Handbuch: Rechnen in Abelschen Kategorien

Long Huynh Huu

Inhaltsverzeichnis

1. Produkte und Coprodukte

1.1. Für allgemeine Kategorien

Anders als im Titel erwähnt werde ich in diesem Abschnitt keine Coprodukte erwähnen – es gelten einfach die dualen Aussagen.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten und es existiere ein Produkt $\prod_i Y_i := \prod_{i\in I} Y_i$ mit Projektionen $\pi_j : \prod_i Y_i \to Y_j$.

Proposition 1.1. *Die Projektionen sind Epis.*

Sei $X \in \mathcal{C}$ und $f_i : X \to Y_i$ Pfeile. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes wird ein eindeutiger Pfeil $X \to \prod_i Y_i$ induziert, den ich mit $\mathrm{fork}_i\, f_i$ bezeichne, sodass für alle $i \in I$ gilt: $f_i = \pi_j .\, \mathrm{fork}_i\, f_i$. Alternativ kann man auch $\mathrm{fork}(f_1, ..., f_n)$ schreiben.

Im Falle von Coprodukten schreibt man $\mathrm{join}_i\, f_i$ bzw. $\mathrm{join}(f_1, ..., f_n)$.

Proposition 1.2. *Sei $u : W \to X$ ein Pfeil. Dann gilt $(\prod_i f_i).u = \prod(f_i.u) : W \to \prod_i Y_i$.*

1.2. In Abelschen Kategorien

Sei nun $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $X, X_1, ..X_n$ sowie $Y, Y_1, ..Y_n$ Objekte und $f_i : X_i \to Y_i$ (für $i = 1, ..n$) Pfeile. Für die direkten Summen $\bigoplus_i X_i$ bzw. $\bigoplus_i Y_i$ bezeichne die Inklusionen und Projektionen mit $\iota_j^X : X_j \to \bigoplus_i X_i$ und $\pi_j^X : \bigoplus_i X_i \to X_j$ bzw. $\iota_j^Y : Y_j \to \bigoplus_i Y_i$ und $\pi_j^Y : \bigoplus_i Y_i \to Y_j$.

Proposition 1.3. *Die f_i induzieren eindeutig einen Pfeil $\mathrm{par}_i\, f_i : \bigoplus_i X_i \to \bigoplus_i Y_i$ mit $f_j = \pi_j^Y .\, \mathrm{par}_i\, f_i.\iota_j^X$ für alle j.*

Proposition 1.4. *Sind die f_i Monos, Epis oder Isos, so entsprechend auch $\mathrm{par}_i\, f_i$.*

1.3. Fork, Join, Parallel

Fork, Join und Par(allel) von Pfeilen hängen wie folgt zusammen:

Proposition 1.5. *Seien mit $f_i : V \to W_i, g_i : W_i \to X_i, h_i : X_i \to Y_i, k : Y_i \to Z$ für $i = 1, ..., n$ Pfeile bezeichnet. Es gelten*

1. $\mathrm{fork}(g_1.f_1, ...) = \mathrm{par}(g_1, ...).\,\mathrm{fork}(f_1, ...)$
2. $\mathrm{par}(h_1.g_1, ...) = \mathrm{par}(h_1, ...).\,\mathrm{par}(g_1, ...)$
3. $\mathrm{join}(k_1.h_1, ...) = \mathrm{join}(k_1, ...).\,\mathrm{par}(h_1, ...)$

2. Faserprodukte (und Fasersummen)

Ein wenig Notation: Ich bezeichne für Pfeile $f : X \to Z, g : Y \to Z$ die Projektionen des Faserprodukts als $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ und $\mathrm{fib}_2(f, g) : X \times_Z Y \to Y$. Weiter definiere $\mathrm{fib}(f, g) := f.\,\mathrm{fib}_1(f, g) = g.\,\mathrm{fib}_2(f, g)$. Für Fasersummen ersetze ich fib durch cofib. Um etwas mit dieser Notation vertraut zu werden verwende ich sie gleich in der folgenden Definition.

Definition 2.1 (Universelle Eigenschaft des Faserprodukts). Seien $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Pfeile, dann heißt das Tripel $(X \times_Z Y, \mathrm{fib}_1(f, g), \mathrm{fib}_2(f, g))$ bestehend aus einem Objekt und zwei Projektionen *Faserprodukt*, falls:

1. $f.\,\mathrm{fib}_1(f, g) = g.\,\mathrm{fib}_2(f, g)$
2. Für jedes weitere Paar von Morphismen $\theta_1 : M \to X, \theta_2 : M \to X$ erhalten wir einen eindeutigen Pfeil $\mu : M \to X \times_Z Y$, sodass $\theta_i = \mathrm{fib}_i(f, g).\mu$ für $i = 1, 2$.

Dies definiert ein Faserprodukt eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

Proposition 2.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Morphismen sowie $X \times_Z Y$ deren Faserprodukt. Ist $g : Y \to Z$ ein Mono oder Iso, so ist auch die Projektion $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ ein Mono bzw. ein Iso.*

Korollar 2.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X_1 \hookrightarrow X$ und $X_2 \hookrightarrow X$ Monos in $\mathcal{A}$. Dann ist der induzierte Pfeil $X_1 \times_X X_2 \to X$ auch Mono als Komposition $X_1 \times_X X_2 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X$ von Monos.*

Proposition 2.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Morphismen. Ist $g : Y \to Z$ ein Epi, so ist auch die Projektion $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ ein Epi.*

Satz 2.1 (Staffelung). *Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : W \to Z$ Pfeile und (bla, Existenzaussage damit alle folgenden Faserprodukte definiert sind...). Dann ist $X \times_{g.f,Z,h} W = X \times_{f,Y,\mathrm{fib}_1(g,h)} (Y \times_{g,Z,h} W)$ und es gelten*

- $\mathrm{fib}_1(g.f, h) = \mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}_1(g, h))$
- $\mathrm{fib}_2(g.f, h) = \mathrm{fib}_2(g, h).\,\mathrm{fib}_2(f, \mathrm{fib}_1(g, h))$

Proposition 2.3 (Kommutativität). *Seien $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Pfeile. Dann gilt*

$$X \times_Z Y = Y \times_Z X$$

mit $\mathrm{fib}_1(f, g) = \mathrm{fib}_2(g, f)$ und $\mathrm{fib}_2(f, g) = \mathrm{fib}_1(g, f)$.

Proposition 2.4 (Assoziativität). *Seien* $f : W \to Z, g : X \to Z, h : Y \to Z$ *Pfeile und* $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{f, g, h\}$ *eine beliebige Permutation dieser Pfeile. Dann gelten*

$$\mathrm{fib}(\mathrm{fib}(f, g), \mathrm{fib}(f, h)) = \mathrm{fib}(\mathrm{fib}(\alpha, \beta), \mathrm{fib}(\alpha, \gamma)).$$

Genauer haben wir sogar

$$\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f, g), \mathrm{fib}_1(f, h)) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(g, f), \mathrm{fib}_1(g, h))$$

und schließlich gilt auch noch

$$\mathrm{fib}(\mathrm{fib}(f, g), h) = \mathrm{fib}(f, \mathrm{fib}(g, h))$$

Korollar 2.2 (Faserproduktwürfel). *Im folgenden werden wir etwas Vorstellungskraft brauchen: Mit* $E_{000}, E_{001}, ..., E_{111}$ *werden wir Objekte bezeichnen, die auf den Ecken eines Einheitsquadrats* $[0, 1]^3$ *sitzen, nämlich an den Punkten* $(0, 0, 0), (0, 0, 1), ...(1, 1, 1)$*. Gegeben seien drei Pfeile* $f : E_{100} \to E_{110}, g : E_{111} \to E_{110}, h : E_{010} \to E_{110}$ *gegeben. Die Behauptung ist nun, dass es möglich ist, jeder verbleibenden Kante genau einen Pfeil und jeder verbleibenden Ecke ein Objekt zuzuordnen, sodass auf jeder Seite des Würfels ein Faserproduktdiagramm steht.*

[Hier kommt eine nette Illustration hin]

Proposition 2.5. *Für* $f : X \to Z, g : Y \to Z, h : Z \to Z'$ *existiert ein eindeutiger Pfeil* $\kappa : X \times_{f,Z,g} Y \to X \times_{h.f,Z,h.g} Y$ *mit* $\mathrm{fib}_i(f, g) = \mathrm{fib}_i(h.f, h.g).\kappa$ *für* $i = 1, 2$*. Ist auch noch* h *ein Mono, dann ist* κ *ein Iso.*

3. Kerne, Cokerne, Bilder und Cobilder

Wir sind nun in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

3.1. Kerne (und Cokerne)

Proposition 3.1. *Für* $X, Y \in \mathcal{A}$ *gelten*

1. $\ker(0_{X,Y}) = \mathrm{id}_X$
2. $\mathrm{coker}(0_{X,Y}) = \mathrm{id}_Y$
3. $\ker(\mathrm{id}_Y) = 0_{0,Y}$
4. $\mathrm{coker}(\mathrm{id}_X) = 0_{X,0}$

Proposition 3.2. *Ein Pfeil* $\beta : Y \hookrightarrow Z$ *ist genau dann ein Mono, wenn* $\ker(\beta) = 0_{0,Y}$*.*

Ein Pfeil $\alpha : X \twoheadrightarrow Y$ *ist genau dann ein Epi, wenn* $\mathrm{coker}(\alpha) = 0_{Y,0}$*.*

Proposition 3.3. *Man kann Kerne als Faserprodukte ausdrücken. Sei* $f : X \to Y$*, dann gilt*

$$\ker(f) = \mathrm{fib}_1(f, 0_{0,Y})$$

3.2. Bilder (und Cobilder)

Definition 3.1. Sei $f : X \to Y$ ein Pfeil, dann bezeichnet man den Kern des Cokerns $\ker(\mathrm{coker}(f)) =: \mathrm{im}(f)$ als Bild von f und den Cokern des Kerns $\mathrm{coker}(\ker(f)) =: \mathrm{coim}(f)$ als Cobild von f.

Proposition 3.4. *Sei* $f : X \to Y$ *ein Pfeil, dann erfüllt jedes Bild* $\mathrm{im}(f) =: g : B \to Y$ *folgende universelle Eigenschaft: Es gibt einen Pfeil* $h : X \to B$*, sodass* $g.h = f$*. Weiters gibts für jede Faktorisierung* $f = m.e : X \to B' \to Y$ *mit* m *Mono einen eindeutigen Pfeil* $\gamma : B \to B'$*, sodass* $h = m.\gamma$*.*

Proposition 3.5. *Für* $X, Y \in \mathcal{A}$ *gelten*

1. $\mathrm{im}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$
2. $\mathrm{coim}(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_Y$

3. $\mathrm{im}(0_{X,Y}) = 0_{0,Y}$
4. $\mathrm{coim}(0_{X,Y}) = 0_{X,0}$

Proposition 3.6. *Seien $\alpha : X \to Y, \beta : Y \hookrightarrow Z$ Pfeile und β Mono. Dann gilt $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \beta.\mathrm{im}(\alpha)$.*

Proposition 3.7. *Seien $\alpha : X \twoheadrightarrow Y, \beta : Y \to Z$ Pfeile und α Epi. Dann gilt $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$.*

Korollar 3.1. *Seien $\alpha : X \twoheadrightarrow Y, \beta : Y \hookrightarrow Z$, α Epi und β Mono, dann gilt $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \beta$. Insbesondere gelten $\mathrm{im}(\beta) = \beta$ und $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{id}_Y$.*

Beweis. $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \mathrm{im}(\beta) = \beta.\mathrm{im}(\mathrm{id}) = \beta$. Für die anderen Aussagen setzte jeweils $\alpha = \mathrm{id}_Y, X = Y$ bzw. $\beta = \mathrm{id}_Y, Y = Z$.

Bemerkung 3.1. Umgekehrt folgt aus $\mathrm{im}(\beta') = \beta'$ für einen Pfeil β', dass β' ein Mono ist, d.h.: Es ist β genau dann Mono, wenn $\mathrm{im}(\beta) = \beta$

Korollar 3.2. *Monos sind Kerne und Kerne sind Monos.*

Beweis. Ist β ein Mono, so gilt $\beta = \mathrm{im}(\beta) = \ker(\mathrm{coker}(\beta))$. Jeder Kern ist Mono nach Proposition soundso.

Korollar 3.3 (Idempotenz des Bildes/Cobildes). *Für jeden Pfeil f gilt $\mathrm{im}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{im}(f)$.*

Bemerkung 3.2 (Epi-Mono-Faktorisierung). Für jeden Pfeil f einer abelschen Kategorie gibt es per Axiom einen Isomorphismus τ, sodass $f = \mathrm{im}(f).\tau.\mathrm{coim}(f)$.

Proposition 3.8. *Es gilt $\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(g, h))$ für alle Pfeile $g : X \to Z, h : Y \to Z$.*

Beweis. $\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h).\mathrm{par}(\mathrm{coim}(g), \mathrm{id}_Y)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(g, h))$

4. Rolands Vierzehn

Hier sind die 14 Rechenregeln, die uns der Prophet Roland L. auf Steintafeln gebracht hat. Das Studium dieser Aussagen über abelsche Kategorien hat dieses Handbuch motiviert.

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und mit $X, X_1 \overset{x_1}{\hookrightarrow} X, X_2 \overset{x_2}{\hookrightarrow} X, X' \overset{x'}{\hookrightarrow} X, Y, Y_1 \overset{y_1}{\hookrightarrow} Y, Y_2 \overset{y_2}{\hookrightarrow} Y, Y' \overset{y'}{\hookrightarrow} Y, Z, Z' \overset{z'}{\hookrightarrow} Z$ seien Objekte und Unterobjekte dieser Kategorie gemeint. Weiter seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Pfeile.

Definition 4.1 (Objektnotation). Wir definieren

- $X_1 \cap X_2 := X_1 \times_Z X_2$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{fib}(x_1, x_2)$.
- $X_1 + X_2 = \mathrm{Bild}(X_1 \oplus X_2 \to X)$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2))$.
- $f^{-1}(Y') = X \times_{f,Y,y'} Y'$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{fib}_1(f, y')$
- $f(X') = \mathrm{Bild}(f.x')$ als Unterobjekt von Y via $\mathrm{im}(f.x')$.

Bemerkung 4.1. Ohne Beweis habe ich oben angenommen, dass die vorkommenden Inklusionspfeile Monos sind, hier eine kurze Begründung: etc.pp.

Proposition 4.1 (Reflexionsprinzip). *Unterobjekte und Quotientenobjekte stehen in enger Beziehung zueinander:*

1. $\mathrm{cofib}(\mathrm{coker}(x_1), \mathrm{coker}(x_2)) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2)))$, *(d.h. $X/X_1 \cap X/X_2 = X/(X_1 + X_2)$ mit Schnitt in $\mathcal{A}^{op}$)*

2. $\operatorname{coim}(\operatorname{fork}(\operatorname{coker}(x_1), \operatorname{coker}(x_2))) = \operatorname{coker}(\operatorname{fib}(x_1, x_2))$ *(d.h. $X/X_1 + X/X_2 = X/(X_1 \cap X_2)$ mit Summe in $\mathcal{A}^{op}$)*
3. $\operatorname{coim}(\operatorname{coker}(y').f) = \operatorname{coker}(\operatorname{fib}_1(f, y'))$ *(d.h. $f^{op}(Y/Y') = X/f^{-1}(Y')$ mit Bild in $\mathcal{A}^{op}$)*
4. $\operatorname{cofib}_1(f, \operatorname{coker}(x')) = \operatorname{coker}(\operatorname{im}(f.x'))$ *(d.h. $(f^{op})^{-1}(X/X') = Y/f(X')$ mit Urbild in $\mathcal{A}^{op}$)*

Insbesondere können wir die Summe schreiben als $\operatorname{im}(\operatorname{join}(x_1, x_2)) = \ker(\operatorname{cofib}(\operatorname{coker}(x_1), \operatorname{coker}(x_2)))$.

Beweis. Beweise mich, ich bin nicht schwierig! (nur nervig!)

Lemma 4.1 (Regel (a)).

1. $\operatorname{im}(0_{0,X}) = 0_{0,X}$ *(d.h. $f(0) = 0$)*
2. $\operatorname{im}(f.\operatorname{id}_X) = \operatorname{im}(f)$ *(d.h. $f(X) = X$)*
3. $\operatorname{fib}_1(f, 0_{0,Y}) = \ker(f)$ *(d.h. $f^{-1}(0) = \operatorname{Kern}(f)$)*
4. $\operatorname{fib}_1(f, \operatorname{id}_Y) = \operatorname{id}_X$ *(d.h. $f^{-1}(Y) = X$)*

Lemma 4.2 (Regel (b)). *Es gelten $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_1$ sowie $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ als Unterobjekte.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Kommutativität des Faserprodukts, die zweite aus der ersten via Reflexionsprinzip:

$$\begin{aligned}&\operatorname{im}(\operatorname{join}(x_1, x_2))\\ =&\ker(\operatorname{cofib}(\operatorname{coker}(x_1), \operatorname{coker}(x_2)))\\ =&\ker(\operatorname{cofib}(\operatorname{coker}(x_2), \operatorname{coker}(x_1)))\\ =&\operatorname{im}(\operatorname{join}(x_2, x_1))\end{aligned}$$

Lemma 4.3 (Regel (c)). 1. $\operatorname{fib}(x', \operatorname{fib}(x_1, x_2)) = \operatorname{fib}(\operatorname{fib}(x', x_1), x_2)$
2. $\operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \operatorname{im}(\operatorname{join}(x_1, x_2)))) = \operatorname{im}(\operatorname{join}(\operatorname{im}(\operatorname{join}(x', x_1)), x_2))$

Es gelten $X' \cap (X_1 \cap X_2) = (X' \cap X_1) \cap X_2$ sowie $X' + (X_1 + X_2) = (X' + X_1) + X_2$ als Unterobjekte.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Assoziativität des Faserprodukts und die zweite folgt aus der ersten via Reflexionsprinzip.

Lemma 4.4 (Regel (d)).

1. $\operatorname{fib}_1(g.f, z') = \operatorname{fib}_1(f, \operatorname{fib}_1(g, z'))$ *(d.h. $(g.f)^{-1}(Z') = f^{-1}(g^{-1}(Z'))$)*
2. $\operatorname{im}(g.f.x') = \operatorname{im}(g.\operatorname{im}(f.x'))$ *(d.h. $(g.f)(X') = g(f(X'))$)*

Beweis. Die erste Gleichung ist nur ein Spezialfall der Staffelung von Faserprodukten.

Die zweite Gleichung folgt unmittelbar, wenn wir die Epi-Mono-Zerlegung $f.x' = \operatorname{im}(f.x').\varepsilon$ einsetzen:

$$\operatorname{im}(g.f.x') = \operatorname{im}(g.\operatorname{im}(f.x').\varepsilon) = \operatorname{im}(g.\operatorname{im}(f.x'))$$

Lemma 4.5 (Regel (e)).

$$\operatorname{im}(\operatorname{fib}(f, y')) = \operatorname{fib}(\operatorname{im}(f), y')$$

und

$$\operatorname{fib}_1(f, \operatorname{im}(f.x')) = \operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \ker(f)))$$

In Objektnotation heißt dies: $f(f^{-1}(Y')) = Y' \cap \operatorname{Bild}(f)$, bzw. $f^{-1}(f(X')) = X' + \operatorname{Kern}(f)$.

Beweis. Zur ersten Gleichung: Sei eine Epi-Mono-Zerlegung $f = \mathrm{im}(f).\varepsilon$ gegeben. Dann steht auf der linken Seite $\mathrm{im}(f.\,\mathrm{fib}_1(f,y')) = \mathrm{im}(\mathrm{im}(f).\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y')) = \mathrm{im}(f).\,\mathrm{im}(\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y'))$ und auf der rechten Seite $\mathrm{im}(f).\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y')$. Es reicht also, zu zeigen, dass

$$\mathrm{im}(\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y')) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y').$$

Dazu schreiben wir erst $\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y')$ um:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y')\\
=&\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f).\varepsilon,y')\\
=&\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(\varepsilon,\mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y'))\\
=&\mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y').\,\mathrm{fib}_2(\varepsilon,\mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y'))
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist eine Komposition eines Monos mit einem Epi, d.h. nach Anwendung von im überlebt nur der Mono:

$$\mathrm{im}(\varepsilon.\,\mathrm{fib}_1(f,y')) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{im}(f),y')$$

was zu zeigen war.

(Übung: Zeichne jeweils ein passendes kommutatives Diagramm. Das zweite könnte etwas wild werden.)

Lemma 4.6 (Regel (f)).

1. $\mathrm{im}(f.\,\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1,x_2))) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x_1),\mathrm{im}(f.x_2)))$
2. $\mathrm{fib}_1(f,\mathrm{fib}(y_1,y_2)) = \mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f,y_1),\mathrm{fib}_1(f,y_2))$

Das bedeutet gerade: $f(X_1+X_2) = f(X_1)+f(X_2)$ *und* $f^{-1}(X_1\cap X_2) = f^{-1}(X_1)\cap f^{-1}(X_2)$.

Beweis. Zur ersten Gleichung: Seien $f.x_i = \mathrm{im}(f.x_i).\varepsilon_i$ $(i=1,2)$ Epi-Mono-Zerlegungen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{im}(f.\,\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1,x_2)))\\
=&\mathrm{im}(f.\,\mathrm{join}(x_1,x_2)) \qquad \text{(nach (d))}\\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(f.x_1,f.x_2))\\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x_1).\varepsilon_1,\mathrm{im}(f.x_2).\varepsilon_2))\\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x_1),\mathrm{im}(f.x_2)).\,\mathrm{par}(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x_1),\mathrm{im}(f.x_2))) \quad \text{(eliminiere den Epi)}
\end{aligned}$$

Zur zweiten Gleichung: Vergleichen wir die linke Seite

$$\begin{aligned}
&\mathrm{fib}_1(f,\mathrm{fib}(y_1,y_2))\\
=&\mathrm{fib}_1(f,y_1.\,\mathrm{fib}_1(y_1,y_2))\\
=&\mathrm{fib}_1(f,y_1).\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_2(f,y_1),\mathrm{fib}_1(y_1,y_2))
\end{aligned}$$

mit der rechten

$$\begin{aligned}
&\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f,y_1),\mathrm{fib}_1(f,y_2))\\
=&\mathrm{fib}_1(f,y_1).\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f,y_1),\mathrm{fib}_1(f,y_2)),
\end{aligned}$$

so stellt sich heraus, dass wir nur

$$\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_2(f,y_1),\mathrm{fib}_1(y_1,y_2)) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f,y_1),\mathrm{fib}_1(f,y_2))$$

zeigen müssen. Wegen $\mathrm{fib}_2(f,y_1) = \mathrm{fib}_1(y_1,f)$ folgt das aber aus der Assoziativität von Faserprodukten.

Lemma 4.7 (Regel (g), Projektionsformel).

1. $\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{im}(\mathrm{join}(f.x', y'))) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \mathrm{fib}_1(f, y')))$
2. $\mathrm{im}(f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), x')) = \mathrm{fib}(y', \mathrm{im}(f.x'))$

Wegen Proposition 3.8 bedeutet die erste Gleichung $f^{-1}(f(X') + Y') = X' + f^{-1}(Y')$. Die zweite Gleichung besagt, dass $f(f^{-1}(Y') \cap X) = Y' \cap f(X')$.

Beweis. Zur ersten Gleichung:

Zur zweiten Gleichung: Zunächst können wir den inneren Term $f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), y')$ als Faserprodukt auffassen:

$$\begin{aligned}
&f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), x') \\
=&f.\,\mathrm{fib}_1(f, y').\,\mathrm{fib}_2(x', \mathrm{fib}_1(f, y')) \\
=&y'.\,\mathrm{fib}_2(f, y').\,\mathrm{fib}_2(x', \mathrm{fib}_1(f, y')) \\
=&y'.\,\mathrm{fib}_2(f.x', y') \\
=&\,\mathrm{fib}(y', f.x')
\end{aligned}$$

Nun folgt $\mathrm{im}(\mathrm{fib}(y', f.x')) = \mathrm{fib}(y', \mathrm{im}(f.x'))$ aus Regel (e), und wir sind fertig.