IFT 2505
Programmation Linéaire
Problèmes de transport

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Problèmes de transport

Beaucoup de problèmes linéaires présentent certaines structures qui simplifient grandement leur résolution.

Supposons que nous avons m origines contenant certains quantités d'une marchandise qui doit etre transportée à n destinations pour satisfaires certaines demandes :

- origine i : contient la quantité a_i ;
- destination j : présente une demande b_j.

Nous supposons le problème équilibré, i.e. l'offre totale est égale à la demande totale :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Formulation

Les nombres a_i et b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont supposés non-négatifs, et de plus, souvent entiers.

c_{ij} : coût de transport d'une unité de marchandise de l'origine i à la destination j.

On veut déterminer les quantitiés à transporter pour chaque paire (i, j).

Formulation

Programme mathématique :

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.à.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n \\
& x_{ij} \geq 0, \ \ \forall\, i, j.
\end{aligned}
$$

Formulation

Réécrivons les contraintes d'égalité :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} + \ldots + x_{1n} & & & & & & & & & & & = & a_1 \\
& & & x_{21} + \ldots + x_{2n} & & & & & & & & = & a_2 \\
& & & & & & & & & & & \vdots & \\
& & & & & & & & x_{m1} + \ldots + x_{mn} & & & = & a_m \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & & & +x_{m1} & & & = & b_1 \\
& x_{12} & & & +x_{22} & & & & & +x_{m2} & & = & b_2 \\
& & & & & & & & & & & \vdots & \\
& & x_{1n} & & & +x_{2n} & & & & & +x_{mn} & = & b_n
\end{array}
$$

Formulation

En d'autres termes, la matrice **A** a la structure

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & & & \\ & \mathbf{1}^T & & \\ & & \vdots & \\ & & & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité $(n \times n)$.

Notation plus compacte :

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, a_n) \end{array} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} = (30, 80, 10, 60) \\ \mathbf{b} = (10, 50, 20, 80, 20) \end{array} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

La somme de l'offre, ainsi que de la demande, est 180.

Réalisabilité et optimalité

Première étape : montrer que le problème est réalisable.

Soit S la demande totale (et donc, l'offre totale) :
$S = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

$$x_{ij}^0 = \frac{a_i b_j}{S},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

est réalisable :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{S} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{S} = b_j$$

De plus, x_{ij} est bornée par a_i (et b_j). Un programme avec un ensemble réalisable et borné a toujours une solution optimale. Dès lors, un problème de transport a toujours une solution optimale.

Redondance

Nous avons un ensemble de $m + n$ contraintes linéaires. Toutefois,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

On a formé deux combinaisons linéaires distinctes des contraintes, pour former des termes de gauche identiques (et les termes de droite sont également identiques en vertu de l'hypothèse de départ).

Considérons la première contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{2=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i$$

Redondance

Autrement dit, nous avons pu réécrire la première contrainte comme une combinaison linéaire des autres contraintes.

On pourrait faire la même chose avec n'importe quelle contrainte. Il y a donc une contrainte redondante.

On va établir qu'on ne peut trouver qu'une redondance, et donc ramener le problème à un ensemble de $m + n - 1$ vecteurs. Une solution de base réalisable non-dégénérée consistera de $m + n - 1$ variables.

Théorème

Un problème de transport a toujours une solution, mais il y a exactement une contrainte d'égalité redondante. Quand on retire n'importe laquelle des contraintes d'égalité, le système restant de $n + m - 1$ contraintes d'égalité est linéairement indépendant.

Preuve

L'existence d'une solution et la redondance ont déjà été établis. La somme de toutes les contraintes d'origine moins la somme de toutes les contraintes de destination est égale à zéro, et n'importe quelle contrainte peut être exprimée comme une combinaison linéaire des autres. On peut donc retirer n'importe laquelle de ces contraintes. Supposons qu'on retire la dernière.

Théorème

Nous avons donc le système d'équations

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{1j} - a_1 &= 0 \\
\sum_{j=1}^{n} x_{2j} - a_2 &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{n} x_{mj} - a_m &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} x_{i1} - b_1 &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{m} x_{i,n-1} - b_{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

Théorème

Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire des équations restantes qui soit nulle.
Notons les coefficients d'une telle combinaison α_i, $i = 1, 2, \dots, m$, et β_j, $j = 1, 2, \dots, n-1$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \right) = 0 \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right).$$

Comme nous avons écarté la dernière contrainte, x_{in}, $i = 1, 2, \dots, m$ apparaît seulement dans la i^e équation, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{in} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} - a_i \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \right) = 0.$$

Dès lors, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Théorème

Il reste

$$\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \right) = 0.$$

Autrement dit, chaque x_{ij} n'apparaît que dans une équation (jamais si $j = n$), aussi $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dès lors, l'ensemble d'équations est linéairement indépendant.

Découverte d'une solution réalisable de base

Du théorème précédent, on voit qu'une base pour le problème de transport consiste de $m + n - 1$ vecteurs, et qu'un solution réalisable de base non dégénérée consiste de $m + n - 1$ variables.

Tableau de solution :

x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\dots$	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\dots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	$\dots$	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n	

Les éléments individuels du tableau apparaissent dans des cellules et représentent une solution. Une cellule vide dénote une valeur nulle.

Règle du coin Nord-Ouest

Etape 0. Le tableau est créé, avec toutes les cellules vides.

Etape 1. On sélectionne la cellule dans le coin supérieur gauche (d'où le nom de la méthode).

Etape 2. On alloue le montant maximum réalisable compatible avec les exigences de sommes sur la ligne et la colonne impliquant cette colonne (au moins une de ces exigences sera remplie).

Etape 3. On se déplace d'une cellule vers la droite s'il reste des exigences de ligne à satisfaire (offre). Autrement, on se déplace d'une cellule vers le bas. Si toutes les exigences sont remplies, arrêt. Sinon, retour à l'étape 2.

Règle du coin Nord-Ouest : exemple

$$\mathbf{a} = (30, 80, 10, 60)$$
$$\mathbf{b} = (10, 50, 20, 80, 20)$$

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			40	20	60
10	50	20	80	20	

Règle du coin Nord-Ouest : dégénérescence

Il existe la possibilité qu'à un certain point, les exigences de ligne et de colonne correspondant à une cellule soient toutes deux remplies.

La prochaine entrée sera alors un zéro, indiquant une solution de base dégénérée. Dans pareil cas, il y a un choix à faire quand à l'endroit où place le zéro : à droite ou en-dessous.

30				30
20	20			40
	0	20		20
		20	40	60
50	20	40	40	

30				30
20	20	0		40
		20		20
		20	40	60
50	20	40	40	

Matrices triangulaires

Définition. Une matrice carrée M non singulière est dite triangulaire si elle peut être mise sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure au moyen d'une permutation de ses lignes et colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base

Chaque base du problème de transport est triangulaire.

On repart du système de contraintes

$$
\begin{array}{cccccccccccccl}
x_{11} + \ldots + x_{1n} & & & & & & & & & & & & = & a_1 \\
& & & x_{21} + \ldots + x_{2n} & & & & & & & & & = & a_2 \\
& & & & & & & & & & & & \vdots & \\
& & & & & & & x_{m1} + \ldots + x_{mn} & & & & & = & a_m \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & & +x_{m1} & & & & & = & b_1 \\
& x_{12} & & & +x_{22} & & & & +x_{m2} & & & & = & b_2 \\
& & & & & & & & & & & & \vdots & \\
& & x_{1n} & & & +x_{2n} & & & & & +x_{mn} & & = & b_n
\end{array}
$$

Théorème de triangularité de base

Changeons le signe de la demi-partie supérieure du système ; la matrice de coefficients consiste d'entrées égales à +1, -1 ou 0.

$$
\begin{array}{lllcl}
-x_{11} - \ldots - x_{1n} & & & = & -a_1 \\
& -x_{21} - \ldots - x_{2n} & & = & -a_2 \\
& & & \vdots & \\
& & -x_{m1} - \ldots - x_{mn} & = & -a_m \\
x_{11} & +x_{21} & +x_{m1} & = & b_1 \\
\quad x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{m2} & = & b_2 \\
& & & \vdots & \\
\qquad x_{1n} & \qquad +x_{2n} & \qquad +x_{mn} & = & b_n
\end{array}
$$

On peut également supprimer n'importe quelle de ces équations pour éliminer la redondance.

Théorème de triangularité de base

De la matrice de coefficients résultante, on forme une base **B** en sélectionnant un sous-ensemble non singulier de $m + n - 1$ colonnes.

Chaque colonne de **B** contient au plus deux entrées non-nulles : un $+1$ et un -1. Dès lors, il y a au plus $2(m + n - 1)$ entrées non nulles dans la base.

Cependant, si chaque colonne contient deux entrées non nulles, alors la somme de toutes les lignes serait zéro, contredisant la non-singularité de **B**.

Dès lors, au moins une colonne de **B** doit contenir seulement une seule entrée non nulle. Ceci signifie que le nombre totale d'entrées non nulles dans **B** est inférieur à $2(m + n - 1)$.

Théorème de triangularité de base

Dès lors, il y a au moins une ligne avec seulement une entrée non-nulle, que l'on peut isoler pour créer la première ligne de la matrice triangulaire.

Un argument similaire peut être appliqué à la sous-matrice de $\mathbf{B}$ obtenue en supprimant la ligne contenant une seule entrée non nulle et la colonne correspondant à cette entrée. Cette sous-matrice doit également contenir une ligne avec une seule entrée non-nulle. On repète l'argument jusqu'à obtenir $\mathbf{B}$ triangulaire.

Théorème de triangularité de base : illustration

Considérons la solution réalisable

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			40	20	60
10	50	20	80	20	

Il est facile de voir que la matrice **x** est triangulaire.

Théorème de triangularité de base : illustration

Sont dans la base : $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{44}, x_{45}$, pour le système d'équations

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} &= 30 \\
x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 80 \\
x_{34} &= 10 \\
x_{44} + x_{45} &= 60 \\
x_{11} &= 10 \\
x_{12} + x_{22} &= 50 \\
x_{23} &= 20 \\
x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 80 \\
\cancel{x_{45} = 20}
\end{aligned}
$$

Théorème de triangularité de base : illustration

Sous forme matricielle, en laissant tomber la dernière contrainte,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 80 \\ 10 \\ 60 \\ 10 \\ 50 \\ 20 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

Permutons la première et la cinquième lignes. Cela donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 80 \\ 10 \\ 60 \\ 30 \\ 50 \\ 20 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

Permutons ensuite la deuxième et la septième lignes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 60 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

Permutons maintenant la deuxième et la quatrième colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{22} \\ x_{12} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 60 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

On continue. . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{24} \\ x_{22} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 60 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{24} \\ x_{22} \\ x_{44} \\ x_{45}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
10 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \\ 60 \\ 50 \\ 80 \\ 80
\end{pmatrix}
$$

Théorème de triangularité de base : illustration

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{24} \\ x_{22} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 60 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{24} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 60 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{24} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base : illustration

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{24} \\ x_{44} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 80 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que l'on bien le même système d'équations qu'au départ.

Solutions entières

Puisque n'importe quelle matrice de base est triangulaire , il suit que le processus de substitution en arrière impliquera simplement des additions et des soustractions de lignes et de colonnes. Aucune multiplication n'est requise.

Il suit que si les lignes et les colonnes originales sont entières, les valeurs de toutes les variables de base sont entières.

Application du simplexe

Idée : exploiter le fait que les bases sont triangulaires.

On va décomposer le vecteur des multiplicateurs du simplexe en écrivant

$$\lambda = (u, v)$$

u_i est associé à la i^e contrainte de ligne, et v_j à la j^e contrainte de colonne. Une contrainte étant redondante, on peut associer une valeur arbitraire à un des multiplicateurs. On va poser $v_n = 0$.

Etant donnée une base B, nous allons développer l'équation

$$\lambda^T B = c_B^T.$$

Si x_{ij} est dans la base, la colonne correspondante de A (et donc de B) aura exactement deux entrées égales à $+1$ (les autres sont nulles).

Application du simplexe

Dès lors, le produit

$$\lambda^T a_i = c_{ij}$$

va donner

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Rappelons que nous avons posé $v_n = 0$. Partant de là, nous pouvons déterminer toutes les valeurs u_i et v_j par substitution. De plus, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1

Si les coûts c_{ij} d'un problème de transport sont tous entiers, alors (en supposant qu'un multiplicateur du simplexe est posé arbitrairement comme égal à un entier fixé), les multiplicateurs du simplexe associés à n'importe quelle base sont entiers.

Coûts réduits

De

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D,$$

nous avons

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j,$$

si x_{ij} est hors-base. Si x_{ij} est une variable de base,

$$r_{ij} = 0.$$

On peut facilement calculer les coûts réduits en considérant le tableau

c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\ldots$	c_{1n}	u_1
c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\ldots$	c_{2n}	u_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	$\ldots$	c_{mn}	u_m
v_1	v_2	v_3	$\ldots$	v_n	

Coûts réduits

Étape 1 Affecter une valeur arbitraire à un des multiplicateurs.

Étape 2 Sélectionner un c_{ij} associé à une variable de base x_{ij} pour lequel soit u_i, soit v_j n'a pas encore été determiné, mais l'un des deux multiplicateurs a une valeur connue.

Étape 3 Calculer le multiplicateur inconnu à partir de l'équation

$$c_{ij} = u_i + v_j.$$

Si tous les multiplicateurs ont été déterminés, arrêt. Sinon, retour à l'étape 2.

Coûts réduits : exemple

En reprenant l'exemple précédant, et en posant (arbitrairement) $v_5 = 0$

3	**4**	6	8	9	x
2	**2**	**4**	**5**	5	x
2	2	2	**3**	2	x
3	3	2	**4**	**2**	x
x	x	x	x	0	

On parcourt alors le tableau à la recherche d'un élément dont un seul multiplicateur est inconnu. Il s'agit ici de l'élément inférieur droit, ce qui donne

3	**4**	6	8	9	x
2	**2**	**4**	**5**	5	x
2	2	2	**3**	2	x
3	3	2	**4**	**2**	2
x	x	x	x	0	

Coûts réduits : exemple

En continuant de la sorte, nous obtenons le tableau

3	**4**	6	8	9	5
2	**2**	**4**	**5**	5	3
2	2	2	**3**	2	1
3	3	2	**4**	**2**	2
-2	-1	1	2	0	

Nous observons que certains coûts réduits sont négatifs, et par conséquant, nous allons devoir échanger une variable de base et une variable hors base.

Expression des colonnes hors base

Theorem

Soit B une base de A (en ignprant une ligne) et soit d une colonne hors-base de A. Si $y = B^{-1}d$, alors $y_i \in \{-1, 0, +1\}$, $i = 1, \ldots, n$.