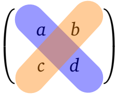
1 Déterminants

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, par exemple $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

1.1 Déterminant en dimension 2 et 3

Matrice 2×2**.**

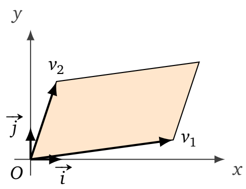
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$



C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).

Proposition. *L'aire du parallélogramme délimité par* $v_1 = \binom{a}{c}$ *et* $v_2 = \binom{b}{d}$ *est donnée par la valeur absolue du déterminant :*

$$\mathscr{A} = \left|\det(v_1, v_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$



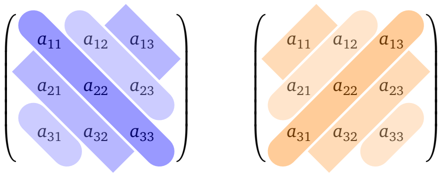
Matrice 3×3**.** Soit $A\in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

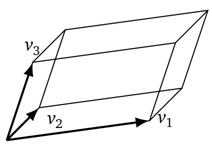
Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Règle de Sarrus : Addition de trois produits de trois termes le long de la diagonale descendante (en bleu, à gauche) puis soustraction de trois produits de trois termes le long de la diagonale montante (en orange, à droite)



Proposition. *Le volume du parallélépipède délimité par trois vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ *est donné par la valeur absolue du déterminant de la matrice correspondante :* $\mathscr{V} = \left|\det(A)\right|$.



1.2 Définition du déterminant

Théorème (Existence et d'unicité du déterminant)**.** *Il existe une unique application de* $M_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$*, appelée* **déterminant***, telle que*

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;

(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;

(iii) le déterminant de la matrice identité I_n *vaut* 1.

Le déterminant est donc la seule ***forme multilinéaire*** (propriété (i)), ***alternée*** (propriété (ii)) qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n.
Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit : pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\det(C_1,\ldots,\lambda C_j+\mu C_j',\ldots,C_n) = \lambda\det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n)+\mu\det(C_1,\ldots,C_j',\ldots,C_n)$, soit

Proposition (Opérations élémentaires sur les colonnes)**.**

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda\neq 0$ *:* A' *est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors* $\det A' = \lambda\det A$*.*
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *avec* $\lambda\in\mathbb{K}$ *(et* $j\neq i$*) :* A' *est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors* $\det A' = \det A$*.*
3. $C_i \leftrightarrow C_j$ *:* A' *est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors* $\boxed{\det A' = -\det A}$*. Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.*

Corollaire. *Si une colonne* C_i *de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors* $\det A = 0$*.*

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure, ou diagonale) est égal au produit des termes diagonaux.*

1.3 Propriétés du déterminant

Déterminant d'un produit

Théorème.

$$\boxed{\det(AB) = \det A\cdot\det B}$$

Déterminant des matrices inversibles

Corollaire. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :*

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

Déterminant de la transposée

Corollaire.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$$

Conséquence. Par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes : le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes ; si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul ; on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

1.4 Calculs de déterminants

Cofacteur

Soit $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
- Le nombre $\det A_{ij}$ est un **mineur d'ordre $n-1$** de la matrice A.
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ est le **cofacteur** de A relatif au coefficient a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Théorème (Développement suivant une ligne ou une colonne)**.** *Formule de développement par rapport à la ligne i :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

On commence souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice C des cofacteurs, appelée ***comatrice***, et notée $\mathrm{Com}(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème. *Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T}$$

1.5 Applications des déterminants

Méthode de Cramer

Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème (Règle de Cramer)**.** *Soit $AX = B$ un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Déterminant et base

Théorème. *Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Calcul du rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le ***rang*** de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes. C'est donc le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle ***mineur d'ordre k*** le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.

Théorème. *Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.*

Proposition. *Le rang de A est égal au rang de sa transposée A^T.*