1 Dérivée d'une fonction

1.1 Définition

Dérivée en un point
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. f est ***dérivable en*** x_0 si la limite suivante existe :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Proposition. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
Tangente Une équation de la ***tangente*** au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$\boxed{y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$$

1.2 Calculs des dérivées

$$\boxed{(u+v)' = u' + v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u \times v)' = u'v + uv'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Composition

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Corollaire. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:*

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité $f\big(g(x)\big) = x$ où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.

Théorème (Formule de Leibniz)**.**

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

1.3 Extremum local, théorème de Rolle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

— On dit que x_0 est un ***point critique*** de f si $f'(x_0) = 0$.

— On dit que f admet un ***maximum local en*** x_0 (resp. un ***minimum local en*** x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

— On dit que f admet un ***extremum local en*** x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Théorème. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.
La réciproque du théorème est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Théorème (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

— *f est continue sur $[a, b]$,*
— *f est dérivable sur $]a, b[$,*
— *$f(a) = f(b)$.*

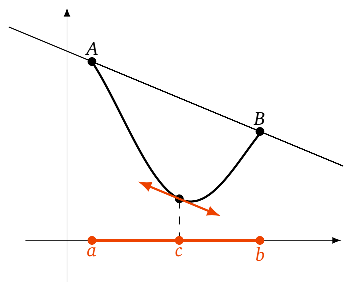
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

1.4 Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Corollaire. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff$ *f est croissante ;*
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leqslant 0 \iff$ *f est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \iff$ *f est constante ;*
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \implies$ *f est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \implies$ *f est strictement décroissante.*

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\big|f'(x)\big| \leqslant M$ alors*

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant M|x - y|}$$

Exemple : $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Preuve : Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$. On conclut en fixant $y = 0$.

Corollaire (Règle de l'Hospital)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

— $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
— $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$