

IFT 2505  
Programmation Linéaire  
Algorithme du simplexe primal-dual

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

# Simplexe primal-dual

Motivations :

- Exploiter d'avantage la complémentarité entre le primal et le dual.
- Comme pour le simplexe dual, on part d'une solution dual-réalisable.
- Primal restreint : on va forcer la condition de complémentarité

$$x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i,$$

en faisant entrer dans la base primale les  $x_i$  correspondant aux contraintes duales actives.

- Dual restreint : on optimise le dual. Si celui-ci est réalisable, augmenter (strictement) la valeur de l'objectif dual va conduire à transformer au moins une contrainte duale inactive en contrainte duale active.

# Simplexe primal-dual

L'idée est de travailler simultanément sur le primal et le dual.

Principales idées :

- trouver une solution réalisable pour le dual ;
- l'améliorer à chaque étape en optimisant un problème primal restreint associé ;
- essayer de satisfaire les conditions d'écart de complémentarité.

Il s'agit de la variante du simplexe la plus efficace pour les problèmes de flots dans les réseaux.

## Simplexe primal-dual

Considérons à nouveau le primal

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

et son dual

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Étant donné  $\lambda$  réalisable pour le dual, définissons l'ensemble actif

$$P = \{i \mid \lambda^T a_i = c_i\}.$$

Vu que  $\lambda$  est supposé réalisable, cela implique

$$\lambda^T a_i < c_i, \quad i \notin P.$$

## Simplexe primal-dual

Correspondant à  $\lambda$  et  $P$ , nous définissons le problème *primal restreint associé*

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & \mathbf{1}^T y \\ \text{t.q.} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0, \quad x_i = 0 \text{ pour } i \notin P \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{1}$  designe the vecteur  $(1, 1, \dots, 1)$ . Nous pouvons réécrire le problème comme

$$\begin{aligned} \min_{y \geq 0, x_i \in P} \quad & \mathbf{1}^T y \\ \text{t.q.} \quad & \sum_{i \in P} a_i x_i + y = b \\ & x_i \geq 0, \quad i \in P \end{aligned}$$

## Simplexe primal-dual

Le dual associé est appelé *dual restreint associé*

$$\begin{aligned} \max_u \quad & u^T b \\ \text{t.q.} \quad & u^T a_i \leq 0, \quad i \in P \\ & u \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

## Théorème d'optimalité primale-duale

*Supposons que  $\lambda$  est réalisable pour le dual et que  $(x, y)$  est réalisable pour le primal restreint associé, avec  $y = 0$  (de sorte que  $(x, y)$  est une solution optimale). Alors,  $x$  et  $\lambda$  sont optimaux pour les programmes primal et dual originaux respectifs.*

### Démonstration.

$x$  est clairement réalisable pour le primal :  $Ax = b$ . Nous avons aussi, par définition de  $P$ ,  $\lambda^T a_i = c_i$ , si  $x_i \neq 0$ , de sorte que

$$c^T x = \lambda^T Ax.$$

En combinant ces deux observations, nous avons

$$c^T x = \lambda^T b,$$

impliquant l'optimalité de  $x$  et  $\lambda$ .



## Algorithme primal-dual

**Etape 1** Étant donnée une solution réalisable  $\lambda_0$  pour le dual, déterminer le primal restreint associé.

**Etape 2** Optimiser le primal restreint associé. Si la valeur optimale de ce primal restreint associé est nulle (impliquant  $y = 0$ ), la solution correspondante est optimale pour le primal original, en vertu du théorème d'optimalité primale-duale ; arrêt.

**Etape 3** Si la valeur optimale du primal restreint associé est strictement positive (i.e. if  $y \neq 0$ ), la solution optimale de ce primal restreint associé n'est pas réalisable pour le primal, et on cherche à améliorer la solution réalisable du dual avant de déterminer un nouveau primal restreint associé.



## Algorithme primal-dual

**Etape 3 (suite)** Obtenir du tableau du simplexe du primal restreint la solution  $u_0$  du dual restreint associé. S'il n'y a pas de  $j$  pour lequel  $u_0^T a_j > 0$ , le primal n'a pas de solution réalisable ; arrêt. Sinon, construire le nouveau vecteur dual réalisable

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon_0 u_0,$$

où

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - \lambda_0^T a_j}{u_0^T a_j} \mid u_0^T a_j > 0 \right\}.$$

Retour à l'étape 1, en utilisant ce  $\lambda$ .

## Algorithme primal-dual : exemple

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{soumis à} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients dans l'objectifs sont non-négatifs, le vecteur  $\lambda = (0, 0)$  est réalisable pour le dual.

En effet, les contraintes du dual sont

$$\lambda^T A \leq c.$$

Avec  $\lambda = (0, 0)$ , aucune contrainte du dual n'est active, et donc  $P = \emptyset$ .

## Algorithme primal-dual

Le primal restreint est donc

$$\min y_1 + y_2$$

$$\text{t.q. } x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Tableau du simplexe pour le primal restreint associé :

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
	1	1	2	1	0	3
	2	1	3	0	1	5
	-3	-2	-5	0	0	-8
$c_i - \lambda^T a_i \rightarrow$	2	1	4			

## Algorithme primal-dual : calcul de $u^T a_i$

Pour  $i \notin P$ ,  $x_i$  est fixé à 0 et est hors base. Nous pouvons calculer son coût réduit à l'optimalité du primal restreint comme

$$0 - u^T a_i.$$

En effet, l'objectif du primal restreint étant  $\mathbf{1}^T y$ , les coefficients dans l'objectif associés aux  $x_i$  sont tous nuls. Dès lors, les valeurs de  $u^T a_i$ ,  $i \notin P$ , peuvent être directement identifiées en prenant l'opposé des valeurs dans la ligne des coûts réduits du tableau final du primal restreint, pour les colonnes associées aux  $x_i$  correspondants.

## Algorithme primal-dual : calcul de $u^T a_i$

Pour les variables de base  $x_j (> 0)$ , nous avons  $j \in P$ , et les coûts réduits sont nuls.

À nouveau, le coefficient de  $x_j$  dans l'objectif restreint étant nul, et son coût réduit se calcule comme

$$0 - u^T a_j.$$

On en tire  $u^T a_j = 0$ .

On peut aboutir à la même observation en invoquant les écarts de complémentarité : comme  $x_j > 0$ , la contrainte duale associée,  $u^T a_j \leq 0$  est active, i.e.  $u^T a_j = 0$ .

## Algorithme primal-dual : exemple

Comme aucune contrainte duale n'est active (il n'y a pas de zéro dans la dernière ligne),  $P = \emptyset$ .

Dès lors,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont fixées à zéro. Il n'y a pas de coût réduit négatif pour les variables restantes,  $y_1$  et  $y_2$ . La solution

$$(0, 0, 0, 3, 5)$$

est donc optimale pour le primal restreint associé.

Le dual restreint associé s'écrit comme

$$\begin{aligned} \max_u \quad & u^T b \\ \text{t.q.} \quad & u \leq \mathbf{1}, \end{aligned}$$

et  $u_0 = (1, 1)$  est solution optimale.

## Algorithme primal-dual : exemple

Les quantités  $-u_0^T a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont égales aux trois premiers éléments de la troisième ligne.

Pour trouver  $\epsilon$ , nous prenons dès lors le minimum des rapport

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}.$$

Le minimum étant  $1/2$ ,  $x_2$  entre dans la base, et on annule l'entrée correspondante sur la quatrième ligne, ce qui revient à rendre la seconde contrainte duale active pour le problème dual initial.

## Algorithme primal-dual : exemple

Pour ce faire, on ajoute  $\epsilon$  fois la troisième ligne à la dernière. En effet, le nouveau vecteur dual est  $\lambda + \epsilon u$  et nous avons comme nouvelles valeurs des contraintes duales

$$c_i - \lambda^T a_i - \epsilon u^T a_i = c_i - (\lambda + \epsilon u)^T a_i.$$

Ceci donne

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			



## Algorithme primal-dual : exemple

On doit à présent minimiser le nouveau primal restreint, avec  $P = \{2\}$ .

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

Note : on retrouve  $u^T a_2 = 0$ .

## Algorithme primal-dual : exemple

En calculant les rapports de la dernière ligne sur l'avant-dernière, on obtient  $\epsilon = 1/2$ , et comme colonne entrante  $a_1$ .

On ajoute  $\epsilon$  fois la troisième ligne à la dernière, pour obtenir

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
0	0	1			

$$P = \{1, 2\}.$$

## Algorithme primal-dual : exemple

Résolution du primal restreint associé.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
0	0	1			

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y_1$	$y_2$	$b$
0	1	1	2	-1	1
1	0	1	-1	1	2
0	0	0	1	1	0
0	0	1			

Le primal est réalisable : stop. La solution est

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.$$

## Algorithme primal-dual : preuve

Dans l'étape 3, il est indiqué que  $u_0^T a_j \leq 0$  pour tout  $j$  implique que le primal n'a pas de solution réalisable.

Si  $u_0^T a_j \leq 0$  pour tout  $j$ , le vecteur  $\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$  conduit à

$$\lambda_\epsilon^T A = \lambda_0^T A + \epsilon u_0^T A \leq c^T.$$

De plus, comme

$$u_0^T b = \mathbf{1}^T y > 0,$$

nous voyons que la quantité

$$\lambda_\epsilon^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b,$$

est non bornée, lorsque nous augmentons  $\epsilon$ . Du théorème de dualité forte, le primal n'est pas réalisable.

## Algorithme primal-dual : preuve

Supposons à présent que pour au moins un  $j$ ,  $u_0^T a_j > 0$ .

À nouveau, définissons

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

Par construction,

$$u_0^T a_i \leq 0, \forall i \in P.$$

Pour un  $\epsilon$  positif assez petit,  $\lambda_\epsilon$  est réalisable pour le dual, et nous pouvons augmenter  $\epsilon$  jusqu'à transformer une des inégalités

$$\lambda_\epsilon^T a_j < c_j, j \notin P$$

en égalité. Ceci détermine  $\epsilon_0$  et un indice  $k$  correspondant.

## Algorithme primal-dual : preuve

Le nouveau vecteur  $\lambda$  correspond à une valeur accrue de la fonction objectif duale :

$$\lambda^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b.$$

De plus, le nouvel ensemble correspondant  $P$  inclut l'indice  $k$ .

Pour tout autre indice  $i$  t.q.  $x_i > 0$  est dans  $P$  aussi, comme en vertu de l'écart de complémentarité,

$$u_0^T a_i = 0,$$

pour un tel  $i$ , nous avons

$$\lambda^T a_i = \lambda_0^T a_i + \epsilon_0 u_0^T a_i = c_i.$$

## Algorithme primal-dual : preuve

Ceci signifie que l'ancienne solution optimale (du primal restreint) est réalisable pour le nouveau problème primal restreint associé, et que  $a_k$  peut entrer dans la base. Puisque  $u_0^T a_k > 0$ , pivoter sur  $a_k$  va décroître la valeur du primal restreint associé.

Donc,

- soit la valeur du primal décroît (strictement sous l'hypothèse de non-dégénérescence),
- soit le problème est déclaré non réalisable.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes comme il y a un nombre fini de bases réalisables.