

Задание 2

(срок 15.09.2020 перед семинаром)

Задача 1 (2)

Для бозонного/фермионного оператора уничтожения \hat{a} найти собственные значения и собственные состояния. В полученных состояниях найти распределение по числу частиц.

Задача 2* (2)

Пусть $\hat{a} = \hat{a}_i$ — бозонный оператор уничтожения, соответствующий состоянию $\phi_i(x)$ полного базиса состояний, а $\hat{b} = \hat{b}_j$ — оператор уничтожения, соответствующий состоянию $\chi_j(x)$ другого полного базиса состояний. Найдите коммутатор $[\hat{a}^\dagger, \hat{b}]$.

Для этого выразите операторы \hat{a} , \hat{b} через полевой оператор $\hat{\psi}(x)$.

Задача 3 (3)

Рассмотрим систему из N частиц с гамильтонианом

$$H = \sum_i H_0(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(x_i - x_j). \quad (1)$$

Будем считать, что энергия взаимодействия U мала, и будем учитывать второй член по теории возмущений.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ — собственные состояния гамильтониана H_0 (занумерованные в произвольном порядке). Рассмотрим многочастичное состояние, в котором заняты различные одночастичные состояния $1, 2, \dots, N$ (не обязательно самые низкие по энергии). Требуется найти поправку к его энергии за счет взаимодействия.

1) (1) Напишите волновую функцию этого состояния, считая частицы тождественными бозонами.

2) (2) Вычислите первую поправку по теории возмущений для энергии этого состояния.

Задача 4 (3)

Попробуем решить предыдущую задачу, используя метод вторичного квантования. Для этого рассмотрим оператор $\hat{\psi}(x) = \sum_i \hat{a}_i \varphi_i(x)$ и выраженный через него гамильтониан:

$$H = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) H_0(x) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} \int dx dy \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(y) U(x - y) \hat{\psi}(y) \hat{\psi}(x). \quad (2)$$

1) (1) Выразите волновую функцию состояния, описанного в предыдущей задаче, через основное состояние невзаимодействующей задачи (состояние без частиц, *вакуум*) и операторы рождения.

2) (2) Вычислите первую поправку по теории возмущений для энергии этого состояния и сравните результат с полученным в предыдущей задаче.

Задача 5 (2)

Пусть в предыдущей задаче H_0 — гамильтониан осциллятора, а $U(x - y) = k(x - y)^2/2$. Вычислите поправку к энергии для двух частиц, находящихся в состояниях $|n\rangle$ и $|m\rangle$.