



Trabajo Práctico 2:

Ecuaciones Diferenciales

Péndulo

[75.12 - 95.04] Análisis Numérico
[CB051] Modelación Numérica

Curso Sassano - 1er Cuatrimestre 2024

Firmapaz, Agustín Ezequiel - 105172
Feijoo, Sofía - 101148
Panetta, Martina Ágata - 103713

Índice

| | |
|--|---|
| 1. Introducción | 2 |
| 2. Objetivos | 2 |
| 3. Análisis del problema | 2 |
| El péndulo | 2 |
| Caso No Amortiguado | 2 |
| Caso de Amortiguamiento Subcrítico | 2 |
| Método Runge-Kutta de Orden 2 | 3 |
| Método Runge-Kutta de Orden 4 | 4 |
| Fórmulas de RK4 | 4 |
| 4. Resultados | 5 |
| 4. 1. Sistema no amortiguado | 5 |
| 4. 2. Sistema con amortiguamiento subcrítico | 6 |
| 5. Conclusiones | 8 |

1. Introducción

En este trabajo práctico analizaremos el comportamiento de un péndulo simple con rozamiento mediante la ecuación diferencial que lo describe a partir de la utilización del método Runge-Kutta (RK2 y RK4), analizando el caso amortiguado y el no amortiguado.

2. Objetivos

Los objetivos de este trabajo son:

- Discretizar la ecuación diferencial del péndulo utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden y resolver los primeros pasos con condiciones iniciales definidas.
- Desarrollar un código para resolver la ecuación del péndulo mediante el método de Runge-Kutta 4, aplicándolo tanto a sistemas no amortiguados y con amortiguamiento subcrítico.
- Realizar un análisis para comparar los resultados obtenidos con los esperados acorde a la teoría detrás del problema del péndulo.

3. Análisis del problema

El péndulo

La ecuación diferencial que analizaremos es la siguiente:

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación describe el comportamiento en el tiempo de un péndulo compuesto por una masa m , un hilo inextensible de longitud l sumergido en un medio con rozamiento con coeficiente de amortiguación b , con constante de gravedad $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, ángulo θ y velocidad angular θ' . Las condiciones iniciales son: $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = \theta'_0$.

Caso No Amortiguado

En un sistema no amortiguado tenemos $b = 0$. En este caso, el péndulo oscila de manera periódica con una amplitud constante, ya que no hay fricción que disipe la energía. El ángulo máximo alcanzado no supera los valores iniciales y la velocidad angular varía de manera periódica.

Caso de Amortiguamiento Subcrítico

En un sistema con amortiguamiento subcrítico $b > 0$ pero es lo suficientemente pequeño para permitir oscilaciones. La fricción provoca una disminución gradual en la amplitud de las oscilaciones con el tiempo, hasta que el sistema alcanza un estado de equilibrio. La velocidad angular y el ángulo convergen a cero, reflejando la pérdida de energía debido a la fricción.

Método Runge-Kutta de Orden 2

A continuación, se realizará la discretización a través del método de Runge-Kutta de orden dos y se dejará planteada la respuesta en función de las condiciones iniciales y el paso a definir. Además, se resolverán dos avances con un paso de 0,1.

Siendo una ecuación de segundo orden, realizaremos el cambio de variables $\theta' = u$ para luego poder aplicar el método. Con $u(0) = \theta'_0$ queda:

$$u' = -\frac{b}{m}u - \frac{g}{l}\sin(\theta) \quad (3.2)$$

Por lo que, ahora, tenemos una función que depende de tres variables:

$$u' = f(u, t, \theta) = -\frac{b}{m}u - \frac{g}{l}\sin(\theta) \quad (3.3)$$

Se plantea el método Runge-Kutta 2 de Punto Medio:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h}{2}(r_1 + r_2)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(q_1 + q_2)$$

$$r_1 = u_n$$

$$q_1 = f(u_n, t_n, \theta_n) = -\frac{b}{m}u_n - \frac{g}{l}\sin(\theta_n)$$

$$r_2 = u_n + \frac{h}{2}q_1 = u_n + \frac{h}{2}f(u_n, t_n, \theta_n)$$

$$q_2 = f(u_n + \frac{h}{2}q_1, t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}r_1) = -\frac{b}{m}(u_n(1 - \frac{hb}{2m}) - \frac{hg}{2l}\sin(\theta_n)) - \frac{g}{l}\sin(\theta_n + \frac{h}{2}u_n)$$

A continuación, se resuelven dos avances con un paso de 0,1:

Primer avance ($n = 0$)

$$\theta_0 = \theta(0), u_0 = \theta'(0) = \theta'_0, h = 0,1$$

$$r_{1,1} = u_0$$

$$q_{1,1} = -\frac{b}{m}u_0 - \frac{g}{l}\sin(\theta_0)$$

$$q_{1,2} = -\frac{b}{m}(u_0 + \frac{0,1}{2}q_1) - \frac{g}{l}\sin(\theta_0 + \frac{0,1}{2}r_1)$$

$$= -\frac{b}{m}(u_0 + \frac{0,1}{2}(-\frac{b}{m}u_0 - \frac{g}{l}\sin(\theta_0))) - \frac{g}{l}\sin(\theta_0 + \frac{0,1}{2}u_0)$$

$$r_{1,2} = u_0 + \frac{0,1}{2}(-\frac{b}{m}u_0 - \frac{g}{l}\sin(\theta_0))$$

$$\Rightarrow u_1 = u_0 + \frac{0,1}{2}(q_{1,1} + q_{1,2})$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_0 + \frac{0,1}{2}(r_{1,1} + r_{1,2})$$

Segundo avance ($n = 1$)

$$r_{2,1} = u_1$$

$$q_{2,1} = -\frac{b}{m}u_1 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1)$$

$$\begin{aligned} q_{2,2} &= -\frac{b}{m}\left(u_1 + \frac{0,1}{2}q_{2,1}\right) - \frac{g}{l}\sin\left(\theta_1 + \frac{0,1}{2}r_{2,1}\right) \\ &= -\frac{b}{m}\left(u_1 + \frac{0,1}{2}\left(-\frac{b}{m}u_1 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1)\right)\right) - \frac{g}{l}\sin\left(\theta_1 + \frac{0,1}{2}u_1\right) \end{aligned}$$

$$r_{2,2} = u_1 + \frac{0,1}{2}\left(-\frac{b}{m}u_1 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1)\right)$$

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2}(q_{2,1} + q_{2,2})$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{h}{2}(r_{2,1} + r_{2,2})$$

Método Runge-Kutta de Orden 4

El método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) es otra técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En comparación con RK2, RK4 es más preciso y converge más rápidamente. El método (análogamente a RK2) se basa en una serie de (esta vez) cuatro estimaciones del cambio en la variable dependiente, que luego se promedian para obtener el valor final.

Fórmulas de RK4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

4. Resultados

Tras haber desarrollado un código Python que permite resolver por el método de Runge-Kutta 4 la ecuación diferencial ordinaria a valores iniciales del péndulo para distintos juegos de datos y paso h , se presentan las soluciones aproximadas para los juegos de datos proveídos en la consigna.

4. 1. Sistema no amortiguado

En la *Tabla 4.2* se presentan los datos obtenidos a partir de la simulación con la implementación propia de RK4 utilizando los valores de la *Tabla 4.1*.

| m [kg] | l[m] | b[Ns/m] | h[s] | $\theta_0[^\circ]$ | $\theta'_0[^\circ/s]$ |
|--------|------|---------|------|--------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0,2 | 30 | 0 |

Tabla 4.1 - Constantes y condiciones iniciales para sistema no amortiguado

| | t [s] | θ [Rad] | θ' [Rad/s] |
|-----|-------|----------------|-------------------|
| 0 | 0.0 | 0.523599 | 0.000000 |
| 1 | 0.2 | 0.428315 | -0.924314 |
| 2 | 0.4 | 0.175710 | -1.524073 |
| 3 | 0.6 | -0.142463 | -1.556916 |
| 4 | 0.8 | -0.407010 | -1.008782 |
| ... | ... | ... | ... |
| 96 | 19.2 | -0.415713 | -0.884154 |
| 97 | 19.4 | -0.505243 | 0.012929 |
| 98 | 19.6 | -0.410595 | 0.905003 |
| 99 | 19.8 | -0.164778 | 1.477270 |
| 100 | 20.0 | 0.142581 | 1.498994 |

Tabla 4.2 - Datos obtenidos con RK4 para sistema no amortiguado

Como se observa en la *Figura 4.1*, en el sistema no amortiguado, el ángulo oscila entre 30° y -30° de manera periódica y simétrica a lo largo del tiempo. Esto es consistente con la teoría, ya que en un sistema ideal sin fricción la energía se conserva y el ángulo oscila alrededor del punto de equilibrio.

La velocidad angular también muestra un comportamiento periódico, alcanzando sus máximos en los puntos de cruce por el equilibrio ($\theta=0$) y siendo cero en los puntos de máxima amplitud ($\theta=\pm 30$). Nuestro gráfico muestra una velocidad angular con una oscilación constante y simétrica a lo largo de 20 segundos, lo cual coincide con la naturaleza oscilatoria del sistema sin amortiguamiento.

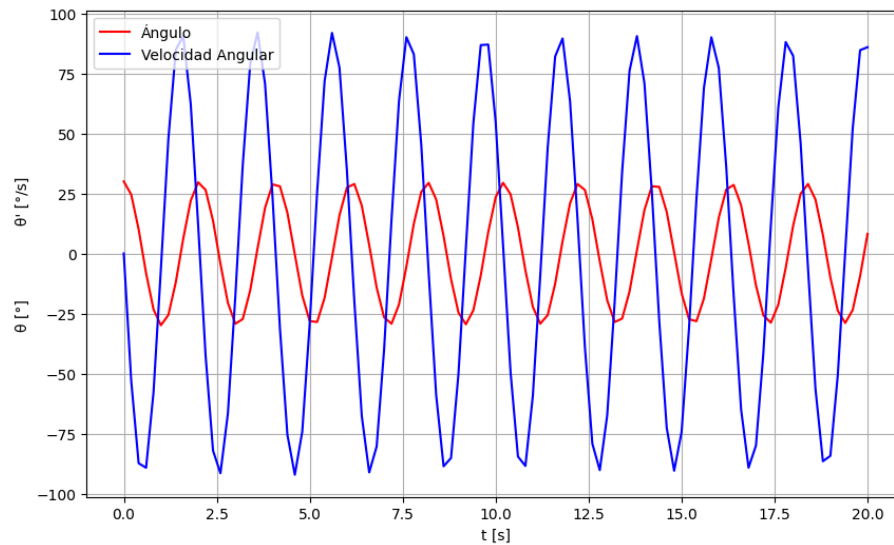


Figura 4.1 - Gráfico de ángulo y velocidad angular vs tiempo para sistema no amortiguado

4. 2. Sistema con amortiguamiento subcrítico

En la *Tabla 4.4* se presentan los datos obtenidos a partir de la simulación con la implementación propia de RK4 utilizando los valores de la *Tabla 4.3*.

| m [kg] | l[m] | b[Ns/m] | h[s] | θ_0 [°] | θ'_0 [°/s] |
|--------|------|---------|------|----------------|-------------------|
| 1 | 1 | 0,5 | 0,2 | 30 | 100 |

Tabla 4.3 - Constantes y condiciones iniciales para sistema con amortiguamiento subcrítico

| | t [s] | θ [Rad] | θ' [Rad/s] |
|-----|-------|----------------|-------------------|
| 0 | 0.0 | 0.523599 | 1.745329 |
| 1 | 0.2 | 0.745620 | 0.440432 |
| 2 | 0.4 | 0.699896 | -0.864522 |
| 3 | 0.6 | 0.425024 | -1.794497 |
| 4 | 0.8 | 0.028800 | -2.042088 |
| ... | ... | ... | ... |
| 96 | 19.2 | -0.003753 | -0.015796 |
| 97 | 19.4 | -0.005875 | -0.004945 |
| 98 | 19.6 | -0.005677 | 0.006655 |
| 99 | 19.8 | -0.003452 | 0.014749 |
| 100 | 20.0 | -0.000195 | 0.016757 |

Tabla 4.4 - Datos obtenidos con RK4 para sistema con amortiguamiento subcrítico

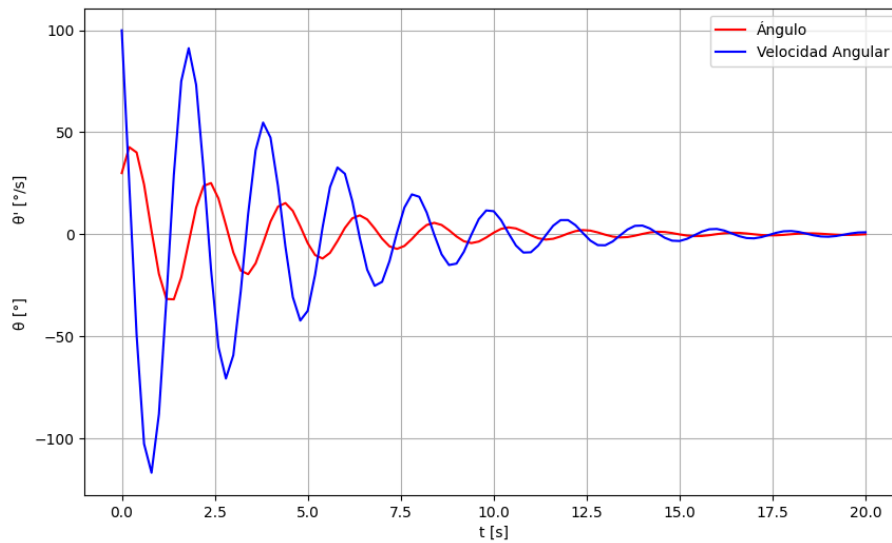


Figura 4.2 - Gráfico de ángulo y velocidad angular vs tiempo para sistema con amortiguamiento subcrítico

En el sistema con amortiguamiento subcrítico, tanto el ángulo como la velocidad angular convergen a cero con el tiempo. Esto es consistente con la teoría, ya que la fricción causa una pérdida de energía, resultando en una disminución gradual de la amplitud de las oscilaciones hasta alcanzar un equilibrio.

La velocidad angular en nuestro gráfico comienza oscilando entre aproximadamente $100^\circ/\text{s}$ y poco más de $-100^\circ/\text{s}$ y va disminuyendo progresivamente hasta oscilar muy cerca de cero. El ángulo en nuestro gráfico inicia en 30° y también muestra una oscilación amortiguada que converge a cero. Esto es coherente con el comportamiento esperado de un sistema con amortiguamiento subcrítico, ya que la fricción reduce la energía del sistema hasta alcanzar un estado de reposo.

Comparando con el gráfico de ejemplo de la consigna, observamos diferencias en la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones iniciales, lo cual puede deberse a ligeras variaciones en la implementación del método numérico. Sin embargo, ambos gráficos muestran la característica principal del amortiguamiento: una disminución progresiva de la amplitud de las oscilaciones (el amortiguamiento es lo suficientemente bajo como para permitir que el sistema oscile pero lo suficientemente alto como para que las oscilaciones disminuyan con el tiempo).

5. Conclusiones

Para el caso del péndulo en un sistema no amortiguado, la *Figura 4.1* muestra que oscila de manera periódica, manteniendo una amplitud constante que no excede los 30° iniciales. Este comportamiento es consistente con la conservación de la energía en un sistema ideal sin fricción. La velocidad angular también es periódica, alcanzando sus máximos en la posición vertical y siendo cero en los puntos de máxima amplitud. La velocidad angular igualmente oscila periódica y simétricamente, lo que concuerda con el comportamiento esperado.

Para el péndulo con amortiguamiento subcrítico, tanto el ángulo como la velocidad angular convergen a cero con el tiempo. Las oscilaciones disminuyen en amplitud debido a la pérdida de energía por fricción, evidenciando un equilibrio estable. Comparado con los datos de ejemplo, nuestros resultados muestran un comportamiento similar pero con una convergencia más lenta a cero, alcanzando valores cercanos a cero alrededor de los 15 segundos, de todos modos, las oscilaciones iniciales de gran amplitud y su reducción gradual son características de este tipo de amortiguamiento por lo tanto de igual manera el comportamiento se asemejó al esperado.

En conclusión, el método de Runge-Kutta de cuarto orden simuló correctamente el comportamiento de ambos sistemas. Los resultados obtenidos son teóricamente coherentes y reflejan el comportamiento que se esperaba de un péndulo con y sin amortiguamiento. Las diferencias observadas respecto a los datos de referencia se pueden atribuir a distintas implementaciones del método.