НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

Домашнее задание

Квантовая механика, неделя 15

Задание выполнил студент 2 курса
Захаров Сергей Дмитриевич

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2020

Задача 1

Находить значение скалярного произведения будем с помощью рассмотрения $\hat{\mathbf{S}}^2$:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{s}}_1^2 + \hat{\mathbf{s}}_2^2 + 2 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right) \tag{1}$$

Для $\hat{\mathbf{s}}^2$ мы можем посчитать собственное значение как $s \cdot (s+1)$, где s — собственное значение оператора $\hat{\mathbf{s}}$. Зная, что спины равны 1/2 мы сразу же получаем, что собственные числа $\hat{\mathbf{s}}_1^2$ и $\hat{\mathbf{s}}_2^2$ равны 3/4.

Теперь необходимо определить собственное число оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$. Для этого сперва найдем собственное число оператора $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$. Спины могут быть либо сонаправлены (тогда они сложатся и собственное число будет равно 1), либо противоположно направлены (тогда собственное число будет равно 0). На основании этого делаем вывод, что собственные числа $\hat{\mathbf{S}}^2$ по уже указанной формуле равны либо 0, либо 2.

На основании этого, с помощью формулы (1) получаем:

$$\boxed{\left[\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 &= -\frac{3}{4} \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right.}$$

Задача 2

a)

Если мы будем рассматривать спиноры относительно оси $\mathbf{n}$, то, очевидным образом, они будут следующими:

$$\alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

При этом, спиноры относительно оси $\mathbf{z}$ и $\mathbf{n}$ связаны следующим образом:

$$\alpha_{\mathbf{n}} = \hat{U} \alpha_{\mathbf{z}} \tag{3}$$

где в силу условия мы можем утверждать, что $\hat{U} = \hat{U}_z \hat{U}_y$. В таком случае:

$$\hat{U} = \hat{U}_y \hat{U}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix} = \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 & \exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ -\exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 & \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Теперь необходимо найти обратную матрицу к этой. В силу простоты этих вычислений (обращение матрицы 2x2), приведу сразу ответ:

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 & -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 & \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Тогда по формуле 3 с учетом ее домножения слева на $\hat{U}^{-1}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{1\mathbf{z}} &= \hat{U}^{-1}\alpha_{1\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad (7) \\ \alpha_{2\mathbf{z}} &= \hat{U}^{-1}\alpha_{2\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \quad (8) \end{aligned}}$$

б)

Для начала сперва запишем выражения для вектора $\mathbf{n}$ через углы θ и φ:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{9}$$

С учетом выражения для оператора спина через матрицы Паули мы в таком случае можем сказать, что матрица оператора проекции спина будет следующей:

$$\sin\theta\cos\varphi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\exp(-i\varphi)\sin\theta \\ \exp(i\varphi)\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

Для того, чтобы найти интересующие нас спиноры, достаточно найти собственные векторы этой матрицы (в силу того, что проекции спина в проекции на необходимую нам ось составляют $1/2$ и $-1/2$). Задача в целом тривиальная, поэтому сразу ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{1\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi)\cdot\cos\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \exp(-i\varphi/2)\cdot\begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2)\cos\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad (11) \\ \alpha_{2\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi)\cdot\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \exp(-i\varphi/2)\cdot\begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi/2)\sin\theta/2 \\ \exp(i\varphi/2)\cos\theta/2 \end{pmatrix} \quad (12) \end{aligned}}$$