

Racionalieji kuboidai ir Herono trikampiai

Edmundas Mazėtis^{1,2}, Grigorijus Melničenko²

¹ *Vilniaus Universitetas*

Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

² *Vytauto Didžiojo universitetas*

K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas

E. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt, gmelnicenko@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjama iki šiol neišspręsta racionaliųjų kuboidų egzistavimo problema. Gauti šiai problemai ekvivalentūs teiginiai, suvedantys ją į Herono trikampių, kurių kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai ir kurie tenkina kitas papildomas sąlygas, egzistavinę. Taip pat gauti Eulerio plytų ryšiai su Herono trikampaiais, tenkinančiais papildomas sąlygas.

Raktiniai žodžiai: Herono trikampis, racionalusis kuboidas, tobulasis kuboidas, Eulerio plyta.

1 Įvadas

A autorių darbuose [3, 4] nagrinėjami Herono trikampiai. Šiame straipsnyje nagrinėjami Herono trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai.

Pasirodo, kad tokių Herono trikampių, esant papildomai sąlygai, kad jų pusiaukampinių ilgiai yra racionalieji skaičiai, egzistavimas susijęs su iki šiol neišspręsta problema [1], – racionaliųjų kuboidų egzistavimu (1 teorema). Darbe įrodyta, kad trikampių, kurių kraštinių ilgiai a , b , c , pusperimetrio p ir atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai, egzistavimas irgi susijęs su racionaliųjų kuboidų egzistavimu (1 teorema), be to, tokie trikampiai yra Herono trikampiai.

Darbe taip pat nagrinėjami trikampiai (Heronio ir ne), kurių trijų arba dviejų kraštinių ilgiai yra racionaliųjų skaičių kvadratai ir šių trikampių ryšys su Eulerio plyta ir beveik tobulaisiais kuboidais.

Nagrinėjamų temų dėstymas atliekamas tik elementariosios matematikos metodais, todėl autorių nuomone, tokie tyrinėjimai gali būti gera medžiaga įvairiems projektiniams darbams su matematikai gabiais mokiniais.

2 Racionalusis kuboidas

Racionaliuoju kuboidu vadinamas toks stačiakampis gretasienis, kurio septynių pagrindinių atkarpų (trių briaunų x , y , z , trijų sienų įstrižainių α , β , γ ir gretasienio įstrižainės ρ) ilgiai – racionalieji skaičiai. Iš apibrėžimo seka, kad racionaliojo kuboido atkarpų ilgiai yra lygčių sistemos

$$\alpha^2 = x^2 + y^2, \quad \beta^2 = y^2 + z^2, \quad \eta^2 = z^2 + x^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1)$$

racionalieji sprendiniai.

Racionaliųjų kuboidų egzistavimo klausimas neišspręstas iki šiol [1]. Įvadą į šią problemą galima rasti [6, 7] darbuose. Čia racionalusis kuboidas su septyniomis pagrindinėmis atkarpomis, kurių ilgiai yra sveikieji skaičiai, vadinamas tobuluoju kuboidu. Toliau mes taip pat vartosime šį terminą. Stačiakampį gretasienį, kurio šešių pagrindinių atkarpų ilgiai iš septynių yra sveikieji skaičiai, vadinsime beveik tobuluoju kuboidu.

3 Racionalusis kuboidas ir Herono trikampiai

Priminsime Herono trikampių apibrėžimą.

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių a, b, c ilgiai ir plotas S yra sveikieji skaičiai, vadinamas Herono trikampiu.

[2] darbe Luca įrodė, kad tobulojo kuboido egzistavimas yra ekvivalentus trikampiui, kurio kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai, o pusiaukampinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, egzistavimui. Mes įrodysime kitą, bet panašų teiginį.

1 teorema. Šie teiginiai yra ekvivalentūs:

- a) egzistuoja racionalusis kuboidas;
- b) egzistuoja tobulasis kuboidas;
- c) egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai a, b, c , pusperimetrio ilgis p ir atkarpų $p - a, p - b, p - c$ (atkarpų, kurios jungia trikampio viršūnes su taškais, kuriuose įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia jo kraštines) ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai (papildomai iš čia išplaukia, kad šis trikampis yra Herono trikampis);
- d) egzistuoja trikampis, kurių kraštinių ilgiai ir pusperimetris yra sveikųjų skaičių kvadratai, o jo pusiaukampinių ilgiai – racionalieji skaičiai (papildomai iš čia išplaukia, kad šis trikampis yra Herono trikampis);
- e) egzistuoja trikampis, kurių kraštinių ilgiai ir pusperimetris yra sveikųjų skaičių kvadratai, o atkarpų nuo trikampio viršūnių iki įbrėžto į trikampį apskritimo centro ilgiai – racionalieji skaičiai (papildomai iš čia išplaukia, kad šis trikampis yra Herono trikampis).

Įrodymas. a) \Leftrightarrow b) Įrodymas yra akivaizdus, skaitytojas jį gali lengvai įrodyti savarankiškai.

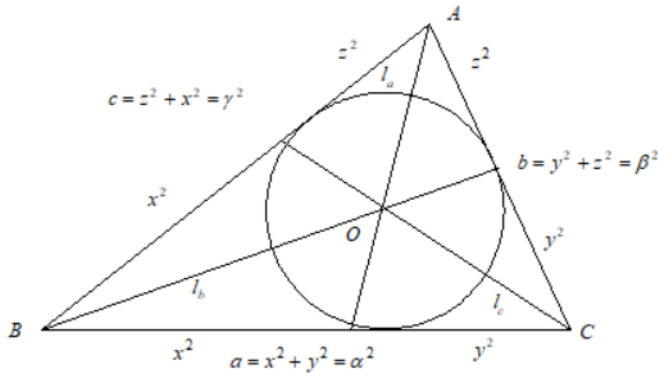
b) \Rightarrow a) Sakysime, kad egzistuoja tobulasis kuboidas, t.y., egzistuoja (1) lygčių sistemos sveikieji sprendiniai. Pažymėkime

$$a = x^2 + y^2 = \alpha^2, \quad b = y^2 + z^2 = \beta^2, \quad c = z^2 + x^2 = \eta^2.$$

Patikriname, kad skaičiams a, b, c yra teisingos trikampio nelygybės. Iš tikrųjų

$$\begin{aligned} a + b &= x^2 + y^2 + y^2 + z^2 = x^2 + z^2 + 2y^2 = c + 2y^2 > c, \\ a + c &= x^2 + y^2 + z^2 + x^2 = y^2 + z^2 + 2x^2 = b + 2x^2 > b, \\ b + c &= y^2 + z^2 + z^2 + x^2 = y^2 + x^2 + 2z^2 = a + 2z^2 > a. \end{aligned}$$

Taigi egzistuoja trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai.



1 pav.

Sakykime, kad $p = (a + b + c)/2$ – šio trikampio pusperimetris, tuomet teisingos lygybės

$$p = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad p - a = z^2, \quad p - b = x^2, \quad p - c = y^2.$$

Taigi egzistuoja trikampis, kurio kraštinių ilgiai a, b, c , pusperimetrio p ilgis ir atkarpų $p - a, p - b, p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai (1 pav.).

c) \Rightarrow b) Sakykime, kad egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai a, b, c , pusperimetrio ilgis p ir atkarpų $p - a, p - b, p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai (1 pav.) Pažymėkime $p - a = z^2, p - b = x^2, p - c = y^2$ ir $p = \rho^2$. Akivaizdu, kad $p = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Taigi tobulasis kuboidas egzistuoja. Kadangi skaičius $\rho\alpha\beta\gamma$ yra sveikasis, tai iš Herono formulės

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (2)$$

seka, kad šis trikampis yra Herono trikampis.

c) \Rightarrow d) Sakykime, kad egzistuoja trikampis, kurio visų kraštinių ilgiai a, b, c , pusperimetrio ilgis p ir atkarpų $p - a, p - b, p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai. Pažymėkime $a = \alpha^2, b = \beta^2, c = \gamma^2, p = \rho^2, p - a = z^2, p - b = x^2, p - c = y^2$. Kaip žinoma [5], trikampio pusiaukampinių ilgiai išreiškiami lygybėmis

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, \quad l_b = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}, \quad l_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}. \quad (3)$$

Iš čia išplaukia, kad

$$l_a = \frac{2\beta\gamma\rho z}{b+c}, \quad l_b = \frac{2\gamma\alpha\rho x}{c+a}, \quad l_c = \frac{2\alpha\beta\rho y}{a+b}.$$

Taigi egzistuoja trikampis, kurių kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai, o pusiaukampinių ilgiai yra racionalieji skaičiai. Papildomai iš (2) lygybės seka, kad šis trikampis yra Herono trikampis.

d) \Rightarrow c) Sakykime, kad egzistuoja trikampis, kurių kraštinių ilgiai a, b, c ir pusperimetris p yra sveikųjų skaičių kvadratai, o pusiaukampinių ilgiai yra racionalieji

skaičiai. Pažymėkime $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, $p = \rho^2$. Kadangi trikampio pusiaukampinių ilgiai išreiškiami (3) lygybėmis, tai lengvai patikriname, kad teisingos lygybės

$$p - a = \frac{(l_a(b+c))^2}{4bcp}, \quad p - b = \frac{(l_b(c+a))^2}{4cap}, \quad p - c = \frac{(l_c(a+b))^2}{4abp}.$$

Iš čia gauname, kad

$$p - a = \left(\frac{l_a(b+c)}{2\beta\gamma\rho} \right)^2, \quad p - b = \left(\frac{l_b(c+a)}{2\gamma\alpha\rho} \right)^2, \quad p - c = \left(\frac{l_c(a+b)}{2\alpha\beta\rho} \right)^2. \quad (4)$$

Taigi trikampyje atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai yra racionaliųjų skaičių kvadratai.

Iš (4) lygybės išplaukia, kad padauginus skaičius $p - a$, $p - b$, $p - c$ ir p , a , b , c iš atitinkamo daugiklio (racionaliųjų skaičių $p - a$, $p - b$, $p - c$ bendrojo vardiklio), gauname, kad c) sąlygų tenkinantis trikampis egzistuoja. Papildomai iš Herono formulės (2) išplaukia, kad šio trikampio plotas yra sveikasis skaičius, t.y. jis yra Herono trikampis.

c) \Leftrightarrow e) Skaitytojas gali jį įrodyti savarankiškai, nes įrodymas panašus į įrodymą tačiau vietoj (3) formulių reikia taikyti atstumų nuo įbrėžto į trikampį apskritimo centro O iki trikampio viršūnių formules [5].

$$AO = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}, \quad BO = \sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}}, \quad CO = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}.$$

4 Eulerio plytos ir trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai

Eulerio plyta vadinamas stačiakampis gretasienis, kurio visų briaunų ilgiai yra sveikieji skaičiai, o visų sienų įstrižainių ilgiai yra sveikieji skaičiai [9, 10]. Tai reiškia, kad Eulerio plytos įstrižainės ilgis nebūtinai yra sveikasis skaičius. [9, 10] darbuose nurodyta, kad pačios mažiausios Eulerio plytos briaunš ilgiai yra lygūs 44, 117 ir 240, o jos sienų įstrižainių ilgiai lygūs 125, 244 ir 267. Šį faktą nustatė XVII–XVIII a. vokiečių matematikas P. Halcke.

Analogiškai kaip ir įrodėme 1 teoremą, galima įrodyti ir tokią teoremą:

2 teorema. *Eulerio plytos įstrižainių kvadratai yra lygūs trikampio, kurio kraštinių ilgiai a , b , c ir atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai, kraštinių ilgiams.*

Mažiausiai Eulerio plytai atitinka trikampis, kurio kraštinių a , b , c ir atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai lygūs $a = 125^2$, $b = 244^2$, $c = 267^2$, $p - a = 44^2$, $p - b = 117^2$, $p - c = 240^2$. Daugiau Eulerio plytų, pvz., galima rasti [10] darbe, kiekvienai Eulerio plytai nurodytas atitinkantis jam trikampis, kurio kraštinių ilgiai a , b , c ir atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai. Kadangi Eulerio plytos įstrižainė nebūtinai yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tai Eulerio plytoms atitinkantys trikampiai nėra Herono trikampiai. Pvz., mažiausiai Eulerio plytai atitinkančio trikampio pusperimetris lygus $p = 73225$, o pagal (2) lygybę surastas plotas lygus $S = 30888000\sqrt{2929}$.

Heronio trikampių, kurių dviejų kraštinių ir pusperimetrio ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai, pavyzdžių yra [8] darbe, pvz., trikampis, kuriame $a = 17^2$, $b = 28^2$, $c = 975$, $p = 32^2$, $S = 94080$ ir $p - b = x^2 = 240$, $p - c = y^2 = 7^2$, $p - a = z^2 = 735$. Bet tokiuose trikampiuose atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai nebūtinai yra sveikųjų skaičių kvadratai ir šiems Herono trikampiams pagal 2 teoremą nėra atitinkančių Eulerio plytų. Tačiau yra Herono trikampių, kurių dviejų kraštinių ilgiai, pusperimetrio ilgis ir atkarpų $p - a$, $p - b$, $p - c$ ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai. Juos atitinka beveik tobulieji kuboidai. Pvz., Herono trikampiui $a = 185^2$, $b = 680^2$, $c = 474993$, $p = 697^2$, $S = 7452926208$, $p - b = x^2 = 104^2$, $p - c = y^2 = 153^2$, $p - a = z^2 = 672^2$ atitinka beveik tobulasis kuboidas [10].

Atsižvelgiant į 1 teoremos c) sąlygą galima kelti klausimą, ar egzistuoja Herono trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra sveikųjų skaičių kvadratai. Atsakymas yra teigiamas, pvz., trikampis, kurio $a = 1853^2$, $b = 4380^2$, $c = 4427^2$, $p = 21108169$, $S = 32918611718880$ [8], yra Herono trikampis, bet jo pusperimetrio ilgis p ir atkarpų $p - a$, $p - b$ ilgiai nėra sveikųjų skaičių kvadratai. Todėl šiam trikampiui pagal 2 teoremą nėra atitinkančios Eulerio plytos.

Atsižvelgiant į 1 teoremos d) sąlygą galima kelti dar tokį klausimą, ar egzistuoja Herono trikampis, kurio pusiaukampinių ilgiai yra racionalieji skaičiai ir nors vienos kraštinės ilgis yra sveikąjo skaičiaus kvadratas. Atsakymas yra teigiamas, pvz., trikampis, kurio $a = 84$, $b = 125$, $c = 13^2$, $p = 189$, $S = 5040$ yra Herono trikampis, kuriame pagal (3) formules $l_a = 975/7$, $l_b = 26208/253$, $l_c = 12600/209$. Tačiau jo pusperimetrio ilgis p ir atkarpų $p - b$, $p - c$ ilgiai nėra sveikųjų skaičių kvadratai. Todėl šiam trikampiui pagal 2 teoremą nėra atitinkančios Eulerio plytos.

Literatūra

- [1] K. Guy. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd ed. Springer, New York, 2004.
- [2] F. Luca. Perfect cuboids and perfect square triangles. *Math. Mag.*, **73**:400–401, 2000.
- [3] E. Mazėtis ir G. Melničenko. Trikampio kampų sinusų ir kosinusų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **54**:151–154, 2013.
- [4] E. Mazėtis ir G. Melničenko. Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **55**:84–89, 2014.
- [5] A.P. Savin. Bissektrisy, vpisannaja i vnevpisannye okružhnosti treugol'nika (in Russian). *Kvant*, 4:32–33, 1999. <http://kvant.mccme.ru/pdf/1999/04/kv0499kaleid.pdf> (žiūrėta 2018-05-16).
- [6] R.A. Sharipov. Perfect cuboids and irreducible polynomials. *Ufa Math. J.*, 4:153–160, 2012. <https://arxiv.org/abs/1108.5348> (žiūrėta 2018-05-16).
- [7] R. van Luijk. *On Perfect Cuboids*, 2000. Math. Institute web resource. <http://www.math.leidenuniv.nl/~rvl/ps/cuboids.pdf> (žiūrėta 2018-05-16).
- [8] *Web Resource*. Heronian triangles whose 2 sides (3 sides?) are square numbers. <https://benvitalenum3ers.wordpress.com/page/164/> (žiūrėta 2018-05-16).
- [9] E.W. Weisstein. *Euler brick*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/EulerBrick.html> (žiūrėta 2018-05-16).
- [10] Wikipedia. *Free encyclopedia. Euler brick*. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick (žiūrėta 2018-05-16).

SUMMARY

Rational cuboids and Geron triangles*E. Mazėtis, G. Melnichenko*

The problem of existence of rational cuboids is considered in the article. Equivalent statements of this problem are obtained which lead to the existence of Heron's triangles whose lengths are integral squares and satisfy other additional conditions. Also, the connections between Euler bricks and the Heron triangles are obtained, which correspond to additional conditions.

Keywords: Heronian triangles, rational cuboid, perfect cuboid, Euler brick.