ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-TIN HỌC

oOo

Bài báo cáo

môn Đại số đồng điều

LỰC LƯỢNG CỦA MÔĐUN TỰ DO

NGƯỜI THỰC HIỆN : PHAN VĂN DU

THẦY HƯỚNG DẪN : THẦY NGUYỄN VIẾT ĐÔNG

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

2010

KIẾN THỨC BỔ SUNG

Ngoài những kết quả về môđun đã được trình bày trong giáo trình "Đại số đồng điều" của thầy Nguyễn Viết Đông - Trần Huyên; các kết quả của bài báo cáo này còn sử dụng một số định nghĩa, tính chất, định lý về vành đã được trình bày trong chương II giáo trình "Đại số hiện đại" (DSHD) của thầy Bùi Thanh Hải - Trịnh Thanh Đèo, về môđun Noether và lý thuyết tập hợp. Mục này sẽ trình bày những kiến thức bổ sung đó.

Một số định nghĩa, tính chất và định lý về vành.

Định nghĩa: *Ideal M của vành R được gọi là tối đại, nếu $M \neq R$ và không tồn tại ideal I của R thỏa*

$$M \subsetneq I \subsetneq R.$$

Định lý 1: (Hệ quả 2.12, DSHD)

Trong vành có đơn vị luôn luôn tồn tại ideal tối đại.

Định lý 2: (Định lý 2.13, DSHD)

Cho R là vành giao hoán có đơn vị. Khi đó ideal M của R tối đại nếu và chỉ nếu R/M là một trường.

Định nghĩa: *Cho vành R có đơn vị. Ta nói R thỏa điều kiện dây chuyền tiến, hay gọi tắt là điều kiện ACC (Ascending Chain Condition) đối với các ideal (trái), nếu mọi dây chuyền tiến*

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots$$

đều dừng tại một bước hữu hạn, nghĩa là tồn tại $n \geq 1$ sao cho $I_k = I_n, \forall k \geq n$.
Nếu vành R thỏa điều kiện ACC đối với các ideal (trái) thì ta nói R là vành Noether (trái).

Sau đây mỗi khi nói về vành Noether thì ngầm định rằng đó là vành Noether trái.

Định nghĩa và một số tính chất, định lý về môđun Noether.

Định nghĩa: Một R-môđun M được gọi là Noether nếu với mọi dây chuyền tiến các môđun con của M đều dừng. Nghĩa là nếu họ môđun con $\{M_i\}$ của môđun M thỏa điều kiện

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$$

Khi đó tồn tại chỉ số i sao cho $M_i = M_{i+1} = \ldots$

Định lý 3:

Cho M là R-môđun Noether và $f \in Hom_R(M, M)$. Ta có f là toàn cấu khi và chỉ khi f là đẳng cấu.

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh chiều thuận là đủ, chiều ngược lại là hiển nhiên.

Giả sử f không đơn cấu.

Đặt

$$M_1 = f^{-1}(0),\ M_{n+1} = f^{-1}(M_n)\ \forall n \geq 1.$$

Dễ dàng chỉ ra được dãy M_n là một dây chuyền tiến các môđun con của M (do nếu $f^n(x) = 0$ thì $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = 0$). Ta chỉ ra rằng nó không dừng, suy ra mâu thuẫn.

Thật vậy, vì f không đơn cấu nên tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(x) = 0$. Với mọi n, do f là toàn ánh nên f^n cũng là toàn ánh, suy ra tồn tại y sao cho $f^n(y) = x$. Vì $x \neq 0$ nên $y \notin M_n$. Hơn nữa vì $f^{n+1}(y) = f(x) = 0$ nên $y \in M_{n+1}$. Do đó $M_n \subsetneq M_{n+1}$.

Vậy f phải là đơn cấu, theo giả thiết thì f là toàn cấu nên f là đẳng cấu.$\blacksquare$

Định lý 4:

Cho M là một R-môđun và N là môđun con của M. Khi đó nếu N và M/N là môđun Noether thì M là môđun Noether.

Chứng minh:

Cho họ $\{M_i\}$ là một dây chuyền tiến các môđun con của M.

Rõ ràng $\{M_i \cap N\}$ là một dây chuyền tiến các môđun con của N. Khi đó tồn tại chỉ số m thỏa

$$M_m \cap N = M_{m+1} \cap N = \ldots$$

Tương tự, vì $\{(M_i + N)/N\}$ là một dây chuyền tiến các môđun con của M/N nên tồn chỉ số k thỏa

$$(M_k + N)/N = (M_{k+1} + N)/N = \ldots$$

Đặt $n = max\{m, k\}$, ta có

$$(M_n + N)/N = (M_{n+1} + N)/N = \dots$$

$$M_n \cap N = M_{n+1} \cap N = \dots$$

Ta sẽ chỉ ra rằng dây chuyền tiến $\{M_i\}$ dừng tại n, tức là

$$M_n = M_{n+1} = \dots$$

Thật vậy, cho một $x \in M_{n+1}$. Vì $(M_n + N)/N = (M_{n+1} + N)/N$ nên $x \in (M_n + N)$, tức là tồn tại $y \in M_n$ sao cho $(x - y) \in N$. Do giả thiết rằng $M_n \subset M_{n+1}$ nên $x, y \in M_{n+1}$. Suy ra $(x - y) \in M_{n+1} \cap N = M_n \cap N \subset M_n$. Do đó $x \in M_n$.
Vậy M là R-môđun Noether.■

Nhận xét:

Từ kết quả trên, dễ dàng suy ra được rằng nếu M là tổng trực tiếp trong của hai môđun Noether thì M là môđun Noether (do mỗi hạng tử trực tiếp đẳng cấu với môđun thương của môđun M theo hạng tử bù trực tiếp của nó). Áp dụng phép quy nạp đơn giản, ta suy ra được nếu M là tổng trực tiếp trong của một số hữu hạn các môđun Noether thì M là môđun Noether.

Vành hệ tử R được xét là R-môđun trên chính nó. Dễ thấy vành R là vành Noether khi và chỉ khi R là R-môđun Noether (do lớp các ideal trái của R và lớp các môđun con của R là trùng nhau). Sử dụng nhận xét sau định lý 4 ở trên, ta có kết quả sau:

Hệ quả 4.1:

Cho R là vành Noether. Khi đó với mọi $n \geq 1$, R^n là R-môđun Noether.

Một số định lý trong lý thuyết tập hợp.

Định lý 5: (Định lý Cantor–Bernstein–Schroeder)

Nếu $|A| \leq |B|$ và $|B| \leq |A|$ thì $|A| = |B|$.

Chứng minh:

Cho

$$f : A \longrightarrow B$$

và

$$g : B \longrightarrow A$$

trong đó f, g là những đơn ánh.

Đặt

$$C_0 = A \setminus g(B),\ C_{n+1} = g \circ f(C_n)\ \forall n \geq 0$$

và

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Ta định nghĩa ánh xạ h như sau, với mỗi $a \in A$:

$$h(a) = f(a) \text{ nếu } a \in C$$
$$h(a) = g^{-1}(a) \text{ nếu } a \notin C$$

Rõ ràng định nghĩa trên tốt vì nếu $a \notin C$ thì $a \notin C_0$, suy ra $a \in g(B)$.

<u>h là đơn ánh</u>

Vì f là g^{-1} đều là đơn ánh nên ta chỉ cần chỉ ra mâu thuẫn ở trường hợp $h(a) = h(b)$ trong đó $a \in C$ và $b \notin C$.

Do $h(a) = h(b)$ nên $f(a) = g^{-1}(b)$, tức là $g \circ f(a) = b$.

Vì $a \in C$ nên tồn tại n sao cho $a \in C_n$, suy ra $b = g \circ f(a) \in C_{n+1}$.

Do đó $b \in C$, mâu thuẫn.

<u>h là toàn ánh</u>

Cho $b \in B$ và đặt $a = g(b)$.

Nếu $a \notin C$ thì $h(a) = g^{-1}(a) = b$.

Nếu $a \in C$ thì tồn tại n sao cho $a \in C_n$. Vì $a = g(b) \in g(B)$ nên $a \notin C_0$, suy ra $n > 0$. Từ $a \in C_n$ ta có $a \in g \circ f(C_{n-1})$, tức là $g(b) \in g \circ f(C_{n-1})$. Do g là đơn ánh nên $b \in f(C_{n-1})$, suy ra $b \in f(C)$. Đặc $c = f^{-1}(b)$, ta có $c \in C$ và $h(c) = f(c) = b$.

Vậy h là toàn ánh Từ hai kết quả trên ta được h là song ánh, tức là $|A| = |B|$.■

Định lý 6:

Nếu X là tập có lực lượng vô hạn thì $|X \times \mathbb{N}| = X$. .

Chứng minh:

Gọi F là họ các ánh xạ f từ $A \times \mathbb{N}$ vào A sao cho $A \subset X$ và f song ánh.

Ta có F khác rỗng vì trong X luôn tồn tại một tập con A vô hạn đếm được, tức là nó có tính chất $|A \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = |A|$.

Xét quan hệ $\leq$ trong F như sau: cho f từ $A \times \mathbb{N}$ vào A, g từ $B \times \mathbb{N}$ vào B; ta nói $f \leq g$ nếu như $A \subset B$ và với mọi $(a, n) \in A \times \mathbb{N}$, $g(a, n) = f(a, n)$.

Dễ dàng kiểm tra $\leq$ là quan hệ thứ tự trong F, đồng thời thỏa mãn điều kiện trong bổ đề Zorn.
Vậy có tồn tại một phần tử tối đại với quan hệ $\leq$ trong F, mà ta ký hiệu là

$$f : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Nếu $X \setminus A$ vô hạn thì chọn một tập con B của $X \setminus A$ đếm được. Rõ ràng tồn tại song ánh g từ $B \times \mathbb{N}$ vào B.
Thiết lập ánh xạ h từ $(A \cup B) \times \mathbb{N}$ vào $A \cup B$ với tương ứng $h(c, n) = f(c, n)$ nếu $c \in A$ và $h(c, n) = g(c, n)$ nếu $c \in B$.
Dễ dàng kiểm tra h là song ánh và $f \leq h$, mâu thuẫn với tính tối đại của f.
Do đó $X \setminus A$ phải hữu hạn.
Vì $X \setminus A$ hữu hạn nên A vô hạn và trong A tồn tại một tập con B vô hạn đếm được.
Từ đó ta có $X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A)$ đếm được.
Thiết lập một song ánh từ B vào $X \setminus (A \setminus B)$, và từ song ánh này ta lập được một song ánh từ $A = B \cup (A \setminus B)$ vào $X = (X \setminus (A \setminus B)) \cup (A \setminus B)$.
Do đó $|A| = |X|$ và $|X| = |A| = |A \times \mathbb{N}| = |X \times \mathbb{N}|$.$\blacksquare$

CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trong bài báo cáo này, mọi môđun đều là môđun tự do.

Kết quả 1:

Nếu X và Y là cơ sở có lực lượng vô hạn của môđun M thì $|X| = |Y|$.

Chứng minh:

Do Y là cở sở nên mỗi phần tử $m \in M$ chỉ có một cách biểu thị tuyến tính qua Y: $m = \sum\limits_{y \in Y} r_{my} y$ (trong đó hầu hết các $r_{my} = 0$, trừ một số hữu hạn).

Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$Y_x = \{y \in Y \mid r_{xy} \neq 0\}.$$

Ta có $|Y_x|$ hữu hạn với mọi $x \in X$.

Lại đặt

$$Y_0 = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y \in Y_x\}$$

Rõ ràng $Y_0 \neq \emptyset$.

Với mỗi $x \in X$, do $|Y_x|$ hữu hạn nên tồn tại phép nhúng j_x từ Y_x vào $\mathbb{N}$.

Với mỗi $y \in Y_0$, tồn tại $x \in X$ sao cho $y \in Y_x$.

Từ hai điều trên, theo tiên đề chọn ta có tồn tại một ánh xạ:

$$\begin{aligned} \phi : Y_0 &\longrightarrow X \times \mathbb{N} \\ y &\longmapsto (x, j_x(y)) \end{aligned}$$

Dễ thấy ϕ là đơn ánh vì nếu $\phi(y) = \phi(z) = (x, n)$ thì $j_x(y) = j_x(z) = n$, tức là $y = z$.

Do đó ta có:

$$|Y_0| \leq |X \times \mathbb{N}|.$$

Nhận xét rằng mỗi $m \in M$ có một cách biểu thị tuyến tính qua X, mỗi $x \in X$ lại có một cách biểu thị tuyến tính qua Y_0. Do đó Y_0 phải là hệ sinh của M.

Suy ra $Y_0 = Y$. Thật vậy, giả sử tồn tại $y \in Y$ mà $y \notin Y_0$; do Y_0 là hệ sinh của M nên y có một biểu thị tuyến tính qua Y_0. Dễ thấy tập $\{y\} \cup Y_0$ không độc lập tuyến tính, mâu thuẫn với giả thiết Y là tập độc lập tuyến tính.

Vậy ta được

$$|Y| \leq |X \times \mathbb{N}|.$$

Vì X có lực lượng vô hạn nên theo định lý 6: $|X \times \mathbb{N}| = X$.
Suy ra $|Y| \leq |X|$; và lý luận tương tự ta cũng có $|X| \leq |Y|$.
Áp dụng định lý Cantor–Bernstein–Schroeder, ta được $|X| = |Y|$.■

Nhận xét:

Ta có $Y_0 = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y \in Y_x\} = \bigcup_{x \in X} Y_x$ *nên nếu* X *là tập hữu hạn thì* Y_0 *cũng phải là tập hữu hạn (do với mỗi* $x \in X$, Y_x *là tập hữu hạn). Do đó* $Y = Y_0$ *cũng phải hữu hạn.*

Tóm lại nếu X *và* Y *là hai cơ sở của môđun* M *thì* X *và* Y *phải cùng có lực lượng vô hạn hoặc cùng có lực lượng hữu hạn. Trong trường hợp* X *và* Y *cùng có lực lượng vô hạn thì kết quả ở trên cho ta* $|X| = |Y|$. *Tuy nhiên điều này không còn đúng trong trường hợp* X *và* Y *cùng có lực lượng hữu hạn.*

Vành R *được gọi là IBN nếu mọi cơ sở của cùng* R*-môđun* M *đều có cùng lực lượng. Ví dụ về vành không IBN sẽ được chỉ ra ở kết quả 3.*

Trước hết ta sẽ nêu lên một tính chất đặc trưng (và có thể xem như là định nghĩa) của vành IBN.

Kết quả 2:

Vành R *là IBN khi và chỉ khi* ($R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$).

Chứng minh:

Chiều thuận: Giả sử vành R là IBN và $R^m \cong^{\varphi} R^n$.
Nếu $m = 0$ thì bởi $R^n \cong 0$ nên $n = 0$, tức $m = n$. Ta cũng có điều tương tự với $n = 0$.
Giả sử $m, n > 0$.
Dễ thấy rằng các phần tử

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots$$

$$e_m = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

lập thành cơ sở của môđun R^m.
Do đó ảnh của nó qua φ cũng lập thành cơ sở của môđun R^n.
Vậy trong R^n có một cơ sở gồm có m phần tử.

Vì R là IBN nên ta phải có $m = n$.

Chiều đảo: Giả sử vành R có tính chất ($R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$).
Lấy một R-môđun M và cho X, Y là hai cơ sở có lực lượng hữu hạn của M.
Giả sử $|X| = m$, $|Y| = n$.
Ta có $M = \bigoplus_{x \in X} Rx$. Mà mỗi $Rx \cong R$ nên $M \cong R^m$.
Tương tự ta cũng có $M \cong R^n$.
Từ giả thiết ta suy ra $m = n$, tức là $|X| = |Y|$. Vậy R là IBN.■

Ta áp dụng tính chất trên để chỉ ra vành trong kết quả sau không là IBN.

Đặt $\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n$, trong đó $\mathbb{R}_n \cong \mathbb{R}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Rõ ràng $\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}$ là tập hợp tất cả các dãy vô hạn $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ trong $\mathbb{R}$ mà hầu hết các thành phần bằng 0, chỉ có hữu hạn thành phần khác 0.

Vì $\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}$ là một nhóm Abel nên tập $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ tất cả những tự đồng cấu nhóm (+) của $\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}$ với phép toán cộng ánh xạ thông thường và phép nhân là phép hợp nối ánh xạ trở thành một vành có đơn vị.

Kết quả 3:

Vành $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ không là IBN.

Chứng minh:

Xem $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ là môđun trên chính nó.
Xét tương ứng φ từ $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ vào $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}) \oplus End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ như sau:

$$\varphi(f) = (f_1, f_2)$$

trong đó f_1, f_2 lần lượt được xác định bởi

$$f_1(x_0, x_1, x_2, \ldots) = f(x_0, 0, x_2, 0, \ldots)$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2, \ldots) = f(0, x_1, 0, x_3, \ldots).$$

Dễ thấy với cách xác định như trên thì $f_1, f_2 \in End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$, do đó φ là ánh xạ.

<u>φ là một đồng cấu môđun</u>

Vì f là đồng cấu nhóm (+) nên việc φ là một đồng cấu nhóm (+) cũng dễ dàng thấy được.
Lấy $f, g \in End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ và đặt $\varphi(g \circ f) = (h_1, h_2)$.

Ta có

$$h_1(x_0, x_1, x_2, \ldots) = g \circ f(x_0, 0, x_2, 0, \ldots) = g \circ f_1(x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Do đó $h_1 = g \circ f_1$. Tương tự ta cũng có $h_2 = g \circ f_2$.

Vậy $\varphi(g \circ f) = g \circ \varphi(f)$, tức φ là đồng cấu môđun.

φ là một đơn ánh

Với mọi $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ trong $\mathbb{R}$, nếu $f_1 = 0, f_2 = 0$ thì

$$f(x_0, 0, x_2, 0, \ldots) = f_1(x_0, x_1, x_2, \ldots) = 0$$

$$f(0, x_1, 0, x_3, \ldots) = f_2(x_0, x_1, x_2, \ldots) = 0.$$

Cộng hai kết quả trên lại ta được $f = 0$. Vậy φ là đơn ánh.

φ là một toàn ánh

Cho trước $g, h \in End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ và gọi f là tương ứng được xác định bởi

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = g(x_0, 0, x_2, 0, \ldots) + h(0, x_1, 0, x_2, \ldots)$$

Dễ dàng kiểm tra được $f \in End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$.

Rõ ràng

$$f(x_0, 0, x_2, 0, \ldots) = g(x_0, 0, x_2, 0, \ldots) + h(0, 0, 0, 0, \ldots) = g(x_0, 0, x_2, 0, \ldots),$$

$$f(0, x_1, 0, x_2, \ldots) = g(0, 0, 0, 0, \ldots) + h(0, x_1, 0, x_2, \ldots) = h(0, x_1, 0, x_2, \ldots).$$

Vậy $\varphi(f) = (g, h)$, tức φ là toàn ánh.

Những điều trên đã chỉ ra φ là đẳng cấu, tức là

$$End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}) \cong^{\varphi} End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}) \oplus End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$$

Từ kết quả 2 ta suy ra $End(\mathbb{R}_*^{\mathbb{N}})$ không là IBN.■

Trên đây đã đưa ra một ví dụ về vành không là IBN. Tuy nhiên có một số lớp vành quen thuộc là IBN, chẳng hạn như vành giao hoán (có đơn vị), vành Noether. Ta sẽ chứng minh điều này.

Kết quả 4:

Nếu R là vành giao hoán có đơn vị thì R là IBN.

Chứng minh:

Cho X và Y là hai cơ sở hữu hạn của R-môđun M.

Vì R là vành có đơn vị, trong R tồn tại một ideal tối đại, gọi là I. Do I là ideal tối đại nên R/I là một trường.

Gọi $< IM >$ là môđun con của M sinh bởi tập IM. Ta có môđun thương $M/ < IM >$ là nhóm cộng giao hoán.

Định nghĩa phép nhân ngoài từ R/I vào $M/ < IM >$ như sau

$$(r + I)(m+ < IM >) = rm+ < IM > .$$

Ta kiểm tra định nghĩa trên tốt.

Thật vậy, giả sử $r + I = r' + I$ và $m+ < IM >= m'+ < IM >$.

Ta có:

$$rm - r'm' = (r - r')m + r'(m - m')$$

Vì

$$(r - r') \in I$$

$$\Rightarrow (r - r')m \in< IM >,$$

và

$$(m - m') \in< IM >$$

$$\Rightarrow r'(m - m') \in< IM > .$$

Nên

$$(rm - r'm') \in< IM >$$

tức là

$$rm+ < IM >= r'm'+ < IM > .$$

Dễ dàng kiểm tra được phép nhân ngoài trên thỏa mãn tiên đề đồng nhất, tiên đề kết hợp hỗn hợp của các phép nhân, tiên đề phân phối của phép nhân ngoài với các phép cộng.

Vậy $M/ < IM >$ là không gian vectơ trên trường R/I.

Đặt $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng tập

$$\{x_1+ < IM >, x_2+ < IM >, ..., x_n+ < IM >\}$$

là cơ sở của không gian vectơ $M/<IM>$ trên trường R/I.

Cho $r_1+I, r_2+I, ..., r_n+I$ là các phần tử trong R/I. Giả sử

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k+I)(x_k+<IM>)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(r_kx_k+<IM>)=0$$

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{n}r_kx_k)+<IM>=0.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n}r_kx_k \in <IM>.$$

Nhận xét: Ta có $<IM>$ môđun con của M gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của IM. Tức mỗi phần tử của $<IM>$ là tổng hữu hạn các phần tử có dạng rim trong đó $r \in R, i \in I, m \in M$. Do X là cơ sở của M nên mỗi $m \in M$ là tổng hữu hạn các phần tử có dạng sx trong đó $s \in R, x \in X$, tức mỗi rim là tổng hữu hạn các phần tử có dạng $risx$ trong đó $r, s \in R, i \in I, x \in X$. Do I là ideal nên $ris \in I$. Vậy $<IM>$ là tổng hữu hạn các phần tử có dạng ix trong đó $i \in I, x \in X$.

Trở lại bài toán, áp dụng nhận xét trên, ta được

$$\sum_{k=1}^{n}r_kx_k=\sum_{k=1}^{n}i_kx_k.$$

Do đó $r_k=i_k$ với mọi k.

Vậy với mọi k thì $r_k+I=0$, tức tập

$$\{x_1+<IM>, x_2+<IM>, ..., x_n+<IM>\}$$

độc lập tuyến tính.

Cho $m+<IM>$ là một phần tử thuộc $M/<IM>$.

Rõ ràng m là tổ hợp tuyến tính của $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ nên

$$m+<IM>$$

là tổ hợp tuyến tính của

$$\{x_1+<IM>, x_2+<IM>, ..., x_n+<IM>\}.$$

Do đó tập

$$\{x_1+ < IM >, x_2+ < IM >, ..., x_n+ < IM >\}$$

là một hệ sinh của $M/ < IM >$.

Vậy

$$\{x_1+ < IM >, x_2+ < IM >, ..., x_n+ < IM >\}$$

là cơ sở của không gian vectơ $M/ < IM >$ trên trường R/I.

Tương tự, với $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ thì tập

$$\{y_1+ < IM >, y_2+ < IM >, ..., y_m+ < IM >\}$$

là cơ sở của không gian vectơ $M/ < IM >$ trên trường R/I.

Ta đã biết trong một không gian vectơ hữu hạn chiều thì mọi cơ sở đều có cùng lực lượng.

Do đó $n = m$.$\blacksquare$

Kết quả 5:

Nếu R là vành Noether thì R là IBN.

Chứng minh:

Giả sử R là vành Noether và $R^m \cong^{\varphi} R^n$ trong đó $m < n$.

Nếu $m = 0$ ta cũng có $n = 0$ (mâu thuẫn).

Giả sử $m > 0$.

Hệ quả 4.1 cho ta R^m là R-môđun Noether.

Từ $R^n = R^m \times R^{n-m}$, ta thiết lập được phép chiếu p từ R^n vào R^m.

Ánh xạ $p \circ \varphi$ cho ta một toàn cấu từ R^m vào chính nó.

Áp dụng định lý 3 ta được $p \circ \varphi$ là đẳng cấu, nên p là cũng đẳng cấu. Điều này là không thể xảy ra vì ta đã giả thiết $m < n$ tức là $R^{n-m} \neq 0$.

Do đó ta phải có $m = n$.

Kết quả 2 cho ta R là IBN.$\blacksquare$