Programmation Linéaire
Dualité

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Dualité

Nous considérons le problème, dit **primal** :

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le programme suivant est appelé **dual** :

$$\begin{aligned} \max_\lambda \ & \lambda^T b \\ \text{t.q. } & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x, \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, b \in \mathbb{R}^m$.
Note : les contraintes duales peuvent aussi s'écrire $\lambda^T A \leq c^T$.

Dualité

x : variables du problème primal
λ : variables du problèmes dual

Dual du dual ?

$$\begin{aligned} \min_{x} \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualité : forme standard

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

revient à

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualité : forme standard

Le dual peut alors s'écrire

$$
\begin{aligned}
\max_{u,v}\ & u^T b - v^T b \\
\text{t.q. } & u^T A - v^T A \leq c^T \\
& u \geq 0 \\
& v \geq 0
\end{aligned}
$$

ou, avec $\lambda = u - v$,

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda}\ & \lambda^T b \\
\text{t.q. } & \lambda^T A \leq c^T
\end{aligned}
$$

Forme asymétrique : $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conversion primal-dual

Minimisation	**Maximisation**
Contraintes	Variables
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	non restreint
Variables	Contraintes
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
non restreint	$=$

Conversion primal-dual : exemples

Primal	Dual
$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q} \ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \max_\lambda \ & b^T \lambda \\ \text{t.q.} \ & A^T \lambda \leq c. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q.} \ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \max_\lambda \ & b^T \lambda \\ \text{t.q.} \ & A^T \lambda \leq c, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Conversion primal-dual : exemples

$$\begin{aligned} \max_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_\lambda \ & b^T \lambda \\ \text{t.q. } & A^T \lambda \geq c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q } & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_\lambda \ & b^T \lambda \\ \text{t.q } & A^T \lambda \leq c, \\ & \lambda \leq 0. \end{aligned}$$

Exemple

Primal

$$\begin{aligned}
\min_x \ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{t.q. } & x_1 + x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 5 \\
& x_2 \geq 0, \ x_3 \leq 0.
\end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}
\max_\lambda \ & 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\
\text{t.q. } & \lambda_1 - 2\lambda_2 = 4 \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2 \\
& -4\lambda_2 \geq 1 \\
& \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Exemple : le problème de régime alimentaire

- x_j : unités de produit alimentaire
- n produits
- b : besoins minimums (b_i : i^e nutriment)
- c : coût
- m nutriments
- a_{ij} : unités de nutriments i dans le produit j.

Primal : on veut minimiser sa consommation tout en satisfaisant les besoins minimums

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple : le problème de régime alimentaire

Dual :

$$\max_{\lambda} \lambda^T b$$
$$\text{t.q. } \lambda^T A \leq c^T$$
$$\lambda \geq 0$$

- λ : prix de compléments alimentaires (un par nutriment).
- On veut maximiser le revenu de la vente de tels compléments.
- Contrainte : on doit rester compétitif ; le prix combiné des compléments doit rester inférieur au coût des aliments originaux.

Exemple

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min\ z &= -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{t.q. } & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots 6. \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme standard, nous devons ajouter 2 variables d'écart, disons x_5 et x_6. Ceci donne le problème

$$\begin{aligned} \min\ z &= -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{t.q. } & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots 6. \end{aligned}$$

Exemple

Sous forme tableau, ceci se traduit par

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
4	2	1	1	1	0	5
3	1	2	1	0	1	4
-4	-3	-1	-2	0	0	0

Le système est déjà sous forme canonique, et nous pouvons identifier les variables de base x_5 et x_6. A ce système correspondent

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Plutôt que de devoir travailler sur toutes les colonnes de A en permanence, nous allons utiliser la version révisée du simplexe.

Exemple

Nous cherchons d'abord à calculer les coûts réduits, en notant que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors,

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = c_D^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il existe des coûts réduits négatifs, aussi nous n'avons pas terminé.

Une possibilité est de faire entrer x_1.

Exemple

Dans la base courante,

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le pivotage peut se résumer à

	x_5	x_6	b	y_1
x_5	1	0	5	4
x_6	0	1	4	3
$-z$	0	0	0	-4

Le mininum des rapports composante par composante entre b et y_1, pour les éléments strictement positifs de y_1, est $5/4$. Autrement dit, x_1 entre dans la base et x_5 sort. La réduction du tableau donne

	x_5	x_6	b	y_1
x_1	$1/4$	0	$5/4$	1
x_6	$-3/4$	1	$1/4$	0
$-z$	1	0	5	0

Exemple

Du tableau précédent, nous tirons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

et en conséquence

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits deviennent

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple

Il a des coûts réduits strictement négatifs, aussi on doit continuer. On choisit ici le premier coût, autrement dit on fait entrer x_2, lequel est associé à

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Procédons au pivotage :

	x_5	x_6	b	y_2
x_1	$1/4$	0	$5/4$	$1/2$
x_6	$-3/4$	1	$1/4$	$-1/2$
$-z$	1	0	5	-1

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	$1/2$	0	$5/2$	1
x_6	$-1/2$	1	$3/2$	0
$-z$	$3/2$	0	$15/2$	0

Exemple

Nous obtenons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits valent

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La variable d'entrée doit être x_4.

Exemple

Nous avons

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Cela conduit au tableau

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	$1/2$	0	$5/2$	$1/2$
x_6	$-1/2$	1	$3/2$	$1/2$
$-z$	$3/2$	0	$15/2$	$-1/2$

et x_6 doit sortir de la base. Le pivotage conduit à

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	1	-1	1	0
x_4	-1	2	3	1
$-z$	1	1	9	0

Exemple

Dès lors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits sont

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tous les coûts réduits sont positifs. La base B_3 est donc optimale. La solution associée à B_3 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour une valeur optimale de -9.

Exemple : dual

Reprenons le problème primal.

$$\begin{aligned} \min\ z &= -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{t.q. } & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \dots 4. \end{aligned}$$

Formons le dual

$$\begin{aligned} \max\ & 5\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \text{t.q. } & 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -4 \\ & 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -3 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \leq -2 \\ & \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Exemple : dual

Essayons de nous rapprocher de la forme standard :

$$
\begin{aligned}
-\min\ & -5\lambda_1 - 4\lambda_2 \\
\text{t.q.}\ & -4\lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 4 \\
& -2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 3 \\
& -\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 \\
& -\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2 \\
& -\lambda_1 \geq 0, -\lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Exemple : dual

En posant $y_i = -\lambda_i$, en ajoutant des variables de surplus, et en oubliant temporairement le signe négatif devant l'opérateur de minimisation, nous avons

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5y_1 + 4y_2 \\
\text{t.q. } & 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 4 \\
& 2y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\
& y_1 + 2y_2 - y_5 = 1 \\
& y_1 + y_2 - y_6 = 2 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

En résolvant ce problème (avec par exemple une méthode à deux phases), nous obtenons la solution optimale

$$y^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

pour la valeur optimale 9.

Exemple : dual

En repassant au dual original, cela donne une valeur optimale de -9 et

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

comme lors du dernier calcul dans le simplexe révisé pour le primal.

Est-ce un hasard ? Pas vraiment...

Dualité faible

(Forme symétrique ou forme asymétrique – forme standard)

Si x and λ sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, alors

$$c^T x \geq \lambda^T b$$

Démonstration.

$$\lambda^T b \leq \lambda^T A x \leq c^T x,$$

pour $x \geq 0$, vu que x est supposé realisable, et que du dual, $\lambda^T A \leq c^T$. $\square$

Dès lors, l'objectif primal est une borne supérieure pour le dual, et vice-versa.

Corollaire

Si x_0 et λ_0 sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, et si

$$c^T x_0 = \lambda_0^T b,$$

alors x_0 et λ_0 sont optimaux pour leur problème respectif.

Mais on n'a encore dit sur la réalisabilité d'un problème par rapport à l'autre !

Dualité forte

Si un des problèmes, primal ou dual, a une solution optimale finie, l'autre problème a aussi une solution optimale finie, et les valeurs correspondantes des fonctions objectifs sont égales. Si l'un des problèmes a un objectif non borné, l'autre problème n'a pas de solution réalisable.

Démonstration.

La deuxième affirmation est une conséquence directe du lemme.

Ainsi si le primal est non borné et λ est réalisable pour le dual, nous devons avoir

$$\lambda^T b \leq -M$$

pour M arbitrairement grand, ce qui est impossible.

$\square$

Dualité forte

Démonstration.

Si le primal a une solution optimale finie, nous voulons montrer que le dual a une solution optimale finie.

Soit z^* la valeur optimale du primal. Définissons

$$
\begin{aligned}
C = \{(r, w) : r = tz^* - c^T x, \\
w = tb - Ax,\ \text{avec } x \geq 0,\ t \geq 0\}
\end{aligned}
$$

C est un cône convexe fermé :

- cône : pour $\alpha > 0$ et $(r, w) \in C$, alors $\alpha(r, w) \in C$;
- convexe : soient (r_1, w_1) et $(r_2, w_2) \in C$, alors $\forall\, \lambda \in (0, 1)$, $\lambda(r_1, w_1) + (1 - \lambda)(r_2, w_2) \in C$.
- fermé : $(0, 0) \in C$.

Dualité forte

Démonstration.

Mais $(1,0) \notin C$. Par l'absurde, supposons $(1,0) \in C$.
Nous avons donc $w = 0$, et de là, il existe un certain couple (t_0, x_0) tel que $t_0 b - Ax_0 = 0$. Deux cas sont envisageables :

- Si $t_0 > 0$, alors $x = x_0/t_0$ est réalisable pour le primal comme $Ax = b$, $x \geq 0$. Comme $z^* \leq c^T x$, $r = t_0 z^* - t_0 c^T x_0/t_0 \leq 0$, alors qu'on supposait $r = 1$.
- Si $t_0 = 0$, alors $w = Ax_0 = 0$, avec $x_0 \geq 0$. D'autre part, $1 = r = t_0 z^* - c^T x_0 = -c^T x_0$, et donc $c^T x_0 = -1$.
  Si x est réalisable pour le primal, alors $\forall \alpha \geq 0$, $x + \alpha x_0$ est realisable comme $A(x + \alpha x_0) = Ax + \alpha A x_0 = b$, et $x + \alpha x_0 \geq 0$.
  De plus, $c^T(x + \alpha x_0) = c^T x - \alpha \to -\infty$ quand $\alpha \to \infty$. Ceci contredit l'existence d'un minimum fini.
- Donc, $(1,0) \notin C$.

Dualité forte

Démonstration.

Comme C est un ensemble convexe fermé, cela implique qu'il existe un hyperplan séparant $(1, 0)$ et C. Autrement dit, $\exists [s, \lambda] \in \mathbb{R}^{m+1}$, $[s, \lambda] \neq 0$, et une constante k t.q.

$$\begin{aligned} s = (s, \lambda)^T(1, 0) &< \inf\{(s, \lambda)^T(r, w) \text{ t.q. } (r, w) \in C\} \\ &= \inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r, w) \in C\} = k \end{aligned}$$

Si $k < 0$, $\exists (r, w) \in C$ t.q. $sr + \lambda^T w = \kappa < 0$, et $\forall \alpha \geq 0$, $\alpha(r, w) \in C$ car C est un cône. Mais $\alpha(sr + \lambda^T w) = \alpha\kappa < s$, pour α assez grand. Donc $k \geq 0$.

Or $(0, 0) \in C$, donc $k \leq 0$, et de là, $k = 0$, et $s < 0$. $\square$

Dualité forte

Démonstration.

Prenons $\beta = -s$. Comme C est un cône, nous avons

$$\begin{aligned} -1 = \frac{1}{\beta}s &= \frac{1}{\beta}(s,\lambda)^T(1,0) \\ &< \frac{1}{\beta}\inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r,w) \in C\} \\ &= \frac{1}{\beta}\inf\{s\beta r + \lambda^T \beta w \text{ t.q. } (r,w) \in C\} \\ &= \inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r,w) \in C\}. \end{aligned}$$

Aussi, sans perte de généralités, $s = -1$

□

Dualité forte

Démonstration.

Comme $\inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r, w) \in C\} = 0$, si $s = -1$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$-r + \lambda^T w \geq 0, \ \forall (r, w) \in C.$$

De manière équivalente, par définition de C,

$$(c^T - \lambda^T A)x - tz^* + t\lambda^T b \geq 0, \ \forall x, t \geq 0.$$

$t = 0$ donne $\lambda^T A \leq c^T$, i.e. λ est réalisable pour le dual.
$x = 0$ et $t = 1$ donne $\lambda^T b \geq z^*$. Par le lemme 1 et son corollaire, λ est optimal pour le dual.

Comme le dual du dual est le primal, la preuve est complète. □

Dualité : compatibilité

Si un programme est non réalisable, cela n'implique cependant pas que son dual soit non borné. Celui-ci peut être non réalisable.

Le tableau ci-dessous synthétise les différents cas de figure possibles.

Primal / Dual	Borné	Non borné	Non réalisable
Borné	possible	impossible	impossible
Non borné	impossible	impossible	possible
Non réalisable	impossible	possible	possible

Dualité : relations à la procédure du simplexe

Résoudre le primal par le simplexe donne la solution duale.

Supposons que le programme

$$\min_x \; c^T x$$
$$\text{t.q. } Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

a pour solution réalisable de base optimale $x = (x_B, 0)$, avec la base B.

Quelle est la solution du dual

$$\max_\lambda \; \lambda^T b$$
$$\text{t.q. } \lambda^T A \leq c^T$$

en termes de B ? Magie : on l'obtient de la résolution du primal.

Relations à la procédure du simplexe

Supposons

$$A = \begin{pmatrix} B & D \end{pmatrix}, \quad x_B = B^{-1}b, \quad r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D.$$

Si x est optimal, $r_D^T \geq 0$, et donc

$$c_B^T B^{-1} D \leq c_D^T.$$

Avec

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \lambda^T A &= \begin{pmatrix} \lambda^T B & \lambda^T D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_B^T B^{-1} B & c_B^T B^{-1} D \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} c_B^T & c_D^T \end{pmatrix} = c^T. \end{aligned}$$

Relations à la procédure du simplexe

Dès lors,

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

i.e. λ est réalisable pour le dual.

De plus,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

et donc la valeur de la fonction objectif duale pour ce λ est égale à la valeur du problème primal. Dès lors λ est optimal pour le dual.

On retrouve le principal résultat du théorème de dualité.

Relations à la procédure du simplexe

Théorème Si le programme linéaire (sous forme standard) a une solution de base réalisable optimale, correspondant à la base B, le vecteur λ t.q. $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ est une solution optimale du programme dual correspondant. Les valeurs optimales des deux programmes sont égales.

Exemple

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_x \; & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{t.q. } & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Sous forme standard,

$$\begin{aligned} \min_x \; & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{t.q. } & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0,\; x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Exemple

Sous forme de tableau, cela donne

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\
-1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Le premier pivot donne

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 8
\end{array}$$

puis le second

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10
\end{array}$$

Exemple

On a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution optimale est

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

Exemple : dual

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \; & 4\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ \text{t.q. } & 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1 \\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -4 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -3 \\ & \lambda_1 \leq 0, \;\; \lambda_2 \leq 0. \end{aligned}$$

La solution du dual s'obtient directement de la dernière ligne du tableau du simplexe, sous les colonnes où apparaît l'identité dans le premier tableau (comme les coûts initiaux associés sont nuls) :

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicateurs du simplexe

À n'importe quelle itération du simplexe, nous pouvons former le vecteur λ^T satisfaisant

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Ce vecteur n'est pas une solution (réalisable) du dual à moins que B ne soit une base optimale pour le primal. Mais il peut être utilisé à chaque itération pour calculer les coûts réduits, et il aura une interprétation économique.

Pour cette raison, le vecteur $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ est souvent appelé le vecteur des multiplicateurs du simplexe.

Interprétation économique

Comme d'ordinaire, dénotons les colonnes de A par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et par $e_1, e_2, \ldots, e_m$, les m vecteurs unités dans $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i^e \text{position}$$

Étant donné une base B, consistant de m colonnes de A, n'importe quel autre vecteur peut être construit comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base : soit $y \in \mathbb{R}^m$,

$$y = B\left(B^{-1}y\right).$$

Interprétation économique

- L'expression de y à partir de la base est donc
$$B^{-1}y.$$
S'il y a un coût unité c_i associé avec chaque vecteur de base a_i, le coût associé à y est
$$c_B^T B^{-1} y.$$
- Le coût du vecteur unité e_j est
$$c_B^T B^{-1} e_j = \lambda^T e_j = \lambda_j.$$
- Dès lors, les $\lambda_j' s$ peuvent être interprétés comme les prix synthétiques des vecteurs unités.

Interprétation économique

Comme

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j,$$

nous avons comme coût pour y

$$c_B^T B^{-1} y = \sum_{j=1}^{m} c_B^T B^{-1} e_j y_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = \lambda^T y.$$

Interprétation économique : optimalité

L'optimalité du primal correspond à la situation où chaque vecteur $a_1, a_2, \ldots, a_n$, est "moins cher" quand construit à partir de la base que quand acheté directement à son propre prix.

Dans ce cas, nous avons

$$\lambda^T a_i \leq c_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou de manière équivalente

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

ou encore, sous forme colonne,

$$A^T \lambda \leq c,$$

Sensibilité

Continuation de l'interprétation des variables duales comme prix.

Considérons le problème standard,

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec la base optimale B et la solution correspondante $(x_B, 0)$, où $x_B = B^{-1}b$. Une solution correspondante du dual est

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, de petits changements dans b ne conduiront pas à un changement de base optimale.

Sensibilité

Considérons un petit changement Δb. Comme la base optimale n'a pas changé, la nouvelle solution optimale est

$$x = (x_B + \Delta x_B, 0),$$

où

$$\Delta x_B = B^{-1} \Delta b.$$

Le changement correspondant pour la fonction objectif est

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors, λ mesure la sensibilité de la fonction objectif à un petit changement dans le terme de droite des contraintes d'égalité : un changement de b à $b + \Delta b$ conduit à un changement de la fonction objectif de $\lambda^T \Delta b$,

Sensibilité et multiplicateurs du simplexe

Puisque λ_j est le prix du vecteur unité e_j quand exprimé à partir de la base B, il mesure directement le changement dans le coût à partir d'un changement dans la j^e composante du vecteur b. Cela s'observe aussi depuis la relation précédente

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors, λ_j peut être considéré comme le *prix marginal* de b_j, puisque modifier b_j en $b_j + \Delta b_j$ conduit à un changement de la valeur optimale de $\lambda_j \Delta b_j$: si

$$\Delta b = (0. \ldots, 0, \Delta b_j, 0, \ldots, 0),$$

alors

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Delta b_k = \lambda_j \Delta b_j.$$

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Une société fabrique de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base $M1$ et $M2$.

Données :

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible
	Extérieure	Intérieure	par jour
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires :

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes par jour.
- La production en peinture d'intérieur ne peut dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Variables :

- x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour ;
- x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour.

Formulation du programme :

$$
\begin{aligned}
\max_{x}\ & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\text{s.c. } & 6x_1 + 4x_2 \le 24 && (\lambda_1) \\
& x_1 + 2x_2 \le 6 && (\lambda_2) \\
& x_2 \le 2 && (\lambda_3) \\
& -x_1 + x_2 \le 1 && (\lambda_4) \\
& x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Production de peinture : dual

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda}\ & w = 24\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \\
\text{s.c. } & 6\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \geq 5 \\
& 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 4 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Primal :

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1.5,\ z = 21$$

Dual :

$$\lambda_1 = 0.75,\ \lambda_2 = 0.5,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0,\ w = 21.$$

Production de peinture : interprétation économique

Interprétation de la dualité forte : le profit maximal est atteint si les ressources ont été exploitées complètement, i.e. jusqu'à épuisement de leur valeur.

- Le profit augmente de 0.75 par augmentation d'une tonne de M1 et de 0.5 par tonne de M2.
- Les "ressources" 3 et 4 sont abondantes ; augmenter ces ressources n'apporte aucun profit supplémentaire.

Écarts de complémentarité

Théorème : écarts de complémentarite – forme asymétrique
Soit x et λ des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé sous forme standard. Une condition nécessaire et suffisante pour que x et λ soient tous deux solutions optimales est que pour tout i

1. $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
2. $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$

Note : les conditions 1 et 2 peuvent se réécrire comme

$$(\lambda^T a_i - c_i) x_i = 0,$$

i.e. $x_i = 0$ ou (non exclusif) $\lambda^T a_i = c_i$. Sous forme vectorielle, comme $x \geq 0$ et $\lambda^T A \leq c^T$, $(\lambda^T A - c^T)x = 0$.

Écarts de complémentarité : preuve du théorème

Sous les conditions énoncées,

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Dès lors,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et par le corollaire du théorème de dualité faible, λ et x sont solutions optimales de leur problème respectif.

De manière réciproque, si les solutions sont optimales, par le théorème de dualité forte,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et donc

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Comme $x \geq 0, \quad \lambda^T A \leq c$, les conditions tiennent.

Écarts de complémentarité

Théorème : écarts de complémentarité – forme symétrique
Soit x et λ des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé avec les contraintes linéaires sous forme $Ax \geq b$. Une condition nécessaire et suffisante pour que x et λ soient tous deux solutions optimales est que pour tout i

1. $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
2. $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$
3. $\lambda_j > 0 \Rightarrow a^j x = b_j$
4. $\lambda_j = 0 \Leftarrow a^j x > b_j$

Démonstration.
Similaire au théorème précédent. □

Contraintes de complémentarité

Une contrainte de complémentarité impose que deux variables sont complémentaires l'une par rapport à l'autre. En notant ces variables x et y, et en les supposant de dimensions n, ceci se traduit par

$$x_i y_i = 0,\ \ i = 1, \ldots, n, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

La condition ci-dessus est parfois exprimée de manière plus compacte comme

$$0 \leq x \perp y \geq 0.$$

Contraintes de complémentarité et PL

La complémentarité traduit ici qu'une variable primale (duale) est nulle ou que la contrainte duale (primale) correspondante est active.

Intuitivement une variable de base dans le primal correspond à une contrainte active au niveau du dual.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence pour le primal et le dual, il y a exactement m variables du primal non-nulles à la solution optimale et m contraintes actives pour le dual.

- Hypothèse de non-dégénérescence primale : m composantes de la solution optimale sont strictement positives.
- Hypothèse de non-dégénérescence duale : m contraintes du dual sont actives.

Résolution en utilisant les écarts de complémentarité

Considérons le primal

$$\begin{aligned}\max_{x}\ & z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c. } & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

Dual :

$$\begin{aligned}\min_{y}\ & w = 10y_1 + 8y_2 \\ \text{s.c. } & y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & 2y_1 - y_2 \geq 12 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0.\end{aligned}$$

Résolution en utilisant les écarts de complémentarité

La solution optimale du primal

$$\left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$$

Valeur optimale : $\frac{274}{5}$.

Comme $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, nous avons le système linéaire correspondant pour le dual

$$y_1 + 2y_2 = 5$$
$$2y_1 - y_2 = 12.$$

On tire

$$5y_1 = 29, \quad y_2 = 2y_1 - 12,$$

et donc

$$y_1 = \frac{29}{5}, \quad y_2 = -\frac{2}{5}.$$

Complémentarité

Considérons la paire primale-duale :

$$\begin{aligned}\min_x \; & c^T x \\ \text{s.c. } & Ax = b \\ & x \geq 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\max_\lambda \; & b^T \lambda \\ \text{s.c. } & A^T \lambda \leq c.\end{aligned}$$

Pour toute solution de base non dégénérée x du primal, il existe une et une seule solution λ du dual complémentaire à x.

Le résultat tient même si x est non-réalisable (i.e. les contraintes de non-négativité ne sont pas satisfaites).

Démonstration

Le dual peut se réécrire sous forme standard :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \; & b^T \lambda \\ \text{s.c. } & A^T \lambda + t = c \\ & t \geq 0, \end{aligned}$$

ou de manière plus explicite,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \; & b^T \lambda \\ \text{s.c. } & a_i^T \lambda + t_i = c_i, \;\; i = 1, \ldots, n \\ & t_i \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Démonstration

Considérons un ensemble de variables de base B et un ensemble de variables hors base D, tels que la base correspondante est non dégénérée :

$$\begin{aligned} & x_B = B^{-1}b, \quad x_D = 0, \\ & \forall j \; x_{Bj} \neq 0. \end{aligned}$$

Construisons une solution duale complémentaire à la solution primale :

$$t_B = 0, \quad B^T\lambda = c_B,$$

et

$$t_D^T = c_D^T - \lambda^T D = c_D^T - c_B^T B^{-1} D.$$

L'unicité de λ vient de l'inversibilité de B^T.

Complémentarité

On voit apparaître une réécriture des conditions de complémentarité :

$$t_i x_i = 0, \; i = 1, \dots, n.$$

Problème, nous n'avons pas vérifié la condition

$$t \geq 0.$$

Celle-ci pourrait très bien être violée !

Si $t \geq 0$, $c_D^T - c_B^T B^{-1} D \geq 0$, i.e. x satisfait les conditions d'optimalité. Si $x \geq 0$, c'est une solution de base optimale !

Complémentarité et optimalité

Conséquence : λ est admissible (réalisable) si et seulement si x satisfait les conditions d'optimalité (coûts réduits positifs ou nuls). Autrement dit, les conditions d'optimalité primale sont équivalentes à l'admissibilité duale.

Similairement, une solution x complémentaire à λ est admissible si et seulement si λ satisfait les conditions d'optimalité pour le dual. Cela se déduit directement du fait que le dual du dual est le primal.

Méthode du simplexe dual

Motivations :

- Il arrive souvent qu'une solution de base non admissible (i.e. violant les contraintes de non-négativité), mais satisfaisant les contraintes d'optimalité soit identifiable facilement (par exemple, variables d'écart de contraintes $\leq$ et composantes négatives dans le terme de droite).
- Cette base correspond à une solution admissible du dual, solution identifiable à partir des multiplicateurs du simplexe.

Dans le tableau du simplexe, cette situation revient à ne pas avoir d'éléments négatifs dans la dernière ligne, puisque

$$\begin{aligned} r_j \geq 0 &\Leftrightarrow c_j - (\lambda^T D)_j \geq 0 \\ &\Leftrightarrow c_j - \lambda^T a_j \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^T a_j \leq c_j \end{aligned}$$

Simplexe dual

Cette situation peut se produire tout en ayant une solution de base non réalisable.

Ceci arrive par exemple si on résoud un problème, puis on veut en résoudre un nouveau après avoir changé b.

On va alors travailler sur le problème dual en partant du tableau primal.

Idée de la méthode simplexe duale : résoudre (implicitement) le dual par la méthode du simplexe (mais en travaillant sur le tableau primal !).

Méthode du simplexe dual : principes

En termes du primal :

- maintenir l'optimalité de la dernière ligne ;
- aller vers la réalisabilité.

En termes du dual :

- maintenir la réalisabilité ;
- aller vers l'optimalité.

On va partir avec une solution de base satisfaisant les conditions d'optimalité (= base admissible pour le dual) et chercher à la rendre admissible (= dual optimale).

Méthode du simplexe dual

On considère le problème

$$\min_x c^T x$$
$$\text{t.q. } Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

Supposons qu'une base B est connue, et soit

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

On suppose λ réalisable pour le dual.

La solution $x_b = B^{-1} b$ est dite dual-réalisable.

Si $x_B \geq 0$, cette solution est aussi primal-réalisable, et est par conséquent optimale.

Méthode du simplexe dual

Comme λ est réalisable pour le dual,

$$\lambda^T a_j \leq c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Si, comme d'ordinaire, nous supposons que B est constitué des m premières colonnes de A, i.e.

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix},$$

nous avons

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = c_B^T e_j = c_j,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

où e_j est le j^e vecteur unité.

En appliquant l'hypothèse de non-dégénérescence pour le dual, nous avons aussi

$$\lambda^T a_j < c_j,\ j = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Méthode du simplexe dual

Un cycle du simplexe, appliqué au dual, reviendra à échanger deux composantes de λ, de manière à ce qu'une inégalité stricte devienne une égalité, et vice-versa, tout en augmentant la valeur du dual.

Les m égalités dans la nouvelle solution détermineront une nouvelle base.

Soit u^i la i^e ligne de B^{-1}, et

$$\overline{\lambda}^T = \lambda^T - \epsilon u^i.$$

Nous avons (avec $\epsilon \geq 0$)

$$\overline{\lambda}^T a_j = \lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j.$$

Méthode du simplexe dual

Rappelons la notation préalablement introduite

$$z_j = c_B^T y_j, \qquad y_j = B^{-1} a_j.$$

Dès lors,

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = z_j.$$

Comme

$$u^i a_j = y_{ij},$$
$$y_j = e_j,\ j = 1, \ldots, m$$

nous avons

$$u^i a_j = \delta_{ij},\ j = 1, \ldots, m,$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Méthode du simplexe dual

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}^T a_j &= c_j, && j = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq j,\\
\overline{\lambda}^T a_i &= c_i - \epsilon, &&\\
\overline{\lambda}^T a_j &= z_j - \epsilon y_{ij}, && j = m+1, m+2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

De plus, puisque $x_B = B^{-1}b$,

$$\overline{\lambda}^T b = \lambda^T b - \epsilon u^i b = \lambda^T b - \epsilon x_{Bi}.$$

Comme

$$\lambda^T a_j < c_j,\ j = m+1, \ldots, n,$$

nous cherchons à augmenter le terme de gauche, ce qui revient à considérer les situations où $y_{ij} < 0$ dans

$$\overline{\lambda}^T a_j = z_j - \epsilon y_{ij},\ j = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Méthode du simplexe dual

Nous cherchons à ramener la valeur à c_j, sans la dépasser (sinon on violerait les conditions de réalisabilité du dual), aussi nous prenons

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Soit

$$k = \arg\min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}^T a_k &= z_k - \epsilon_0 y_{ik} \\ &= z_k - \frac{z_k - c_k}{y_{ik}} y_{ik} \\ &= c_k. \end{aligned}$$

Algorithme du simplexe dual

Etape 1 Étant donnée une solution de base dual-réalisable x_B, si $x_B \geq 0$, la solution est optimale : arrêt. Sinon, sélectionner un indice i tel que $x_{Bi} < 0$.

Etape 2 Si tous les $y_{ij} \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, le dual n'a pas de maximum. Sinon, calculer

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Soit k l'indice correspondant (unique si l'hypothèse de non-dégénérescence s'applique).

Etape 3 Former une nouvelle base B en remplaçant a_i par a_k. En utilisant cette base, déterminer la solution de base dual-réalisable x_B correspondante.

Simplexe dual : exemple

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{soumis à } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

En introduisant des variables de surplus, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{soumis à } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Simplexe dual : exemple

Si nous changeons le signe des inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\min_x\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{soumis à } & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\
& -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

conduisant au tableau

$$\begin{array}{ccccccc}
x_4 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -5 \\
x_5 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\
 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

La base (a_4, a_5) est dual-réalisable comme tous les coûts réduits sont non-négatifs.

Simplexe dual : exemple

Nous devons sélectionner une composante de x_B qui est strictement négative pour la retirer de l'ensemble des variables de base. Prenons par exemple $x_5 = -6$.

Nous devons alors calculer les rapports

$$\frac{z_j - c_j}{y_{2j}}$$

ou, en d'autres termes, les rapports entre l'opposé des coûts réduits et les élements de la seconde ligne. Le plus petit rapport (strictement) positif est obtenu avec l'élément y_{12} :

$$\begin{array}{ccccccc}
x_4 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -5 \\
x_5 & \text{-2} & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\
 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Simplexe dual : exemple

Après le pivot, nous avons

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ x_1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -9 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ x_1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -11 \end{array}$$

La solution $(1, 2, 0)$ est optimale.