НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет физики

Домашнее задание

Квантовая механика, неделя 15

Задание выполнил студент 2 курса
Захаров Сергей Дмитриевич

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2019

Задача 1

Для основного состояния атома водорода известна волновая функция (в размерных единицах):

$$\psi_0(r) = \frac{e^{-r/a_B}}{\sqrt{\pi a_B^3}} \tag{1}$$

Здесь a_B — боровский радиус.
В таком случае:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{\pi a_B^3} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-r/a_B} \cdot r^2 \cdot e^{-r/a_B} \cdot r^2 \cdot \sin\theta = \frac{4}{a_B^3} \int_0^\infty dr \, r^4 \cdot e^{-2r/a_B} =$$

$$= \frac{4}{a_B^3} \cdot \frac{4! a_B^5}{2^5} = \boxed{3a_B^2}$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{\pi a_B^3} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-r/a_B} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-r/a_B} \cdot r^2 \cdot \sin\theta = \frac{4}{a_B^3} \int_0^\infty dr \, r \cdot e^{-2r/a_B} = \boxed{\frac{1}{a_B}}$$

$$\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle = \frac{1}{\pi a_B^3} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{-r/a_B} \cdot (-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}) \cdot e^{-r/a_B} \cdot r^2 \cdot \sin\theta = -\frac{4\hbar^2}{a_B^3} \int_0^\infty dr \, e^{-2r/a_B} =$$

$$= \boxed{-\frac{2\hbar^2}{a_B^2}}$$

Последние интегралы берутся по частям, кроме того, они широко известны и посчитаны например на Wiki, поэтому приводить их взятие нужным не считаю.