НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет физики

Домашнее задание

Квантовая механика, неделя 17

Задание выполнил студент 2 курса
Захаров Сергей Дмитриевич

Москва
2020

Задача 1

а)

Спиновая часть гамильтониана представима в виде:

$$\hat{H} = -\mu\theta(t)B\hat{\sigma}_x$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда.
Представим спиновую волновую функцию в следующем виде:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

В таком случае волновое уравнение можно переписать в следующем виде:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \hat{H}\Psi(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}a(t) = -\mu\theta(t)Bb(t) \\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}b(t) = -\mu\theta(t)Ba(t) \end{cases} \tag{1}$$

Если принять, что $t \geq 0$, то данная система в целом без особых проблем решается и мы получаем:

$$\begin{cases} a(t) = C_1 \cdot e^{iBt\mu/\hbar} + C_2 \cdot e^{-iBt\mu/\hbar} \\ b(t) = C_1 \cdot e^{iBt\mu/\hbar} - C_2 \cdot e^{-iBt\mu/\hbar} \end{cases}$$

Нам задано, что в начальный момент спин направлен вдоль оси z. Это означает, что в начальный момент спиновая волновая функция была равна:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \left(e^{iBt\mu/\hbar} + e^{-iBt\mu/\hbar}\right)/2 \\ \left(e^{iBt\mu/\hbar} - e^{-iBt\mu/\hbar}\right)/2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Psi = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{B\mu}{\hbar}t\right) \\ i\sin\left(\dfrac{B\mu}{\hbar}t\right) \end{pmatrix}}$$

б)

Чтобы найти среднее, воспользуемся привычным нам выражением для среднего:

$$s_z(t) = \langle\Psi|\,\hat{s}_z\,|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -i\sin(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ i\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\cos(2\omega t) = s_z(t)}$$

Здесь $\omega = B\mu/\hbar$.
Аналогичным образом найдем и средние операторов s_x и s_y:

$$\boxed{\begin{aligned} s_x(t) &= 0 \qquad (2) \\ s_y(t) &= \frac{1}{2}\sin(2\omega t) \qquad (3) \end{aligned}}$$

Получаем, что средний вектор спина прецессирует вокруг оси **x** с постоянной угловой скоростью 2ω.

в)

Оператор эволюции имеет вид:

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$$

С учетом имеющегося у нас гамильтониана, его можно переписать в виде (сразу предполагаем $t > 0$):

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i\mu B}{\hbar}\hat{\sigma}_x t\right) = \exp\left(i\omega t\hat{\sigma}_x\right)$$

В таком случае, для перехода в представление Гайзенберга совершим следующее:

$$\begin{aligned}\hat{s}_z(t) = \frac{1}{2}\hat{U}^\dagger\hat{\sigma}_z\hat{U} = \frac{1}{2}\left[\left\{1 - i\omega t\hat{\sigma}_x + \frac{1}{2!}(i\omega t)^2\hat{\sigma}_x^2 - ...\right\}\cdot\hat{\sigma}_z\cdot\left\{1 + i\omega t\hat{\sigma}_x \ + \frac{1}{2!}(i\omega t)^2\hat{\sigma}_x^2 + ...\right\}\right] = \\ = \left[\hat{\sigma}_z - i\omega t[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] + \frac{1}{2!}(i\omega t)^2[\hat{\sigma}_x, [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z]] + ...\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{\sigma}_z - 2\omega t\hat{\sigma}_y - \frac{(2\omega t)^2}{2!}\hat{\sigma}_z + ...\right] = \\ = \boxed{\hat{s}_z\cos\left(2\omega t\right) - \hat{s}_y\sin\left(2\omega t\right) = \hat{s}_z(t)}\end{aligned}$$

Здесь учтены соотношения для коммутаторов матриц Паули:

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] = -2i\hat{\sigma}_y$$
$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$$

Аналогичным образом получим ответы и для $\hat{s}_y(t)$ и $\hat{s}_x(t)$. В результате получим следующее:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{s}_y(t) &= \hat{s}_z\sin\left(2\omega t\right) + \hat{s}_y\cos\left(2\omega t\right) && (4)\\ \hat{s}_x(t) &= \hat{s}_x && (5)\end{aligned}}$$

Задача 2

Согласно тому, что было получено на семинаре, запишем гамильтониан **поперечного** движения заряженной частицы (бесспиновой) при калибровке $\mathbf{A} = [\mathbf{Br}]$ в логичных тут цилиндрических координатах (ниже уже учтено, что поле направлено вдоль оси вращения):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2}\hat{l}_z^2 - \frac{e\hbar B}{2mc}l_z + \frac{e^2B^2\rho^2}{8mc^2}$$

С учетом того, что $\rho = a = \text{const.}$, а также что $I = ma^2$, перепишем выражение в виде (первый член уйдет из-за того, что ρ величина постоянная):

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2I}\hat{l}_z^2 - \frac{e\hbar Ba^2}{2Ic}\hat{l}_z + \frac{e^2B^2a^4}{8Ic^2}$$

Замечаем, что данный гамильтониан чудесным образом коммутирует с l_z (член с $\hat{l}_z$ явно с $\hat{l}_z$ коммутирует, константа нам не интересна, а факт о коммутации $\hat{l}_z^2$ и $\hat{l}_z$ мы уже выясняли), что значит, что собственные функции оператора $\hat{l}_z$ будут также и собственными функциями этого гамильтониана. С учетом определения $\hat{l}_z$:

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}}$$

Теперь остается лишь найти уровни энергии с помощью стационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\Psi = E_n\Psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I} - \frac{e\hbar B a^2 n}{2Ic} + \frac{e^2 B^2 a^4}{8Ic^2}}$$