1 Matrices

1.1 Définition

Un matrice de *taille* $n \times p$ (n lignes et p colonnes) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

L'ensemble de telles matrices est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite *matrice carrée*. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la *diagonale principale*.

— La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la *matrice nulle* et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.

Définition (Somme de deux matrices)**.** Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur *somme* $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)**.** Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

1.2 Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} + \dots + a_{ip} b_{pj}.$$

Proposition.

1. *$A(BC) = (AB)C$: associativité,*
2. *$A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité,*
3. *$A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.*

Pièges à éviter

— Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
— Deuxième piège. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
— Troisième piège. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

La matrice carrée suivante est la *matrice identité* :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Puissance

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. La formule de récurrence est $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

1.3 Inverse d'une matrice : définition

Définition (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est *inversible*. On appelle B l'*inverse de A* et on la note A^{-1}.

Il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition.

— *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*
— *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.*
— *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$. Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !*
— *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

1.4 Inverse d'une matrice : calcul

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition. *Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. En pratique, à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

1.5 Inverse d'une matrice : systèmes linéaires

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Proposition. *Si la matrice A est inversible, alors la solution du système linéaire $AX = B$ est unique et est :*

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

1.6 Matrices triangulaires, transposée...

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est *triangulaire inférieure* si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est *triangulaire supérieure* si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite ***diagonale***. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Théorème. *Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition. On appelle ***matrice transposée*** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Théorème.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition. La ***trace*** d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.}$$

Théorème. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est ***symétrique*** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si $A = A^T$, ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est ***antisymétrique*** si $A^T = -A$, c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.