Transformations de l'espace

Nous étudions les transformations affines usuelles de l'espace : translations, homothéties, réflexions... à l'aide des vecteurs et matrices. Nous décrivons les formules de changement de base et introduisons les coordonnées homogènes.

1. Transformations affines

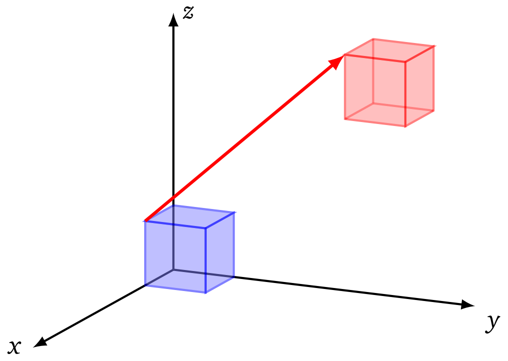
1.1. Translations

Une ***translation*** de vecteur (a, b, c) est la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$$

Si on note $T = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ alors, l'image Y d'un point $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ est :

$$Y = X + T.$$



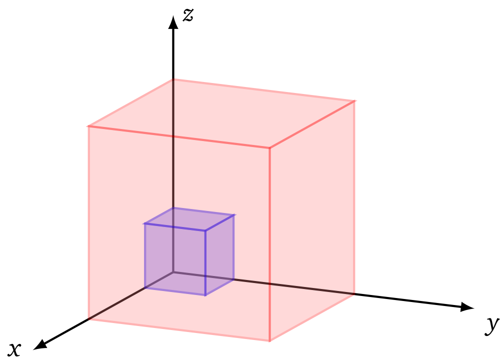
1.2. Homothéties

Une ***homothétie*** centrée à l'origine et de rapport k est l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto Y$ définie par

$$Y = kX$$

Autrement dit $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$. Nous préférons écrire les transformations en termes de vecteurs et matrices :

$$Y = AX \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

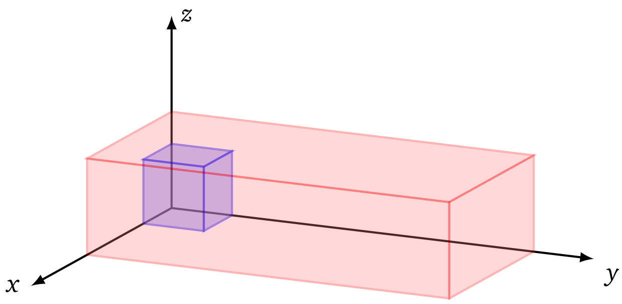


Si on souhaite une homothétie de rapport k centrée en un point quelconque $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors on applique la formule :

$$Y = A(X - X_0) + X_0.$$

Pour déformer l'espace avec des rapports différents selon chaque axe (ce n'est plus une homothétie), on utiliserait la matrice :

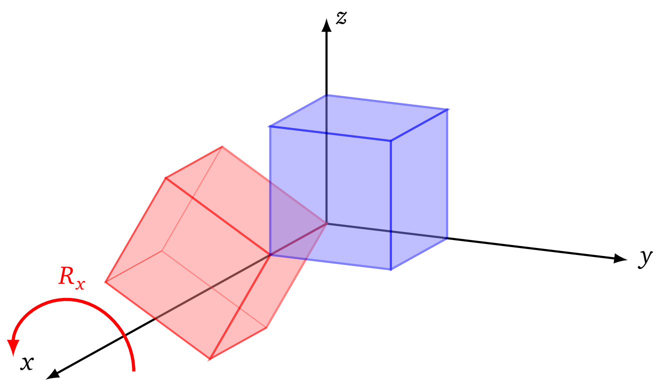
$$A = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}.$$



1.3. Rotations

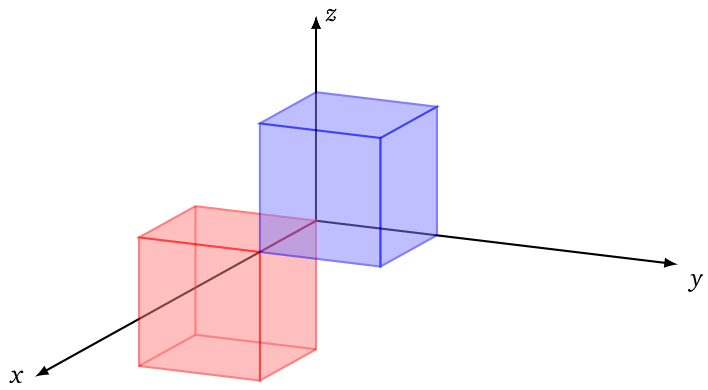
Les rotations seront étudiées en détail dans le chapitre « Rotations de l'espace ».
Par exemple la rotation d'axe (Ox) et d'angle θ est la transformation $Y = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$



Une rotation d'angle π (180°) s'appelle un ***retournement***. Le retournement d'axe (Ox) a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



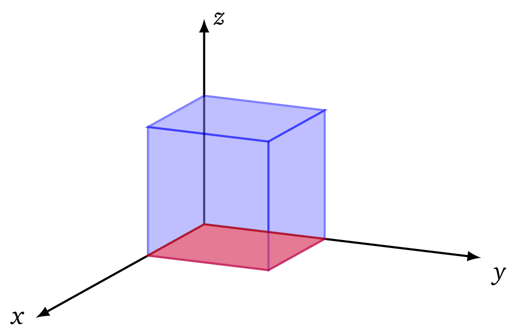
Voici les matrices de rotations autour de l'axe (Oy) et de l'axe (Oz) :

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Projections

Les projections seront étudiées en détail dans le chapitre « Perspective ».
Par exemple la ***projection orthogonale*** sur le plan (Oxy) est la transformation $Y = AX$ avec

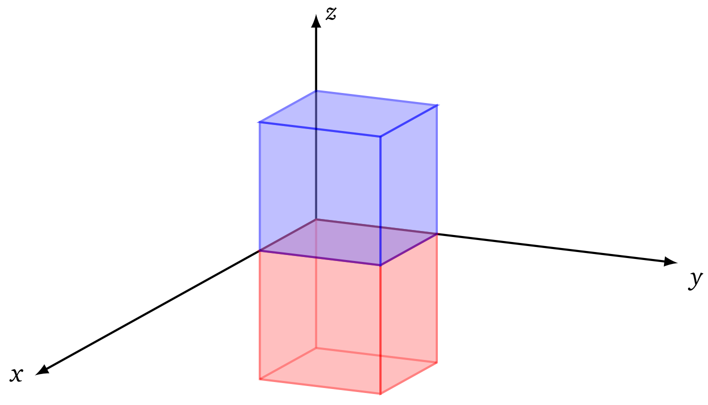
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



1.5. Réflexions

La ***réflexion orthogonale*** par rapport au plan (Oxy) est la transformation $Y = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



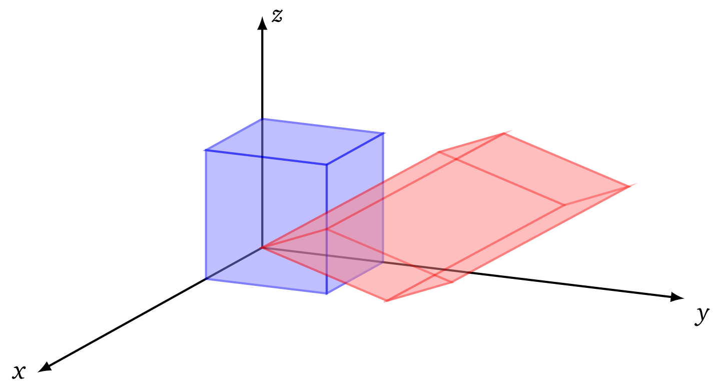
Plus généralement si A est la matrice d'une projection sur un sous-espace, alors $B = 2A - I$ est la matrice de la réflexion par rapport à ce même sous-espace.

1.6. Matrice quelconque

De façon générale une ***transformation vectorielle*** est l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto Y$ où :

$$Y = AX \qquad \text{avec } A \in M_3(\mathbb{R}).$$

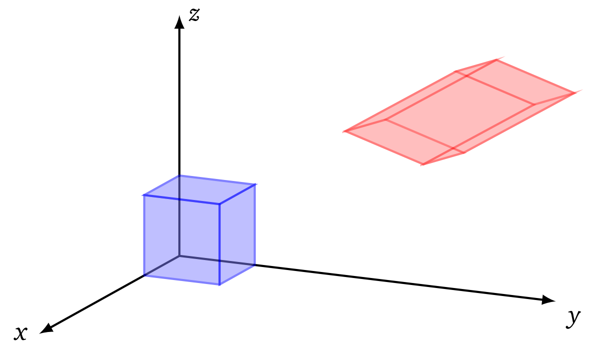
On appelle aussi la fonction F une ***application linéaire***.



Une ***transformation affine*** est une transformation vectorielle, suivie d'une translation :

$$Y = AX + T \qquad \text{avec } A \in M_3(\mathbb{R}), T \in M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Une transformation vectorielle envoie toujours l'origine sur l'origine, à la différence d'une transformation affine.



Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation affine ou vectorielle. Notons A la matrice de cette transformation. Le déterminant $\det(A)$ de cette matrice est important dans l'étude de la transformation F.

Proposition 1.
La transformation F est bijective si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Proposition 2.
Si E est un ensemble dont le volume est $\mathcal{V}$ alors $F(E)$ est un ensemble dont le volume est $|\det(A)| \times \mathcal{V}$.

Rappelons que si $A \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors le déterminant se calcule selon la formule :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Les matrices permettent d'effectuer facilement la composition des transformations vectorielles. Si F a pour matrice A et G a pour matrice B, alors la transformation $F \circ G$ (l'action de G suivie de celle de F) a pour matrice le produit AB. C'est-à-dire : $F \circ G : X \mapsto Y = (AB)X$. On rappelle que l'ordre a une importance, les matrices AB et BA sont en général distinctes, autrement dit, appliquer F puis G n'est pas la même chose qu'appliquer G puis F.

2. Changement de repère

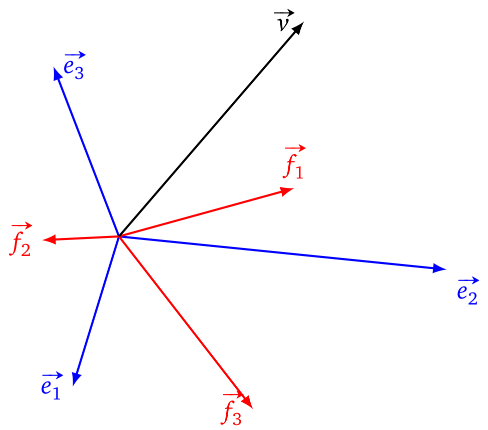
2.1. Changement de coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$. Considérons un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et notons X les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Fixons maintenant une seconde base $\mathcal{B}' = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ de $\mathbb{R}^3$. Le même vecteur $\vec{v}$ n'a pas les mêmes coordonnées dans cette nouvelle base. Notons X' les coordonnées de $\vec{v}$ dans cette base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire :

$$\vec{v} = x'\vec{f_1} + y'\vec{f_2} + z'\vec{f_3} \qquad \text{et} \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$



Quel est le lien entre X et X' ?
La ***matrice de passage*** P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée de taille 3×3 dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.
On résume en :

La matrice de passage P contient – en colonnes – les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Voici le lien entre les coordonnées dans l'ancienne et la nouvelle base :

Proposition 3.

$$\boxed{X = PX'}$$

Notez bien l'ordre ! La formule permet de calculer les coordonnées dans la base de départ à partir de celle de la base d'arrivée. Mais en général on veut l'opération inverse. Pour cela on utilise simplement la relation $\boxed{X' = P^{-1}X}$ qui donne les coordonnées dans la nouvelle base à partir des coordonnées dans l'ancienne base.

Exemple.
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, mais aussi d'une autre base $\mathcal{B}'$ avec :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$?
Comme la base de départ est la base canonique alors dans ce cas la matrice de passage est simplement la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous aurons besoin de calculer son inverse. Après calculs :

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les coordonnées X' de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}'$? Comme $X = PX'$ alors $X' = P^{-1}X$, ainsi :

$$X' = P^{-1}X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.2. Changement de base pour les matrices

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire (c'est-à-dire une transformation vectorielle). Notons A la matrice de F dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi si $f(\vec{v}) = \vec{w}$ et que $\vec{v}$ a pour coordonnées X et $\vec{w}$ a pour coordonnées Y (toujours dans la même base $\mathcal{B}$) alors

$$\boxed{Y = AX}$$

Très souvent, la base choisie est la base canonique et alors on définit une application linéaire par sa matrice. Mais la relation est en général plus subtile :

$$\boxed{\text{(une matrice + le choix d'une base)} \longleftrightarrow \text{une application linéaire}}$$

Donc dans une autre base $\mathcal{B}'$, la matrice de F est différente : notons B cette matrice. Comment exprimer B en fonction de A ?
La formule de changement de base pour une application linéaire est :

Proposition 4.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Comme auparavant, la matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exemple.
Reprenons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple du paragraphe 2.1 :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right).$$

Considérons la rotation F d'axe (Oz) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Autrement dit, dans la base $\mathcal{B}$ un vecteur de coordonnées X s'envoie sur le vecteur de coordonnées $Y = AX$. Quelle est la matrice B de cette même rotation, mais dans la base $\mathcal{B}'$? On cherche la matrice B telle que dans la base $\mathcal{B}'$ cette fois un vecteur de coordonnées X' s'envoie sur les coordonnées $Y' = BX'$. La formule de changement de base pour les matrices est $B = P^{-1}AP$, donc :

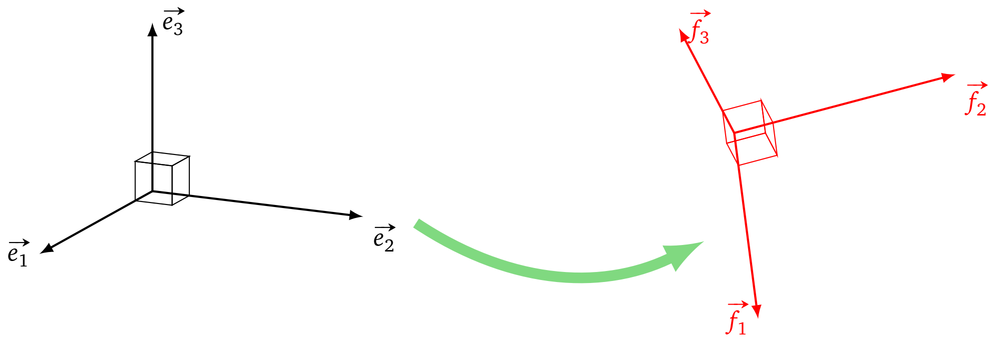
$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2\\ -3 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -10 & -13\\ 6 & 5 & 6\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour un vecteur ayant pour coordonnées $X' = \left(\begin{smallmatrix}5\\0\\10\end{smallmatrix}\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$, alors son image par la rotation F aura pour coordonnées $Y' = BX' = \left(\begin{smallmatrix}-29\\18\\4\end{smallmatrix}\right)$ (toujours dans la base $\mathcal{B}'$).

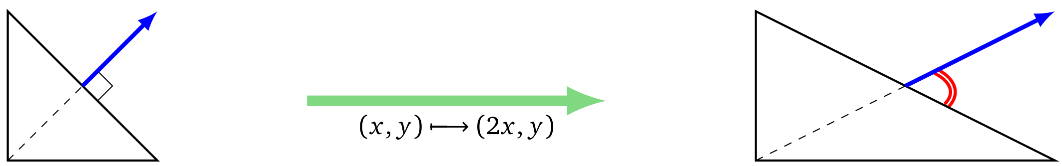
2.3. Changement de base orthonormée

On rappelle qu'une base $\mathcal{B}$ est ***orthonormale*** si chaque vecteur est unitaire et si deux vecteurs distincts sont orthogonaux.
Une matrice A est ***orthogonale*** si $A^T A = I$, autrement dit si $A^{-1} = A^T$. De façon équivalente, une matrice A est orthogonale si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale. On note $O(3)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille 3×3.

Proposition 5.
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.



Il faut aussi prendre garde qu'une transformation vectorielle ne préserve en général pas l'orthogonalité (même si c'est vrai pour les homothéties, les rotations, les symétries orthogonales).



Proposition 6.
Soit A la matrice d'une application linéaire F. Si A est une matrice orthogonale alors F préserve le produit scalaire, c'est-à-dire $F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$. En particulier F préserve les angles et les longueurs ; ainsi F préserve l'orthogonalité et envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

Conséquence : si dans une base orthonormée F a pour matrice la matrice orthogonale A, alors dans une autre base orthonormée F a pour matrice B qui est aussi orthogonale (c'est $B = P^{-1}AP$ avec A et P orthogonales).

Exercice.
On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^{-1} = A^T$, en déduire que A est une matrice orthogonale.
2. Montrer que les vecteurs de coordonnées $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Calculer les coordonnées $Y_1 = AX_1$ de l'image de X_1 par A. Idem pour $Y_2 = AX_2$. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont encore des vecteurs orthogonaux.

3. Coordonnées homogènes

3.1. Motivation

Il y a plusieurs inconvénients à la description des transformations vues lors des sections précédentes : la plupart des transformations étudiées jusqu'ici étaient des transformations vectorielles (où l'origine s'envoie sur l'origine) et les translations sont effectuées à part afin d'obtenir une transformation affine. D'autre part les ordinateurs savent multiplier très rapidement des matrices (pour composer les applications linéaires), mais les translations requièrent un traitement à part (une addition). Pourrait-on unifier la situation ? Un autre problème est de manipuler des objets à l'infini. Par exemple, pour un éclairage, il faut différencier un éclairage issu d'un point, d'un éclairage « à l'infini » comme le Soleil. Encore une fois : comment unifier cette situation ?
Ces deux problèmes sont réglés par les coordonnées homogènes. Il s'agit d'ajouter une coordonnée supplémentaire, ainsi un point de l'espace est codé avec 4 nombres réels et une transformation qui inclut une translation est codée à l'aide d'une matrice 4×4. Les points à l'infini sont les points dont la dernière coordonnée est nulle.
Pour mieux comprendre et pouvoir faire des dessins on commence par expliquer les coordonnées homogènes du plan.

3.2. Coordonnées homogènes du plan

Définition

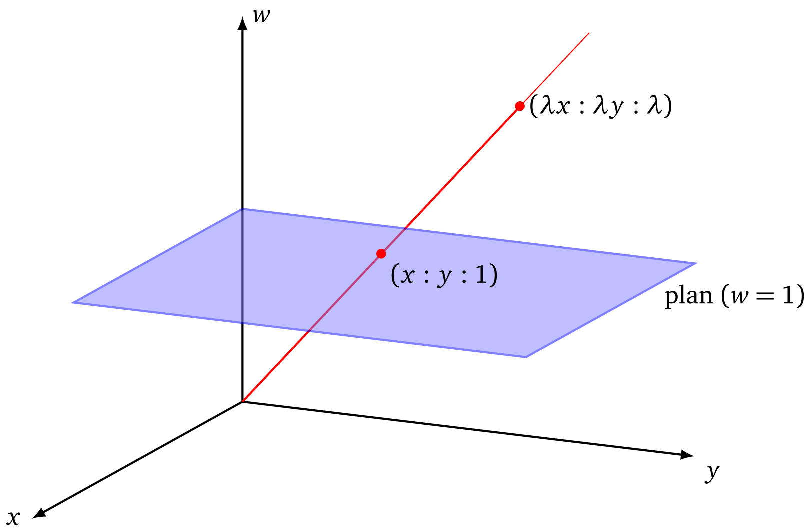
On note $(x : y : w)$ les ***coordonnées homogènes*** du plan où x, y, w sont des réels (pas tous les trois nuls en même temps). Ces coordonnées sont définies à un facteur près, c'est-à-dire que :

$$\boxed{(x : y : w) = (\lambda x : \lambda y : \lambda w) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^*}$$

Par exemple $(2 : -1 : 1) = (4 : -2 : 2) = (-6 : 3 : -3)$ et $(2 : 3 : 0) = (4 : 6 : 0)$. Attention, le point « $(0 : 0 : 0)$ » n'existe pas.
On appelle ***plan projectif***, noté $\mathbb{R}P^2$, l'ensemble de ces triplets $(x : y : w)$.

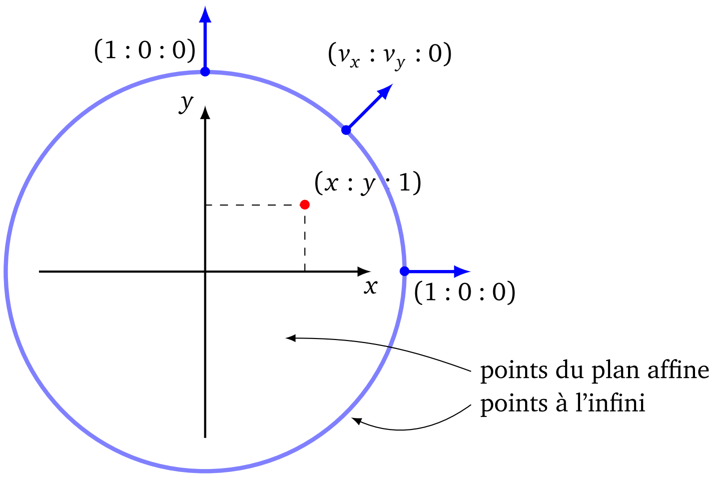
- Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point du plan alors on lui associe les coordonnées homogènes $(x : y : 1)$.
- Réciproquement à $(x : y : w)$ avec $w \neq 0$, on lui associe le point $(x/w, y/w)$. Noter que si $w \neq 0$ on a $(x : y : w) = (x/w : y/w : 1)$.
- Si (v_x, v_y) est un vecteur du plan, on lui associe les coordonnées homogènes $(v_x : v_y : 0)$, aussi appelé « point à l'infini ». Réciproquement à $(v_x : v_y : 0)$, on associe le vecteur (ou la direction) (v_x, v_y).

Pour décrire le plan projectif d'un point de vue géométrique, on part de l'espace $\mathbb{R}^3$ et on identifie les points qui sont situés sur une même droite passant par l'origine (car $(x : y : w) = (\lambda x : \lambda y : \lambda w)$).
L'identification $(x : y : 1)$ avec le point (x, y) correspond à intersecter une droite vectorielle de l'espace avec le plan d'équation $(w = 1)$.



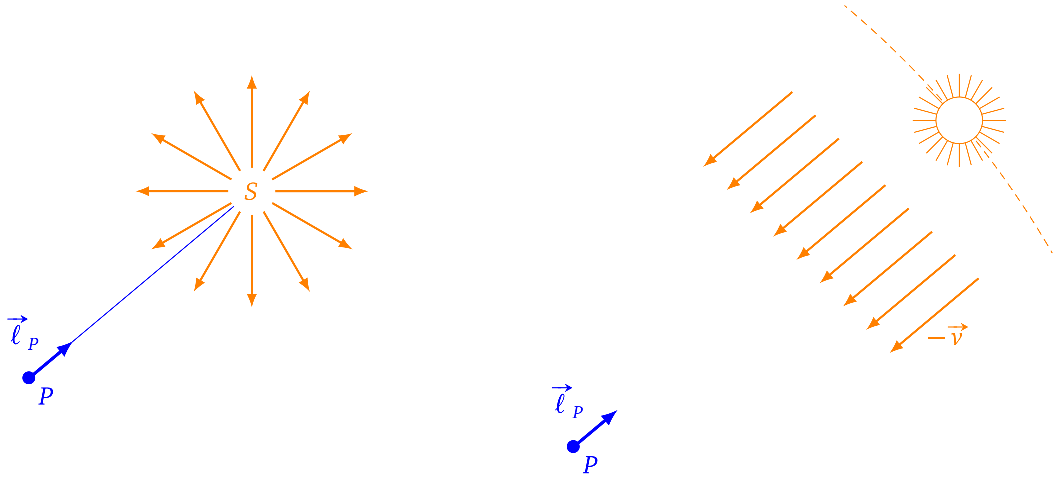
Points à l'infini

On peut se représenter le plan projectif ainsi : une partie affine correspondant aux points de coordonnées homogènes $(x : y : 1)$ et un ensemble de points à l'infini de coordonnées homogènes $(v_x : v_y : 0)$. Un point à l'infini $(v_x : v_y : 0)$ correspond à une direction $\vec{v} = (v_x, v_y)$.



Voyons maintenant comment uniformiser la position d'un éclairage. La source d'un éclairage est définie par un point $S \in \mathbb{R}P^2$ de coordonnées homogènes $(x_S : y_S : w_S)$ avec $w_S = 0$ ou bien $w_S = 1$.

- **Lumière ponctuelle.** $S = (x_S : y_S : 1)$. Dans ce cas la source lumineuse est en position (x_S, y_S). Si $P(x, y)$ est un point du plan, alors un vecteur dirigé vers la source lumineuse est $\overrightarrow{PS}$.
- **Lumière directionnelle.** $S = (x_S : y_S : 0)$. Dans ce cas la source lumineuse est « à l'infini » et est caractérisée par la direction opposée à $\vec{v} = (x_S, y_S)$. Pour n'importe quel point P du plan, $\vec{v}$ est un vecteur dirigé vers la source lumineuse.



Transformation

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une transformation affine du plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques.
En d'autres termes, l'image d'un point (x, y) du plan est le point $F(x, y) = (x', y')$ avec

$$\begin{cases} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{cases}.$$

Si on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

alors $F(X) = AX + T$.

Problème de la composition

Composer deux transformations vectorielles est simple : si F a pour matrice A et G a pour matrice B alors $F \circ G$ a pour matrice AB. La composition correspond simplement au produit de matrices.
Faisons maintenant le calcul avec des transformations affines $F : X \mapsto AX + T$ et $G : X \mapsto BX + S$:

$$F \circ G(X) = F\big(G(X)\big) = F\big(BX + S\big) = A(BX + S) + T = ABX + (AS + T).$$

La formule n'est donc pas simple et se compliquerait encore si ajoutait des compositions.
Calculons l'action de la transformation $F : X \mapsto AX + T$ en coordonnées homogènes.

$$\text{À} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{on associe} \quad X_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et à la transformation affine (de matrice A et translation T) on associe la matrice :

$$A_h = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $F(X_h) = A_h X_h$ (en identifiant un point $P_h = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $(x : y : 1)$ et (x, y)) :

$$A_h X_h = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{pmatrix} = F(X_h).$$

Ainsi en coordonnées homogènes, une transformation affine du plan correspond à la multiplication par une matrice 3×3.
Si $G : X \mapsto BX + S$ est une autre transformation affine et que l'on note B_h la matrice 3×3 associée, alors

$$F \circ G(X_h) = F\big(G(X)\big) = F\big(B_h X_h\big) = A_h(B_h X_h) = (A_h B_h)X_h.$$

Ainsi, en coordonnées homogènes, la matrice associée à $F \circ G$ est naturellement le produit $A_h B_h$.

3.3. Coordonnées homogènes de l'espace

Ajoutons une dimension supplémentaire afin de définir les coordonnées homogènes dans l'espace.

Coordonnées homogènes

On note $(x : y : z : w)$ les ***coordonnées homogènes*** de l'espace, où x, y, z et w sont des réels, pas tous les quatre nuls en même temps. Ces coordonnées sont définies à un facteur multiplicatif près, c'est-à-dire que :

$$\boxed{(x : y : z : w) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z : \lambda w) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^*}$$

L'ensemble de ces éléments $(x : y : z : w)$, à équivalence près, s'appelle l'***espace projectif***, noté $\mathbb{R}P^3$.
Les coordonnées classiques correspondent aux coordonnées homogènes lorsque $w = 1$. Plus précisément :

- Si $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un point de l'espace alors on lui associe les coordonnées homogènes $X_h = (x : y : z : 1)$.
- Réciproquement à $(x : y : z : w)$ avec $w \neq 0$, on lui associe le point $(x/w, y/w, z/w)$. Noter que si $w \neq 0$ on a $(x : y : z : w) = (x/w : y/w : z/w : 1)$.
- Si (v_x, v_y, v_z) est un vecteur, on lui associe les coordonnées homogènes $(v_x : v_y : v_z : 0)$, aussi appelé « un point à l'infini ». Réciproquement à $(v_x : v_y : v_z : 0)$, on associe le vecteur (ou la direction) (v_x, v_y, v_z).

Exemple.

1. Le point $\bar{A} \in \mathbb{R}P^3$ de coordonnées homogènes $(-3 : 0 : 2 : 1)$ a aussi pour coordonnées homogènes $(-6 : 0 : 4 : 2)$. Le point $A \in \mathbb{R}^3$ correspondant est $(-3, 0, 2)$.
2. Le point $\bar{B} \in \mathbb{R}P^3$ de coordonnées $(2 : 3 : -2 : 1)$ est associé à $B \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $(2, 3, -2)$.
3. Lorsque les coordonnées homogènes sont normalisées avec $w = 1$ on peut soustraire deux points pour obtenir un vecteur :
$$\bar{B} - \bar{A} = (2 : 3 : -2 : 1) - (-3 : 0 : 2 : 1) = (5 : 3 : -4 : 0)$$
qui est un point à l'infini et correspond bien aux coordonnées homogènes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Il est difficile de visualiser l'espace projectif. Un premier point de vue est de partir de l'espace $\mathbb{R}^4$ (à quatre dimensions) et d'identifier les points qui sont situés sur une même droite vectorielle. Une autre vision est de considérer que $\mathbb{R}P^3$ correspond à l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ auxquels on rajoute des points à l'infini (qui sont en fait en bijection avec le plan projectif $\mathbb{R}P^2$).

Transformations homogènes

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation affine de l'espace définie par :

$$F(X) = AX + T$$

où $A \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice 3×3 et $T \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur colonne de taille 3 correspondant à la translation.
On note :

$$\boxed{A_h = \left(\begin{array}{c|c} A & T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in M_4(\mathbb{R})}$$

Autrement dit, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A_h = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vérifions que $F(X_h) = A_h X_h$:

$$A_h X_h = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3 \\ 1 \end{pmatrix} = F(X_h).$$

Ainsi, en coordonnées homogènes, une transformation affine de l'espace correspond à la multiplication par une matrice 4×4.

Exemple.

Soit A_h la matrice homogène d'une transformation $F(X) = AX + T$ définie par :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1. Calculons l'image d'un point de coordonnées $X = (4, -2, 3)$ par la transformation F.

   Ses coordonnées homogènes sont $X_h = (4 : -2 : 3 : 1)$. Alors :

   $$Y_h = A_h X_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donc l'image de X est le point de coordonnées $Y = (2, 8, 4)$.

2. Si pour le même point X on avait choisi les coordonnées homogènes $X'_h = (8 : -4 : 6 : 2)$ alors on aurait obtenu

   $$Y_h = A_h X'_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Mais $(4 : 16 : -8 : 2) = (2 : 8 : -4 : 1)$ et on retrouve les mêmes coordonnées $Y = (2, 8, -4) \in \mathbb{R}^3$.

3. Soit un point à l'infini de coordonnées homogènes $X_h = (v_x : v_y : v_z : 0)$. Son image

   $$Y_h = A_h X_h = \begin{pmatrix} v_x - v_z \\ 2v_x + v_y \\ -2v_x + v_y + v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

   est aussi un point à l'infini. C'est un phénomène général : un point à l'infini est envoyé sur un point à l'infini. Noter qu'en effectuant le calcul, on s'aperçoit que l'image d'un point à l'infini n'est pas affectée par la translation associée à T mais uniquement par la transformation vectorielle associée à A.

Composition

La composition de transformations affines correspond à la multiplication des matrices homogènes associées.

Proposition 7.
Si $F(X) = AX + T$ et $G(X) = BX + S$ définissent deux transformations affines et que A_h et B_h sont leurs matrices homogènes associées, alors la matrice homogène associée à $F \circ G$ (la transformation G suivie de la transformation F) est $A_h B_h$.

Proposition 8.
Si $F(X) = AX + T$ est une transformation bijective, c'est-à-dire la matrice A est inversible, alors la matrice homogène associée à F^{-1} est :

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Exemple.
Soit F une rotation d'axe (Oz) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivie de la translation de vecteur $(1,2,1)$. Soit G la symétrie orthogonale par rapport au plan (Oyz) suivie d'une translation de vecteur $(1,1,0)$.

1. **Matrices de F et G.**

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Expressions de $F \circ G$ et $G \circ F$.**

   Par la proposition 7 ces matrices sont respectivement :

$$A_h B_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_h A_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Expressions de F^{-1} et G^{-1}.**

   Notons $\tilde{A}_h$ la matrice associée à F^{-1} et $\tilde{B}_h$ la matrice associée à G^{-1}. Par la proposition 8 :

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$