IFT 2505
Programmation Linéaire
Cycles et dégénérescence

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Exemple: simplexe

$$
\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
\frac{1}{4} & -60 & -\frac{1}{25} & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -90 & -\frac{1}{50} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-\frac{3}{4} & 150 & -\frac{1}{50} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
1 & -240 & -\frac{4}{25} & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 30 & \frac{3}{50} & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -30 & -\frac{7}{50} & 33 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{b} \\
1 & -240 & -\frac{4}{25} & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 30 & \frac{3}{50} & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -30 & -\frac{7}{50} & 33 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{b} \\
1 & 0 & \frac{8}{25} & -84 & -12 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{500} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{2}{25} & 18 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Exemple

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0
0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	0

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0
$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0
$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	1
$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	0

Exemple

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{b}$
$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0
$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0
$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	1
$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	0

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{b}$
$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	1
$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	0

Exemple

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	1
$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	0

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	0
$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	0

Exemple

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{b}$
$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	0
$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	0

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{b}$
$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	0

Convergence dans le cas dégénéré

Critères d'entrée et de sortie de Bland:

1. Critère d'entrée
   La variable d'entrée x_s est celle ayant le plus petit indice parmi les variables hors base ayant un coût réduit négatif, i.e.

$$s = \min_{j=1,\ldots,n} \{j \mid r_j < 0\}$$

2. Critère de sortie:
   La variable de sortie x_{j_r} (x_{j_r} dénotant la variable de base dans la r^e ligne du tableau) est celle ayant le plus petit indice parmi les variables candidates à sortir de la base, i.e.

$$j_r = \min_{l=1,\ldots,m} \left\{ j_l \mid y_{ls} > 0,\ \frac{y_{l0}}{y_{ls}} = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{is}} \,\middle|\, y_{is} > 0 \right\} \right\}$$

Note

Lorsque est atteint pour plusieurs indices l, alors la variable de base x_{j_r} choisie selon le critère précédent pour devenir variable de sortie devient égale à 0. Par contre les autres variables x_{j_l} où ce minimum est atteint restent dans la base deviennent aussi égales à 0.

Retour à l'exemple

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
\frac{1}{4} & -60 & -\frac{1}{25} & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -90 & -\frac{1}{50} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-\frac{3}{4} & 150 & -\frac{1}{50} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
1 & -240 & -\frac{4}{25} & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 30 & \frac{3}{50} & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -30 & -\frac{7}{50} & 33 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Exemple

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
1 & -240 & -\frac{4}{25} & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 30 & \frac{3}{50} & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -30 & -\frac{7}{50} & 33 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 & \boldsymbol{a}_6 & \boldsymbol{a}_7 & \boldsymbol{b} \\
1 & 0 & \frac{8}{25} & -84 & -12 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{500} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{2}{25} & 18 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Exemple

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0
0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	0

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0
$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0
$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	1
$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	0

Exemple

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{b}$
$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0
$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0
$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	1
$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	0

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{b}$
$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	1
$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	0

Exemple

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	1
$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	0

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
0	0	1	0	0	0	1	1
0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{250}$
1	-168	0	0	$-\frac{100}{125}$	$\frac{300}{125}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{2}{125}$
0	36	0	0	$-\frac{175}{125}$	$\frac{275}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{125}$

Exemple

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
0	0	1	0	0	0	1	1
0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{250}$
1	-168	0	0	$-\frac{100}{125}$	$\frac{300}{125}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{2}{125}$
0	36	0	0	$-\frac{175}{125}$	$\frac{275}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{125}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
0	0	1	0	0	0	1	1
0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$
1	-180	0	6	0	$\frac{150}{125}$	$\frac{5}{125}$	$\frac{5}{125}$
0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Exemple

Considérons le problème

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x - 2y \\
\text{sujet à} \quad & x + 2y \leq 26 \\
& -x + y \leq 3 \\
& x - y \leq 2 \\
& 2x - y \leq 10 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple: mise sous forme standard

Ajout de variables d'écarts:

$$
\begin{aligned}
\min \;& -3x - 2y \\
\text{sujet à } & x + 2y + s_1 = 26 \\
& -x + y + s_2 = 3 \\
& x - y + s_3 = 2 \\
& 2x - y + s_4 = 10 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

En choisissant comme variables de base x_1, x_2, s_1 et s_2, nous obtenons comme solution de base réalisable $(8, 6, 6, 5, 0, 0)$.

Exemple

Ajoutons la contrainte $6x - 5y \leq 18$:

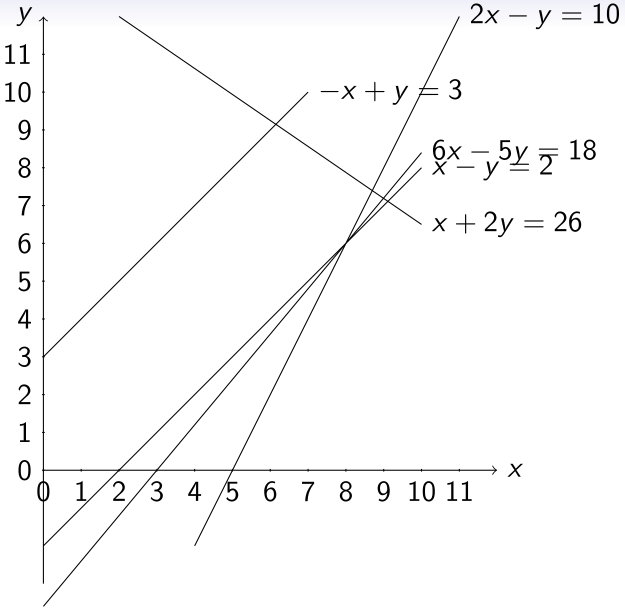
$$\begin{aligned} \min \; & -3x - 2y \\ \text{sujet à } & x + 2y \leq 26 \\ & -x + y \leq 3 \\ & x - y \leq 2 \\ & 2x - y \leq 10 \\ & 6x - 5y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple: mise sous forme standard

Ajoutons la contrainte $6x - 5y \leq 18$:

$$\begin{aligned} \min \ & -3x - 2y \\ \text{sujet à } & x + 2y + s_1 = 26 \\ & -x + y + s_2 = 3 \\ & x - y + s_3 = 2 \\ & 2x - y + s_4 = 10 \\ & 6x - 5y + s_5 = 18 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

En choisissant comme variables de base x_1, x_2, s_1, s_2 et s_3, nous obtenons comme solution de base réalisable $(8, 6, 6, 5, 0, 0, 0)$.


$2x - y = 10$
$-x + y = 3$
$6x - 5y = 18$
$x - y = 2$
$x + 2y = 26$
y
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11