FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

8 (ocho)

1	2	3	4	5
B	B	B	R	B

31-07-2024 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: FEIJOO Nombres : SOFIA

Padrón: 101148

1. La Ley de enfriamiento de Newton está caracterizada por la ecuación diferencial: $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$, donde T es la temperatura del objeto, T_a es la tempertura del ambiente y K es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación es usada en criminalística para determinar la hora de muerte, en el instante $t = 0$ en que se descubre un cuerpo. En ese instante se toma su temperatura $T_0 = 29.5°C$, dos horas después la temperatura es de $T_2 = 23.5°C$, lo que permite determinar la constante $K = 0.49926$, mientras que la temperatura ambiente es de $T_a = 20°C$.

   a) Con los datos anteriores plantear el PVI.

   b) Usar el método de Runge Kuta del punto medio para determinar aproximadamente la hora de muerte. Se sabe que la temperatura del cuerpo era el valor normal: $T_c = 36°C$. Usar $h = 0.2$, o $h = -0.2$, de acuerdo a la temperatura que establezca como semilla. (h = 0.2 o h = -0.2 equivale a dos horas).

2. a) Cuando una población $P(t)$ no puede crecer más de un cierto valor límite L, la gráfica de la función $P(t)$ es una curva llamada *curva logística* de ecuación: $P(t) = \frac{L}{1+ce^{at}}$. Ajustar por cuadrados mínimos los valores de c y a para $L = 2000$ con los datos de la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	200	400	650	850	950

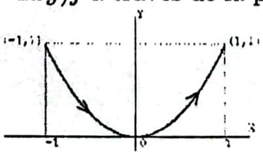
   b) Estimar la población para $t = 3.2$ (el tiempo está medido en horas). Usar cuatro decimales y redondeo.

3. El balance de calor en estado estacionario se representa como: $\frac{d^2T}{dx^2} - 0.5T = 0$, para una barra de longitud L.

   a) Desarrolle el método de diferencias finitas para un problema de valores en la frontera.

   b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de 10m con $T(0) = 240°C$ y $T(10) = 150°C$. Usar lo desarrollado en a) para evaluar el calor en los puntos intermedios de la barra con $N = 5$.

4. Calular la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (x^2 - 2xy)\check{i} + (y^2 - 2xy)\check{j}$ a través de la parábola que se muestra en la figura. Usar el método de Simpson $\frac{1}{3}$ con $N = 10$.



5. Se sabe que la suma de dos números es 7 y su producto es 12. Plantear un sistema para estimar dichos números. Resolver el sistema usando dos iteraciones del método de *Newton para sistemas no lineales* tomando como semilla $x^0 = (3.9, 2.9)^t$. Trabajar al menos con cuatro decimales y redondeo.

FEIJOO

① a) $\frac{dt}{dt} = -K(t - t_a) \Rightarrow \begin{cases} t' = -0{,}49926(t-20) \\ t(0) = 29{,}5 \end{cases}$

Se va enfriando, el tiempo va para atrás entonces.

b) $h = -0{,}2$

RK

$y_{i+1} = y_i + hK_2$

$K_1 = f(y_i, t_i)$

$K_2 = f(y_i + \frac{h}{2}K_1, t_i + \frac{h}{2})$

1- $K_1 = -0{,}49926(29{,}5-20)$

$= -4{,}743$

$K_2 = f(29{,}5 + (\frac{-0{,}2}{2} \cdot -4{,}743), -0{,}1)$

$= f(29{,}974, -0{,}1)$

$= -0{,}49926(29{,}974-20) = -4{,}979$

$\Rightarrow T_1 = t_0 + hK_2 = 29{,}5 + (-0{,}2) \cdot -4{,}979$

$t_1 = 30{,}496$

2- $K_1 = -0{,}49926(30{,}496-20) = -5{,}24$

$K_2 = f(30{,}496 - \frac{0{,}2}{2} \cdot -5{,}24, -0{,}1 - \frac{0{,}1}{2}) = f(31{,}02, -0{,}2)$

$= -0{,}49926(31{,}02-20) = -5{,}502$

$\Rightarrow t_2 = 30{,}496 + (-0{,}2) \cdot (-5{,}502) = 31{,}596$

3- $K_1 = -0{,}49926(31{,}596-20) = -5{,}789$

$K_2 = f(31{,}596 + (\frac{-0{,}2}{2}) \cdot (-5{,}789), -0{,}3) = f(32{,}175, -0{,}3)$

$= -0{,}49926(32{,}175-20) = -6{,}078$

$\Rightarrow T_3 = 31{,}596 + (-0{,}2) \cdot (-6{,}078) = 32{,}812$

Asamblea

$4-\ K_1 = -0,49926(32,812-20) = -6,397$

$K_2 = f\left(32,812 + \left(\frac{-0,2}{2}\right)\cdot(-6,397), -0,4\right) = f(33,452, -0,4)$

$= -6,716$

$\Rightarrow T_4 = 32,812 + (-0,2)\cdot(-6,716) = 34,155$

$5-\ K_1 = -0,49926(34,155-20) = -7,067$

$K_2 = f\left(34,155 + \left(\frac{-0,2}{2}\right)\cdot(-7,067), -0,5\right) = f(34,862, -0,5)$

$= -7,419$

$\Rightarrow T_5 = 34,155 + (-0,2)\cdot(-7,419) = 35,639$

$6-\ K_1 = -0,49926(35,639-20) = -7,808$

$K_2 = f\left(35,639 + \left(\frac{-0,2}{2}\right)\cdot -7,808, -0,6\right) = f(36,42, -0,6)$

$= -8,198$

$\Rightarrow T_6 = 35,639 + (-0,2)\cdot(-8,198) = 37,279$

$\Rightarrow$ pasaron entre 10 y 12 horas.

② $y = \dfrac{2000}{1+c\,e^{at}}$

a)

$$\frac{1}{y} = \frac{1+c\,e^{at}}{2000}$$

$$\frac{2000}{y} - 1 = c\,e^{at}$$

$$\ln\left(\frac{2000}{y} - 1\right) = \ln(c\,e^{at}) = \ln(c) + a.t$$

$$\ln\left(\frac{2000}{y} - 1\right) = \ln(c) + a.t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(c) \\ \ln(a) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,197 \\ 1,386 \\ 0,731 \\ 0,302 \\ 0,1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$A^t A\,x = A^t b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(c) \\ \ln(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} b$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(c) \\ \ln(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,716 \\ 4,154 \end{pmatrix}$$

$\ln(c) = 1,9988 \Rightarrow \boxed{c = 7,38}$

$\ln(a) = -0,5278$

mal

$\Rightarrow \boxed{a = 0,589.}$

b) $y = \dfrac{2000}{1+7,38.e^{0,599.t}}$

$y(3.2) = 40,325$ El valor está fuera de rango

③ $\frac{d^2T}{dx^2} - 0{,}5T = 0$

no es la deducción

a) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$h^2 f_i = \left(1+\frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} + (-2+h^2Q_i)y_i + \left(1-\frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1}$

$T'' - 0{,}5T = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad P(x) = 0$

$Q(x) = -0{,}5$

$\Rightarrow h^2 \cdot 0 = \left(1+\frac{h}{2}\cdot 0\right)y_{i+1} + (-2+h^2\cdot(-0{,}5))y_i + \left(1-\frac{h}{2}\cdot 0\right)y_{i-1}$

$0 = y_{i+1} + \left(-2-\frac{h^2}{2}\right)y_i + y_{i-1}$

$y_{i+1} = -\left(-2-\frac{h^2}{2}\right)y_i - y_{i-1}$

b) $L = 10m$, $N = 5 \Rightarrow h = 2$.

$T(0) = 240$

$T(10) = 150$

MALLA:
$y_1 \to L = 2$
$y_2 \to L = 4$
$y_3 \to L = 6$
$y_4 \to L = 8$

$y_{i+1} = -4y_i - y_{i-1}$

$\Rightarrow i=1: \quad y_2 = 4y_1 - y_0$ ✓

$i=2 \quad y_3 = 4y_2 - y_1$ ✓

$i=3 \quad y_4 = 4y_3 - y_2$ ✓

$i=4 \quad y_5 = 4y_4 - y_3$

con $y_0 = 240, y_5 = 150$

- $y_2 = 4y_1 - 240 \Rightarrow y_1 = \frac{y_2}{4} + 60$
- $y_3 = 4y_2 - y_1 = 4y_2 - \left(\frac{y_2}{4} + 60\right)$

$\Rightarrow y_3 = 3{,}75\,y_2 - 60$

- $y_4 = 4y_3 - y_2 = 4\cdot(3{,}75y_2 - 60) - y_2$

$= 15y_2 - 240 - y_2$

$\Rightarrow y_4 = 14y_2 - 240$

- $150 = 4\cdot(14y_2 - 240) - (3{,}75y_2 - 60)$

$y_2 = 20{,}1 \qquad y_1 = 65{,}025$

$y_3 = 15{,}4$

$y_4 = 41{,}4$

Papel de fibra de caña de azúcar.

④ $f(x,y) = (x^2 - 2xy,\ y^2 - 2xy)$ $\quad h = \frac{b-a}{N} = 0{,}2.$

$\sigma = (x, x^2) \rightarrow$ parábola $y = x^2$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\sigma(x)) \cdot \sigma'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x.x^2,\ x^2 - 2x x^2) \cdot (1, 2x)\,dx$

$(x^2 - 2x^3,\ x^4 - 2x^3)(1, 2x)$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3,\ x^2 - 2x^4)(1, 2x)\,dx$

mal

$= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x(x^2 - 2x^4))\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^3 - 4x^5)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 4x^5)\,dx$

Simpson 1/3: $\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum f_{impares} + 2\sum f_{pares}\right]$

siendo:

0 $f(-1) = 5$	4 $f(-0,2) = 0,041$	8 $f(0,6) = 0,049$
1 $f(-0,8) = 1,951$	5 $f(0) = 0$	9 $f(0,8) = -0,671$
2 $f(-0,6) = 0,671$	6 $f(0,2) = 0,039$	10 $f(1) = -3$
3 $f(-0,4) = 0,2$	7 $f(0,4) = 0,119$	

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{0,2}{3}\left[5 - 3 + 4.(1,951 + 0,2 + 0 + 0,119 + (-0,671)) + 2(0,671 + 0,041 + 0,039 + 0,049)\right]$

arrastra error

$= \frac{0,2}{3}\left[5 - 3 + 4.(1,599) + 2(0,8)\right] = 0,6664$

⑤ $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \Rightarrow F(x,y)=(x+y-7,\ xy-12)$

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad x^0=\begin{pmatrix} 3,9 \\ 2,9 \end{pmatrix}$$

1- $J(x_0)\,y_0=-F(x_0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2,9 & 3,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +0,2 \\ 0,69 \end{pmatrix} \rightarrow y_0=\begin{pmatrix} 0,09 \\ 0,11 \end{pmatrix}$$

$$x_1=x_0+y_0=\begin{pmatrix} 3,9 \\ 2,9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,09 \\ 0,11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3,99 \\ 3,01 \end{pmatrix}$$

2- $J(x_1)\,y_1=-F(x_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3,01 & 3,99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -0,009 \end{pmatrix} \rightarrow y_1=\begin{pmatrix} -0,0092 \\ -0,0092 \end{pmatrix}$$

$$x_2=x_1+y_1=\begin{pmatrix} 3,99 \\ 3,01 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,0092 \\ -0,0092 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3,9992 \\ 3,0008 \end{pmatrix}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.