

# Programmation Linéaire

## Notions fondamentales

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

## Solutions de base

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons  $m \leq n$  et  $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$ . Sans perte de généralité, supposons les  $m$  premières colonnes de  $\mathbf{A}$  indépendantes, et formons

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{D})$$

*Solution de base* :  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_b \ 0)$ , avec  $\mathbf{B}\mathbf{x}_b = \mathbf{b}$ .

*Solution de base dégénérée* : si  $\mathbf{x}_b$  contient des composantes nulles.

*Solution de base réalisable* : solution de base telle que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{x} \geq 0$ .

## Rappel : base d'un espace vectoriel

Considérons un ensemble  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  d'un sous-espace vectoriel  $V$ .

- Les éléments de  $B$  sont linéairement indépendants si

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$$

admet pour seule solution  $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, m$ .

- $B$  est un ensemble générateur de  $V$  si  $\forall y \in V, \exists \alpha_i, i = 1, \dots, m$  tels que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = y.$$

- $B$  est une base, si  $B$  est un ensemble linéairement indépendant et générateur de  $V$

# Théorème fondamental de la programmation linéaire

*Soit un PL sous forme standard, avec  $\mathbf{A}$  de dimension  $m \times n$  et de rang plein (i.e.  $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$ ).*

- S'il y a une solution réalisable, alors il y a une solution de base réalisable.*
- S'il y a une solution réalisable optimale, alors il y a une solution de base réalisable optimale.*

# Théorème fondamental de la programmation linéaire : preuve

Écrivons

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$$

# Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Si  $\mathbf{x}$  est réalisable, alors

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Supposons qu'il y a exactement  $p$  composantes  $> 0$ , et s.p.d.g., qu'il s'agit des  $p$  premières composantes :  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  :

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Cas 1 :  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  linéairement indépendants.

Dès lors,  $p \leq m$ .

Si  $p = m$ , la preuve est complète.

Supposons donc  $p < m$ .

# Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Comme  $\mathbf{A}$  est de rang plein, on peut choisir  $m - p$  vecteurs (colonnes de  $\mathbf{A}$ ) à partir des  $n - p$  vecteurs restants pour former un ensemble de  $m$  vecteurs linéairement indépendants.

En affectant la valeur 0 aux  $m - p$  variables correspondantes, on obtient une solution de base réalisable (dégénérée).

# Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Cas 2 :  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  linéairement dépendants.

Dès lors,  $\exists \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^n$ , avec au moins un  $y_i > 0$ ,

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots y_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0},$$

$$\forall \epsilon, (x_1 - \epsilon y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2) \mathbf{a}_2 + \dots (x_p - \epsilon y_p) \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Autrement dit,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b}.$$

Pour  $\epsilon > 0$ , et croissant,

- si  $y_k < 0$ ,  $(x_k - \epsilon y_k)$  augmente,
- si  $y_k > 0$ ,  $(x_k - \epsilon y_k)$  diminue,
- si  $y_k = 0$ ,  $(x_k - \epsilon y_k)$  reste constant.



# Théorème fondamental de la PL : réalisabilité

Prenons

$$\epsilon = \min_{k \in (1,2,\dots,p)} \left\{ \frac{x_k}{y_k} \mid y_k > 0 \right\} (> 0),$$
$$j \in \arg \min_{k \in (1,2,\dots,p)} \left\{ \frac{x_k}{y_k} \mid y_k > 0 \right\}.$$

Alors

$$x_j - \epsilon y_j = 0,$$

et  $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}$  a au plus  $p - 1$  variables positives.

En répétant ce processus si nécessaire, on peut éliminer des variables positives jusqu'à obtenir une solution réalisable avec des colonnes correspondantes qui sont linéairement indépendantes. Le cas 1 s'applique alors.

## Théorème fondamental de la PL : optimalité

Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une solution optimale réalisable, et comme précédemment, supposons qu'il y a exactement  $p$  variables positives  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .

À nouveau deux cas.

**Cas 1 :** correspond à l'indépendance linéaire, et se traite comme pour la question de réalisabilité.

**Cas 2 :** similaire à la réalisabilité, à ceci près que nous devons montrer que pour n'importe quel  $\epsilon$ , la solution  $x - \epsilon y$  est optimale.

## Théorème fondamental de la PL : optimalité

Prenons à nouveau  $\mathbf{y}$  t.q.  $A\mathbf{y} = 0$  et  $\exists i \in \{1, \dots, p\}$  t.q.  $y_i > 0$ .  
Pour  $\epsilon$  suffisamment proche de 0, positif ou négatif,  $\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y} \geq 0$   
(réalisable).

Supposons  $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \neq 0$ , et  $\epsilon > 0$  si  $\mathbf{c}^T \mathbf{y} > 0$ ,  $\epsilon < 0$  sinon. Alors

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y} < \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

donc  $\mathbf{x}$  n'est pas optimal. Dès lors,  $\mathbf{c}^T \mathbf{y} = 0$ .

On peut alors appliquer le procédé du cas 2 sur la réalisabilité, pour diminuer le nombre de composantes non-nulles de la solution, tout en maintenant l'optimalité, puis en se ramener au cas 1.

## Conséquences du théorème

On peut résoudre un PL en énumérant les solutions de base réalisables.

Problème : il peut y en avoir beaucoup.

Pour  $n$  variables et  $m$  contraintes, nous avons

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

matrices à considérer pour déterminer des solutions de base.

**Exemple** : 100 variables, 40 contraintes

$$\binom{100}{40} = 13746234145802811501267369720 \approx 1,375 \cdot 10^{28}$$

## Exemple

Considérons le programme

$$\max 2x + 3y$$

$$\text{t.q. } x \geq 1$$

$$2x + 3y \leq 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

On voit immédiatement que la valeur optimale est 5 (pourquoi?).

Sous forme standard, nous obtenons

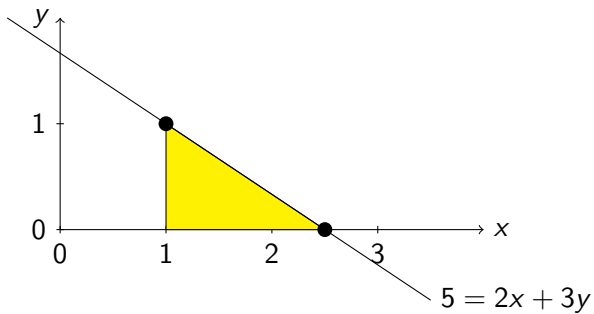
$$- \min -2x - 3y$$

$$\text{t.q. } x - u = 1$$

$$2x + 3y + s = 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0, s \geq 0, u \geq 0.$$

## Exemple : graphiquement



## Solutions de base

Sous forme matricielle, le problème se définit à partir de

$$c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nombre de sous-matrices carrées 2 par 2 :

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

Le nombre de bases est toutefois strictement plus petit puisqu'il y a forcément des colonnes linéairement dépendantes.

## Solutions de base

Bases potentielles :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seules  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_6$  sont des bases. Les solutions de base respectives sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



## Solutions de base réalisables

De ces solutions, seules les trois premières sont réalisables.

Elles correspondent aux sommets du polytope réalisable.

## Relations à la convexité

**But :** faire le lien entre solutions de base réalisables et points extrêmes d'un polytope.

- Un ensemble  $C$  dans  $E^n$  est dit *convexe* si pour tout  $x_1, x_2 \in C$ , et pour n'importe quel réel  $\alpha$  tel que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , le point  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ .
- Le point  $z = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , est dit être une *combinaison convexe* de  $x_1$  et  $x_2$ .
- La combinaison convexe est dite *stricte* si  $\alpha \in (0, 1)$ .
- L'ensemble des combinaisons convexes de  $x_1$  et  $x_2$  est le segment de droite qui relie  $x_1$  et  $x_2$ .

## Convexité : propriétés

1. Si  $C$  est un ensemble convexe et  $\beta$  un nombre réel, l'ensemble

$$\beta C = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \beta \mathbf{c}, \mathbf{c} \in C\},$$

est convexe.

2. Si  $C$  et  $D$  sont deux ensembles convexes, l'ensemble

$$C + D = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \mathbf{c} \in C, \mathbf{d} \in D\},$$

est convexe.

3. L'intersection de n'importe quelle collection d'ensembles convexes est convexe.

# Points extrêmes

- **Polytope**  $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ .

Note :  $K = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$  est aussi un polytope. En effet,  $K$  peut se réécrire comme

$$K = \{x \mid Ax \leq b, -Ax \leq -b, -x \leq 0\}.$$

- **Polyèdre** : polytope borné non vide.

(Voir Annexe B de Luenberger et Ye pour plus de détails).

## Points extrêmes

Un point  $x$  d'un ensemble convexe  $C$  est un **point extrême** de  $C$  s'il n'existe pas deux points distincts  $x_1$  et  $x_2$  dans  $C$  tels que  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  pour un certain  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . En d'autres termes, il ne peut pas s'écrire comme une combinaison convexe stricte de deux points de  $C$ . Intuitivement, un point extrême est un “sommet” de  $C$ .

# Équivalence des points extrêmes et des solutions de base

- Soit  $\mathbf{A}$  une matrice  $m \times n$  de rang  $m$  et  $\mathbf{b}$  un vecteur de dimension  $m$ .
- Soit  $K$  le polytope convexe constitué de l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  de dimension  $n$  satisfaisant

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0.$$

Un vecteur  $\mathbf{x}$  est un point extrême de  $K$  si et seulement si  $\mathbf{x}$  est une solution de base réalisable pour le système précédent.

## Preuve

$\Leftarrow$  Supposons tout d'abord que  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une solution de base réalisable. Dès lors,  $\mathbf{x}$  a  $k$  composantes non nulles, et  $n - k$  composantes nulles, avec  $k \leq m$ .  $k < m$  si la solution de base est dégénérée.

S.p.d.g., les  $k$  premières composantes sont non-nulles et

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

où  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  sont les  $k$  premières colonnes de  $A$ , linéairement indépendantes. Comme  $A$  est de rang  $m$ , la matrice comprends  $m$  colonnes indépendantes. S.p.d.g., nous pouvons supposer que les  $m$  premières colonnes sont indépendantes, et on peut encore écrire

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

## Preuve

Supposons par l'absurde que  $\mathbf{x}$  n'est pas un point extrême. Il est alors combinaison convexe stricte de deux autres points distincts de  $K$  :

$$\exists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in K, \mathbf{y} \neq \mathbf{z}, \alpha \in (0, 1) \text{ tels que } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{z}.$$

Comme  $\mathbf{x} \geq 0$ ,  $\mathbf{y} \geq 0$ ,  $\mathbf{z} \geq 0$ , les  $n - k$  dernières composantes de  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  sont nulles.

Par définition de  $K$ , on a aussi

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b},$$

$$z_1 \mathbf{a}_1 + z_2 \mathbf{a}_2 + \dots + z_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

Comme  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  linéairement indépendantes,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}.$$



## Preuve

$\Rightarrow$  Supposons à présent que  $\mathbf{x}$  est un point extrême de  $K$ , et s.p.d.g. que les composantes non-nulles de  $\mathbf{x}$  sont les  $k$  premières composantes. Dès lors :

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

avec  $x_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Pour montrer que  $\mathbf{x}$  est une solution de base, nous devons montrer que  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  sont linéairement indépendants. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors,  
 $\exists \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \neq 0$  t.q.

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

## Preuve

On peut prendre  $\epsilon \neq 0$  suffisamment petit pour avoir

$$\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \geq 0,$$

et

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}).$$

Clairement,

$$A(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b},$$

aussi  $\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}, \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \in K$ .

Dès lors,  $\mathbf{x}$  peut être exprimé comme combinaison convexe de deux points distincts de  $K$ , et donc n'est pas un point extrême.

Ceci implique qu'on doit avoir  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  linéairement indépendants, et de là,  $k \leq m$ .  $\mathbf{x}$  est dès lors solution de base.

## Corollaires

**Corollaire 1** Si l'ensemble convexe  $K$  est non vide, il y a au moins un point extrême.

**Corollaire 2** S'il existe une solution optimale finie à un problème de programmation linéaire, il existe une solution optimale finie qui est un point extrême de l'ensemble de contraintes.

**Corollaire 3** L'ensemble de contraintes  $K$  possède un nombre fini de points extrêmes.

*Preuve.* L'ensemble des points extrêmes de  $K$  est un sous-ensemble des solutions de base, qui sont en nombre fini (il y a un nombre fini de sélections possible de  $m$  colonnes de  $\mathbf{A}$  parmi  $n$  colonnes).

**Corollaire 4** Si le polytope convexe  $K$  est borné, alors  $K$  est un polyèdre convexe, i.e.  $K$  consiste de points qui sont combinaisons convexes d'un nombre fini de points.