。即

$$|\mu_i(\mathbf{x})| \leq \sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

那么,定义

$$W_1 = [F_1 \quad \mathbf{0}], \quad W_2 = [F_2 \quad F_3], \quad W_b = F_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

将使得假设 1 成立。式中，

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \sigma_1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \sigma_2 \\ \mathbf{0} & \sigma_3 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \sigma_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \sigma_6 \\ \mathbf{0} & \sigma_7 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \sigma_8 \end{bmatrix} \\ F_3 &= F_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -k_1 I & -k_2 I \end{bmatrix} - F_2 \end{aligned}$$

最后介绍本节所述控制器的应用结果。一个二自由度机械手物理参数的标称值如表 6.1 所示。设不确定性的界分别为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.0678, \quad \sigma_2 = 0.0006, \quad \sigma_3 = 0.4164, \\ \sigma_4 &= 0.1742, \quad \sigma_5 = 0.1187, \quad \sigma_6 = 0.0701, \\ \sigma_7 &= 0.4674, \quad \sigma_8 = 0.1521 \end{aligned}$$

上述值相当于允许参数误差的最大界为约 15%。

考虑如下给定的参考模型：

表 6.1 二自由度机械臂的标称参数

参数项目	符号	数 值
第一关节质量	$m_1$	5.1522kg
第二关节质量	$m_2$	1.4166kg
第一关节长度	$l_1$	0.2500m
第二关节长度	$l_2$	0.2200m
第一关节质心距轴心距	$s_1$	0.1116m
第二关节质心距轴心距	$s_2$	0.1012m
第一关节转动惯量	$J_1$	0.1069kg · m <sup>2</sup>
第二关节转动惯量	$J_2$	0.0058kg · m <sup>2</sup>

$$\ddot{\mathbf{q}}_d + 3\dot{\mathbf{q}}_d + 2\mathbf{q}_d = \mathbf{r}$$

取  $L_2$  增益的加权系数阵为

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 600^2 & 0 \\ 0 & 350^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 0.1^2 \mathbf{I}$$

则当标定系数取  $\lambda = 2, \lambda_a = \lambda_b = 0.8$  时, 里卡蒂方程(6.22)有正定解。因此, 根据(6.23)式得鲁棒控制器如下:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3181.2 & 0 & 93.8 & 0 & -2.5 & 0 & -3.8 & 0 \\ 0 & 3117.0 & 0 & 99.8 & 0 & -2.5 & 0 & -3.8 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

根据(6.12), (6.15)和(6.19)式, 得各关节的控制驱动力矩为

$$\tau = \mathbf{J}_b \{ \mathbf{r} + \mathbf{Kx} \} + \mathbf{f}_b \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_b \ddot{\mathbf{q}} \quad (6.31)$$

其中,  $\mathbf{K}$  由(6.30)式给定。

设与参考模型的状态所对应的二自由度机械臂端点位置的期望轨迹给定如图 6.1 所示。用控制器(6.31)式进行模型跟踪控制, 并在机器人运动开始 2s 后, 在位置指令通道上叠加如图 6.2 所

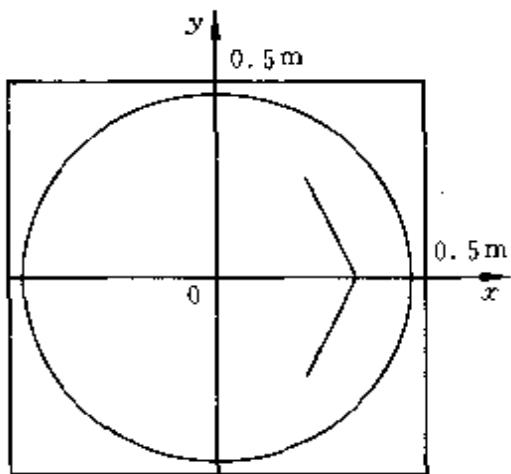


图 6.1 参考模型的输出轨迹

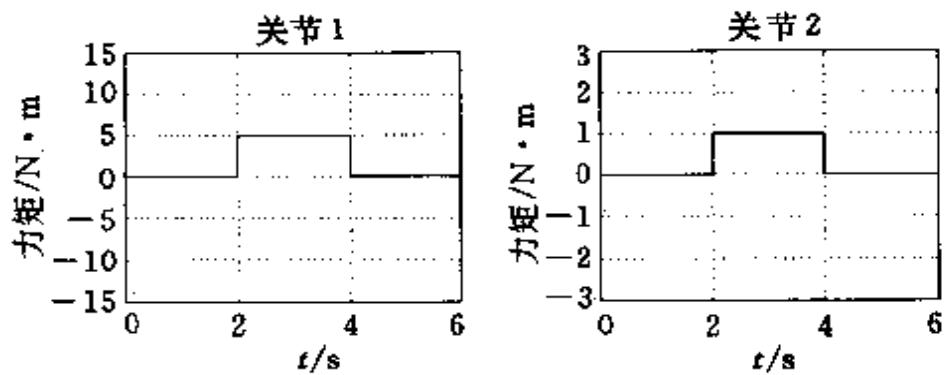


图 6.2 干扰力矩

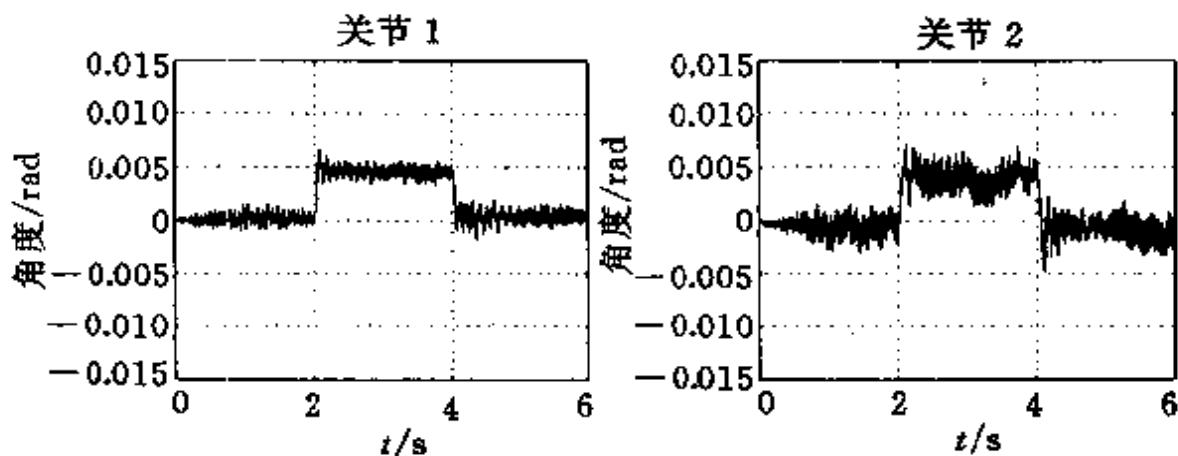


图 6.3(a) 跟踪误差(负载大于标称值)

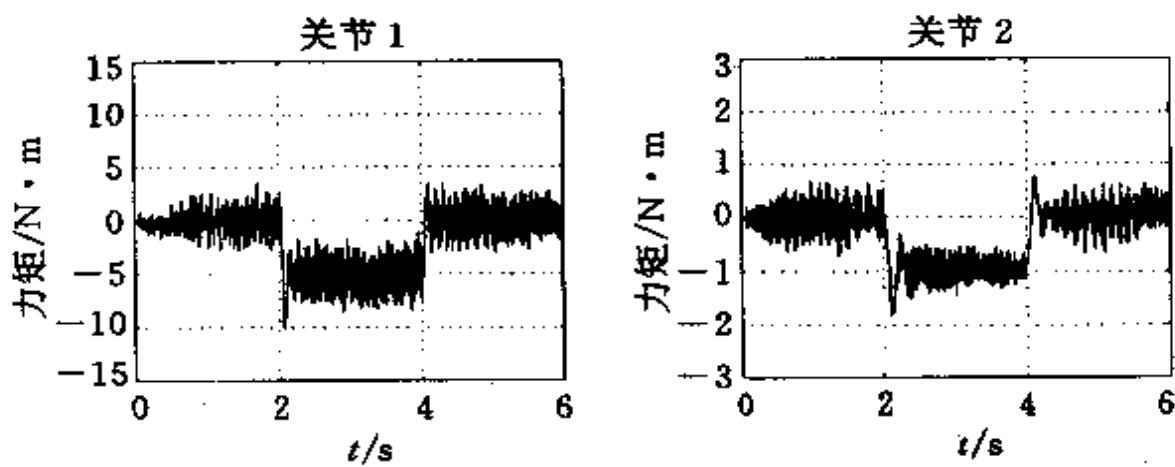


图 6.3(b) 跟踪误差(负载小于标称值)

示的阶跃型干扰信号。图 6.3(a)和(b)分别表示负载比标称值增加 200g 和减少 300g 时的各关节的模型跟踪误差的实验结果。可以观察到模型跟踪性能对参数的不确定性具有较好的鲁棒性能。

### 6.3 鲁棒轨迹跟踪控制

设二自由度机械臂的动态过程由如下数学模型描述：

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \Delta(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.32)$$

其中,  $\boldsymbol{q}^T = [\theta_1 \ \theta_2]$  为各关节的位置坐标向量,  $\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_1 \ \tau_2]$  为各关节的驱动输入力矩,  $J$  和  $f$  分别由(6.2)式、(6.3)式给定,  $\Delta(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$  表示模型误差。

基于上述模型,本节介绍一种鲁棒轨迹跟踪控制器的设计方法。假设期望轨迹由  $\dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{\boldsymbol{q}}_d, \boldsymbol{q}_d$  来描述,由于  $J, f$  和  $g$  为已知函数阵,首先我们可以考虑如(5.35)式的逆向动力学补偿,则跟踪误差  $e(t) = \boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{q}_d(t)$  的动态将由下式描述:

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{e}} + f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{e}} + \Delta(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{u} \quad (6.33)$$

其中,  $\boldsymbol{u}$  是辅助控制输入信号。

根据 5.5 节的讨论可知,若不确定性  $\Delta$  满足  $\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ ,且有界,那么可以采用如 5.5 节所示的方法,得出使误差系统(6.33)渐近稳定的反馈控制器。但是,这并不具有一般性。本节我们仍然要求模型误差是有界的,但并不要求满足这个条件。

下面先介绍一个关于动态系统终值有界性的引理,然后基于该引理设计期望的控制器(详细证明可参见文献[9])。

**引理 6.3.1** 考察如下非自治系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) \quad (6.34)$$

若存在正定函数  $V(\boldsymbol{x}, t)$ , 满足

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq V(x,t) \leq \lambda_2 \|x\|^2, \forall x, \forall t \geq 0 \quad (6.35)$$

$$\dot{V}(x,t) \leq -\lambda_3 \|x\|^2 + \epsilon, \forall x, \forall t \geq 0 \quad (6.36)$$

其中,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \epsilon > 0$  均为给定常数, 则对于任意初始状态  $x(0)$ , 下式成立:

$$\|x(t)\| \leq \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right\}^{1/2} \quad (6.37)$$

式中,  $\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} > 0$ .

**证明** 根据(6.35)式, 有

$$\begin{aligned} -\lambda_3 \|x(t)\|^2 + \epsilon &\leq -\lambda V(x,t) + \epsilon \\ &\leq -\lambda_1 \lambda \|x(t)\|^2 + \epsilon \end{aligned}$$

故由(6.36)式, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_3 \|x(t)\|^2 + \epsilon \\ &\leq -\lambda V(x,t) + \epsilon \end{aligned}$$

上式两边同时乘以  $e^{\lambda t}$ , 得

$$e^{\lambda t} \dot{V}(x,t) + \lambda e^{\lambda t} V(x,t) \leq \epsilon e^{\lambda t}$$

不难验证, 上式左端为

$$\frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} V(x,t)\} = e^{\lambda t} \dot{V}(x,t) + \lambda e^{\lambda t} V(x,t)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t d \{e^{\lambda t} V(x,t)\} &\leq \int_0^t \epsilon e^{\lambda t} dt \\ V(x,t) &\leq e^{-\lambda t} V(x(0),0) + \frac{\epsilon}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned} \quad (6.38)$$

又由条件(6.35)可知,

$$V(x(0),0) \leq \lambda_2 \|x(0)\|^2$$

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} V(x,t), \forall x, \forall t \geq 0$$

将其代入(6.38)式的两端,得

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (6.39)$$

上式两端开平方,得(6.37)式。  $\triangle\triangle\triangle$

下面基于上述引理设计鲁棒跟踪控制器,这种控制器能够保证对于有界的模型误差做到跟踪误差一致终值有界,且当模型误差为零时做到跟踪误差为零。

为此定义辅助信号如下:

$$\eta = \dot{e} + \alpha e \quad (6.40)$$

其中, $\alpha > 0$  是任意定常数。利用该辅助信号可以将(6.33)式表示为

$$\begin{aligned} J(q)(\ddot{e} + \alpha \dot{e}) &= J(q)\alpha \dot{e} - f(q, \dot{q})\dot{e} - \Delta + u \\ J(q)\dot{\eta} &= -f(q, \dot{q})\eta + J(q)\alpha \dot{e} + f(q, \dot{q})\alpha e - \Delta + u \end{aligned}$$

令

$$\omega(q, \dot{q}, e, \dot{e}) = J(q)\alpha \dot{e} + f(q, \dot{q})\alpha e$$

则上式可以表示为

$$J(q)\dot{\eta} = -f(q, \dot{q})\eta + \omega - \Delta + u \quad (6.41)$$

**定理 6.3.1** 设存在正定函数  $\rho(e, \dot{e})$  使得对于任意  $\Delta(q, \dot{q})$  下式成立:

$$\|\Delta(q, \dot{q})\| \leq \rho(e, \dot{e}) \quad (6.42)$$

令反馈控制律给定如下:

$$u = -K\eta - w - v \quad (6.43)$$

其中,

$$v = \frac{\eta \rho^2(e, \dot{e})}{\|\eta\| \rho(e, \dot{e}) + \epsilon} \quad \epsilon > 0 \text{ 为给定常数}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad k_1 > 0, k_2 > 0 \text{ 为给定常数}$$

则对任意初始跟踪误差  $e(0), e(t)$  是一致终值有界的, 即存在常数  $A, B, C$  使得对任意满足(6.42)式的  $\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 下式成立:

$$\|e(t)\| \leq A(\|e(0)\|)e^{-\alpha t} + Be^{-\frac{\lambda}{2}t} + C, \forall t \quad (6.44)$$

**证明** 首先证明辅助信号  $\eta(t)$  的终值有界性。定义正定函数如下:

$$V(t, \eta) = \frac{1}{2}\eta^T J(\mathbf{q})\eta \quad (6.45)$$

根据  $J(\mathbf{q})$  的有界性可知, 存在适当正数  $\lambda_1 > 0$  和  $\lambda_2 > 0$ , 满足

$$\lambda_1 \|\eta\|^2 \leq V(t, \eta) \leq \lambda_2 \|\eta\|^2, \forall \eta \quad (6.46)$$

且有

$$\eta^T \{J(\mathbf{q}) - 2f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\}\eta = 0, \forall \eta$$

因此, 沿方程(6.41)的任意轨迹求  $V$  对时间  $t$  的微分, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \eta^T J(\mathbf{q})\dot{\eta} + \frac{1}{2}\eta^T J(\mathbf{q})\eta \\ &= \eta^T \{-f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + w - \Delta + u\} + \frac{1}{2}\eta^T J(\mathbf{q})\eta \\ &= \eta^T \{u + w - \Delta\} + \frac{1}{2}\eta^T \{J(\mathbf{q}) - 2f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\}\eta \\ &= \eta^T \{u + w - \Delta\} \end{aligned}$$

将(6.43)式代入上式, 得

$$\dot{V} = -\eta^T v - \eta^T \Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \eta^T K\eta$$

利用(6.42)式及柯西不等式

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

可以进一步推得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\eta^T v + \|\eta\| \cdot \|\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| - \eta^T K\eta \\ &= -\eta^T v + \|\eta\| \cdot \rho(e, \dot{e}) - \eta^T K\eta \end{aligned}$$

将  $v$  代入上式, 整理之, 得

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\eta^T K \eta - \eta^T \frac{\eta \rho^2(e, \dot{e})}{\|\eta\| \rho + \epsilon} + \|\eta\| \rho(e, \dot{e}) \\
&= -\eta^T K \eta + \frac{\|\eta\| \rho}{\|\eta\| \rho + \epsilon} \cdot \epsilon \\
&\leq -\eta^T K \eta + \epsilon \\
&\leq -\lambda_3 \|\eta\|^2 + \epsilon
\end{aligned} \tag{6.47}$$

故,根据(6.46)和(6.47)式及引理6.31,系统(6.41)式满足

$$\|\eta(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\eta(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \tag{6.48}$$

利用上述结论,以下证明跟踪误差的终值有界性。由定义(6.40)式可知,

$$e(t) = e(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \eta(s) ds$$

记  $e(t)$  的各分量为  $e_1(t), e_2(t)$ , 即  $e^T = [e_1 \ e_2]$  则上式等价于

$$e_1(t) = e_1(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \eta_1(s) ds$$

$$e_2(t) = e_2(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \eta_2(s) ds$$

其中,  $\eta^T = [\eta_1 \ \eta_2]$ 。

因为,上式两边取绝对值,得

$$|e_1(t)| \leq |e_1(0)|e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\eta_1(s)| ds$$

$$|e_2(t)| \leq |e_2(0)|e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\eta_2(s)| ds$$

上述两式相加,并利用欧氏范数的关系式

$$\|e(t)\| \leq |e_1(t)| + |e_2(t)|$$

$$|e_i(t)| \leq \|e(t)\|, (i = 1, 2)$$

$$|\eta_i(t)| \leq \|\eta(t)\|, (i = 1, 2)$$

得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 |e_i(t)| &\leq \sum_{i=1}^2 |e_i(0)| e^{-\alpha t} - \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sum_{i=1}^2 |\eta_i(s)| ds \\ \|e(t)\| &\leq 2\|e(0)\|e^{-\alpha t} + 2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|\eta(s)\| ds \quad (6.49) \end{aligned}$$

而根据(6.48)式,

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\|^2 &\leq M + Ne^{-\lambda t} \\ \|\eta(t)\| &\leq \sqrt{M + Ne^{-\lambda t}} \\ &\leq \sqrt{M} + \sqrt{N} e^{-\frac{\lambda}{2}t} \quad (6.50) \end{aligned}$$

式中,  $M = \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda}$ ,  $N = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\eta(0)\|^2 - \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda}$ 。

将(6.50)式代入(6.49)式, 整理得

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq 2\|e(0)\|e^{-\alpha t} + 2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} [\sqrt{M} + \sqrt{N} e^{-\frac{\lambda}{2}s}] ds \\ &= 2\|e(0)\|e^{-\alpha t} + 2\sqrt{M} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\quad + 2\sqrt{N} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}s} ds \\ &= 2\|e(0)\|e^{-\alpha t} + \frac{2\sqrt{M}}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}] \\ &\quad + \frac{4\sqrt{N}}{2\alpha - \lambda} [e^{-\frac{\lambda}{2}t} - e^{-\alpha t}] \end{aligned}$$

即,

$$\|e(t)\| \leq Ae^{-\alpha t} + Be^{-\frac{\lambda}{2}t} + C, \forall t \quad \triangle\triangle\triangle$$

从上述证明过程可知,  $t$  充分大以后, 跟踪误差的范数将小于等于  $C$ 。而

$$C = \frac{2\sqrt{M}}{\alpha} = 2 \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda}}$$

因此, 为了获得较好的控制效果, 在设计鲁棒控制律(6.43)时, 应

该尽可能地选取小的  $\epsilon$ 。另外,观察(6.47)式的推导过程可知,如果模型误差为零,即  $\rho(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{e}}) = 0$ ,那么在控制律中可以取  $\boldsymbol{v} = 0$ ,此时,(6.47)式便成为

$$\dot{V} \leq -\lambda_3 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \quad (6.51)$$

而  $\epsilon=0$ ,相应地  $C=0$ 。这意味着对于标称系统,在控制律(6.43)下,跟踪误差是一致渐近地趋近于零的。

最后介绍该鲁棒跟踪控制器的数字仿真结果。设一个二自由度机械臂的参数由表 6.2 给定,各项参数的物理意义如图 6.4 所示。

表 6.2 二自由度机械臂的标称参数

参数项目	符号	数 值
第一关节质量	$m_1$	0.765kg
第二关节质量	$m_2$	0.765kg
第一关节长度	$l_1$	0.250m
第二关节长度	$l_2$	0.250m
第一关节质心距轴心距	$s_1$	0.150m
第二关节质心距轴心距	$s_2$	0.150m
第一关节转动惯量	$J_1$	0.0045kg · m <sup>2</sup>
第二关节转动惯量	$J_2$	0.0045kg · m <sup>2</sup>

设机械臂的操作平面用坐标  $x$  和  $y$  来表示,期望轨迹的坐标给定如下:

$$x_d(t) = -0.25\cos \frac{\pi}{2}t \quad y_d(t) = 0.02[1 - \cos \pi t] + 0.32$$

$$\dot{x}_d(t) = \frac{\pi}{8}\sin \frac{\pi}{2}t \quad \dot{y}_d(t) = \frac{\pi}{5}\sin \pi t,$$

$$\ddot{x}_d(t) = \frac{\pi^2}{16}\cos \frac{\pi}{2}t \quad \ddot{y}_d(t) = \frac{\pi^2}{5}\cos \pi t$$

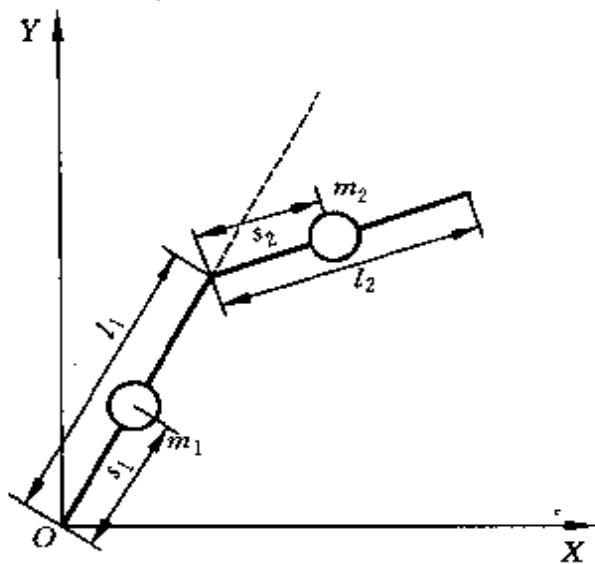


图 6.4 机械臂力学模型

求解第 2 章所示的运动学逆向问题,由此可求出机械臂各关节  $q_1$ ,  $q_2$  的期望轨迹:  $q_{1d}(t), \dot{q}_{1d}(t), \ddot{q}_{1d}(t), q_{2d}(t), \dot{q}_{2d}(t), \ddot{q}_{2d}(t)$ , 记

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{bmatrix} q_{1d}(t) \\ q_{2d}(t) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_d(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d}(t) \\ \dot{q}_{2d}(t) \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{q}}_d(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1d}(t) \\ \ddot{q}_{2d}(t) \end{bmatrix}$$

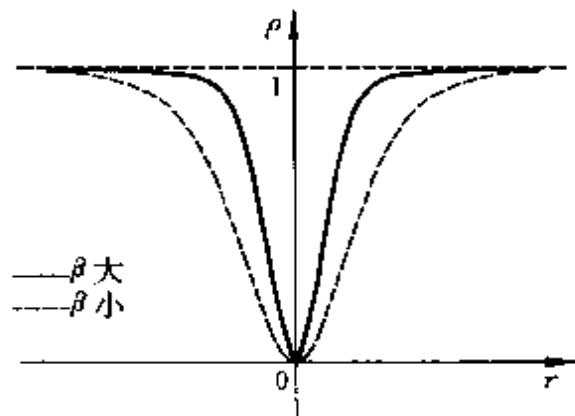


图 6.5 不确定性函数的界

取控制器的增益分别为  $k_1 = k_2 = 1.0$ , 且  $\alpha = 60.00, \epsilon = 0.001$ , 模型误差的界函数如图 6.5 所示, 即

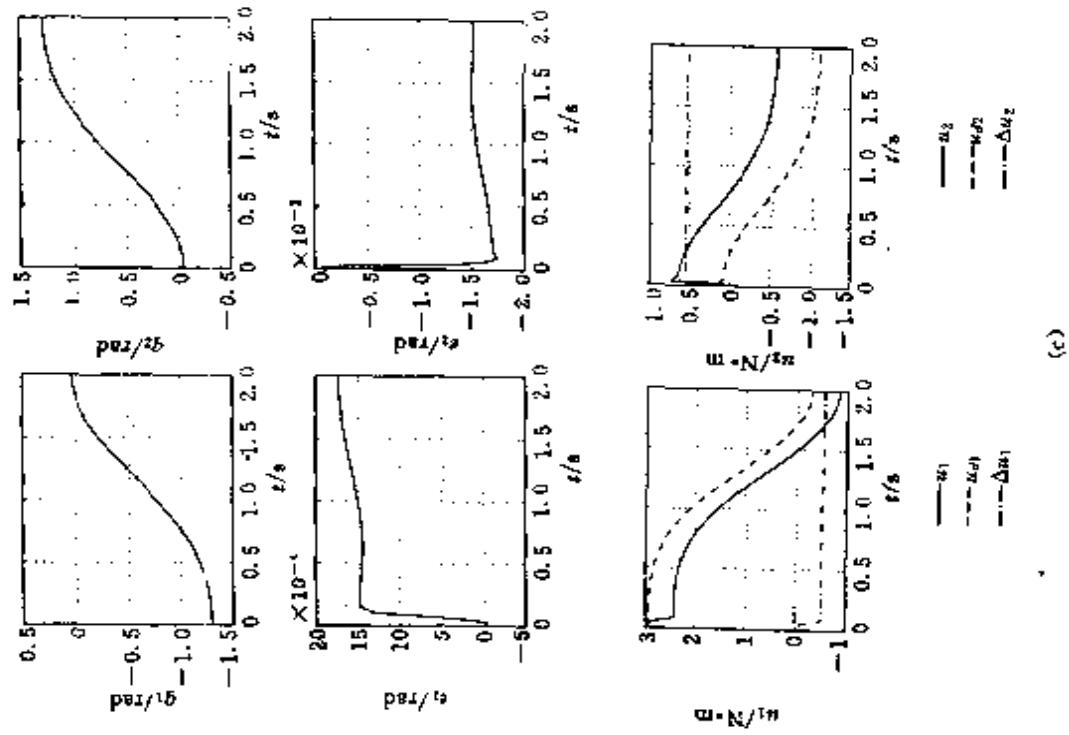
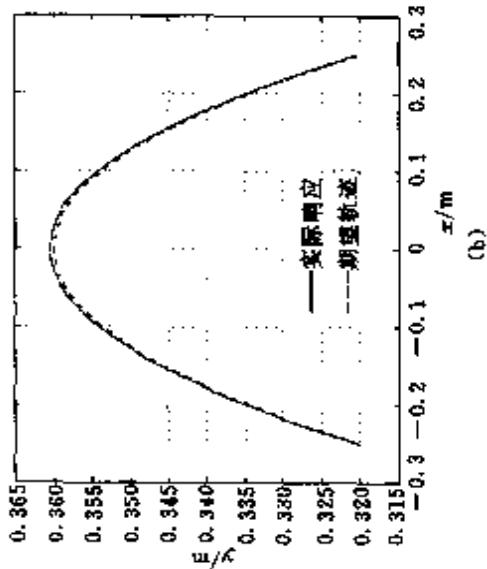
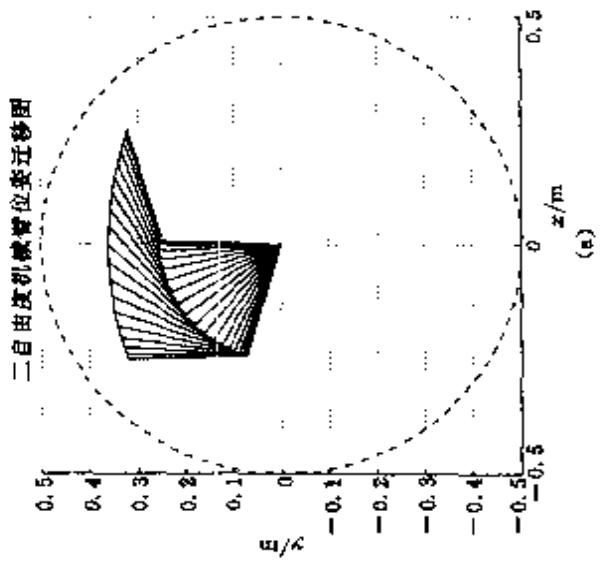


图 6.6 数值仿真结果( $e(0)=\dot{e}(0)=0, 0.05\text{rad}$ )

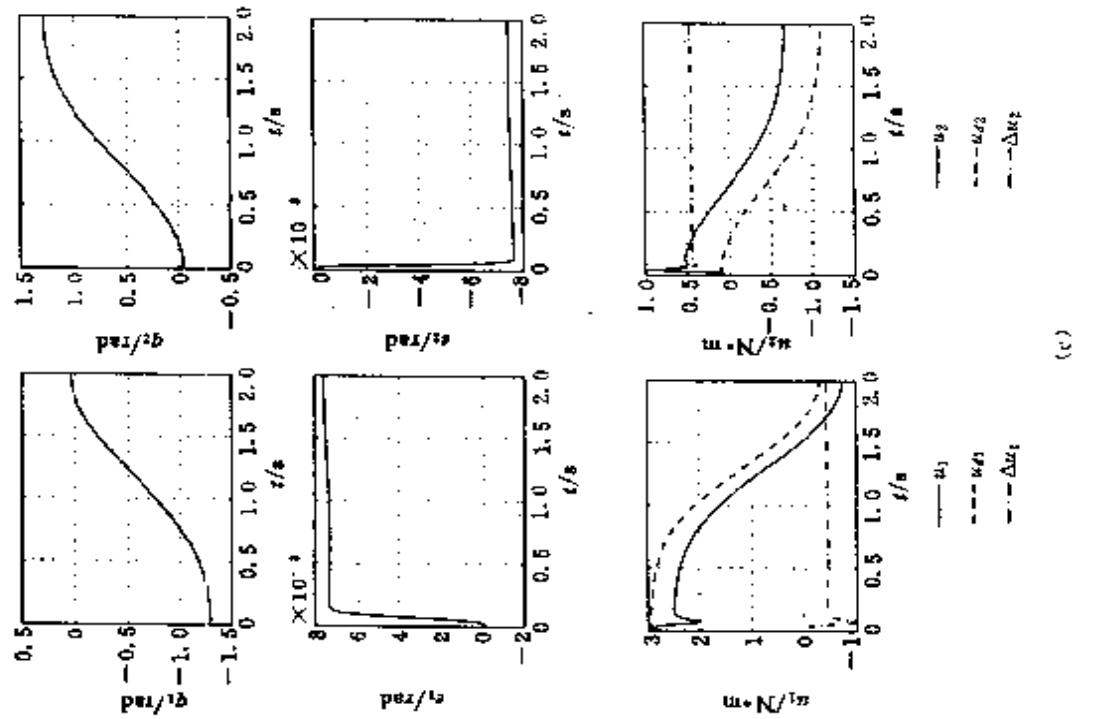
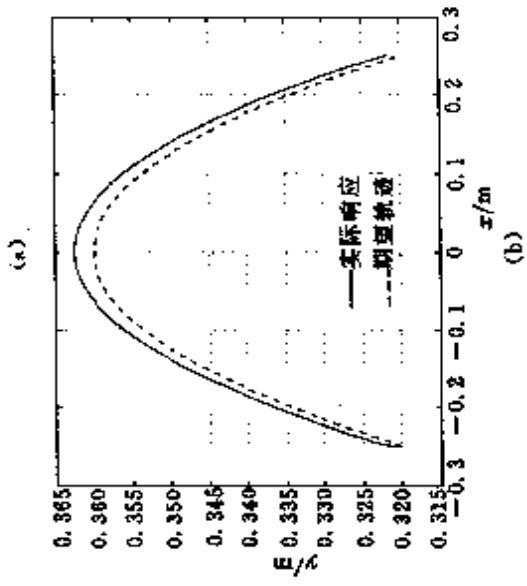
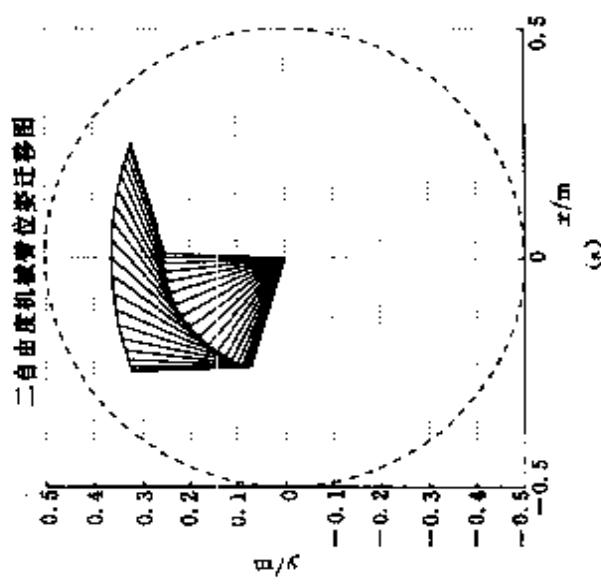
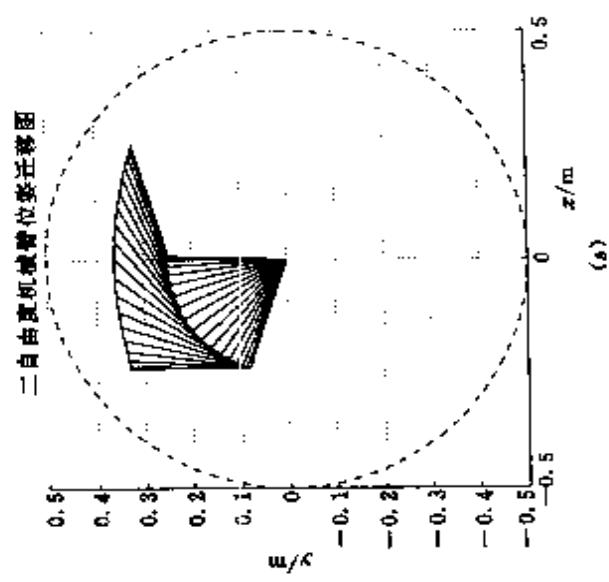
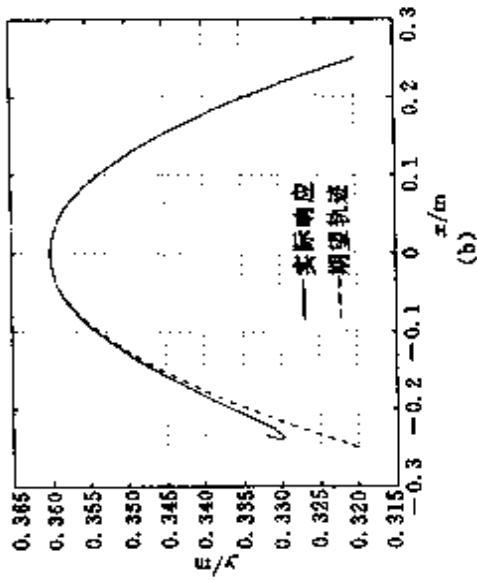


图 6. 二自由度机械臂运动结果 ( $k_1 = k_2 = 0.3$ )



(a)



(b)

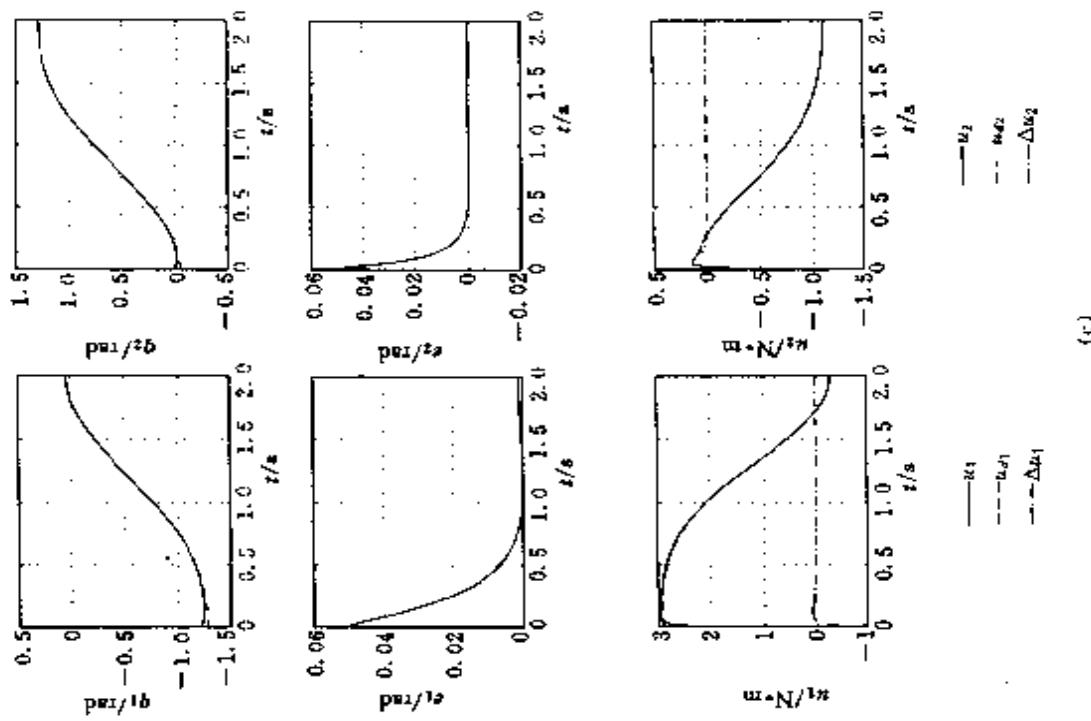


图 6.8 数值仿真结果( $\Delta(q, \dot{q}) \neq 0$ )

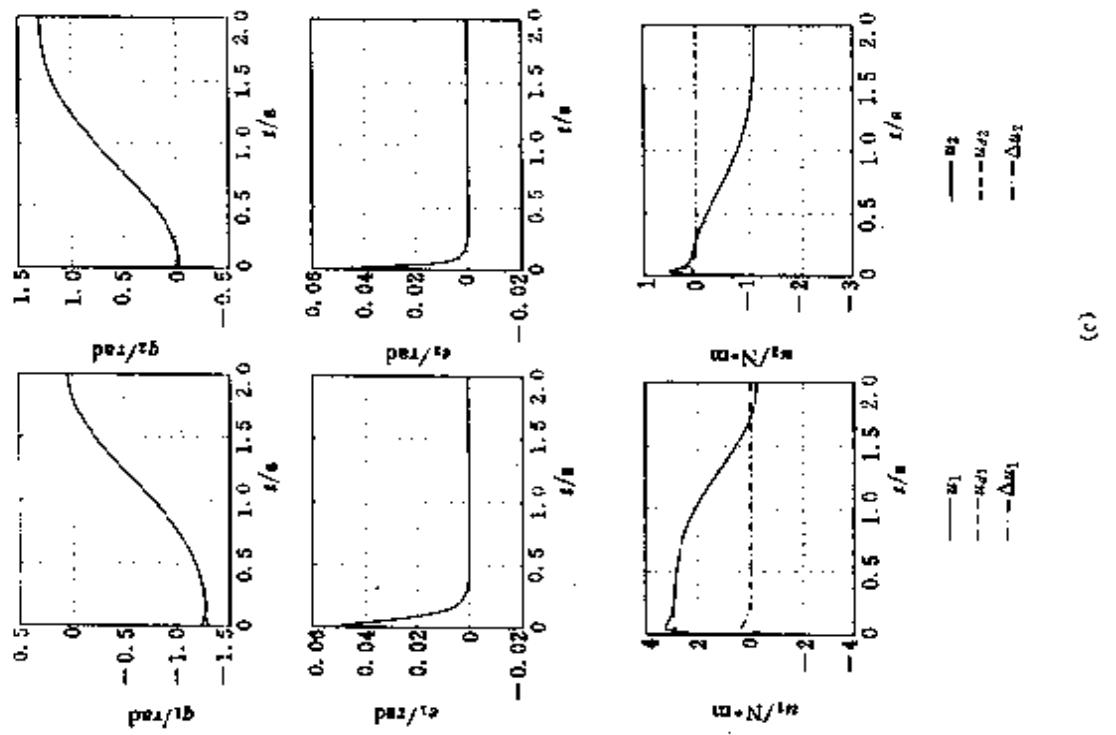
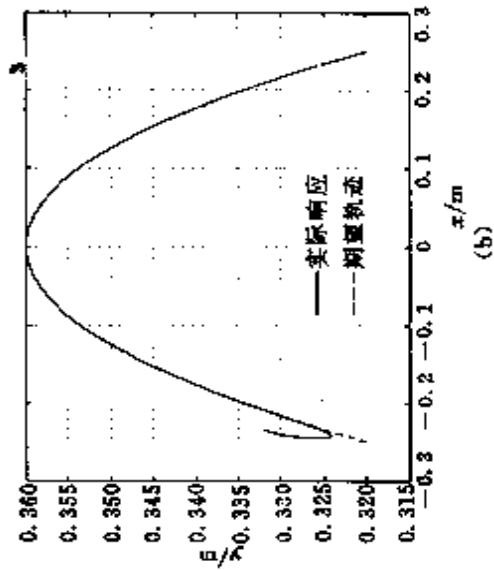
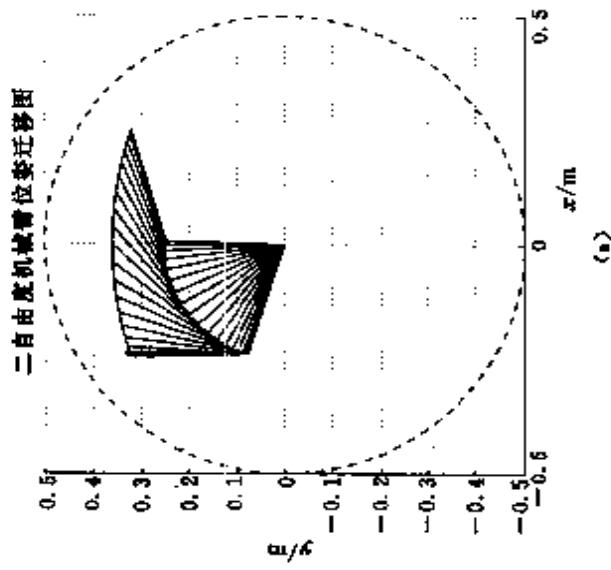


图 6.9 鲁棒控制数值仿真结果

$$\rho(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = 3.0 \tanh^2(2.6 \|\boldsymbol{\eta}\|)$$

首先,考察没有模型误差( $\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ )的情况。此时,令 $v = 0$ 。使用控制律(6.43),图6.6是初始误差为 $\mathbf{e}^T(0) = [0.05\text{rad} \quad 0.05\text{rad}]$ 时的控制结果。图6.6(a)是各关节位姿的轨迹,图6.6(b)是机械臂端点轨迹,图6.6(c)是各关节的位置、跟踪误差以及控制输入。而图6.7则表示相同条件下,控制器的增益变为 $k_1 = k_2 = 0.3$ 时的控制结果,显然后者的误差收敛速度慢。

其次,利用同一个控制器( $v = 0, k_1 = k_2 = 1.0$ ),初始误差为 $\mathbf{e}^T(0) = \mathbf{0}$ ,但是,模型误差不为零时的仿真结果如图6.8所示。图6.8为

$$\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \sin 6\eta_1 \\ \sin 6\eta_2 \end{bmatrix}$$

时的控制结果。可以观察到由 $\Delta$ 引起跟踪误差。

最后,用鲁棒控制器(6.43),控制具有不确定性 $\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 时的系统,得仿真结果如图6.9所示。与图6.8相比,跟踪性能得到了较大的改善。

## 6.4 电机驱动机械臂的 $L_2$ 控制器

正如3.5节所述,对于时间常数较小的微小型机械臂,为了提高系统的跟踪性能及快速性,在设计控制器时还必须考虑电机的动特性。本节利用李亚普诺夫函数递推设计方法来设计具有鲁棒干扰抑制性能的轨迹跟踪控制器。

考察由下式描述的电机驱动二自由度机械臂:

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{w} = \mathbf{K}_M \mathbf{I}_a \\ \mathbf{L}\ddot{\mathbf{I}}_a + \mathbf{R}\dot{\mathbf{I}}_a + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \end{cases} \quad (6.52)$$

其中,各项符号的意义与3.5节相同, $V$ 为电机的电枢电压,是控

制输入信号,  $w$  表示干扰力矩向量, 其分量分别表示作用在各关节上的干扰力矩,  $D$  是粘性摩擦系数阵,  $\Delta(q, \dot{q})$  与上节相同, 表示模型误差。

观察(6.52)式可知, 该系统是由电气驱动子系统和机械子系统通过积分器串联组成的。因此, 我们可以运用第5章介绍的递推设计思想, 基于机械子系统的李亚普诺夫函数构造整个系统的李亚普诺夫函数或存储函数。

设控制器的设计指标如下:

[S1] 稳定性 当干扰力矩  $w=0$  时, 跟踪误差向量  $\bar{e}(t)$  渐近地趋近于零; 而  $w \neq 0$  时,  $\bar{e}(t)$  是终值有界的, 其中误差向量定义为

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) - q_d(t) \\ \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \end{bmatrix}$$

[S2]  $L_2$  干扰抑制性能 当初始误差  $e(0)=0, \dot{e}(0)=0$  时, 对于任意给定的正数  $T>0$  和干扰力矩  $w$ , 闭环系统满足

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq r^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt + \epsilon_0 \quad (6.53)$$

其中,  $r>0$  表示给定的常数;  $\epsilon_0>0$ , 为充分小正数;  $z(t)$  为评价信号, 其定义如下:

$$z(t) = \begin{bmatrix} r_1 e(t) \\ r_2 \dot{e}(t) \end{bmatrix}$$

式中,  $r_1>0, r_2>0$  均为加权系数。

显然, 对于给定信号  $w$ ,  $r$  越小的  $z$  则范数越小, 对应的跟踪误差  $e$  和  $\dot{e}$  也越小, 因此,  $r$  反映了系统对干扰信号的抑制能力。

为了设计鲁棒控制器, 假设给定的期望轨迹和模型的不确定性满足如下条件:

(1)  $q_d(t)$  是充分可微的, 且当  $w=0, q(0)=q_d(0)$  时, 存在控制输入  $V$  (或等价地存在驱动力矩  $\tau=K_M I$ ) 使得  $q(t)=q_d(t)$ ,

$\forall t \geq 0$  成立。

(2) 干扰力矩是一致有界的, 即存在正数  $\bar{w} > 0$  使得  $\| w(t) \| \leq \bar{w}, \forall t \geq 0$  成立。

(3) 未知非线性函数  $\Delta(q, \dot{q})$  关于跟踪误差  $e, \dot{e}$  是增益有界的, 即存在  $\rho_f(e, \dot{e})$ , 使得

$$\| \Delta(q, \dot{q}) \| \leq \rho_f(e, \dot{e}), \forall e, \forall \dot{e}$$

成立。

条件(1)意味着  $\Delta(q_d, \dot{q}_d) = 0$ 。因此,  $\rho_f$  可以选择为满足  $\rho_f(0, 0) = 0$ 。又因为机械臂的数学模型是状态变量的二次以下的非线性函数, 因此, 不失一般性地可以取  $\rho_f$  是  $\bar{e}$  的二次函数, 即

$$\rho_f(e, \dot{e}) = a_2 \| \bar{e} \|^2 + a_1 \| \bar{e} \| \quad (6.54)$$

考虑具有如下结构的反馈控制器:

$$v = C(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \bar{e}, I_a) \quad (6.55)$$

其中,  $C$  表示非线性函数。

如前面所述, 如果我们只考虑稳定性, 那么利用前述递推设计方法, 可以求出理想的控制力矩  $\tau = K_M I_a$ 。因此, 解决本节设计问题的一个方案是使电机的实际电枢电流与上述期望的电流值一致。不过这时还必须重新考察整个系统的稳定性, 而且还需要考虑设计指标[S2]。以下推广上述的递推设计方法来解这个设计问题。

首先基于逆向运动学求期望轨迹所对应的驱动力矩  $\tau$ , 并定义与此相对应的电枢电流的期望值为

$$I_d = K_M^{-1} \{ J(q) \ddot{q}_d + f(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g(q) + D\dot{q} + u_1 \} \quad (6.56)$$

其中,  $u_1$  是辅助控制输入信号。

记电枢电流的期望值与实际值的偏差为

$$\xi = I_a - I_d \quad (6.57)$$

并定义辅助信号

$$\eta = \dot{e} + ae$$

$\alpha > 0$  为给定常数,  $e = q - q_d$  是跟踪误差。

利用上述定义及(6.56)式, 该系统的机械部分的动态特性, 即(6.52)式的第一运动方程式可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{e} = \eta - \alpha e \\ J(q)\dot{\eta} = \{\alpha J(q) - f(q, \dot{q})\}\dot{e} - \Delta(q, \dot{q}) + K_M \xi - w + u_1 \end{cases} \quad (6.58)$$

对电气部分也进行类似的补偿, 令

$$V = RI_d + K_d q_d + u_2 \quad (6.59)$$

将上式代入(6.52)式的第二个方程, 得

$$L\dot{\xi} + R\xi + K_e \dot{e} = u_2$$

故, 由  $\xi$  和  $\eta$  的定义, (6.52)式的电机部分的动态过程可以描述如下:

$$L\dot{\xi} = -R\xi - K_e(\eta - \alpha e) - L\dot{I}_d + u_2 \quad (6.60)$$

综上所述, 本节的设计问题可以描述如下: 对于给定的被控对象(6.58)和(6.60), 求使得闭环系统满足设计指标[S1]和[S2]的控制输入信号  $u_1$  和  $u_2$ , 其中  $I_d$  如(6.56)式所示。

以下分三步求理想的  $u_1$  和  $u_2$ 。

第一步 取正定函数

$$V_0(e) = \frac{1}{2}e^T e \quad (6.61)$$

沿(6.58)式的状态轨迹求  $V_0$  对时间的导数得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= e^T \dot{e} \\ &= e^T (-\alpha_1 e + \eta) \\ &= -\alpha_1 \|e\|^2 + e^T \eta \end{aligned} \quad (6.62)$$

第二步 考察子系统(6.58), 取正定函数

$$V_1(e, \eta, t) = V_0(e) + \frac{1}{2}\eta^T J(q)\eta \quad (6.63)$$

根据上一章介绍的机器人的结构特征, 上式第二项显然为正。

求  $V_1$  对时间的微分, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \dot{V}_0(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\eta} \\ &= \dot{V}_0 + \boldsymbol{\eta}^T \{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} - \Delta - \mathbf{w} + \mathbf{u}_1 \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \{ \mathbf{J} - 2\mathbf{f} \} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

由第 5 章可知,  $\boldsymbol{\eta}^T \{ \mathbf{J} - 2\mathbf{f} \} \boldsymbol{\eta} = 0, \forall \boldsymbol{\eta}$ , 并将(6.62)式代入上式, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\alpha_1 \|\mathbf{e}\|^2 + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} - \Delta + \mathbf{e} + \mathbf{u}_1 \} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{w}\end{aligned}$$

上式两端同时加上  $\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2$ , 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 &= -\alpha_1 \|\mathbf{e}\|^2 - \boldsymbol{\eta}^T \Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} + \mathbf{e} + \mathbf{u}_1 \} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{4\gamma^2} \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} - \left\| \frac{1}{2\gamma} \boldsymbol{\eta} + \gamma \mathbf{w} \right\|^2 + \|z\|^2\end{aligned}$$

将  $z^T = [r_1 \mathbf{e} \ r_2 \dot{\mathbf{e}}]$  和  $\boldsymbol{\eta} = \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{e}$  代入上式, 经整理, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 &\leq -\alpha \|\mathbf{e}\|^2 - \boldsymbol{\eta}^T \Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \left\{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} + \mathbf{e} - \frac{1}{4\gamma^2} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{u}_1 \right\} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi} \\ &\quad + r_1^2 \|\mathbf{e}\|^2 + r_2^2 \|\boldsymbol{\eta} - \alpha \mathbf{e}\|^2 \\ &\leq -\alpha \|\mathbf{e}\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\| \cdot \|\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \left\{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} + \mathbf{e} + \frac{1}{4\gamma^2} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{u}_1 \right\} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi} \\ &\quad + (r_1^2 + r_2^2 \alpha^2) \|\mathbf{e}\|^2 - 2r_2^2 \alpha \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{e} + r_2^2 \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} \\ &= -(\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|\mathbf{e}\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\| \cdot \|\Delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \left\{ \alpha \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} + \alpha \mathbf{J} \mathbf{e} + \mathbf{e} + \frac{1}{4\gamma^2} \boldsymbol{\eta} + r_2^2 \boldsymbol{\eta} - 2r_2^2 \alpha \mathbf{e} + \mathbf{u}_1 \right\} \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_M \boldsymbol{\xi}\end{aligned}\tag{6.64}$$

因此, 令

$$u_1 = -C_1(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) - C_2(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) - \alpha_1 J(\mathbf{q})\eta \quad (6.65)$$

其中,  $\alpha_1 > 0$  是给定常数, 且

$$C_1(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \alpha J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + \alpha f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{e} + (1 - 2r_1^2\alpha^2)\mathbf{e} + \left(r_1^2 + \frac{1}{4\gamma^2}\right)\eta$$

$$C_2(\mathbf{q}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{\rho_f^2(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})}{\|\eta\| \rho_f(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t}}\eta$$

式中  $\rho_f$  是满足假设条件(3)的任意给定函数,  $\epsilon_1 > 0$  及  $\beta_1 > 0$  是任意给定常数。

将(6.65)式代入(6.64)式, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 &\leqslant -(\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|\mathbf{e}\|^2 \\ &\quad - \alpha_1 \eta^T J(\mathbf{q})\eta + \eta^T K_M \xi + \|\eta\| \cdot \rho_f - \frac{\rho_f^2 \cdot \eta^T \eta}{\|\eta\| \rho_f + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t}} \\ &= -(\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(\mathbf{q})\eta \\ &\quad + \frac{\|\eta\| \rho_f \cdot \epsilon_1 e^{-\beta_1 t}}{\|\eta\| \rho_f + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t}} + \eta^T K_M \xi \\ &\leqslant -(\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(\mathbf{q})\eta + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t} + \eta^T K_M \xi \end{aligned} \quad (6.66)$$

第三步 考虑由(6.58)和(6.60)式组成的整个系统。并设  $\mathbf{u}$  由(6.65)式给定, 取正定函数如下:

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{e}, \eta, \xi, t) &= V_1(\mathbf{e}, \eta, t) + \frac{1}{2} \xi^T L \xi \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{2} \eta^T J(\mathbf{q})\eta + \frac{1}{2} \xi^T L \xi \end{aligned} \quad (6.67)$$

沿该系统的状态轨迹, 考察

$$H(\mathbf{e}, \eta, \xi, \mathbf{w}) = \dot{V}_2(\mathbf{e}, \eta, \xi, t) + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 \quad (6.68)$$

利用第二步的结果, 不难验证

$$\begin{aligned} H &= \dot{V}_2 + \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 + \xi^T L \dot{\xi} \\ &\leqslant -(\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|\mathbf{e}\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(\mathbf{q})\eta + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta^T K_M \xi + \xi^T \{-R\xi - K_e(\eta - \alpha e) - L\dot{I}_d + u_2\} \\
= & - (\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|e\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(q) \eta - \epsilon_1 e^{-\beta_1 t} \\
& + \xi^T \{K_M^T \eta - R\xi - K_e(\eta - \alpha e) + u_2\} - \xi^T L \dot{I}_d \quad (6.69)
\end{aligned}$$

由此可知,利用类似于第二步中处理模型的不确定性  $\Delta(q, \dot{q})$  的手法,可以通过选择适当的  $u_2$  使得  $H < 0$  成立。但是,这至少需要已知  $\dot{I}_d$  的界。由定义(6.56)可知

$$\begin{aligned}
\dot{I}_d = & K_M^{-1} (J(q)\ddot{q}_d + J(q)\ddot{\tilde{q}}_d + \ddot{f}(q, \dot{q})\dot{q}_d + f(q, \dot{q})\ddot{q}_d \\
& + \dot{g}(q) + D\dot{q} + u_1)
\end{aligned}$$

实际上,可以证明,  $\dot{I}_d$  可以表示为  $q, \dot{q}, I_d$  的函数,因此,不失一般性地假设  $\|\dot{I}_d\|$  的上界只依赖于  $e, \dot{e}, I_d$ 。即,存在正定函数  $\rho_i(e, \dot{e}, \xi)$ ,使得下式成立。

$$\|\dot{I}_d\| \leq \rho_i(e, \dot{e}, \xi) \quad (6.70)$$

将上式代入(6.69)式,得

$$\begin{aligned}
H \leq & - (\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|e\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(q) \eta - \epsilon_1 e^{-\beta_1 t} \\
& + \xi^T \{K_M^T \eta - R\xi - K_e(\eta - \alpha e) + u_2\} + \|\xi^T L\| \cdot \rho_i \\
& \quad (6.71)
\end{aligned}$$

令

$$u_2 = -C_3(e, \eta, \xi) - C_4(e, \dot{e}, \xi) - \alpha_2 L \xi \quad (6.72)$$

其中,  $\alpha_2 > 0$  为任意给定常数

$$\begin{aligned}
C_3(e, \eta, \xi) &= K_M^T \eta - R\xi - K_e(\eta - \alpha e) \\
C_4(e, \dot{e}, \xi) &= \frac{\|\xi^T L\|^2 \rho_i^2(e, \dot{e}, \xi)}{\|\xi^T L\| \rho_i(e, \dot{e}, \xi) + \epsilon_2 e^{-\beta_2 t}}
\end{aligned}$$

式中  $\epsilon_2 > 0, \beta_2 > 0$  为任意给定常数。

同第二步的推导类似,将(6.72)式代入(6.71)式,得

$$\begin{aligned}
H \leq & - (\alpha - r_1^2 - \alpha^2 r_2^2) \|e\|^2 - \alpha_1 \eta^T J(q) \eta - \alpha_2 \xi^T L \xi \\
& + \epsilon_1 e^{-\beta_1 t} + \epsilon_2 e^{-\beta_2 t}
\end{aligned}$$

所以,取  $\alpha = 1$  且  $r_1^2 + r_2^2 \leq 1 - \bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}$  为充分小正数。令

$$\alpha_0 = \min\{\bar{\epsilon}, \alpha_1, \alpha_2\} \quad (6.73)$$

$$\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \quad (6.74)$$

$$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\} \quad (6.75)$$

则

$$\begin{aligned} H &\leq -\alpha_0 \langle e^T e + \eta^T J(q) \eta + \xi^T L \xi \rangle + \epsilon e^{-\beta t} \\ &= -2\alpha_0 V_2(e, \eta, \xi) + \epsilon e^{-\beta t} \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_2 + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \leq -2\alpha_0 V_2 + \epsilon e^{-\beta t} \quad (6.76)$$

当  $w=0$  时, 上式等价于

$$\dot{V}_2 \leq -2\alpha_0 V_2 + \epsilon e^{-\beta t}, \forall t \geq 0 \quad (6.77)$$

又根据定义, 存在适当正数  $\lambda_1 > 0$  和  $\lambda_2 > 0$ , 满足

$$\lambda_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq V_2(e, \eta, \xi) \leq \lambda_2 \|\tilde{x}\|^2, \forall \tilde{x} \quad (6.78)$$

其中,  $\tilde{x}^T = [e^T \quad \eta^T \quad \xi^T]$ 。故由引理 6.2.1 可知,  $\tilde{x}$  是终值有界的。实际上, (6.77) 式右端有指数项  $\epsilon e^{-\beta t}$ , 可以证明  $\tilde{x}(t)$  是渐近趋于零的(详细可参阅文献[9])。这意味着闭环系统满足设计指标[S1]。因为,  $e(t) \rightarrow 0, \eta(t) \rightarrow 0$ , 得  $\dot{e}(t) \rightarrow 0$ , 故  $\dot{e}(t) \rightarrow 0$ 。

当  $w \neq 0$  时, (6.76) 式等价于

$$\dot{V}_2 + \|z\|^2 \leq \gamma^2 \|w\|^2 + \epsilon e^{-\beta t}, \forall t \geq 0 \quad (6.79)$$

对于任意给定的  $T > 0$ , 在零初始条件下 ( $e(0) = 0, \eta(0) = 0, \xi(0) = 0$ ), 求上式两边的积分, 得

$$\int_0^T \|z\|^2 dt + V_2(e(t), \eta(t), \xi(t)) \leq \gamma^2 \int_0^T \|w\|^2 dt + \epsilon \int_0^T e^{-\beta t} dt$$

注意  $V_2 > 0, \forall e \neq 0, \eta \neq 0, \xi \neq 0$ , 且右端第二项有界, 故对给定的  $\epsilon_0$ , 可以取充分小  $\epsilon$ , 使得

$$\int_0^T \|z\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w\|^2 dt + \epsilon_0$$

即, 闭环系统满足设计指标[S2]。

所以, (6.59), (6.56), (6.58), (6.65) 及 (6.72) 式给出了满足

鲁棒跟踪要求的控制器。上述结论可以归纳为以下定理。

**定理 6.4.1** 设系统满足假设条件(1)~(3)且存在  $\rho_i$  使得(6.70)式成立。 $L_2$  增益性能指标的加权系数满足  $r_1^2 + r_2^2 \leq 1 - \tilde{\epsilon}$ , 其中  $\tilde{\epsilon}$  为充分小的正数。那么满足设计指标[S1]和[S2]的反馈控制器(6.55)由下式给定:

$$C(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \bar{e}, I_a = R K_M^{-1} \{ J \ddot{q}_d + f \cdot \dot{q}_d + g(q) + D \dot{q} + u_1 \\ + K_e \dot{q}_d + u_2 \} \quad (6.80)$$

其中, 辅助控制输入  $u_1$  和  $u_2$  分别由(6.65)式和(6.72)式给定。

最后介绍利用本节的控制器进行的数字仿真结果。设二自由度机械臂和驱动电机的参数如表 6.3 所示。各项参数的物理意义如图 6.10 所示。

表 6.3 电机驱动机械臂的标称参数

参数项目	符号	数 值
第一关节质量	$m_1$	1.00kg
第二关节质量	$m_2$	1.00kg
第一关节长度	$l_1$	1.00m
第二关节长度	$l_2$	1.00m
第一关节质心距轴心距	$s_1$	0.50m
第二关节质心距轴心距	$s_2$	0.50m
第一关节转动惯量	$I_1$	$0.87\text{kg} \cdot \text{m}^2$
第二关节转动惯量	$I_2$	$0.87\text{kg} \cdot \text{m}^2$
电气参数	符号	数 值
第一关节电枢电感	$L_1$	0.10H
第二关节电枢电感	$L_2$	0.10H
第一关节电枢电阻	$R_1$	1.00Ω
第二关节电枢电阻	$R_2$	1.00Ω
第一关节反向电势系数	$K_{v1}$	$0.50\text{V} \cdot \text{s}/\text{rad}$
第二关节反向电势系数	$K_{v2}$	$0.50\text{V} \cdot \text{s}/\text{rad}$
第一关节力矩系数	$K_{m1}$	$1.00\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$
第二关节力矩系数	$K_{m2}$	$1.00\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$

设期望轨迹分别给定如下:

$$q_{1d}(t) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{4}{5}\pi t$$

$$q_{2d}(t) = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{4}{5}\pi t$$

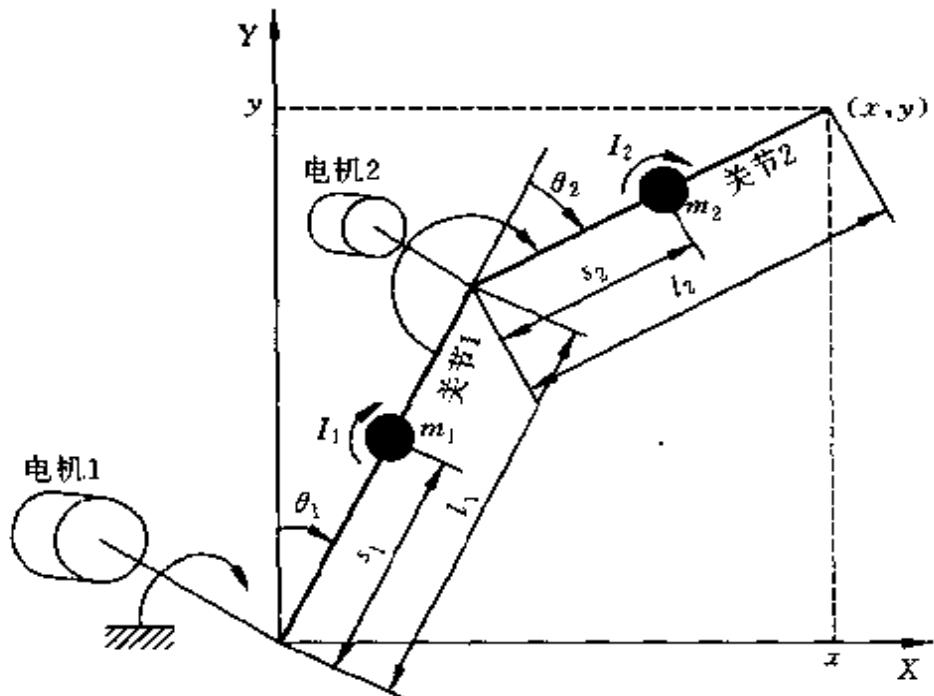


图 6.10 电机驱动机械臂的力学模型

而加权系数为  $r_1=r_2=0.1$ , 即评价信号为

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 0.1\bar{e}(t) \\ \vdots \\ 0.1\dot{\bar{e}}(t) \end{bmatrix}$$

对于该系统, 运用定理 6.3.1 设计鲁棒跟踪控制器, 取  $\alpha_1=\alpha_2=10$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_2=0.01$ ,  $\beta_1=\beta_2=1$ 。图 6.11 给出了干扰抑制水准分别取为

$$\gamma = 1, \gamma = 0.3, \gamma = 0.15$$

时的控制结果。该仿真是在表 6.3 的参数大约摄动 50% 的条件下进行的。可以看出  $\gamma$  越小, 控制误差也越小, 且具有较好鲁棒性能。

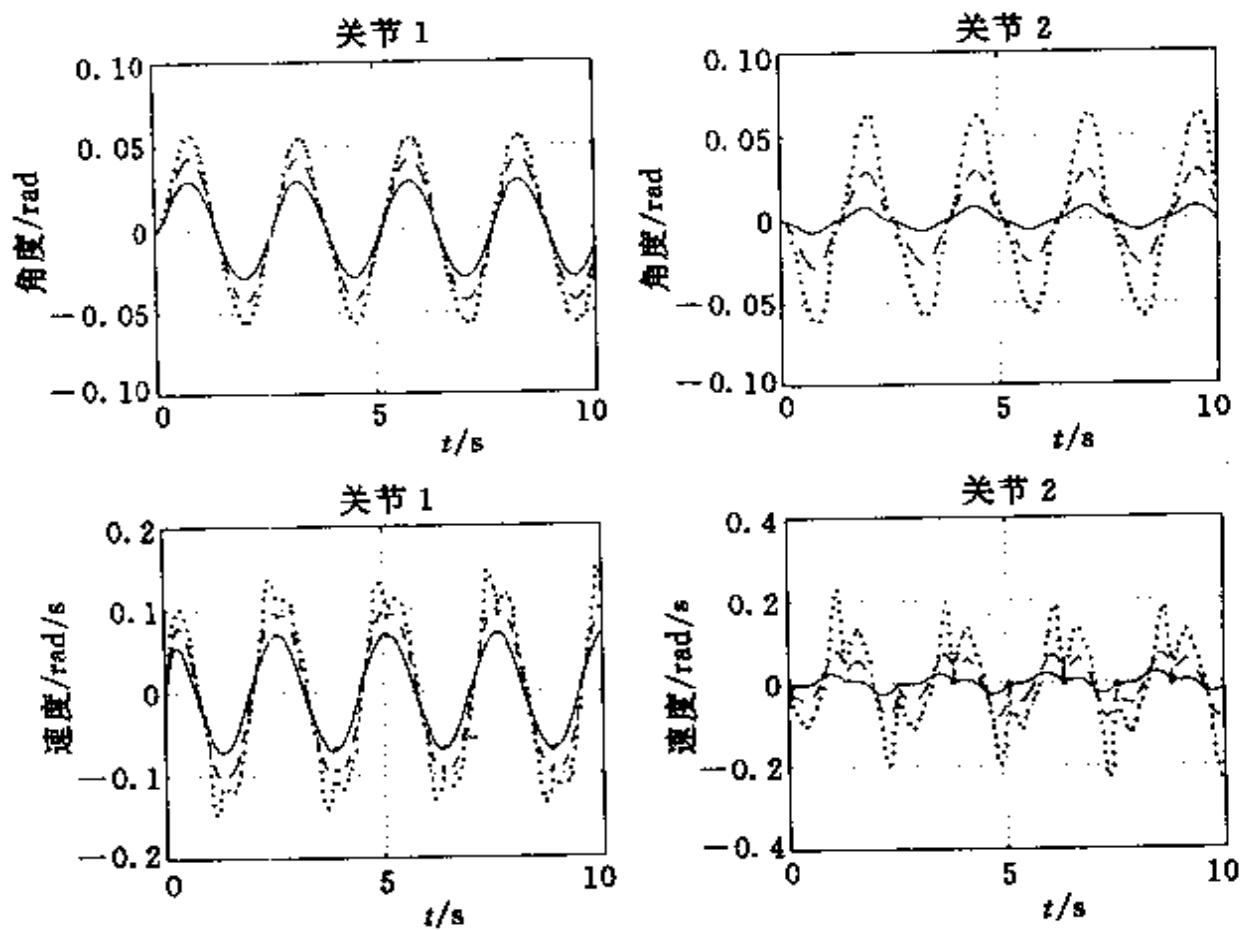


图 6.11 鲁棒控制数值仿真结果

## 第7章 基于观测器的主从式机器人的鲁棒控制

正如第1章所述,机器人的诞生始于人类欲摆脱单调繁杂劳动的愿望。特别是对于那些操作人员无法直接进入的恶劣环境,更需要具有高度自主性的机器人在无人操作的情况下自动地完成作业。但是,这种自动作业毕竟是要按照设计人员事先编制的程序来进行的,即使是智能型机器人,实际上也不具备和人一样的能动性,缺乏临场随机应变的处理能力。所谓主从式机器人就是为了弥补程序化机器人的这种缺陷而诞生的一类机器人。

主从机器人系统一般由结构相同的两个机械臂组成(图7.1是主从式机器人的示意图)。从属机械臂直接接触被操作对象,其位姿指令由位于操作现场外的主机械臂的位姿给定。而从属机械臂将其视觉、触觉、力觉等信息传递给主机械臂,以便操作者在改变主机械臂的位姿,通过从属机械臂实现预期的操作动作时,有亲临现场、直接接触被操作对象的感觉。因此,主从机械臂的控制问

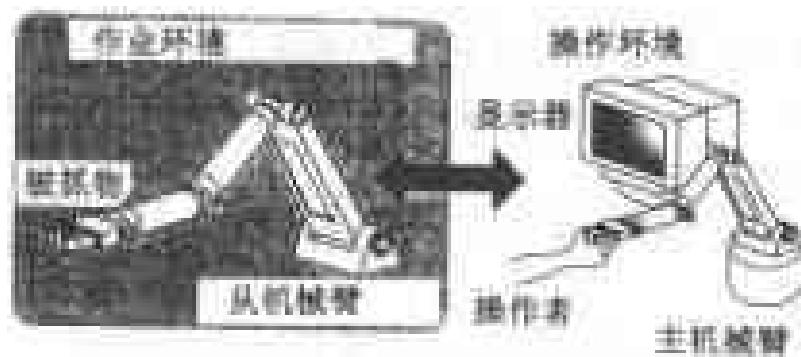


图7.1 主从机器人示意图

题是双方向的。即，从属机械臂的位姿必须准确地跟踪主机械臂的位姿，而主机械臂在运动中应该再现从属机械臂所受的阻力。

本章以单自由度机械臂为例，介绍主从式机器人系统鲁棒控制的基本思想。

## 7.1 数学模型

图 7.2 是具有一个自由度的主从式机械抓手的示意图。抓手可以看成是与机械臂的本体通过平移关节相联的连杆，其运动由一个标量坐标来表示。本章只讨论抓手的主从控制问题，而与抓手相连接的机械臂本身的运动并不视为控制对象。

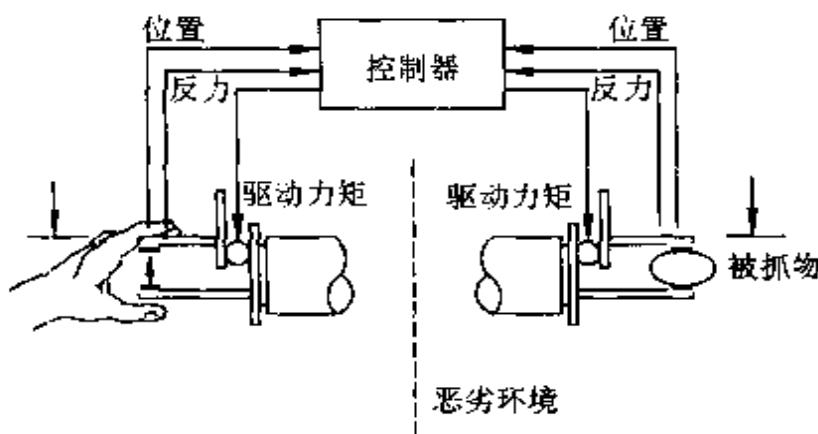


图 7.2 主从式机械臂结构示意图

为了建立被控对象的数学模型，做如下假设：

**假设 1** 只考虑从属机械抓手与被抓物(或称操作对象)相接触状态下的动态特性。

**假设 2** 从属机械抓手与被抓物接触且被抓物没发生变形时的位置为零。

**假设 3** 从属机械手的质量包含被抓物的质量。

**假设 4** 操作者对主机械手施加的操作力与主机械抓手本身

的动态特性无关。

在上述假设条件下, 主从式机械抓手的力学模型可以表示如图 7.3 所示。

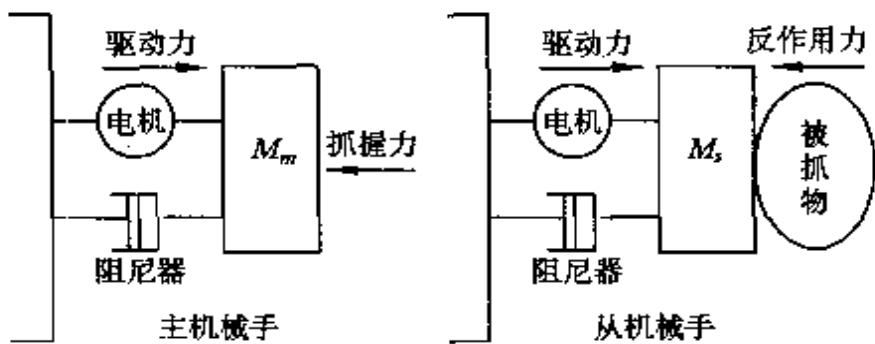


图 7.3 主从机械手力学模型

设主从机械抓手的质量分别为  $M_m$  和  $M_s$ , 粘性摩擦系数分别为  $b_m$  和  $b_s$ , 弹性摩擦可忽略不计。则主从机械抓手的动态特性由以下运动方程描述:

$$M_m \ddot{x}_m + b_m \dot{x}_m + \xi_m(\dot{x}_m, x_m) = \tau_m + f_m \quad (7.1)$$

$$M_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s + \xi_s(\dot{x}_s, x_s) = \tau_s - f_s \quad (7.2)$$

式中:  $x_m, x_s$  分别表示主从机械手的位置;  $\tau_m$  和  $\tau_s$  分别表示主从机械抓手的驱动力矩;  $f_m$  是操作者施加在主机械手上的操作抓握力,  $f_s$  是被抓物的反作用力;  $\xi_s(\dot{x}_s, x_s)$  和  $\xi_m(\dot{x}_m, x_m)$  是非线性函数, 表示模型误差。

而被抓物的反作用力和位置满足以下方程式:

$$f_s = b_w \dot{x}_s + k_w x_s + \xi_0(\dot{x}_s, x_s) \quad (7.3)$$

式中:  $b_w, k_w$  分别表示被抓物的粘性摩擦和弹性摩擦系数,  $\xi_0$  是表示模型误差的非线性函数。

**假设 5** 设非线性函数  $\xi_m, \xi_s, \xi_0$  均为未知, 但是其增益是有界的。即存在已知常数  $\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \sigma_{s1}, \sigma_{s2}$  以及  $\sigma_{w1}, \sigma_{w2}$ , 使得下式对任意  $x_m, \dot{x}_m, x_s, \dot{x}_s$  成立。

$$\begin{cases} \xi_m^2(\dot{x}_m, x_m) \leq \sigma_{m1}^2 \dot{x}_m^2 + \sigma_{m2}^2 x_m^2 \\ \xi_s^2(\dot{x}_s, x_s) \leq \sigma_{s1}^2 \dot{x}_s^2 + \sigma_{s2}^2 x_s^2 \\ \xi_0^2(\dot{x}_0, x_0) \leq \sigma_{w1}^2 \dot{x}_0^2 + \sigma_{w2}^2 x_0^2 \end{cases} \quad (7.4)$$

显然,  $\sigma_{m_i}, \sigma_{s_i}$  ( $i=1, 2$ ) 越大, 表示主从机械抓手的数学模型允许存在较大模型误差; 而  $\sigma_{w1}, \sigma_{w2}$  越大表示被抓物的不确定性范围较大。

如果取状态变量为  $x^T = [x_m \ \dot{x}_m \ x_s \ \dot{x}_s]$ , 控制输入向量为  $u^T = [\tau_m \ \tau_s]$ , 则主从式机械抓手的动态可以表示如下:

$$\dot{x} = Ax + B_1 f_m + B_2 u + \phi(x) \quad (7.5)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{M_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_w}{M_s} & -\frac{b_s + b_w}{M_s} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M_m} \xi_m(\dot{x}_m, x_m) \\ 0 \\ -\frac{1}{M_s} \xi_s(\dot{x}_s, x_s) - \frac{1}{M_s} \xi_0(\dot{x}_0, x_0) \end{bmatrix}$$

当  $f_m = 0, u = 0$  时,  $x = 0$  是(7.5)的平衡点。当  $f_m \neq 0$ , 即操作者对主机械抓手进行抓握操作时, 可以通过选择适当的控制输入

信号  $u$ , 使得  $x_s(t) = x_m(t)$  且  $f_s(t) = f_m(t)$ , 从而使操作者有直接抓握被抓物的感觉。

## 7.2 状态反馈控制律

由于操作者的抓握动作所产生的  $f_m(t)$  一般是不规则的信号, 因此, 我们无法采用常规的内模原理等手段来实现上述的位置和力的跟踪要求。下面考虑通过减小从操作力  $f_m$  至跟踪误差信号的  $L_2$  增益的方法, 来抑制由于抓握操作力引起的位置和力的误差。本节先求状态反馈控制律。

定义位置误差和力误差为

$$e_x(t) = x_m(t) - x_s(t) \quad (7.6)$$

$$e_f(t) = f_m(t) - f_s(t) \quad (7.7)$$

并定义评价信号为

$$z = [q_1 e_x \quad q_2 e_f \quad r_1 \tau_m \quad r_2 \tau_s]^T$$

其中,  $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, r_1 > 0, r_2 > 0$  均为加权系数。则  $z$  可以表示为

$$z = C_1 x + D_1 f_m + D_2 u + \psi(x) \quad (7.8)$$

其中

$$C_1 = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & -q_1 & 0 \\ 0 & 0 & -q_2 k_w & -q_2 b_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -q_2 \xi_0(\dot{x}_s, x_s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此时, 如果定义已知矩阵  $E_1, E_2$  如下:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M_s} & -\frac{1}{M_s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则未知函数向量  $\phi(x)$  和  $\psi(x)$  就可以表示为

$$\begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \Sigma(x) \quad (7.9)$$

其中,  $\Sigma(x)$  为未知函数向量, 其定义为

$$\Sigma(x) = \begin{bmatrix} \xi_m(\dot{x}_m, x_m) \\ \xi_s(\dot{x}_s, x_s) \\ \xi_o(\dot{x}_o, x_o) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

根据假设 5,  $\Sigma(x)$  是增益有界的。容易验证, 如果定义常数矩阵

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{m_1} & 0 & 0 \\ \sigma_{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{s_1} \\ 0 & 0 & \sigma_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{o_1} \\ 0 & 0 & \sigma_{o_2} & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\|\Sigma(x)\| \leq \|\mathbf{F}x\|, \forall x \quad (7.11)$$

因此, 本节所讨论的控制系统设计问题可以叙述如下: 对于给定的具有不确定性的被控对象(7.5)和(7.8), 求控制律

$$u = \mathbf{K}_1 x + \mathbf{K}_2 f_m \quad (7.12)$$

使得对于任意满足(7.11)式的未知函数  $\Sigma(x)$ , 闭环系统满足

(S1) 当  $f_m = 0$  时,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  是闭环系统渐近稳定的平衡点。

(S2) 当  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  时, 对于任意给定的  $T > 0$ ,

$$\int_0^T \| \mathbf{z} \|^2 dt \leq \int_0^T \| f_m \|^2 dt, \forall f_m$$

成立。

由(7.6)~(7.12)式所构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{B}_k f_m + \mathbf{E}_1 \Sigma(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{D}_k f_m + \mathbf{E}_2 \Sigma(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (7.13)$$

其中

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_2$$

为了设计理想的控制器, 定义辅助的被控对象为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v} \\ \mu = \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{x} + \hat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{w} + \hat{\mathbf{D}}_2 \mathbf{v} \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{E}_1], \quad \hat{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

不难验证, 令辅助输入信号

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} f_m \\ \Sigma(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{O}] \mu$$

以及反馈控制律

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{O}] \mathbf{w} \quad (7.15)$$

则(7.14)和(7.15)式所构成的闭环系统与(7.13)式是等价的。记由  $\mathbf{w}$  到  $\mu$  的闭环传递函数为

$$T_{\mu w}(s) = \hat{\mathbf{D}}_K + \hat{\mathbf{C}}_K (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1} \hat{\mathbf{B}}_K \quad (7.16)$$

其中,  $\hat{\mathbf{B}}_K = \hat{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{B}_2 [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{O}]$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_K = \hat{\mathbf{C}}_1 + \hat{\mathbf{D}}_2 [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{O}]$ ,

$\hat{\mathbf{D}}_K = \hat{\mathbf{D}}_1 + \hat{\mathbf{D}}_2 [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{O}]$ 。

显然,  $T_{\mu w}(s)$  是  $4 \times 4$  阶复函数阵。与此对应, 定义标定系数阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

**定理 7.2.1** 设闭环系统的传递函数(7.16)式在  $S$  闭右半平面是严格解析的。如果存在适当的标定系数  $\lambda > 0 (i=1, 2, 3, 4)$ , 使得

$$\|\Lambda^{-1}T_{\mu w}(s)\Lambda\|_\infty < 1 \quad (7.18)$$

成立, 则闭环系统(7.13)满足设计要求(S1)和(S2)。

**证明** 由(7.14)式和(7.15)式构成的闭环系统的输出为

$$\mu = T_{\mu w}(s)w$$

所以, 上式两边乘以标定系数阵的逆矩阵, 得

$$\Lambda^{-1}\mu = \Lambda^{-1}T_{\mu w}(s)\Lambda\Lambda^{-1}w$$

定义辅助输入、输出信号

$$\hat{\mu} = \Lambda^{-1}\mu, \hat{w} = \Lambda^{-1}w$$

则(7.18)式意味着该闭环系统从  $\hat{w}$  到  $\hat{\mu}$  的  $L_2$  增益严格小于 1, 即

$$\|\hat{\mu}\|_2 < \|\hat{w}\|_2, \forall \hat{w} \quad (7.19)$$

根据前面介绍的系统耗散性与  $L_2$  增益的关系可知, 存在正定函数  $V(x)$  沿该系统状态轨迹的对时间微分满足

$$\dot{V} < \frac{1}{2} \{ \|\hat{w}\|^2 - \|\hat{\mu}\|^2 \} \quad \forall \hat{w} \quad (7.20)$$

实际上可以证明, 由于该标称系统是线性时不变的, 所以满足(7.20)式的  $V(x)$  具有二次型结构, 且可以通过解适当代数里卡蒂方程得到。

现在考察(7.20)式, 当

$$\hat{w} = A^{-1} \begin{bmatrix} f_m \\ \Sigma(x) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

的情况,注意到

$$\hat{\mu} - A^{-1}\mu = A^{-1} \begin{bmatrix} z \\ Fx \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

则(7.20)式等价于

$$\begin{aligned} V &< \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} \|f_m\|^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \|z\|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\|\Lambda_0^{-1}\Sigma(x)\|^2 - \|\Lambda_0^{-1}Fx\|^2) \end{aligned} \quad (7.23)$$

由矩阵  $F$  的定义可知,若将  $F$  分块表示为

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

其中,  $F_i (i=1,2,3)$  均为  $2 \times 4$  阶矩阵, 则根据(7.4)式, 有

$$\|\xi_m\|^2 \leq \|F_1x\|^2, \quad \|\xi_s\|^2 \leq \|F_2x\|^2, \quad \|\xi_o\|^2 \leq \|F_3x\|^2$$

因此,(7.23)式可以表示为

$$\begin{aligned} V &< \frac{1}{2\lambda_1^2} \{ \|f_m\|^2 - \|z\|^2 \} + \frac{1}{2\lambda_2^2} \{ \|\xi_m(\dot{x}_m, x_m)\|^2 - \|F_1x\|^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_3^2} \{ \|\xi_s(\dot{x}_s, x_s)\|^2 - \|F_2x\|^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_4^2} \{ \|\xi_o(\dot{x}_o, x_o)\|^2 - \|F_3x\|^2 \} \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_1} \{ \|f_m\|^2 - \|z\|^2 \}, \quad \forall f_m \end{aligned} \quad (7.24)$$

故,令初始状态为零,对上式两端求积分并注意到  $V(x(0)) =$

$V(\mathbf{O})=0$ , 得

$$\int_0^T \|z\|^2 + 2\lambda_i V(\mathbf{x}(T)) \leq \int_0^T \|f_m\|^2 dt, \quad \forall f_m \quad (7.25)$$

即, 闭环系统(7.13)满足性能要求(S2)。

关于性能要求(S1), 只要考察  $f_m = 0$  时的(7.24)式可知,  $V(x)$  正是保证闭环系统鲁棒稳定性的李雅普诺夫函数。 △△△

上述定理表明, 对于标称系统(7.14), 如果我们能够求得使(7.18)式成立的反馈控制律(7.15), 那么此时的  $k_1$  和  $k_2$  就是鲁棒控制律(7.12)的反馈和前馈增益。因此, 主从式机械臂的鲁棒反馈控制系统的设计问题, 就可以归结为对辅助的标称系统, 求满足(7.18)式的标定系数  $\lambda_i (i=1,2,3,4)$  和反馈及前馈控制律

$$v = \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 w \quad (7.26)$$

的问题, 这类设计问题称为基于全信息的  $H_\infty$  标准设计问题, 并且可以借助于国际标准的 MATLAB 软件中的标准程序求解。实际上等价于求适当的代数里卡蒂方程(详见文献[8]和[28])。

应该指出, 并非所有具有(7.26)式结构的  $H_\infty$  控制问题的解都是欲求的鲁棒控制器,  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  必须满足  $\tilde{\mathbf{K}}_2 = [\mathbf{K}_2 \quad \mathbf{O}]$ 。

### 7.3 观测器的设计

如果机械臂的速度不可测, 则可以考虑引入状态观测器。但是, 由于被控对象具有非线性不确定性且闭环系统须满足  $L_2$  增益, 不能基于分离原理来设计观测器, 必须重新考察基于观测器的整个闭环系统的性能。

设机械臂的位置是可检测的, 即系统的可检测输出量为

$$y = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} \quad (7.27)$$

其中,

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

设状态反馈控制律(7.12)由上节的定理7.2.1给定。本节考虑具有如下结构的基于观测器的控制器

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_2 f_m \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1 f_m + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \quad (7.28)$$

其中,  $\hat{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  的估计值,  $\mathbf{L}$  是需要设计的观测器的增益,  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  是由定理7.2.1给出的反馈和前馈增益阵。

记,  $\tilde{\mathbf{D}} = \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{D}}_k \Lambda$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} = \Lambda^{-1} \mathbf{C}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}_k \Lambda$ , 则根据(7.16)式有

$$\Lambda^{-1} \mathbf{T}_{mu}(s) \Lambda = \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{C}}(sI - \mathbf{A}_k)^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \quad (7.29)$$

如果增益阵  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  是由定理7.2.1给定的, 即(7.18)式成立, 那么由传递函数阵的  $H_\infty$  范数与代数里卡蒂方程的关系可知, 存在正定阵  $\mathbf{P} > 0$ , 使得如下里卡蒂不等式成立:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_k + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} + (\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{C}}) < 0 \quad (7.30)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{R}} = I - \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}$ 。

**定理7.3.1** 设增益阵  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  由定理7.2.1给定, 且正定阵  $\mathbf{P} > 0$  满足(7.30)式。若存在正定阵  $\mathbf{Y}$  和常数  $\epsilon > 0$ , 使得

$$\mathbf{Y} \mathbf{A}_M^T + \mathbf{A}_M \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \left( \mathbf{Q} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \right) \mathbf{Y} + \mathbf{S} < 0 \quad (7.31)$$

成立, 则使得闭环系统(7.5)、(7.8)及(7.28)满足性能指标(S1)和(S2)的观测器的增益给定如下:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{Y} \mathbf{C}_2^T \quad (7.32)$$

而(7.31)式中的系数矩阵定义如下:

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{A} + [\mathbf{O} \ \mathbf{E}_1] \Lambda \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \left\{ \tilde{\mathbf{D}}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} + (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{M} \right\}$$

$$Q = \mathbf{M}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{M} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}^T (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}^T) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$S = [\mathbf{O} \ \mathbf{E}_1] \Lambda \tilde{\mathbf{R}}^{-1} (\tilde{\mathbf{R}} + (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{H}_{11}^{-1} (\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}})) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{E}_1^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 + \{(\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{C}}\} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{A}_k^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_k + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} + (\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{C}})$$

**证明** 令状态观测误差为  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ , 并用  $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{e}^T]^T$  表示由(7.5)、(7.8)及(7.28)式所构成的闭环系统的状态。则该闭环系统可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e f_m + \mathbf{E}_{1e} \Sigma(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{D}_e f_m + \mathbf{E}_{2e} \Sigma(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (7.33)$$

其中

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & -\mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_e = [\mathbf{C}_k \quad -\mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1], \quad \mathbf{D}_e = \mathbf{D}_k$$

$$\mathbf{E}_{1e} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{2e} = \mathbf{E}_2$$

与定理 7.2.1 的证明类似, 如果我们定义适当的辅助系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \hat{\mathbf{B}}_e \mathbf{w} \\ \mu_e = \hat{\mathbf{C}}_e \mathbf{x}_e + \hat{\mathbf{D}}_e \mathbf{w} \end{cases} \quad (7.34)$$

其中,  $\hat{\mathbf{B}}_e = [\mathbf{B}_e \quad \mathbf{E}_{1e}]$

$$\hat{\mathbf{C}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{E}_{2e} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} f_m \\ \Sigma(x) \end{bmatrix}$$

那么闭环系统(7.33)满足性能指标(S1)和(S2)的一个充分条件是存在适当的标定系数阵  $\Lambda$ ,使得

$$\|\Lambda^{-1}\mathbf{T}_{\mu_w}(s)\Lambda\|_\infty < 1 \quad (7.35)$$

成立。其中,  $\mathbf{T}_{\mu_w}$  表示辅助系统(7.34)的传递函数阵(详细证明与定理 7.21 类似)。

同理,由  $H_\infty$  范数和里卡蒂不等式的关系可知,(7.35)式成立且  $A_e$  为稳定阵的充分必要条件是存在适当的正定阵  $X$ ,使得

$$\mathbf{A}_e^T X + X A_e + \tilde{\mathbf{C}}_e^T \tilde{\mathbf{C}}_e + (X \tilde{\mathbf{B}}_e + \tilde{\mathbf{C}}_e^T \tilde{\mathbf{D}}_e) \tilde{\mathbf{R}}_e^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}_e^T X + \tilde{\mathbf{D}}_e^T \tilde{\mathbf{C}}_e) < \mathbf{0} \quad (7.36)$$

成立,其中,  $\tilde{\mathbf{B}}_e = \hat{\mathbf{B}}_e \Lambda$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_e = \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{C}}_e$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_e = \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{D}}_e \Lambda$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_e = I - \tilde{\mathbf{D}}_e^T \tilde{\mathbf{D}}_e$ 。

以下我们证明,当(7.31)式有正定解  $Y$  时,令

$$X = \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

则该正定阵  $X$  将满足不等式(7.36)。记

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_e^T X + X A_e + \tilde{\mathbf{C}}_e^T \tilde{\mathbf{C}}_e + (X \tilde{\mathbf{B}}_e + \tilde{\mathbf{C}}_e^T \tilde{\mathbf{D}}_e) \tilde{\mathbf{R}}_e^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}_e^T X + \tilde{\mathbf{D}}_e^T \tilde{\mathbf{C}}_e)$$

则不难验证:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{12}^T & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{H}_{12} = (P \tilde{\mathbf{B}}_e + \tilde{\mathbf{C}}_e^T \tilde{\mathbf{D}}_e) \tilde{\mathbf{R}}_e^{-1} \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_1^T \end{bmatrix} Y^{-1} + \mathbf{M}$$

$$\mathbf{H}_{22} = \left\{ \mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + [\mathbf{0} \ \mathbf{E}_1] \Lambda \tilde{\mathbf{R}}_e^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_e^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ \left[ -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{K}_1^T \mathbf{D}_2^T \right] (I + \tilde{\mathbf{D}}_e \tilde{\mathbf{R}}_e^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_e) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$+ \mathbf{Y}^{-1} [\mathbf{O} \ \mathbf{E}_1] \mathbf{A} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{E}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{Y}^{-1}$$

由(7.30)式可知,  $\mathbf{H}_{11} < 0$ 。故,(7.38)式是负定矩阵,当且仅当

$$\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12} < 0 \quad (7.39)$$

将  $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}$  及  $\mathbf{H}_{22}$  代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12} &= (\mathbf{A}_M - \mathbf{L}\mathbf{C}_2)^T \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{A}_M - \mathbf{L}\mathbf{C}_2) \\ &\quad + \mathbf{Q} + \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Y}^{-1} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12})\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}(\mathbf{A}_M - \mathbf{L}\mathbf{C}_2)^T + (\mathbf{A}_M - \mathbf{L}\mathbf{C}_2)\mathbf{Y} \\ &\quad + \mathbf{Y}\mathbf{Q}\mathbf{Y} + \mathbf{S} \end{aligned}$$

将(7.32)式代入上式右端, 并注意到(7.31)式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12})\mathbf{Y} \\ = \mathbf{Y}\mathbf{A}_M^T + \mathbf{A}_M\mathbf{Y} + \mathbf{Y} \left( \mathbf{Q} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \right) \mathbf{Y} + \mathbf{S} < \mathbf{0} \quad (7.40) \end{aligned}$$

因为,  $\mathbf{Y}$  是对称阵, 所以, 上式意味着

$$\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12} < \mathbf{0}$$

成立。故  $\mathbf{H} < \mathbf{0}$  得证。

上述定理表明, 为了得到理想的观测器增益, 我们必须求代数里卡蒂不等式(7.31)的正定解  $\mathbf{Y}$ 。因此, 本章所讨论的鲁棒控制器, 需要解两个里卡蒂不等式。这意味着这里所给出的控制器实际上等价于基于输出反馈的  $H_\infty$  设计问题的解。有兴趣的读者可进一步参阅文献[8], [29], [30]。

## 7.4 实验结果

下面通过一个设计实例来考察上述鲁棒控制系统的性能。主要从机械臂和被抓物的标称参数如表 7.1 所示。

表 7.1 机械臂及被抓物的标称参数

参数项目	参数值
$M_m$	0.768 kg
$b_m$	420.700 N · s/m
$M_i$	0.768 kg
$b_i$	417.500 N · s/m
$b_w$	30.000 N · s/m
$k_w$	1500.00 N/m

设不确定性的界由如下常数描述:

$$\sigma_{m_1} = 30, \quad \sigma_{m_2} = 10,$$

$$\sigma_{i_1} = 30, \quad \sigma_{i_2} = 10,$$

$$\sigma_{w_1} = 30, \quad \sigma_{w_2} = 1500$$

这表示被抓物的弹性系数具有较大范围的不确定性。

令描述干扰抑制性能的加权系数分别为

$$q_1 = 6000, q_2 = 0.5, r_1 = r_2 = 0.2$$

取标定系数分别为

$$\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.1; \lambda_3 = 0.5, \lambda_4 = 0.7$$

时,定理 7.2.1 的  $H_\infty$  设计问题有解,得满足(7.18)式的反馈增益  $K_1$  和前馈增益  $K_2$  如下:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -21777 & -698.67 & 16280 & 59.361 \\ 21532 & -70.387 & -24161 & -63.632 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.7280 \\ 2.7280 \end{bmatrix}$$

最后,根据定理 7.3.1 求观测器的增益。取  $\epsilon=0.5$  时,可验证(7.31)式有正定解  $Y$ ,计算(7.32)式,得理想的观测器增益为

$$L = \begin{bmatrix} 1.0537 & 0.80159 \\ -8.8930 & -10.2140 \\ 0.8016 & 1.0299 \\ 62.1810 & -109.0200 \end{bmatrix}$$

用上述增益阵构造的鲁棒控制系统,其结构框图如图 7.4 所示

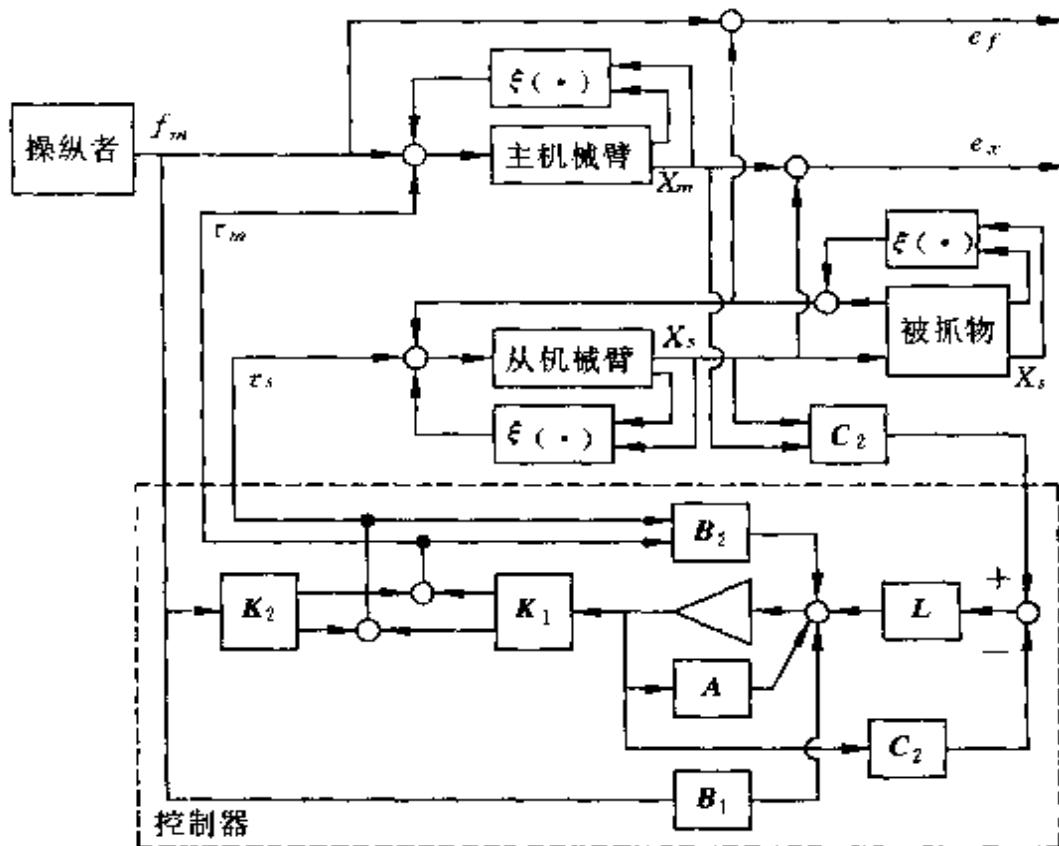


图 7.4 闭环控制系统结构框图

示。实际控制实验结果表示如图 7.5~图 7.8。每组实验分别进行了两次抓握动作,实线表示主机械臂的位置和力,虚线表示从机械臂的位置和力。图 7.5 和图 7.6 分别表示被抓物体是工业弹簧和橡胶皮球时的实验结果。尽管被抓物的弹性系数不同,但是位置和力均具有较好的跟踪性能。而图 7.7 和图 7.8 是相同条件下,采用直接状态反馈的实验结果。与图 7.5、图 7.6 采用观测器的情况相

比，显然后者的性能有所改善。

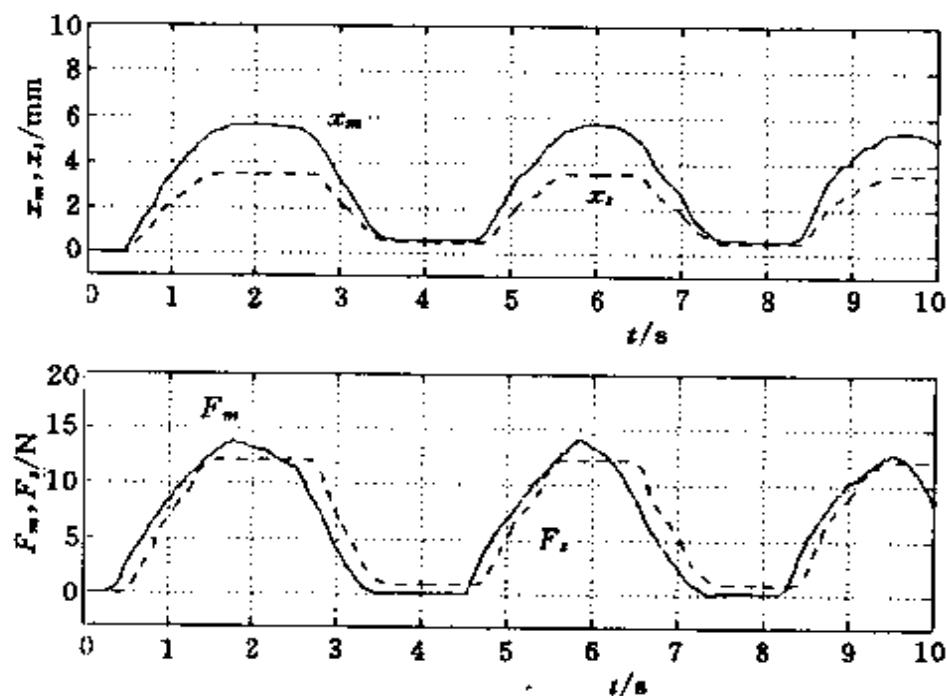


图 7.5 工业用弹簧抓握实验结果

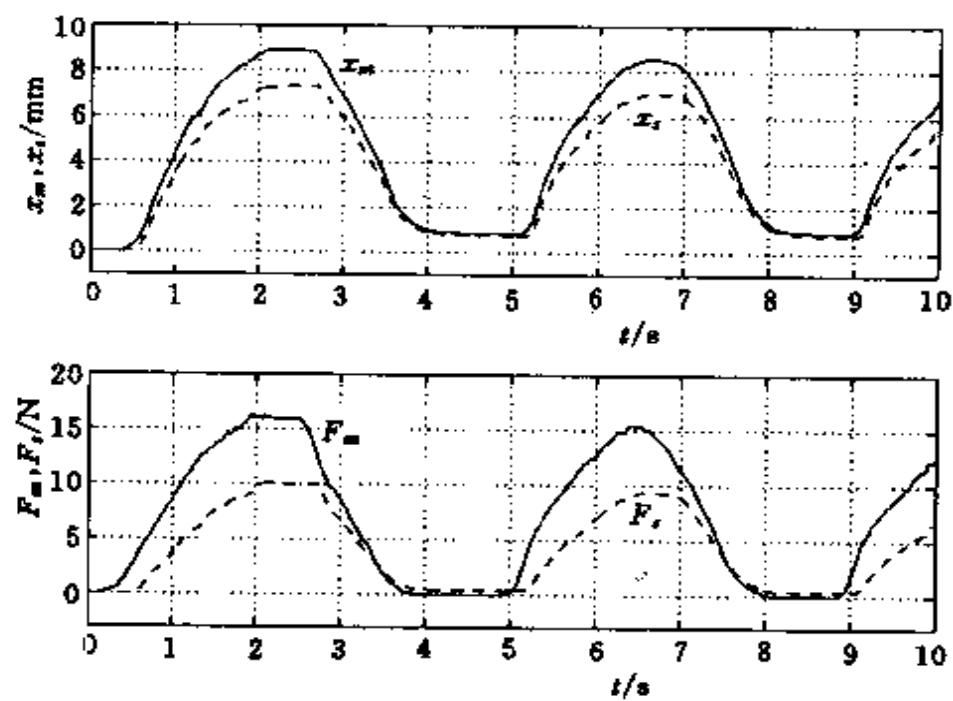


图 7.6 皮球抓握实验结果

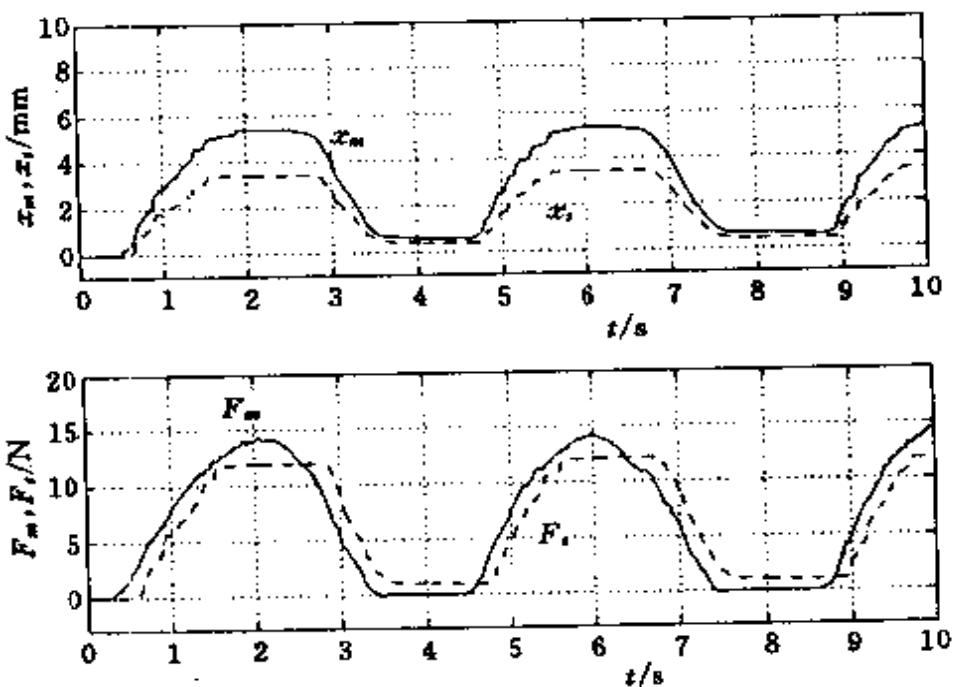


图 7.7 状态反馈控制器：弹簧抓握实验结果

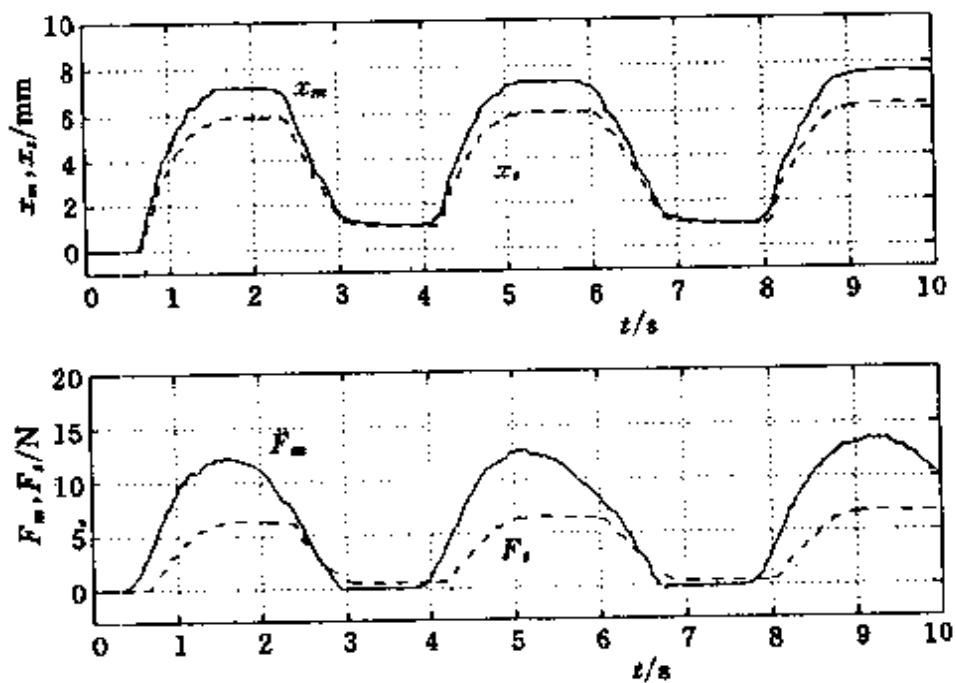


图 7.8 状态反馈控制器：皮球抓握实验结果

## 第8章 两足行走式机器人控制

具有与人体相似的结构、且依靠两足自立行走的机器人，一直是机器人学领域的热门课题。尽管在许多科学幻想影片中我们已经见过各种各样的其貌酷似人类的机器人，但是这种机器人其框架最终还是由连杆和关节所构成的。与一般机器人所不同的是它具备和人类的双腿相类似的连杆机构来支撑其整体，并通过自动操纵其关节来实现自立行走。因此，两足行走式机器人对控制的要求更为复杂。

本章介绍一种两足行走式机器人及其控制系统的设计方法。主要介绍立姿控制以及步行轨迹跟踪控制的基本思想和设计实例。

### 8.1 数学模型

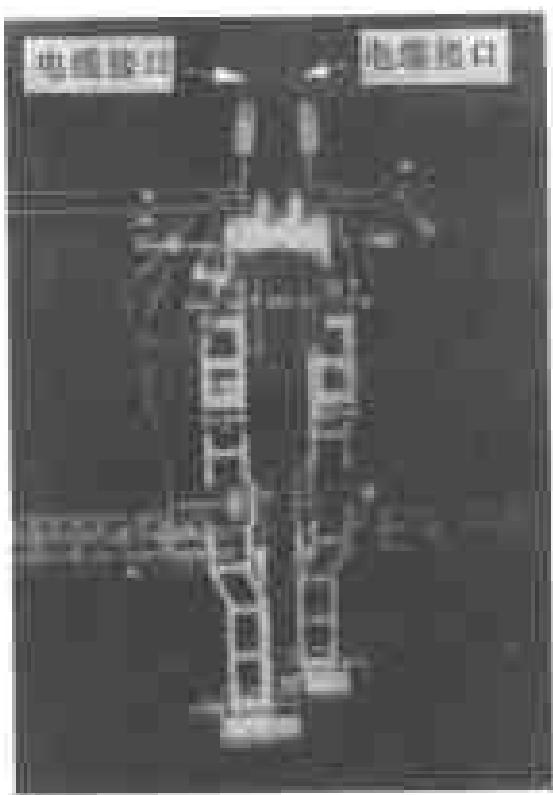
本章所讨论的两足行走式机器人如图 8.1(a)和图 8.1(b)所示。该机器人是由结构完全相同的两只“腿”所组成的；而每只腿则由 5 个连杆和 3 个驱动电机构成。与地面相接触的腿称为支撑腿，另一只不接触地面的腿则称为游腿。显然，该机器人连续进行步行动作时两只腿交替扮演支撑腿和游腿的角色。

严格地讲，该机器人的运动必须在三维空间描述，但是，为了简化问题只考虑与机器人移动方向重合的平面内的运动。假设机器人在与该平面相垂直的平面内始终处于垂直方向的直线上（见示意图 8.2），在这个假设条件下推导其运动方程。

图 8.3 是该机器人的连杆结构的示意图。支撑腿的 5 个连杆



(a)



(b)

图 8.1 两足行走机器人

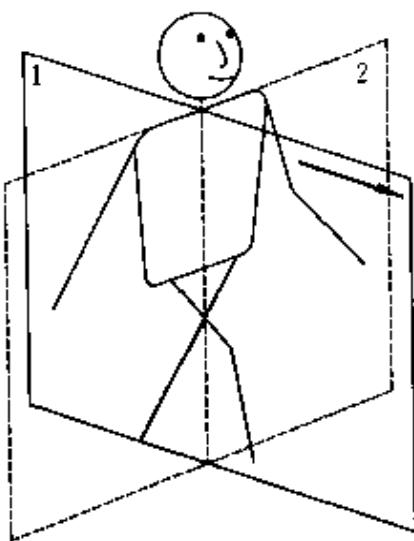


图 8.2 机器人行走姿态示意图

分别为  $L_i (i=1, 2, \dots, 5)$ , 连杆  $L_1$  装有驱动电机, 记其驱动力矩为

$u_1$ ; 连杆  $L_3$  分别装有驱动  $L_2$  和  $L_5$  的电机, 记其驱动力矩分别为  $u_2$  和  $u_3$ 。显然, 通过调整驱动力矩  $u_2$  和  $u_3$  来改变连杆  $L_3$  上点  $P$  的位置, 而通过操作  $u_1$  改变连杆  $L_1$  的角位移, 进而达到改变整个机器人前后位移的目的。游腿的结构与支撑腿完全相同, 驱动电机的位置也一样, 只是游腿有一个连杆与支撑腿的连杆  $L_3$  共用。为了区别表示我们记游腿的其他连杆分别为  $L_j$ , ( $j=6, 7, 8, 9$ ), 且不与地面接触的底座(相当于脚)记为连杆  $L_{10}$ 。游腿的三个驱动力矩分别记为  $u_4, u_5, u_6$ 。

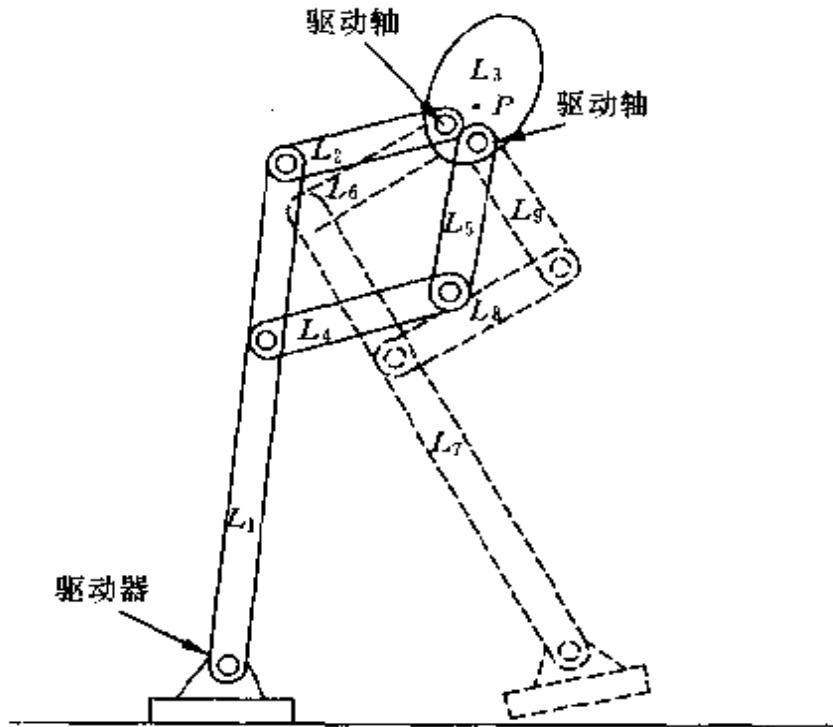


图 8.3 机器人的连杆结构

如果记各连杆的长度和质量分别为  $L_i, m_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ), 质心至旋转关节的距离分别为  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ), 则该机器人的力学模型如图 8.4 所示。记连杆  $L_1, L_2$ (或  $L_4$ ),  $L_3, L_6$ (或  $L_8$ ),  $L_7$ (或  $L_9$ ) 与垂直方向的夹角分别为  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ), 并假设  $L_{10}$  的质心与关节的轴心重合,  $L_4$  与  $L_1$  的关节轴心至  $L_1$  的质心的距离为  $l$ ,

(游腿相应参数亦同)。以支撑腿的关节轴心为原点,引入直角坐标系如图。

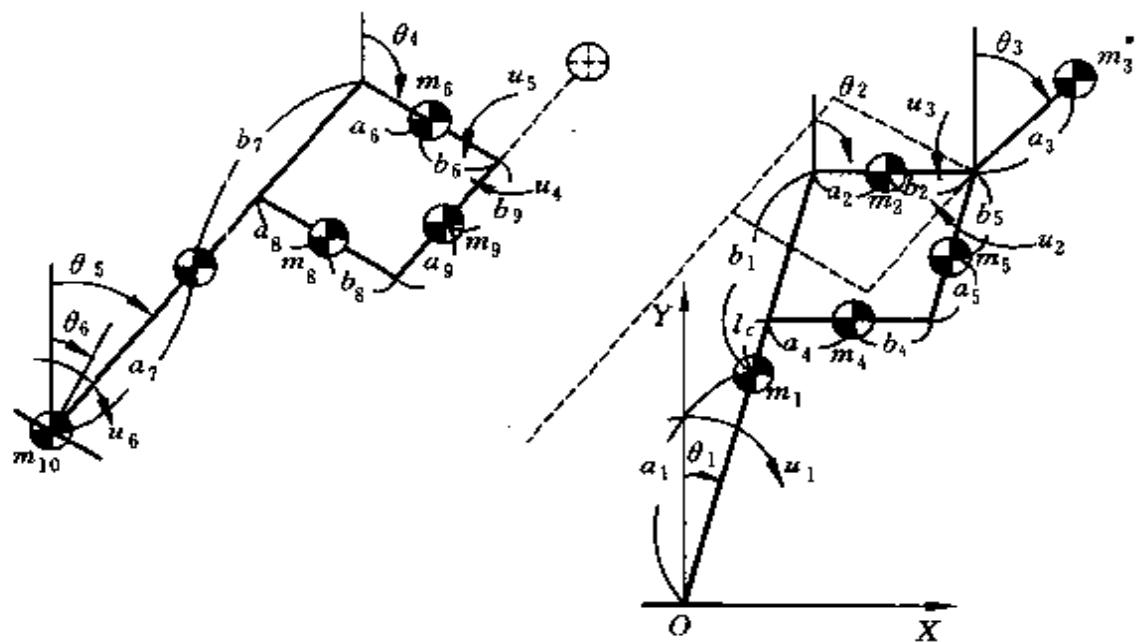


图 8.4 机器人的力学模型

令各质点  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) 的位置坐标为  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 则不难验证,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = a_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} x_3 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 \\ y_3 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} x_4 = (a_1 + l_c) \sin \theta_1 + a_4 \sin \theta_2 \\ y_4 = (a_1 + l_c) \cos \theta_1 + a_4 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} x_5 = (a_1 + l_c + a_5) \sin \theta_1 + l_4 \sin \theta_4 \\ y_5 = (a_1 + l_c + a_5) \cos \theta_1 + l_4 \cos \theta_4 \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} x_6 = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 - b_6 \sin \theta_4 \\ y_6 = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 - b_6 \cos \theta_4 \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\begin{cases} x_7 = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 - l_6 \sin \theta_4 - b_7 \sin \theta_5 \\ y_7 = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 - l_6 \cos \theta_4 - b_7 \cos \theta_5 \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\begin{cases} x_8 = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 - l_9 \sin \theta_5 - b_8 \sin \theta_4 \\ y_8 = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 - l_9 \cos \theta_5 - b_8 \cos \theta_4 \end{cases} \quad (8.8)$$

$$\begin{cases} x_9 = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 - b_9 \sin \theta_5 \\ y_9 = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 - b_9 \cos \theta_5 \end{cases} \quad (8.9)$$

$$\begin{cases} x_{10} = l_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 - l_6 \sin \theta_4 - l_7 \sin \theta_5 \\ y_{10} = l_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 - l_6 \cos \theta_4 - l_7 \cos \theta_5 \end{cases} \quad (8.10)$$

其中,  $b_i = l_i - a_i$  ( $i = 6, 7, 8, 9$ )。

所以该机器人系统的动能  $V$  可以求得如下:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}(I_1 + I_5)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(I_2 + I_4)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \\ & + \frac{1}{2}(I_6 + I_8)\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}(I_7 + I_9)\dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2}I_{10}\dot{\theta}_6^2 \\ & + \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \end{aligned} \quad (8.11)$$

其中,  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) 是各连杆的转动惯量。将 (8.1) 式 ~ (8.10) 式代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 L_{ii}\dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=2}^5 L_{1j} \cos(\theta_1 - \theta_j) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_j \\ & + \sum_{k=3}^5 L_{2k} \cos(\theta_2 - \theta_k) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_k + L_{45} \cos(\theta_4 - \theta_5) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \end{aligned} \quad (8.12)$$

式中,  $L_{11} = I_1 + I_5 + m_1 a_1^2 + l_1^2 \left\{ \sum_{i=2}^3 m_2 + \sum_{j=6}^{10} m_j \right\}$   
 $+ m_4 (a_1 + l_4)^2 + m_5 (a_1 + l_4 + a_5)^2$

$$L_{22} = I_2 + I_4 + m_2 a_2^2 + m_3 a_4^2 + m_5 l_4^2 + l_2^2 \left( m_3 + \sum_{i=6}^{10} m_i \right)$$

$$L_{33} = I_3 + m_3 a_3^2$$

$$L_{44} = I_6 + I_8 + m_8 b_8^2 + (m_6 + m_7 + m_{10}) l_6^2$$

$$L_{55} = I_7 + I_9 + (m_7 + m_{10}) l_7^2 + (m_8 + m_9) l_9^2$$

$$L_{66} = I_{10}$$

$$\begin{aligned} L_{12} = & m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2 + m_4 a_4 (a_1 + l_c) + m_5 l_4 (a_1 + l_c + a_5) \\ & + m_6 l_1 l_2 + m_7 l_1 l_2 + m_8 l_1 l_2 + m_9 l_1 l_2 + m_{10} l_1 l_2 \end{aligned}$$

$$L_{13} = m_3 l_1 a_3$$

$$L_{14} = -m_5 l_1 b_6 - m_7 l_1 l_6 - m_8 l_1 b_8 - m_{10} l_1 l_6$$

$$L_{15} = -m_7 l_1 b_7 - m_8 l_1 l_9 - m_9 l_1 b_9 - m_{10} l_1 l_9$$

$$L_{23} = m_3 l_2 a_3$$

$$L_{24} = -m_6 l_2 b_6 - m_7 l_2 l_6 - m_8 l_2 b_8 - m_{10} l_2 l_6$$

$$L_{25} = -m_7 l_2 b_7 - m_8 l_2 l_9 - m_9 l_2 b_9 - m_{10} l_2 l_9$$

$$L_{45} = m_7 l_6 b_7 + m_8 l_2 b_8 + m_{10} l_6 l_7$$

而该系统的势能总和为

$$U = \sum_{i=1}^{10} m_i g y_i \quad (8.13)$$

同理将(8.1)~(8.10)式代入上式,整理得

$$U = \sum_{i=1}^5 g G_i \cos \theta_i$$

其中,

$$\begin{aligned} G_1 = & m_1 a_1 + m_4 (a_1 + l_c) + m_5 (a_1 + l_c + a_5) \\ & + \left( \sum_{i=2}^3 m_i + \sum_{j=6}^{10} m_j \right) l_1 \end{aligned}$$

$$G_2 = m_2 a_2 + m_3 l_2 + m_4 a_4 + m_5 l_4 + l_2 \sum_{i=6}^{10} m_i$$

$$G_3 = m_3 a_3$$

$$G_4 = -m_6l_6 - m_7l_6 - m_8l_8 - m_{10}l_6$$

$$G_5 = -m_7b_7 - m_8l_9 - m_9b_8 - m_{10}l_7$$

故,根据第3章介绍的拉格朗日运动学,建立该机器人的运动方程如下:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (8.14)$$

其中,  $\tau_i$  表示  $\theta_i$  方向上的等效力矩,  $L$  是拉格朗日函数, 即  $L = V - U$ 。将(8.12)和(8.14)式代入上式, 得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (8.15)$$

进一步整理, 并用矩阵方程形式表示(8.15)式, 得出如下的运动方程

$$J(\theta)\ddot{\theta} + f(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \quad (8.16)$$

其中,  $\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]$ ,  $\tau^T = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5 \ \tau_6]$ ,  $J(\theta)$ ,  $f(\theta, \dot{\theta})$ ,  $G(\theta)$  分别为如下定义的  $6 \times 6$  阶矩阵式向量:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & 0 \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & 0 \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ j_{14} & j_{24} & 0 & j_{44} & j_{45} & 0 \\ j_{15} & j_{25} & 0 & j_{45} & j_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{66} \end{bmatrix}$$

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & c_{12}\dot{\theta}_2 & c_{13}\dot{\theta}_3 & c_{14}\dot{\theta}_4 & c_{15}\dot{\theta}_5 & 0 \\ -c_{12}\dot{\theta}_1 & 0 & c_{23}\dot{\theta}_3 & c_{24}\dot{\theta}_4 & c_{25}\dot{\theta}_5 & 0 \\ -c_{13}\dot{\theta}_1 & -c_{23}\dot{\theta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{14}\dot{\theta}_1 & -c_{24}\dot{\theta}_2 & 0 & 0 & c_{45}\dot{\theta}_5 & 0 \\ -c_{15}\dot{\theta}_1 & -c_{25}\dot{\theta}_2 & 0 & -c_{45}\dot{\theta}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} -gG_1\sin\theta_1 \\ -gG_2\sin\theta_2 \\ -gG_3\sin\theta_3 \\ -gG_4\sin\theta_4 \\ -gG_5\sin\theta_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j_{nm} = L_{nm}\cos(\theta_n - \theta_m), \quad n, m = 1, 2, \dots, 6$$

$$c_{kh} = L_{kh}\sin(\theta_k - \theta_h), \quad k, h = 1, 2, \dots, 6$$

以上得到的运动方程(8.16)中,等效驱动输入力矩  $\tau$  的各分量  $\tau_i$  与实际的驱动输入力矩  $u_i$  不一致。为了实现控制输入  $\tau_i$ ,我们必须求出与其等价的  $u_i$ ,显然,如果选取广义坐标  $q_1, q_2, \dots, q_6$ ,如图 8.5 所示,那么驱动输入  $u_i$  就和  $q_i$  方向一致。如果,假设  $\delta q_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) 是与  $\theta$  坐标下的位移  $\delta\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) 相等价的  $q_i$  坐标下的位移,计算此时实际位移所对应的功,有

$$u_i \delta q_i = \delta\theta_i \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

或等价地,

$$\delta q^T u = \delta\theta^T \tau \quad (8.17)$$

其中,  $\delta q^T = [\delta q_1 \ \delta q_2 \ \delta q_3 \ \delta q_4 \ \delta q_5 \ \delta q_6]$ ,  $\delta\theta^T = [\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3 \ \delta\theta_4 \ \delta\theta_5 \ \delta\theta_6]$ 。

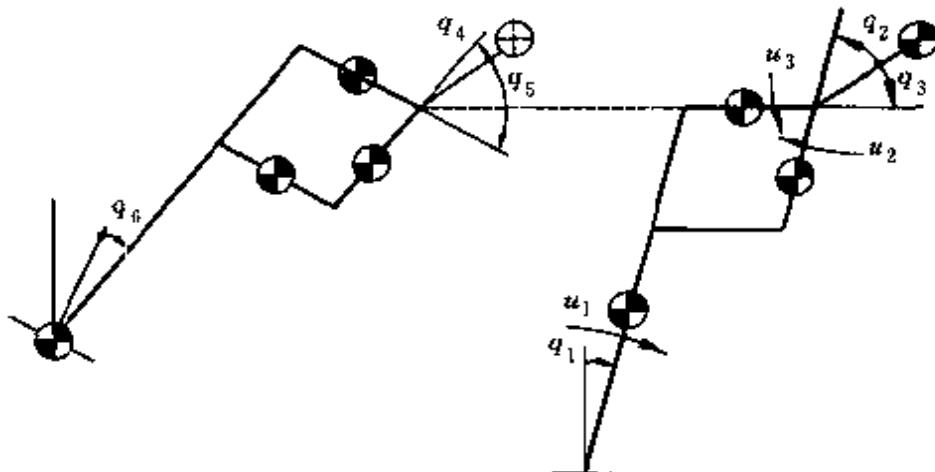


图 8.5 机器人的广义坐标系

由于  $\theta$  和  $q$  满足

$$q = K\theta \quad (8.18)$$

其中,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以, 将(8.18)式代入(8.17)式, 得等价输入为

$$\tau = K^T u \quad (8.19)$$

故, 两足行走式机器人的运动方程为

$$J(\theta)\dot{\theta} + f(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = K^T u \quad (8.20)$$

其中,  $u$  为各驱动电机的输出力矩向量。

## 8.2 两腿支撑姿态的控制

为了实现两腿自立行走动作, 最理想的情况是控制所有连杆的位置, 使其跟踪期望轨迹。但是, 正如上节所示, 两足机器人是一个具有 6 个位置变量的系统, 因此, 严格地在状态空间描述的话, 该系统是 12 维的 6 输入系统。如果我们同时考虑全状态的控制, 势必造成控制器的复杂化。

但是, 从模仿人类两腿自立行走的过程来看, 只要能够做到两腿交替承担支撑腿和游腿的角色, 而第 3 连杆  $L_3$  的质心(以下称为机器人的上体)的高度  $y_3$  保持一定, 且其水平方向的位置按一定的轨迹前进, 即可以实现自立行走。进一步观察可知, 影响上体水平位置的主要因素是支撑腿的连杆  $L_1$  的驱动力矩  $u_1$ , 而上体的高度则主要受力矩  $u_2$  和  $u_3$  的支配。显然, 这二者之间还存在耦合

关系,但是为了尽可能地简化控制系统的设设计问题,我们可以分别处理这二者的控制问题,并在设计过程中充分考虑对耦合影响的鲁棒性。

观察人类的行走过程可知,两足自立行走是两腿支撑姿态和单腿支撑姿态的交替平滑过渡过程。按照这个思路去实现自立行走的话,首先必须实现机器人的两腿自立姿态,做到在两腿支撑的条件下,上体可以跟踪期望轨迹,以便平滑过渡到单腿支撑姿态。

本节首先讨论两腿支撑姿态的控制问题。

为了简化控制器,我们进一步简化机器人在两腿支撑状态下的数学模型。为此,考虑如图 8.6 所示的力学模型,即机器人各连杆的质量之和可以等效地表示为一个质点  $m$ ,且位于连杆  $L_3$  上。

以支撑腿接触地面的关节的轴心为原点取坐标系如图 8.7(a)。质点  $m$  的坐标  $x, y$  和连杆  $L_3$  的倾斜角度  $\theta$  可以求得如下:

$$\begin{cases} x = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_3 \sin(q_1 + q_2) \\ y = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_3 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta = q_1 + q_2 \end{cases} \quad (8.21)$$

记坐标  $\mathbf{p}^T = [x \ y \ \theta]$ ,  $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ q_3]$ , 则上式可以表示为

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (8.22)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_3 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_3 \cos(q_1 + q_2) \\ q_1 + q_2 \end{bmatrix}$$

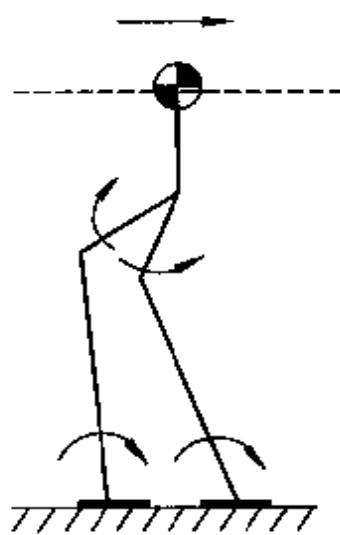


图 8.6 两腿支撑姿态示意图

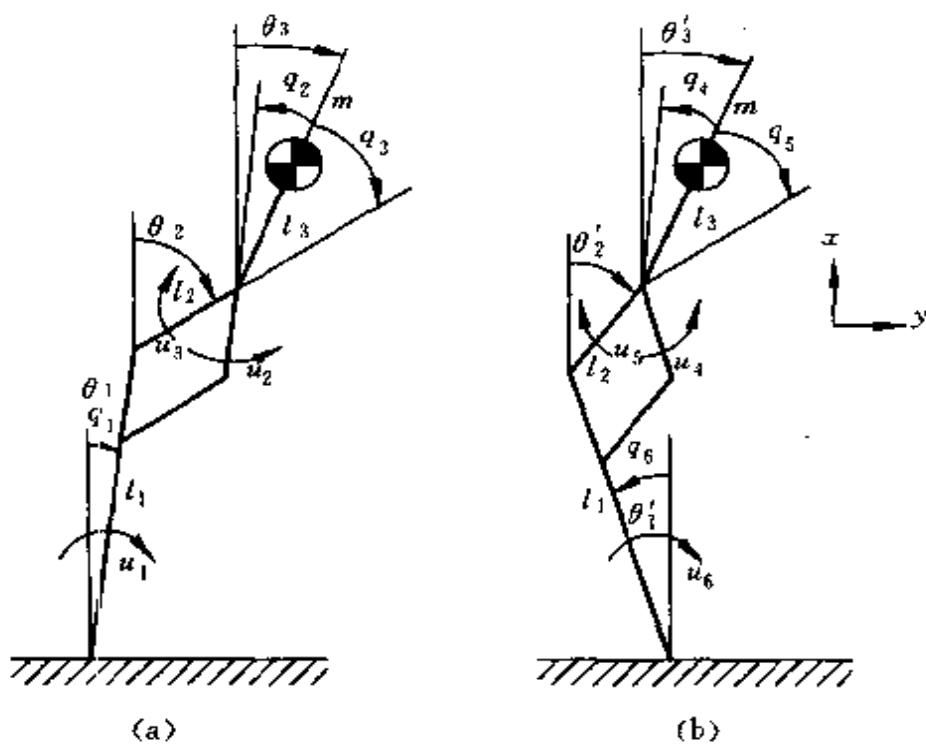


图 8.7 支撑腿的力学模型

根据牛顿定律,得质点  $m$  沿  $p$  坐标方向的运动方程如下:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \tau_x \\ m\ddot{y} = \tau_y - mg \\ I\ddot{\theta} = \tau_\theta \end{cases} \quad (8.23)$$

其中,  $\tau_x, \tau_y, \tau_\theta$  分别为  $p$  坐标各分量方向上的等效力或力矩。记  $\tau^T = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_\theta]$ , 则

$$M\ddot{p} = \tau + Bg \quad (8.24)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -m \\ 0 \end{bmatrix}$$

与上节所述同理,求与  $\tau$  等效的实际驱动输入  $u$ 。由(8.17)式,有

$$\delta q^T u = \delta p^T \tau$$

又因为

$$\delta p = \frac{\partial F(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q}$$

其中,  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \frac{\partial F(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  是雅可比矩阵。所以

$$\tau = \mathbf{K}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (8.25)$$

式中,  $\mathbf{K}^{-T} = (\mathbf{K}^T)^{-1}$ 。

利用(8.22)式不难验证,

$$\mathbf{K}^{-T}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = -\frac{\sin \theta_2}{l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{12} = \frac{\sin \theta_2}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{13} = \frac{\sin \theta_1}{l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{21} = -\frac{\cos \theta_2}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{22} = \frac{\cos \theta_2}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{23} = \frac{\cos \theta_1}{l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{31} = \frac{l_3 \sin(\theta_2 - \theta)}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{32} = \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_3 \sin(\theta_2 - \theta)}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

$$k_{33} = \frac{-l_3 \sin(\theta_1 - \theta) - l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)},$$

其中,

$$\begin{cases} \theta_1 = q_1 \\ \theta_2 = q_1 + q_2 + q_3 \\ \theta = q_1 + q_2 \end{cases} \quad (8.26)$$

所以, 将上述结果代入(8.24)式得

$$\begin{cases} m\ddot{x} = k_{11}(\mathbf{q})u_1 + k_{12}(\mathbf{q})u_2 + k_{13}(\mathbf{q})u_3 \\ m\ddot{y} = k_{21}(\mathbf{q})u_1 + k_{22}(\mathbf{q})u_2 + k_{23}(\mathbf{q})u_3 - g \\ I\ddot{\theta} = k_{31}(\mathbf{q})u_1 + k_{32}(\mathbf{q})u_2 + k_{33}(\mathbf{q})u_3 \end{cases} \quad (8.27)$$

对另一支撑腿重复上述操作, 得

$$\begin{cases} m\ddot{x} = h_{11}(\tilde{\mathbf{q}})u_4 + h_{12}(\tilde{\mathbf{q}})u_5 + h_{13}(\tilde{\mathbf{q}})u_6 \\ m\ddot{y} = h_{21}(\tilde{\mathbf{q}})u_4 + h_{22}(\tilde{\mathbf{q}})u_5 + h_{23}(\tilde{\mathbf{q}})u_6 - g \\ I\ddot{\theta} = h_{31}(\tilde{\mathbf{q}})u_4 + h_{32}(\tilde{\mathbf{q}})u_5 + h_{33}(\tilde{\mathbf{q}})u_6 \end{cases} \quad (8.28)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{q}}^T = [q_4 \quad q_5 \quad q_6]$

$$h_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\sin \tilde{\theta}_2}{l_1 \sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\sin \tilde{\theta}_1}{l_2 \sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{13}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{-\sin \tilde{\theta}_2}{l_1 \sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\cos \tilde{\theta}_2}{l_1 \sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\cos \tilde{\theta}_1}{l_2 \sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{23}(\tilde{q}) = \frac{-\cos\tilde{\theta}_2}{l_1\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{31}(\tilde{q}) = \frac{l_1\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2) - l_3\sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta})}{l_1\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{32}(\tilde{q}) = \frac{-l_3\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}) - l_2\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}{l_2\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$h_{33}(\tilde{q}) = \frac{l_3\sin(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta})}{l_1\sin(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)}$$

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = q_6 \\ \tilde{\theta}_2 = q_4 + q_5 + q_6 \\ \tilde{\theta} = q_4 + q_6 \end{cases}$$

实际上,  $u_1, u_2, \dots, u_6$  是同时作用在  $m$  上的, 所以, 将(8.27)式和(8.28)式的右端分别求和, 从而得出两腿支撑时的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 k_{1i} u_i + \frac{1}{m} \sum_{j=4}^6 h_{1(j-3)} u_j \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 k_{2i} u_i + \frac{1}{m} \sum_{j=4}^6 h_{2(j-3)} u_j - g \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^3 k_{3i} u_i + \frac{1}{I} \sum_{j=4}^6 h_{3(j-3)} u_j \end{cases} \quad (8.29)$$

下面就基于这个模型设计控制器。两腿支撑姿态控制的目的是使  $x(t)$  跟踪给定的轨迹  $x_d(t)$ , 以达到上体向前平移的目的, 而  $y(t)$  和  $\theta(t)$  则控制在给定值上。为了达到这个目的, 我们把系统(8.29)分成两个子系统, 分别设计控制器。子系统分别称为  $x$  系统和  $y$  系统, 且描述如下:

$$\ddot{x} = G_1(q)u_x + G_2(q)u_y \quad (8.30)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_3(q)u_y + \mathbf{G}_4(q)u_x + \mathbf{G}_0g \quad (8.31)$$

其中,  $u_x^T = [u_1 \ u_6]$ ,  $u_y^T = [u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5]$

$$\mathbf{G}_1(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{11}(q) & \frac{1}{m}h_{16}(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_2(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{12}(q) & \frac{1}{m}k_{13}(q) & \frac{1}{m}h_{14}(q) & \frac{1}{m}h_{15}(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{22}(q) & \frac{1}{m}k_{23}(q) & \frac{1}{m}h_{24}(q) & \frac{1}{m}h_{25}(q) \\ \frac{1}{I}k_{32}(q) & \frac{1}{I}k_{33}(q) & \frac{1}{I}h_{34}(q) & \frac{1}{I}h_{35}(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_4(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{21}(q) & \frac{1}{m}h_{26}(q) \\ \frac{1}{I}k_{31}(q) & \frac{1}{I}h_{36}(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定义状态变量分别为  $x_p^T = [x \ \dot{x}]$ ,  $y_p^T = [y \ \theta \ \dot{y} \ \dot{\theta}]$ , 则得(8.30)和(8.31)式的状态空间表示如下:

$$\dot{x}_p = \mathbf{A}_1 x_p + \mathbf{B}_{11} u_y + \mathbf{B}_{12} u_x \quad (8.32)$$

$$\dot{y}_p = \mathbf{A}_2 y_p + \mathbf{B}_{21} u_x + \mathbf{B}_{22} u_y + \mathbf{B}_{20} g \quad (8.33)$$

其中,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2(q) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_1(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_4(q) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_3(q) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

首先考虑  $x$  系统的跟踪控制问题。设  $x_p$  的期望轨迹由如下定义的参数模型的状态给出:

$$\dot{x}_m = \mathbf{A}_{1m} x_m + \mathbf{B}_{1m} r_x \quad (8.34)$$

其中,  $r_x$  为指令信号,

$$A_{1m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad B_{1m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k_1 < 0, k_2 < 0 \text{ 为常数}$$

我们的设计目标就是要保证跟踪误差

$$e_x = x_p - x_m \quad (8.35)$$

渐近趋近于零,且  $y$  系统控制输入信号  $u_y$  对  $e_x$  的影响尽可能小。

为此,对(8.32)式先进行线性化处理。令

$$G_2(q) = G_2(O)[1 + \Delta_2(q)] \quad (8.36)$$

其中,  $\Delta_2(q)$  为已知标量函数,表示相对误差。对  $G_1(q)$  则引入非线性补偿

$$\begin{cases} u_x = G_1^T(q) \{G_1(q)G_1^T(q)\}^{-1}(\nu_x + u_{xx}) \\ \nu_x = \ddot{x}_d + k_2(\dot{x}_p - \dot{x}_d) + k_1(x_p - x_d) \end{cases} \quad (8.37)$$

其中,  $x_m^T = [x_d \dot{x}_d]$ ,  $u_{xx}$  是新的控制输入信号,此时(8.32)和(8.37)式可以表示为

$$\dot{x}_p = A_1 x_p + \bar{B}_{11} w_1 + \bar{B}_{12} (\nu_x + u_{xx}) \quad (8.38)$$

其中,

$$\bar{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -G_2(0) \end{bmatrix} \quad \bar{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$w_1 = [1 + \Delta_2(q)]u_y$$

根据(8.34)、(8.38)及(8.37)式,可求得误差方程如下:

$$\dot{e}_x = A_{m1} e_x + \bar{B}_{11} w_1 + \bar{B}_{12} u_{xx} + \bar{B}_{12} (\ddot{x}_d - k_2 \dot{x}_d - k_1 x_d - r)$$

由(8.34)式,有

$$\ddot{x}_d - k_2 \dot{x}_d - k_1 x_d = r_x$$

故,误差方程可以表示为

$$\dot{e}_x = A_{m1} e_x + \bar{B}_{11} w_1 + \bar{B}_{12} u_{xx} \quad (8.39)$$

因为,  $A_{m1}$  是稳定阵,所以该误差系统是稳定的。为了减小  $y$  系统驱动信号  $u_y$  和线性化误差  $\Delta_2$  对跟踪误差  $e_x$  的影响,我们引入  $L_2$  增

益性能指标如下：

$$\int_0^T (\mathbf{e}_x^\top \mathbf{Q}_1^2 \mathbf{e}_x + \mathbf{u}_{xx}^\top \mathbf{R}_1^2 \mathbf{u}_{xx}) dt \leq \int_0^T \mathbf{w}_1^\top \mathbf{w}_1 dt, \quad \forall \mathbf{w}_1 \quad (8.40)$$

其中,  $\mathbf{Q}$  为加权阵,  $\mathbf{R} > 0$  为加权系数阵。

根据  $H_\infty$  设计理论可知, 若定义评价信号

$$z = \mathbf{C}_{11} \mathbf{e}_x + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}_{xx} \quad (8.41)$$

其中

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}$$

则(8.40)式等价于(8.39)和(8.41)式构成的系统; 从  $\mathbf{w}_1$  到  $z$  的闭环传递函数的  $H_\infty$  范数小于 1。由于  $\mathbf{e}_x$  和  $\mathbf{w}_1$  是可检测的, 取控制律为

$$\mathbf{u}_{xx} = \mathbf{K}_x(s) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

综上所述,  $x$  系统的设计问题归结为求广义被控对象

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{A}_{m1} \mathbf{e}_x + \bar{\mathbf{B}}_{11} \mathbf{w}_1 + \bar{\mathbf{B}}_{12} \mathbf{u}_{xx} \\ z = \mathbf{C}_{11} \mathbf{e}_x + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}_{xx} \end{cases}$$

所对应的  $H_\infty$  标准设计问题的解(8.42)。具体可参见文献[8], 这里不再具体叙述。此时, 实际的  $x$  方向的驱动力矩由(8.37)和(8.42)式给定。

其次讨论  $y$  系统的设计问题。为了简化系统的结构, 以下采用与  $x$  系统相同的控制思想。即, 假设  $y_p$  的状态的期望轨迹由如下模型的输出来描述

$$\dot{\mathbf{y}}_m = \mathbf{A}_{2m} \mathbf{y}_m + \mathbf{B}_{2m} \mathbf{r}_y \quad (8.43)$$

其中,  $\mathbf{r}_y^\top = [y_0 \theta_0]$ ,  $y_0$  和  $\theta_0$  分别表示机器人上体姿态的位置指令常数,

$$\mathbf{A}_{2m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ k_1 \mathbf{I} & k_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$k_1 < 0, k_2 < 0$  是给定常数。 $\mathbf{y}_m$  定义如下：

$$\mathbf{y}_m^T = [y_d \quad \theta_d \quad \dot{y}_d \quad \dot{\theta}_d]$$

其中,  $y_d$  和  $\theta_d$  为状态的期望轨迹。

与前述相同, 先对  $y$  系统的模型(8.34)进行线性化处理。令

$$\begin{cases} \mathbf{u}_y = \mathbf{G}_3^T(\mathbf{q}) \{ \mathbf{G}_3(\mathbf{q}) \mathbf{G}_3^T(\mathbf{q}) \}^{-1} (\mathbf{v}_y + \mathbf{v}_{yr}) \\ \mathbf{v}_y = \begin{bmatrix} \ddot{y}_d \\ \ddot{\theta}_d \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \dot{y} - \dot{y}_d \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} y - y_d \\ \theta - \theta_d \end{bmatrix} - \mathbf{B}_{20} g \end{cases} \quad (8.44)$$

式中  $\mathbf{v}_{yr}$  表示新的控制输入信号。同理, 假设

$$\mathbf{G}_4(\mathbf{q}) = \mathbf{G}_4(0)[1 + \Delta_4(\mathbf{q})] \quad (8.45)$$

并注意到

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_d \\ \ddot{\theta}_d \end{bmatrix} - k_2 \begin{bmatrix} \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} y_d \\ \theta_d \end{bmatrix} = \mathbf{r}_y \quad (8.46)$$

则由(8.33)式及(8.43)~(8.44)式, 得

$$\dot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{A}_{2m} \mathbf{e}_y + \bar{\mathbf{B}}_{21} \mathbf{w}_2 + \bar{\mathbf{B}}_{22} \mathbf{u}_{yr} \quad (8.47)$$

其中,  $\mathbf{e}_y = \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_m$  表示控制误差,  $\mathbf{w}_2 = (1 + \Delta_4) \mathbf{u}_n$  为等效干扰输入信号。与水平方向控制系统的设计相同, 我们引入  $L_2$  增益性能指标

$$\int_0^T (\mathbf{e}_y^T \mathbf{Q}_2^2 \mathbf{e}_y + \mathbf{u}_{yr}^T \mathbf{R}_2^2 \mathbf{u}_{yr}) dt \leq \int_0^T \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2 dt, \quad \forall \mathbf{w}_2 \quad (8.48)$$

其中,  $\mathbf{Q}_2$  和  $\mathbf{R}_2$  分别为加权系数阵。

若定义辅助输出信号

$$\mathbf{z}_y = \mathbf{C}_{21} \mathbf{e}_y + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}_{yr} \quad (8.49)$$

则(8.48)式等价于由(8.47)和(8.49)式所构成的闭环系统, 该系统传递函数的  $H_\infty$  范数小于 1。式中,

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

因此, 令控制律的结构

$$u_y = K_y(s) \begin{bmatrix} e_y \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

则  $K_y(s)$  可以通过求广义被控对象(8.47)和(8.49)所对应的  $H_\infty$  标准设计问题的解获得。

最后, 我们介绍数字仿真结果。机器人的参数如表 8.1 所示。以下利用计算机辅助设计软件 MATLAB 分别设计  $x$  和  $y$  系统的控制器。

表 8.1 机器人的物理参数

参数	数值	参数	数值
$l_1, l_7$	0.36m	$a_1, a_7$	0.177m
$l_2, l_6$	0.09m	$a_2, a_6$	0.018m
$l_3$	0.07m	$a_3$	0.07m
$l_4, l_8$	0.09m	$a_4, a_8$	0.045m
$l_5, l_9$	0.10m	$a_5, a_9$	0.024m
$m_1, m_7$	0.765kg	$I_1, I_7$	0.00446kg · m <sup>2</sup>
$m_2, m_6$	0.280kg	$I_2, I_6$	0.00048478kg · m <sup>2</sup>
$m_3$	2.52kg	$I_3$	0.004288kg · m <sup>2</sup>
$m_4, m_8$	0.06kg	$I_4, I_8$	0.0000627kg · m <sup>2</sup>
$m_5, m_9$	0.205kg	$I_5, I_9$	0.000350kg · m <sup>2</sup>
$m_{10}$	0.160kg	$I_{10}$	0.0000627kg · m <sup>2</sup>
$l_H$	0.46m		

对  $x$  方向, 令参考模型的参数为

$$k_1 = -10, \quad k_2 = -15$$

而加权系数  $Q_1$  和  $R_1$  分别取

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 0.1$$

通过国际标准的软件包 MATLAB 中的 Robust Control Toolbox, 解  $H_\infty$  FI(Full Information) 问题的程序求得理想的控制器如下:

$$K_1(s) = [T_1 - Q(s)T_2 \quad - Q(s)] \quad (8.51)$$

其中,  $\mathbf{Q}(s) = [Q_1(s) \ Q_2(s) \ Q_3(s) \ Q_4(s)]$ ,  $Q_i(s)$  均为在  $s$  闭右半平面解析的有理函数,

$$\mathbf{T}_1 = [-291.8144 \ -188.0282]$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -1.3615 & -0.8773 \\ 2.2871 & 1.4737 \\ -1.5597 & -1.0050 \\ 0.6341 & 0.4086 \end{bmatrix}$$

即,理想的控制输入信号  $u_x$  给定如下:

$$u_x = (\mathbf{T}_1 - \mathbf{Q}(s)\mathbf{T}_2)\mathbf{e}_x - \mathbf{Q}(s)\mathbf{w}_1 \quad (8.52)$$

$\mathbf{Q}(s)$  为自由参数。

求  $y$  系统的控制器,令

$$k_1 = -10, \quad k_2 = -15$$

且加权系数分别为

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

利用同一个程序,求得控制器如下:

$$\mathbf{K}_2(s) = [\mathbf{T}_3 - \mathbf{P}(s)\mathbf{T}_4 \ - \mathbf{P}(s)]$$

其中,  $\mathbf{P}(s)$  为  $2 \times 2$  阶的有理函数阵,其元素均为在  $s$  右半平面解析的任意函数。

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -3.9901 & -0.0070 & -0.0756 & -0.0002 \\ -0.0070 & -5.1960 & -0.0002 & -0.1098 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0236 & 0.0000 & 0.0005 \\ 0.0001 & 0.0236 & 0.0000 & 0.0005 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\text{令, } \mathbf{Q}_i(s) = \frac{0.1}{s+1}, (i=1,2,\dots,4)$$

$$P(s) = \frac{0.1}{s+1}$$

期望轨迹分别为  $y_0 = 0.46\text{m}$ ,  $\theta_0 = 0\text{rad}$ , 而平行移动轨迹  $x_d$ ,  $\dot{x}_d$  如图 8.8。采样周期 5ms。数字仿真结果如图 8.9 所示。此时, 机器人位姿的变化如图 8.10 所示。

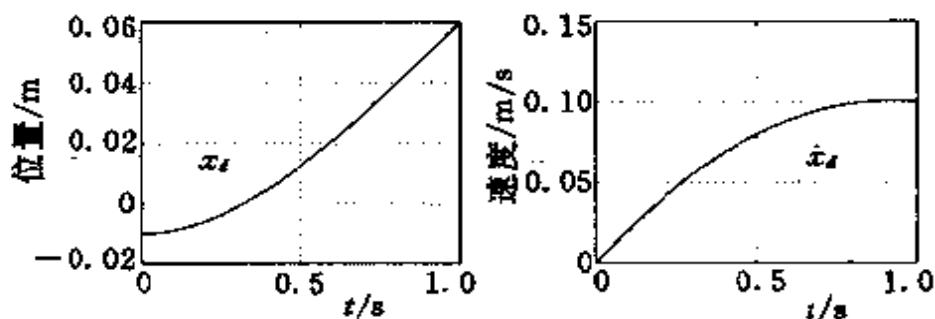


图 8.8 水平方向的期望轨迹

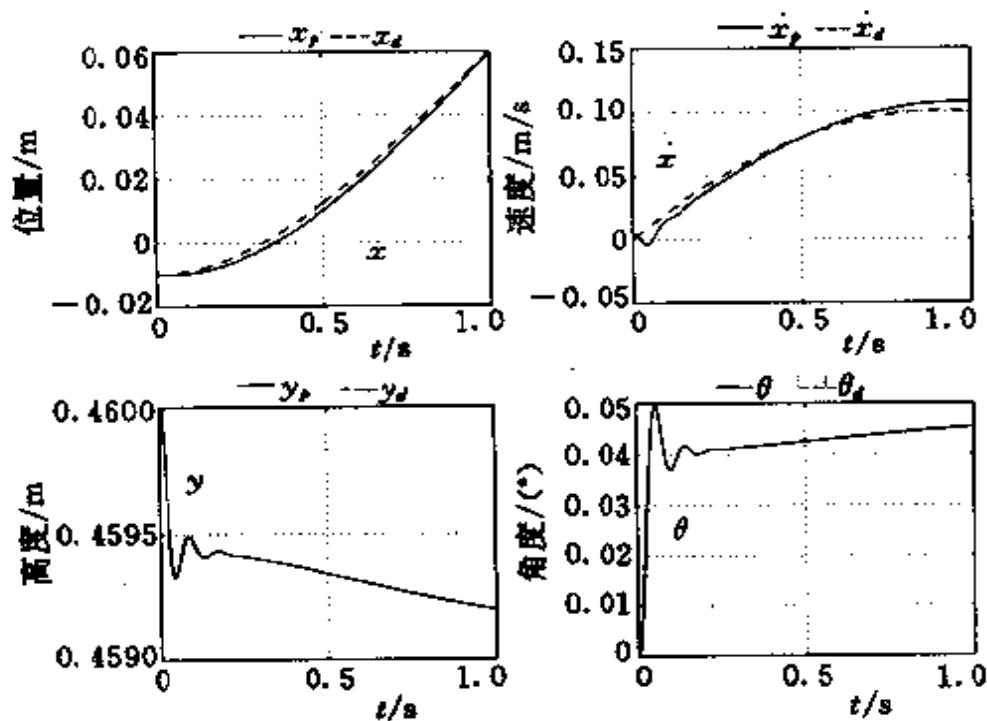


图 8.9 数值仿真结果

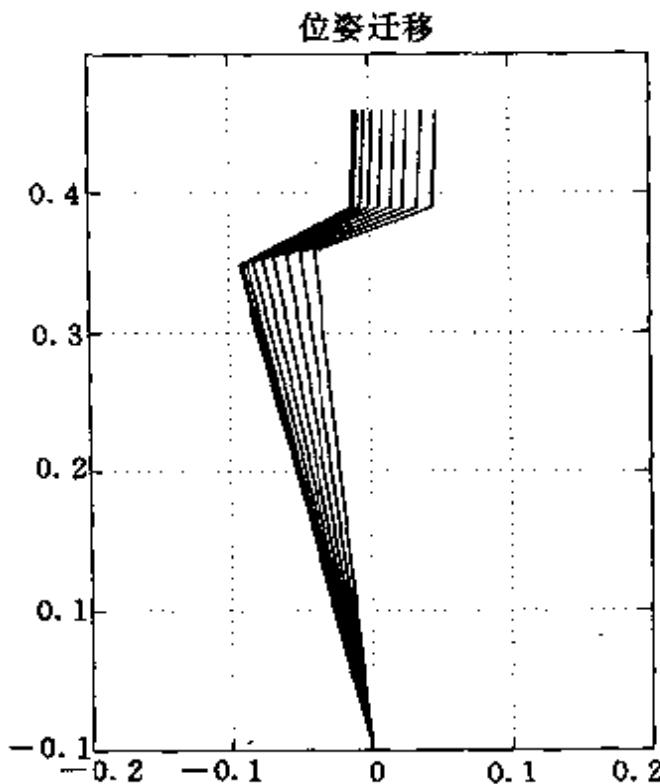


图 8.10 位姿迁移示意图

### 8.3 单腿支撑姿态的控制

在两足行走式机器人处于单腿支撑姿态时,支撑腿和游腿的控制要求就不一样。支撑腿和两腿支撑姿态一样,要求  $x$  方向跟踪给定的轨迹向前平移,同时要求  $y$  和  $\theta$  保持一定值。但是游腿则要求所有状态跟踪给定轨迹,以完成跨步行走动作。

与前一节的讨论相同,我们可以将支撑腿和游腿分开对待,分别设计控制器,并在设计过程中考虑控制输入信号之间的相互耦合关系对控制性能的影响。

首先,我们来考虑支撑腿。由于支撑腿的数学模型和前节双腿支撑姿态时相同,而且控制目的也完全一样,所以可以利用上一节讨论的方法来设计控制器。只是控制输入信号只能由  $u_1, u_2, u_3$  来

承担,即  $u_1$  是  $x$  方向的控制输入,  $u_2$  和  $u_3$  是  $y$  及  $\theta$  方向的控制输入信号。

根据(8.27)式可知,单腿支撑时支撑腿的动态可以描述如下

$$\ddot{x} = \mathbf{G}_1(\mathbf{q})\mathbf{u}_x + \mathbf{G}_2(\mathbf{q})\mathbf{u}_y \quad (8.53)$$

其中,  $\mathbf{u}_x = u_1$ ,  $\mathbf{u}_y^\top = [u_2 \ u_3]$ ,

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{q}) = \frac{1}{m}k_{11}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{12}(\mathbf{q}) & \frac{1}{m}k_{13}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

应该注意,(8.53)式和(8.30)式形式相同,但是  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$  及相应信号  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  的维数与(8.30)式中的对应矩阵及信号的维数不一样。这里为了便于对照,我们采用相同的记号。

与前节相同,设参考模型(8.34)的状态描述支撑腿  $x$  方向的期望轨迹,并对(8.53)式进行类似的线性化处理,可以得到误差方程如下:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_{m1}\mathbf{e}_x + \bar{\mathbf{B}}_{11}\mathbf{w}_1 + \bar{\mathbf{B}}_{12}\mathbf{u}_{xr} \quad (8.54)$$

因此,引入性能指标(8.40),可以通过解上式及(8.41)式所对应的  $H_\infty$  设计问题,求出理想的控制器

$$\mathbf{u}_{xr} = \mathbf{K}_x(s) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{w}_1 \end{bmatrix}$$

同理,由(8.27)式得  $y$  和  $\theta$  方向的运动方程如下:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_3(\mathbf{q})\mathbf{u}_y + \mathbf{G}_4(\mathbf{q})\mathbf{u}_x + \mathbf{G}_5\mathbf{g}$$

其中,

$$\mathbf{G}_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{22}(\mathbf{q}) & \frac{1}{m}k_{23}(\mathbf{q}) \\ \frac{1}{I}k_{32}(\mathbf{q}) & \frac{1}{I}k_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}k_{21}(\mathbf{q}) \\ \frac{1}{I}k_{31}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以,重复前节的推导过程可知,我们可以通过求广义被控对象

$$\begin{cases} \dot{e}_y = A_{2m}e_y + \bar{B}_{21}w_2 + \bar{B}_{22}u_{yr} \\ z_y = C_{21}e_y + D_{22}u_{yr} \end{cases}$$

所对应的  $H_\infty$  设计问题,求得理想的控制器

$$u_{yr} = K_y(s) \begin{bmatrix} e_y \\ w_2 \end{bmatrix}$$

其次,我们来考虑游腿的控制系统设计问题。为了简化系统,以下只选择  $u_4$  和  $u_5$  作为控制输入信号,控制量为  $q_4$  和  $q_5$ 。即,控制目的是使得关节  $L_4$  和  $L_5$  的相对角位移  $q_4$  和  $q_5$  按照期望的轨迹运动,以完成向前跨越一步的动作。游腿的简化模型的示意图如图 8.11 所示。下面先求游腿的简化数学模型,然后再设计控制器。

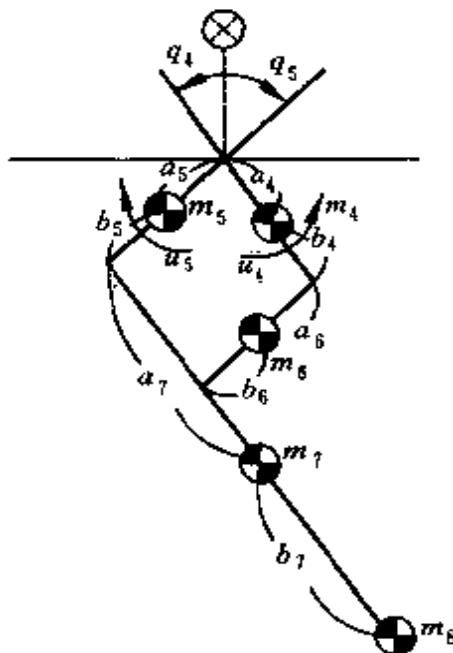


图 8.11 游腿的简化模型

由图 8.11 可知,各质点的质心坐标  $(x_i, y_i)$  如下:

$$\begin{cases} x_4 = a_4 \sin q_4 \\ y_4 = -a_4 \cos q_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -a_5 \sin q_5 \\ y_5 = -a_5 \cos q_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = l_4 \sin q_4 - a_6 \sin q_5 \\ y_6 = -l_4 \cos q_4 - a_6 \cos q_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = -l_5 \sin q_5 + a_7 \sin q_4 \\ y_7 = -l_5 \cos q_5 + a_7 \cos q_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = -l_5 \sin q_5 + l_7 \sin q_4 \\ y_8 = -l_5 \cos q_5 + l_7 \cos q_4 \end{cases}$$

因此,该系统的动能总和为

$$V = \frac{1}{2}(I_4 + I_7 + I_8)\dot{q}_4^2 + \frac{1}{2}(I_5 + I_6)\dot{q}_5^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=4}^8 m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$$

$$= J_1\dot{q}_4^2 + J_2\dot{q}_5^2 + J_3\dot{q}_4\dot{q}_5 \cos(q_4 + q_5) \quad (8.55)$$

其中,

$$J_1 = \frac{1}{2}(m_4a_4^2 + m_6l_4^2 + m_7a_7^2 + m_8l_7^2 + I_4 + I_7 + I_8)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(m_5a_5^2 + m_6a_6^2 + m_7l_5^2 + m_8l_5^2 + I_5 + I_6)$$

$$J_3 = -m_6a_6l_4 - m_7l_5a_7 - m_8l_5l_7$$

而势能总和为

$$U = \sum_{i=4}^8 m_i y_i g = G_1 \cos q_4 + G_2 \cos q_5 \quad (8.56)$$

其中,

$$G_1 = (-m_4a_4 - m_6l_4 - m_7a_7 - m_8l_7)g$$

$$G_2 = (-m_5a_5 - m_6a_6 - m_7l_5 - m_8l_5)g$$

根据拉格朗日运动学原理,可以推得游腿的运动方程如下:

$$J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{u} \quad (8.57)$$

其中,

$$J(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2J_1 & J_3 \cos(q_4 + q_5) \\ J_3 \cos(q_4 + q_5) & 2J_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} -J_3 q_5^2 \sin(q_4 + q_5) - G_1 \sin q_5 \\ -J_3 q_4^2 \sin(q_4 + q_5) - G_1 \sin q_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

进一步考虑建模误差及支撑腿控制输入对游腿运动的耦合影响,实际模型可以表示为

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad (8.58)$$

式中,  $\mathbf{w}$  表示等效干扰输入信号。

设  $\mathbf{q}$  的期望轨迹由如下方程给出:

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = k_2 \dot{\mathbf{q}}_d + k_1 \mathbf{q}_d + \mathbf{r} \quad (8.59)$$

式中  $\mathbf{r}$  为指令信号,  $k_1 < 0, k_2 < 0$  为给定常数。

游腿控制器的设计要求是保证  $\mathbf{q}(t)$  能渐近跟踪期望轨迹  $\mathbf{q}_d(t)$ , 且对等效干扰信号  $\mathbf{w}$  具有抑制能力。为此, 对(8.58)式施以非线性反馈

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{v}_n + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{v}_n = k_2 \dot{\mathbf{q}} + k_1 \mathbf{q} + \mathbf{r} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (8.60)$$

其中,  $\mathbf{v}$  为新的控制输入信号, 则(8.59)和(8.60)式可以表示为

$$\ddot{\mathbf{q}} = k_2 \dot{\mathbf{q}} + k_1 \mathbf{q} + \mathbf{r} + \mathbf{v} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{w} \quad (8.61)$$

令跟踪误差  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ , 则根据(8.59)和(8.61)式, 有

$$\ddot{\mathbf{e}} = k_2 \dot{\mathbf{e}} + k_1 \mathbf{e} + \mathbf{v} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{w} \quad (8.62)$$

定义状态变量  $\mathbf{x}_e^T = [\mathbf{e} \ \dot{\mathbf{e}}]$ , 上式可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}\mathbf{x}_e + \mathbf{B}_1\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{v} \quad (8.63)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ k_1 \mathbf{I} & k_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

显然,  $\mathbf{A}$  是稳定阵。为了达到抑制干扰的目的, 以下我们考虑状态反馈

$$\mathbf{v} = \mathbf{Kx}_e$$

及  $L_2$  增益性能指标

$$\int_0^T (\mathbf{x}_e^\top \mathbf{Q}_3^2 \mathbf{x}_e + \mathbf{v}^\top \mathbf{R}_3^2 \mathbf{u}) dt \leq \int_0^T \mathbf{w}^\top \mathbf{J}^{-2}(\mathbf{q}) \mathbf{w} dt, \quad \forall \mathbf{w} \quad (8.64)$$

其中,  $\mathbf{Q}_3$  和  $\mathbf{R}_3$  为加权系数阵。

同前所述, 若令辅助输出信号

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_e + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (8.65)$$

那么满足(8.64)式的状态反馈控制器就可以通过解(8.63)和(8.64)式所对应的  $H_\infty$  设计问题求得。

最后介绍数字仿真结果。机器人的物理参数见表 8.1。

先求支撑腿的控制器。令参考模型的参数为  $k_1 = -10, k_2 = -15$ , 并选择干扰抑制性能指标的加权系数阵如下:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 0.1$$

基于上述参数求所对应的  $H_\infty$  设计问题的解, 得

$$\mathbf{K}_x(s) = [\mathbf{T}_1 - \mathbf{Q}(s)\mathbf{T}_2 \quad - \mathbf{Q}(s)] \quad (8.66)$$

其中,  $\mathbf{Q}_x(s) = [\mathbf{Q}_{x1}(s) \quad \mathbf{Q}_{x2}(s)]$ ,  $\mathbf{Q}_{xi}$  ( $i=1, 2$ ) 为在  $s$  闭右半平面解析的有理函数。

$$\mathbf{T}_1 = [-294.8288 \quad -189.9021]$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -3.7554 & -2.4189 \\ -3.7554 & -2.4189 \end{bmatrix}$$

求上体姿态  $y, \theta$  的控制器。令  $k_1 = -10, k_2 = -15$ , 及加权系数阵

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

同理,得

$$K_y(s) = [T_1 - Q_y(s)T_2 \quad -Q_y(s)] \quad (8.67)$$

其中,  $Q_y^T(s) = [Q_{y1}(s) \quad Q_{y2}(s)]$ ,  $Q_{yi}$  ( $i=1,2$ ) 是在  $s$  闭右半平面解析的有理函数,

$$T_1 = \begin{bmatrix} -4.9901 & 0.0107 & -0.0977 & 0.0008 \\ 0.0097 & -5.8566 & 0.0003 & -0.1086 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$T_2 = [0.0004 \quad -0.0307 \quad 0.0000 \quad -0.0006] \times 10^3$$

取  $Q_{xi}(s) = Q_{yi}(s) = \frac{0.1}{s+1}$ , ( $i=1,2$ )。  $x$  方向的期望轨迹如图 8.12 所示。而  $\theta$  的期望值为 0,  $y$  的期望值为 0.46m, 即上体保持垂直。图 8.13 是各关节的响应。图 8.14 是对应的支撑腿姿态的迁移图。

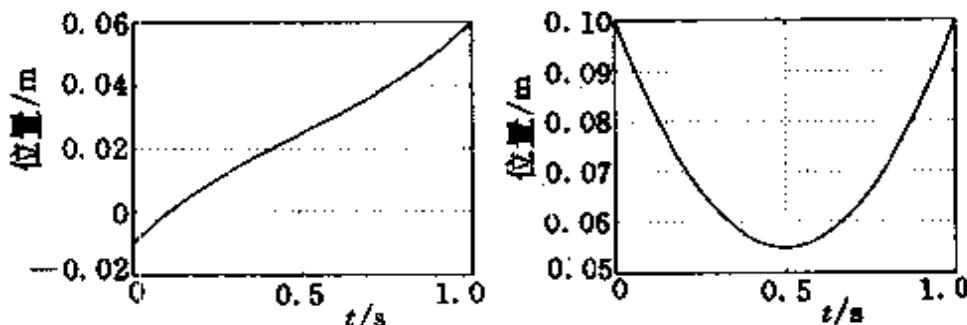


图 8.12 支撑腿水平方向期望轨迹

再求游腿的控制器。令  $k_1 = -7, k_2 = -9$ , 并取加权系数阵为

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

解(8.63)式所对应的  $H_\infty$  设计问题, 得反馈控制律

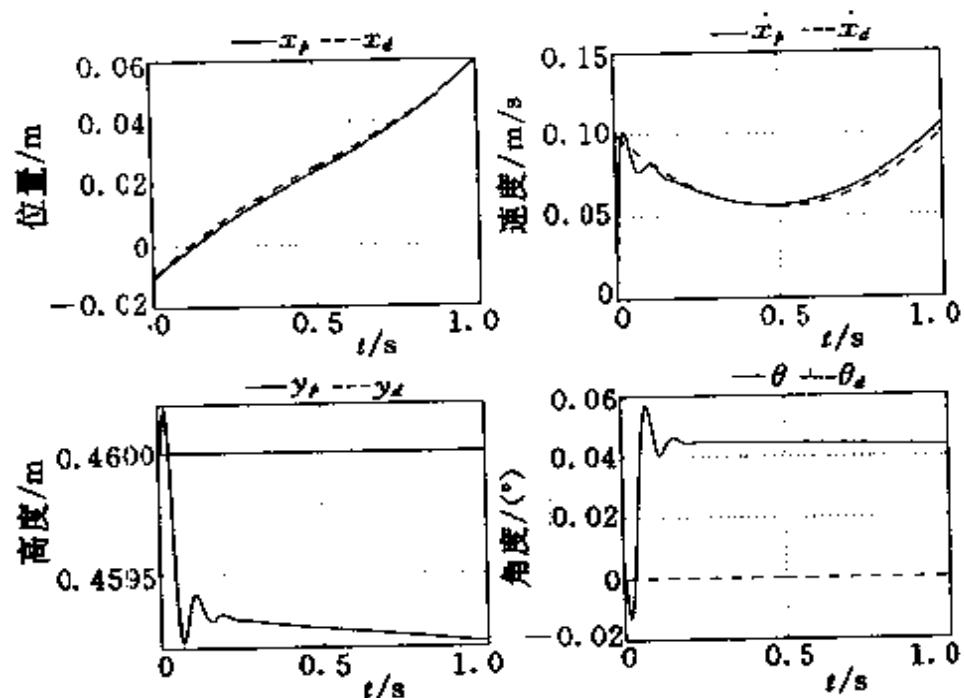


图 8.13 数值仿真结果

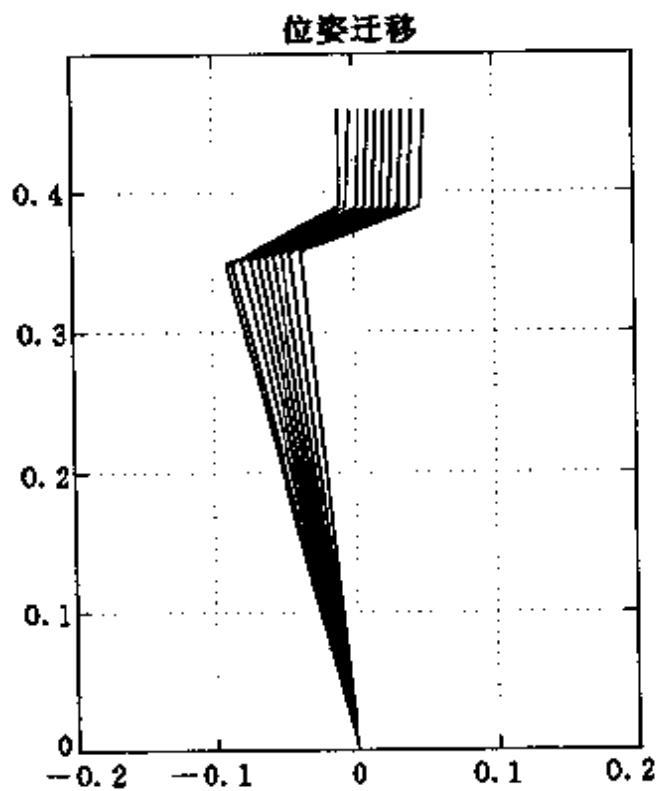


图 8.14 支撑腿位姿迁移示意图

$$K = \begin{bmatrix} -495.4979 & 0.0000 & -294.2121 & 0.0000 \\ 0.0000 & -495.4979 & 0.0000 & -294.2121 \end{bmatrix}$$

图 8.15 是该控制器的仿真结果。图中  $q_{4m}, q_{5m}$  是期望轨迹,  $q_4$  和  $q_5$  是游腿的响应,与此对应的控制输入  $v$  的两个分量如图 8.16,而游腿各关节的状态迁移图如图 8.17 所示。

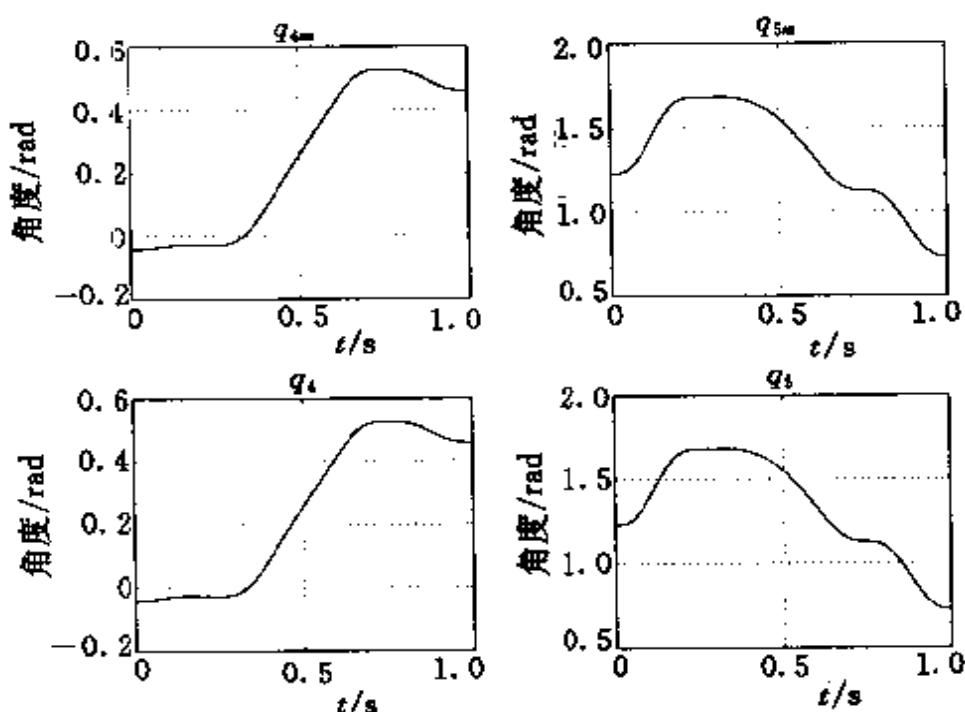


图 8.15 数值仿真结果

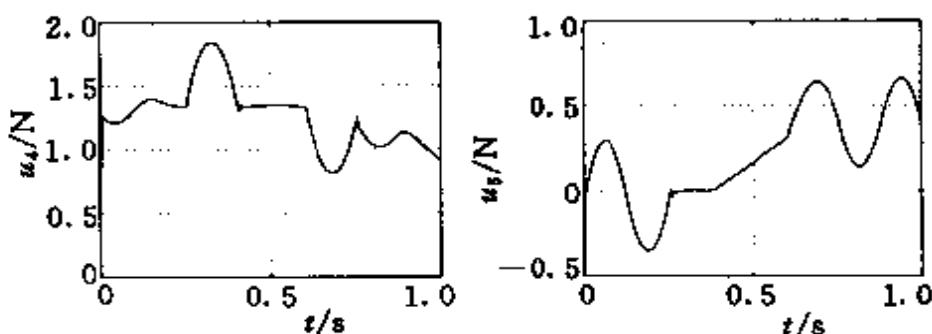


图 8.16 控制输入量

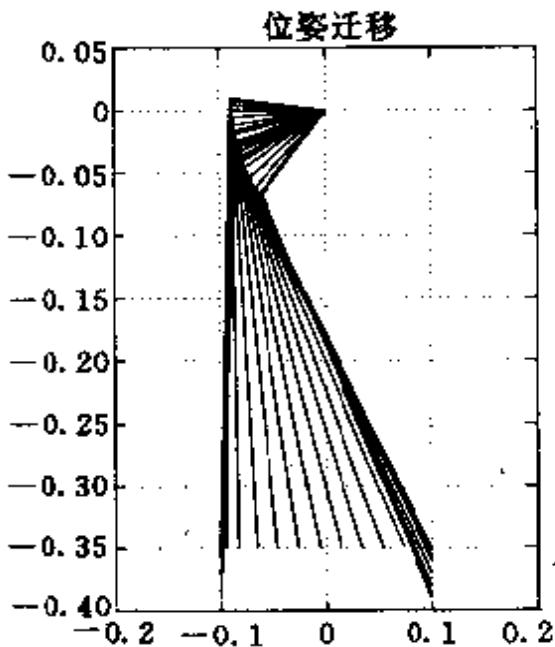


图 8.17 游腿位姿迁移示意图

## 8.4 两足行走控制

如前所述,两足自立行走动作可以通过交替重复交两节讨论的两腿支撑和单腿支撑姿态来实现。应该注意的是使机器人的位姿在两个姿态的交替点尽可能做到平滑过渡,实际上,如果各姿态的控制误差足够小的话,这取决于期望轨迹的设计。本节讨论期望轨迹的设计问题,并介绍步行控制实验结果。

对支撑腿来讲,为了保持上体垂直及高度稳定, $y$  和  $\theta$  一般取常数做为期望值。关键是水平方向的位移  $x(t)$  要求在一定的时间内从某一位置移动到另一指定位置。设起始时刻为  $t_0$ ,且对应的起始位置为  $x(t_0)$ ,所谓轨迹设计问题就是要给出  $x(t)$ ,使其在  $t_1$  时刻到达给定的位置  $x_1$ ,即满足  $x(t_1)=x_1$ 。

一般地,在区间  $[t_0, t_1]$  之间采用多项式插值的办法给出  $x(t)$ ,

即

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n \quad (8.68)$$

其中,  $a_i (i=0, 1, \dots, n)$  为常数。显然,  $x(t_0) = a_0$ 。此外, 为了确定常数  $a_i (i=1, \dots, n)$ , 还需要  $n$  个边界条件。

例如, 考虑  $n=1$  的情况。即, 采用一阶多项式插值求  $x(t)$ :

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) \quad (8.69)$$

显然, 边界条件是

$$\begin{cases} x(t_0) = a_0 \\ x(t_1) = a_0 + a_1(t_1 - t_0) \end{cases}$$

由此可以求出描述期望轨迹的系数如下:

$$\begin{cases} a_0 = x(t_0) \\ a_1 = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \end{cases} \quad (8.70)$$

如果选择  $n=3$ , 采用三阶多项式插值, 则

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 \quad (8.71)$$

而边界条件为

$$\begin{cases} x(t_0) = a_0 \\ \dot{x}(t_0) = a_1 \\ x(t_1) = a_0 + a_1(t_1 - t_0) + a_2(t_1 - t_0)^2 + a_3(t_1 - t_0)^3 \\ \dot{x}(t_1) = a_1 + 2a_2(t_1 - t_0) + 3a_3(t_1 - t_0)^2 \end{cases} \quad (8.72)$$

由此求得

$$a_0 = x(t_0)$$

$$a_1 = \dot{x}(t_0)$$

$$a_2 = \frac{1}{(t_1 - t_0)^2} \{ 3(x(t_1) - x(t_0)) - (\dot{x}(t_1) + 2\dot{x}(t_0))(t_1 - t_0) \}$$

$$a_3 = \frac{1}{(t_1 - t_0)^3} \{ -2(x(t_1) - x(t_0)) + (\dot{x}(t_1) - 2\dot{x}(t_0)) \}$$

$$+ \dot{x}(t_0))(t_1 - t_0)\}$$

以此类推,如果我们想使得期望轨迹  $x(t)$  在终止时刻  $t_1$  满足更高阶的边界条件,那么就要采用四阶以上的高阶多项式插值求期望轨迹。

设机器人步行动作的周期为  $t_f$ ,即每隔时间  $t_f$  切换支撑腿。对于支撑腿,考虑将  $t_f$  分成三个区间  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_2, t_f]$ , 分别求期望轨迹。即

$$\begin{aligned}x_{01}(t) &= a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 + a_{14}t^4, & 0 \leq t \leq t_1 \\x_{12}(t) &= a_{20} + a_{21}(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2 \\x_{2f}(t) &= a_{30} + a_{31}(t - t_f) + a_{32}(t - t_f)^2 + a_{33}(t - t_f)^3 \\&\quad + a_{34}(t - t_f)^4, & t_2 \leq t \leq t_f\end{aligned}$$

为了做到在各个区间终点,  $x(t)$  平滑相接且起始点和终止点为静止状态,令

$$\begin{aligned}x_{01}(0) &= x_0, \\ \dot{x}_{01}(0) &= 0, \\ \ddot{x}_{01}(0) &= 0, \\ x_{01}(t_1) &= x_{12}(t_1), \\ \dot{x}_{01}(t_1) &= \dot{x}_{12}(t_1), \\ \ddot{x}_{01}(t_1) &= \ddot{x}_{12}(t_1), \\ x_{12}(t_2) &= x_{2f}(t_2), \\ \dot{x}_{12}(t_2) &= \dot{x}_{2f}(t_2), \\ \ddot{x}_{12}(t_2) &= \ddot{x}_{2f}(t_2), \\ x_{2f}(t_f) &= x_f, \\ \dot{x}_{2f}(t_f) &= 0, \\ \ddot{x}_{2f}(t_f) &= 0\end{aligned}$$

其中,  $x_0$  和  $x_f$  表示起始和终止位置坐标。

为方便计算,令  $t_2 = t_f - t_1$ ,求得

$$\begin{aligned} a_{10} &= x_0, \\ a_{11} &= 0, \\ a_{12} &= 0, \\ a_{13} &= -2t_1 k, \\ a_{14} &= -k \\ a_{20} &= x_f - t_1^3(2t_f - 3t_1)k, \\ a_{21} &= 2t_1^3 k \\ a_{30} &= x_f, \\ a_{31} &= a_{32} = 0, \\ a_{33} &= 2t_1 k, \\ a_{34} &= -k \end{aligned}$$

其中,

$$k = \frac{x_f - x_0}{2t_1^3(t_f - t_1)}$$

图 8.18 和图 8.19 分别是  $x_d(t)$  和  $\dot{x}_d(t)$ 。其中,

$$x_d(t) = \begin{cases} x_{01}(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ x_{12}(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ x_{2f}(t), & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (8.73)$$

显然,  $x_f - x_0$  是步长。以下为了简便计算,令每一步的步长相同。

对游腿来讲,一般希望腿的端点即图 8.20 中坐标  $(x, y)$  表示的点,能够跟踪理想的轨迹。但是,如前所述实际控制输入的方向与  $q_4$  和  $q_5$  坐标的方向一致。因此,一般需要从给定的期望轨迹  $x(t)$  和  $y(t)$ ,求出与此对应的  $q_4(t)$  和  $q_5(t)$ 。这实际上是运动学逆向问题,具体可按上述方法求出。

根据余弦定理,不难验证有下式成立:

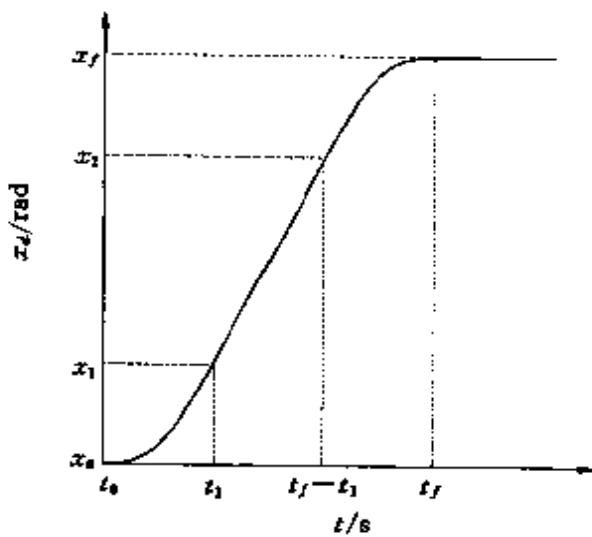


图 8.18 支撑腿位置的期望轨迹

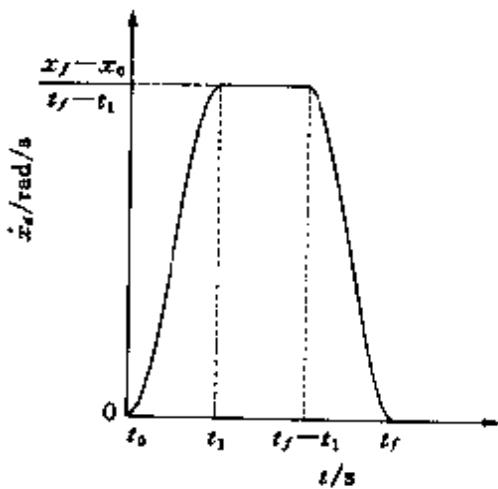


图 8.19 支撑腿速度的期望轨迹

$$\alpha = \frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8.74)$$

所以,当  $x > 0$  时,得

$$q_4 = \alpha + \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

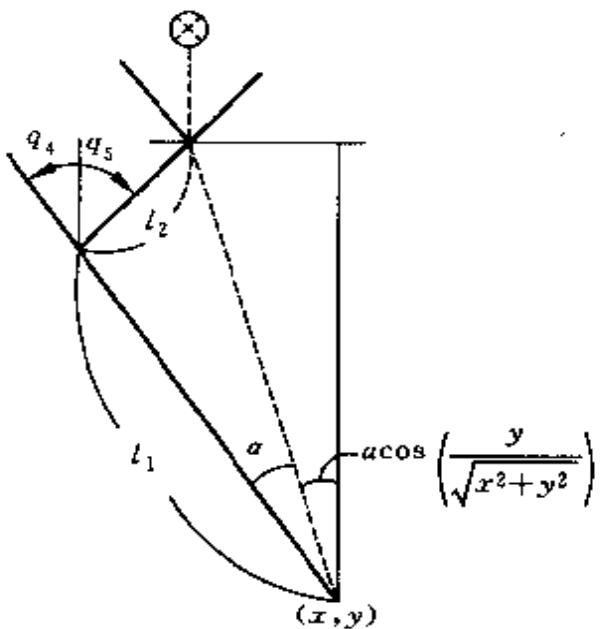


图 8.20 游腿坐标变换示意图

$$= \arccos\left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (8.75)$$

而  $x < 0$  时, 得

$$q_4 = \alpha - \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (8.76)$$

又因为

$$\cos(q_4 + q_5) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

故由(8.75)式及上式, 得

$$q_5 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) - \arccos\left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \mp \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (8.77)$$

即,(8.75)~(8.77)式描述了 $(x, y)$ 坐标和 $(q_4, q_5)$ 坐标的位置关系。同理可以求出其速度以及加速度关系。

分析图8.20的几何关系,可知有下式成立:

$$\begin{cases} x = l_1 \sin q_4 - l_2 \sin q_5 \\ y = -l_1 \cos q_4 - l_2 \cos q_5 \end{cases} \quad (8.78)$$

求上式两边对时间的导数,得

$$\begin{cases} \dot{x} = l_1 \cos q_4 \cdot \dot{q}_4 - l_2 \cos q_5 \cdot \dot{q}_5 \\ \dot{y} = l_1 \sin q_4 \cdot \dot{q}_4 + l_2 \sin q_5 \cdot \dot{q}_5 \end{cases}$$

故速度关系满足

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_4 & -l_2 \cos q_5 \\ l_1 \sin q_4 & l_2 \sin q_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (8.79)$$

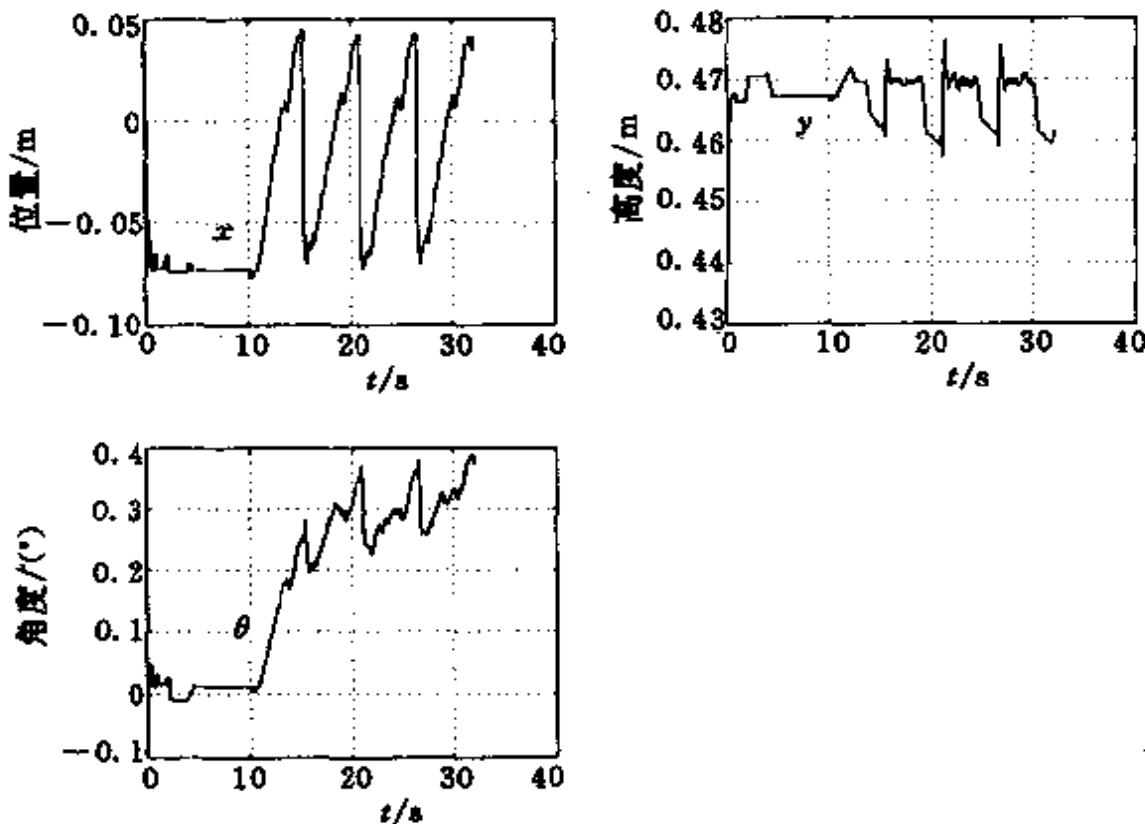


图8.21 机器人上体位姿变化

同理,可以从(8.78)式求得

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_4 & -l_2 \cos q_5 \\ l_1 \sin q_4 & l_2 \sin q_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x} + l_1 \sin q_4 \cdot \dot{q}_4^2 - l_2 \sin q_5 \cdot \dot{q}_5^2 \\ \ddot{y} - l_1 \cos q_4 \cdot \dot{q}_4^2 - l_2 \cos q_5 \cdot \dot{q}_5^2 \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

在实际应用时,先求出( $x, y$ )坐标下的期望轨迹,然后再根据上述各关系式求出所对应的( $q_4, q_5$ )及其速度和加速度轨迹。

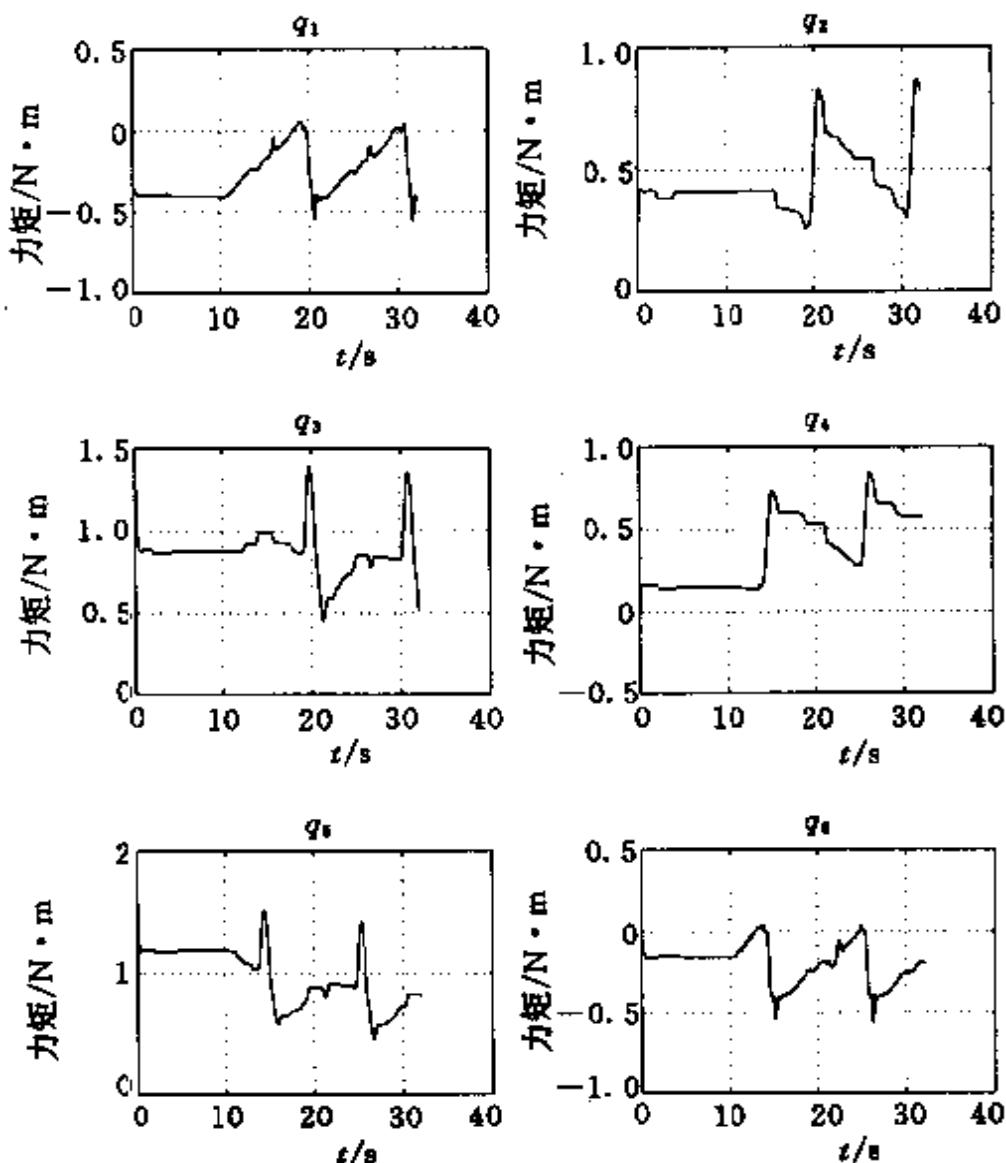


图 8.22 机器人各关节变化

最后介绍采用 8.3 节求出的控制器，并按照上述算法求得的期望轨迹，在实际系统上进行步行实验的结果。两足行走机器人如图 8.1 所示。整个实验过程由 4 步行走动作组成。图 8.21 是上体的坐标  $x, y, \theta$  的迁移过程。支撑腿和游腿各关节的坐标变化及对应的控制驱动信号如图 8.22、图 8.23 所示。图 8.24 是位姿迁移示意图。

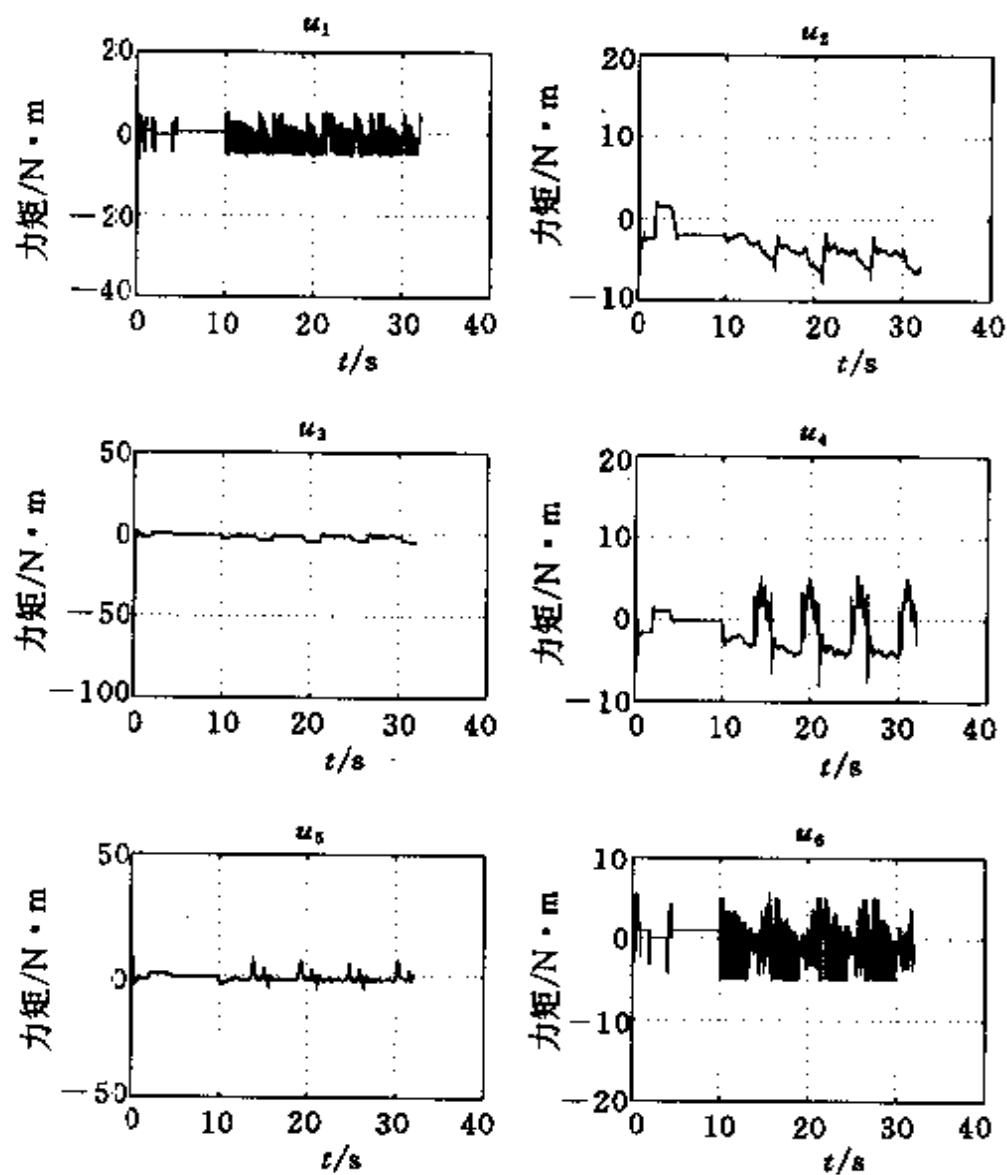


图 8.23 各关节驱动力矩信号

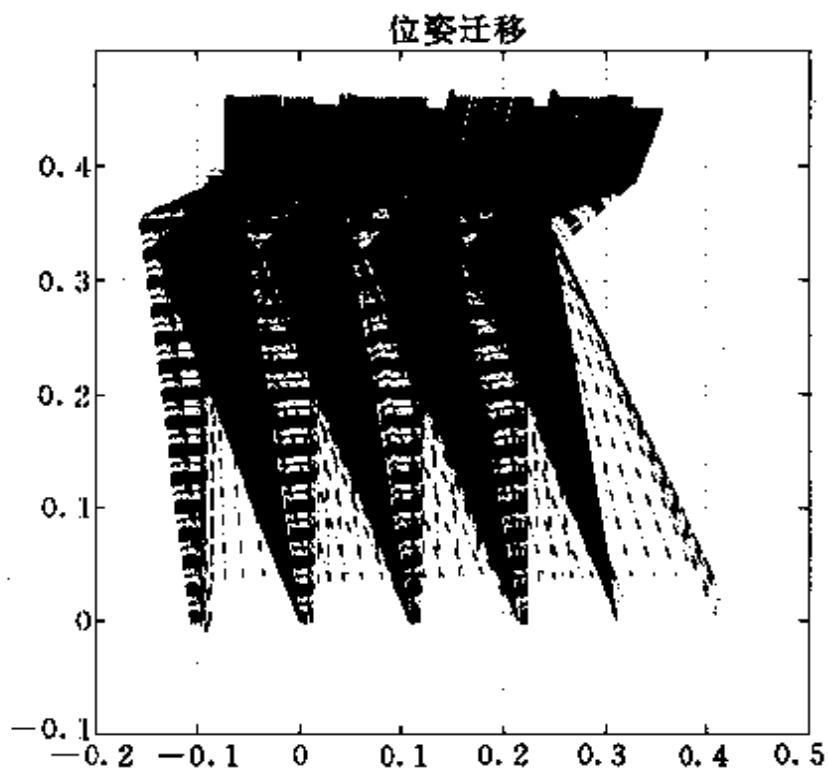


图 8.24 步行实验的位姿迁移图

## 参 考 文 献

- [1] 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992
- [2] Slotine J J E and Li W. Applied nonlinear control. New Jersey: Prentice Hall, 1991
- [3] Spong M W and Vidyasagar M. Robot dynamics and control. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1989
- [4] Ortega R and Spong M W. Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica*, 1989, 25: 877~888
- [5] Slotine J J E and Sastry S S. Tracking control of nonlinear system using sliding surfaces with applications to robot manipulators. *International Journal of Control*, 1983, 39(2): 465~492
- [6] Utkin V I. Variable structure systems with slidings. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212~222
- [7] Adballah C et al. Survey of robust control for rigid robots. *IEEE Control System Magazine*, 1991, 11(2): 24~30
- [8] 申铁龙.  $H_\infty$ 控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- [9] Qu Z and Dawson D M. Robust tracking control of robot manipulators. New York: IEEE Press, 1996
- [10] Qu Z. Robust control of nonlinear uncertain systems. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1998
- [11] Khalil H K. Nonlinear systems. New Jersey: Prentice Hall, 1996
- [12] Shen T. and Tamura T. Robust  $H_\infty$  control of uncertain nonlinear system via state feedback. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1995, 40: 766~768
- [13] van der Schaft A J.  $L_2$  gain and passivity techniques in nonlinear Control. New York: Lecture notes in control and information sciences, Springer, 1996
- [14] van der Schaft A J.  $L_2$  gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback  $H_\infty$  control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1992, 37: 770~783
- [15] Isidori A and Astolfi A. Disturbance attenuation and  $H_\infty$  control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transaction on*

Automatic Control, 1992, 37: 1283~1293

- [16] Shen T et al. Robust nonlinear control of mechanical dynamic systems with uncertain parameter and static friction. Proceedings of 4th international Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, 1996, 2: 1436~1430
- [17] 鶴田公一, 申鉄龍等. 静摩擦特性をもつプラントの非線形口バスト補償器の構成法と空気圧調節弁の位置決め制御への応用. 日本機械学会論文集(C), 1997, 63(612): 144~148
- [18] Shen T et al. Robust model following controller applied to positioning of pneumatic control valve with frictions. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1998
- [19] Byrnes C I, Isidori A and Willems J C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Transaction Automatic Control, 1991, 36: 1228~1240
- [20] Krstic M, Kanellakopoulos I and Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- [21] 申鉄龍, 田村捷利. 受動性理論による相対次数1の非線形系の大域的口バスト安定化. 計測自動制御学会論文集, 1998, 34(6): 577~583
- [22] 申鉄龍, 田村捷利. Lyapunov関数に基づく非線形口バスト  $H_\infty$  補償器の一構成法. 計測自動制御学会論文集, 1998, 34(9): 1191~1197
- [23] Lin W and Shen T. Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty. Automatica, 1999, 35
- [24] Shen T, Tamura T and Nikiforuk. Robust feedback design of a class of nonlinear cascaded systems with structural uncertainty. IFAC World Congress, Beijing, 1999
- [25] 申鉄龍, 田村捷利. モデル化誤差を考慮した非線形系の適応口バスト補償器の一構成法. 計測自動制御学会論文集, 1998, 34(10): 1388~1394
- [26] Shen T, Xie L and Tamura K. Robust almost disturbance decoupling for nonlinear systems with structural uncertainty. Proceedings of IEEE CDC, Florida, 1998
- [27] 申鉄龍, 田村捷利. 口ボットシステムの口バスト軌道追従制御—消散性理論からのアプローチ. 計測自動制御学会論文集, 1999, 35(3): 326~332

- [28] Doyle J C, Glover K, Khargonekar and Francis B. State space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1989, 34: 831~847
- [29] Shen T et al. Observer-based controller with disturbance feedback for robust  $L_2$  synthesis. *The International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, Missouri, 1996
- [30] 系山雅史, 申鉄龍, 田村捷利. 不確かな把握物に対するロバスト操作性を考慮したマスタスレブマニピュレータシステムの設計. 日本機械学会論文集(C), 1996, 62(594): 570~576
- [31] Battilotti S and Lanari L. Tracking with disturbance attenuation for rigid robots. *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996: 1578~1583
- [32] Chen B S, Lee T S and Feng J H. A nonlinear  $H_\infty$  control design in robotic system under parameter perturbation and disturbance. *Int. J. Control*, 1994, 59(2): 439~461
- [33] Spong M W. On the Robust Control of Robot Manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37: 1782~1786
- [34] Dawson D M, Qu Z and Carroll J J. Tracking control of rigid-link electrically robot manipulators. *International Journal of Control*, 1992, 56: 1007~1037
- [35] Ortega R and Spong W M. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial. *Automatica*, 1989, 25: 877~888
- [36] Slotine J. Putting Physics in control-the example of robotics. *IEEE Control Systems Magazine*, 1988, 8: 12~17
- [37] Ishii C, Shen T and Tamura K. Robust  $H_\infty$  model following control of robot manipulator. *IEEE Proceedings-D, Control Theory and Applications*, 1997, 144(1): 53~60
- [38] Shen T, Zang H and Tamura K. Riccati equation approach to robust  $L_2$  gain synthesis for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1996, 64(6): 1177~1188
- [39] 石井千春, 申鉄龍, 田村捷利. 非線形ロバスト  $H_\infty$  制御による回転型倒立振子の振り上げ安定化制御. 日本機械学会論文集 C, 1996, 62(599): 150~157
- [40] Shen T.  $H_\infty$  robust suboptimal control with robust regulation performance. *控制理论与应用*, 1994, 11(6): 703~712

- [41] Shen T. Robust stabilization for a kind of uncertain system. 控制理论与应用, 1993, 10(5): 1~9
- [42] Shen T. A design method of nonlinear robust  $H_\infty$  controller with adaptive mechanism. Proceedings of 29th International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications, 1997, Tokyo: 223~228
- [43] Ishii C, Shen T and Tamura K. Backstepping based model following control with  $L_2$  gain performance for robot manipulators. Proceedings of the ISPE/IEE International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future, 1997, Colombia: 813~817
- [44] Shen T, Itoyama Mi and Tamura K. A new approach to robust control of master-slave manipulators with uncertain objects. Proceedings of 7th International Conference on Advanced Robotics, 1995, Spain, 2: 585~590
- [45] 中島佳樹, 申鉄龍, 武藤康彦, 田村捷利. 外乱抑制手法によるマスタースレブマニピュレータのロバスト制御. 第 18 回 Dynamical System Theory シンポジウム, 1995, 福岡. 273~276
- [46] 美多勉, 大須賀公一. ロボット制御工学入門. 東京: コロナ社, 1992
- [47] 小林尚登等. ロボット制御の実際. 東京: 計測自動制御学会, 1997
- [48] 有本卓. ロボットの力学と制御. 東京: 朝倉書店, 1994