НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет физики

Домашнее задание

Квантовая механика, неделя 16

Задание выполнил студент 2 курса
Захаров Сергей Дмитриевич

Москва
2020

Задача 1

Находить значение скалярного произведения будем с помощью рассмотрения $\hat{\mathbf{S}}^2$:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{s}}_1^2 + \hat{\mathbf{s}}_2^2 + 2 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right) \tag{1}$$

Для $\hat{\mathbf{s}}^2$ мы можем посчитать собственное значение как $s \cdot (s+1)$, где s — собственное значение оператора $\hat{\mathbf{s}}$. Зная, что спины равны $1/2$ мы сразу же получаем, что собственные числа $\hat{\mathbf{s}}_1^2$ и $\hat{\mathbf{s}}_2^2$ равны $3/4$.

Теперь необходимо определить собственное число оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$. Для этого сперва найдем собственное число оператора $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$. Спины могут быть либо сонаправлены (тогда они сложатся и собственное число будет равно 1), либо противоположно направлены (тогда собственное число будет равно 0). На основании этого делаем вывод, что собственные числа $\hat{\mathbf{S}}^2$ по уже указанной формуле равны либо 0, либо 2.

На основании этого, с помощью формулы (1) получаем:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = -\dfrac{3}{4} \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.}$$

Задача 2

a)

Если мы будем рассматривать спиноры относительно оси $\mathbf{n}$, то, очевидным образом, они будут следующими:

$$\alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При этом, спиноры относительно оси $\mathbf{z}$ и $\mathbf{n}$ связаны следующим образом:

$$\alpha_{\mathbf{n}} = \hat{U}\alpha_{\mathbf{z}} \tag{2}$$

где в силу условия мы можем утверждать, что $\hat{U} = \hat{U}_z\hat{U}_y$. В таком случае:

$$\hat{U} = \hat{U}_y\hat{U}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 & \exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ -\exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 & \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Теперь необходимо найти обратную матрицу к этой. В силу простоты этих вычислений (обращение матрицы 2x2), приведу сразу ответ:

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 & -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 & \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Тогда по формуле 2 с учетом ее домножения слева на $\hat{U}^{-1}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{1\mathbf{z}} &= \hat{U}^{-1}\alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 \end{pmatrix} \\ \alpha_{2\mathbf{z}} &= \hat{U}^{-1}\alpha_{2\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

б)

Для начала сперва запишем выражения для вектора $\mathbf{n}$ через углы θ и φ:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

С учетом выражения для оператора спина через матрицы Паули мы в таком случае можем сказать, что матрица оператора проекции спина будет следующей:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\theta\cos\varphi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \\ = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \exp(-i\varphi)\sin\theta \\ \exp(i\varphi)\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти интересующие нас спиноры, достаточно найти собственные векторы этой матрицы (в силу того, что проекции спина в проекции на необходимую нам ось составляют $1/2$ и $-1/2$). Задача в целом тривиальная, поэтому сразу ответ:

$$\alpha_{1\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi)\cdot\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} = \exp(-i\varphi/2)\cdot\begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\alpha_{2\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi)\cdot\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \exp(-i\varphi/2)\cdot\begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Удивительно, но способы дают один и тот же ответ (ну с точностью до фазового множителя).

Задача 3

а)

Сперва будем работать с случаем, когда проекция на ось $\mathbf{x}$ равна $\pm 1/2$. Для этого предположим, что спинор в базисе оси $\mathbf{z}$ выглядит так:

$$\alpha_{1\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{5}$$

С учетом известных выражений для оператора конечных вращений вокруг оси $\mathbf{y}$ (а мы вращаем именно вокруг нее на угол $\pi/2$), получаем:

$$U_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь применим этот оператор к спинору (5):

$$\alpha_{1\mathbf{x}} = U_y \alpha_{1\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b \\ b-a \end{pmatrix} \tag{6}$$

С другой стороны, если мы рассматриваем случай, когда проекция спина на ось $\mathbf{x}$ равна $1/2$, спинор в базисе $\mathbf{x}$ записывается так:

$$\alpha_{1\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Таким образом из 6 и 7, получаем систему:

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{2} \\ b-a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha_{1\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \tag{8}$$

По аналогии действуем в случае, когда проекция равна $-1/2$:

$$\alpha_{2\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha_{2\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \tag{9}$$

Те же размышления верны и для работы с осью $\mathbf{y}$, однако тут оператор конечных вращений будет браться вокруг оси $\mathbf{x}$ и окажется равен:

$$U_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

В таком случае для проекции $1/2$:

$$\alpha_{1\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha_{1\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \tag{10}$$

А для проекции $-1/2$:

$$\alpha_{2\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha_{2\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \tag{11}$$

б)

В силу того, что мы работаем со спинорами, вероятность возможной проекции на ось $\mathbf{z}$ может быть получена как квадрат модуля той или иной компоненты спинора: для проекции $1/2$ берем верхнюю компоненту, для проекции $-1/2$ — нижнюю в силу построения матрицы $\hat{s}$ (в базисе оси $\mathbf{z}$, разумеется). Тогда получаем, что в любом из состояний вероятности проекции $1/2$ и $-1/2$ равны между собой и равны $\boxed{w = 0.5}$ (см. спиноры выше).

Задача 4

а)

Согласно формуле 55.5 из Ландау-Лифшица, имеем в общем случае:

$$
\begin{aligned}
&(s_x)_{\sigma,\sigma-1} = (s_x)_{\sigma-1,\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)}\\
&(s_y)_{\sigma,\sigma-1} = (s_y)_{\sigma-1,\sigma} = -\frac{i}{2}\sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)}\\
&(s_z)_{\sigma,\sigma} = \sigma
\end{aligned}
$$

В нашем случае мы имеем $s = 1$ и, следовательно, $\sigma = 1, 0, -1$. В таком случае мы получаем следующие матрицы:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\hat{s}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && (12)\\
\hat{s}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} && (13)\\
\hat{s}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && (14)
\end{aligned}
}
$$

б)

По аналогии с пунктом **б** второй задачи находим матрицу оператора проекции спина. Она окажется равна:

$$
\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(-i\varphi) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(i\varphi) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(-i\varphi) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(i\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{15}
$$

Ее собственные числа, как и следовало ожидать, равны $1, 0, -1$. Нас, опять же по аналогии со второй задачей, интересует собственный вектор, однако в этот раз вполне конкретный (собственное число должно быть равно 1). Делается это в целом тривиально, поэтому получаем:

$$
\boxed{\alpha_{1\mathbf{z}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(-i\varphi)(1+\cos\theta) \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ \exp(i\varphi)(1-\cos\theta) \end{pmatrix}} \tag{16}
$$

в)

По полной аналогии с пунктом **б** третьей задачи получаем, что (не забываем про $1/2$ перед вектором и вспоминаем, каким образом мы строили матрицы $\hat{s}_i$):

$$\text{Вероятность проекции 1:}\quad w_1 = \left|\frac{\exp(-i\varphi)}{2}(1+\cos\theta)\right|^2 = \frac{(1+\cos\theta)^2}{4} = \cos^4\frac{\theta}{2}$$

$$\text{Вероятность проекции 0:}\quad w_2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right|^2 = \frac{\sin^2\theta}{2}$$

$$\text{Вероятность проекции -1:}\quad w_3 = \left|\frac{\exp(i\varphi)}{2}(1-\cos\theta)\right|^2 = \sin^4\frac{\theta}{2}$$