

1 L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

1.1 Vecteurs de \mathbb{R}^n

$$\text{Si } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad -u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \quad 0 = 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés définissant l'espace vectoriel \mathbb{R}^n :

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Produit scalaire

- u, v sont **colinéaires** ssi $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$
- **produit scalaire** :

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \|u\| \|v\| \cos \angle(u, v)$$

- **norme**

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

- En dimension 3 uniquement, le **produit vectoriel** est :

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

- le **produit mixte**

$$[u, v, w] = \langle u | v \wedge w \rangle = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel :

1. $\langle v | u \rangle = \langle u | v \rangle$
2. $\langle \lambda u + u' | v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle + \langle u' | v \rangle$
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v colinéaires (*inégalité triangulaire*)
5. $v \wedge u = -u \wedge v, u \wedge u = 0$
6. $(\lambda u + u') \wedge v = \lambda(u \wedge v) + u' \wedge v$

1.2 Exemples d'applications linéaires

En notation matricielle, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une **application linéaire** si

$$f(X) = AX \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ et } A \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ est une matrice notée}$$

$\text{Mat}(f)$.

Dans le plan \mathbb{R}^2 .

$$\text{réflexion par rapport à l'axe } (Ox) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{réflexion par rapport à l'axe } (Oy) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{homothétie de rapport } \lambda, \text{ centrée à l'origine} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{rotation d'angle } \theta, \text{ centrée à l'origine} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{projection sur l'axe } (Ox) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dans l'espace \mathbb{R}^3 .

$$\text{réflexion par rapport au plan } (Oxy) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{rotation d'angle } \theta \text{ d'axe } (Oz) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.3 Propriétés des applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire ssi

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^p, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

- $\text{Mat}(f \circ g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(g)$

- Si f est bijective, $\text{Mat}(f^{-1}) = \text{Mat}(f)^{-1}$.