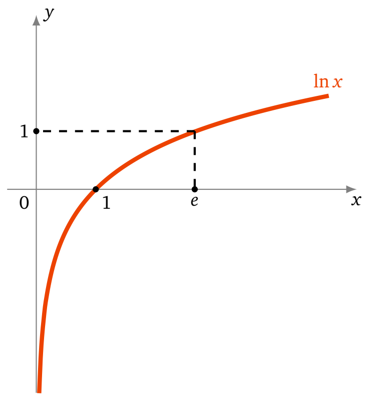
1 Fonctions usuelles

1.1 Logarithme et exponentielle

Logarithme Le ***logarithme néperien*** $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Proposition.

1. *$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (pour tout $a, b > 0$),*
2. *$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,*
3. *$\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
4. *$\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$,*
5. *$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,*
6. *$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$,*
7. *$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,*
8. *$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,*
9. *la fonction $\ln$ est concave et $\ln x \leqslant x - 1$ (pour tout $x > 0$).*



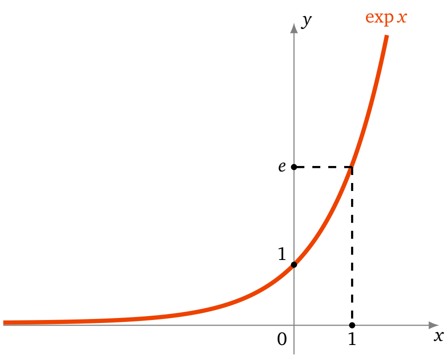
— Le ***logarithme en base a*** $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De sorte que $\log_a(a) = 1$.

— Pour $a = 10$ on obtient le ***logarithme décimal*** $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$).

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

— En informatique intervient le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.

Exponentielle
La fonction ***exponentielle***, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.



Proposition. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$*
2. *$\exp(nx) = (\exp x)^n$*
3. *$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$.*
4. *$\exp(1) = e \simeq 2,718\ldots$*
5. *$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,*
6. *La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp x \geqslant 1 + x$.*

Lien logarithme/exponentielle :
$\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$ et $\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\boxed{y = \exp(x) \iff x = \ln(y)}$$

Puissance
Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^b = \exp\big(b \ln a\big)}$$

Remarque.

— $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\big(\frac{1}{2} \ln a\big)$

— $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\big(\frac{1}{n} \ln a\big)$ (la ***racine n-ième*** de a)

— Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

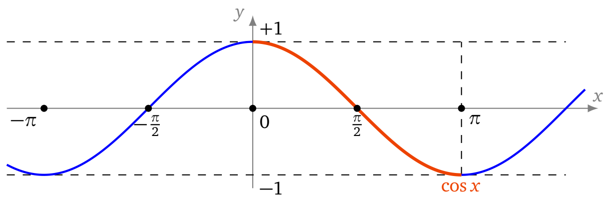
$$x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

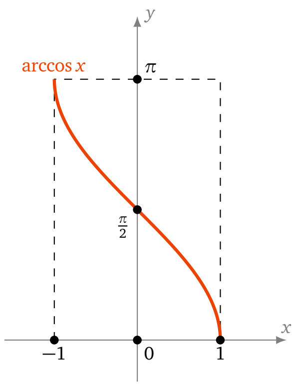
$$\ln(x^a) = a \ln x$$

1.2 Fonctions circulaires inverses

Arccosinus
La restriction $\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





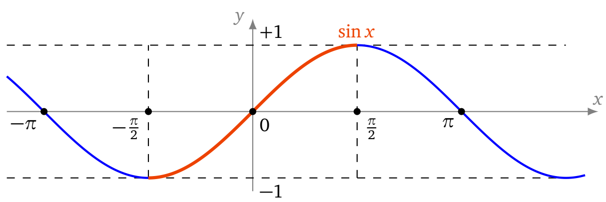
$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

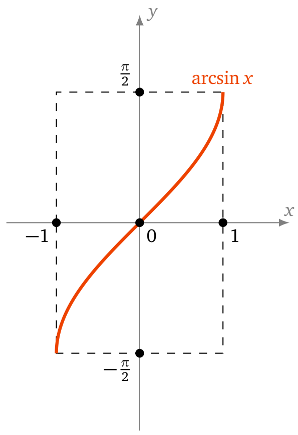
$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[}$$

Arcsinus
La restriction $\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\big(\arcsin(x)\big)=x & \forall x\in[-1,1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big)=x & \forall x\in[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}] \end{array}}$$

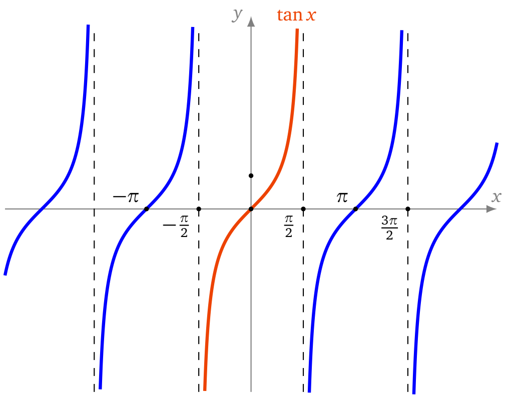
$$\boxed{\text{Si}\quad x\in[-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}]\qquad \sin(x)=y \iff x=\arcsin y}$$

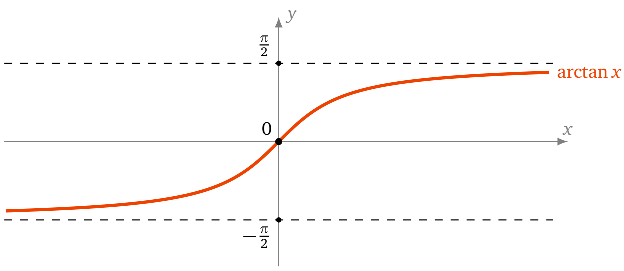
$$\boxed{\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \forall x\in\,]-1,1[}$$

Arctangente

La restriction $\tan_| :]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction *arctangente* :

$$\arctan : \mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big)=x & \forall x\in\mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big)=x & \forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si}\quad x\in\,]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}[\qquad \tan(x)=y \iff x=\arctan y}$$

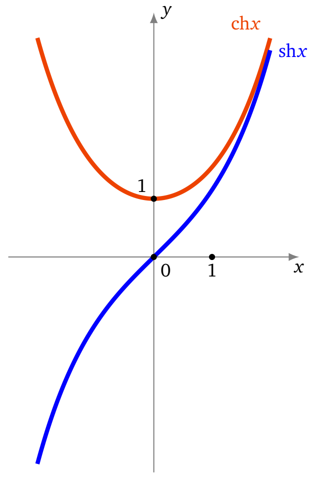
$$\boxed{\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad \forall x\in\mathbb{R}}$$

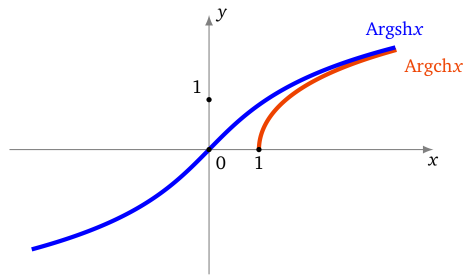
1.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Pour $x\in\mathbb{R}$, le *cosinus hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0,+\infty[\to[1,+\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1,+\infty[\to[0,+\infty[$.





Pour $x\in\mathbb{R}$, le *sinus hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh} x=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sh} x=+\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Proposition.

- $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$
- $\operatorname{ch}' x=\operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}' x=\operatorname{ch} x$
- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\operatorname{Argsh} x=\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$

Par définition la *tangente hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R}\to]-1,1[$ est une bijection, on note $\operatorname{Argth} :]-1,1[\to\mathbb{R}$ sa bijection réciproque.