Programmation Linéaire
Simplexe: forme matricielle – dictionnaires

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Forme matricielle de la méthode du simplexe

Utile pour mieux comprendre, et construire des variantes.

Soit

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \ \ \boldsymbol{D}]$$

où nous supposons que $\boldsymbol{B}$ est une base, et décomposons $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{c}$ de manière similaire:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_D}), \quad \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_B}, \boldsymbol{c_D}).$$

Le programme linéaire standard devient

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & z = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T \boldsymbol{x_D} \\ \text{t.q. } & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x_D} = b \\ & \boldsymbol{x_B} \geq 0, \ \boldsymbol{x_D} \geq 0. \end{aligned}$$

Forme matricielle de la méthode du simplexe

La solution de base associée, que nous supposons également réalisable, devient

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_B}, \mathbf{0}), \ \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1} b.$$

Dès lors,

$$\boldsymbol{x_D} = \mathbf{0}.$$

Plus généralement,

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x_D}.$$

et

$$\begin{aligned} z &= \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x_D}\right) + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T\boldsymbol{x_D} \\ &= \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{x_D}. \end{aligned}$$

Dictionnaire

L'écriture

$$\begin{array}{ccll} \boldsymbol{x}_B & = & B^{-1}\boldsymbol{b} & -B^{-1}D\boldsymbol{x}_D \\ \hline z & = & \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b} & +\left(\boldsymbol{c}_D^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}D\right)\boldsymbol{x}_D. \end{array}$$

est aussi appelée dictionnnnaire.

Avantages du dictionnaire par rapport aux tableaux:

- forme plus compacte;
- implémentation numérique plus directe

Forme matricielle de la méthode du simplexe

Ceci permet s'exprimer n'importe quelle solution en termes de $\boldsymbol{x_D}$. Dès lors,

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{D}}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{D}$$

est le vecteur des coûts réduits.

En d'autres termes,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T & \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Forme canonique: on multiplie la partie supérieure par $\boldsymbol{B}^{-1}$ et on récupère l'expression de l'objectif en termes de coûts réduits pour la partie inférieure:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ 0 & \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Exemple

Considérons le problème

$$
\begin{aligned}
\min \ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.à.} \ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28 \\
& 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Variables d'écart

Mettons le système sous forme standard en ajoutant une variable d'écart à chacune des inégalités:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.à.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 14 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 28 \\
& 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + s_3 = 30 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
& s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Le système est à présent sous forme canonique.

Dictionnaire initial

Nous réorganisons le système linéaire pour identifier les variables de bases ainsi que l'objectif.

$$
\begin{array}{ccrrrr}
s_1 & = & 14 & -2x_1 & -x_2 & -x_3 \\
s_2 & = & 28 & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 \\
s_3 & = & 30 & -2x_1 & -5x_2 & -5x_3 \\
z & = & 0 & -x_1 & -2x_2 & +x_3
\end{array}
$$

Un tel système est appelé **dictionnaire**.

Les règles de pivotage sont similaires.

Variable entrante

On se concentre sur la ligne de l'objectif

$$z = 0 - x_1 - 2x_2 + x_3$$

Les variables x_1 et x_2 sont toutes deux associées à un coefficient négatif, et sont donc candidates pour entrer dans la base.

En suivant la règle du coût réduit le plus négatif, nous sélectionnons x_2.

Choix de la variable sortante

Nous partons du dictionnaire en annulant x_1 et x_3 qui restent hors base.

$$\begin{array}{rcrr} s_1 & = & 14 & -x_2 \\ s_2 & = & 28 & -2x_2 \\ s_3 & = & 30 & -5x_2 \\ z & = & 0 & -2x_2 \end{array}$$

Comme nous devons garder s_1, s_2, s_3 non-négatifs, nous avons

$$\begin{array}{rcrr} 0 & \leq & 14 & -x_2 \\ 0 & \leq & 28 & -2x_2 \\ 0 & \leq & 30 & -5x_2 \end{array}$$

Dès lors, $x_2 \leq \min\{14, 28/2, 30/5\} = 6$. Ainsi, s_3 sort de la base.

Nouveau dictionnaire

Le pivot s'effectue en échangeant s_3 et x_2 dans l'équation du dictionnaire correspondant à s_3 :

$$\begin{aligned} s_3 &= 30 - 2x_1 - 5x_2 - 5x_3 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 6 - \frac{2}{5}x_1 - x_3 - \frac{1}{5}s_3. \end{aligned}$$

Nous remplaçons ensuite x_2 par son expression en termes des variables hors base dans les autres équations du dictionnaire, ce qui donne

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & = & 6 & -\frac{2}{5}x_1 & -x_3 & -\frac{1}{5}s_3 \\ s_1 & = & 8 & -\frac{8}{5}x_1 & & +\frac{1}{5}s_3 \\ s_2 & = & 16 & -\frac{16}{5}x_1 & -x_3 & +\frac{2}{5}s_3 \\ z & = & -12 & -\frac{1}{5}x_1 & +3x_3 & +\frac{2}{5}s_3 \end{array}$$

Nouveau dictionnaire

Seul x_1 a un coût réduit négatif et donc est choisi pour entrer dans la base. En prenant les rapports entre la colonne de x_1 et celle du terme indépendant, nous voyons que tant s_1 que s_2 peuvent sortir de la base. Choisissons s_1. Le nouveau dictionnaire est

$$\begin{array}{rclrrr}
x_1 & = & 5 & & -\frac{5}{8}s_1 & +\frac{1}{8}s_3 \\
x_2 & = & 4 & -x_3 & +\frac{1}{4}s_1 & -\frac{1}{4}s_3 \\
s_2 & = & 0 & -x_3 & +2s_1 & \\
z & = & -13 & +3x_3 & +\frac{1}{8}s_1 & +\frac{3}{8}s_3
\end{array}$$

Comme il n'y a plus de coût réduit négatif, nous avons convergé. La solution optimale est $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$.

Nous allons automatiser l'approche.

Méthode du simplexe révisée

Converge souvent en $O(m)$.

La méthode revisée ordonne les calculs afin d'éviter les opérations inutiles, en particulier pour les variables non concernées par les pivotages.

Soit $\boldsymbol{B}^{-1}$ l'inverse de la base actuelle, et la solution actuelle

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{B}^{-1} b.$$

Etape 1 Calculer les coefficients de coûts réduits actuels

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{D}}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{D}$$

On calcule d'abord

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1}$$

puis

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{D}}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{D}}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{D}.$$

Méthode du simplexe révisée

Etape 2 Déterminer le vecteur $\boldsymbol{a}_q$ qui va entrer dans la base en sélectionnant le coût réduit le plus négatif, et calculer

$$\boldsymbol{y}_q = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_q,$$

donnant l'expression de $\boldsymbol{a}_q$ en termes de la base actuelle.

Etape 3 Si aucun y_{iq} n'est > 0, arrêt: le problème n'est pas borné. Sinon, calculer les rapports y_{i0}/y_{iq} pour $y_{iq} > 0$ pour déterminer le vecteur qui va quitter la base.

Etape 4 Mettre à jour $\boldsymbol{B}^{-1}$ et la solution actuelle $\boldsymbol{B}^{-1}b$. Retour à l'étape 1.
La mise à jour de $\boldsymbol{B}^{-1}$ se fait en effectuant l'opération classique de pivotage, constituée de $\boldsymbol{B}^{-1}$ et $\boldsymbol{y}_q$, où le pivot est l'élément approprié dans y_q. On en profite pour mettre à jour $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Exemple

$$\begin{aligned}
\max_x \ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{t.q.} \ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Après ajout des variables d'écarts:

$$\begin{aligned}
\max_x \ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{t.q.} \ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Exemple

Tableau:

	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{b}$
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
$\boldsymbol{c}^T$	-3	-1	-3	0	0	0	0

On se limite à

Var				$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$
x_4	1	0	0	2
x_5	0	1	0	5
x_6	0	0	1	6

Nous avons

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{r}_D^T = \boldsymbol{c}_D^T - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dictionnaire

$$\begin{array}{rcl}
x_4 = & 2 & -2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_5 = & 5 & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
x_6 = & 6 & -2x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\hline
z = & 0 & -3x_1 - x_2 - 3x_3
\end{array}$$

Exemple

On fait entrer $\boldsymbol{a}_2$ (violant la règle du coût le plus négatif)

Var				$x_{\boldsymbol{B}}$	y_2
x_4	1	0	0	2	1
x_5	0	1	0	5	2
x_6	0	0	1	6	2

Var				$x_{\boldsymbol{B}}$
x_2	1	0	0	2
x_5	-2	1	0	1
x_6	-2	0	1	2

Nous avons

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Nous avons également

$$\boldsymbol{c}_B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et dès lors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^T &= \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coûts reduits se calculent de manière similaire

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes,

$$r_1 = -1,\ r_3 = -2,\ r_4 = 1.$$

Exemple

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le variable entrante retenue est x_3, et on construit le tableau

Var				x_B	y_3
x_2	1	0	0	2	1
x_5	−2	1	0	1	1
x_6	−2	0	1	2	−1

Après le pivot:

Var				x_B
x_2	3	−1	0	1
x_3	−2	1	0	1
x_6	−4	1	1	3

Exemple

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{D}}^T &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On fait entrer $\boldsymbol{a}_1$.

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$
\begin{array}{cccccc}
\text{Var} & & & & x_{\boldsymbol{B}} & y_1 \\
x_2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 5 \\
x_3 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\
x_6 & -4 & 1 & 1 & 3 & -5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
x_3 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\
x_6 & -1 & 0 & 1 & 4
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{D}}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x} = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$ est une solution optimale.

Simplexe et décomposition LU

$\boldsymbol{B}^{-1}$ n'apparaît que dans la résolution de systèmes linéaires. Mais dans ce contexte, on ne calcule jamais $\boldsymbol{B}^{-1}$ pour des raisons de stabilité numérique.

Reformulons le simplexe pour faire apparaître les termes linéaires.

Etape 1

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{y}_0,$$

avec

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_0 = b.$$

Simplexe et décomposition LU

Etape 2 Résoudre

$$\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_B^T,$$

et

$$\boldsymbol{r}_D^T = \boldsymbol{c}_D^T - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{D}.$$

Si $\boldsymbol{r}_D \geq 0$, stop: la solution actuelle est optimale.

Etape 3 Déterminer le vecteur $\boldsymbol{a}_q$ qui va entrer la base en sélectionnant le coefficient de coût réduit le plus négatif, et résoudre

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_q = \boldsymbol{a}_q.$$

Etape 4 Si aucun $\boldsymbol{y}_{iq} > 0$, stop: le problème est non borné. Sinon, calculer les rapports $\boldsymbol{y}_{i0}/\boldsymbol{y}_{iq}$ pour $\boldsymbol{y}_{iq} > 0$, et sélectionner le rapport le plus négatif pour déterminer quel vecteur sortira de la base.

Simplexe et décomposition LU

Etape 5 Mise à jour de $\boldsymbol{B}$. Retour à l'étape 1.

Cette manière de formuler le simplexe offre

1. une meilleure stabilité numérique,
2. des avantages de stockage mémoire (par exemple, si $\boldsymbol{B}$ est une matrice creuse, $\boldsymbol{B}^{-1}$ peut être pleine).

On décompose $\boldsymbol{B}$ comme

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{U}$$

où

- $\boldsymbol{L}$ est une matrice triangulaire inférieure,
- $\boldsymbol{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Simplexe et décomposition

Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Bx} &= \boldsymbol{b}, \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{LUx} &= \boldsymbol{b} \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{Ly} &= \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ux} \end{aligned}$$

Résoudre un système triangulaire est immédiat!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Résolution de système triangulaire

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/a_{11} \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} \\ x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{aligned}$$

Conditions: $a_{ii} \neq 0$, $\forall\, i$.

Note: on ne suppose aucun échange de ligne (parfois opéré pour préserver la précision et le caractère creux).

Mise à jour:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Résolution de système triangulaire

Nouvelle base

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{a}_{k+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_m & \boldsymbol{a}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}} &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_{k+1} & \cdots & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_m & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_{k-1} & u_{k+1} & \ldots & u_m & \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_q \end{pmatrix} \\ &= \overline{H}. \end{aligned}$$

Résolution de système triangulaire

En effet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} &= \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{L}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\overline{\boldsymbol{H}}$ a la forme

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Résolution de système triangulaire

$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_q$ est un sous-produit du calcul de $\boldsymbol{y}_q$, aussi c'est "gratuit".

$\overline{\boldsymbol{H}}$ peut être ramené à une forme triangulaire supérieure grâce à une série d'éliminations de Gauss.

$$\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{M}_{m-1}\boldsymbol{M}_{m-2}\ldots\boldsymbol{M}_k\overline{\boldsymbol{H}}$$

où $\boldsymbol{M}_i$ a la forme

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & m_i & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution de système triangulaire

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{LU}}$$

avec

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{M}_k^{-1} \dots \boldsymbol{M}_{m-1}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{M}_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -m_i & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$