Programmation Linéaire
Variables artificielles

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Motivation

Pour débuter la méthode du simplexe, il faut une solution de base réalisable initiale.

Comment trouver cette solution de base initiale?

Principe de base

- identifier les variables isolées;
- compléter en introduisant des variables artificielles.

Variable isolée

Dans un système d'équations linéaires, une variable est *isolée* si son coefficient est égal à 1 dans une équation et à 0 dans les autres.

Exemple:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 100 \\ 5x_1 & & & + & 4x_3 & & & = & 200 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

x_2 est la seule variable isolée dans ce système.

Si des variables sont isolées, on pourra les identifier comme variables de base dans la base initiale. S'il y a moins de m variables isolées, disons p, on devra identifier $m - p$ variables supplémentaires.

Variables artificielles

Reprenons le système

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \;\; \boldsymbol{x} \geq 0,$$

où, s.p.d.g., $\boldsymbol{b} \geq 0$, et supposons qu'il n'y a aucune variable isolée.

Considérons le programme artificiel

$$\begin{aligned} \min_{y} \;\; & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{t.q. } \;\; & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \;\; \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ est un vecteur de variables artificielles.

Variables artificielles

- Le programme artificiel est déjà sous forme canonique, avec comme solution de base $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.
- Si le programme initial est réalisable, une solution optimale du programme artificiel est $\boldsymbol{y} = 0$. En effet, nous avons alors qu'il existe un $\boldsymbol{x} \geq 0$ tel que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- Sinon, si le programme initial n'est pas réalisable, aucun $\boldsymbol{x} \geq 0$ ne satisfait le système linéaire $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. La valeur optimale du programme artificiel est > 0.
- Si le problème est réalisable et si dans la solution finale certaines composantes de $\boldsymbol{y}$ sont toujours dans la base, nous avons une solution de base dégénérée. Si A est de rang plein, on peut échanger chacun des y_i avec une variable hors-base.

Variables artificielles: exemple

Considérons le système

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ &3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Variables artificielles: x_4, x_5. Le programme artificiel est

$$\begin{aligned} \min\ & x_4 + x_5 \\ \text{t.q. }\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ & x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Variables artificielles: exemple

Sous forme tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \boldsymbol{b} \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
c^T & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Pour obtenir une solution de base réalisable, il faut annuler les coefficients de x_4 et x_5. Nous obtenons le nouveau tableau

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \boldsymbol{b} \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
c^T & -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7
\end{array}
$$

On peut maintenant continuer la résolution du système en utilisant le simplexe, comme d'ordinaire.

Variables artificielles: exemple

Le premier pivotage donne

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \boldsymbol{b} \\ & 0 & -1 & 4/3 & 1 & -2/3 & 2 \\ & 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\ c^T & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & -2 \end{array}$$

Le second,

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \boldsymbol{b} \\ & 0 & -3/4 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/2 \\ & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ c^T & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Ceci donne la solution réalisable $(1/2, 0, 3/2)^T$.

Méthode à deux phases

Phase I
Recherche d'une solution de base réalisable par l'intermédiaire de variables artificielles.

Phase II
Oubli des variables artificielles et résolution du programme original.

Méthode à deux phases: exemple

Prenons le programme

$$
\begin{aligned}
\min_x \; & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

De ce qui précède, on part du tableau

$$
\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} \\
 & 0 & -3/4 & 1 & 3/2 \\
 & 1 & 5/4 & 0 & 1/2 \\
c^T & 4 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Méthode à deux phases: exemple

Il faut faire apparaître des 0 comme coûts réduits associés à la base:

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} \\ & 0 & -3/4 & 1 & 3/2 \\ & 1 & 5/4 & 0 & 1/2 \\ c^T & 0 & -13/4 & 0 & -7/2 \end{array}$$

Par après, on trouve

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} \\ & 3/5 & 0 & 1 & 9/5 \\ & 4/5 & 1 & 0 & 2/5 \\ c^T & 13/5 & 0 & 0 & -11/5 \end{array}$$

La solution optimale est donc $(0, 2/5, 9/5)$.

Alternative: méthode du “big-M”

Idée: plutôt que de créer un nouveau problème, on va directement intégrer les variables artificielles dans les contraintes initiales.

Comment? On intègre les variables artificielles dans l’objectif initial, mais avec un coût si grand qu’elles ne peuvent qu’être mises à zéro dans une solution optimale. Pour ce faire, on les multiplie avec un certain M *suffisamment* grand.

Alternative: méthode du "big-M"

Si $\sum_{j=1,\ldots,n} a_{ij}x_j = b_i$ et qu'aucune variable n'est isolée:

1. nous ajoutons une variable artificielle $x_{n+1} \geq 0$;
2. nous lui associons un profil très positif: M

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M x_{n+i} \\
\text{t.q.} \quad & \ldots \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \\
& \ldots \\
& x_1 \geq 0, i = 1, \ldots, n+1.
\end{aligned}
$$

Si le problème est réalisable, nous devrions avoir $x_{n+i} = 0$.