1. Основные кинематические характеристики криволинейного движения

Криволинейное движение материальной точки:

Равномерное, если модуль скорости постоянен
(например, равномерное движение по окружности),

Равноускоренное, если модуль и направление скорости изменяется (например, движение тела, брошенного под углом к горизонту).

Важно! Криволинейное движение – это всегда ускоренное движение. То есть ускорение при криволинейном движении присутствует всегда, даже если модуль скорости не изменяется, а изменяется только направление скорости.

Тангенциальное ускорение - изменение величины скорости за единицу времени. **Всегда направлено по касательной к траектории движения.**

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$$

Нормальное ускорение - это изменение скорости по направлению за единицу времени. **Всегда направлено перпендикулярно направлению скорости.**

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t}$$

Центростремительное ускорение – это нормальное ускорение при равномерном движении по окружности.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

или

$$a_n = \omega^2 R \,,$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

2. Кинематика вращательного движения угловая скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость — векторная величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки относительно центра вращения.

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

ω – *угловая скорость*

$\Delta\varphi$ – *угол поворота*

Δt – *промежуток времени*

$[\varphi] = 1\,рад \qquad [t] = 1с \qquad [\omega] = 1\frac{рад}{с}$

Вычисляется как отношение величины угла поворота (в радианах) к времени поворота.

Линейная скорость - скорость с которой движется точка на окружности. Направление вектора линейной скорости всегда совпадает с касательной к окружности

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} = \left[\begin{array}{l} s = 2\pi R \\ t = T \end{array}\right]$$

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}} \qquad \boxed{v = 2\pi R\upsilon}$$

v – *линейная скорость*

$\pi = 3{,}14$

R – *радиус окружности*

T – *период*

υ – *частота*

$[\upsilon] = \frac{1}{c} \qquad [T] = 1c \qquad [R] = 1м \qquad [v] = 1\frac{м}{c}$

Связь линейной скорости и угловой получается из формул выше

$$v = R\omega\,(6)\,.$$

ПРИМЕЧАНИЕ: В движении по окружности есть еще период и частота. Хз почему в билете их нет.

Период вращения T - это время, за которое тело совершает один оборот.

Частота вращение - это количество оборотов за одну секунду.

$$\boxed{\upsilon = \frac{N}{t}}$$

υ – *частота вращения*

N – *число оборотов*

t – *время совершения оборотов*

$[N]$ – *безразмерная* $\quad [t] = 1c \quad [\upsilon] = \frac{1}{c} = c^{-1}$

Частота и период взаимосвязаны соотношением

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{T}}$$

υ – *частота вращения*

T – *период*

$[T] = 1c \quad [\upsilon] = \frac{1}{c} = c^{-1}$

Связь с угловой скоростью

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon}$$

ω – *угловая скорость*

$\pi = 3,14$

T – *период*

υ – *частота*

$[\upsilon] = \frac{1}{c} \quad [T] = 1c \quad [\omega] = 1\frac{рад}{c}$

Угловое ускорение - псевдо-векторная величина, которая характеризует интенсивность изменения модуля и направления угловой скорости при движении твёрдого тела.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Угловое ускорение = нормальное ускорение (см Билет 1)

3. Инерциальные системы отсчета. I II законы Ньютона.

I закон Ньютона - Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Таким образом
Инерциа́льная систе́ма отсчёта — система отсчёта, в которой все тела движутся прямолинейно и равномерно, либо покоятся, если на них не действуют никакие силы.

Неинерциальная система отсчета - система отсчета, которая двигается с ускорением по отношению к инерциальной

Любая система отсчета, перемещающаяся с постоянной скоростью ю(равномерно и прямолинейно) относительно другой инерциальной системы является инерциальной. В этих системах отсчета ускорения тела будут одинаковыми. Тело, на которое не действуют другие тела, в каждой инерциальной системе отсчета будет двигаться равномерно и прямолинейно относительно любой такой системы.

Пример: Земля - инерциальная система (это не так, но мы с вами простые работяги и можем считать что это так). Земля плоская btw.
Лифт который поднимается с ускорением - неинерциальная система.

При движении лифта вверх можно почувствовать «утяжеление» при разгоне лифта и приближение к невесомости при резком торможении. Если пользоваться в системе лифта законами Ньютона, то этого понять нельзя. На человека действует сила тяжести, и, так как в системе лифта он находится в состоянии покоя, сила реакции со стороны пола должна была бы равняться силе тяжести. Но из опыта ясно, что это не так. Поэтому к силе тяжести надо добавить какую-то силу при разгоне лифта и вычесть ее при замедлении. Это и есть сила инерции.

II Закон Ньютона - В инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.

F = ma или по пацански $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$ **где p - импульс t - время. (a = v/t, mv= p => F=ma=p/t**

Вообще стоит сказать СУММА сил = равнодействующей = ma
Ма́сса — скалярная физическая величина, определяющая инерционные и гравитационные свойства тел в ситуациях, когда их скорость намного меньше скорости света.

Вес — сила с которой тело действует на опору (или подвес, или другой вид крепления), препятствующую падению, возникающая в поле сил тяжести

Таким образом вес тела, которое покоится в инерциальной системе отсчета: P=mg
Если система тело-опора движется с ускорением w относительно ИСО, то вес тела P=m(g-w).
Пример: лифт едет вверх, ускорение w направлено противоположно g т.е имеет другой знак. Тогда P=m(g-(-w))=m(g+w). Действительно, когда мы едем вверх, мы давим в пол сильнее чем когда просто стоим.

И́мпульс (коли́чество движе́ния) — векторная физическая, являющаяся мерой механического движения тела. **P=mv**

Полным импульсом системы материальных точек называется векторная величина, равная сумме произведений масс материальных точек на их скорости:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

4. Закон сохранения импульса.

Зако́н сохране́ния и́мпульса — закон, утверждающий, что векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю[1].

Выводится из II закона Ньютона в импульсной форме.

Говоря человеческим языком - если нет внешних сил, как бы ни сталкивались все мыслимые и немыслимые шарики и тележки:

P до столкновения = P после столкновения.

Абсолютно упругий удар — модель соударения, при которой полная кинетическая энергия системы сохраняется.
Т.е не было деформации, тела не нагрелись - столкнулись и разлетелись.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'.$$

Важно - импульсы складываются векторно (не забудь посмотреть куда направлена скорость)

При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения энергии.

Полезный факт - если соударяются тела одинаковой массы, они просто обмениваются скоростями.

Абсолю́тно неупру́гий удар — удар, в результате которого тела соединяются и продолжают дальнейшее своё движение как единое тело.

$$\vec{v} = \frac{m_a\vec{v}_a + m_b\vec{v}_b}{m_a + m_b}.$$

Эти две формулы тебя спасут.

$$m_a\vec{v}_a + m_b\vec{v}_b = (m_a + m_b)\,\vec{v}$$

При абсолютно неупругом ударе НЕ выполняется закон сохранения энергии.

5. Уравнение движения материальной точки. Третий закон Ньютона. Силы трения. Сила упругости.

Третий закон Ньютона - Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены, и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Человеческим языком - сила действия равна силе противодействия.

Кирпич, неподвижно лежащий на столе, давит на него с силой
P=mg

направленной вниз (и называемой весом). Согласно третьему закону Ньютона, со стороны стола на кирпич действует сила той же величины, направленная вверх (она называется реакцией опоры).

Сила упругости (сила реакции опоры) - сила направленная против деформации тела, по модулю равная силе это тело деформирующей.

На кирпич лежащий на столе действует сила реакции опоры состорона стола равная по модулю его весу и противоположна по направлению.

Сила трения:
1)Сила трения скольжения — сила, возникающая между соприкасающимися телами при их относительном движении.

Опытным путём установлено, что сила трения зависит от силы давления тел друг на друга (силы реакции опоры), от материалов трущихся поверхностей, от скорости относительного движения, но **не зависит от площади соприкосновения**.

$$F = \mu N$$

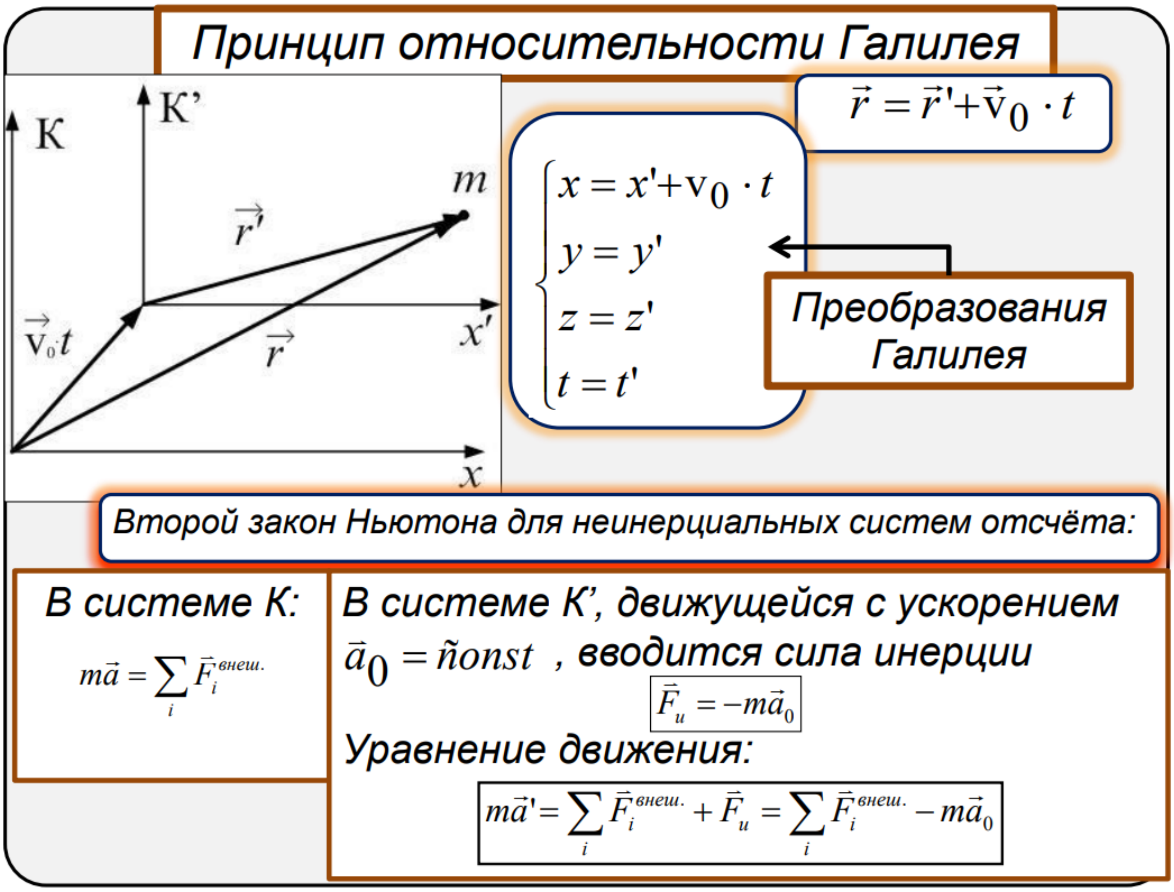
2) Сила трения покоя — сила, возникающая между двумя неподвижными контактирующими телами и препятствующая возникновению относительного движения. Эту силу необходимо преодолеть для того, чтобы привести два контактирующих тела в движение друг относительно друга.

Сила трения покоя всегда равна приложенной силе (до тех пор пока тело не сдвинется и в дело не вступит сила трения скольжения). Если мы будем толкать дом, то он будет сопротивляться ровно с той же силой, какую мы прилагаем.

Уравнение движения материальной точки - согласно принципу относительности Галилея:

- все инерциальные системы отсчёта эквивалентны (равны)
- Законы динамики инвариантны (независимы) относительно преобразований Галилея

Отсюда УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ:



6. Закон всемирного тяготения. Зависимость ускорения свободного падения от высоты. Первая космическая скорость

Закон всемирного тяготения - сила F гравитационного притяжения между двумя материальными точками с массами m1 и m2, разделёнными расстоянием r, действует вдоль соединяющей их прямой, пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния. То есть:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, равная[2] $6{,}67408(31) \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²).

Из формулы следует, что чем выше тело, тем меньше ускорение свободного падения

Гравитационное ускорение на высоте h над поверхностью Земли (или иного космического тела) можно вычислить по формуле:

$$g(h) = \frac{GM}{(r+h)^2},$$

где M — масса планеты.

Пе́рвая косми́ческая ско́рость (кругова́я ско́рость) — минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты и не начал падать (7,91 км/с для земли)

Вычисление: На орбите на объект действует только сила тяготения земли

$$ma = G\frac{Mm}{R^2},$$

Но с другой стороны тело двигается по окружности с постоянной скоростью, тогда центростремительное ускорение равно U^2/R.

Подставим вместо ускорения и получим

$$m\frac{v_1^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}.$$

отсюда находим U1 - первую космическую скорость

7. Сила, работа и потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Работа и кинетическая энергия. Закон сохранения полной механической энергии в поле потенциальных сил

Си́ла — физическая векторная величина, являющаяся мерой воздействия на данное тело со стороны других тел или полей.
Единица измерения в СИ - **ньютон** (1 Н).

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

F = ma

Работа это физическая величина — скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело.

Говорят, что если тело может совершить работу, то оно обладает энергией. Энергию обозначают буквой Е. Единица энергии в СИ — **джоуль** (1 Дж).

Работа = изменению энергии. Подняли тело повыше - потенциальная энергия увеличилась. Подтолкнул карусель - кинетическая энергия увеличилась.

В общем случае, когда сила не постоянна, а движение не прямолинейно, работа вычисляется как криволинейный интеграл второго рода по траектории точки:

$$A = \int \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}.$$

Потенциальная энергия - скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил.

Потенциальной энергией называют энергию взаимодействия тел или частей тела, зависящую от их взаимного положения.

При изменении положения тела изменяется его потенциальная энергия. Таким образом,

работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с противоположным знаком.

A = Еп1 – Еп2 = –(Еп2 – Еп1)

Знак «минус» означает, что при падении тела сила тяжести совершает положительную работу, а потенциальная энергия тела уменьшается. Если тело движется вверх, то сила тяжести совершает отрицательную работу, а потенциальная энергия тела при этом увеличивается.
При определении потенциальной энергии тела необходимо указывать уровень, относительно которого она отсчитывается, называемый *нулевым уровнем*.

Потенциальная энергия тела, поднятого на некоторую высоту над нулевым уровнем, равна работе силы тяжести при падении тела с этой высоты до нулевого уровня.

Потенциальной энергией обладает любое деформированное тело. При сжатии или растяжении тела оно деформируется, изменяются силы взаимодействия между его частицами и возникает сила упругости.

Работа силы упругости равна изменению потенциальной энергии пружины, взятому с противоположным знаком.

A = –(Еп2 – Еп1)

Знак «минус» показывает, что в результате положительной работы, совершенной силой упругости, потенциальная энергия тела уменьшается. При сжатии или растяжении тела под действием внешней силы его потенциальная энергия увеличивается, а сила упругости совершает отрицательную работу.

Консервативные силы — это такие силы, работа которых по любой замкнутой траектории равна 0.

Консервативными называются силы, работа которых при перемещении тела от точки 1 к точке 2 зависит не от траектории движения этого тела между этими точками, а только от положения этих точек.

Формула для вычисления работы A, выполняемую вектором силы F при перемещении тела между двумя точками. Пусть точка 1 задается радиус-вектором r1, а точка 2— радиус-вектором r2, тогда:

$$A_{12} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ – элементарное перемещение,

$\vec{F}\,d\vec{r}$ – скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$\vec{F}\,d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\theta$$

F, dr – длины векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ соответственно,

θ – угол между этими векторами.

Консервативные силы:

- Сила тяжести

$$A = -\int\limits_{h_1}^{h_2} mgdh = mg(h_1 - h_2)$$

- Сила упругости

$$A = -\int\limits_{0}^{x} kxdx = -\frac{kx^2}{2}$$

- Сила гравитации

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Сила электростатического взаимодействия

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Для консервативных сил имеет место одна очень важная особенность. Мы можем ввести так называемую потенциальную энергию U. В механике до этого уже имеется кинетическая энергия T или энергия движения. Известен закон сохранения полной механической энергии E = T + U.
Помимо консервативных сил есть **неконсервативные**. Это все остальные силы, чья работа вычисляется по пути.

Неконсервативные силы:

- Сила трения

$$F = \mu N$$

- Сила сопротивления воздуха (эта сила направлена против движения тела)

$$F = kv^2$$

Кинетическая энергия — скалярная функция, являющаяся мерой движения материальных точек, образующих рассматриваемую механическую систему, и зависящая только от масс и модулей скоростей этих точек.

A = Ек2 – Ек1

Ек = (mv^2)/2

Работа силы равна изменению кинетической энергии тела.

Это утверждение называют *теоремой о кинетической энергии*.

Если сила совершает положительную работу, то кинетическая энергия тела увеличивается. Скорость тела при этом возрастает. Если сила совершает отрицательную работу, то кинетическая энергия тела уменьшается. Это происходит, например, при уменьшении скорости тела при действии силы трения.

Кинетическая энергия измеряется в тех же единицах, что и работа, т. е. в джоулях.

Так же как и в том случае, когда тело обладает потенциальной энергией, работа может быть совершена за счет кинетической энергии. При совершении работы происходит изменение положения тела и изменение его энергии.

Работа всех сил, действующих на материальную точку при её перемещении, идёт на приращение кинетической энергии.

Закон сохранения энергии - полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остаётся постоянной.

Величину $E_к + E_п$ называют полной механической энергией частицы. Обозначим ее через E.

$$E = E_к + E_п$$

Таким образом, работа непотенциальных сил идет на приращение полной механической энергии частицы.

Приращение полной механической энергии частицы в стационарном поле потенциальных сил при перемещении ее из точки 1 в точку 2 можно записать в виде:

$$E_2 - E_1 = A_{непот}$$

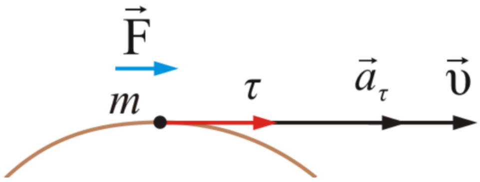
Если $A_{непот}$ > 0, то полная механическая энергия частицы возрастает, а если $A_{непот}$ < 0, то убывает. Следовательно, полная механическая энергия частицы может измениться под действием только непотенциальных сил. Отсюда непосредственно вытекает закон сохранения механической энергии одной частицы.

Если непотенциальные силы отсутствуют, то полная механическая энергия частицы в стационарном поле потенциальных сил остается постоянной.

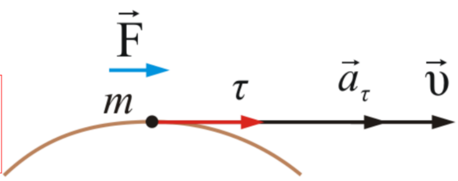
Кинетическая энергия.

Уравнение движения тела под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F},}\quad \text{или} \quad \boxed{m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau.}$$



$$\boxed{m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau.}$$



Умножим обе части этого равенства на $\upsilon\,dt = dr$, получим: $m\upsilon\,d\upsilon = F_\tau\,dr.$

Левая часть равенства, есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$\boxed{m\upsilon\,d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)} \quad \text{или} \quad \boxed{d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau dr.}$$

Т.о. $$\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.$$

Если система замкнута, то $\vec{\mathrm{F}}^{\text{внеш.}} = 0$ и $F_\tau = 0,$ тогда и $\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы равен нулю, то эта функция может служить ***характеристикой состояния*** *данной системы.*

Функция состояния *системы, определяемая* ***только скоростью*** *ее движения, называется* ***кинетической энергией***.

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

K – аддитивная величина:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\upsilon_i^2}{2},$$

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т.е. в ньютонах на метр: $1\,\mathrm{Н}\cdot м = 1\mathrm{Дж}$

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ): 1 эВ = 1,6 10^{19} Дж.

Связь кинетической энергии с импульсом *p*.

Т.к. $$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right) = \frac{m^2\upsilon^2}{2m},$$ отсюда

$$K = \frac{p^2}{2m}.$$

Связь кинетической энергии с работой.

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда, элементарная работа по перемещению тела из т. 1 в т. 2, будет равна произведению силы *F* на перемещение d*r* :

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r$$

$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r,$ отсюда $A = \int_1^2 F\mathrm{d}r.$

Т.к. нам известно, что $F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},$

а $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t,$ тогда после замены получим выражение для работы:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = m\int_1^2 \upsilon \mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = K_2 - K_1.$$

Следовательно, **работа** силы приложенной к телу на пути r численно равна **изменению кинетической энергии этого тела**:

$$A = \Delta K.$$

Или **изменение кинетической энергии dK равно работе внешних сил:**

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется **в джоулях**.

КОРОЧЕ, ТУТ ВСЕ ПОДРОБНОСТИ, НЕ ВИЖУ СМЫСЛА КОПИРОВАТЬ!

(Л4)

8. Момент импульса материальной точки и механической системы. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса механической системы.

[ТУТ ПРЯМ ВСЁ ЕСТЬ КАК НАДО И С ИНТЕГРАЛАМИ!]

9. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения. Момент импульса тела. Момент инерции.

Поступательное движение	Вращательное движение
$\upsilon = \frac{dS}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$S = \int_0^t \upsilon dt$	$\varphi = \int_0^t \omega dt$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$m\vec{\upsilon} = \text{const} \qquad I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$A = FS \qquad A = M\varphi$$

$$N = F\upsilon \qquad N = M\omega$$

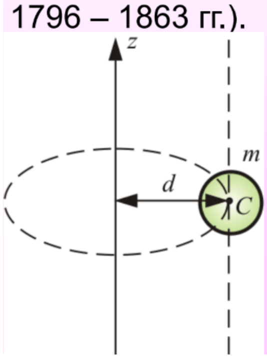
$$\frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \text{const} \qquad \frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$$

[НУ, СОБСТВЕННО, ВОТ]

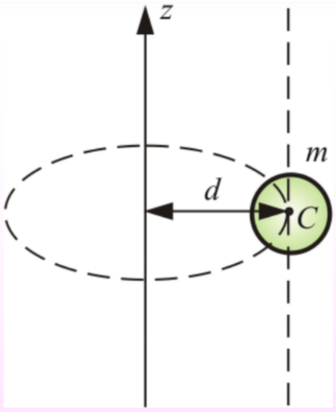
10. Теорема Штейнера. Доказательство. Примеры использования.

Теорема Штейнера

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, следует пользоваться ***теоремой о параллельном переносе осей или теоремой Штейнера*** (*Якоб Штейнер, швейцарский геометр* 1796 – 1863 гг.).



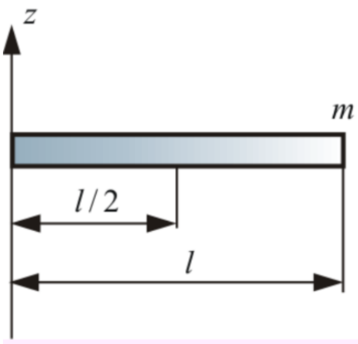
$$I = I_c + md^2$$



Теорема Штейнера

$$I = I_c + md^2$$

Момент инерции тела относительно любой оси вращения равен моменту его инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Пример: стержень массой m, длиной l, вращается вокруг оси, проходящей через конец стержня.

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

[ВОТ ТУТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (УПАСИ БОЖЕ ЕСЛИ СПРОСЯТ ЕГО)]

11. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить. Сумма кинетических энергий твёрдого тела движущегося произвольно:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\overline{\omega}$то линейная скорость i-й точки $\overline{v}_i = \overline{\omega} R_i$

Отсюда, $K_{\text{вращ}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i R_i^2) = \frac{I\omega^2}{2}$, где I - момент инерции тела

Формула кинетической энергии вращающегося твёрдого тела.

Момент инерции тела I – является мерой инертности при вращательном движении. Так же как масса *m* – мера инерции ***при поступательном движении***.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде ***суммы двух движений – поступательного со скоростью*** υ_c ***и вращательного с угловой скоростью*** ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции.

Полная кинетическая энергия этого тела:

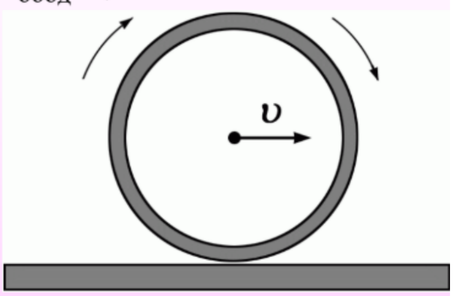
$$\boxed{K_{\text{полн.}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}}$$

Здесь I_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

Пример:Скорость центра масс обруча равна *v*, масса обруча *m*. Определим его кинетическую энергию при движении по горизонтальной поверхности.

Имеем

$$K_{\text{полн}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{\text{обод}} \;,$$



$v'_{\text{обод}}$ – линейная скорость обода.

Для наблюдателя, движущегося вместе с центром обруча, скорость точки соприкосновения обруча с плоскостью равна *v*. Поэтому $v'_{\text{обод}} = v$.

Таким образом, $K_{\text{полн}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$.

12. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции. Отличие сил инерции от сил взаимодействия.

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил

только в инерциальных СО

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i - m\bar{a}_e - m\bar{a}_c$$

Силы инерции

$$\vec{F}_e = -m\bar{a}_e, \quad \vec{F}_c = -m\bar{a}_c.$$

Все законы динамики точки сохраняют свою форму при движении в неинерциальной системе отсчета, если к действующим на точку силам добавлены **переносная и кориолисова силы инерции**.

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, которые движутся относительно инерциальной системы с ускорением, называются **неинерциальными** (НеИСО). В них законы Ньютона в обычном виде применять нельзя, требуется введение специальных поправок — сил инерции.

Отличие сил инерции от сил взаимодействия.
1) Сила инерции появляется только в неинерциальной системе отсчета и зависит от ее ускорения относительно инерциальной системы.
2) Сила инерции приложена к телу, но нет такого тела, со стороны которого она приложена.
СУРС: http://znaemfiz.ru/files/138426/sila_inercii.pdf

ПРЕЗЕНТАШКА ПО ЭТОЙ ТЕМЕ!

ПЫТАЮЩИЙСЯ ЧТО-ТО ОБЪЯСНИТЬ ФОКСФОРД

13. Кориолисово ускорение. Причина возникновения. Направление.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Сила Кориолиса вызывает кориолисово ускорение. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$a_C = 2\,\omega_e \times v_r$$

где ω_e — переносная угловая скорость,

v_r — относительная скорость точки.

Направление ускорения Кориолиса определяется по правилу векторного произведения или по правилу Жуковского.

Величина ускорения Кориолиса определяется выражением

$$a_C = 2\,\omega_e\, v_r \sin\alpha$$

где α – угол между векторами ω_e и v_r.

Ускорение Кориолиса с одной стороны характеризует изменение относительной скорости по направлению за счет переносного вращения и, с другой стороны, изменение величины переносной скорости за счет относительного движения.

Ускорение направлено перпендикулярно векторами ω_e и v_r максимально, если относительная скорость точки v_r ортогональна угловой скорости ω_e вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю, если угол между векторами $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ равен нулю или π, либо если хотя бы один из этих векторов равен нулевому вектору.

Следовательно, в общем случае, при использовании уравнений Ньютона во

Таким образом, $\boldsymbol{a}_C$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Сила Кориолиса возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета.

Сила Кориолиса действует на тело, движущееся вдоль меридиана в северном полушарии вправо и в южном – влево (рис. 4.11).

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый – в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

14 Принцип относительности и преобразования Галилея. Неинвариантность электромагнитных явлений относительно преобразований Галилея.

Принцип относительности Галилея. Всякое механическое явление при одних и тех же начальных условиях протекает одинаково в любой инерциальной системе отсчёта.

Принцип относительности Галилея означает, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. А именно, математическая форма второго и третьего законов Ньютона не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Преобразова́ния Галиле́я — в классической механике (механике Ньютона) и нерелятивистской квантовой механике: преобразования координат и скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Преобразования Галилея опираются на принцип относительности Галилея, который подразумевает одинаковость времени во всех системах отсчета («абсолютное время»).

В электродинамике Максвелла скорость распространения электромагнитных волн в вакууме не зависит от скоростей движения как источника этих волн, так и наблюдателя, и равна скорости света. Таким образом, уравнения Максвелла оказались **неинвариантными относительно преобразований Галилея**, что противоречило классической механике.

15 Постулаты специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна. Относительность одновременности и преобразования Лоренца.

Специальная теория относительности (СТО) – физическая теория, рассматривающая пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов.

Событие - физическое явление, которое происходит в определённый момент времени в данной точке пространства.

События могут происходить в одно и тоже время и их называют **одновременными.** Если **координаты событий совпадают**, то события называют **одноместными.**

Два постулата теории:

· Все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта, или никакими опытами, проводимыми в инерциальной системе отсчёта, невозможно установить её движение относительно других инерциальных систем.

· Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта. Она не зависит от ни от скорости источника света, ни от скорости светового приёмника сигнала.

Относительность одновременности - это понятие о том, что отдаленная **одновременность** - происходят ли два пространственно разделенных события в одно и то же время - не абсолютна, а зависит от системы отсчета наблюдателя.

Рассмотрим простой метод синхронизации часов. Допустим, что космонавт хочет узнать, одинаково ли идут часы в разных концах корабля в точках А и В. С помощью источника света в центре корабля производят вспышку света, если часы идут синхронно, по показания на часах будут одинаковы при приёме света. Но так будет только в движущейся системе отсчёта $К_1$, связанной с кораблём. И так же, как и в первом случае, вспышка для наблюдателя, находящегося в системе отсчёта К (неподвижная система), часы будут удалятся от вспышки света, и излучению нужно пройти большее расстояние, значит и время должно зафиксироваться отличное от часов в точке В. Вывод наблюдателя в системе отсчёта К: сигналы достигают часов не одновременно.

Время, отсчитываемое покоящимися в ИСО часами, называется **собственным временем** и обозначают буквой τ (тау)**.** Промежуток времени между событиями по часам наблюдателя, находящегося внутри объекта (ИСО $К_1$). Промежуток времени между теми же событиями по часам наблюдателя относительно которой удаляется обозначим Δt. Между этими промежутками существует соотношение:

Это означает, что часы, движущиеся относительно ИСО идут медленнее, неподвижных часов и показывают меньший промежуток времени между событиями **(замедление времени).**

Преобразовав выражение Δt, получим:

А так как скорость света с постоянна и собственное время Δτ неизменно для данного события, то есть инвариантны, то получим:

Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены. Эти новые преобразования должны установить связь между координатами (x, y, z) и моментом времени t события, наблюдаемого в системе отсчета K, и координатами (x', y', z') и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в системе отсчета K'.

Кинематические формулы преобразования координат и времени в СТО называются ***преобразованиями Лоренца***. Они были предложены в 1904 году еще до появления СТО как преобразования, относительно которых инвариантны уравнения электродинамики. Для случая, когда система K' движется относительно K со скоростью υ вдоль оси x, преобразования Лоренца имеют вид:

16. Парадоксы релятивистской кинематики: сокращение длины и замедление времени в движущихся системах отсчета.

1. «Сокращение» длины движущихся объектов.

Представим себе неподвижную линейку длиной L_0. Эта длина называется собственной длиной линейки, а система отсчета, в которой линейка неподвижна, - собственной системой отсчета, которую мы в дальнейшем будем обозначать K_0. Если линейка движется со скоростью V относительно другой системы отсчета (K), то для наблюдателя в этой системе отсчета линейка будет казаться короче, так что ее длина L может быть вычислена по формуле:

$$L = L_0. \quad (5.4.)$$

Следует отметить, что такое «сокращение» длины не связано с какими-то деформациями самой линейки, оно обусловлено тем, что одновременная фиксация концов движущейся линейки наблюдателем, находящимся в К-системе отсчета, является неодновременной в другой, в частности, в собственной системе отсчета. В результате, например, из K_0-системы отсчета кажется, что сначала фиксируется положение правого конца линейки, а через некоторое время, когда линейка сместится на некоторое расстояние, фиксируется положение левого конца. Поэтому расстояние между этими засечками оказывается меньше, чем L_0. Но, увы, наблюдатель в К-системе отсчета справедливо считает, что он фиксирует концы линейки одновременно, и заставить его измерять длину иначе нельзя. Этим и объясняется парадокс «сокращения» длины. Обратим внимание также на то, что поперечные размеры движущихся тел не изменяются по сравнению с неподвижными.

Но ведь то, что касается концов линейки, в полной мере относится и к любым точкам пространства, даже если никаких линеек в нем нет. Поэтому можно сказать, что пространство имеет разную метрику в разных ИСО.

2. «Замедление» хода движущихся часов.

Чтобы убедиться в том, что время в движущейся системе отсчета течет медленнее, чем в неподвижной, рассмотрим специальный вид часов[2]. Пусть эти часы представляют собой два неподвижных (K_0-система отсчета) параллельных зеркала, расположенных на расстоянии L_0 друг от друга, между которыми «бегает» световой "зайчик" (рис. 6.2). Время, за которое этот «зайчик» пробегает туда и обратно, очевидно, равно $t_0 = 2L_0/c$, где c - скорость света.

Пусть теперь эти часы движутся со скоростью V, например, направо. Наблюдатель, находящийся в неподвижной К-системе отсчета, видит, что «зайчик» проходит более длинный путь между зеркалами, так как

L = (5.6)

где t - время, за которое «зайчик» пробегает зигзагообразный путь в К-системе отсчета.

Так как

t= 2L/c = (2/c) , (5.6)

то, решив это уравнение относительно t, получаем:

t = (5.7)

Таким образом, интервал времени t между двумя событиями в К-системе отсчета оказывается больше, чем интервал времени t_0 между теми же событиями в K_0-системе отсчета. Поэтому и говорят, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

И здесь надо отметить, что указанное замедление относится не только к часам специального вида, но и ко всем движущимся объектам. В частности, даже процессы старения живых организмов замедляются, если эти организмы движутся. Из двух близнецов тот, который отправляется в космическое путешествие (назовем его А), стареет медленнее, чем его брат (В), остающийся на Земле. С этим примером связан знаменитый «*парадокс близнецов»*, который заключается в следующем. Если близнец А через какое-то время вернется на Землю, то он должен увидеть своего брата В заметно постаревшим (предполагается, конечно, что близнец А перемещался с околосветовой скоростью). Это следует из того, что А двигался, а В оставался неподвижным, т.е. с точки зрения близнеца В. Но ведь можно встать на точку зрения близнеца А, который считает себя неподвижным и относительно которого его брат В сначала удалялся, а потом вернулся. И тогда следует считать, что А постареет больше, чем В.

Таким образом, мы приходим к двум взаимоисключающим друг друга выводам. А разрешение «парадокса близнецов» связано с тем, что его участники, близнецы А и В, находились в несимметричных условиях. Чтобы вернуться на Землю, близнец А должен был изменить свою скорость на противоположную, т.е. какое-то время находиться в неинерциальной системе отсчета, для которой выводы СТО неприменимы. В то же время близнец В все время находился в ИСО. С учетом этого, именно А окажется моложе, чем В.

17. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии в СТО.

Уравнения классической механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, по отношению же к преобразованиям Лоренца они оказываются неинвариантными. Из теории относительности следует, что уравнение динамики, инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца, имеет вид:

где - инвариантная, т.е. одинаковая во всех системах отсчета величина называемая массой покоя частицы, v- скорость частицы, - сила действующая на частицу. Сопоставим с классическим уравнением

Мы приходим к выводу, что релятивистский импульс частицы равен

Взаимосвязь массы и энергии.

Масса и энергия покоя связаны уравнением:

$$E = mc^2 \qquad (8.6.1)$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0 :

$$\Delta E_0 = \Delta m\, c^2$$

Это утверждение носит название **закона взаимосвязи массы и энергии покоя**, оно стало символом современной физики.

ЧУТЬ ПОДРОБНЕЕ(как выводится):

Релятивистская масса.

Определив массу частицы m как коэффициент пропорциональности между скоростью и импульсом, получим, что масса частицы зависит от ее скорости.

(6.8)

Энергия в релятивистской динамике.

Для энергии частицы в теории относительности получается выражение:

(6.9)

Из (2.3) следует, что покоящаяся частица обладает энергией

(6.10)

Эта величина носит название энергии покоя частицы. Кинетическая энергия, очевидно, равна

(6.11)

Приняв во внимание, что , выражение для полной энергии частицы можно написать в виде

(6.12)

Из последнего выражения вытекает, что энергия и масса тела всегда пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии тела сопровождается изменением массы тела

и, наоборот, всякое изменение массы сопровождается изменениемэнергии . Это утверждение носит название закона взаимосвязи или закона пропорциональности массы и энергии.

18. Электрическое (ЭС) поле. Силовое и энергетическое описание. Закон Кулона.

Электростатическое поле − электрическое поле, создаваемое неподвижными (статичными) зарядами.

Электростатическое поле не изменяется во времени.

Силовой характеристикой электрического поля является напряженность

Напряженностью электрического поля в данной точке называется векторная физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

За единицу измерения напряженности электрического поля в СИ принимают

Потенциал - энергетическая характеристика электрического поля.

Потенциал - скалярная физическая величина, равная отношению потенциальной энергии, которой облает электрический заряд в данной точке электрического поля, к величине этого заряда.

Потенциал показывает какой потенциальной энергией будет обладать единичный положительный заряд, помещенный в данную точку электрического поля. $\boldsymbol{\varphi = W / q}$

где φ - потенциал в данной точке поля, W- потенциальная энергия заряда в данной точке поля.

За единицу измерения потенциала в системе СИ принимают **[φ] = В** (1В = 1Дж/Кл)

За единицу потенциала принимают потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности электрического заряда 1 Кл, требуется совершить работу, равную 1 Дж.

Закон Кулона:

Два точечных заряда действуют друг на друга с силой, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна произведению их зарядов (без учета знака зарядов)

В различных средах, например в воздухе и в воде, два точечных заряда взаимодействуют с разной силой. Относительная диэлектрическая проницаемость среды характеризуют это различие. Это известная табличная величина. Для воздуха .

Постоянная k определяется как

Направление силы Кулона:

Согласно третьему закону Ньютона, силы одной природы возникают попарно, равны по величине, противоположны по направлению. Если взаимодействуют два неодинаковых заряда, сила, с которой больший заряд действует на меньший (В на А) равна силе, с которой меньший действует на больший (А на В).

18. Электрическое (ЭС) поле. Силовое и энергетическое описание. Закон Кулона.

Закон Кулона. Сила взаимодействия F между двумя точечными зарядами q1 и q2, находящимися в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Точечные электрические заряды – элементарные частицы или заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

Величина $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – **электрическая постоянная**, относящаяся к числу фундаментальных физических констант.

19. Напряженность электростатического поля. Поток напряженности ЭС поля. Теорема Гаусса в интегральной форме

Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что напряженность электростатического поля системы точечных зарядов q1 , q2 , …, qi , …, qN :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + E_N = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$$

• где Ei – напряженность электрического поля, создаваемая зарядом qi в точке с радиусом-вектором ri , проведенным из заряда qi ; ri – расстояние между зарядом qi и точкой пространства, в которой вычисляется напряженность Ei поля.

Напряженность электрического поля пространственно распределенного заряда

- Если заряд q распределен в пространстве непрерывно, то напряженность **E** электрического поля в данной точке пространства с радиусом вектором **r** можно определить следующим образом:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3}\vec{r}$$

- Т.е. заряженное тело разбивается на части объемом dV, имеющие заряд dq; далее находится напряженность d**E** электрического поля точечного заряда dq в данной точке; затем с помощью принципа суперпозиции электрических полей вычисляется напряженность **E**.

Напряженность электрического поля заряда, распределенного по поверхности или по линии

- Аналогично, для зарядов, распределенных по поверхности S или длине L заряженных тел:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^3}\vec{r}$$

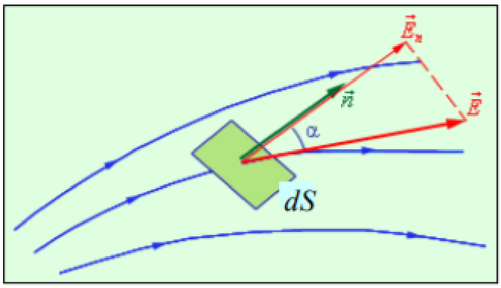
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r^3}\vec{r}$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Поток вектора напряженности поля через элементарную площадку dS определяется выражением

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\,\cos\alpha = E_n dS$$

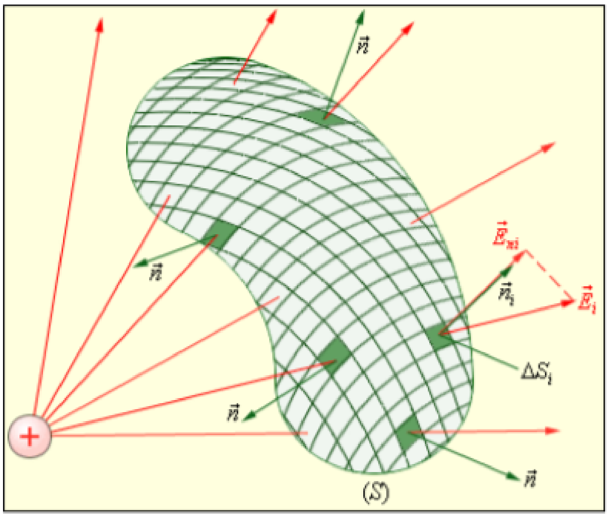
где $d\vec{S} = \vec{n}dS$ - вектор элемента поверхности



Поток вектора через произвольную поверхность определяется выражением

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha dS.$$

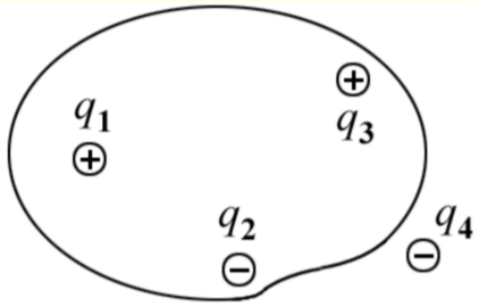
Поток вектора есть величина алгебраическая.
Знак потока зависит от выбора направления нормали к поверхности.



$$\Phi > 0, если \quad \alpha < 90^\circ$$
$$\Phi < 0, если \quad \alpha > 90^\circ$$
$$\Phi = 0, если \quad \alpha = 90^\circ$$

Теорема Гаусса (интегральная форма)

Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0.



$$\boxed{\oint\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right) = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

Заряды, находящиеся вне поверхности, влияния не оказывают. 3

Если электрические заряды распределены в разных местах пространства с некоторой ***объемной плотностью***

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

тогда суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int \rho dV .$$

Теореме Гаусса:

$$\boxed{\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint\limits_V \rho dV ,}$$

если заряд неравномерно распределен по объему.

20. Применение теоремы Гаусса. Сферически симметричное поле. Поле системы точечных зарядов, нити, плоскости.

ТЕОРЕМА ГАУССА

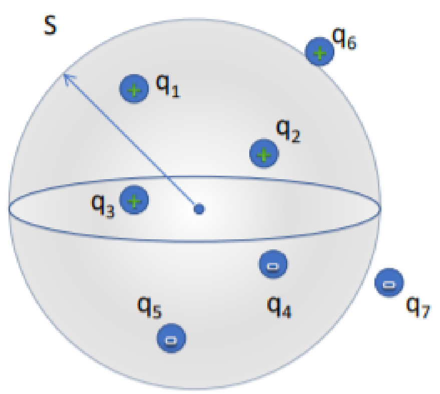
Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь *любую замкнутую* поверхность равен *алгебраической* сумме зарядов, находящихся *внутри* этой поверхности, деленной на ε_0.

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}$$

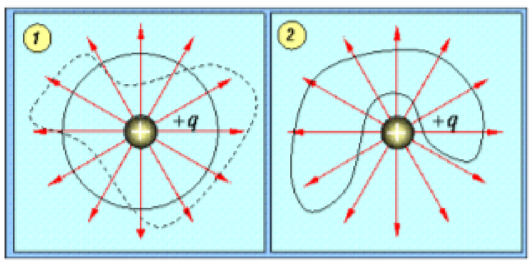
1. Теорема Гаусса устанавливает фундаментальное свойство ЭП – наличие у него источников (+ заряды) (и стоков (- заряды)) линий поля.

2. Теорема Гаусса позволяет вычислять напряженность поля систем дискретно и непрерывно распределенных зарядов, т.е. выступает аналогом закона Кулона и принципа суперпозиции.

Примеры использования Теоремы Гаусса

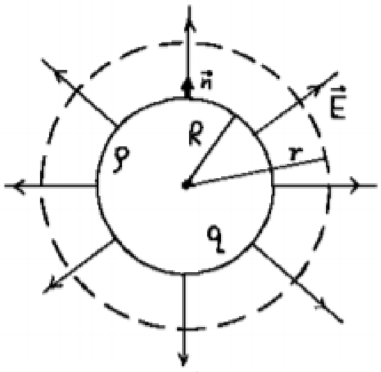


$$\Phi_s = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5)$$



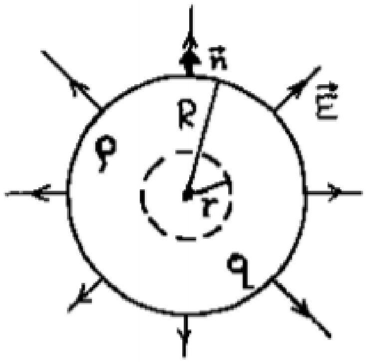
Примеры вычислений полей заряженных тел простых симметрий

Поле заряженной сферы



$$\underline{r \geq R} \Rightarrow \quad q(r) = q_0 \Rightarrow \quad \oint_S E_r(r)dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}.}$$



$$\underline{r < R} \Rightarrow q(r) = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = 0 \Rightarrow \oint_S E_r(r)dS = 0$$

$$E_r(r) = const \Rightarrow \quad E_r(r)\oint_S dS = 0 \qquad \boxed{E_r(r) = 0.}$$

---

25. Дивергенция векторной функции. Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

Теорема Гаусса выражает замечательное свойство электрического поля, которое позволяет представить эту теорему в иной форме, расширяющей ее возможности как инструмента исследования и расчета. Найдем дифференциальную форму теоремы Гаусса, в которой устанавливается связь между объемной плотностью заряда р и *изменениями напряженности* (E) *в окрестности данной точки пространства.*

Пусть имеем заряд q в объеме V, охватываемом замкнутой поверхностью S, представим его как

$$q_{внут} = <\rho> V \,, \tag{12.1}$$

где < r> – среднее по объему V значение объемной плотности заряда. Запишем теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}\,. \tag{12.2}$$

Тогда подставим это выражение в (12.1) и разделим обе части равенства на V. В результате получим:

$$\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}. \qquad (12.3)$$

Теперь устремим объем V к 0, стягивая его к интересующей нас точке поля. Тогда <r> будет стремиться к значению r в данной точке поля, а левая часть уравнения будет стремиться к r/e_0.

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint$ E dSк V при V0, называют *дивергенцией поля* **E** и обозначают div**E**. То есть, по определению:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}\right). \qquad (12.4)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из определения (12.4) следует, что *дивергенция вектора E является скалярной функцией координат.* Чтобы найти дивергенцию **E** надо взять бесконечно малый объем V, определить поток вектора **E** сквозь замкнутую поверхность, охватывающую этот объем, и найти отношение этого потока к объему. Полученное выражение для дивергенции поля вектора **E** будет зависеть от выбора системы координат (в разных системах координат оно оказывается разным). Если есть декартова система координат (x, y, z), то

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (12.5)$$

Итак, мы выяснили, что при V0 его правая часть стремится к r/e_0, а левая – к div**E**. Из (12.4) следует, что дивергенция поля **E** связана с плотностью заряда в той же точке уравнением:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (12.6)$$

оно и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме.

26. Дивергенция градиента. Оператор Лапласа. Уравнения Пуассона и Лапласа для ЭС поля.

Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$$

Лапласиан (он же оператор Лапласа)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)F$$

Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Действительно, подставляя в уравнение

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

вместо величин E_x; E_y; E_z их выражения через потенциал:

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x};E_y=-\frac{\partial U}{\partial y};E_z=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Это дифференциальное уравнение носит название ***уравнения Пуассона***.

Интеграл

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{r}$$

является решением уравнения Пуассона для случая, когда заряды распределены в конечной области пространства.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение Пуассона получает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

и называется в этом частном случае ***уравнением Лапласа***.

27. Ротор векторной функции. Физический смысл ротора. Теорема Стокса.

Ротор векторного поля — есть вектор, проекция которого rotn на каждое направление n есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру *L*, являющемуся краем плоской площадки Δ*S*, перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки (площади), когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:

$$\mathrm{rot}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}.$$

Физический смысл:

Инвариантно ротор может быть описан благодаря формуле Стокса, откуда

$$(\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})(M)=\lim_{\Gamma\to M}\frac{\oint\limits_{\partial\Gamma}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{dl}}{S(\Gamma)}.$$

Здесь Γ — кусок поверхности, стягивающийся к точке M, $S(\Gamma)$ — площадь Γ, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ, определяющий ее ориентацию. Таким образом, поверхностная плотность циркуляции поля по бесконечно малой окружности равна проекции ротора на нормаль к данной окружности (физический смысл ротора).

28. Проводники в электрическом поле. Основная задача электростатики. Теорема единственности.

Вещество или материальное тело, в котором имеются заряды, способные переносить электрический ток, называется проводником. В металлах переносчиками тока служат свободные (т.е. не привязанные к атомам) электроны, в электролитах — ионы, в плазме — и электроны, и ионы. Для электростатических явлений поле внутри проводника равно нулю:

$\vec{E}_{in} \equiv 0$.

Механизм исчезновения электрического поля в проводниках связан со смещением свободных зарядов ровно настолько, чтобы как раз компенсировать внешнее электрическое поле, если таковое имеется. При изменении внешнего поля свободные заряды в проводнике перераспределяются, а в момент перераспределения в проводнике течет ток

Основная задача электростатики

Общей задачей расчета электростатического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел. Для электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению зарядов решается с помощь уравнения Пуассона или с помощь уравнения Лапласа и граничного условия у поверхности заряженных проводящих тел. Это наиболее простой тип задач. Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел с известной геометрией, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы либо потенциалы тел, либо полные заряды. Распределение же зарядов по поверхности каждого тела неизвестно и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Также неизвестным является и распределение потенциала в пространстве.

Теорема единственности. Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом. Иначе говоря, для любой поверхности S, ограничивающей простран- ственную область V , существует единственная функция σ(X), выражающая зависимость поверхностной плотности заряда σ от точки $X \in S$, при которой напряжённость поля в любой точке области V обращается в нуль.

Доказательство. Предположим, что заряд q может распределиться по поверхности проводника двумя способами: σ(X) и σ′(X). Тогда для заряда −q также имеются два возможных распределения: −σ(X) и −σ′(X).

Рассмотрим функцию $\sigma''(X) = \sigma(X) - \sigma'(X)$. Она отвечает распределению по поверхности проводника нулевого заряда $(0 = q + (-q))$. Если $\sigma(X) \neq \sigma'(X)$, то поверхностная плотность$\sigma''(X)$ не во всех точках обращается в нуль; стало быть, на поверхности проводника возникают заряды: в одних местах — положительные, в других — отрицательные (ведь суммарный заряд проводника равен нулю). Внутри проводника поля нет, а снаружи оно появляется, и линии электрического поля, начинающиеся на положительных зарядах поверхности проводника, вы- нуждены заканчиваться на отрицательных зарядах этой же поверхности (а куда им деваться — ведь проводник уединённый, и никаких других зарядов вне проводника у нас нет).

И тут мы приходим к противоречию. С одной стороны, как нам хорошо известно, поверх- ность проводника является эквипотенциальной. Но с другой стороны, если перемещать проб- ный заряд вдоль линии поля, начинающейся на положительном заряде в точке A поверхности проводника и заканчивающейся на отрицательном заряде в точке B той же поверхности, то поле совершит ненулевую работу, и тогда потенциал в точке B будет отличаться от потенциала в точке A. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\sigma(X) = \sigma'(X)$, то есть распределение заряда по поверхности проводника единственно. Теорема доказана.

29. Диэлектрики в электрическом поле. Полярные и неполярные диэлектрики.

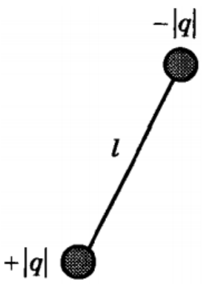
Индуцированный дипольный момент. Поляризация.

Диэлектрики (или **изоляторы**) — вещества, относительно плохо проводящие электрический ток.

В диэлектриках все электроны связаны, т. е. принадлежат отдельным атомам, и электрическое поле не отрывает их, а лишь слегка смещает, т. е. поляризует. Поэтому внутри диэлектрика может существовать электрическое поле, диэлектрик оказывает на электрическое поле определенное влияние.

Диэлектрики делятся на **полярные** и **неполярные**.

Полярные диэлектрики состоят из молекул, в которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Такие молекулы можно представить в виде двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, называемых **диполем**.



Неполярные диэлектрики состоят из атомов и молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов совпадают.

Электри́ческий дипо́льный моме́нт — векторная физическая величина, характеризующая, наряду с суммарным зарядом (и реже используемыми высшими мультипольными моментами), электрические свойства системы заряженных частиц (распределения зарядов) в смысле создаваемого ими поля и действия на неё внешних полей. Главная после суммарного заряда и положения системы в целом (её радиус-вектора) характеристика конфигурации зарядов системы при наблюдении её издали.

Простейшая система зарядов, имеющая определенный (не зависящий от выбора начала координат) ненулевой дипольный момент — диполь (две точечные частицы с одинаковыми по величине разноимёнными зарядами). Электрический дипольный момент такой системы по модулю равен произведению величины положительного заряда на расстояние между зарядами и направлен от отрицательного заряда к положительному, или:

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

где q — величина положительного заряда, l — вектор с началом в отрицательном заряде и концом в положительном.

Для системы из *N* частиц электрический дипольный момент равен

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i$$

где qi — заряд частицы с номером i, а ri — её радиус-вектор; или, если суммировать отдельно по положительным и отрицательным зарядам:

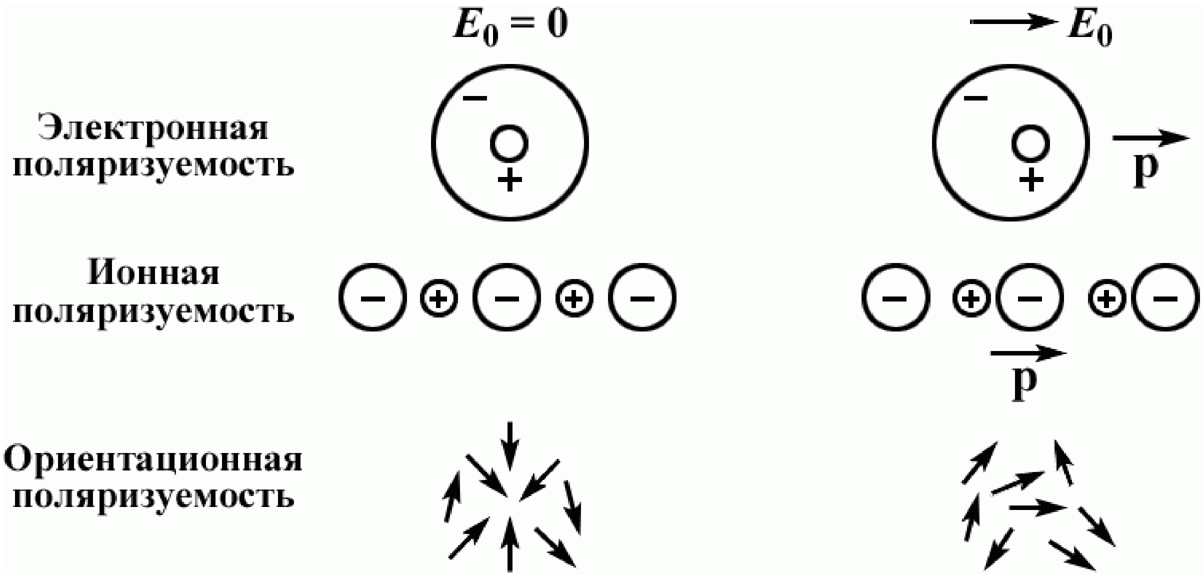
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N^+} q_i^+ \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N^-} |q_i^-| \vec{r}_i = Q^+ \vec{R}^+ - |Q^-| \vec{R}^-$$

где N±— число положительно/отрицательно заряженных частиц, , $N = N^+ + N^-$ qi± — их заряды; $Q^+, \vec{R}^+, Q^-, \vec{R}^-$ — суммарные заряды положительной и отрицательной подсистем и радиус-векторы их «центров тяжести»

Поляризация

Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется **поляризацией.**Способность к поляризации является основным свойством диэлектриков.

Поляризуемость диэлектрика включает составляющие – электронную, ионную и ориентационную (дипольную)



Есть и другие виды поляризации. Главное в поляризации – смещение зарядов в электростатическом поле. В результате, каждая молекула или атом образует электрический момент p.

$$p_1 = ql_1 \text{ или } \vec{p}_1 = q\vec{l}_1.$$

30. Диэлектрическая восприимчивость и Диэлектрическая проницаемость. Вектор электрического смещения.

***Диэлектрическая проницаемость** среды ε показывает, во сколько раз сила взаимодействия двух электрических зарядов в среде меньше, чем в вакууме. Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха и большинства других газов в нормальных условиях близка к единице (в силу их низкой плотности).*

Относительная диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков составляет десятки и сотни тысяч.

***Диэлектрическая восприимчивость** (**поляризуемость**) вещества — физическая величина, мера способности вещества поляризоваться под действием электрического поля. Диэлектрическая восприимчивость χ_e — коэффициент линейной связи между поляризацией диэлектрика P и внешним электрическим полем E в достаточно малых полях:*

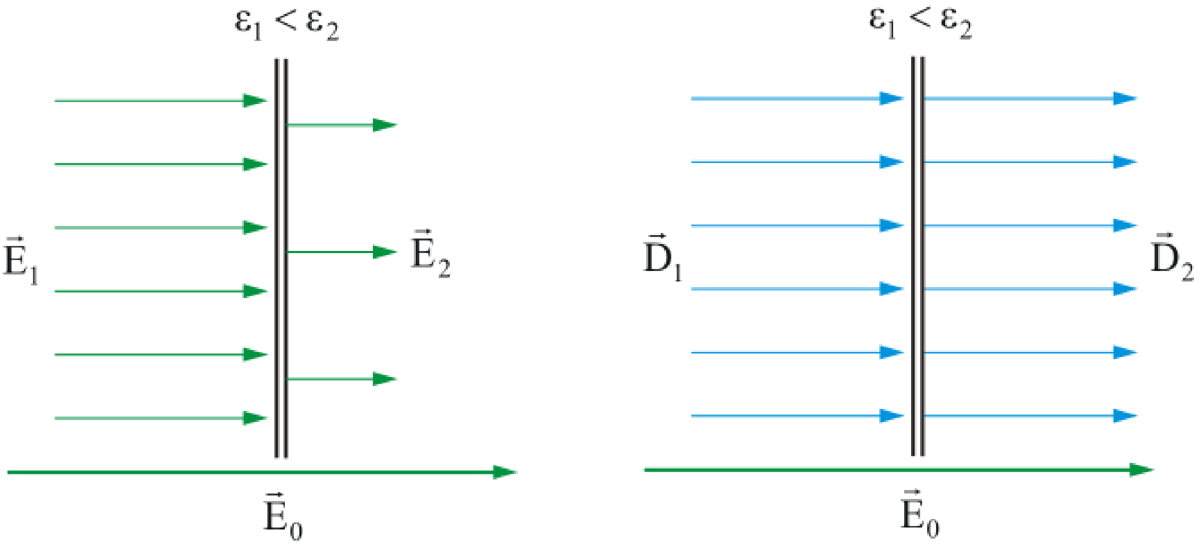
$P = \varepsilon_0 \chi_e E$ *,где ε_0 — электрическая постоянная; произведение $\varepsilon_0 \chi_e$ называется абсолютной диэлектрической восприимчивостью . В случае вакуума*

$\chi_e = 0$

У диэлектриков, как правило, она положительна. Диэлектрическая восприимчивость измеряется в ничём (безразмерная величина).

Поляризуемость связана с диэлектрической проницаемостью ε соотношением: $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ *, или* $\varepsilon = 1 + \chi$ *.*

Имеем границу раздела двух сред с ε_1 *и* ε_2*, так что,* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *(рис. 4.10, а).*



а *б*

Рис. 4.10

Как мы уже показали, в соответствии с 4.1.10,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{ или } E_1 = E_2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

т.е., напряженность электростатического поля E изменяется скачком при переходе из одной среды в другую.

Главная задача электростатики – расчет электрических полей, то есть $\vec{E}_0$ *в различных электрических аппаратах, кабелях, конденсаторах, и т.д. Эти расчеты сами по себе не просты, да еще наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще более усложняют задачу.*

Для упрощения расчетов была введена новая векторная величина – ***<u>вектор электрического смещения</u>*** *(электрическая индукция):*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad 4.3.1$$

Из предыдущих рассуждений $\vec{E}_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$*, тогда* $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2$*, отсюда*

$$D_{1n} = D_{2n}. \qquad 4.3.2$$

Таким образом, вектор $\vec{D}$ *остается неизменным при переходе из одной среды в другую (рис. 4.10, б), и это облегчает расчет* $\vec{D}$*. Зная* $\vec{D}$ *и ε, легко рассчитывать* $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E}$*, отсюда можно записать:*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad 4.3.3$$

где $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ *– вектор поляризации, χ – диэлектрическая восприимчивость среды, характеризующая поляризацию единичного объема среды.*

Таким образом, вектор $\vec{D}$ *– есть сумма (линейная комбинация) двух векторов различной природы:* $\vec{E}$ *– главной характеристики поля и* $\vec{P}$ *– поляризации среды.*

В СГС: $\varepsilon = 1$*, поэтому в вакууме* $\vec{D} = \vec{E}$ *и размерность у* $\vec{D}$ *и* $\vec{E}$ *одинакова.*

В СИ: $[D] = [E] \cdot [\varepsilon_0] = \dfrac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ *, т. е. это заряд, протекающий через единицу поверхности.*

Для точечного заряда в вакууме $D = \frac{q}{4\pi r^2}$.

Для $\vec{D}$ *имеет место принцип суперпозиции, как и для* $\vec{E}$, *т.е.*

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^{n} \vec{D}_k.$$

31. Электроемкость. Поля плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора

Электрическая ёмкость или электроёмкость - характеристика проводника, мера его способности накапливать электрический заряд. Формула:

$q = C\varphi$ (можно сказать и так $C = \frac{q}{\varphi}$)

С - электрическая ёмкость проводника. φ - потенциал поля. q- заряд.
[С] (единицы измерения) = Ф - фарада.

Емкость уединенного проводника зависит от его формы, размеров и диэлектрических свойств среды, в которой находится проводник, а также электрических свойств, расположения, форм и размеров окружающих тел.

Конденсатор - система проводников, электростатическое поле которых полностью сосредоточено в объеме, занимаемом этой системой.

$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU$ - формула заряда на одной из обкладок конденсатора.

Поля плоского (2), цилиндрического (3) и сферического (4) конденсаторов:

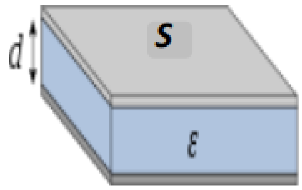
Примеры вычисления

1. Электроемкости уединенного сферического проводника

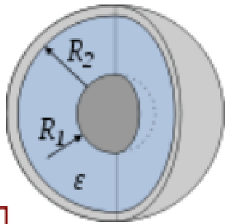
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \longrightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

2. Электроемкости плоского конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} d = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S} d \longrightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}$$



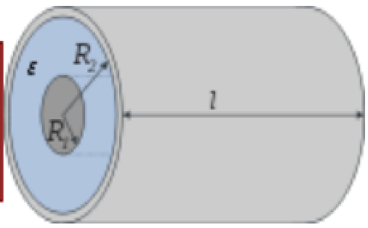
3. Электроемкости сферического конденсатора



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \longrightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

4. Электроемкости цилиндрического конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \ln\frac{R_2}{R_1} \longrightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$



Энергия заряженного конденсатора

Процесс возникновения на обкладках конденсатора зарядов +q и -q можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимаются малые порции заряда Δqи перемещаются на другую обкладку.

Работа переноса очередной порции заряда равна:

$\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U$, где U - напряжение на конденсаторе

Тогда энергия:

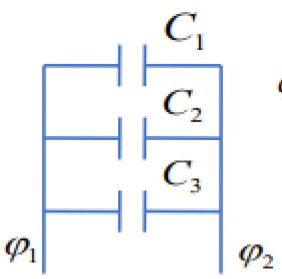
$$dW = dA = Udq = \frac{q}{C}dq$$

Интегрируя, приходим к формуле для **энергии заряженного конденсатора**

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}}$$

(в билете про это говорить не написано, но в презентации это есть)
Соединения конденсаторов:

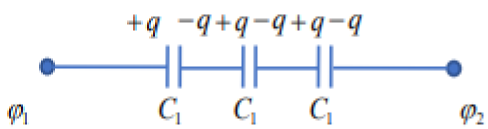
- Параллельное соединение конденсаторов



$$q = \sum q_i = \sum C_i(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)\sum C_i$$

$$\boxed{C = \sum C_i}$$

- Последовательное соединение конденсаторов



$$U_i = \frac{q}{C_i}$$

$$\sum U_i = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum \frac{q}{C_i} = q\sum \frac{1}{C_i}$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

32. Понятия проводимости и сопротивления. Теория электропроводности Друда-Лоренца, ее ограничения.

Электропроводность или электрическая проводимость - способность тела (среды) проводить электрический ток, свойство тела или среды, определяющее возникновение в них электрического тока под воздействием электрического поля.

Электри́ческое сопротивле́ние — физическая величина, характеризующая свойство проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему.

Формула: $\boxed{I = \frac{1}{R}U}$

R — электрическое сопротивление проводника.

[R] (единицы измерения) = Ом.

Для однородного линейного проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S: $\boxed{R = \rho\frac{l}{S}}$, где ρ- удельное электрическое сопротивление. Единица удельного электрического сопротивления — Ом*м.

$\boxed{\lambda = \frac{1}{\rho}}$ **- электрическая проводимость** проводника

Теория электропроводности Друда-Лоренца, ее ограничения

Друде разработал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем:

1. Электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа.
2. Между соударениями электроны движутся свободно, пробегая в среднем путь .
3. Электроны сталкиваются в основном с ионами, образующими кристаллическую решетку, а не между собой.
4. Столкновения электронов с ионами приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Ограничения:

1. Взаимодействие электрона с другими электронами и ионами не учитывается между столкновениями.
2. Столкновения являются мгновенными событиями, внезапно меняющими скорость электрона.
3. Вероятность для электрона испытать столкновение за единицу времени равна $\frac{1}{r}$

4. Состояние термодинамического равновесия достигается благодаря столкновениям.

Применяя выводы молекулярно-кинетической теории газов, можно оценить среднюю скорость теплового движения электронов:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad \text{При T~300 К} \qquad \langle \upsilon \rangle \approx 10^5 \ м/с$$

Включаем поле: на хаотическое движение электронов со скоростью <υ> накладывается упорядоченное движение со средней скоростью <u>.

Допустимая плотность тока для медного проводника $\quad j \approx 10^7 \ А/м^2 \qquad n=10^{29}$ м$^{-3}$

Плотность тока: j=ne<u>

$$\langle u \rangle = \frac{j}{ne} \approx \frac{10^7 \ А/м^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \ Кл \ 10^{29} \ 1/м^3} \approx 10^{-3} \ \frac{м}{с}$$

$\langle u \rangle < \langle \upsilon \rangle$ в 10^8 раз. Поэтому при вычислениях результирующую скорость $\langle \upsilon \rangle + \langle u \rangle$ можно заменять скоростью теплового движения $\langle \upsilon \rangle$.

Найдем изменение среднего значения кинетической энергии электронов, вызванное полем.

$$\left\langle (\vec{\upsilon} + \vec{u})^2 \right\rangle = \left\langle \vec{\upsilon}^2 \right\rangle + 2\left\langle \vec{\upsilon} \right\rangle \left\langle \vec{u} \right\rangle + \left\langle \vec{u}^2 \right\rangle \qquad \left\langle \vec{\upsilon} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

Упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов в среднем на:

$$\left\langle \Delta E_k \right\rangle = \frac{m\left\langle u^2 \right\rangle}{2}$$

33. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах.

Предположения:

1. После соударения с кристаллической решеткой скорость упорядоченного движения электрона равна нулю.
2. Пусть напряженность поля не меняется.

Со стороны поля заряд е испытывает действие силы F = eE и приобретает ускорение a=F/m=eE/m.

Во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$\langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{m}\tau$$

где τ — время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

$$\tau = \frac{\lambda}{\upsilon} \qquad \langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{m}\frac{\lambda}{\upsilon} \qquad \langle u \rangle = \frac{1}{2}\langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}$$

$$j = ne\langle u \rangle \qquad \boxed{j = \frac{ne^2}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}E}$$

Закон Ома

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}} \qquad \boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}}$$

j - плотность тока,

λ- электрическая проводимость,

E - напряжённость,

p- удельное электрическое сопротивление,

e - элементарный заряд $= 1,6 * 10^{-19}$, n - концентрация электронов

(закон Ома хорошо расписан на [Вики])

Интегральная и дифференциальная форма закона Ома:

Рассмотрим **неоднородный участок цепи**, где $\mathcal{E}_{12}$, - действующая э.д.с. на участке цепи

($\varphi_1 - \varphi_2$) - разность потенциалов

Работа, совершаемая над зарядом, равна: $$dA = (\varphi_1 - \varphi_2)dq + \varepsilon_{12}dq$$

За время dt выделяется тепло $$dQ = I^2Rdt = IRdq$$

dA=dQ $$(\varphi_1 - \varphi_2)dq + \varepsilon_{12}dq = IRdq$$

$$\boxed{I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}}$$

- закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме

при $\varepsilon_{12} = 0$ $\quad I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$ однородный участок цепи

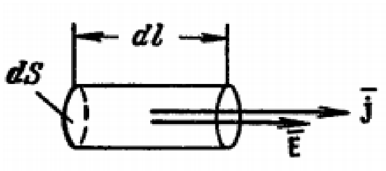
при $\varphi_1 = \varphi_2$ $\quad I = \frac{\varepsilon}{R}$ замкнутая цепь

В общем случае $R=r+R_н$, где r — внутреннее сопротивление источника тока, $R_н$—сопротивление внешней цепи.

В <u>дифференциальной форме закон Ома</u> при наличии сторонних сил:

$$\boxed{\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{cm})}$$

Закон Ома можно представить в дифференциальной форме.



$$dI = jdS \qquad dU = Edl$$

$$dI = \frac{dU}{R} \qquad R = \rho\frac{dl}{dS}$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \lambda\vec{E}} \qquad jdS = \frac{EdldS}{\rho dl} \;\rightarrow\; j = \frac{1}{\rho}E$$

— закон Ома в дифференциальном форме, связывает плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в этой же точке.

34. Закон Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество тепла, выделяющееся в проводнике пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени прохождения тока.

Интегральная форма:

$$\boxed{Q = RI^2 t}$$ - **закон Джоуля—Ленца**

Если сила тока изменяется со временем, то:

$$\boxed{Q = \int_0^t RI^2 dt}$$

При этом силы поля совершают работу: $dA=Udq=Uidt=RI^2dt$

Т.о., нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами поля над носителями заряда.

По закону Джоуля — Ленца, за время dt в этом объеме выделится теплота:

$$dQ = RI^2 dt$$

$$R = p\frac{dl}{dS} \qquad dl = jdS \qquad dQ = \frac{pdl}{dS}(jdS)^2 dt = pj^2 dldSdt$$

$$dQ = pj^2 dVdt$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется удельной тепловой мощностью тока.

Используя дифференциальную форму закона Ома $(j = \lambda E)$и соотношение $p = \frac{1}{\lambda}$, получим.

Формулы $\boxed{w = \rho j^2}$ $\boxed{w = \lambda E^2}$ являются обобщенным выражением закона Джоуля—Ленца в дифференциальной форме.

35. Плотность тока. Уравнение непрерывности для плотности тока. Постоянный электрический ток

38. Магнитное взаимодействие постоянных токов.

Электрические заряды или токи – это источники магнитного поля. Магнитные поля возникают в пространстве, окружающем проводники с током, так же, как в пространстве, окружающем неподвижные электрические заряды, возникают электрические поля. Магнитные поля постоянных магнитов тоже создаются электрическими микротоками, которые циркулируют внутри молекул вещества (согласно гипотезе Ампера).

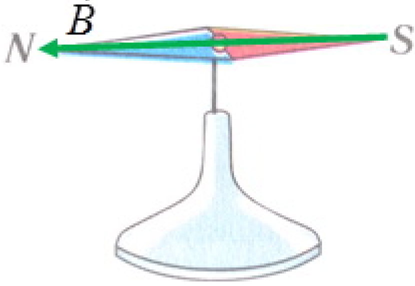
Для описания магнитных полей введем силовую характеристику поля, которая аналогична вектору напряженности → E
электрических полей. Данной характеристикой будет вектор магнитной индукции →B
он определяет силы, действующие на токи или движущиеся заряды в магнитных полях.

Положительным направлением вектора →B будет направление от южного полюса S к северному полюсу N магнитной стрелки, свободно ориентирующееся в магнитном поле. Так, при исследовании магнитных полей, создаваемых током или постоянным магнитом, при помощи маленькой магнитной стрелки, в каждой точке пространства определяется направление вектора →B. Данный опыт позволяет наглядно воспроизвести пространственную структуру магнитных полей.

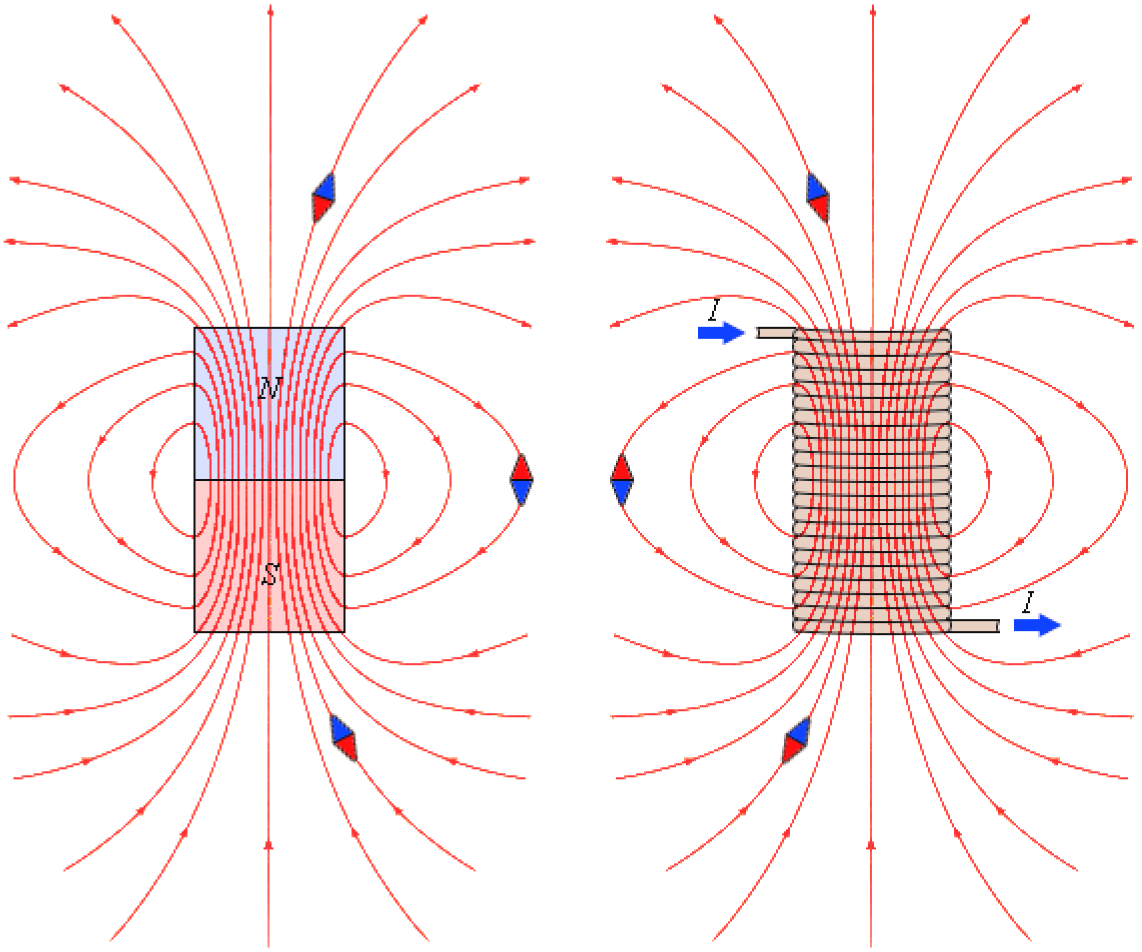
По аналогии построения силовых линий в электростатике строятся линии магнитной индукции, в каждой точке которых вектор →B направляется по касательной.

Вектор магнитной индукции

Силовой характеристикой магнитного поля в каждой его точке является векторная величина
, называемая вектором магнитной индукции поля.
За направление вектора магнитной индукции
принимается то, в котором устанавливается свободная (воображаемая) магнитная стрелка, или нормаль к витку с током.



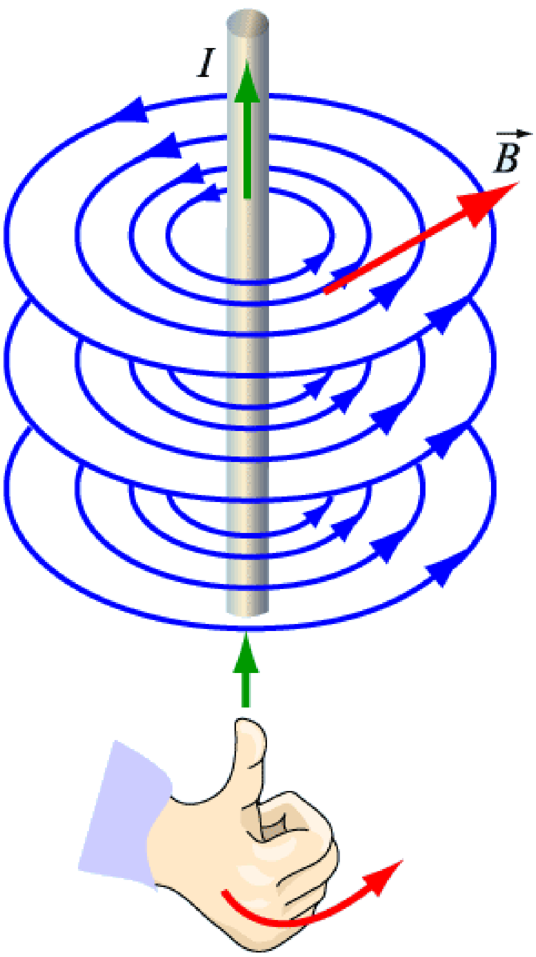
Вектор индукции магнитного поля
направлен от южного полюса
стрелки (свободно вращающейся в магнитном поле) к северному
.

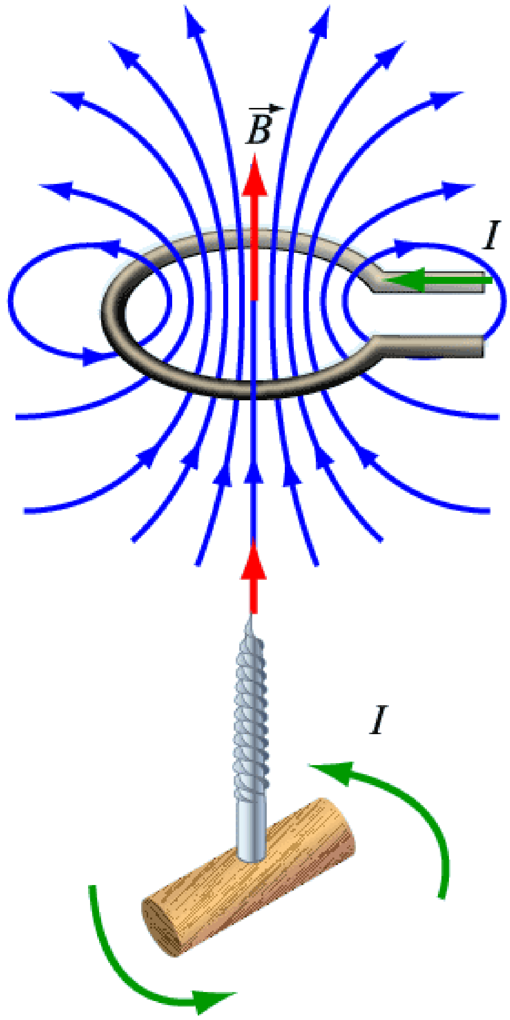


Модуль магнитной индукции определяется как отношение максимальной силы Fmax, с которой магнитное поле действует на проводник единичной длины
L = 1м, к силе тока в проводнике:

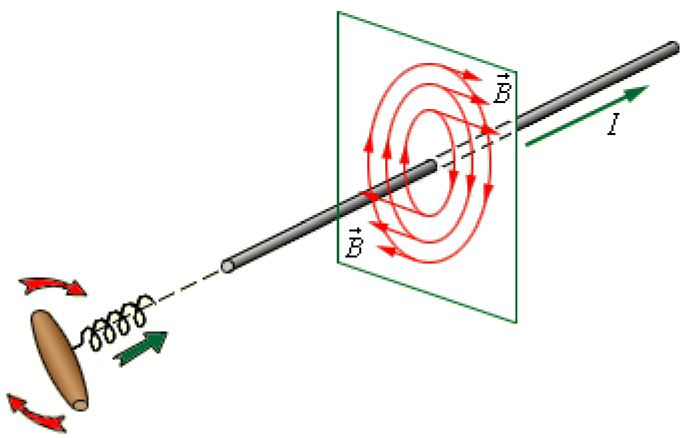
$$B = \frac{F_{max}}{I \cdot L}$$

В СИ единицей индукции магнитного поля является 1 Тесла (Тл): Тл=Н/Ам
Магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами (токами). Для определения направления вектора индукции магнитного поля в проводнике с током применяют правило буравчика, или правило правой руки:





- *для прямого проводника* с током правило правой руки имеет следующий вид: большой палец правой руки направляем по току, тогда четыре согнутых пальца, обхватывающих проводник, укажут направление вектора индукции магнитного поля



- *для витка (катушки)* с током правило правой руки имеет следующий вид: четыре согнутых пальца правой руки, обхватывающих виток (катушку), направляем по току , тогда большой палец укажет направление вектора индукции магнитного поля в центре витка.

39. Вычисление B от системы линейных токов. Закон Био-Савара-Лапласа.

В 1820 г. французские физики Жан Батист Био и Феликс Савар, провели исследования магнитных полей токов различной формы. А французский математик Пьер Лаплас обобщил эти исследования. Он проанализировал экспериментальные данные и сделал вывод, что *магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма* (*суперпозиция*) *полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока*:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

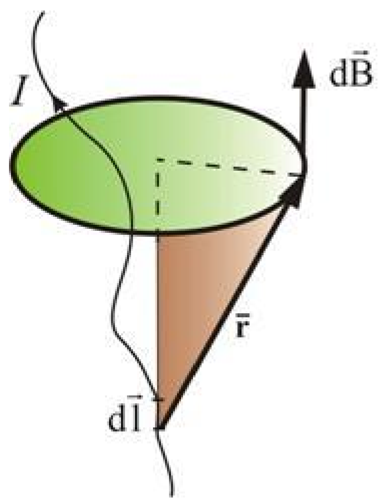
Элемент тока длины d*l* (рис. 1.4) ***создает поле с магнитной индукцией***:

$$dB = k\frac{I dl}{r^2}, \qquad (1.2.1)$$

или в векторной форме:

$$d\vec{B} = k\frac{I[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}, \qquad (1.2.2)$$

Это и есть ***закон Био–Савара–Лапласа***, полученный экспериментально.



Здесь *I* – ток; $\mathrm{d}\vec{l}$ – вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, куда течет ток; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока в точку, в которой мы определяем $\mathrm{d}\vec{B}$; *r* – модуль радиус-вектора; *k* – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

Как видно из рисунка, *вектор магнитной индукции* $\mathrm{d}\vec{B}$ *направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через* $\mathrm{d}\vec{l}$ *и точку, в которой вычисляется поле*.

Направление $\mathrm{d}\vec{B}$ связано с направлением $\mathrm{d}\vec{l}$ *«**правилом буравчика**»*: *направление вращения головки винта дает направление* $\mathrm{d}\vec{B}$*, поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.*

Таким образом, *закон Био–Савара–Лапласа устанавливает величину и направление вектора* $\mathrm{d}\vec{B}$ *в произвольной точке магнитного поля, созданного проводником* $\mathrm{d}\vec{l}$ *с током I.*

Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{B}$ определяется соотношением:

$$\mathrm{d}B = k\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}, \qquad (1.2.3)$$

где α – угол между $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{r}$; *k* – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

В международной системе единиц СИ закон Био–Савара–Лапласа для вакуума можно записать так:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}, \qquad (1.2.4)$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

40. Взаимодействие токов. Закон Ампера

Одним из проявлений магнитного поля является его силовое воздействие на проводник с током, помещенный в магнитное поле. Ампером было установлено, что на проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле, индукция которого B, действует сила, пропорциональная силе тока и индукции магнитного поля:

$$F = IB\ell\sin\alpha \quad (15.22)$$

[α — угол между направлением тока в проводнике и индукцией магнитного поля].

Эта формула оказывается справедливой для прямолинейного проводника и однородного поля.

Если проводник имеет произвольную форму и поле неоднородно то выражение (3.125) принимает вид

$$dF = IBd\ell\sin\alpha \quad (15.23)$$

или в векторной форме

$$F = I\left[d\vec{\ell} \times B\right] \quad (15.24)$$

[$d\ell$ — малый участок проводника, имеющий направление, совпадающее с направлением тока]. Произведение $Id\ell$ называют *элементом тока.* Соотношения (15.23), (15.24) выражают ***закон Ампера.***

Для определения направления силы, действующей на проводник с током, помещенный в магнитное поле, применяется ***правило левой руки***: *если левую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а вытянутые четыре пальца совпадали с направлением тока в проводнике, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на проводник с током, помещенный в магнитное поле* (рис. 15.10).

Эта сила всегда перпендикулярна плоскости, в которой лежат проводник и вектор B. Зная направление и модуль силы, действующей на любой участок $d\ell$ проводника, можно вычислить силу, действующую на весь проводник. Для этого нужно найти сумму сил, действующих на все

участки проводника: $F = \int_1^2 dF$

Используя закон Ампера, рассмотрим ***взаимодействие параллельных проводников с током*** (рис. 15.11). Предположим, что в однородной изотропной среде, относительная магнитная проницаемость которой μ, на расстоянии d друг от друга расположены два проводника. Пусть по одному из них течет ток I_1 а по другому - I_2 в одном направлении.

Выделим на проводнике 2 элемент$d\ell_2$. На этот элемент будет действовать сила Ампера

$$dF_i = B_1 I_2 \cdot d\ell_i$$

[$B_1 = \frac{\mu_0 \mu \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$ — индукция магнитного поля, создаваемого первым проводником в месте нахождения второго проводника].

Вектор B направлен перпендикулярно направлению току *I,* поэтому sinα=1. Учитывая это, находим

$$dF_i = \frac{\mu_0 \mu \cdot I_1 I_2}{2\pi \cdot d} d\ell_i \quad (15.25)$$

Применяя правило левой руки, определяем направление этой силы. Чтобы определить силу F_{12}, т. е. силу, действующую со стороны проводника *1* на проводник 2, нужно просуммировать все элементарные силы dF_i

$$F_{12} = \int_0^1 F_i = \int_1^2 \frac{\mu_0 \mu \cdot I_1 I_2}{2\pi \cdot d} d\ell_i = \frac{\mu_0 \mu \cdot I_1 I_2}{2\pi \cdot d} \int_1^2 d\ell = \frac{\mu_0 \mu \cdot I_1 I_2}{2\pi \cdot d} \ell \quad (15.26)$$

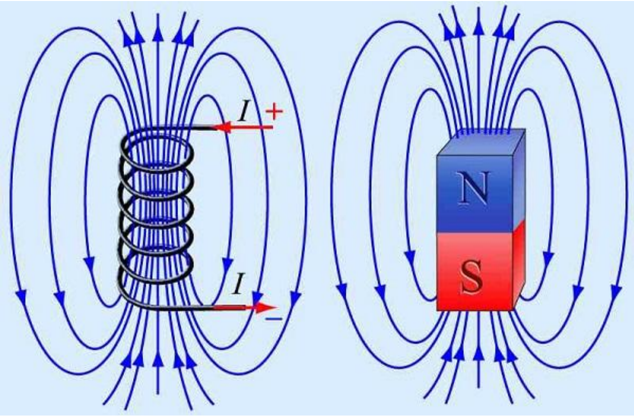
Сила, с которой с которой взаимодействуют два проводника пропорциональна произведению токов, текущих по проводникам, и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

Если по проводникам текут токи в одинаковых направлениях, то проводники притягиваются, а в противоположных – отталкиваются.

Закон Ампера является основным в учении о магнетизме и играет такую же роль, как и закон Кулона в электростатике.

41. Свойство МП. Циркуляция В, ротор В, закон полного тока в интегральной и дифференциальной формах.

Магнитное поле это материя, которая возникает вокруг источников электрического тока, а также вокруг постоянных магнитов. В пространстве магнитное поле отображается как совокупление сил, которые способны оказать воздействие на намагниченные тела. Это действие объясняется наличием движущих разрядов на молекулярном уровне.



Магнитное поле формируется только вокруг электрических зарядов, которые находятся в движении. Именно поэтому магнитное и электрическое поле являются, неотъемлемыми и вместе формируют *электромагнитное поле*. Компоненты магнитного поля взаимосвязаны и воздействуют друг на друга, изменяя свои свойства.

Свойства магнитного поля:

1. Магнитное поле возникает под воздействие движущихся зарядов электрического тока.

2. В любой своей точке магнитное поле характеризуется вектором физической величины под названием *магнитная индукция*, которая является силовой характеристикой магнитного поля.

3. Магнитное поле может воздействовать только на магниты, на токопроводящие проводники и движущиеся заряды.

4. Магнитное поле может быть постоянного и переменного типа

5. Магнитное поле измеряется только специальными приборами и не может быть воспринятым органами чувств человека.

6. Магнитное поля является электродинамическим, так как порождается только при движении заряженных частиц и оказывает влияние только на заряды, которые находятся в движении.

7. Заряженные частицы двигаются по перпендикулярной траектории.

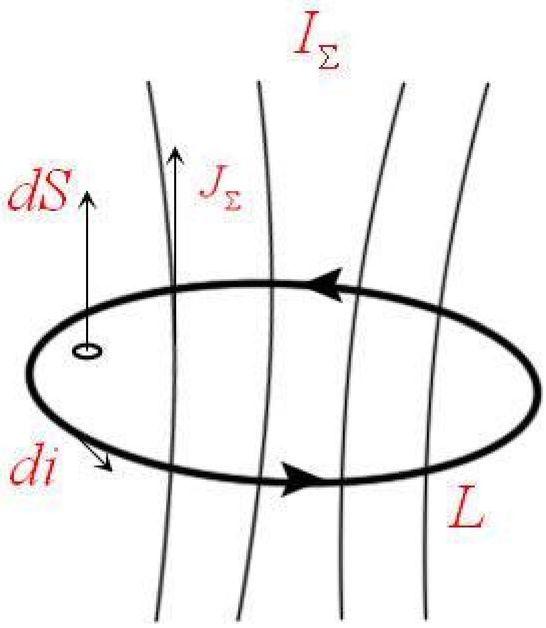
Размер магнитного поля зависит от скорости изменения магнитного поля. Соответственно этому признаку существуют два вида магнитного поля: *динамичное магнитное поле* и *гравитационное магнитное поле*. **Гравитационное магнитное поле** возникает только вблизи элементарных частиц и формируется в зависимости от особенностей строения этих частиц.

Магнитный момент возникает в том случае, когда магнитное поле воздействует на токопроводящую раму. Другими словами, магнитный момент это вектор, который расположен на ту линию, которая идет перпендикулярно раме.

Закон полного тока

Проанализируем рисунок ниже, воображаемый контур ***L*** в пространстве, ограничивающий поверхность ***S***.

На этом контуре установим направление обхода так, чтобы движение с конца вектора вдоль контура элементарной площадки dS прослеживалось в направлении против часовой стрелки.



Далее представим то, что поверхность S пронизывается отдельной системой токов, которая может нести как дискретный характер (к примеру, систему отдельных проводников), так и быть непрерывно распределенной (электронный поток может послужить этому примером). Не обуславливая тем временем физической природы данных токов, будем подразумевать для конкретности, что они распределены непрерывно в пространстве с кое-какой плотностью J_Σ

То теперь полный ток, пронизывающий контур, найдется в виде

$$I_\Sigma = \int_s J_\Sigma dS$$

Закон полного тока говорит о том, что циркуляция по контуру ***L*** вектора напряженности магнитного поля, инициированного протеканием тока I_Σ равна полному току, то есть.

$$\oint_L H dI = I_\Sigma$$

Закон полного тока формулирует соотношение выше в интегральной форме.

В том, чтобы связать плотность полного тока в данной гонке с напряженностью магнитного поля, то есть найти дифференциальную форму данного закона, надлежит употребить знаменитой теоремой Стикса из векторного анализа, которая говорит нам о том, что для каждого векторного поля ***A*** верно равенство

$$\oint_L A d1 = \int_s rotA dS$$

Использовав крайнюю формулу и перестроив с её помощью

$$\oint B dS = 0$$

будем располагать

$$\oint_L H dI = \int_s rotH dS = \int_s J_\Sigma dS$$

откуда получим из-за произвольности выбранного контура

$$rotH = J_\Sigma$$

Формула выше несёт в себе закон полного тока в дифференциальной форме. Заметим, что при помощи закона полного тока в интегральной форме удается разрешить ряд задач, связанных по нахождению магнитного поля заданных токов.