1 Calculs algébriques

1.1 Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

1.2 Fractions

Une ***fraction*** est $\frac{a}{b}$ avec a, b des nombres réels. a est le ***numérateur***, b est le ***dénominateur***. Ce dénominateur ne doit pas être nul : $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

$$\frac{a}{1} = a \qquad \frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

1.3 Puissances

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$$

$$\text{convention : } x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^2 = x \times x \qquad \cdots$$

Pour $x \neq 0$, on pose $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
Pour $n, a, b \in \mathbb{Z}$:

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

x^{a^b} signifie $x^{(a^b)}$

Puissances de 10

10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9
1	10	100	1000	10 000	100 000	un million	un milliard
			kilo			mega	giga

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-9}
1	0,1	0,01	0,001	0,0001	un millionième	un milliardième
			milli		micro	nano

Pour les puissances positives l'exposant n est le nombre de zéros du nombre : par exemple $10\,000 = 10^4$ car $10\,000$ a 4 zéros.
Pour les puissances négatives l'exposant est n est aussi le nombre de zéros du nombre, en comptant le zéro avant la virgule : par exemple $0,001 = 10^{-3}$ car $0,001$ a un total de 3 zéros (1 avant la virgule et 2 après).

Puissances de 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Carrés

2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

1.4 Racine carrée

La ***racine carrée*** d'un réel $x \geqslant 0$ est le réel $\sqrt{x} \geqslant 0$ tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
Pour $x, y \geqslant 0$.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad x, y \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad x \geqslant 0, y > 0$$

Pour $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Par exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $x \geqslant 0$,

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

(Attention pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$!)
Pour $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n}$$

Pour $x, y \geqslant 0$:

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$$

Attention ! $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1.5 Inégalités

Définitions. $a \leqslant b \iff b - a \in [0, +\infty[$. $a < b \iff b - a \in]0, +\infty[$.
Addition. Si $a \leqslant b$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $a + k \leqslant b + k$.
Multiplication par un réel positif. Si $a \leqslant b$ et $k \geqslant 0$ alors $ka \leqslant kb$.
Multiplication par un réel négatif. Attention ! Si $a \leqslant b$ et $k < 0$ alors $ka \geqslant kb$. En particulier si $a \leqslant b$ alors $-a \geqslant -b$. Par exemple $2 \leqslant 3$ et $-2 \geqslant -3$.
Inverse. Attention ! Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. Par exemple $2 \leqslant 3$ et $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}$.
Autre formule d'addition. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
Autre formule de multiplication. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.