

IFT 2505
Programmation Linéaire
Dualité – relation au simplexe

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Dualité : relations à la procédure du simplexe

Résoudre le primal par le simplexe donne la solution duale.

Supposons que le programme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

a pour solution réalisable de base optimale $x = (x_B, 0)$, avec la base B .

Quelle est la solution du dual

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

en termes de B ? Magie : on l'obtient de la résolution du primal.

Relations à la procédure du simplexe

Supposons

$$A = (B \ D), \quad x_B = B^{-1}b, \quad r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1}D.$$

Si x est optimal, $r_D^T \geq 0$, et donc

$$c_B^T B^{-1}D \leq c_D^T.$$

Avec

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \lambda^T A &= (\lambda^T B \quad \lambda^T D) \\ &= (c_B^T B^{-1}B \quad c_B^T B^{-1}D) \\ &\leq (c_B^T \quad c_D^T) = c^T. \end{aligned}$$

Relations à la procédure du simplexe

Dès lors,

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

i.e. λ est réalisable pour le dual.

De plus,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

et donc la valeur de la fonction objectif duale pour ce λ est égale à la valeur du problème primal. Dès lors λ est optimal pour le dual.

On retrouve le principal résultat du théorème de dualité.

Relations à la procédure du simplexe

Théorème Si le programme linéaire (sous forme standard) a une solution de base réalisable optimale, correspondant à la base B , le vecteur λ t.q. $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ est une solution optimale du programme dual correspondant. Les valeurs optimales des deux programmes sont égales.

Exemple

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{t.q.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Sous forme standard,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{t.q.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Exemple

Sous forme de tableau, cela donne

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le premier pivot donne

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 8 \end{array}$$

puis le second

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

Exemple

On a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution optimale est

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

Exemple : dual

$$\max_{\lambda} 4\lambda_1 + 6\lambda_2$$

$$\text{t.q. } 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -4$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -3$$

$$\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0.$$

La solution du dual s'obtient directement de la dernière ligne du tableau du simplexe, sous les colonnes où apparaît l'identité dans le premier tableau (comme les coûts initiaux associés sont nuls) :

$$\lambda^T = (-1 \quad -1).$$

Multiplicateurs du simplexe

À n'importe quelle itération du simplexe, nous pouvons former le vecteur λ^T satisfaisant

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Ce vecteur n'est pas une solution (réalisable) du dual à moins que B ne soit une base optimale pour le primal. Mais il peut être utilisé à chaque itération pour calculer les coûts réduits, et il aura une interprétation économique.

Pour cette raison, le vecteur $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ est souvent appelé le vecteur des multiplicateurs du simplexe.

Interprétation économique

Comme d'ordinaire, dénotons les colonnes de A par a_1, a_2, \dots, a_n , et par e_1, e_2, \dots, e_m , les m vecteurs unités dans \mathcal{R}^m :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i^{\text{e}} \text{ position}$$

Étant donné une base B , consistant de m colonnes de A , n'importe quel autre vecteur peut être construit comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base : soit $y \in \mathbb{R}^m$,

$$y = BB^{-1}y.$$

Interprétation économique

S'il y a un coût unité c_i associé avec chaque vecteur de base a_i , le coût d'un vecteur construit y à partir de la base peut être calculé comme la combinaison linéaire correspondante des c_i 's associés à la base. L'expression de y à partir de la base est

$$B^{-1}y$$

et le coût associé

$$c_B^T B^{-1}y.$$

En particulier, le coût du vecteur unité e_j , quand reconstruit à partir de la base B , est λ_j , la j^e composante de

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

En effet,

$$\lambda_j = \lambda^T e_j = c_B^T B^{-1} e_j.$$

Dès lors, les λ_j 's peuvent être interprétés comme les prix synthétiques des vecteurs unités.

Interprétation économique

Comme

$$y = \sum_{j=1}^m y_j e_j,$$

nous avons comme coût pour y

$$c_B^T B^{-1} y = \sum_{j=1}^m c_B^T B^{-1} e_j y_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = \lambda^T y.$$

Interprétation économique : optimalité

L'optimalité du primal correspond à la situation où chaque vecteur a_1, a_2, \dots, a_n , est “moins cher” quand construit à partir de la base que quand acheté directement à son propre prix.

Dans ce cas, nous avons

$$\lambda^T a_i \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou de manière équivalente

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

ou encore, sous forme colonne,

$$A^T \lambda \leq c,$$

Sensibilité

Continuation de l'interprétation des variables duales comme prix.

Considérons le problème standard,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec la base optimale B et la solution correspondante $(x_B, 0)$, où $x_B = B^{-1}b$. Une solution correspondante du dual est

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, de petits changements dans b ne conduiront pas à un changement de base optimale.

Sensibilité

Considérons un petit changement Δb . Comme la base optimale n'a pas changé, la nouvelle solution optimale est

$$x = (x_B + \Delta x_B, 0),$$

où

$$\Delta x_B = B^{-1} \Delta b.$$

Le changement correspondant pour la fonction objectif est

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors, λ mesure la sensibilité de la fonction objectif à un petit changement dans le terme de droite des contraintes d'égalité : un changement de b à $b + \Delta b$ conduit à un changement de la fonction objectif de $\lambda^T \Delta b$,

Sensibilité et multiplicateurs du simplexe

Puisque λ_j est le prix du vecteur unité e_j quand exprimé à partir de la base B , il mesure directement le changement dans le coût à partir d'un changement dans la j^e composante du vecteur b . Cela s'observe aussi depuis la relation précédente

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors, λ_j peut être considéré comme le *prix marginal* de b_j , puisque modifier b_j en $b_j + \Delta b_j$ conduit à un changement de la valeur optimale de $\lambda_j \Delta b_j$: si

$$\Delta b = (0, \dots, 0, \Delta b_j, 0, \dots, 0),$$

alors

$$\Delta z = \sum_{k=1}^m \lambda_k \Delta b_k = \lambda_j \Delta b_j.$$

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Une société fabrique de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base $M1$ et $M2$.

Données :

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible
	Extérieure	Intérieure	par jour
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires :

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes par jour.
- La production en peinture d'intérieur ne peut dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Variables :

- x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour ;
- x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour.

Formulation du programme :

$$\begin{aligned} \max_x \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (\lambda_1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 & (\lambda_2) \\ & x_2 \leq 2 & (\lambda_3) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 & (\lambda_4) \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Production de peinture : dual

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & w = 24\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ \text{s.c.} \quad & 6\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \geq 5 \\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 4 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Primal :

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1.5, \quad z = 21$$

Dual :

$$\lambda_1 = 0.75, \quad \lambda_2 = 0.5, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad w = 21.$$

Production de peinture : interprétation économique

Interprétation de la dualité forte : le profit maximal est atteint si les ressources ont été exploitées complètement, i.e. jusqu'à épuisement de leur valeur.

- Le profit augmente de 0.75 par augmentation d'une tonne de M1 et de 0.5 par tonne de M2.
- Les "ressources" 3 et 4 sont abondantes ; augmenter ces ressources n'apporte aucun profit supplémentaire.

Écarts de complémentarité

Théorème : écarts de complémentarité – forme asymétrique

Soit x et λ des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé sous forme standard. Une condition nécessaire et suffisante pour que x et λ soient tous deux solutions optimales est que pour tout i

1. $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
2. $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$

Note : les conditions 1 et 2 peuvent se réécrire comme

$$(\lambda^T a_i - c_i)x_i = 0,$$

i.e. $x_i = 0$ ou (non exclusif) $\lambda^T a_i = c_i$. Sous forme vectorielle, comme $x \geq 0$ et $\lambda^T A \leq c^T$, $(\lambda^T A - c^T)x = 0$.

Écarts de complémentarité : preuve du théorème

Sous les conditions énoncées,

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Dès lors,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et par le corollaire du théorème de dualité faible, λ et x sont solutions optimales de leur problème respectif.

De manière réciproque, si les solutions sont optimales, par le théorème de dualité forte,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et donc

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Comme $x \geq 0$, $\lambda^T A \leq c$, les conditions tiennent.

Écarts de complémentarité

Théorème : écarts de complémentarité – forme symétrique

Soit x et λ des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé avec les contraintes linéaires sous forme $Ax \geq b$. Une condition nécessaire et suffisante pour que x et λ soient tous deux solutions optimales est que pour tout i

1. $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
2. $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$
3. $\lambda_j > 0 \Rightarrow a^j x = b_j$
4. $\lambda_j = 0 \Leftarrow a^j x > b_j$

Démonstration.

Similaire au théorème précédent.



Contraintes de complémentarité

Une **contrainte de complémentarité** impose que deux variables sont complémentaires l'une par rapport à l'autre. En notant ces variables x et y , et en les supposant de dimensions n , ceci se traduit par

$$x_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

La condition ci-dessus est parfois exprimée de manière plus compacte comme

$$0 \leq x \perp y \leq 0.$$

Contraintes de complémentarité et PL

La complémentarité traduit ici qu'une variable primale (duale) est nulle ou que la contrainte duale (primale) correspondante est active.

Intuitivement une variable de base dans le primal correspond à une contrainte active au niveau du dual.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence pour le primal et le dual, il y a exactement m variables du primal non-nulles à la solution optimale et m contraintes actives pour le dual.

- Hypothèse de non-dégénérescence primale : m composantes de la solution optimale sont strictement positives.
- Hypothèse de non-dégénérescence duale : m contraintes du dual sont actives.

Résolution en utilisant les écarts de complémentarité

Considérons le primal

$$\max_x z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual :

$$\min_y w = 10y_1 + 8y_2$$

$$\text{s.c. } y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0.$$

Résolution en utilisant les écarts de complémentarité

La solution optimale du primal

$$\left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$$

Valeur optimale : $\frac{274}{5}$.

Comme $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, nous avons le système linéaire correspondant pour le dual

$$\begin{aligned}y_1 + 2y_2 &= 5 \\ 2y_1 - y_2 &= 12.\end{aligned}$$

On tire

$$5y_1 = 29, \quad y_2 = 2y_1 - 12,$$

et donc

$$y_1 = \frac{29}{5}, \quad y_2 = -\frac{2}{5}.$$

Complémentarité

Considérons la paire primale-duale :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{s.c.} \quad & A^T \lambda \leq c. \end{aligned}$$

Pour toute solution de base non dégénérée x du primal, il existe une et une seule solution λ du dual complémentaire à x .

Le résultat tient même si x est non-réalisable (i.e. les contraintes de non-négativité ne sont pas satisfaites).

Démonstration

Le dual peut se réécrire sous forme standard :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{s.c.} \quad & A^T \lambda + t = c \\ & t \geq 0, \end{aligned}$$

ou de manière plus explicite,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{s.c.} \quad & a_i^T \lambda + t_i = c_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & t_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Démonstration

Considérons un ensemble de variables de base B et un ensemble de variables hors base D , tels que la base correspondante est non dégénérée :

$$x_B = B^{-1}b, \quad x_D = 0, \\ \forall j \ x_{Bj} \neq 0.$$

Construisons une solution duale complémentaire à la solution primale :

$$t_B = 0, \quad B^T \lambda = c_B,$$

et

$$t_D^T = c_D^T - \lambda^T D = c_D^T - c_B^T B^{-1} D.$$

L'unicité de λ vient de l'inversibilité de B^T .

Complémentarité

On voit apparaître une réécriture des conditions de complémentarité :

$$t_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Problème, nous n'avons pas vérifié la condition

$$t \geq 0.$$

Celle-ci pourrait très bien être violée !

Si $t \geq 0$, $c_D^T - c_B^T B^{-1} D \geq 0$, i.e. x satisfait les conditions d'optimalité. Si $x \geq 0$, c'est une solution de base optimale !

Complémentarité et optimalité

Conséquence : λ est admissible (réalisable) si et seulement si x satisfait les conditions d'optimalité (coûts réduits positifs ou nuls). Autrement dit, les conditions d'optimalité sont équivalentes à l'admissibilité.

Similairement, une solution x complémentaire à λ est admissible si et seulement si λ satisfait les conditions d'optimalité pour le dual. Cela se déduit directement du fait que le dual du dual est le primal.

Méthode du simplexe dual

Motivations :

- Il arrive souvent qu'une solution de base non admissible (i.e. violant les contraintes de non-négativité), mais satisfaisant les contraintes d'optimalité soit identifiables facilement (par exemple, variables d'écart de contraintes \leq et composantes négatives dans le terme de droite).
- Cette base correspond à une solution admissible du dual, solution identifiable à partir des multiplicateurs du simplexe.

Dans le tableau du simplexe, cette situation revient à ne pas avoir d'éléments négatifs dans la dernière ligne, puisque

$$\begin{aligned}r_j \geq 0 &\Leftrightarrow c_j - (\lambda^T D)_j \geq 0 \\&\Leftrightarrow c_j - \lambda^T a_j \geq 0 \\&\Leftrightarrow \lambda^T a_j \leq c_j\end{aligned}$$

Simplexe dual

Cette situation peut se produire tout en ayant une solution de base non réalisable.

Ceci arrive par exemple si on résoud un problème, puis on veut en résoudre un nouveau après avoir changé b .

On va alors travailler sur le problème dual en partant du tableau primal.

Idée de la méthode simplexe duale : résoudre (implicitement) le dual par la méthode du simplexe (mais en travaillant sur le tableau primal !).

Méthode du simplexe dual : principes

En termes du primal :

- maintenir l'optimalité de la dernière ligne ;
- aller vers la réalisabilité.

En termes du dual :

- maintenir la réalisabilité ;
- aller vers l'optimalité.

On va partir avec une solution de base satisfaisant les conditions d'optimalité (= base admissible pour le dual) et chercher à la rendre admissible (= dual optimale).

Méthode du simplexe dual

On considère le problème

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'une base B est connue, et soit

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

On suppose λ réalisable pour le dual.

La solution $x_b = B^{-1}b$ est dite dual-réalisable.

Si $x_B \geq 0$, cette solution est aussi primal-réalisable, et est par conséquent optimale.

Méthode du simplexe dual

Comme λ est réalisable pour le dual,

$$\lambda^T a_j \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Si, comme d'ordinaire, nous supposons que B est constitué des m premières colonnes de A , i.e.

$$B = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m),$$

nous avons

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = c_B^T e_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

où e_j est le j^e vecteur unité.

En appliquant l'hypothèse de non-dégénérescence pour le dual, nous avons aussi

$$\lambda^T a_j < c_j, \quad j = m+1, m+2, \dots, n.$$

Méthode du simplexe dual

Un cycle du simplexe, appliqué au dual, reviendra à échanger deux composantes de λ , de manière à ce qu'une inégalité stricte devienne une égalité, et vice-versa, tout en augmentant la valeur du dual.

Les m égalités dans la nouvelle solution détermineront une nouvelle base.

Soit u^i la i^e ligne de B^{-1} , et

$$\bar{\lambda}^T = \lambda^T - \epsilon u^i.$$

Nous avons (avec $\epsilon \geq 0$)

$$\bar{\lambda}^T a_j = \lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j.$$

Méthode du simplexe dual

Rappelons la notation préalablement introduite

$$z_j = c_B^T y_j, \quad y_j = B^{-1} a_j.$$

Dès lors,

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = z_j.$$

Comme

$$\begin{aligned} u^i a_j &= y_{ij}, \\ y_j &= e_j, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

nous avons

$$u^i a_j = \delta_{ij}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Méthode du simplexe dual

Ainsi,

$$\bar{\lambda}^T a_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j,$$

$$\bar{\lambda}^T a_i = c_i - \epsilon,$$

$$\bar{\lambda}^T a_j = z_j - \epsilon y_{ij}, \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

De plus, puisque $x_B = B^{-1}b$,

$$\bar{\lambda}^T b = \lambda^T b - \epsilon u^i b = \lambda^T b - \epsilon x_{B_i}.$$

Comme

$$\lambda^T a_j < c_j, \quad j = m + 1, \dots, n,$$

nous cherchons à augmenter le terme de gauche, ce qui revient à considérer les situations où $y_{ij} < 0$ dans

$$\bar{\lambda}^T a_j = z_j - \epsilon y_{ij}, \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

Méthode du simplexe dual

Nous cherchons à ramener la valeur à c_j , sans la dépasser (sinon on violerait les conditions de réalisabilité du dual), aussi nous prenons

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Soit

$$k = \arg \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^T a_k &= z_k - \epsilon_0 y_{ik} \\ &= z_k - \frac{z_k - c_k}{y_{ik}} y_{ik} \\ &= c_k. \end{aligned}$$

Algorithme du simplexe dual

Etape 1 Étant donnée une solution de base dual-réalisable x_B , si $x_B \geq 0$, la solution est optimale : arrêt. Sinon, sélectionner un indice i tel que $x_{Bi} < 0$.

Etape 2 Si tous les $y_{ij} \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, le dual n'a pas de maximum. Sinon, calculer

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Soit k l'indice correspondant (unique si l'hypothèse de non-dégénérescence s'applique).

Etape 3 Former une nouvelle base B en remplaçant a_i par a_k . En utilisant cette base, déterminer la solution de base dual-réalisable x_B correspondante.

Simplexe dual : exemple

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{soumis à} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

En introduisant des variables de surplus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{soumis à} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Simplexe dual : exemple

Si nous changeons le signe des inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{soumis à} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

conduisant au tableau

x_4	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	0

La base (a_4, a_5) est dual-réalisable comme tous les coûts réduits sont non-négatifs.

Simplexe dual : exemple

Nous devons sélectionner une composante de x_B qui est strictement négative pour la retirer de l'ensemble des variables de base. Prenons par exemple $x_5 = -6$.

Nous devons alors calculer les rapports

$$\frac{z_j - c_j}{y_{2j}}$$

ou, en d'autres termes, les rapports entre l'opposé des coûts réduits et les éléments de la seconde ligne. Le plus petit rapport (strictement) positif est obtenu avec l'élément y_{12} :

x_4	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	0

Simplexe dual : exemple

Après le pivot, nous avons

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & 0 & \textcircled{-1} & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ x_1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -9 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ x_1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -11 \end{array}$$

La solution $(1, 2, 0)$ est optimale.