

## Unidad 0. Repaso de grafos

*Nociones básicas: Nodo, Arista, Grado, Camino en un grafo. Tipos de grafos: grafos dirigidos, bipartitos, múltiples. Representaciones matemáticas y computacionales: diccionario, matriz de adyacencia, lista. Ejercitación: Cálculo de rutas posibles.*

1. Para cada uno de los siguientes ejemplos, elija y confeccione (al menos) una representación adecuada (gráfica, diccionario, lista, matriz de adyacencia). ¿Qué entidades representan los nodos? ¿Qué relación representan las aristas? Indique la cardinalidad de los conjuntos de nodos y aristas; el grado mínimo, máximo y medio de sus nodos. Si el grafo es conexo, acíclico, direccionado, bipartito y/o múltiple, explique por qué.

- “Andrés sólo tiene ojos para Beatriz, pero Beatriz está enamorada de Cecilia y David. Cecilia sí que está enganchada con Beatriz, pero Daniel, el muy egocéntrico, sólo se quiere a sí mismo.”
- Los movimientos de un caballo de ajedrez
  - en un tablero de 3x3.
  - en un tablero de 4x4.
- Los miembros de su familia, hasta 2 grados de separación.
- El grafo que resulta de representar las series:
  - $x_{t+1} = \frac{x_t}{2}$  si  $x_t$  es par  $\vee x_t + 3$  si  $x_t$  es impar
  - de la [Conjetura de Collatz](#) para  $x_0 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

2. En el grafo de (1.b.i), asuma que las casillas están numeradas del 1 al 9, sin repetir. Decimos que un camino es *simple* si no contiene ciclos. ¿Cuántos caminos simples distintos existen comenzando desde cada vértice? ¿Y caminos en general? ¿Se anima a contestar las mismas preguntas para (1.b.ii)?

3. En (1.c), tómese un minuto para considerar qué tipo de relaciones (aristas) puede diferenciar, y caracterícelas usando la terminología vista. ¿Encuentra conceptos que no se trasladan fácilmente al marco descrito?

4. Considere un vértice cualquiera en el [grafo ciclo](#) de  $n$  nodos, o  $n$ -ciclo. ¿Cuántos pasos se necesitan, *como mínimo*, para alcanzar *cualquier* vértice del  $n$ -ciclo cuando (a)  $n$  es par y (b)  $n$  es impar?

5. Elija al menos dos ejemplos de estructuras - distintas a las vistas hasta ahora - y repita en ellas el análisis de (1). ¿Qué estructuras *no* se pueden representar adecuadamente como grafos?

6. Un grafo se dice *árbol* si es conexo y no contiene ciclos. Una *hoja* es un vértice de grado

- Si el grafo  $T$  es un árbol,
  - Probar que  $T$  tiene al menos una hoja.
  - Probar que  $T$  tiene al menos dos hojas.
  - Probar que entre dos vértices cualesquiera existe un único camino simple.

7. Prepárese un té - o su infusión favorita - y lea sobre los siete [puentes de Königsberg](#) y el [teorema de los cuatro colores](#).

8. Arme un notebook donde se construya la matriz de adyacencias  $A$  del grafo del ejercicio (4) para un ciclo de 5 nodos.

- a. Muestre los valores de las potencias  $A^n$
- b. ¿Qué interpretación tienen los números de cada elemento de la matriz?
- c. Muestre las potencias gráficamente usando un mapa de colores (sugerencia: use la función `imshow` de `matplotlib.pyplot`).
- d. ¿Cómo cambia el resultado para otras cantidades de nodos?