Applied Mathematics

Laboratory work №2

Simplex method for solving linear programming problems

Author: Artyom Fadeyev, Sergo Elizbarashvili

1 Матричные игры

Игра – это идеализированная математическая модель колективного поведения нескольких лиц, интересы которых различны, что приводит к конфликту.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, в которых участники принимают решения, которые влияют на их выигрыш или проигрыш.

Цель теории игр – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта, которые позволят им достичь наибольшего выигрыша (определить оптимальную стратегию).

Ходы:

1. **Личные** – разумное поведение участника игры, которое позволяет ему достичь наибольшего выигрыша.

2. **Случайные** – рандомные действия, которые принимает каждый игрок в отдельности.

Стратегия – совокупность правил, по которым игрок будет действовать при каждом личном ходе, в зависимости от ситуации в игре.

Оптимальная стратегия – стратегия, которая обеспечивает игру максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от стратегии соперника.

Матричная игра – конечная парная игра с нулевой суммой, то есть в ней конечное количество ходов, два игрока и выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Выигрыш(проигрыш) выражается численно. В такой игре целью одного игрока будет максимизировать свой выигрыш, целью другого - минимизировать проигрыш.

Пусть у игрока A есть n стратегий, а у игрока B есть m стратегий. Тогда матрица игры имеет размер $n \times m$.

	B_i	$\dots$	B_m
A_j	a_{ij}	$\dots$	a_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	a_{nj}	$\dots$	a_{nm}

Таблица 1: Матрица игры

Если такая таблица задана, то игра приведена к матричной форме. В некоторых заданиях требуется работать с уже приведенной формой.

1.1 Maximin-стратегия

Первая из возможным стратегий - придерживаться принципа **максимин-стратегии**: первый игрок выбирает стратегию, при которой он получит максимальный из минимальных выигрышей, второй выбирает минимальный из максимальных проигрышей.

Первое значени называется **нижней ценой игры**, а второе - **верхней ценой игры**. Если они равны, то матрица содержит **седловую точку**.

Если каждый из противников применяет одну и ту же стратегию, то игра проходит в **чистой стратегии**.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии, называется **смешанной стратегией** игрока.

Задание смешанной стратегии состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Частный случай: если все вероятности, кроме одной, равны нулю, то смешанная стратегия превращается в чистую.

Пара стратегий (A_i, B_j) называется **равновесной**, если никому из игроков не выгодно изменить свою стратегию.

Если первый игрок применяет смешанную стратегию, то средний выигрыш первого игрока равен:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j$$

Ожидаемый проигрыш второго игрока равен той же величине.

Если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен руководствоваться теми же принципами максимина.

Формируя стратегию, первый игрок A при которой он получит максимальный из минимальных выигрышей, второй игрок B выбирает минимальный из максимальных проигрышей.

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j = v_A$$

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j = v_B$$

Основная теорема матричных игр – любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Следовательно, любая матричная игра имеет цену v. Цена игры v называется – средним выигрыш, приходящиймся на одну партию $\rightarrow$ всегда удовлетворяет условию $v_l \leq v \leq v_r$.

1.2 Перевод матричной игры в эквивалентную задачу линейного программирования

Предварительно нужно убедиться, что все элементы матрицы положительны. Чтобы этого добиться, можно прибавить необходимое число C, тогда цена игры увеличится на C, а оптимальные решения не изменятся.

Найдем смешанную стратегию игрока A. Предположим, что игрок B применяет только чистые стратегии. В каждом случае выигрыш игрока A будет не меньше чем v.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \dots + a_{1m}p_m \geq v \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{2m}p_m \geq v \\ \dots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \dots + a_{nm}p_m \geq v \end{cases}$$

Пусть $x_i = \frac{p_i}{v}$, тогда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \geq 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \geq 1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \geq 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Так как игрок A стремится максимизировать свой выигрыш, то можем сформулировать задачу линейного программирования:

Найти значения x, такие что удовлетворяют системе ограничений и обращаются в минимум такую целевую функцию:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

Из решения найдем цену игры и оптимальную стратегию игрока A по формулам:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

$$p_i = x_i \cdot v, \forall i$$

Аналогично можно найти оптимальную стратегию игрока B, но неравенства будут иметь обратный знак, а целевую функцию нужно будет максимизировать. Также матрица коэффициентов будет транспонированной. Такая задача называется *двойственной*.

2 Решение задач

2.1 Задача 1

1. Где строить? Две конкурирующие крупные торговые фирмы F_1 и F_2, планируют построить в одном из четырех небольших городов G_1, G_2, G_3, G_4, лежащих вдоль автомагистрали, по одному универсаму. Взаимное расположение городов, расстояние между ними и численность населения показаны на следующей схеме:

140 км	30 км	40 км	50 км	150 км
	G_1	G_2	G_3	G_4
Число покупателей	30 тыс	50 тыс	40 тыс	30 тыс

Доход, получаемый каждой фирмой, определяется численностью населения городов, а также степенью удаленности универсамов от места жительства потенциальных покупателей. Специально проведенное исследование показало, что доход универсамов будет распределяться между фирмами так, как это показано в следующей таблице:

Условие	F_1	F_2
Универсам фирмы F_1 расположен от города ближе универсама фирмы F_2	75%	25%
Универсамы обеих фирм расположены на одинаковом расстоянии от города	60%	40%
Универсам фирмы F_1 расположен от города дальше универсама фирмы F_2	45%	55%

Например, если универсам фирмы F_1 расположен от города G_1 ближе универсама фирмы F_2, то доход фирм от покупок, сделанных жителями данного города, распределится следующим образом: 75% получит F_1, остальное – F_2.

а) Представьте описанную ситуацию, как игру двух лиц;

б) В каких городах фирмам целесообразно построить свои универсамы?

Предположим, что компания F_1 – первый игрок, а F_2 – второй.

Стратегии каждого из игроков: построить универсам в городе $G_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Составим матрицу, в которой каждый элемент таблицы - количество тысяч человек, которые будут ходить в магазин первого игрока, если построить магазин первого игрока в городе G_i, а магазин второго игрока в городе G_j.

Рассмотрим ситуацию, когда первый игрок построит магазин в городе G_1, а второй игрок в городе G_2.

Посчитаем сколько людей будут ходить в магазин первого игрока:

$$30 * 0.75 + 50 * 0.45 + 40 * 0.45 + 30 * 0.45 = 76.5 \text{ тыс. человек}$$

Чтобы посчитать сколько людей будут ходить в магазин второго игрока нужно от 150 (население всех городов) отнять полученное значение для первого игрока.

Аналогично считаем значения для всех остальных ситуаций, получаем следующую платёжную матрицу:

	G_1	G_2	G_3	G_4	min
G_1	90	76.4	91.5	91.5	76.5
G_2	103.5	90	91.5	103.5	90
G_3	88.5	88.5	90	103.5	88.5
G_4	88.5	76.5	76.5	90	76.5
max	103.5	90	91.5	103.5	

Данная игра проходит в чистых стратегиях (противники применяют одну и ту же стратегию), значит она имеет седловую точку.

Найдем её используя принципы минимакса и максимина:

$$\max\min = \max(76.5, 90, 88.5, 76.5) = 90$$

$$\min\max = \min(103.5, 90, 91.5, 103.5) = 90$$

Значит седловая точка игры - (G_2, G_2).

Следовательно обоим игрокам выгодно построить магазин в городе G_2.

2.2 Задача 2

2. Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй - 68 т. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить 10 т в час, а на 2-ой - 12 т в час. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке 8 руб., на второй - 7 руб., вторым погрузчиком на первой площадке - 12 руб., на второй - 13 руб. Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Пусть x_{ij} – объем работы, выполненный i-м погрузчиком на j-м объекте.

Тогда получаем итоговую стоимость работ двух погрузчиков:

$$F = 8x_{11} + 7x_{12} + 12x_{21} + 13x_{22} \to \min$$

При этом имеем слудующие ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 68 \\ \frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{12}}{12} \leqslant 24 \\ \frac{x_{21}}{13} + \frac{x_{22}}{13} \leqslant 24 \\ \frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{21}}{13} \leqslant 24 \\ \frac{x_{12}}{12} + \frac{x_{22}}{13} \leqslant 24 \end{cases} \to \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 68 \\ 6x_{11} + 5x_{12} \leqslant 1440 \\ x_{21} + x_{22} \leqslant 312 \\ 13x_{11} + 10x_{21} \leqslant 3120 \\ 13x_{12} + 12x_{22} \leqslant 3744 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \ \forall i, j$$

После решения задачи симпекс-методом получаем следующие значения:

$$\begin{cases} x_{11} = \frac{550}{3} \\ x_{12} = 68 \\ x_{21} = \frac{140}{3} \\ x_{22} = 0 \end{cases} \quad F = \frac{7508}{3}$$

2.3 Задача 3

3. При составлении суточного рациона кормления скота используют сено и силос. Рацион должен обладать определенной питательностью и содержать белка не менее 1 кг, кальция не менее 100 г и фосфора не менее 80 г. При этом количество питательного рациона должно быть не менее 60 кг. Содержание питательных компонентов в 1 кг сена и силоса приведено в следующей таблице. В ней указана также стоимость единицы того или иного корма. Требуется определить оптимальный суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальную стоимость корма.

Название ингредиента	Норма (г)	Содержание ингредиента в 1 кг корма (г/кг)	
		Сено	Силос
Белок	1000	40	10
Кальций	100	1,25	2,5
Фосфор	80	2	1
Стоимость ед. корма (ден. ед.)		12	8

Пусть x_1 – количество кг сена, входящее в суточный рацион, x_2 – количество кг силоса соответственно.

Тогда функция для расчета стоимости корма имеет вид:

$$F = 12x_1 + 8x_2 \to \min$$

При этом имеем следующие ограничения:

$$\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geqslant 1000 \\ 1.25x_1 + 2.5x_2 \geqslant 100 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 80 \\ x_1 + x_2 \geqslant 60 \end{cases} \to \begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geqslant 1000 \\ 5x_1 + 10x_2 \geqslant 400 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 80 \\ x_1 + x_2 \geqslant 60 \end{cases}$$

После решения задачи симпекс-методом получаем следующие значения:

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 40 \end{cases} \quad F = 560$$

2.4 Задача 4

4. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

Чтобы получить матрицу выигрышей для первого игрока, необходимо транспонировать матрицу его проигрышей.

Тогда получаем:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Используем симплекс-метод:

1.
$$F(x) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 1 \end{cases}$$

2.
$$F(x) = x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 1 \end{cases}$$

Получаем:

1. $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{1}{4}, F(x) = \frac{3}{8}$
2. $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{1}{4}, F(x) = -\frac{3}{8}$

Откуда цена игры: $v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$

Оптимальная стратегия первого игрока:

1. $p_i = x_i * v = \frac{1}{8} * \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$
2. $p_i = x_i * v = \frac{1}{4} * \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

Второй игрок имеет аналогичную стратегию.

2.5 Задача 5

5. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1.

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leqslant 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

2.

$$F(x) = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geqslant 1 \\ 4x_1 + 8x_2 \geqslant 1 \\ 6x_1 + 5x_2 \geqslant 1 \end{cases}$$

Решаем:

1. $x_1 = 0, x_2 = 0.03571429, x_3 = 0.14285714, F(x) = 0.17857143$
2. $x_1 = 0.10714286, x_2 = 0.07142857, F(x) = -0.17857143$

Откуда цена игры:

$$v_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} = \frac{1}{0.10714286 + 0.07142857} = 5.6$$

$$v_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} = \frac{1}{0 + 0.03571429 + 0.14285714} = 5.6$$

Стратегии первого игрока:

1. $p_1 = x_1 * v_1 = 0.10714286 * 5.6 = 0.6$
2. $p_2 = x_2 * v_1 = 0.07142857 * 5.6 = 0.4$

Стратегии второго игрока:

1. $p_1 = x_1 * v_2 = 0 * 5.6 = 0$
2. $p_2 = x_2 * v_2 = 0.03571429 * 5.6 = 0.2$
3. $p_3 = x_3 * v_2 = 0.14285714 * 5.6 = 0.8$

2.6 Задача 6

6. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить соответствующую матричную игру. Чему равно математическое ожидание проигрыша первого игрока, если и первый игрок, и второй игрок используют свои оптимальные стратегии?

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.
$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 1x_4 \leqslant 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leqslant 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 6x_4 \leqslant 1 \end{cases}$$

2.
$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geqslant 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geqslant 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \geqslant 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geqslant 1 \end{cases}$$

Решаем:

1. $x_1 = 0, x_2 = 0.33333333, x_3 = 0, x_4 = 0, F(x) = 0.33333333$
2. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.33333333, x_4 = 0, F(x) = -0.33333333$

Откуда цена игры:

$$v_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} = \frac{1}{0 + 0.33333333 + 0 + 0} = 3$$

$$v_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} = \frac{1}{0 + 0 + 0.33333333 + 0} = 3$$

Стратегии первого игрока:

1. $p_1 = x_1 * v_1 = 0 * 3 = 0$
2. $p_2 = x_2 * v_1 = 0.33333333 * 3 = 1$
3. $p_3 = x_3 * v_1 = 0 * 3 = 0$

4. $p_4 = x_4 * v_1 = 0 * 3 = 0$

Стратегии второго игрока:

1. $p_1 = x_1 * v_2 = 0 * 3 = 0$
2. $p_2 = x_2 * v_2 = 0 * 3 = 0$
3. $p_3 = x_3 * v_2 = 0.33333333 * 3 = 1$
4. $p_4 = x_4 * v_2 = 0 * 3 = 0$

2.7 Задача 7

7. Платежная матрица в некоторой игре имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть первый игрок придерживается следующей смешанной стратегии: (6/13, 3/13, 4/13), а второй (6/13, 4/13, 3/13). Вычислить математическое ожидание проигрыша первого игрока.

Подставив вероятности стратегий для каждого игрока, получим следующие значения:

	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$
$\frac{6}{13}$	1	-1	-1
$\frac{3}{13}$	-1	-1	3
$\frac{4}{13}$	-1	2	-1

Используем формулу для получения математического ожидания для первого игрока:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_iq_j = \frac{36-24-18-18-12+27-24+32-12}{169} = -\frac{13}{169} \approx -0.0769$$

2.8 Задача 8

8. Перейти от следующей задачи линейного программирования: $L(x) = x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 11x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Решить Матричную игру любым известным способом.

Решим исходную систему уравнений:

$\begin{cases} x_1 = 0.12 \\ x_2 = 0.08 \end{cases}$

Представив $x_i = \frac{p_i}{v}$, получим следующие значения:

$\begin{cases} 7p_1 + 2p_2 \geqslant u \\ p_1 + 11p_2 \geqslant u \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$

$$p_1 + p_2 = x_1 * u + x_2 * u = u * L(x) = 1 \Rightarrow u = 5$$

Считаем оптимальные статегии:

$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4 \end{cases}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Решим полученную систему: $\begin{cases} x_1 = 0.133 \\ x_2 = 0.066 \end{cases}$

Представив $x_i = \frac{p_i}{v}$, получим следующие значения:

$\begin{cases} 7p_1 + 1p_2 \leqslant u \\ 2p_1 + 11p_2 \leqslant u \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$

Считаем оптимальные статегии:

$\begin{cases} p_1 = 0.666 \\ p_2 = 0.333 \end{cases}$

2.9 Задача 9

9. Перейти от следующей задачи линейного программирования: $L(x) = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \ldots, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Можно ли упростить матричную игру, используя понятие доминирования стратегий? Решить матричную игру любым известным вам способом.

Будем считать A_i – стратегией первого игрока, B_j – стратегией второго игрока.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	5	1
A_2	2	2	3	4
A_3	5	3	4	4
A_4	3	2	1	6

Данную матричную игру можно упростить, так как первый игрок всегда предпочтет статегию A_3 стратегии A_2, ибо выигрыши от стратегии A_2 меньше, чем от стратегии A_3.

Аналогично избавляемся от столбца B_1.

	B_2	B_3	B_4
A_1	2	5	1
A_2	2	3	4
A_3	3	4	4
A_4	2	1	6

Методом максимина найдем нижнее и верхнее цены игры.

	B_2	B_3	B_4	min
A_1	2	5	1	1
A_3	3	4	4	3
A_4	2	1	6	1
max	3	5	6	

Находим седловую точку: (B_2, A_3)

Оптимальные стратегии первого игрока: A_3, второго игрока: B_2.