Contents

.2

Learning from Data aka i++

Mathematische Methoden des digitalen Zeitalters

1 Vektoren

In der linearen Algebra nehmen Vektoren eine zentrale Rolle ein. Ein Vektor wird in der Schule als eine Menge an Pfeilen gelehrt, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang sind. Betrachten wir jedoch nicht nur den dreidimensionalen Raum, sondern $\mathbb{R}^n$, so ist die Vorstellung eines Pfeils nicht immer möglich . Dies bedingt die Notwendigkeit einer anderen Definition.

Ein *Vektor* ist eine Aufzählung von Objekten und beschreibt eine Verschiebung. Eine solche Aufzählung entspricht der Definition eines *Tupels*. Entscheidend bei Tupeln ist die Reihenfolge der Objekte, die auch mehrfach vorkommen können.

$$\text{n-Tupel } (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

1.1 Vektor- & Unterraum

Vektoren bilden die Elemente eines *Vektorraumes V*. Addieren wir zwei Vektoren eines Vektorraumes oder multiplizieren wir sie mit einem Skalar, so ist die Summe bzw. das Produkt ebenfalls ein Element des Vektorraumes.

$$(1)\ u, v \in V,\ \ u + v \in V$$
$$(2)\ u \in V, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda u \in V$$

Ein *Unterraum* ist eine Teilmenge eines Vektorraumes. Es gelten für sie die oben genannten Eigenschaften eines Vektorraumes.

$$U \subseteq V, \text{wenn gilt:}$$
$$(1)\ u, v \in U,\ \ u + v \in U$$
$$(2)\ u \in U, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda u \in U$$

1.2 Span

Alle möglichen Vektoren eines Vektorraumes werden durch den sogenannten *Span* dargestellt. Der Span ist die Menge aller möglichen Linearkombinationen der Basisvektoren.

$$\text{Span } (V_1, \ldots, V_k) = \{U \in V : U = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\} \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

1.3 Basis & Dimension

Die Menge der Basisvektoren wird *Basis* eines Vektorraumes genannt. Jeder Vektorraum besitzt eine *Dimension p*, die durch die Anzahl der Basisvektoren bestimmt wird.

Übung

Beweise, dass ein Span immer ein Vektorraum ist.

Beweis Wir nehmen an:

$$U \in Span(V_1, \ldots, V_k)$$
$$V \in Span(V_1, \ldots, V_k)$$

$$U = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_k V_k$$
$$V = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

Additionsregelung bei Vektorräumen (s.(1))

$$\begin{aligned} W_1 &= U + V \\ &= \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_k V_k + \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k \\ &= (\lambda_1 \alpha_1) V_1 + \cdots + (\lambda_k \alpha_k) V_k \end{aligned}$$

Multiplikationsregelung bei Vektorräumen (s.(2))

$$W_2 = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_k V_k$$
$$\lambda W_2 = (\lambda \lambda_1) V_1 + \cdots + (\lambda \lambda_k) V_k$$

□

1.4 Lineare Unabhängigkeit

$v_1, \ldots, v_k$ mit $v_i \in V$ sind *linear unabhängig*, falls $\lambda_i v_i + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ nur für $\lambda_i = \cdots = \lambda_k = 0$ gilt.

1.5 Norm und Skalarprodukt

Definition 1 $||v||$ ist eine Norm im Vektorraum V falls

1. a) $||v|| \geq 0$ für alle $v \in V$
   b) $||v|| = 0$ nur für $v = 0$
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ für alle $v \in V$
3. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$

Eine Norm kann nie negativ sein, ist die Norm 0 bedeuted das, dass der Vektor der Nullvektor ist. Wenn man zwei Vektoren addiert, ist die Norm des resultierenden Vektors genau die Summe der Normen der beiden Ausgangsvektoren. Außerdem ist die Norm eines Vektors, der mit einem reelen Faktor multipliziert wurde gleich dem Produkt aus der Norm des Vektors und dem Betrag des Faktors.

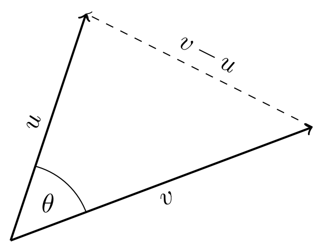
Definition 2 $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt wenn

1. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ (Bilinearität)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ für alle $u, v \in V$
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ mit $\langle v, v \rangle = 0$ nur für $v = 0$

Üblicherweise wird das Skalarprodukt mit der folgenden Formel berechnet.

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

An der ausgeschriebenen Form lässt sich überprüfen, ob es sich per Definition dabei wirklich um ein Skalarprodukt handelt. In der ausgeschriebenen Form wird aus $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle$ dabei $(\alpha u_1 + \beta v_1)w_1 + \cdots + (\alpha u_n + \beta v_n)w_n$. Durch Ausmultiplizieren der Produkte erhalten wir die Form $\alpha u_1 w_1 + \beta v_1 w_1 + \cdots + \alpha u_n w_n + \beta v_n w_v$. Wenn wir daraus nach zwei Summen sortieren und die Summanden mit α von denen mit β trennen können, wir die beiden Faktoren ausklammern und gelangen zu der aus der Definition geforderten Form $\alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
Die zweite Bedingung können wir mit dem Kommutativgesetz beweisen, wenn wir dieses auf die ausgeschriebene Form anwenden. Für die dritte Bedingung ergibt sich $v_1 v_1 + \cdots + v_n v_n = v_1^2 + \cdots + v_n^2$. Da durch das Quadrieren keiner der Summanden kleiner als 0 werden kann und auch nur für $v_i = 0$ genau 0 werden kann, ist auch diese Bedingung erfüllt.



Da grundsätzlich $\langle v, v \rangle = ||v||^2$ gilt, kann über die Abbildung auch die Aussage getroffen werden, dass $||v - u||^2 = -u, v - u\rangle$. Mit der Bilinearität des Skalarproduktes und der eben getroffenen Aussage können wir die Gleichung zu

$$||v - u||^2 = ||v||^2 - 2 \langle v, u \rangle + ||u||^2$$

umformen. Zusätzlich folgt aus dem Kosinussatz, dass $||v - u||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||||v|| \cos \theta$. Setzt man beide Terme gleich, gelangt man über einige wenige Umformungen zu der Form $\langle u, v \rangle = ||u||||v|| \cos \theta$, was ebenfalls eine Möglichkeit ist, das Skalarprodukt darzustellen.
Aus dieser Gleichung ergibt sich direkt die Cauchy-Schwarz Ungleichung. Da der Betrag des Kosinus sich nur zwischen 0 und 1 bewegt, gilt $, v\rangle \leq ||u||||v||$.
Eine häufig genutzte Norm ist die Euklidische Norm, welche mit $||v||_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ definiert ist. Mit den zuvor getroffenen Aussagen können wir beweisen, dass es sich bei der Euklidischen Norm wirklich um eine Norm handelt.
Die erste und die dritte Bedingung aus der Definition für eine Norm zeigen sich aus der ausgeschriebenen Form der Euklidischen Norm. Da alle Komponenten dabei quadriert werden und die Wurzel gezogen wird muss die erste Bedingung stimmen. Ein Faktor λ, der ebenfalls quadriert in der Wurzel steht kann aus der Summe ausgeklammert werden und als Faktor vor die Wurzel gelangen. Der Betrag ergibt sich dabei daraus, dass λ nach dem Vorgang nur positiv sein kann, auch wenn es zuvor negativ war.
Um zu beweisen, dass $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ formen wir diese Ungleichung zu der bekannten Cauchy-Schwarz Ungleichung um. Hierzu quadrieren wir zunächst beide Seiten, ersetzen die quadrierten Normen durch Skalarprodukte und erhalten

$$|\langle u + v, u + v \rangle| \leq \langle u, u \rangle + 2||u||||v|| + \langle v, v \rangle$$

Die linke Seite der Ungleichung kann aufgrund der Bilinearität als $|\langle u, u \rangle| + 2|\langle u, v \rangle| + |\langle v, v \rangle|$ geschrieben werden. Dadurch können wir auf beiden Seiten $|\ , u\rangle|$ und $|\langle v, v \rangle|$ subtrahieren und kommen so auf $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$, womit bewiesen ist, dass die Euklidische Norm eine Norm ist.

2 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir die elementarste Form einer Funktion kennenlernen, die einen Vektorraum auf einen anderen Vektorraum abbildet. Diese Funktionen nennt man *lineare Abbildungen.*

Definition 3 Eine Funktion $f : U \to V$ ist linear, wenn folgende Bedingungen gelten:
1.
$$f(u + v) = f(u) + f(v) \forall\ u, v \in U$$

2.
$$f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall\ v \in U\ und\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Das besondere an solchen Abbildungen ist, dass sie von *Matrizen* der Form $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ definiert werden, wobei n die Dimension von U und m die Dimension von V ist.

2.1 Matrix

Eine Matrix ist eine spezielle Anordnung von $n \cdot m$ Zahlen in n Zeilen und m Spalten. Man kann eine Matrix aber auch als eine Zusammenfassung von m Vektoren mit n Komponenten ansehen, dabei bildet ein Vekotor eine Spalte. Die Komponente in der i-ten Zeile und j-ten Spalte wird als a_{ij} geschrieben und die ganze Spalte mit a_j notiert.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, ..., a_m)$$

Da wir nun wissen was eine Matrix ist, führen wir zwei neue Operationen ein.

1. Matrix-Vektor-Multiplikation
2. Matrix-Matrix-Multiplikation

2.2 Matrix-Vektor-Multiplikation

Bei einer Matrix-Vektor-Multiplikation wird eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ multipliziert. Dabei wird jede Zeile der Matrix mit dem Vektor skalarmultipliziert; deshalb ist es wichtig, dass die Matrix so viele Spalten wie der Vektor Dimensionen hat. Eine Multiplikation zwischen Matrizen und Vektoren, bei denen die Anzahl nicht übereinstimmt, ist nicht definiert.

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \times v_1 + a_{12} \times v_2 + ... + a_{1m} \times v_m \\ a_{21} \times v_1 + a_{22} \times v_2 + ... + a_{2m} \times v_m \\ ... \\ a_{n1} \times v_1 + a_{n2} \times v_2 + ... + a_{nm} \times v_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

0.0: Matrix mit Vektor multiplizieren

Allgemein lässt sich für die Matrix-Vektor-Multiplikation sagen

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

2.3 Matrix-Matrix-Multiplikation

Eine Matrix-Matrix-Multiplikation ist nichts anderes als mehrere Matrix-Vektor-Multiplikationen hintereinander. Haben wir zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und berechnen AB nehmen wir jede Spalte von B als Vektor und multiplizieren ihn mit A wie oben beschrieben. Die Vektoren die man als Ergebnisse erhält, fasst man wieder in einer Matrix zusammen mit der Dimension $\mathbb{R}^{n \times p}$. Allgemein können wir sagen:

$$(AB)_{il} = \sum_{n=i}^{m} a_{ij} \times b_{jl}$$

Übung

Beweise, dass eine Komposition $h(x) = f \circ g(x)$ aus den linearen Abbildungen f und g, auch eine lineare Abbildung ist.

BEWEIS Da f und g linear sind gelten die Bedingungen aus Definition **??**:

$$\begin{aligned} h(u+v) &= f \circ g(u+v) \\ &= f(g(u+v)) \\ &= f(g(u)+g(v)) \\ &= f(g(u)) + f(g(v)) \\ &= f \circ g(u) + f \circ g(v) = h(u) + h(v) \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned} h(\lambda v) &= f \circ g(\lambda v) \\ &= f(g(\lambda v)) \\ &= f(\lambda g(v)) \\ &= \lambda f(g(v)) \\ &= \lambda f \circ g(v) = \lambda h(v) \end{aligned}$$

Da beide Bedingungen aus Definition **??** für h erfüllt sind, ist auch eine Komposition aus zwei linearen Abbildungen linear. □