

Programmation Linéaire

Notions fondamentales

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Solutions de base

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons $m \leq n$ et $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$. Sans perte de généralité, supposons les m premières colonnes de \mathbf{A} indépendantes, et formons

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{D})$$

Solution de base : $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_b \ 0)$, avec $\mathbf{B}\mathbf{x}_b = \mathbf{b}$.

Solution de base dégénérée : si \mathbf{x}_b contient des composantes nulles.

Solution de base réalisable : solution de base telle que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ et $\mathbf{x} \geq 0$.

Rappel : base d'un espace vectoriel

Considérons un ensemble $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ d'un sous-espace vectoriel V .

- Les éléments de B sont **linéairement indépendants** si

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$$

admet pour seule solution $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, m$.

- B est un **ensemble générateur** de V si $\forall y \in V, \exists \alpha_i, i = 1, \dots, m$ tels que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = y.$$

- B est une **base**, si B est un ensemble linéairement indépendant et générateur de V .

Théorème fondamental de la programmation linéaire

Soit un PL sous forme standard, avec \mathbf{A} de dimension $m \times n$ et de rang plein (i.e. $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$).

- S'il y a une solution réalisable, alors il y a une solution de base réalisable.*
- S'il y a une solution réalisable optimale, alors il y a une solution de base réalisable optimale.*

Théorème fondamental de la programmation linéaire : preuve

Écrivons

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$$

Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Si \mathbf{x} est réalisable, alors

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Supposons qu'il y a exactement p composantes > 0 , et s.p.d.g., qu'il s'agit des p premières composantes : $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Cas 1 : $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ linéairement indépendants.

Dès lors, $p \leq m$.

Si $p = m$, la preuve est complète.

Supposons donc $p < m$.

Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Comme \mathbf{A} est de rang plein, on peut choisir $m - p$ vecteurs (colonnes de \mathbf{A}) à partir des $n - p$ vecteurs restants pour former un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants.

En affectant la valeur 0 aux $m - p$ variables correspondantes, on obtient une solution de base réalisable (dégénérée).

Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Cas 2 : $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ linéairement dépendants.

Dès lors, $\exists \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^n$, avec au moins un $y_i > 0$, tel que

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots y_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0},$$

de sorte que $\forall \epsilon$,

$$(x_1 - \epsilon y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2) \mathbf{a}_2 + \dots (x_p - \epsilon y_p) \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Autrement dit,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b}.$$

Pour $\epsilon > 0$, et croissant,

- si $y_k < 0$, $(x_k - \epsilon y_k)$ augmente,
- si $y_k > 0$, $(x_k - \epsilon y_k)$ diminue,
- si $y_k = 0$, $(x_k - \epsilon y_k)$ reste constant.

Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Prenons

$$\epsilon = \min_{k \in (1,2,\dots,p)} \left\{ \frac{x_k}{y_k} \mid y_k > 0 \right\} (> 0),$$
$$j \in \arg \min_{k \in (1,2,\dots,p)} \left\{ \frac{x_k}{y_k} \mid y_k > 0 \right\}.$$

Alors

$$x_j - \epsilon y_j = 0,$$

et $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}$ a au plus $p - 1$ variables positives.

En répétant ce processus si nécessaire, on peut éliminer des variables positives jusqu'à obtenir une solution réalisable avec des colonnes correspondantes qui sont linéairement indépendantes. Le cas 1 s'applique alors.

Théorème fondamental de la PL : optimalité

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une solution optimale réalisable, et comme précédemment, supposons qu'il y a exactement p variables positives x_1, x_2, \dots, x_p .

À nouveau deux cas.

Cas 1 : correspond à l'indépendance linéaire, et se traite comme pour la question de réalisabilité.

Cas 2 : similaire à la réalisabilité, à ceci près que nous devons montrer que pour n'importe quel ϵ , la solution $x - \epsilon y$ est optimale.

Théorème fondamental de la PL : optimalité

Prenons à nouveau \mathbf{y} t.q. $A\mathbf{y} = 0$ et $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ t.q. $y_i > 0$.
Pour ϵ suffisamment proche de 0, positif ou négatif, $\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y} \geq 0$
(réalisable).

Supposons $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \neq 0$, et $\epsilon > 0$ si $\mathbf{c}^T \mathbf{y} > 0$, $\epsilon < 0$ sinon. Alors

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y} < \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

donc \mathbf{x} n'est pas optimal. Dès lors, $\mathbf{c}^T \mathbf{y} = 0$.

On peut alors appliquer le procédé du cas 2 sur la réalisabilité, pour diminuer le nombre de composantes non-nulles de la solution, tout en maintenant l'optimalité, puis se ramener au cas 1.

Conséquences du théorème

On peut résoudre un PL en énumérant les solutions de base réalisables.

Problème : il peut y en avoir beaucoup.

Pour n variables et m contraintes, nous avons

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

matrices à considérer pour déterminer des solutions de base.

Exemple : 100 variables, 40 contraintes

$$\binom{100}{40} = 13746234145802811501267369720 \approx 1,375 \cdot 10^{28}$$

Exemple

Considérons le programme

$$\max 2x + 3y$$

$$\text{t.q. } x \geq 1$$

$$2x + 3y \leq 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

On voit immédiatement que la valeur optimale est 5 (pourquoi?).

Sous forme standard, nous obtenons

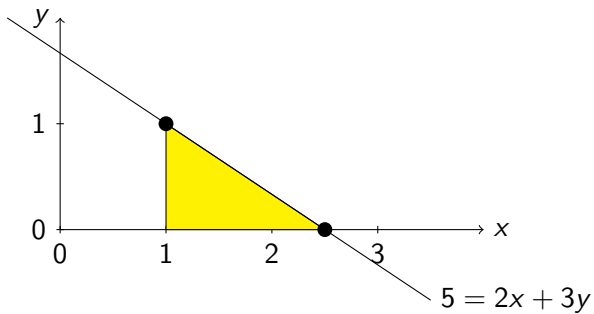
$$- \min - 2x - 3y$$

$$\text{t.q. } x - u = 1$$

$$2x + 3y + s = 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0, s \geq 0, u \geq 0.$$

Exemple : graphiquement



Solutions de base

Sous forme matricielle, le problème se définit à partir de

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nombre de sous-matrices carrées 2 par 2 :

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

Le nombre de bases est toutefois strictement plus petit puisqu'il y a forcément des colonnes linéairement dépendantes.

Solutions de base

Bases potentielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_6 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seules \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 , \mathbf{B}_4 , \mathbf{B}_6 sont des bases. Les solutions de base respectives sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solutions de base réalisables

De ces solutions, seules les trois premières sont réalisables.

Elles correspondent aux sommets du polytope réalisable.

Relations à la convexité

But : faire le lien entre solutions de base réalisables et points extrêmes d'un polytope.

- Un ensemble C dans E^n est dit *convexe* si pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, et pour n'importe quel réel α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$, le point $\alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2 \in C$.
- Le point $z = \alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$, $\alpha \in [0, 1]$, est dit être une *combinaison convexe* de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .
- La combinaison convexe est dite *stricte* si $\alpha \in (0, 1)$.
- L'ensemble des combinaisons convexes de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 est le segment de droite qui relie \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .

Convexité : propriétés

1. Si C est un ensemble convexe et β un nombre réel, l'ensemble

$$\beta C = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \beta \mathbf{c}, \mathbf{c} \in C\},$$

est convexe.

2. Si C et D sont deux ensembles convexes, l'ensemble

$$C + D = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \mathbf{c} \in C, \mathbf{d} \in D\},$$

est convexe.

3. L'intersection de n'importe quelle collection d'ensembles convexes est convexe.

Points extrêmes

- **Polytope** $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$.

Note : $K = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ est aussi un polytope. En effet, K peut se réécrire comme

$$K = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, -\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b}, -\mathbf{x} \leq 0\}.$$

- **Polyèdre** : polytope borné non vide.
- Voir Annexe B de Luenberger et Ye pour plus de détails.
- D'autres auteurs utilisent une convention opposée. Ainsi, dans "Convex optimization" (Boyd et Vandenberghe, 2004), un polytope est un polyèdre fermé (section 2.2.4).

Points extrêmes

Un point x d'un ensemble convexe C est un **point extrême** de C s'il n'existe pas deux points distincts x_1 et x_2 dans C tels que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ pour un certain α , $0 < \alpha < 1$. En d'autres termes, il ne peut pas s'écrire comme une combinaison convexe stricte de deux points de C . Intuitivement, un point extrême est un “sommet” de C .

Équivalence des points extrêmes et des solutions de base

- Soit \mathbf{A} une matrice $m \times n$ de rang m et \mathbf{b} un vecteur de dimension m .
- Soit K le polytope convexe constitué de l'ensemble des vecteurs \mathbf{x} de dimension n satisfaisant

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0.\end{aligned}$$

Un vecteur \mathbf{x} est un point extrême de K si et seulement si \mathbf{x} est une solution de base réalisable pour le système précédent.

Preuve

\Leftarrow Supposons tout d'abord que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une solution de base réalisable. Dès lors, \mathbf{x} a k composantes non nulles, et $n - k$ composantes nulles, avec $k \leq m$. $k < m$ si la solution de base est dégénérée.

S.p.d.g., les k premières composantes sont non-nulles et

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

où $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sont les k premières colonnes de A , linéairement indépendantes. Comme A est de rang m , la matrice comprends m colonnes indépendantes. S.p.d.g., nous pouvons supposer que les m premières colonnes sont indépendantes, et on peut encore écrire

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

Preuve

Supposons par l'absurde que \mathbf{x} n'est pas un point extrême. Il est alors combinaison convexe stricte de deux autres points distincts de K :

$$\exists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in K, \mathbf{y} \neq \mathbf{z}, \alpha \in (0, 1) \text{ tels que } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{z}.$$

Comme $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{y} \geq 0$, $\mathbf{z} \geq 0$, les $n - k$ dernières composantes de \mathbf{y} et \mathbf{z} sont nulles.

Par définition de K , on a aussi

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b},$$

$$z_1 \mathbf{a}_1 + z_2 \mathbf{a}_2 + \dots + z_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

Comme $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ linéairement indépendantes,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}.$$

Preuve

\Rightarrow Supposons à présent que \mathbf{x} est un point extrême de K , et s.p.d.g. que les composantes non-nulles de \mathbf{x} sont les k premières composantes. Dès lors :

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

avec $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Pour montrer que \mathbf{x} est une solution de base, nous devons montrer que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors,
 $\exists \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \neq 0$ t.q.

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Preuve

On peut prendre $\epsilon \neq 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \geq 0,$$

et

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}).$$

Clairement,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b},$$

aussi $\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}, \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \in K$.

Dès lors, \mathbf{x} peut être exprimé comme combinaison convexe de deux points distincts de K , et donc n'est pas un point extrême.

Ceci implique qu'on doit avoir $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ linéairement indépendants, et de là, $k \leq m$. \mathbf{x} est dès lors une solution de base.

Corollaires

Corollaire 1 Si l'ensemble convexe K est non vide, il y a au moins un point extrême.

Corollaire 2 S'il existe une solution optimale finie à un problème de programmation linéaire, il existe une solution optimale finie qui est un point extrême de l'ensemble de contraintes.

Corollaire 3 L'ensemble de contraintes K possède un nombre fini de points extrêmes.

Preuve. L'ensemble des points extrêmes de K est un sous-ensemble des solutions de base, qui sont en nombre fini (il y a un nombre fini de sélections possible de m colonnes de \mathbf{A} parmi n colonnes).

Corollaire 4 Si le polytope convexe K est borné, alors K est un polyèdre convexe, i.e. K consiste de points qui sont combinaisons convexes d'un nombre fini de points.

Corollaire 4

Le corollaire 4 est un cas particulier du résultat plus général :
(Krein-Milman) Soit \mathcal{C} un convexe compact de \mathbb{R}^n . \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.

Note : l'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{S} est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant \mathcal{S} . Si $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$, l'enveloppe convexe de \mathcal{S} est

$$\text{conv}(\mathcal{S}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i \mid \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}.$$