41|动态规划理论：一篇文章带你彻底搞懂最优子结构、无后效性和重复子问题

上一节，我通过两个非常经典的问题，向你展示了用动态规划解决问题的过程。现在你对动态规划应该有了一个初步的认识。

今天，我主要讲动态规划的一些理论知识。学完这节内容，可以帮你解决这样几个问题：什么样的问题可以用动态规划解决？解决动态规划问题的一般思考过程是什么样的？贪心、分治、回溯、动态规划这四种算法思想又有什么区别和联系？

理论的东西都比较抽象，不过你不用担心，我会结合具体的例子来讲解，争取让你这次就能真正理解这些知识点，也为后面的应用和实战做好准备。

“一个模型三个特征”理论讲解

什么样的问题适合用动态规划来解决呢？换句话说，动态规划能解决的问题有什么规律可循呢？实际上，动态规划作为一个非常成熟的算法思想，很多人对此已经做了非常全面的总结。我把这部分理论总结为“一个模型三个特征”。

首先，我们来看，什么是“一个模型”？它指的是动态规划适合解决的问题的模型。我把这个模型定义为“多阶段决策最优解模型”。下面我具体来给你讲讲。

我们一般是用动态规划来解决最优问题。而解决问题的过程，需要经历多个决策阶段。每个决策阶段都对应着一组状态。然后我们寻找一组决策序列，经过这组决策序列，能够产生最终期望求解的最优值。

现在，我们再来看，什么是“三个特征”？它们分别是最优子结构、无后效性和重复子问题。这三个概念比较抽象，我来逐一详细解释一下。

1.最优子结构

最优子结构指的是，问题的最优解包含子问题的最优解。反过来说就是，我们可以通过子问题的最优解，推导出问题的最优解。如果我们把最优子结构，对应到我们前面定义的动态规划问题模型上，那我们也可以理解为，后面阶段的状态可以通过前面阶段的状态推导出来。

2.无后效性

无后效性有两层含义，第一层含义是，在推导后面阶段的状态的时候，我们只关心前面阶段的状态值，不关心这个状态是怎么一步一步推导出来的。第二层含义是，某阶段状态一旦确定，就不受之后阶段的决策影响。无后效性是一个非常“宽松”的要求。只要满足前面提到的动态规划问题模型，其实基本上都会满足无后效性。

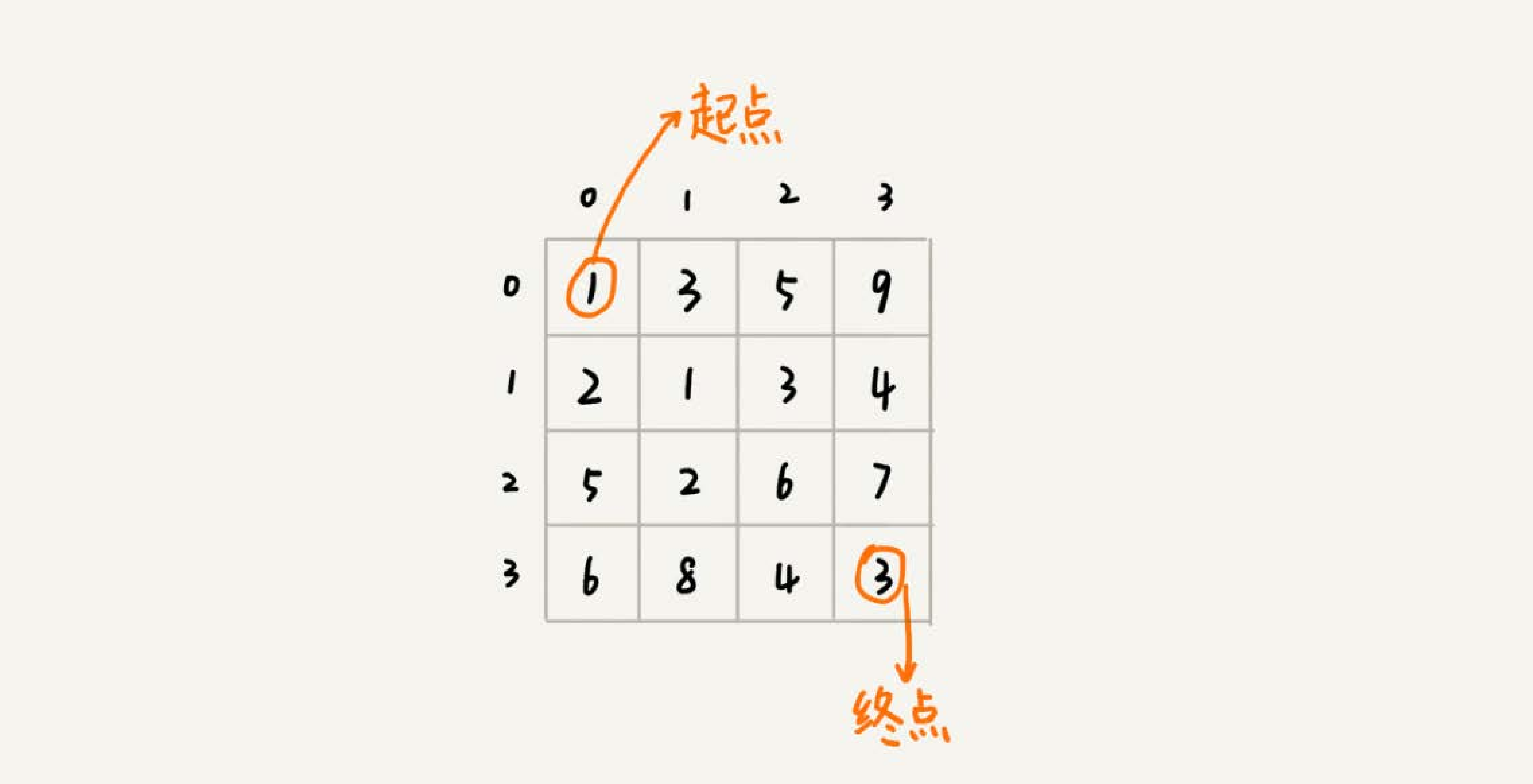
3.重复子问题

这个概念比较好理解。前面一节，我已经多次提过。如果用一句话概括一下，那就是，不同的决策序列，到达某个相同的阶段时，可能会产生重复的状态。

“一个模型三个特征”实例剖析

“一个模型三个特征”这部分是理论知识，比较抽象，你看了之后可能还是有点懵，有种似懂非懂的感觉，没关系，这个很正常。接下来，我结合一个具体的动态规划问题，来给你详细解释。

假设我们有一个n乘以n的矩阵w[n][n]。矩阵存储的都是正整数。棋子起始位置在左上角，终止位置在右下角。我们将棋子从左上角移动到右下角。每次只能向右或者向下移动一位。从左上角到右下角，会有很多不同的路径可以走。我们把每条路径经过的数字加起来看作路径的长度。那从左上角移动到右下角的最短路径长度是多少呢？



符合多阶段决策最优

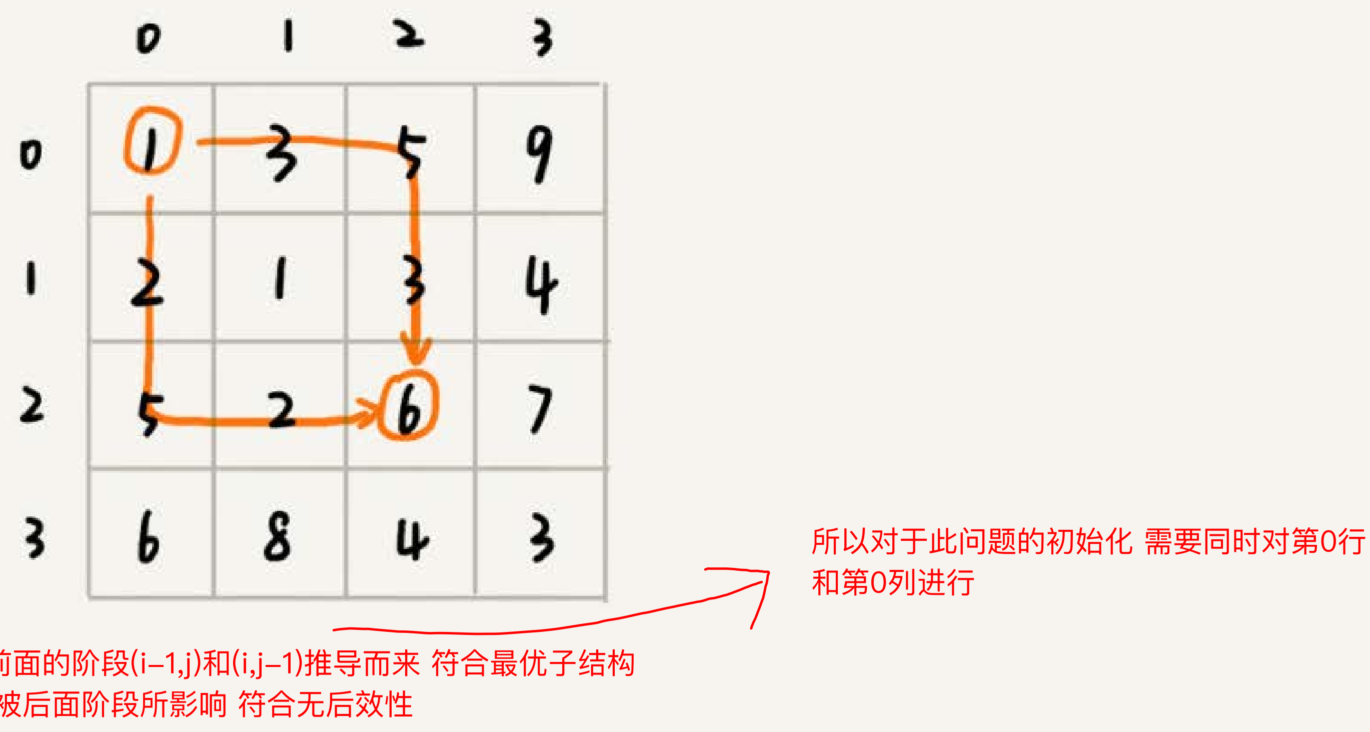
我们先看看，这个问题是否符合“一个模型”？

从(0, 0)走到(n-1, n-1)，总共要走2*(n-1)步，也就对应着2*(n-1)个阶段。每个阶段都有向右走或者向下走两种决策，并且每个阶段都会对应一个状态集合。

我们把状态定义为min_dist(i, j)，其中i表示行，j表示列。min_dist表达式的值表示从(0, 0)到达(i, j)的最短路径长度。所以，这个问题是一个多阶段决策最优解问题，符合动态规划的模型。

我们再来看，这个问题是否符合"三个特征"？

我们可以用回溯算法来解决这个问题。如果你自己写一下代码，画一下递归树，就会发现，递归树中有重复的节点。重复的节点表示，从左上角到节点对应的位置，有多种路线，这也能说明这个问题中存在重复子问题。



如果我们走到(i, j)这个位置，我们只能通过(i-1, j)，(i, j-1)这两个位置移动过来，也就是说，我们想要计算(i, j)位置对应的状态，只需要关心(i-1, j)，(i, j-1)两个位置对应的状态，并不关心棋子是通过什么样的路线到达这两个位置的。而且，我们仅仅允许往下和往右移动，不允许后退，所以，前面阶段的状态确定之后，不会被后面阶段的决策所改变，所以，这个问题符合"无后效性"这一特征。

刚刚定义状态的时候，我们把从起始位置(0, 0)到(i, j)的最小路径，记作min_dist(i, j)。因为我们只能往右或往下移动，所以，我们只有可能从(i, j-1)或者(i-1, j)两个位置到达(i, j)。也就是说，到达(i, j)的最短路径要么经过(i, j-1)，要么经过(i-1, j)，而且到达(i, j)的最短路径肯定包含到达这两个位置的最短路径之一。换句话说就是，min_dist(i, j)可以通过min_dist(i, j-1)和min_dist(i-1, j)两个状态推导出来。这就说明，这个问题符合"最优子结构"。

min_dist(i, j) = w[i][j] + min(min_dist(i, j-1), min_dist(i-1, j))

两种动态规划解题思路总结

刚刚我讲了，如何鉴别一个问题是否可以用动态规划来解决。现在，我再总结一下，动态规划解题的一般思路，让你面对动态规划问题的时候，能够有章可循，不至于束手无策。

我个人觉得，解决动态规划问题，一般有两种思路。我把它们分别叫作，状态转移表法和状态转移方程法。

1.状态转移表法

状态表一般都是二维的

先尝试用回溯+备忘录(记录前面阶段的状态)能否解决

如果问题复杂 超过三维 则不适合

一般能用动态规划解决的问题，都可以使用回溯算法的暴力搜索解决。所以，当我们拿到问题的时候，我们可以先用简单的回溯算法解决，然后定义状态，每个状态表示一个节点，然后对应画出递归树。从递归树中，我们很容易可以看出来，是否存在重复子问题，以及重复子问题是如何产生的。以此来寻找规律，看是否能用动态规划解决。

找到重复子问题之后，接下来，我们有两种处理思路，第一种是直接用回溯加“备忘录”的方法，来避免重复子问题。从执行效率上来讲，这跟动态规划的解决思路没有差别。第二种是使用动态规划的解决方法，状态转移表法。第一种思路，我就不讲了，你可以看看上一节的两个例子。我们重点来看状态转移表法是如何工作的。

我们先画出一个状态表。状态表一般都是二维的，所以你可以把它想象成二维数组。其中，每个状态包含三个变量，行、列、数组值。我们根据决策的先后过程，从前往后，根据递推关系，分阶段填充状态表中的每个状态。最后，我们将这个递推填表的过程，翻译成代码，就是动态规划代码了。

尽管大部分状态表都是二维的，但是如果问题的状态比较复杂，需要很多变量来表示，那对应的状态表可能就是高维的，比如三维、四维。那这个时候，我们就不适合用状态转移表法来解决了。一方面是因为高维状态转移表不好画图表示，另一方面是因为人脑确实很不擅长思考高维的东西。

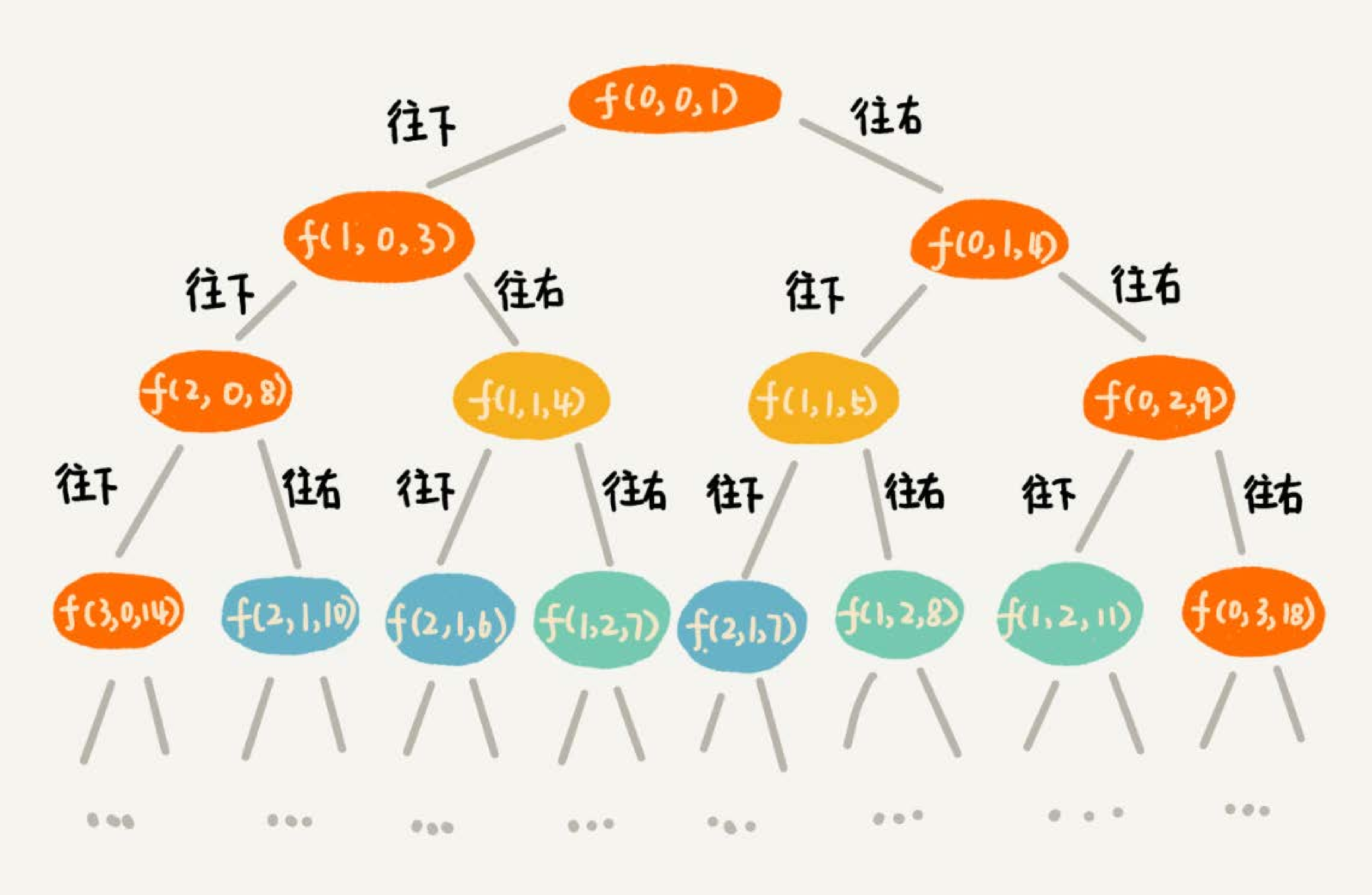
现在，我们来看一下，如何套用这个状态转移表法，来解决之前那个矩阵最短路径的问题？

从起点到终点，我们有很多种不同的走法。我们可以穷举所有走法，然后对比找出一个最短走法。不过如何才能无重复又不遗漏地穷举出所有走法呢？我们可以用回溯算法这个比较有规律的穷举算法。

回溯算法的代码实现如下所示。代码很短，而且我前面也分析过很多回溯算法的例题，这里我就不多做解释了，你自己来看看。

```
private int minDist = Integer.MAX_VALUE; // 全局变量或者成员变量
// 调用方式：minDistBacktracing(0, 0, 0, w, n);
public void minDistBT(int i, int j, int dist, int[][] w, int n) {
  // 到达了n-1, n-1这个位置了，这里看着有点奇怪哈，你自己举个例子看下
  if (i == n && j == n) {
    if (dist < minDist) minDist = dist;      走到终点才回溯。。
    return;
  }
  if (i < n) { // 往下走，更新i=i+1, j=j
    minDistBT(i + 1, j, dist+w[i][j], w, n);
  }
  if (j < n) { // 往右走，更新i=i, j=j+1
    minDistBT(i, j+1, dist+w[i][j], w, n);
  }
}
```

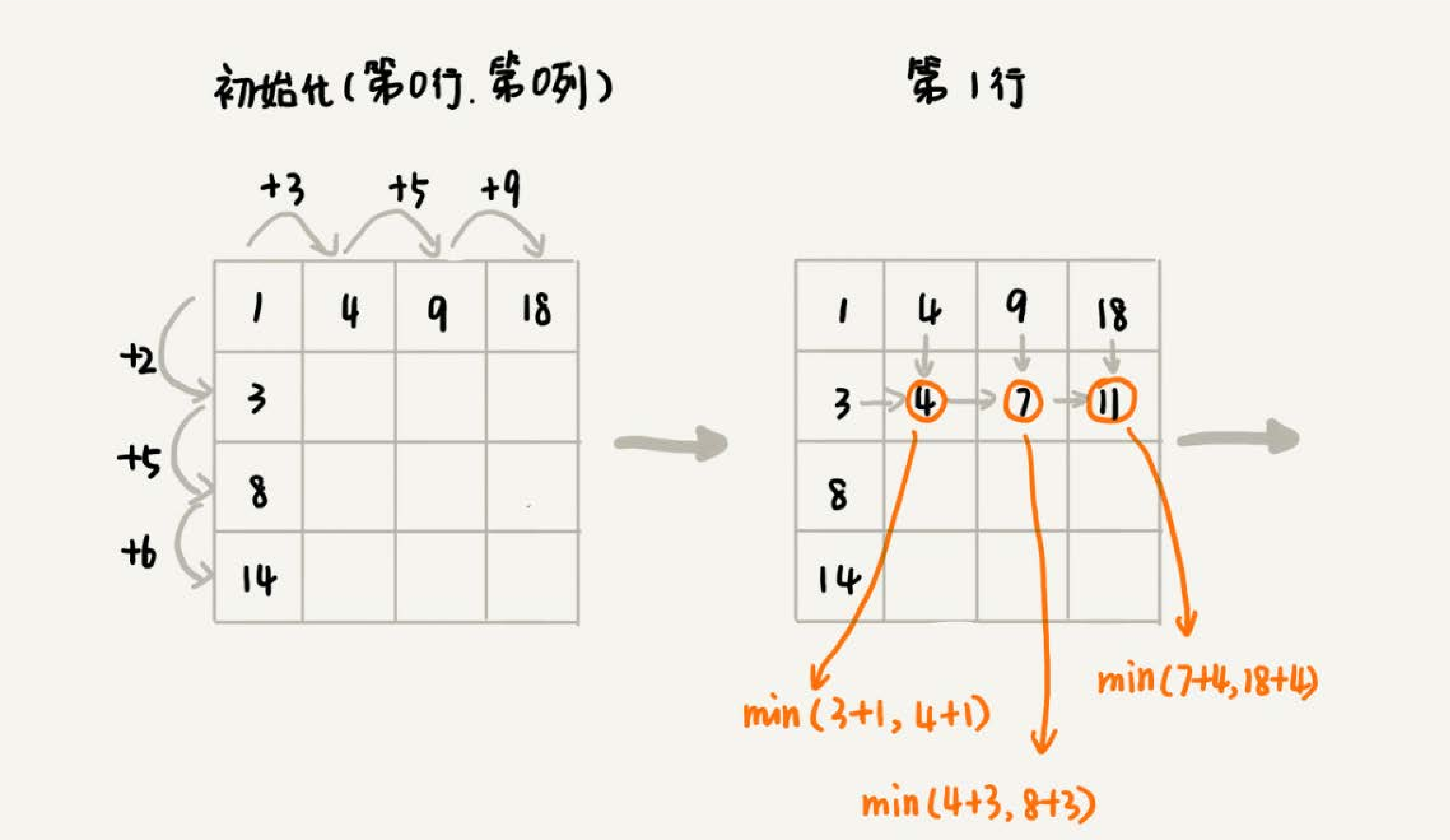
有了回溯代码之后，接下来，我们要画出递归树，以此来寻找重复子问题。在递归树中，一个状态（也就是一个节点）包含三个变量(i, j, dist)，其中i，j分别表示行和列，dist表示从起点到达(i, j)的路径长度。从图中，我们看出，尽管(i, j, dist)不存在重复的，但是(i, j)重复的有很多。对于(i, j)重复的节点，我们只需要选择dist最小的节点，继续递归求解，其他节点就可以舍弃了。

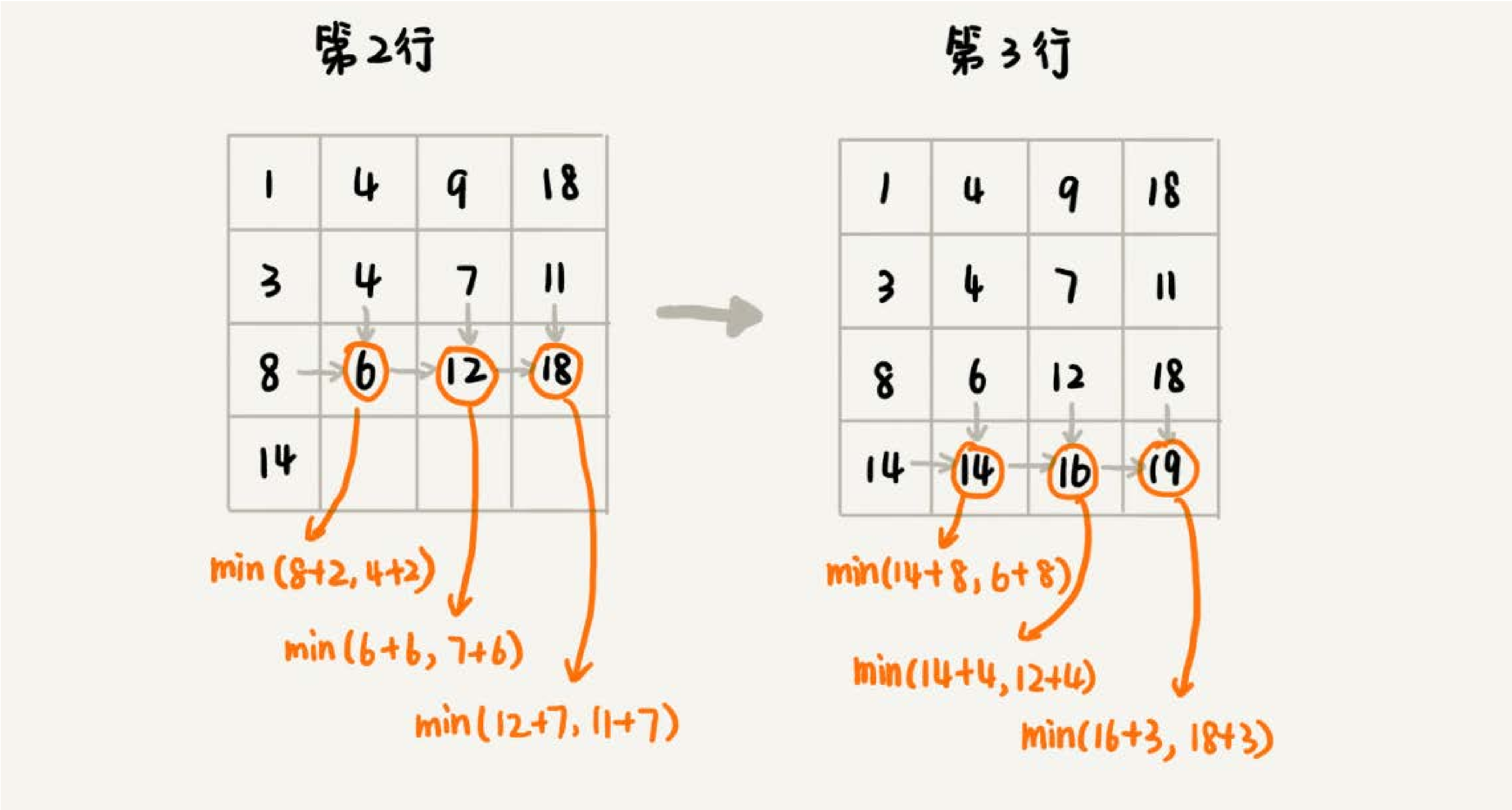


既然存在重复子问题，我们就可以尝试看下，是否可以用动态规划来解决呢？

我们画出一个二维状态表，表中的行、列表示棋子所在的位置，表中的数值表示从起点到这个位置的最短路径。我们按照决策过程，通过不断状态递推演进，将

状态表填好。为了方便代码实现，我们按行来进行依次填充。





弄懂了填表的过程，代码实现就简单多了。我们将上面的过程，翻译成代码，就是下面这个样子。结合着代码、图和文字描述，应该更容易理解我讲的内容。

```
public int minDistDP(int[][] matrix, int n) {
  int[][] states = new int[n][n];
  int sum = 0;
  for (int j = 0; j < n; ++j) { // 初始化states的第一行数据
    sum += matrix[0][j];
    states[0][j] = sum;
  }
  sum = 0;
  for (int i = 0; i < n; ++i) { // 初始化states的第一列数据
    sum += matrix[i][0];
    states[i][0] = sum;
  }
```

```
  for (int i = 1; i < n; ++i) {
    for (int j = 1; j < n; ++j) {
      states[i][j] =
            matrix[i][j] + Math.min(states[i][j-1], states[i-1][j]);
    }
  }
  return states[n-1][n-1];
}
```

2.状态转移方程法

状态转移方程法有点类似递归的解题思路。我们需要分析，某个问题如何通过子问题来递归求解，也就是所谓的最优子结构。根据最优子结构，写出递归公式，也就是所谓的状态转移方程。有了状态转移方程，代码实现就非常简单了。一般情况下，我们有两种代码实现方法，一种是递归加“备忘录”，另一种是迭代递推。

我们还是拿刚才的例子来举例。最优子结构前面已经分析过了，你可以回过头去再看下。为了方便你查看，我把状态转移方程放到这里。

min_dist(i, j) = w[i][j] + min(min_dist(i, j-1), min_dist(i-1, j))

这里我强调一下，状态转移方程是解决动态规划的关键。如果我们能写出状态转移方程，那动态规划问题基本上就解决一大半了，而翻译成代码非常简单。但是很多动态规划问题的状态本身就不好定义，状态转移方程也就更不好想到。

下面我用递归加“备忘录”的方式，将状态转移方程翻译成来代码，你可以看看。对于另一种实现方式，跟状态转移表法的代码实现是一样的，只是思路不同。

```
private int[][] matrix =
        {{1，3，5，9}, {2，1，3，4}，{5，2，6，7}，{6，8，4，3}};
private int n = 4;
private int[][] mem = new int[4][4];
public int minDist(int i, int j) { // 调用minDist(n-1, n-1);
  if (i == 0 && j == 0) return matrix[0][0];
  if (mem[i][j] > 0) return mem[i][j];
  int minLeft = Integer.MAX_VALUE;
  if (j-1 >= 0) {
    minLeft = minDist(i, j-1);
  }
  int minUp = Integer.MAX_VALUE;
  if (i-1 >= 0) {
    minUp = minDist(i-1, j);
  }

  int currMinDist = matrix[i][j] + Math.min(minLeft, minUp);
  mem[i][j] = currMinDist;
  return currMinDist;
}
```

递归到(0,0)时 返回递归

递归终止条件

递归 从尾状态递归到头状态 从头开始 (n–1,0)==>(n–1,n–1)

递归结束 minLeft和minUp此时都有值

两种动态规划解题思路到这里就讲完了。我要强调一点，不是每个问题都同时适合这两种解题思路。有的问题可能用第一种思路更清晰，而有的问题可能用第二种思路更清晰，所以，你要结合具体的题目来看，到底选择用哪种解题思路。

四种算法思想比较分析

到今天为止，我们已经学习了四种算法思想，贪心、分治、回溯和动态规划。今天的内容主要讲些理论知识，我正好一块儿也分析一下这四种算法，看看它们之间有什么区别和联系。

如果我们将这四种算法思想分一下类，那贪心、回溯、动态规划可以归为一类，而分治单独可以作为一类，因为它跟其他三个都不大一样。为什么这么说呢？前

三个算法解决问题的模型，都可以抽象成我们今天讲的那个多阶段决策最优解模型，而分治算法解决的问题尽管大部分也是最优解问题，但是，大部分都不能抽象成多阶段决策模型。

回溯算法是个“万金油”。基本上能用的动态规划、贪心解决的问题，我们都可以用回溯算法解决。回溯算法相当于穷举搜索。穷举所有的情况，然后对比得到最优解。不过，回溯算法的时间复杂度非常高，是指数级别的，只能用来解决小规模数据的问题。对于大规模数据的问题，用回溯算法解决的执行效率就很低了。

尽管动态规划比回溯算法高效，但是，并不是所有问题，都可以用动态规划来解决。能用动态规划解决的问题，需要满足三个特征，最优子结构、无后效性和重复子问题。在重复子问题这一点上，动态规划和分治算法的区分非常明显。分治算法要求分割成的子问题，不能有重复子问题，而动态规划正好相反，动态规划之所以高效，就是因为回溯算法实现中存在大量的重复子问题。

贪心算法实际上是动态规划算法的一种特殊情况。它解决问题起来更加高效，代码实现也更加简洁。不过，它可以解决的问题也更加有限。它能解决的问题需要满足三个条件，最优子结构、无后效性和贪心选择性（这里我们不怎么强调重复子问题）。

其中，最优子结构、无后效性跟动态规划中的无异。“贪心选择性”的意思是，通过局部最优的选择，能产生全局的最优选择。每一个阶段，我们都选择当前看起来最优的决策，所有阶段的决策完成之后，最终由这些局部最优解构成全局最优解。

内容小结

今天的内容到此就讲完了，我带你来复习一下。

我首先讲了什么样的问题适合用动态规划解决。这些问题可以总结概括为“一个模型三个特征”。其中，“一个模型”指的是，问题可以抽象成分阶段决策最优解模型。“三个特征”指的是最优子节、无后效性和重复子问题。

然后，我讲了两种动态规划的解题思路。它们分别是状态转移表法和状态转移方程法。其中，状态转移表法解题思路大致可以概括为，回溯算法实现-定义状态-画递归树-找重复子问题-画状态转移表-根据递推关系填表-将填表过程翻译成代码。状态转移方程法的大致思路可以概括为，找最优子结构-写状态转移方程-将状态转移方程翻译成代码。

最后，我们对比了之前讲过的四种算法思想。贪心、回溯、动态规划可以解决的问题模型类似，都可以抽象成多阶段决策最优解模型。尽管分治算法也能解决最优问题，但是大部分问题的背景都不适合抽象成多阶段决策模型。

今天的内容比较偏理论，可能会不好理解。很多理论知识的学习，单纯的填鸭式讲给你听，实际上效果并不好。要想真的把这些理论知识理解透，化为己用，还是需要你自己多思考，多练习。等你做了足够多的题目之后，自然就能自己悟出一些东西，这样再回过头来看理论，就会非常容易看懂。

所以，在今天的内容中，如果有哪些地方你还不能理解，那也没关系，先放一放。下一节，我会运用今天讲到的理论，再解决几个动态规划的问题。等你学完下一节，可以再回过头来看下今天的理论知识，可能就会有一种顿悟的感觉。

课后思考

硬币找零问题，我们在贪心算法那一节中讲过一次。我们今天来看一个新的硬币找零问题。假设我们有几种不同币值的硬币v1，v2，……，vn（单位是元）。如果我们要支付w元，求最少需要多少个硬币。比如，我们有3种不同的硬币，1元、3元、5元，我们要支付9元，最少需要3个硬币（3个3元的硬币）。

欢迎留言和我分享，也欢迎点击“请朋友读”，把今天的内容分享给你的好友，和他一起讨论、学习。

精选留言：

- yaya 2019-01-03 06:20:17

  可以看做爬阶梯问题，分别可以走1.3.5步，怎么最少走到9步，动态转移方程为f(9)=1+min(f(8),f(6),f(4)) [7赞]

  作者回复2019-01-04 01:47:17

- 煦暖 2019-01-03 05:29:29
  状态转移表法，二维状态表的图中，第一行下面的表达式：
  文中“min(4+3, 8+3)”应该是“min(4+3, 9+3)” [6赞]

  作者回复2019-01-12 03:00:49
  嗯嗯 是的 笔误 抱歉

- 郭霖 2019-01-03 07:11:20
  动态规划状态转移表解法：

```
public int minCoins(int money) {
if (money == 1 || money == 3 || money == 5) return 1;
boolean [][] state = new boolean[money][money + 1];
if (money >= 1) state[0][1] = true;
if (money >= 3) state[0][3] = true;
if (money >= 5) state[0][5] = true;
for (int i = 1; i < money; i++) {
for (int j = 1; j <= money; j++) {
if (state[i - 1][j]) {
if (j + 1 <= money) state[i][j + 1] = true;
if (j + 3 <= money) state[i][j + 3] = true;
if (j + 5 <= money) state[i][j + 5] = true;
if (state[i][money]) return i + 1;
}
}
}
return money;
} [5赞]
```

- blacknhole 2018-12-31 10:37:29
  状态转移方程法的代码实现有问题：
  1，int minUp = Integer.MIN_VALUE;语句应赋值为Integer.MAX_VALUE。
  2，返回前应将返回值赋值给mem[i][j]。 [2赞]

作者回复2019-01-02 02:00:27

已改 多谢指正

- 想当上帝的司机 2018-12-30 23:54:07

  放假了还在更新 赞 [2赞]

- feifei 2019-01-06 06:58:09

  经过一个星期的努力，这个动态规划终于有点感觉了，今天来做题，我也来试试解这个题目，在看了第一个童鞋的解法后，感觉这个写的太死了，再就是没有反推出哪些币的组合，我就自己来实现了下！

  我也想说动态规划的解，真不容易啊，我按照老师提供的方法，先使用回塑写出了暴力搜索，然后再画出了递归树，找到状态组合，然后才来写这个动态规划，感觉好复杂，不过吧，这个使用状态转移方程，我感觉更难，比这个递归还难写。。。。。。，最主要是这个状态想不到，但这个动态规划代码写完了，我又感觉能写方程了，我想哭。。。。。。。

```
public int countMoneyMin(int[] moneyItems, int resultMemory) {

if (null == moneyItems || moneyItems.length < 1) {
return -1;
}

if (resultMemory < 1) {
return -1;
}

// 计算遍历的层数，此按最小金额来支付即为最大层数
int levelNum = resultMemory / moneyItems[0];
int leng = moneyItems.length;

int[][] status = new int[levelNum][resultMemory + 1];

// 初始化状态数组
for (int i = 0; i < levelNum; i++) {
for (int j = 0; j < resultMemory + 1; j++) {
status[i][j] = -1;
```

```
}
}

// 将第一层的数数据填充
for (int i = 0; i < leng; i++) {
status[0][moneyItems[i]] = moneyItems[i];
}

int minNum = -1;

// 计算推导状态
for (int i = 1; i < levelNum; i++) {
// 推导出当前状态
for (int j = 0; j < resultMemory; j++) {
if (status[i - 1][j] != -1) {
// 遍历元素,进行累加
for (int k = 0; k < leng; k++) {
if (j + moneyItems[k] <= resultMemory) {
status[i][j + moneyItems[k]] = moneyItems[k];
}
}
}

// 找到最小的张数
if (status[i][resultMemory] >= 0) {
minNum = i + 1;
break;
}
}

if (minNum > 0) {
break;
}
```

}

int befValue = resultMemory;

// 进行反推出，币的组合
for (int i = minNum - 1; i >= 0; i--) {
for (int j = resultMemory; j >= 0; j--) {
if (j == befValue) {
System.out.println("当前的为:" + status[i][j]);
befValue = befValue - status[i][j];
break;
}
}
}

return minNum;
} [1赞]

作者回复2019-01-07 01:42:43
都有这个似懂非懂的过程的 多练习 慢慢就有感觉了

- Kudo 2019-01-05 03:00:06
思考题解答：
动态规划解法（python实现）
状态转移方程：min_count[i] = min(min_count[j] + 1) for any j < i
import sys
def minCoinCount(values, amount):
'''
values: 硬币面值数组
amount: 要凑的总价值
'''
min_count = [sys.maxsize] * (amount+1) # 初始化
min_count[0] = 0
for i in range(1, amount+1): # [1, amount+1)左闭右开

for j in range(i): # [0,i)左闭右开
for v in values: # 依次考察每种币值
if j + v == i and min_count[j] + 1 < min_count[i]: # 能凑齐且最小
min_count[i] = min_count[j] + 1

print(min_count[amount]) # 输出结果

# 使用方法
values = [1,3,5]
minCoinCount(values, 9) [1赞]

- Kudo 2019-01-04 10:53:33
  思考题解答
  使用回溯法（python实现）：
  import sys
  min_count = sys.maxsize # 用于追踪最小值

  def minCoinCount(i, values, amount, ca):
  '''
  i: 硬币数量
  values: 硬币面值数组
  amount: 要凑的总价值
  ca: current amount 当前价值
  '''
  global min_count
  if ca == amount or i == amount: # 总共amount步
  if ca == amount and i < min_count:
  min_count = i
  return

  for v in values: # 依次考察每种币值
  if ca + v <= amount: # 保证不超总值价
  minCoinCount(i+1, values, amount, ca+v)

# 使用方法
values = [1,3,5]

minCoinCount(0, values, 9, 0)

print(min_count) [1赞]

- farFlight 2018-12-31 03:01:21
  用动态规划的方法，初始化那些等于币值的价值，然后从1开始一步一步推到w元，f(k)代表k元时最少的硬币数量，状态方程是：
  f(k) = min(f(k-vi)) + 1, i需要遍历所有的币种。

  另外，请问老师之后会多讲一些回溯的技巧吗？回溯方法虽然本身复杂度比较高，但是可以用一些剪枝技巧branch and bound，这样实际运行时间也能很快，而且很多复杂的问题用回溯法思路会比较简单。 [1赞]

  作者回复2019-01-02 02:06:22
  高级篇会讲到

- Monday 2018-12-31 00:30:23
  2018最后一次更新，我通读三遍跟上打卡了。本节理论归纳的很精简，适合动态规划求解的问题的特性：一个模型，三个特征。
  一个模型：多阶段决策最优解
  三个特征：最优子结构，无后效性，重复子问题。
  [1赞]