

IFT 2505

Programmation Linéaire

Stratégies de points intérieurs

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Stratégies de solution en points intérieurs

Trois grandes approches, suivant les différences dans les définitions du chemin central :

1. barrière primale, méthode de poursuite de chemin,
2. méthode primale-duale de poursuite de chemin,
3. méthode primale-duale de réduction de potentiel.

Caractéristiques

	R-P	R-D	Saut nul
simplexe primal	X		X
simplexe dual		X	X
barrière primale	X		
poursuite de chemin primale-duale	X	X	
réduction de potentiel primale-duale	X	X	

R : réalisabilité, P : primal, D : dual

Méthode primale barrière

Nous partons du problème primal barrière

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Nous voudrions le résoudre pour μ petit.

Par exemple, $\mu = \epsilon/n$ permet d'obtenir un saut de dualité inférieur à ϵ .

Souci : difficile de résoudre pour μ proche de 0.

Méthode primale barrière

Une stratégie générale est de commencer avec μ modérément large (p.e. $\mu = 100$) et de résoudre le problème approximativement.

La solution correspondante est approximativement sur le chemin central primal, mais probablement assez loin du point correspondant à $\mu \rightarrow 0$.

Ce point ne servira que de point de départ pour le problème avec un μ plus petit.

Typiquement, on mettra à jour μ de l'itération k à l'itération $k + 1$ comme

$$\mu_{k+1} = \gamma \mu_k,$$

pour $0 < \gamma < 1$ fixé.

Méthode primale barrière

Si on commence avec une valeur μ_0 , à l'itération k ,

$$\mu_k = \gamma^k \mu_0,$$

Dès, réduire μ_k/μ_0 sous ϵ requiert

$$k = \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log \gamma} \right\rceil.$$

Souvent, une variante de la méthode de Newton est utilisée pour résoudre les sous-problèmes ainsi construits :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{s} = \mu \mathbf{1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}$$

Système d'équation non linéaires : méthode de Newton

Considérons le système d'équations non linéaires

$$F(\mathbf{x}) = 0$$

avec $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$.

En partant d'un point \mathbf{x}_0 , la méthode de Newton construit une suite d'itérés à partir de la récurrence

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}(\mathbf{x}_k)F(\mathbf{x}_k)$$

où $J(\mathbf{x}_k)$ est le Jacobien de f :

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^T f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}}^T f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}}^T f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

La méthode converge si on est suffisamment proche du zéro de la fonction.

Méthode primale barrière

Etant donné un point $x \in \mathring{\mathcal{F}}_P$, la méthode de Newton consistera à chercher des direction \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y et \mathbf{d}_s à partir du système

$$\mu \mathbf{X}^{-2} \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{X}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{c}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_x = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{d}_y + \mathbf{d}_s = \mathbf{0}$$

On construit le nouveau point comme

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \mathbf{d}_x.$$

Si $\mathbf{x} \circ \mathbf{s} = \mu \mathbf{1}$ pour un certain $\mathbf{s} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y}$, alors

$$\mathbf{d} \equiv (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_s) = \mathbf{0}.$$

Si une composante de $\mathbf{x} \circ \mathbf{s}$ est plus petite que μ , l'approche tendra à augmenter cette composante, et inversement si la composante est plus grande que μ .

Méthode primale barrière

La méthode marche relativement bien si μ est modérément grand, ou si l'algorithme est démarré avec un point proche de la solution.

Pour trouver $(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_s)$, prémultiplions les deux côtés de la première égalité du système de Newton par \mathbf{X}^2 :

$$\mu \mathbf{d}_x + \mathbf{X}^2 \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{X} \mathbf{1} - \mathbf{X}^2 \mathbf{c}.$$

En prémultipliant par \mathbf{A} et en utilisant $\mathbf{A} \mathbf{d}_x = \mathbf{0}$, nous avons

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^2 \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{1} - \mathbf{A} \mathbf{X}^2 \mathbf{c}.$$

Comme $\mathbf{d}_s = \mathbf{A}^T \mathbf{d}_y$, nous avons

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^2 \mathbf{A}^T \mathbf{d}_y = \mu \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{1} - \mathbf{A} \mathbf{X}^2 \mathbf{c}.$$

On en tire \mathbf{d}_y , et de là, \mathbf{d}_s puis \mathbf{d}_x .

Algorithme général

Etape 1 Choisir μ_0 et un point de départ (x_0, y_0, s_0) , tel que

$$Ax_0 = b$$

$$A^T y_0 + s_0 = c^T$$

et $y_0, s_0 \geq 0$, $x_0 > 0$. Poser $k = 0$, et choisir μ_0, ϵ .

Etape 2 Projeter x_k sur le chemin central avec la méthode de Newton : calculer le vecteur (d_x, d_y, d_s) et poser

$$x_{k+1} = x_k + d_x$$

$$y_{k+1} = y_k + d_y$$

$$s_{k+1} = s_k + d_s$$

Si $\mu_k < \epsilon$, arrête. Sinon, définir $\mu_{k+1} = \gamma \mu_k$, poser $k := k + 1$, et retourner au début de l'étape 2.