1 Matrices et applications linéaires

1.1 Rang d'une famille de vecteurs

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Rang d'une famille de vecteurs
Soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le *rang* de la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1,\dots,v_p$:

$$\boxed{\mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p)=\dim\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)}$$

Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Alors :*

1. $0\leqslant \mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p)\leqslant p$ *: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.*
2. *Si E est de dimension finie alors $\mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p)\leqslant\dim E$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ambiant E.*

Exemple. Le rang d'une famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ vaut p si et seulement si la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est libre.
Rang d'une matrice
Le *rang* d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.

Proposition. *Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.*

Voici un exemple d'une matrice 6×6 échelonnée par colonnes ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls. Cette matrice est de rang 4.

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & + & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & + & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & + & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Proposition. *Le rang d'une matrice ayant les colonnes $C_1,C_2,\dots,C_p$ n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :*

1. $C_i\leftarrow\lambda C_i$ *avec $\lambda\neq 0$: on peut multiplier une colonne par un scalaire non nul.*
2. $C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j$ *avec $\lambda\in\mathbb{K}$ (et $j\neq i$) : on peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j.*
3. $C_i\leftrightarrow C_j$ *: on peut échanger deux colonnes.*

Plus généralement, l'opération $C_i\leftarrow C_i+\sum_{i\neq j}\lambda_j C_j$ conserve le rang de la matrice.
Méthodologie. Comment calculer le rang d'une matrice ou d'un système de vecteurs ?
Il s'agit d'appliquer la méthode de Gauss sur les colonnes de la matrice A (considérée comme une juxtaposition de vecteurs colonnes). Le principe de la méthode de Gauss affirme que par les opérations élémentaires $C_i\leftarrow\lambda C_i$, $C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j$, $C_i\leftrightarrow C_j$, on transforme la matrice A en une matrice échelonnée par rapport aux colonnes. Le rang de la matrice est alors le nombre de colonnes non nulles.

Théorème (Matrice inversible et rang)**.** *Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.*

L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont de même dimension :

Proposition. $\mathrm{rg}A=\dim\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$

Autrement dit le rang d'une matrice égale le rang de sa transposée :

$$\boxed{\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^T}$$

Attention ! Les dimensions $\dim\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $\dim\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$ sont égales, mais les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$ ne sont pas les mêmes.

1.2 Applications linéaires en dimension finie

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.

Théorème (Construction d'une application linéaire)**.** *Si E est de dimension finie n et $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors pour tout choix $(v_1,\dots,v_n)$ de n vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f:E\to F$ telle que, pour tout $i=1,\dots,n$:*

$$f(e_i)=v_i.$$

Rang d'une application linéaire
Soit $f:E\to F$ une application linéaire et E est de dimension finie.

— $\mathrm{Im} f=f(E)=\{f(x)|x\in E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
— Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.

La dimension de cet espace vectoriel $\mathrm{Im} f$ est appelée *rang de f* :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f)=\dim\mathrm{Im} f=\dim\mathrm{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)}$$

Le rang est plus petit que la dimension de E et aussi plus petit que la dimension de F, si F est de dimension finie.
Théorème du rang
On rappelle que le *noyau* de f est $\mathrm{Ker} f=\{x\in E\mid f(x)=0_F\}$, c'est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème (Théorème du rang)**.** *Soit $f:E\to F$ une application linéaire, E étant de dimension finie.*

$$\boxed{\dim E=\dim\mathrm{Ker} f+\dim\mathrm{Im} f}$$

Autrement dit : $\boxed{\dim E=\dim\mathrm{Ker} f+\mathrm{rg} f}$
Cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.
Application linéaire entre deux espaces de même dimension
$f:E\to F$ est un *isomorphisme* si f est une application linéaire bijective. La bijection réciproque est aussi une application linéaire.

Proposition. *Soit $f:E\to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E (respectivement F) est de dimension finie, alors F (respectivement E) est aussi de dimension finie et on a $\dim E=\dim F$.*

Voici une sorte de réciproque extrêmement utile :

Théorème. *Soit $f:E\to F$ une application linéaire avec $\dim E=\dim F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

Ainsi, si $\dim E=\dim F$, pour montrer que f bijective, il suffit de démontrer f injective ou bien f surjective.

1.3 Matrice d'une application linéaire

— Soit E un espace vectoriel de dimension p et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E
— Soit F un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ une base de F.
— Soit $f:E\to F$ une application linéaire.
— Pour $j\in\{1,\dots,p\}$, $f(e_j)$ s'écrit de manière dans la base $\mathscr{B}'$:

$$f(e_j)=a_{1j}f_1+a_{2j}f_2+\dots+a_{nj}f_n=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}.$$

La *matrice de l'application linéaire* f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice $(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'=(f_1,f_2,\dots,f_n)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)=\begin{array}{c}\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p)\end{array}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\boxed{\text{Les vecteurs colonnes sont l'image par } f \text{ des vecteurs de la base de départ } \mathscr{B}, \text{ exprimée dans la base d'arrivée } \mathscr{B}'.}$$

Matrice d'une composition.
La matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.

Proposition. *Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications linéaires et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G. Si on note :*

$$A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\qquad B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g)\qquad C=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g\circ f)$$

Alors

$$C=B\times A$$

Matrice d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n. $f : E \to E$ est un ***endomorphisme*** (l'espace vectoriel de départ est égal à celui d'arrivée). On choisit généralement la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, et on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à f, c'est une matrice carrée de taille $n \times n$.

Exemple.

- Cas de l'identité : $\mathrm{id} : E \to E$, $\mathrm{id}(x) = x$. Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$.
- Cas d'une homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
- Cas d'une symétrie centrale $s : E \to E$, $s(x) = -x$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.
- Cas de $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Si A est la matrice associée à f, alors la matrice associée à $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ est $A^p = A \times A \times \cdots \times A$.

Matrice d'un isomorphisme

Soit $f : E \to F$ un ***isomorphisme*** c'est-à-dire une application linéaire bijective. En dimension finie, on a $\dim E = \dim F$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Théorème (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme)**.**

1. *f est bijective si et seulement si la matrice A est inversible.*
2. *Dans ce cas, la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ est la matrice A^{-1}.*

C'est valable pour le cas particulier important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où E est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1.4 Changement de bases

Coordonnées

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. Pour chaque $x \in E$, il existe un p-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

On note

La matrice des coordonnées de x est un vecteur colonne, noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Si $\mathcal{B}$ on omet de mentionner la base.

Image

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- Pour $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Pour $y \in F$, notons $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition. *Si $y = f(x)$, alors on a* $\boxed{Y = AX}$.

Matrice de passage d'une base à une autre

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La ***matrice de passage*** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.

On résume :

La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ contient - en colonnes - les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Proposition. *La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$:*

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}$$

Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Proposition.

1. *La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$:* $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$
2. *Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors* $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$

Changement de coordonnées

- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Soit $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- Pour $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Pour ce même $x \in E$, on note $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition.

$$\boxed{X = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, X'}$$

Notez bien l'ordre !

Formule de changement de base

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f de $\mathcal{B}_E$ vers l$\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de f de $\mathcal{B}'_E$ vers $\mathcal{B}'_F$.

Théorème (Formule de changement de base)**.**

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Cas particulier de $f : E \to E$ endomorphisme.

- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Matrices semblables

Soient A et B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{K})$. Elles sont ***semblables*** s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Corollaire. *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.*