Aufgabenstellung: Beweise, dass eine Funktion $f : R \to R$, welche differenzierbar ist an der Stelle $x \in R$ ist auch stetig an bei $x \in R$ ist.
Lösung: Zuerst überlegen wir, welche Bedingungen bereits in der Aufgabenstellung gegeben sind.
Eine Funktion ist an der Stelle x differenzierbar, wenn
$f(x+h) = f(x) + l_x(h) + r(h)$ mit $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$ gilt.
Diese Funktion wäre außerdem stetig, wenn $lim_{w\to x}f(w) = f(x)$.
Da die Funktion f(x+h) äquivalent zur Funktion $f(w)$ sein soll, ersetze ich in der Bedingung für die Stetigkeit $f(w)$ mit der gesamten Funktion von $f(x+h)$.
Somit gilt
$lim_{h\to 0}f(x) + l_x(h) + r(h) = f(x)$. Damit die Bedingung der Stetigkeit erfüllt ist, muss der Grenzwert dieser Funktion gleich dem Funktionswert sein. Um diese Bedingung zu erfüllen, müssen wir beweisen, dass die Teile der Funktion $l_x(h)$ und $r(h)$ gegen null gehen. Wir beginnen mit dem Teil $r(h)$. Würde $r(h)$ nicht gegen 0 gehen, so würde $\frac{r(h)}{h}$ nicht gegen 0 gehen. Die Funktion $r(h)$ muss gegen 0 gehen, da die Bedingung der Differenzierbarkeit gilt. Jetzt müssen wir zeigen, dass $l_x(h)$ auch gegen 0 geht. Dieser Teil der Funktion kann auch als $f'(x) * h$ dargestellt werden. Da wir annehmen, dass h gegen 0 geht und somit ein Faktor von $l_x(h)$ 0 ist, wird die Funktion 0. Damit ist bewiesen, dass $lim_{h\to 0}f(x) = f(x)$.