

# Programmation Linéaire

## Simplexe: forme matricielle – dictionnaires

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

## Forme matricielle de la méthode du simplexe

Utile pour mieux comprendre, et construire des variantes.

Soit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{D}]$$

où nous supposons que  $\mathbf{B}$  est une base, et décomposons  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{c}$  de manière similaire:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_D), \quad \mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_D).$$

Le programme linéaire standard devient

$$\min_{\mathbf{x}} z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D$$

$$\text{t.q. } \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{D}\mathbf{x}_D = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B \geq 0, \ \mathbf{x}_D \geq 0.$$

## Forme matricielle de la méthode du simplexe

La solution de base associée, que nous supposons également réalisable, devient

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0}), \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Dès lors,

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{0}.$$

Plus généralement,

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D.$$

et

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D) + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}) \mathbf{x}_D. \end{aligned}$$

# Dictionnaire

L'écriture

$$\begin{array}{rcl} x_B & = & B^{-1}b \\ \hline z & = & c_B^T B^{-1}b + (c_D^T - c_B^T B^{-1}D) x_D. \end{array}$$

est aussi appelée **dictionnnnaire**.

Avantages du dictionnaire par rapport aux tableaux:

- forme plus compacte;
- implémentation numérique plus directe

## Forme matricielle de la méthode du simplexe

Ceci permet s'exprimer n'importe quelle solution en termes de  $\mathbf{x}_D$ .  
Dès lors,

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

est le vecteur des coûts réduits.

En d'autres termes,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_D^T & 0 \end{pmatrix}$$

Forme canonique:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

## Exemple

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.à.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## Variables d'écart

Mettons le système sous forme standard en ajoutant une variable d'écart à chacune des inégalités:

$$\min -x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.à. } 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 14$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 28$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + s_3 = 30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0$$

Le système est à présent sous forme canonique.

## Dictionnaire initial

Nous réorganisons le système linéaire pour identifier les variables de bases ainsi que l'objectif.

$$\begin{array}{rcllcl} s_1 & = & 14 & -2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ s_2 & = & 28 & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 \\ s_3 & = & 30 & -2x_1 & -5x_2 & -5x_3 \\ z & = & 0 & -x_1 & -2x_2 & +x_3 \end{array}$$

Un tel système est appelé **dictionnaire**.

Les règles de pivotage sont similaires.



## Variable entrante

On se concentre sur la ligne de l'objectif

$$z = 0 - x_1 - 2x_2 + x_3$$

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont toutes deux associées à un coefficient négatif, et sont donc candidates pour entrer dans la base.

En suivant la règle du coût réduit le plus négatif, nous sélectionnons  $x_2$ .

## Choix de la variable sortante

Nous partons du dictionnaire en annulant  $x_1$  et  $x_3$  qui restent hors base.

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 14 - x_2 \\ s_2 & = & 28 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 - 5x_2 \\ z & = & 0 - 2x_2 \end{array}$$

Comme nous devons garder  $s_1, s_2, s_3$  non-négatifs, nous avons

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & 14 - x_2 \\ 0 & \leq & 28 - 2x_2 \\ 0 & \leq & 30 - 5x_2 \end{array}$$

Dès lors,  $x_2 \leq \min\{14, 28/2, 30/5\} = 6$ . Ainsi,  $s_3$  sort de la base.

## Nouveau dictionnaire

Le pivot s'effectue en échangeant  $s_3$  et  $x_2$  dans l'équation du dictionnaire correspondant à  $s_3$  :

$$s_3 = 30 - 2x_1 - 5x_2 - 5x_3$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 6 - \frac{2}{5}x_1 - x_3 - \frac{1}{5}s_3.$$

Nous remplaçons ensuite  $x_2$  par son expression en termes des variables hors base dans les autres équations du dictionnaire, ce qui donne

$$\begin{array}{rclclcl} x_2 & = & 6 & -\frac{2}{5}x_1 & -x_3 & -\frac{1}{5}s_3 \\ s_1 & = & 8 & -\frac{8}{5}x_1 & & +\frac{1}{5}s_3 \\ s_2 & = & 16 & -\frac{16}{5}x_1 & -x_3 & +\frac{2}{5}s_3 \\ z & = & -12 & -\frac{1}{5}x_1 & +3x_3 & +\frac{2}{5}s_3 \end{array}$$

## Nouveau dictionnaire

Seul  $x_1$  a un coût réduit négatif et donc est choisi pour entrer dans la base. En prenant les rapports entre la colonne de  $x_1$  et celle du terme indépendant, nous voyons que tant  $s_1$  que  $s_2$  peuvent sortir de la base. Choisissons  $s_1$ . Le nouveau dictionnaire est

$$\begin{array}{rcllcl} x_1 & = & 5 & & -\frac{5}{8}s_1 & +\frac{1}{8}s_3 \\ x_2 & = & 4 & -x_3 & +\frac{1}{4}s_1 & -\frac{1}{4}s_3 \\ s_2 & = & 0 & -x_3 & +2s_1 & \\ z & = & -13 & +3x_3 & +\frac{1}{8}s_1 & +\frac{3}{8}s_3 \end{array}$$

Comme il n'y a plus de coût réduit négatif, nous avons convergé. La solution optimale est  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 0$ .

Nous allons automatiser l'approche.

## Méthode du simplexe révisée

Converge souvent en  $O(m)$ .

La méthode révisée ordonne les calculs afin d'éviter les opérations inutiles, en particulier pour les variables non concernées par les pivotages.

Soit  $B^{-1}$  l'inverse de la base actuelle, et la solution actuelle

$$x_B = y_0 = B^{-1}b.$$

**Etape 1** Calculer les coefficients de coûts réduits actuels

$$r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$$

On calcule d'abord

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

puis

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D.$$

## Méthode du simplexe révisée

**Etape 2** Déterminer le vecteur  $\mathbf{a}_q$  qui va entrer dans la base en sélectionnant le coût réduit le plus négatif, et calculer

$$\mathbf{y}_q = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_q,$$

donnant l'expression de  $\mathbf{a}_q$  en termes de la base actuelle.

**Etape 3** Si aucun  $y_{iq}$  n'est  $> 0$ , arrêt: le problème n'est pas borné. Sinon, calculer les rapports  $y_{i0}/y_{iq}$  pour  $y_{iq} > 0$  pour déterminer le vecteur qui va quitter la base.

**Etape 4** Mettre à jour  $\mathbf{B}^{-1}$  et la solution actuelle  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ . Retour à l'étape 1.

La mise à jour de  $\mathbf{B}^{-1}$  se fait en effectuant l'opération classique de pivotage, constituée de  $\mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{y}_q$ , où le pivot est l'élément approprié dans  $\mathbf{y}_q$ . On en profite pour mettre à jour  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ .

## Exemple

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Après ajout des variables d'écarts:

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

## Exemple

Tableau:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
$\mathbf{c}^T$	-3	-1	-3	0	0	0	0

On se limite à

Var	$\mathbf{x}_B$			
$x_4$	1	0	0	2
$x_5$	0	1	0	5
$x_6$	0	0	1	6

Nous avons

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (0 \ 0 \ 0) \mathbf{B}^{-1} = (0 \ 0 \ 0)$$

et

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \lambda^T \mathbf{D} = (-3 \ -1 \ -3)$$



# Dictionnaire

$$\begin{array}{rcl} x_4 = & 2 & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = & 5 & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_6 = & 6 & -2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \hline z = & 0 & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \end{array}$$

## Exemple

On fait entrer  $a_2$  (violant la règle du coût le plus négatif)

Var				$x_B$	$y_2$
$x_4$	1	0	0	2	1
$x_5$	0	1	0	5	2
$x_6$	0	0	1	6	2

Var				$x_B$
$x_2$	1	0	0	2
$x_5$	-2	1	0	1
$x_6$	-2	0	1	2

Nous avons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exemple

Nous avons également

$$\mathbf{c}_B^T = (-1 \quad 0 \quad 0),$$

et dès lors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^T &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ &= (-1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 0 \quad 0)\end{aligned}$$

Les coûts réduits se calculent de manière similaire

$$(-3 \quad -3 \quad 0) - (-1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \quad -2 \quad 1)$$

En d'autres termes,

$$r_1 = -1, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = 1.$$

## Exemple

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le variable entrante retenue est  $x_3$ , et on construit le tableau

Var				$x_B$	$y_3$
$x_2$	1	0	0	2	1
$x_5$	-2	1	0	1	1
$x_6$	-2	0	1	2	-1

Après le pivot:

Var				$x_B$
$x_2$	3	-1	0	1
$x_3$	-2	1	0	1
$x_6$	-4	1	1	3

## Exemple

$$\lambda^T = (-1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad -2 \quad 0)$$

$$\begin{aligned} r_D^T &= (-3 \quad 0 \quad 0) - (3 \quad -2 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-3 \quad 0 \quad 0) - (4 \quad 3 \quad -2) = (-7 \quad -3 \quad 2) \end{aligned}$$

On fait entrer  $\mathbf{a}_1$ .

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## Exemple

Var				$x_B$	$y_1$
$x_2$	3	-1	0	1	5
$x_3$	-2	1	0	1	-3
$x_6$	-4	1	1	3	-5

$x_1$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$x_3$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
$x_6$	-1	0	1	4

$$\lambda^T = (-3 \quad -3 \quad 0) \mathbf{B}^{-1} = \left(-\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad 0\right)$$

## Exemple

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D^T &= (-1 \quad 0 \quad 0) - \left(-\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1 \quad 0 \quad 0) - \left(-\frac{12}{5} \quad -\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{7}{5} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$  est une solution optimale.

# Simplexe et décomposition LU

$B^{-1}$  n'apparaît que dans la résolution de systèmes linéaires. Mais dans ce contexte, on ne calcule jamais  $B^{-1}$  pour des raisons de stabilité numérique.

Reformulons le simplexe pour faire apparaître les termes linéaires.

## Etape 1

$$x_B = y_0,$$

avec

$$By_0 = b.$$



## Simplexe et décomposition LU

**Etape 2** Résoudre

$$\lambda^T B = c_B^T,$$

et

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D.$$

Si  $r_D \geq 0$ , stop: la solution actuelle est optimale.

**Etape 3** Déterminer le vecteur  $a_q$  qui va entrer la base en sélectionnant le coefficient de coût réduit le plus négatif, et résoudre

$$B y_q = a_q.$$

**Etape 4** Si aucun  $y_{iq} > 0$ , stop: le problème est non borné. Sinon, calculer les rapports  $y_{i0}/y_{iq}$  pour  $y_{iq} > 0$ , et sélectionner le rapport le plus négatif pour déterminer quel vecteur sortira de la base.

## Simplexe et décomposition LU

**Etape 5** Mise à jour de  $\mathbf{B}$ . Retour à l'étape 1.

Cette manière de formuler le simplexe offre

1. une meilleure stabilité numérique,
2. des avantages de stockage mémoire (par exemple, si  $\mathbf{B}$  est une matrice creuse,  $\mathbf{B}^{-1}$  peut être pleine).

On décompose  $\mathbf{B}$  comme

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$$

où

- $\mathbf{L}$  est une matrice triangulaire inférieure,
- $\mathbf{U}$  est une matrice triangulaire supérieure.

## Simplexe et décomposition

Alors

$$\begin{aligned} Bx &= b, \\ \Leftrightarrow LUx &= b \\ \Leftrightarrow Ly &= b, \quad y = Ux \end{aligned}$$

Résoudre un système triangulaire est immédiat!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

## Résolution de système triangulaire

$$x_1 = b_1/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

Conditions:  $a_{ii} \neq 0, \forall i$ .

Note: on ne suppose aucun échange de ligne (parfois opéré pour préserver la précision et le caractère creux).

Mise à jour:

$$B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

# Résolution de système triangulaire

Nouvelle base

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\overline{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_m & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= (u_1 \quad \cdots \quad u_{k-1} \quad u_{k+1} \quad \cdots \quad u_m \quad \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_q) \\ &= \overline{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

# Résolution de système triangulaire

En effet

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m) = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m) = (\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m)$$

$\overline{\mathbf{H}}$  a la forme

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

## Résolution de système triangulaire

$L^{-1}\mathbf{a}_q$  est un sous-produit du calcul de  $\mathbf{y}_q$ , aussi c'est "gratuit".

$\overline{\mathbf{H}}$  peut être ramené à une forme triangulaire supérieure grâce à une série d'éliminations de Gauss.

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{M}_{m-1}\mathbf{M}_{m-2}\dots\mathbf{M}_k\overline{\mathbf{H}}$$

où  $\mathbf{M}_i$  a la forme

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & m_i & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

# Résolution de système triangulaire

$$\overline{B} = \overline{L}\overline{U}$$

avec

$$\overline{L} = LM_k^{-1} \dots M_{m-1}^{-1}.$$

$$M_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -m_i & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$