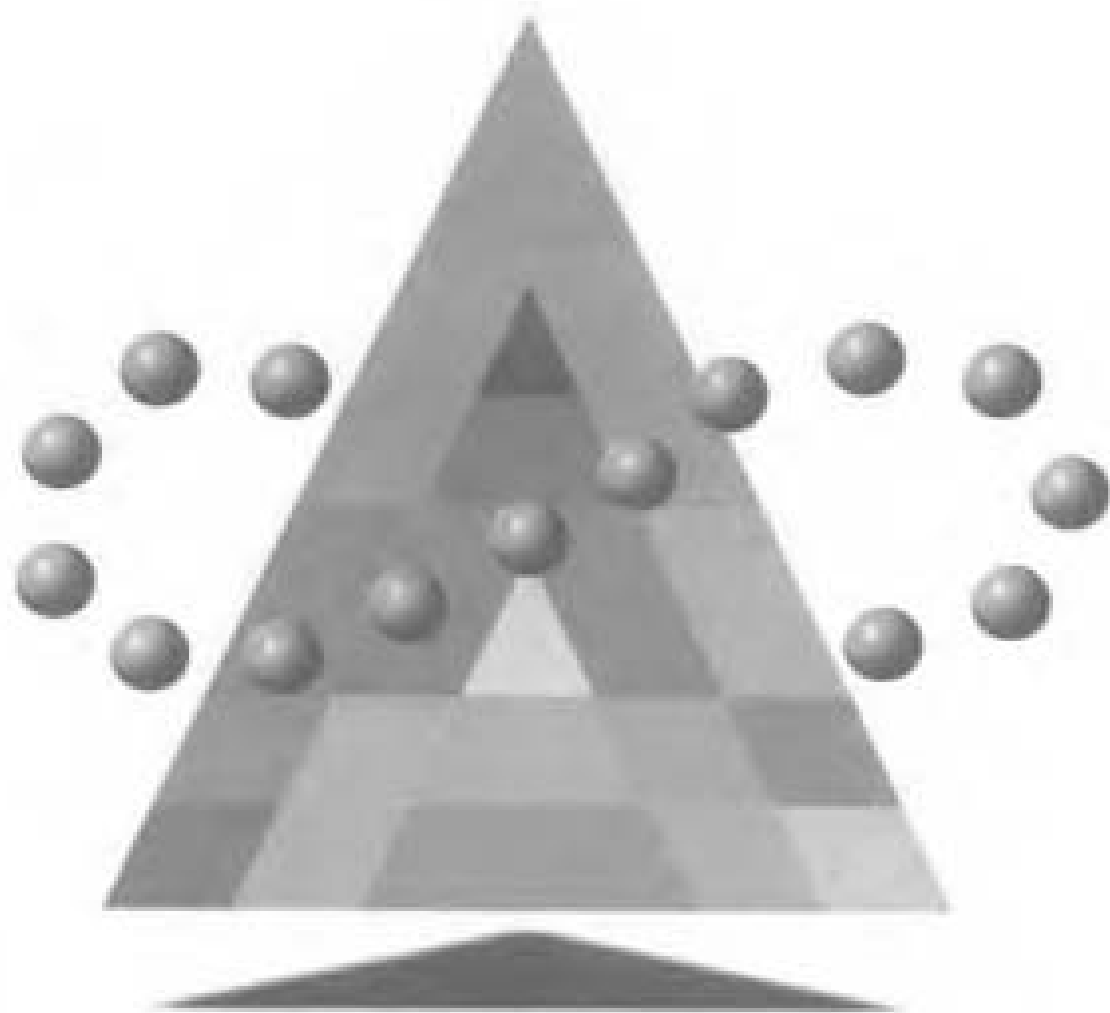


图解机电一体化入门系列

机器人控制入门

(日) 雨宫好文 主编 大熊 繁 著



科学出版社 OHM社

TP24

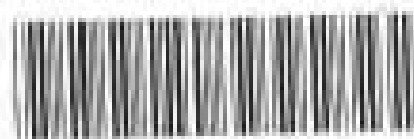
D08

457707

图解 机电一体化入门系列

机器人控制入门

〔日〕雨宫好文 主编 大熊 繁 著
王益全 译 罗转翼 校



00457707

科学出版社 OHM社
2000 北京



图字：01 - 1999 - 2933 号

Original Japanese edition

Zukai Mekatoronikusu Nyuumon Shirizu: Robotto Seigy Nyuumon

Supervised by Yoshifumi Amemiya

Written by Shigeru Ohkuma

Copyright © 1984 by Shigeru Ohkuma

published by Ohmsha, Ltd.

This Chinese language edition is co-published by Ohmsha, Ltd. and Science Press.

Copyright © 1999

All rights reserved.

本书中文版版权为科学出版社和 OHM 社所共有

图解メカトロニクス入門シリーズ

ロボット制御入門

大熊 繁 オーム社 1998 第 1 版第 13 刷

图书在版编目(CIP)数据

机器人控制入门/(日)大熊 繁著;王益全译. - 北京:科学出版社, 2000

ISBN 7-03-008049-1

I. 机… II. ①大… ②王… III. 机器人控制 - 基本知识

IV. TP24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 66660 号

科学出版社 OHM 社 出版

北京东黄城根北街 16 号 邮政编码:100717

北京东方科龙电脑图文制作有限公司 制作

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

2000 年 1 月第 一 版 开本: 889×1194 1/32

2000 年 1 月第一次印刷 印张: 5 3/8

印数: 1—5 000 字数: 140 000

定 价: 16.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

译者序

机器人是人类 20 世纪的伟大发明之一。作为一种新型的生产工具,在减轻劳动强度,提高劳动生产率,把人从危险、恶劣的环境下解放出来等方面显示出极大的优越性。机器人产业已成为当代应用广泛、发展迅速的高技术产业之一。

日本是世界上机器人技术最为先进的国家,有关机器人的知识也相当普及,素有“机器人王国”之称。而在我国,特别是在青少年中,机器人知识的普及还远远不够。译者有幸把本书介绍给年轻的读者们,就是想让读者了解一些有关机器人控制的入门知识。但要想深入、系统地掌握这些知识,至少还要通过大学阶段的学习才行。本书对理论部分采用深入浅出的讲解方法,使读者接受起来不感到困难;书中大量的插图能帮助读者理解和记忆;书中小博士的引导和体会更能帮助读者思考,增加读完本书的勇气和兴趣。其实,难与不难是相对的,一切都在于自己的努力。

这里要感谢大熊繁先生和日本欧姆出版社为我们出了一本好书。还要感谢科学出版社给了翻译出版本书的机会。

沈阳工业大学罗转翼教授对本书进行了仔细审校,提出了很多宝贵意见,在此表示衷心感谢。

由于译者水平有限,错误和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

王益全

主 编 的 话

本书是图解机电一体化系列中的一卷。在电子化时代到来的时刻,做为机械技术人员如不学习电子技术,必将落后于时代。所谓机械电子技术,不仅限于机器人和数控技术,即使对钟表、缝纫机等,通过引进电子技术,也可以提高精度,起到小型化,多样化,降低成本等作用。因此,机电一体化是一种“在机械产品上加入电子技术,以提高其功效的技术”。

为便于学习这门新技术,在充分考虑到初学者需学习哪些内容才能取得最佳效果的前提下,最终编写了下面 6 本书

- (1) 传感器入门
- (2) 控制用电机入门
- (3) 接口电路入门
- (4) 控制用微机入门
- (5) 电子机械控制入门
- (6) 机器人控制入门

由于机电一体化专业是由名古屋大学于 1982 年在全国首先开设的,因此,作为主编,我认为从我的身边选择撰稿人是非常合适的。但愿本书能对提高大家的实际工作能力。对进一步发展电子技术有所贡献。也希望此书能满足大家的学习要求。

雨宫好文

前 言

本书是为首次学习“控制”，并且希望能比较轻松地了解“控制”的人而写的。书的前半部分为培养对“控制”的感觉介绍了必要的基础知识；后半部分则以机器人位置的控制为例，在纸上来品味“控制”。由于是以轻松了解“控制”为目的，书中尽量采用简明的表述，而省略了详细的推导和证明。在考虑机器人位置控制的过程中，如果能让你恍然大悟地说“对、对，控制就是这样子的”就达到了本书的目的了。

构成机电一体化的要素中，有传感器、驱动器、控制用微型计算机以及作为接口的电子电路等。这些要素功能的综合就是“控制”。在机电一体化所采用的控制中，有程序控制和反馈控制两种。关于程序控制，将在这套丛书的《电子机械控制入门》中介绍。本书则以反馈控制为中心讲述。

书中给出了很多电路的例子，即使是电气基础知识较薄弱的人也能理解，因而不必担心。

最后，对给予本书执笔机会，并且从策划到校正都给予了悉心指导的雨宫好文先生表示衷心感谢，对绘制每章篇首插图的画家竹内佳子女士以及为承担出版作出贡献的欧姆社（OHMSHA）的诸位深表谢意。

大熊 繁

目 录

第 1 章 机器人的动作与控制

| | | |
|-----|------------------|----|
| 1.1 | 位置控制 | 11 |
| 1.2 | 路径(运动轨迹)控制 | 16 |
| 1.3 | 力与刚性控制 | 19 |
| 1.4 | 动作顺序控制 | 20 |
| 1.5 | 机器人的种类 | 21 |

第 2 章 控制的思考方法

| | | |
|-----|--------------|----|
| 2.1 | 什么是控制 | 23 |
| 2.2 | 方框图 | 24 |
| 2.3 | 比例环节 | 28 |
| 2.4 | 积分环节 | 29 |
| 2.5 | 微分环节 | 33 |
| 2.6 | 一阶惯性环节 | 39 |
| 2.7 | 二阶振荡环节 | 43 |

第 3 章 环节的性能及描述方法

| | | |
|-----|----------------------|----|
| 3.1 | 线性与非线性 | 49 |
| 3.2 | 时域性能的描述(动态响应法) | 55 |
| 3.3 | 频域性能的描述(频率响应法) | 62 |
| 3.4 | 波特图 | 66 |
| 3.5 | 矢量轨迹 | 68 |

第 4 章 拉普拉斯变换与传递函数

| | | |
|-----|-------------------|----|
| 4.1 | 拉普拉斯变换 | 71 |
| 4.2 | 传递函数与方框图 | 77 |
| 4.3 | 方框图的等效变换 | 83 |
| 4.4 | 控制系统性能的设计指标 | 89 |

第 5 章 稳定性判别法

| | | |
|-----|-------------------------|-----|
| 5.1 | 稳定与不稳定 | 95 |
| 5.2 | 赫尔维茨(Hurwitz)稳定性判别法 ... | 101 |
| 5.3 | 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判别法 ... | 105 |

第 6 章 稳态特性(稳态误差)

| | | |
|-----|-------------------|-----|
| 6.1 | 目标值变化时的稳态误差 | 109 |
| 6.2 | 对外部扰动的稳态误差 | 113 |

第 7 章 动态特性

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.1 | 基于动态响应法的评价与设计 | 117 |
| 7.1.1 | $3/(s^2 + 2s + 3)$ 的阶跃响应 | 117 |
| 7.1.2 | 阶跃响应的一般性讨论 | 120 |
| 7.1.3 | 基于动态响应法的设计 | 123 |
| 7.1.4 | 有多个特征根时 | 125 |
| 7.2 | 基于根轨迹法的评价与设计 | 130 |
| 7.2.1 | 特征方程式 $(1 + s/2)s + K = 0$ 的 根轨迹 | 130 |
| 7.2.2 | 基于根轨迹法的设计 | 132 |
| 7.2.3 | 反馈补偿 | 134 |

第 8 章 基于频率响应法的动态特性的评价与设计

| | |
|-----------------------------|-----|
| 8.1 相对稳定性(衰减性)与快速性的评价 | 137 |
| 8.2 增益补偿 | 142 |
| 8.3 相位滞后补偿 | 145 |
| 8.4 相位超前补偿 | 149 |
| 8.5 前馈补偿 | 153 |

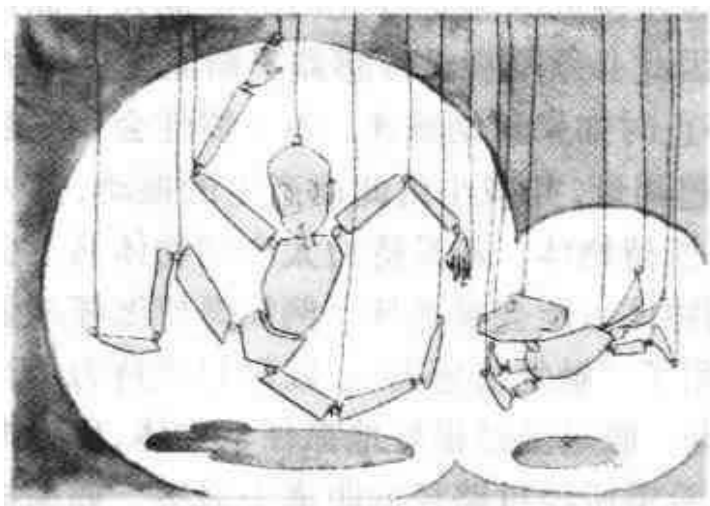
第 9 章 采样控制

| | |
|-------------------------------|-----|
| 9.1 数字控制系统 | 155 |
| 9.2 A/D 转换器 | 157 |
| 9.3 D/A 转换器 | 162 |
| 9.4 数字计算机的运算 | 164 |
| 9.5 闭环脉冲传递函数 | 167 |
| 9.6 脉冲传递函数 $D(z)$ 的确定方法 | 168 |

| | |
|------------|-----|
| 参考文献 | 171 |
|------------|-----|

第 1 章

机器人的动作与控制



1.1 位置控制

使机器人的手、臂等到达目标位置的控制称为位置控制。研究一下图 1.1 所示的机器人把物体从 A 点向 B 点移动的操作。首先,让手接近所看到的位于 A 点的物体,使手接触并抓住物体。然后转动手臂使物体从 A 点向 B 点移动。到达 B 点后将手放开。现在就让机器人来做这个简单的工作。

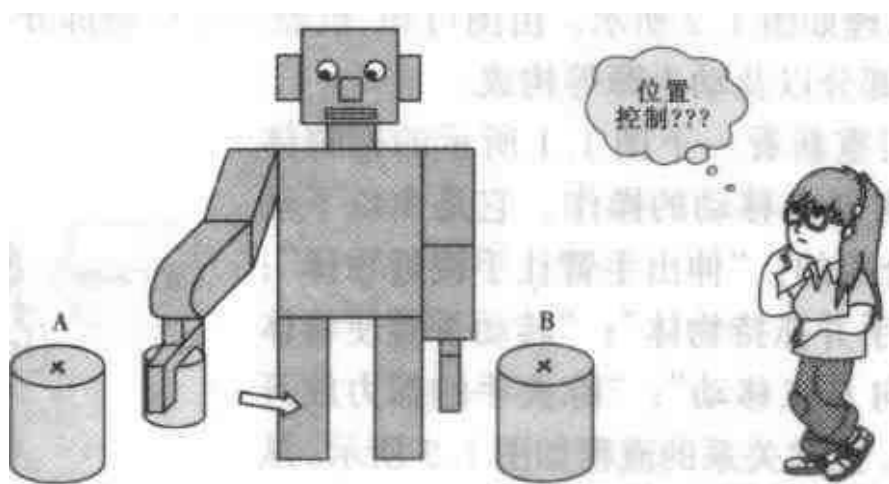


图 1.1 从 A 点向 B 点的移动

首先,机器人必须看到位于A点的物体。如果机器人用“眼睛”来看物体的话,那么机器人必须有视觉。机器人的“眼睛”称为**视觉传感器**。知道了物体位于A点之后,装在手臂内作为“动力源”的电机、油缸等开始动作,使作为驱动器可动部分的手接近物体。若手慢慢接近物体会使工作效率低下。应该首先让手快速移动,临近物体时减速并缓慢接近A点。停止时为了能让手抓住物体,应恰好停在A点。因此必须用视觉传感器不断测量目标A点与现在位置的距离。停止时如果急剧减速,由于惯性会发生超调(过调节)。因此,减小超调量,并减小由此而产生的振动,这才是好的控制。然后是用手抓持物体。若抓持力太小则物体马上会掉下去;若抓持力过大则物体可能会被抓坏(例如抓持纸杯或蛋类等)。因此在手指尖采用了“触觉传感器”,以便对抓持力进行调整,使物体在手中不滑动。假定已经很好地抓住了物体,现在把它从A点移向B点,当然希望所经过路径的距离为最短。如果机器人持物运动时遇有障碍物,不能按最短距离移动,那么移动路线应事先确定。与接近A点时的情况相同,首先以高速接近B点,然后降速,由传感器测量目标B点与当前位置的距离而恰好停止在B点。最后把手松开放下物体。

上述动作中,从**传感器**(检测部分)获得位置、速度、滑动等信息,送到作为头脑的**计算机**(控制部分),计算出手臂的移动速度、作用于手臂的力,以及手的抓持力等。然后将计算结果送到**驱动器**。其原理如图1.2所示。由图可知,机器人由检测部分、控制部分、驱动部分以及动力源等构成。

我们重新看一下图1.1所示的把物体从A点向B点移动的操作。它是由以下动作连续合成的:“伸出手臂让手接近物体”;“施力于手并抓持物体”;“转动手臂使物体从A点向B点移动”;“除去手的抓力放开物体”等。上述关系的流程如图1.3所示。从符号**开始**出发,首先向A点伸展手臂,检测手是否到达A点,如果没有到达则进一步伸展手



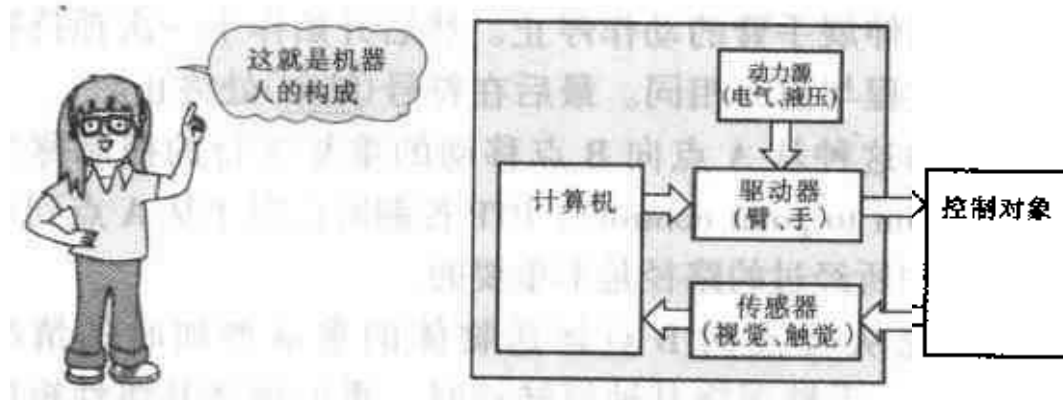


图 1.2 机器人的构成

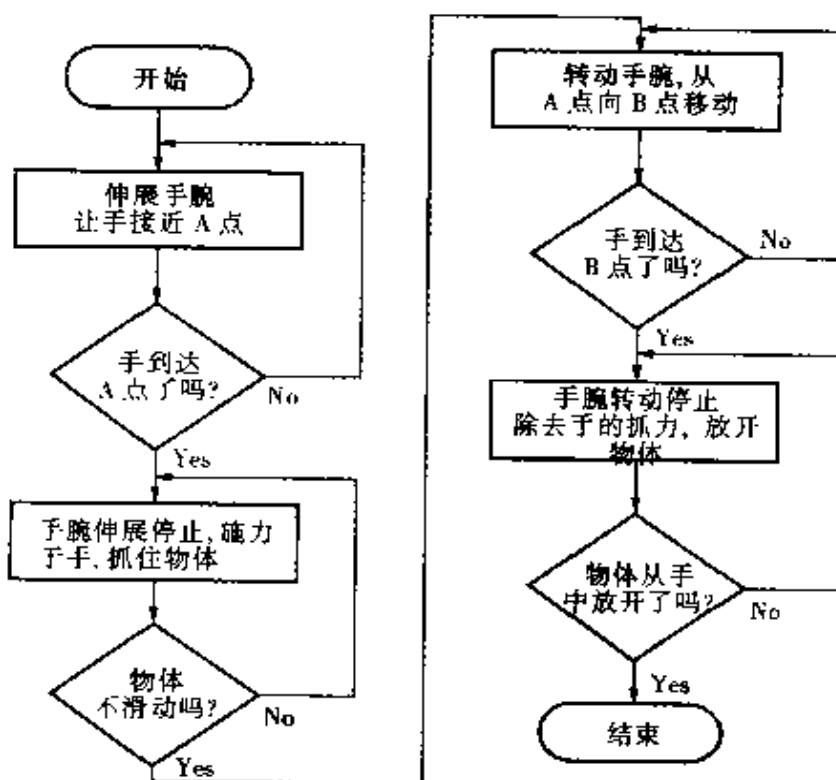


图 1.3 从 A 点向 B 点移动物体的流程图

MEMO



: 表示开始与结束。



: 表示动作。



No

: 表示判断。

Yes

Yes 为下行

No 为右行

臂,若到达则伸展手臂的动作停止。然后开始作下一次抓持物体的动作,过程与前面相同。最后在符号(结束)处终止。

机器人的这种从A点向B点移动的重复进行的控制称为**PTP控制**(point to point control)。PTP控制时仅限于从A点到达B点,至于途中所经过的路径是不重要的。

下面研究从A点向B点运送物体的重量增加时的情况(参见图1.4)。手臂围绕其轴线转动时,重的物体其惯性矩增大。因此,机器人的手臂从A点转动到B点时,惯性矩大时启动会慢。停止时,不能快速停下来,同时将产生过调节。怎样才能做到任意重量的物体都能以同样的速度停在B点呢?惯性矩较大时,用较大的力来操作手臂就可以了。惯性矩增大时,驱动力要相应增大,这一工作由计算机来判断,然后向执行机构送出指令。因此,必须事先了解物体的重量并输入计算机。

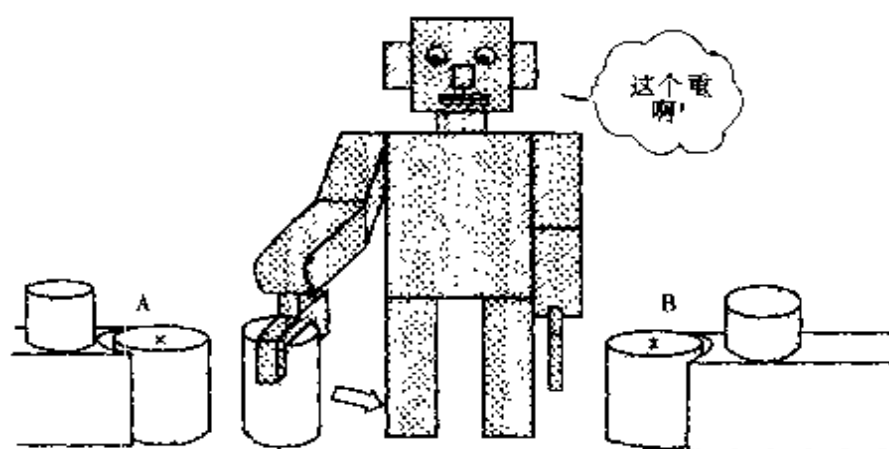


图 1.4 物体重时

对同样的物体,手臂的姿势有时也会不同,如图1.5所示。图1.5(a)的手臂下垂,手臂转动的惯性矩较小;图1.5(b)的手臂抬起,惯性矩较大。手臂上抬引起的较大惯性矩还会使超调量增大。这时,根据手臂的姿势事先计算惯性矩,使驱动力与惯性矩成比例变化,为此需要设计相应的计算机程序。

然而,在事先无法知道惯性矩的情况下,该怎么办呢?这时,

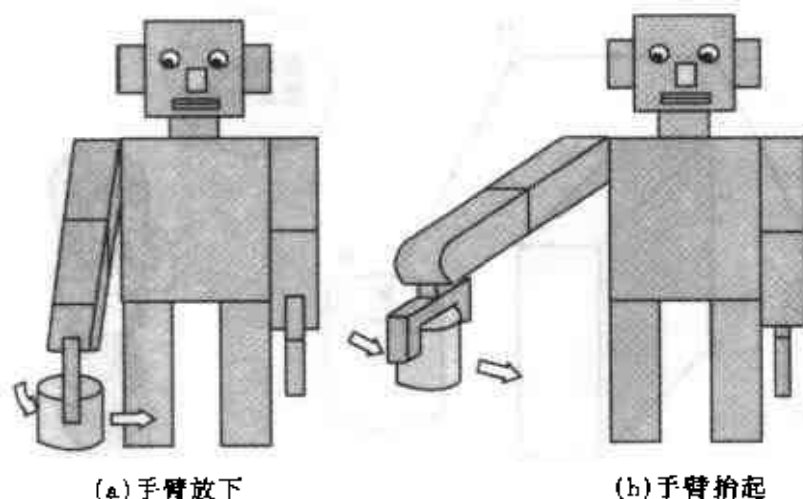


图 1.5 手臂的姿势不同时

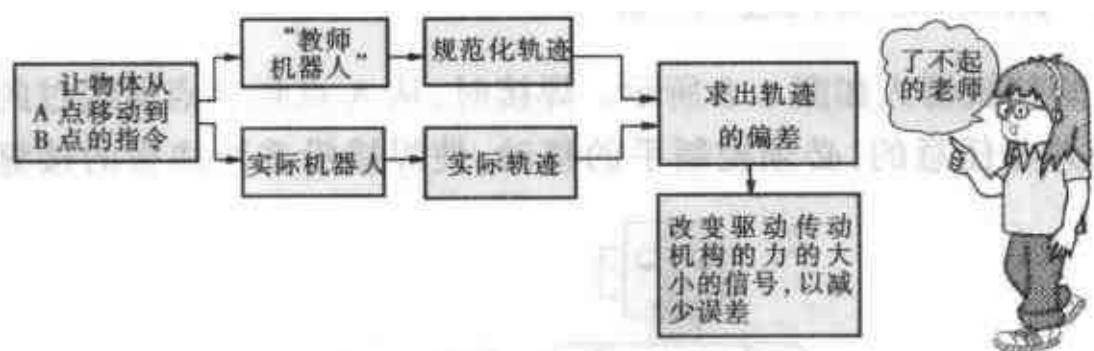


图 1.6 模型参考自适应控制

有一种称之为**自适应控制**的方法,可以“适应”事先不知道的状况的变化。下面举例说明。图 1.6 中,“教师机器人”在其计算机中预先设置了计算机程序。[“教师机器人”不是实际上的物体(硬件)而是计算机程序(软件)]。对于使物体从 A 点移动到 B 点的命令,“教师机器人”知道所描述的是怎样的一条运动轨迹。而实际的机器人则控制力的增减,使自己所描述的轨迹与“教师机器人”给出的轨迹相近。

最后,如图 1.7 所示,考虑在 A 点和 B 点间有障碍物的情况。假定从 A 点向 B 点转动手臂时,手臂碰到了障碍物。为了避开障碍物,在途中准备了 C 点和 D 点。首先从 A 点行进到 C 点,然后从 C 点到 D 点,最后从 D 点到 B 点。即由一组 PTP 控制来完成。在下面的运动轨迹控制中也用到了上述方法。

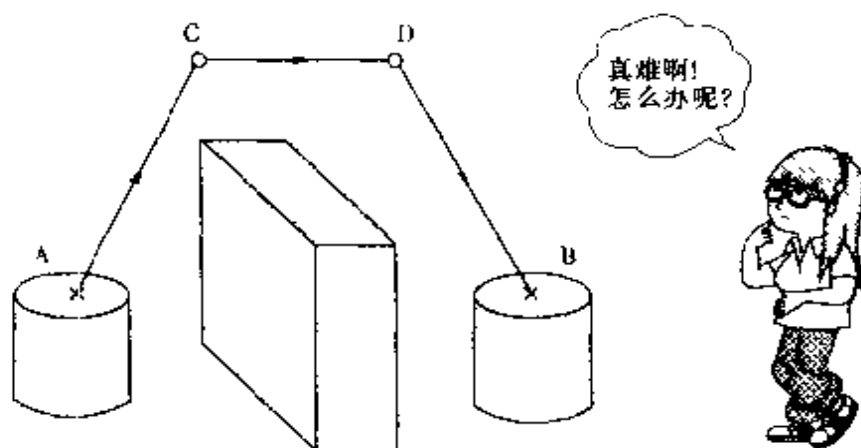


图 1.7 有障碍物时

1.2 路径(运动轨迹)控制

焊接机器人如图 1.8 所示。焊接时,从 A 点到 B 点所经过的路径并非任意的,必须控制手的移动,使焊接沿着两块板的接缝

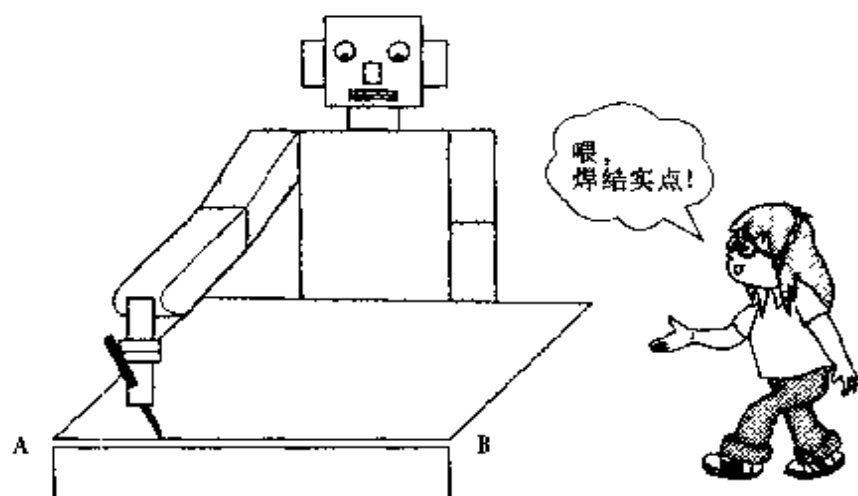


图 1.8 焊接机器人

进行。这种移动路径控制称为 **CP 控制**(continuous path control)。实现 CP 控制时,必须进行位置控制,并且是对目标坐标的连续控制。但是,要指定全部路径需要存储非常大量的目标坐标,这时如果采用传统的模拟式位置随动系统,精度将变差,这是 CP 控制的不足之处。于是我们不直接进行连续轨迹(CP)的控制,如图 1.9 所示,在 A 点和 B 点之间设置了 C, D, E, … 等多个目标点,就像踩着几

块石头过一条小溪一样地按顺序进行 PTP 控制, 可以认为这是一种近似的 CP 控制。确定 A, B 两点之间的 C, D, E 各点坐标的过程称为插补。插入途中点进行的 PTP 控制称为模拟 CP 控制。

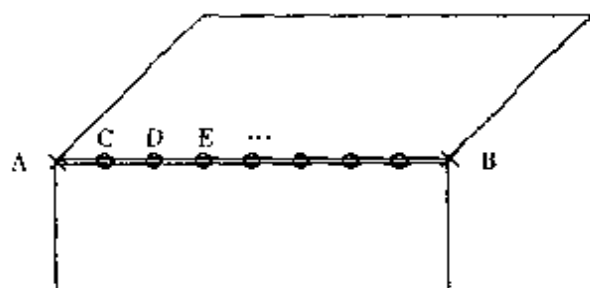


图 1.9 模拟 CP 控制

由于焊接机器人的路径为连接 A, B 两点的直线, 故为了在直线上进行插补, 将 A, B 两点间直线分成适当的间隔, 求出间断点的坐标。根据这些点的坐标求出机器人各个轴的位置和角度(即把位于用户方便的坐标系的位置和角度进行坐标变换, 变换为机器人的轴和关节的位置和角度)。计算机运算时间的 80% 以上用于这种坐标变换, 所得结果放入存储器。

插补点的间隔必须确定, 同时即使不进行路径控制所经路径也必须有一个允许的误差范围, 如图 1.10 所示。例如, 如果允许误差范围, 即位置精度为 $\pm 0.5 \text{ mm}$, 则插补点的间隔($\overline{AC}, \overline{CD}, \dots$)通常为 5 mm 。如果焊接时的速度为 1 m/min , 则前进 5 mm 需要 $5 \times 60 / 1000 = 0.3 \text{ 秒}$ 。所以实际机器人移动时, 随着手臂移动, 每隔 0.3 秒 从存储器读取下面的插补点坐标, 作为各轴的给定值。

为了使插补点间的路径与计划路径相同, 如果作为目标的插补点的坐标已经给出, 可以将目标的坐标与当前位置坐标之差, 分割成几小段, 并求得每段的数值, 然后在当前位置坐标上加上小段值并使这一和值成为目标值。例如, 在图 1.11 中, 焊接机器人的手位于 C 点 ($x = 5 \text{ mm}$)。图中仅示出直角坐标系的 x 轴(设 $y = z = 0$)。作为目标的插补点为 D 点 ($x = 10 \text{ mm}$)。为了求得坐标小段值, 把 C 点和 D 点之间 5 等分:

$$\frac{10 - 5}{5} = 1 \text{ mm}$$

其每段长度 1 mm 即为小段值。于是, 从 C 点向 D 点移动时, 只要向 $x = 5 + 1 \times 1 = 6 \text{ mm}$ 点移动就可以了, 而下一次移动目标为 $x = 5 + 1 \times 2 = 7 \text{ mm}$ 点。

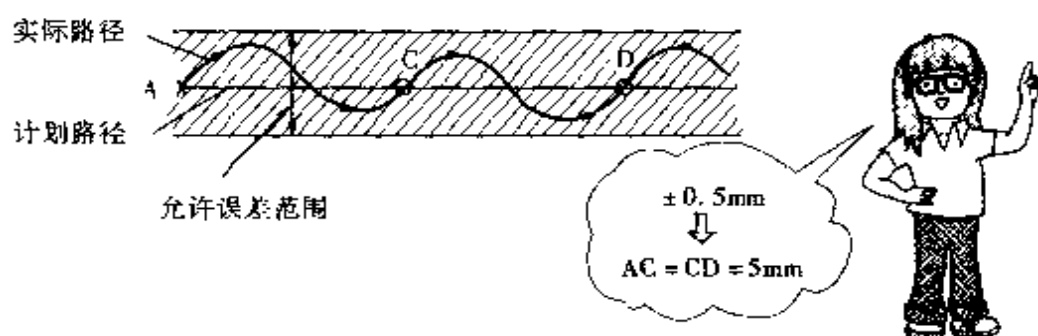


图 1.10 插补点间隔的确定方法

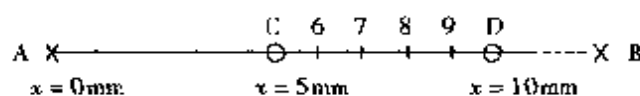


图 1.11 分割相加的方法

采用插补的模拟 CP 控制的优点在于,使机器人识别路径的工作变得简单了,从而节省了控制用计算机的存储单元。总之,要根据必要的位置精度、焊接棒的移动速度、计算机的运算时间及存储器容量等来决定进行怎样的插补。

对于焊接机器人和油漆机器人等,路径和移动速度是确定的。在其他用途中,从 A 点向 B 点移动时,总是希望运动的速度快些。运动速度增加时,加于臂和手的力也要增大,然而,机器人的力是有限度的。一方面希望在有限力的作用下运动速度尽可能大,同时又希望对于各种指令能快速响应。因此要事先预置一个用极限力能够充分跟随的平滑函数,并且使机器人的运动路径与之相一致。图 1.12 (a) 为这种函数的示例。图 1.12 (b) 中示出了为跟随预置函数曲线 \widehat{AB} , 设置了插补点 C, D, E, F, G, H, ..., 在 x 方向和 z 方向上实行 PTP 控制。

在这种控制中,由于事先了解运动路径,那么为实现这个路径所需要的力也就可以计算出来。因此如图 1.13 所示,以预先求出的力作为补偿力,通过执行机构施加给控制对象,其余的控制仍按如图 1.2 所示的方法进行,可以使性能明显提高。

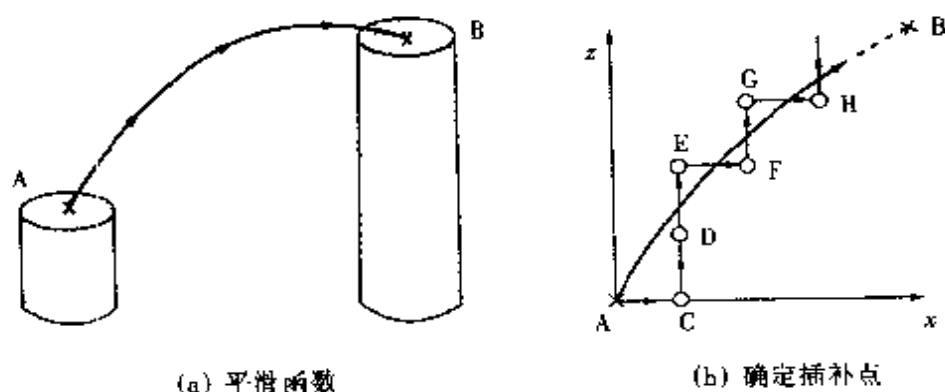


图 1.12 函数插补的示例

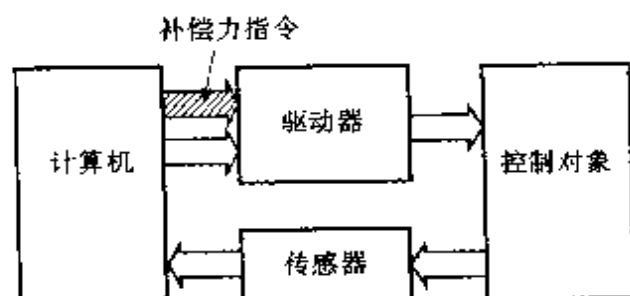


图 1.13 施加补偿力的控制

1.3 力与刚性控制

图 1.14 示出了配合作业的机器人。配合作业是组合作业中最基本的操作。配合作业是依靠手的位置控制来进行的。图 1.14 (a)中,为了提高手的位置精度,即使有少许误差,也会经过控制

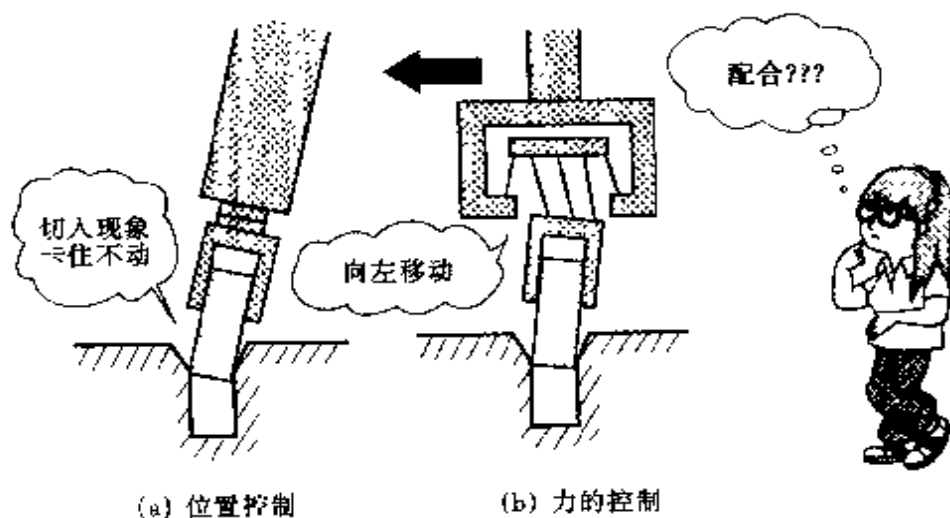


图 1.14 配合作业

产生很大的力以消除误差。这样一来,这个机器人的手就成为一个位置变动很小的**刚性手**。如果用这个刚性手将棒插入孔中,则会发生切入现象(棒被卡住不动,就像我们平时拉抽屉常常被卡住一样)。因此,配合作业时,应使手的位置精度降低、位置变动的幅度增大,从而实现机器人的**柔性手**。例如,如图 1.14(b)所示,在手指尖设置测力传感器,一边检测手上的作用力,一边在横方向上移动到剩余力不作用的位置(孔的正上方),同时将棒插入孔中。这种控制不是位置控制,而是力的控制。

1.4 动作顺序控制

下面考察从某点到目标点机器人怎样动作。这里简单描述一下基本动作及其组合。

图 1.15 示出了一台点焊机器人。点焊机器人反复进行位置控制和焊接作业控制。例如以 C 点为目标的位置控制一结束,即下达焊接指令开始焊接。焊接作业一结束,则接受结束指令,进入下一个焊接点的位置控制。这样决定一个位置及其焊接作业,结束后即向下一个动作移动的控制方式称为**顺序程序方式**。这种用时间来管理程序顺序的方式,称为**限时程序控制方式**。

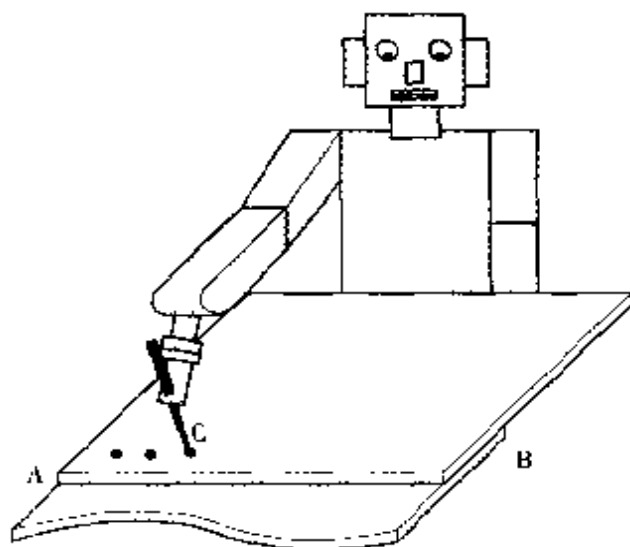


图 1.15 点焊机器人

1.5 机器人的种类

按输入信息与示教的不同,日本工业标准 JIS 的分类如表 1.1 所示,按动作形态的分类示于表 1.2。

本章介绍了有关机器人的控制技术,从下一章开始,将分别介绍机器人的位置控制、速度控制、力的控制等。为此要从基本的自动控制原理开始。



表 1.1 按输入信息及示教分类(JIS B 0134)

| 种 类 | 意 义 |
|---|---|
| 手动操作器 (manual manipulator) | 由人直接操作的操作器 |
| 固定顺序机器人 (fixed sequence robot) | 按照预先设定的顺序、条件及位置,使动作的各阶段逐次进行的机器人。设定信息不能轻易变更。 |
| 可变顺序机器人 (variable sequence robot) | 按照预先设定的顺序、条件及位置,使动作的各阶段逐次进行的机器人。设定信息可很容易变更。 |
| 示教再现型机器人 (playback robot) | 通过示教编程进行顺序、条件、位置及其他信息的示教,并能按 <u>这些信息进行作业的机器人。</u> |
| 数字控制机器人 (numerically controlled (NC) robot) | 用数字方式给出顺序、位置及其他信息,并按照这些信息工作的机器人。 例如:穿孔纸带、卡片及数字开关等。 |
| 智能机器人 (intelligent robot) | 能按照感觉功能和认识功能决策行动的机器人。 |

注:操作器(manipulator):具有类似人类上肢的功能,能使被控物体在空间移动的机器。

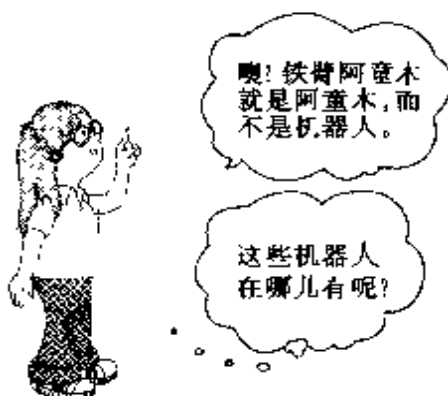


表 1.2 按动作形态分类(JIS B 0134)

| 种 类 | 意 义 |
|---------|-----------------|
| 圆柱坐标机器人 | 动作以圆柱坐标形式为主的机器人 |
| 极坐标机器人 | 动作以极坐标形式为主的机器人 |
| 直角坐标机器人 | 动作以直角坐标形式为主的机器人 |
| 多关节机器人 | 动作由多关节构成的机器人 |



第 2 章

控制的思考方法



2.1 什么是控制

研究一下向底部有孔的水槽注水的情况(图 2.1)。当打开阀门向水槽中注水时,因水的积累而使槽中水位开始升高。随着水位的升高,从底部流出的水量也将增加。如果此时上水管的流量减少,水位会随之下落;流入的流量增加,水位也会随之升高。如果流入的流量进一步增加,水会从水槽中溢出。

要使水槽中的水位控制在期望值上,只要调节点门的开闭就可以了。这就是说,如果槽中水位低于期望值,需要把阀门开大;槽中水位高于期望值,则把阀门闭小。这样控制的结果是,水槽的水位多少会有一些变动,但大体上能够维持在一定的数值。

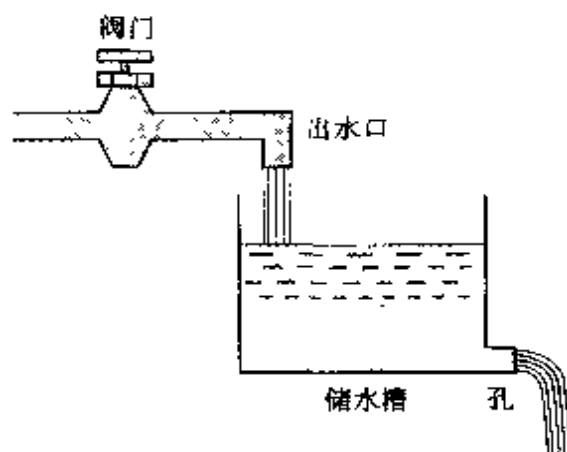
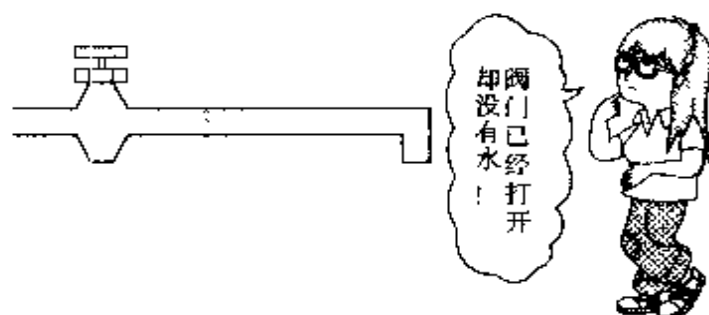


图 2.1 水槽模型

但是,也会有不能将水槽水位稳定控制在某一定值的情况。考虑这样一种情况,如果从阀门到出水口的距离很长,从阀门开闭到出水口的流量发生变化需要一段时间。阀门打开,流入水槽的流量不会马上增加,如果进一步开大阀门,流量将急剧增加,又要急忙关闭阀门。这样一来,保持在希望的水位是不容易实现的。



2.2 方框图

下面的一段话可以用简单的方式来表示。在底部无孔的水槽中(图 2.2(a))流入槽中的水的流量为变量(随时间而变化的量),那么水槽中的水量和水位亦为变量。关于流量变化引起水位变化这样两个变量间的关系,可以用图 2.2(b)表示。图中水槽用一个长方形的方框来表示,这样的图称为**方框图**。

下面再看一下图 2.1 的例子。与图 2.2 不同的是,图 2.1 中的水槽的底部有孔。槽中水位高时,从孔流出水的流量也大(正确地说,流出水的流量与水位的平方根成比例),这个关系的方框图如图 2.3 所示。由图 2.2(b)和图 2.3(b)可以得到图 2.1 例的方框图如图 2.4 所示。

现在考虑一下向无孔水槽中注水并实现一定水位的问题。一般来说,注水开始时阀门大开,接近目标水位时阀门开始闭小,到达目标水位时阀门全部关闭。上述过程能否实现自动控制呢?图 2.5 中采用了浮球液位开关来实现上述系统的自动控制。浮球位于水槽的水面上,随着水面上升浮球上升,阀门开始关闭,到达目标水位时,阀门将完全关闭。这个装置的方框图如图 2.6 所示。

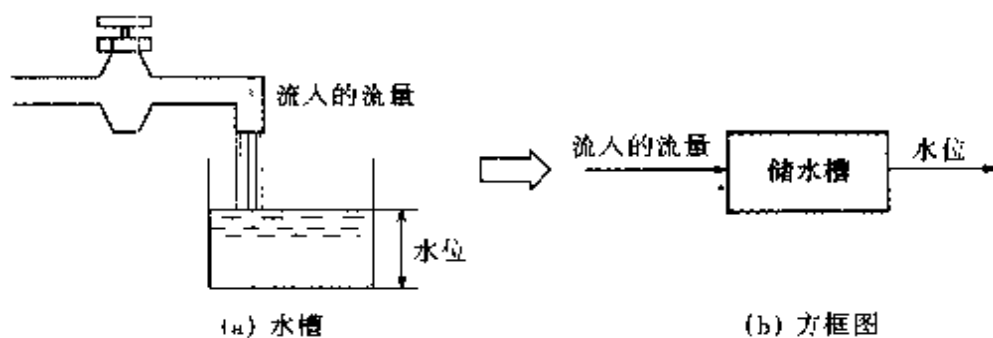


图 2.2 流入的流量与水位

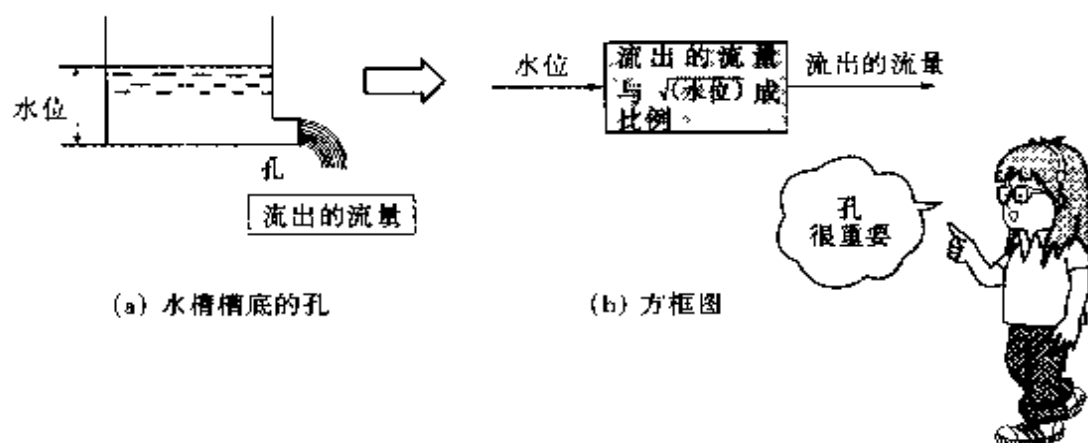
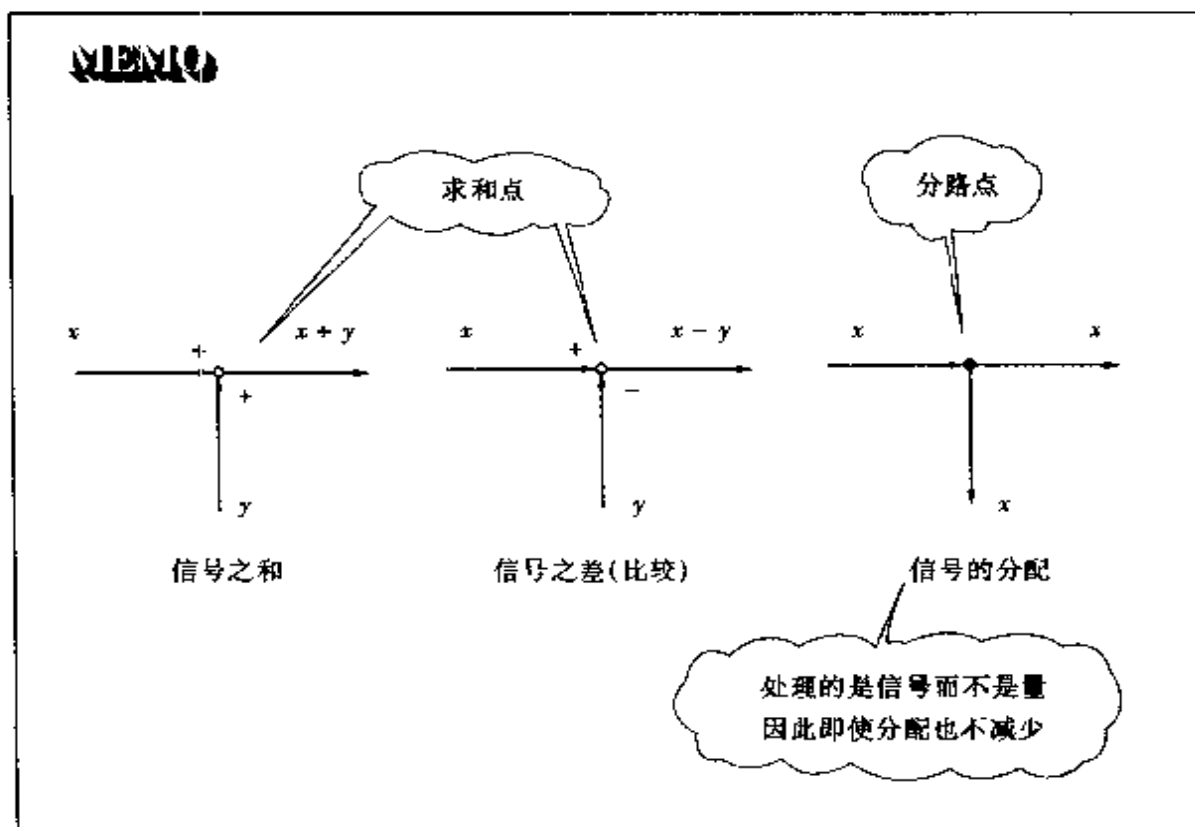


图 2.3 水位与流出的流量



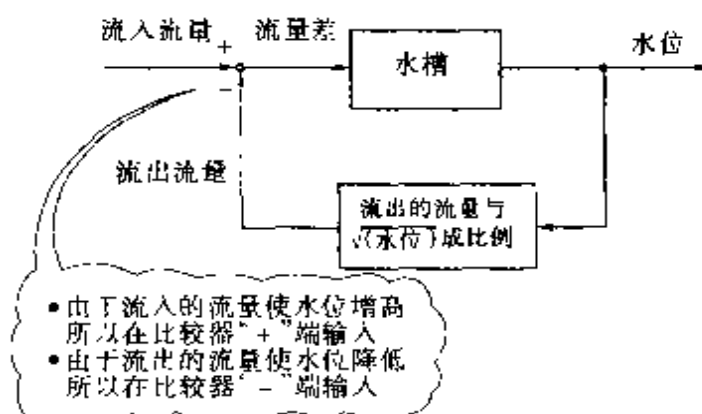


图 2.4 底部有孔水槽的方框图

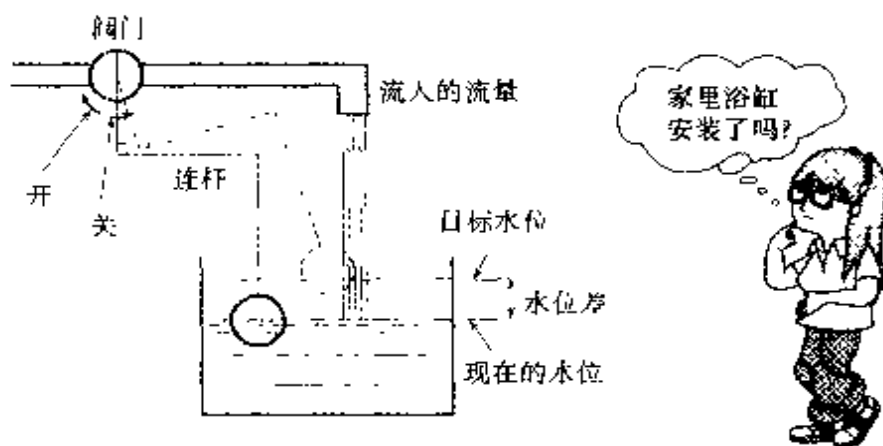


图 2.5 自动水位调节系统

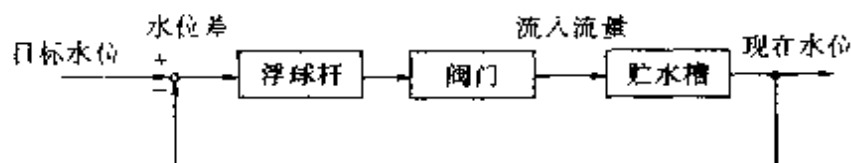


图 2.6 自动水位调节系统方框图

下面考虑用加热器给房间取暖的问题。若房间里冷了，合上加热器开关房间开始变暖，不久房间变得很热时将加热器的开关切断。上述控制的方框图如图 2.7 所示。

取上述几种方框图的共同点，就得到了如图 2.8 所示的标准化方框图。图 1.2 中所示的可动部分在图 2.8 中被标准化地称之为执行部分，控制部分被称为调节器。图 2.8 中调节部分和给定部分合称为调节器。目标值通过给定部分作为比较器的输入，成为合适的基准输入信号，与反馈量（被检测出的控制量）相比较，产生偏差动作信号。调节部分根据动作信号产生控制系统所要求

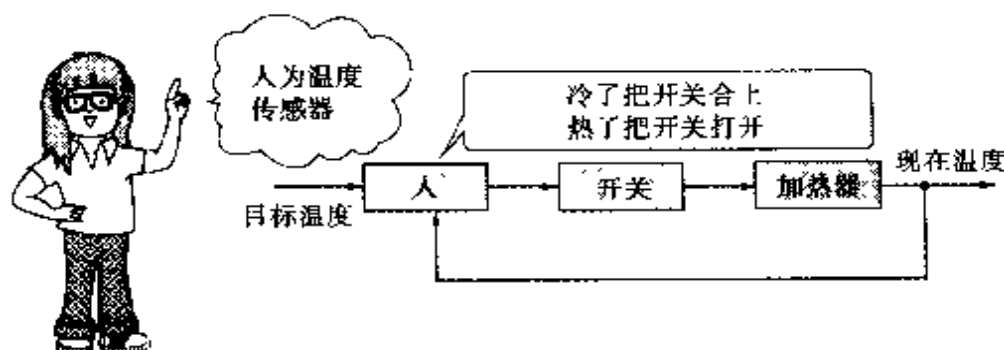


图 2.7 温度调节系统方框图

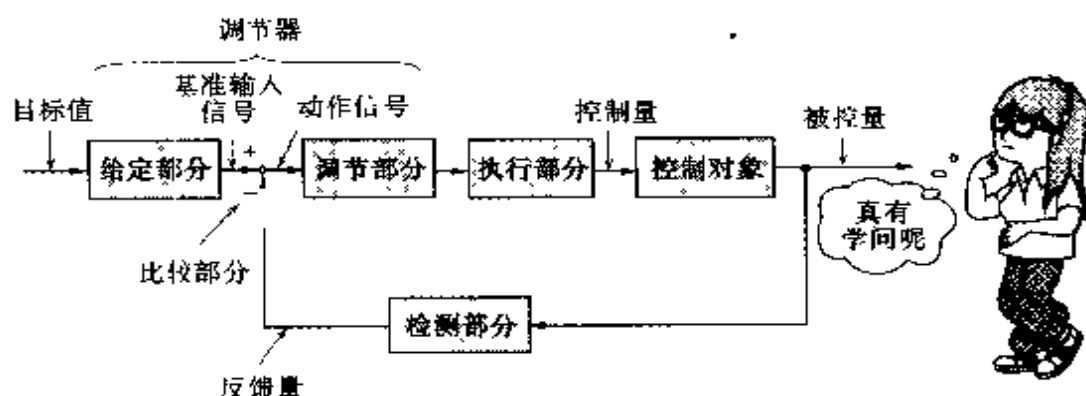


图 2.8 标准化的方框图(之一)

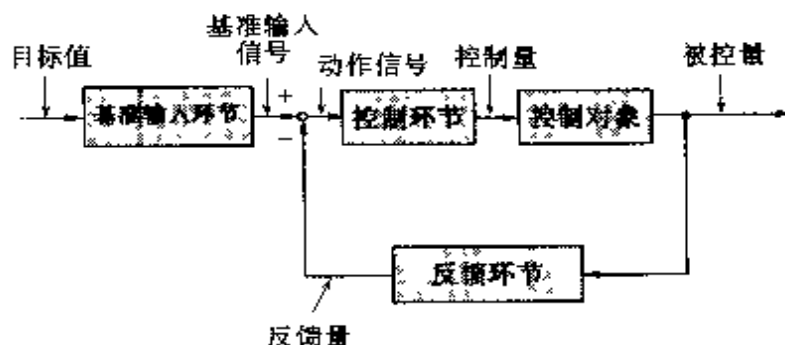


图 2.9 标准化的方框图(之二)

的控制信号并传送至执行部分。执行部分产生控制量作用于控制对象。

另外，也可称给定部分为基准输入环节，检测部分为反馈环节、调节部分与执行部分合称为控制部分，如图 2.9 所示。

检测部分的反馈环节检测出被控量，与基准输入信号（目标值经适当处理后得到）相比较。一般来说，检测出的位置、速度、力等量应变换成电压、电流等电信号。由图 2.8、图 2.9 可知，反馈环节的符号必须为负，并与目标值相比较。例如当速度高于目标值

时,则应向降低速度的方向调整。由于反馈量的符号为负,因此称之为负反馈。

2.3 比例环节

前面已经了解了有关控制的整体形象,下面介绍各局部环节的内容。从控制的观点去观察物体时,物体是什么样的呢?首先来研究一下弹簧。图 2.10(a)示出弹簧不受力时的情况,图 2.10(b)为受力 f 作用时的情况。外界对物体的激励称为输入,物体作出的响应称为输出。因此,力 f 为输入,弹簧的伸长 y 为输出。这种场合下的弹簧等物体称为**环节**。由于弹簧的伸长 y 与力 f 成比例,所以输入 f 与输出 y 的关系可记作

$$y = K_1 f \quad (K_1 = \text{定值}) \quad (2.1)$$

像弹簧这样的环节称为**比例环节**。

图 2.11(a)所示的金属棒,在其旋转方向上也相当于一个弹

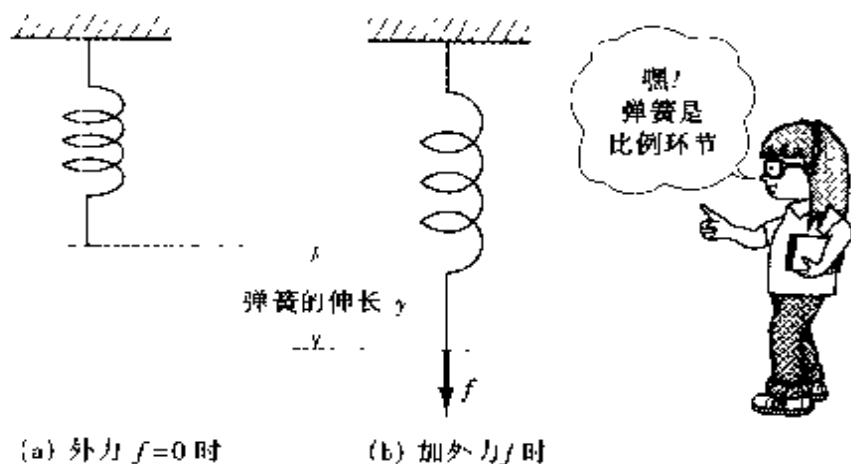


图 2.10 弹簧

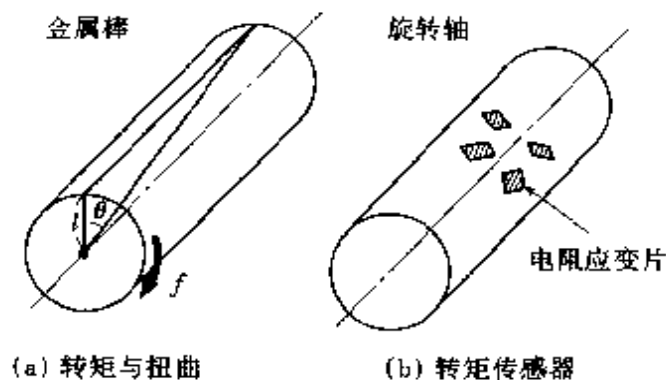


图 2.11 旋转弹簧

簧,将其一端固定,另一端施加转矩 T (力 $f \times$ 半径 l) 时,金属棒的扭转角 θ 与转矩 T 的关系为

$$\theta = K_2 T \quad (K_2 = \text{定值}) \quad (2.2)$$

因此,金属棒也是比例环节。利用转矩与扭转角成比例的性质,可以制成转矩传感器。图 2.11(b) 示出了在旋转轴上粘贴四片电阻应变片,就可以测定轴的扭转进而测定转矩。

下面考察一下电气元件。图 2.12 示出了一个用导线绕成的线圈。线圈中有电流 i 流过时,会产生自感磁链 ϕ :

$$\phi = Li \quad (\text{式中 } L \text{ 为自感系数}) \quad (2.3)$$

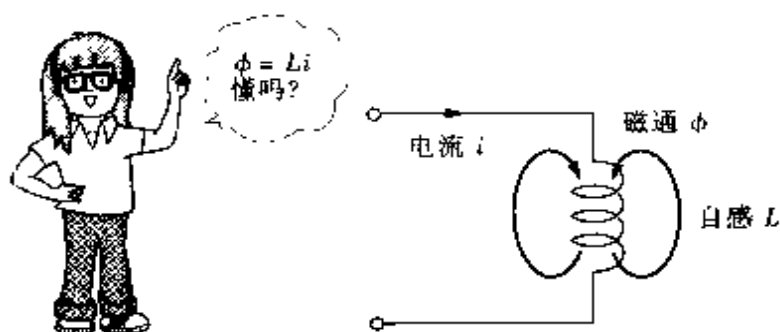


图 2.12 线圈

若以电流作为输入,以磁通 ϕ 作为输出,则线圈是比例环节。

图 2.13 中,电阻 R 有电流 i 流过时,电阻两端会产生电压(电位差) e :

$$e = Ri \quad (2.4)$$

若以电流 i 作为输入,以电压 e 作为输出,则电阻也是比例环节。

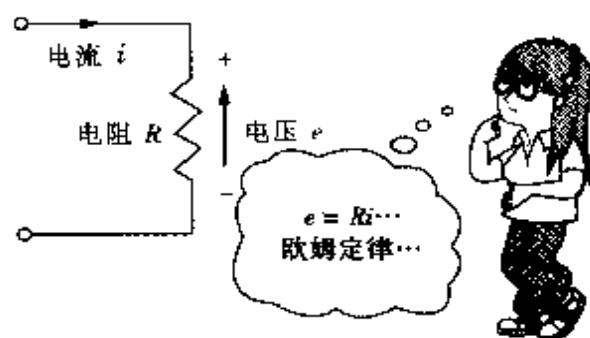


图 2.13 电阻

2.4 积分环节

一油缸如图 2.14 所示,要使油流入油缸内,需推动活塞向右方移动。设流入的流量为 x ,活塞的移动距离为 y 。当流量为一定值 x_0 时,移动距离 y 可由下式算出:

$$y = x_0 t / S \quad (2.5)$$

式中 S 为活塞的截面积, t 为时间。图 2.15(a) 为 x 为一定值时的

情况。图中斜线部分的面积 $x_0 t$ 表示油缸的油量,除以活塞截面积 S 就等于活塞移动的距离 y 。

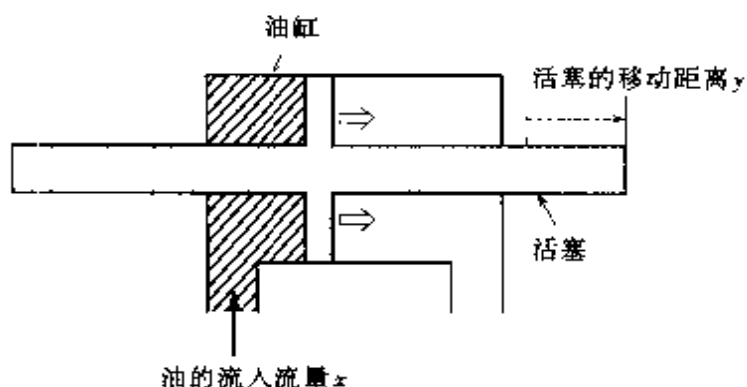


图 2.14 油缸

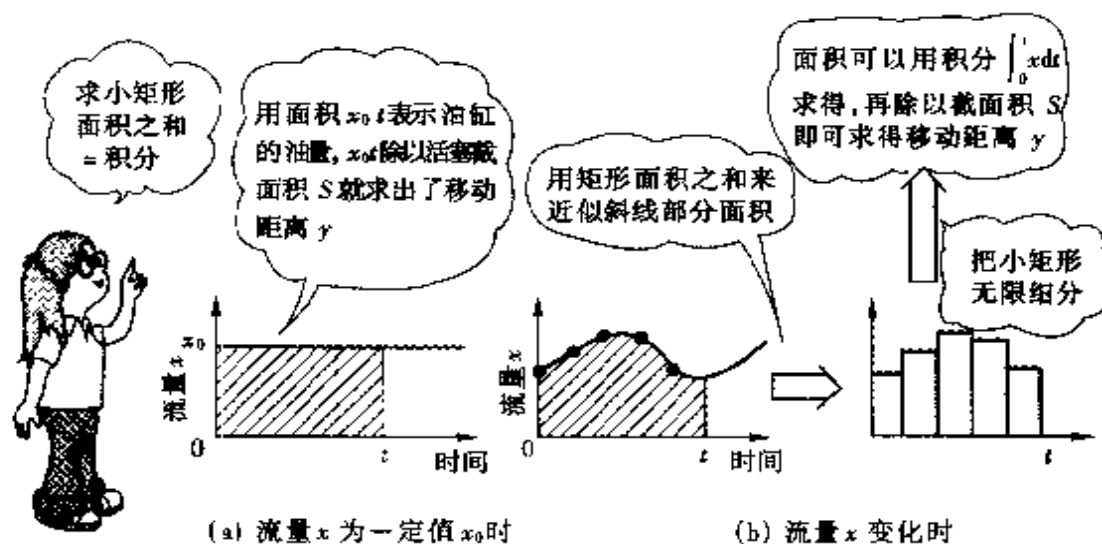
图 2.15 移动距离 y 的计算

图 2.15(b) 示出流量 x 变化的情况。为了求取斜线部分的面积,可以用多个小矩形面积的和来近似。矩形分得越细,近似程度越好。一个个小矩形的面积(底 \times 高)是很容易求得的,这些矩形面积之和也就容易求出了。如果把小矩形无限细分,那么无限多个小矩形面积之和就等于斜线部分的面积。这种求取斜线部分面积的运算叫做“积分”,其数学表达式为

$$\int_0^t x dt \quad (2.6)$$

活塞移动距离 y 可以用式(2.6)除以活塞截面积 S 求得



所谓积分就是求面积!

$$y = \frac{1}{S} \int_0^t x dt \quad (2.7)$$

若以流入的流量 x 作为输入, 以移动距离 y 作为输出, 则油缸是个积分环节。

下面考虑一下对质量为 M 的静止物体施以水平外力 f 的情况(图 2.16)。首先考虑力 f 为一定值 f_0 时的情况。当对质量为 M 的静止物体施以力 f_0 时, 物体将产生加速度, 由公式 $\alpha = f_0 / M$ 确定。加速度为 α 时, 经过时间 t 后的速度 v 像高中物理中学过的那样, 为 $v = \alpha t$, 速度 v 可以记为

$$v = f_0 t / M \quad (2.8)$$

当外力 f 变化时怎么办呢? 图 2.17(a) 示出力 f 为一定值 f_0 的情况, 图 2.17(b) 示出力 f 变化的情况。与图 2.15(a)、(b) 的情况相比较, 就可以知道外力 f 变化时, 速度 v 可以用积分求取, 如下式:

$$v = \frac{1}{M} \int_0^t f dt \quad (2.9)$$

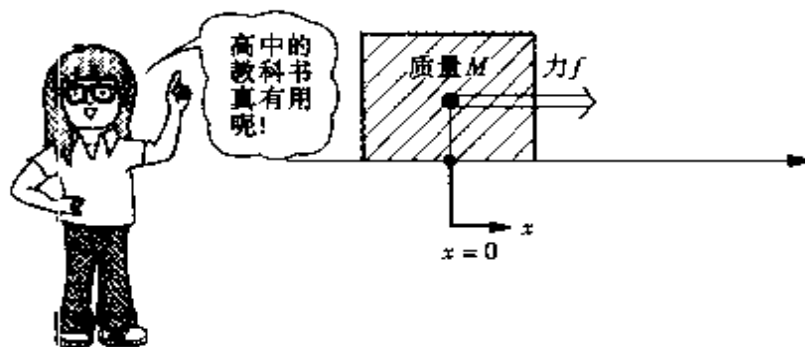
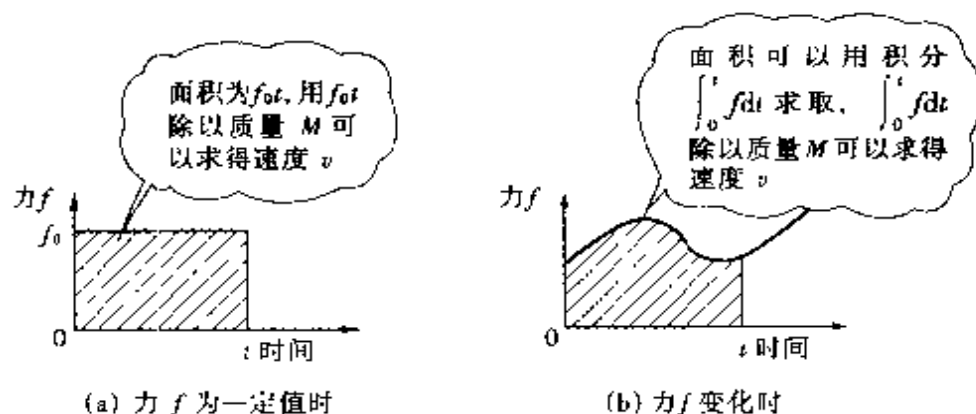


图 2.16 质量为 M 的物体

若以外力 f 作为输入, 以速度 v 作为输出, 则质量 M 的物体也可称之为积分环节。

具有惯性矩 J 的旋转体与前面的情况相似(图 2.18)。当转矩 T 为一定值 T_0 时, 用角度来表示的角加速度是 T_0 / J , 时间 T 之后

图 2.17 速度 v 的计算

的角速度 ω 变成:

$$\omega = T_0/J \times t = T_0t/J \quad (2.10)$$

当转矩 T 发生变化时, 角速度 ω 可以用与式(2.9)同样的积分来表示:

$$\omega = \frac{1}{J} \int_0^t T dt \quad (2.11)$$

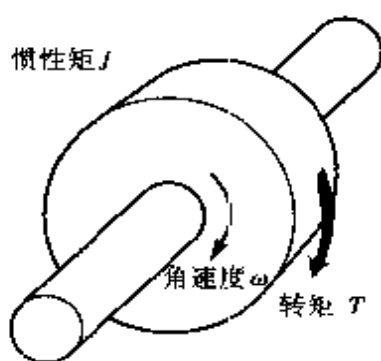


图 2.18 具有惯性矩 J 的旋转体

若以转矩 T 作为输入, 以角速度 ω 作为输出, 则具有惯性矩 J 的旋转体也是积分环节。

取输入作为坐标的纵轴, 时间作为坐标的横轴时, 积分环节的输出与坐标的面积成比例。图 2.19 中示出了积分环节的输入与输出曲线的两个例子。图 2.19(a)

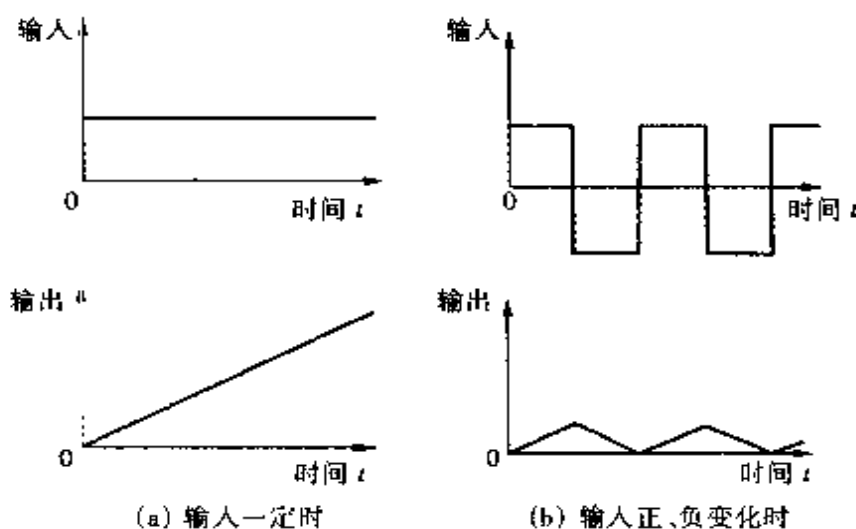


图 2.19 积分环节的输入与输出

表示输入为一定值时,随着时间的增加、面积增大、输出也随之增大;图 2.19(b)表示当输入正、负变化时,由于面积随时间按正、负变化,使输出随时间按三角波变化。

2.5 微分环节

研究一下图 2.20 所示的缓冲器。将高粘性的液体装入油缸内,加上可移动的活塞就构成了缓冲器。如果活塞向上运动,则受到向下作用的力;若活塞向下运动,则受到向上作用的力。由于所受力阻碍了活塞的运动,因此,可以作为缓冲器使用。下面研究活塞的移动距离 y 与作用于活塞的力 f 的关系。假定在很短的时间

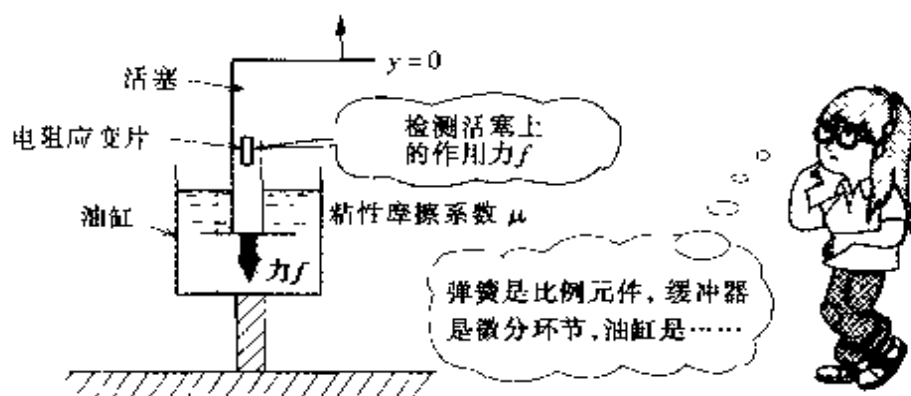


图 2.20 缓冲器

Δt 内活塞向上移动了 Δy , 这时活塞的移动速度 v 可以从公式 $v = \Delta y / \Delta t$ 求出, 要想使速度变快, 就需增大外力。设缓冲器的粘性摩擦系数为 μ , 则力 f 可表示为:

$$f = \mu v = \mu \Delta y / \Delta t \quad (2.12)$$

当 Δt 趋近于无穷小时, $\Delta y / \Delta t$ 就是 y 的微分, 用符号 dy/dt 表示, 这样力 f 可表示为:

$$f = \mu dy/dt \quad (2.13)$$

即力等于距离 y 的微分与系数 μ 的乘积。如果以距离 y 作为输入, 以力 f 作为输出, 则缓冲器可以称为微分环节。

下面考虑一下把油缸中的活塞向上拉, 使液体流入油缸的情况, 如图 2.21 所示。由于管道有摩擦力, 它阻碍液体流入油缸, 因此相当于在活塞上施加了一个向下的力。现在要求取活塞上升的

MEMO

$$\Delta y / \Delta t \xrightarrow{\Delta t \text{ 趋近于 0}} dy/dt (\text{微分})$$

距离 y 与作用于活塞的力 f 的关系。假定在时间 Δt 内距离上升了 Δy , 若活塞截面积为 S , 则流入油缸的流量 v 为 $v = S\Delta y / \Delta t$ 。设管道的粘性摩擦系数为 μ , 则力 f 可由下式求取:

$$f = \mu v = \mu S \Delta y / \Delta t \quad (2.14)$$

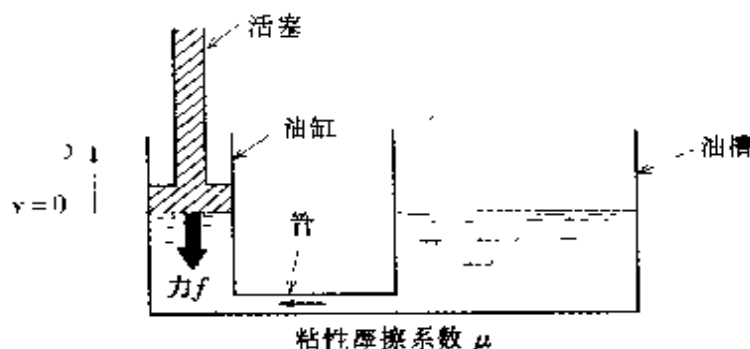


图 2.21 流体的阻力

若时间 Δt 取足够小, 那么 $\Delta y / \Delta t$ 就可用微分 dy/dt 来代替, 则力 f 的公式变为

$$f = \mu S dy/dt \quad (2.15)$$

若以上升距离 y 作为输入, 以力 f 作为输出, 这个油缸就是一个微分环节。

对于微分环节, 其输出与输入的倾斜度成比例。图 2.22 示出了微分环节的输入与输出随时间变化的曲线。图 2.22(a) 为倾斜度为一定值的情况; 图 2.22(b) 为倾斜度变化时的情况。将图 2.22 与图 2.19 相比较, 可以看出, 二者的输入与输出作了交换。由此可知, 微分环节的输入与输出互换就成为积分环节, 而积分环节的输入与输出互换也就变成了微分环节。微分环节的输出只与输入波形的倾斜度有关而与常数项无关, 图 2.23 示出了有不同常数项的输入时, 具有相同输出的情况, 这是值得注意的。

在第 2.3 ~ 2.5 节中介绍的比例环节、积分环节及微分环节称为基本环节, 三种环节的组合称为复合环节。

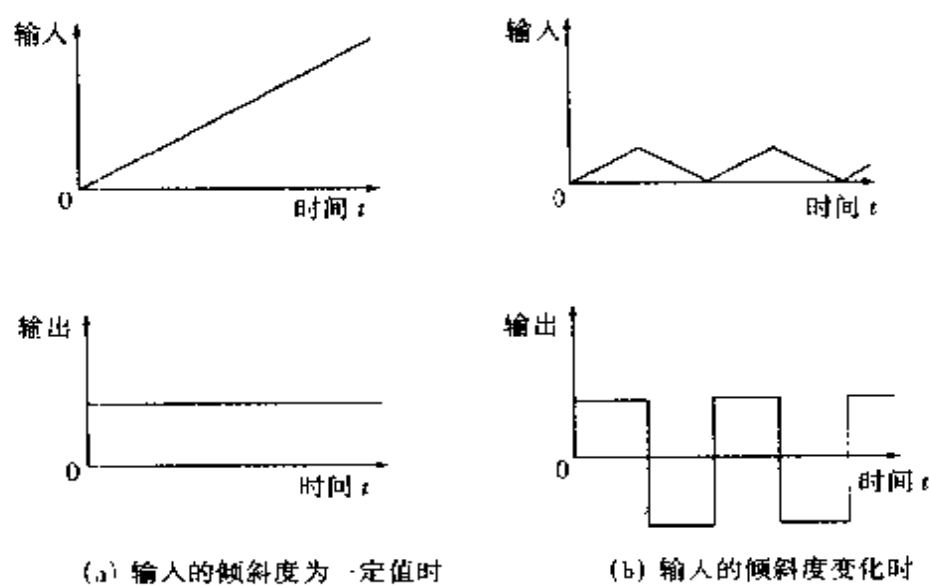


图 2.22 微分环节的输入与输出

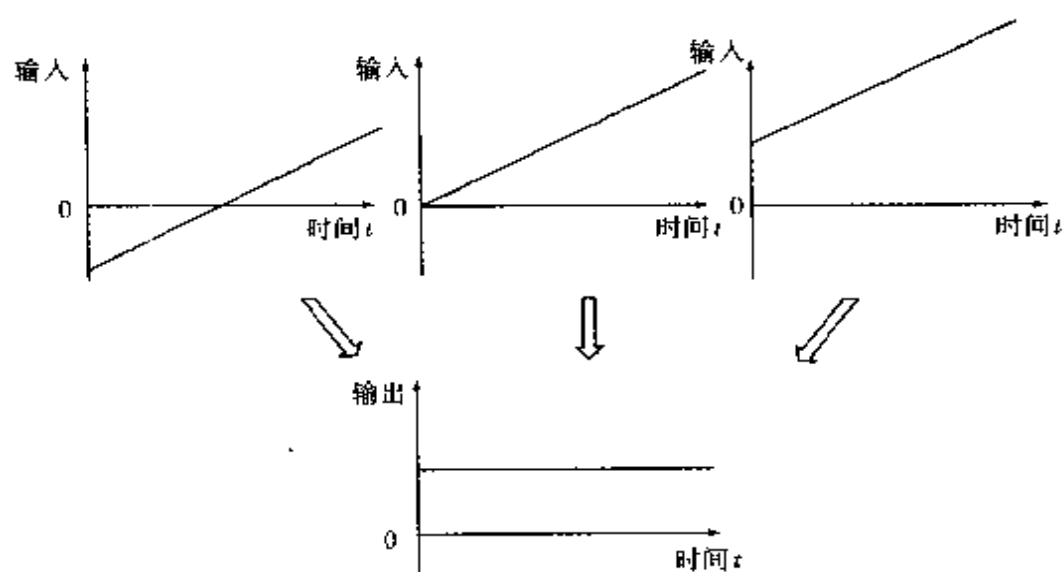
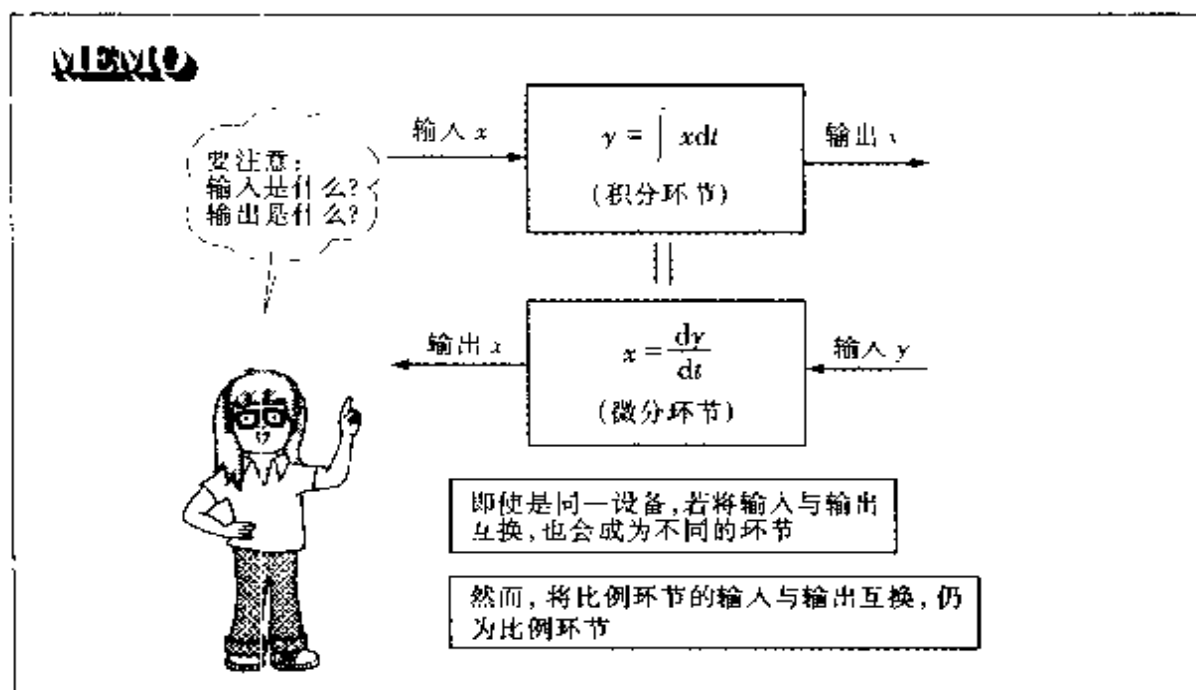


图 2.23 常数项不同的输入及其微分输出



NOTE

前面涉及例子主要是机械方面的,然而要了解机器人工程,电气方面的知识是必不可少的。因此,下面将主要采用电气方面的例子。首先以电路中的电阻、电容和线圈三种元件的性质与流体的性质相对照加以说明。

电阻 图 2.24(a) 示出了流体的模型。如果两个底部连通的水槽的水位差为 h , 连通管道的粘性摩擦系数为 μ , 则流量 v 为:

$$v = \frac{h}{\mu} \quad (2.16)$$

若将图 2.24(a) 中的各物理量用表 2.1 中对应的电气量置换, 则变换成图 2.24(b) 所示的电气模型。设电位差为 e 、电流为 i 、电阻为 R 时,

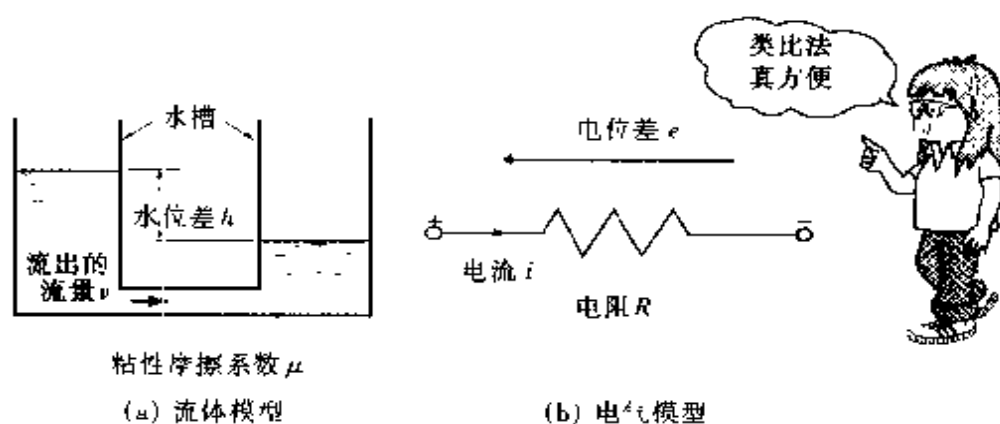


图 2.24 电阻

表 2.1 流体系统与电气系统

| | | |
|--------|----------------|-----|
| 水位差 | h — 电位差 (电压) | e |
| 流出的流量 | v — 电 流 | i |
| 粘性摩擦系数 | μ — 电 阻 | R |

参照式(2.16)可得:

$$i = \frac{e}{R} \quad (2.17)$$

电容 图 2.25(a) 示出了流体的模型。流量为 v 的水流入底面积为 S 的水槽中, 设水槽的水量为 Q 、水位为 h ; 则水槽的水量 Q 可用流量 v 的积分求得:

$$Q = \int_0^t v dt \quad (2.18)$$

水位 h 可用水量 Q 除以水槽底面积 S 求得:

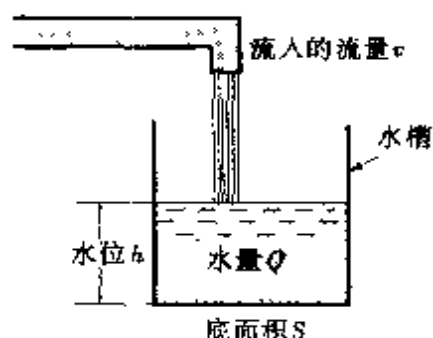
$$h = \frac{1}{S} \int_0^t v dt \quad (2.19)$$

若将图 2.25(a) 中的各物理量用表 2.2 中对应的电气量置换, 则变换成图 2.25(b) 所示的电气模型。设电压为 e 、电流为 i 、电荷为 q 、电容为 C , 参照式(2.18)可得

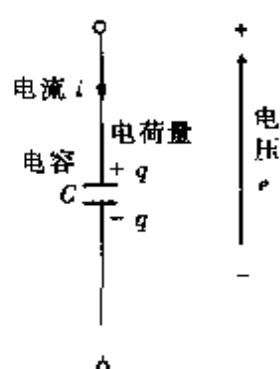
$$q = \int_0^t i dt \quad (2.20)$$

对应于式(2.19)可得

$$e = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (2.21)$$



(a) 流体模型



(b) 电气模型

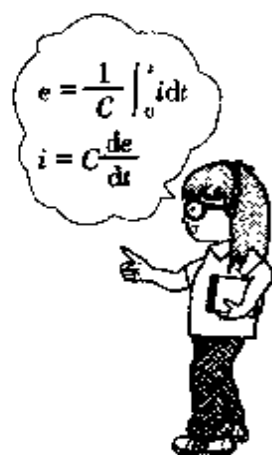


图 2.25 电容

表 2.2 流体系统与电气系统

| | | | | |
|--------|-----|---|-------|-----|
| 水 位 | h | — | 电 压 | e |
| 流入的流量 | v | — | 电 流 | i |
| 水 量 | Q | — | 电 荷 量 | q |
| 水槽的底面积 | S | — | 电 容 | c |

因此,若以电流 i 作为输入,以电压 e 作为输出,则电容器为积分环节。若如第 2.5 节最后所述的那样,以电压 e 作为输入,以电流 i 作为输出,则电容又是微分环节。

若水槽的底面积很大,而注入水的流量很小,那么水位将几乎不变。类似地,若电容的容量 C 很大,而充电电流很小,则电压将保持不变。因此大容量电容器是稳压元件(保持电压不变的元件)。

线圈 图 2.26(a)中示出了流体的模型。在两个水槽 A、B 中蓄水,最初它们的水位差为零。两个水槽之间用无摩擦的长管相连通。在时间 $t = 0$ 时,迅速抬高 A 水槽,则与 B 水槽形成水位差 h 。起初由于惯性水不流动,因此 A 水槽流出的流量 $v = 0$ 。接着由于水位差 h 使水受力并开始慢慢流动。设水的惯性矩为 M ,则流出的流量 v 为:

$$v = \frac{1}{M} \int_0^t h dt \quad (2.22)$$

若将图 2.26(a) 中的各物理量用表 2.3 中对应的电气量置换,则变

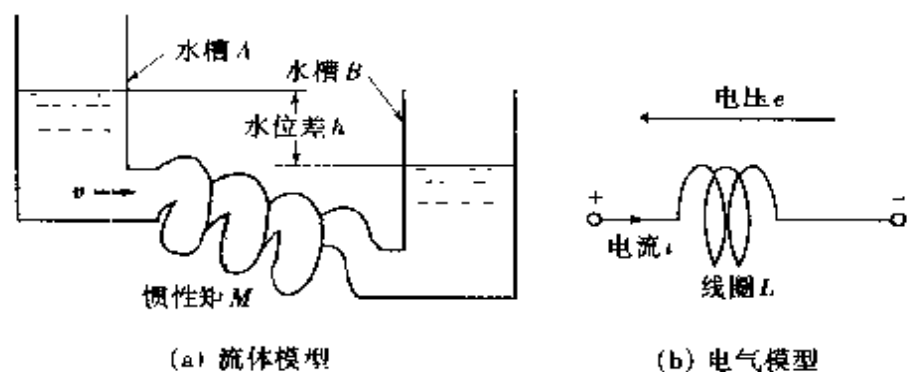


图 2.26 线圈

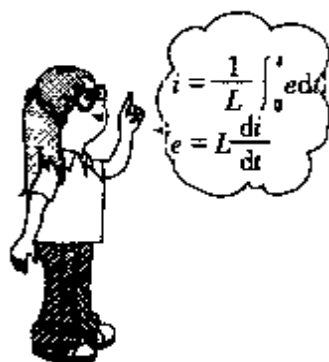


表 2.3 流体系统与电气系统

| | | | | |
|-------|-----|---|---------|-----|
| 电位差 | h | — | 电位差(电压) | e |
| 流出的流量 | v | — | 电 流 | i |
| 水的惯性矩 | M | — | 线圈电感 | L |

换成图 2.26(b)所示的电气模型。设电压为 e 、电流为 i 、线圈电感为 L 、参照式(2.22)可得

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t e dt \quad (2.23)$$

因此,若以电压作为输入,以电流作为输出,则线圈 L 为积分环节。

如第 2.5 节最后所示的那样,若以电流 i 作为输入,以电压 e 作为输出,则线圈 L 又是微分环节。

当水的惯性矩 M 很大时,即使有水位差的作用,水也不会瞬时开始流动。类似地,给大电感线圈突加电压时,电流也不会瞬时开始流动(准确地说应该是“电流要保持原来的状态”,如果电流一开始是流动的,就意味着要继续流动下去)。因此,大电感线圈是稳流元件(电流不变化的元件)。

2.6 一阶惯性环节

作为复合环节的例子,考虑一下弹性系数为 K 的弹簧与粘性摩擦系数为 μ 的缓冲器相连接的情况,如图 2.27 所示。当突加阶跃力 f 时,弹簧的伸长 y 会如何变化呢?在 $t=0$ 附近,弹簧的伸长 y 几乎为零,因此不受弹性力作用,力 f 几乎全部施加到缓冲器上。由第 2.5 节可知,以伸长 y 作为输入,以力 f 作为输出时,缓冲器是微分环节并有下式:

$$f = \mu \frac{dy}{dt} \quad (2.24)$$

若上面的输出、输入交换,则缓冲器又是积分环节。

$$y = \frac{1}{\mu} \int_0^t f dt \quad (2.25)$$

由于力 f 为一定值 f_0 ,则 $y = (1/\mu)f_0 t$ 。在 $t=0$ 附近,伸长 y 以斜率 f_0/μ 呈直线增加。弹簧一伸长,将产生弹性力 ky ,应从力 f 中减掉,使作用于缓冲器的合力减小,根据式(2.24),弹簧伸长

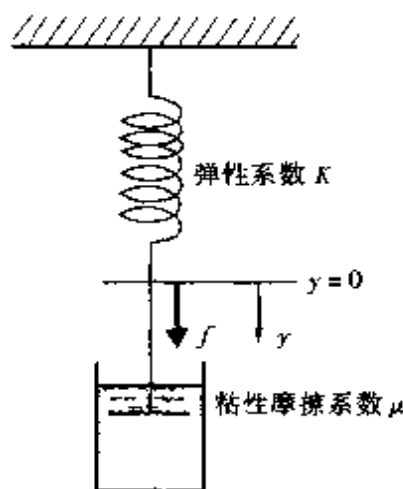


图 2.27 弹簧与缓冲器

的速率减少。最后，力 f 与弹簧弹性力 ky 相平衡并保持一定值 [图 2.28(b)]。弹簧伸长 y 随时间的变化关系可表示成

$$y = \frac{f_0}{K}(1 - e^{-\frac{K}{\mu}t}) \quad (2.26)$$

相应的曲线如图 2.28(c)所示。对于图 2.28(a)所示的阶跃输入，有图 2.28(b)所示的输出响应时，若以力 f 作为输入，以伸长 y 作为输出，则上述复合元件称为一阶惯性环节。

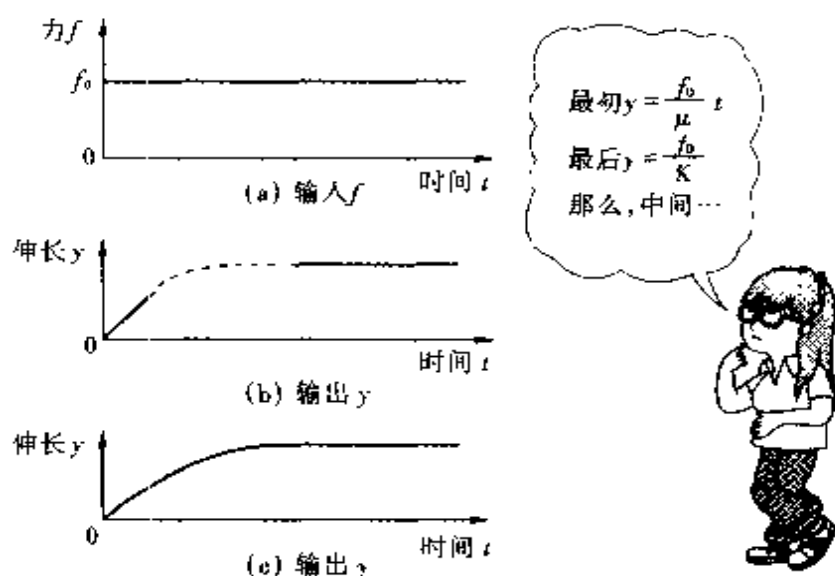


图 2.28 输入与输出

NOTE

e^{-t} 为指数函数，其变化规律如图 2.29 所示。

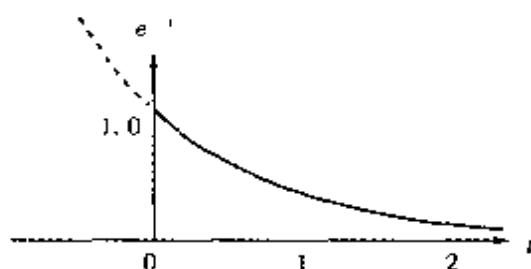


图 2.29 指数函数

下面研究粘性摩擦系数为 μ 的缓冲器与质量为 M 的物体相连接，物体受力 f 而移动的情况，如图 2.30 所示。当力 f 为图 2.31

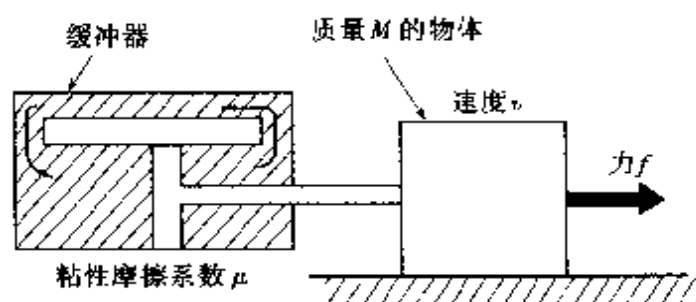


图 2.30 与缓冲器相连接的物体

(a) 所示的阶跃函数时, 速度 v 将如何变化呢? 在时间 $t=0$ 附近, 由于速度几乎为零, 因此与速度成比例的摩擦力也近似为零, 力 f 几乎全部用于使质量 M 的物体运动, 参照第 2.4 节, 若以 f 作为输入, 速度 v 可表示为:

$$v = \frac{1}{M} \int_0^t f dt \quad (2.27)$$

由于力 f 为一定值 f_0 , 因此速度 $v = (1/M) f_0 t$, 在 $t=0$ 附近以斜率 f_0/M 呈直线增加。随着速度 v 的增加, 摩擦力 μv 变大, 最终力 f 与摩擦力 μv 相平衡, 物体以一定速度移动。速度随时间变化的关系如下:

$$v = \frac{f_0}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{M}t}) \quad (2.28)$$

相应的变化曲线如图 2.31(b) 所示。因此, 以力 f 作为输入, 以速度 v 作为输出时, 上述复合环节为一阶惯性环节。

作为一阶惯性环节的例子, 下面考虑如图 2.32 所示的电阻

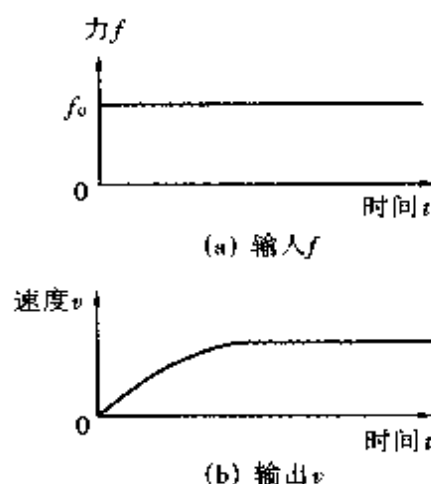


图 2.31 输入与输出

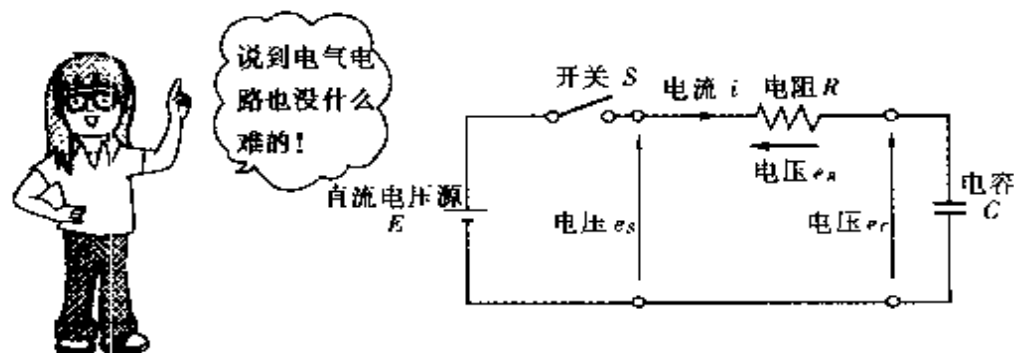


图 2.32 RC 串联电路

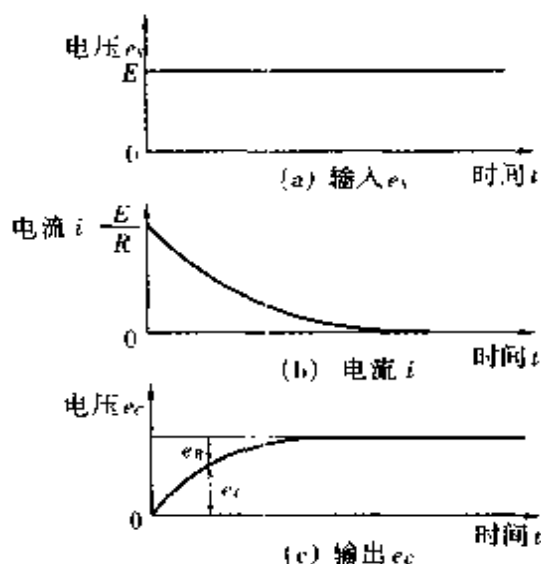


图 2.33 输入与输出

与电容的串联电路。图中,在 $t=0$ 时瞬时闭合开关 S ,将直流电压 E 加到电阻与电容的串联电路上。输入电压 e_s 的波形如图 2.33(a) 所示。这时,电流与电容两端电压 e_c 怎样变化呢? 在时间 $t=0$ 附近虽然开关已经闭合,但电容 C 上几乎没有电荷,由式(2.21),电容电压 $e_c \approx 0$,则输入电压 e_s 为:

$$e_s = e_R + e_c \approx e_R \quad (2.29)$$

即电源电压 e_s 与电阻两端电压 e_R 近似相等。电压 $e_R = ei$,因此电流 i 为 $i = e_R / R \approx e_s / R = E / R$ 。由于电容上电荷的逐渐积累,电压 e_c 随之增大,同时电压 e_R 将逐渐减小,电流 i 也将减小 [$i = (e_s - e_c) / R$]。由于电流减小,电容上电荷的增加变慢,电压 e_c 的增加也变慢。最后电压 e_c 趋近于电源电压 E ,电流 i 也趋近于零。上述变化曲线如图 2.33(b)、(c) 所示。其中图(b)示出电流的变化,图(c)示出电压 e_c 的变化。应该指出,图中的电压 e_R 与电压 e_c 之和为 e_s ($t < 0$ 时 $e_s = 0$, $t \geq 0$ 时 $e_s = E$)。

电压 e_c 用公式表示如下:

$$e_c = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.30)$$

因此以电压 e_s 作为输入,以电压 e_c 作为输出时该电路为一阶惯性环节。

再举一个电路的例子,即电阻 R 与电感 L 串联的电路(图 2.34)。 $t=0$ 时闭合开关 S ,将电压 E 加到电感 L 和电阻 R 的串联电路上。在第 38 页的 NOTE 中已知,电感中的电流具有惯性,电感线圈是稳流元件。本例中,开关闭合前线圈中无电流,因此,开关闭合初瞬线圈电流仍为零。这样,电阻两端电压 $e_R = Ri = 0$,电压 E 将全部加到电感线圈 L 上,线圈 L 中开始流过电流。随着电

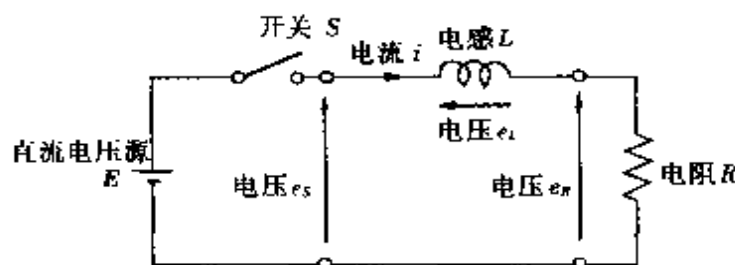


图 2.34 RL 串联电路

流逐渐变大, 电压 $e_R = Ri$ 逐渐增加, 线圈两端的电压 $e_L = E - e_R$ 逐渐减小, 而电流 i 的增加也逐渐变慢。最后, 电压 e_R 趋近于 E , 电压 e_L 趋近于零。这个变化用公式表示为

$$e_R = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (2.31)$$

其变化曲线如图 2.35 所示。若以电压 e_s 作为输入, 电压 e_R 或电流 i 作为输出时, 这个电路为一阶惯性环节。

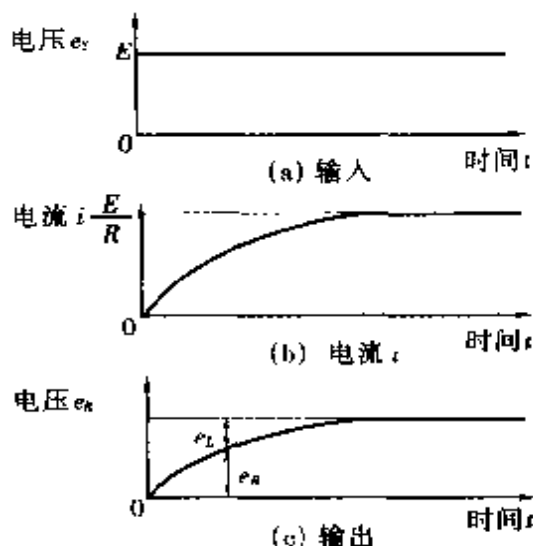
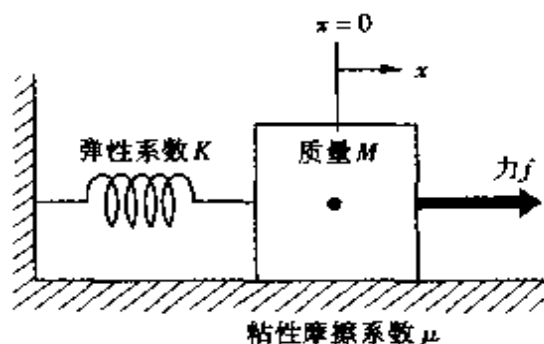


图 2.35 输入与输出

2.7 二阶振荡环节

下面研究复合环节中的二阶振荡环节。考虑在如图 2.36 所示的具有粘性摩擦系数为 μ 的平板上放置的质量为 M 的物体与弹簧连接而运动的情况。

图 2.37(a) 中, 从 $t=0$ 开始施加一定力 $f=f_0$ 时, 速度 v 和弹簧伸长 x 的变化如图 2.37(b)、(c) 所示。在 $t=0$ 附近弹簧的伸长 x 很小, 则弹簧的弹性力 kx 很小; 速度很小, 则摩擦力 μv 也很小。在力 f 的作用下物体的运动会发生变化。当力为一定值 $f=f_0$ 时, 质量为 M 的物体的加速度为

图 2.36 与弹簧连接的质量 M

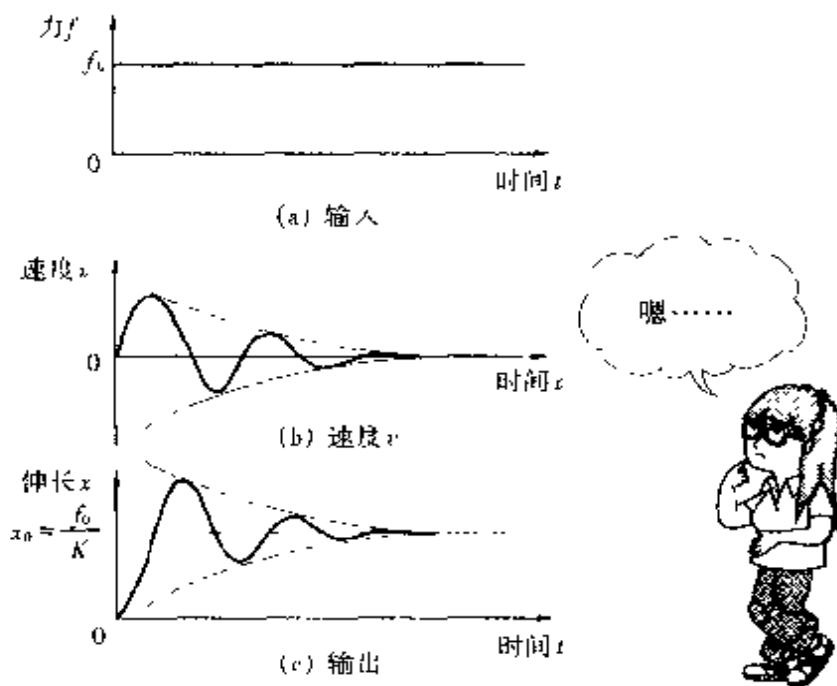


图 2.37 输入与输出

f_0/M , 速度为 $v = (f_0/M)t$, 即速度随时间以斜率 f_0/M 呈直线增加。像物理课中所学习到的那样, 当加速度为一定值 f_0/M 时, 伸长 $x = (1/2)(f_0/M)t^2$ 。然而速度 v 变大之后, 随着弹簧伸长 x 的增加使弹簧的恢复力 kx 增大。当力 f_0 与弹力 kx 相平衡时, 若平衡点的弹簧伸长为 x_0 (即 $f_0 = kx_0$), 则使质量 M 加速的合力为零。但是质量为 M 的物体具有惯性, 它不会简单地停止下来而将通过平衡点 (超调)。通过平衡点 x_0 后 x 又将变大。这时, 由于弹簧的恢复力大于 f_0 , 它们将合成一个减速力作用于 x 的负方向。过一会物体的速度 v 变为零时, 弹簧的伸长 x 又返回平衡点 $x = x_0$ 。返回到 x_0 后仍然要引起超调, 之后就会围绕平衡点 $x = x_0$ 持续振荡下去。由于有摩擦力存在, 振荡将是衰减的, 最后伸长 x 将稳定在平衡点 x_0 。若以力 f 作为输入, 以弹簧的伸长 x 作为输出的话, 作出上述输出响应的复合环节称为二阶振荡环节。

电气的二阶振荡环节如图 2.38 所示。图中电感 L 、电阻 R 和电容 C 串联连接, 开关 S 闭合时, 电源电压 E 就加到该电路, 这时的电压 e_s 、电流 i 、电阻两端电压 e_R 、线圈两端电压 e_L 、电容电荷 q 及两端电压 e_C 随时间的变化曲线如图 2.39 所示。在 $t=0$ 闭合开

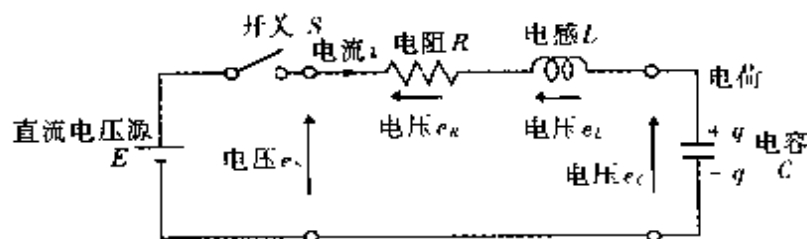
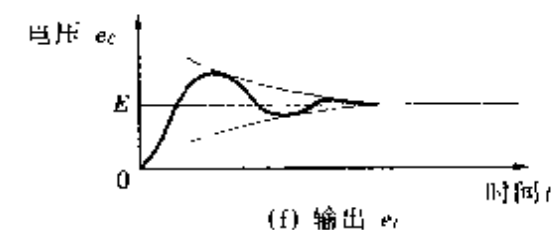
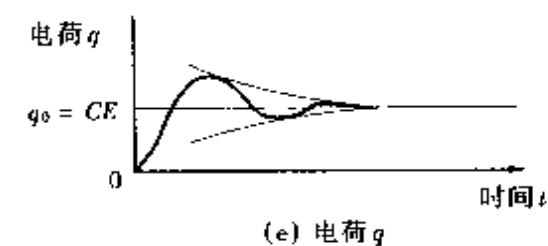
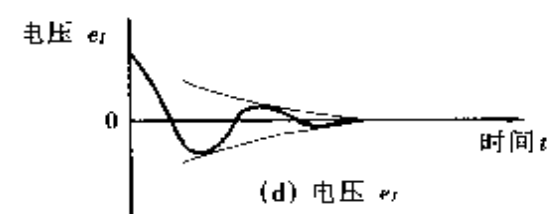
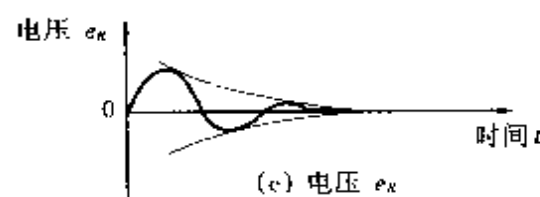
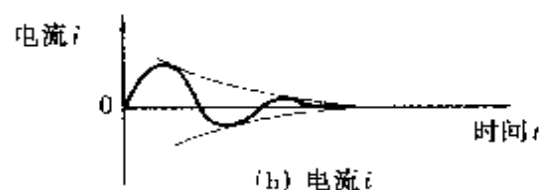
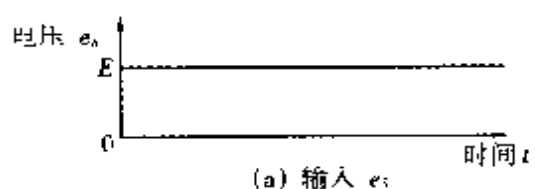


图 2.38 RLC 串联电路



与机械系统的
振荡同样考虑
就可以了



图 2.39 输入与输出

关 S 的瞬时, 电感 L 上电流为零, 电容器 C 上的电荷为零, 因此电阻两端电压 $e_R = Ri = 0$ 、电容两端电压 $e_C = q/C = 0$, 电源电压 e_s 全部加到电感 L 上, 此时 $e_s = E$ 。在 $t=0$ 附近根据式 (2.23), $i = (1/L) \int_0^t e dt = (E/L)t$, 电流 i 将以 E/L 为斜率随时间呈直线增加。随着电流 i 的增加, 电阻 R 的电压 $e_R = Ri$ 也将随之增加。电流 i 流过电容 C , 使电容器开始积累电荷 q 。电容器两端电压 $e_C = q/C$ 也随之增加。过一会儿, 电容器上的电压将充电到等于电源电压, 即 $e_C = E$, 其结果是, 加在电感两端的电压 e_L 也变为零。但是电感 L 中的电流将继续流通而不会停止下来, 因此电容器将继续充电, 使电压 e_C 大于电源电压 E 。一旦 e_C 大于 E , 电感 L 上将承受反向电压而使电流 i 减小。电流 i 减小到零时, 电容 C 上积累的电荷数为最大。然后, 由于 e_C 大于 E , 电流 i 开始反向流通, e_C 开始减小。以后将围绕平衡点 $e_C = E$ 或 $q_0 = CE$ 振荡, 同时由于电阻 R 的存在使振荡逐渐衰减, 最后稳定在平衡点。

下面研究作为二阶振荡环节的振子(图 2.40)。图中, 将振子拉高到 A 点然后放开手, 从 A 点出发的振子将加速向 B 点摆去, 在 B 点速度 v 达到最大。经过 B 点后一边减速一边向 C 点摆去, 在 C 点速度 $v=0$ 。然后从 C 点反向加速并摆向 B 点。振子就这样持续地振荡(摆动)下去。然而由于摩擦将使能量逐渐消耗而最终会停止振荡。

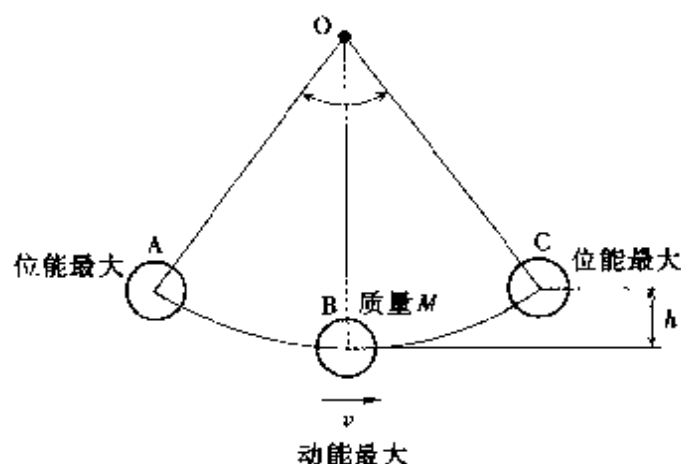


图 2.40 振子

上述现象可以用能量关系加以解释。在 A 点和 C 点, 位能 (Mgh) 最大, 因速度 $v=0$ 而使动能 $[(1/2)Mv^2]$ 为零; 在 B 点位能 为零, 因速度最大而使动能为最大。因此, 从 A 点向 B 点摆动时, 质量 M 失去了位能的同时得到了动能。通过 B 点时, 振子的速度 v 最大, 因而动能最大。从 B 点向 C 点摆动时, 质量 M 失去动能的同时得到了位能。在 C 点, 动能全部转换成位能而使 $v=0$, 然后反 过来向 B 点摆去。由于振子与空气间的摩擦, 使能量转变为热能 而逐渐散失, 上述振荡实际上是衰减的。

把这个振子沉入水中时会怎么样呢(图 2.41)。这种情况下, 摩擦大大增加了, 从 A 点向 B 点移动时, 失去的位能将全部转变成因摩擦引起的热能, 而不会转变成动能。其结果, 振子到达了 B 点但不能引起振荡。

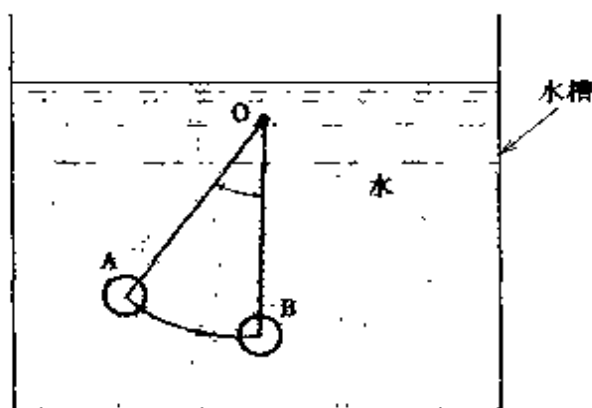


图 2.41 水中的振子

如果用弹簧的恢复力来替换重力, 那么图 2.36 所示的机械 的二阶振荡环节与上述的振子的例子是基本相同的。因此, 考虑

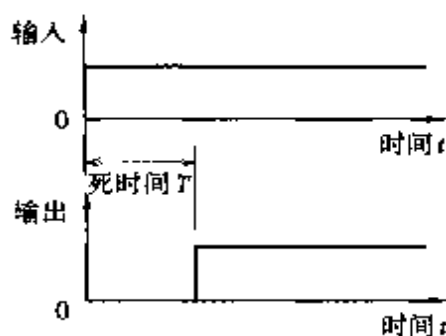
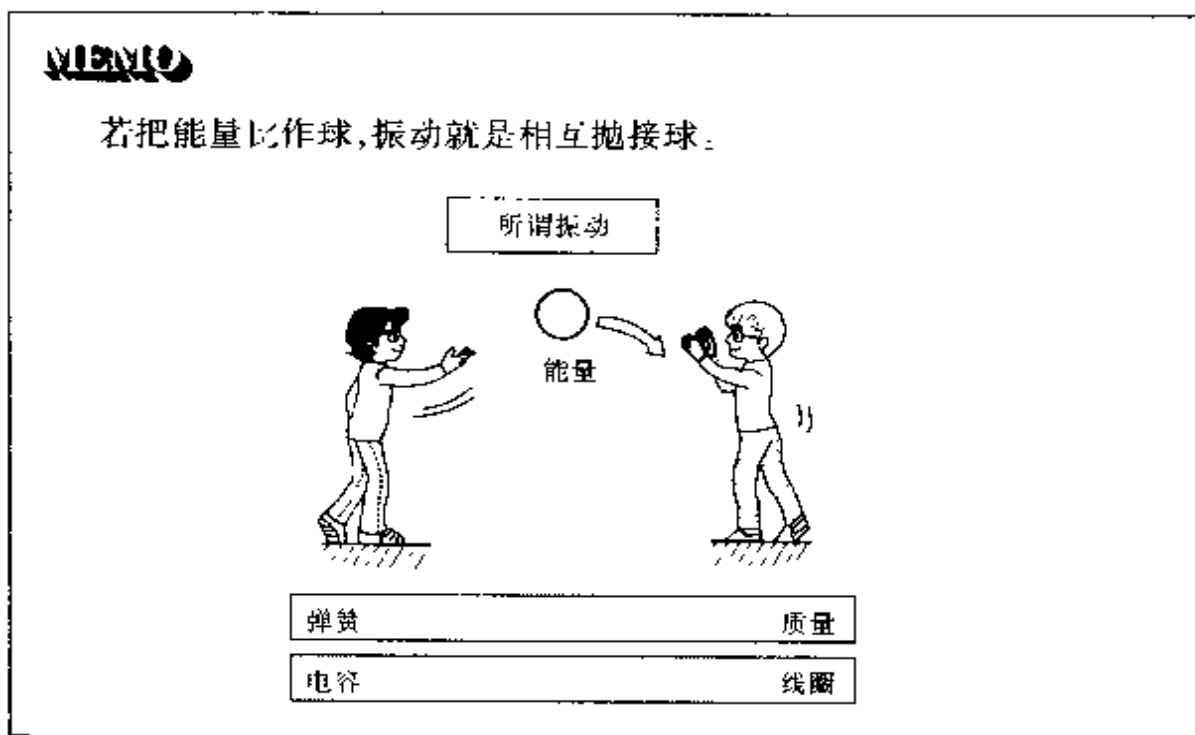


图 2.42 死时间环节

图 2.36 中围绕平衡点 $x = x_0$ 的振荡时, 可以认为是由弹簧恢复力所确定的位能 ($1/2 Kx^2$) 与质量 M 的动能 ($1/2 Mv^2$) 之间的能量转换。同理, 图 2.38 示出的 LCR 串联电路中, 围绕平衡点 $q = q_0 = CE$ (用电压表示时为 $e_c = E$) 振荡时, 可以认为是由电容器的电场能量 ($1/2 C e_c^2$) 与电感线圈磁场能量 ($1/2 Li^2$) 之间的能量转换。



最后, 说明一下死时间环节。洗淋浴时, 打开阀门后, 稍候, 水就流出来了。汽车的油门踏板被踏下后, 稍候, 发动机的出力就增大了。上述例子中输入与输出的关系如图 2.42 所示。图中, 与输入相比, 输出延迟了时间 T , 这个时间 T 称为等待时间。这种具有等待时间的环节称为死时间环节。

第 3 章

环节的性能及描述方法



3.1 线性与非线性

第 2 章中讨论了各种典型环节,本章将研究环节特性的表示方法。

首先考虑一下作为比例环节的弹簧,将其一端固定,另一端施以拉力 f (图 3.1)。力 f 较小时,伸长 x 可以由式 $x = f/K$ (K 为弹性系数)求得。但是一旦力 f 超过了某一限值,上述关系就不再成立。如果在 x 的反方向上施加压力,弹簧也不能随意压缩。若以力 f 作为横轴,以伸长 x 作为纵轴,可以得到图 3.2 那样的曲线。当力 f 与伸长 x 的关系如图 3.3 所示,完全是直线时,称力 f 与伸长 x 为线性关系。与此相对应的是图 3.2 所示的不是直线的关系,称为非线性关系。实际上物体之间的关系基本上都是非线性的。例如,为了增大直流电动机的转矩,要增大其电流,然而这种增加是有限度的。如果应变超过了电阻应变片的允许限值,应变片的电

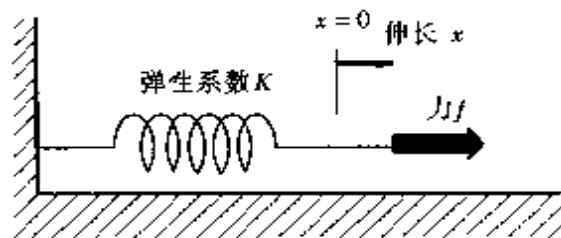


图 3.1 弹簧

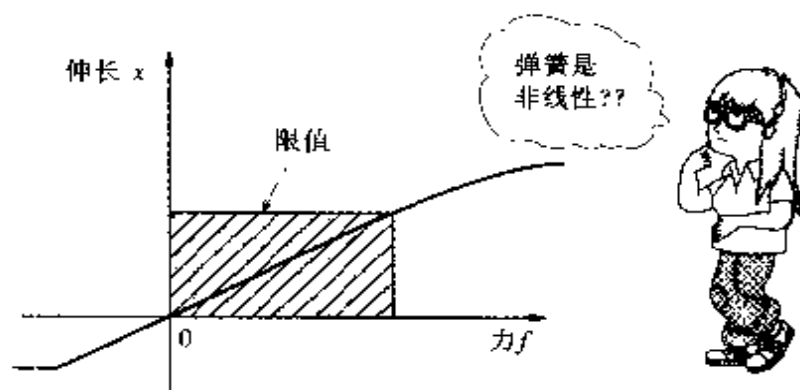
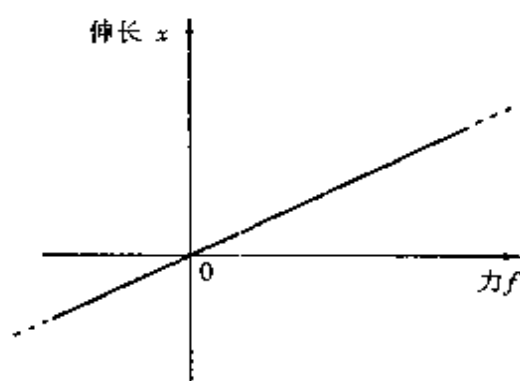
图 3.2 力 f 与伸长 x 的关系

图 3.3 线性关系

阻值将不再有明显变化,等等。

仍以图 3.2 为例,弹簧的伸长 x 从 0 到弹性限值可以看作是直线,因此这部分可以看作线性关系。即使在曲线部分,应用时也可取出其中一部分看作是直线而当作线性关系处理,这叫做非线性问题的线性化。进行线性化的原因在

于,到目前为止我们能够得心应手地处理的是各种线性关系。

用图 3.2 的例子来进行线性化处理。首先是确定被研究的点(动作点)。如图 3.4 所示,设力 f_0 作用时,伸长为 x_0 。力 f 在 f_0 附近变化时,伸长 x 也在 x_0 附近变化,称 $f = f_0$ 、 $x = x_0$ 为动作点。然后,过动作点 $A(f = f_0, x = x_0)$ 作曲线的切线,切线方程为通过 A 点($f = f_0, x = x_0$),斜率为 $(1/K)$ 的直线,即

$$x - x_0 = \frac{1}{K}(f - f_0) \quad (3.1)$$

在动作点附近,真实的曲线可以用这条切线来近似。由于力 f 是 f_0 附近的值,则 $f - f_0$ 为很小的值,把 $f - f_0$ 记作 f_1 。伸长 x 也是 x_0 附近的值,则 $x - x_0$ 亦为很小的值,把 $x - x_0$ 记作 x_1 。这样,式

原来,世界上
物体间的关
系几乎都是
非线性的呢!



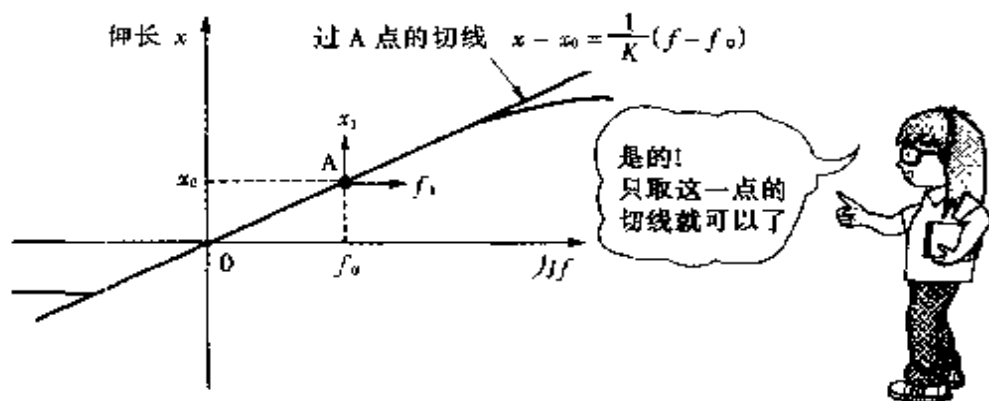
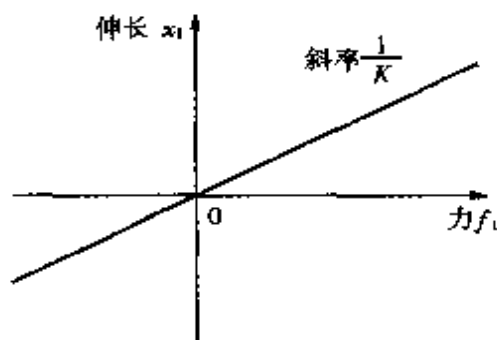


图 3.4 线性化

(3.1)可以改写为

$$x_1 = \frac{1}{K} f_1 \quad (3.2)$$

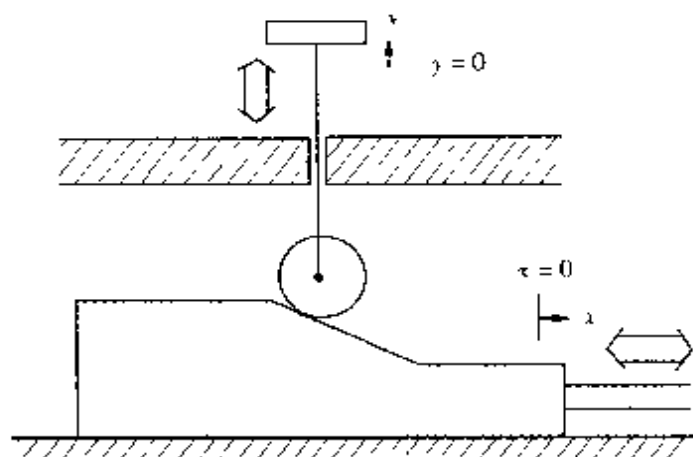
即力 f_1 与伸长 x_1 之间为线性关系(图 3.5)。图 3.5 的横轴为 f_1 , 纵轴为 x_1 。力 f_1 与伸长 x_1 越小近似程度越好, 越大则近似程度越差, 这一点是很容易理解的。

图 3.5 线性化的力 f_1 与伸长 x_1

下面看看控制中常遇到的非线性环节。图 3.6(a) 为一个把水平方向的位移转变为竖直方向位移的装置。当水平方向的位移 x 过大时, 竖直方向的位移 y 就达到最大值。以输入 x 为横轴, 输出 y 为

纵轴, 描绘上述关系的曲线如图 3.6(b) 所示。如果输入为正弦波形, 则输出为削顶正弦波。这样的环节称为饱和环节。

图 3.7(a) 为一个具有死区的装置。输入的位移 x 在一定大小的范围内变化时, 输出的位移为零。当 x 超出一定值时, 位移 y 将随位移 x 的增加而增加, 当位移 x 变小时, 由于弹簧力的作用位移 y 将随位移 x 的减小而减小。当位移 x 小于某一定值时, 弹簧无变形, 也没有弹簧力作用, 因此位移 y 也不发生变化。把横轴作为输入 x , 把纵轴作为输出 y , 则上述关系曲线如图 3.7(b) 所示。可以看出, 当输入 x 随时间按正弦波形变化时, 输出 y 的波形为



(a) 把横方向的运动变换为纵方向运动的装置

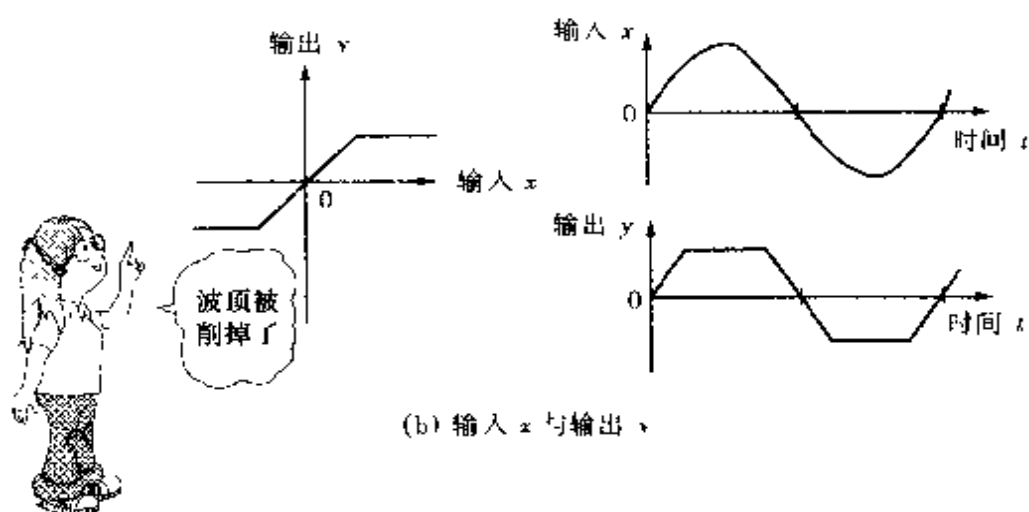
(b) 输入 x 与输出 y

图 3.6 饱和环节

正弦波顶部分。称上述这种环节为死区环节。

图 3.8(a)中示出了常用于位置保护的限位开关。考虑一下物体从左向右移动时的情况。物体未到达限位开关位置时($x < 0$)轮柄向下;物体到达轮柄下方($x = 0$),轮柄被推向上方。轮柄被抬起后,限位开关中的接点从 \ominus 端切换到 \oplus 端,输出 y 的电压从 \ominus 变为 \oplus 。如果物体继续向前移动($x > 0$),轮柄继续处于抬起位置,输出 y 的电压则保持为 \oplus 不变。这样可以用来检测物体通过与否。作为输入的位置 x 与作为输出的电压 y 的关系曲线示于图 3.8(c)。当 $x < 0$ 时, y 为负值;当 $x = 0$ 时, y 从负变为正; $x > 0$ 时 y 为正值。当物体从右向左运动时,则上述关系相反。当输入为正弦波形时,输出 y 则为交变方波。这样的环节称之为继电器环节。

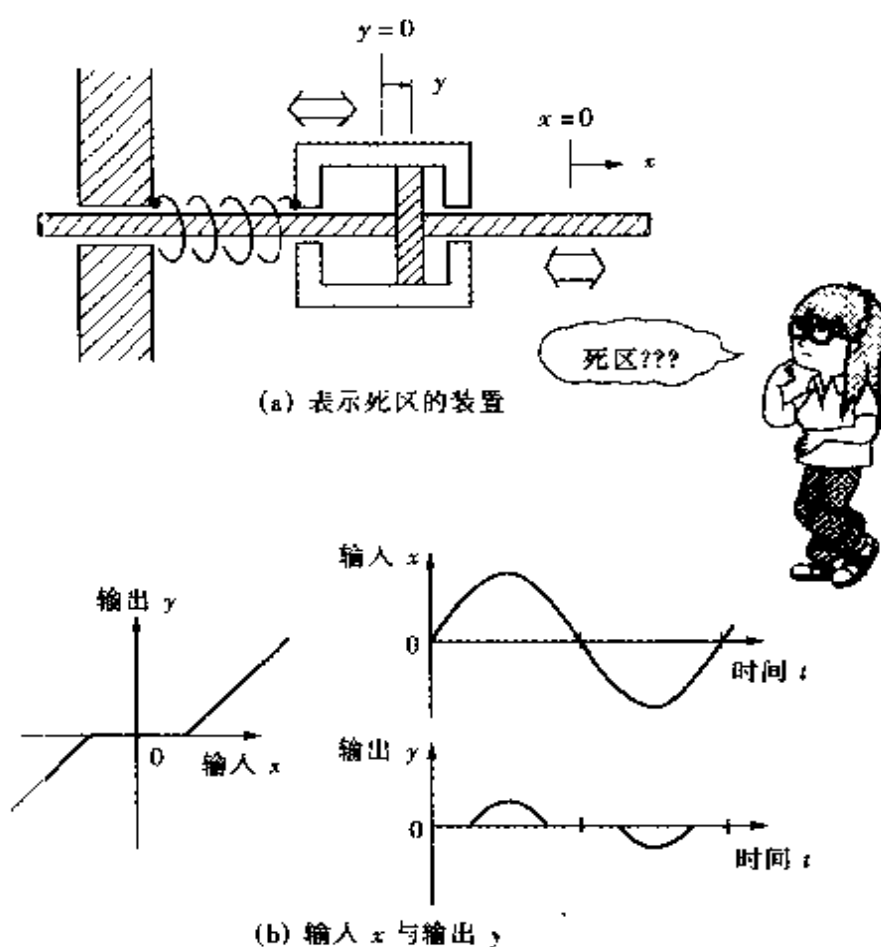
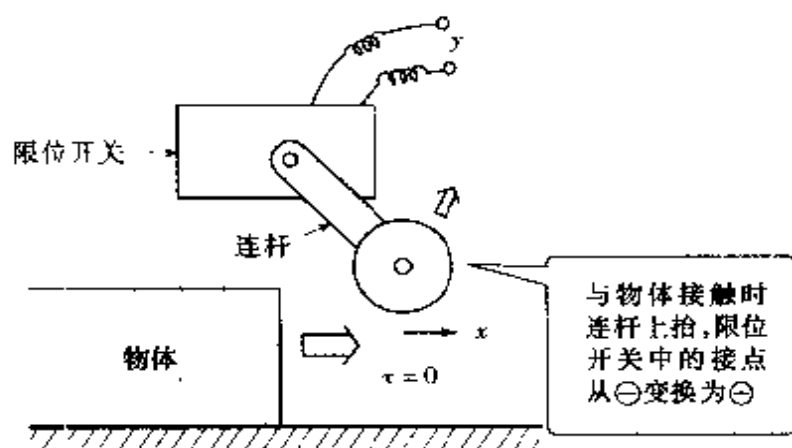
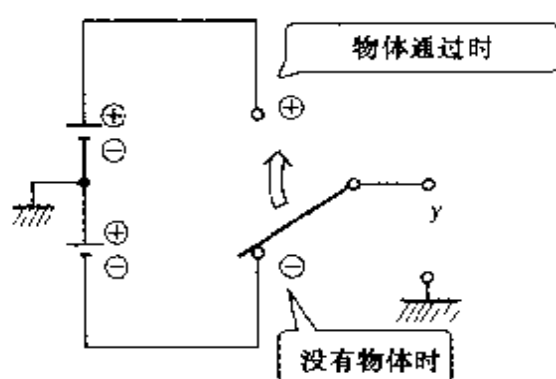


图 3.7 死区环节

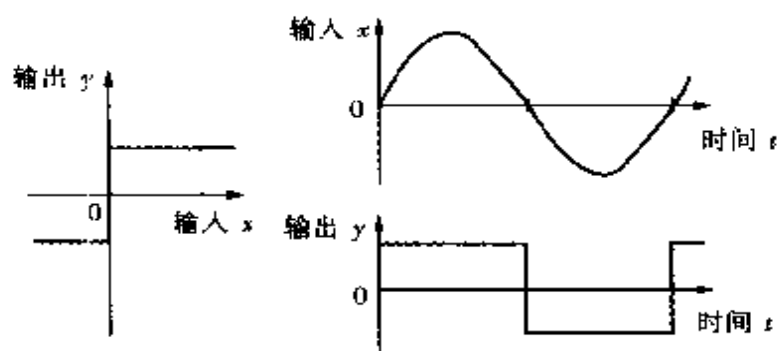
最后,考虑一下齿轮的啮合问题。两个齿轮啮合时,齿与齿之间存在间隙,会引起所谓**反向间隙现象**。当齿轮 A 逆时针方向旋转时,齿轮 B 顺时针旋转(图 3.9)。当齿轮 A 的齿位于齿轮 B 无齿的位置($x=0$)时,由于齿与齿没有啮合,齿轮 B 不转动。直到齿轮 A 的齿与齿轮 B 的齿接触,齿轮 B 才开始转动。如果齿轮 A 反过来开始顺时针方向旋转,即齿轮 A 在 x 的负方向上旋转时,齿轮 B 将停止。直到齿轮 A 的齿再一次与齿轮 B 的齿相接触,使齿轮 B 又开始转动。以齿轮 A 的位置 x 为输入,以齿轮 B 的位置 y 为输出时,输入与输出的关系如图 3.9(b)所示。若输入为正弦波时,输出则是略有滞后,并且略有削顶的波形。具有这种特性的环节称为**反向间隙环节**。



(a) 限位开关



(b) 接点开闭的情况



(c) 输入 x 与输出 y

图 3.8 继电器环节

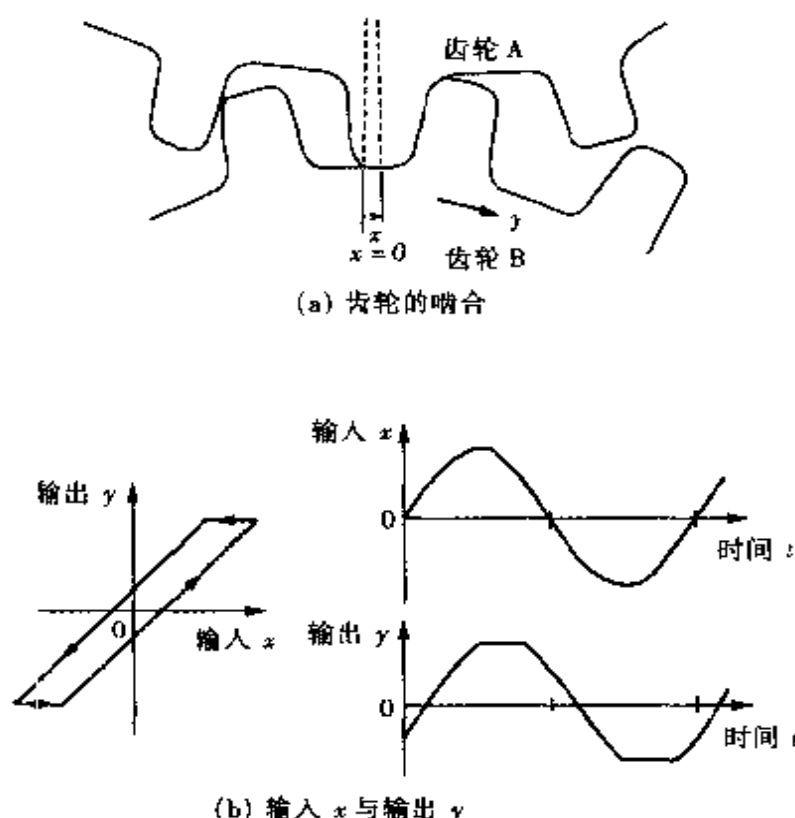


图 3.9 反向间隙环节

3.2 时域性能的描述(动态响应法)

夏天买西瓜时,常用手拍拍西瓜,根据所发出的声音来判断西瓜的好坏。敲敲钟,从发出的“咚咚...”的声音来判断是否是好钟。对于前面所述的“环节”也是同样,从外部施加输入,若了解了输出随时间的变化规律,也就了解了环节的性能及其描述方法(在环节的性能中,与时间无关的是静态特性,与时间有关的是动态特性,这里的输出随时间而变化,所以是动态特性)。

例如,第 2.6 节介绍的一阶惯性环节,在弹性系数为 K 的弹簧下边连接一个粘性摩擦系数为 μ 的缓冲器。图 2.27 与图 2.28 再次示于图 3.10 与图 3.11。如图 3.11(a)所示,施加单位阶跃输入时,图 3.11(b)示出了作

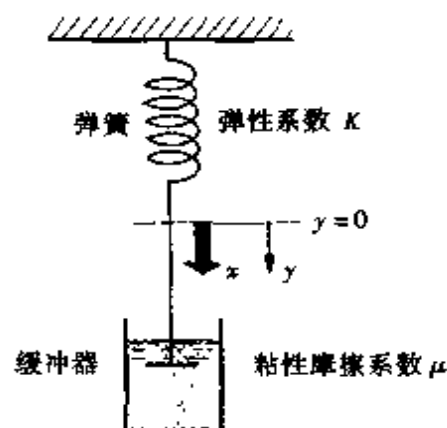
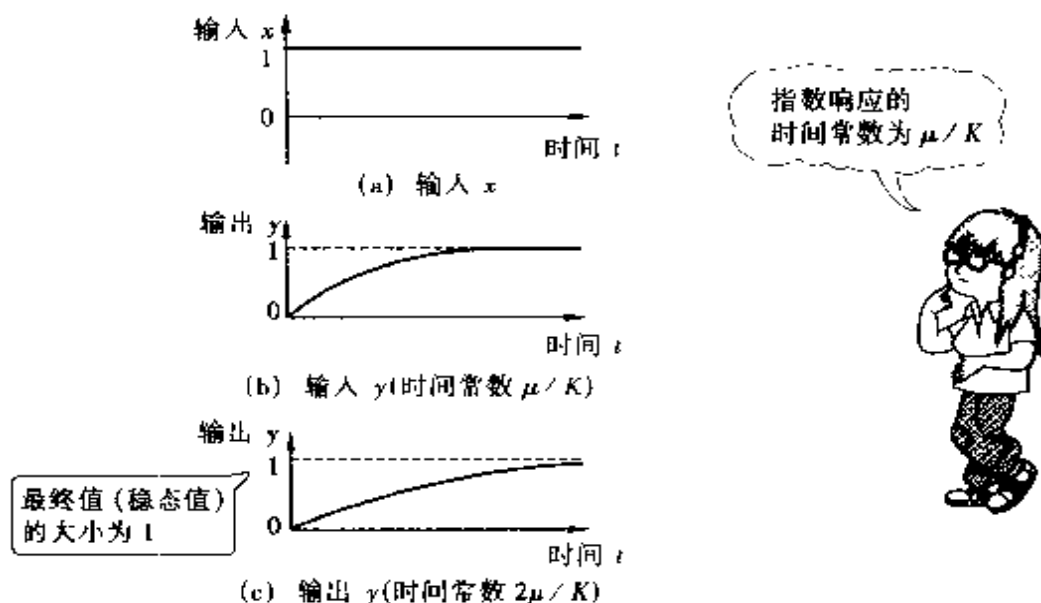


图 3.10 弹簧与缓冲器

图 3.11 输入 x 与输出 y

为输出的弹簧伸长 y 随时间变化(动态响应)的情况。当输入 x 为如图 3.11(a) 所示的幅度为 1 的阶跃波形时,其动态响应称为指数响应或阶跃响应。

NOTE

利用阶跃响应,可以研究各种环节的动态特性,因此有必要考虑一下用阶跃波形作为输入的情况。由图 3.12 可知,对于任意输入波形,都可以用高度和起始时间不同的阶跃波形的重合来表示。以这些阶跃波形作为环节的输入时,可以得到各自的动态响应。输出 y 则是这些动态响应的叠加。因此,对于高度为 1,时间从 $t=0$ 开始的基本阶跃波形,若能够求得其阶跃响应的话,则对应任意输入波形时的输出波形也是可以求得的。

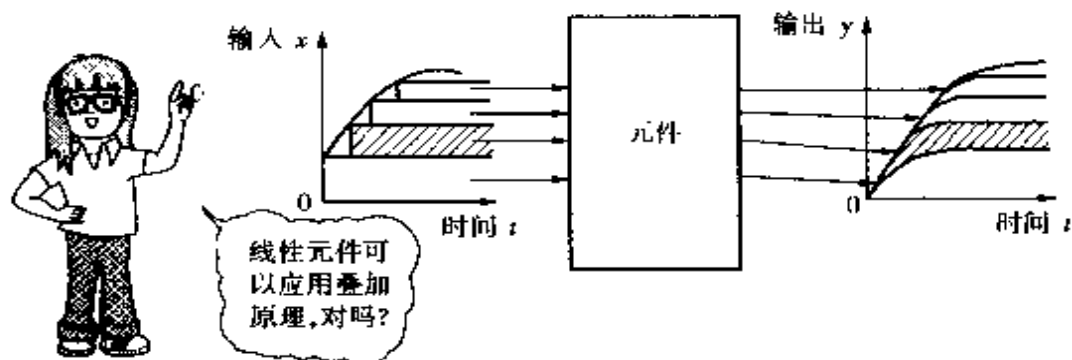


图 3.12 阶跃响应的叠加

下面考虑一下在图 3.10 所示的弹簧与缓冲器的例子中, 缓冲器的粘性摩擦系数 μ 增加为 2μ 时, 作为输出的弹簧伸长 y 会有怎样的变化呢? 在时间 $t=0$ 时将输入 x 作为力施加于弹簧上, 这时, 弹簧还没来得及伸长, 因此力的大部分加到缓冲器上。在缓冲器内, 当粘性摩擦系数为 2μ 时, 活塞的运动速度从 x/μ 变为 $(1/2)x/\mu$ 。由于速度变为原来的 $1/2$, 与粘性摩擦系数为 μ 时相比, 要使弹簧伸长同样的长度则需要 2 倍的时间。随着弹簧的伸长, 弹簧产生的恢复力将部分抵消力 x , 使加到缓冲器上的合力减小。弹簧伸长相同长度, 但需花费 2 倍的时间。因此, 输出 y 达到最终状态(稳定状态)所需的时间, 图 3.11(c) 是图(b) 的 2 倍。图中的最终值(稳态值)为 1。

下面考虑一下缓冲器的粘性摩擦系数 μ 保持不变, 而弹簧的弹性系数 K 变为 0.5 倍时的情况。在时间 $t=0$ 的瞬时给弹簧施加力 x , 这时由于弹簧还没有伸长, 即无恢复力作用, 力 x 几乎全部加到缓冲器上, 这一点与前面是相同的。缓冲器的活塞以速度 x/μ 运动并使弹簧伸长, 由于弹性系数变为 $K/2$, 恢复力也变成 $1/2$ 倍。对于弹簧同样的伸长, 用这个 $1/2$ 倍的恢复力去与力 x 相抵, 使作用于缓冲器上的合力的减小变慢, 而速度的变化也很缓慢。但是到最后的稳定状态时, 伸长 y 是弹性系数为 K 时的 2 倍。因此为要达到稳定状态仍然需要 2 倍的时间。如果取 1 作为稳态值, 输出 y 随时间变化的曲线仍如图 3.11(c) 所示。

由以上分析可知使粘性摩擦系数 μ 变为 2 倍也好, 使弹性系数 K 变为 $1/2$ 倍也好, 达到稳定状态时所需时间都是原来的 2 倍。这里需要考虑一下 μ 与 $1/K$ 相乘的这个量 μ/K 。 μ/K 具有时间的单位, 是一个能决定响应速度的值, 称为时间常数。与式 (2.26) 第 2 项

$$e^{-\frac{K}{\mu}t} = e^{-\frac{t}{\mu/K}} \quad (3.3)$$

中的 μ/K 完全相同。

同理, 图 2.30 中示出的具有粘性摩擦系数 μ 的缓冲器与质量为 M 的物体相连接, 并施以力 f 时, M/μ 也可认为是时间常数,

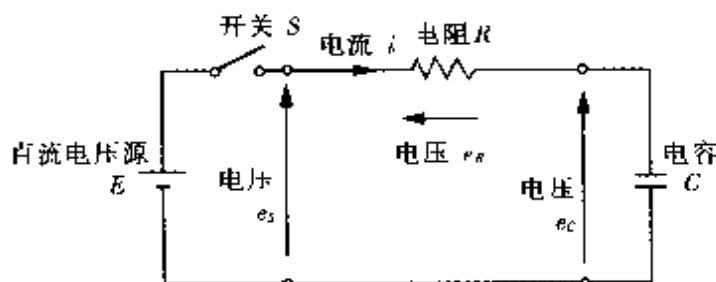
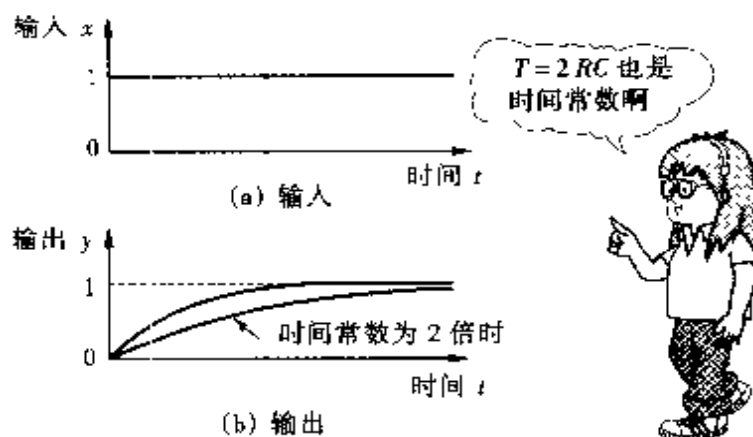


图 3.13 RC 串联电路

图 3.14 输入 x 与输出 y

与式(2.28)的 $e^{-(\mu/M)t} = e^{-t/(M/\mu)}$ 中的 M/μ 完全相同。

电路中的时间常数是怎么回事呢? 研究一下图 2.32 中示出的电容 C 与电阻 R 的串联电路并重示于图 3.13 中。图中, 电阻 R 变为原来的 2 倍。如图 3.14(a) 所示, 输入电压 e_s 在 $t=0$ 瞬时加入时, 由于电容 C 上没有电荷, 输出电压 e_c 为 0。电源电压 e_s 几乎全部加到电阻 R 上, 则有电流 $e_s/2R = 1/2R$ 流过。与电阻为 R 时相比, 电流的大小减半, 欲在电容 C 上积累相同的电荷量, 需要 2 倍的时间。随着电容上电荷的积累, 电压 e_c 增大, 而电阻两端的电压 e_R 则减小, 同时电流 i 减小, 但是给电容充电的 2 倍时间不变。就是说电阻为 $2R$ 时, 与电阻为 R 时相比, 达到稳定状态需要 2 倍的时间。

如果电阻仍保持 R 不变, 而电容 C 增为 $2C$ 会怎么样呢? 2 倍电容意味着极板面积增为 2 倍, 若储存等量电荷, 电压 e_c 将减半。为使输出的电容电压 e_c 不变, 由式 $e_c = q/c = 2q/2c$ 可知, 必须送给电容 2 倍的电荷。结果也是需要 2 倍的时间才能达到稳

定状态。

电阻 R 增为 2 倍或者电容 C 增为 2 倍, 达到稳定状态的时间都为 2 倍。这里, R 与 C 的乘积 RC 称为时间常数, 常用 T 来表示。时间常数 $T = RC$ 以及 $T = 2RC$ 时, 输出 y 随时间的变化如图 3.14(b) 所示。时间常数 RC 与式(2.30)的 $e^{-t/RC}$ 中的 RC 是完全相同的。

同理, 图 2.34 中所示的电感线圈 L 与电阻 R 串联电路中的时间常数为 L/R 。式(2.31)的 $e^{-(R/L)t} = e^{-t/(L/R)}$ 中的 L/R 也就是时间常数。

一阶惯性环节中的时间常数问题

设时间常数为 T , 输出 y 的稳态值为 y_0 , 前面讨论的一阶惯性环节的阶跃响应可以表示为

$$y = y_0(1 - e^{-t/T}) \quad (3.4)$$

当 $t = T$ 时, 上式变为

$$y = y_0(1 - e^{-1}) \quad (3.5)$$

将 $e \approx 2.72$ 代入式(3.5), 可得

$$\begin{aligned} y &= y_0(1 - \frac{1}{2.72}) \\ &= y_0(1 - 0.37) \\ &= y_0 \times 0.63 \end{aligned} \quad (3.6)$$

因此, 时间常数 T 为输出 y 达到稳态值的 63% 所需的时间。时间常数的上述特征是一阶惯性环节的重要特征(图 3.15)。

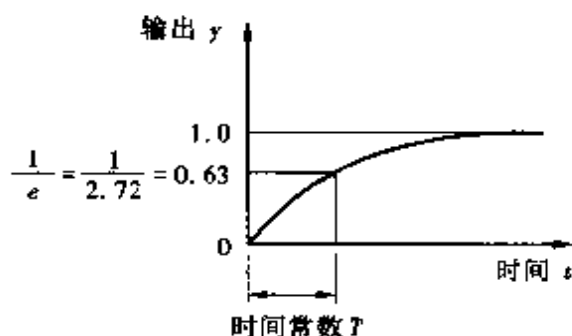
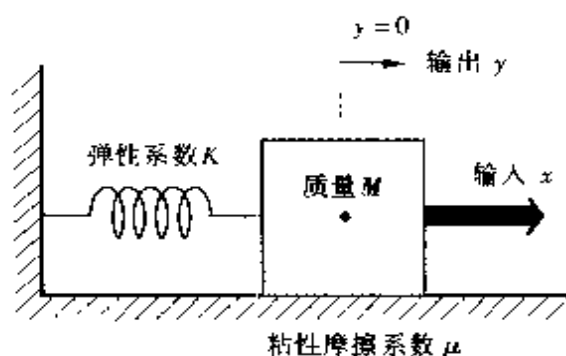


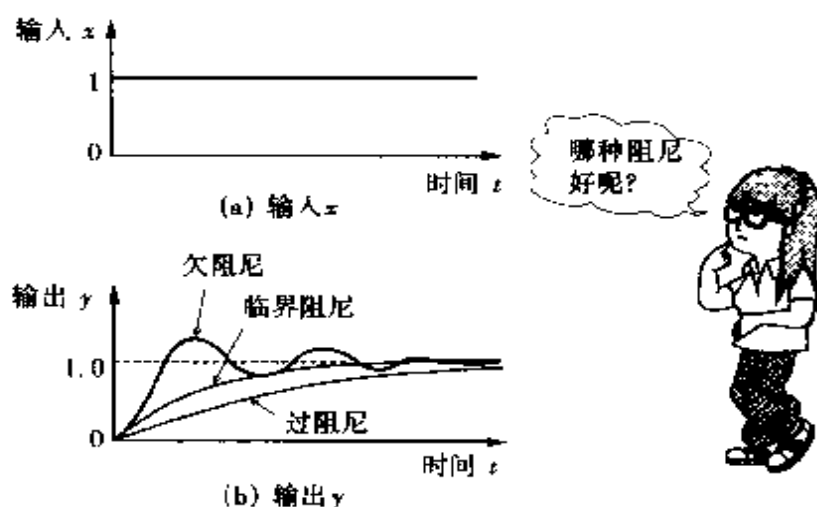
图 3.15

下面讨论二阶振荡环节的阶跃响应。考虑一下如图 2.36 所示的与弹簧连接的质量 M 在粘性摩擦系数为 μ 的平面上移动时的情况(图 3.16)。当粘性摩擦系数 μ 很大时, 与图 2.41 的水中振子的情况相似, 会在较大的阻尼作用下慢慢地接近最终值 [图 3.17(b)], 这种情况称为“过阻尼”。若使粘性摩擦系数变小, 则阻

图 3.16 与弹簧连接的质量 M

尼作用随之变小，快速接近最终值而又不引起振荡的情况称为临界阻尼。进一步减小粘性摩擦系数 μ 就会开始出现振荡，振荡随时间衰减，这种情况称为欠阻尼。控制时经常遇到的是欠阻尼的情况，其输出波形如图 3.18 所示。图中，输出 y 从 0 到二分之一

稳态值的时间 T_d 称为延迟时间，从 0.1 到 0.9 的时间 T_r 称为上升时间；从 0 到最大值的时间 T_p 称为峰值时间；输出 y 首次进入 0.95 ~ 1.05 之间的时间 T_s 称为调节时间。 a_1 为最大超调量，用 $a_1 = (M - 1) \times 100\%$ 表示。 a_2/a_1 表示振荡衰减的程度，称为振荡衰减比。上述这些值可以用来表现二阶振荡环节的动态特性。

图 3.17 输入 x 与输出 y

此前确定的输入波形均为阶跃波形，下面将讨论脉冲输入的情况。首先说明一下脉冲函数。用铁锤敲击铁板时，加于铁板上的力如图 3.19(a) 所示。若力的大小与时间的乘积即斜线部分的面积为 A ，时间为 Δt ，则力的大小为 $A/\Delta t$ 。这里如果面积 A 不变，而 Δt 无限趋近于 0，则力的大小将趋近于无穷大。即 $t=0$ 时，力的高度为无穷大； $t \neq 0$ 时，力的高度为 0，满足上述关系的函数称为“幅度为 A 的脉冲函数”，而 $A=1$ 时的脉冲函数称为“单位脉冲函数”。考虑

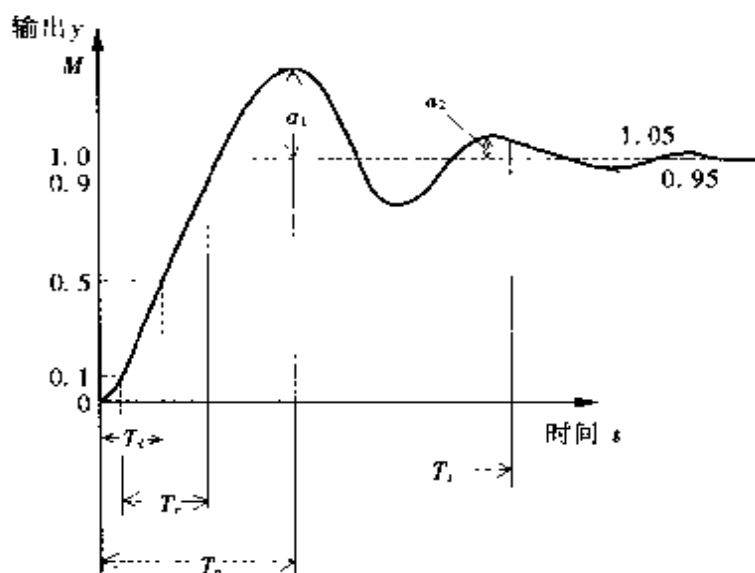
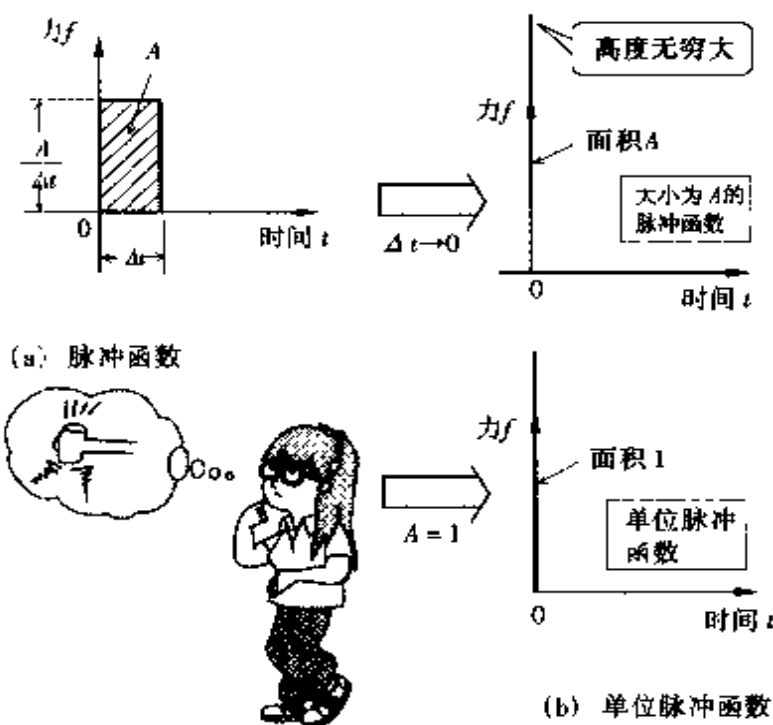
图 3.18 振荡时的输出 y 

图 3.19 脉冲函数

一下以单位脉冲函数作为一阶惯性环节输入的情况,如图 3.20 所示。当输入的力 x 是一个单位脉冲函数时,弹簧将瞬时地伸长到 1,然后按 $e^{-t/(\mu/K)}$ 的指数曲线衰减(这时可以说“按时间常数 μ/K 衰减”)。

这种对单位脉冲输入的动态响应称为脉冲响应。

二阶振荡环节的脉冲响应如图 3.21 所示。给图 3.21(a)中所

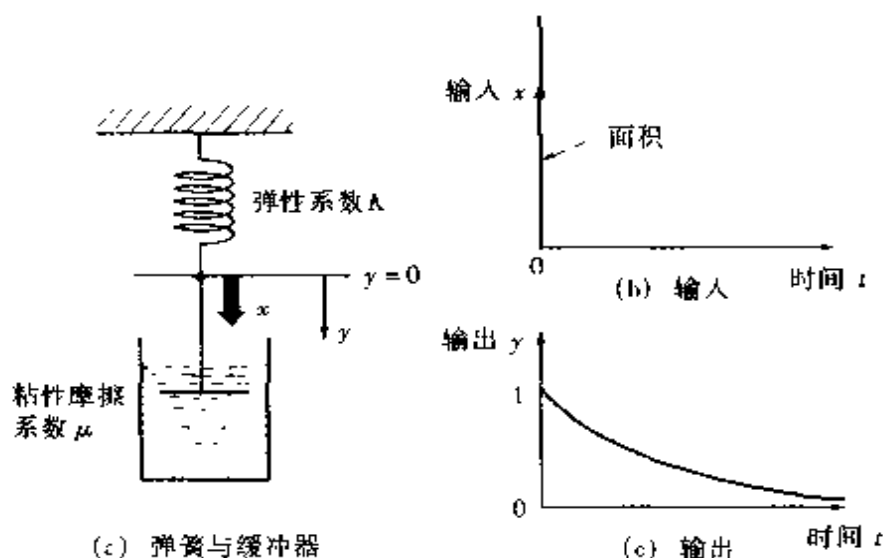


图 3.20 一阶惯性环节的脉冲响应

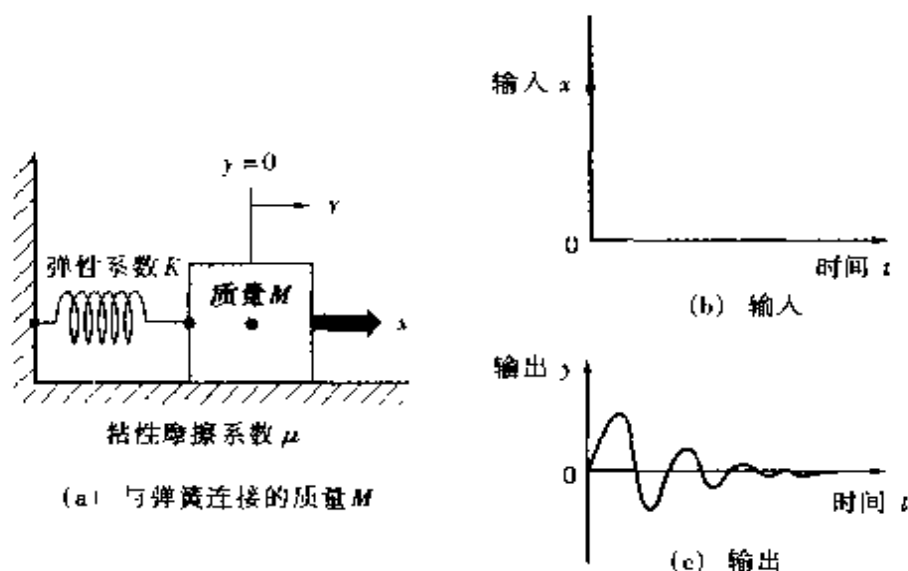


图 3.21 二阶振荡环节的脉冲响应

示的质量 M 输入图 (b) 所示的脉冲, 当粘性摩擦系数很小时, 可得图 (c) 所示的脉冲响应。

应用阶跃响应或脉冲响应等动态响应来进行环节分析或系统设计的方法称为**动态响应法**。

3.3 频域性能的描述(频率响应法)

在前面的时域响应法中, 还有一个响应速度问题。各种环节中有快速响应的、有延迟响应的、也有需要特定响应速度的情

况。人类中也有反应快慢之分,因而形成了种种不同的个性。为了分辨响应速度,可以采用时域响应法,此外还有其它方法吗?比如,在单位时间内重复进行同一件事,可以设法了解1秒钟内重复的次数(频率)。当系统以正弦波形的输入信号作用时,其输出特性将随频率的变化而变化,这种描述系统性能的方法称为**频域响应法**(或频率特性法)。

仍以缓冲器连接弹簧为例加以说明(图 3.23)。以弹簧的上端位置作为输入 x ,其下端位置作为输出 y 。先考虑输入 x 为低频正弦波缓慢变化时的情况[图 3.23(b)]。输入 x 从 0 增加时,弹簧将伸长并产生弹性力,输出 y 也随之增加,但是由于缓冲器在反方向上的拉引作用,使输出 y 的增加在时间上略为滞后。输入 x 达到

NOTE

所谓频率就是在单位时间内重复的次数。例如,1秒钟重复50次,就说频率是50 Hz(赫[兹])。日本使用的工频交流为50 Hz与60 Hz,因此在1秒钟内正弦波形将重复变化50或60次,如图3.22所示。

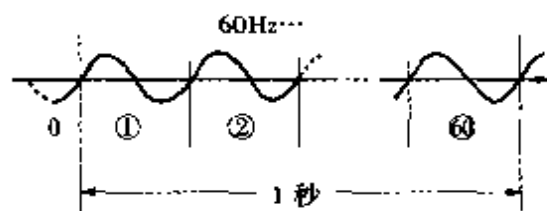


图 3.22

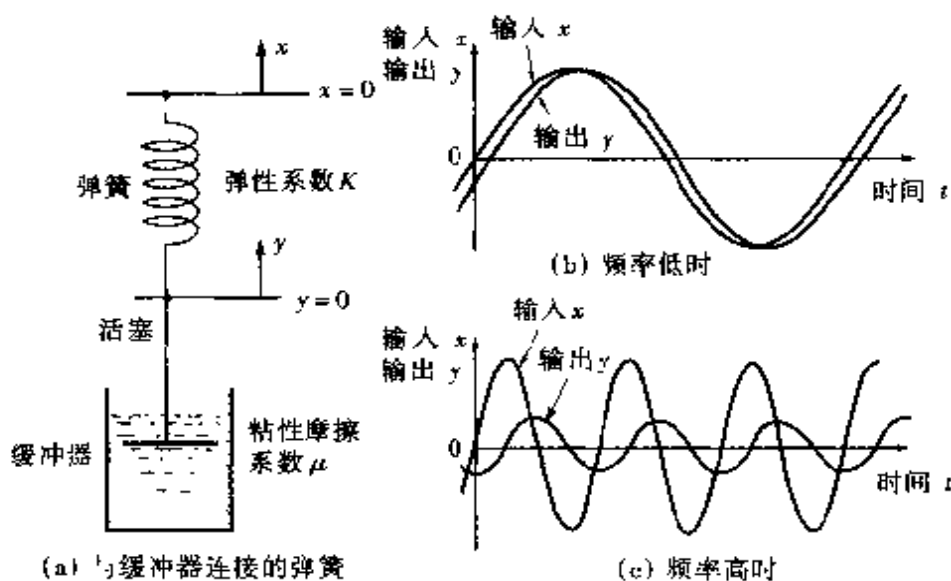


图 3.23 缓冲器与弹簧连接时的输入 x 与输出 y

最大值并开始减小时,输出 y 尚未达最大值。其后,由于输入 x 小于输出 y 而使 y 开始减小。因此,输出 y 也可用一个正弦波来描述,和输入 x 的正弦波相比,时间上略为滞后,幅值略为减小。

输入信号为高频时的情况示于图 3.23(c)。让输入 x 从 0 开始增加时,输出 y 也随之增加,由于 x 上升的速度很快,会有一个很大的力作用到缓冲器的活塞上,但活塞并未来得及运动,使输出 y 的滞后加剧。在稳定状态时,输出 y 从最初的负值逐渐接近 0,然后变为正值并逐渐增加。但是,由于输入 x 的迅速变小而使输出 y 的增加变得缓慢,当输入 x 小于输出 y 时,输出 y 则开始减小。结果,输出 y 在时间上比输入 x 滞后较多,幅值也明显变小。如果输入的频率进一步提高,输出 y 的滞后将趋向一定值,振幅则趋近于 0。

用图 3.24 所示的 RC 电路可以得到与上面相似的结论。以交流电压源的电压作为输入 x ,以电容两端电压作为输出 y 。图 3.24 (b) 示出了输入 x 为低频时的情况,输入的电压源电压在 $t=0$ 瞬时开始增加,电流 i 流过并给电容 C 充电,输出的电容两端电压 y 随输入 x 的增加而增加。由于有电阻限制了电流,使输出 y 在时间上稍有滞后。当输入 x 经过最大值开始减小之后,输出 y 也中

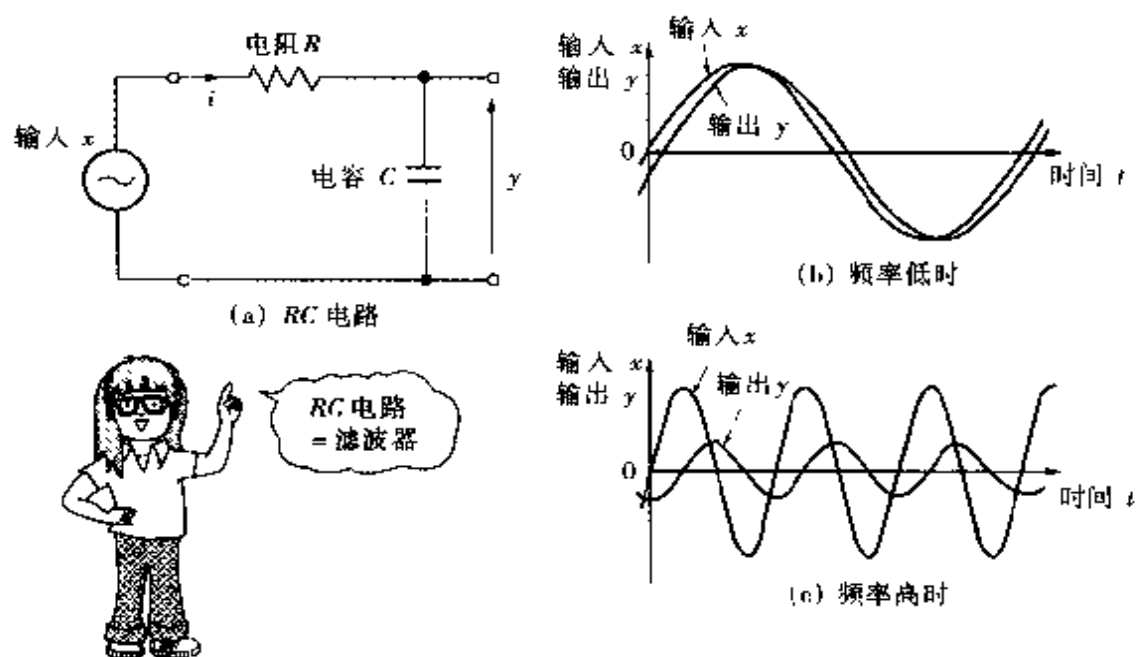


图 3.24 RC 电路的输入 x 与输出 y

途反过来随之减小。因此,输出 y 与输入 x 相比,时间上略有滞后,幅值上也略有减小。

高频时的输入 x 与输出 y 的关系如图 3.24(c)所示。从 $t=0$ 瞬时输入 x 开始增加,有电流 i 流过并开始给电容 C 充电,输出 y 增加。在稳定状态时,输出 y 从负到 0,然后变正并继续增加。当输入 x 经过最大值而减小之后,输出 y 的增加变缓。当输入 x 小于输出 y 时,输出 y 开始减小。其结果,输出 y 与输入 x 相比,时间上滞后较大,振幅也有明显减小。

如果频率进一步增高,则输出的振幅几乎为 0。因此,当输入 x 中既有高频电压信号又有低频电压信号时,输出 y 中只能观察到低频电压信号。由此可知, RC 电路是一种允许低频通过的滤波器。

前面讨论的两个例子表现出与一阶惯性环节同样的特性。测定输入 x 与输出 y 之间的关系,可以得到图 3.25 的结果。由图可知,当角频率 ωT 为 0 时,振幅比为 1,相位角为 0° ;当角频率 ωT 为 1 时,振幅比为 $1/\sqrt{2} \approx 0.7$,滞后的相位角为 -45° ;若角频率 ωT 进一步增加,则振幅比减小,而滞后的相位角趋近于 -90° 。

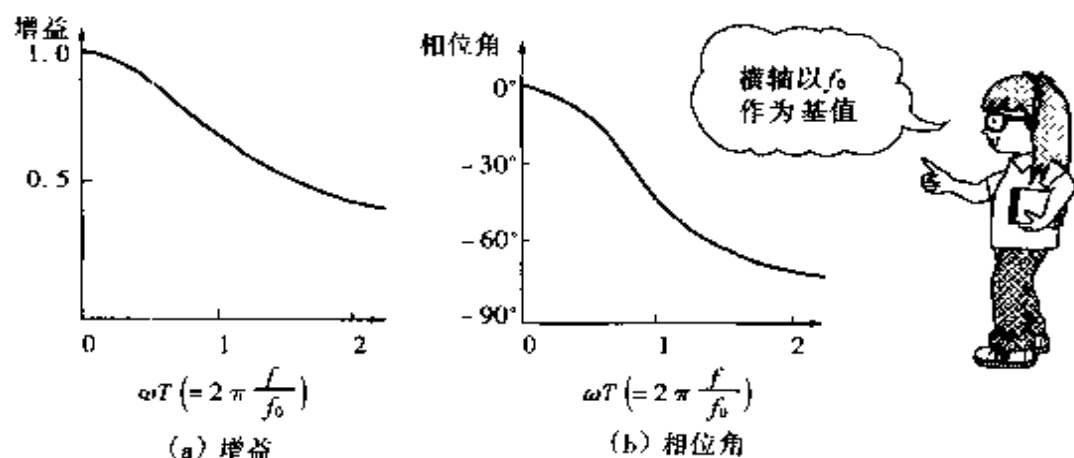


图 3.25 输入 x 与输出 y

可以看出,振幅比(增益)和相位角均随频率的变化而变化,上述环节的这种特性称为频率特性。振幅比变化的特性称为幅频特性,相位角变化的特性称为相频特性。基于频率特性的环节分析与系统设计方法称为频率响应法。

NOTE

对图 3.25 说明如下。图 3.26 中, 输出 y 的最大值 Y 与输入 x 的最大值 X 之比 Y/X 叫做**振幅比 (增益)**, 输出 y 在时间上滞后于输入 x , 用角度表示时的 θ 角叫做**相位角** (θ 角超前时为正值, 滞后时为负值)。横轴为角频率 $\omega T = 2\pi(f/f_0)$, 是以 f_0 作为基准频率的相对角频率。如果一阶惯性环节的时间常数为 T , 则基准频率 f_0 为 $f_0 = 1/T$ (可以理解为周期为 T [秒] 时的频率)。

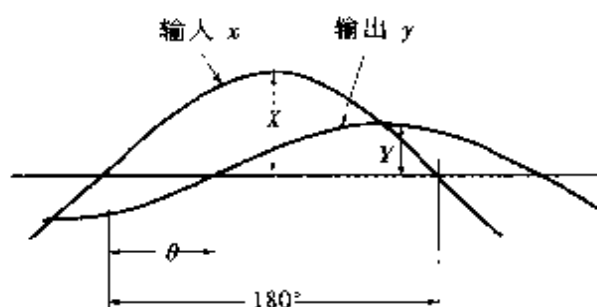


图 3.26 输入 x 与输出 y

3.4 波特图

为了在宽广的频率范围内方便地表示频率特性, 通常采用半对数坐标。即以频率为横轴, 采用对数分度; 以振幅比与相位角为纵轴, 采用线性分度。这种图称为**波特 (Bode) 图**。图 3.25 所示频率特性的波特图示于图 3.27。在低频段直到接近 $\omega T = 1$, 振幅比没有变化; $\omega T = 1$ 时, 振幅比 (增益) 为 $1/\sqrt{2}$, 用分贝表示为 -3 dB 。经过 $\omega T = 1$ 之后, 如果频率变为 2 倍, 则增益减少 6 dB (叫做以 $-6 \text{ dB/倍频程 (octave)}$ 衰减)。如果频率变为 10 倍, 则增益减少 20 dB (叫做以 $-20 \text{ dB/十倍频程 (decade)}$ 衰减)。对于相位角, 当 $\omega T = 1$ 时, 延迟 45° , 随着 ωT 变大延迟的相位角将趋近于 90° 。

下面描述二阶振荡环节的波特图, 如图 3.28 所示。横轴的 ω/ω_n 为 $\omega/\omega_n = 2\pi f/(2\pi f_n) = f/f_n$, f_n 称为固有频率, 为不计电阻和粘性摩擦系数时的谐振频率。当粘性摩擦系数或电路中的电阻 R 很小时, 在 $\omega/\omega_n = 1$ 附近增益急剧增加, 当 $\omega/\omega_n = 1$ 时达到最大, 而通过 $\omega/\omega_n = 1$ 后就急剧减小。 $\omega/\omega_n > 1$ 时增益的斜率为 -12 dB/倍频程 或 -40 dB/十倍频程 , 以一阶惯性环节 2 倍

NOTE

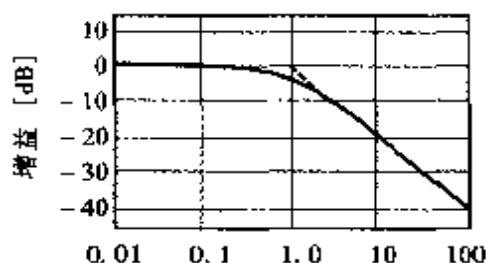
波特图中, 横轴的频率用对数分度, 纵轴的振幅比 (增益) 用分贝 (dB) 表示, 相位角用度 ($^{\circ}$) 表示。

对数分度时, 由于 $\log 10^{-1} = -1$ 、 $\log 10^0 = 0$ 、 $\log 10^1 = 1$ 、 $\log 10^2 = 2$ 、 \dots , 因此 $\omega T = 2\pi(f/f_0) = 0.1$ 时为横轴的 -1 点、 $\omega T = 1$ 时为横轴的 0 点、 $\omega T = 10$ 时为横轴的 1 点等等。

MEMO

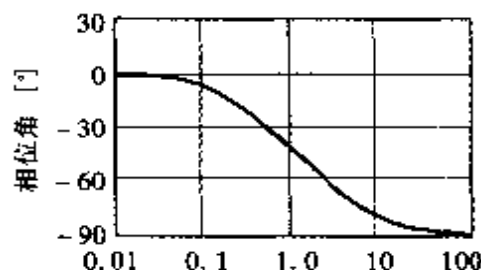
ω 为角频率, 是用角度来表示的频率。有时也把 $\omega = 2\pi f$ 称为频率。

分贝是用 $20 \log x$ 来表示的数。例如 $x = 10$, 则 $20 \log 10 = 20 \times 1 = 20$ dB。此外, 常用的量有: $x = 2$ 时 $20 \log 2 \approx 6$ dB, $x = 1$ 时 $20 \log 1 = 0$, $x = 1/\sqrt{2}$ 时 $20 \log(1/\sqrt{2}) = 20 \log 2^{-1/2} \approx -3$ dB, $x = 1/2$ 时 $20 \log 2^{-1} \approx -6$ dB, $x = 1/10$ 时 $20 \log 10^{-1} \approx -20$ dB 等等。



$$\omega T (= 2\pi \frac{f}{f_0})$$

(a) 增益



$$\omega T (= 2\pi \frac{f}{f_0})$$

(b) 相位角

图 3.27 一阶惯性环节的波特图

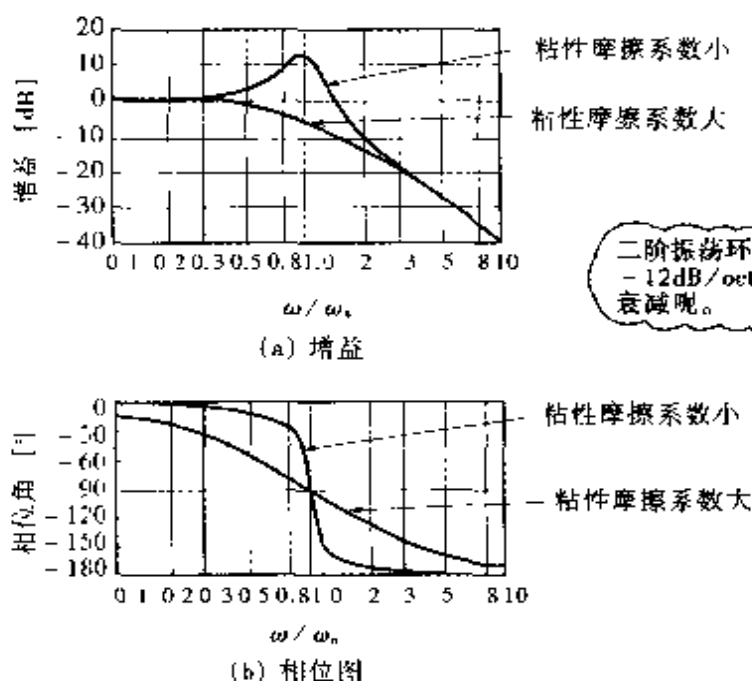


图 3.28 二阶振荡环节的波特图

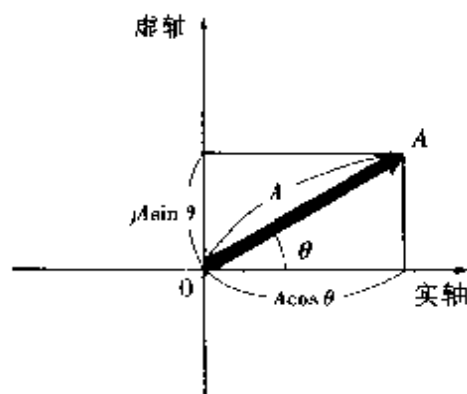
的斜率减小。在接近 $\omega T = 1$ 时相位角急剧减小, 在 $\omega T = 1$ 时延迟 90° , 当 ωT 变得更大时, 延迟的角度将急剧趋近于 180° 。

粘性摩擦系数很大时, 增益在 $\omega / \omega_n = 1$ 附近不会出现最大值而平稳单调减小。相位角也在很宽的频率范围内平稳减小。

3.5 矢量轨迹

随着频率 f (或角频率 $\omega = 2\pi f$) 的变化, 增益与相位角也随之变化, 这种关系可以用波特图来表示。另外, 增益大小与相位角

还可以用一个矢量来表示。用矢量表示频率特性容易理解也十分便利。

图 3.29 矢量 A

所谓矢量是具有大小和方向的量, 可以在以实轴为横轴、虚轴为纵轴的复平面上来表示一个矢量。图 3.29 中, 表示了一个任意矢量 A 。矢量的大小为 A , 与实轴所夹角度为 θ , 则矢量 A 为:

$$A = A \cos \theta + j A \sin \theta (j \text{ 表示虚数})$$

若用增益来代替矢量的大小 A ，用相位角来代表 θ 角，则随着角频率 ω 的改变，矢量 A 的端点将在复平面上移动。矢量端点移动的轨迹称为**矢量轨迹**。例如，一阶惯性环节的矢量轨迹如图 3.30 所示，二阶振荡环节的矢量轨迹如图 3.31 所示。

此外还可以用所谓增益 - 相位图等方法来表示动态特性。

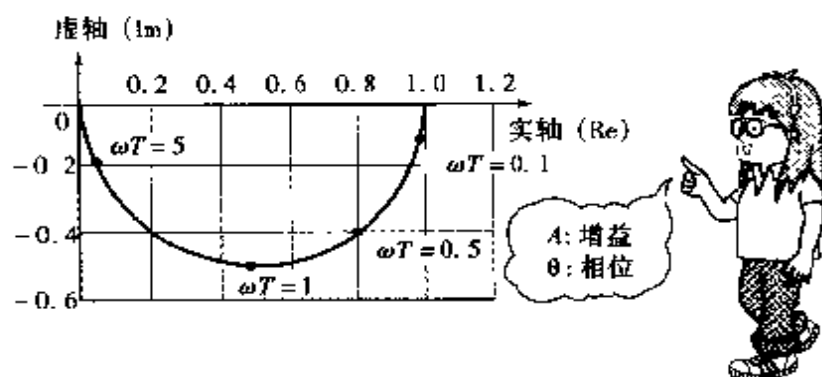


图 3.30 一阶惯性环节的矢量轨迹

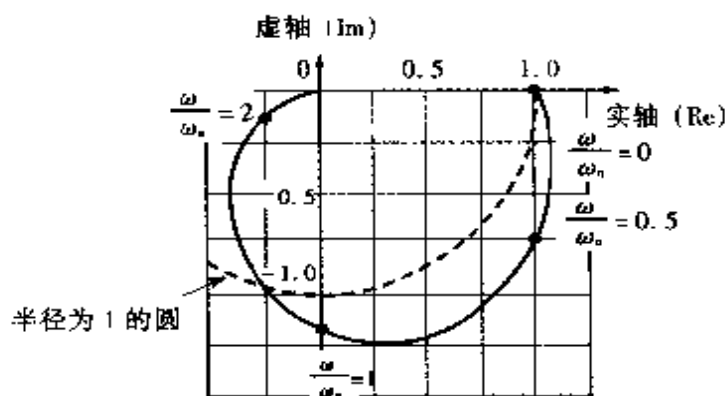


图 3.31 二阶振荡环节的矢量轨迹

拉普拉斯变换与传递函数



前面定性地分析了动态特性及其变化趋势，实际上仅仅定性分析是不够的，很多场合都需要进行定量的分析与计算。为此需要引入拉普拉斯变换。

4.1 拉普拉斯变换

再一次以与缓冲器连接的弹簧为例，当外加力为单位阶跃函数时，求取其动态响应（阶跃响应）（参见图 4.1）。当弹簧伸长 y 时，弹簧力 $f_k = Ky$ 。缓冲器上的作用力 f_μ 为 $f_\mu = \mu v$ （ v ：速度），其中速度可以用 y 的微分 $v = dy/dt$ 表示（第 2.5 节）。因此缓冲器上的作用力又可写成 $f_\mu = \mu dy/dt$ （见式 2.13）。

由于外力 f 与弹簧力 f_k 和缓冲器力 f_μ 三者平衡，即

$$f_k + f_\mu = f \quad (4.1)$$

将 $f_k = Ky$ 、 $f_\mu = \mu dy/dt$ 代入式(4.1)，可得

$$\mu \frac{dy}{dt} + Ky = f \quad (4.2)$$

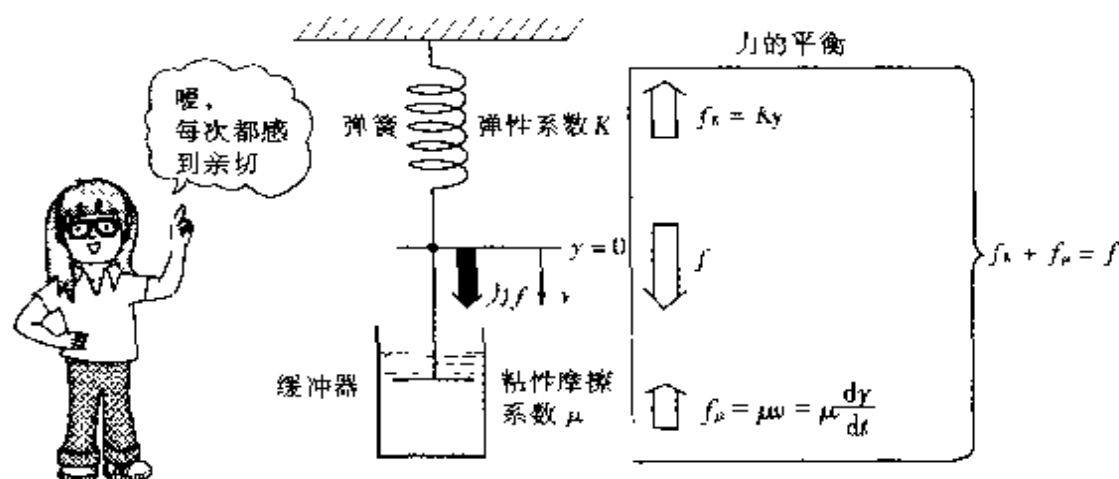


图 4.1 与缓冲器连接的弹簧

这是一个微分方程式。其初始条件为 $t=0$ 时, 伸长 $y=0$ 。利用这个初始条件, 来看一下微分方程的求解问题。

外力 f 为:

$$f = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (4.3)$$

这是一个单位阶跃波形, 记作

$$f = u(t) \quad (4.4)$$

图 4.2 示出了该函数的波形

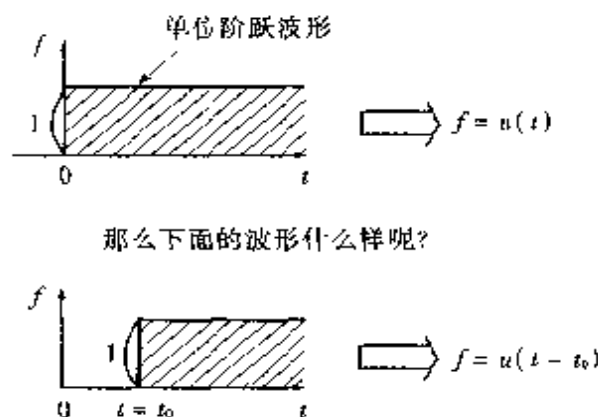


图 4.2 单位阶跃函数的波形

对式(4.2)稍加整理可得

$$\frac{dy}{dt} + \frac{K}{\mu}y = \frac{u(t)}{\mu} \quad (4.5)$$

该微分方程的解为

$$y = \frac{1}{K}(1 - e^{-\frac{K}{\mu}t}) \quad (4.6)$$

NOTE

求解微分方程

$$\frac{dy}{dt} + \frac{K}{\mu}y = \frac{u(t)}{\mu}$$

(1) 求解齐次微分方程

$$\frac{dy}{dt} + \frac{K}{\mu}y = 0$$

该微分方程的解是确定的, 即 $y = Ae^{-(K/\mu)t}$ 其中 A 为任意常数。

(2) 求解微分方程

$$\frac{dy}{dt} + \frac{K}{\mu}y = \frac{u(t)}{\mu}$$

当 $t > 0$ 时, $u(t) = 1$, 即外力为不随时间变化的常数值 1。若认为伸长 y 也不随时间变化, 假定 $y = B = \text{常数}$, 代入上式得

$$\frac{dB}{dt} + \frac{K}{\mu}B = \frac{1}{\mu}$$

由于 B 为常数, 所以 $dB/dt = 0$, 可求得 $B = 1/K$ 。

(3) 将步骤(1)与(2)的两个答案加起来可以求得微分方程的解为

$$y = \frac{1}{K} + Ae^{-\frac{K}{\mu}t}$$

然而, 式中的任意常数 A 还是未知的, 可利用初始条件 ($t=0$ 时, $y=0$) 求出。将 $t=0$ 代入上式得

$$y=0 = \frac{1}{K} + A$$

可求得 $A = -1/K$ 。最后求得的微分方程的解为

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{K} - \frac{1}{K}e^{-\frac{K}{\mu}t} \\ &= \frac{1}{K}(1 - e^{-\frac{K}{\mu}t}) \end{aligned}$$

若是复杂的
微分方程式
怎么办呢?



式(4.6)与式(2.26)中令 $f_0 = 1$ 时完全相同。实际上,求解微分方程是一件很麻烦的事。

求解微分方程时,若采用拉普拉斯变换,就避免了复杂的求解过程,用简单的加减乘除运算就可以求得解答。下面以微分方程式(4.2)为例说明。将式(4.2)作简单整理,可得

$$\frac{dy}{dt} + \frac{K}{\mu}y = \frac{f}{\mu} \quad (4.7)$$

对方程式两边取拉普拉斯变换(以下简称拉氏变换),使方程式中的变量从时域变换到频域(具体怎样变换,这里尚未涉及到),变换结果如下:

| | | | |
|------------------|---------------|------------------|------------------------------------|
| t - 时域 | 拉氏变换 → | s - 频域 | |
| $\frac{K}{\mu}y$ | | $\frac{K}{\mu}Y$ | (要用大写字母 Y) |
| $\frac{dy}{dt}$ | | $sY - y(0)$ | (s 用小写字母, $y(0)$ 为 $t=0$ 时 y 的初始值) |
| $\frac{f}{\mu}$ | | $\frac{F}{\mu}$ | (要用大写字母 F) |

式(4.7)中的变量经以上变换后得

$$[sY - y(0)] + \frac{K}{\mu}Y = \frac{F}{\mu} \quad (4.8)$$

由于初始条件 $t=0$ 时, $y(0)=0$, 则上式变为

$$sY + \frac{K}{\mu}Y = \frac{F}{\mu} \quad (4.9)$$

求得 Y 为:

$$Y = \frac{F/\mu}{s + K/\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{s + K/\mu} F \quad (4.10)$$

还要求出力 f 的拉氏变换 F 。由于 $f = u(t)$, 因此可以对 $u(t)$ 取拉氏变换

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|--|
| t - 时域 | 拉氏变换 → | s - 频域 | |
| $u(t)$ | | $\frac{1}{s}$ | |

因此 $F = 1/s$, 代入式(4.10)可得

$$Y = \frac{1}{\mu} \frac{1}{s(s + K/\mu)} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + K/\mu} \right) \quad (4.11)$$

至此, 求出了 y 的拉氏变换 Y 。为了求得时域的 y , 还要进行以下的拉普拉斯逆变换(以下简称拉氏逆变换)

| s - 频域 | 拉氏逆变换 \longrightarrow | t - 时域 |
|-----------------------|-------------------------|---------------------------|
| Y | | y |
| $\frac{1}{s}$ | | $u(t)$ |
| $\frac{1}{s + K/\mu}$ | | $e^{-\frac{K}{\mu}t}u(t)$ |

式(4.11)中的各项经以上拉氏逆变换后, 可得

$$y = \frac{1}{K} [u(t) - e^{-\frac{K}{\mu}t}u(t)] = \frac{1}{K} (1 - e^{-\frac{K}{\mu}t})u(t) \quad (4.12)$$

式中, 当 $t < 0$ 时 $u(t) = 0$, $t \geq 0$ 时 $u(t) = 1$, 因此式(4.12)又可以改写成下式:

$$y = \frac{1}{K} (1 - e^{-\frac{K}{\mu}t}) \quad (t \geq 0) \quad (4.13)$$

可见, 上式与式(4.6)完全相同。

常用的拉氏变换与拉氏逆变换示于表 4.1。可以看出, 用简单的四则运算就可以求解微分方程。利用拉氏变换和拉氏逆变换来求解微分方程的次序如图 4.3 所示。可见, 利用拉氏变换计算时, 首先要把微分方程式从时域变换到频域进行运算, 然后还要把运算结果重新变换回时域。

表 4.1 拉普拉斯变换表

| $f(t)$ - 时域 | 拉普拉斯变换 拉普拉斯逆变换 | $F(s)$ - 频域 |
|---|-------------------|--|
| 单位脉冲函数 $\delta(t)$ | | 1 |
| 单位阶跃函数 $u(t)$ | | $\frac{1}{s}$ |
| e^{-at} (正确表示时应 $\times u(t)$ 以下均省略) | | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\sin bt$ | | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\cos bt$ | | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $e^{-at} \sin bt$ | | $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ |
| $a_1 f + a_2 f_2$ | | $a_1 F_1 + a_2 F_2$ |
| $\frac{df}{dt}$ | | $sF - f(0)$ ($f(0)$ 为初始值) |
| $\frac{d^2f}{dt^2}$ | | $s^2F - sf(0) - \left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0}$ |
| $\int f dt$ | | $\frac{F}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$ ($f^{(-1)}(0) = \left[\int f dt\right]_{t=0}$) |
| f 的波形在时间轴上向右移动 a (即比 f 延迟 a) | | $e^{-as} F$ |
| 初始值 $\lim_{t \rightarrow 0} f$ ($t=0$ 时 f 的值) | | $\lim_{s \rightarrow \infty} sF$ (s 无穷大时 sF 的值) |
| 稳态值 $\lim_{t \rightarrow \infty} f$ (t 为无穷大时 f 的值) | | $\lim_{s \rightarrow 0} sF$ ($s=0$ 时 sF 的值) |

无论何时，
只要看到这个表就行了

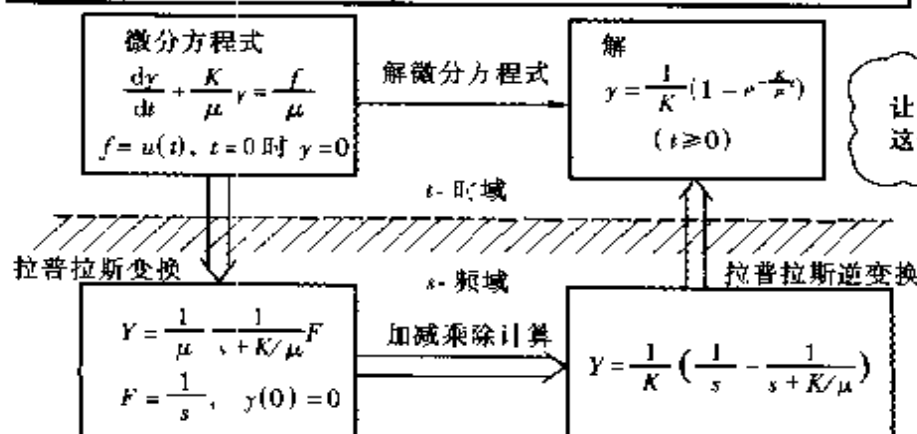


图 4.3 利用拉氏变换与逆变换的运算方法

4.2 传递函数与方框图

在第4.1节的例子中,由式(4.10)可知,用输入力 f 的拉氏变换 F 乘以 $(1/\mu)[1/(s + K/\mu)]$ 就可以求得输出 y 的拉氏变换 Y 。用第2.2节中所述的方框图来表示以上关系时,如图4.4所示。当以力 f 作为输入,以伸长 y 作为输出,并利用拉氏变换时,与缓冲器连接的弹簧可以写成 $1/[\mu(s + K/\mu)]$,并进一步简单地用符号 G 来表示:

$$G = 1/[\mu(s + K/\mu)]$$

称为传递函数。传递函数描述了系统的自然特性,而与输入形式无关。

现在求图4.5所示电路的传递函数。图中电阻 R_1 与 R_2 串联连接,以外加电源电压 e_1 作为输入,以电阻 R_2 两端电压 e_2 作为输出。电源电压 e_1 接入后,流过电阻 R_1 、 R_2 的电流 i 为 $i = e_1/(R_1 + R_2)$,电阻 R_2 上的电压 e_2 为 $e_2 = [R_2/(R_1 + R_2)] e_1$ 下面作拉氏变换:

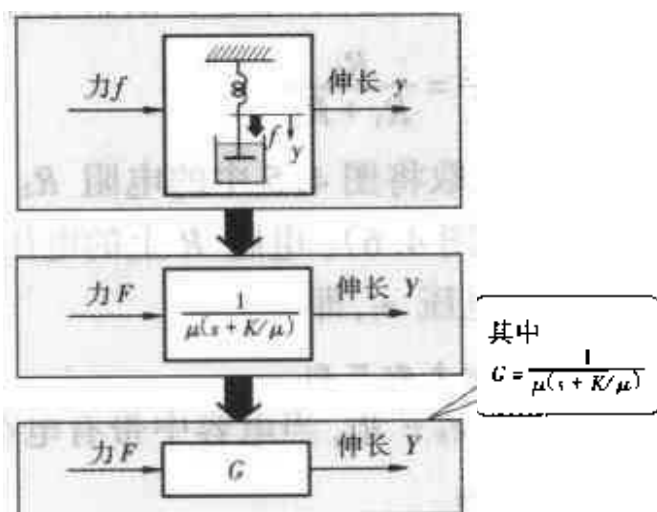
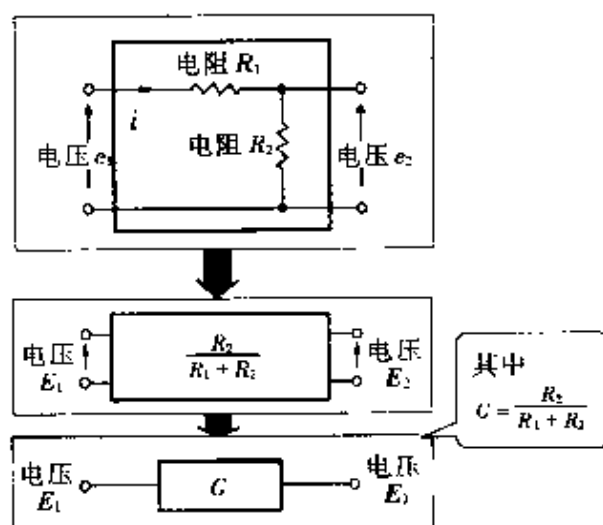


图 4.4 传递函数

图 4.5 电阻 R_1 、 R_2 串联电路的传递函数

| | | |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| t - 时域 | 拉氏变换 \longrightarrow | s - 频域 |
| $\frac{R_2}{R_1 + R_2} e_1$ | | $\frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1$ |
| e_2 | | E_2 |

变换结果得到了 $E_2 = [R_2 / (R_1 + R_2)] E_1$ 的关系, 令 $G = R_2 / (R_1 + R_2)$ 为传递函数, 则 $E_2 = GE_1$ 。

在图 4.5 的例子中, 由于电流 i 同时流过 R_1 和 R_2 , 电压与相应电阻值成比例。即电压 e_1 与 $(R_1 + R_2)$ 成比例, 电压 e_2 与电阻 R_2 成比例。因此, 采用运算法由电路图 4.5 可直接写出下式:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.14)$$

下面求取将图 4.5 中的电阻 R_2 用电容 C 代替时电路的传递函数(参见图 4.6)。电阻 R 上的电压 e_R 与电容 C 的电压 e_C 之和等于电源电压 e_1 , 即

$$e_R + e_C = e_1 \quad (4.15)$$

电压 e_R 为 $e_R = Ri$, 当电容中带有电荷 q 时, $i = dq/dt$, 则电压 e_R

可写为 $e_R = R(dq/dt)$; 电容电压 e_C 可用式 $e_C = q/C$ 求出; 输出电压 e_2 等于电容电压 e_C 。于是对于图 4.6 可以列出如下电压方程式:

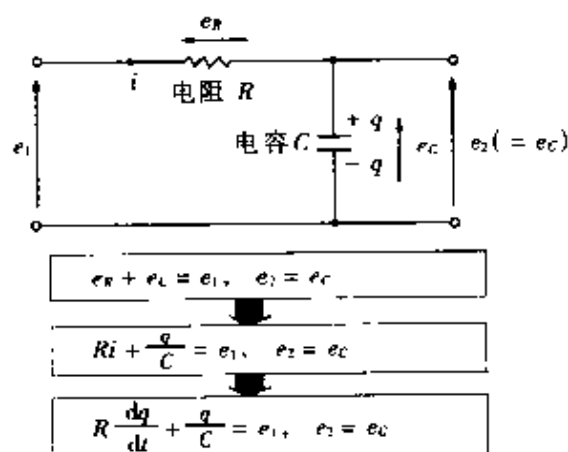


图 4.6 RC 电路

$$\left. \begin{aligned} R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= e_1 \\ e_2 &= e_C = \frac{q}{C} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

式 (4.16) 为在时域的方程

式, 现在可利用拉氏变换将其变换到频域。



$$R \frac{dq}{dt} \quad R(sQ - q(0))$$

$$\frac{q}{C} \quad \frac{Q}{C}$$

$$e_1 \quad E_1$$

$$e_2 \quad E_2$$

经以上变换可以得到频域的电
压方程式

$$\left. \begin{aligned} R[sQ - q(0)] + \frac{Q}{C} &= E_1 \\ E_2 &= \frac{Q}{C} \end{aligned} \right\} (4.17)$$

考虑传递函数时,全部取零初
始条件,即 $q(0) = 0$,则由式
(4.17)可得输出电压 E_2 为:

$$E_2 = \frac{1}{CRs + 1} E_1 \quad (4.18)$$

可见,传递函数 G 为 $G = 1/(CRs + 1)$ (参见图 4.7)。

这个 RC 电路的传递函数也可以应用运算法求出。图 4.7 中,
电容 C 用 $1/(sC)$ 替换,就可以和电阻同样处理(其理由这里尚未
接触到)。与图 4.5 时的情况相似,图 4.7 中所示电路的传递函数
 G 可参照图 4.8 求取如下:

$$G = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1/(sC)}{R + 1/(sC)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (4.19)$$

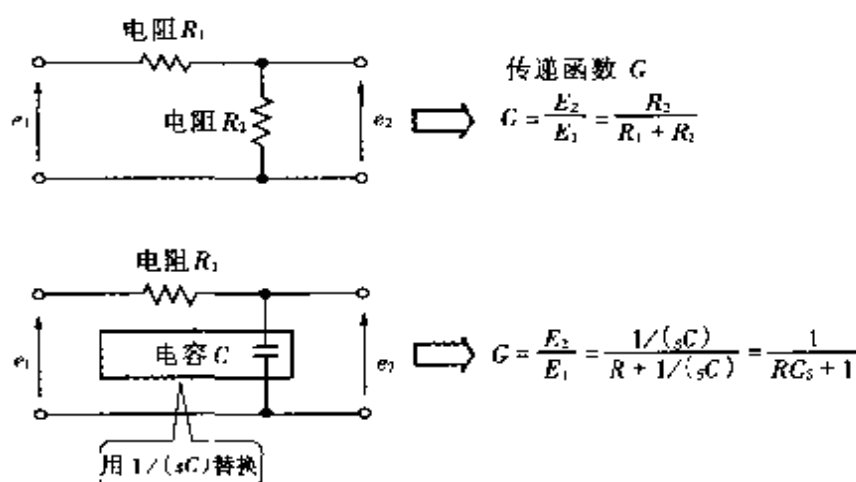


图 4.8 传递函数的求取方法

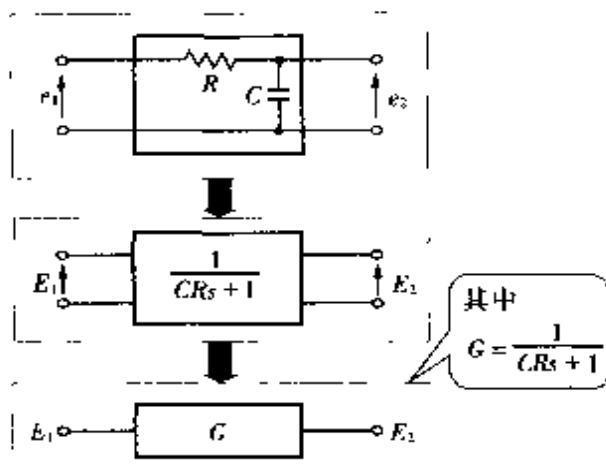


图 4.7 RC 电路的传递函数

MEMO

考虑传递函数时,环节的初始条件全部取为0。

下面采用运算法求取图 4.9 所示 RL 电路的传递函数。图 4.9 中的电感 L 用 sL 替换,就可以和电阻同样处理。 RL 电路的传递函数为

$$G = \frac{E_2}{E_1} = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{s \frac{L}{R} + 1} \quad (4.20)$$

使用传递函数的优点在于,在求取输出时不必求解微分方程式,只需用输入的拉氏变换与传递函数相乘即可求得。因此,即使是如图 4.10 所示的复杂系统,应用传递函数也可以方便地求取系统的输出。

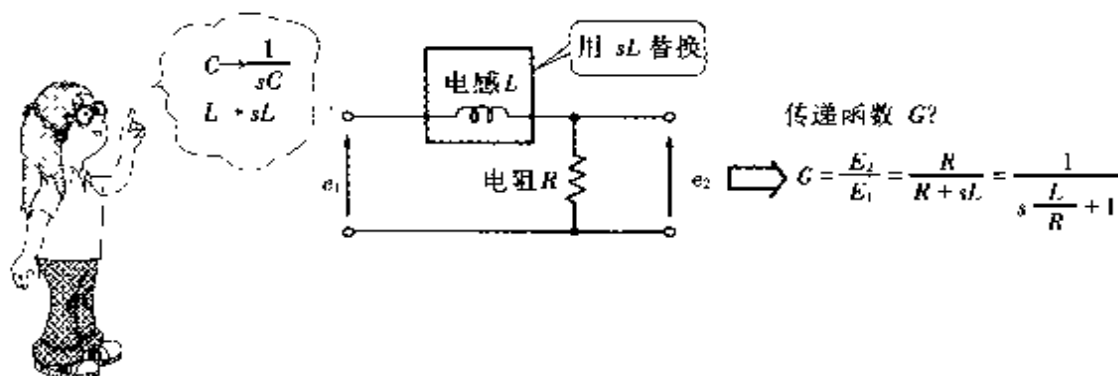


图 4.9 RL 电路的传递函数

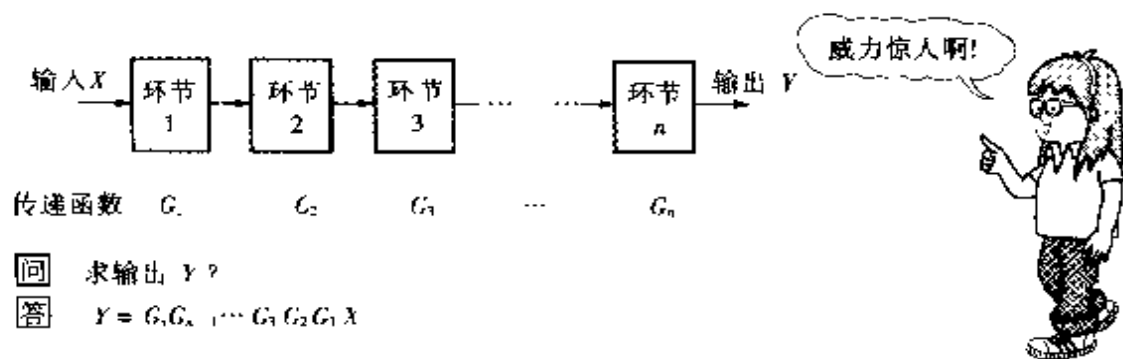


图 4.10

另外, 如果将传递函数中的变量 s 用 $j\omega$ (j 为复数, $\omega = 2\pi f$) 代替, 就可以求得环节的频率特性。例如, 将 RC 电路的传递函数 $G = 1/(CRs + 1)$ 中的 s 用 $j\omega$ 代替, 可得

$$G = \frac{1}{j\omega CR + 1} \quad (4.21)$$

将 RC 电路的时间常数 $T = CR$ 代入上式, 可以求得传递函数 G 的大小(增益)和相位角, 即

$$G = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}e^{j\theta}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} e^{-j\theta} \quad (4.22)$$

其中 $\theta = \tan^{-1} \omega T$, G 的绝对值(大小、增益)为 $1/\sqrt{(\omega T)^2 + 1}$, 相位角为 $-\tan^{-1} \omega T$ 。当 ωT 从 0 到无穷大之间变化时, 可以求得具有上述传递函数的 RC 电路的频率特性, 如图 3.27 及图 3.30 所示。

NOTE

复数的极坐标表示(用其大小和相位角来表示)。复数 $a + jb$ 可以变形为

$$\begin{aligned} a + jb &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + j \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\theta} \end{aligned}$$

因此, 这个复数的大小为 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 相位角为 $\theta = \tan^{-1} (b/a)$ (图 4.11)

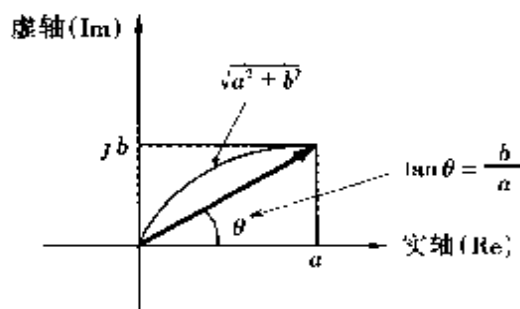


图 4.11

表 4.2 各种环节的传递函数

| 环 节 | 传递函数 | 说 明 |
|-----------------|---------------------------|---|
| 比例环节 | K | K 为常数。弹簧力与伸长; 线图的电流与磁链; 电阻的电压与电流 (2.3 节) |
| 积分环节 | $\frac{K}{s}$ | K 为常数。油缸的流量与移动距离; 作用于质量上的力与速度; 流入电容的电流与电荷 (2.4 节) |
| 微分环节 | sK | K 为常数。缓冲器活塞的移动距离与力; 活塞拉起的距离与力; 电感的电流与电压 (2.5 节) |
| 一阶惯性环节 | $\frac{1}{Ts + 1}$ | T 为时间常数。与缓冲器连接的弹簧的力与伸长; 与缓冲器连接的质量的力与速度; RC 电路的输入电压与电容电压 (2.6 节) |
| 二阶振荡环节 (二阶惯性环节) | $\frac{1}{as^2 + bs + c}$ | a, b, c 为常数。粘性摩擦系数或电阻小为二阶振荡环节, 大时为二阶惯性环节; 与具有粘性摩擦系数的平板上的弹簧连接的质量; LCR 电路 (2.7 节) |
| 死时间环节 (传输延迟环节) | Ke^{-Ts} | K 为常数。 T 亦为常数, 表示图 2.42 所示的死时间。长管中流水的测定量与实际量在时间上的延迟 (由于测量时需要时间) |

那种与这种
组合起来...



当 ωT 充分小时, 由于 $1/\sqrt{0+1}$, 用分贝表示时的增益为 $20\log 1 = 0 \text{ dB}$ 。随着 ωT 的变大, 增益变小, 当 $\omega T = 1$ 时, 由于 $1/\sqrt{1+1} = 1/\sqrt{2}$, 则增益减小了 $20\log 2^{-1/2} = -10\log 2 = -3 \text{ dB}$ 。当 ωT 进一步增大时, 式 $1/\sqrt{(\omega T)^2 + 1} \approx 1/\omega T$, 及 $20\log(1/\omega T) = -20\log \omega T$ 。将 $\omega T = 2$ 代入, 则 $-20\log \omega T = -20\log 2 \approx -6 \text{ dB}$ 。由于 $\omega T = 1$ 时增益为 0 分贝, 则频率 2 倍时增益减小 6 dB (-6 dB/octave)

MEMO

octave (倍频程) 意味着频率为 2 倍, 而 decade 则意味着 10 倍。

当 ωT 充分小时, 由 $-\tan^{-1}0$ 可知相位角为 0 , 随着 ωT 变大, 相位角将滞后, 在 $\omega T = 1$ 时, 相位角为 $-\tan^{-1}1 = -45^\circ$, 当 ωT 进一步增大, 并趋近于 ∞ 时, 相位角将趋近于 $-\tan^{-1}\infty = -90^\circ$.

各种环节的传递函数 G 归纳于表 4.2。

至此, 讨论了各种环节, 应用拉氏变换导出了它们的传递函数。下面研究如何应用已求出的各个环节的传递函数来构成整个系统的传递函数。

4.3 方框图的等效变换

方框图的结合法则如表 4.3 所示。串联结合时为两个传递函数 G_1 、 G_2 相乘; 并联结合时为两个传递函数相加或相减; 反馈结合时用图 4.12 说明如下: 设输入为 X 、输出为 Y 。输出 Y 与反馈环节(图 2.9)的传递函数 G_2 的乘积 $G_2 Y$ 回送到比较器。输入 X 从比较器的 \oplus 端输入, 反馈量(图 2.9) $G_2 Y$ 从比较器的 \ominus 端输入, 结果传递函数 G_1 的净输入为 $X - G_2 Y$ 。输入 $(X - G_2 Y)$ 与传递函数 G_1 的乘积就是输出 Y , 即

$$Y = G_1 (X - G_2 Y) \quad (4.23)$$

将上式稍加整理, 即可求得输出 Y 为:

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} X \quad (4.24)$$

由于上面的反馈量为负值, 故称之为负反馈。

若反馈环节的 G_2 很大, 则式(4.24)的分母中 $G_1 G_2 \gg 1$, 因此,

表 4.3 方框图的结合法则

| 法 则 | |
|------|--|
| 串联结合 | |
| | |
| (例) | |
| 并联结合 | |
| | |
| (例) | |
| 反馈结合 | |
| | |
| (例) | |

式(4.24)可作如下简化:

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} X \approx \frac{G_1}{G_1 G_2} X = \frac{1}{G_2} X \quad (4.25)$$

上式说明,当输入为 X 时,输出 Y 与传递函数 G_1 的变化无关,而仅仅决定于反馈环节的传递函数 G_2 。当没有反馈时($G_2 = 0$),输出 Y 为:

$$Y = G_1 X \quad (4.26)$$

可见,此时控制对象 G_1 的变化将完全反映到输出中。而进行反馈控制时,无论控制对象 G_1 怎样变化,输出 Y 也很难受到影响。

表 4.4 示出了传递函数与分路点交换或传递函数与求和点交换的规则。

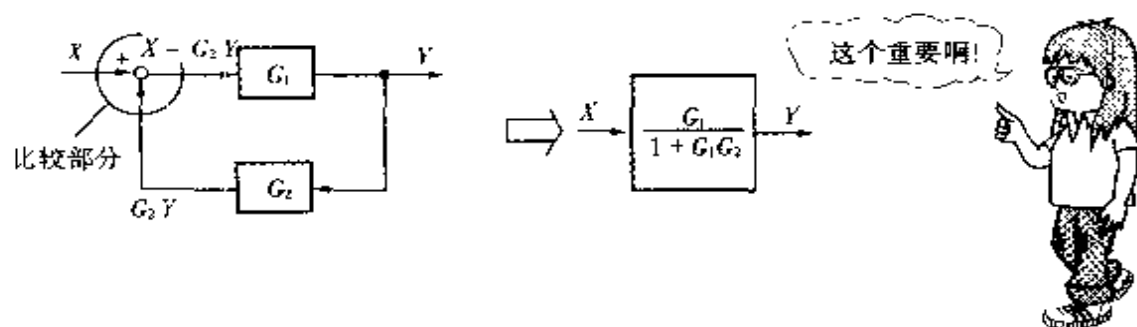
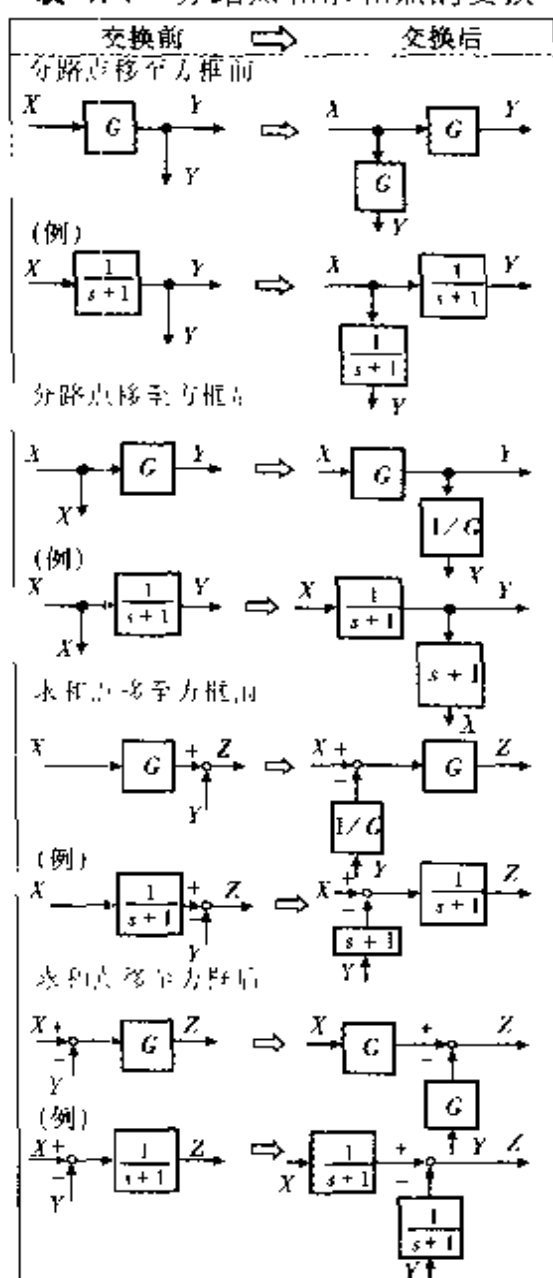


图 4.12 负反馈结合

这里,以直流伺服电动机进行机器人手腕的位置控制为例加以说明。整个控制系统如图 4.13 所示。图中,负载的位置用电位器来检测。电位器用电阻线绕制而成,一般为棒状或环状,加直流电压。随着负载位置的改变,电刷的电位随之变化,就可以用来作位置检测了。例如,当负载向左移动时电刷电位 e_o 下降,向右移动时电刷电位 e_o 升高。因此电刷电位可以作为位置反馈信号,与表示目标位置的电压 e_i 相比较,产生偏差电压 $e_i - e_o$ 。如果目标电压 e_i 大于反馈电压 e_o ,偏差电压为正并通过电压放大器放大。放大了的电压加到直流电动机的驱动电路,使直流电动机旋转,带动负载向右移动,同时反馈电压增大。当反馈电压 e_o 与目标电压 e_i 相等时,直流电动机停止转动。这样就可以在负载运动的直线上实现位置控制。

表 4.4 分路点和求和点的交换



输出、输入从哪儿都可以



现在,用传递函数来表示系统中的各个环节,并求出系统的方框图。首先是偏差电压 $e_i - e_o$ 的电压放大,然后是驱动电路进行功率放大,得到电枢电压 e_a (图 4.14)。由于电压放大器和驱动电路都是比例环节,由表 4.2 可知它们的传递函数为常数 K_1 , K_2 。由表 4.3 可知 K_1 , K_2 串联结合后可以合并为二者的乘积 $K_1 \cdot K_2$, $K_1 \cdot K_2$ 可以简单地记为 K_r 。

考虑一下直流电动机的传递函数。一般采用永久磁钢产生磁场的他激式直流电动机作为机器人驱动器的动力源。以电枢电压

e_R 和 e_C 之间应满足

$$e_a = e_R + e_C \quad (4.28)$$

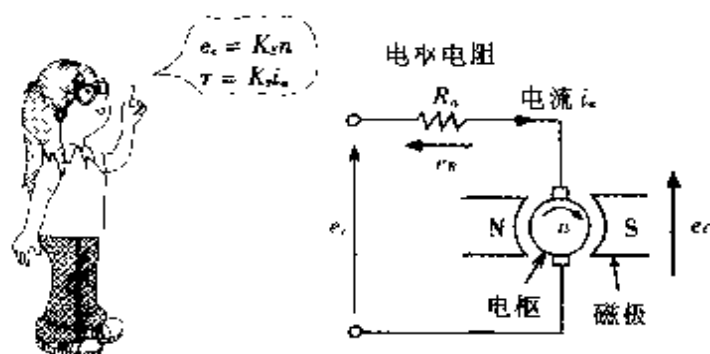


图 4.16 他激式直流电动机

其中, $e_R = R_a i_a$, 感应电压 e_C 与速度 n 成比例 $e_C = K_e n$, 则式(4.28)可改写为

$$e_a = R_a i_a + K_e n \quad (4.29)$$

若电动机(包括负载)的转动惯量为 J , 粘性摩擦系数为 μ , 电磁转矩为 τ , 则电机的运动方程式为

$$\tau = J \frac{dn}{dt} + \mu n \quad (4.30)$$

其中, 电磁转矩 τ 与电流 i_a 成比例, $\tau = K_t i_a$ 。

在初始条件为零时, 根据表 4.1, 对式(4.29)与式(4.30)取拉氏变换, 得

$$E_a = R_a I_a + K_e N \quad (4.31)$$

$$T = K_t I_a = J s N + \mu N \quad (4.32)$$

由式(4.32)得 $I_a = (J s + \mu) N / K_t$, 代入式(4.31), 得

$$E_a = \frac{R_a}{K_t} (J s + \mu) N + K_e N \quad (4.33)$$

以电压 e_a 作为输入, 以转速 n 作为输出时, 他激式直流电动机的传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{N}{E_a} &= \frac{1}{\frac{R_a}{K_t} J s + \frac{R_a}{K_t} \mu + K_e} \\ &= \frac{K_t}{R_a \mu + K_t K_t} \left/ \left(1 + \frac{R_a J}{R_a \mu + K_t K_t} s \right) \right. \end{aligned} \quad (4.34)$$

令 $K_t / (R_a \mu + K_t K_t) = K_m$, $R_a J / (R_a \mu + K_t K_t) = T_m$ 就是式(4.27)。

最后,考虑齿轮、传动螺杆与负载部分(图 4.17)。先由齿轮减速后传递到传动螺杆,由传动螺杆带动负载在直线上移动。由电位器将负荷位置变换成电压信号作为输出。由于负载的位置由电机转速来确定,则电压 e_o 应为转速与时间的乘积。当转速随时间变化时,输出电压 e_o 由以下积分式确定:

$$e_o = K_p \int_0^t n dt \quad (4.35)$$

式中 K_p 为常数,由表 4.1 可知,式(4.35)的拉氏变换为

$$E_o = K_p \frac{N}{s} \quad (4.36)$$

至此,系统中各环节的传递函数均已确定,可以画出整个系统的方框图如图 4.18 所示。

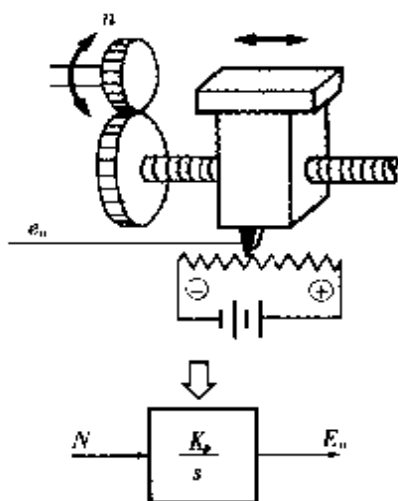


图 4.17 齿轮与传动螺杆

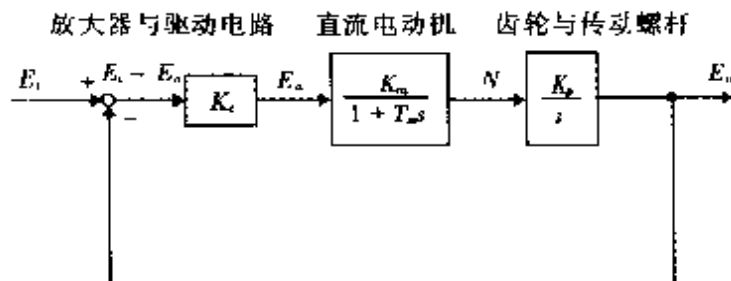


图 4.18 系统的方框图

如图 4.19 所示,将串联的三个传递函数 K_c 、 $K_m/(1 + T_ms)$ 、 K_p/s 合并为 $K_c K_m K_p / s(1 + T_ms)$ 。由表 4.3 可知,对于图 4.19 中的

负反馈结合, $G_1 = K_c K_m K_p / [s(1 + T_m s)]$ 、 $G_2 = 1$, 故负反馈结合后的传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{E_o}{E_i} &= \frac{G_1}{1 + G_1} = \frac{K_c K_m K_p}{s(1 + T_m s)} \bigg/ \left(1 + \frac{K_c K_m K_p}{s(1 + T_m s)} \right) \\ &= \frac{K_c K_m K_p}{s(1 + T_m s) + K_c K_m K_p} \end{aligned} \quad (4.37)$$

这样一来, 用直流电动机对机器人进行位置控制时, 给定目标位置的电压 e_i 与给出实际位置的电压 e_o 二者之间的关系就可以用传递函数来表示了。

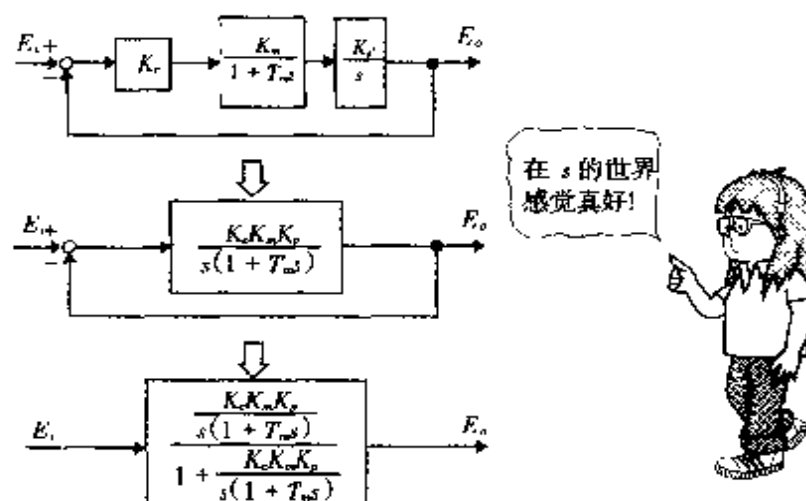


图 4.19 系统的传递函数

4.4 控制系统性能的设计指标

用图 4.13 所示的直流电动机对机器人进行位置控制时, 首先求出实际位置(控制量)与目标位置(目标值)的偏差, 再确定通过放大器与驱动电路(控制环节)后加到直流电动机上的直流电压(操作量), 从而对直流电动机(被控对象)实施控制。该系统具有以下特征。

(1) 即使直流电动机的特性发生变化, 也能够减小因特性变化而引起的位置变化。

(2) 对于快速运送重物时负载急剧变化, 或者来自外部的振

动等对控制系统的外部干扰(扰动)以及系统内部的噪音等原因引起位置变化时,系统应能够自动减小这种变化。

(3) 改变放大器增益或变换其它控制环节(例如积分环节、微分环节、一阶惯性环节等)可以改善系统的动态响应或减小稳态误差。

一般说来,采用负反馈控制系统就可以实现上述要求。

控制系统设计时,最理想的响应是当目标值变化时,控制量的变化应完全一致,而完全不受外部扰动和噪音的影响。下面以直流电动机位置控制为例加以说明(图4.20)。当目标值电压 e_i 增加1V时,图4.13中负荷将瞬时开始向右移动,希望实际位置电压 e_o 也增加1V[图4.20(a)]。但是,要得到这样理想的输出实际上是不可能的。图4.20(b)~(f)为实际可能得到的输出。图(b)为没有振荡,缓慢趋近于目标位置的响应(趋近于目标位置称为收敛)。图(c)为比图(b)快速地趋近于目标位置的响应。图(d)为略有振荡但比图(c)更快速地趋近于目标位置。图(e)为上升迅速、振荡不容易停止,达到目标位置需要一定时间。图(f)为振荡不停止而且向远处无限增大(称为发散)。

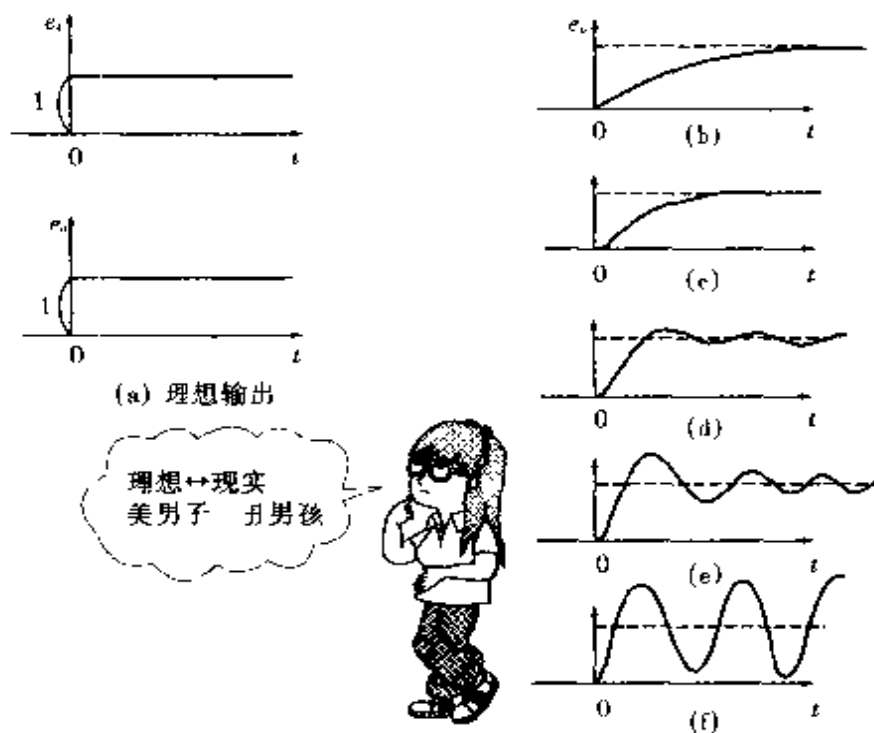


图4.20 e_o 对输入 e_i 的响应(I)

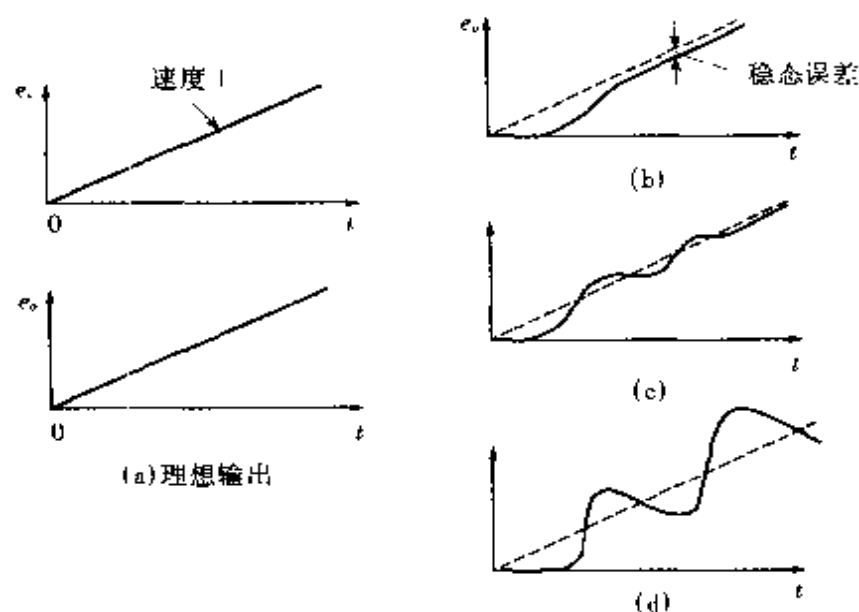
图 4.21 e_o 对输入 r 的响应 (II)

图 4.21 示出了目标值为以一定速度移动的指令时, 理想情况下希望输出完全跟踪输入, 如图 4.21(a) 所示。图 4.21(b) ~ (d) 为实际可能的输出。图 (b) 为缓慢趋近于目标值的响应; 图 (c) 为经过几次振荡而快速趋近于目标值的响应; 图 (d) 为过份振荡而发散的响应。图 (b) 与图 (c) 中存在稳态误差。

下面讨论外部扰动作用时的系统响应, 扰动是一种来自外部的对控制系统的干扰作用。图 4.22 所示的用直流电动机进行位置控制时, 假定加到直流电动机的直流电压因电源电压的突然变

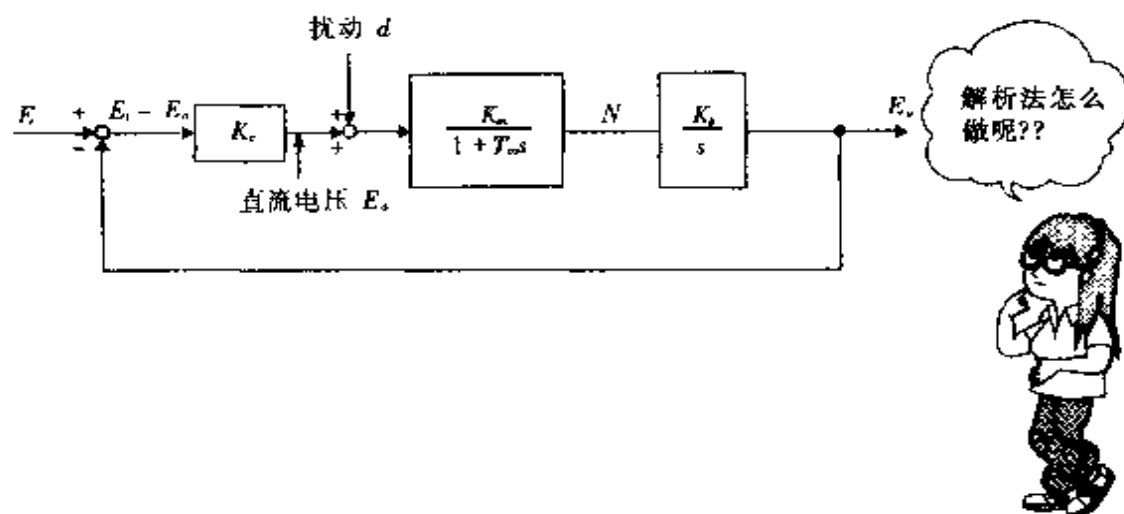


图 4.22 扰动

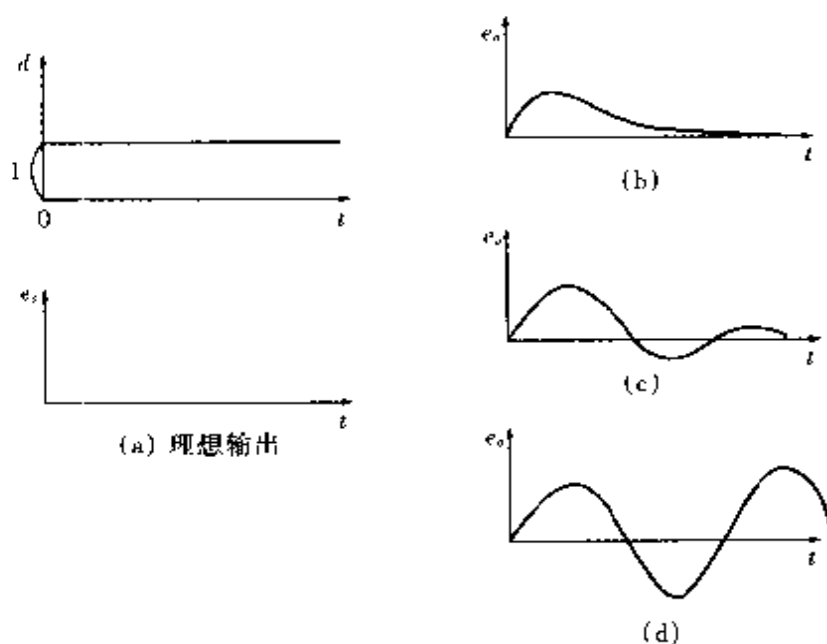


图 4.23 系统对扰动的响应

化而增加了一个阶跃波,以这个阶跃波作为外部扰动 d ,在理想情况下,外部扰动 d 作用时,系统输出 e_o 应完全不受影响[图 4.23 (a)]。但实际上,输出 e_o 将引起如图 4.23(b), (c), (d) 所示的变化。图(b)为不振动而缓慢衰减;图(c)为边振动边衰减;图(d)为持续振荡并发散。

图 4.20(f)、图 4.21(d) 和图 4.23(d) 所示响应的实际值是一边振荡一边远离目标值。这种响应是不稳定的,没有实用价值。系统能否稳定工作及稳定的充分必要条件将在第 5 章“稳定性判别法”中述及。

经过充分的时间后实际值与目标值是否一致,如果偏离的话,所允许偏离的程度叫做**稳态误差**,设计时应作为必要的指标给出。涉及稳态误差的系统稳态特性问题将在第 6 章中述及。

如果系统反复振荡,需要相当长的时间才能达到稳定状态,那么,即使稳态误差很小也不能说是好的控制。表示振荡衰减快速程度的**相对稳定性**或**衰减性**也必须作为指标给出。在图 4.20 中,当实际值开始上升,并向目标值接近时,到达目标值的快速程度叫做**快速性**,反映了系统快速反应的能力,也是一个动态性能

指标。上述衰减性,快速性等作为系统的动态特性将在第 7 章中介绍。

第5章

稳定性判别法



5.1 稳定与不稳定

以第4章中直流电动机的机器人位置控制为例讨论一下判别系统稳定与否的方法。由图4.18求得的方框图重新示于图5.1。其中,直流电动机的传递函数 $K_m/(1+T_ms)$ 与齿轮传送螺杆的传递函数 K_p/s 合二为一。从表示目标位置的输入电压 E_i 到表示实际位置的输出电压 E_o 的传递函数如图4.19所示,现重写如下:

$$W_c = \frac{E_o}{E_i} = \frac{K_c K_m K_p}{(1+T_ms)s} \bigg/ \left[1 + \frac{K_c K_m K_p}{(1+T_ms)s} \right] \quad (5.1)$$

传递函数 W_c 称为闭环传递函数。把反馈回路打开时,传递函数 W_o 为 K_c 与 $K_m K_p/(1+T_ms)s$ 的乘积:

$$W_o = K_c \frac{K_m K_p}{(1+T_ms)s} \quad (5.2)$$

称 W_o 为开环传递函数。

当式中常数 K_c 、 $K_m \cdot K_p$ 和时间常数 T_m 分别取下列数值时

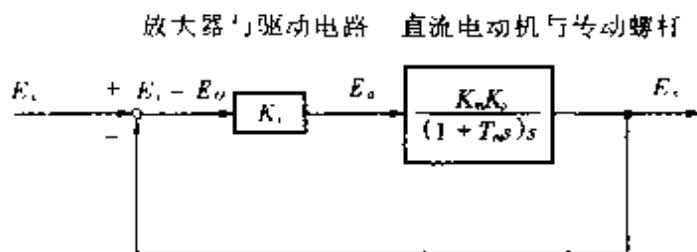


图 5.1 直流电动机位置控制

$$K_i = \frac{3}{4}, \quad K_m K_f = 1, \quad T_m = \frac{1}{4} \quad (5.3)$$

闭环传递函数 W_c 为:

$$W_c = \frac{3/4}{\left(1 + \frac{1}{4}s\right)s} \left/ \left[1 + \frac{3/4}{\left(1 + \frac{1}{4}s\right)s} \right] \right. = \frac{3}{s^2 + 4s + 3} \quad (5.4)$$

开环传递函数 W_o 为:

$$W_o = \frac{3/4}{\left(1 + \frac{1}{4}s\right)s} \quad (5.5)$$

表示实际位置的输出电压 $E_o = W_c E_i$ 。表示目标位置的电压 E_i 为 $E_i = 1/s$ 时(即 e_i 为单位高度的阶跃波形 $e_i = u(t)$ 时),输出电压 E_o 为:

$$E_o = W_c E_i = \frac{3}{s^2 + 4s + 3} \cdot \frac{1}{s} \quad (5.6)$$

将式(5.6)用部分分式展开,设以 $1/s$ 、 $1/(s+3)$ 、 $1/(s+1)$ 为分母的各项部分分式的待定系数分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 ,则输出电压 E_o 为:

$$\begin{aligned} E_o &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s+1} = \frac{A_1(s+3)(s+1) + A_2s(s+1) + A_3s(s+3)}{s(s+3)(s+1)} \\ &= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (4A_1 + A_2 + 3A_3)s + 3A_1}{s(s+3)(s+1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

由于式(5.7)与式(5.6)相等,将二式的分子进行比较,可以求得 $A_1 = 1$ 、 $A_2 = 1/2$ 、 $A_3 = -3/2$ 。因此式(5.7)又可表示为

$$E_o = \frac{1}{s} + \frac{1/2}{s+3} + \frac{-3/2}{s+1} \quad (5.8)$$

利用表 4.1 对式(5.8)取拉氏逆变换,即可求得时域的解答。

| s -频域 | 拉氏逆变换 | t -时域 |
|------------------------------|-------|----------------------------|
| E_o | | e_o |
| $\frac{1}{s}$ | | $u(t)$ |
| $\frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$ | | $\frac{1}{2} e^{-3t} u(t)$ |
| $-\frac{3}{2} \frac{1}{s+1}$ | | $-\frac{3}{2} e^{-t} u(t)$ |

其结果,表示实际位置的输出电压 e_o 为:

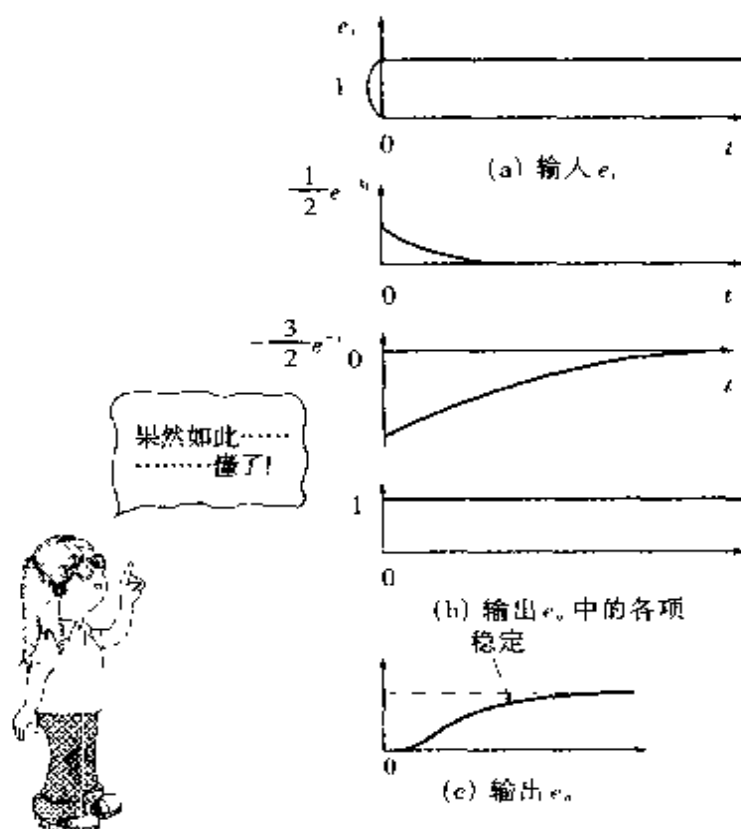
$$\begin{aligned}
 e_o &= u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t) \\
 &= u(t) \left(1 + \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-t} \right)
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

或

$$e_o = 1 + \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-t} \quad (t \geq 0) \quad (5.10)$$

式(5.10)的波形如图 5.2 所示。图 5.2(a)为输入电压 e_i ;图 5.2(b)表示式(5.10)的三项中各分量的变化;图 5.2(c)为三个分量合成后的输出电压 e_o 。三个分量随时间全部收敛于常数值 0 或 1,三个分量合成起来的输出电压也是收敛的。三个分量 $(1/2) e^{-3t}$ 、 $-(3/2) e^{-t}$ 、 $1 = e^{0t}$ 中用小方框围起来的部分全部小于或等于 0。可见若小方框中全部小于或等于 0 则输出收敛,即输出稳定。因此上述位置控制系统是稳定的。假如三个分量中有一项的小方框中的数字大于 0,则输出将无限变大而发散,这时的系统不稳定。例如,在图 5.2 中,若用 $(1/2) e^{3t}$ 来代替 $(1/2) e^{-3t}$,系统就是发散的,如图 5.3 所示。

如果令式(5.1)的传递函数 W_c 的分母为 0,即令式(5.4)中的传递函数 $W_c = 3/(s^2 + 4s + 3)$ 的分母为 0,则

图 5.2 输入 e_i 与输出 e_o

$$s^2 - 4s + 3 = (s + 3)(s + 1) = 0 \quad (5.11)$$

可以求出其两个根 $s_1 = -3$ 、 $s_2 = -1$, 这两个根恰好就是小方框中围起来的数($s=0$ 的根这里未出现)。由于式(5.11)的两个根全部为小于 0 的数, 因此可以说系统是稳定的。称式(5.11)为特征方程, 称特征方程的根为特征根。

MEMO

对单位阶跃波形响应(指数响应)时:

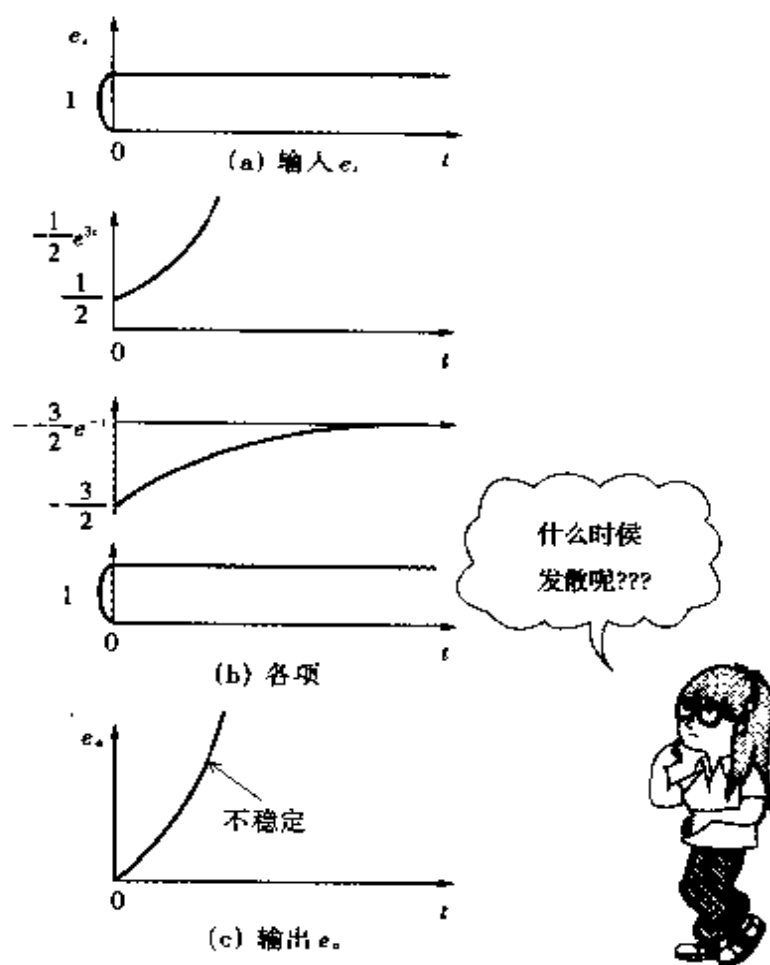
输出达到一定值 \Leftarrow 收敛 \Longleftrightarrow 稳定

输出无限变大 $\Leftarrow \Rightarrow$ 发散 $\Leftarrow \Rightarrow$ 不稳定

将特征方程(5.11)中的第 2 项由 $4s$ 变为 $2s$ 时, 情况会怎样呢? 这时的方程为

$$s^2 + 2s + 3 = (s + 1 + j\sqrt{2})(s + 1 - j\sqrt{2}) = 0 \quad (5.12)$$

其特征根为复数, 即 $s_1 = -1 + j\sqrt{2}$ 、 $s_2 = -1 - j\sqrt{2}$ 。输出电压 e_o

图 5.3 输入 e_i 与输出 e_o

中包含三项, 即: $e^{0t} = 1$ 、 $e^{(-1+j\sqrt{2})t} = e^{-t}e^{j\sqrt{2}t}$ 、 $e^{(-1-j\sqrt{2})t} = e^{-t}e^{-j\sqrt{2}t}$, 将三者叠加起来, 得

$$e_o = A_1 \times 1 + A_2 e^{-t} e^{j\sqrt{2}t} + A_3 e^{-t} e^{-j\sqrt{2}t} \quad (5.13)$$

式中 $A_1 (=1)$ 、 A_2 、 A_3 为适当的常数。式 (5.13) 的波形示于图

MEMO

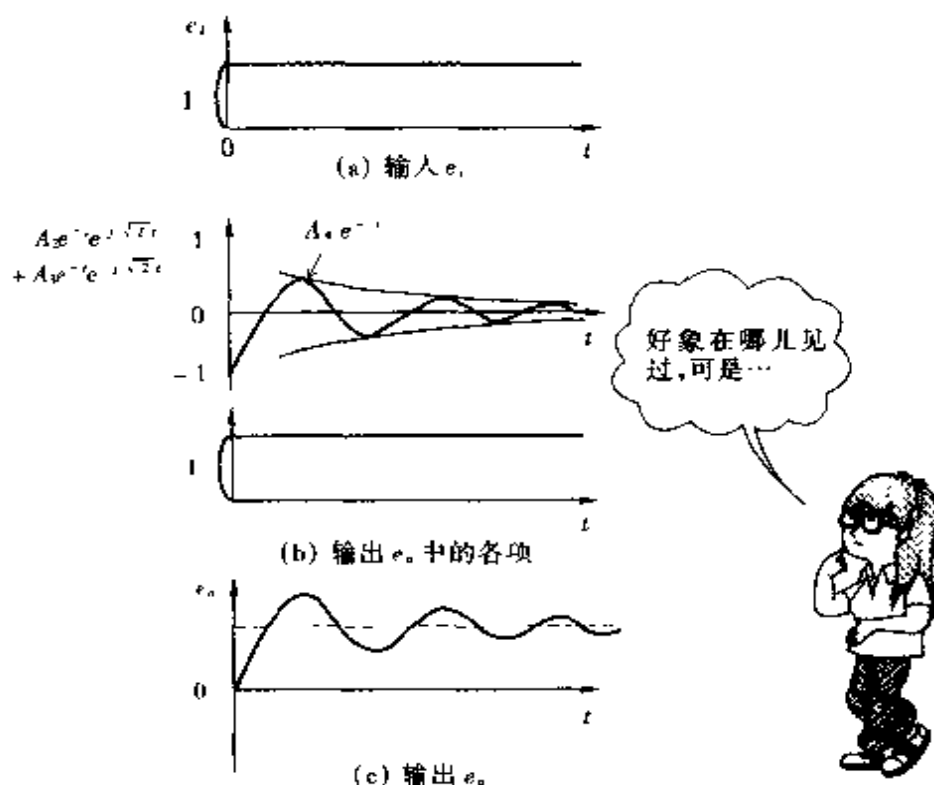
$as^2 + bs + c = 0$ 的解为 ($a \neq 0$)

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, s_1, s_2 为复数

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (j \text{ 表示虚数})$$

所谓复数是由实数 x 和虚数 jy 组成的数, 记为 $x + jy$ 。

图 5.4 输入 e_i 与输出 e_o

5.4。由图 5.4 可知,式(5.13)的第 2 项与第 3 项的合成曲线将在由 $A_2 e^{-t}$ 和 $-A_2 e^{-t}$ (A_2 为常数)界定的包络线之间振荡并随时间逐渐趋近于 0。显然,式(5.13)的第 1 项将收敛于 1。因此,特征根为复数时,复数根的实部(本例为 e^{-1t} 中的 -1)小于 0,系统是稳定的。当复数根的实部为 0 时, $e_o = A_1 + A_2 e^{j\sqrt{2}t} + A_3 e^{-j\sqrt{2}t}$, 其响应曲线如图 5.5(a) 所示。由于始终以一定的幅值持续振荡而不衰减,因此是不稳定的。复数根的实部为正数时,例如 $e_o = A_1 + A_2 e^{t} e^{j\sqrt{2}t} + A_3 e^{t} e^{-j\sqrt{2}t}$ 时,其响应曲线如图 5.5(b) 所示,由于振荡的幅值愈来愈大,因此也是不稳定的。

一般情况下,特征根中实数根和复数根同时存在,可令闭环传递函数 W 的分母为 0,由下式求得 s :

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0 \quad (5.14)$$

式(5.14)为特征方程式, $s = s_1, s_2, \dots, s_n$ 为特征根。当特征根的实部全部为负数时,输出中所有项均收敛于某一定值,系统是稳定的。

NOTE

$$e^{j\sqrt{2}t} = \cos\sqrt{2}t + j\sin\sqrt{2}t$$

$$e^{-j\sqrt{2}t} = \cos\sqrt{2}t - j\sin\sqrt{2}t$$

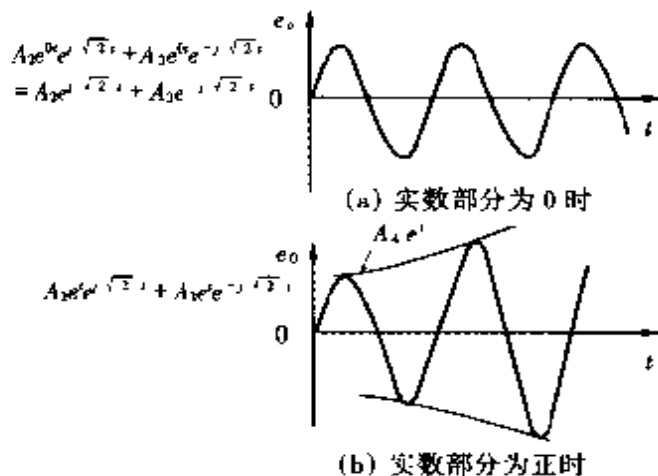


图 5.5 不稳定响应

5.2 赫尔维茨(Hurwitz)稳定性判别法

特征方程的次数(例如,特征方程 $s^{12} + 4s + 3 = 0$ 的次数为 2)较低时,可以简单地求取特征根,如果特征根的实部全部为负数就可以说系统是稳定的。但是当特征方程的次数较高时(例如 $s^{12} + 2s^9 + 5s^8 + \cdots + 6s + 7 = 0$)求取特征根就不那么简单了。这时可以采用劳斯法或赫尔维茨法,毋须求解特征方程式而通过对特征方程系数的分析来判别系统的稳定性。

由于劳斯法和赫尔维茨法的原理相同,这里仅就赫尔维茨稳定性判别法说明如下。

设特征方程式为 n 次方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (5.15)$$

特征方程的根全部具有负实部(即系统稳定)的充分必要条件是

- (1) 所有系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 为非零且符号相同;
- (2) 下面各行列式 $H_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 全部为非零且符号相同(其中 H_i 称为赫尔维茨行列式)。

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_i \end{vmatrix} \quad (5.16)$$



例如,当 $n=2$ 时赫尔维茨行列式为

$$H_1 = a_1 \quad (5.17)$$

当 $n=3$ 时,赫尔维茨行列式为

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 \quad (5.18)$$

当 $n=4$ 时,赫尔维茨行列式为

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

下面举例说明赫尔维茨稳定性判别法的应用。图 5.6 为汽车的速度自动控制系统。首先设置速度的给定值,由转速表检测汽车的实际速度,并与给定速度进行比较,控制节流操作器(直流电动机)使偏差减小。节流阀开闭使流入发动机的汽油量变化、发动机的输出变化使速度向趋近于给定值的方向变化。图 5.7 所示的方框图中,节流操作器为二阶惯性环节 $K/[s(s+1)]$ 。根据操作器输出角 θ 的不同,发动机的输出改变,使车速改变,这部分的传递函数为 $10/(5s+1)$ 。为了使汽车速度自动控制系统稳定,需要确定节流操作器的增益 K 的范围。

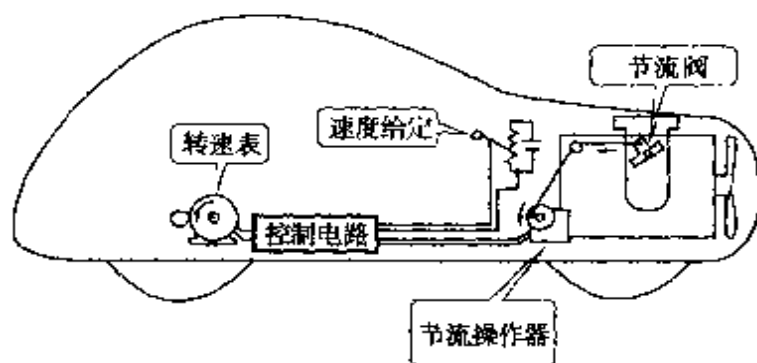


图 5.6 自动速度控制系统

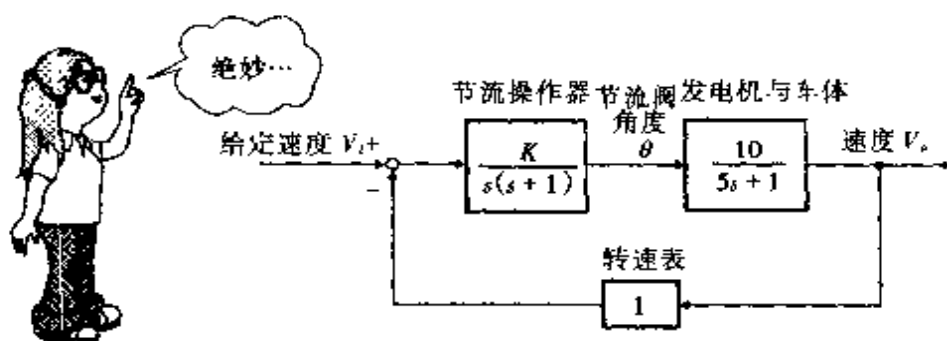


图 5.7 自动速度控制系统方框图

系统闭环传递函数 W_c 为:

$$W_c = \left[\frac{K}{s(s+1)} \frac{10}{5s+1} \right] / \left[1 + \frac{K}{s(s+1)} \frac{10}{5s+1} \right] \quad (5.20)$$

令特征方程式 (W_c 的分母) 为 0, 则

$$1 + \frac{K}{s(s+1)} \frac{10}{5s+1} = 0 \rightarrow s(s+1)(5s+1) + 10K = 0 \quad (5.21)$$

整理上式得

$$5s^3 + 6s^2 + s + 10K = 0 \quad (5.22)$$

与式(5.15)比较, 各项系数为 $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 10K$ 。由于 $n = 3$ 故为 3 次方程式。采用赫尔维茨稳定判别法。由条件(1), 全部系数为非 0 且符号相同, 可知必须 $K > 0$ 。由条件(2)的式(5.18)可求得赫尔维茨行列式为

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= a_1 = 6 > 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10K \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 50K > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

由式(5.23)可解得 $K < 6/50 = 3/25$ 。综合条件(1)、(2)可知,当 $0 < K < 3/25$ 时,上述系统是稳定的。

那么假定 $K < 0$ 的话,系统就变成不稳定了吗?由转速表检测出汽车的实际速度 V_o ,与给定速度 V_i 相比较。假定速度 V_i 大于速度 V_o ,为了提高实际速度 V_o ,节流阀的角度 θ 需要进一步变大。但是节流阀的角度 θ 为 $\theta = [K/s(s+1)](V_i - V_o)$,由于 $V_i - V_o > 0$,当增益 K 为负时, θ 角为负。节流阀的角度为负意味着角度 θ 的减小。角度 θ 减小使发动机的输出减小,导致实际速度 V_o 下降,使实际速度与给定速度的偏差增大。实际速度不但没有提高到给定值,反而最终要下降至 0。这就意味着系统是不稳定的。

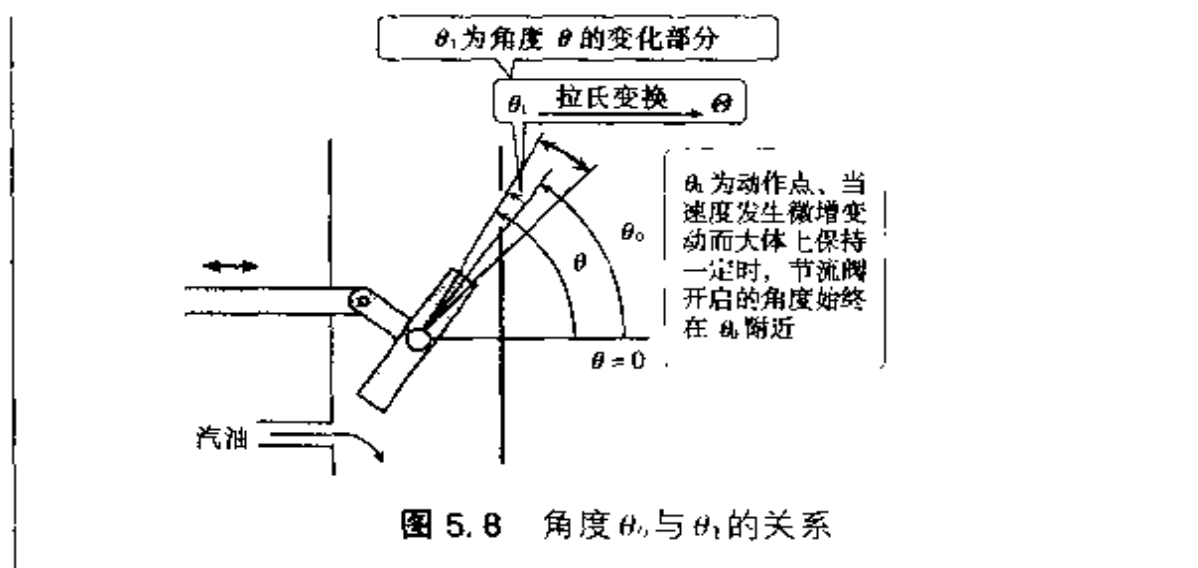
那么,如果增益 $K > 3/25$ 时又会怎样呢?检测出的实际速度 V_o 与给定速度 V_i 比较的结果,速度 V_o 低于速度 V_i ,通过系统调节应使实际速度 V_o 提高。当增益 K 很大时,即使速度差 $V_i - V_o$ 很小,节流操作器也会有很大的反应,使节流阀开得很大。其结果使速度 V_o 过高,此时速度差 $V_i - V_o$ 变负,又使节流阀关闭过小,使速度 V_o 变得比原来更小,即 $V_i - V_o$ 变大,使节流阀门开得更大。这样一来,实际速度将围绕给定速度振荡并且振幅越来越大,这就意味着系统是不稳定的。

NOTE

应用 3.1 节中介绍的非线性系统的线性化技术。当变量 θ 围绕动作点 θ_0 作微增变化时,变量 θ 为动作点 θ_0 与增量 θ_1 之和,如图 5.8 所示,记作

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \quad (5.24)$$

现在的问题在于增量角 θ_1 。取拉氏变换将时域的 θ_1 变换为频域的 Θ 。作为特例,当 $\theta_0 = 0$ 时, $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_1$,则变量 θ 的拉氏变换就是 Θ 。

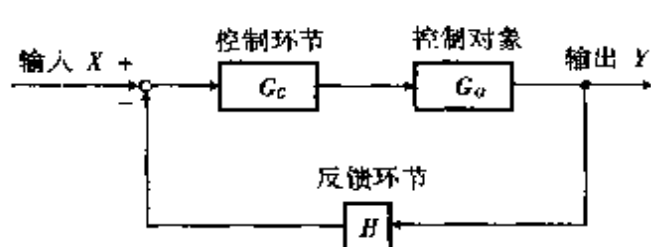


5.3 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判别法

赫尔维茨法是利用特征方程式的系数来进行稳定性判别的, 在讨论系统稳定性问题时是一种便利的方法。但是在研究稳定程度如何时就显得无能为力了。奈奎斯特稳定判别法不仅能够判定闭环系统是否稳定, 而且还可以帮助我们考察控制系统的相对稳定程度。这种方法只要根据式(5.2)所示的开环传递函数的矢量轨迹(第3.5节)就可以确定控制系统的稳定性。该方法的步骤如下:

(1) 图 5.9 所示的方框图中, 开环传递函数为 $G_c G_o H$ 。在开环传递函数

奈奎斯特判图中使用的是开环传递函数



只要这个掌握好后面的...

图 5.9 控制系统的方框图

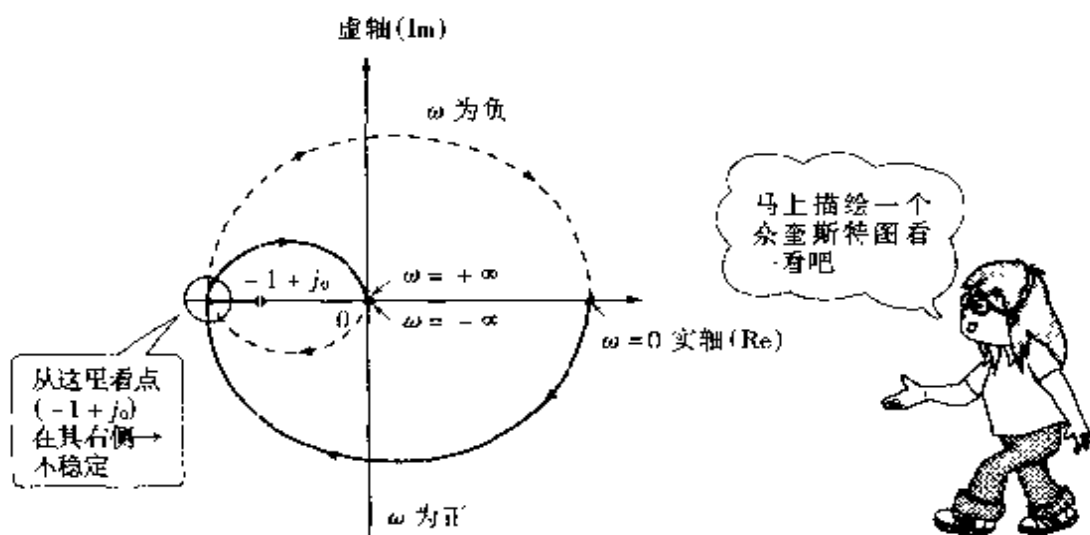


图 5.10 奈奎斯特图

$G_c G_o H$ 中用 $j\omega$ 替换 s , 让角频率 ω 从 0 变化到 $+\infty$ (无穷大) 并描绘出其矢量端点的轨迹, 称为奈奎斯特图, 如图 5.10 所示。可以看出从 $\omega=0$ 到 $\omega=+\infty$ 的轨迹与从 $\omega=0$ 到 $\omega=-\infty$ 的轨迹相对实轴为对称。

(2) 从轨迹与实轴的交点处看, 若点 $(-1 + j0)$ 在其左侧, 闭环系统是稳定的, 若在其右侧系统是不稳定的。若轨迹通过点 $(-1 + j0)$ 则处于稳定极限。图 5.10 中, 点 $(-1 + j0)$ 在其右侧, 因此闭环系统是不稳定的。

第 5.2 节中述及的汽车速度自动控制系统的奈奎斯特图如图 5.11 所示。当节流操作器的增益为 $K = 3/25$ 时, 轨迹通过点 $(-1 + j0)$, 系统处于稳定极限; 增益 $K = 3/50$ 时, 点 $(-1 + j0)$ 在轨迹与实轴交点的左侧, 系统是稳定的; 增益 $K = 6/25$ 时, 点 $(-1 + j0)$ 在交点的右侧, 系统是不稳定的。增益 K 从 $3/50$ 增加时, 越接近 $3/25$ 越容易引起振荡; 在 $K = 3/25$ 时, 以一定的幅值持续振荡; 从 $K = 3/25$ 处开始, 增益 K 稍有增加, 系统则开始发散, 增益 K 越大不稳定程度越严重。

利用奈奎斯特图可以了解系统的稳定程度或不稳定程度, 因此可以用来评价系统的相对稳定性。

最后, 以汽车行驶为例说明提高增益 K 使系统不稳定的情况。初学者在道路上驾车行驶时, 稍微偏离方向一点也吓一跳, 同

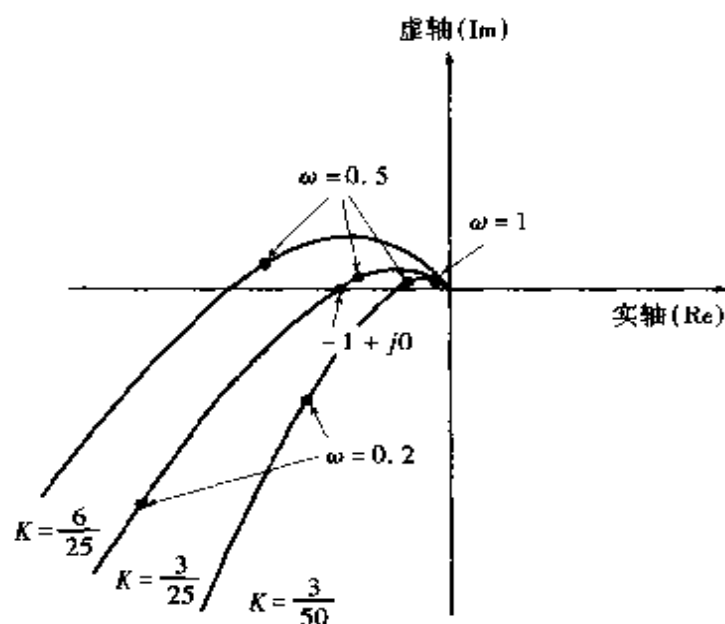
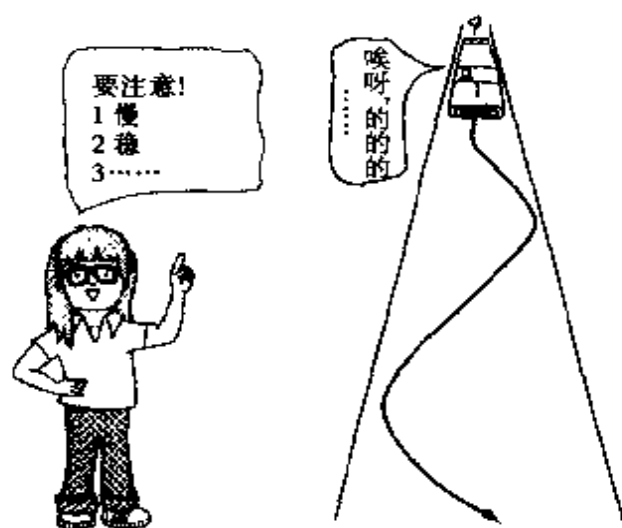


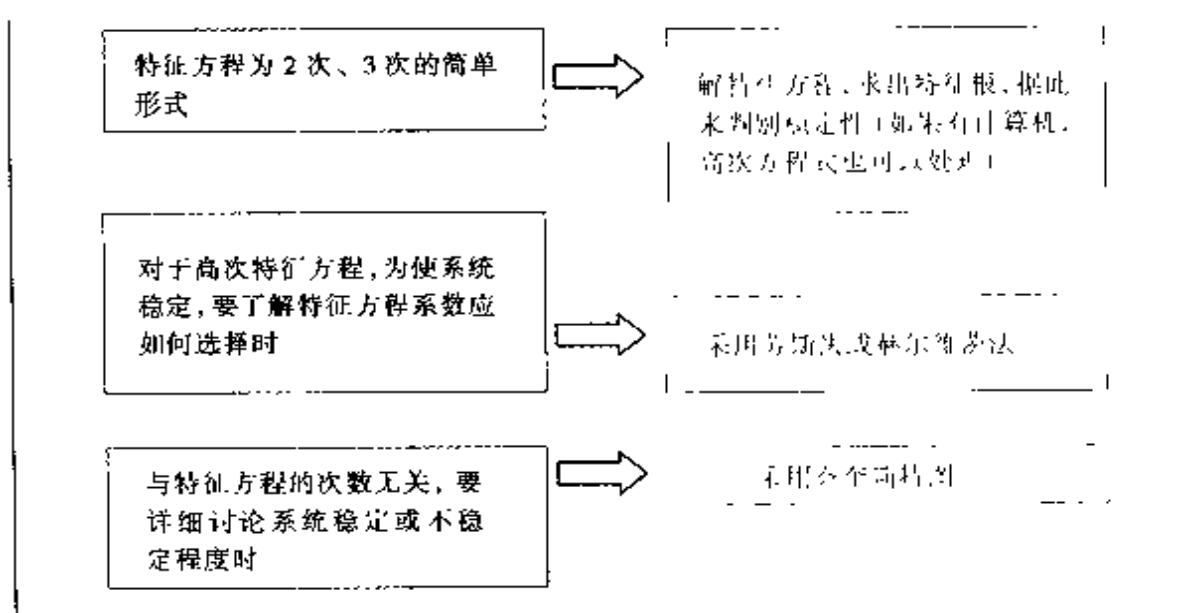
图 5.11 汽车速度自动控制系统的奈奎斯特图

时会用力向反方向打方向盘（相当于增益 K 很大）想使车回到原来的方向，谁想到方向盘打过了头，汽车更大地偏向另一方向。这样慌里慌张地来回打方向盘，一次比一次更过头，最后结果就是冲出马路。



NOTE

系统稳定性判别时，根据特征方程的不同可以分别采用不同的方法。



稳态特性(稳态误差)



6.1 目标值变化时的稳态误差

负反馈控制是能够使实际值限定在目标值附近变化的控制。因此,表示被控量与目标值之间偏差的稳态误差是一个重要指标。

仍以直流电动机机器人位置控制为例作进一步讨论。图 6.1 示出了上述控制系统的方框图。首先考虑以单位阶跃函数作为输入电压 e_i (位置的目标值) 的情况, 如图 6.2(a) 所示。这时所产生的误差称为稳态位置误差。所谓残余误差(offset)也就是稳态位置误差。

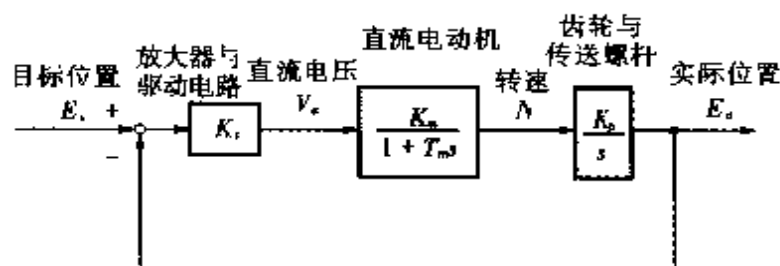


图 6.1 直流电动机位置控制方框图

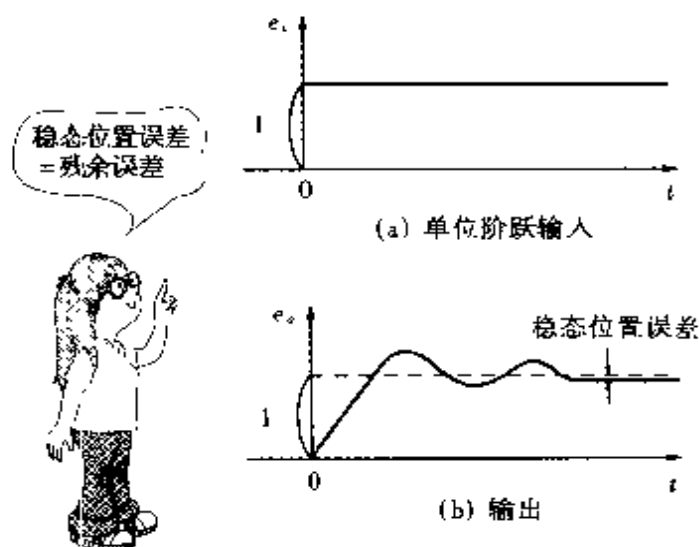


图 6.2 单位阶跃输入与输出

图 6.1 所示方框图的闭环传递函数 W_c 为:

$$\begin{aligned} W_c = \frac{E_o}{E_i} &= \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s} \bigg/ \left[1 + \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s} \right] \\ &= \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \end{aligned} \quad (6.1)$$

输入 E_i 与输出 E_o 之差为

$$\begin{aligned} E_i - E_o &= E_i - W_c E_i \\ &= (1 - W_c) E_i = \left[1 - \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \right] E_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

当输入为单位阶跃波形时 $e_i = u(t)$ 。从表 4.1 可知, 其拉氏变换为 $E_i = 1/s$ 。代入式(6.2)得

$$E_i - E_o = \left[1 - \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \right] \frac{1}{s} \quad (6.3)$$

差值电压 $e_i - e_o$ 的最终值(稳态值)为 s 趋近于 0 时的 $s(E_i - E_o)$ 的值, 即

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(E_i - E_o) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \right] = 0 \quad (6.4)$$

NOTE

$\lim_{s \rightarrow 0}$ 读作 limit, 表示当 s 趋近于 0 时的值。

由式(6.4)可知, 当 $s \rightarrow 0$ (即 $t \rightarrow \infty$) 时, 稳态位置误差为 0。

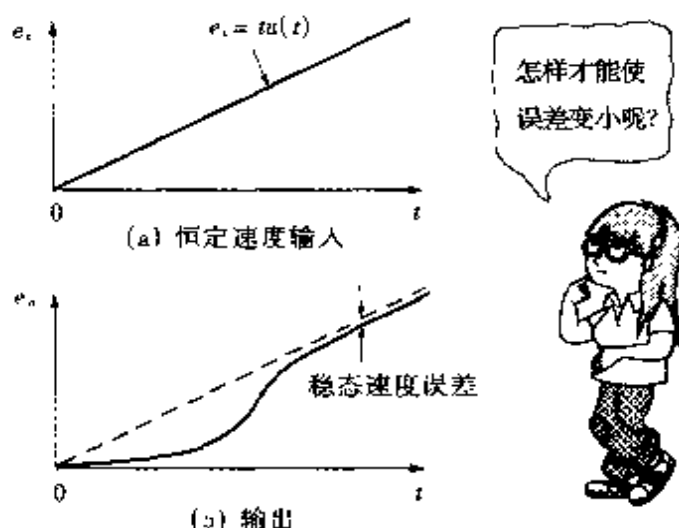


图 6.3 恒定速度误差

NOTE

- 图 6.2(a)所示的单位阶跃输入 e_i 及其拉氏变换:

$$e_i = u(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} E_i = \frac{1}{s} \quad (6.5)$$

- 图 6.3(a)所示的恒定速度输入 e_i 及其拉氏变换:

$$e_i = tu(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} E_i = \frac{1}{s^2} \quad (6.6)$$

- 图 6.4(a)所示的恒定加速度输入 e_i 及其拉氏变换:

$$e_i = \frac{t^2}{2} u(t) \xrightarrow{\text{拉氏变换}} E_i = \frac{1}{s^3} \quad (6.7)$$

下面求取图 6.3(a)所示的恒定速度输入时的稳态误差, 该误差称为稳态速度误差。

由式(6.2)和式(6.6), 得

$$E_i - E_o = \left[1 - \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \right] \frac{1}{s^2} \quad (6.8)$$

稳态速度误差可按下式求出:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(E_i - E_o) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + T_m s)s^2}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \frac{1}{s^2} \quad (6.9)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + T_m s}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} = \frac{1}{K_c K_m K_p} \quad (6.10)$$

可见稳态速度误差不为0而等于 $1/(K_c K_m K_p)$ 。由此可知,为减小系统的稳态速度误差应取各环节增益 $K_c K_m K_p$ 为较大值。

当目标值为一定值的单位阶跃输入时,可以使实际值与目标值一致。但是当目标值为恒定速度输入并使实际值跟踪目标值时,会产生 $1/(K_c K_m K_p)$ 的延迟。因此控制系统进行调节时,只能是尽量减小实际值与目标值之间的偏差。

当恒定加速度输入时,其稳态误差如何呢(图6.4)?由式(6.2)和式(6.7)得

$$E_i - E_o = \left[1 - \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \right] \frac{1}{s^3} \quad (6.11)$$

稳态恒定加速度误差可由下式求出:

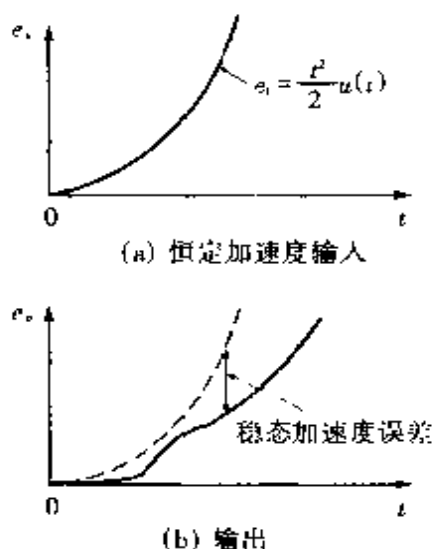


图 6.4 恒定加速度的输入与输出

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} s(E_i - E_o) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + T_m s)s^2}{(1 + T_m s) + K_c K_m K_p} \frac{1}{s^3} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \frac{1}{s} = +\infty \text{ (无穷大)}
 \end{aligned}
 \quad (6.12)$$

由式(6.12)可知,这时的稳态恒定加速度误差为无穷大。因此在使用直流电动机进行机器人位置控制时,对目标值的快速变化进行快速跟踪是不可能的。

6.2 对外部扰动的稳态误差

前面讨论了目标值变化时的稳态误差,下面将讨论系统发生扰动时的稳态误差。

第4.4节曾经得出结论,即使出现外部扰动,对负反馈控制系统的输出也不会产生任何影响,说的就是由扰动引起的稳态误差为0,这是我们所希望的。

这里仍以使用直流电动机的机器人位置控制为例加以说明。把图4.22所示的出现扰动时的方框图再次示于图6.5。为了

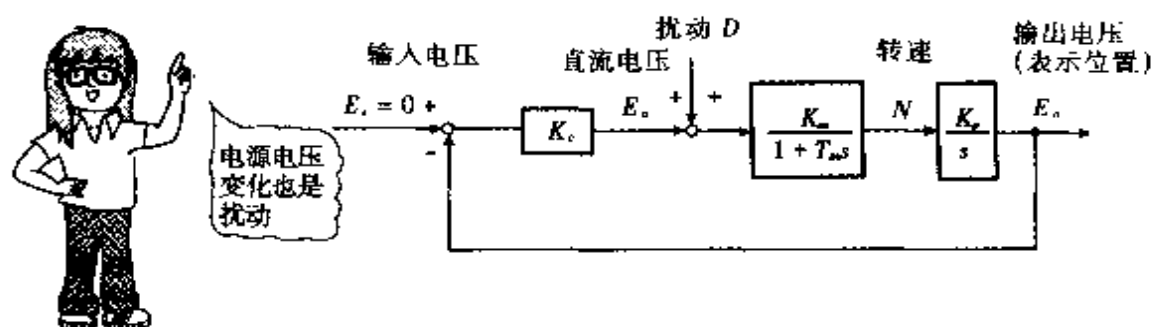


图 6.5 考虑扰动时的方框图

分析扰动 D 对输出电压 E_o 的影响,需要求出从扰动 D 到输出电压 E_o 的传递函数。讨论扰动问题时,应令输入电压 E_i 为0,而以扰动 D 作为输入。这样,图6.5将变换成图6.6。利用表4.3并加以整理,从扰动 D 到输入电压 E_o 的传递函数 W_c 为

$$W_c = \frac{E_o}{D} = \frac{K_m K_p}{(1 + T_m s)s} \left/ \left[1 + \frac{K_c K_m K_p}{(1 + T_m s)s} \right] \right. \quad (6.13)$$

进行整理后, 得出

$$W_e = \frac{E_o}{D} = \frac{K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \quad (6.14)$$

当扰动为单位阶跃输入时 $D = 1/s$, 代入式 (6.14), 则输出电压 E_o 为:

$$E_o = \frac{K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \frac{1}{s} \quad (6.15)$$

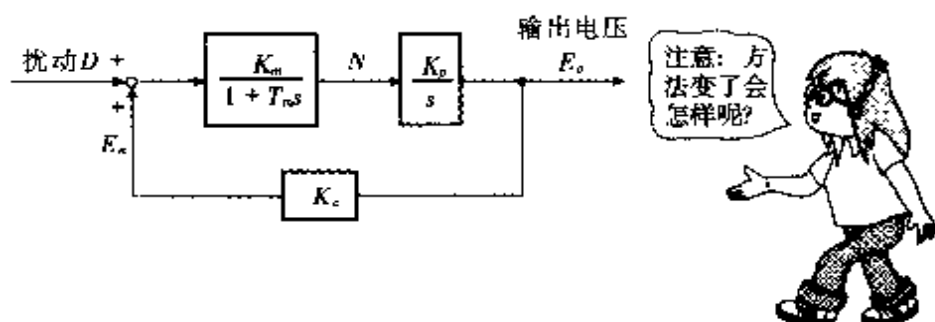


图 6.6 图 6.5 方框图的变形

由表 4.1, 输出电压 e_o 的最终值为

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E_o = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_m K_p}{(1 + T_m s)s + K_c K_m K_p} \frac{1}{s} = \frac{1}{K_c} \quad (6.16)$$

由式 (6.16) 可知, 外部扰动为单位阶跃输入时的稳态位置误差并非为 0 而是 $1/K_c$ (图 6.7)。要减小扰动引起的稳态位置误差必须增大 K_c 。

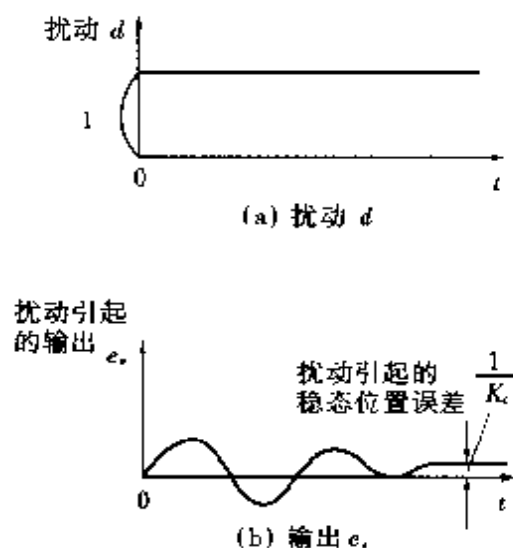


图 6.7 扰动引起的稳态误差

要想减小稳态误差, 只需增大放大器与驱动电路的增益 K_c , 而增益 K_m 、 K_p 的改变则不起作用。

增益 K_c 的增大, 固然可以减小稳态误差, 然而正如第 5 章所述, 增益的增大还有导致系统不稳定的危险。那么增益允许增大到何种程度呢? 研究一下系统的相对稳定性就可以知道了。这个问题将在下一章中介绍。

第 7 章

动 态 特 性



正如第 6 章结束时所讨论的, 增大控制环节的增益 K_c 可以减小稳态误差, 然而同时却被系统会变得不稳定所困扰。例如这种不稳定可能导致系统持续振荡而衰减很慢, 使达到稳态值需要很长的时间, 因而这种控制也是不成功的。

如果说系统的过份振荡是不适当的, 那么过份增大粘性摩擦系数让振荡停止, 使之达到稳态值同样需要较长的时间, 因此也是不可取的。所以, 研究系统稳定性问题时, 在讨论了稳态误差之后, 还必须研究系统的动态特性, 系统的动态特性主要指系统的相对稳定性与快速性。



7.1 基于动态响应法的评价与设计

7.1.1 $3/(s^2 + 2s + 3)$ 的阶跃响应

第 5 章讨论机器人位置控制时, 求得如图 7.1 所示的传递函

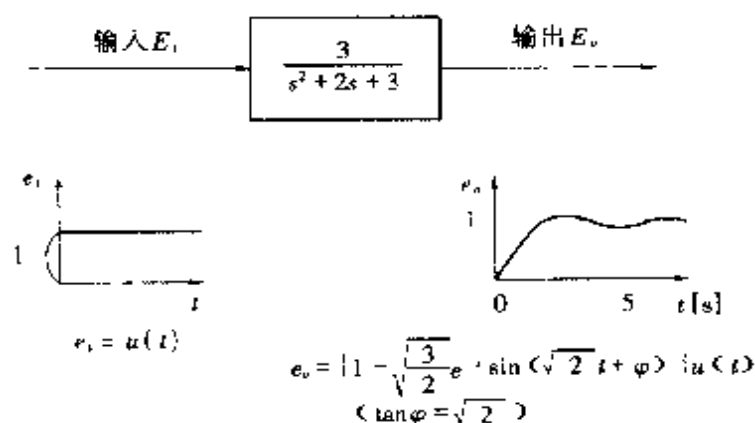


图 7.1 阶跃响应

数 $G = E_o / E_i = 3 / (s^2 + 2s + 3)$ 的阶跃响应。

E_i 为表示目标位置的输入电压, 取单位阶跃波形, 因此 $E_i = 1/s$ 。表示实际位置的输出电压 E_o 为:

$$E_o = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} E_i = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} \frac{1}{s} \quad (7.1)$$

特征方程式 $s^2 + 2s + 3 = 0$ 的根为 $s_1, s_2 = (-2 \pm \sqrt{4 - 12})/2 = -1 \pm j\sqrt{2}$ 。将式(7.1)用部分分式展开为

$$E_o = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1 - j\sqrt{2}} + \frac{A_3}{s + 1 + j\sqrt{2}} \quad (7.2)$$

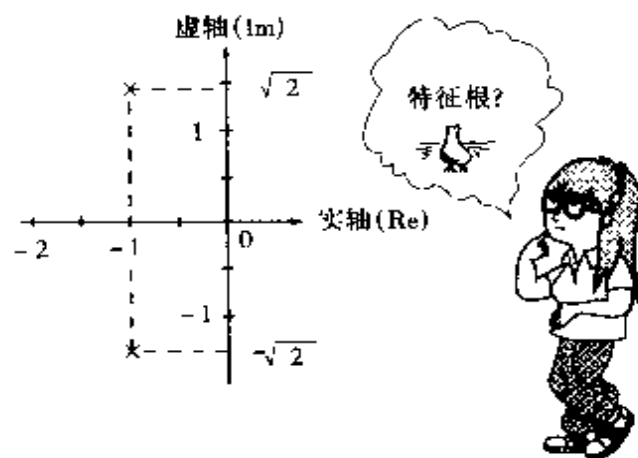


图 7.2 特征根在复平面上的位置

NOTE

求取待定系数 A_1 、 A_2 、 A_3 ，为此将式(7.2)通分并与式(7.1)进行比较

$$\frac{A_1(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})+A_2s(s+1+j\sqrt{2})+A_3s(s+1-j\sqrt{2})}{s(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})} = \frac{3}{(s^2+2s+3)s} \quad (7.3)$$

$$A_1(s^2+2s+3)+A_2[s^2+(1+j\sqrt{2})s]+A_3[s^2+(1-j\sqrt{2})s]=3 \quad (7.4)$$

可知

$$\left. \begin{aligned} s^2: A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ s: 2A_1 + A_2(1+j\sqrt{2}) + A_3(1-j\sqrt{2}) &= 0 \\ 1: 3A_1 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

由式(7.5)可求得 $A_1 = 1$, $A_2 = \left(-1 + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)/2$, $A_3 = \left(-1 - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)/2$

图 7.2 表示了特征根在复平面上的位置，如 NOTE 中所求出的 $A_1 = 1$ ，

部分分式展开

$$A_2 = \left(-1 + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)/2,$$

$$A_3 = \left(-1 - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)/2, \text{ 则式(7.2)变为}$$

$$E_o = \frac{1}{s} + \frac{-1 + j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} / (s+1-j\sqrt{2}) + \frac{-1 - j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} / (s+1+j\sqrt{2}) \quad (7.6)$$

根据表 4.1 作拉氏逆变换，各项为



$$\begin{aligned} \frac{-1+j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \frac{1}{s+1-j\sqrt{2}} &= \frac{-1+j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} e^{(-1+j\sqrt{2})t} u(t) \\ \frac{-1-j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \frac{1}{s+1+j\sqrt{2}} &= \frac{-1-j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} e^{(-1-j\sqrt{2})t} u(t) \end{aligned}$$

用以上时域中的各项替换后,式(7.6)变为

$$e_o = u(t) + \frac{-1+j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} e^{-t} e^{j\sqrt{2}t} u(t) + \frac{-1-j\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} e^{-t} e^{-j\sqrt{2}t} u(t) \quad (7.7)$$

其中, $e^{j\sqrt{2}t} = \cos\sqrt{2}t + j\sin\sqrt{2}t$, $e^{-j\sqrt{2}t} = \cos\sqrt{2}t - j\sin$, 将其代入式(7.7)并整理,则输出 e_o 为:

$$e_o = \left[1 - \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-t} \sin(\sqrt{2}t + \varphi) \right] u(t) \quad (7.8)$$

这里, $\tan \varphi = \sqrt{2}$ 。

7.1.2 阶跃响应的一般性讨论

输出 E_o 写成

$$E_o = \frac{b}{s^2 + as + b} E_i \quad (7.9)$$

时,可以用新的常数 ζ 和 ω_n 来代替常数 a, b ,即

$$\left. \begin{aligned} b &\Rightarrow \omega_n^2 \quad (\omega_n = \sqrt{b}) \\ a &\Rightarrow 2\zeta\omega_n \quad \left(\zeta = \frac{a}{2\omega_n} = \frac{a}{2\sqrt{b}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

其结果,式(7.9)可改写成

$$E_o = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} E_i \quad (7.11)$$

系统具有振荡特性时,若输入 e_i 为单位阶跃波形 ($e_i = u(t)$, $E_i = 1/s$),则输出 e_o 为:

$$e_o = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \right] u(t) \quad (7.12)$$

式中, $\tan \varphi = \sqrt{1-\zeta^2}/\zeta$ 。其响应曲线图 3.18 再次示于图 7.3。其中 T_d 为延迟时间; T_r 为上升时间; T_p 为峰值时间; T_s 为调节时间。 a_2/a_1 为振荡衰减比。振荡的振幅围绕 $e_o = 1.0$ 以指数 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 的规律衰减。振荡的角频率 ($= 2\pi f$) 为 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 。

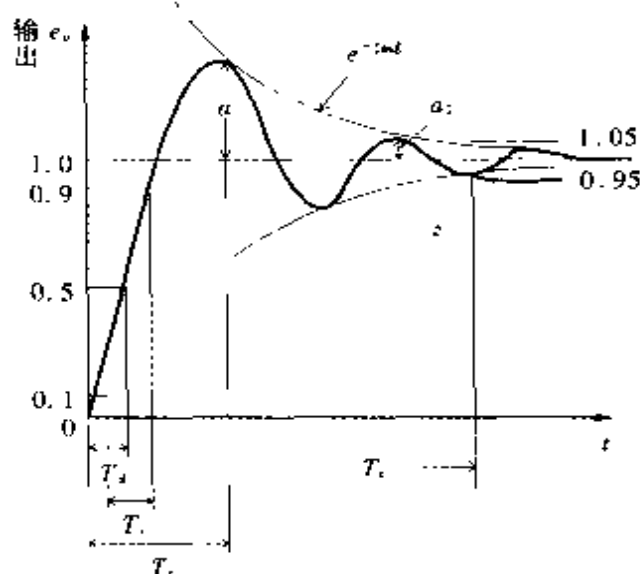


图 7.3 二阶振荡环节响应

由于振荡按 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 衰减, 因此 $\zeta\omega_n$ 越大衰减越快。对于相同的 $\zeta\omega_n$, 其中 ζ 大而 ω_n 小时角频率 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 较小, 结果两个相邻振幅之间的间隔变长, 如图 7.4 所示。与图 7.3 相比较, 振幅衰减比 a_2/a_1 变小。因此 ζ 愈大系统的相对稳定性 (即衰减性) 愈好。称 ζ 为阻尼系数。

NOTE

式 (7.12) 中, 系统不振荡时 ($\zeta > 1$), 输出 e_o 为:

$$e_o = 1 + \frac{1}{P_1 - P_2} (P_2 e^{P_2 t} - P_1 e^{P_1 t}) \quad (7.13)$$

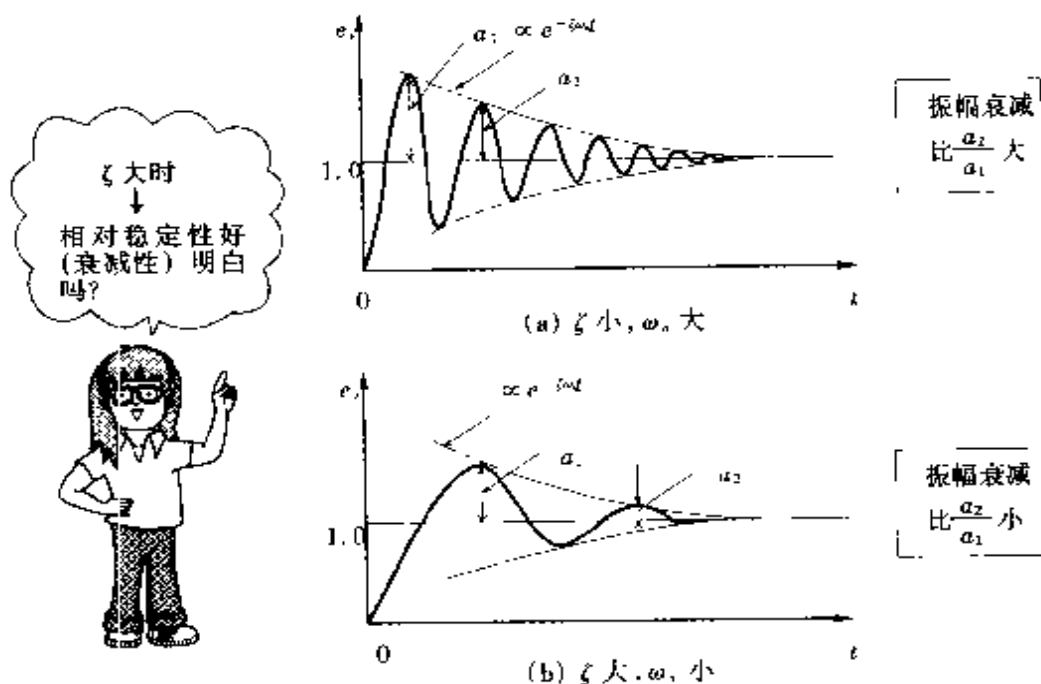
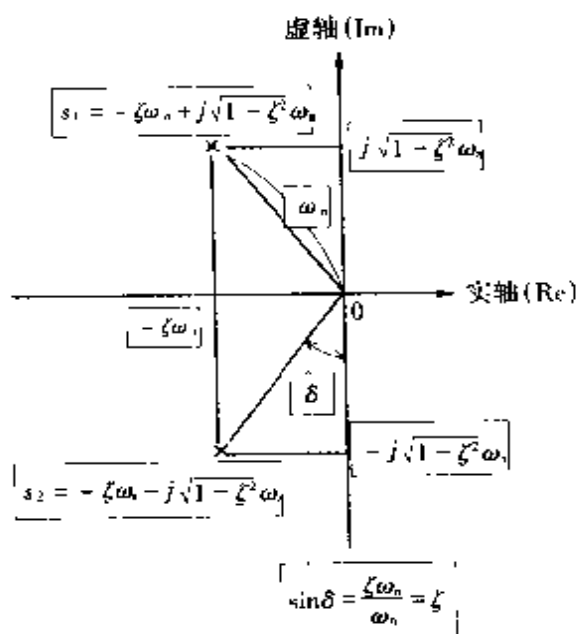
式中, $P_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$,

$$P_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

在考虑系统振荡的情况时, 当然希望振荡次数少些。

对振荡不能
过份抑制呢



图 7.4 $\zeta \omega_n$ 相同时图 7.5 特征根 s_1, s_2

另一方面,施加输入后,角频率越高输出上升得越快。由于 ω_n 增高时角频率 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 也随之增高,因此系统快速性指标可以由 ω_n 给出,它反映了系统输出上升并达到目标值的快慢程度。 ζ 越小 ω_n 越大,则系统的快速性越好。称 ω_n 为固有频率。

式(7.11)的特征方程为 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$, 求解其特征根为

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (7.14)$$

在复平面上表示特征根 s_1, s_2 时如图 7.5 所示。从原点 0 到特征根 s_1, s_2 的距离为 $\sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} = \omega_n$, 设根 s_1, s_2 与虚轴的夹角为 δ , 则 $\sin\delta = \zeta\omega_n / \omega_n = \zeta$ 。这样,由角 δ 就可以知道阻尼系数 ζ 的大小,角 δ 越大阻尼系数 ζ 就越大。因此从提高系统相对

稳定性(衰减性)的角度来说希望角 δ 大些。另外,由根 s_1, s_2 的虚部的大小 $\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$ (表示角频率)可以知道系统的快速性。要想有良好的快速性,应增大特征根的虚部,即让根 s_1, s_2 向离开实轴的方向移动。使衰减性和快速性两方面同时满足的根的存在范围如图 7.6 的斜线部分所示。

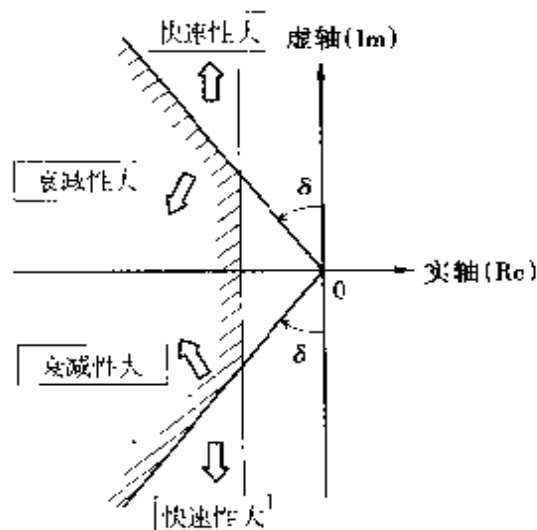


图 7.6 衰减性与快速性

一般情况下,角 δ 的取值范围为:

○对于随动控制(目标值变化的控制,也称为伺服问题):

$\delta = 37^\circ \sim 53^\circ$ (用阻尼系数 ζ 表示时, $\zeta = 0.6 \sim 0.8$)

○对于恒值控制(目标值为恒值的控制,也称为稳定问题):

$\delta = 12^\circ \sim 24^\circ$ (用阻尼系数 ζ 表示时, $\zeta = 0.2 \sim 0.4$)

7.1.3 基于动态响应法的设计

下面仍以使用直流电动机的机器人位置控制为例,确定一下满足给定动态指标时的系统参数。图 7.7 示出了图 4.18 给出的直流电动机机器人位置控制的方框图。现在的问题是,求取满足下列动态指标的系统增益 $K_e K_m K_p$ 及时间常数 T_m 。

阶跃响应时的动态指标:

超调量: $M \leq 1.1$

调节时间 (e_o 在 $0.95 \leq e_o \leq 1.05$ 时的时间): $T_s \leq 2$ 秒

图 7.8 示出了满足上述动态指标的阶跃响应。为了得到图 7.8 所示的阶跃响应,需要讨论式(7.12)中阻尼系数 ζ 和固有频率 ω_n 为何值。

由式(7.12),输出电压 e_o 的最大值 M 为(推导过程省略):

$$M = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (7.15)$$

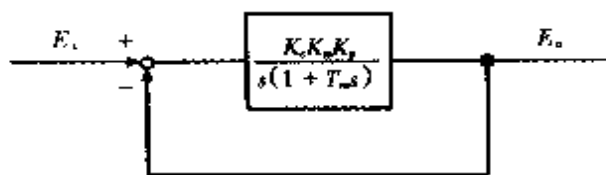


图 7.7 直流电动机的位置控制

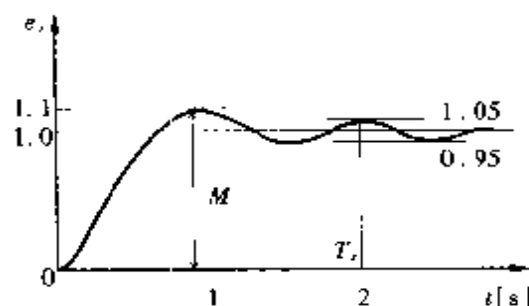


图 7.8 期望的阶跃响应

$M=1.3$, 调节时间小于 1 秒的阶跃响应什么样呢?



由动态指标, 当 $M=1.1$ 时:

$$M=1.1=1+e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (7.16)$$

$$0.1=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow \ln 0.1 = -2.3 = \ln e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (7.17)$$

REMEMBER

\ln 表示自然对数。常用对数的底为 10, 自然对数的底为 e 。

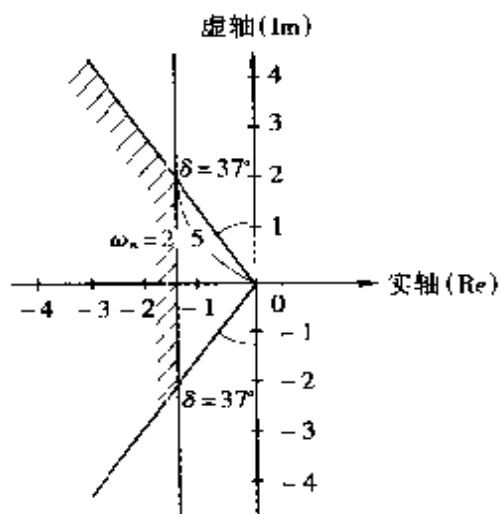


图 7.9 特征根的存在范围

求解式 (7.17) 得 $\zeta=0.6$ 。由于 $\zeta=\sin\delta$, 可得 $\delta\geq 37^\circ$ 。

由式 (7.12) 可知, 振荡项的最大值为(推导过程省略)

$$e^{-\zeta\omega_n t} \quad (7.18)$$

要想使这个值小于或等于 0.05, 即 $e^{-\zeta\omega_n t} \leq e^{-3} \approx 0.05$ 则 $\zeta\omega_n t \geq 3$, 或

$$t \geq 3 \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (7.19)$$

调节时间 $t = 2$ 秒时 $\zeta = 0.6$, 因此固有频率 ω_n 为:

$$\omega_n \geq 3 \frac{1}{t\zeta} = 3 \times \frac{1}{2 \times 0.6} = 2.5 \quad (7.20)$$

在复平面上, 特征根的允许存在范围如图 7.9 所示。

在 $\zeta \geq 0.6$ 、 $\omega_n \geq 2.5$ 的条件下, 系统参数 $K_c K_m K_p$ 及 T_m 如何确定呢? 由图 7.7 可得闭环传递函数 W_c 为

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{K_c K_m K_p}{s(1 + T_m s)} \bigg/ \left[1 + \frac{K_c K_m K_p}{s(1 + T_m s)} \right] = \frac{K_c K_m K_p}{T_m s^2 + s + K_c K_m K_p} \\ &= \frac{K_c K_m K_p}{T_m} \bigg/ \left(s^2 + \frac{1}{T_m} s + \frac{K_c K_m K_p}{T_m} \right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

式(7.21)与式(7.9)比较得

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{T_m} \\ b &= \frac{K_c K_m K_p}{T_m} \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

由式(7.10)得

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{b} = \sqrt{K_c K_m K_p T_m} \geq 2.5 \\ \zeta &= \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{K_c K_m K_p T_m}} = 0.6 \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

从而得

$$\left. \begin{aligned} T_m &\leq \frac{1}{3.0} \approx 0.33 \\ K_c K_m K_p &\geq \frac{6.25}{3} \approx 2.1 \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

这样就确定了满足所要求的动态指标时的系统增益 $K_c K_m K_p$ 以及时间常数 T_m 。

7.1.4 有多个特征根时

以上讨论了具有两个共轭复数特征根的情况。当特征方程式为高次时, 显然将有多多个特征根。

下面以液压伺服系统的机器人位置控制为例加以讨论。其原

理图如图 7.10 所示。用电位器电压 e_o 检测出机器人手的位置,与表示目标位置的电压 e_i 相比较。若电压 e_i 大于 e_o , 电压 $e_i - e_o$ 加到力矩电机的线圈上并有电流流过,同时产生电磁力使轴向左移动,并打开阀门④,使高压油流入油缸。其结果使活塞向右移动,直至电压 e_o 等于电压 e_i 时上述过程停止。

液压伺服!
好像很难呢!!

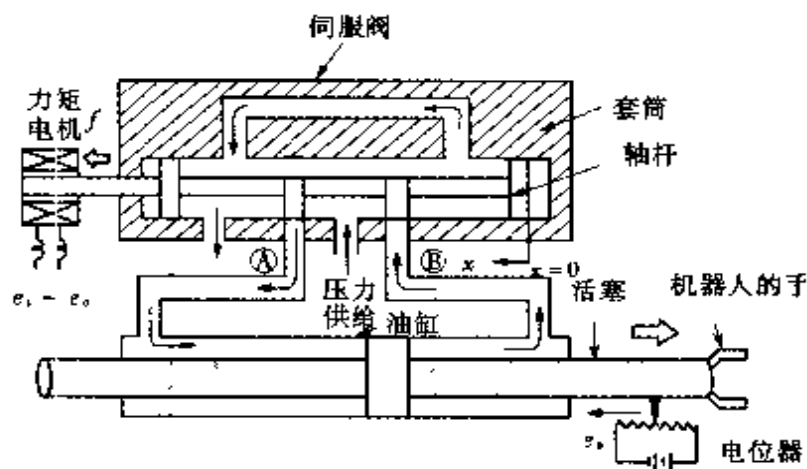


图 7.10 液压伺服系统的位置控制

NOTE

下面推导液压伺服位置控制系统的方框图。

首先,从电压差 $e_i - e_o$ 到力矩电机产生的力 f ,二者为比例关系,即

$$f = K_c (e_i - e_o) \quad (K_c \text{ 为常数}) \quad (7.25)$$

将上式进行拉氏变换,即 $f \rightarrow F$ 、 $e_i \rightarrow E_i$ 、 $e_o \rightarrow E_o$,则

$$F = K_c (E_i - E_o) \quad (7.26)$$

其方框图如图 7.11 所示。

图 7.11 力矩电机部分的方框图

其次是伺服阀。以力 f 作为输入,以轴杆的移动距离 x 作为输出时,伺服阀的

运动方程为

$$M_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_1 \frac{dx}{dt} + K_1 x = f \quad (7.27)$$

式中, M_1 为轴杆的质量、 μ_1 为粘性摩擦系数、 K_1 为流体的反力(与阀的出入口压力差所对应的力)。根据表 4.1 对上式进行拉氏变换

| t - 时域 | s - 频域 |
|-------------------------|-------------|
| $M_1 \frac{d^2x}{dt^2}$ | $M_1 s^2 X$ |
| $\mu_1 \frac{dx}{dt}$ | $\mu_1 s X$ |
| $K_1 x$ | $K_1 X$ |
| f | F |

表 4.1



则式(7.27)变为

$$M_1 s^2 X + \mu_1 s X + K_1 X = F \quad (7.28)$$

伺服阀的传递函数为

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{M_1 s^2 + \mu_1 s + K_1} \quad (7.29)$$

用方框图表示时如图 7.12 所示。由于轴杆的移动, ④阀开启, 高压油流入油缸。流入油的流量 v 为

$$v = K_v x \quad (7.30)$$

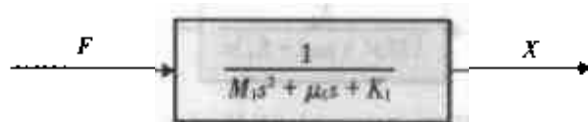


图 7.12 伺服阀的方框图



图 7.13 伺服阀阀门部分的方框图

坚持!
坚持!!



进行拉氏变换, $v \rightarrow V$ 、 $x \rightarrow X$, 得

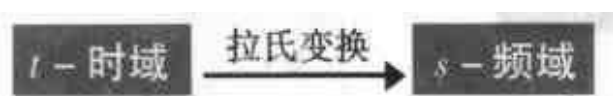
$$V = K_v X \quad (7.31)$$

方框图如图 7.13 所示。

最后考虑一下油缸。利用第 2.4 节的式(2.7)所示的积分, 可以求得活塞的移动距离 x , 而活塞的移动距离 x (实际位置) 可以用电位器测得的输出电压 e_o 来表示。实际上, 由于活塞的质量 M_2 、粘性摩擦系数 μ_2 以及流体反力 K_2 的存在, 进行快速加减速控制是不可能的。油缸的运动方程为

$$M_2 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \mu_2 \frac{de_o}{dt} + K_2 e_o = K_f \int_0^t v dt \quad (7.32)$$

式中 K_f 为常值。将上式进行拉氏变换如下



$$M_2 \frac{d^2 e_o}{dt^2}$$

$$M_2 s^2 E_o$$

$$\mu_2 \frac{de_o}{dt}$$

$$\mu_2 s E_o$$

$$K_2 e_o$$

$$K_2 E_o$$

$$K_f \int_0^t v dt$$

$$K_f \frac{V}{s}$$

式(7.32)将变换为

$$M_2 s^2 E_o + \mu_2 s E_o + K_2 E_o = \frac{K_f V}{s} \quad (7.33)$$

以流入油缸的流量 v 为输入, 以表示实际位置的电压 e_o 为输出, 油缸的传递函数为

$$\frac{E_o}{V} = \frac{K_f}{(M_2 s^2 + \mu_2 s + K_2)s} \quad (7.34)$$

其方框图示于图 7.14。整个系统的方框图示于图 7.15。



图 7.14 油缸的方框图

由图 7.15 可得系统闭环传递函数 W_c 为:

$$W_c = \frac{E_o}{E_i} = \frac{K_c}{M_1 s^2 + \mu_1 s + K_1} \frac{K_a K_f}{(M_2 s^2 + \mu_2 s + K_2)s} \left[1 + \frac{K_c}{M_1 s^2 + \mu_1 s + K_1} \frac{K_a K_f}{(M_2 s^2 + \mu_2 s + K_2)s} \right] \quad (7.35)$$

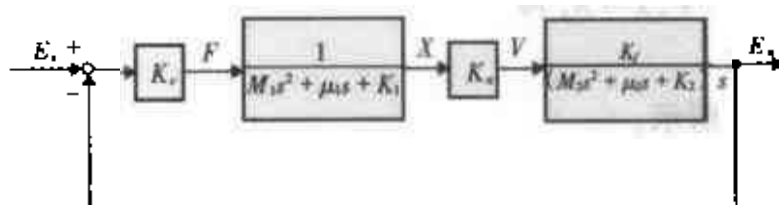


图 7.15 液压伺服位置控制系统方框图



特征方程为

$$s(M_1s^2 + \mu_1s + K_1)(M_2s^2 + \mu_2s + K_2) + K_sK_oK_f = 0 \quad (7.36)$$

这里的最高次数为 s^5 ，因此为 5 次方程。

如果液压伺服系统的特征方程式为

$$(s^2 + 2s + 3)(s^2 + 6s + 16)(s + 5) = 0 \quad (7.37)$$

其特征根则为

$$s_1, s_2 = -1 \pm j\sqrt{2}$$

$$s_3, s_4 = -3 \pm j\sqrt{7}$$

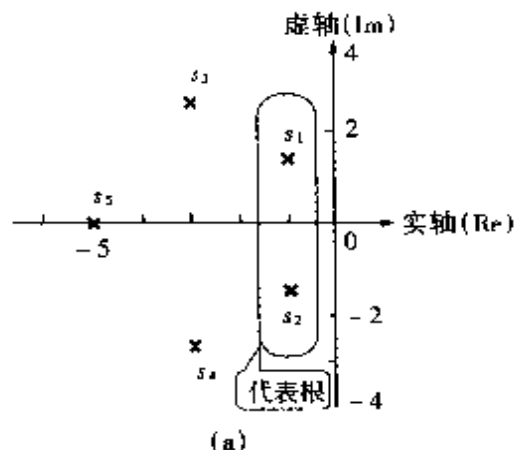
$$s_5 = -5$$

代表根是
靠近虚轴的
根



特征根在复平面上的分布示于图 7.16(a)，这时的动态响应示于图 7.16(b)。基于特征根 s_1, s_2 的响应为

$A_1 e^{-t} \cdot \sin(\sqrt{2}t + \varphi_1)$ 基于特征根 s_3, s_4 的响应为 $A_2 e^{-3t} \sin(\sqrt{7}t + \varphi_2)$ ，基于特征根 s_5 的响应为 $A_3 e^{-5t}$ 。其中的 A_1, A_2, A_3 和 φ_1, φ_2 ，均为常值。在这些响应中，最后残留的是按 e^{-t} 振荡衰减的特征根 s_1, s_2 的响应。作为系统响应，最后的残留响应就成为最为重要的问题，因此称 s_1, s_2 为代表根。代表根一般多为共轭复根。在很多特征根中，若只考虑代表根来进行控制系统设计，也不会产生太大的错误。



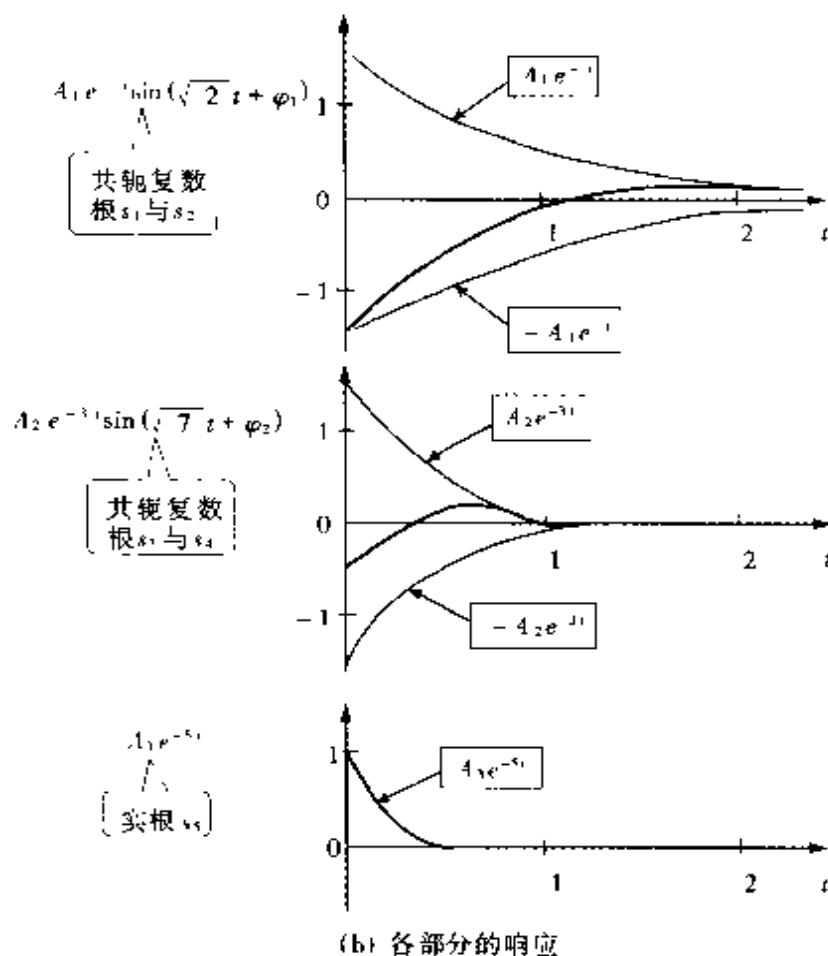


图 7.16 特征根的配置与响应

7.2 基于根轨迹法的评价与设计

7.2.1 特征方程式 $(1 + s/2)s + K = 0$ 的根轨迹

第 7.1 节对基于动态响应法的动态特性进行了讨论。本节将讨论根轨迹法。根轨迹是系统开环传递函数中的参数（控制环节的增益、机械时间常数、电气时间常数等）从 0 到 ∞ 变化时，相应特征方程式的根在复平面上所描出的轨迹。由此可以清楚地了解参数的变化对控制系统的影响，能够用于控制系统的设计以及参数值的确定。

仍以直流电动机位置控制系统为例讨论。

图 4.18 的方框图再次示于图 7.17。取时间常数 $T_m = 1/2$ 秒，增益 $K_c K_m K_p$ 用 K 替换，求取增益 K 变化时的根轨迹。方框图为图 7.18，特征方程为

$$1 + \frac{K}{(1 + s/2)s} = 0 \rightarrow \left(1 + \frac{s}{2}\right)s + K = 0 \quad (7.38)$$

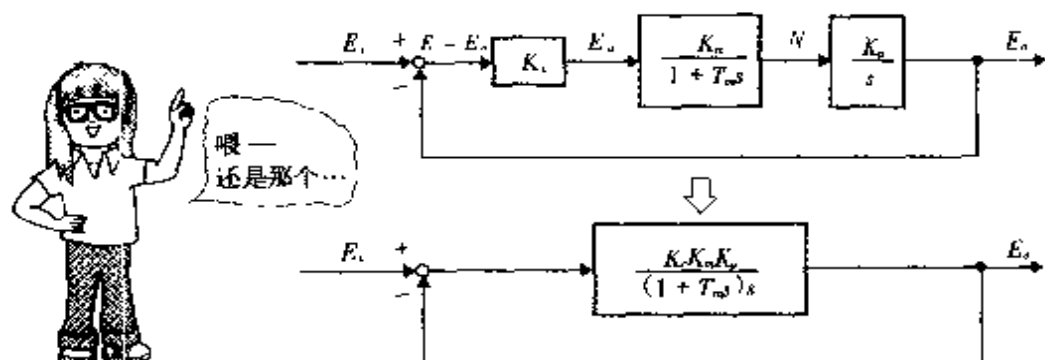


图 7.17 直流电动机位置控制

当 $K=0$ 时, 特征方程为 $(1 + s/2)s = 0$, 特征根为 $s = 0, -2$; $K=1/2$ 时, 特征方程为 $s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 = 0$, 有两个相同的特征根 $s = -1$; $K=1$ 时特征方程为 $s^2 + 2s + 2 = 0$, 特征根为两个共轭复根 $s = -1 \pm j$. 特征方程的一般形式为 $s^2 + 2s + 2K = 0$ 其特征根为 $s_1, s_2 = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$, K 为无穷大时, 特征根 $s_1, s_2 = -1 \pm j\infty$ 。

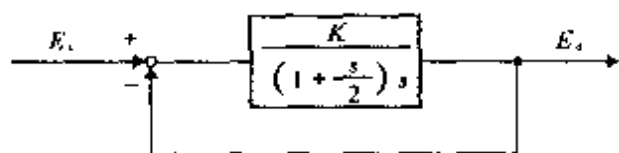
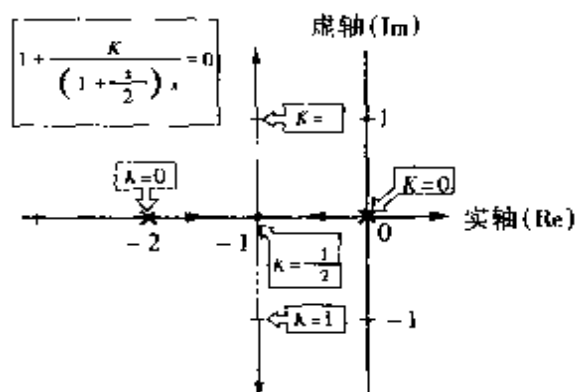


图 7.18 方框图

图 7.19 特征方程 $1 + \frac{K}{(1 + s/2)s} = 0$ 的根轨迹

作为结果, 所求得的根轨迹示出图 7.19。图中, 用 \times 标记的点为增益 $K=0$ 时的根, 称为极点; 而 $K=\infty$ 时的根则称为零点, 用 0 表示。所谓零点是指开环传递函数 $K[1/(1 + s/2)s]$ 的分子为零时 s 的值 [本例中若分子为常值, 则零点是分母 $(1 + s/2)s$ 为无穷大时 s 的值]。图中零点为 $s_1, s_2 = -1 \pm j\infty$, 在与虚轴距离为 1 的轴线的上下方各存在一个零点。

若增益 K 从 0 增加, 则特征根从位于 $s = 0$ 的极点和位于

$s = -2$ 的极点开始移动并趋近于 $s = -1$ 点。当 $K = 1/2$ 时两个根相同, 为 $s = -1$ 。此后随着 K 的增加, 两个根中一个向上、一个向下。当 K 趋近于无穷大时, 分别趋近于两个零点。增益 K 从 0 到 $1/2$ 变化时输出 e_s 不振荡, $K = 1/2$ 时为以最快速度衰减的临界阻尼状态。当 K 大于 $1/2$ 时开始振荡。随着 K 的增大, 特征根离开实轴, 系统的快速性变好而衰减性变坏。要减小稳态误差, 如第 6 章所述, 可以提高增益 K 。然而从动态特性来看, 提高增益 K 会使快速性变好而衰减性变差。

这里求取根轨迹时, 是改变增益 K , 求解特征方程式并求出特征根。还可以采用作图法求得根轨迹的大体形状 (具体方法请参阅其它有关书籍)。

7.2.2 基于根轨迹法的设计

对于直流电动机位置控制系统, 试求取满足下列指标时的增益 K 。其中时间常数 $T_m = 1/2$ 秒, 增益 $K = K_a K_m K_p$ 。

性能指标如下:

对恒定速度输入 (称为斜坡输入) 时的稳态误差: $\leq 10\%$

阻尼系数: $\geq 1/\sqrt{2}$

调节时间: ≤ 3 秒

首先求取特征根的存在范围。对应恒定速度输入时的稳态误差, 可由式 (6.10) 求出。由性能指标得

$$\frac{1}{K_a K_m K_p} = \frac{1}{K} < 0.1 \quad (7.39)$$

解得 $K > 10$ 。

由阻尼系数 $\zeta = \sin \delta$, 得

$$\zeta = \sin \delta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.40)$$

解得 $\delta \geq 45^\circ$

由式 (7.9), 调节时间为

$$t \geq 3 \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (7.41)$$

式中, $t = 3$ 秒, $\zeta = \sin \delta = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ 。可得固有频率 ω_n 为:

$$\omega_n \geq \frac{3}{3 \times 1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (7.42)$$

上述条件示于图 7.20 中。特征根的存在范围为斜线部分。要满足稳态误差指标, 需要满足 $K > 10$ 的条件。为了了解增益 K 的范围, 把图 7.19 合并到图 7.20, 由图中可知, $K=1$ 时特征根位于斜线的边界上, 若 $K=10$ 时特征根已位于斜线之外。就是说, 使稳态特性和动态特性同时满足的增益 K 是不存在的。

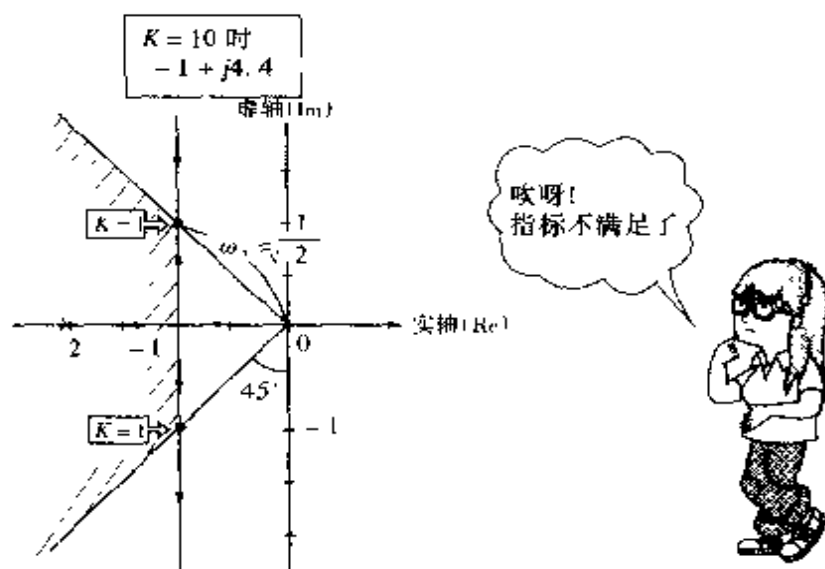


图 7.20 特征根的存在范围

这样, 为满足性能指标, 调节增益 K 而作的补偿称为增益调整补偿 (增益补偿)。进行增益补偿时仍不能满足性能指标的场合, 应进行下面将要讨论的特性补偿。

特性补偿时, 要加入如图 7.21 所示的补偿环节 (G_c , H), 主要有串联补偿、反馈补偿以及前馈补偿等。

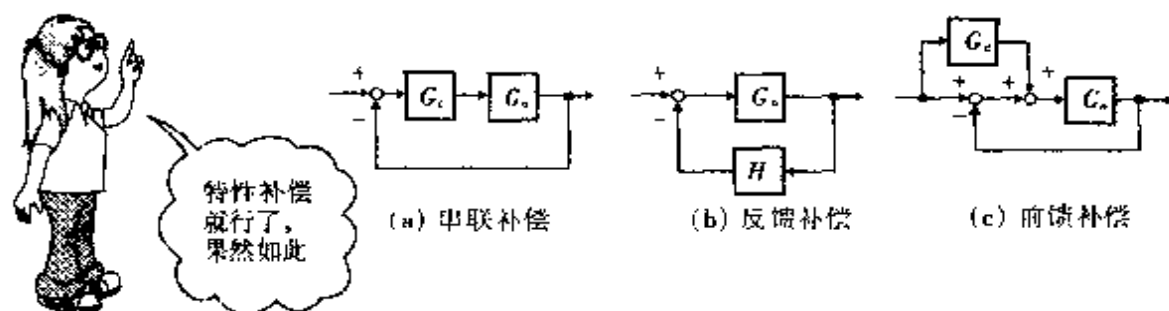


图 7.21 特性补偿

下面以直流电机位置控制系统为例,采用反馈补偿,使系统稳态特性和动态特性满足性能指标要求。

7.2.3 反馈补偿

图 7.22 示出了通过反馈环节 K_f 使转速 N 闭环情况下的方

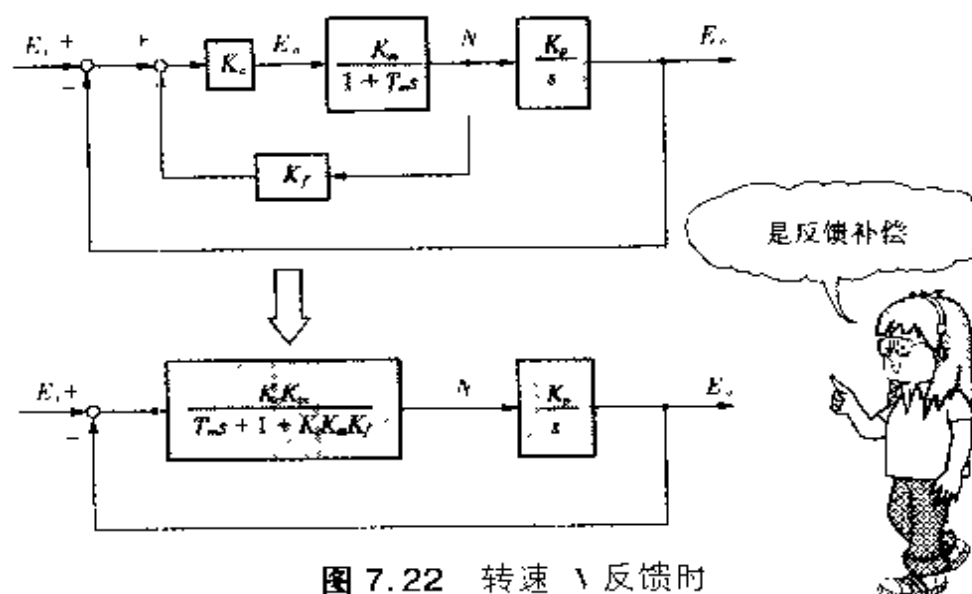


图 7.22 转速 \ 反馈时

框图。把反馈补偿部分合并成一个方框、令 $T_m = 1/2$ 、 $K_c K_m K_p = K_1$ 、 $K_c K_m K_f = K_2$, 求取满足性能指标的增益 K_1 、 K_2 。图 7.23 示出了整理后的系统方框图,其开环传递函数 W_o 为:

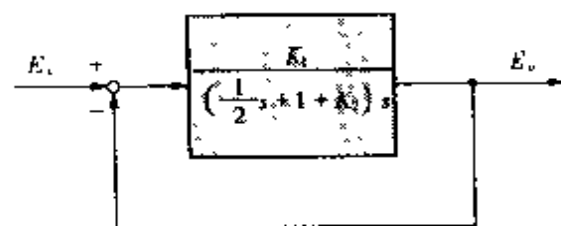


图 7.23 整理后的方框图

$$W_o = \frac{K_1}{\left(\frac{1}{2}s + 1 + K_2\right)s} \quad (7.43)$$

其闭环传递函数为

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{W_o}{1 + W_o} = \frac{K_1}{\left(\frac{1}{2}s + 1 + K_2\right)s} \bigg/ \left[1 + \frac{K_1}{\left(\frac{1}{2}s + 1 + K_2\right)s} \right] \\ &= \frac{K_1}{\left(\frac{1}{2}s + 1 + K_2\right)s + K_1} \end{aligned} \quad (7.44)$$

特征方程为

$$s^2 + 2(1 + K_2)s + 2K_1 = 0 \quad (7.45)$$

首先求取稳态误差。由于稳态位置误差为 0, 只须求取稳态速度误差。由式(6.9), 稳态速度误差可以用输入 E_i 与输出 E_o 之差来求取如下:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s(E_i - E_o) &= \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - W_c)E_i \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{K_1}{\frac{1}{2}s^2 + (1 + K_2)s + K_1} \right] \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}s + 1 + K_2}{\frac{1}{2}s^2 + (1 + K_2)s + K_1} = \frac{1 + K_2}{K_1} \end{aligned} \quad (7.46)$$

由性能指标可得 $(1 + K_2)/K_1 \leq 0.1$ 。

角 $\delta \geq 45^\circ$, 固有频率 $\omega_n \geq \sqrt{2}$, 与前面相同, 根的存在范围仍如图 7.20 所示。

下面利用式(7.45), 画出增益 K_1 变化时和增益 K_2 变化时的根轨迹。首先令 $K_2 = 0$, 求取 K_1 变化时的根轨迹。由式(7.45)得

$$1 + K_1 \frac{2}{s(s+2)} = 0 \quad (7.47)$$

NOTE

描述根轨迹时, 要变化的参数为 K 时, 特征方程式应变形为

$$1 + K \frac{(\text{含 } s \text{ 的代数式})}{(\text{含 } s \text{ 的代数式})} = 0$$

由于 $K_2 = 0$, 这时的根轨迹与没有速度反馈的图 7.19(再次示于图 7.24) 的根轨迹相同。为了使稳态误差在 10% 以内, 必须 $(1 + K_2)/K_1 \leq 0.1$, 当 $K_2 = 0$ 时, 取 $K_1 > 10$ 就可以了。由于 $K_1 = 10$, $K_2 = 0$ 时的特征根为 $-1 \pm j4.4$, 因此速度反馈的增益 K_f 加入后,

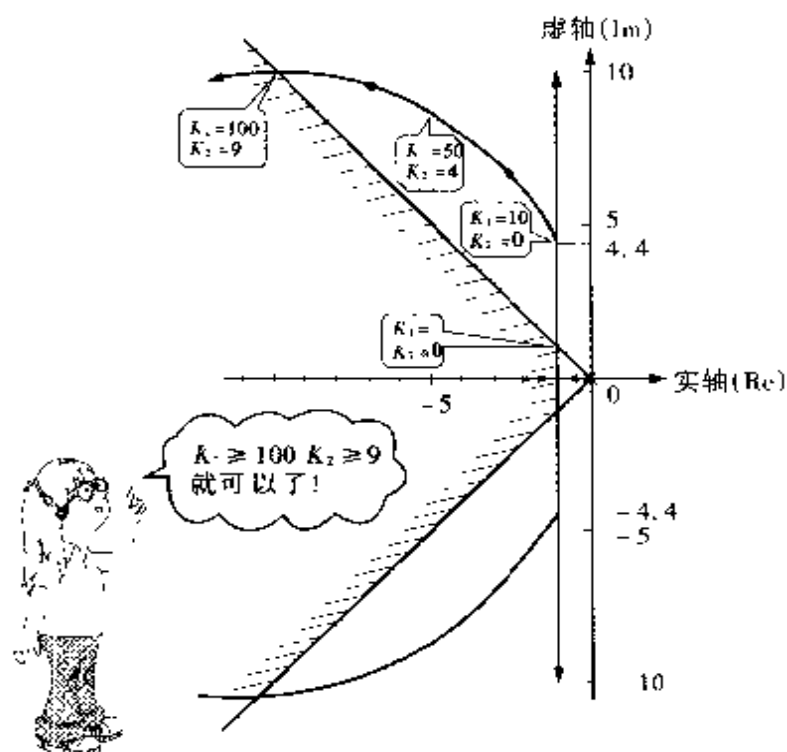


图 7.24 根轨迹

$K_2 (= K_c K_m K_f)$ 从 0 增加, 若特征根能落在图 7.24 中的斜线以内就可以满足性能指标。

K_2 变化时, 考虑到稳态速度误差 $\leq 10\%$ 时, $(1 + K_2)/K_1 = 0.1$ (这里 K_2 增加时 K_1 也增加)。将 $K_1 = 10(1 + K_2)$ 代入式(7.45), 得

$$s^2 + 2(1 + K_2)s + 2K_1 = s^2 + 2(1 + K_2)s + 20(1 + K_2) = 0 \quad (7.48)$$

进行与式(7.47)相似的变形并整理, 得

$$1 + K_2 \frac{2(s + 10)}{s^2 + 2s + 20} = 0 \quad (7.49)$$

由分母 $s^2 + 2s + 20$ 得极点为 $s_1, s_2 = -1 \pm j4.4$, 零点为 $s = -10$ 与 $-\infty$ 。特征根从 $K=0$ 时的 $-1 \pm j4.4$ 出发, 随着 K_2 的增加逐渐接近图中斜线部分, 当 $K_2 = 9$ 时到达斜线部分。这时 $K = 100$, 由此可知, 取 $K_1 \geq 100$ 、 $K_2 \geq 9$ 就能满足性能指标。

第 8 章

基于频率响应法的动态特性的评价与设计



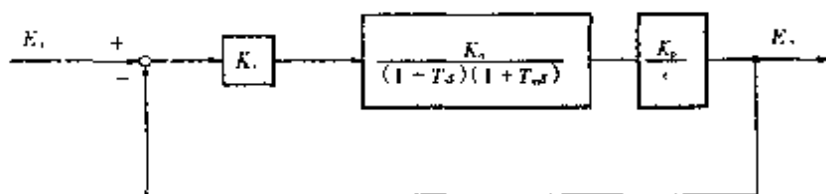
第 7 章用动态响应法和根轨迹法讨论了动态特性的评价与设计。本章将根据频率响应法,用奈奎斯特图和波特图讨论系统动态特性的评价与设计。

8.1 相对稳定性(衰减性)与快速性的评价

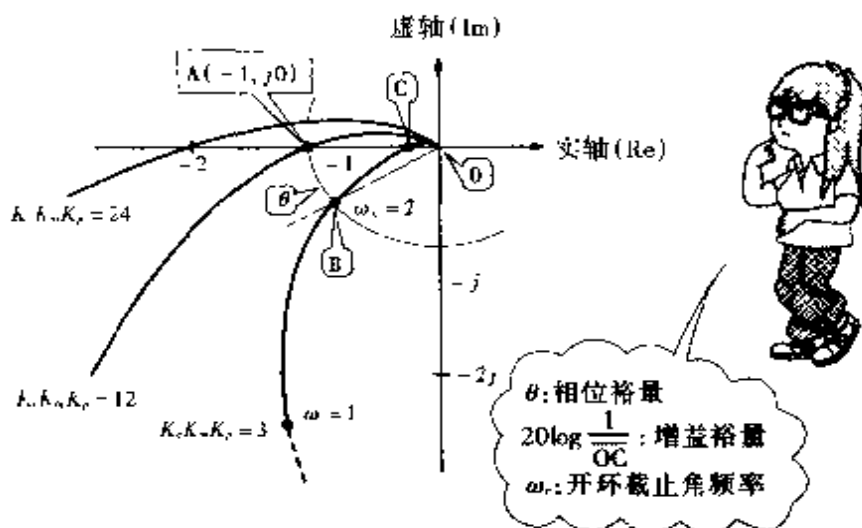
第 5 章为判别系统稳定与否使用了奈奎斯特图。奈奎斯特图也可用于系统相对稳定性及快速性的评价。图 8.1 为直流电动机位置控制的示例。

图 8.1(a)为方框图。与图 4.18 所示方框图不同的是,直流电动机部分变成了 $K_m/[(1+T_s)(1+T_ms)]$ 。这是由于图 4.17 所示的模型中,除电枢电阻外还有线圈电感。加上电压 e_a 后,电流 i_a 要按一阶惯性的规律增加(第 2.6 节)。取一阶惯性环节的时间常数为 T_e 。当 $T_e=0.1$ 秒、 $T_m=0.5$ 秒时, $K_c K_m K_p=3, 12, 24$ 情况下的奈奎斯特图如图 8.1(b)所示。图中点 $(-1, j0)$ 为 A 点, $K_c K_m K_p=3$ 时的奈奎斯特图与实轴的交点为 C 点, 与半径为 1 的圆的交点为 B 点。 $K_c K_m K_p=3$ 、角频率 ω 很小时,增益大而相位角大致为 -90° 。若

ω 变大, 则增益变小而相位角较 -90° 滞后。在 B 点, 增益为 1 而相位角为 -146° 。如果进一步增大 ω 并与实轴相交时, 相位角为 -180° 。当 ω 趋近于 ∞ 时增益为 0 而相位角为 -270° 。由于 A 点位于 C 点的左侧, 则系统是稳定的。 $K_c K_m K_p = 12$ 时处于稳定极限, $K_c K_m K_p = 24$ 时, A 点位于曲线与实轴交点的右侧, 则系统是不稳定的。



(a) 直流电动机考虑线圈电感时的方框图



(b) 奈奎斯特图

图 8.1 直流电动机位置控制

NOTE

我们来复习奈奎斯特图的求取方法。系统的开环传递函数为

$$\frac{K_c K_m K_p}{\left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{2}s\right) s} \quad (8.1)$$

这个传递函数的大小(增益)为

$$\frac{K_c K_m K_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}} \quad (8.2)$$

$$\text{相位角为 } -\tan^{-1} \frac{1}{10} \omega - \tan^{-1} \frac{1}{2} \omega - 90^\circ$$

$$\text{相当于 } \left(\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j0.5\pi} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ \right) \quad (8.3)$$

例如,若 $K_c K_m K_p = 3$, $\omega = 1$, 则

$$\frac{3}{\sqrt{1.01} \times \sqrt{1.25} \times 1} = 2.7$$

$$-\tan^{-1} \frac{1}{10} - \tan^{-1} \frac{1}{2} - 90^\circ = -122^\circ$$

由前面分析可知, $K_c K_m K_p = 3$ 时系统是稳定的。然而, 随着 $K_c K_m K_p$ 的增加, 奈奎斯特图向 A 点接近, 使稳定程度恶化。这里用向 A 点接近的程度来评价系统的相对稳定性(衰减性)。设 $\angle AOB$ 为 θ , 称 θ 为**相位裕量**。当相位裕量 θ 为正时, θ 较大的系统稳定性好。取从 C 点到 O 点的长度 \overline{OC} 的倒数, 用分贝表示时, 称 $20\log 1/\overline{OC} = -20\log \overline{OC}$ 为**增益裕量**。当增益裕量为正(\overline{OC} 小于 1 时, $\log \overline{OC}$ 为负)时, 增益裕量越大, C 点距 A 点越远, 则稳定性越好。一般情况下增益裕量和相位裕量的取值范围如表 8.1 所示。

表 8.1 增益裕量与相位裕量

| 控制系统 | 增益裕量(dB) | 相位裕量($^\circ$) |
|----------|-------------------------------|------------------|
| 随动控制 | 10 ~ 20 | |
| (目标值变化时) | \overline{OC} 为 0.1 ~ 0.32 | 40 ~ 60 |
| 恒值控制 | 3 ~ 10 | |
| (目标值一定时) | \overline{OC} 为 0.32 ~ 0.71 | 20 以上 |

曲线与半径为 1 的圆的交点 B 点的角频率 ω_c 称为**开环截止角频率**。本例中 $\omega_c = 2$ [弧度/秒(rad/s)]。若 ω_c 增大, 则增益将小于 1。因此开环截止角频率表示了系统能够响应的输入频率的大小。显然, 能够响应的频率越高就越能快速变化, 则系统的快速性越好。也就是说开环截止角频率越高则快速性越好。

上面的奈奎斯特图用波特图表示时, 如图 8.2 所示。图中, 增

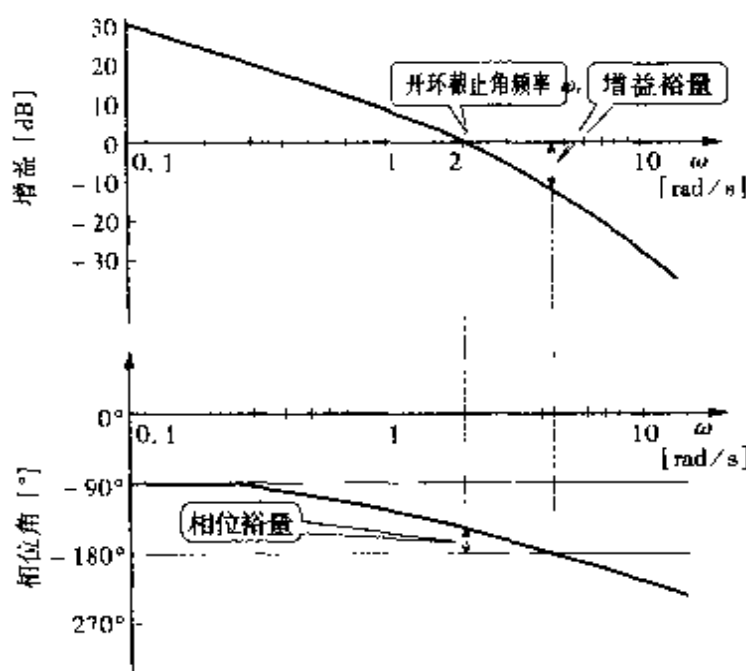


图 8.2 波特图

益为 0 ($=20\log 1$) 时的角频率为开环截止角频率 ω_c ($=2$ 弧度/秒), 与相位角为 -180° 线相交时的增益的负值 (12 dB) 为增益裕量。开环截止频率时的相位角与 -180° 之差 (34°) 为相位裕量。波特图中增益与相位角之间有如下关系:

增益的斜率 0 分贝/十倍频程 (dB/decade) 时相位角为 0°

增益的斜率 -20 分贝/十倍频程时的相位角为 -90°

增益的斜率 -40 分贝/十倍频程时的相位角为 -180°

增益的斜率 -60 分贝/十倍频程时的相位角为 -270°

因此, 如图 8.3 所示, 可以根据幅频特性预估相频特性。反之, 也可以由相频特性预估幅频特性。

至此讨论了采用开环传递函数评价动态特性的方法。也可以采用闭环传递函数进行评价。系统闭环传递函数的幅频特性如图 8.4 所示。这是一个二阶环节。图 8.4(a) 为二阶惯性环节的频率特性; 图 8.4(b) 为二阶振荡环节的频率特性。图 (b) 中, 角频率为 ω_p 时, 由于谐振而使增益为最大值 M_p , 若角频率进一步增加, 在角频率为 ω_c 时, 增益下降 3 dB。称 M_p 为最大增益, 称最大增益 M_p 时的角频率 ω_p 为最大增益角频率。最大增益 M_p 的值愈大, 增益峰值愈高, 则系统愈接近谐振状态。当 M_p 为无穷大时, 系统处于谐

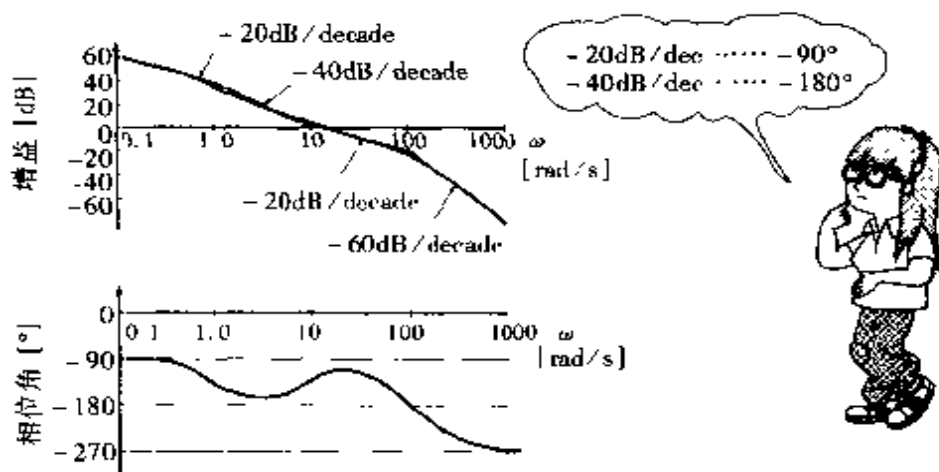


图 8.3 幅频特性与相频特性

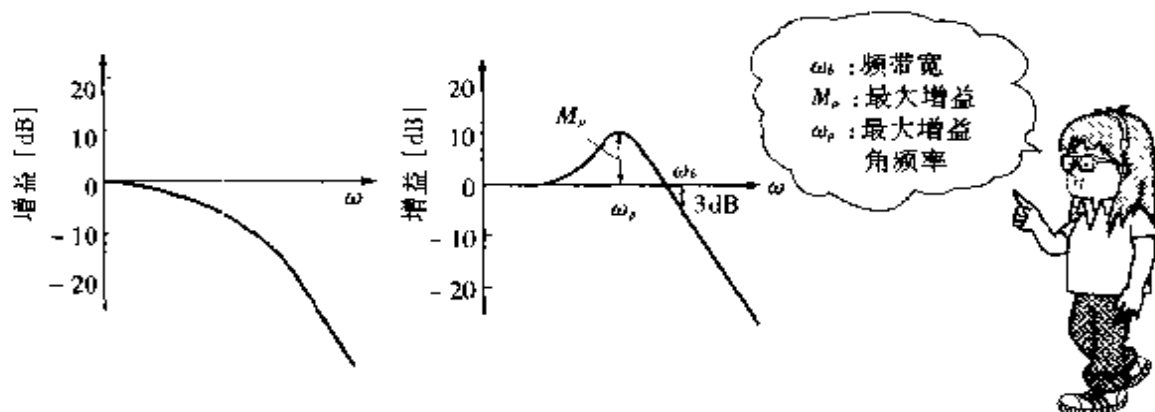
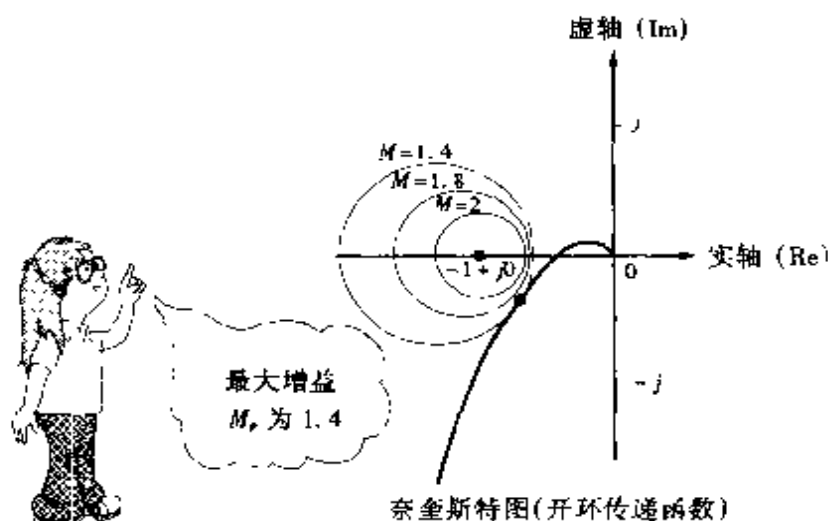


图 8.4 闭环传递函数的幅频特性

振状态而达到稳定极限。

取闭环传递函数的增益为 M , M 一定时的轨迹在复平面上表示时为如图 8.5 所示的一簇圆(推导省略)。作为开环传递函数的矢量轨迹的奈奎斯特图也示于图 8.5。图中,让 $M = \text{常值}$ 时所描绘的圆顺序增大,则首先与奈奎斯特图相切时的 M 值即为 M_p 。本例中 $M_p = 1.4$ 。最大增益 M_p 常用于系统设计,称之为 M_p 规范。通常取 M_p 为 $1.2 \sim 1.6$ 。

图 8.4 (b) 中,频率 ω_b 为闭环传递函数的幅频特性下降 3 dB ($= 1/\sqrt{2} = 0.707$) 时的频率数,称为频带宽。频带宽 ω_b 、最大增益角频率 ω_p 及开环截止角频率 ω_c (开环传递函数的增益为 1 时的角频率) 等,对于系统所能响应的频率给出了一个大致的范围。

图 8.5 M_p 规范

8.2 增益补偿

下面利用第 8.1 节所述的评价方法进行控制系统设计。设计要求如下：

- (1) 为使系统具有良好的稳态特性，在低频段提高开环传递函数的增益；
- (2) 为使系统具有良好的衰减性，取较大的相位裕量；
- (3) 为使系统具有良好的快速性，应拓展频带宽。

NOTE

图 8.6 所示的反馈控制系统中，由式(6.2)可知，系统的稳态误差为

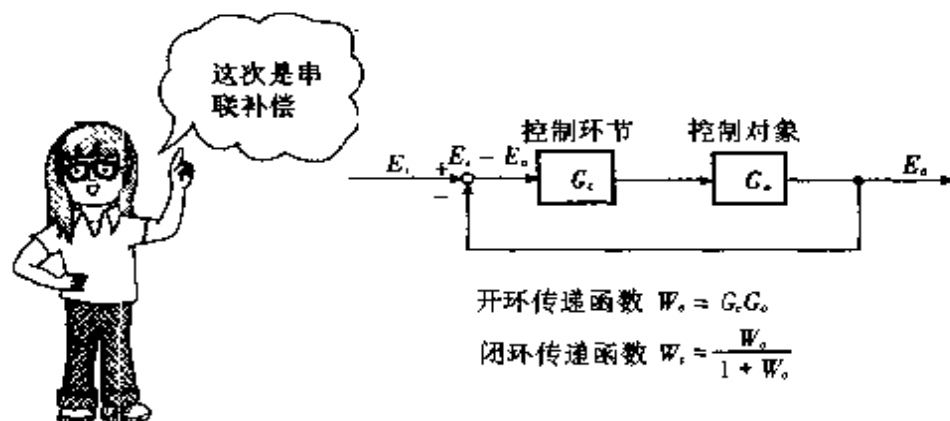


图 8.6 反馈控制系统

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(E_i - E_o) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - W_o)E_i = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - \frac{W_o}{1 + W_o})E_i \quad (8.4)$$

式中 W_o 为闭环传递函数, W_o 为开环传递函数。对式(8.4)进行整理得

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + W_o} E_i \quad (8.5)$$

当开环传递函数 W_o 的 s 趋近于 0 时, 其值 $\lim_{s \rightarrow 0} W_o$ 很大, 则式(8.5)可改写为

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + W_o} E_i \approx \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{W_o} E_i \quad (8.6)$$

式(8.6)说明, 系统的稳态误差很小。考虑到 $s = j\omega$, 则 $\lim_{s \rightarrow 0} W_o$ 即为低频时的开环传递函数 W_o 的大小。因此, 如本节开始时阐述的设计要求(1)中所要求的那样, 在低频段若增大开环传递函数 W_o 的增益, 则系统稳态误差减小。

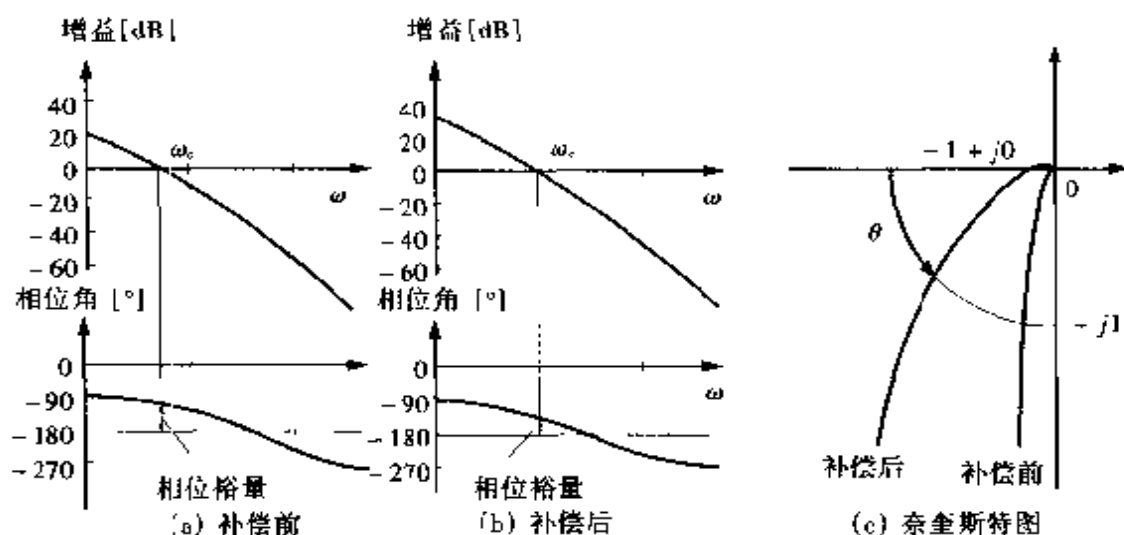


图 8.7 增益补偿

首先考虑关于增益补偿的问题。当系统有如图 8.7 (a) 所示波特图的频率特性时, 为了减小稳态误差而提高增益, 如图 8.7 (b) 所示。图 (b) 中, 系统总增益增加 10 dB (3.2 倍), 相位角保持不变 (总增益有一定量的增减时相频特性保持不变)。其结果是, 稳态误差减少到 $1/3.2$, 相位裕量从 80° 减少为 45° , 由表 8.1 可知, 这个相位裕量是合适的。由于开环截止角频率 ω_c 增加, 系统快速性变好。图 8.7 (c) 示出了补偿前后的奈奎斯特图。

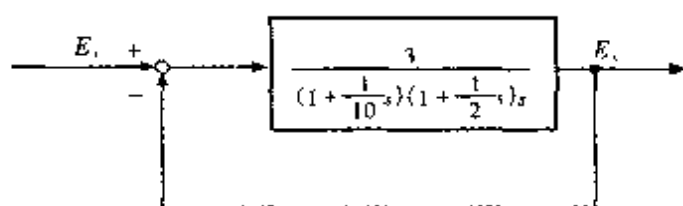


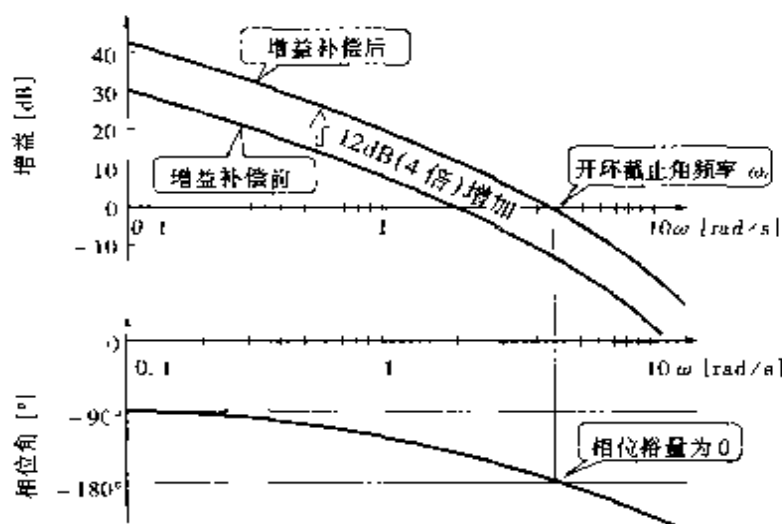
图 8.8 直流电动机位置控制

下面讨论直流电动机
机器人位置控制系统的增
益补偿。在图 8.1 所示系
统中,令 $T_e = 0.1$ 秒、 $T_m =$
 0.5 秒、 $K_c K_m K_p = 3$, 代入后

的框图如图 8.8 所示。这时的稳态位置误差为 0, 而稳态速度误差同样可用式(6.10)求出为 $1/(K_c K_m K_p) = 1/3 \approx 0.33$ 。这就意味着当目标位置以速度 1 变化时, 稳态位置将跟踪目标位置并滞后 0.33。为了使稳态误差小于 10%, 让可变的增益 K_c 增大 4 倍, 则稳态速度误差为 $1/(K_c K_m K_p) = 1/12 \approx 0.08$ 。这时图 8.8 中的增益 3 改为 12, 开环传递函数的增益增加 4 倍 (12 dB), 结果如图 8.9 所示。可以看出开环截止频率 ω_c 增加, 系统快速性提高, 而相位裕量为 0, 即处于稳定极限状态。那么, 在稳态误差改善的同时, 要想不损坏动态特性应该怎么办呢?

NOTE

$20\log 4 |W_o| = 20\log 4 + 20\log |W_o| = 12 + 20\log |W_o|$, 其中 $|W_o|$ 表示
传递函数的大小。



只作增益补
偿, 不行吗?



图 8.9 增益补偿

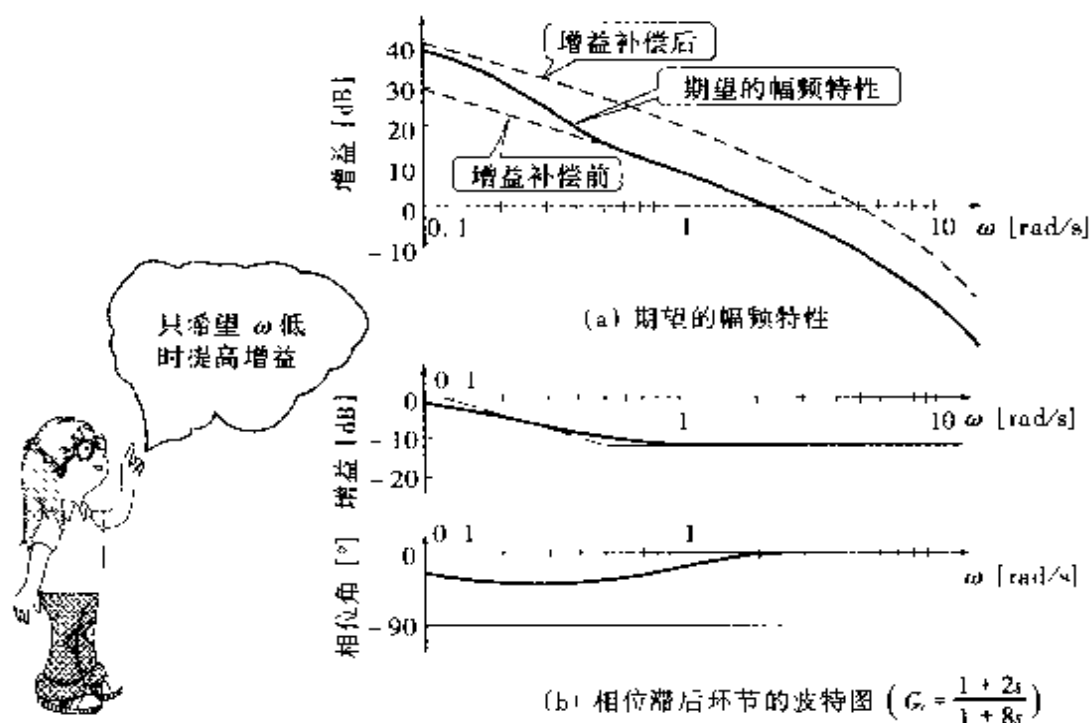


图 8.10 相位滞后补偿

要改善稳态特性,提高增益是必要的,这主要是指低频段,而有关衰减性及快速性等问题则主要是中高频段。因此,对系统的频率特性而言,在低频段希望是增益补偿后的曲线,而在中高频段则希望是增益补偿前的曲线(图 8.10(a))。实现上述想法的措施是进行相位滞后补偿。相位滞后补偿属图 7.21 所示特性补偿中的串联补偿之一。

8.3 相位滞后补偿

要实现所期望的幅频特性(图 8.10(a)),只须将图 8.10(b)的曲线加到增益补偿后的曲线上就可以了。图 8.10(b)中,当频率从 $\omega = 0.125$ 弧度/秒 (rad/s) 增加 10 倍时,增益减少 20 dB(20 分贝/十倍频程),在 $\omega = 0.5$ 弧度/秒之后,增益变为常值。相位也有相应的变化。在 $\omega = 0.125$ 弧度/秒附近开始逐渐滞后并趋近于 -90° ,在 $\omega = 0.5$ 弧度/秒附近,由于增益重新回到常值,滞后的角度开始减小并再次返回到 0。具有这种特性的环节为相位滞后环节,利用相位滞后环节进行补偿的方法称为相位滞后补偿。

下面求取直流电动机位置控制时所需的相位滞后环节。相位

滞后环节的传递函数 G_c 为:

$$G_c = \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \quad (8.7)$$

式中, T_1 为时间常数, α 为大于 1 的常数。

由图 8.2 可知, 当 $\omega = 2$ 弧度/秒时相位裕量为 34° , 不希望相位裕量再减小。为了相位滞后环节的滞后在 $\omega = 2$ 弧度/秒点上没有影响, 图 8.11 的 $1/T_1$ 确定为 $\omega = 0.5$ 弧度/秒。结果为 $T_1 = 1/0.5 = 2$ 秒。从图 8.11 可知, 当 ω 变大时, 增益为 $1/\alpha$ 。从图 8.9、图 8.10(a) 可知, 增益取 -12 dB ($= 1/4$) 为好, 故 $\alpha = 4$ 。 $T_1 = 2$ 秒、

NOTE

研究一下将相位滞后环节 $G_c = (1 + T_1 s)/(1 + \alpha T_1 s)$ 用 $j\omega$ 替换 s 时的特性。用 $s = j\omega$ 替换后, G_c 变为:

$$G_c = \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + \alpha T_1 j\omega} \quad (8.8)$$

ω 很小时, $T_1 \omega \ll 1$, $\alpha T_1 \omega \ll 1$, 故, G_c 变为:

$$G_c \approx 1 \quad (8.9)$$

当 $T_1 \omega \ll 1 \ll \alpha T_1 \omega$ 时, G_c 变为:

$$G_c = \frac{1}{1 + \alpha T_1 j\omega} \quad (8.10)$$

重新用 s 替换 $j\omega$, 则 $G_c = 1/(1 + \alpha T_1 s)$, 这就是第 4.2 节中讨论的一阶惯性环节。

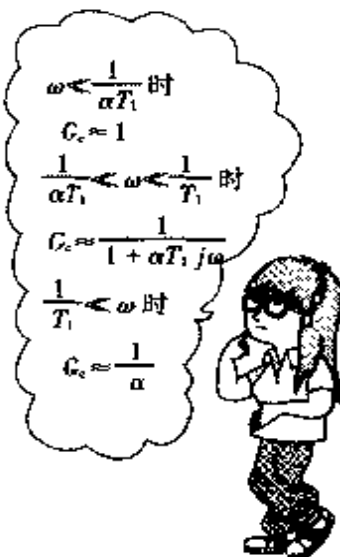
ω 变大后, 当 $T_1 \omega \gg 1$, $\alpha T_1 \omega \gg 1$ 时, G_c 变为:

$$G_c = \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + \alpha T_1 j\omega} = \frac{1}{\alpha} = \text{常值} \quad (8.11)$$

式(8.9)、(8.10)、(8.11)三种情况的改变点为

$$T_1 \omega = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha T_1 \omega = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{\alpha T_1}$$

当如第 8.1 节所示的 ω 很小时, 相位角的滞后为 0; 当 $1/\alpha T_1 \ll \omega \ll 1/T_1$ 时为一阶惯性环节, 故相位角滞后接近 -90° ; ω 变大时相位角再次变为 0。其频率特性大致如图 8.11 所示, 其中图 8.11(a) 为波特图, 图 8.11(b) 为奈奎斯特图。



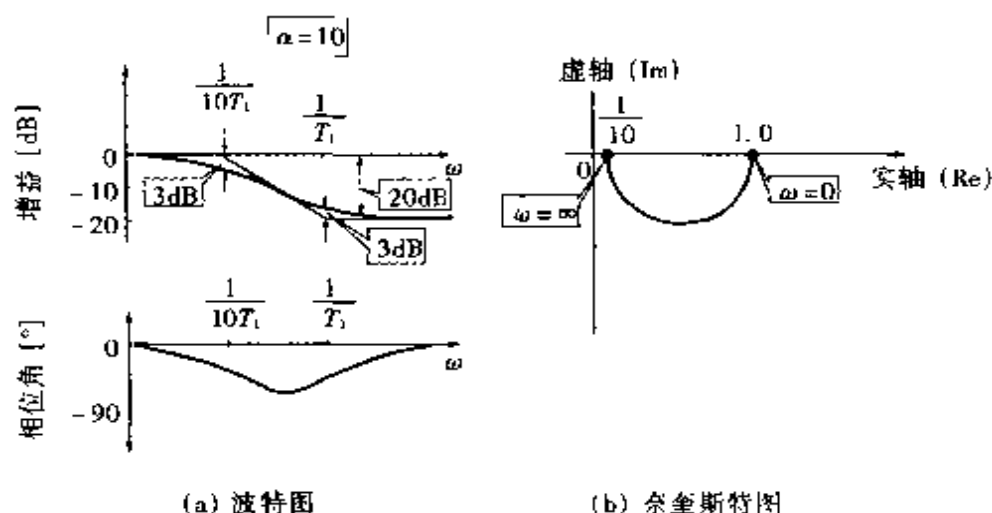


图 8.11 相位滞后环节

$\alpha = 4$ 时相位滞后环节的波特图为图 8.10(b)。相位滞后补偿后的波特图如图 8.12 所示。图 8.12(a)为补偿后的方框图,图(b)为波特图,图(c)为奈奎斯特图。由图可知,相位裕量、增益裕量、开环截止角频率等不变, $\omega = 0.1$ 弧度/秒附近的增益增加 12 dB,系统稳态特性得到了改善。

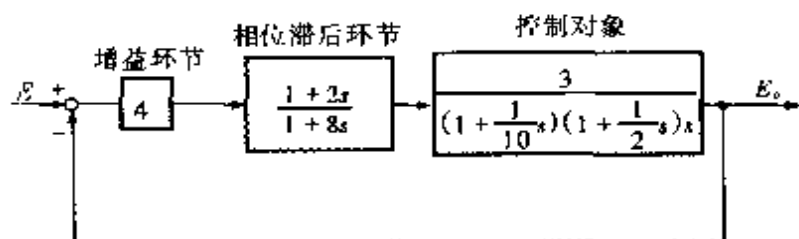
来看一个实现相位滞后环节的电路。图 8.13 中由电容 C 、电阻 R_1 和 R_2 组成的电路的传递函数为

$$G_c = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2}R_2Cs} \quad (8.12)$$

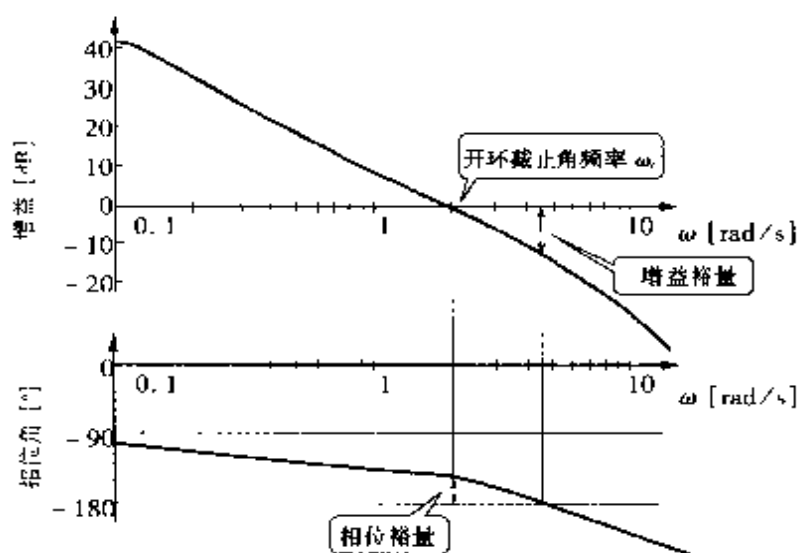
令 $T_1 = R_2 C$ 、 $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$, 则 G_c 变为:

$$G_c = \frac{1 + T_1s}{1 + \alpha T_1s} \quad (8.13)$$

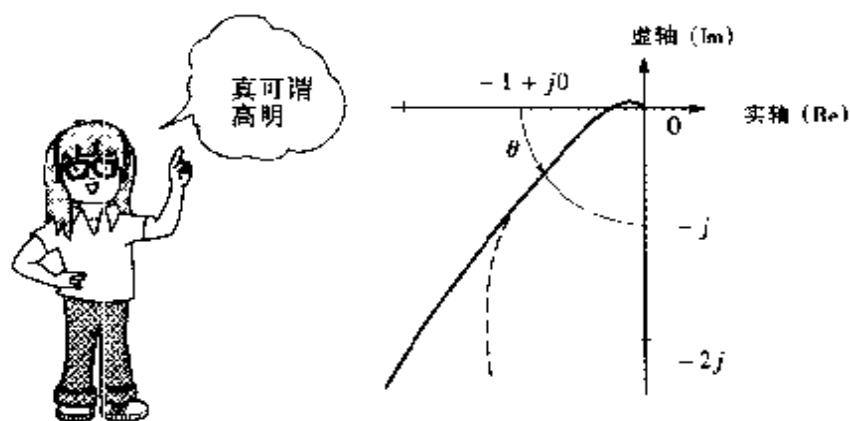
显然图 8.13 的电路就构成一个相位滞后环节。



(a) 补偿后的方框图



(b) 补偿后的波特图



(c) 补偿后的奈奎斯特图

图 8.12 相位滞后补偿

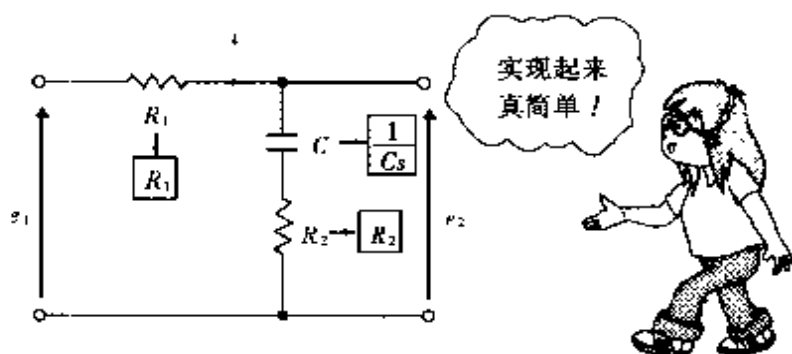


图 8.13 相位滞后环节

NOTE

求取图 8.13 电路的传递函数。利用拉氏变换作以下置换:

$$e_1 \rightarrow E_1$$

$$e_2 \rightarrow E_2$$

$$i \rightarrow I$$

$$R_1, R_2 \rightarrow R_1, R_2$$

$$C \rightarrow \frac{1}{Cs} \text{ (电感 } L \text{ 时为 } L \rightarrow sL)$$

拉氏变换后可以视为与直流电路一样,其输入电压 E_1 为:

$$E_1 = \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I \quad (8.14)$$

输出电压 E_2 为:

$$E_2 = R_2 I + \frac{1}{Cs} I = \left(R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I \quad (8.15)$$

传递函数 G_c 为:

$$G_c = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I}{\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I} = \frac{1 + R_2 Cs}{1 + (R_1 + R_2) Cs} \quad (8.16)$$

8.4 相位超前补偿

图 8.8 所示的直流电动机位置控制中,为了减小稳态误差而进行增益补偿,为了不损害衰减性而进行相位滞后补偿。其结果得到了图 8.12(b)所示的特性。在这里,要讨论进一步改善系统快速性的问题。由于快速性的好坏可以从开环截止角频率得知,考虑到让图 8.12(b)所示的开环截止角频率 $\omega_c = 2$ 弧度/秒附近的增益有少许增加时 ω_c 将提高。为此,再次作增益补偿,使总增益提高,而将图 8.14 所示的环节作为串联补偿环节插入,只要让低频段的增益复原就可以了。这种环节称为**相位超前环节**。相位超前环节的传递函数 G_c 为:

$$G_c = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 s}{1 + (T_1 / \alpha) s} \quad (8.17)$$

式中 T_1 为时间常数, α 为大于 1 的常数。

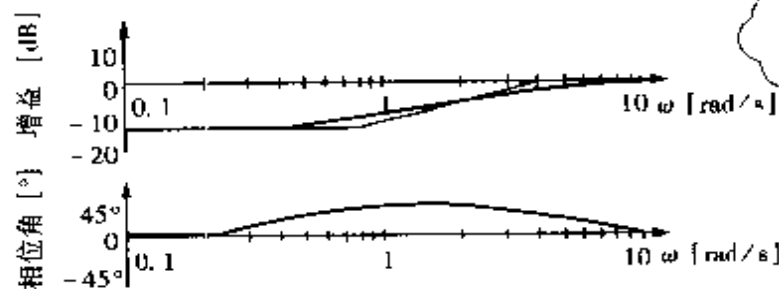


图 8.14 相位超前环节 $\left(G_c = \frac{1}{4} \frac{1 + \frac{5}{4}s}{1 + \frac{5}{16}s} \right)$

NOTE

下面讨论相位超前环节的性质。将 $s = j\omega$ 代入式(8.17)得

$$G_c = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + (T_1/\alpha)j\omega} \quad (8.18)$$

当 ω 很小时

$$G_c \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + (T_1/\alpha)j\omega} \approx \frac{1}{\alpha} \quad (8.19)$$

当 $T_1 \omega \gg 1 \gg (T_1/\alpha)\omega$ 时

$$G_c \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + (T_1/\alpha)j\omega} \approx \frac{1}{\alpha} (1 + T_1 j\omega) \quad (8.20)$$

当 ω 非常大时

$$G_c \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 j\omega}{1 + (T_1/\alpha)j\omega} = 1 \quad (8.21)$$

式(8.19)~(8.21)三种情况的区分点为 $\omega = 1/T_1$ 和 $\omega = \alpha/T_1$, 大致如图 8.15 所示。

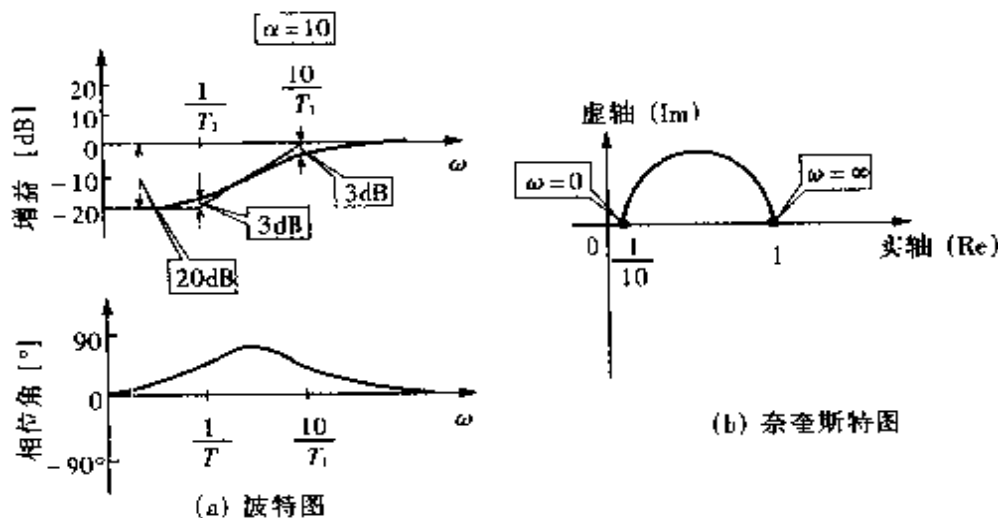
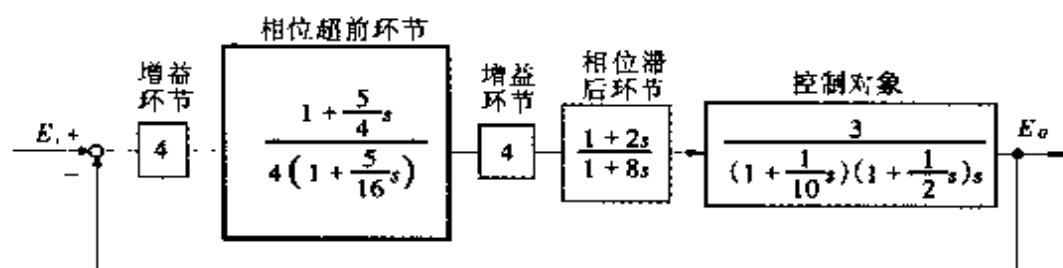


图 8.15 相位超前环节

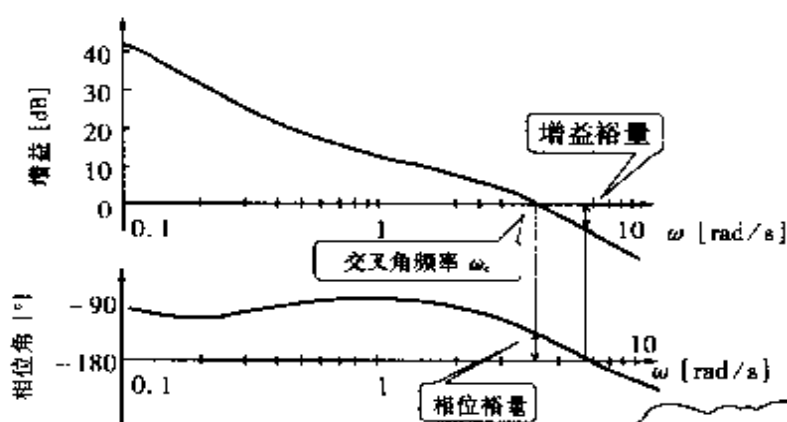
由于希望在开环截止角频率 $\omega = 2$ 弧度/秒的附近提高增益,若取 $1/T_1 = 0.8$ 秒、 $\alpha/T_1 = 4 \times 0.8 = 3.2$ 秒,则成为相位角为正的相位超前环节,如图 8.14 所示。补偿后系统的方框图、波特图及奈奎斯特图分别示于图 8.16 中。

相位超前环节可以用图 8.17 所示的电路实现。该电路从输入 e_1 到输出 e_2 的传递函数为

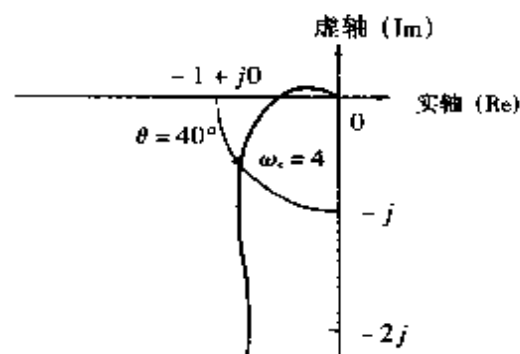
$$G_c = \frac{R_2(1 + CR_1s)}{R_1 + R_2 + CR_1R_2s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1Cs}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}RCs} \quad (8.22)$$



(a) 方框图



(b) 波特图



(c) 奈奎斯特图



图 8.16 相位超前补偿 + 相位滞后补偿

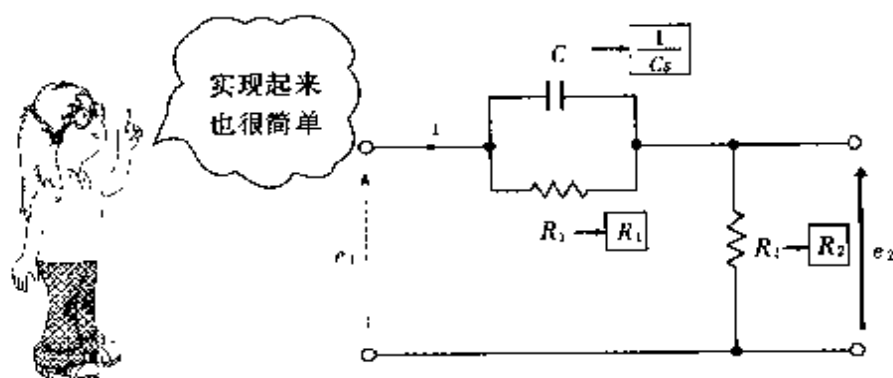


图 8.17 相位超前环节



令 $R_2/(R_1 + R_2) = 1/\alpha$ 、 $R_1 C = T_1$, 则 G_c 为:

$$G_c = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + T_1 s}{1 + (T_1/\alpha)s} \quad (8.23)$$

显然图 8.17 所示电路实现了相位超前环节。

增益补偿称为比例控制(P 调节);相

NOTE

为求图 8.17 所示电路的传递函数。可用拉氏变换作如下置换:

$$e_1 \rightarrow E_1$$

$$e_2 \rightarrow E_2$$

$$i \rightarrow I$$

$$R_1, R_2 \rightarrow R_1, R_2$$

$$C \rightarrow \frac{1}{Cs}$$

可以把图 8.17 变换成与直流电路同样的电路, 其输入电压和输出电压分别为

$$E_1 = \left(\frac{1}{1/R_1 + Cs} + R_2 \right) I \quad E_2 = R_2 I \quad (8.24)$$

传递函数为

$$G_c = \frac{E_2}{E_1} = \frac{R_2 I}{\left(\frac{1}{1/R_1 + Cs} + R_2 \right) I} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + CR_1 s} + R_2} = \frac{R_2(1 + CR_1 s)}{R_1 + R_2 + CR_1 R_2 s} \quad (8.25)$$

位滞后补偿称为**积分控制(I 调节)**;相位超前补偿称为**微分控制(D 调节)**。常用的有比例控制(P 调节),比例-积分控制(PI 调节)以及比例-积分-微分控制(PID 调节)。

8.5 前馈补偿

在第 7.2 节的控制方法中分为增益补偿和特性补偿,特性补偿中又分为串联补偿、反馈补偿和前馈补偿等。其中串联补偿已在第 8 章中作了讨论。有关反馈补偿在第 7 章中作了讨论。下面就前馈补偿作简单说明。

有一个生产某种物品的工厂,在决定工厂的产量时,要根据市场调查,如果认为所生产的物品能卖出去,则按调查的市场需求量提前生产,这就是**前馈补偿**。与前面情况相反,估计一下物品的库存,若库存不足的话,只生产不足的部分,这就是**反馈补偿**。前馈补偿对于运行状态的变化能够快速反应,对于大的变化或急剧的变化可以进行强有力的控制。前馈控制可以用来作为反馈控制的辅助控制。

前馈补偿环节有图 8.18 所示的三种,其中 F 为前馈环节的传递函数、 G_c 为控制环节传递函数、 G 为控制对象的传递函数。

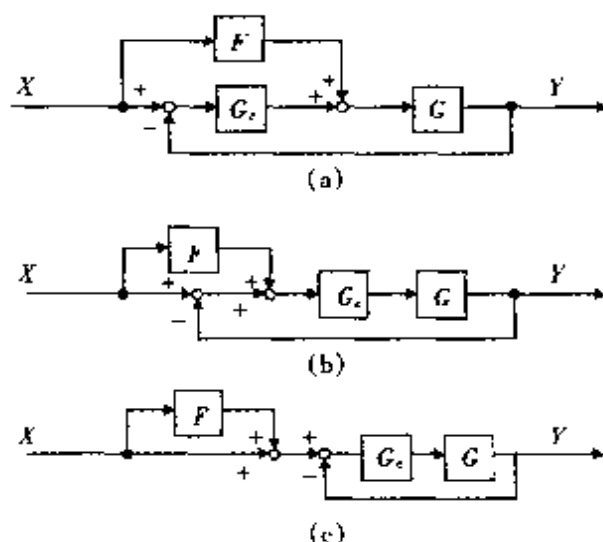
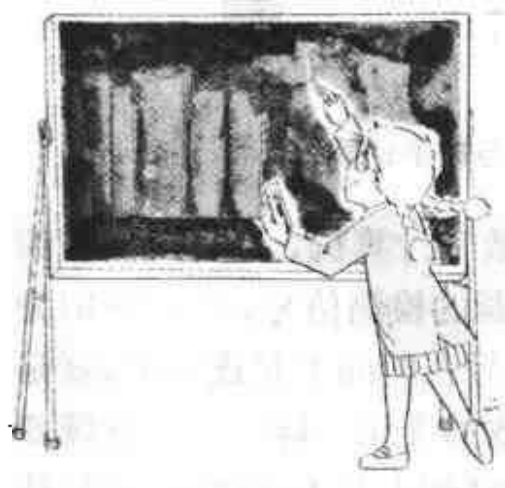


图 8.18 前馈补偿

第9章

采样控制



9.1 数字控制系统

再次考虑第1章中机器人在两点之间移动物体的情况（图1.1）。图1.2所示机器人构成中除动力源以外的部分重新示于图9.1。由传感器检测出从作为控制对象的物体到目的地的距离，将距离信号送到计算机。计算机对输入的信号数据作一定的运算，计算出应该加到控制对象的控制量的数值。计算得到的数值即为对机器人的臂和手等驱动器的指令值。驱动器跟随指令值动作，来移动作为控制对象的物体。上述控制过程中应实行反馈控制。

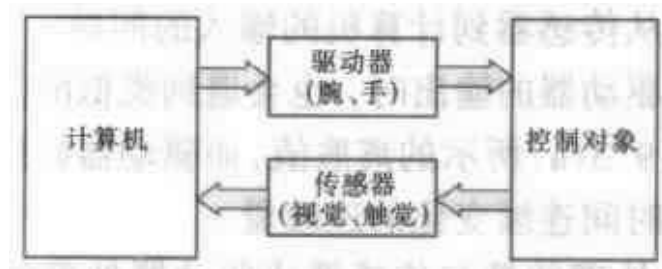


图9.1 机器人控制系统

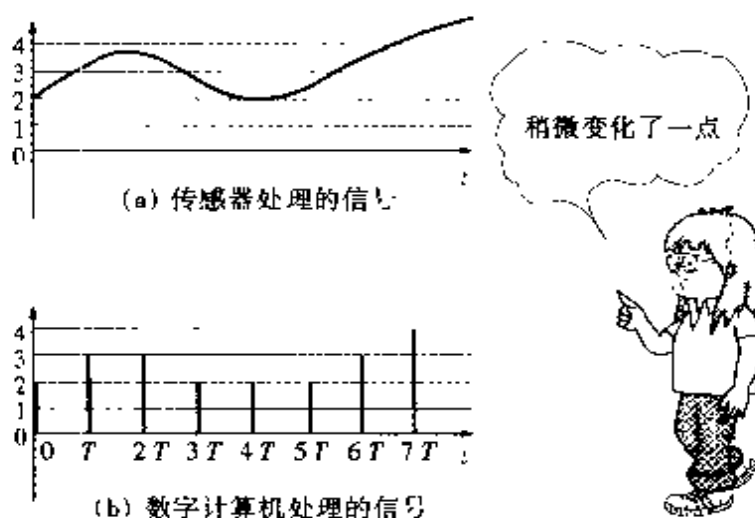


图 9.2 传感器与数字计算机

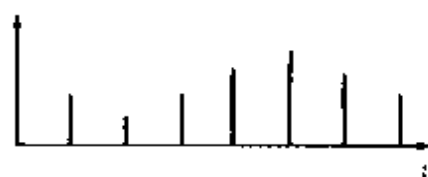
图 9.1 中的计算机一般采用数字计算机, 计算机处理的信号如图 9.2 所示。图 9.2(a) 为传感器的检测信号, 图 9.2(b) 为数字计算机的处理信号。图(a)所示信号在时间上是连续的, 就是说信号的大小随时间连续变化, 像实数的变化一样。大小连续变化的量称为**模拟量**。图(b)所示信号在时间上是不连续的, 信号值以一定周期 T 出现, 信号值的大小像自然数一样不连续。这种其值不连续的量称为**数字量**。具有一定周期 T 的值称为**采样值**。

计算机只能处理数字量, 其值由开关的开、闭来记忆, 若开关数为 8 个 (8 bit) 则只能记忆 $2^8 = 256$ 个数字, 另外, 数字计算机只能处理时间上不连续、按一定周期 T 出现的量, 这是因为数字计算机同一时间只能作一个运算。若计算需要较长时间, 在取某一时刻的数据计算时, 从取入数据开始到 T 秒后结束, 然后才能接受下一时刻的数据。若用一台计算机进行多台机器人控制时, 让计算机只满足一台机器人的需要是不行的, 对每个机器人来说在 T 秒间隔内就时常成为彼此的对手。

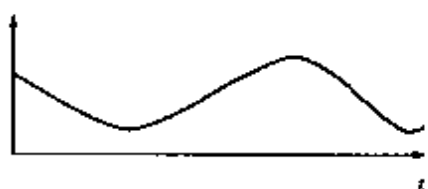
前面说的是从传感器到计算机的输入的问题。当讨论图 9.1 所示的计算机到驱动器的输出时, 也会遇到类似的问题。计算机的输出指令为图 9.3(a) 所示的离散值, 而驱动器处理的信号为图 9.3(b) 所示的随时间连续变化的连续量。

完成计算机处理的量与传感器或驱动器处理的量之间变换

的变换器是 A/D(模拟-数字)转换器与 D/A(数字-模拟)转换器。A/D 转换器能把模拟量变换成数字量,即把时间上连续的量变换成不连续的量(离散量),A/D 转换器设置在传感器与计算机之间。D/A 转换器把数字量变换成模拟量,即把时间上不连续的量(离散量)变换成连续的量,D/A 转换器设置在计算机与驱动器之间。



(a) 数字计算机处理的信号



(b) 驱动器处理的信号

图 9.3 数字计算机与驱动器

考虑到上述情况的数字控制系统

如图 9.4 所示。数字控制系统处理的是数字量,因此也可称为采样控制系统。采样控制系统是这样—个系统:不断选择输入信号并产生采样值,然后将采样值送到作为控制环节的计算机,经运算确定驱动器的控制信号。

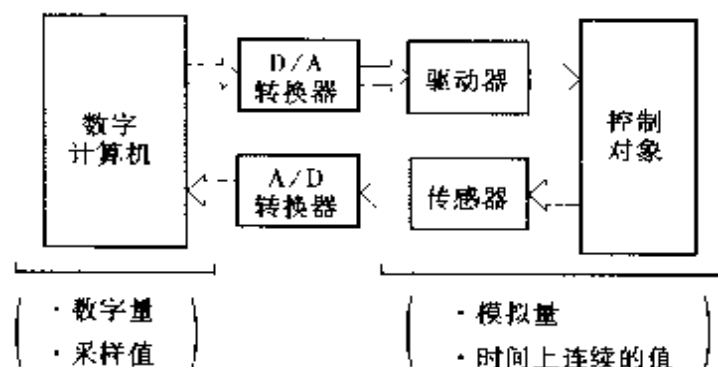


图 9.4 数字控制系统

9.2 A/D 转换器

在本套系列丛书之一的《电子电路入门》中将详细介绍 A/D 转换器。若 A/D 转换器的输入 y 的波形如图 9.5 所示,则其顺序输出的是数字列 2, 3, 3, 2, 2, 3, 5, ... 这个数字列中,在 $t=0$ 时为 2、在 $t=T$ 时为 3、在 $t=2T$ 时为 3、在 $t=3T$ 时为 2, ..., 为了将有关时间

想想看, A/D 转换器和 D/A 转换器, 搞一个吧!!



的信息输入,要利用第3.2节中用过的脉冲函数。大小为1的脉冲称为单位脉冲, $t=0$ 时大小为1的脉冲用 $\delta(t)$ 表示。 $\delta(t)$ 与 $u_0(t)$ 完全相同。 $t=T$ 时大小为1的脉冲记为 $\delta(t-T)$ 、 $t=2T$ 时大小为1的脉冲记为 $\delta(t-2T)$ 。

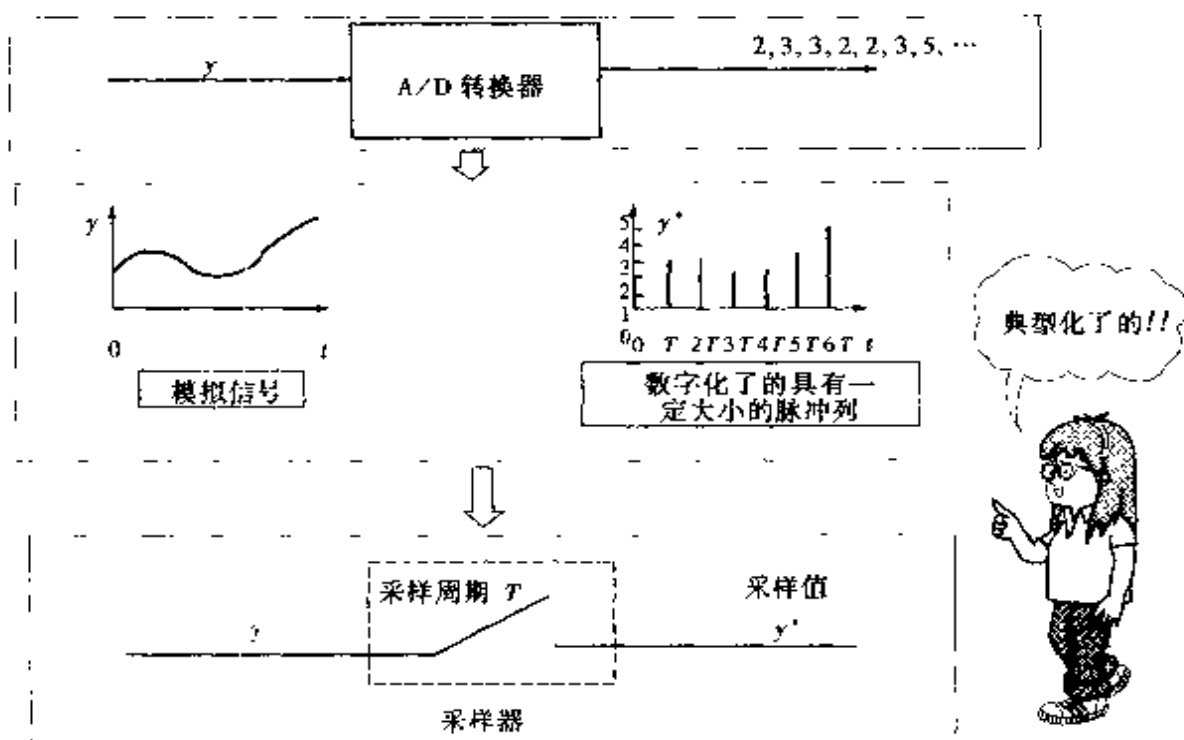


图 9.5 A/D 转换器

REVIEW

$t=0$ 时 $\delta(t)$ 的面积为 1, $t \neq 0$ 时其面积为 0。

$t=T$ 时 $\delta(t-T)$ 的面积为 1, $t \neq T$ 时, 其面积为 0。

$t=2T$ 时 $\delta(t-2T)$ 的面积为 1, $t \neq 2T$ 时, 其面积为 0。

⋮

$\delta(t)$ 就是 $u_0(t)$



利用这些脉冲就可以像图 9.6 那样来确定时间了。大小为变化量的 2, 3, 3, 2, ... 若分别与 $\delta(t)$ 、 $\delta(t-T)$ 、 $\delta(t-2T)$ 相乘, 就可以

得到时间和大小均被确定的脉冲列。这个脉冲列与原来的连续函数 y 相对应,记作 y^* ,称为脉冲信号或采样值。从 y 得到采样值 y^* 的过程叫做采样过程,完成采样过程的装置称为采样器,采样器用以 T 为周期瞬间闭合的开关来表示。这样一来,A/D 转换器可以用采样器表示如图 9.5 所示。

A/D 转换器就是瞬间闭合的开关!

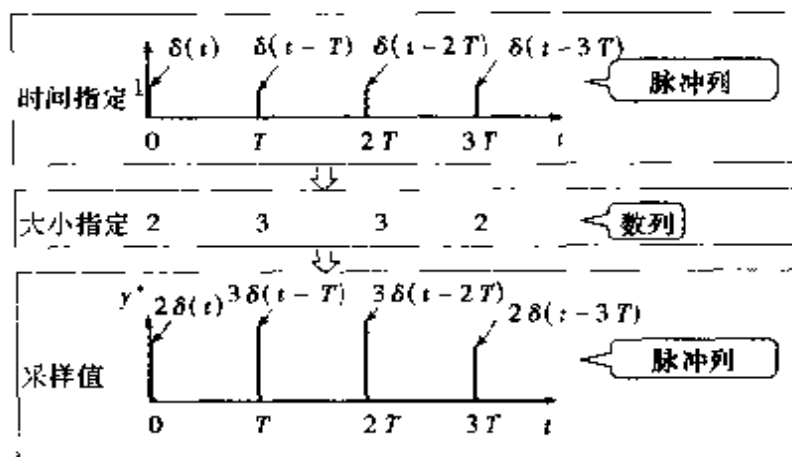


图 9.6 采样动作

从图 9.6 可知,采样值 y^* 为脉冲列,可用下式表示:

$$y^* = 2\delta(t) + 3\delta(t-T) + 3\delta(t-2T) + 2\delta(t-3T) + \cdots \quad (9.1)$$

NOTE

$\delta(t-T)$ 只是 $\delta(t)$ 在时间轴上向右移开 T (滞后 T), 由表 4.1 可知, $\delta(t-T)$ 的拉氏变换为 $\delta(t-T) \rightarrow e^{-Ts}$ 。

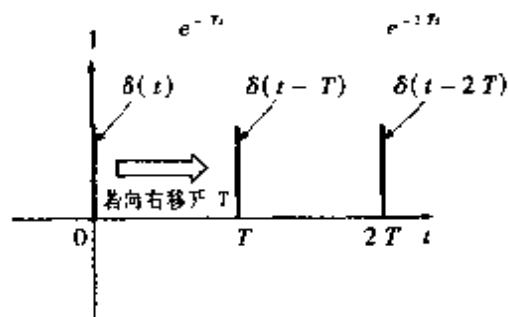


图 9.7

利用拉氏变换,由表 4.1 可得

$$\begin{aligned}\delta(t) &\rightarrow 1 \\ \delta(t-T) &\rightarrow e^{-Ts} \\ \delta(t-2T) &\rightarrow e^{-2Ts} \\ &\vdots\end{aligned}$$

则式(9.1)可改写为

$$\begin{aligned}y^* &= 2\delta(t) + 3\delta(t-T) + 3\delta(t-2T) + \cdots \\ &\rightarrow 2 + 3e^{-Ts} + 3e^{-2Ts} + 2e^{-3Ts} + \cdots\end{aligned}\quad (9.2)$$

令 $e^{Ts} = z$, 则式(9.2)又可改写为

$$2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + \cdots \quad (9.3)$$

若把式(9.3)用 Y 表示的话(若有必要与拉氏变换 Y 区别时可写成 $Y(z)$)

$$Y = 2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + \cdots \quad (9.4)$$

从连续函数 y 求取式(9.4)表示的 Y 称之为 z 变换,记作 $z[y] = Y$ 。反之,从式(9.4)表示的 Y 求取连续函数 y 称之为 z 反变换,记作 $z^{-1}[Y] = y$ 。采样过程可以用变量 z 表示成式(9.4)。

前面我们已经了解了 t 的世界(时域、微分方程),利用拉普拉斯变换又了解了 s 世界(频域、代数方程),现在利用 z 变换又可以进入一个新领域—— z 的世界。三个世界的关系如图 9.8 所示。图中既存在从 s 到 z 的变换,也存在从 z 到 s 的变换,详细的说明在这里就省略了。表 9.1 示出了与表 4.1 的拉氏变换相对应的 z 变换。

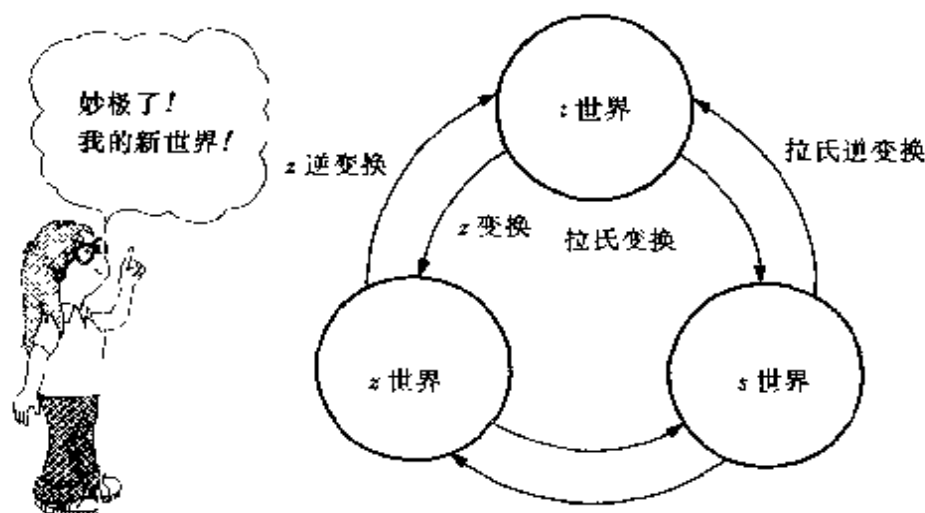
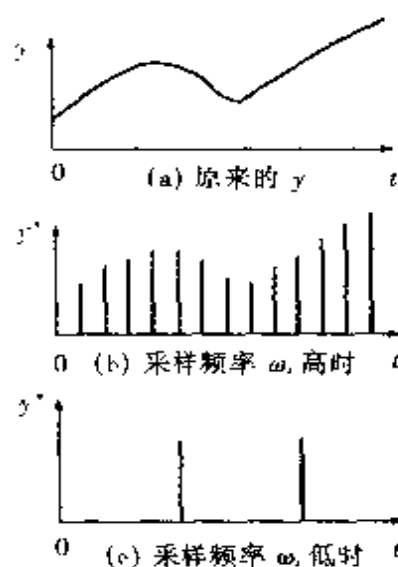


图 9.8 t 、 s 与 z 的世界

表 9.1 z 变换表

| $f(t \text{ 世界})$ | $\xrightarrow[\text{逆变换}]{\text{变换}}$ | $F(z \text{ 世界})$ |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 单位脉冲函数 $u_0(t)$ 或 $\delta(t)$ | | 1 |
| 单位阶跃函数 $u(t)$ | | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ 或 $\frac{z}{z-1}$ |
| e^{-at} | | $\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$ 或 $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| $\sin bt$ | | $\frac{z^{-1} \sin bT}{1-2z^{-1} \cos bT + z^{-2}}$ 或 $\frac{z \sin bT}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$ |
| $\cos bt$ | | $\frac{1+z^{-1} \cos bT}{1-2z^{-1} \cos bT + z^{-2}}$ 或 $\frac{z(z+\cos bT)}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$ |
| $e^{-at} \sin bt$ | | $\frac{z^{-1} e^{-aT} \sin bT}{1-2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + z^{-2} e^{-2aT}}$ 或 $\frac{z e^{aT} \sin bT}{z^2 e^{2aT} - 2z e^{aT} \cos bT + 1}$ |
| $a_1 f_1 + a_2 f_2$ | | $a_1 F_1 + a_2 F_2$ |
| f 滞后 nT 时 | | $z^{-n} F$ |
| 初始值 $\lim_{t \rightarrow 0} f$ | | $\lim_{z \rightarrow \infty} (1-z^{-1}) F$ |
| 稳态值 $\lim_{t \rightarrow \infty} f$ | | $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F$ |



原来波形的频率是多少呢?

图 9.9 采样频率 ω_s 的选择

最后,考虑一下采样器的采样频率 ω_s 的选择方法。图 9.9(a) 表示原来的连续函数 y ; 图 9.9(b) 表示采样频率 ω_s 高时的采样值; 图(c)表示采样频率 ω_s 低时的采样值。可以看出,采样频率 ω_s 高时,采样值的变化更接近连续函数 y 的波形; 采样频率 ω_s 越低,

采样值与连续函数 y 的波形的差别越大。采样频率 ω_s 的下限由采样定理决定。所谓采样定理可表述如下：如果采样频率 ω_s 大于或等于连续信号 y 所包含的最高频率 ω_m 的 2 倍 $2\omega_m$ ($\omega_s \geq 2\omega_m$)，则采样值 y^* 能无失真地恢复到原来的连续函数 y 的波形。例如若 $\omega_m = 100 \text{ rad/s}$ ，则 ω_s 必须为 200 rad/s 以上。

采样频率越高，就可以越迅速地检测出采样值的变化，系统的快速性则越好。由于机器人位置控制等控制系统要求必须快速响应，采样频率 $f_s (= \omega_s / 2\pi)$ 一般取 1 kHz 左右。



9.3 D/A 转换器

有关 D/A 转换器的详细情况，也请参照本套系列丛书之一的《电子电路入门》。在图 9.10 中，从计算机输出的数字列 2, 4, 5, 4, 3, ... 输入到 D/A 转换器，则 D/A 转换器的输出 m 为阶梯波

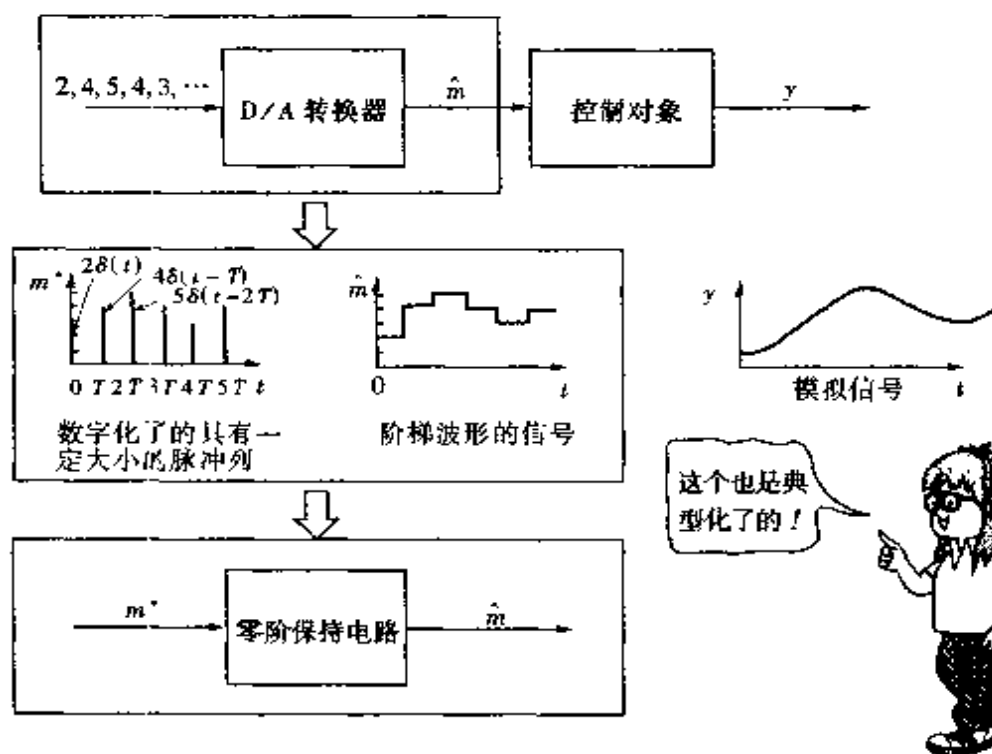


图 9.10 D/A 转换器

形。与第 9.2 节的情况一样,对于数字列 2, 4, 5, 4, 3, ..., 还要利用 $\delta(t)$ 函数表示有关的时间信息。图 9.10 中的采样值 m^* 可表示成下式:

$$m^* = 2\delta(t) + 4\delta(t-T) + 5\delta(t-2T) + \cdots \quad (9.5)$$

利用表 9.1 进行 z 变换:

$$2\delta(t) \rightarrow 2$$

$$4\delta(t-T) \rightarrow 4z^{-1}(\text{滞后 } T)$$

$$5\delta(t-2T) \rightarrow 5z^{-2}(\text{滞后 } 2T)$$

这样式(9.5)可改写成

$$M = 2 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + \cdots \quad (9.6)$$

图 9.10 中,为了从已求得的采样值 m^* 得到阶梯波信号 \hat{m} , 应该怎么办呢? 由图可知, $t=0$ 时的数值 2 在时间上从 0 一直持续到 T , 而 $t=T$ 时的数值 4 在时间上则从 T 持续到 $2T$, 像这样把前一个采样时刻的采样值持续到下一个采样时刻的情况称为**零阶保持**。用于实现零阶保持的电路称为**零阶保持电路**。这样一来, D/A 转换器就可以用零阶保持电路来表示(图 9.10)。

零阶保持电路可以用拉氏变换来表示。图 9.11 中, $t=0$ 时单位脉冲 $\delta(t)$ 输入给零阶保持电路, 电路的输出从 $t=0$ 到 $t=T$ 始终保持高度为 1 的方波脉冲。这个方波脉冲从 $t=0$ 开始为单位阶跃波 $u(t)$, 而从 $t=T$ 开始则为 $u(t)$ 与 $-u(t-T)$ 之和。

$-u(t-T)$ 是幅值为 -1、时间上比 $u(t)$ 滞后 T 的单位阶跃波。由表 4.1 可知, $u(t)$ 的拉氏变换为 $1/s$, $-u(t-T)$ 的拉氏变换比 $u(t)$ 滞后 T , 并且符号相反, 为 $-(1/s)e^{-Ts}$ 。因此 $u(t) + (-u(t-T))$ 的拉氏变换为 $(1 - e^{-Ts})/s$ 。

作为被控对象, 一般说来多为一阶惯性环节与二阶振荡环节。由图 3.27 与图 3.28 可知, 上述环节高频时的增益减小, 因此

滞后 T 时写成 z^{-1}
滞后 $2T$ 时一定是 z^{-2}



滞后 T 就乘以 e^{-Ts}
显然 $e^{-Ts} = z^{-1}$



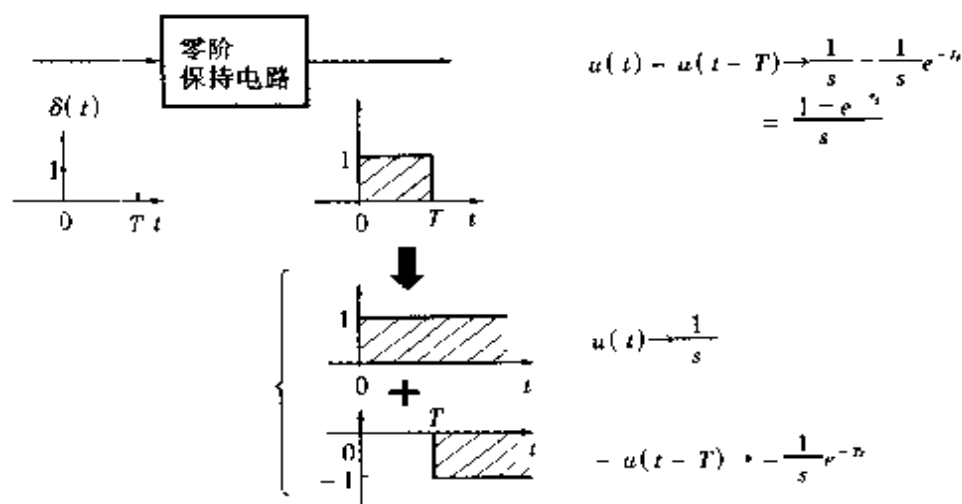


图 9.11 零阶保持电路

高频信号难以通过。这样一来,以图 9.10 中所示的阶梯波作为上述环节的输入时,含有高频成分的棱角部分能够被削掉而得到平滑的输出 y 。

有棱角的话,高频成分就多吗??

9.4 数字计算机的运算

第 9.2、9.3 节中介绍了 A/D 转换器和 D/A 转换器。本节将讨论数字计算机的有关运算问题。

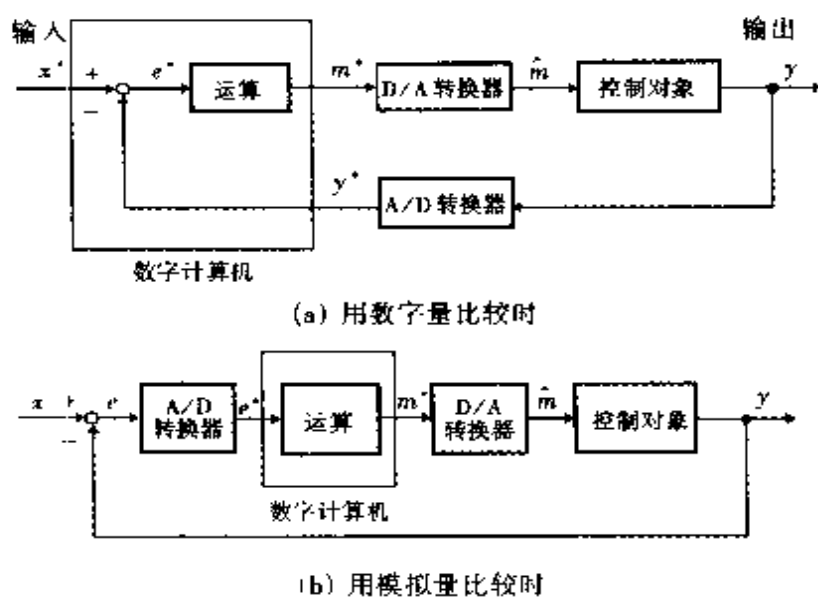


图 9.12 计算机的运算

图 9.12(a)中,计算机将对通过 A/D 转换器得到的传感器信号 y^* 与目标值 x^* 的数字量进行比较,并产生偏差信号 e^* 。然后以偏差信号为基础进行针对相应控制的运算并输出 m^* , m^* 作为 D/A 转换器的输入信号。图 9.12(b)中,在数字计算机之前进行模拟量的比较,然后通过 A/D 转换器将模拟量的偏差信号 e 变换成数字量的偏差信号 e^* 。

对于连续控制系统,若运算部分的输入 e 的拉氏变换为 E ,输出 m 的拉氏变换为 M ,运算部分的传递函数为 G ,则可以写成下式:

$$M = GE \quad (9.7)$$

例如,输入 $e = u(t)$ 、 $E = 1/s$, $G = 1/(s+1)$ 时,代入上式,得

$$M = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (9.8)$$

利用表 4.1 取上式的拉氏逆变换,可得

$$m = u(t) - e^{-t}u(t) \text{ 或 } m = 1 - e^{-t} \quad (t > 0) \quad (9.9)$$

如图 9.13(a)所示。

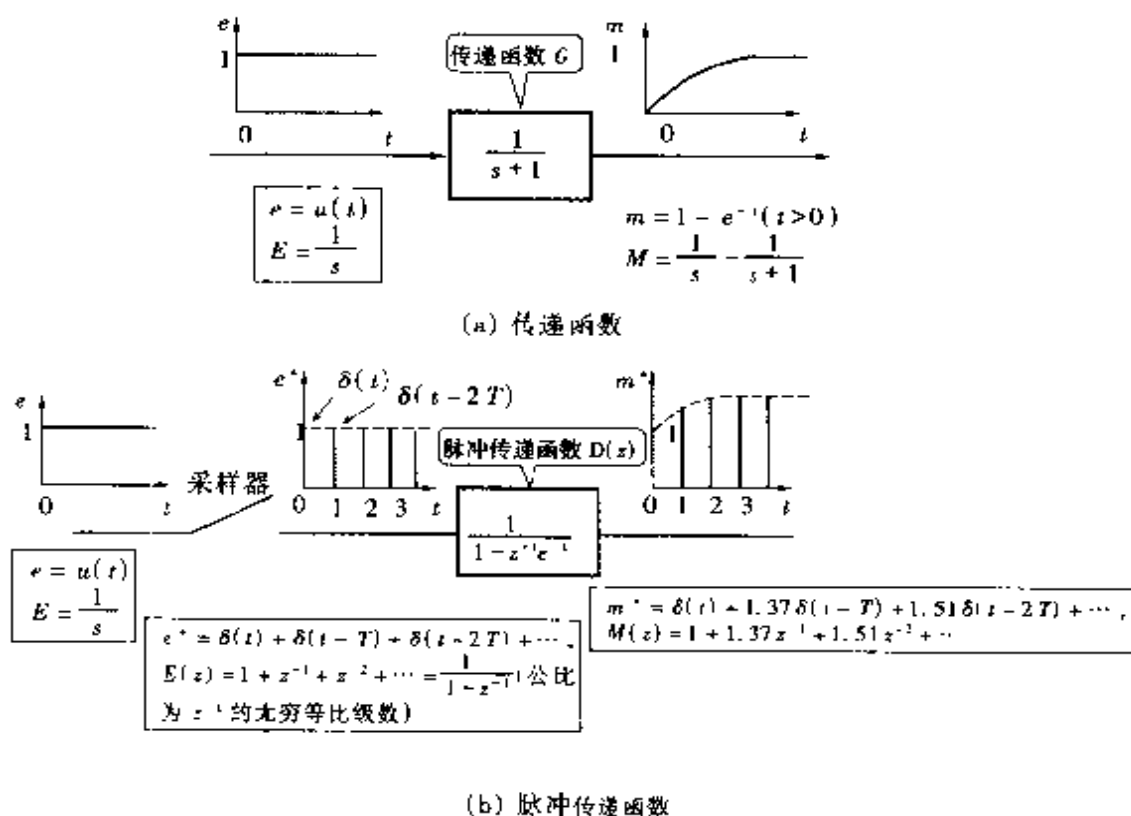


图 9.13 脉冲传递函数

对于采样控制系统,也可以作类似的计算。计算机运算部分的输入 e 的 z 变换为 $E(z)$ (为了与拉氏变换的 E 区别起见,附加了一个 (z)), 输出 m 的 z 变换为 $M(z)$, 运算部分的传递函数在这种场合称为脉冲传递函数, 记为 $D(z)$, 二者的关系可写成下式:

$$M(z) = D(z) E(z) \quad (9.10)$$

例如, 在图 9.13(b) 中, 当 $e = u(t)$ 时 $E(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = 1/(1 - z^{-1})$, 脉冲传递函数 $D(z) = 1/(1 - z^{-1}e^{-1})$ (当 $d = e^{-1}$, 其拉氏变换为 $G = 1/(s + 1)$ 时), 则运算部分的输出 $M(z)$ 为:

$$M(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (9.11)$$

在求取式(9.11)的 z 逆变换时, 可采用长除法如下:

MEMO

级数 $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 是公比为 a (前项 $\times a =$ 后项) 的无穷等比级数, 其值可用式 $1/(1 - a)$ 求得。因此 $1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$ 是公比为 z^{-1} 的无穷等比级数, 其值为 $1/(1 - z^{-1})$ 。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 + z^{-1}e^{-1} + z^{-2}e^{-2} + \cdots \\
 1 - z^{-1}e^{-1} \overline{) 1} \\
 \underline{1 - z^{-1}e^{-1}} \\
 z^{-1}e^{-1} \\
 \underline{z^{-1}e^{-1} - z^{-2}e^{-2}} \\
 z^{-2}e^{-2} \\
 \underline{z^{-2}e^{-2} - z^{-3}e^{-3}} \\
 z^{-3}e^{-3} \\
 \vdots
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots \\
 1 - z^{-1} \overline{) 1} \\
 \underline{1 - z^{-1}} \\
 z^{-1} \\
 \underline{z^{-1} - z^{-2}} \\
 z^{-2} \\
 \underline{z^{-2} - z^{-3}} \\
 z^{-3} \\
 \vdots
 \end{array}
 \end{array}$$

则 $M(z)$ 可改写为,

$$\begin{aligned}
 M(z) &= (1 + z^{-1}e^{-1} + z^{-2}e^{-2} + \cdots)(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \\
 &= 1 + (1 + e^{-1})z^{-1} + (1 + e^{-1} + e^{-2})z^{-2} + \cdots \quad (9.12)
 \end{aligned}$$

其中 $e^{-1} = 1/e \approx 1/2.72 \approx 0.37$, 则式(9.12)可进一步写成

$$M(z) \approx 1 + 1.37z^{-1} + 1.51z^{-2} + \cdots \quad (9.13)$$

取 z 逆变换, 得

$$m^* = \delta(t) + 1.37\delta(t-T) + 1.51\delta(t-2T) + \cdots \quad (9.14)$$

9.5 闭环脉冲传递函数

用于采样值控制系统的研究方法中,典型的是图 9.14 所示的数字控制系统。图中,A/D 转换器用采样器来表示,计算机的运算用脉冲传递函数表示,D/A 转换器用零阶保持电路表示。将系统输出 y (连续量,其拉氏变换为 Y)反馈并与输入 x (拉氏变换为 X)相比较,用采样器将偏差信号 e (拉氏变换为 E)变换成采样动作 e^* (其 z 变换为 $E(z)$),通过表示计算机运算部分的脉冲传递函数 $D(z)$ 时,可得采样值 m^* (z 变换为 $M(z)$)。由零阶保持电路

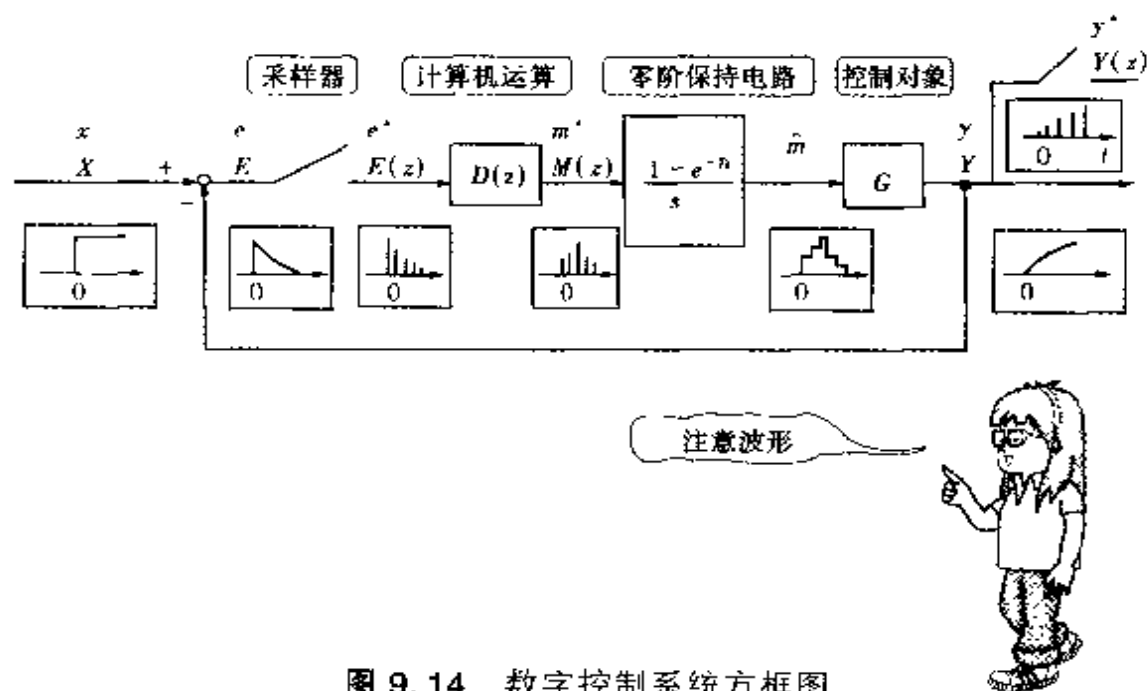


图 9.14 数字控制系统方框图

将 m^* 变换为阶梯波 \hat{m} , 再通过被控对象的传递函数 G 就得到了输出 y 。

下面求取闭环脉冲传递函数。首先, 偏差信号 E 为 $E = X - Y$ 。通过采样器后的信号 $E(z)$ 为采样动作后的 $X(z)$ 与 $Y(z)$ 之差, 即

$$E(z) = X(z) - Y(z) \quad (9.15)$$

由脉冲传递函数 $D(z)$ 可得计算机的输出 $M(z)$ 为:

$$M(z) = D(z) E(z) \quad (9.16)$$

若零阶保持电路的传递函数为 $H = (1 - e^{-Ts})/s$, 控制对象的传递函数为 G , 则输出 Y 为:

$$Y = HCM(z) \quad (9.17)$$

采样动作后的输出 y^* 的 z 变换 $Y(z)$ 为:

$$Y(z) = HG(z)M(z) \quad (9.18)$$

这里, $HG(z)$ 是用拉氏变换表示的传递函数 H 与 G 乘积后的 z 变换。

由式(9.15)、(9.16)、(9.18)得

$$Y(z) = HG(z)D(z)[X(z) - Y(z)] \quad (9.19)$$

则闭环脉冲传递函数 $W_c(z)$ 为

$$W_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{HG(z)D(z)}{1 + HG(z)D(z)} \quad (9.20)$$

9.6 脉冲传递函数 $D(z)$ 的确定方法

要想实现所期望的闭环脉冲传递函数 $W_c(z)$, 应如何确定表示计算机运算的脉冲传递函数 $D(z)$ 呢?

从式(9.20)可得

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{W_c(z)}{1 - W_c(z)} \quad (9.21)$$

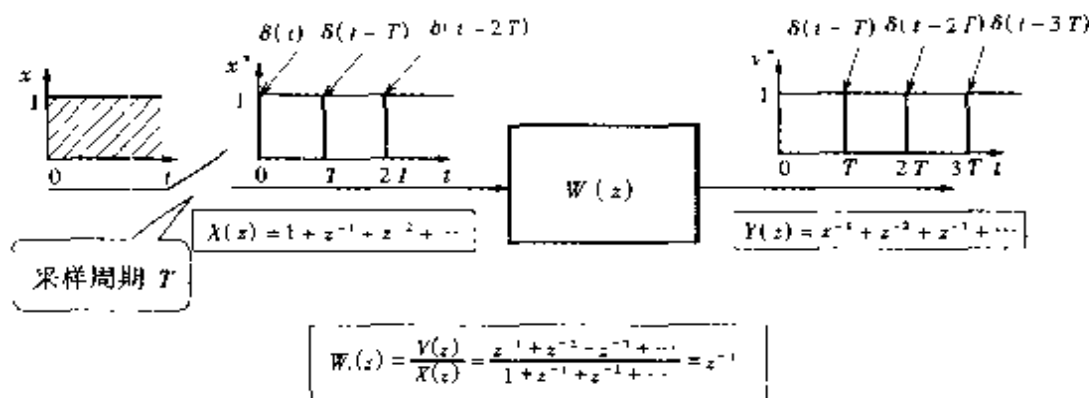
若将所期望的 $W_c(z)$ 代入式(9.21), 就可以求得脉冲传递函数 $D(z)$ 。

下面举例说明。在直流电动机机器人手腕移动系统中, 当手腕移动速度采用数字控制时, 图 9.14 中的控制对象的传递函数 G 为:

$$G = \frac{1}{1 + T_ms} \quad (9.22)$$

其中, T_m 为机械时间常数。

当速度指令 x 为单位阶跃波形输入时, 如图 9.15 所示, 第2个采样动作时就希望快速地得到输出与目标值一致的响应。由图可知, 这时系统的闭环脉冲传递函数 $W_c(z)$ 为:

图 9.15 闭环脉冲传递函数 $W(z)$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots}{1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots} = z^{-1} \quad (9.23)$$

将上式代入式(9.21), 得

$$D(z) = \frac{1 - e^{-T/T_m} z^{-1}}{(1 - e^{-T/T_m}) z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (9.24)$$

其中

$$HG(z) = \left(\frac{1 - e^{-T}}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_m s} \right) \text{ 的 } z \text{ 变换} = \frac{(1 - e^{-T/T_m}) z^{-1}}{1 - e^{-T/T_m} z^{-1}} \quad (9.25)$$

这里略去了式(9.25)的计算过程。为了简单起见, 假定 $T/T_m = 1$, 则脉冲传递函数 $D(z)$ 为:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 - e^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - e^{-1} z^{-2}}{z^{-1} - z^{-2}} = 1.58 \frac{1 - 0.37 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (9.26)$$

利用式(9.26)就可以求得 $D(z)$ 了。

利用式(9.26), 可以求得按一定程序书写的计算机运算部分的输出 m 。

去除式(9.26)的分母, 得

$$M(z)(1 - z^{-1}) = 1.58 E(z)(1 - 0.37 z^{-1})$$

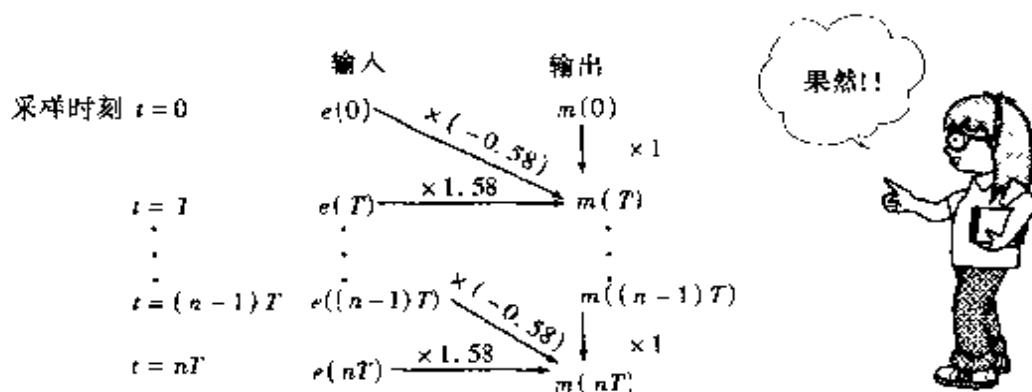
或

$$M(z) - z^{-1} M(z) = 1.58 E(z) - 0.58 z^{-1} E(z)$$

移项得

$$M(z) = 1.58 E(z) - 0.58 z^{-1} E(z) + z^{-1} M(z) \quad (9.27)$$

设 $M(z)$ 在各采样时刻的值为 $m(0)$, $m(T)$, $m(2T)$, \dots , $m[(n-1)T]$

图 9.16 输出 $m(nT)$ 的求法

$T]$, $m(nT)$; $E(z)$ 的各采样时刻的值为 $e(0)$, $e(T)$, $e(2T)$, \dots , $e[(n-1)T]$, $e(nT)$ 。例如, $M(z)$ 对应 $m(T)$ 时, 有如下关系:

$$M(z) \rightarrow m(T)$$

$$E(z) \rightarrow e(T)$$

$$z^{-1}E(z) \rightarrow e(0) \text{ (乘以一个 } z^{-1}, \text{ 就滞后一个 } T)$$

$$z^{-1}M(z) \rightarrow m(0) \text{ (乘以一个 } z^{-1}, \text{ 就滞后一个 } T)$$

因此 $m(T)$ 可以写成

$$m(T) = 1.58e(T) - 0.58e(0) + m(0) \quad (9.28)$$

由此可知, $t=T$ 时的 m 值 $m(T)$ 为 $t=T$ 时的 e 值 $e(T)$ 乘以 1.58、 $t=0$ 时的 e 值 $e(0)$ 乘以 0.58、及 $t=0$ 时的 m 值 $m(0)$ 三者之和。一般情况下可写为

$$m(nT) = 1.58e(nT) - 0.58e[(n-1)T] + m[(n-1)T] \quad (9.29)$$

其中, $n=0, 1, 2, \dots$ 。上述计算利用数字计算机可以很容易实现。图 9.16 中, 由于确定 $m(T)$ 时的输入 $e(0)$, $e(T)$ 和输出 $m(0)$ 均为已知, 故 $m(T)$ 就可以通过计算求出了。同理, 确定 $m(nT)$ 时, 输入 $e[(n-1)T]$, $e(nT)$, 输出 $m[(n-1)T]$ 也是已知的, 故 $m(nT)$ 就可以计算求出了。



参 考 文 献

- (1) 中野栄二：ロボット工学入門，オーム社
- (2) ロボット技術百科，日刊工業新聞社
- (3) 渡辺茂監修：産業用ロボットの技術，オーム社
- (4) 内山勝：メカトロニクスとコントロール，機械設計，1981年7月
- (5) 伊藤正美：自動制御機論，昭晃堂
- (6) 大島康次郎監修，稲葉正太郎：自動制御入門，丸善
- (7) 制御システム工学：R. C. ドルフ，佐貫亦男訳，培風館