IFT 2505
Programmation Linéaire
Dualité

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Dualité

Nous considérons le problème, dit **primal** :

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le programme suivant est appelé **dual** :

$$\begin{aligned} \max_\lambda \; & \lambda^T b \\ \text{t.q. } & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $c, x, \in \mathcal{R}^n$, $\lambda, b \in \mathcal{R}^m$.
Note : les contraintes duales peuvent aussi s'écrire $\lambda^T A \leq c^T$ (en appliquant l'opérateur de transposition de part et d'autre de l'inégalité).

Dualité

x : variables du problème primal
λ : variables du problèmes dual

Dual du dual ?

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualité : forme standard

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & c^T x \\
\text{t.q. } & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

revient à

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & c^T x \\
\text{t.q. } & Ax \geq b \\
& -Ax \geq -b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualité : forme standard

Le dual peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \max_{u,v}\ & u^T b - v^T b \\ \text{t.q. }\ & u^T A - v^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

ou, avec $\lambda = u - v$,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda}\ & \lambda^T b \\ \text{t.q. }\ & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Forme asymétrique : $\lambda \in \mathcal{R}$.

Conversion primal-dual

Minimisation	**Maximisation**
Contraintes	Variables
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	non restreint
Variables	Contraintes
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
non restreint	$=$

Conversion primal-dual : exemples

Primal	Dual
$\min\limits_{x} c^T x$ t.q $Ax = b,\ x \geq 0.$	$\max\limits_{\lambda} b^T \lambda$ t.q. $A^T \lambda \leq c.$
$\min\limits_{x} c^T x$ t.q. $Ax \geq b,\ x \geq 0.$	$\max\limits_{\lambda} b^T \lambda$ t.q. $A^T \lambda \leq c,\ \lambda \geq 0.$

Conversion primal-dual : exemples

$$\max_x \; c^T x \quad \text{t.q. } Ax = b, \quad x \geq 0.$$

$$\min_\lambda \; b^T \lambda \quad \text{t.q. } A^T \lambda \geq c.$$

$$\min_x \; c^T x \quad \text{t.q } Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

$$\max_\lambda \; b^T \lambda \quad \text{t.q } A^T \lambda \leq c, \quad \lambda \leq 0.$$

Exemple : le problème de regime alimentaire

- x_j : unités de produit alimentaire
- n produits
- b : besoins minimums (b_i : i^e nutriment)
- c : coût
- m nutriments
- a_{ij} : unités de nutriments i dans le produit j.

Primal : on veut minimiser sa consommation tout en satisfaisant les besoins minimums

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple : le problème de regime alimentaire

Dual :

$$\max_{\lambda} \lambda^T b$$
$$\text{t.q. } \lambda^T A \leq c^T$$
$$\lambda \geq 0$$

λ pourrait par exemple représenter le prix de compléments alimentaires ; on veut maximiser le revenu de la vente de tels compléments.

La contrainte traduit qu'on doit rester compétitif : le prix des compléments doivent rester inférieurs au coût des aliments originaux.

Exemple

Considérons le problème

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\
\text{t.q. } & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, \dots 6.
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la forme standard, nous devons ajouter 2 variables d'écart, disons x_5 et x_6. Ceci donne le problème

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\
\text{t.q. } & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, \dots 6.
\end{aligned}
$$

Exemple

Sous forme tableau, ceci se traduit par

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
4	2	1	1	1	0	5
3	1	2	1	0	1	4
-4	-3	-1	-2	0	0	0

Le système est déjà sous forme canonique, et nous pouvons identifier les variables de base x_5 et x_6. A ce système correspondent

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Plutôt que de devoir travailler sur toutes les colonnes de A en permanence, nous allons utiliser la version révisée du simplexe.

Exemple

Nous cherchons d'abord à calculer les coûts réduits, en notant que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors,

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = c_D^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il existe des coûts réduits négatifs, aussi nous n'avons pas terminé.

Une possibilité est de faire entrer x_1.

Exemple

Dans la base courante,

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le pivotage peut se résumer à

$$\begin{array}{ccccc} & x_5 & x_6 & b & y_1 \\ x_5 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ x_6 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ -z & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Le mininum des rapports composante par composante entre b et y_1, pour les éléments strictement positifs de y_1, est $5/4$. Autrement dit, x_1 entre dans la base et x_5 sort. La réduction du tableau donne

$$\begin{array}{ccccc} & x_5 & x_6 & b & y_1 \\ x_1 & 1/4 & 0 & 5/4 & 1 \\ x_6 & -3/4 & 1 & 1/4 & 0 \\ -z & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

Exemple

Du tableau précédent, nous tirons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

et en conséquence

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits deviennent

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple

Il a des coûts réduits strictement négatifs, aussi on doit continuer. On choisit ici le premier coût, autrement dit on fait entrée x_2, lequel est associé à

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Procédons au pivotage :

	x_5	x_6	b	y_2
x_1	$1/4$	0	$5/4$	$1/2$
x_6	$-3/4$	1	$1/4$	$-1/2$
$-z$	1	0	5	-1

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	$1/2$	0	$5/2$	1
x_6	$-1/2$	1	$3/2$	0
$-z$	$3/2$	0	$15/2$	0

Exemple

Nous obtenons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits valent

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La variable d'entrée doit être x_4.

Exemple

Nous avons

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Cela conduit au tableau

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	$1/2$	0	$5/2$	$1/2$
x_6	$-1/2$	1	$3/2$	$1/2$
$-z$	$3/2$	0	$15/2$	$-1/2$

et x_6 doit sortir de la base. Le pivotage conduit à

	x_5	x_6	b	y_2
x_2	1	-1	1	0
x_4	-1	2	3	1
$-z$	1	1	9	0

Exemple

Dès lors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits sont

$$\begin{aligned} r_D^T &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tous les coûts réduits sont positifs. La base B_3 est donc optimale. La solution associée à B_3 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour une valeur optimale de -9.

Exemple : dual

Reprenons le problème primal.

$$\begin{aligned} \min\ z = -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{t.q. } 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots 4. \end{aligned}$$

Formons le dual

$$\begin{aligned} \max\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \text{t.q. } 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq -2 \\ \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Exemple : dual

Essayons de nous rapprocher de la forme standard :

$$
\begin{aligned}
-\min\ & -5\lambda_1 - 4\lambda_2 \\
\text{t.q.}\ & -4\lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 4 \\
& -2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 3 \\
& -\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 \\
& -\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2 \\
& -\lambda_1 \geq 0, -\lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Exemple : dual

En posant $y_i = -\lambda_i$, en ajoutant des variables de surplus, et en oubliant temporairement le signe négatif devant l'opérateur de minimisation, nous avons

$$\begin{aligned}
\min\ & 5y_1 + 4y_2 \\
\text{t.q. } & 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 4 \\
& 2y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\
& y_1 + 2y_2 - y_5 = 1 \\
& y_1 + y_2 - y_6 = 2 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \\
& y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

En résolvant ce problème (avec par exemple une méthode à deux phases), nous obtenons la solution optimale

$$y^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour la valeur optimale 9.

Exemple : dual

En repassant au dual original, cela donne une valeur optimale de -9 et

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

comme lors du dernier calcul dans le simplexe révisé pour le primal.

Est-ce un hasard ? Pas vraiment...

Dualité faible

(Forme symétrique ou forme asymétrique – forme standard)

Si x and λ sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, alors

$$c^T x \geq \lambda^T b$$

Démonstration.

$$\lambda^T b \leq \lambda^T A x \leq c^T x,$$

pour $x \geq 0$, vu que x est supposé realisable, et que du dual, $\lambda^T A \leq c^T$. $\square$

Dès lors, l'objectif primal est une borne supérieure pour le dual, et vice-versa.

Corollaire

Si x_0 et λ_0 sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, et si

$$c^T x_0 = \lambda_0^T b,$$

alors x_0 et λ_0 sont optimaux pour leur problème respectif.

Mais on n'a encore dit sur la réalisabilité d'un problème par rapport à l'autre !

Dualité forte

Si un des problèmes, primal ou dual, a une solution optimale finie, l'autre problème a aussi une solution optimale finie, et les valeurs correspondantes des fonctions objectifs sont égales. Si l'un des problèmes a un objectif non borné, l'autre problème n'a pas de solution réalisable.

Démonstration.
La deuxième affirmation est une conséquence directe du lemme.

Ainsi si le primal est non borné et λ est réalisable pour le dual, nous devons avoir

$$\lambda^T b \leq -M$$

pour M arbitrairement grand, ce qui est impossible. $\square$

Dualité forte

Démonstration.
Si le primal a une solution optimale finie, nous voulons montrer que le dual a une solution optimale finie.

Soit z^* la valeur optimale du primal. Définissons

$$\begin{aligned} C = \{(r, w) : r &= tz^* - c^T x, \\ w &= tb - Ax, \ \text{avec } x \geq 0, \ t \geq 0\} \end{aligned}$$

C est un cône convexe fermé :

- cône : pour $\alpha > 0$ et $(r, w) \in C$, alors $\alpha(r, w) \in C$;
- convexe : soient (r_1, w_1) et $(r_2, w_2) \in C$, alors $\forall \lambda \in (0, 1)$, $\lambda(r_1, w_1) + (1 - \lambda)(r_2, w_2) \in C$.
- fermé : $(0, 0) \in C$.

Dualité forte

Démonstration.

Mais $(1,0) \notin C$. Par l'absurde, supposons $(1,0) \in C$.
Nous avons donc $w = 0$, et de là, il existe un certain couple (t_0, x_0) tel que $t_0 b - Ax_0 = 0$. Deux cas sont envisageables :

- Si $t_0 > 0$, alors $x = x_0/t_0$ est réalisable pour le primal comme $Ax = b$ et $x \geq 0$, étant donné que $x_0 \geq 0$. Ainsi $r/t_0 = z^* - c^T x_0/t_0 \leq 0$, comme $z^* \leq c^T x$. Autrement dit, $r \leq 0$, alors qu'on supposait $r = 1$.
- Si $t_0 = 0$, alors $w = Ax_0 = 0$, avec $x_0 \geq 0$. D'autre part, $1 = r = t_0 z^* - c^T x_0 = -c^T x_0$, et donc $c^T x_0 = -1$.
  Si x est réalisable pour le primal, alors $x + \alpha x_0$ est realisable pour tout $\alpha \geq 0$, comme $A(x + \alpha x_0) = Ax + \alpha Ax_0 = Ax = b$, et $x + \alpha x_0 \geq 0$.
  De plus, $c^T(x + \alpha x_0) = c^T x - \alpha$ peut être diminué à l'infini, en augmentant α. Ceci contredit l'existence d'un minimum fini.

Dualité forte

Démonstration.

Donc, $(1, 0) \notin C$.

Comme C est un ensemble convexe fermé, cela implique qu'il existe un hyperplan séparant $(1, 0)$ et C. Autrement dit, $\exists [s, \lambda] \in \mathcal{R}^{m+1}$, $[s, \lambda] \neq 0$, et une constante k t.q.

$$\begin{aligned} s = (s, \lambda)^T(1, 0) < \inf\{(s, \lambda)^T(r, w) \text{ t.q. } (r, w) \in C\} \\ = \inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r, w) \in C\} = k \end{aligned}$$

Comme C est un cône, $k \geq 0$. En effet, si $k < 0$, $\exists (r, w) \in C$ t.q. $sr + \lambda^T w = \kappa < 0$. De plus, pour tout $\alpha \geq 0$, $\alpha(r, w) \in C$. Comme $s\alpha r + \lambda^T \alpha w = \alpha\kappa$, pour α assez grand, $\alpha(r, w)$ violerait l'inégalité de l'hyperplan.

Mais $(0, 0) \in C$, donc $k \leq 0$, et de là, $k = 0$, et $s < 0$. □

Dualité forte

Démonstration.

Prenons $\beta = -s$. Comme C est un cône, nous avons

$$
\begin{aligned}
-1 = \frac{1}{\beta}s &= \frac{1}{\beta}(s,\lambda)^T(1,0) \\
&< \frac{1}{\beta}\inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r,w) \in C\} \\
&= \frac{1}{\beta}\inf\{s\beta r + \lambda^T \beta w \text{ t.q. } (r,w) \in C\} \\
&= \inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r,w) \in C\}.
\end{aligned}
$$

Aussi, sans perte de généralités, $s = -1$

$\square$

Dualité forte

Démonstration.
Comme $\inf\{sr + \lambda^T w \text{ t.q. } (r, w) \in C\} = 0$, si $s = -1$, nous avons $\exists \lambda \in \mathcal{R}^m$ t.q.

$$-r + \lambda^T w \geq 0, \ \forall (r, w) \in C.$$

De manière équivalente, par définition de C,

$$(c^T - \lambda^T A)x - tz^* + t\lambda^T b \geq 0, \ \forall x, t \geq 0.$$

$t = 0$ donne $\lambda^T A \leq c^T$, i.e. λ est réalisable pour le dual.
$x = 0$ et $t = 1$ donne $\lambda^T b \geq z^*$. Par le lemme 1 et son corollaire, λ est optimal pour le dual.

Comme le dual du dual est le primal, la preuve est complète. $\square$

Dualité : compatibilité

Si un programme est non réalisable, cela n'implique cependant pas que son dual soit non borné. Celui-ci peut être non réalisable.

Le tableau ci-dessous synthétise les différents cas de figure possibles.

Primal / Dual	Borné	Non borné	Non réalisable
Borné	possible	impossible	impossible
Non borné	impossible	impossible	possible
Non réalisable	impossible	possible	possible