# 1 Logique et raisonnements

## 1.1 Logique

Une *assertion* est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

**Et logique.** L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon.

Sa table de vérité:



Table de vérité de « P et Q »

Ou logique. L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.



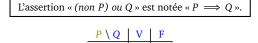
Table de vérité de « P ou O »

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.



## $L'implication \Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :



 $\begin{array}{c|c|c} P \setminus Q & V & F \\ \hline V & V & F \\ \hline F & V & V \\ \end{array}$  Table de vérité de «  $P \Longrightarrow Q$  »

## L'équivalence ⇔

L'équivalence est définie par :

$$\ ^{\vee}P \iff Q \text{ » est l'assertion } ^{\vee}(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P) \text{ »}.$$



Table de vérité de «  $P \iff Q$  :

**Proposition.** Soient P,Q,R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

- 1.  $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$
- 2.  $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
- 3.  $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
- 4.  $non(P \text{ et } Q) \iff (non P) \text{ ou } (non Q)$
- 5.  $non(P \text{ ou } Q) \iff (non P) \text{ et } (non Q)$
- 6.  $(P \operatorname{et} (Q \operatorname{ou} R)) \iff (P \operatorname{et} Q) \operatorname{ou} (P \operatorname{et} R)$
- 7.  $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
- 8. «  $P \Longrightarrow Q$  »  $\iff$  «  $non(Q) \Longrightarrow non(P)$  »

Le quantificateur  $\forall$  : « pour tout »

L'assertion

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Le quantificateur ∃ : « il existe »

L'assertion

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie.

La négation des quantificateurs

La négation de « 
$$\forall x \in E \ P(x)$$
 » est «  $\exists x \in E \ non \ P(x)$  ».

La négation de « 
$$\exists x \in E \ P(x)$$
 » est «  $\forall x \in E \ non \ P(x)$  ».

L'ordre des quantificateurs est très important.

## 1.2 Raisonnements

## Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion «  $P\implies Q$  » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

#### Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

## Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion « 
$$P \implies Q$$
 » est équivalente à «  $non(Q) \implies non(P)$  ».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion «  $P \implies Q$  », on montre en fait que si non(Q) est vraie alors non(P) est vraie.

## Absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer «  $P \implies Q$  » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc «  $P \implies Q$  » est vraie.

## Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type «  $\forall x \in E \ P(x)$  » est fausse alors il suffit de trouver  $x \in E$  tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple*.

## Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendant de n, est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La démonstration se déroule en trois étapes :

- initialisation: on prouve P(0).
- $h\acute{e}r\acute{e}dit\acute{e}$ : qui commence par « Je fixe  $n \ge 0$  et je suppose que l'assertion P(n) vraie. je vais montrer que l'assertion P(n+1) (au rang suivant) est vraie...»
- *conclusion* : par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$