ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-TIN HỌC

———**oOo**———

Tiểu luận tốt nghiệp

chuyên ngành Giải Tích

PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

NHÓM THỰC HIỆN : PHAN VĂN DU - NGUYỄN ĐĂNG HƯNG

THẦY HƯỚNG DẪN : GS DƯƠNG MINH ĐỨC

THẦY PHẢN BIỆN : TS NGUYỄN THÀNH LONG

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

2011

NỘI DUNG

Cuốn sách *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order của David Gilbarg và Neil S. Trudinger* là một tài liệu rất quan trọng cho ngành Phương trình đạo hàm riêng, nhưng nhiều chứng minh không đầy đủ chi tiết. Việc kiểm chứng các chi tiết này khá phức tạp. Tiểu luận này trình bày với một số bổ xung cho các chứng minh của Chương 2 trong cuốn sách đó. Chúng tôi chia chương này thành các mục sau đây:

1. Các bất đẳng thức giá trị trung bình
2. Nguyên lý cực đại và cực tiểu
3. Bất đẳng thức Harnack
4. Biểu diễn Green
5. Tích phân Poisson
6. Các định lý hội tụ
7. Ước lượng đạo hàm
8. Bài toán Dirichlet - phương pháp Perron
9. Capacity

2.1. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Các kết quả của định lý sau đây (cũng được gọi là các **định lý giá trị trung bình**) là những tính chất nổi tiếng của các hàm điều hòa, subharmonic và superharmonic.

Định lý 2.1:

Cho u là hàm số thuộc lớp $C^2(\Omega)$ thỏa mãn $\Delta u = 0(\geq 0, \leq 0)$ trong Ω. Khi đó với mọi quả cầu $B(y,R) \subset\subset \Omega$ ta có

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{\partial B} uds$$

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{\omega_n R^n}\int\limits_{B} udx.$$

Chứng minh:

Với mọi $\rho \in$(0, R), đặt

$$\phi(\rho) = \rho^{1-n}\int\limits_{\partial B(y,\rho)} uds.$$

Ta chứng minh $\phi'(\rho) = (\geq, \leq)0$ với mọi $\rho \in (0, R)$.

Áp dụng định lý Green cho quả cầu B(y, ρ), ta có

$$\int\limits_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} ds = \int\limits_{B(y,\rho)} \Delta u dx = (\geq, \leq)0.$$

Ta có với mọi x thuộc $\partial B(y, \rho)$ thì $x = y + \rho\omega$ với $|\omega| = 1$.

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x) = \frac{\partial u}{\partial \upsilon}(y + \rho\omega) = Du(y + \rho\omega).\upsilon = Du(y + \rho\omega).\omega = \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega).$$

Do đó

$$\int\limits_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x)ds_x = \int\limits_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega)ds_x = \rho^{n-1}\int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega)ds_\omega =$$

$$= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int\limits_{\partial B(0,1)} u(y + \rho\omega)ds_\omega = \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n}\int\limits_{\partial B(y,\rho)} u(x)ds_x\right] = \rho^{n-1}\phi'(\rho).$$

Vậy

$$\phi'(\rho) = (\geq, \leq)0 \tag{1}$$

với mọi $\rho \in (0, R)$.

Mặt khác, do hàm u liên tục trong Ω nên

$$\mathrm{u(y)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\mathrm{n}\omega_\mathrm{n}\rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{uds} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\mathrm{n}\omega_\mathrm{n}} \phi(\rho). \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\mathrm{u(y)} =(\geq,\leq) \frac{1}{\mathrm{n}\omega_\mathrm{n}} \phi(\rho) = \frac{1}{\mathrm{n}\omega_\mathrm{n}\rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B\rho} \mathrm{uds} \tag{3}$$

với mọi $\rho \in (0, R)$.

Thay ρ bởi R ta sẽ có công thức cần chứng minh thứ nhất (thay được bởi vì luôn tồn tại $R' > R$ thỏa $B(y, R') \subset\subset \Omega$, kết quả (3) đúng với mọi $\rho \in (0, R')$).

Viết lại đẳng thức (3) ta được

$$\mathrm{n}\omega_\mathrm{n}\rho^{n-1}\mathrm{u(y)} = (\geq,\leq) \int\limits_{\partial B\rho} \mathrm{uds}.$$

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến R theo ρ ta được

$$\int\limits_0^\mathrm{R} \mathrm{n}\omega_\mathrm{n}\rho^{n-1}\mathrm{u(y)d}\rho = (\geq,\leq) \int\limits_0^R \int\limits_{\partial B\rho} \mathrm{uds}.$$

Vậy ta có đẳng thức thứ hai.■

2.2. NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

Áp dụng định lý 2.1, ta có **nguyên lý cực đại và cực tiểu mạnh**:

Định lý 2.2:

Cho $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) trong Ω và có một điểm $y \in \Omega$ thỏa $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$ ($\inf\limits_{\Omega} u$). Khi đó u là hằng số. Vì vậy hàm điều hòa không thể đạt cực trị bên trong trừ khi nó là hằng.

Chứng minh:

Đặt M $= \sup\limits_{\Omega} u$ và $\Omega_M = \{x \in \Omega | u(x) = M\}$. Như vậy Ω_M khác trống vì chứa y. Do $u^{-1}\{\mathrm{M}\} = \Omega_M$ nên Ω_M đóng trong Ω.

Lấy z bất kỳ trong Ω_M, ta tìm $r > 0$ sao cho quả cầu $B(z,r) \subset \Omega_M$. Cho $z \in \Omega_M$, ta có $u(z) = M$ và $r > 0$ sao cho $0 < r < dist(z, \partial\Omega)$. Khi ấy, áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm subharmonic $u - M$ (vì $\triangle(u - M) \geq 0$) trong $B(z,r) \subset\subset \Omega$:

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B(z,r)} (u - M) dx.$$

Mà $u(x) - M \leq 0$ nên

$$\int\limits_{B(z,r)} (u - M) dx \leq 0.$$

Suy ra

$$\int\limits_{B(z,r)} (u - M) dx = 0.$$

Lại vì hàm $u - M$ liên tục trên Ω, $u(x) - M \leq 0 \ \forall x \in \Omega$ nên $u(x) = M \ \forall x \in B(z,r)$ hay $u(x) = M \ \forall x \in B(z,r)$. Từ đó, $B(z,r) \subset \Omega_M$, nghĩa là Ω_M mở.

Như vậy, ta có được Ω_M là tập vừa đóng vừa mở trong Ω. Mà Ω liên thông nên $\Omega_M = \Omega$. Ta có u(x) = M $\forall x \in \Omega$ hay u là hằng số.

Chứng minh tương tự cho hàm superharmonic bằng cách thay u bởi $-u$. ■

Nguyên lý cực đại và cực tiểu mạnh ngay lập tức cho ta kết quả sau (**nguyên lý cực đại và cực tiểu yếu**):

Định lý 2.3:

Giả thiết rằng $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ với $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) trong Ω, miền Ω bị chặn. Ta có

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u)$$

Do đó với u là hàm điều hoà thì $\inf\limits_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u, \forall x \in \Omega$ *(*)*

Chứng minh:

Nếu u subharmonic:

Đặt M = $\sup\limits_{\Omega} u$, suy ra có dãy $\{x_n\} \subset \Omega$ thoả u(x_n) →M.(1)

Do Ω bị chặn trong R^n nên $\{x_n\}$ có dãy con $\{x_{n_k}\}$ thoả $x_{n_k} \to x'$

Mà u liên tục nên u(x_{n_k}) → u(x') (2)

Từ (1), (2) suy ra $u(x') = M$.

Nếu $x' \in \Omega$, theo Định lý 2.2, ta có u là hằng số hay $u = M$ trên Ω. Bây giờ, ta chỉ ra rằng: $u = M$ trên $\partial\Omega$.

Lấy $s \in \partial\Omega$ (s là điểm dính của Ω) thì có dãy $\{s_n\} \subset \Omega$ sao cho $s_n \to s$. Vì u liên tục nên $u(s_n) \to u(s)$. Mà $u(s_n) = M$ $\forall n \in N$. Suy ra $u(s) = M$. Ta có $u(s) = M$ $\forall$ x$\in \partial\Omega$, suy ra $\sup\limits_{\partial\Omega} u$ = M. Vậy $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ = M (đpcm).

Nếu $x' \in \partial\Omega$. Suy ra $M \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u$.

Lấy $y' \in \partial\Omega$ có dãy $\{y'_n\} \subset \Omega$ sao cho $y'_n \to y'$. Khi ấy $M \geq u(y'_n)$, $\forall n \in N$.

Do u liên tục nên cho $n \to \infty$ thì $M \geq u(y')$.

Ta có $M \geq u(y')$ $\forall y' \in \partial\Omega$ nên $M \geq \sup\limits_{\partial\Omega} u$. Suy ra: $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u = M$ (đpcm).

Nếu u superharmonic:

Đặt $v = -u$. Vì $\triangle u \leq 0$ nên $\triangle v \geq 0$. Áp dụng chứng minh trên, ta có: $\sup\limits_{\Omega} v = \sup\limits_{\partial\Omega} v$.

Mà $\sup\limits_{\Omega} v = \sup\limits_{\Omega}(-u) = -\inf\limits_{\Omega} u$ và $\sup\limits_{\partial\Omega} v = \sup\limits_{\partial\Omega}(-u) = -\inf\limits_{\partial\Omega} u$.

Suy ra $\inf\limits_{\Omega} u = \inf\limits_{\partial\Omega} u$.

Nếu u là hàm điều hòa:

Ta có: $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ và $\inf\limits_{\Omega} u = \inf\limits_{\partial\Omega} u$.

Mà

$$\inf_{\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} u, \forall x \in \Omega.$$

Do đó có kết luận (*): $\inf\limits_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u$,x$\in \Omega$. ■

Như là hệ quả, ta có định lý về "tính duy nhất" sau:

Định lý 2.4:

Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *thoả* $\triangle u = \triangle v$ *trong* Ω, $u = v$ *trên* $\partial\Omega$. *Khi đó* $u = v$ *trong* Ω.

Chứng minh:

Đặt $w = u - v$. Vì $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ nên $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Rõ ràng $\triangle w = \triangle(u - v) =$

$\triangle u - \triangle v = 0$ trong Ω, Ω bị chặn nên theo định lý 2.3 có:

$$\sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w$$

Giả thiết cho $w = u - v = 0$ trên $\partial\Omega$. Do đó $\sup\limits_{\partial\Omega} w = 0$. Suy ra $\sup\limits_{\Omega} w = 0$. Từ đó: $w = 0$ trong Ω hay $u = v$ trong Ω(đpcm). ■

Nhận xét:

Trong chứng minh của định lý 2.2 (do đó trong 2.3 và 2.4), ta nhận thấy giả thuyết về tính điều hòa (subharmonic, superharmonic) của u có thể được thay thế chỉ bởi giả thuyết u liên tục trên Ω và với mọi quả cầu $B = B_R(y)$, u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{\partial B} uds.$$

Nhận xét này sẽ hữu ích cho chứng minh của các định lý như 2.7 và các nhận xét trong mục 2.8.

2.3. BẤT ĐẲNG THỨC HARNACK

Bên cạnh nguyên lý cực đại và cực tiểu, định lý 2.1 còn cho ta một kết quả khác (**bất đẳng thức Harnack**) như sau:

Định lý 2.5:

Cho u là hàm điều hòa không âm trên Ω. Khi đó với mọi miền bị chặn $\Omega' \subset\subset \Omega$, tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc vào n, Ω' và Ω sao cho

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

Chứng minh:

Lấy $y \in \Omega$ và chọn R sao cho $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Khi đó với $x_1, x_2 \in B_R(y)$, ta có:

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_R(x_1)} udx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_{2R}(y)} udx$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int\limits_{B_{3R}(x_2)} udx \geq \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int\limits_{B_{2R}(y)} udx$$

$$\int\limits_{B_{3R}(x_2)} udx = 3^n \int\limits_{B_R(x_2)} udx$$

Suy ra

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u$$

Lấy $\Omega' \subset\subset \Omega$ và chọn $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$ sao cho

$$u(x_1) = \sup_{\Omega'} u$$

$$u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$$

Đặt $d = dist(\Omega', \partial\Omega)$. Do Ω' là miền bị chặn nên tồn tại M quả cầu $B_1, B_2, ..., B_M$ với bán kính $d/8$ sao cho

$$\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_i$$

đồng thời do nhận xét trên, trong mỗi quả cầu B_i, ta luôn có

$$\sup_{B_i} u \leq 3^n \inf_{B_i} u$$

Trước hết lấy một quả cầu chứa x_1 (xem như đó là quả cầu B_1), lúc đó thì:

$$u(x_1) \leq \sup_{B_1} u \leq 3^n \inf_{B_1} u$$

Ta sẽ xây dựng một cách quy nạp như sau: Nếu B_1 không chứa x_2, chọn quả cầu, gọi là B_2 sao cho $B_1 \cap B_2$ khác rỗng. Ta hoàn toàn có thể chọn quả cầu B_2 như thế vì nếu không, ta sẽ có

$$\Omega' = (B_1 \cap \Omega') \cup (\bigcup_{i=2}^{M} B_i \cap \Omega')$$

nghĩa là Ω' có thể được phân tích thành tích của hai tập mở không trống rời nhau, điều này trái với tính liên thông của Ω'.

Tuy nhiên, từ cách xây dựng, ta có

$$\inf_{B_1} u \leq \sup_{B_2} u$$

$$\inf_{B_2} u \leq \sup_{B_1} u$$

nên nếu $max\{\inf_{B_1} u, \inf_{B_2} u\} = \inf_{B_1} u$

$$\inf_{B_1} u \leq \sup_{B_2} u \leq 3^n \inf_{B_2} u \leq 3^n \inf_{B_1 \cup B_2} u$$

Tương tự với $max\{\inf_{B_1} u, \inf_{B_2} u\} = \inf_{B_2} u$, ta suy ra được

$$max\{\inf_{B_1} u, \inf_{B_2} u\} \leq 3^n \inf_{B_1 \cup B_2} u$$

Từ những điều trên, ta thu được

$$\sup_{B_1 \cup B_2} u = max\{\sup_{B_1} u, \sup_{B_2} u\} \leq max\{3^n \inf_{B_1} u, 3^n \inf_{B_2} u\} = 3^n max\{\inf_{B_1} u, \inf_{B_2} u\} \leq 3^{2n} \inf_{B_1 \cup B_2} u$$

Từ đây, với cách làm tương tự, nếu B_2 là không chứa x_2, ta lại chọn 1 quả cầu gọi là B_3, thực hiện các bước tương tự như trên ta lại có

$$\sup_{B_1 \cup B_2 \cup B_3} u \leq 3^{3n} \inf_{B_1 \cup B_2 \cup B_3} u$$

Tất nhiên, vì số quả cầu đã thiết lập là hữu hạn và chắc chắn phải có 1 quả cầu chứa x_2 nên sau một số hữu hạn $N \leq M$ bước thực hiện, ta sẽ có quả cầu B_N chứa x_2, đồng thời cũng có

$$\sup_{\bigcup_{i=1}^{N} B_i} u \leq 3^{Nn} \inf_{\bigcup_{i=1}^{N} B_i} u$$

và suy ra

$$u(x_1) \leq 3^{Nn} u(x_2) \leq 3^{Mn} u(x_2)$$

Như vậy, ta thu được định lý 2.5 với $C = 3^{Mn}$. ■

2.4. BIỂU DIỄN GREEN

Một số công thức:

Cho miền mở,liên thông,bị chặn Ω_0 sao cho $\partial\Omega_0 \in C^1$.Ký hiệu ν là véc tơ pháp tuyến đơn vị của $\partial\Omega_0$ hướng ra ngoài.Khi này với mọi trường véc tơ w trong $C^1(\overline{\Omega_0})$ thì ta có được điều sau:

$$\int\limits_{\Omega_0} div(w)dx = \int\limits_{\partial\Omega_0} w.\nu ds$$

trong đó ds biểu thị vùng diện tích $(n-1)$ chiều của $\partial\Omega_0$

I) Bây giờ chúng ta sẽ đi vào nghiên cứu những công thức của Green:

Ta quy định miền Ω như miền Ω_0 trong định lý phía trên,khi này ta xét u, v là hai hàm $C^2(\overline{\Omega})$. Chúng ta thế $w = vDu$ vào định lý trên chúng ta sẽ thu được điều sau:

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx + \int\limits_{\Omega} Du.Dv dx = \int\limits_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial\nu} ds \quad \textbf{(2.4.1)}$$

Biểu thức (2.4.1) được gọi là **công thức Green thứ nhất**.

Chứng minh công thức:

Thật vậy:

Khi thế $w = vDu$ vào định lý trên thì chúng ta thu được:

$$\int\limits_{\Omega} div(vDu)dx = \int\limits_{\partial\Omega} (vDu).\nu ds$$

Ta có thể thấy ngay từ định nghĩa divergence rằng:

$$div(vDu) = Dv.Du + v.\Delta u$$

Nên:

$$\int\limits_{\Omega} div(vDu)dx = \int\limits_{\Omega} v\Delta u dx + \int\limits_{\Omega} Du.Dv dx$$

Đồng thời, do $Du.\nu = \frac{\partial u}{\partial\nu}$ nên ta có $\int\limits_{\partial\Omega} (vDu).\nu ds = \int\limits_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial\nu} ds$.

Từ đây ta thu được công thức trên.

Bây giờ,ta cũng xét cùng những điều kiện như công thức Green thứ nhất.Khi này ta có công thức sau:

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu})ds \quad \textbf{(2.4.2)}$$

Công thức (2.4.2) được gọi là **công thức Green thứ hai**.

Lời giải cho công thức trên khá đơn giản vì ta chỉ cần hoán đổi vai trò của u, v trong công thức Green thứ nhất(bởi vì vai trò của u, v ở đây là như nhau).Rõ ràng lúc này toán hạng $\int_\Omega Du.Dvdx$ không thay đổi nên khi ta đem trừ hai đẳng thức sau khi đã hoán đổi vai trò u, v thì ta thu được ngay công thức Green thứ hai.

II) Một số tính chất của nghiệm cơ bản phương trình Laplace:

Đầu tiên ta nhắc lại định nghĩa của nghiệm cơ bản phương trình Laplace:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{(2-n)} & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| & n = 2 \end{cases}$$

Ký hiệu đẳng thức trên là (2.4.3) và ở đây ta cố định $y \in \Omega$, ω_n là thể tích quả cầu đơn vị n chiều.

Tính chất 1:

Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace là hàm điều hòa.

Chứng minh:

Xét đạo hàm bậc nhất:

Xét 2 trường hợp:

+Khi $n = 2$:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|) = \frac{1}{2\pi}.\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(|x-y|)}{|x-y|}$$

Rõ ràng: $\frac{\partial}{\partial x_i}(|x-y|) = (x_i - y_i).|x-y|^{-1}$ nên:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{2\pi}.(x_i - y_i)|x-y|^{-2}$$

Khi $n = 2$ thì thể tích của quả cầu đơn vị khi này là π nên từ đây:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{2\omega_2}.(x_i - y_i)|x-y|^{-2}$$

+Khi $n > 2$. Lúc này:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|x-y|^{(2-n)})$$

Bằng lập luận tương tự như trường hợp $n = 2$ chúng ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|x-y|^{(2-n)}) = (2-n)(x_i - y_i)|x-y|^{-n}$$

Do đó:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}$$

Chung lại,sau 2 trường hợp ta thu được:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n} \quad (\forall n \geqslant 2)$$

<u>Xét đạo hàm cấp 2:</u>

Làm tương tự như trường hợp đạo hàn cấp 1,chúng ta thu được công thức cho đạo hàm cấp 2 như sau:

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}(|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j))|x-y|^{-n-2}$$

trong đó δ_{ij} là ký hiệu Kronecker.

<u>Chứng minh Γ là hàm điều hòa:</u>

Bằng cách áp dụng công thức đạo hàm bậc 2,khi $x \neq y$ thì:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma(x-y) &= \sum_{i=1}^{n} D_{ii}\Gamma(x-y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n}[|x-y|^2 - n(x_i - y_i)^2]|x-y|^{-n-2} \\
&= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n-2}\sum_{i=1}^{n} |x-y|^2 - n(x_i-y_i)^2 = 0
\end{aligned}$$

Vậy Γ là hàm điều hòa

<u>Tính chất 2:</u>

$$D^{\beta}\Gamma(x-y) \leq C|x-y|^{2-n-|\beta|}$$

trong đó $C = C(n, |\beta|)$ và **ký hiệu bất đẳng thức này là (2.4.4)**

hay một cách tổng quát hơn

$$|D^k u(x)| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u| dy$$

với u là hàm điều hòa trong $\overline{\Omega}$, với mọi quả cầu $B(x,r) \subset \overline{\Omega}$, $C_0 = \frac{1}{\omega_n}$, $C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}$ $(k > 0)$.

Ký hiệu bất đẳng thức này là (2.4.5)

Chúng ta thử giải bất đẳng thức (2.4.4) trong trường hợp đạo hàm bậc 1,2(tức là $\beta = 1, 2$ bằng cách bình thường để thấy ý nghĩa của nó.

Đối với đạo hàm bậc nhất:

Áp dụng đẳng thức đạo hàm bậc nhất của Γ,ta có:

$$|D_i\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{(1-n)}$$

Do công thức đạo hàm bậc nhất là $D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n} \quad (\forall n \geqslant 2)$ và $(x_i - y_i) \leq |x-y|$

Đối với đạo hàm bậc hai:

Áp dụng đẳng thức đạo hàm bậc hai của Γ,ta có:

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}[|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)]|x-y|^{-n-2}$$

Ta đi chứng minh rằng:

$$\frac{1}{n}\left||x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right| \leq |x-y|^2 \qquad (*)$$

Thật vậy (*) tương đương cần chứng minh:

$$-n|x-y|^2 \leq n(x_i-y_i)(x_j-y_j) - |x-y|^2\delta_{ij} \leq n|x-y|^2$$

$$\Leftrightarrow -(n+\delta_{ij})|x-y|^2 \leq n(x_i-y_i)(x_j-y_j) \leq (n+\delta_{ij})|x-y|^2$$

• Khi $i = j$ thì bất đẳng thức trên trở thành:

$$-(n+1)|x-y|^2 \leq n(x_i-y_j)^2 \leq (n+1)|x-y|^2$$

Bất đẳng thức trên là đúng do $(x_i-y_i)^2 \leq |x-y|^2$.

• Khi $i \neq j$. Lúc này bất đẳng thức trở thành:

$$-n|x-y|^2 \leq n|(x_i-y_i)(x_j-y_j)| \leq n|x-y|^2$$

Bất đẳng thức vế trái hiển nhiên đúng vì VP ≥ 0 còn VT ≤ 0.

Xét bất đẳng thức vế phải:

$$n|(x_i-y_i)(x_j-y_j)| \leq n|x-y|^2 \ \Leftrightarrow |(x_i-y_i)(x_j-y_j)| \leq |x-y|^2$$

Điều trên là đúng vì:

$$|x-y|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \geq (x_i-y_i)^2 + (x_j-y_j)^2 \geq 2|(x_i-y_i)(x_j-y_j)| \geq |(x_i-y_i)(x_j-y_j)|$$

Do đó bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức (*) vào đẳng thức đạo hàm cấp 2 của Γ ta thu được:

$$|D_{ij}\Gamma(x-y)| \leqslant \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}$$

Bây giờ thay vì chứng minh tính chất 2 thì ta chứng minh bất đẳng thức (2.4.5) vì bất đẳng thức (2.4.4) là trường hợp nhỏ của bất đẳng thức (2.4.5)

Đầu tiên ta nhắc lại công thức trung bình đối với hàm điều hòa u trong miền Ω như sau:

$$u(x) = \frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} udy$$

với mọi quả cầu $B(x,r) \subset \Omega$.

Bây giờ ta đi chứng minh bất đẳng thức (2.4.5) bằng phương pháp quy nạp theo k.

• Khi $k = 0$ thì bất đẳng thức (2.4.5) trở thành:

$$|u(x)| \leq \frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} |u|dy$$

Thật vậy, do u là hàm điều hòa nên:

$$|u(x)| = |\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} udy| \leq \frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} |u|dy$$

• Khi $k = 1$. Vì u là hàm điều hòa trong Ω nên các đạo hàm thành phần $D_i u$ cũng là các hàm điều hòa trong Ω.

Khi này bằng cách áp dụng công thức giá trị trung bình cho hàm điều hòa, ta được:

$$|D_i u| = |\frac{2^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,\frac{r}{2})} D_i udy| = |\frac{2^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{2})} u\nu_i ds|$$

Nếu xét $x_0 \in \partial B(x, \frac{r}{2})$ thì $B(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset U$. Lúc này, bằng việc áp dụng mệnh đề quy nạp khi $k = 0$:

$$|u(x_0)| \leq \frac{2^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x_0,\frac{r}{2})} |u|dy = \frac{2^n}{r^n\omega_n}||u||_{L^1(B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{2^n}{r^n\omega_n}||u||_{L^1(B(x,r))}$$

Từ đây:

$$|D_i u| = |\frac{2^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{2})} u\nu_i ds| \leq \frac{2^n}{r^n\omega_n}\frac{2^n}{r^n\omega_n}||u||_{L^1(B(x,r))}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{2})} ds$$

$$= \frac{2^n}{r^n\omega_n}\frac{2^n}{r^n\omega_n}||u||_{L^1(B(x,r))} n\frac{r^{n-1}}{2^{n-1}}\omega_n = \frac{2^{n+1}n}{r^{n+1}\omega_n}||u||_{L^1(B(x,r))} = \frac{C_1}{r^{n+1}}||u||_{L^1(B(x,r))}.$$

Do đó mệnh đề quy nạp được chứng minh cho trường hợp $k = 1$.

• Khi $k \geq 2$.Giả sử khi này bất đẳng thức chúng ta chứng minh đã đúng cho $(k-1)$.

Xét α là đa chỉ số có bậc là k. Khi này $D_\alpha u = (D_\beta u)_{x_i}$ với $i = (1, 2, 3, ..., n), |\beta| = k-1$. Đồng thời, các $D_\alpha u$ cũng là các hàm điều hòa trong Ω nên ta có thể áp dụng công thức giá trị trung bình:

$$|D_\alpha u(x)| = |\frac{k^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,\frac{r}{k})} D_\alpha u dy| = |\frac{k^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{k})} D_\beta u\nu ds|$$

Nếu $x_0 \in \partial B(x, \frac{r}{k})$ thì $B(x_0, \frac{r(k-1)}{k}) \subset B(x,r) \subset U$. Áp dụng giả thuyết quy nạp cho $(k-1)$, ta được:

$$|D_\beta u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{(k-1)}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x_0,\frac{k-1}{k}r))} \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{(k-1)}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x,r))}$$

Từ đây:

$$|D_\alpha u(x)| = |\frac{k^n}{r^n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{k})} D_\beta u\nu ds| \leq \frac{k^n}{r^n\omega_n}\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{(k-1)}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}||u||_{L^1(B(x,r))}\int\limits_{\partial B(x,\frac{r}{k})} ds =$$

$$= \frac{k^n}{r^n\omega_n}\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{(k-1)}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}n\omega_n\left(\frac{r}{k}\right)^{n-1}||u||_{L^1(B(x,r))} = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n r^{n+k}}||u||_{L^1(B(x,r))} = \frac{C_k}{r^{n+k}}||u||_{L^1(B(x,r))}$$

Nên mệnh đề quy nạp được chứng minh cho $k \geq 2$.

Vậy bất đẳng thức (2.4.5) được chứng minh hoàn toàn.

III) <u>Công thức biểu diễn Green và một số tính chất:</u>

Ta thấy rằng Γ kỳ dị tại $x = y$ nên ta sẽ tìm cách tránh điều trên bằng cách xét $\Omega\backslash B(y,r)$

Khi này bằng việc áp dụng công thức GREEN thứ nhất ta được:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\backslash B(y,r)} \Gamma\Delta u dx &= \int\limits_{\partial\Omega}(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu})ds + \int\limits_{\partial B(y,r)}(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu})ds \\ &= \int\limits_{\partial\Omega}(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu})ds + I_1 - I_2\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Xét I_1:

$$\int\limits_{\partial B(y,r)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}ds = \Gamma(r)\int\limits_{\partial B(y,r)}\frac{\partial u}{\partial\nu}ds \leqslant n\omega_n r^{n-1}\Gamma(r)\sup_{B(y,r)}|Du|$$

Thật vậy:

$$|\int\limits_{\partial B(y,r)}\frac{\partial u}{\partial\nu}ds| = |\int\limits_{\partial B(y,r)} Du.\nu ds| \leq \int\limits_{\partial B(y,r)}|Du.\nu|ds \leq \int\limits_{\partial B(y,r)}|Du|.|\nu|ds$$

Mà:

$$\int\limits_{\partial B(y,r)} |Du|.|\nu|ds = \int\limits_{\partial B(y,r)} |Du|ds \le \sup_{B(y,r)} |Du| \int\limits_{\partial B(y,r)} ds =$$

$$= n\omega_n r^{n-1} \sup_{B'(y,r)} |Du|$$

Theo định nghĩa hàm Γ có: $\Gamma(r) = \frac{r^{2-n}}{n(2-n)\omega_n}$

Do đó: $n\omega_n r^{n-1}\Gamma(r) = \frac{r}{2-n}$

Từ đẳng thức trên, ta có:

$$\lim_{r\to 0} n\omega_n r^{n-1}\Gamma(r) \sup_{B'(y,r)} |Du| = 0$$

Chung lại:

$$n\omega_n r^{n-1}\Gamma(r). \sup_{B'(y,r)} |Du| = \frac{r}{2-n} \sup_{B'(y,r)} |Du| \to 0$$

Hay:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\partial B(y,r)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

Xét I_2:

$$\int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)ds(x) = \int\limits_{\partial B(0,r)} u(y+z)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(z)ds(z)$$

Và ta chứng minh được rằng:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(z) = D\Gamma(z)\nu = \frac{-z}{n\omega_n |z|^n}.\frac{z}{|z|} = \frac{-1}{n\omega_n |z|^{n-1}} = \frac{-1}{n\omega_n r^{n-1}}$$

Nên:

$$\int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)ds(x) = \frac{-1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(0,r)} u(y+z)ds(z)$$

Từ đẳng thức trên:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)ds(x) = \lim_{r\to 0} - \overline{\int\limits_{\partial B(0,r)}} u(y+z)ds(z)$$

$$= \lim_{r\to 0} - \overline{\int\limits_{\partial B(y,r)}} u(x)ds(x) = -u(y)$$

Từ đây nếu cho $r \to 0$ thì ở đẳng thức (2.4.6) ta thu được điều sau:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B(y,r)} \Gamma \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} (\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu})ds - u(y)$$

Ta đi chứng minh:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \Gamma\Delta u dx$$

Điều cần chứng minh phía trên tương đương với chứng minh:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = 0$$

Áp dụng biến đổi tọa độ cực:

$$\int\limits_{B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_0^r (\int\limits_{\partial B(y,t)} \Gamma\Delta u ds) dt$$

Có:

$$\int\limits_{\partial B(y,t)} \Gamma\Delta u ds = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} t^{2-n} \int\limits_{\partial B(y,t)} \Delta u ds$$

Nên:

$$\int\limits_{B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_0^r (\int\limits_{\partial B(y,t)} \Gamma\Delta u ds) dt = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \int\limits_0^r (t^{2-n} \int\limits_{\partial B(y,t)} \Delta u ds) dt \tag{2.4.7}$$

Đồng thời,ta có:

$$\int\limits_{\partial B(y,t)} \Delta u ds \leq M \int\limits_{\partial B(y,t)} ds = M t^{n-1} n\omega_n \tag{2.4.8}$$

Kết hợp (2.4.7) và (2.4.8):

$$\int\limits_{B(y,r)} \Gamma\Delta u dx \leq \frac{M}{(2-n)} \int\limits_0^r t dt = \frac{Mr^2}{2(2-n)} \to 0$$

Do đó:

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \Gamma\Delta u dx$$

Từ: $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}) ds - u(y)$ và $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus B(y,r)} \Gamma\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \Gamma\Delta u dx$ nên khi cho $r \to 0$ ta thu được:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} - \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}) ds + \int\limits_{\Omega} \Gamma\Delta u dx$$

Hay viết dưới dạng cụ thể hơn:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu})ds + \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u dx \qquad (2.4.9)$$

Đẳng thức (2.4.9) được gọi là công thức biểu diễn Green

Một vài lưu ý liên quan đến công thức biểu diễn Green:

• Nếu hàm f khi này khả tích thì tích phân $\int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u dx$ được gọi là "Newton potential" với mật độ là Δu.

• Nếu hàm u có giá compact trên R^n thì công thức (2.4.9) cho ta đẳng thức sau:

$$u(y) = \int\limits_{R^n} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx$$

• Nếu hàm u là hàm điều hòa trong Ω thì khi này công thức (2.4.9) cho ta công thức sau:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu})ds$$

IV) **Hàm Green:**

Xét hàm $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ và h là hàm điều hòa trong Ω. Khi này bằng cách áp dụng công thức Green thứ hai(tức (2.4.2)) ta được:

$$\int\limits_{\Omega} h\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} (h\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h}{\partial\nu})ds$$

Đặt: $G = \Gamma + h$ thì khi này G là hàm điều hòa trên Ω (vì hàm Γ và h điều hòa trên Ω).Áp dụng công thức biểu diễn Green ở (2.4.9):

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu})ds + \int\limits_{\Omega} G\Delta u dx$$

Thêm vào đó, nếu $G = 0$ trên $\partial\Omega$, nghĩa là khi này hàm h có dạng như sau:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \quad trong\, \Omega \\ h(x) = -\Gamma(x-y) \quad tren\, \partial\Omega \end{cases}$$

thì khi này công thức trên trở thành:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial\nu}ds + \int\limits_{\Omega} G\Delta u dx$$

Hàm $G = G(x,y)$ xác định như trên được gọi là hàm Green cho miền mở,liên thông,bị chặn Ω. Hàm G đôi khi còn được gọi là **Hàm Green loại 1 của miền** Ω.

Nhắc lại định lý về tồn tại duy nhất của hàm điều hòa cho bài toán Dirichlet như sau:

Cho $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *thỏa mãn* $\Delta u = \Delta v$ *trong* Ω *và* $u = v$ *trên* $\partial\Omega$. *Lúc này* $u = v$ *trong* Ω.

Bằng cách áp dụng định lý trên, do điều kiện $G = 0$ trên $\partial\Omega$ nên hàm Green khi này là xác định duy nhất.

2.5. TÍCH PHÂN POISSON

I. Một số định nghĩa và kết quả cần thiết:

1. Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace:

Khi miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền mở, liên thông, bị chặn ta có:

Ta cố định một điểm $y \in \Omega$ và ta có *nghiệm cơ bản* của phương trình Laplace như sau:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n} & ; n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| & ; n = 2 \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

Trong đó ta xét $x \in \Omega\backslash\{y\}$ và ω_n là thể tích của quả cầu đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^n$ với $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$.

Rõ ràng ta thấy hàm *Gamma* là một hàm đối xứng.♦

2. Các định lý Green:

Với miền Ω ở trên, cho hai hàm số $u, v \in C^2(\Omega)$ thì ta có các *Định lý Green* như sau:

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx + \int_{\Omega} Dv.Du dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu} ds \qquad (1.2.1)$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right) ds \qquad (1.2.2)$$

Trong đó $Du = (D_1u, ..., D_nu)$ là vector Gradient của u, và ν là vector pháp tuyến đơn vị định hướng ngoài của biên $\partial\Omega$.♦

3. Công thức biểu diễn Green:

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền mở, liên thông, bị chặn. Cho hàm số $u \in C^2(\Omega)$ thì ta có *Công thức biểu diễn Green* cho hàm số u như sau:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds + \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u dx \qquad (1.3.1)$$

Trong đó $y \in \Omega$ cho trước.

Nếu u là hàm điều hòa trong Ω, nghĩa là $\Delta u = 0$ trong Ω thì ta có thể suy ra công thức sau từ công thức (1.3.1) ở trên

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds \qquad (1.3.2)$$

Trong đó $y \in \Omega$ cho trước.⧫

4. Hàm Green cho miền bất kỳ:

Xét miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền mở, liên thông, bị chặn. Cho hàm số $u \in C^2(\Omega)$ và một hàm số $h \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ thỏa $\Delta h = 0$ trong Ω. Sử dụng công thức (1.2.2) ở trên cho hai hàm số u và h ta nhận được công thức sau:

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \left(u.\frac{\partial h}{\partial \nu} - h.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds = \int\limits_{\Omega} (h\Delta u)\, dx \qquad (1.4.1)$$

Viết $G = \Gamma + h$ .Do G là hàm điều hòa trong Ω, sử dụng công thức (1.3.1) ở trên, bằng cách thay thế lời giải cơ bản Γ bằng hàm G ta nhận được *công thức biểu diễn Green tổng quát* cho hàm số u:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds + \int\limits_{\Omega} G\Delta u dx \qquad (1.4.2)$$

Nếu thêm điều kiện $G = 0$ trên $\partial\Omega$ thì ta được:

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \nu} ds + \int\limits_{\Omega} G\Delta u dx \qquad (1.4.3)$$

và khi đó hàm $G = G(x, y)$ được gọi là Hàm Green cho miền Ω.⧫

5. Hàm Green cho quả cầu:

Khi miền Ω của chúng ta là một quả cầu thì hàm Green có thể được xác định một cách rõ ràng và dẫn tới Sư biểu diễn nổi tiếng bằng Tích phân Poisson cho những hàm điều hòa trong 1 quả cầu.

Đầu tiên, ta xét $B_R = B_R(0)$, và với mỗi $x \in B_R,\ x \neq 0$ ta đặt:

$$\overline{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x \qquad (1.5.1)$$

để chỉ nghịch điểm của điểm $x \in B_R$; nếu $x = 0$, ta lấy $\overline{x} = \infty$. Và từ đó ta có *Hàm Green cho quả cầu* B_R:

$$\begin{aligned} G &= \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}|x - \overline{y}|\right) & ; y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & ; y = 0 \end{cases} \\ &= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2xy}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x|\,|y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2xy}\right) \quad ; \forall x, y \in B_R,\ x \neq y \qquad (1.5.2) \end{aligned}$$

Ta có thể thấy:

• Hàm G điều hòa theo biến x, nghĩa là $\Delta_x G(x,y) = 0$.

Thật vậy, cho y cố định trong Ω (ở đây Ω của ta là quả cầu B_R). Do tính điều hòa của hàm Γ (Hàm Γ cho bởi công thức (1.1.1)) ta có $\Delta_x \Gamma(|x-y|) = 0$:

Với

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) &= \begin{cases} \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-\overline{y}|^{2-n} & ,n>2 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\log|x-\overline{y}| + \log\frac{|y|}{R}\right) & ,n=2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \left|\frac{R^2}{|y|^2}\right|^{2-n} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left|\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right|^{2-n} & ,n>2 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\log\left|\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right| + \log\left|\frac{R^2}{|y|^2}\right| + \log\frac{|y|}{R}\right) & ,n=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

ta được:

$$\begin{aligned}
\Delta_x\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) &= \begin{cases} \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \left|\frac{R^2}{|y|^2}\right|^{2-n} \Delta_x\left(\frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left|\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right|^{2-n}\right) & ,n>2 \\ \Delta_x\left(\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right|\right) + \Delta_x\left(\log\left|\frac{R^2}{|y|^2}\right| + \log\frac{|y|}{R}\right) & ,n=2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \left|\frac{R^2}{|y|^2}\right|^{2-n} \Delta_x\Gamma\left(\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right) & ,n>2 \\ \Delta_x\Gamma\left(\frac{|y|^2}{R^2}x-y\right) & ,n=2 \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

• Hàm G triệt tiêu trên biên, nghĩa là với $y \in B_R$ cố định cho trước, với mọi $x \in \partial B_R$ thì $G(x,y) = 0$.

Chứng minh điều này đơn giản như sau:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2x.y}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2}+R^2-2x.y}\right) \\ &= \Gamma\left(\sqrt{R^2+|y|^2-2x.y}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\frac{R^2|y|^2}{R^2}+|x|^2-2x.y}\right) \\ &= \Gamma\left(\sqrt{R^2+|y|^2-2x.y}\right)-\Gamma\left(\sqrt{|y|^2+R^2-2x.y}\right)=0 \end{aligned}$$

Phần tiếp theo ta sẽ xét các tính chất của hàm G.♦

II. Các tính chất của Hàm Green cho quả cầu:

Hàm G cho bởi công thức (1.5.2) có các tính chất sau:

$\forall x,y\in B_R,\ x\neq y$ thì:

$(i)\quad G(x,y)=G(y,x)$

$(ii)\quad G(x,y)\leqslant 0$

(iii) Đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài tại $x\in\partial B_R$ được cho bởi:

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)=\frac{R^2-|y^2|}{n\omega_n R}|x-y|^{-n}\geqslant 0$$

Chứng minh:

$\forall x,y\in B_R,\ x\neq y$ thì:

Từ công thức hàm G trong (1.5.2) và do tính đối xứng của hàm Γ, ta được:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2xy}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x|\,|y|}{R}\right)^2+R^2-2xy}\right) \\ &= \Gamma\left(\sqrt{|y|^2+|x|^2-2yx}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|y|\,|x|}{R}\right)^2+R^2-2yx}\right)=G(y,x) \end{aligned}$$

Vạy ta có (i).

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned}
G &= \begin{cases} \Gamma\left(|x-y|\right)-\Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}\left|x-\overline{y}\right|\right) & ; y\neq 0 \\ \Gamma\left(|x|\right)-\Gamma\left(R\right) & ; y=0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Gamma\left(|x-y|\right)-\Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}\left|x-\dfrac{R^2}{|y|^2}y\right|\right) & ; y\neq 0 \\ \Gamma\left(|x|\right)-\Gamma\left(R\right) & ; y=0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Gamma\left(|x-y|\right)-\Gamma\left(\left|\dfrac{|y|}{R}x-\dfrac{R}{|y|}y\right|\right) & ; y\neq 0 \\ \Gamma\left(|x|\right)-\Gamma\left(R\right) & ; y=0 \end{cases} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Xét công thức Hàm Γ trong phần (1.1.1), ta sẽ chứng minh Hàm Γ là Hàm đồng biến trong miền Ω (Ở đây Ω là quả cầu B_R, ta để Ω để thấy tính tổng quát).

Cho y cố định trong Ω, với mọi $x\in\Omega,\ x\neq y$, ta ký hiệu $x\equiv x-y$ thì với x_1, x_2 trong Ω và $|x_1|\leqslant|x_2|$ thì:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(x_1\right)=\Gamma\left(|x_1|\right) &= \begin{cases} \dfrac{1}{n\left(2-n\right)\omega_n}\left|x_1\right|^{2-n} & ; n>2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x_1| & ; n=2 \end{cases} \\
&\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n\left(2-n\right)\omega_n}\left|x_2\right|^{2-n} & ; n>2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x_2| & ; n=2 \end{cases} = \Gamma\left(|x_2|\right)=\Gamma\left(x_2\right)
\end{aligned}$$

Để chứng minh (ii), ta chứng minh $\forall x,y\in B_R,\ x\neq y$ thì $|x-y|\leqslant\left|\frac{|y|}{R}x-\frac{R}{|y|}y\right|$ để áp dụng tính đồng biến của Γ cho $(*)$. Thật vậy,

$$\begin{gathered}
|x-y|\leqslant\left|\tfrac{|y|}{R}x-\tfrac{R}{|y|}y\right| \\
\Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2xy\leqslant\left(\tfrac{|x||y|}{R}\right)^2+R^2-2xy \\
\Leftrightarrow R^2\left|x\right|^2+R^2\left|y\right|^2\leqslant\left(|x|\left|y\right|\right)^2+R^4 \\
\Leftrightarrow R^2\left(R^2-|x|^2\right)-|y|^2\left(R^2-|x|^2\right)\geqslant 0 \\
\Leftrightarrow \left(R^2-|y|^2\right)\left(R^2-|x|^2\right)\geqslant 0
\end{gathered}$$

Áp dụng vào Γ cho $(*)$ ta có được hàm $G\left(x,y\right)\leqslant 0,\ \forall x,y\in B_R,\ x\neq y$. Như vậy ta đã chứng minh xong (ii).

Ta chứng minh phần (iii).

Trước hết, ta cần một bổ đề:

Xét quả cầu B_R trong $\mathbb{R}^n$, với $x\in\partial B_R,\quad y\in B_R$ thì ta có

$$|x-y|^2=\left|\frac{|y|}{R}x-\frac{R}{|y|}y\right|^2$$

Bổ đề này được chứng minh đơn giản:

Với $y = (y_1, ..., y_n)$ cho trước trong B_R, thì với mọi $x = (x_1, ..., x_n) \in \partial B_R$, ta có $|x| = R$ và

$$\begin{aligned} \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y|^2}{R^2}x_i^2 - 2x_iy_i + \frac{R^2}{|y|^2}y_i^2\right) = |y|^2 + R^2 - 2x.y \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 + x_i^2 - 2x_iy_i\right) = |x-y|^2 \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh phần (iii).

Xét các trường hợp sau:

• Nếu $n = 2$:

▷ Khi $y \neq 0$ thì:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) = \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\log(|x-y|) - \log\left(\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|\right)\right] \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề vừa chứng minh:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} - \frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_i - y_i}{\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2}\right] = \frac{x_i\left(R^2 - |y|^2\right)}{2\pi R^2|x-y|^2}$$

Khi $x \in \partial B_R$, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \Delta G(x,y).\nu = \Delta G(x,y).\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}.\frac{x_i}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\left(R^2 - |y|^2\right)}{2\pi R^2|x-y|^2}.\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2\left(R^2 - |y|^2\right)}{2\pi R^2|x||x-y|^2} = \frac{R^2\left(R^2 - |y|^2\right)}{2\pi R^2R|x-y|^2} = \frac{R^2 - |y|^2}{2\pi R|x-y|^2} \end{aligned}$$

▷ Khi $y = 0$ thì:

$$G(x,y) = \Gamma(|x|) - \Gamma(R) = \frac{1}{2\pi}(\log|x| - \log R)$$

Suy ra

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) = \frac{1}{2\pi}.\frac{x_i}{|x|^2}$$

Vậy với $x \in \partial B_R$ thì ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \Delta G(x,y).\nu = \Delta G(x,y).\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}.\frac{x_i}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi}.\frac{x_i}{|x|^2}.\frac{x_i}{|x|} = \frac{1}{2\pi|x|} = \frac{1}{2\pi R} \end{aligned}$$

• Nếu $n > 2$:

▷ Khi $y \neq 0$ thì:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) = \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|\right) \\ &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left[|x-y|^{2-n} - \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^{2-n}\right] \end{aligned}$$

Từ đó, ta tính được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\frac{\partial G}{\partial x_i}\left[|x-y|^{2-n} - \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^{2-n}\right] \\ &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left[(2-n)(x_i-y_i)|x-y|^{-n} - (2-n)\frac{|y|}{R}\left(\frac{|y|}{R}x_i - \frac{R}{|y|}y_i\right)\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^{-n}\right] \\ &= \frac{1}{n\omega_n}\left[(x_i-y_i)|x-y|^{-n} - \left(\frac{|y|^2}{R^2}x_i - y_i\right)|x-y|^{-n}\right] \\ &= \frac{1}{n\omega_n}\left[\left(\frac{R^2-|y|^2}{R^2}\right)x_i\right]|x-y|^{-n} \end{aligned}$$

Với $x \in \partial B_R$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \Delta G(x,y).\nu = \Delta G(x,y).\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}.\frac{x_i}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\left[\left(\frac{R^2-|y|^2}{R^2}\right)x_i\right]|x-y|^{-n}.\frac{x_i}{|x|} = \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{R^2-|y|^2}{R^2}\right)\frac{|x-y|^{-n}}{R}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\ &= \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{R^2-|y|^2}{R^2}\right)\frac{|x-y|^{-n}}{R}R^2 = \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n} \end{aligned}$$

Ta xét trường hợp đơn giản còn lại.

▷ Khi $y = 0$ thì:

$$G(x,y) = \Gamma(|x|) - \Gamma(R) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left[|x|^{2-n} - |R|^{2-n}\right]$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\frac{\partial G}{\partial x_i}\left[|x|^{2-n} - |R|^{2-n}\right] \\ &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\left[(2-n)x_i|x|^{-n}\right] = \frac{1}{n\omega_n}\left[x_i|x|^{-n}\right] \end{aligned}$$

Suy ra khi $x \in \partial B_R$ thì

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \Delta G(x,y).\nu = \Delta G(x,y).\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}.\frac{x_i}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n}\left[x_i |x|^{-n}\right].\frac{x_i}{|x|} = \frac{|x|^{-n}}{n\omega_n |x|}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{R^{-n}}{n\omega_n R}R^2 = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \end{aligned}$$

Trong tất cả các trường hợp đã xét thì ta đều kiểm được (iii) đúng.

Vậy ta chứng minh xong các tính chất của Hàm G.♦

III. Tích phân Poisson:

Công thức tích phân Poisson:

Cho $u \in C^2(B_R) \cap C^1\left(\overline{B_R}\right)$ là một hàm điều hòa. Áp dụng công thức (1.4.3), ta được *Công thức Tích phân Poisson* cho hàm u như sau:

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{u ds_x}{|x-y|^n} \qquad (3.1.1)$$

Tích phân bên phải được gọi là *Tích phân Poisson* của hàm u.

Sau đây, ta sẽ chứng minh rằng công thức (3.1.1) vẫn còn đúng nếu ta chỉ có $u \in C^2(B_R) \cap C^0\left(\overline{B_R}\right)$.

Ta sẽ chứng minh cụ thể cho trường hợp $n = 2$ và $n = 3$, sau đó sẽ suy ra trường hợp n bất kỳ.

• Với $n = 2$:

Xét quả cầu

$$B_{r_n} = B_{r_n}(0)$$

bán kính r_n với $r_n = R - \frac{1}{n}$ và $n \geqslant N_0$ sao cho $\left(R - \frac{1}{N_0}\right) > 0$ thì khi đó ta có $u \in C^2(B_{r_n}) \cap C^1\left(\overline{B_{r_n}}\right)$.

Vậy ta có thể áp dụng công thức (3.1.1) cho u trong quả cầu B_{r_n} như sau:

$$u(y) = \frac{r_n^2 - |y|^2}{n\omega_n r_n} \int\limits_{\partial B_{r_n}} \frac{u ds_x}{|x-y|^n}$$

Bằng cách viết

$$x(n) \in \partial\overline{B_{r_n}} \Leftrightarrow x(n) = x(n,\theta) = r_n \cos\theta \overrightarrow{i} + r_n \sin\theta \overrightarrow{j} \quad ,0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

ta có:

$$\int\limits_{\partial B_{r_n}} \frac{uds_x}{|x-y|^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{u\left(x\left(n,\theta\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(r_n\cos\theta - y_1\right)^2 + \left(r_n\sin\theta - y_2\right)^2}\right)^n} r_n d\theta$$

Đặt

$$g_n\left(x\left(\theta\right)\right) = \frac{u\left(x\left(n,\theta\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(r_n\cos\theta - y_1\right)^2 + \left(r_n\sin\theta - y_2\right)^2}\right)^n} r_n$$

Do u liên tục trên $\overline{B_{r_n}}$, nên ta có với mọi $n \geqslant N_0$:

$$\left|g_n\left(x\left(\theta\right)\right)\right| \leqslant \left|\frac{\max\limits_{B_R} u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}} |x-y|} R\right| \equiv g\left(x\left(\theta\right)\right)$$

Thêm với các điều kiện:

▷ g khả tích trên $[0, 2\pi]$ theo biến θ.

$$\int\limits_0^{2\pi} g\left(x\left(\theta\right)\right) d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\max\limits_{B_R} u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}} |x-y|} R\right| d\theta = \left|\frac{\max\limits_{B_R} u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}} |x-y|} R\right| 2\pi < \infty$$

▷ Cho $\theta \in [0, 2\pi]$, khi $n \to \infty$ ta có:

$$x\left(n,\theta\right) = r_n\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r_n\sin\theta\,\overrightarrow{j} \to x_R\left(\theta\right) = R\cos\theta\,\overrightarrow{i} + R\sin\theta\,\overrightarrow{j}$$

Do tính liên tục của u trên B_R, ta có:

$$g_n\left(x\left(\theta\right)\right) = \frac{u\left(x\left(n,\theta\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(r_n\cos\theta - y_1\right)^2 + \left(r_n\sin\theta - y_2\right)^2}\right)^n} r_n \to \frac{u\left(x_R\left(\theta\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(R\cos\theta - y_1\right)^2 + \left(R\sin\theta - y_2\right)^2}\right)^n} R$$

với mọi $\theta \in [0, 2\pi]$.

Từ đó, áp dụng Định lý hội tụ bị chặn ta có:

$$\int\limits_0^{2\pi} g_n\left(x\left(\theta\right)\right) d\theta \to \int\limits_0^{2\pi} \frac{u\left(x_R\left(\theta\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(R\cos\theta - y_1\right)^2 + \left(R\sin\theta - y_2\right)^2}\right)^n} R d\theta = \int\limits_{\partial B_R} \frac{uds_x}{|x-y|^n}$$

Thêm với $\frac{r_n^2 - |y|^2}{n\omega_n r_n} \to \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}$ khi $n \to \infty$.

Do đó ta có

$$u\left(y\right) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{uds_x}{|x-y|^n}$$

Vậy ta có *Công thức tích phân Poisson* cho những hàm $u \in C^2(B_R) \cap C^0\left(\overline{B_R}\right)$ với $n = 2$.

• Với $n = 3$:

Xét quả cầu

$$B_{r_n} = B_{r_n}(0)$$

bán kính r_n với $r_n = R - \frac{1}{n}$ và $n \geqslant N_0$ sao cho $\left(R - \frac{1}{N_0}\right) > 0$ thì khi đó ta có $u \in C^2(B_{r_n}) \cap C^1\left(\overline{B_{r_n}}\right)$.

Vậy ta có thể áp dụng công thức (3.1.1) cho u trong quả cầu B_{r_n} như sau:

$$u(y) = \frac{r_n^2 - |y|^2}{n\omega_n r_n} \int\limits_{\partial B_{r_n}} \frac{u ds_x}{|x-y|^n}$$

Bằng cách viết

$$x(n) \in \partial\overline{B_{r_n}} \Leftrightarrow x(n) = x(n,\theta,\varphi) = r_n \sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r_n\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + r_n\cos\varphi\,\overrightarrow{k}$$

với $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Ta có:

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{r_n^2 - |y|^2}{n\omega_n r_n} \int\limits_{\partial B_{r_n}} \frac{u ds_x}{|x-y|^n} \\ &= \frac{r_n^2 - |y|^2}{n\omega_n r_n} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(x(n,\theta,\varphi)).r_n^2\sin\varphi}{\left(\sqrt{(r_n\sin\varphi\cos\theta - y_1)^2 + (r_n\sin\varphi\sin\theta - y_2)^2 + \left((r_n\sin\theta - y_3)^2\right)}\right)^n} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Với mọi $n \geqslant N_0$, đặt

$$g_n(x(\theta,\varphi)) = \frac{u(x(n,\theta,\varphi)).r_n^2\sin\varphi}{\left(\sqrt{(r_n\sin\varphi\cos\theta - y_1)^2 + (r_n\sin\varphi\sin\theta - y_2)^2 + \left((r_n\sin\theta - y_3)^2\right)}\right)^n}$$

Do u liên tục trên $\overline{B_{r_n}}$, nên ta có với mọi $n \geqslant N_0$:

$$\begin{aligned} |g_n(x(\theta,\varphi))| &= \left|\frac{u(x(n,\theta,\varphi)).r_n^2\sin\varphi}{\left(\sqrt{(r_n\sin\varphi\cos\theta - y_1)^2 + (r_n\sin\varphi\sin\theta - y_2)^2 + \left((r_n\sin\theta - y_3)^2\right)}\right)^n}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{R^2 \max\limits_{B_R} u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}} |x-y|}\right| \equiv g(x(\theta,\varphi)) \end{aligned}$$

Thêm với các điều kiện:

▷ g khả tích trên $[0,2\pi]\times[0,\pi]$ theo biến (θ,φ).

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g\left(x\left(\theta,\varphi\right)\right)d\theta d\varphi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{R^2\max\limits_{B_R}u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}}|x-y|}\right|d\theta d\varphi=\left|\frac{R^2\max\limits_{B_R}u}{\min\limits_{\partial B_{R-\frac{1}{N_0}}}|x-y|}\right|2\pi.\pi<\infty$$

▷ Cho $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$, khi $n\to\infty$ ta có:

$$\begin{aligned} x\left(n,\theta,\varphi\right) &= r_n\sin\varphi\cos\theta\overrightarrow{i}+r_n\sin\varphi\sin\theta\overrightarrow{j}+r_n\cos\varphi\overrightarrow{k}\\ &\to x_R\left(\theta,\varphi\right)=R\sin\varphi\cos\theta\overrightarrow{i}+R\sin\varphi\sin\theta\overrightarrow{j}+R\cos\varphi\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Do tính liên tục của u trên B_R ta có:

$$\begin{aligned} g_n\left(x\left(\theta,\varphi\right)\right) &= \frac{u\left(x\left(n,\theta,\varphi\right)\right).r_n^2\sin\varphi}{\left(\sqrt{\left(r_n\sin\varphi\cos\theta-y_1\right)^2+\left(r_n\sin\varphi\sin\theta-y_2\right)^2+\left(\left(r_n\sin\theta-y_3\right)^2\right)}\right)^n}\\ &\to \frac{u\left(x_R\left(\theta,\varphi\right)\right).R^2\sin\varphi}{\left(\sqrt{\left(R\sin\varphi\cos\theta-y_1\right)^2+\left(R\sin\varphi\sin\theta-y_2\right)^2+\left(\left(R\sin\theta-y_3\right)^2\right)}\right)^n}\end{aligned}$$

với mọi $(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

Từ đó, áp dụng Định lý hội tụ bị chặn, ta có:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g_n\left(x\left(\theta,\varphi\right)\right)d\theta d\varphi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(x\left(n,\theta,\varphi\right)\right).r_n^2\sin\varphi d\theta d\varphi}{\left(\sqrt{\left(r_n\sin\varphi\cos\theta-y_1\right)^2+\left(r_n\sin\varphi\sin\theta-y_2\right)^2+\left(\left(r_n\sin\theta-y_3\right)^2\right)}\right)^n}$$

$$\to\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(x_R\left(\theta,\varphi\right)\right).R^2\sin\varphi d\theta d\varphi}{\left(\sqrt{\left(R\sin\varphi\cos\theta-y_1\right)^2+\left(R\sin\varphi\sin\theta-y_2\right)^2+\left(\left(R\sin\theta-y_3\right)^2\right)}\right)^n}=\int_{\partial B_R}\frac{uds_x}{|x-y|^n}$$

Thêm với $\frac{r_n^2-|y|^2}{n\omega_n r_n}\to\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}$ khi $n\to\infty$.

Do đó ta có

$$u\left(y\right)=\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R}\frac{uds_x}{|x-y|^n}$$

Vậy ta có *Công thức tích phân Poisson* cho những hàm $u\in C^2\left(B_R\right)\cap C^0\left(\overline{B_R}\right)$ với $n=3$.

► Đối với trường hợp n bất kỳ, ta cũng chứng minh tương tự.♦

Định lý 2.6:

Cho $B = B_R(0)$ và ϕ là một hàm số liên tục trên ∂B. Thì khi đó hàm u được định nghĩa như sau:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B} \dfrac{\phi(y)\, ds_y}{|x-y|^n} & , x \in B \\ \phi(x) & , x \in \partial B \end{cases} \tag{3.2.1}$$

là một hàm thuộc vào $C^2(B) \cap C^0\left(\overline{B}\right)$ và thỏa $\Delta u = 0$ trong B.

Chứng minh:

• Đầu tiên, ta chứng minh $\Delta u = 0$ trong B. Viết lại

$$u(x) = \int_{\partial B} \phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y} ds_y$$

với $x \in B$.

Cho $x \in B$, theo tính chất (iii) thì $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}$ bị chặn

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right| = \left|\frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R\, |x-y|^n}\right| \leqslant \frac{R}{n\omega_n \min\limits_{y \in \partial B} |x-y|^n}$$

Khi đó ta có các điều sau:

▷ Với mọi $x \in B$, hàm số $x \mapsto \phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}$ khả tích trên ∂B theo biến y do

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial B} \phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y} ds_y\right| &\leqslant \int_{\partial B} \left|\phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right| ds_y \leqslant \int_{\partial B} \left|\max_{\partial B} \phi(y) . \frac{R}{n\omega_n \min\limits_{y \in \partial B} |x-y|^n}\right| ds_y \\ &\leqslant \max_{\partial B} \phi(y) . \frac{R}{n\omega_n \min\limits_{y \in \partial B} |x-y|^n} . |\partial B| < \infty \end{aligned}$$

▷ Với mọi $y \in \partial B$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right) &= \phi(y) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right) = \phi(y) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R\, |x-y|^n}\right) = \frac{\phi(y)}{n\omega_n R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\right) \\ &= \frac{\phi(y)}{n\omega_n R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{\phi(y)}{n\omega_n R}\left(\frac{-x_i^2 |x-y|^2 - n(x_i - y_i)}{|x-y|^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

▷ Với mọi $x \in B$ và $y \in \partial B$ ta có:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)\right| &= \left|\frac{\phi(y)}{n\omega_n R}\left(\frac{-x_i^2 |x-y|^2 - n(x_i - y_i)}{|x-y|^{n+2}}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{\max\limits_{t \in \partial B} |\phi(t)|}{n\omega_n R} . \frac{\left(R^2 \max\limits_{x \in B} |x-y| + n\right)}{\min\limits_{x \in B} |x-y|^{n+1}} = M_1 < \infty \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra được:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}ds_y\right)=\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)ds_y$$

Lập luận tương tự như trên, ta cũng có các điều sau:

▷ Với mọi $x \in B$, hàm số $x \mapsto \phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)$ khả tích theo biến y do:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)ds_y\right| &\leqslant \int\limits_{\partial B}\left|\phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)\right|ds_y \leqslant \int\limits_{\partial B}\left|\max_{\partial B}\phi(y).M_1\right|ds_y \\ &\leqslant \left|\max_{\partial B}\phi(y)M_1\right||\partial B|<\infty\end{aligned}$$

▷ Với mọi $y \in \partial B$ ta có hàm $y \mapsto \phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)$ có đạo hàm riêng phần theo biến x_i do $\phi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)$ là hợp nối của các hàm số sơ cấp, vì công thức của $\phi(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)$ rất phức tạp nên ta không trình bày ở đây.

▷ Với mọi $x \in B$ và $y \in \partial B$ thì $\phi(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)$ bị chặn với mọi $(x, y) \in B \times \partial B$ do nó là một hàm số liên tục trên $B \times \partial B$ là một tập bị chặn.

Do đó, ta cũng có khẳng định sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}ds_y\right)=\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\right)ds_y$$

Từ đó

Với mọi $x \in B$,

$$\begin{aligned}\Delta_x u(x) &= \Delta_x\int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}ds_y=\int\limits_{\partial B}\phi(y)\Delta_x\frac{\partial G}{\partial \nu_y}ds_y=\int\limits_{\partial B}\phi(y)\Delta_x\frac{\partial G}{\partial \nu_y}ds_y \\ &= \int\limits_{\partial B}\phi(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}(\Delta_x G)ds_y=0\end{aligned}$$

Vậy ta có $\Delta_x u(x)=0$ trong B và do đó $u \in C^2(B)$.

• Ta còn chứng minh $u \in C^0\left(\overline{B}\right)$.

Trong *Công thức Tích phân Poisson* phần (3.1.1) chọn $u = 1$, ta được:

$$\int\limits_{\partial B}K(x,y)\,ds_y=u(x)=1 \qquad ;\forall x\in B \qquad (3.2.2)$$

Ở đây, K là *Nhân Poisson*

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R\,|x-y|^n} \qquad (3.2.3)$$

▷ Trước hết, ta chứng minh u liên tục trên ∂B.

Cho x_0 thuộc vào ∂B thì với mọi số $\varepsilon > 0$, ta có:

○ Tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|\phi(x) - \phi(x_0)| \leqslant \varepsilon$ với $x \in \partial B$ và $|x - x_0| \leqslant \delta$.

○ Do hàm $\phi(x)$ liên tục trên ∂B là một tập Compact nên có số $M > 0$ sao cho $\sup\limits_{x\in\partial B} |\phi(x)| < M$.

○ Đặt các tập hợp

$$A_1 = \{y \in \partial B : \quad |y - x_0| \leqslant \delta\}$$

$$A_2 = \{y \in \partial B : \quad |y - x_0| > \delta\}$$

○ Xét $z \in \overline{B}$ và $|z - x_0| < \frac{\delta}{2}$ ta được:

Nếu $z \in \partial B$ ta có

$$|u(z) - u(x_0)| = |\phi(z) - \phi(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Cho $\delta \to 0$ thì $|u(z) - u(x_0)| = |\phi(z) - \phi(x_0)| \to 0$

Nếu $z \in B$ thì:

$$\begin{aligned}
|u(z) - u(x_0)| &= \left| \int\limits_{\partial B} K(z,y)\,\phi(y)\,ds_y - \int\limits_{\partial B} K(z,y)\,\phi(x_0)\,ds_y \right| \\
&= \left| \int\limits_{\partial B} K(z,y)\,[\phi(y) - \phi(x_0)]\,ds_y \right| \leqslant \int\limits_{\partial B} K(z,y)\,|\phi(y) - \phi(x_0)|\,ds_y \\
&\leqslant \int\limits_{\partial B\cap A_1} K(z,y)\,|\phi(y) - \phi(x_0)|\,ds_y + \int\limits_{\partial B\cap A_2} K(z,y)\,|\phi(y) - \phi(x_0)|\,ds_y \\
&\leqslant \varepsilon + 2M\frac{R^2 - |z|^2}{n\omega_n R}\frac{1}{(\delta/2)^n} n\omega_n R^{n-1}
\end{aligned}$$

Khi $\delta \to 0$ thì $|z| \to R$ nên $|u(z) - u(x_0)| \to 0$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có khi $\delta \to 0$ thì $|u(z) - u(x_0)| \to 0$.

Vậy $u(x)$ liên tục trên ∂B.

▷ Cuối cùng, ta chứng minh rằng u cũng liên tục trên B.

Cho $x_0 \in B$. Khi đó tồn tại số $r > 0$ sao cho $B_r = B(x_0, r) \subset B$.

Với mọi dãy $\{x_m\}$ trong $\overline{B}$ sao cho $\{x_m\} \to x_0$, ta chọn số N_1 đủ lớn sao cho $x_m \in B_r, \quad \forall m > N_1$.

Với mọi $m > N_1$, ta có:

$$u(x_m) = \frac{R^2 - |x_m|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B} \frac{\phi(y)}{|x_m - y|^n} ds_y$$

Đặt

$$f_m(y) = \frac{\phi(y)}{|x_m - y|^n}, \quad \forall m > N_1$$

và

$$f(y) = \frac{\phi(y)}{|x - y|^n}$$

với mọi $y \in \partial B$.

Ta có các điều sau:

∘ Với mọi $y \in \partial B$ thì $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(y) = f(y)$.

∘ Với mọi $m > N_1$, ta có:

$$|f_m(y)| = \frac{|\phi(y)|}{|x_m - y|^n} \leqslant M.\frac{1}{(R - r)^n}$$

Đặt hàm

$$h(y) = M.\frac{1}{(R - r)^n}$$

với mọi $y \in \partial B$.

Dễ thấy rằng h khả tích trên ∂B do

$$\int\limits_{\partial B} h(y)\, ds_y = \int\limits_{\partial B} M.\frac{1}{(R - r)^n} ds_y = M.\frac{1}{(R - r)^n} n\omega_n R^{n-1} < \infty$$

Từ đó, ta có đủ điều kiện để áp dụng định lý hội tụ bị chặn như sau:

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial B} f_m(y)\, ds_y = \int\limits_{\partial B} f(y)\, ds_y$$

Thêm với

$$\lim_{m \to \infty} \frac{R^2 - |x_m|^2}{n\omega_n R} = \frac{R^2 - |x_0|^2}{n\omega_n R}$$

Suy ra

$$\lim_{m \to \infty} u(x_m) = u(x_0)$$

Vậy u liên tục trên B.

Kết luận $u \in C^0\left(\overline{B}\right)$. Cùng với chứng minh trên ta có $u \in C^2(B) \cap C^0\left(\overline{B}\right)$.♦

2.6. CÁC ĐỊNH LÝ HỘI TỤ

Ở định lý 2.1, một hàm điều hòa thì có tính chất giá trị trung bình. Định lý sau đây sẽ chỉ ra rằng không những thế, tính chất giá trị trung bình còn là đặc trưng cho hàm điều hòa.

Định lý 2.7:

Một hàm số $u \in C^0(\Omega)$ điều hòa khi và chỉ khi trên mọi quả cầu $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$, u thỏa tính chất giá trị trung bình, tức là:

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B} u \, ds.$$

Chứng minh:

Chiều thuận đã được chứng minh ở định lý 2.1, giờ ta chứng minh chiều đảo.

Với mỗi $y \in \Omega$, chọn $R > 0$ sao cho quả cầu $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$. Do u liên tục trên Ω nên u liên tục trên $\overline{B}$.

Nhận xét rằng định lý 2.6 có thể áp dụng cho quả cầu với tâm bất kì. Ta suy ra tồn tại hàm $h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ điều hòa trong B và $h = u$ trên ∂B.

Xét hàm $w = u - h$. Ta có w liên tục trên $\overline{B}$, hơn nữa w có tính chất giá trị trung bình trên mọi quả cầu $B_r(z) \subset\subset B$:

$$\begin{aligned} w(z) = u(z) - h(z) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(z)} u \, ds - \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(z)} h \, ds \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(z)} (u - h) \, ds = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(z)} w \, ds. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng việc chứng minh các kết quả trong phần nguyên lý cực đại và cực tiểu không nhất thiết sử dụng tính chất điều hòa của hàm số (và do đó hàm số không bắt buộc phải thuộc lớp $C^2(\Omega)$) mà chỉ sử dụng tính chất giá trị trung bình của nó.

Do $u = h$ trên ∂B nên $w = 0$ trên ∂B. Áp dụng định lý 2.3 cho hàm $w \in C^0(\overline{B})$ ta được $w = 0$ trong B, tức $u = h$ trong B. Mà h điều hòa trong B nên $\Delta u(y) = \Delta h(y) = 0$.

Vậy với mọi $y \in \Omega$ ta có $\Delta u(y) = 0$, hàm số u điều hòa trong Ω. ■

Như là hệ quả của định lý trên, ta có:

Định lý 2.8:

Cho $\{u_n\}$ là dãy các hàm điều hòa. Giả sử u_n hội tụ đều về u trên Ω. Khi đó u điều hòa.

Chứng minh:

Do u_n liên tục trên Ω với mọi n và dãy $\{u_n\}$ hội tụ đều về u nên u cũng liên tục trên Ω.

Xét một quả cầu $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$.

Cho $\epsilon > 0$, tồn tại N đủ lớn sao cho $\forall n > N: \ |u_n(x) - u(x)| < \epsilon$.

Khi đó

$$|\int_{\partial B} u_n \, ds - \int_{\partial B} u \, ds| \leq \int_{\partial B} |u_n - u| \, ds \leq \int_{\partial B} \epsilon \, ds = M\epsilon.$$

Vậy dãy $\{\int_{\partial B} u_n \, ds\}$ hội tụ về $\int_{\partial B} u \, ds$.

Do u_n điều hòa trong B nên $u_n(y) = \int_{\partial B} u_n \, ds$ với mọi n. Hơn nữa ta có dãy $\{u_n(y)\}$ hội tụ về $u(y)$ nên

$$u(y) = \lim_{n\to\infty} u_n(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u_n \, ds = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, ds.$$

Áp dụng định lý 2.7 ta được điều phải chứng minh. ■

Nhận xét

Ở định lý trên yêu cầu của bài toán là dãy hàm $\{u_n\}$ hội tụ đều trên Ω. Bằng cách sử dụng định lý 2.3, ta có thể sửa lại điều kiện của bài toán thành hội tụ đều trên biên, tức là:
Cho Ω liên thông, bị chặn, dãy hàm $\{u_n\} \subset C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ điều hòa trong Ω. Nếu $\{u_n\}$ hội tụ đều trên $\partial\Omega$ thì $\{u_n\}$ hội tụ đều trên $\overline{\Omega}$ tới một hàm điều hòa trong Ω.

Sử dụng định lý trên cùng với bất đẳng thức Harnack ta được **định lý hội tụ Harnack**:

Định lý 2.9:

Cho Ω liên thông và $\{u_n\}$ là một dãy những hàm điều hòa trong Ω. Giả sử rằng dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và tồn tại $y \in \Omega$ sao cho dãy $\{u_n\}(y)$ bị chặn. Khi đó tồn tại một hàm u điều hòa trong Ω sao cho trên mọi tập con liên thông, bị chặn $\Omega' \subset\subset \Omega$, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đều về u.

Chứng minh:

Cho $\epsilon > 0$.

Dãy $\{u_n(y)\}$ đơn điệu tăng, bị chặn nên

$$\exists N, \ \forall n > m > N: \ |u_n(y) - u_m(y)| < \epsilon.$$

Với $n > m > N$, áp dụng bất đẳng thức Harnack trên miền $\Omega' \cup \Gamma$ trong đó Γ là một đường trong Ω nối y với một điểm nào đó trong Ω', ta được:

$$\sup_{\Omega'\cup\Gamma}(u_n - u_m) \leq C \inf_{\Omega'\cup\Gamma}(u_n - u_m) \leq C(u_n(y) - u_m(y)) < C\epsilon$$

Do đó

$$\forall z \in \Omega' : \ 0 \leq (u_n(z) - u_m(z)) < C\epsilon. \quad (*)$$

Với mỗi $x \in \Omega$, nếu ta lấy $\Omega' = \{x\}$ thì từ (*) ta được $\{u_n(x)\}$ là dãy Cauchy, nên nó hội tụ. Lấy u là hàm trên Ω được xác định bởi

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

Ở (*), cho $n \to \infty$ ta được:

$$|u(z) - u_m(z)| \leq C\epsilon \ \forall z \in \Omega'.$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ hội tụ đều về u trong Ω'.

Với mỗi $x \in \Omega$, chọn $R > 0$ sao cho quả cầu $B = B_R(x) \subset\subset \Omega$. Ta có dãy $\{u_n\}$ hội tụ đều về u trong B. Áp dụng định lý 2.8 ta được u là một hàm điều hòa trong B, suy ra $\Delta u(x) = 0$.

Vậy u là hàm điều hòa trong Ω. ■

2.7. ƯỚC LƯỢNG ĐẠO HÀM

Trong phần này, bằng cách sử dụng định lý giá trị trung bình, ta sẽ ước lượng đạo hàm của những hàm điều hòa.

Cho u là một hàm điều hòa trong Ω và một quả cầu $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$. Chú ý rằng những hàm điều hòa trong Ω thì khả vi vô hạn lần trong Ω (xem phụ lục).

Vì

$$\Delta D_1 u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(D_1 u) = \sum_{i=1}^{n} D_1(D_{ii}u) = D_1(\sum_{i=1}^{n} D_{ii}u) = D_1(\Delta u) = 0$$

nên $\Delta D_1 u$ cũng là hàm điều hòa.

Áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm $D_1 u$ với quả cầu B, ta có:

$$D_1 u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B D_1 u \, ds = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u\nu_1 \, ds$$

ở đây ν_1 là thành phần thứ nhất của vectơ (đơn vị) pháp tuyến ngoài $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ dọc theo ∂B.

Tương tự, với mọi $i = \overline{2..n}$, ta cũng có:

$$D_i u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u\nu_i \, ds.$$

Từ đó ta có:

$$|Du(y)|^2 = \sum_{i=1}^{n} (D_i u(y))^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i u(y) \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u\nu_i \, ds = \frac{1}{\omega_n R^n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B} u\nu_i D_i u(y) \, ds.$$

Đồng thời do

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B} u\nu_i D_i u(y) \, ds &= \int_{\partial B} \sum_{i=1}^{n} u\nu_i D_i u(y) \, ds \\
&\leq \int_{\partial B} \sum_{i=1}^{n} |u\nu_i D_i u(y)| \, ds \\
&= \int_{\partial B} |u| \sum_{i=1}^{n} |\nu_i D_i u(y)| \, ds \\
&\leq \int_{\partial B} |u||Du(y)| \, ds \\
&\leq n\omega_n R^{n-1} |Du(y)| \sup_{\partial B} |u|
\end{aligned}$$

nên

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B} |u| \leq \frac{n}{R} \sup_{\Omega} |u|. \quad (*)$$

Đặt $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega)$.

Tồn tại $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ thỏa $|x-y| = \text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$. Nếu $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ thì tồn tại $r > 0$ sao cho $B_r(x) \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Khi đó mặt cầu $\partial B_r(x)$ cắt đoạn thẳng nối 2 điểm x, y tại một điểm z. Ta có $|y-z| < |x-z| = \text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ (vô lý).

Vậy $x \in \partial\Omega$, tức là $\text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = |x-y| \le \text{dist}(y, \partial\Omega)$.

Hơn nữa, do $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ nên $\text{dist}(y, \partial\Omega) \le \text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Tóm lại, ta đã chứng minh $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega) = \text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lúc này rõ ràng nếu $0 < R < d_y$ thì do $B_r(y) \subset \Omega$ với mọi $R < r < d_y$ nên $B_R(y) \subset\subset \Omega$.

Kết hợp với (*), ta được với mọi $0 < R < d_y$ thì $|Du(y)| \le \frac{n}{R} \sup\limits_{\Omega} |u|$.

Vậy

$$|Du(y)| \le \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u|$$

trong đó $d_y = \text{dist}(y, \partial\Omega)$.

Tổng quát hơn, ta có thể ước lượng được đạo hàm của hàm điều hòa với chỉ số bậc cao hơn. Cụ thể ta có định lý sau đây:

Định lý 2.10:

Cho u là hàm điều hòa trong Ω và Ω' là tập con compact của Ω. Khi đó với mọi chỉ số bậc α ta có:

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \le \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|$$

trong đó $d = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Chứng minh:

Ta chứng minh quy nạp theo $|\alpha|$ khẳng định rằng với $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ thì

$$|D^\alpha u(y)| \le \left(\frac{n|\alpha|}{R}\right)^{|\alpha|} \sup_{B} |u|$$

Trường hợp $|\alpha| = 1$ dễ dàng suy ra được từ (*).

Giả sử với $|\alpha| = k$ khẳng định đúng. Ta sẽ chứng minh khẳng định vẫn còn đúng với $|\alpha| = k+1$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $D^\alpha = D^\beta D_1$ trong đó $|\beta| = k$.

Áp dụng giả thiết quy nạp với hàm $D_1 u$, chỉ số bậc β và quả cầu $B_1 = B_{\frac{k}{k+1}R}(y)$, ta có

$$|D^\beta D_1 u(y)| \le \left(\frac{n|\beta|}{\frac{k}{k+1}R}\right)^{|\beta|} \sup_{B_1} |D_1 u|$$

Với mọi z nằm trong B_1, xét quả cầu $B_2 = B_{\frac{1}{k+1}R}(z)$, ta có $B_2 \subset B$ và

$$|D_1 u(z)| \leq \frac{n}{\frac{1}{k+1}R} \sup_{B_2} |u| \leq \frac{1}{k+1} R \sup_{B} |u|.$$

Kết hợp 2 kết quả trên ta được (chú ý rằng $k+1 = |\alpha| = |\beta| + 1$)

$$|D^\alpha u(y)| \leq (\frac{n|\alpha|}{R})^{|\alpha|} \sup_{B} |u|.$$

Vậy với mọi chỉ số bậc α, ta đều có với $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ thì

$$|D^\alpha u(y)| \leq (\frac{n|\alpha|}{R})^{|\alpha|} \sup_{B} |u|.$$

Do đó với $d_y = \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$ thì

$$|D^\alpha u(y)| \leq (\frac{n|\alpha|}{d_y})^{|\alpha|} \sup_{B} |u| \leq (\frac{n|\alpha|}{d_y})^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|.$$

Đặt $d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Với mọi $y \in \Omega'$, do $d \leq d_y$ nên

$$|D^\alpha u(y)| \leq (\frac{n|\alpha|}{d})^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|.$$

Vậy

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq (\frac{n|\alpha|}{d})^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|. \blacksquare$$

Ta bổ sung một số khái niệm sau:

*Cho F là một họ những hàm số từ X vào Y, với X, Y là 2 không gian metric. Khi đó ta nói F **liên tục đồng bậc tại** x_0 nếu như:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_{x_0,\epsilon} > 0,\ \forall x \in X:\ |x - x_0| < \delta_{x_0,\epsilon} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ \forall f \in F.$$

*Họ F được gọi là **liên tục đồng bậc** nếu nó liên tục đồng bậc tại mọi x.*
*Họ F được gọi là **liên tục đồng bậc đều** nếu như:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x, y \in X : |y - x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon\ \forall f \in F.$$

*Cho F là một họ những hàm số từ X vào Y, với X, Y là 2 không gian metric, X đầy đủ. Khi đó F được gọi là **họ chuẩn tắc** nếu như mọi dãy hàm trong F đều chứa một dãy con $\{f_n\}$, sao cho có tồn tại một hàm liên tục f từ X vào Y và trên những tập con compact của X, $\{f_n\}$*

hội tụ đều về f.

Bây giờ ta sẽ khảo sát tính đồng liên tục của đạo hàm của những hàm điều hòa. Cho Ω' là một tập con compact, liên thông của Ω và F là một họ những hàm điều hòa trong Ω. Giả sử F bị chặn đều, tức là

$$\exists C > 0,\ \forall f \in F : |f(x)| < C\ \forall x \in \Omega.$$

Lấy $u \in F$, đặt $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ và $K = \{x | \operatorname{dist}(x, \Omega') \leq \frac{d}{2}\}$.

Dễ thấy K compact và $K \subset \Omega$.

Với mọi $x \in \Omega'$, xét quả cầu $B = B_{\frac{d}{2}}(x)$. Với mọi $y \in B$, từ định lý giá trị trung gian cho hàm nhiều biến ta có

$$|u(y) - u(x)| \leq (\sup_B |Du|)|y - x|.$$

Với mọi $z \in K$, ta có

$$|Du(z)| \leq \frac{n}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)} \sup_\Omega |u| \leq \frac{n}{\frac{d}{2}} \sup_\Omega |u| \leq \frac{2n}{d} C.$$

Từ hai kết quả trên ta có

$$\forall y \in B : \ |u(y) - u(x)| \leq \frac{2nC}{d}|y - x|$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ rằng F *liên tục đồng bậc trên* Ω'.

Cho α là một chỉ số bậc, đặt $D^\alpha F = \{D^\alpha f | f \in F\}$. Lập luận tương tự như trên, ta cũng có được $D^\alpha F$ *liên tục đồng bậc trên* Ω'.

Không những thế, định lý 2.11 sau đây còn cho ta F là họ chuẩn tắc. Kết quả này sử dụng định lý sau đây (chứng minh có thể tham khảo định lý 14.1 cuốn *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels của Francois Treves*):

Định lý Arzela-Ascoli:

Cho X là tập con compact của $\mathbb{R}^N$ và $\{f_n\}$ là dãy các hàm từ X vào $\mathbb{R}$. Khi đó, nếu $\{f_n\}$ bị chặn đều và liên tục đồng bậc thì nó có một dãy con hội tụ đều trên X.

Định lý 2.11:

Cho Ω liên thông và $\{u_n\}$ là dãy hàm điều hòa trong Ω, $\{u_n\}$ bị chặn đều.
Khi đó tồn tại một dãy con của $\{u_n\}$ và một hàm điều hòa u thỏa: trên mọi tập con compact, liên thông của Ω dãy con đó hội tụ đều tới u.

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn rằng: tồn tại một dãy con của $\{u_n\}$ và một hàm điều hòa u thỏa: trên mọi tập con compact của Ω dãy con đó hội tụ đều tới u.

Lấy K là một tập con compact của Ω.

Kết quả đã chứng tỏ ở phần trước cho ta $\{u_n\}$ liên tục đồng bậc đều trên K.

Áp dụng định lý Arzela-Ascoli, ta có kết quả: với mọi tập con compact K của Ω, tồn tại một dãy con của $\{u_n\}$ hội tụ đều trên K. (*)

Với mọi $i \in \mathbb{N}$, đặt $G_i = x \in \Omega :\ \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{i}$. Ta có G_i là các tập đóng, lúc này đặt $K_i = \overline{B_i}(0) \cap G_i$. Dễ thấy $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset \Omega$.

Với mọi $x \in \Omega$, ta có $x \in G_k$ với k đủ lớn và $x \in \overline{B_t}(0)$ với t đủ lớn, nên $x \in K_m$ với m đủ lớn. Do đó $\cup K_i = \Omega$.

Vậy

$$K_1 \subset K_2 \subset ... \subset \Omega \text{ và } \cup K_i = \Omega.$$

Áp dụng (*) lần lượt, ta được:

Có một dãy con $\{u_{1n}\}$ của $\{u_n\}$ hội tụ đều trên K_1.

Có một dãy con $\{u_{2n}\}$ của $\{u_{1n}\}$ hội tụ đều trên K_2.

...

Xét dãy con $\{u_{kk}\}$ của $\{u_n\}$. Với mọi i, ta có dãy $\{u_{kk}\}_{k \geq i}$ là dãy con của dãy $\{u_{in}\}$ nên nó hội tụ đều trên K_i. Do đó dãy $\{u_{kk}\}$ hội tụ đều trên K_i với moi i.

Cho $K \subset \Omega$, K compact. Đặt $d = \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Do K compact nên $d > 0$, và tồn tại M đủ lớn để $\frac{1}{M} < d$. Khi đó $K \subset K_M$.

Vì $\{u_{kk}\}$ hội tụ đều trên K_M nên nó hội tụ đều trên K.

Định lý 2.8 chỉ ra sự tồn tại của hàm u. Ta có đpcm. ■

2.8. BÀI TOÁN DIRICHLET - PHƯƠNG PHÁP PERRON

Cho Ω là một tập mở, liên thông, bị chặn bất kì và φ là một hàm số liên tục xác định trên $\partial\Omega$, tìm hàm u sao cho $\Delta u = 0$ trên Ω và $u = \varphi$ trên $\partial\Omega$. Đây được gọi là bài toán Dirichlet cổ điển. Tính giải được của bài tóan Dirichlet cổ điển đã được Perron đã giải quyết hoàn chỉnh bằng cách sử dụng các hàm subharmonic.

Định nghĩa:

Một hàm $u \in C^0(\Omega)$ được gọi là subharmonic (superharmonic) trong Ω nếu với mọi $B(y,r) \subset\subset \Omega$ và với mọi $h \in C^0(\overline{B(y,r)}) \cap C^2(B(y,r))$ thỏa mãn:

(i) h harmonic trong $B(y,r)$.

(ii) $u \leq h$ $(u \geq h)$ trên $\partial B(y,r)$

Thì $u \leq h(u \geq h)$ trong B(y,r).

Mệnh đề 1:

Cho u là một hàm subharmonic (superharmonic) trên Ω khi đó với mọi quả cầu $B(y,r) \subset\subset \Omega$ ta có:

(1) $\quad u(y) \leq (\geq) \dfrac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x)$

(2) $\quad u(y) \leq (\geq) \dfrac{1}{\omega_n r^n} \displaystyle\int_{B(y,r)} u(x)dx$

Chứng minh:

• Chứng minh (1): Lấy $B(y,r) \subset\subset \Omega$ bất kì. Vì u liên tục trên $\partial B(y,r)$ nên theo định lí 2.6 tồn tại $h \in C^2(B(y,r)) \cap C^0(\overline{B(y,r)})$ thỏa mãn $\Delta h = 0$ trên $B(y,r)$ và $h(x) = u(x)$ trên $\partial B(y,r)$. Do u subharmonic và $u(x) \leq h(x)$ trên $\partial B(y,r)$ nên $u(x) \leq h(x)$ trong B(y,r). Suy ra:

$$u(y) \leq h(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} h(x)dS(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x)$$

• Chứng minh (2): Ta có:

$$\int_{B(y,r)} u(x)dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(y,s)} u(x)dS(x) \right) ds \geq \int_0^r n\omega_n s^{n-1} u(y)ds = n\omega_n u(y) \frac{s^n}{n}\Bigg|_{s=0}^{s=r} = \omega_n r^n u(y)$$

Từ đó suy ra (2). ■

Cùng với nhận xét sau chứng minh của Định lí 2.2, ta có:

Mệnh đề 2:

Cho $u \in C(\Omega)$ và thỏa mãn

$$u(y) \le (\ge) \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B(y,r)} u(x)dx, \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Giả sử tồn tại một điểm $y \in \Omega$ sao cho $u(y) = \sup_{\Omega} u (\inf_{\Omega} u)$ thì u là hằng số.

Mệnh đề 3: *Lấy $u \in C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn:*

$$u(y) \le (\ge) \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B(y,r)} u(x)dx, \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Nếu Ω bị chặn thì ta có:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u)$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 1, nếu u là một hàm subharmonic(superharmonic) trên Ω thì:

$$u(y) \le (\ge) \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B(y,r)} u(x)dx, \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Vì vậy ta có:

Mệnh đề 4:

Cho u là hàm subharmonic(superharmonic) trong Ω và giả sử tồn tại một điểm $y \in \Omega$ sao cho $u(y) = \sup_{\Omega} u (\inf_{\Omega} u)$ thì u là hàm hằng.

Mệnh đề 5:

Lấy $u \in C^0(\overline{\Omega})$ là một hàm subharmonic(superharmonic) trong Ω. Nếu Ω bị chặn thì ta có:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u)$$

Mệnh đề sau đây là chiều đảo của mệnh đề 1:

Mệnh đề 6:

Cho $u \in C^0(\Omega)$. Khi đó nếu

$$u(y) \le (\ge) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

thì u là subharmonic (superhamonic).

Chứng minh:

Lấy $B(y_0,R) \subset\subset \Omega$ bất kì, $h \in C^0(\overline{B(y_0,R)})$ là harmonic trong $B(y_0,R)$ và thỏa mãn $u \le h$ trên $\partial B(y_0,R)$. Ta cần chứng minh $u \le h$ trong $B(y_0,R)$.

Đặt $w = u - h$. Khi đó $\forall B(y,r) \subset\subset B(y_0,R)$ ta có:

$$u(y) \le \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x)$$

$$h(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} h(x)dS(x)$$

Suy ra

$$w(y) = u(y) - h(y) \le \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} w(x)dS(x)$$

Như vậy

$$w(y) \le \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} w(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset B(y_0,R)$$

Nhắc lại mệnh đề 3:

Lấy $w \in C(\overline{\ell})$ thỏa mãn:

$$w(y) \le \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B(y,r)} w(x)dx, \quad \forall B(y,r) \subset\subset \ell$$

Nếu ℓ bị chặn thì ta có: $\sup\limits_{\ell} w = \sup\limits_{\partial\ell} w$

Chọn $\ell = B(y_0,R)$, ta có:

$$\sup_{B(y_0,R)} \mathrm{w(y)} = \sup_{\partial \mathrm{B(y_0},R)} \mathrm{w(y)} = \sup_{\partial \mathrm{B(y_0},R)} (u(y) - h(y)) = 0$$

Vậy $w \le 0$ trên $B(y_0,R)$ hay $u \le h$ trên $B(y_0,R)$ (đpcm) ■

Từ mệnh đề 1 và mệnh đề 6 ta có:

Mệnh đề 7:

Cho $u \in C^0(\Omega)$. Khi đó u subharmonic(superharmonic) trên Ω nếu và chỉ nếu

$$u(y) \le (\ge) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Mệnh đề 8:

(i) Cho $u, v \in C^0(\Omega)$ và u, v subharmonic(superharmonic) trên Ω thì $u + v$ cũng subharmonic trên Ω.

(ii) u subharmonic thì λu subharmonic với mọi $\lambda > 0$

(iii) Cho $u_1, u_2, ..., u_n \in C^0(\Omega)$ và $u_1, u_2, ..., u_n$ subharmonic(superharmonic) trên Ω thì

$$u(x) = max\{u_1(x), ..., u_n(x)\}$$

cũng subharmonic trên Ω.

Chứng minh:

(i) Lấy u, v subharmonic ta chứng minh $u + v$ subharmonic, do mệnh đề 7 nên ta cần chứng minh:

$$(1) \quad (u+v)(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} (u+v)(x)dS(x), \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

u, v subharmonic nên theo mệnh đề 7 ta có:

$$(2) \quad u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

$$(3) \quad v(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} v(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Cộng (2) và (3) vế theo vế suy ra (1)

(ii) Lấy u subharmonic và $\lambda > 0$, chứng minh λu subharmonic.

Theo mệnh đề 7 ta cần chứng minh

$$(1) \quad \lambda u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} \lambda u(x)dS(x), \quad \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Vì u subharmonic nên theo mệnh đề 7 ta có:

$$(2) \quad u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)dS(x) \quad , \forall B(y,r) \subset\subset \Omega$$

Ta có (2) nên có (1)

(iii) Lấy $u_1, u_2, ..., u_n \in C^0(\Omega)$ và $u_1, u_2, ..., u_n$ subharmonic trên Ω. Đặt

$$(1) \quad u(x) = max\{u_1(x), ..., u_n(x)\}$$

Ta cần chứng minh u cũng subharmonic trên Ω.

Lấy $B(y,r) \subset\subset \Omega$ và $h \in C^0(\overline{B(y,r)}) \cap C^2(B(y,r))$ thỏa mãn:

(2) h harmonic trong $B(y,r)$.

(3) $u \leq h$ trên $\partial B(y,r)$

Ta cần chứng minh $u \leq h$ trong B(y,r).

Từ (1) và (3) suy ra $u_i(x) \leq h(x)$ trên $\partial B(y,r)$,$\forall i \in 1,...,n$. Vì các u_i sub harmonic cho nên: $u_i(x) \leq h(x)$ trên $B(y,r)$,$\forall i \in 1,...,n$.

Do đó $u(x) = max\{u_1(x),...,u_n(x)\} \leq h(x)$ trong B(y,r). ∎

(*Ghi chú: Ta cũng có thể dễ dàng chứng minh mệnh đề (iii) theo kiểu tích phân như (i),(ii))

Mệnh đề 9:

Cho Ω bị chận, $u, v \in C(\overline{\Omega})$ và u subharmonic, v superharmonic trong Ω, giả sử $v \geq u$ trên $\partial\Omega$. Khi đó hoặc $v > u$ trong Ω hoặc $v \equiv u$

Chứng minh:

• Trước hết ta chứng minh $-v$ subharmonic (1)

Lấy $B(y,r) \subset\subset \Omega$ và $h \in C^0(\overline{B(y,r)}) \cap C^2(B(y,r))$ thỏa mãn:

(2) h harmonic trong $B(y,r)$.

(3) $-v \leq h$ trên $\partial B(y,r)$

Ta cần chứng minh $-v \leq h$ trong B(y,r).

Thật vậy, từ (3) ta có $v \geq -h$ trên $\partial B(y,r)$, chú ý h harmonic thì $-h$ harmonic và do v superharmonic cho nên $v \geq -h$ trên $B(y,r)$ hay $-v \leq h$ trong B(y,r).

• Như vậy u và $-v$ subharmonic nên theo mệnh đề 8 suy ra $u - v$ subharmonic (4)

Áp dụng mệnh đề 5 ta có:

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\partial\Omega}(u - v) \leq 0$$

(do $u - v \leq 0$ trên $\partial\Omega$)

Như vậy $u \leq v$ trên Ω. Giả sử tồn tại $x_0 \in \Omega$ sao cho $v(x_0) = u(x_0)$ ta cần chứng minh $v \equiv u$ trên Ω. Thật vậy, vì $(u - v)(x_0) = \sup_{\Omega}(u - v) = 0$. do đó áp dụng mệnh đề 4 thì $u - v$ phải là hàm hằng trên Ω. Suy ra $u - v \equiv (u - v)(x_0) \equiv 0$ ∎

Mệnh đề 10:

Cho u là hàm subharmonic trên Ω và quả cầu $B \subset\subset \Omega$. Kí hiệu $\overline{u}$ là hàm điều hòa trong B (cho bởi tích phân Poisson của u trên ∂B) thỏa mãn $\overline{u} = u$ trên ∂B

Chúng ta định nghĩa trong Ω hàm harmonic lifting của u như sau:

$$(1) \quad U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & \forall x \in B \\ u(x), & \forall x \in \Omega \backslash B \end{cases}$$

Khi đó U là hàm subharmonic trong Ω và $u \leq U$ trong Ω.

Chứng minh:

• Do $\overline{u} \in C^0(\overline{B})$,$u \in C^0(\Omega)$ và $\overline{u} = u$ trên ∂B nên $U \in C^0(\Omega)$

• Ta chứng minh $u \leq U$ trong Ω, thật vậy do $\overline{u}$ điều hòa trong B, $u = \overline{u}$ trên ∂B và u subharmonic nên $u \leq \overline{u}$ trong B. Suy ra $u \leq U$ trong Ω

• Ta chứng minh U là hàm subharmonic

Xét một quả cầu tùy ý $B' \subset\subset \Omega$ và h là một hàm điều hòa trong B' sao cho $U \leq h$ trên $\partial B'$. Ta cần chứng minh $U \leq h$ trong B'.

Do $u \leq U$ trong Ω nên $u \leq h$ trên ∂B, mà u subharmonic nên $u \leq h$ trong B', kết hợp điều này với (1) ta có $U \leq h$ trong $B' \backslash B$ (2)

Vì $\partial(B \cap B') \subset \partial B' \cup (B'/B)$ nên suy ra $U \leq h$ trên $\partial(B \cap B')$

Đặt $w = U - h$ thì w harmonic trong $B' \cap B$ và $w \leq 0$ trong trên $\partial(B' \cap B)$ do đó $w \leq 0$ trong $B' \cap B$ (nguyên tắc cực đại) (3)

Từ (2) và (3) suy ra $U \leq h$ trong B' (đpcm) ■

Định nghĩa:

Lấy Ω là tập mở, liên thông, bị chặn trong R^n và ϕ là một hàm số bị chặn trên $\partial\Omega$. Một hàm subharmonic $u \in C^0(\overline{\Omega})$ được gọi là subfunction theo ϕ nếu $u \leq \phi$ trên $\partial\Omega$.

Kí hiệu S_ϕ là tập hợp tất cả các subfunction theo ϕ. Sau đây là kết quả cơ bản trong phương pháp của Perron:

Định lí 2.12:

Đặt $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\phi} v(x), \forall x \in \overline{\Omega}$. Khi đó u điều hòa trong Ω

Chứng minh:

• Lấy $x \in \overline{\Omega}$ bất kì, ta luôn có $v(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} v \leq \sup\limits_{\partial\Omega} \phi, \forall v \in S_\phi$, do đó hàm u xác định trên Ω. (dấu "$\leq$" thứ nhất là do v harmonic trong Ω, dấu "$\leq$" thứ hai là do $v \leq \phi$ trong $\partial\Omega$)

• Lấy y bất kì trong Ω , do định nghĩa hàm u nên tồn tại một dãy $\{v_n\} \subset S_\phi$ sao cho $v_n(y)$ hội tụ về $v(y)$ (1)

Lấy R sao cho $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$. Ta luôn có thể giả sử $\{v_n\}$ là một dãy hàm điều hòa, bị chặn trong B. Thủ thuật như sau:

* Chú ý $v = \inf_{\partial\Omega} \phi$ là hàm hằng nên $v \in S_\phi$ do vậy $max\{v_n, v\} \in S_\phi$. Ta có $v_n \le max\{v_n, v\} \le u$. Do (1) nên theo định lí kẹp ta có $max\{v_n(y), v(y)\}$ hội tụ về $u(y)$. Vì vậy bằng việc thế chỗ v_n bởi $max\{v_n(y), v(y)\}$ ta luôn có thể giả sử $\inf_{\partial\Omega} \phi \le v_n \le \sup_{\partial\Omega} \phi, \forall n.$ (2)

* Định nghĩa V_n là harmonic lifting của u trong B khi đó V_n harmonic trong Ω và $V_n \le \phi$ trên $\partial\Omega$ (do $V_n = v_n$ trên $\partial\Omega$ và $v_n \le \phi$ trên $\partial\Omega$). Vậy $V_n \in S_\phi$. Mặt khác:

$$V_n(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B} V_n(z) dS_z = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B} v_n(z) dS_z \ge v_n(y)$$

Vậy $v_n(y) \le V_n(y) \le u(y)$ kết hợp điều này với (1) suy ra $V_n(y)$ hội tụ về $u(y)$. Hơn nữa V_n điều hòa trong B nên $\inf_{\partial B} V_n \le V_n(x) \le \sup_{\partial B} V_n, \forall x \in B$, lại có $\inf_{\partial B} V_n = \inf_{\partial B} v_n \ge \inf_{\partial\Omega} \phi$ và $\sup_{\partial B} V_n = \sup_{\partial B} v_n \le \sup_{\partial\Omega} \phi$ suy ra $\inf_{\partial B} \phi \le V_n(x) \le \sup_{\partial B} \phi, \forall x \in B.$

Như vậy bằng việc thay thế dãy $\{v_n\}$ bởi dãy $\{V_n\}$ ta luôn có thể giả sử $\{v_n\}$ là một dãy hàm điều hòa và bị chặn trong B.

• $\{v_n\}$ là một dãy hàm điều hòa và bị chặn trong B do đó theo định lí 2.11 luôn tồn tại $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ hội tụ đều trong một quả cầu $B_1 = B_r(y)$ với $0 < r < R$ đến một hàm điều hòa v trong B. Kết hợp điều này với $v_n \le u, \forall n$ và $v_n(y)$ hội tụ về u(y) suy ra $v \le u$ trong B_1 và $v(y) = u(y)$ (3)

Để chứng minh u điều hòa trong Ω ta chỉ cần chứng minh $u = v$ trong B_1 là xong.

Giả sử ngược lại, tức có một $z \in B_1$ sao cho $v(z) < u(z)$ khi đó tồn tại $\overline{u} \in S_\phi$ sao cho $v(z) < \overline{u}(z) \le u(z)$.

Định nghĩa $w_k = max\{\overline{u}, v_{n_k}\} \in S_\phi$ và W_k là harmonic lifting của w_k trong B_1. Ta có $W_k \in S_\phi$ và $v_{n_k} \le w_k \le W_k \le u, \forall k.$ trong B_1 (4)

Từ (4) suy ra W_k bị chặn trong B_1 (bị chặn dưới bởi $\inf_{\partial\Omega} \varphi$, bị chặn trên bởi $\sup_{\partial\Omega} \varphi$). Như vậy W_k là hàm điều hòa, bị chặn trong B_1 nên theo định lí 2.11 tồn tại một dãy con W_{k_l} hội tụ đều trong $B_2 = B_s(y)$ (với $|y - s| < s < r$) đến một hàm điều hòa w trong B_1. Do (4) nên $v \le w \le u$ trong B_2 (5)

Từ (3) và (5) suy ra $v(y) = w(y) = u(y)$. Như vậy v-w là hàm điều hòa trong B_2 (do v và w đều điều hòa), có $v - w \le 0$ trong B_2 (do (5)) và $(v - w)(y) = 0$ do đó theo nguyên lí cực đại mạnh ta có $v = w$ trong B_2. Nói riêng ta có: $v(z) = w(z)$ (6).

Mặt khác ta lại có $W_k \ge w_k \ge \overline{u}, \forall k$ (trong B_1) nên $w \ge \overline{u}$ trong B_2 , suy ra $w(z) \ge \overline{u}(z) > v(z)$ (mâu thuẫn (6)). ■

Nhận xét:

Nếu bài toán Dirichlet giải được thì lời giải của nó phải trùng với lời giải của Perron. Nói rõ hơn, Cho Ω là một tập mở, liên thông, bị chặn trong R^n và ϕ là hàm số liên tục trên $\partial\Omega$ khi đó nếu $w \in C^0(\overline{\Omega})$, $\Delta \mathrm{w} = 0$ trong Ω, và $w = \phi$ trên $\partial\Omega$ thì $w = u$ trong $\overline{\Omega}$ (trong đó $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\phi} v(x), \forall x \in \overline{\Omega}$). Thật vậy, rõ ràng $w \in S_\phi$ nên $w \le u$ trong $\overline{\Omega}$, mặt khác, theo nguyên lí cực đại thì với mọi $v \in \Omega$ ta luôn có $(v - w)(x) \le \sup\limits_{\partial\Omega}(v - \mathrm{w}) = \sup\limits_{\partial\Omega}(v - \phi) \le 0, \forall \mathrm{x} \in \overline{\Omega}$, suy ra $w \ge v$ trong $\overline{\Omega}, \forall v \in S_\phi$, hay $w \ge u$ trong $\overline{\Omega}$. Vậy w=u trong $\overline{\Omega}$.

<u>Định nghĩa:</u>

(a) *Cho ξ là một điểm thuộc $\partial\Omega$. Khi đó hàm $w = w_\xi \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ được gọi là một barrier tại ξ liên hệ với Ω nếu thoả mãn hai điều kiện sau:*

(i) w là superharmonic trong Ω

(ii) $w > 0$ trong $\overline{\Omega} \backslash \xi$, $w(\xi) = 0$.

(b) *$\xi \in \partial\Omega$ được gọi là regular nếu tồn tại một barrier w tại điểm đó.*

Khái niệm barrier có tính chất địa phương, điều đó được thể hiện qua mệnh đề sau đây:

<u>Mệnh đề:</u>

Lấy w là một local barrier tại $\xi \in \partial\Omega$, nghĩa là tồn tại một lân cận N của ξ sao cho w là một barrier tại ξ ứng với $\Omega \cap N$. Chọn $B = B_r(\xi) \subset\subset N$ sao cho $\overline{N \cap \Omega} \backslash B \ne \emptyset$. Đặt: $m = \inf\limits_{\overline{N \cap \Omega} \backslash B} \mathrm{w}$.

Đặt:

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)) & , x \in \overline{\Omega} \cap B \\ m & , x \in \overline{\Omega} \backslash B \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\overline{w}$ là một barrier của ξ liên hệ với Ω .

Chứng minh:

- Trước hết ta chứng minh có $B = B_r(\xi) \subset\subset N$ sao cho $\overline{N \cap \Omega} \backslash B \ne \emptyset$, thực vậy do $\xi \in \partial\Omega$ và N là lân cận của ξ nên tồn tại $x \in \Omega$ và $x \in N$. Chọn $B = B_r(\xi)$ với $0 < r < |x - \xi|$. Ta có $x \in \overline{N \cap \Omega} \backslash B$ nên $\overline{N \cap \Omega} \backslash B \ne \emptyset$
- Với B được chọn như trên ta chứng minh

$$m = \inf_{\overline{N \cap \Omega} \backslash B} \mathrm{w} > 0. \quad (1)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại $m = \inf\limits_{\overline{N \cap \Omega} \backslash B} \mathrm{w} = 0$ khi đó tồn tại $\{x_n\} \subset \overline{\Omega \cap N} \backslash B$ sao cho $w(x_n)$ hội tụ về 0. Do $\overline{\Omega \cap N} \backslash B$ đóng và bị chặn trong R^n nên compact nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x \in \overline{\Omega \cap N} \backslash B$. Từ đây ta suy ra $w(x) = 0$ (mâu thuẫn w(y) $> 0, \forall y \in \overline{N \cap \Omega} \backslash \xi$)

• Chú ý $\overline{\Omega} \cap B \subset \overline{\Omega \cap B} \subset \overline{\Omega \cap N}$ nên $\overline{w}$ xác định trên $\overline{\Omega}$

• Để chứng minh $\overline{w}$ là một barrier của ξ liên hệ với Ω, ta cần chứng minh những điều sau đây:

(i) $\overline{\mathrm{w}} \in C^0(\overline{\Omega})$

(ii) $\overline{w}$ superharrmonic trong Ω

(iii) $\overline{w} > 0$ trong $\Omega \backslash \xi$ và $\overline{w}(\xi) = 0$

∗ Chứng minh (i):

Ta sử dụng tính chất sau: Nếu A,B đóng và f liên tục trên A,B thì f liên tục trên $A \cup B$. Do đó để chứng minh $\overline{w}$ liên tục trên $\overline{\Omega}$ ta chỉ cần chứng minh $\overline{w}$ liên tục trên $\overline{\Omega \cap B}$ và $\overline{w}$ liên tục trên $\overline{\Omega} \backslash B$ là xong.

Vì $\overline{w}$ là hàm hằng trên $\overline{\Omega} \backslash B$ nên liên tục trên $\overline{\Omega} \backslash B$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\overline{w}$ liên tục trên $\overline{\Omega \cap B}$. Lấy $x \in \overline{\Omega \cap B}$ cần chứng minh $\overline{w}$ liên tục tại x. Ta chia làm hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: $x \in \overline{\Omega} \cap B$, lấy $\{x_n\} \in \overline{\Omega \cap B}$ và $\{x_n\}$ hội tụ về x. Chứng minh $\overline{w}(x_n)$ hội tụ về $\overline{w}(x)$. Thật vậy, do $x \in B$ và B mở nên có $B_r(x) \subset B$, Vì $\{x_n\}$ hội tụ về x nên tồn tại N sao cho $x_n \in B_r(x), \forall n \geq N$. Như vậy $x_n \in \overline{\Omega} \cap B, \forall n \geq N$ và x_n hội tụ về $x \in \overline{\Omega} \cap B$ suy ra $\overline{w}(x_n)$ hội tụ về $\overline{w}(x)$ (do $\overline{w}$ liên tục trên $\overline{\Omega} \cap B$)

+ Trường hợp 2: Nếu $x \in \overline{\Omega \cap B} / (\overline{\Omega} \cap B)$. Lấy $\varepsilon > 0$ tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|\overline{\mathrm{w}}(\mathrm{y}) - \overline{\mathrm{w}}(\mathrm{x})| < \varepsilon, \forall y \in \overline{\Omega \cap B} : |y - x| < \delta(\varepsilon)$$

Nếu $y \in \overline{\Omega} \backslash B$ thì $|\overline{\mathrm{w}}(\mathrm{y}) - \overline{\mathrm{w}}(\mathrm{x})| = 0 < \varepsilon$.

Nếu $y \in \overline{\Omega} \cap B$ thì

$$|\overline{\mathrm{w}}(x) - \overline{\mathrm{w}}(y)| = |m - \overline{\mathrm{w}}(y)| = m - \min(m, \mathrm{w(y)} = \max\{0, \mathrm{m} - \mathrm{w(y)}\} \leq \max\{0, \mathrm{w(x)} - \mathrm{w(y)}\}$$

Vì w liên tục trên $\overline{\Omega \cap \mathrm{B}}$ nên tồn tại $\delta'(\varepsilon)$ sao cho

$$|\mathrm{w(x)} - \mathrm{w(y)}| < \varepsilon, \forall y \in \overline{\Omega \cap B} : |y - x| < \delta'(\varepsilon)$$

Chọn $\delta(\varepsilon) = \delta'(\varepsilon)$.

∗ Chứng minh (ii) :

Xét một quả cầu tùy ý $B' \subset\subset \Omega$ và một hàm $h \in C^0(B') \cap C^2(B')$ điều hòa trong B' sao cho $\overline{\mathrm{w}} \geq h$ trên $\partial B'$. Ta cần chứng minh $\overline{\mathrm{w}} \geq h$ trong B'. Thật vậy:

Vì $\overline{\mathrm{w}} \leq m$ trong Ω cho nên $h \leq m$ trên $\partial B'$. Do đó theo nguyên lí cực đại thì $h \leq m$ trong B'. Suy ra $h \leq \overline{w}$ trong $B' \backslash B$ (2)

Vì $\partial(B' \cap B) \subset \partial B' \cup (B' \backslash B)$ nên suy ra $h \leq \overline{w}$ trên $\partial(B' \cap B)$, trong $B' \cap B$ ta có m, w là superharmonic trong $B' \cap B$ nên $\overline{w} = \min(m, w)$ cũng superharrmonic trong $B' \cap B$ do đó theo nguyên lí cực đại thì $h \leq \overline{w}$ trong $B' \cap B$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\overline{\mathrm{w}} \geq h$ trong B' (đpcm)

$*$ Chứng minh (iii):

Do $m > 0$, $w > 0$ trong $\overline{\Omega} \cap B/\xi$ và $w(\xi) = 0$ nên theo định nghĩa của $\overline{w}$ ta suy ra $\overline{w} > 0$ trong $\Omega \backslash \xi$ và $\overline{w}(\xi) = 0$. ■

Bổ đề 2.13:

Cho u là một hàm điều hòa định nghĩa trong Ω bởi phương pháp Perron (định lý 2.12): $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v$.

Nếu ξ là một điểm biên regular của Ω và φ liên tục tại ξ thì $u(x) \to \varphi(\xi)$ khi $x \to \xi$.

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Do φ bị chặn nên có $M = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} |\varphi|$ (**1**).

Ta có φ liên tục tại ξ nên $\exists \delta > 0$ sao cho $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$,$\forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| < \delta$ (2)

ξ là điểm biên regular nên tồn tại một barrier w tại ξ . Theo định nghĩa:

•$w \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ là superharmonic (3)

•$w > 0$ trong $\overline{\Omega} \backslash \xi$ (4)

•$w(\xi) = 0$ (5)

Chú ý $\min\limits_{x \in \overline{\Omega} \backslash B(\xi,\delta)} w(x) > 0$ nên tồn tại k đủ lớn ($k = \frac{2M}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega} \backslash B(\xi,\delta)} w(x)}$) sao cho

$$kw(x) \geq k. \min_{x \in \overline{\Omega} \backslash B(\xi,\delta)} w(x) \geq 2M, \quad \forall |x - \xi| \geq \delta \quad (6)$$

Đặt

$$f(x) = \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

$$g(x) = \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x)$$

Ta có $f, g \in C^0(\Omega)$ tương ứng là các hàm superharmonic và subharmonic. (7).

Hơn nữa, vì (2) nên

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \leq \varepsilon + kw(x) \forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| < \delta$$

Vì (1) và (6) nên

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq 2M \leq k\text{w(x)}, \forall \text{x} \in \partial\Omega\text{: } |\text{x}-\xi| \geq \delta$$

Do đó:

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + k\text{w(x)}, \forall \text{x} \in \partial\Omega \quad \mathbf{(8)}$$

Từ (8) suy ra:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - k\text{w(x)} \leq \varphi(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + k\text{w(x)}, \forall \text{x} \in \partial\Omega$$

Hay $g \leq \varphi \leq f$ trên $\partial\Omega$ (9)

Từ (7) và (9) suy ra f, g tương ứng là các superfunction và subfunction theo φ (10)

Ta có nhận xét: Một hàm g subfunction theo ϕ trên Ω luôn bé hơn hoặc bằng một hàm f superfunction theo ϕ trên Ω. Thật vậy theo định nghĩa ta có $g \leq \phi \leq f$ trên $\partial\Omega$, lưu ý $g - f$ subharmonic nên $g - f \leq \sup\limits_{\partial\Omega}(g - f) \leq 0$ trên Ω (nguyên lí cực đại)

Kết hợp nhận xét trên với (9) và định nghĩa của u suy ra $g \leq u \leq f$ trong Ω. Viết rõ ra là:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - k\text{w(x)} \leq \text{u(x)} \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + \text{kw(x)}$$

trong Ω, hay

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x), \forall x \in \overline{\Omega}$$

Mặt khác, do (3),(5) thì $w(x) \to w(\xi) = 0$ khi $x \to \xi$ cho nên tồn tại một $\delta' > 0$ sao cho $|kw(x)| < \varepsilon$ khi $x \in \overline{\Omega}, |x - \xi| < \delta'$. Suy ra $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq 2\varepsilon, \forall x \in \Omega : |x - \xi| < \delta'$. Vậy $u(x) \to \varphi(\xi)$ khi $x \to \xi$ ■

Định lý 2.14:

Bài toán Dirichlet cho miền mở, liên thông, bị chặn có nghiệm với mọi hàm giá trị biên liên tục khi và chỉ khi mọi điểm biên đều regular.

Chứng minh:

Nếu mọi điểm biên đều regular và hàm giá trị biên liên tục thì theo định lý 2.12 và bổ đề 2.13, tồn tại một hàm điều hòa thỏa mãn bài toán điều kiện biên.

Giả sử ngược lại, bài toán Dirichlet trên miền mở, liên thông, bị chặn Ω luôn có nghiệm với mọi hàm giá trị biên liên tục.

Khi đó, xét điểm ξ thuộc $\partial\Omega$ bất kì, xét hàm $\varphi(x) = |x - \xi|$, ta có φ là hàm liên tục trên $\partial\Omega$.

Giả sử u là nghiệm của bài toán Dirichlet với giá trị biên φ khi đó theo nguyên lý cực đại(chú ý là ta giả thiết Ω liên thông), ta có u luôn dương trên Ω và do đó ta có u là barrier tại ξ theo Ω. ■

Vấn đề là đối với một miền Ω cho trước, ta tìm một điều kiện cần để điểm biên ξ là điểm regular.

Ta xét trường hợp không gian R^2, tập mở liên thông, bị chặn Ω và điểm biên z_0. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $z_0 = 0$ và xét các tọa độ cực r, θ.

Giả sử rằng tồn tại một lân cận N của z_0 sao cho tồn tại một nhánh đơn trị của θ xác định liên tục trên $\overline{N \cap \Omega} \backslash \{z_0\}$.

Khi đó ta biết rằng hàm $\frac{1}{\log z}$ khả vi trên $N \cap \Omega$ nên hàm

$$w = -Re\frac{1}{\log z} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

là hàm điều hòa trên $N \cap \Omega$.

Giả sử thêm rằng N nằm trong $B(z_0, 1)$, lúc đó w luôn không âm.

Ta còn có w liên tục trên $\overline{N \cap \Omega} \backslash \{z_0\}$, ta chỉ còn phải chứng minh w liên tục tại z_0(tại đó ta xác định w bằng 0).

Ta cần chứng minh

$$\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2} \to 0$$

khi $r \to 0$ và θ bị chặn.

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{\log r + \frac{\theta^2}{\log r}} \to 0$$

(đúng)

Vậy w đúng là barrier tại z_0.

Ngoài ra nếu tồn tại một tập con A của $N \cap \Omega$ sao cho z_0 là điểm biên của A, và $N \cap \Omega \backslash A = B$ thỏa mãn $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ (chú ý bao đóng được lấy trong R^n), và tồn tại một nhánh đơn trị của θ xác định liên tục trên $\overline{A} \backslash \{z_0\}$.

Khi đó, theo trên ta đã xác định được w trên A, còn trên tập B ta chỉ cần định nghĩa w = 1.

Xét trường hợp không gian R^n với $n \geq 2$, nếu điểm ξ thuộc biên của Ω thỏa mãn the exterior sphere condition, tức là tồn tại một quả cầu $B = B(y, r)$ thỏa mãn $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \xi$ thì ξ là điểm regular, với hàm barrier được cho bởi

$$w(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & \text{n} \geq 3 \\ \log \frac{|x-y|}{R} & \text{n} = 2 \end{cases}$$

Thực vậy, ta thấy theo kết quả trong quá trình tìm lời giải cơ bản của phương trình Laplace, thì hàm

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x-y|^{2-n} & \text{n} \geq 3 \\ \log \frac{|x-y|}{R} & \text{n} = 2 \end{cases}$$

là hàm điều hòa trên $R^n \backslash \{\text{y}\}$, nên hàm ω điều hòa trên Ω.

Các điều kiện khác của barrier được kiểm chứng dễ dàng.

Định lý 2.15:

Lấy Ω là một tập mở, bị chặn, liên thông có biên trơn trong R^N ($N \geq 3$). Khi đó tồn tại duy nhất một hàm điều hòa u trên $R^N \backslash \overline{\Omega}$ sao cho u bằng 1 trên biên của Ω và tiến về 0 khi $x \to \infty$.

Chứng minh:

Trước tiên ta chứng minh sự tồn tại của hàm u.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \in \Omega$ và $\Omega \subset\subset B(0, R)$.

Với mọi $n \geq R$ theo định lý 2.14 tồn tại một hàm điều hòa u_n trên $\Omega_n = B(0,n) \backslash \overline{\Omega}$ sao cho u = 1 trên $\partial\Omega$ và u = 0 trên $\partial B(0, n)$.

Đặt $a = -\Gamma(R)$ thì với mọi x thuộc $\partial\Omega$ ta có

$$u_n(x) = 1 = -\frac{1}{a}\Gamma(R) < -\frac{1}{a}\Gamma(x)$$

và với mọi x thuộc $\partial B(0, n)$

$$u_n(x) = 0 < -\frac{1}{a}\Gamma(x)$$

Do đó theo nguyên lý cực đại, $u_n < -\frac{1}{a}\Gamma$ trên Ω_n.

Ngoài ra cũng do nguyên lý cực đại, $0 \leq u_n \leq 1$ với mọi n.

Với mỗi n đủ lớn, ta xét dãy bị chặn $(u_m \chi_{\Omega_n})_{m=n}^{\infty}$, theo định lý 2.11 tồn tại một dãy con $(u_{n_k} \chi_{\Omega_k})_{k=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên mọi tập con compact mạnh của Ω_n về hàm điều hòa u xác định trên Ω_n.

Bằng kĩ thuật trích dãy con liên tục và lấy dãy đường chéo, ta xây dựng được một dãy con đặt là $(u_{0_k})_{k=1}^{\infty}$ của dãy u_n hội tụ điểm về hàm điều hòa u trên $R^N \backslash \overline{\Omega}$.

Theo trên ta có $u \leq -\frac{1}{a}\Gamma$ trên $R^N \backslash \Omega$.

Do đó $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0$

Đặt u bằng 1 trên $\partial\Omega$.

Ta còn phải chứng minh u thuộc $C(\overline{R^n \backslash \Omega})$.

Quan sát giá trị trên biên Ω_n của u_n và u_m với n < m ta suy ra $u_n < u_m$ trên Ω_n .

Với mọi x thuộc $\partial\Omega$ vì u_{0_1} thuộc $C(\overline{\Omega_n})$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi y thuộc $y \in B(x, \delta) \cap \Omega_n$ ta có

$$|u_{0_1}(y) - u_{0_1}(x)| < \varepsilon$$

hay $1 - \varepsilon < u_{0_1}(y) \leq 1$

Do dãy $(u_{0_k})_{k=1}^{\infty}$ là dãy tăng, ta có

$$1 - \varepsilon < u_{0_1}(y) \leq u(y)$$

và do $u_{0_k}(y) \leq 1$ với mọi k nên

$$u(y) \leq 1.$$

Vậy ta có với mọi y thuộc $y \in B(x,\delta) \cap \Omega_n$ thì $|u(y) - 1| < \varepsilon$.

Vậy ta đã chứng minh được sự tồn tại của hàm u.

Ta chứng minh rằng với giả thiết như trên, tồn tại duy nhất hàm u thỏa điều kiện.

Thật vậy giả sử tồn tại hai hàm u, $\overline{u}$ cùng điều hòa trên $R^N \backslash \overline{\Omega}$ sao cho u, $\overline{u}$ bằng 1 trên biên của Ω và u, $\overline{u}$tiến về 0 khi $x \to \infty$.

Đặt g = u - $\overline{u}$, khi đó ta có g = 0 trên $\partial\Omega$ và tiến về 0 khi $x \to \infty$.

Với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại n sao cho với mọi x nằm ngoài B(0, R), thì

$$|g(x)| < \varepsilon$$

Do đó, với mọi x thuộc $\partial\Omega_m$ với mọi m > n thì

$$|g(x)| < \varepsilon$$

Vậy $|g| < \varepsilon$ trên Ω_m.

Vậy $|g| < \varepsilon$ trên $R^n \backslash \Omega$ với mọi ϵ nên g = 0.

Ta có điều cần chứng minh.■

Ta định nghĩa capacity của Ω như sau

$$cap\Omega = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} ds = \int\limits_{R^n \backslash \Omega} |Du|^2 dx$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ hai là đúng, tức là

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} ds = \int\limits_{R^n \backslash \Omega} |Du|^2 dx$$

Đầu tiên, ta công nhận rằng nếu biên của Ω là trơn thì hàm u xác định như trên thuộc $C^2(\overline{R^n \backslash \Omega})$.

Khi đó với mọi n đủ lớn áp dụng định lý Green cho miền $\Omega_n = B(0,n) \backslash \overline{\Omega}$ ta được

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial\Omega_n} u \tfrac{\partial u}{\partial \upsilon} ds = \int\limits_{\Omega_n} div(Du.u) dx = \int\limits_{\Omega_n} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_i} u \right) dx \\ &= \int\limits_{\Omega_n} \left(\Delta u.u + |Du|^2 \right) dx = \int\limits_{\Omega_n} |Du|^2 \, dx \end{aligned}$$

Hay
$$\int\limits_{\partial B_n} u\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds - \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds = \int\limits_{\Omega_n} |Du|^2\,dx$$

Mặt khác ta có
$$\int\limits_{\Omega_n} |Du|^2\,dx \to \int\limits_{R^N\backslash\Omega} |Du|^2\,dx$$
khi n tiến ra vô cùng theo định lý hội tụ đơn điệu.

Do đó nếu ta chứng minh được
$$\int\limits_{\partial B_n} u\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds \to 0$$
khi n tiến ra vô cùng thì ta sẽ có đẳng thức cần chứng minh hay
$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds = \int\limits_{R^n\backslash\Omega} |Du|^2dx$$

Thật vậy, ta có
$$\left|\int\limits_{\partial B_n} u\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds\right| \le N\alpha(N)n^{N-1}\sup_{\partial B_n}|Du.u| = I$$

Nhắc lại rằng ta đã có $0 \le u(x) \le c\Gamma(x) = C|x|^{2-N}$ với mọi $x \in \Omega^c$.

Do vậy áp dụng định lý 2.10 với n đủ lớn sao cho n > 2R ($\Omega \in B(0,R)$) ta thấy u là hàm điều hòa trên $A_n = B_{3n/2}\backslash B_{n/2}$, nên với mọi x thuộc ∂B_n, ta có
$$|u(x)|\,|Du(x)| \le |u(x)|\frac{2N}{n}\sup_{A_n}|u| \le \frac{2N}{n}\frac{C}{|x|^{N-2}}\frac{C}{(n/2)^{N-2}} = \frac{2^{N-1}NC^2}{n^{N-1}n^{N-2}}$$

Do đó
$$I \le \frac{2^{N-1}N^2C^2\alpha(N)}{n^{N-2}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Ta đã chứng minh xong.■

Nhận xét là với mọi Σ là mặt trơn đóng bao phủ Ω thì áp dụng định lý Green cho miền D bao phủ bởi Σ và Ω ta có
$$\int\limits_{D} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds = \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds = \int\limits_{\Omega_n} \Delta u dx = 0$$

Vậy ta cũng có
$$-\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds = \int\limits_{R^N\backslash\Omega} |Du|^2\,dx.$$

PHỤ LỤC

Phần này trình bày một kết quả đã được sử dụng ở mục 2.7: tính khả vi vô hạn lần của một hàm số thỏa mãn định lý giá trị trung bình.

Định lý:

Giả sử Ω là một tập mở bị chặn. Nếu u là hàm số liên tục trên Ω thỏa mãn với mọi quả cầu $B(y,R) \subset\subset \Omega$ ta có

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B} uds,$$

thì u khả vi vô hạn lần trên Ω.

Chứng minh:

Trước hết ta nhắc lại một số kết quả về tích chập(có thể tham khảo thêm trong quyển "Giải tích hàm lý thuyết và ứng dụng" của Brezis).

Xét hàm p cho bởi

$$p(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| > 1, \\ 0 & |x| \leq 1, \end{cases} \tag{4}$$

trong đó C là hằng số sao cho $\int\limits_{R^n} p = 1$.

Đặt $p_k(x) = k^n p(kx)$.

Ta có những tính chất sau:

i) p khả vi vô hạn lần trên R^n và do đó p_k cũng vậy.

ii) $Supp(p_k) \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

Đó là vì $Supp(p) \subset B\left(0,1\right)$ mà $p_k(x) = k^n p(kx)$.

iii) $p_k(x) \geq 0 \qquad \forall x \in R^n$.

iv) p là hàm chỉ phụ thuộc vào chuẩn x.

__Bổ đề:__ Nếu $f \in C_c^\infty(R^n)$ và $g \in L^1_{loc}(R^n)$ thì $f * g \in C^\infty(R^n)$.

Trở lại chứng minh định lý, trước tiên giả sử rằng u thuộc $C(\bar{\Omega})$, bằng cách mở rộng hiển nhiên u lên R^n (u $= 0$ trên Ω^c) ta có $u \in L^1_{loc}(R^n)$, theo kết quả ở trên $p_k * u$ khả vi vô hạn lần trên R^n, ta sẽ chứng minh rằng $p_k * u$ bằng u trên tập Ω_k trong đó $\Omega_k = \left\{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{k}\right\}$, khi đó nhận xét $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$, ta sẽ có điều phải chứng minh.

Chứng minh $p_k * u$ bằng u trên tập Ω_k.

Với mọi x thuộc Ω_k ta có

$$p_k * u(x) = \int\limits_{R^n} p_k(x-y)u(y)dy = \int\limits_{\Omega} p_k(x-y)u(y)dy$$

$$= k^n \int\limits_{\Omega} p(k(x-y))u(y)dy = k^n \int\limits_{B(x,\frac{1}{k})} p(k(x-y))u(y)dy$$

$$= k^n \int\limits_{B(x,\frac{1}{k})} p(|k(x-y)|)u(y)dy = k^n \int\limits_0^{1/k} dr \int\limits_{\partial B(x,r)} p(|k(x-y)|)u(y)ds_y$$

$$= k^n \int\limits_0^{1/k} p(kr)dr \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)ds_y = k^n \int\limits_0^{1/k} p(kr)n\omega_n r^{n-1}u(x)dr$$

$$= u(x) \int\limits_0^{1/k} k^n n\omega_n p(kr)r^{n-1}dr = u(x) \int\limits_0^{1/k} dr \int\limits_{\partial B(x,r)} k^n p(kr)ds$$

$$= u(x) \int\limits_0^{1/k} dr \int\limits_{\partial B(x,r)} k^n p(|k(x-y)|)ds_y = u(x) \int\limits_0^{1/k} dr \int\limits_{\partial B(x,r)} p_k(x-y)ds_y$$

$$= u(x) \int\limits_{B(x,1/k)} p_k(x-y)dy = u(x) \int\limits_{R^n} p_k(x-y)dy = u(x).$$

Trong trường hợp tổng quát, u không thuộc $C(\bar{\Omega})$, khi đó với mọi x thuộc Ω thì tồn tại một quả cầu $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Áp dụng kết quả trên cho B(x, r) ta cũng có u khả vi vô hạn lần tại x. ■