1 Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne un corps, par exemple $\mathbb{R}$.

1.1 Espace vectoriel (début)

Définition. Un ***$\mathbb{K}$-espace vectoriel*** est un ensemble non vide E muni :
- d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$
- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :
1. $u + v = v + u$ (pour tous $u, v \in E$)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $u, v, w \in E$)
3. Il existe un ***élément neutre*** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)
4. Tout $u \in E$ admet un ***symétrique*** u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1 \cdot u = u$ (pour tout $u \in E$)
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$)
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

Exemple fondamental : $E = \mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Addition : $(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$.
- Multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
- L'élément neutre : vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.
- Le symétrique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \ldots, x_n)$.

1.2 Espace vectoriel (fin)

Vocabulaire :
- Un élément de E est un ***vecteur***.
- Un élément de $\mathbb{K}$ est un ***scalaire***.
- L'élément neutre 0_E s'appelle le ***vecteur nul***. Il est unique.
- Pour chaque $u \in E$, son ***symétrique*** (ou ***opposé***) $-u$ est unique.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :*
1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E}$

Exemple. L'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Soient f et g deux éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda \cdot f$ est définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).
- L'élément neutre est la fonction nulle, définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Le symétrique de f est $-f$ définie $(-f)(x) = -f(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Autres exemples :
- L'ensemble $\mathscr{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes est un espace vectoriel.

1.3 Sous-espace vectoriel (début)

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un ***sous-espace vectoriel*** si :
- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$ (F est stable pour l'addition),
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$ (F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Exemples :
- L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogènes à p variables. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Méthodologie. Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

1.4 Sous-espace vectoriel (milieu)

Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme
$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$
est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont appelés ***coefficients*** de la combinaison linéaire.
Remarque : si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est ***colinéaire*** à v_1.

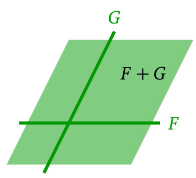
Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \textit{pour tout } u, v \in F \quad \textit{et tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Proposition (Intersection de deux sous-espaces)**.** *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

1.5 Sous-espace vectoriel (fin)

Définition (Somme de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u + v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé ***somme*** des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F + G$. On a donc
$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$



Proposition.
1. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.*

Définition (Somme directe de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en ***somme directe*** dans E si :
- $F \cap G = \{0_E\}$,
- $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$ et on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** dans E.

Proposition. *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière* **unique** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Exemple. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathscr{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathscr{I}$ sont supplémentaires : $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème (Sous-espace engendré)**.** *Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :*
- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé* **sous-espace engendré par $v_1, \ldots, v_n$** *et noté* $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$.
Ainsi : $u \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \iff$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ (si F est un sous-espace vectoriel de E contenant aussi les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ alors* $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \subset F$*).*

1.6 Application linéaire (début)

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une ***application linéaire*** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$;
2. $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous $u, v \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)}$$

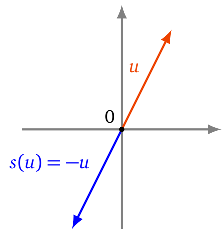
Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires.
Exemple. Pour une matrice fixée $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(X) = AX$ est une application linéaire.

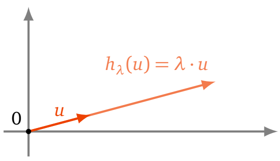
Proposition. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*
- $f(0_E) = 0_F$,
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout $u \in E$.*

Vocabulaire :
- L'***application identité***, notée $\mathrm{id}_E : f : E \longrightarrow E$, $f(u) = u$ pour tout $u \in E$.
- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée ***morphisme*** ou ***homomorphisme*** d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Une application linéaire de E dans E est appelée ***endomorphisme*** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

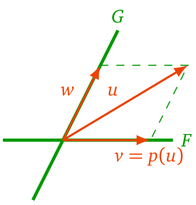
1.7 Application linéaire (milieu)

Symétrie centrale et homothétie.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $s : E \to E$, $s(u) = -u$ est linéaire et s'appelle la ***symétrie centrale***. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(u) = \lambda u$ est linéaire et s'appelle l'***homothétie*** de rapport λ.





Projection.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. La ***projection*** sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie par $p(u) = v$.



- Une projection est une application linéaire.
- Une projection p vérifie l'égalité $p^2 = p$. Note : $p^2 = p$ signifie $p \circ p = p$, c'est-à-dire pour tout $u \in E$: $p\big(p(u)\big) = p(u)$.

1.8 Application linéaire (fin)

Image
Rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit $A \subset E$. L'***image directe*** de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A, appelé $f(A) = \big\{f(x) \mid x \in A\big\}$. C'est un sous-ensemble de F.
Soit maintenant E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
$f(E)$ s'appelle l'***image*** de l'application linéaire f et est noté $\mathrm{Im}\, f$.

Proposition.

1. *$\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *Plus généralement, si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Par définition de l'image directe :
$$f \text{ est surjective si et seulement si } \mathrm{Im}\, f = F.$$

Noyau

Définition (Définition du noyau)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le ***noyau*** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \big\{x \in E \mid f(x) = 0_F\big\}}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition. *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple. Un plan $\mathscr{P}$ d'équation $(ax + by + cz = 0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet c'est le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = ax + by + cz$.

Théorème (Caractérisation des applications linéaires injectives)**.**

$$\boxed{f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \big\{0_E\big\}}$$

En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que :
$$\text{si } f(x) = 0_F \text{ alors } x = 0_E.$$

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$

Proposition. *L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Composition et inverse d'applications linéaires

Proposition (Composée de deux applications linéaires)**.** *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Une application linéaire bijective de E sur F est appelée ***isomorphisme*** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits ***isomorphes***.
- Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.