НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет физики

Домашняя работа 1

Лазерная спектроскопия

Работу выполнил студент 3 курса
Захаров Сергей Дмитриевич

Москва
2021

Содержание

1. Задача 1

Длина волны излучения $\lambda = 400$ нм; посчитать: волновой вектор k [см$^{-1}$]; частоту ν [см$^{-1}$].

1.1. Волновой вектор

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 157080 \text{ см}^{-1} \tag{1}$$

1.2. Частота

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = 25000 \text{ см}^{-1} \tag{2}$$

2. Задача 2

Ширина аппаратной функции спектрографа в области $\lambda = 500$ нм составляет $\Delta\nu = 1.6$ см$^{-1}$; какова эта ширина в длинах волн $\Delta\lambda$ [нм]?

Переведем длину волны в частоту:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

Найдем границы интервала в частотах:

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\nu}{2} = \frac{2 - \lambda\Delta\nu}{2\lambda}; \quad \nu_2 = \frac{1}{\lambda} + \frac{\Delta\nu}{2} = \frac{2 + \lambda\Delta\nu}{2\lambda} \tag{4}$$

Переведем частоты обратно в длины волн:

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda}{2 - \lambda\Delta\nu}; \quad \lambda_2 = \frac{2\lambda}{2 + \lambda\Delta\nu} \tag{5}$$

Тогда ширина:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{4\lambda^2\Delta\nu}{4 - \lambda^2\Delta\nu^2} \approx \lambda^2\Delta\nu = 0.04 \text{ см}^{-1} \tag{6}$$

Ну как-то немного.

3. Задача 3

Возбужденное состояние молекулы кислорода расположено на 1.62 эВ над основным; каковы: частота излучения ν при переходе в основное состояние [Гц]; длина волны этого излучения [нм]?

3.1. Частота

$$\Delta E = hc\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\Delta E}{hc} \approx 13056.1 \text{ см}^{-1} \tag{7}$$

3.2. Длина волны

$$\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{ch}{\Delta E} \approx 765.9 \text{ нм} \tag{8}$$

4. Задача 4

Для спектра излучения абсолютно черного тела записать выражения для: среднего число фотонов в моде с частотой ν излучения, объемной плотности числа мод с частотой ν в интервале $d\nu$, объемной плотности энергии излучения на частоте ν в интервале $d\lambda$ при температуре T.

4.1. Среднее число фотонов в моде

Статистическое распределение ансамбля по квантовым ячейкам (они же моды колебания) с учетом нормировки:

$$W(n) = \left(1 - \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]\right) \cdot \exp\left[-\frac{nh\nu}{kT}\right] \tag{9}$$

Тогда определим среднее значение количества фотонов $\langle n \rangle$:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nW(n) = \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} \tag{10}$$

4.2. Объемная плотность числа мод

Внимательно посмотрим на то, что мы получали в лекции:

"Плотность числа мод в полости в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$". Ответом на указанный вопрос будет то, что было получено в лекции, домноженное на $d\nu$:

$$p_\nu = \frac{1}{V}\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c_n^3} d\nu \tag{11}$$

Здесь c_n — скорость света в веществе.

4.3. Объемная плотность энергии излучения

Ситуация аналогична указанной в предыдущем пункте.

$$\rho = \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} d\nu \tag{12}$$

где $d\nu'$ определяется из $d\lambda$ как в задаче 2.

В комментарии было сказано: „Да, только надо было к λ все пересчитать, получив $\rho_\lambda \times d\lambda$, обратить внимание на разную степень зависимости ρ от частоты и от длины волны." Что ж, делаем:

$$\rho = \rho_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^2} \frac{h/\lambda}{\exp\left[\dfrac{hc/\lambda}{kT}\right] - 1} d\lambda \tag{13}$$

5. Задача 5

Посчитать объемную плотность числа мод излучения в максимуме спектра АЧТ с температурой 5000 K, имеющих длины волн в пределах полосы шириной $d\lambda = 10$ нм.

Запишем закон смещения Вина (опустим индекс $_{\max}$):

$$\lambda = \frac{b}{T} \tag{14}$$

Чтобы воспользоваться формулой 11 и не изобретать велосипед, переведем все в частоты!

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda} = \frac{cT}{b}; \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda + d\lambda} = \frac{cT}{b + Td\lambda} \quad \Rightarrow \quad d\nu = \frac{cT^2 d\lambda}{b^2} \tag{15}$$

Подставим в 11 (предполагая, что $n = 1$):

$$p_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi T^4}{b^4} d\lambda \approx 2.2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} \cdot \text{ с} \tag{16}$$

6. Задача 6

Записать соотношение между спектральными плотностями энергии излучения ρ_ν и ρ_λ ($\rho_\lambda d\lambda$ – объемная плотность энергии излучения с длинами волн от λ до $\lambda + d\lambda$).

Понятно, что если интервалы по частотам и по длинам волн относятся к одному участку спектра, то доля светимости, выраженная через ρ, есть объективная реальность и не зависит от представления, т.е. выполняется:

$$\rho_\nu d\nu = \rho_\lambda d\lambda \tag{17}$$

Запишем связь частоты и длины волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu \tag{18}$$

Минус здесь связан с тем, что для соответствия знака нужно, чтобы пределы в интегралах с участием ρ были зеркальные (в смысле чтобы верхний предел в ρ_λ соответствовал нижнему для ρ_ν и наоборот), и нам не особо интересен, так что его заметем под ковер.

Таким образом:

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\lambda} = \frac{c}{\nu^2} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{19}$$

7. Задача 7

Записать соотношение между интенсивностью I_ν и соответствующей объемной плотностью энергии $\rho\nu$ для плоской электромагнитной волны; привести численный пример для плотности энергии $\rho\nu$ в пучке одночастотного He-Ne лазера с шириной линии излучения 0.001 см$^{-3}$.

Запишем:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\vec{r}-\omega t}, \quad \vec{k}\vec{E} = 0, \quad E = \int\limits_V dV\rho \tag{20}$$

Для однородной среды мы можем записать:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{21}$$

Мы можем получить следствие:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{22}$$

С учетом того, что объемная плотность состоит из вкладов двух полей:

$$\rho = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{23}$$

Для интенсивности мы тогда можем записать пропорциональность среднему значению поля, т.е.:

$$I = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\nu_{ph} = \rho\frac{\omega}{k} = \rho c \tag{24}$$

8. Задача 9

Для гауссова пучка TEM00-моды записать выражение для изменения радиуса поперечного сечения пучка и радиуса кривизны волнового фронта с расстоянием от перетяжки, пояснить обозначения; описать расходимость пучка на больших расстояниях от перетяжки; найти, на каком расстоянии от перетяжки радиус кривизны волнового фронта минимален.

Оперировать будем в основном материалом из лекций.

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \left[\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right]^2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2\left(1 + \left[\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right]^2\right) \tag{25}$$

Здесь ω — радиус перетяжки, z — расстояние от перетяжки пучка вдоль оси.

$$R = z\left(1 + \left[\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z}\right]^2\right) \tag{26}$$

Здесь R — радиус кривизны.

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 1 - \frac{\pi^2\omega_0^4}{\lambda^2 z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = \pm z_R \tag{27}$$

Тогда при $z \to \infty$:

$$\omega^2 \approx \omega_0^2\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2} = \frac{\lambda z}{\pi\omega_0} \tag{28}$$

Тогда для радиуса кривизны:

$$R = z + \frac{\pi^2\omega_0^4}{\lambda^2 z} \approx z \quad \text{т.к. } z \to \infty \text{ происходит расходимость} \tag{29}$$

9. Задача 10

Записать выражение для интенсивности лазерного излучения в центре гауссова пучка при заданной мощности; привести численный пример для He-Ne лазера.

Мощность равна интегральному значению интенсивности, поэтому достаточно написать:

$$P = \int\limits_S dS\; I = 2\pi \int\limits_0^{\infty} dr\; I_0 r \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) = 2\pi I_0 \frac{\omega_0^2}{4} = \frac{\pi I_0 \omega_0^2}{2} \tag{30}$$

Тогда для интенсивности мы можем записать:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi\omega_0^2} \tag{31}$$

Предположим, что He-Ne лазер у нас имеет мощность 10 мВт, а радиус перетяжки пучка составляет 3 мм. Тогда численно в центре пучка интенсивность будет равна:

$$I_0 \approx 71 \text{ мВт/см}^2 \tag{32}$$