

1 Ensembles et applications

1.1 Ensembles

- Un **ensemble** est une collection d'éléments.
- L'**ensemble vide**, \emptyset est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- On note

$$x \in E$$

si x est un élément de E , et $x \notin E$ dans le cas contraire.

- L'**inclusion**. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F . Autrement dit : $\forall x \in E (x \in F)$. On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F .
- L'**égalité**. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
- **Ensemble des parties** de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

- **Complémentaire**. Si $A \subset E$,

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste $\complement A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou \bar{A}).

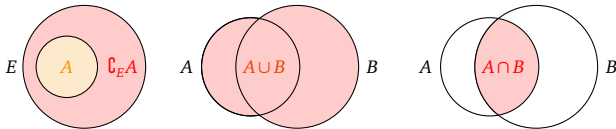
- **Union**. Pour $A, B \subset E$,

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.

- **Intersection**.

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Règles de calculs

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E .

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \subset B \iff A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \iff A \cup B = B$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

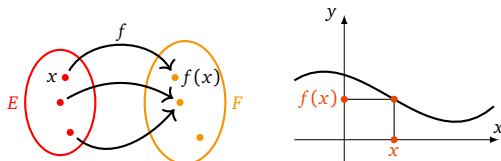
- $\complement(\complement A) = A$ et donc $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

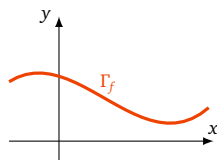
1.2 Applications

- Une **application** (ou une **fonction**) $f : E \rightarrow F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.

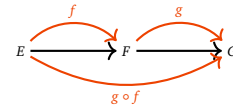


- **Égalité**. Deux applications $f, g : E \rightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
- Le **graphe** de $f : E \rightarrow F$ est

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$$



- **Composition**. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.



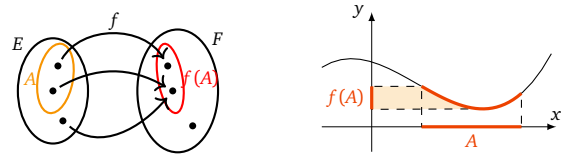
- **Restriction**. Soient $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$ alors la restriction de f à A est l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x)$.

Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles.

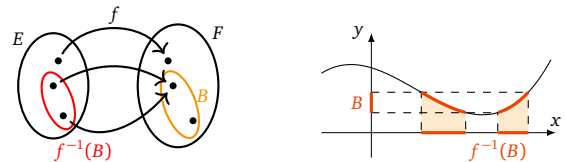
Définition. Soit $A \subset E$ et $f : E \rightarrow F$, l'**image directe** de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



Définition. Soit $B \subset F$ et $f : E \rightarrow F$, l'**image réciproque** de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un **antécédent** de y . En termes d'image réciproque l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

1.3 Injection, surjection, bijection

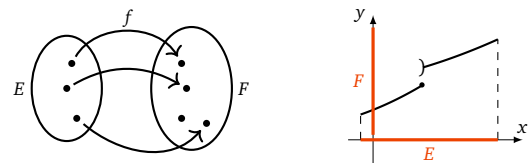
Injection, surjection

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition. f est **injective** si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\forall x, x' \in E \quad (f(x) = f(x') \implies x = x')$$

Les applications f représentées sont injectives :

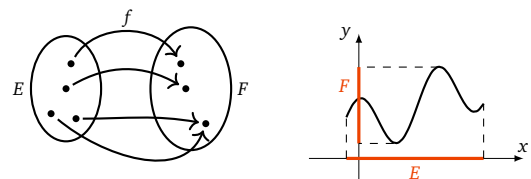


Définition. f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad (y = f(x))$$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Les applications f représentées sont surjectives :



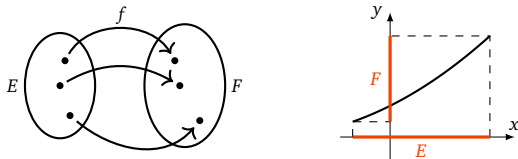
- f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun).
- f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent.

Bijection

Définition. f est **bijjective** si elle est injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F \quad \exists ! x \in E \quad (y = f(x))$$

Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f .



Proposition. Soit E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.
2. Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1} . De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

1.4 Ensembles finis

Définition. Un ensemble E est **fini** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \dots, n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le **cardinal** de E (ou le **nombre d'éléments**) et est noté $\text{Card } E$. Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Quelques propriétés :

- Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et $\text{Card } B \leq \text{Card } A$.
- Si A, B sont des ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$.
- Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card } B$. En particulier si $B \subset A$ et $\text{Card } A = \text{Card } B$ alors $A = B$.
- Enfin pour A, B deux ensembles finis quelconques :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

Injection, surjection, bijection

Proposition. Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Si f est injective alors $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.
2. Si f est surjective alors $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.
3. Si f est bijective alors $\text{Card } E = \text{Card } F$.

Proposition. Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application. Si $\text{Card } E = \text{Card } F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. f est injective,
- ii. f est surjective,
- iii. f est bijective.

Proposition (Principe des tiroirs). Si l'on range dans k tiroirs, $n > k$ paires de chaussettes alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.

Nombres d'applications

Soient E, F des ensembles finis, non vides. On note $\text{Card } E = n$ et $\text{Card } F = p$.

Proposition. Le nombre d'applications différentes de E dans F est : p^n

Autrement dit c'est $(\text{Card } F)^{\text{Card } E}$.

Proposition. Le nombre d'injections de E dans F est :

$$p \times (p-1) \times \dots \times (p-(n-1)).$$

Notation **factorielle** : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Avec $1! = 1$ et par convention $0! = 1$.

Proposition. Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même est : $n!$

Coefficients du binôme de Newton

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Proposition. Il y a $2^{\text{Card } E}$ sous-ensembles de E : $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$

Définition. Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k .

Proposition.

- $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1$.

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Proposition.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (0 < k < n)$$

Le triangle de Pascal est un algorithme pour calculer ces coefficients $\binom{n}{k}$. Chaque élément est obtenu en ajoutant les deux nombres qui lui sont juste au-dessus et au-dessus à gauche.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Proposition.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Formule du binôme de Newton

Théorème. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) et n un entier positif alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Autrement dit :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

1.5 Relation d'équivalence

Une **relation** sur un ensemble E , c'est la donnée pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.

Définition. Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation, c'est une **relation d'équivalence** si :

- $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$, (**réflexivité**)
- $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$, (**symétrie**)
- $\forall x, y, z \in E, x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$, (**transitivité**)

Définition. Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . Soit $x \in E$, la **classe d'équivalence** de x est

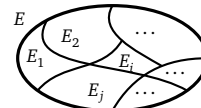
$$\text{cl}(x) = \{y \in E \mid y \mathcal{R} x\}$$

$\text{cl}(x)$ est donc un sous-ensemble de E , on le note aussi \bar{x} . Si $y \in \text{cl}(x)$, on dit que y un **représentant** de $\text{cl}(x)$.

Proposition.

1. $\text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x \mathcal{R} y$.
2. Pour tout $x, y \in E$, $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$ ou $\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset$.
3. Soit C un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\{\text{cl}(x) \mid x \in C\}$ constitue une partition de E .

Une **partition** de E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E tel que $E = \bigcup_i E_i$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ (si $i \neq j$).



L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. La relation suivante sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence :

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b \text{ est un multiple de } n$$

La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est notée \bar{a} :

$$\bar{a} = \text{cl}(a) = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}.$$

Comme un tel b s'écrit $b = a + kn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\bar{a} = a + n\mathbb{Z} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

qui contient exactement n éléments.