Handbuch: Rechnen in Abelschen Kategorien

Long Huynh Huu

Inhaltsverzeichnis

1. Produkte und Coprodukte

1.1. Für allgemeine Kategorien

Anders als im Titel erwähnt werde ich in diesem Abschnitt keine Coprodukte erwähnen – es gelten einfach die dualen Aussagen.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten und es existiere ein Produkt $\prod_i Y_i := \prod_{i\in I} Y_i$ mit Projektionen $\pi_j : \prod_i Y_i \to Y_j$.

Proposition 1.1. *Die Projektionen sind Epis.*

Sei $X \in \mathcal{C}$ und $f_i : X \to Y_i$ Pfeile. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes wird ein eindeutiger Pfeil $X \to \prod_i Y_i$ induziert, den ich mit $\operatorname{fork}_i f_i$ bezeichne, sodass für alle $i \in I$ gilt: $f_i = \pi_j . \operatorname{fork}_i f_i$. Alternativ kann man auch $\operatorname{fork}(f_1, ..., f_n)$ schreiben.

Im Falle von Coprodukten schreibt man $\operatorname{join}_i f_i$ bzw. $\operatorname{join}(f_1, ..., f_n)$.

Proposition 1.2. *Sei $u : W \to X$ ein Pfeil. Dann gilt $(\prod_i f_i).u = \prod(f_i.u) : W \to \prod_i Y_i$.*

1.2. In Abelschen Kategorien

Sei nun $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $X, X_1, ..X_n$ sowie $Y, Y_1, ..Y_n$ Objekte und $f_i : X_i \to Y_i$ (für $i = 1, ..n$) Pfeile. Für die direkten Summen $\bigoplus_i X_i$ bzw. $\bigoplus_i Y_i$ bezeichne die Inklusionen und Projektionen mit $\iota_j^X : X_j \to \bigoplus_i X_i$ und $\pi_j^X : \bigoplus_i X_i \to X_j$ bzw. $\iota_j^Y : Y_j \to \bigoplus_i Y_i$ und $\pi_j^Y : \bigoplus_i Y_i \to Y_j$.

Proposition 1.3. *Die f_i induzieren eindeutig einen Pfeil $\operatorname{par}_i f_i : \bigoplus_i X_i \to \bigoplus_i Y_i$ mit $f_j = \pi_j^Y . \operatorname{par}_i f_i . \iota_j^X$ für alle j.*

Proposition 1.4. *Sind die f_i Monos, Epis oder Isos, so entsprechend auch $\operatorname{par}_i f_i$.*

1.3. Fork, Join, Parallel

Fork, Join und Par(allel) von Pfeilen hängen wie folgt zusammen:

Proposition 1.5. *Seien mit $f_i : V \to W_i, g_i : W_i \to X_i, h_i : X_i \to Y_i, k : Y_i \to Z$ für $i = 1, ..., n$ Pfeile bezeichnet. Es gelten*

1. $\mathrm{fork}(g_1.f_1, ...) = \mathrm{par}(g_1, ...). \mathrm{fork}(f_1, ...)$
2. $\mathrm{par}(h_1.g_1, ...) = \mathrm{par}(h_1, ...). \mathrm{par}(g_1, ...)$
3. $\mathrm{join}(k_1.h_1, ...) = \mathrm{join}(k_1, ...). \mathrm{par}(h_1, ...)$

2. Faserprodukte (und Fasersummen)

Ein wenig Notation: Ich bezeichne für Pfeile $f : X \to Z, g : Y \to Z$ die Projektionen des Faserprodukts als $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ und $\mathrm{fib}_2(f, g) : X \times_Z Y \to Y$. Weiter definiere $\mathrm{fib}(f, g) := f. \mathrm{fib}_1(f, g) = g. \mathrm{fib}_2(f, g)$. Es kommutieren also notwendigerweise die Argumente $\mathrm{fib}(f, g) = \mathrm{fib}(g, f)$. Für Fasersummen ersetze ich fib durch cofib. Um etwas mit dieser Notation vertraut zu werden verwende ich sie gleich in der folgenden Definition.

Definition 2.1 (Universelle Eigenschaft des Faserprodukts). Seien $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Pfeile, dann heißt das Tripel $(X \times_Z Y, \mathrm{fib}_1(f, g), \mathrm{fib}_2(f, g))$ bestehend aus einem Objekt und zwei Projektionen *Faserprodukt*, falls:

1. $f. \mathrm{fib}_1(f, g) = g. \mathrm{fib}_2(f, g)$
2. Für jedes weitere Paar von Morphismen $\theta_1 : M \to X, \theta_2 : M \to X$ erhalten wir einen eindeutigen Pfeil $\mu : M \to X \times_Z Y$, sodass $\theta_i = \mathrm{fib}_i(f, g).\mu$ für $i = 1, 2$.

Dies definiert ein Faserprodukt eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

Proposition 2.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Morphismen sowie $X \times_Z Y$ deren Faserprodukt. Ist $g : Y \to Z$ ein Mono oder Iso, so ist auch die Projektion $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ ein Mono bzw. ein Iso.*

Proposition 2.2. *Ein Spezialfall:* $\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{id}_Y) = f$ *und* $\mathrm{fib}_2(f, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_X$ *für* $f : X \to Y$.

Korollar 2.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X_1 \hookrightarrow X$ und $X_2 \hookrightarrow X$ Monos in $\mathcal{A}$. Dann ist der induzierte Pfeil $X_1 \times_X X_2 \to X$ auch Mono als Komposition $X_1 \times_X X_2 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X$ von Monos.*

Proposition 2.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Morphismen. Ist $g : Y \to Z$ ein Epi, so ist auch die Projektion $\mathrm{fib}_1(f, g) : X \times_Z Y \to X$ ein Epi.*

Satz 2.1 (Staffelung). *Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : W \to Z$ Pfeile und (bla, Existenzaussage damit alle folgenden Faserprodukte definiert sind...). Dann ist $X \times_{g.f,Z,h} W = X \times_{f,Y,\mathrm{fib}_1(g,h)} (Y \times_{g,Z,h} W)$ und es gelten*

- $\mathrm{fib}_1(g.f, h) = \mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}_1(g, h))$
- $\mathrm{fib}_2(g.f, h) = \mathrm{fib}_2(g, h). \mathrm{fib}_2(f, \mathrm{fib}_1(g, h))$

Proposition 2.4 (Kommutativität). *Seien $f : X \to Z, g : Y \to Z$ Pfeile. Dann gilt*

$$X \times_Z Y = Y \times_Z X$$

mit $\mathrm{fib}_1(f, g) = \mathrm{fib}_2(g, f)$ *und* $\mathrm{fib}_2(f, g) = \mathrm{fib}_1(g, f)$. *An dieser Stelle ist es sinnvoll nochmal zu erwähnen, dass* $\mathrm{fib}(f, g) = \mathrm{fib}(g, f)$.

Proposition 2.5 (Assoziativität). *Seien* $f : W \to Z, g : X \to Z, h : Y \to Z$ *Pfeile und* $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{f, g, h\}$ *eine beliebige Permutation dieser Pfeile. Dann gelten*

$$\mathrm{fib}(\mathrm{fib}(f, g), \mathrm{fib}(f, h)) = \mathrm{fib}(\mathrm{fib}(\alpha, \beta), \mathrm{fib}(\alpha, \gamma)).$$

Genauer haben wir sogar

$$\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f, g), \mathrm{fib}_1(f, h)) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(g, f), \mathrm{fib}_1(g, h))$$

und schließlich gilt auch noch

$$\mathrm{fib}(\mathrm{fib}(f, g), h) = \mathrm{fib}(f, \mathrm{fib}(g, h))$$

Korollar 2.2 (Faserproduktwürfel). *Im folgenden werden wir etwas Vorstellungskraft brauchen: Mit* $E_{000}, E_{001}, ..., E_{111}$ *werden wir Objekte bezeichnen, die auf den Ecken eines Einheitsquadrats* $[0, 1]^3$ *sitzen, nämlich an den Punkten* $(0, 0, 0), (0, 0, 1), ...(1, 1, 1)$. *Gegeben seien drei Pfeile* $f : E_{100} \to E_{110}, g : E_{111} \to E_{110}, h : E_{010} \to E_{110}$ *gegeben. Die Behauptung ist nun, dass es möglich ist, jeder verbleibenden Kante genau einen Pfeil und jeder verbleibenden Ecke ein Objekt zuzuordnen, sodass auf jeder Seite des Würfels ein Faserproduktdiagramm steht.*

[Hier kommt eine nette Illustration hin]

Proposition 2.6. *Für* $f : X \to Z, g : Y \to Z, h : Z \to Z'$ *existiert ein eindeutiger Pfeil* $\kappa : X \times_{f,Z,g} Y \to X \times_{h.f,Z,h.g} Y$ *mit* $\mathrm{fib}_i(f, g) = \mathrm{fib}_i(h.f, h.g).\kappa$ *für* $i = 1, 2$. *Ist auch noch* h *ein Mono, dann ist* κ *ein Iso.*

3. Kerne, Cokerne, Bilder und Cobilder

Wir sind nun in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

3.1. Kerne (und Cokerne)

Proposition 3.1. *Für* $X, Y \in \mathcal{A}$ *gelten*

1. $\ker(0_{X,Y}) = \mathrm{id}_X$
2. $\mathrm{coker}(0_{X,Y}) = \mathrm{id}_Y$
3. $\ker(\mathrm{id}_Y) = 0_{0,Y}$
4. $\mathrm{coker}(\mathrm{id}_X) = 0_{X,0}$

Proposition 3.2. *Ein Pfeil* $\beta : Y \hookrightarrow Z$ *ist genau dann ein Mono, wenn* $\ker(\beta) = 0_{0,Y}$.

Ein Pfeil $\alpha : X \twoheadrightarrow Y$ *ist genau dann ein Epi, wenn* $\mathrm{coker}(\alpha) = 0_{Y,0}$.

Proposition 3.3. *Man kann Kerne als Faserprodukte ausdrücken. Sei* $f : X \to Y$, *dann gilt*

$$\ker(f) = \mathrm{fib}_1(f, 0_{0,Y})$$

3.2. Bilder (und Cobilder)

Definition 3.1. Sei $f : X \to Y$ ein Pfeil, dann bezeichnet man den Kern des Cokerns $\ker(\mathrm{coker}(f)) =: \mathrm{im}(f)$ als Bild von f und den Cokern des Kerns $\mathrm{coker}(\ker(f)) =: \mathrm{coim}(f)$ als Cobild von f.

Proposition 3.4. *Sei* $f : X \to Y$ *ein Pfeil, dann erfüllt jedes Bild* $\mathrm{im}(f) =: g : B \to Y$ *folgende universelle Eigenschaft: Es gibt einen Pfeil* $h : X \to B$, *sodass* $g.h = f$. *Weiters gibts für jede Faktorisierung* $f = m.e : X \to B' \to Y$ *mit* m *Mono einen eindeutigen Pfeil* $\gamma : B \to B'$, *sodass* $h = m.\gamma$.

Proposition 3.5. *Für* $X, Y \in \mathcal{A}$ *gelten*

1. $\mathrm{im}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$
2. $\mathrm{coim}(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_Y$

3. $\mathrm{im}(0_{X,Y}) = 0_{0,Y}$
4. $\mathrm{coim}(0_{X,Y}) = 0_{X,0}$

Proposition 3.6. *Seien $\alpha : X \to Y, \beta : Y \hookrightarrow Z$ Pfeile und β Mono. Dann gilt* $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \beta.\mathrm{im}(\alpha)$.

Proposition 3.7. *Seien $\alpha : X \twoheadrightarrow Y, \beta : Y \to Z$ Pfeile und α Epi. Dann gilt* $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$.

Korollar 3.1. *Seien $\alpha : X \twoheadrightarrow Y, \beta : Y \hookrightarrow Z$, α Epi und β Mono, dann gilt* $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \beta$. *Insbesondere gelten* $\mathrm{im}(\beta) = \beta$ *und* $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{id}_Y$.

BEWEIS. $\mathrm{im}(\beta.\alpha) = \mathrm{im}(\beta) = \beta.\mathrm{im}(\mathrm{id}) = \beta$. Für die anderen Aussagen setzte jeweils $\alpha = \mathrm{id}_Y, X = Y$ bzw. $\beta = \mathrm{id}_Y, Y = Z$.

Bemerkung 3.1. Umgekehrt folgt aus $\mathrm{im}(\beta') = \beta'$ für einen Pfeil β', dass β' ein Mono ist, d.h.: Es ist β genau dann Mono, wenn $\mathrm{im}(\beta) = \beta$

Korollar 3.2. *Monos sind Kerne und Kerne sind Monos.*

BEWEIS. Ist β ein Mono, so gilt $\beta = \mathrm{im}(\beta) = \ker(\mathrm{coker}(\beta))$. Jeder Kern ist Mono nach Proposition soundso.

Korollar 3.3 (Idempotenz des Bildes/Cobildes). *Für jeden Pfeil f gilt* $\mathrm{im}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{im}(f)$.

Bemerkung 3.2 (Epi-Mono-Faktorisierung). Für jeden Pfeil f einer abelschen Kategorie gibt es per Axiom einen Isomorphismus τ, sodass $f = \mathrm{im}(f).\tau.\mathrm{coim}(f)$. Man kann also im als Projektion eines Pfeils f mit Epi-Mono-Faktorisierung $\mu.\varepsilon$ auf seine Mono-Komponente und coim als Projektion auf seine Epi-Komponente verstehen, denn $\mathrm{im}(f) = \mu$ und $\mathrm{coim}(f) = \varepsilon$.

Proposition 3.8. *Es gilt* $\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(g, h))$ *für alle Pfeile $g : X \to Z, h : Y \to Z$.*

BEWEIS. $\mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(g), h).\mathrm{par}(\mathrm{coim}(g), \mathrm{id}_Y)) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(g, h))$

4. Rolands Vierzehn

Hier sind die 14 Rechenregeln, die uns der Prophet Roland L. auf Steintafeln gebracht hat. Das Studium dieser Aussagen über abelsche Kategorien hat dieses Handbuch motiviert.

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und mit $X, X_1 \overset{x_1}{\hookrightarrow} X, X_2 \overset{x_2}{\hookrightarrow} X, X' \overset{x'}{\hookrightarrow} X, Y, Y_1 \overset{y_1}{\hookrightarrow} Y, Y_2 \overset{y_2}{\hookrightarrow} Y, Y' \overset{y'}{\hookrightarrow} Y, Z, Z' \overset{z'}{\hookrightarrow} Z$ seien Objekte und Unterobjekte dieser Kategorie gemeint. Weiter seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Pfeile.

Definition 4.1 (Objektnotation). Wir definieren

- $X_1 \cap X_2 := X_1 \times_Z X_2$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{fib}(x_1, x_2)$.
- $X_1 + X_2 = \mathrm{Bild}(X_1 \oplus X_2 \to X)$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2))$.
- $f^{-1}(Y') = X \times_{f,Y,y'} Y'$ als Unterobjekt von X via $\mathrm{fib}_1(f, y')$
- $f(X') = \mathrm{Bild}(f.x')$ als Unterobjekt von Y via $\mathrm{im}(f.x')$.

Bemerkung 4.1. Ohne Beweis habe ich oben angenommen, dass die vorkommenden Inklusionspfeile Monos sind, hier eine kurze Begründung: etc.pp.

Proposition 4.1 (Reflexionsprinzip). *Unterobjekte und Quotientenobjekte stehen in enger Beziehung zueinander:*

1. $\mathrm{cofib}(\mathrm{coker}(x_1), \mathrm{coker}(x_2)) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2)))$, *(d.h. $X/X_1 \cap X/X_2 = X/(X_1 + X_2)$ mit Schnitt in $\mathcal{A}^{op}$)*
2. $\mathrm{coim}(\mathrm{fork}(\mathrm{coker}(x_1), \mathrm{coker}(x_2))) = \mathrm{coker}(\mathrm{fib}(x_1, x_2))$ *(d.h. $X/X_1 + X/X_2 = X/(X_1 \cap X_2)$ mit Summe in $\mathcal{A}^{op}$)*
3. $\mathrm{coim}(\mathrm{coker}(y').f) = \mathrm{coker}(\mathrm{fib}_1(f, y'))$ *(d.h. $f^{op}(Y/Y') = X/f^{-1}(Y')$ mit Bild in $\mathcal{A}^{op}$)*
4. $\mathrm{cofib}_1(f, \mathrm{coker}(x')) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}(f.x'))$ *(d.h. $(f^{op})^{-1}(X/X') = Y/f(X')$ mit Urbild in $\mathcal{A}^{op}$)*

Insbesondere können wir die Summe schreiben als $\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2)) = \ker(\mathrm{cofib}(\mathrm{coker}(x_1), \mathrm{coker}(x_2)))$.

Beweis. Beweise mich, ich bin nicht schwierig! (nur nervig!)

Lemma 4.1 (Regel (a)).

1. $\mathrm{im}(0_{0,X}) = 0_{0,X}$ *(d.h. $f(0) = 0$)*
2. $\mathrm{im}(f.\mathrm{id}_X) = \mathrm{im}(f)$ *(d.h. $f(X) = X$)*
3. $\mathrm{fib}_1(f, 0_{0,Y}) = \ker(f)$ *(d.h. $f^{-1}(0) = \mathrm{Kern}(f)$)*
4. $\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_X$ *(d.h. $f^{-1}(Y) = X$)*

Lemma 4.2 (Regel (b)). *Es gelten $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_1$ sowie $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ als Unterobjekte.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Kommutativität des Faserprodukts, die zweite aus der ersten via Reflexionsprinzip:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2)) \\
=&\ker(\mathrm{cofib}(\mathrm{coker}(x_1), \mathrm{coker}(x_2))) \\
=&\ker(\mathrm{cofib}(\mathrm{coker}(x_2), \mathrm{coker}(x_1))) \\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(x_2, x_1))
\end{aligned}$$

Lemma 4.3 (Regel (c)).
1. $\mathrm{fib}(x', \mathrm{fib}(x_1, x_2)) = \mathrm{fib}(\mathrm{fib}(x', x_1), x_2)$
2. $\mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \mathrm{im}(\mathrm{join}(x_1, x_2)))) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(\mathrm{join}(x', x_1)), x_2))$

Es gelten $X' \cap (X_1 \cap X_2) = (X' \cap X_1) \cap X_2$ sowie $X' + (X_1 + X_2) = (X' + X_1) + X_2$ als Unterobjekte.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Assoziativität des Faserprodukts und die zweite folgt aus der ersten via Reflexionsprinzip.

Lemma 4.4 (Regel (d)).

1. $\mathrm{fib}_1(g.f, z') = \mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}_1(g, z'))$ *(d.h. $(g.f)^{-1}(Z') = f^{-1}(g^{-1}(Z'))$)*
2. $\mathrm{im}(g.f.x') = \mathrm{im}(g.\mathrm{im}(f.x'))$ *(d.h. $(g.f)(X') = g(f(X'))$)*

Beweis. Die erste Gleichung ist nur ein Spezialfall der Staffelung von Faserprodukten.

Die zweite Gleichung folgt unmittelbar, wenn wir die Epi-Mono-Zerlegung $f.x' = \mathrm{im}(f.x').\varepsilon$ einsetzen:

$$\mathrm{im}(g.f.x') = \mathrm{im}(g.\mathrm{im}(f.x').\varepsilon) = \mathrm{im}(g.\mathrm{im}(f.x'))$$

Lemma 4.5 (Regel (e)).

$$\mathrm{im}(\mathrm{fib}(f, y')) = \mathrm{fib}(\mathrm{im}(f), y')$$

und

$$\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{im}(f.x')) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \ker(f)))$$

In Objektnotation heißt dies: $f(f^{-1}(Y')) = Y' \cap \mathrm{Bild}(f)$, bzw. $f^{-1}(f(X')) = X' + \mathrm{Kern}(f)$.

Beweis. Zur ersten Gleichung: Sei eine Epi-Mono-Zerlegung $f = \operatorname{im}(f).\varepsilon$ gegeben. Dann steht auf der linken Seite $\operatorname{im}(f.\operatorname{fib}_1(f, y')) = \operatorname{im}(\operatorname{im}(f).\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y')) = \operatorname{im}(f).\operatorname{im}(\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y'))$ und auf der rechten Seite $\operatorname{im}(f).\operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y')$. Es reicht also, zu zeigen, dass

$$\operatorname{im}(\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y')) = \operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y').$$

Dazu schreiben wir erst $\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y')$ um:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y')\\
=&\varepsilon.\operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f).\varepsilon, y')\\
=&\varepsilon.\operatorname{fib}_1(\varepsilon, \operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y'))\\
=&\operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y').\operatorname{fib}_2(\varepsilon, \operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y'))
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist eine Komposition eines Monos mit einem Epi, d.h. nach Anwendung von im überlebt nur der Mono:

$$\operatorname{im}(\varepsilon.\operatorname{fib}_1(f, y')) = \operatorname{fib}_1(\operatorname{im}(f), y')$$

was zu zeigen war.

Nun zur zweiten Gleichung: Sei $f = \mu.\varepsilon$ eine Epi-Mono-Zerlegung. Dann haben wir für die linke Seite

$$\operatorname{fib}_1(\mu.\varepsilon, \operatorname{im}(\mu.\varepsilon.x')) = \operatorname{fib}_1(\mu.\varepsilon, \mu.\operatorname{im}(\varepsilon.x')) = \operatorname{fib}_1(\varepsilon, \operatorname{im}(\varepsilon.x'))$$

und für die rechte Seite

$$\operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \ker(\mu.\varepsilon))) = \operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \operatorname{im}(\ker(\mu.\varepsilon)))) = \operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \ker(\varepsilon)))$$

Das bedeutet, dass wir oBdA annehmen können, dass f ein Epi ist. Nach zweimaliger Anwendung des Reflextionsprinzips sind wir auch schon fertig:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{im}(\operatorname{join}(x', \ker f))\\
=&\ker(\operatorname{cofib}(\operatorname{coker} x', (\operatorname{coker}.\ker)f)) \qquad \text{(Reflextionsprinzip)}\\
=&\ker(\operatorname{cofib}(\operatorname{coker} x', f) \qquad (f \text{ ist Epi, d.h. } \operatorname{coim}(f) = f)\\
=&\ker(\operatorname{cofib}_2(\operatorname{coker} x', f).f)\\
=&\ker(\operatorname{coker}(\operatorname{im}(f.x').f)) \qquad \text{(Reflexionsprinzip)}\\
=&\operatorname{fib}_1(f, (\ker.\operatorname{coker}.\operatorname{im})(f.x')) \qquad \text{(Regel (d).1)}\\
=&\operatorname{fib}_1(f, \operatorname{im}(f.x'))
\end{aligned}$$

(Übung: Zeichne zum Beweis der ersten Aussage ein passendes kommutatives Diagramm.)

Lemma 4.6 (Regel (f)).

1. $\operatorname{im}(f.\operatorname{im}(\operatorname{join}(x_1, x_2))) = \operatorname{im}(\operatorname{join}(\operatorname{im}(f.x_1), \operatorname{im}(f.x_2)))$
2. $\operatorname{fib}_1(f, \operatorname{fib}(y_1, y_2)) = \operatorname{fib}(\operatorname{fib}_1(f, y_1), \operatorname{fib}_1(f, y_2))$

Das bedeutet gerade: $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$ *und* $f^{-1}(X_1 \cap X_2) = f^{-1}(X_1) \cap f^{-1}(X_2)$.

Beweis. Zur ersten Gleichung: Seien $f.x_i = \operatorname{im}(f.x_i).\varepsilon_i$ $(i = 1, 2)$ Epi-Mono-Zerlegungen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{im}(f.\operatorname{im}(\operatorname{join}(x_1, x_2)))\\
=&\operatorname{im}(f.\operatorname{join}(x_1, x_2)) \qquad \text{(nach (d))}\\
=&\operatorname{im}(\operatorname{join}(f.x_1, f.x_2))\\
=&\operatorname{im}(\operatorname{join}(\operatorname{im}(f.x_1).\varepsilon_1, \operatorname{im}(f.x_2).\varepsilon_2))\\
=&\operatorname{im}(\operatorname{join}(\operatorname{im}(f.x_1), \operatorname{im}(f.x_2)).\operatorname{par}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
=&\operatorname{im}(\operatorname{join}(\operatorname{im}(f.x_1), \operatorname{im}(f.x_2))) \qquad \text{(eliminiere den Epi)}
\end{aligned}$$

Zur zweiten Gleichung: Vergleichen wir die linke Seite

$$\begin{aligned}
&\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}(y_1, y_2)) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, y_1.\,\mathrm{fib}_1(y_1, y_2)) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, y_1).\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_2(f, y_1), \mathrm{fib}_1(y_1, y_2))
\end{aligned}$$

mit der rechten

$$\begin{aligned}
&\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y_1), \mathrm{fib}_1(f, y_2)) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, y_1).\,\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f, y_1), \mathrm{fib}_1(f, y_2)),
\end{aligned}$$

so stellt sich heraus, dass wir nur

$$\mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_2(f, y_1), \mathrm{fib}_1(y_1, y_2)) = \mathrm{fib}_1(\mathrm{fib}_1(f, y_1), \mathrm{fib}_1(f, y_2))$$

zeigen müssen. Wegen $\mathrm{fib}_2(f, y_1) = \mathrm{fib}_1(y_1, f)$ folgt das aber aus der Assoziativität von Faserprodukten.

Lemma 4.7 (Regel (g), Projektionsformel).

1. $\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x'), y'))) = \mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \mathrm{fib}_1(f, y')))$ *(d.h. $f^{-1}(f(X') + Y') = X' + f^{-1}(Y')$)*
2. $\mathrm{im}(f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), x')) = \mathrm{fib}(y', \mathrm{im}(f.x'))$ *(d.h. $f(f^{-1}(Y') \cap X) = Y' \cap f(X')$)*

Beweis. Zur ersten Gleichung: Definiere $q = \mathrm{coker}(y') : Y \to Y/Y'$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(f(X') + Y') \\
=&f^{-1}(q^{-1}(q(f(X')))) \qquad \text{(Regel (e))} \\
=&(q.f)^{-1}((q.f)(X')) \qquad \text{(Regel (d))} \\
=&X' + \mathrm{Kern}(q.f) \qquad \text{(Regel (e))} \\
=&X' + f^{-1}(Y') \qquad \text{(Regel (d) und } \mathrm{Kern}(q) = Y')
\end{aligned}$$

Ein Beweis im hier üblichen Kalkül möchte ich auch noch angeben:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x'), y'))) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{im}(\mathrm{join}(\mathrm{im}(f.x'), \ker(q)))) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}_1(q, \mathrm{im}(q.\,\mathrm{im}(f.x')))) \\
=&\mathrm{fib}_1(f, \mathrm{fib}_1(q, \mathrm{im}(q.f.x'))) \\
=&\mathrm{fib}_1(q.f, \mathrm{im}(q.f.x')) \\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \ker(q.f))) \\
=&\mathrm{im}(\mathrm{join}(x', \mathrm{fib}_1(f, y')))
\end{aligned}$$

Zur zweiten Gleichung: Zunächst können wir den inneren Term $f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), y')$ als Faserprodukt auffassen:

$$\begin{aligned}
&f.\,\mathrm{fib}(\mathrm{fib}_1(f, y'), x') \\
=&f.\,\mathrm{fib}_1(f, y').\,\mathrm{fib}_2(x', \mathrm{fib}_1(f, y')) \\
=&y'.\,\mathrm{fib}_2(f, y').\,\mathrm{fib}_2(x', \mathrm{fib}_1(f, y')) \\
=&y'.\,\mathrm{fib}_2(f.x', y') \\
=&\mathrm{fib}(y', f.x')
\end{aligned}$$

Nun folgt $\mathrm{im}(\mathrm{fib}(y', f.x')) = \mathrm{fib}(y', \mathrm{im}(f.x'))$ aus Regel (e), und wir sind fertig.

Alternativ definiere mit $f' = f.x' : X' \to Y$ die Einschränkung von f auf X'.

$$
\begin{aligned}
&f(f^{-1}(Y') \cap X') \\
=&f(x'(f'^{-1}(Y'))) \qquad \text{(Regel (d) mit } x'^{-1}(X_1') = X' \cap X'1) \\
=&f'(f'^{-1}(Y'))) \\
=&Y' \cap \mathrm{Bild}(f') \qquad \text{(Regel (e))} \\
=&Y' \cap f(X')
\end{aligned}
$$

5. Diagrammjagd

5.1. Kommutative Quadrate

Definition 5.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $p : X_2 \to X_1, q : Y_2 \to Y_1$ Pfeile, welche wir im folgenden als Paare bezeichnen und $p =: (X_1, X_2), q =: (Y_1, Y_2)$ schreiben. Wir nennen jedes Paar von Pfeilen $f_1 : X_1 \to Y_1, f_2 : X_2 \to Y_2$ einen *Pfeil von Paaren* $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)$ und schreiben $(f_1, f_2) : (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)$, falls gilt folgende Verträglichkeit erfüllt ist:

$$f_1.p = q.f_2$$

Proposition 5.1. *Sind* $(f_1, f_2) : (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)$ *und* $(g_1, g_2) : (Y_1, Y_2) \to (Z_1, Z_2)$ *Pfeile von Paaren, dann auch* $(g_1.f_1, g_2.f_2) =: (g_1, g_2).(f_1, f_2)$*. Insbesondere gilt* $(f_1, f_2).(\mathrm{id}_{X_1}, \mathrm{id}_{X_2}) = (f_1, f_2) = (\mathrm{id}_{Y_1}, \mathrm{id}_{Y_2}).(f_1, f_2)$.

Beweis. Seien $x : X_2 \to X_1, y : Y_2 \to Y_1, z : Z_2 \to Z_2$ die zu den Paaren assoziierten Pfeile. Dann gilt $g_1.f_1.x = g_1.y.f_2 = z.g_2.f_2$.

Bemerkung 5.1. Damit erhalten wir für eine Kategorie $\mathcal{C}$ eine Kategorie $Paar(\mathcal{C})$ mit Paaren (also Elementen aus $Mor(\mathcal{C})$) als Objekte und Pfeile von Paaren als Pfeile. Weiter können wir die vollen Unterkategorien $MonoPaar(\mathcal{C})$, deren Objekte die Monos von $Mor(\mathcal{C})$ sind, und $EpiPaar(\mathcal{C})$, deren Objekte die Epis von $Mor(\mathcal{C})$ sind, definieren.

Proposition 5.2. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine abelsche Kategorie und* $x' : X' \hookrightarrow X$ *sowie* $y' : Y' \hookrightarrow Y$ *Monos. Sei nun* $(f, f') : (X, X') \to (Y, Y')$ *ein Pfeil von Paaren. Dann existiert genau ein Pfeil* $\bar{f} : X/X' \to Y/Y'$*, sodass* $\bar{f}.\mathrm{coker}(x') = \mathrm{coker}(y').f$*, d.h.* $(\bar{f}, f) : (X/X', X) \to (Y/Y', Y)$ *ist ein Pfeil von Paaren.*

Sind umgekehrt $\bar{x} : X \twoheadrightarrow \bar{X}, \bar{y} : Y \twoheadrightarrow \bar{Y}$ *Epis und ein Pfeil von Paaren* $(\bar{f}, f) : (\bar{X}, X) \to (\bar{Y}, Y)$ *gegeben, so erhalten wir eindeutig einen Pfeil von Paaren* $(f, f') : (X, \mathrm{Kern}(\bar{x})) \to (Y, \mathrm{Kern}(\bar{y}))$.

Beweis. Es gilt $(\mathrm{coker}(y').f).x' = 0_{X,Y/Y'}.x'$:

$$\mathrm{coker}(y').f.x' = \mathrm{coker}(y').y'.f' = 0_{X',Y/Y'}$$

Nach UniE von $\mathrm{coker}(x')$ gibt es genau einen Pfeil $\bar{f} : X/X' \to Y/Y'$ mit

$$\bar{f}.\mathrm{coker}(x') = \mathrm{coker}(y').f$$

Für die Umkehrung betrachte $\bar{y}.(f.\ker(\bar{x})) = \bar{f}.\bar{x}.\ker(\bar{x}) = 0_{X',\bar{Y}}$, daher existiert nach UniE von $\ker(\bar{y})$ genau ein Pfeil $f' : \mathrm{Kern}(\bar{x}) \to \mathrm{Kern}(\bar{y})$ mit

$$f.\ker(\bar{x}) = \ker(\bar{y}).f'$$

Bemerkung 5.2. Erinnern wir uns mal daran, dass in abelschen Kategorien Monos genau die Kerne und Epis genau die Cokerne sind. Daher gibt uns die obige Proposition eine Äquivalenz der Kategorien $MonoPaar(\mathcal{A})$ und $EpiPaar(\mathcal{A})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$.