

Inhaltsverzeichnis

Learning from Data

Mathematische Methoden des digitalen Zeitalters



1 Optimierung

Der erste Teil der Optimierung ist noch nicht bei GitHub ...

1.1 Konvexe Mengen

Einführung Im Rahmen der Optimierung von konvexen Funktionen ist es erforderlich, den Begriff der konvexen Menge einzuführen. Um diese Thematik anschaulich darzustellen, verwenden wir zunächst verschiedene geometrische Figuren in Abbildung ??, von denen einige konvex sowie andere wiederum nicht konvex sind. Ist es möglich für je zwei beliebige Punkte der Menge eine Verbindungsstrecke zu finden, die selbst ebenfalls in der Menge liegt, so ist die Menge konvex.

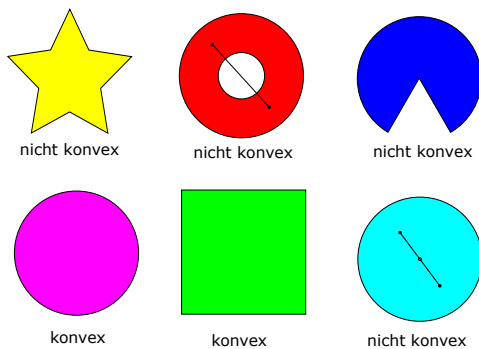


Abb. 0.0: Beispiele für konvexe Mengen

DEFINITION 1 (Konvexe Menge)

Eine Menge X heißt konvex, falls für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda) \in X \quad (1.1)$$

Beispiele konvexer Mengen

Kugel Ein Beispiel für eine konvexe Menge ist die Menge S der Vektoren, die eine Kugel mit dem Radius $r = 1$, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, beschreibt:

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$$

Quadrant Auch die Quadranten des kartesischen Koordinatensystems lassen sich durch eine konvexe Menge erfassen. So gilt z. B. für den ersten Quadranten:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

Eistüte Bei einer Eistüte bzw. einem quadratischen Kegel handelt es sich um ein weiteres Beispiel für eine konvexe Menge, sofern für $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$Q = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq t\}$$

Box Die Menge von Vektoren im \mathbb{R}^n bilden eine konvexe Menge in Form einer Box mit der Seitenlänge 2, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, wenn gilt:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

1.2 Konvexe Programme

Einführung Bei einem konvexen Programm handelt es sich um eine Funktion f in Abhängigkeit vom Parameter x . Im Rahmen der mathematischen Optimierung versuchen wir diese Funktion unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen zu minimieren. Hierbei sind sowohl die Zielfunktion als auch die Menge der Punkte konvex.

DEFINITION 2 (Konvexes Programm) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $X \subseteq \mathbb{R}^n$, so minimieren wir die Funktion $f(x)$ unter der Nebenbedingung, dass $x \in X$.

Lineare Programme Lineare Programme lassen sich durch lineare Funktionen beschreiben, z. B. $f(x) = \langle c, x \rangle$. Darüber hinaus sind eine lineare Abbildungsmatrix A , z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sowie ein Vektor b und ein weiterer Vektor c , z. B. $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, gegeben. x ist dann zulässig, wenn $x \in X$ mit $X : Ax \leq b$ bzw. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ erfüllt ist. So ergibt beispielsweise die Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1$$

Es folgt für die Nebenbedingungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt: $x_1 \leq 1, x_2 \leq 1$.

Quadratische Programme Im Hinblick auf quadratische Programme verwenden wir dieselbe Herangehensweise.

Auch hier sei eine Funktion f gegeben, z. B. $f(x) = x^T Q x$ mit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die es zu unter der Bedingung $x \in X$ für $X : Ax \leq b$ zu minimieren gilt.

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T Q x \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

```

1: procedure calculateMinimum
2:  $F(x) = (x^2 - 2)^2$ 
3:  $F'(x) = 4x^3 - 8x$ 
4:
5:  $x = 10.0$ 
6:  $\lambda = 0.001$ 
7:   for  $i = 8$  do
8:      $\lambda = \lambda + (i * 0.001)$ 
9:     for  $j = 8$  do
10:       $x = x - \lambda * F'(x)$ 
11:    end for
12:  end for
13: Print  $x$ 
14: end procedure

```