Programmation Linéaire
Algorithme du simplexe primal-dual

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Simplexe primal-dual

Motivations :

- Exploiter davantage la complémentarité entre le primal et le dual.
- Comme pour le simplexe dual, on part d'une solution dual-réalisable.
- Primal restreint : on va forcer la condition de complémentarité

$$x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i,$$

  en faisant entrer dans la base primale les x_i correspondant aux contraintes duales actives.
- Dual restreint : on optimise le dual. Si celui-ci est réalisable, augmenter (strictement) la valeur de l'objectif dual va conduire à transformer au moins une contrainte duale inactive en contrainte duale active.

Simplexe primal-dual

L'idée est de travailler simultanément sur le primal et le dual.

Principales idées :

- trouver une solution réalisable pour le dual ;
- l'améliorer à chaque étape en optimisant un problème primal restreint associé ;
- essayer de satisfaire les conditions d'écart de complémentarité.

Il s'agit de la variante du simplexe la plus efficace pour les problèmes de flots dans les réseaux.

Simplexe primal-dual

Considérons à nouveau le primal (sous forme standard)

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \qquad (\lambda) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

et son dual

$$\begin{aligned} \max_\lambda \ & \lambda^T b \\ \text{t.q. } & \lambda^T A \leq c^T. \end{aligned} \tag{D}$$

Étant donné λ réalisable pour le dual, définissons l'ensemble actif

$$P = \{i \,|\, \lambda^T a_i = c_i\}.$$

Ainsi,

$$\lambda^T a_i < c_i, \ \ i \notin P.$$

Simplexe primal-dual

Correspondant à λ et P, nous définissons le problème *primal restreint associé*

$$\begin{aligned} \min_{x,\ y} \ & \mathbf{1}^T y \\ \text{t.q. } & Ax + y = b \qquad (u) \\ & x \geq 0, \\ & x_i = 0 \text{ pour } i \notin P \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{PR}$$

où $\mathbf{1}$ designe the vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$. (PR) se réécrit comme

$$\begin{aligned} \min_{y \geq 0,\ x_i \in P} \ & \mathbf{1}^T y \\ \text{t.q. } & \sum_{i \in P} a_i x_i + y = b \\ & x_i \geq 0, \ \ i \in P. \end{aligned}$$

Simplexe primal-dual

Le dual associé est appelé *dual restreint associé* :

$$
\begin{aligned}
\max_u \ & u^T b \\
\text{t.q. } & u^T a_i \leq 0, \ \ i \in P \\
& u \leq \mathbf{1}.
\end{aligned}
\tag{DR}
$$

Théorème d'optimalité primale-duale

Supposons que λ *est réalisable pour le dual* (D) *et que* (x, y) *est réalisable pour le primal restreint associé* (PR)*, avec* $y = 0$ *(de sorte que* (x, y) *est une solution optimale pour* (PR)*). Alors,* x *et* λ *sont optimaux pour les programmes primal* (P) *et dual* (D) *originaux respectifs.*

Démonstration.

x est clairement réalisable pour (P) : $Ax = b$. Par définition de P,
$\lambda^T a_i = c_i$, si $x_i \neq 0$, aussi

$$c^T x = \lambda^T A x = \lambda^T b,$$

impliquant l'optimalité de x et λ. $\square$

Algorithme primal-dual

Étape 1 Étant donné λ_0 réalisable pour (D), déterminer le primal restreint (PR) associé.

Étape 2 Optimiser (PR). Si la valeur optimale de (PR) est nulle (impliquant $y = 0$), x est optimal pour (P) (théorème d'optimalité primale-duale) ; arrêt.

Étape 3 Si la valeur optimale de (PR) est strictement positive (i.e. if $y \neq 0$), x n'est pas réalisable pour le primal (P), et on cherche à améliorer la solution réalisable λ du dual (D) avant de déterminer un nouveau primal restreint (PR) associé.
Obtenir du tableau du simplexe de (PR) la solution u_0 du dual restreint (DR). Si $\nexists j$ pour lequel $u_0^T a_j > 0$, (P) n'a pas de solution réalisable ; arrêt.

Algorithme primal-dual

Etape 3 (suite) Sinon, calculer

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - \lambda_0^T a_j}{u_0^T a_j} \,\middle|\, u_0^T a_j > 0 \right\},$$

et poser

$$\lambda_0 := \lambda_0 + \epsilon_0 u_0.$$

λ_0 est réalisable pour (D). Retour à l'étape 1.

Algorithme primal-dual : calcul de $u^T a_i$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Le coefficient de x_i dans (PR) est égal à zero, aussi le coût réduit à l'optimalité de (PR) vaut

$$0 - u^T a_i.$$

Dès lors, les valeurs de $u^T a_i$, peuvent être directement identifiées en prenant l'opposé des valeurs dans la ligne des coûts réduits du tableau final du primal restreint, pour les colonnes associées aux x_i correspondants.

Pour les variables de base x_j (> 0), nous avons $j \in P$, et les coûts réduits sont nuls :

$$0 = 0 - u^T a_j.$$

Dès lors, $u^T a_j = 0, \; j \in P$.

Algorithme primal-dual : calcul de $u^T a_i$

On peut aboutir à la même observation en invoquant les écarts de complémentarité : comme $x_j > 0$, la contrainte duale associée, $u^T a_j \leq 0$ est active, i.e. $u^T a_j = 0$.

Algorithme primal-dual : exemple

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\
\text{soumis à } & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Comme tous les coefficients dans l'objectifs sont non-négatifs, le vecteur $\lambda = (0, 0)$ est réalisable pour le dual.

En effet, les contraintes du dual sont

$$\lambda^T A \leq c.$$

Avec $\lambda = (0, 0)$, aucune contrainte du dual n'est active, et donc $P = \emptyset$.

Algorithme primal-dual

Le primal restreint est donc

$$
\begin{aligned}
\min\ & y_1 + y_2 \\
\text{t.q. } & x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
& y_1, y_2 \geq 0 \\
& x_1 = x_2 = x_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Tableau du simplexe pour le primal restreint associé :

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
	1	1	2	1	0	3
	2	1	3	0	1	5
	-3	-2	-5	0	0	-8
$c_i - \lambda^T a_i \rightarrow$	2	1	4			

Algorithme primal-dual : exemple

Comme aucune contrainte duale n'est active (il n'y a pas de zéro dans la dernière ligne), $P = \emptyset$.

Dès lors, x_1, x_2 et x_3 sont fixées à zéro. Il n'y a pas de coût réduit négatif pour les variables restantes, y_1 et y_2. La solution

$$(0, 0, 0, 3, 5)$$

est donc optimale pour le primal restreint associé.

Le dual restreint associé s'écrit comme

$$\max_u \; u^T b$$
$$\text{t.q. } u \leq \mathbf{1},$$

et $u_0 = (1, 1)$ est solution optimale.

Algorithme primal-dual : exemple

Les quantités $-u_0^T a_i$, $i = 1, 2, 3$, sont égales aux trois premiers éléments de la troisième ligne.

Pour trouver ϵ, nous prenons dès lors le minimum des rapport

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}.$$

Le minimum étant $1/2$, x_2 entre dans la base, et on annule l'entrée correspondante sur la quatrième ligne, ce qui revient à rendre la seconde contrainte duale active pour le problème dual initial.

Algorithme primal-dual : exemple

Pour ce faire, on ajoute ϵ fois la troisième ligne à la dernière. En effet, le nouveau vecteur dual est $\lambda + \epsilon u$ et nous avons comme nouvelles valeurs des contraintes duales

$$c_i - \lambda^T a_i - \epsilon u^T a_i = c_i - (\lambda + \epsilon u)^T a_i.$$

Ceci donne

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

Algorithme primal-dual : exemple

On doit à présent minimiser le nouveau primal restreint, avec $P = \{2\}$.

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

Note : on retrouve $u^T a_2 = 0$.

Algorithme primal-dual : exemple

En calculant les rapports de la dernière ligne sur l'avant-dernière, on obtient $\epsilon = 1/2$, et comme colonne entrante a_1.

On ajoute ϵ fois la troisième ligne à la dernière, pour obtenir

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
0	0	1			

$$P = \{1, 2\}.$$

Algorithme primal-dual : exemple

Résolution du primal restreint associé.

$$
\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & y_1 & y_2 & b \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
-1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & y_1 & y_2 & b \\
0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

Le primal est réalisable : stop. La solution est

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$$

Algorithme primal-dual : preuve

Dans l'étape 3, il est indiqué que $u_0^T a_j \leq 0$ pour tout j implique que le primal (P) n'a pas de solution réalisable.

Si $u_0^T a_j \leq 0$ pour tout j, le vecteur $\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$ conduit à

$$\lambda_\epsilon^T A = \lambda_0^T A + \epsilon u_0^T A \leq c^T.$$

De plus, comme

$$u_0^T b = \mathbf{1}^T y > 0,$$

nous voyons que la quantité

$$\lambda_\epsilon^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b,$$

est non bornée, lorsque nous augmentons ϵ. Du théoreme de dualité forte, le primal n'est pas réalisable.

Algorithme primal-dual : preuve

Supposons à présent que pour au moins un j, $u_0^T a_j > 0$.

À nouveau, définissons

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

Par construction,

$$u_0^T a_i \leq 0, \ \forall i \in P.$$

Pour un ϵ positif assez petit, λ_ϵ est réalisable pour le dual, et nous pouvons augmenter ϵ jusqu'à transformer une des inégalités

$$\lambda_\epsilon^T a_j < c_j, \ j \notin P$$

en égalité. Ceci détermine ϵ_0 et un indice k correspondant.

Algorithme primal-dual : preuve

Le nouveau vecteur λ correspond à une valeur accrue de la fonction objectif duale :

$$\lambda^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b.$$

De plus, le nouvel ensemble correspondant P inclut l'indice k.

Pour tout autre indice i t.q. $x_i > 0$ est dans P aussi, comme en vertu de l'écart de complémentarité,

$$u_0^T a_i = 0,$$

pour un tel i, nous avons

$$\lambda^T a_i = \lambda_0^T a_i + \epsilon_0 u_0^T a_i = c_i.$$

Algorithme primal-dual : preuve

Ceci signifie que l'ancienne solution optimale (du primal restreint) est réalisable pour le nouveau problème primal restreint associé, et que a_k peut entrer dans la base. Puisque $u_0^T a_k > 0$, pivoter sur a_k va décroître la valeur du primal restreint associé.

Donc,

- soit la valeur du primal décroît (strictement sous l'hypothèse de non-dégénérescence),
- soit le problème est déclaré non réalisble.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes comme il y a un nombre fini de bases réalisables.