IFT 2505
Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php

Automne 2013

Chemin central

Aspects similaires à la programmation linéaire :

- algorithmes itératifs
- pour un itéré donné, calcul d'une direction de recherche, puis d'une longueur de pas le long de cette direction.

Considérons le programme

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{s.à. } & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Définissons les ensembles

$$\mathcal{F}_P \stackrel{\text{def}}{=} \{x \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\mathring{\mathcal{F}}_P \stackrel{\text{def}}{=} \{x \,|\, Ax = b, x > 0\}$$

Prbolème barrière

On suppose que $\mathring{\mathcal{F}}_P$ est non vide et que l'ensemble de solutions optimales pour ce problème est borné.

Soit $\mu \geq 0$. Problème barrière (PB) :

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j \\
\text{s.à. } & Ax = b \\
& x > 0.
\end{aligned}
$$

Prbolème barrière vs Problème linéaire

Si $\mu = 0$, on retrouve le problème original en permettant à x d'avoir des composantes nulles :

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \cancel{- \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j} \\ \text{s.à. } & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Chemin central

Soit $x(\mu)$, la solution au PB étant donné μ. En faisant varier μ continûment vers 0, nous obtenons le chemin central primal.

Si $\mu \to \infty$, la solution s'approche du centre analytique de la région réalisable, lorsque celle-ci est bornée : le terme barrière prédomine alors dans l'objectif.

Comme $\mu \to 0$, ce chemin converge vers le centre analytique de la face optimale $\{x \,|\, c^T x = z^*,\ Ax = b,\ x \geq 0\}$, où z^* est la valeur optimale du programme linéaire.

L'idée de base est de résoudre une succession de problèmes barrières pour des valeurs décroissantes de μ.

Fonction lagrangienne

Réécrivons la contrainte $Ax = b$ sous la forme $Ax - b = 0$, et introduisons un vecteur y, en associant une composante y_i à une contrainte $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j$.

y_i joue à peu près le même rôle que les variables duales précédentes, mais est appelé à présent multiplicateur de Lagrange. Lagrangien :

$$L(x) = c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j - y^T(Ax - b).$$

On cherche à minimiser cette fonction en annulant son gradient.

Minimisation du lagrangien

$$
\begin{aligned}
& \nabla_x L(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & c_j - \frac{\mu}{x_j} - y^T a_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \\
\Leftrightarrow\ & \mu X^{-1}\mathbf{1} + A^T y = c.
\end{aligned}
$$

En notant $s_j = \mu / x_j$, l'ensemble des conditions d'optimalité (primales, duales, minimisation du lagrangien) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mu \mathbf{1} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}.
\end{aligned}
$$

Lien avec le dual

y est une solution duale réalisable et $c - A^T y > 0$.

En effet, le dual est

$$\begin{aligned} \max_y \; & y^T b \\ \text{s.à. } & A^T y \leq c \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c \\ s_j &= \frac{\mu}{x_j} \end{aligned}$$

nous avons

$$A^T y < c.$$

Exemple

Considérons le programme

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 \\
\text{s.à. } & 0 \leq x_1 \leq 1 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1.
\end{aligned}
$$

On réécrit ce système sous forme standard

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 \\
\text{s.à. } & x_1 + x_3 = 1 \\
& x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Conditions d'optimalité

$$
\begin{aligned}
x_1 s_1 &= \mu \\
x_2 s_2 &= \mu \\
x_3 s_3 &= \mu \\
x_4 s_4 &= \mu \\
x_1 + x_3 &= 1 \\
x_2 + x_4 &= 1 \\
y_1 + s_1 &= -1 \\
y_2 + s_2 &= 0 \\
y_1 + s_3 &= 0 \\
y_2 + s_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Conditions d'optimalité

De

$$
\begin{aligned}
y_2 + s_2 &= 0 \\
y_2 + s_4 &= 0
\end{aligned}
$$

on a $s_2 = s_4$.

On en déduit aussi

$$x_2 = x_4,$$

et de là

$$x_2 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
& -1 = s_1 - s_3 = \frac{\mu}{x_1} - \frac{\mu}{x_3} \\
\Leftrightarrow\ & -1 = \frac{\mu}{x_1} - \frac{\mu}{1-x_1} \\
\Leftrightarrow\ & -x_1(1-x_1) = \mu(1-x_1) - \mu x_1 \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 - x_1 = \mu - 2\mu x_1 \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 - (1-2\mu)x_1 - \mu = 0.
\end{aligned}
$$

Le discriminant de cette équation quadratique est

$$
\rho = (1-2\mu)^2 + 4\mu = 1 + 4\mu^2,
$$

et de là

$$
x_1 = \frac{1 - 2\mu \pm \sqrt{1+4\mu^2}}{2}
$$

Chemin central

Pour μ grand, on doit choisir la racine correspondant à '$+$'. D'autre part,

$$x \to \left(1, \frac{1}{2}\right), \text{ comme } \mu \to 0.$$

On converge vers le centre analytique de la face optimale

$$\{x \mid x_1 = 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

plutôt qu'un coin du carré.

De plus, quand $\mu \to +\infty$,

$$x(\mu) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

comme

$$-2\mu + \sqrt{1 + 4\mu^2} = -2\mu + 2\mu\sqrt{\frac{1}{4\mu^2} + 1}.$$

Chemin central

Dès lors, le chemin central est une ligne droite progressant du centre analytique du carré (comme $\mu \to \infty$) vers le centre analytique de la face optimale (comme $\mu \to 0$).

Chemin dual central

Partons à présent du problème dual

$$\begin{aligned} \max\ & y^T b \\ \text{s.à. } & y^T A + s^T = c^T \\ & s \geq 0. \end{aligned}$$

Le problème barrière associé est

$$\begin{aligned} \max\ & y^T b + \mu \sum_{j=1}^{n} \log s_j \\ \text{s.à. } & y^T A + s^T = c^T \\ & s \geq 0. \end{aligned}$$

Chemin dual central

On suppose que $\mathring{\mathcal{F}}_P = \{(y, s) : y^T A + s^T = c^T,\ s > 0\}$ est non vide, et l'ensemble des solutions optimales du dual est borné.

On obtient le chemin central dual en faisant tendre μ vers 0.

Lagrangien :

$$L(y) = y^T b + \mu \sum_{j=1}^{n} \log s_j - (y^T A + s^T - c^T)x.$$

Dès lors,

$$\nabla_y L = 0 \Leftrightarrow b_i - a^i x = 0,\ \forall i,$$
$$\nabla_s L = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{s_j} - x_j = 0,\ \forall j.$$

Chemin dual central : conditions d'optimlaité

On obtient les conditions d'optimalité

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mu \mathbf{1} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}. \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes conditions que pour le chemin central.

Par conséquent, x est une solution réalisable primale et $x > 0$.

Considérons l'ensemble de niveau dual

$$\Omega(z) = \{y \mid c^T - y^T A \geq 0, y^T b = z\},$$

avec $z < z^*$, la valeur optimale du dual.

Chemin dual central : conditions d'optimlaité

Le centre analytique $(y(z), s(z))$ de Ω coïncide avec le chemin central dual comme z tend vers z^*.

Chemin dual central : exemple

Reprenons le problème

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 \\
\text{s.à. } & x_1 + x_3 = 1 \\
& x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le dual s'écrit

$$
\begin{aligned}
\max\ & y_1 + y_2 \\
\text{s.à. } & y_1 \leq -1 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_1 \leq 0 \\
& y_2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Chemin dual central : exemple

On peut réécrire le dual comme

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + y_2 \\ \text{s.à. } & y_1 + s_1 - 1 \\ & y_2 + s_2 = 0. \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité sont les mêmes que pour le primal, aussi

$$x_2 = x_4 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$s_2 = s_4 = 2\mu, y_2 = -2\mu.$$

Chemin dual central : exemple

Nous avons également, en se rappelant de la résolution du primal,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -1 - s_1 \\
&= -1 - \frac{\mu}{x_1(\mu)} \\
&= -1 - \frac{2\mu}{1 - 2\mu \pm \sqrt{1 + 4\mu^2}}
\end{aligned}
$$

Comme $\mu \to 0$, $y_1 \to -1$, $y_2 \to 0$.

Il s'agit de l'unique solution du problème linéaire (les deux contraintes sont actives)

Si $\mu \to \infty$, y est non borné, car l'ensemble dual réalisable est non borné.

Chemin central primal-dual

Hypothèse : la région réalisable du problème de programmation linéaire a un intérieur non vide et un ensemble borné de solutions optimales.

Le dual a un intérieur réalisable non vide, en vertu des conditions (d'optimalité) sur le lagrangien.

Le chemin primal-dual est l'ensemble des vecteurs $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ satisfaisant les conditions

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mu \mathbf{1} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c} \\
x \geq 0,\ s &\geq 0 \\
0 \leq \mu &< \infty.
\end{aligned}
$$

Proposition

Si les ensembles réalisables primal et dual ont des intérieurs non vides, alors le chemin central $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ existe pour tout μ, $0 \leq \mu < \infty$.

De plus, $x(\mu)$ est le chemin central primal, $(y(\mu), s(\mu))$ est le chemin central dual.

$x(\mu)$ et $(y(\mu), s(\mu))$ convergent vers les centres analytiques des faces des solutions optimales primales et duales, respectivement, quand $\mu \to 0$.

Saut de dualité

Soit $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ sur le chemin central primal-dual. Nous avons

$$\begin{aligned} c^T x - y^T b &= (A^T y)^T x + s^T x - y^T b \\ &= y^T A x + s^T x - y^T b \\ &= y^T b + s^T x - y^T b \\ &= s^T x \\ &= n\mu. \end{aligned}$$

Comme pour la dualité faible, $c^T x \geq y^T b$, et $n\mu$ est appelé le saut de dualité.

Soit $g = c^T x - y^T b$.

Comme $y^T b \leq z^*$, $z^* \geq c^T x - g$, et donc, étant donné (x, y, s), on peut mesurer la qualité de x comme $c^T x - z^* \leq g$.