Вопросы к экзамену по матанализу 2 семестр

Первая часть:

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Примеры
2. Свойства неопределенного интеграла. Интегрирование по частям. Замена переменной
3. Интегрирование рациональных выражений. Метод Остроградского
4. Интегрирование некоторых иррациональностей. Простые замены (все кроме диф. бинома и п. Эйлера)
5. Подстановки Эйлера. Их геометрический смысл.
6. Дифференциальный бином
7. Интегрирование тригонометрических выражений
8. Определенный интеграл. Необходимое условие существования о.п.
9. Суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу.
10. Необходимое условие интегрируемости
11. Интегрирование непрерывных функций на отрезке. Интегрирование монотонных функций на отрезке.
12. Свойства определенного интеграла
13. Интегрирование неравенств. Первая и вторая теоремы о среднем
14. Замена переменной в определенном интеграле
15. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме
16. Площадь области. Длина дуги
17. Площадь поверхности и объем тела вращения

Вторая часть:

18. Несобственный интеграл первого рода
19. Несобственный интеграл второго рода
20. Признаки сравнения
21. Признаки сходимости (Абеля Дирихле)
22. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Необходимое условие существования
23. Повторный интеграл. Теорема о переходе к повторному интегралу в двойном интеграле.
24. Замена переменной в двойном интеграле. Теорема о замене переменной
25.Тройной интеграл. Необходимое и достаточное условие существования. Теорема о среднем. Теорема о переходе к повторному интегралу.
26. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Замена переменной в тройном интеграле. Теорема о замене переменной.
27. Приложения тройных интегралов.
28. Криволинейный интеграл первого рода
29. Криволинейный интеграл второго рода. Критерий консервативности поля.
30. Поверхностный интеграл первого рода
31. Поверхностный интеграл второго рода
32. Формула Грина. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса
33. Приложения поверхностных интегралов
34. Восстановление потенциала по заданному потенциальному векторному полю.

Билет №1

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Определение. Свойства.

Первообразная – функция, производная которой равна изначальной функции.
F'(x) = f(x) ; F(x) – первообразная f(x)

Каждая непрерывная в Данном промежутке функция f(x) имеет в нем первообразную.

Теорема

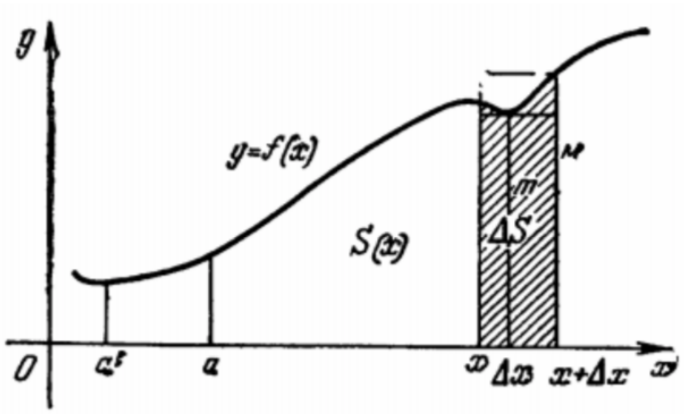
Всякая функция имеет бесконечное кол-во первообразных, причём отличаются они друг от друга только на постоянное слагаемое (на const).

Доказательство:

1) Всякая непрерывная функция имеет первообразную (не доказываем это (Бермант стр.254))
2) Тогда (F(x) + C)' = F'(x) = f(x), при любом C из R.

ч.т.д.

Геометрическое существование производной.



1) Рассмотрим график функции f(x) на рисунке. Зафиксируем точку a на оси Ox. За S(x) обозначим площадь криволинейной трапеции, с основанием [a, x].
2) Изменяя x на Δx мы также будем менять и S(x).
3) Найдём производную S(x) по определению: $S^{'}(x) = \frac{\Delta S}{\Delta x}$
4) Также очевидно, что $m\Delta x < \Delta S < M\Delta x$, где m – минимальное значение функции f(x) на интервале $[x,\ x + \Delta x]$

5) Поделим неравенство на Δx: $m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M$
6) При $\Delta x \to 0$, m и M будут стремиться к одному значению – f(x), а $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ будет стремиться к S'(x).
7) Тогда справедливым будет сказать, что $S^{'}(x) = f(x)$, т.е. S(x) является первообразной f(x).

Неопределённый интеграл – множество всех первообразных функции.

$\int f(x)dx = F(x) + C$

Неопределённое интегрирование является обратным действием к дифференцированию.

Свойства:
Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению
Дифференциа́л — линейная часть приращения функции.

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3) $\int f^{'}(x)dx = f(x) + C$

4) $\int 1\, df(x) = f(x) + C$

Линейность (интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности интегралов)

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx.$$

Постоянный коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Билет №2.

Методы вычисления первообразной̆. Таблица первообразных. Замена
переменной̆ под знаком интеграла.

МЕТОДЫ:

Подстановка/замена переменной
Подведение под знак дифференциала
Тригонометрические тождества
Интегрирование по частям
Переход к полярным/сферическим координатам

Таблица

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ:

Пусть функция x = (t) определена и дифференцируема на некотором промежутке *T* и пусть *X* – множество значений этой функции, на котором определена функция **f(x)**. Тогда, если на множестве *X* функция **f(x)** имеет первообразную, то на множестве *T* справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Формула называется ***формулой замены переменной*** в неопределенном интеграле.

Теорема №1

Интеграл конечной суммы функций равен сумме интегралов слагаемых функций.

$$\int (f(x) + \ \dots \ + g(x))dx = \int f(x)dx \ + \ \dots \ + \int g(x)dx$$

Доказательство: берём производную от левой и правой части. Смотрим что они равны. ч.т.д.

Теорема №2

Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за знак интеграла.

$$\int \mathrm{c}f(x)dx = c\int f(x)dx$$

Доказательство: берём производную от левой и правой части. Смотрим что они равны. ч.т.д.

Теорема №3 (Замена переменной)

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при =-подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой от неё функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + \ C, \quad u = g(x) - \text{дифференцируемая функция}$$

$$\int f(u)dx = F(u) + \ C$$

Доказательство:

1) Рассмотрим F(u): dF(u) = F’(u) du = f(u)du

2) Тогда $\int f(u)du = \int F^{'(u)}du = F(u) + C$

ч.т.д.

Билет №3.

Методы вычисления первообразной. Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям (“удав”).

Пусть *u(x)* и *v(x)* – дифференцируемые от *x* функции. Тогда:

d(uv) = udv + vdu

udv = d(vu) – vdu

Итого: $\int udv = uv - \int vdu$ (“**уд**а**в, ув**ы, *в* а**ду**”) аминь

Замена переменной.

Основной смысл – привести интеграл к уже знакомому, который мы умеем вычислять. “В более сложных случаях рекомендуется выбрать вначале ту подстановку, которая представляется удачной, и лишь после преобразования подынтегрального выражения смотреть пришли ли мы к желаемому результату – упрощению интеграла.” При замене, например t = sin(x), но не забыть вычислить dx, т.е. в примере это будет $\frac{dt}{cos(x)}$, и сам x – arcsin(t). В основном рекомендуется полагаться на Силу.

Билет №4.

Интегрирование рациональных выражений.
Простые дроби и их интегрирование.

Необходимо взять неопределённый интеграл от дроби $\frac{T(x)}{Q(x)}$

Алгоритм:

1) Выделяем целую часть: $\frac{T(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, deg(P(x)) < deg(Q(x))
2) Интеграл от целой части N(x) берётся легко. Осталось выяснить как его взять от дроби, степень числителя которой меньше степени знаменателя.
3) Разложим Q(x) на множители:

   $Q(x) = (x - a)^k * \ldots * (x^2 + bx + c)^t$, где a – действительный корень кратности k, а $x^2 + bx + c = 0$ имеет комплексные сопряжённые корни кратности t.
4) Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ Можно представить в виде суммы дробей 1-го и 2-го рода: $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ – 1-ый род, $\frac{B_i x + C_i}{(x^2+bx+c)^i}$ – 2-ой род
5) **Каждому знаменателю вида $(x - a)^k$ соответствует сумма k простейших дробей 1-го рода:** $\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}$
6) **Аналогично, каждому знаменателю вида $(x^2 + bx + c)^t$ соответствует сумма t простейших дробей 2-го рода:**
   $\frac{B_t x + C_t}{(x^2+bx+c)^t} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+bx+c}$
7) Приводим полученные дроби к общему знаменателю.
8) Коэффициенты в числителях просто находятся с помощью системы уравнений. Используется метод неопределенных коэффициентов
9) Берём интегралы от полученных простейших дробей. Обычно они берутся очень просто.

Билет №5.

Интегрирование выражений, содержащих радикалы. Подстановки Эйлера.

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x.
Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

1) ***Интегралы вида*** $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$,
где R означает рациональную функцию от двух аргументов, $m \in N, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ –постоянные.

Полагаем, $t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ x = \phi(x) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}$.

Интеграл приводится к виду
$\int R(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)dt,$

здесь $R, \phi(t), \phi'(t)$ – рациональные функции.
Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.
К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

где показатели r, s,… − рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала

$$\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}.$$

② $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ замена: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$

$ax+b = t^m(cx+d)$

$(a - t^m c)x = t^m d - b \Rightarrow x = \frac{t^m d - b}{a - t^m c}$ $\Rightarrow \int R\left(\frac{t^m d - b}{a - t^m c}, t\right)dt$

пример

$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ $\quad \frac{x-1}{x+1} = t^3$

$x - 1 = t^3(x+1)$

$x(1-t^3) =$

$x = \frac{t^3+1}{1-t^3}$ $\quad dx = \frac{-3t^2(t^3-1)+3t^2(t^3+1)}{(1-t^3)^2}dt = \frac{-\cancel{3t^5}+3t^2+\cancel{3t^5}+3t^2}{(1-t^3)^2}dt = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}dt$

$= \int \frac{6t^3}{(1-t^3)^2}dt$ дробно-рац. ф-ция

Подстановки Эйлера.

Суть подстановок Эйлера сводится к трём правилам:

1. Если $a > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$.
2. Если $c > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
3. Если многочлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2, т.е. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то допустимы такие подстановки:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1);$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2).$$

ИЛИ(хз что верно)

Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, \ldots)dx$. Необходимо его упростить. Алгоритм (Подстановка Эйлера):

1) Обозначим n = НОК(k,m,…).
2) Тогда $\frac{n}{k} = r_1, \ \frac{n}{m} = r_2, ...$
3) Получается сделать замену $x = u^n, \ dx = nu^{n-1}du$.
4) В итоге интеграл примет вид $\int R(u^n, \ u^{r_1}, u^{r_2}, ...)nu^{n-1}du$

Билет №6.

__Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.__

Рассмотрим интеграл вида $\int R(sin(x), \ \ cos(x))dx.$ Необходимо его упростить. Алгоритм:

1) Вспоминаем универсальную тригонометрическую подстановку a.k.a. хардкор для тригонометрии на все случаи жизни:

$$sin\,(x) \ = \ \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+ tg^2\frac{x}{2}}$$

$$cos(x) \ = \ \frac{1- tg^2\frac{x}{2}}{1+ tg^2\frac{x}{2}}$$

2) Делаем замену $u = tg\frac{x}{2}$:

$sin\ (x)\ =\ \frac{2u}{1+u^2}, cos(x)\ =\ \frac{1-u^2}{1+u^2}$

x = 2arctg(u), $dx\ = \frac{2}{1+u^2}du$

3) Итого: $\int R(sin(x),\ \ cos(x))dx\ =\ \int R(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \ \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}})\frac{2}{1+u^2}du$
4) Подынтегральное выражение полностью зависимо от u.

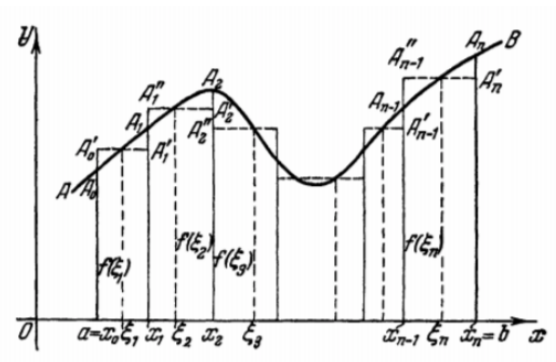
Билет №7.

Площадь. Определение. Свойства.

Свойства площади:

1) Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей этих фигур.
2) Площадь прямоугольника равна произведению его измерений.

Площадь криволинейной трапеции



Криволинейная трапеция – фигура ограниченная осью Ox, двумя прямыми x=a и x=b, а также графиком функции f(x). $[a,\ b]$ – основание.

1) Считаем что f(x) > 0 на $[a,\ b]$.
2) Разобьём $[a,\ b]$ на n интервалов вида $\left[x_0,\ x_1\right],\ ...,\ [x_{n-1},\ x_n]$
3) В каждом таком интервале берём произвольную точку:
$${}_1 \in \left[x_0,\ x_1\right],\quad {}_2 \in \left[x_1,\ x_2\right],\ ...,\quad {}_n \in [x_{n-1},\ x_n]$$
4) Проведём прямые $x = {}_1,\ x = {}_2,\ ...,\ x = {}_n$ до пересечения с кривой y=f(x). Ординаты пересечения равны $f\left({}_1\right),\ f\left({}_2\right),\ ...,\ f\left({}_n\right)$
5) Построим n прямоугольников с высотами $f\left({}_1\right),\ f\left({}_2\right),\ ...,\ f\left({}_n\right)$. Получаем ломаную как на рисунке.
6) Тогда площадь S Данной криволинейной трапеции примерно равна сумме площадей этих прямоугольников. Мы сможем точнее посчитать площадь S, если n (кол-во прямоугольников) будет больше и их ширина будет меньше.

$$\text{Площадь ломанной фигуры)}$$

7) Площадь ломанной фигуры: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$
8) Тогда площадь криволинейной трапеции:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$$

Билет №8.

Определенный интеграл. Суммы Дарбу. Суммы Римана

Определённый интеграл – предел, к которому стремится n-я интегральная сумма (А), при стремлении к нулю наибольшего частичного интервала.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Простейшие свойства интеграла: см билет 10, Бермант с конца стр.295(попробуй сам вспомнить)

Геометрический смысл: **алгебраическая**(может быть отрицательной) площадь криволинейной трапеции с основанием [a, b] и ограниченная линией y = f(x).

Применяя определённый интеграл можно получить:

1) Площадь криволинейной трапеции равна интегралу от ординаты линии, ограничивающей трапецию, взятому по основанию:
$$S = \int_a^b f(x)dx$$
2) Путь, пройденный телом, равен интегралу от скорости, взятому по времени:
$$s = \int_{T_2}^{T_1} v(t)dt$$
3) Работа, произведенная силой, равна интегралу от силы, взятому по пути:
$$A = \int_0^S f(s)ds$$
4) Масса линии (провода, например), распределенной по всей её длине, равна интегралу от плотности, взятому по длине пути:
$$m = \int_0^S \rho(s)ds$$

Суммы Дарбу.

Пусть на отрезке [a, b] дана вещественнозначная функция f(x). Отрезок [a, b] разбили на n частей.

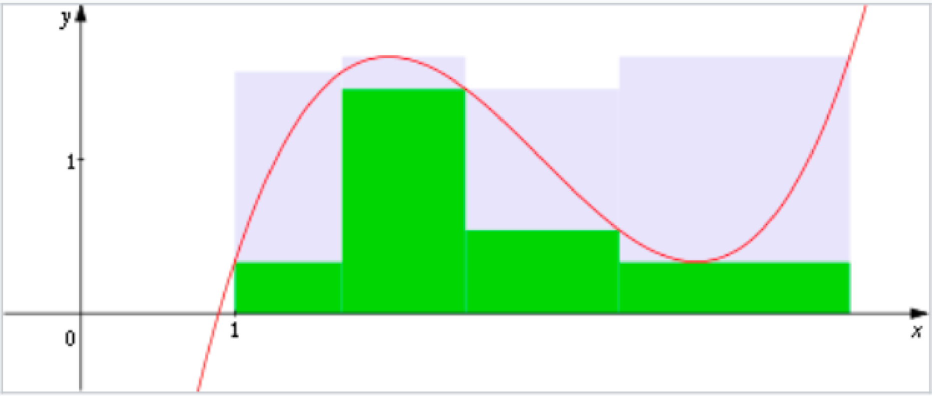
Введем обозначения:

$$m_k = inf\left\{f(x): x\in\left[x_{k-1},\ x_k\right]\right\},\ k\in[1, n]$$

$$M_k = sup\left\{f(x): x\in\left[x_{k-1},\ x_k\right]\right\},\ k\in[1, n]$$

Верхняя сумма Дарбу: $S(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$

Нижняя сумма Дарбу: $s(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$



Нижняя (зеленая) и верхняя (серая) суммы Дарбу на 4 отрезках разбиения

Свойства сумм Дарбу

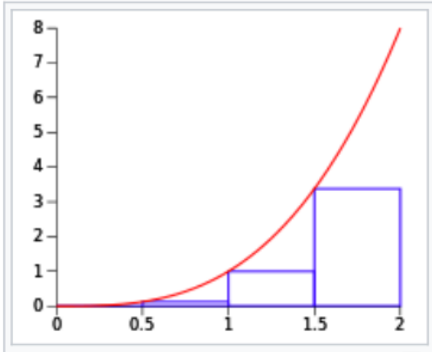
1. Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то от этого верхняя сумма Дарбу не увеличится, а нижняя сумма Дарбу не уменьшится

2. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу, даже если они соответствуют разным разбиениям

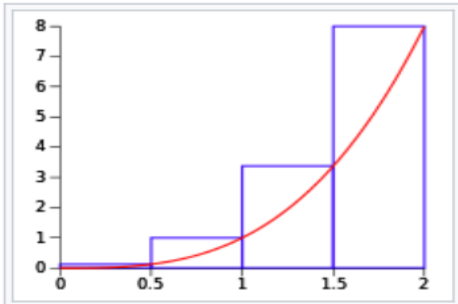
Суммы Римана.

Пусть на отрезке [a, b] дана вещественнозначная функция f(x). Отрезок [a, b] разбили на n частей.

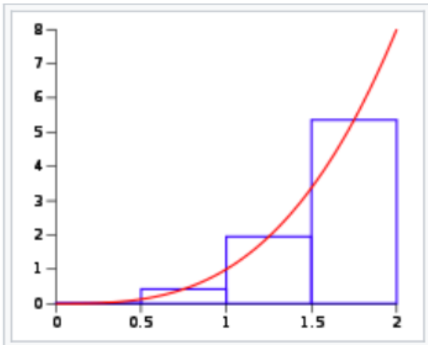
Левая сумма Римана: $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$



Правая сумма Римана: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$

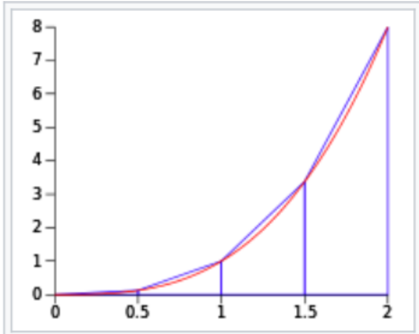


Средняя сумма Римана: $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_k + x_{k-1}}{2})(x_k - x_{k-1})$



Трапециевидная сумма Римана:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} (x_k - x_{k-1})$$



Билет №9.

<u>Условия существования интеграла. Классы интегрируемых функций.</u>

Необходимое и достаточное условие сущ интеграла:

297. Условие существования интеграла. С помощью сумм Дарбу теперь легко сформулировать это условие.

Теорема. *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{6}$$

Сказанное в **295** достаточно для уяснения смысла этого предела. Например, «на языке ε-δ», условие (6) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что лишь только $\lambda < \delta$ (т. е. промежуток разбит на части с длинами $\Delta x_i < \delta$), тотчас выполняется неравенство

$$S - s < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим,

Теорема о существовании определенного интеграла

Если функция f(x) непрерывна на некотором замкнутом интервале [a,b], то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *не зависит от способа разбиения интервала интегрирования и выбора промежуточных точек.*

Без доказательства.

Классы интегрируемых функций.

Если функция непрерывна в [a, b] то она интегрируема

Если ограниченная функция в имеет лишь конечное число точек разрыва то она интегрируема.

Монотонная ограниченная функция всегда интегрируема.

Свойства интегрируемых функций

1) *Любая функция, ограниченная и непрерывная в некотором промежутке, является интегрируемой на этом промежутке. К классу интегрируемых функций относятся также функции, ограниченные на промежутке интегрирования и имеющие на этом промежутке конечное число точек разрыва первого рода.*

2) *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке [a ,b], то и функция $c\ f(x)$, где c – константа, интегрируема на этом промежутке.*

3) *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке [a, b], то и функция $|\ f(x)\ |$ интегрируема на этом промежутке.*

4) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке [a, b], то и их сумма, разность и произведение интегрируемы на этом промежутке.*

5) *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке [a, b], то она интегрируема и в любой части этого промежутка.*

6) *Если функция f(x) интегрируема в каждой части некоторого промежутка, то она интегрируема и на всем промежутке.*

7) *Если значения интегрируемой функции изменить в конечном числе точек (на конечные величины), то интегрируемость функции не нарушится.*

Применительно к функции f(x) , которая не определена в конечном числе точек промежутка [a,b], это означает, что ни существование интеграла , ни его величина не зависят от значений, приписанных функции f(x) в точках ее разрыва.

Билет №10.

Свойства определенных интегралов.
Линейность, аддитивность по промежутку.

Свойства:

1) $\int\limits_a^b (f(x) + \dots + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \dots + \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство: чтобы доказать, записывай интегралы в виде предела суммы.

2) $\int\limits_a^b c * f(x)dx = c * \int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство: чтобы доказать, записывай интегралы в виде предела суммы.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Доказательство: теперь в интегральной сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\varepsilon_i\right)(x_i - x_{i-1})$ скобка $\left(x_i - x_{i-1}\right) < 0$ поэтому и вся сумма будет меньше нуля.

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ если $[a, b]$ разбит на $[a, c]$ и $[c, b]$

Доказательство: т.к. интегральная сумма не зависит от способа деления интервала, то будем делать так, чтобы точка c всегда была точкой деления. Если c лежит внутри интервала [a, b] то сразу приходим к ответу. Иначе расписываем больший интервал как сумму меньших и соответствующие интегралы.

5°. *Если функция $f(x)$, интегрируемая в промежутке $[a, b]$, неотрицательна и $a<b$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

6°. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы в промежутке $[a, b]$ и всегда $f(x) \leqslant g(x)$ [или $f(x) < g(x)$], то и*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \left[\text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx\right]$$

в предположении, что $a<b$.

Нужно лишь применить предыдущее свойство к разности $g(x)-f(x)$.

Так же легко получается:

7°. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ и $a<b$, тогда имеем неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8°. *Если $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$, где $a < b$, и если во всем этом промежутке имеет место неравенство*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Можно применить свойство 6° к функциям m, $f(x)$ и M, но проще непосредственно воспользоваться очевидными неравенствами

$$m \sum \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum \Delta x_i^*$$

и перейти к пределу.

5) Если подынтегральная функция не меняет знака на всем интервале интегрирования, то интеграл будет числом такого же знака, что и функция.
Доказательство: если f(x)>=0, то в интегральной сумме $f\left(\varepsilon_i\right) \geq 0$. Если f(x)<0, то в интегральной сумме $f\left(\varepsilon_i\right) < 0$

Билет №11.

Теорема о среднем значении.(приведены две о среднем, вторая ниже, хз какая лучше)(еще приведена теорема об оценке опред интеграла)

9°. ***Теорема о среднем значении.*** *Пусть $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$ $(a \lesseqgtr b)$ и пусть во всем этом промежутке $m \leqslant f(x) \leqslant M$; тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Доказательство. Если $a < b$, то по свойству 8° будем иметь

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

откуда

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Положив

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

получаем требуемое равенство.

Для случая, когда $a > b$, проводим то же рассуждение для $\int_b^a$, а затем, переставив пределы, приходим к прежней формуле.

Теорема об оценке определённого интеграла.

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

m – наименьшее значение f(x) на интервале [a, b]
M – наибольшее значение f(x) на интервале [a, b]

$$m \le f(x) \le M$$

Доказательство:

1) Возьмём две функции f(x)-m и f(x)-M
2) Первая неотрицательна на интервале, а вторая неположительная.
3) Тогда $\int_a^b [f(x) - m]dx > 0$ и $\int_a^b [f(x) - M]dx < 0$
4) Берём интеграл и решаем неравенства:

$$\int_a^b f(x)dx - m(b-a) > 0 \qquad \int_a^b f(x)dx - M(b-a) < 0$$

$$\int_a^b f(x)dx > m(b-a) \qquad \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

ч.т.д.

Теорема о среднем.

Внутри интервала интегрирования [a, b] непрерывной функции есть хотя бы одно значение ε, такое что

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f()$$

Доказательство:

1) Из предыдущей теоремы: $m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M => \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = u,$ где u – некое число между m и M.
2) Т.к. f(x) – непрерывная функция, то она принимает это некоторое значение u, при каком-то ∑. ч.т.д.

Билет №12.

Интегральные неравенства. Неравенство Коши — Буняковского.

1) В n° **133** мы имели неравенство (4), которое можно переписать так:

$$e^{\frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i}} \leqslant \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}. \tag{12}$$

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ положительные функции $p(x)$ и $\varphi(x)$. Разделив промежуток точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

на части, с длинами $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, положим теперь в написанном неравенстве $p_i = p(x_i) \cdot \Delta x_i$, $a_i = \varphi(x_i)$; мы получим

$$e^{\frac{\sum p(x_i) \cdot \ln \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i}{\sum p(x_i) \cdot \Delta x_i}} \leqslant \frac{\sum p(x_i) \varphi(x_i)\, \Delta x_i}{\sum p(x_i)\, \Delta x_i}.$$

Все суммы здесь имеют вид и н т е г р а л ь н ы х с у м м и при $\Delta x_i \to 0$ стремятся к соответствующим интегралам. Таким образом, в пределе получим «интегральный аналог» неравенства (12):

$$e^{\frac{\int_a^b p(x) \ln \varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}} \leqslant \frac{\int_a^b p(x) \varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}.$$

Это нер-во Коши-Буняковского:

$$\left|\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx} \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$$

Билет №13.

Замена переменной в определенном интеграле.
Интегрирование по частям.

Замены как и в билете 3, только надо ещё помнить про пересчёт пределов интегрирования.

6. *Интегрирование по частям в определенном интеграле*

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две функции, непрерывные со своими первыми производными на сегменте $[a, b]$

Возьмем дифференциал от их произведения:
$d[u(x)v(x)] = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x) = u(x)\,v'(x)dx + v(x)\,u'(x)\,dx.$

Интегрируя это тождество в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b d[u(x)v(x)] = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{32}$$

Но по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b d[u(x)v(x)] = u(x)\,v(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, равенство (32) примет следующий вид:

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{33}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Так как $du = u'(x)\,dx$ и $dv = v'(x)\,dx$, то формулу (33) можно записать в следующем более компактном виде:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{34}$$

Доказательство: $\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)|(b,a)$. Дальше раскрываем как неопределённый интеграл и получаем ответ.

Билет №14.

Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона — Лейбница.

что и доказывает непрерывность функции $\Phi(x)$.

12°. *Если функцию $f(t)$ предположить* непрерывной *в точке $t = x$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ имеет производную, равную $f(x)$*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доказательство. Действительно, из (2) имеем

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu, \quad \text{где} \quad m' \leq \mu \leq M'.$$

Но, ввиду непрерывности функции $f(t)$ при $t = x$, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

для всех значений t в промежутке $[x, x+h]$. В таком случае имеют место и неравенства

$$f(x) - \varepsilon \leq m' \leq \mu \leq M' \leq f(x) + \varepsilon,$$

так что

$$|\mu - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Теперь ясно, что

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mu = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы пришли к заключению, имеющему огромное принципиальное и прикладное значение. Если предположить функцию $f(x)$ непрерывной во всем промежутке $[a, b]$, то она интегрируема [**298**, I], и предыдущее утверждение оказывается приложимым к любой точке x этого промежутка: *производная от интеграла* (1) *по переменному верхнему пределу x везде равна значению $f(x)$ подынтегральной функции на этом пределе.*

Иными словами, для непрерывной *в промежутке* $[a, b]$ *функции $f(x)$ всегда существует первообразная; примером ее является определенный интеграл* (1) *с переменным верхним пределом.*

ИЛИ:

Интеграл с переменным верхним пределом – функция от своего предела:

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом.

$$I(x)' = \left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство:

Придадим аргументу приращение ⊗x. Тогда увеличенное значение функции будет: $I(x + x) = \left(\int_a^{x+x} f(x)dx\right)$

Увеличение функции:

$$I = I(x + x) - I(x) = \left(\int_a^{x+x} f(x)dx\right) - \left(\int_a^x f(x)dx\right) =$$

$$= \left(\int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+x} f(x)dx\right) - \left(\int_a^x f(x)dx\right) = \int_x^{x+x} f(x)dx =$$

$$(\text{по теореме о среднем}) = f(\ )(x + x - x) = f(\ )x$$

1) По определению производной: $I(x)' = \frac{f(\ )x}{x} = f(\ ) = f(x)$

   Т.к. $x \to 0 \Rightarrow x + x \to x \Rightarrow f(\ ) \to f(x)$. Кроме того f(x) непрерывная функция. ч.т.д.

Формула Ньютона-Лейбница.

Итак, *значение определенного интеграла выражается разностью двух значений, при $x=b$ и при $x=a$, любой первообразной функции.*

308. Основная формула интегрального исчисления. Мы видели в **305**, что для непрерывной в промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

оказывается п е р в о о б р а з н о й функцией. Если $F(x)$ есть л ю б а я первообразная для $f(x)$ функция (например, найденная методами §§ 1 – 4 предыдущей главы), то **[263]**

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Постоянную C легко определить, положив здесь $x = a$, ибо $\Phi(a) = 0$; будем иметь

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \text{ откуда } C = -F(a).$$

Окончательно

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

ДРУГОЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ:

гом направлении. Заменив в основной формуле b на x, а $f(x)$ на $F'(x)$, можно написать ее в виде

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt.$$

Таким образом, с помощью предельного процесса (ибо определенный интеграл есть п р е д е л), по заданной производной $F'(x)$ «восстанавливается» первообразная функция $F(x)$.

ДРУГАЯ ЗАПИСЬ:+док во

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x)$$

Доказательство:

1) $I(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) + C$

2) $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0 \Rightarrow F(a) = -C$

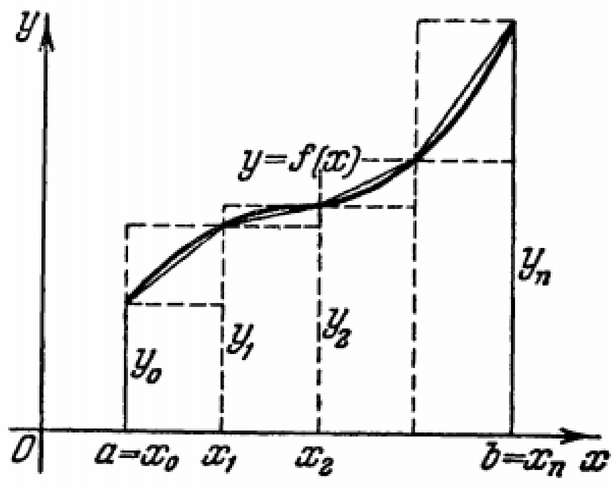
3) Теперь можно записать $\int\limits_a^x f(x)dx = F(x) + \mathrm{C} = F(x) - F(a)$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$ ч.т.д.

Билет №15.

Приближенное вычисление интегралов.
Формула трапеций. Формула Симпсона.

Правило прямоугольников и трапеций.



Прямоугольники:
Разбиваем интервал на n равных отрезков шириной $x = \frac{b-a}{n}$.
Строим прямоугольники. Чем больше n, тем выше точность.
$I_{н} \approx x(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ - высота в началах интервалов
$I_{к} \approx x(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ - высота в концах интервалов

Общ формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\,[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\dots+f(\xi_{n-1})],$$

Конкретные формулы:

Метод прямоугольников - метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, т.е. константу, на каждом элементарном отрезке.

Если отрезок является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по:

Формуле **левых прямоугольников**: $\int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)(b-a).$

Формуле **правых прямоугольников**: $\int_a^b f(x)\,dx \approx f(b)(b-a).$

Формуле **прямоугольников (средних)**: $\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$

Трапеции:

Просто берем другую точку в промежутке

На практике обычно берут $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$; если соответствующую среднюю ординату $f(\xi_i) = f(x_{i+1/2})$ обозначить через $y_{i+1/2}$, то формула перепишется в виде

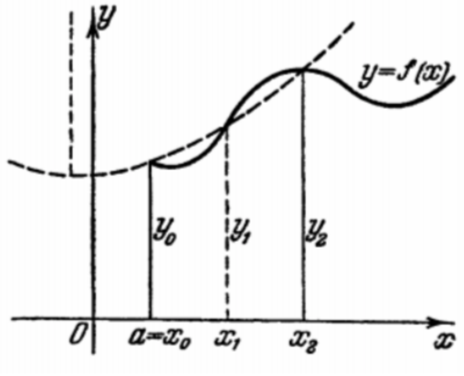
$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}\right). \quad (1)$$

Разбиваем интервал на n равных отрезков шириной $x = \frac{b-a}{n}$.

Строим прямоугольники. Чем больше n, тем выше точность.

$I \approx \frac{I_н + I_к}{2} = x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$

Метод Симпсона.



Разбиваем интервал на n(ЧЁТНОЕ) равных отрезков. Заменяем участок кривой на интервале $[x_0,\ x_2]$ участком параболы, которая проходит через начало, середину и конец интервала $\left[x_0,\ x_2\right]$. При этом ось параболы должна быть параллельна оси ординат. Чтобы подобрать такую параболу решаем систему уравнений и находим a, b, c:

$$y_0 = \ ax_0^2 + bx_0 + \ c$$

$$y_1 = \ ax_1^2 + bx_1 + \ c$$

$$y_2 = \ ax_2^2 + bx_2 + \ c$$

Дальше, считая определенными интегралами площадь под известной параболической трапецией и немного преобразовывая получившуюся формулу, приходим к следующему ответу:

$I_к \approx x(y_0 + \ 4y_1 + 2y_2 + \ ... + y_{n-1} + y_n)$ **– формула Симпсона**

БОЛЕЕ ПОДРОБНО:

324. Дробление промежутка интегрирования. При вычислении интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ можно поступить так. Разобьем сначала промежуток $[a, b]$ на некоторое число, n, равных промежутков

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1},\ x_n] \qquad (x_0 = a,\ x_n = b),$$

в связи с чем искомый интеграл представится в виде суммы

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Теперь же к каждому из этих промежутков применим параболическое интерполирование, т. е. станем вычислять интегралы (9) по одной из приближенных формул (4), (6), (8), ...

Легко сообразить, что, исходя из формул (4) или (6), мы таким путем вновь получим уже известные нам ф о р м у л ы п р я м о у г о л ь н и к о в и т р а п е ц и й, (1) и (2).

Применим теперь к интегралам (9) формулу (8); при этом, для краткости, положим, как и выше,

$$f(x_i) = y_i, \qquad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}, \qquad f(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2}.$$

Мы получим

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_0 + 4y_{1/2} + y_1),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_1 + 4y_{3/2} + y_2),$$

. . . .

. . . .

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n).$$

Наконец, складывая почленно эти равенства, придем к формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2})]. \tag{10}$$

Билет №16.

Несобственные интегралы. Типы. Признаки сходимости.

Несобственный интеграл от функции f(x) в интервале [a, беск.] называется предел интеграла $\int_a^{\eta} f(x)dx$

$\int_a^{беск} f(x)dx$ – несобственный интеграл.

Если предел существует, то интеграл называется сходящимся, иначе - расходящимся.

a

Предел этого интеграла (*конечный или бесконечный*) *при* $A \to +\infty$ *называют* *интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до* $+\infty$ *и* обозначают символом

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^{A} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл (1) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a, +\infty]$. Если же предел (1) бесконечен или вовсе не существует, то про интеграл говорят, что он расходится. В отличие от изученного ранее интеграла в собственном смысле или собственного интеграла, только что определенный интеграл (1) называется несобственным *.

Признаки сходимости.

1) Проверяется через формулу Ньютона-Лейбница. Если существует $[F(\ \ ) - F(a)]$, то сходится, иначе расходится.
2) $0 \le f(x) \le g(x)$, $\int_a^{беск} g(x)dx$ - сходится => $\int_a^{беск} f(x)dx$- сходится
3) $0 \le f(x) \le g(x)$, $\int_a^{беск} g(x)dx$ - расходится => $\int_a^{беск} f(x)dx$- расходится

4) $\int\limits_{a}^{\text{беск}} |f(x)|dx$ - сходится => $\int\limits_{a}^{\text{беск}} f(x)dx$- сходится. Тогда интеграл называется абсолютно сходящимся.

----000

Теорема 1. *Если хотя бы при $x \geqslant A$ $(A \geqslant a)$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ или, что то же, из расходимости $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$.*

Доказательство можно скопировать с доказательства теоремы 1 n° **366.**

Часто полезна следующая теорема, являющаяся следствием первой:

Теорема 2. *Если существует предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$, при $K < +\infty$, вытекает сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости первого интеграла, при $K > 0$, вытекает расходимость второго. [Таким образом, при $0 < K < +\infty$ оба интеграла сходятся или оба расходятся одновременно.]

Применяя к этой функции признак Больцано–Коши [58], можно условие существования несобственного интеграла представить в следующей форме:

Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечало такое число $A_0 > a$, чтобы при $A > A_0$ и $A' > A_0$ выполнялось неравенство*

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left| \int\limits_{a}^{A'} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{A} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{A}^{A'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

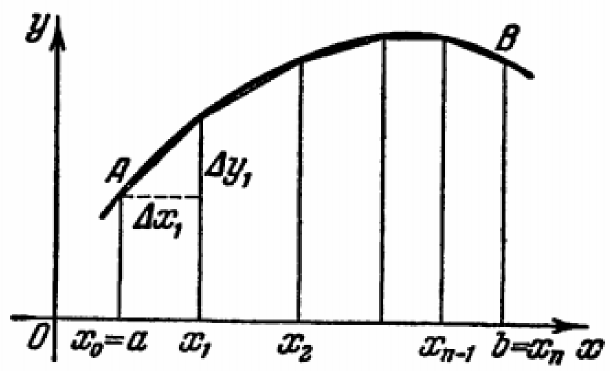
Этот критерий позволяет с легкостью установить такое предложение:

*Если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$, то * и подавно сходится $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.*

Билет №17.

Длина кривой. Вычисление длины кривой в декартовой и полярной системе

Длина кривой – предел, к которому стремиться длина вписанной в эту кривую ломаной, при неограниченном увеличении числа её сторон и при стремлении наибольшей из этих сторон к нулю.



ИЛИ

было установлено, что длина

$$\overset{\smile}{AM} = s = s(t)$$

есть дифференцируемая функция от t, производная которой выражается так:

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

или – короче –

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} \qquad (3)$$

[**248** (10)] и, очевидно, тоже непрерывна.

Второй подход к опред

330. Другой подход к определению понятия длины кривой и ее вычислению. При определении самого понятия длины непрерывной простой кривой (1) мы исходили из равенства (2). Докажем теперь, что – *в случае незамкнутой кривой – ее длина S является не только точной верхней границей для множества длин* $\{p\}$, *вписанных в кривую ломаных, но и попросту пределом для p – при условии, что стремятся к 0 длины всех сторон ломаной (p) (или, точнее, длина λ* наибольшей из этих сторон)*:

$$S = \lim_{\lambda^* \to 0} p. \tag{6}$$

Длина пространственной дуги

334. Длина дуги пространственной кривой. По отношению к простой пространственной кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

определение длины дуги может быть дано в таком же виде, как и для плоской кривой [**249**, замечание]. Здесь также для длины дуги получается формула, аналогичная (4),

$$s = \breve{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$$

Вычисление:

1) Пусть дана кривая y=f(x). Разобьём дугу на n частей с абсциссами
$x_0 = a,\ x_1, \ldots, x_n = b$
2) Проводим хорды и строим ломаную:
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} * \Delta x_i$$
Где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

3) По формуле Лагранжа: $f'(\ \ ) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, где $(x_i,\ x_{i-1})$

4) Тогда $L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'())^2} * \Delta x_i$

5) Переходя к пределу при условии что n->бесконечности, получим итоговую формулу:

$$L = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

В полярных коорд-х:

Наконец, случай полярного задания кривой

$$r = g(\theta) \qquad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta),$$

как известно, также приводится к параметрическому с помощью обычных формул перехода

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta;$$

роль параметра здесь играет θ. Для этого случая

$$S = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}\, d\theta. \qquad (4б)$$

Легко для этих двух частных случаев задания кривой написать и выражения для величины переменной дуги $\breve{AM}$, если M отвечает абсциссе x или полярному углу θ:

$$\breve{AM} = s = s(x) = \int_{x}^{x} \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx \qquad (5а)$$

или, соответственно,

$$\breve{AM} = s = s(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\, d\theta. \qquad (5б)$$

Билет №18.

Понятие площади. Свойства площади. Связь с интегралом. Площадь

поверхности вращения.

7 билет смотреть, тоже про площадь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ

Возьмем теперь произвольную фигуру (P) на плоскости, представляющую собой ограниченную и замкнутую область. Ее границу или контур (K) мы всегда будем себе представлять в виде замкнутой кривой (или нескольких таких кривых)*.

Станем рассматривать всевозможные многоугольники (A), целиком содержащиеся в (P), и многоугольники (B), целиком в себе содержащие (P) (рис. 14). Если A и B означают, соответственно, их площади, то всегда $A \leqslant B$. Множество чисел $\{A\}$, ограниченное сверху любым B, имеет точную верхнюю границу P_* [11], причем $P_* \leqslant B$. Точно так же множество чисел $\{B\}$, ограниченное снизу числом P_*, имеет точную нижнюю границу $P^* \geqslant P_*$. Эти границы можно было бы назвать первую – внутренней, а вторую – внешней площадью фигуры (P).

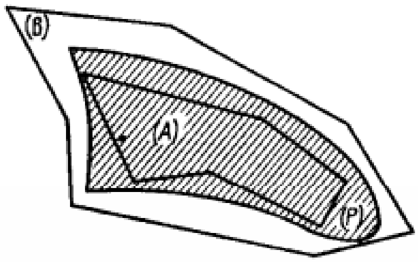


Рис. 14.

Если обе границы

$$P_* = \sup\{A\} \quad \text{и} \quad P^* = \inf\{B\}$$

совпадают, то общее их значение P называется площадью фигуры (P). В этом случае фигуру (P) называют *квадрируемой*.

Как легко видеть, *для существования площади необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие два многоугольника* (A) *и* (B), *что* $B - A < \varepsilon$.

Действительно, необходимость этого условия вытекает из основ-

Свойства:

Обладает аддитивностью

квадрируемость двух из этих трех фигур (P), (P_1), (P_2) *влечет за собой квадрируемость третьей, причем всегда*

$$P = P_1 + P_2, \tag{1}$$

С другой стороны, имеем одновременно

$$A_1 + A_2 = A \leqslant P \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

и

$$A_1 + A_2 \leqslant P_1 + P_2 \leqslant B_1 + B_2,$$

так что числа P и $P_1 + P_2$ содержатся между одними и теми же и притом произвольно близкими границами $A_1 + A_2$ и $B_1 + B_2$, следовательно, эти числа равны, ч. и тр. д.

Отметим, в частности, что отсюда $P_1 < P$, так что *часть фигуры имеет площадь, меньшую чем вся фигура.*

336. Площадь как предел. Условие квадрируемости, сформулированное в предыдущем n°, может быть перефразировано так:

1) *Для того чтобы фигура (P) была квадрируема, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности много-*

угольников $\{(A_n)\}$ и $\{(B_n)\}$ и соответственно, содержащихся в (P) и содержащих (P), площади которых имели бы общий предел

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \tag{2}$$

Этот предел, очевидно, и будет площадью фигуры (P).

Иногда вместо многоугольников выгоднее использовать другие фигуры, квадрируемость которых уже установлена:

2) *Если для фигуры (P) можно построить такие две последовательности квадрируемых фигур $\{(Q_n)\}$ и $\{(R_n)\}$, соответственно, содержащихся в (P) и содержащих (P), площади которых имеют общий предел*

$$\lim Q_n = \lim R_n = P, \tag{3}$$

то фигура (P) также квадрируема, причем упомянутый предел и будет ее площадью.

Это сразу вытекает из предыдущего утверждения, если заменить

Площадь в декартовых координатах:

За основную фигуру, площадь которой выражается одним интегралом, принимается криволинейная трапеция.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Чуть подробнее:

С этой целью разобьем промежуток $[a, b]$, как обычно, на части, вставив между a и b ряд точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x = b.$$

Обозначив через m_i и M_i, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в i-ом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, составим суммы (Д а р б у)

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Они, очевидно, представляют собой площади ступенчатых фигур, составленных, соответственно, из входящих и выходящих прямоугольников (см. рисунок). Поэтому

$$s < P < S.$$

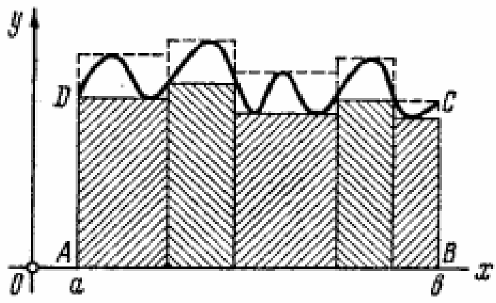


Рис. 18.

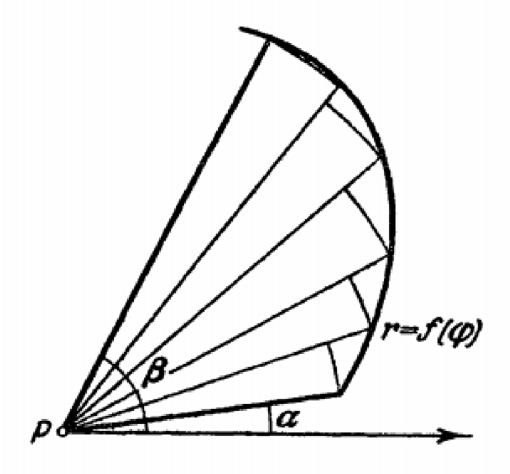
Но при стремлении к нулю наибольшей из разностей Δx_i обе суммы имеют своим пределом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$*, следовательно, ему и равна искомая площадь

$$P = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то её площадь считается вот так:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (t)'(t)dt$$

В полярных координатах.



1) Будем кривую дробить на сектора, с углами фi. Площадь каждого такого сектора равна $\frac{\varphi_i}{2}r^2$
2) Составим интегральную сумму:

$$S_n = \frac{1}{2}(f(\varphi_0)^2\left(\varphi_1 - \varphi_0\right) + \ ... \ + \frac{1}{2}(f(\varphi_{n-1})^2\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(\varphi_i)^2\Delta\varphi_i$$

3) Итого получается: $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$

Площадь поверхности вращения:

Возьмем на кривой AB в направлении от A к B ряд точек (см. рис. 34)

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n = B \qquad (19)$$

и рассмотрим ломаную $AA_1 \ldots A_{n-1}B$, вписанную в кривую. Станем вместе с кривой вращать вокруг оси x эту ломаную; она опишет некоторую поверхность, площадь которой мы умеем определять по правилам элементарной геометрии. Условимся под площадью поверхности, описанной кривой, разуметь предел P площади Q поверхности, описанной ломаною, при стремлении к нулю наибольшей из частичных дуг. Это определение площади поверхности вращения дает нам ключ к ее вычислению.

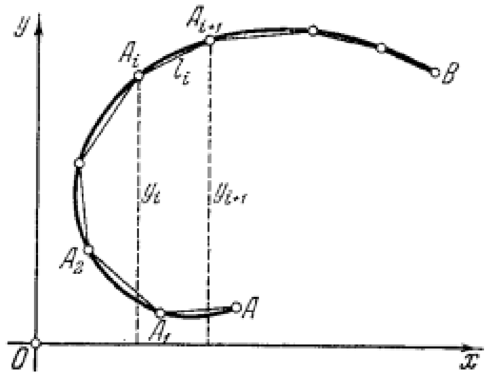


Рис. 34.

Мы уже знаем, что ряд точек (19) может быть получен, исходя из ряда возрастающих значений s, вставленных между 0 и S:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_i < s_{i+1} < \ldots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Каждое звено ломаной при вращении вокруг оси x будет описывать поверхность усеченного конуса*. Если обозначить ординаты точек A_i и A_{i+1} соответственно через y_i и y_{i+1}, а длину звена A_iA_{i+1} через l_i, то площадь поверхности, описываемой i-м звеном, будет

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Площадь же поверхности, описываемой всей ломаной линией, будет

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Продолжение ниже:

При дроблении кривой на все более и более мелкие части разность

$$S-\sum_{i=0}^{n-1} l_i,$$

по определению длины дуги, как предела периметра вписанной ломаной*, должна стремиться к нулю. Но тогда и $\tau \to 0$.

Оставшаяся сумма

$$\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i$$

* Это непосредственно следует из определения лишь для простой незамкнутой кривой, но затем легко получается и для простой замкнутой кривой, путем разложения на две незамкнутые кривые.

является интегральной суммой для интеграла

$$2\pi \int_0^S y\, ds,$$

который вследствие непрерывности функции $y = \Psi(s)$ существует, так что при $\max \Delta s_i \to 0$ сумма σ стремится к этому интегралу.

Мы получаем окончательно, что – при сделанных предположениях – площадь поверхности вращения существует и выражается формулой

$$P = 2\pi \int_0^S y\, ds = 2\pi \int_0^S \Psi(s)\, ds. \tag{20}$$

Билет №19.

<u>Интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход и дифференцирование под знаком интеграла.</u>

Пусть дана f(x,y) на области $G = \{(x, y)| a < x < b,\ c < y < d\}$.

Тогда функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ называется **интегралом зависящим от параметра.**

Свойства:

1) *Непрерывность.* Если f(x,y) непрерывна на G, то I(y) тоже непрерывна на отрезке [c,d].
2) *Дифференцирование под знаком интеграла.* На G непрерывна f(x,y) и её частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ Тогда $\frac{\partial I(y)}{\partial y} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\text{беск}} f(x, y)dx$**, зависящий от параметра y**, называют правильно сходящимся если можно указать такую положительную функцию $\varphi(x)$, что при всех рассматриваемых значениях x и y соблюдается неравенство $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ и несобственный интеграл сходится.

506. Предельный переход под знаком интеграла. Обращаемся теперь к рассмотрению интеграла (1), зависящего от параметра y, ограничиваясь вначале случаем к о н е ч н о г о промежутка $[a, b]$ и функции, интегрируемой в с о б с т в е н н о м с м ы с л е.

Предполагая, что область $\mathcal{Y}$ изменения параметра имеет точку сгущения y_0, поставим вопрос о п р е д е л е функции (1) при $y \to y_0$.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ при постоянном y интегрируема по x в $[a, b]$ и при $y \to y_0$ стремится к предельной функции* (2) *р а в н о м е р н о относительно x, то имеет место равенство*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx. \qquad (9)$$

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ при постоянном y н е п р е р ы в н а по x в $[a, b]$ и при возрастании y стремится к н е п р е р ы в н о й же предельной функции, м о н о т о н н о в о з р а с т а я, то справедлива формула* (9).

507. Дифференцирование под знаком интеграла. При изучении свойств функции (1), которая задана интегралом, содержащим параметр y, важное значение имеет вопрос о производной этой функции по параметру.

В предположении существования частной производной $f'_y(x, y)$ Лейбниц дал для вычисления производной $I'(y)$ правило, которое в обозначениях Лагранжа записывается так:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx, \tag{10}$$

или – если воспользоваться более выразительными обозначениями Коши –

$$D_y \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b D_y f(x, y)\,dx.$$

Если такая перестановка знаков производной (по y) и интеграла (по x) допустима, то говорят, что функцию (1) *можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.*

Самое вычисление производной по указанной формуле и получило название «правила Лейбница».

Теорема Леви.

Дана монотонно возрастающая последовательность функций $f_n \in L(X, \mu)$:

$f_n(x) \le f_{n+1}(x),\ n \in N,\ x \in X$. Если их интегралы ограничены по

совокупности $\int f(x) d\mu = \int f_n(x) d\mu$

Билет №20.

Криволинейный интеграл первого рода. Определение. Свойства. Сведение к определенному интегралу.

Криволинейный интеграл - интеграл, вычисляемый вдоль какой-либо кривой на плоскости или в пространстве. (википедия)

Погрешность этого последнего, связанная с сделанным выше приближенным допущением, будет стремиться к нулю, если длины σ_i всех участков стремятся к нулю. Таким образом, обозначая через λ наибольшую из длин σ_i, для получения точной формулы остается лишь перейти к пределу:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

Станем же изучать вообще пределы этого рода и, отвлекаясь от рассмотренной задачи, возьмем произвольную «функцию точки» $f(M) = f(x, y)$, заданную вдоль непрерывной простой спрямляемой кривой (K)*, и повторим указанный процесс: разбив кривую (K) на элементарные дуги $A_i A_{i+1}$ и выбрав на них произвольно по точке $M_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим значения $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ в них и составим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

она представляет собой также своего рода «интегральную сумму».

Аналогичный процесс может быть применен и в случае замкнутой кривой, если за точку $A_0 (A_n)$ выбрать любую ее точку, а остальные точки A_i расположить в соответствии с тем или другим направлением на кривой [**246**].

*Если при стремлении $\lambda = \max \sigma$ к нулю интегральная сумма имеет определенный конечный предел I, не зависящий ни от способа дробления кривой (K), ни от выбора точек M_i на участках $A_i A_{i+1}$, то он называется криволинейным интегралом (первого типа**) от функции $f(M) = f(x, y)$, взятым по кривой или по пути (K),* и обозначается символом

$$I = \int_{(K)} f(M)\, ds = \int_{(K)} f(x, y)\, ds \tag{1}$$

Свойства = свойствам определенного интеграла. (Билет 10)

Сведение к обычному интегралу:

544. Сведение к обыкновенному определенному интегралу. Предположим, что на кривой (K) произвольно установлено направление (одно из двух возможных), так что положение точки M на кривой может быть определено длиной дуги $s = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая (K) параметрически выразится уравнениями вида:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S),$$

а функция $f(x, y)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(x(s), y(s))$ от переменной s.

Если через s_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ обозначить значения дуги, отвечающие выбранным на кривой точкам деления A_i, то, очевидно, $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$. Обозначив через $\bar{s}_i$ значения s, определяющие точки M_i (причем, очевидно, $s_i \leqslant \bar{s}_i \leqslant s_{i+1}$), видим, что интегральная сумма для криволинейного интеграла

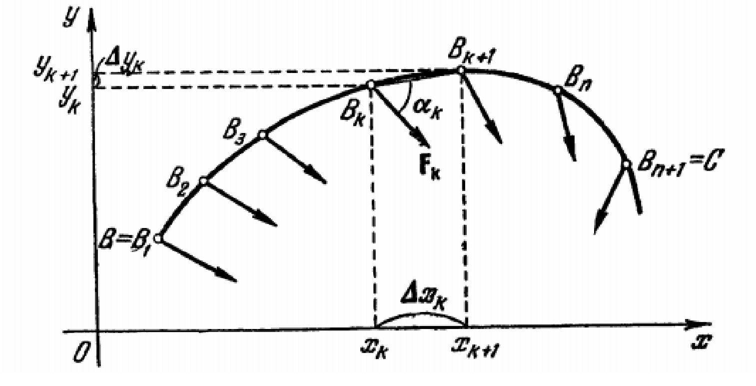
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i),\ y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i$$

является в то же время интегральной суммой для обыкновенного определенного интеграла, так что сразу имеем:

$$\int_{(K)} f(M)\,ds = (\mathrm{R}) \int_0^S f(x(s),\ y(s))\,ds\ ^{**}, \qquad (3)$$

причем существование одного из интегралов влечет за собой существование другого.

Пример:



1) Запишем F(x,y)=P(x,y)*i + Q(x,y)*j -означает что имеет значение куда приложена сила F. P и Q – проекции F на Ox и Oy соответственно (да они тоже функции).
2) Работа на одном участке разбиения = $|F(x, y)| * \left|B_k B_{k+1}\right| * cos\alpha_k = P(x, y)\Delta x_k * i + Q(x, y)\Delta y_k * j$
3) Вся работа(на участках) $A_n = \sum_{k=1}^{n} P(x, y)\Delta x_k * i + Q(x, y)\Delta y_k * j$
4) Используя определение криволинейного интеграла:
5) $A = \sum_{k=1}^{n} P(x, y)\Delta x_k * i + Q(x, y)\Delta y_k * j = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Чтобы перейти из криволинейного интеграла по линии x=x(t), y=y(t) к удобному определенному интегралу, нужно заменить все иксы и игреки в интеграле на соответствующие выражения через t. Соответственно надо поменять и dx dy. Пределы интеграла – значение параметра, соответствующие началу и концу кривой.

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t1}^{t2}[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Криволинейный интеграл I рода– предел n-ой интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta s = \int_L f(x, y)ds$, при стремлении к нулю наибольшего участка разбиения кривой.

Чтобы перейти из криволинейного интеграла по линии x=x(t), y=y(t) к удобному определенному интегралу, нужно заменить все иксы и игреки в интеграле на соответствующие выражения через t.

$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ Интервалы интегрирования = интервалы изменения t на линии.

Свойства = свойствам определенного интеграла. (Билет 10)

§ 1. Криволинейные интегралы первого типа

543. Определение криволинейного интеграла первого типа. Для того чтобы естественным путем прийти к этому новому понятию, рассмотрим одну механическую задачу, которая к нему приводит.

Пусть на плоскости дана непрерывная простая * спрямляемая кривая (K) (рис. 1), вдоль которой расположены массы, причем известна их линейная плотность $\rho(M)$ во всех точках M кривой. Требуется определить массу m всей кривой (K).

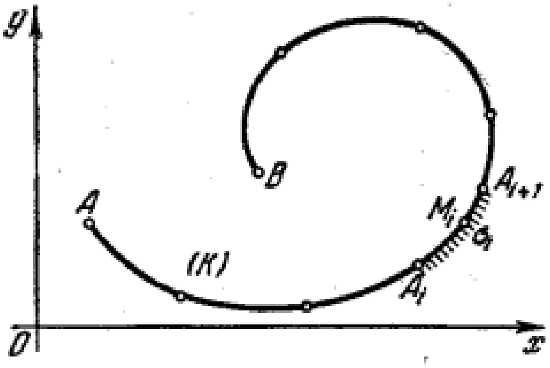


Рис. 1.

С этой целью между концами A и B кривой вставим произвольно ряд точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (A_0 и A_n для симметрии обозначений отождествляются с A и B). Мы считаем, что точки эти перенумерованы в направлении от A к B [см. **246**], хотя ничто не мешало бы нам нумеровать их и в обратном направлении.

Взяв какую-нибудь точку M_i на дуге $A_i A_{i+1}$ кривой, вычислим плотность $\rho(M_i)$ в этой точке. Приближенно считая, что такова же плотность во всех точках этого участка, и обозначая длину дуги $A_i A_{i+1}$ через σ_i, для массы m_i этой дуги будем иметь приближенное выражение

$$m_i = \rho(M_i)\sigma_i,$$

а для всей искомой массы — выражение

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

Билет №21.

Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Свойства.
Сведение к определенному интегралу.

Три интегральных суммы криволинейного интеграла второго рода:

$$\sigma_1(P, M, N) = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

$$\sigma_2(Q, M, N) = \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)(y(t_k) - y(t_{k-1}))$$

$$\sigma_3(R, M, N) = \sum_{k=1}^{n} R(N_k)(z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

Если существуют пределы при стремлении к нулю наибольшего участка разбиения кривой L от всех трёх интегральных сумм, то говорят, что функции P, Q, R интегрируемы в смысле криволинейного интеграла второго рода по кривой L а **сами пределы называют криволинейными интегралами второго рода** функций P, Q, R по кривой L и обозначают их

$$\int_L P(x, y, z) = I_1$$

$$\int_L Q(x, y, z) = I_2$$

$$\int_L R(x, y, z) = I_3$$

Их сумму называют **криволинейным интегралом второго рода** (вектор-) функции f(x,y,z) ={P(x,y,z), Q(x,y,z),R(x,y,z)} :

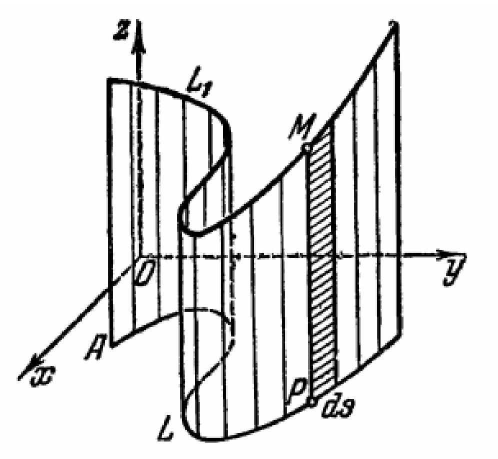
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Свойства как у I рода. **Замечание. Для криволинейных интегралов второго рода несправедливы свойство монотонности, оценка модуля и теорема о среднем.**

Пояснение от Егора: насколько я понял это тот же криволинейный интеграл I рода только для прямой в трёхмерном пространстве.

Билет №22.

Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов. Связь
криволинейных интегралов I и II рода.



Дана цилиндрическая поверхность G. Направляющая этой поверхности - кривая L в плоскости xOy. Образующие G перпендикулярны xOy. Вычислим площадь Q части(вся штука что на рисунке а не только закрашенная часть) поверхности G, лежащей между кривой L и некой L1, которая выше L.

1) Выберем на L1 точку M.
2) Аппликата M(координата по Oz) – функция координат точки P на L: z=f(x,y)
3) Отложим от P маленький кусочек дуги ds на кривой L. Ему соответствует площадь ⊗q прямоугольника с шириной ds и высотой = аппликанте M.
4) Значит дифференциал искомой величины: $dq = f(x,y)ds$
5) Проинтегрируем данное выражение по линии L и получим площадь:

$$Q = \int_L f(x,y)ds$$

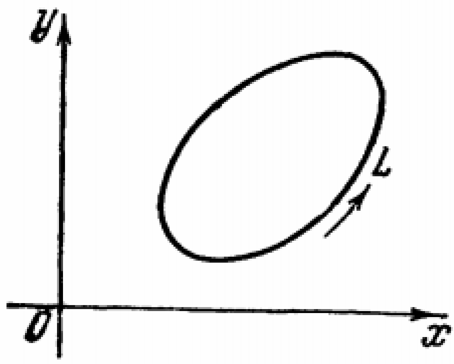
По сути мы протаскиваем этот прямоугольник вдоль всей L и находим площадь.

Связь I и II рода.(Фихтенгольц)

1) Пусть AB = гладкая кривая.
2) Выберем в качестве параметра дугу s=AM: x=x(s), y=y(s)
3) Производные x'(s) и y'(s) - непрерывны.
4) a - угол между Ox и касательной, направленной в сторону

Билет №23.

Интеграл по замкнутому контуру.
Зависимость интеграла от пути.

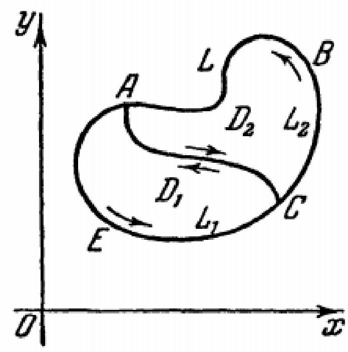


Интеграл по замкнутому контуру - интеграл, вычисляемый вдоль какой-либо замкнутой кривой на плоскости или в пространстве.
Особенности:

1) Выбор начальной точки интегрирования не имеет значения.
2) Направление обхода, при котором область, ограниченная контуром остаётся слева называется положительным, а если справа-отрицательным.

Теорема.

Если область D ограниченную замкнутой кривой L, разбить на две части, криволинейный интеграл по всей линии L равен сумме интегралов взятых в том же направлении по линиям L1 и L2, ограничивающих области D1 и D2.



Билет №24.

<u>Точный дифференциал. Признаки.</u>

Егор: Вроде говоришь тупо про 23 билет. Так Лобанов сказал

Билет №25.

Первообразная функции нескольких переменных.
Вычисление через определенных интеграл.

(сам давал определение по аналогии с обычной первообразной)
Первообразная функции нескольких переменных– функция, полная производная которой равна данной функции.

$$\frac{dF(x,y)}{dxdy} = f(x,y)$$

F(x,y) – первообразная f(x,y)

Вычисляется с помощью n-кратного интеграла

$$\iint f(x,y)dxdy = \int dx \int f(x,y)dy = F(x,y) + C$$

Билет №26.

Двойной и тройной интеграл. Определение. Свойства.

Двойной интеграл от функции f(x,y) - предел, к которому стремиться n-я интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\Delta\sigma_i$, при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)d\sigma$$

Теорема о существовании двойного интеграла.

Если функция f(x,y) непрерывна на области D, ограниченной замкнутой линией, то её n-я интегральная сумма стремится к пределу, при условии стремления к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел является двойным интегралом и не зависит от способа разбиения области D на частичные области и от выбора в них точек Pi.

Свойства как у обычного интеграла.(Билет №1)

С помощью двойных интегралов можно находить объёмы сложных фигур.

Тройной интеграл от функции f(x,y,z) - предел, к которому стремиться n-я интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i, z_i)\Delta v_i$, при стремлении к нулю наибольшего объёма частичных пространственных областей.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i, z_i)\Delta v_i = \iiint_\Omega f(x, y, z)dv$$

Дополнительные свойства:

1) Если подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x,y,z) \le M$, то $mV \le \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv \le MV$, где V-объём ^
2) Тройной интеграл равен произведению подынтегральной функции в некоторых точках и объёма пространственной области.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = f(,,) * V$$

Билет №27(дорабатываю)

Приведение двойного интеграла к повторному.

614. Приведение двойного интеграла к повторному. Ограничимся сначала предположением, что функция $f(x, y)$ неотрицательна. Если эта функция задана в неограниченной области любой формы, то, полагая ее дополнительно вне этой области равной нулю, всегда можно свести дело к случаю неограниченной же прямоугольной области. Пусть, скажем, речь идет о бесконечном в одном направлении прямоугольнике $[a, b; c, +\infty]$ (a, b, c — конечные числа, причем $b > a$). Будем предполагать, что в каждом конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$ (при любом $d > c$) существуют как двойной интеграл, так и простой интеграл по y — оба в собственном смысле, так что [**594**] имеет место формула

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f\,dy. \tag{7}$$

Желая установить подобную же формулу для бесконечного прямоугольника, т. е. для случая $d = +\infty$, предположим, что сходится повторный интеграл

$$I = \int_a^b dx \int_c^{\infty} f\,dy.$$

Так как при любом $d > c$ имеем

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy \le I,$$

то по сказанному в **612** отсюда уже следует сходимость двойного интеграла

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy = \lim_{d\to\infty} \iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy, \tag{8}$$

который, очевидно, не превосходит I. Остается лишь доказать, что на деле двойной интеграл равен I.

Если интеграл $\int_c^{\infty} f\,dy$ представляет собой функцию от x, интегрируемую в собственном смысле, следовательно, ограниченную некоторой постоянной L, то и подавно

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \le L.$$

Билет №28

Формула Грина.

Если функция P(x, y) и Q(x, y) непрерывны вместе со своим частными производными первого порядка в области D, то имеет место формула

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{L} P\, dx + Q\, dy,$$

где L- граница области D и интегрирование вдоль L производится в положительном направлении.

Билет №29

Замена переменных в кратных интегралах.

Общее правило: **за u всегда обозначается многочлен**

Пример 5

Найти неопределенный интеграл.

$$\int (x-2)e^{2x}dx$$

Решение:

$$\int (x-2)e^{2x}dx = (*)$$

Используя знакомый алгоритм, интегрируем по частям:

$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'dx = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x\cos 6x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos 6x dx \Rightarrow v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C, \text{ где } C = const$$

если что билет 13

Билет №30

Объем.Определение.Свойства.Вычисление через кратные интегралы.

Объем тела вращения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

340. Определение понятия объема. Его свойства. Наподобие того, как в **335**, исходя из понятия площади многоугольника, было установлено понятие площади для произвольной плоской фигуры, мы сейчас дадим определение объема тела, опираясь на объем многогранника.

Итак, пусть дано произвольной формы тело (V), т. е. ограниченная замкнутая область в трехмерном пространстве. Границей (S) тела пусть служит замкнутая поверхность* (или несколько таких поверхностей).

Мы будем рассматривать многогранники (X) объема X, целиком содержащиеся в нашем теле, и многогранники (Y) объема Y, содержащие в себе это тело. Существует всегда точная верхняя граница V_* для X и точная нижняя граница V^* для Y, причем $V_* \leqslant V^*$; их можно было бы назвать, соответственно, в н у т р е н н и м и в н е ш н и м о б ъ е м а м и т е л а.

Если обе границы

$$V_* = \sup\{X\} \quad \text{и} \quad V^* = \inf\{Y\}$$

совпадают, то их общее значение V называется о б ъ е м о м тела (V).

В этом случае тело (V) иногда называют *к у б и р у е м ы м.*

СВОЙСТВА:

И здесь легко видеть, что *для существования объема необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлись такие два многогранника* (X) *и* (Y), *для которых* $Y - X < \varepsilon$.

Далее:

Если тело (V) *разложено на два тела* (V_1) *и* (V_2), *то из существования объема для двух из этих трех тел вытекает существование объема для третьего. При этом*

$$V = V_1 + V_2,$$

т. е. и объем обладает свойством аддитивности.

Легко перефразировать для объемов и те предложения 1), 2), 3), которые в **336** были доказаны для площадей.

1) *Для того чтобы тело* (V) *имело объем, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности, соответственно, входящих и выходящих многогранников* $\{(X_n)\}$ *и* $\{(Y_n)\}$, *объемы которых имели бы общий предел*

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

Этот предел и будет объемом тела (V).

Полезно отметить и такое предложение, где вместо многогранников фигурируют произвольные тела, заведомо имеющие объемы.

2) *Если для тела* (V) *можно построить такие две последовательности, соответственно, входящих и выходящих тел* $\{(T_n)\}$ *и* $\{(U_n)\}$, *которые имеют объемы, причем эти объемы стремятся к общему пределу*

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

то и тело (V) *имеет объем, равный упомянутому пределу.*

ПЛОШАДЬ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛ:

перпендикулярными к оси x. Допустим, что все эти сечения квадрируемы, и пусть площадь сечения, отвечающего абсциссе x, – обозначим ее через $P(x)$ – будет непрерывной функцией от x (для $a \leqslant x \leqslant b$).

Если спроектировать (без искажения) два подобных сечения на какую-либо плоскость, перпендикулярную к оси x, то они могут либо содержаться одно в другом (как на рис. 27, *а*), либо частично одно на другое налегать или лежать одно вне другого (см. рис. 27, *б*, *в*).

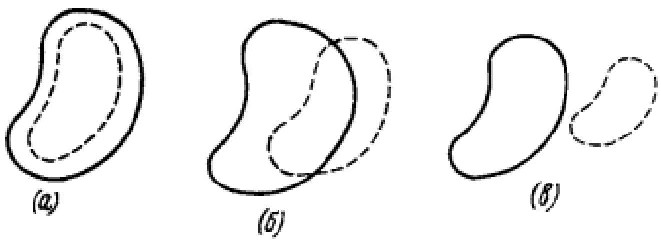


Рис. 27.

Мы остановимся сначала на том случае, когда два различных сечения, будучи спроектированы на плоскость, перпендикулярную к оси x, оказываются всегда содержащимися одно в другом.

В этом предположении можно утверждать, что тело (V) имеет объем, который выражается формулой

$$V = \int_a^b P(x)\,dx. \tag{15}$$

Билет №31

Формула Гаусса-Остроградского.

Фóрмула Гаусса — Остроградского связывает поток непрерывно-дифференцируемого векторного поля через замкнутую поверхность и интеграл от дивергенции этого поля по объёму, ограниченному этой поверхностью. Формула применяется для преобразования объемного интеграла в интеграл по замкнутой поверхности и наоборот.

Пусть тело V ограничено замкнутой поверхностью S. Тогда для любого векторного поля F выполняется равенство

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint\limits_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\,dS,$$

то есть интеграл от дивергенции векторного поля F , распространённый по объёму V, равен потоку вектора через поверхность S.

Билет №32

Поток векторного поля через замкнутую поверхность.

Если в каждой точке P области D задан вектор, то будем говорить что это - ***векторное поле.***

Поток вектора изнутри замкнутой поверхности равен тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля.

Определение. *Дивергенцией,* или *расходимостью,* векторного поля $\mathbf{A}(P)$ в точке P называется предел отношения потока вектора через поверхность, окружающую точку P, к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку P.

Дивергенцию поля обозначают символом $\operatorname{div}\mathbf{A}(P)$. Таким образом,

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(P) = \lim \frac{\oiint\limits_S A_n(P)\,d\sigma}{V},$$

Вообще в векторном анализе и в его приложениях интегралы по замкнутым поверхностям и по замкнутым контурам принято обозначать соответственно символами $\oiint\limits_S$ и $\oint\limits_L$.

Определение. *Потоком вектора* через поверхность называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности:

$$K = \iint\limits_S \mathbf{A}(P)\,\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Билет №33

Теорема Стокса.

Теорема Стокса — одна из основных теорем дифференциальной геометрии и математического анализа об интегрировании дифференциальных форм, которая обобщает несколько теорем анализа.

Пусть на ориентируемом многообразии M размерности n заданы ориентируемое p-мерное подмногообразие σ (Сигма) и дифференциальная форма ω (Омега) p-1 класса C^1 $(1 \leqslant p \leqslant n)$. Тогда, если граница подмногообразия $\partial\sigma$ положительно ориентирована, то

$$\int\limits_{\sigma} d\omega = \int\limits_{\partial\sigma} \omega,$$

где $d\omega$ обозначает внешний дифференциал формы ω.

Билет №34

Критерии потенциальности векторного поля

Если в каждой точке P области D задан вектор, то будем говорить что это - ***векторное поле***

Необходимым условием потенциальности векторного поля в трёхмерном пространстве является равенство нулю ротора поля

Пояснение: Если **v**(x,y,z) - поле скорости движения газа, **rot v** - вектор, пропорциональный вектору угловой скорости очень маленькой и легкой пылинки (или шарика), находящегося в потоке и увлекаемого движением газа

Вычисление ротора - $\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F}$ (оператор набла на поле F)

Векторное поле $\bar{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$ **является потенциальным, если оно представляет собой поле градиентов** некоторого скалярного поля $u = u(x;y;z)$. Функцию $u = u(x;y;z)$ называют *потенциальной функцией* или просто *потенциалом*.

Пример: в физике, имеющей дело с силовыми полями, условие потенциальности силового поля можно представить как требование равенства нулю работы при мгновенном перемещении частицы, на которую действует поле, по замкнутому контуру. Например гравитационное поле является потенциальным.

Хз нужно ли это. Первое условие выше не является достаточным — если рассматриваемая область пространства не является односвязной, то скалярный потенциал может быть многозначной функцией.

Многозна́чная фу́нкция — обобщение понятия функции, допускающее наличие нескольких значений функции для одного аргумента

Односвязное пространство — линейно связное топологическое пространство, в котором любой замкнутый путь можно непрерывно стянуть в точку. Пример: сфера односвязна, а поверхность тора не односвязна, потому что окружности на торе, нельзя стянуть в точку.

Билет №35

Отыскание потенциала для заданного векторного поля.

2) Поскольку поле потенциально, оно является градиентом некоторого скалярного поля $U(M)$, т. е. $\vec{a}(M) = grad\,U(M)$. Скалярное поле $U(M)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$. Его полный дифференциал задается выражением $dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$, в котором a_x, a_y, a_z – координаты векторного поля $\vec{a}(M)$. Задача нахождения потенциала сводится к нахождению функции трех переменных по ее полному дифференциалу. Для этого следует найти криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования

$$U(M) = \int\limits_{M_0}^{M} dU + C = \int\limits_{M_0}^{M} a_x dx + a_y dy + a_z dz + C,$$

где $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$ – начальная точка, $M = M(x, y, z)$ – конечная точка пути интегрирования.

Билет №36

Соленоидальные векторные поля.

1) Векторное поле для всех точек которого дивергенция равна 0 называется соленоидальным.

2)Векторное поле называется **соленоидальным** или **вихревым**, если через любую замкнутую поверхность *S* его поток равен нулю.

Силовые линии такого поля не имеют ни начала, ни конца, и являются замкнутыми

Пример:
Магнитное поле **всегда** является вихревым, и его силовые линии всегда замкнуты

Дивергенция

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(здесь **F** — обозначено некое векторное поле с декартовыми компонентами F_x, F_y, F_z):

Это же выражение можно записать с использованием оператора набла

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

С точки зрения физики (и в строгом смысле, и в смысле интуитивного физического образа математической операции) дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства (точнее достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля:

div > 0 — точка поля является источником;

div < 0— точка поля является стоком;

div = 0 — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.