1 Développements limités

1.1 Formules de Taylor

Les trois formules de Taylor s'écrivent sous la forme $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ où $T_n(x)$ est toujours le même polynôme de Taylor :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

C'est l'expression du reste $R_n(x)$ qui change :
Taylor-Young (la plus utile), f de classe $\mathscr{C}^n$:

$$R_n(x) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Taylor avec reste intégral, f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$, f est $n+1$ fois dérivable :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

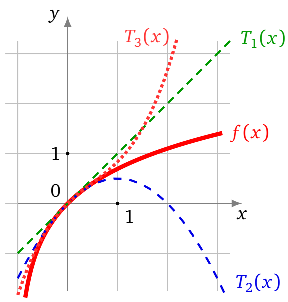
Notations.

— $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de *classe $\mathscr{C}^n$* si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue.
— « *petit o* ». $o((x-a)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$. Donc le reste $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ est noté $o((x-a)^n)$.

Formule de Taylor-Young au voisinage de 0.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Approximations.
Les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Les graphes des polynômes $T_1, T_2, T_3, \ldots$ s'approchent de plus en plus du graphe de f. Ceci n'est vrai qu'autour de la valeur a (Ci-dessous $f(x) = \ln(1+x)$ en $a = 0$).



Approximation numérique de $\sin(0,01)$. La formule de Taylor pour $f(x) = \sin x$ en $a = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = 0 + 1\cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, Pour $x = 0,01$: $\sin(0,01) \simeq 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,00999983333\ldots$

1.2 Développements limités au voisinage d'un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur I un intervalle ouvert. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un *développement limité* (*DL*) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

La formule de Taylor-Young fournit des DL en posant, pour $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$$

Proposition. *Si f admet un DL alors ce DL est unique.*

Exemple : Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).
DL des fonctions usuelles à l'origine

$$\boxed{\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

DL des fonctions en un point quelconque
On ramène le problème en 0 avec le changement de variables $h = x - a$.
Exemple : DL de $f(x) = \exp x$ en 1. On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. $\exp x = \exp(1 + (x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp h = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots\right)$.

1.3 Opérations sur les développements limités

Somme, produit, composition. Soient f et g ayant des DL en 0 à l'ordre n :
$f(x) = C(x) + o(x^n) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n\varepsilon_1(x)$
$g(x) = D(c) + o(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n\varepsilon_2(x)$

Proposition.

— $(f+g)(x) = C(x) + D(x) + o(x^n)$
— $(f \times g)(x) = C(x) \times D(x) + o(x^n)$
— *Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$), $(f \circ g)(x) = C(D(x)) + o(x^n)$*

Pour le produit et la composition, il faut en plus *tronquer* la partie polynomiale à l'ordre n, c-à-d conserver seulement les monômes de degré $\leqslant n$.
Division. Le DL d'un quotient se ramène au calcul de l'inverse $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$$

Intégration. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dont le DL en 0 à l'ordre n est $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$.

Théorème. *Notons F une primitive de f. Alors F admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$ obtenu en intégrant terme à terme :*

$$F(x) = F(0) + c_0 x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3} + \cdots + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

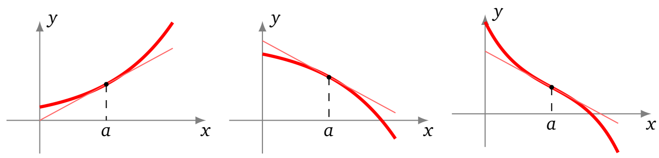
Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(0)$ près.

1.4 Applications des développements limités

Calculs de limites. Les DL sont très efficaces pour lever des formes indéterminées !
Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en a : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\varepsilon(x)$, où $c_k \neq 0$. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.*

— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.
— Si ce signe change alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un *point d'inflexion*.



Développement limité en $+\infty$ (développement asymptotique)
$f :]x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admet un *DL en $+\infty$* à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que $f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ où $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.
Cela équivaut à ce que $x \to f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.

Proposition. *Si $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, où $a_k \neq 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (a_0 x + a_1) = 0$ (resp. $x \to -\infty$) : la droite $y = a_0 x + a_1$ est une* asymptote *à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.*