

1 Nombres complexes

1.1 $z = a + ib$

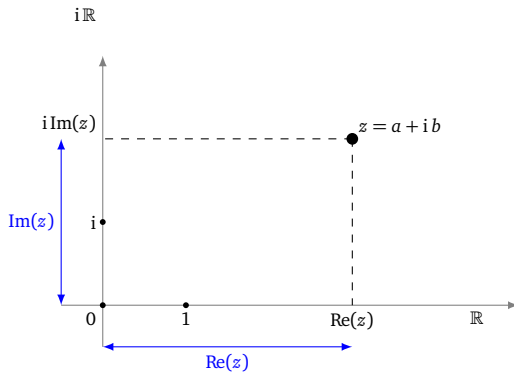
Un **nombre complexe** est un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $a + ib$, avec :

$$i^2 = -1$$

Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

- **addition** : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- **multiplication** : $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.
On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle et la relation $i^2 = -1$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, sa **partie réelle** est le réel a et on la note $\text{Re}(z)$; sa **partie imaginaire** est le réel b et on la note $\text{Im}(z)$.



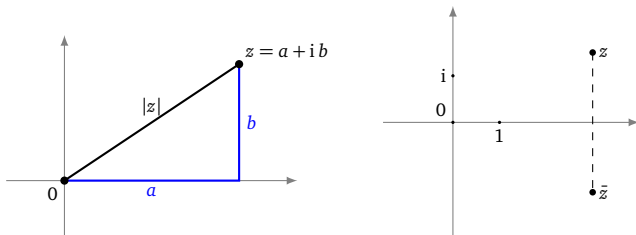
- L'**inverse** : si $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ (où $1 = 1 + i \times 0$).
- La **division** : $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \frac{1}{z'}$.
- Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
- Puissances : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \dots \times z$ (n fois, $n \in \mathbb{N}$). Par convention $z^0 = 1$ et $z^{-n} = (\frac{1}{z})^n = \frac{1}{z^n}$.

Proposition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1 :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

1.2 Module

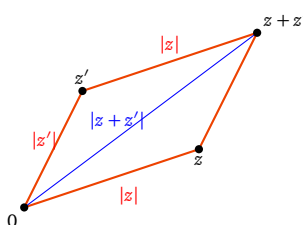
- Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$ car $z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.



- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zz'| = |z||z'|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$

Proposition (L'inégalité triangulaire).

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$



1.3 Équation du second degré

Pour $z \in \mathbb{C}$, une **racine carrée** est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$. Tout nombre complexe, admet deux racines carrées, ω et $-\omega$.

Proposition. L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ éventuellement confondues. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ . Alors les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

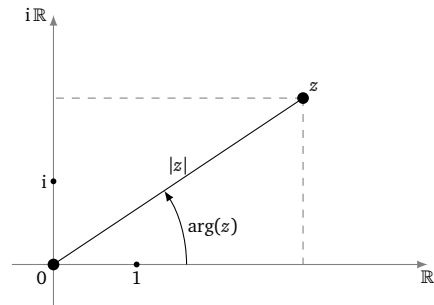
Corollaire. Si les coefficients a, b, c sont réels alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :

- si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = 0$, la racine double est réelle et vaut $-\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Théorème (d'Alembert-Gauss). Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n . Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité. Il existe donc des nombres complexes z_1, \dots, z_n (dont certains sont éventuellement confondus) tels que $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$.

1.4 Argument

Pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelé un **argument** de z et noté $\theta = \arg(z)$.



Cet argument est défini modulo 2π . On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$ (ou bien $\theta \in [0, 2\pi[$).

$$\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases}$$

Proposition.

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$

1.5 Formule de Moivre, notation exponentielle

La **formule de Moivre** est :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Nous définissons la **notation exponentielle** par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

et donc tout nombre complexe s'écrit

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où $\rho = |z|$ est le module et $\theta = \arg(z)$ est un argument.

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$:

- $zz' = \rho \rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho \rho' e^{i(\theta + \theta')}$
- $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
- $1/z = 1/(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

$$-\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

La formule de Moivre se réduit à l'égalité : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Enfin : $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ (avec $\rho, \rho' > 0$) si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

1.6 Racines n -ième

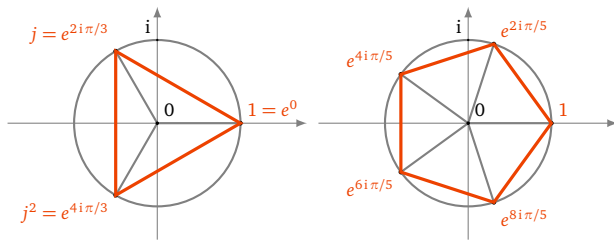
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une **racine n -ième** est un nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition. Il y a n racines n -ièmes $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ de $z = \rho e^{i\theta}$, ce sont :

$$\omega_k = \rho^{1/n} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Par exemple pour $z = 1$, on obtient les n **racines n -ièmes de l'unité** :

$$e^{2ik\pi/n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Racine 3-ième (à gauche) et 5-ième de l'unité

1.7 Applications à la trigonométrie

Formules d'Euler, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Linéarisation. On exprime $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ pour k allant de 0 à n .

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple.

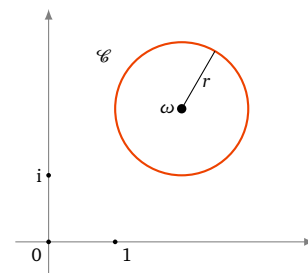
$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i} ((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3) \\ &= \frac{1}{-8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\ &= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3 \sin \theta}{4} \end{aligned}$$

1.8 Équation complexe d'un cercle

L'équation du cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω , d'affixe ω et de rayon r est

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2$$

Il est plus simple de retrouver la formule à chaque fois : $\text{dist}(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = r^2$.



1.9 Équation complexe d'une droite

La droite d'équation $ax + by = c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$) a pour équation complexe :

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k$$

où $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$.

1.10 Équation $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$

Proposition. Soit A, B deux points du plan et $k \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ est

- une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,
- un cercle, sinon.

