

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

Домашняя работа 1

Лазерная спектроскопия

Работу выполнил студент 3 курса
Захаров Сергей Дмитриевич



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2021

Содержание

1. Задача 1	2
1.1. Волновой вектор	2
1.2. Частота	2
2. Задача 2	2
3. Задача 3	2
3.1. Частота	2
3.2. Длина волны	3
4. Задача 4	3
4.1. Среднее число фотонов в моде	3
4.2. Объемная плотность числа мод	3
4.3. Объемная плотность энергии излучения	3
5. Задача 5	4
6. Задача 6	4
7. Задача 9	4

1. Задача 1

Длина волны излучения $\lambda = 400$ нм; посчитать: волновой вектор k [см⁻¹]; частоту ν [см⁻¹].

1.1. Волновой вектор

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 157080 \text{ см}^{-1} \quad (1)$$

1.2. Частота

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = 25000 \text{ см}^{-1} \quad (2)$$

2. Задача 2

Ширина аппаратной функции спектрографа в области $\lambda = 500$ нм составляет $\Delta\nu = 1.6$ см⁻¹; какова эта ширина в длинах волн $\Delta\lambda$ [нм]?

Переведем длину волны в частоту:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \quad (3)$$

Найдем границы интервала в частотах:

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\nu}{2} = \frac{2 - \lambda\Delta\nu}{2\lambda}; \quad \nu_2 = \frac{1}{\lambda} + \frac{\Delta\nu}{2} = \frac{2 + \lambda\Delta\nu}{2\lambda} \quad (4)$$

Переведем частоты обратно в длины волн:

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda}{2 - \lambda\Delta\nu}; \quad \lambda_2 = \frac{2\lambda}{2 + \lambda\Delta\nu} \quad (5)$$

Тогда ширина:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{4\lambda^2\Delta\nu}{4 - \lambda^2\Delta\nu^2} \approx \lambda^2\Delta\nu = 0.04 \text{ см}^{-1} \quad (6)$$

Ну как-то немного.

3. Задача 3

Возбужденное состояние молекулы кислорода расположено на 1.62 эВ над основным; каковы: частота излучения ν при переходе в основное состояние [Гц]; длина волны этого излучения [нм]?

3.1. Частота

$$\Delta E = h\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\Delta E}{hc} \approx 13056.1 \text{ см}^{-1} \quad (7)$$

3.2. Длина волны

$$\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{ch}{\Delta E} \approx 765.9 \text{ нм} \quad (8)$$

4. Задача 4

Для спектра излучения абсолютно черного тела записать выражения для: среднего числа фотонов в моде с частотой ν излучения, объемной плотности числа мод с частотой ν в интервале $d\nu$, объемной плотности энергии излучения на частоте ν в интервале $d\lambda$ при температуре T .

4.1. Среднее число фотонов в моде

Статистическое распределение ансамбля по квантовым ячейкам (они же моды колебания) с учетом нормировки:

$$W(n) = \left(1 - \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]\right) \cdot \exp\left[-\frac{nh\nu}{kT}\right] \quad (9)$$

Тогда определим среднее значение количества фотонов $\langle n \rangle$:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nW(n) = \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} \quad (10)$$

4.2. Объемная плотность числа мод

Внимательно посмотрим на то, что мы получали в лекции:

”Плотность числа мод в полости в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ ”. Ответом на указанный вопрос будет то, что было получено в лекции, домноженное на $d\nu$:

$$p_\nu = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c_n^3} d\nu \quad (11)$$

Здесь c_n — скорость света в веществе.

4.3. Объемная плотность энергии излучения

Ситуация аналогична указанной в предыдущем пункте.

$$\rho = \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} d\nu \quad (12)$$

где $d\nu'$ определяется из $d\lambda$ как в задаче 2.

5. Задача 5

Посчитать объемную плотность числа мод излучения в максимуме спектра АЧТ с температурой 5000 K, имеющих длины волн в пределах полосы шириной $d\lambda = 10$ нм.

Запишем закон смещения Вина (опустим индекс _{max}):

$$\lambda = \frac{b}{T} \quad (13)$$

Чтобы воспользоваться формулой 11 и не изобретать велосипед, переведем все в частоты!

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda} = \frac{cT}{b}; \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda + d\lambda} = \frac{cT}{b + Td\lambda} \Rightarrow d\nu = \frac{cT^2 d\lambda}{b^2} \quad (14)$$

Подставим в 11 (предполагая, что $n = 1$):

$$p_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi T^3}{cb^3} d\lambda \approx 4.3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с} \quad (15)$$

6. Задача 6

Записать соотношение между спектральными плотностями энергии излучения ρ_ν и ρ_λ ($\rho_\lambda d\lambda$ – объемная плотность энергии излучения с длинами волн от λ до $\lambda + d\lambda$).

Понятно, что если интервалы по частотам и по длинам волн относятся к одному участку спектра, то доля светимости, выраженная через ρ , есть объективная реальность и не зависит от представления, т.е. выполняется:

$$\rho_\nu d\nu = \rho_\lambda d\lambda \quad (16)$$

Запишем связь частоты и длины волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu \quad (17)$$

Минус здесь связан с тем, что для соответствия знака нужно, чтобы пределы в интегралах с участием ρ были зеркальные (в смысле чтобы верхний предел в ρ_λ соответствовал нижнему для ρ_ν и наоборот), и нам не особо интересен, так что его заметем под ковер.

Таким образом:

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\lambda} = \frac{c}{\nu^2} = \frac{\lambda}{\nu} \quad (18)$$

7. Задача 9

Оперировать будем в основном материалом из лекций.

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \left[\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right]^2 \right) \Rightarrow \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{2} \right)^2 \left(1 + \left[\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right]^2 \right) \quad (19)$$

Здесь ω – диаметр перетяжки, z – расстояние от перетяжки пучка вдоль оси.

$$R = z \left(1 + \left[\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right]^2 \right) \quad (20)$$

Здесь R — радиус кривизны.

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 1 - \frac{\pi^2 \omega_0^4}{\lambda^2 z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{\pi \omega^2}{\lambda} = \pm z_R \quad (21)$$

Здесь z_R —

Тогда при $z \rightarrow \infty$:

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega^2} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0 \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} = \frac{\lambda z}{\pi \omega_0} \quad (22)$$

Тогда для радиуса кривизны:

$$R = z + \frac{\pi^2 \omega_0^4}{\lambda^2 z} \approx z \quad \text{т.к. } z \rightarrow \infty \text{ происходит расходямость} \quad (23)$$

Список литературы