FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2 (dos)

24-07-2024 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: FEIJOO Nombres : SOFIA

Padrón: 101148

B 1. La ecuación : $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una raíz real doble en el intervalo $[0, 2]$, y tiene dos raíces complejas conjugadas.

a) Demostrar que existe una modificación del Método de Newton Raphson para raíces múltiples que tiene convergencia cuadrática.

b) Hallar una aproximación de la raíz real doble aplicando tres iteraciones del método desarrollado en $a)$ tomando como semilla $x_0 = 0.8$.

M 2. Considerar el modelo depredador-presa de *Lotka-Volterra*, definido por:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.2xy \\ \frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.25xy \end{cases}$$
Donde $x(t)$ (depredadores), e $y(t)$ (presas) se miden en cientos cada seis meses. Sabiendo que inicialmente habia 5 depredadores y 6 presas. Estimar la población al cabo de un año, usando dos iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

B 3. Calcular el área bajo de la función de densidad de probabilidad normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Utilizar el método de Simpson $\frac{1}{3}$ con $N = 10$. En el intervalo $[-1, 1]$.

M 4. El crecimiento poblacional de una determinada bacteria, $P(t)$, se determina a partir de la ecuación diferencial de segundo orden:
$\frac{d^2P}{dt^2} = t^2 - 4t + 8$, sabiendo que $P(0) = 1$ y $P(2) = 10$. El tiempo está medido en horas. La población en miles.

a) Plantear el problema como un problema de valores en la frontera.

b) Usar el metodo de diferencias finitas para calcular la población cada media hora.

Ø 5. Dado el sistema lineal $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \alpha \\ cx_1 + dx_2 = \beta \end{cases}$ Con α y $\beta \in R$.

a) Determinar la matriz para el método de Gauss-Seidel $x_{n+1} = T_{GS}x_n + C_{GS}$ aplicado al sistema $Ax = b$

b) Hallar el $\rho(T_{GS})$ determinada en $a)$. Indicar las condiciones que se deben cumplir para que el método converja.

c) ¿Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ el método converge? Justificar la respuesta.

① b) $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot f'(p_{n-1})}{\left(f'(p_{n-1})\right)^2 - f''(p_{n-1}) \cdot f(p_{n-1})}$$

$f'(x) = 6x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 2$

$f''(x) = 30x^4 - 40x^3 + 36x^2 - 24x + 6$

$x_0 = 0{,}8$

$$p_1 = 0{,}8 - \frac{f(0{,}8) \cdot f'(0{,}8)}{f'(0{,}8)^2 - f''(0{,}8) \cdot f(0{,}8)} = 0{,}964$$

B

✓

$$p_2 = 0{,}964 - \frac{f(0{,}964) \cdot f'(0{,}964)}{f'(0{,}964)^2 - f''(0{,}964) \cdot f(0{,}964)} = 1{,}001$$

$$p_3 = 1{,}001 - \frac{f(1{,}001) \cdot f'(1{,}001)}{f'(1{,}001)^2 - f'(1{,}001) \cdot f(1{,}001)}$$

$[p_3 = 1{,}00]$ ✓

$f(0{,}8) = 0{,}108$

$f'(0{,}8) = -0{,}866$

$f''(0{,}8) = 1{,}648$

$f(0{,}964) = 0{,}005$

$f'(0{,}964) = -0{,}258$

$f''(0{,}964) = 6{,}393$

$f(1{,}001) = 4 \cdot 10^{-6}$

$f'(1{,}001) = 8{,}03 \cdot 10^{-3}$

$f''(1{,}001) = 8{,}048$

a) Newton Raphson modificado usa: $\mu = f(x)/f'(x)$

si X_0 es raiz con multipl $m \Rightarrow f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$

donde $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \mu = \frac{(x - x_0)^m \, (g(x))}{m(x - x_0)^{m-1} g(x) + (x - x_0)^m g'(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \mu = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)^m} \, g(x)}{m(x - x_0)^{m-1} g(x) + \cancel{(x - x_0)^m g'(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{m} \neq 0$$

Porlo que NR modificado trabaja con un problema donde la raiz puede ser multiple a simple.

② $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0{,}1x + 0{,}2xy & f \\ \dfrac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}25xy & g \\ x(0) = 5 \\ y(0) = 6 \end{cases}$

$h = 0{,}5$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{m+1} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$

$k_1 = f(x, y, t)$

$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2}k,\ t + \frac{h}{2}k_1\right)$

no es así, tienes k hacer todos

los k avanzando

① $\cdot\ k_1 = f(x,y,t) = -0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5 \cdot 6 = 5{,}5$ ✓

$k_2 = f(6{,}375,\ 7{,}375,\ 0{,}5) = 8{,}77$

$\Rightarrow x_1 = 5 + 0{,}5 \cdot 8{,}77 = 9{,}38$ (mal)

$\cdot\ m_1 = 0{,}2 \cdot 6 - 0{,}25 \cdot 6 \cdot 5 = -6{,}3$ ✓ $\quad f(3{,}425,\ 4{,}425,\ 95) = -3{,}1$

$m_2 =$

$\Rightarrow y_1 = 6 + 0{,}5 \cdot (-3{,}2) = 4{,}45.$

②

$\cdot\ k_1 = -0{,}1 \cdot 9{,}38 + 0{,}2 \cdot 9{,}38 \cdot 4{,}45 = 7{,}41$

$\cdot\ k_2 = f(11{,}23,\ 6{,}30,\ 1) = 13{,}03$ (mal)

$\Rightarrow \left[x_2 = 9{,}38 + 0{,}5 \cdot 13{,}03 = 15{,}89\right]$

$\cdot\ m_1 = 0{,}2 \cdot 4{,}45 - 0{,}25 \cdot 4{,}45 \cdot 9{,}38 = -9{,}55.$

$m_2 = f(6{,}99;\ 2{,}06;\ 1) = -3{,}78 \quad \Rightarrow \left[y_2 = 4{,}45 + 0{,}5 \cdot (-3{,}78) = 2{,}56\right]$

③ $\frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \sum f_{\text{impares}} + 2 \sum f_{\text{pares}} \right]$

$N = 10$

$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array} \right\} h = 0,2$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\frac{h}{3} \left[f(-1) + f(1) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8) \right]$

$= \frac{0,2}{3} \left[0,242 + 0,242 + 4(1,712) + 2(1,448) \right]$

$= 0,682 = \int_{-1}^{1} f(x)$

$f_0 = f(-1) = 0,242$

$f_1 = 0,289 = f(-0,8)$

$f_2 = f(-0,6) = 0,333$

$f_3 = f(-0,4) = 0,368$

$f_4 = 0,391 = f(-0,2)$

$f_5 = f(0) = 0,398$

$f_6 = f(0,2) = 0,391$

$f_7 = f(0,4) = 0,368$

$f_8 = f(0,6) = 0,333$

$f_9 = f(0,8) = 0,288$

$f_{10} = f(1) = 0,242$

Asamblea

4) $\dfrac{d^2P}{dt^2} = t^2 - 4t + 8$ $\qquad P(0) = 1$

$P(2) = 10$

a) $\begin{cases} P'' = t^2 - 4t + 8 \\ P(0) = 1 \\ P(2) = 10 \end{cases}$

si $y'' + P_{(x)} y' + Q(x)\, y = f(x)$

$\Rightarrow$ en este caso

$P(x) = 0 \qquad Q(x) = 0$

$y(x) = t^2 - 4t + 8$

b) por dif finitas

$h^2 f_i = \left(1 + \frac{h}{2} P_{(x)}\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_{(x)}\right) y_i + \left(1 - \frac{h}{2} P(x)\right) y_{i-1}$

$\Rightarrow h^2 f(x_i) = y_{i+1} - y_{i-1}$ $\qquad$ media hora: $h = 0{,}5$

$y_{i+1} = y_{i-1} + 0{,}5^2 \cdot f(0{,}5)$

$y_{i+1} = y_{i-1} + 0{,}5^2 f(x_i)$

mal planteado

$f(0{,}5) = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5 + 8 = 6{,}25$
$f(1) = 5$
$f(1{,}5) = 4{,}25$
$f(2) = 4$

entonces:

$i=1$: $y_2 = y_0 + 0{,}5^2 f(t_1) = 1 + 0{,}5^2 \cdot f(0{,}5) = 2{,}5625$

$i=2$: $y_3 = y_1 + 0{,}5^2 f(t_2) = y_1 + 0{,}5^2 \cdot f(1) = y_1 + 1{,}25$

$i=3$: $y_4 = y_2 + 0{,}5^2 \cdot f(t_3) = y_2 + 0{,}5^2 \cdot f(1{,}5) = y_2 + 1{,}0625 = 3{,}625$

$i=4$: $y_5 = y_3 + 0{,}5^2 \cdot f(t_4) = y_3 + 0{,}5^2 \cdot f(2) = y_3 + 1 = 10$

$y_3 = y_1 + 1,25$

- $y_4 = y_2 + 1,0625 = 3,625$

- $y_5 = 10 \rightarrow y_3 = 9 \rightarrow y_1 = 7,75$

$\Rightarrow$ $y_1 = 7,75$

$y_2 = 2,5625$

$y_3 = 9$

$y_4 = 3,625$

$y_5 = 10$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}}$$

$K_1 = f(t_n, x_n, y_n) = \alpha x_n - \beta x_n y_n$

$l_1 = g(t_n, x_n, y_n) = \delta x_n y_n - \gamma y_n$

$K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} K_1, y_n + \frac{h}{2} l_1)$

$l_2 = g(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} K_1, y_n + \frac{h}{2} l_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0{,}1x + 0{,}2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}25xy \end{cases}$$

$x(0) = 5$

$y(0) = 6$

$h = 0{,}5$

$K_1 = -0{,}1 x_n + 0{,}2 x_n y_n$

$l_1 = 0{,}2 y_n - 0{,}25 x_n y_n$

$\Rightarrow$ (1) $K_1 = -0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5 \cdot 6 = 5{,}5$

$l_1 = 0{,}2 \cdot 6 - 0{,}25 \cdot 5 \cdot 6 = -6{,}3$

$K_2 = -0{,}1 \cdot (5 + \frac{0{,}5}{2} \cdot 5{,}5) + 0{,}2 \cdot (5 + \frac{0{,}5}{2} \cdot 5{,}5) \cdot (6 + \frac{0{,}5}{2} \cdot -6{,}3)$

$= 5{,}004$

$l_2 = 0{,}2 (6 + \frac{0{,}5}{2} \cdot -6{,}3) - 0{,}25 (5 + \frac{0{,}5}{2} \cdot 5{,}5)(6 + \frac{0{,}5}{2} \cdot -6{,}3)$

$= -6{,}167$

$\boxed{X_1 = 5 + 0{,}5 \cdot 5{,}004 = 7{,}502}$

$\boxed{Y_1 = 6 + 0{,}5 \cdot -6{,}167 = 2{,}917}$

(2) $K_1 = 3{,}626$

$l_1 = -4{,}887$

$K_2 = 2{,}009$

$l_1 = -3{,}224$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} X_2 &= 7{,}502 + 0{,}5 \cdot 2{,}009 = 8{,}507 \\ Y_2 &= 2{,}917 + 0{,}5 \cdot -3{,}224 = 1{,}305 \end{aligned}}$$

④ $\frac{d^2P}{dt^2} = t^2 - 4t + 8$

a) $\begin{cases} P'' = -t^2 - 4t + 8 \\ P(0) = 1 \\ P(2) = 10 \end{cases}$

$y'' = P_{(x)} y' + Q(x) y = f(x)$

$\rightarrow P(x) = 0 \qquad Q(x) = 0$

$f(x) = t^2 - 4t + 8$

b) $h^2 f_i = (1 + \frac{h}{2} P(x)) \cancel{P} y_{i+1} + (-2 + \cancel{h^2 Q(x)}) y_i + (1 - \frac{h}{2} P(x)) y_{i-1}$

$h^2 f_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$ $\quad h = 0{,}5$

$f(0) = 8 \rightarrow t_0$
$f(0{,}5) = 6{,}25 \rightarrow t_1$
$f(1) = 5 \rightarrow t_2$
$f(1{,}5) = 4{,}25 \rightarrow t_3$
$f(2) = 4 \rightarrow t_4$

$\Rightarrow$

$y_{i+1} = 0{,}5^2 \cdot f_{t_i} + 2y_i - y_{i-1}$

reemplazando:

$i = 1$: $\quad y_2 = 0{,}5^2 \cdot f(t_1) + 2y_1 - y_0$

$i = 2$: $\quad y_3 = 0{,}5^2 \cdot f(t_2) + 2y_2 - y_1$

$i = 3$: $\quad y_4 = 0{,}5^2 \cdot f(t_3) + 2 \cdot y_3 - y_2$

- $y_2 = 0{,}5^2 \cdot 6{,}25 + 2 \cdot y_1 - 1 \rightarrow y_1 = \frac{y_2}{2} - 0{,}28125$
- $y_3 = 0{,}5^2 \cdot 5 + 2 \cdot y_2 - y_1 = 1{,}25 + 2y_2 - (\frac{y_2}{2} - 0{,}28125)$

$\rightarrow y_3 = \frac{49}{32} + \frac{3}{2} y_2$

- $10 = 0{,}5^2 \cdot 4{,}25 + 2(\frac{49}{32} + \frac{3}{2} y_2) - y_2$

$10 = \frac{33}{8} + 2y_2$

$\Rightarrow \boxed{y_2 = 2{,}9375} \quad \boxed{y_1 = 1{,}1875} \quad \boxed{y_3 = 5{,}9375}$

Asamblea

⑤ $\begin{cases} a x_1 + b x_2 = \alpha \\ c x_1 + d x_2 = \beta \end{cases}$

$T = (D - L)^{-1} \cdot U$

$A = D - L - U$

a) $A x = b$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}}^{D} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix}}^{L} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{U}$$

$$T = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{d a} & 1/d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & +\frac{cb}{d a} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cancel{a/a}\ 1 & 0 & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & d & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{d a} & 1/d \end{array} \right)$$

! $d \neq 0$
$a \neq 0$.

b) $\rho(T) = \max |\lambda| < 1$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -b/a \\ 0 & \frac{c\, b}{d a} - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$-\lambda \cdot \left(\frac{c b}{d a} - \lambda \right) = 0$$

$\nearrow \lambda = 0$

$\searrow \lambda = \frac{cb}{da} \Rightarrow \left| \frac{cb}{da} \right| < 1$

con $a \neq 0$
$d \neq 0$

c) $\left| \frac{c \cdot b}{d a} \right| = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2 > 1$

$\Rightarrow$ no converge.