nascuntur hi numeri

$$p = 9, \quad q = 26, \quad r = 5, \quad s = 90,$$

qui utique multo sunt minores quam superiores certa ratione inventi, primis quidem ibi exceptis, qui ob aequales numeros excludendi videntur.

49. Simili modo posita summa $p + q + r + s = 170$ reperiuntur duae solutiones

$$\text{I. } p = 1, \quad q = 10, \quad r = 34, \quad s = 125;$$
$$\text{II. } p = 10, \quad q = 17, \quad r = 45, \quad s = 98.$$

Summa numerorum 290 dat

$$p = 1, \quad q = 40, \quad r = 121, \quad s = 128.$$

Hinc itaque patet casu quasi fortuito multo simpliciores numeros problemati satisfacientes reperiri atque adeo hac ratione non difficulter quinque numeri assignari possunt, ut quilibet per reliquorum summam multiplicatus praebeat numerum quadratum, cuiusmodi sunt

$$2, \quad 40, \quad 45, \quad 58, \quad 145$$

et

$$32, \quad 61, \quad 98, \quad 169, \quad 250.$$

Hocque modo etiam plures numeros huius indolis detegere licet, ad quos inveniendos nulla certa methodus adhuc est explorata.

APPENDIX

50. Si problemati modo tractato haec conditio adiungatur, ut singuli numeri esse debeant quadrati, quaestionis quasi natura immutatur, quae ita enunciabitur:

Invenire quotcumque numeros quadratos, ut summa omnium quolibet imminuta fiat numerus quadratus.[1])

1) Confer hanc quaestionem cum quaestionibus XXVII et XXVIII libri V DIOPHANTI *Arithmeticorum* (ed. P. TANNERY; quae quaestiones sunt quaestiones XXX et XXXI editionis BACHETI; vide notam p. 404 voluminis praecedentis). F. R.

Sint numeri quadrati quaesiti

$$A^2,\ B^2,\ C^2,\ D^2 \text{ etc.},$$

quorum summa ponatur $= S$, fierique debet

$$S - A^2 = P^2, \quad S - B^2 = Q^2, \quad S - C^2 = R^2 \text{ etc.},$$

unde patet S esse summam eiusmodi binorum quadratorum, quae pluribus modis in bina quadrata se distribui patiantur; seu posito $S = xx + yy$ hanc duorum quadratorum summam indefinite in alia bina quadrata secari oportet, quod in genere ita praestatur

$$S = \left(\frac{2fx + (ff-1)y}{ff+1}\right)^2 + \left(\frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1}\right)^2 = xx + yy.$$

51. Pro casu ergo trium quadratorum poni debet

$$A = x, \quad B = \frac{2fx - (ff-1)y}{ff+1} \quad \text{et} \quad C = \frac{2gx - (gg-1)y}{gg+1}$$

et summa quadratorum tum ipsi $xx + yy$ aequari. Quod cum in genere difficulter praestetur, in solutionem particularem inquiramus ponendo $g = \frac{f+1}{f-1}$, unde fit

$$C = \frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1}$$

et haec oritur aequatio

$$xx + xx + yy - \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}xy = xx + yy,$$

ex qua sequitur

$$x = \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}y \quad \text{seu} \quad x = 8f(ff-1) \quad \text{et} \quad y = (ff+1)^2,$$

hincque quadratorum quaesitorum radices in integris

$$A = 8f(ff-1)(ff+1),$$
$$B = 2f(3f^4 - 10ff + 3) = 2f(3ff-1)(ff-3),$$
$$C = (ff-1)(f^4 - 14ff + 1) = (ff-1)(ff+4f+1)(ff-4f+1),$$

unde, si $f = 2$, sequuntur hi numeri

$$A = 16 \cdot 3 \cdot 5, \quad B = 4 \cdot 11 \cdot 1, \quad C = 3 \cdot 13 \cdot 3$$

seu

$$A = 240, \quad B = 44, \quad C = 117.$$

52. Ad casum autem quatuor quadratorum progrediamur, quandoquidem tum problema fit difficillimum, ut solutio adeo simplicissima iam ad maximos numeros exsurgat. Faciamus ergo

$$A = x, \quad B = \frac{2fx - (ff-1)y}{ff+1}, \quad C = \frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1}, \quad D = \frac{2px - (pp-1)y}{pp+1},$$

et cum sit

$$BB + CC = xx + yy - \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}xy,$$

posito brevitatis ergo

$$\frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2} = g$$

prodit haec aequatio

$$xx + \frac{4ppxx - 4p(pp-1)xy + (pp-1)^2yy}{(pp+1)^2} - 2gxy = 0$$

seu

$$(pp-1)^2yy = 2g(pp+1)^2xy - 4ppxx + 4p(pp-1)xy - (pp+1)^2xx$$

hincque

$$\frac{(pp-1)^2y}{x} = g(pp+1)^2 + 2p(pp-1)$$

$$\pm V\left(gg(pp+1)^4 + 4gp(pp-1)(pp+1)^2 + 4pp(pp-1)^2 - (pp-1)^2(pp+1)^2 - 4pp(pp-1)^2\right)$$

$$= g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm (pp+1)V\left(gg(pp+1)^2 + 4gp(pp-1) - (pp-1)^2\right).$$

53. Haec formula rationalis reddenda insigni molestia premi videtur, quam autem ponendo $p = \frac{q+1}{q-1}$ tollere licet. Facilior vero redditur solutio, si pro primo numero sumatur $A = y$, unde fit

$$4ppxx = 2g(pp+1)^2xy - (pp-1)^2yy$$
$$+ 4p(pp-1)\,xy - (pp+1)^2yy,$$

hincque

$$\frac{4ppx}{y} = g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm (pp+1)V\left(gg(pp+1)^2 + 4gp(pp-1) - 4pp\right),$$