Universidad Católica de Santiago del Estero

Departamento Académico Rafaela

Ingeniería en Informática

TRABAJO PRACTICO 2

Análisis Numérico

29 DE SEPTIEMBRE DE 2017

RIBERO JOAQUIN, STORANI GIANFRANCO, TRINCHIERI FACUNDO

UCSE-DAR

T. Práctico Nro. 2 – Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1

Luego de analizar el enunciado del ejercicio, determinamos que las incógnitas del sistema de ecuaciones que planteemos son cada uno de los cuatro grupos de alimentos listados en la primera columna de la tabla:

	Vit. A	Vit. B	Vit. C	Vit. D
Gupo 1 (Carnes)	0,02	0,05	0	0,04
Grupo 2 (lácteos)	0.06	0.02	0.02	0.03
Grupo 3 (cereales)	0.05	0	0.01	0.02
Grupo 4 (verduras y frutas)	0.01	0	0.06	0.03

Establecemos las variables:

- **X** = Carnes
- **Y** = Lacteos
- **Z** = Cereales
- **T** = Verduras y frutas

Para determinar los resultados de las ecuaciones, utilizaremos la segunda tabla. Esta nos proporciona 2 valores, un consumo mínimo y máximo de cada tipo de vitamina. De esta manera podremos plantear 2 sistemas de ecuaciones, que nos servirán para averiguar el intervalo de consumo para cada alimento.

	Mínimo	Máximo
Vit. A	18,1	24,5
Vit. B	8,7	12,1
Vit. C	18	25
Vit. D	18,9	26,1

Para resolverlo utilizaremos el software desarrollado en la catedra, por la metodología Gauss-Jordan.

Calculo de los mínimos:

Sistema de ecuaciones:

- $0{,}02x + 0{,}06y + 0{,}05z + 0{,}01t = 18{,}1$
- $0{,}05x + 0{,}02y + 0z + 0t = 8{,}7$
- $0x + 0{,}02y + 0{,}01z + 0{,}06t = 18$
- $0{,}04x + 0{,}03y + 0{,}02z + 0{,}03t = 18{,}9$

Matriz que ingresamos al programa:

0,02	0,06	0,05	0,01	18,1
0,05	0,02	0	0	8,7
0	0,02	0,01	0,06	18
0,04	0,03	0,02	0,03	18,9

Solución:

- **X** = 150
- **Y** = 60
- **Z** = 180
- **T** = 250

Calculo de los máximos:

Sistema de ecuaciones:

- $0{,}02x + 0{,}06y + 0{,}05z + 0{,}01t = 24{,}5$
- $0{,}05x + 0{,}02y + 0z + 0t = 12{,}1$
- $0x + 0{,}02y + 0{,}01z + 0{,}06t = 25$
- $0{,}04x + 0{,}03y + 0{,}02z + 0{,}03t = 26$

Matriz que ingresamos al programa:

0,02	0,06	0,05	0,01	24,5
0,05	0,02	0	0	12,1
0	0,02	0,01	0,06	25
0,04	0,03	0,02	0,03	26,1

Solución:

- **X** = 210
- **Y** = 80
- **Z** = 240
- **T** = 350

Una vez hallados ambos valores, podemos concluir que los intervalos son:

	Mínimo	Máximo
Grupo 1 (Carnes)	150	210
Grupo 2 (lácteos)	60	80
Grupo 3 (cereales)	180	240
Grupo 4 (verduras y frutas)	250	350

Condicionamiento del sistema:

Para evaluar el condicionamiento del sistema, realizamos pequeñas modificaciones en los decimales de los coeficientes. Observamos que los resultados obtenidos varían mucho de acuerdo a los originales, por lo tanto, podemos concluir que es un sistema **mal condicionado.**

Ejercicio 2:

Resolver aplicando el método de Eliminación Gaussiana Simple

$$\begin{cases} x - 6y + 1{,}5z = -3 \\ 2{,}85x - 16{,}95y + 4{,}23z = -8.31 \\ -1.3x + 8y - 2{,}1z = 4{,}4 \end{cases}$$

BLOQUE 1

1º Paso: normalizar la primera ecuación. Debido a que el primer término es 1, la Ecuación 1 normalizada ($E1N$) es la misma → $x - 6y + 1{,}5z = -3$

2º Paso: hacer 0 el primer término de la segunda ecuación ($2{,}85x$), para ello realizamos la siguiente operación → $E2nueva = E2anterior - 2.85 * E1N$

$E2nueva = (2{,}85x - 2{,}85x) + ((-16{,}95y) - (-17{,}1y)) + (4{,}23z - 4{,}275z) = (-8{,}31 - (-8{,}55))$

$E2 = 0x + 0{,}15y - 0{,}045z = 0{,}24$

3º Paso: hacer 0 el primer término de la tercera ecuación ($-1.3x$), para ello realizamos la siguiente operación → $E3nueva = E3anterior - 1.3 * E1N$

$E3nueva = ((-1{,}3) - (-1{,}3)) + (8 - (7{,}8)) + ((-2{,}1) - (-1{,}95)) = (4{,}4 - 3{,}9)$

$E3 = 0x + 0{,}2y - 0{,}15z = 0{,}5$

Finalizando el primer bloque el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - 6y + 1{,}5z = -3 \\ 0x + 0{,}15y - 0{,}045z = 0{,}24 \\ 0x + 0{,}2y - 0{,}15z = 0{,}5 \end{cases}$$

BLOQUE 2

1º Paso: normalizar la segunda ecuación. Dividimos a toda la ecuación por el coeficiente $a22 = 0{,}15$, la Ecuación 2 Normalizada ($E2N$) es → $0x + 1y - 0{,}3 = 1{,}6$

2º Paso: hacer 0 el segundo término de la tercera ecuación ($0{,}2y$), para ello realizamos la siguiente operación → $E3nueva = E3anterior - a32 * E2N$

$E3nueva = (0 - 0) + (0{,}2 - 0{,}2) + ((-0{,}15) - (-0{,}06)) = (0{,}5 - (0{,}32))$

$E3 = 0x + 0y - 0{,}09z = 0{,}18$

Una vez finalizado el segundo bloque, el sistema de ecuaciones resulta de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - 6y + 1{,}5z = -3 \\ 0x + 1y - 0{,}3z = 1{,}6 \\ 0x + 0y - 0{,}09z = 0{,}18 \end{cases}$$

El siguiente paso es despejar los valores de las incógnitas de cada ecuación, comenzando por la tercera:

En la 3º ecuación despejamos z:

$0x + 0y - 0{,}09z = 0{,}18$

$z = 0{,}18 / (-0{,}09)$

$\boldsymbol{z = -2}$

En la 2º ecuación despejamos y, utilizando el valor de z que despejamos arriba:

$0x + 1y - (0{,}3 * (-2)) = 1{,}6$

$0x + y + 0{,}6 = 1{,}6$

$y = 1{,}6 - 0{,}6$

$\boldsymbol{y = 1}$

En la 3º ecuación despejamos x, utilizando los valores de z e y despejados anteriormente:

$x - (6 * 1) + (1{,}5 * (-2)) = -3$

$x - 6 - 3 = -3$

$x = -3 + 6 + 3$

$\boldsymbol{x = 6}$

De esta manera habremos obtenido la solución del sistema de ecuaciones planteado:

$$\boldsymbol{S0} = (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{6}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{2})$$

Condicionamiento del sistema:

Para corroborar el condicionamiento del sistema, realizaremos pequeños cambios en los coeficientes y volveremos a resolver.

Sistema modificado:

$$\begin{cases} x - 6y + 1,\mathbf{6}z = -3 \\ 2,85x - 16,\mathbf{85}y + 4,\mathbf{33}z = -8,31 \\ -1,3\mathbf{1}x + 8y - 2,1\mathbf{7}z = 4,4 \end{cases}$$

Volvemos a realizar los pasos anteriores con el nuevo sistema. Otra vez constamos de 2 bloques:

BLOQUE 1

1º Paso: normalizar la primera ecuación. Nuevamente el primer término es 1, por lo tanto, la Ecuación 1 Normalizada ($E1N$) es → x − 6y + 1,6z = −3

2º Paso: hacer 0 el primer término de la segunda ecuación (2,85x), para ello realizamos la siguiente operación → $E2nueva$ = $E2anterior$ – $2.85 * E1N$

$E2nueva$ = (2,85x − 2,85x) + ((−16,85y) − (−17,1y)) + (4,33z − 4,56z) = (−8,31 − (−8,55))

$E2$ = 0x + 0,25y − 0,23z = 0,24

3º Paso: hacer 0 el primer término de la tercera ecuación (−1.31x), para ello realizamos la siguiente operación → $E3nueva$ = $E3anterior$ – $(\text{-}1.31) * E1N$

$E3nueva$ = ((−1,31) − (−1,31)) + (8 − (7,86)) + ((−2,17) − (−2,096)) = (4,4 − 3,93)

$E3$ = 0x + 0,14y − 0,074z = 0,47

Finalizando el primer bloque el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - 6y + 1,6z = -3 \\ 0x + 0,25y - 0,23z = 0,24 \\ 0x + 0,14y - 0,074z = 0,47 \end{cases}$$

BLOQUE 2

1º Paso: normalizar la segunda ecuación dividiendo a toda la ecuación por el coeficiente $a22$ = 0,25. La Ecuación 2 Normalizada ($E2N$) es → $0x + 1y - 0{,}92z = 0{,}96$

2º Paso: hacer 0 el segundo término de la tercera ecuación (0,14), para ello realizamos la siguiente operación → $E3nueva = E3anterior - 0.14 * E2N$

$E3nueva$ = (0 − 0) + (0,14 − 0,14) + ((−0,074) − (−0,1288)) = (0,47 − (0,1344))

$E3 = 0x + 0y + 0{,}0548z = 0{,}3356$

Finalizando el segundo bloque el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - 6y + 1{,}6z = -3 \\ 0x + y - 0{,}92 = 0{,}96 \\ 0x + 0y + 0{,}0548z = 0{,}3356 \end{cases}$$

Comenzamos a despejar los valores de las incógnitas de cada ecuación. De la 3º despejamos z:

$0x + 0y + 0{,}0548z = 0{,}3356$

$z = 0{,}3356/(0{,}0548)$

$\boldsymbol{z = 6,124087591}$

De la 2º ecuación despejamos y, utilizando el valor de z despejado arriba:

$0x + y - (0{,}92 * 6{,}124087591) = 0{,}96$

$0x + y - 5{,}634160584 = 0{,}96$

$y = 0{,}96 + 5{,}634160584$

$\boldsymbol{y = 6,594160584}$

De la 3º ecuación despejamos x, utilizando los valores de z e y recientemente despejados:

$x - (6 * 6{,}594160584) + (1{,}6 * 6{,}124087591) = -3$

$x - 39{,}5649635 + 9{,}798540146 = -3$

$x = -3 + 39{,}5649635 - 9{,}798540146$

$\boldsymbol{x = 26,76642335}$

De esta manera concluimos que la solución del sistema de ecuaciones planteado es:

$\boldsymbol{S0} = (\boldsymbol{x} = \mathbf{26,76642335}, \boldsymbol{y} = \mathbf{6,594160584}, \boldsymbol{z} = \mathbf{6,124087591})$

Si comparamos estos valores, con los obtenidos en el sistema original ($\boldsymbol{x} = \mathbf{6}, \boldsymbol{y} = \mathbf{1}, \boldsymbol{z} = \mathbf{-2}$), podemos observar que varían notoriamente. Por este motivo podemos afirmar que es un sistema **mal condicionado.**

¿Es posible resolver el sistema por Gauss-Seidel?

Al momento de intentar resolver el sistema de ecuaciones anterior por el método de Gauss-Seidel en el software desarrollado, observamos que método de corte era por superar la cantidad de iteraciones prestablecidas. Observamos que los resultados no concordaban con los obtenidos por el método de eliminación gaussiana simple o por el método de Gauss-Jordan del propio software.

Llegamos a la conclusión de que esto sucede, debido a que el sistema no es **diagonalmente dominante.** Observamos, que tampoco es posible transformarlo a un sistema diagonalmente dominante realizando un pivoteo parcial.

De esta manera concluimos que el método de Gauss-Seidel no es apropiado para este sistema.

Ejercicio 3

Sistema a resolver:

$$\begin{cases} 5x1 + x2 - 12{,}01015x3 = 8 \\ -8{,}301525x1 - 0{,}25x2 + 1{,}010075x3 = 20{,}225 \\ 3{,}751125x1 - 10{,}801216x2 - 3.002028x3 = 10{,}75 \end{cases}$$

Matriz que ingresamos al software:

5	1	-12,01015	8
-8,301525	-0,25	1,010075	20,225
3,751125	-10,801216	-3,002028	10,75

Resultados obtenidos:

- X1 = -2,62250216426563
- X2 = -1,38538239967184
- X3 = -1,87323998626162

Ahora comprobaremos si es necesario trabajar con todos los decimales o basta con solo 2 de ellos.

La nueva matriz que ingresamos al software será:

5	1	-12,01	8
-8,30	-0,25	1,01	20,25
3,75	-10,80	-3,00	10,75

Resultados obtenidos:

- X1 = -2,62614561808881
- X2 = - 1,38642997410361
- X3 = - 1,87486744917133

Conclusión:

Podemos observar que los resultados son prácticamente similares, variando incluso, luego del segundo decimal. Podemos afirmar entonces, que se puede trabajar con solamente con 2 decimales y el resultado no variara mientras ninguno de estos se modifique.

¿Es posible resolver el sistema por Gauss-Seidel?

Podemos observar que el sistema original no es diagonalmente dominante, por lo que no sería apropiado para Gauss-Seidel. Sin embargo, podemos realizar un intercambio en la posición de las ecuaciones para transformarlo en diagonalmente dominante.

Colocamos la 2° ecuación en la 1° fila, la 3° ecuación en la 2° fila, y la 1° ecuación ocupara la última fila.

De esta manera se cumple que el valor absoluto del coeficiente en la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de los coeficientes restantes de la ecuación.

La matriz que ingresamos al sistema es la siguiente:

-8,30	-0,25	1,01	20,25
3,75	-10,80	-3	10,75
5	1	-12,01	8

Resultados obtenidos:

- X1 = - 2,62614025707874
- X2 = - 1,38643687560008
- X3 = -1,87486579192288

Observamos que los resultados son prácticamente idénticos. De esta manera comprobamos que gracias al pivoteo parcial pudimos aplicar el método de Gauss-Seidel correctamente.

Ejercicio 4

Referencias para armar el sistema de ecuaciones:

- x = número de varones de los dos últimos años
- y = número de mujeres de los dos últimos años
- z = número de profesores de educación física
- t = número de cocineros

Sabemos que existen cuatro incógnitas, por lo tanto que deberemos plantear la misma cantidad de ecuaciones para poder resolver el problema.

Analizamos el enunciado:

1° ecuación:

- El total del contingente es de 96 personas => $\mathbf{x + y + z + t = 96}$

2° ecuación:

- Para dormir se agrupan 4 varones, 3 chicas, 2 profes y 2 cocineros por carpa. De esta manera en necesario llevar 31 carpas => $\mathbf{1/4x + 1/3y + 1/2z + 1/2t = 31}$

3° ecuación:

- Exigencias del Colegio dicen que debe ir 1 profesor por cada 10 alumnos. $\mathbf{x + y - 10z + 0t = 0}$

4°ecuación:

- Debe ir un cocinero por cada 15 acampantes => $\mathbf{x + y + z - 15t = 0}$

El sistema de ecuaciones queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 96 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 31 \\ x + y - 10z + 0t = 0 \\ x + y + z - 15t = 0 \end{cases}$$

Matriz que ingresamos al sistema:

1	1	1	1	96
0,25	0,33’	0,5	0,5	31
1	1	-10	0	0
1	1	1	-15	0

Resultados obtenidos:

- x = 40,3636363636198
- y = 41,454545454562
- z = 8,18181818181818
- t = 6

Podes concluir que en el campamento se encuentran **40 chicos, 42 chicas, 8 profesores y 6 cocineros**.

Utilizamos el método de Gauss-Jordan ya que sin realizar cambios en la matriz (intercambios de filas) no existe ningún cero en los coeficientes de la diagonal principal, de manera que hace posible utilizarlo.

Ejercicio 5

Sistema a resolver:

$$\begin{cases} x2 - x3 + 4x5 = 0 \\ x1 + x2 + 5x3 = 0 \\ 2x1 - 0{,}5x2 - x4 = 20 \\ -x2 + +0{,}25x3 - 0.2x4 - 0{,}2x5 = 17 \\ 0{,}5x1 + 0{,}25x3 - x4 = 0 \end{cases}$$

Resolución por Gauss-Jordan:

Observamos que el primer coeficiente de la primera ecuación es 0, lo que nos imposibilita utilizar el método de Gauss-Jordan. Para poder llevar a cabo el método, realizaremos previamente un pivoteo, intercambiando las ecuaciones de la 1° y 2° fila.

Matriz a ingresar en el software:

X1	X2	X3	X4	X5	
1	1	5	0	0	0
0	1	-1	0	4	0
2	-0,5	0	-1	0	20
0	-1	0,25	-0,2	-0,2	17
0,5	0	0,25	-1	0	0

Resultados obtenidos:

- X1 = 7,57527733755943
- X2 = -18,351822503962
- X3 = 2,15530903328051
- X4 = 4,32646592709986
- X5 = 5,12678288431062

Resolución por Gauss-Seidel:

Observamos que el sistema original, no es diagonalmente dominante. Sin 2embargo, realizando un pivoteo parcial podemos transformarlo a esta manera.

Utilizamos una tolerancia de error relativo de 0.001

Matriz a ingresar en el software:

X1	X2	X3	X4	X5	
2	-0,5	0	-1	0	20
0	-1	0,25	-0,2	-0,2	17
1	1	5	0	0	0
0,5	0	0,25	-1	0	0
0	1	-1	0	4	0

Resultados obtenidos:

- X1 = 7,57528242802551
- X2 = -18,3518227667511
- X3 = 2,15530806774511
- X4 = 4,32646823094903
- X5 = 5,12678270862405

Conclusión:

Observamos que los resultados son prácticamente idénticos, por lo tanto, podemos afirmar que realizando un correcto pivoteo parcial para transformar el sistema a diagonalmente dominante podremos utilizar cualquiera de los métodos indistintamente.

Al utilizar el método de Gauss-Seidel con un error tolerable entre dos iteraciones sucesivas (en todas las variables) de un 0,01% obtenemos un resultado ligeramente diferente apreciable recién después de varios decimales.

Podemos relacionar esto con que el sistema está **bien condicionado**, pues aun permitiendo una pequeña tolerancia de error, la variación de los resultados es ínfima.