- El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Justifique **todas** sus respuestas.
- Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora).
- La función log indica logaritmo natural.
- No exprese **ningún** cálculo en forma fraccionaria.

PADRÓN:
APELLIDO Y NOMBRE:
E-MAIL FIUBA:

1. Se desea conocer una raíz r de la función $f(x) = x^4 - e^x + 2$ que se sabe está en el intervalo $(7, 10)$.
   (a) Justificar el uso del método de la secante.
   (b) Encontrar la raíz por el método de la secante usando como semillas $x_0 = 8$ y $x_1 = 9$. interrumpir el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.05.
   (c) Expresar el resultado $r = \overline{r} \pm \Delta r$.

2. Se desea aproximar la función $f(x) = 2^x$ mediante un trazador cúbico natural (no ligado) de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & x_1 < x \leq x_2 \end{cases}$$

   (a) Calcular a $S(x)$ para interpolar $f(x)$ en los puntos $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$.
   (b) Calcular $S(2.0)$.

   AYUDA: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$

3. Se realiza una prueba a un material para estudiar la falla por fatiga cíclica. En esta prueba se aplica un esfuerzo al material y se mide el número de ciclos que se necesita para hacer que falle. Los datos obtenidos figuran en la siguiente tabla. Al hacer una gráfica log − log del esfuerzo en función del número de ciclos, la tendencia presenta una relación lineal.
   (a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar la ecuación que mejor ajuste los datos. Recuerde justificar correctamente la elección del modelo de forma cuantitativa/matemática.
   (b) Calcule cuál es el esfuerzo requerido para 7500 ciclos

n ciclos	1	10	100	1000	10000
Esfuerzo [MPa]	1200	1100	1025	860	650

FEIJOO SOFÍA

101148

(1) $f(x) = x^4 - e^x + 2$

b) $x_0 = 8$ $x_1 = 9$ $\varepsilon \leq 0{,}05$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$$

n	p	$\lvert P_n - P_{n-1} \rvert$
0	8	–
1	9	–
2	8,420395	
3	8,5604124	
4	8,622812	
5	8,613456	$9{,}346 \cdot 10^{-3} < 0{,}05$

$f(8) = 1117{,}042013$

$f(9) = -1540{,}083928$

$f(x_2) = 490{,}5472524$

$f(x_3) = 151{,}2214742$

$f(x_4) = -26{,}637756$

$$x_2 = 9 - \frac{f(9)(9-8)}{f(9) - f(8)}$$

$$x_3 = 490{,}5472524 - \frac{f(x_2) \cdot (x_2 - 9)}{f(x_2) - f(9)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)}$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)}$$

c) $r = 8{,}61 \pm 0{,}01$

$\varepsilon = 0{,}009346$

$\Rightarrow$ Mayorando uso $\Delta r = 0{,}01$ como cota.

(*) o es costoso calcularla.

a) Normalmente para funciones como la presentada en el enunciado es conveniente usar el método de Newton que es muy poderoso. El problema es que, ~~[illegible]~~, no se tiene siempre la derivada de la función a mano.(*) Por eso en estos casos se usa el método de secante que utiliza una aproximación de la derivada y solo requiere establecer 2 semillas iniciales.

2.1

3a

Asamblea

② $f(x) = 2^x$ $\quad x = (0, 1, 3)$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x_0 < x \leq x_1 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_0(x - x_1)^3 & x_1 < x \leq x_2 \end{cases}$$

$\boxed{c_1 = 1}$, $\boxed{c_0 = 0}$

a) ① reemplazo en x_i

- $S_0(0) = f(0) = 1 \rightarrow \boxed{1 = a_0}$
- $S_0(1) = f(1) = 2 \rightarrow 2 = 1 + b_0 + d_0$ (II)
- $S_1(3) = f(3) = 8 \rightarrow 8 = 2 + b_1 \cdot 2 + 4 + d_0 \cdot 8$ (I)

② igualo bordes

- $S_0(1) = S_1(1) = 2 \rightarrow \boxed{2 = a_1}$

③ igualo bordes en las derivadas

- $S_0'(1) = S_1'(1)$

$b_0 + 3d_0 = b_1$ (III)

- $S_0''(1) = S_1''(1)$

$6d_0 = 2 \rightarrow \boxed{d_0 = 0{,}33333}$

④ por ser spline natural

- $S''(0) = S''(3)$

$0 = 2 + d_1 \cdot 12 \rightarrow \boxed{d_1 = -0{,}16667}$

(II) $2 = 1 + b_0 + d_0 \rightarrow \boxed{b_0 = 0{,}66667}$

(III) $b_0 + 3d_0 = b_1 \rightarrow \boxed{b_1 = 1{,}66667}$

$S_0' = b_0 + d_0 \cdot 3(x - x_0)^2$
$= b_0 + d_0 \cdot 3 \cdot x^2$

$S_1' = b_1 + 2(x-1) + 3d_1(x-1$

$S_0'' = 3d_0 \cdot 2(x) = 6d_0 x$

$S_1'' = 2 + d_1 \cdot 3 \cdot 2(x-1)$
$= 2 + d_1 6(x-1)$

Entonces:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 0{,}66667 \cdot x + 0{,}33333\, x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ S_1(x) = 2 + 1{,}66667(x-1) + (x-1)^2 + (-1{,}66667)(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b) $S(2.0) = 2 + 1{,}66667(2-1) + (2-1)^2 + (-1{,}66667)(2-1)^3 = 4{,}5$

③ a) Dado que el gráfico de log(m) vs log(e) es lineal, esto indica que el modelo debe ser potencial:

$$[y(x) = A x^B]$$

Para linealizar el modelo:

$\ln(y) = \ln(A x^B)$

$\ln(y) = \ln(A) + \ln(x^B)$ $\rightarrow$! $a = \ln(A)$.

$\ln(y) = B \cdot \ln(x) + a$

$$Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \\ 100 & 1 \\ 1000 & 1 \\ 10000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,09008 \\ 7,00307 \\ 6,93245 \\ 6,75693 \\ 6,47697 \end{pmatrix}$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \\ 100 & 1 \\ 1000 & 1 \\ 10000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 101010101 & 11111 \\ 11111 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72296,99578 \\ 34,2595 \end{pmatrix}$$

• $101010101 B + 11111 a = 72296,99578$

$\rightarrow B = 0,0007 1574 - 0,00099 a$

$$\begin{cases} B = 0,00506 \\ A = 0,01247 \end{cases}$$

$\Uparrow$

$a = -4,38456$

• $11111 B + 5a = 34,2595$

$\rightarrow 11111 (0,00071574 - 0,00099 a) + 5a = 34,25$

$7,95259 - 10,9999 a + 5a = 34,2595$

Asamble

$\Rightarrow e(n) = 0{,}01247 \cdot n^{0{,}00506}$

b) $e(7500) = 0{,}07304$ → medio mal porque era exp(t)

replanteo:

$$A\vec{x}=b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2,3 & 1\\ 4,6052 & 1\\ 6,90776 & 1\\ 9,21034 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7,09008\\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^tA\vec{x}=A^tb$$

$$\begin{pmatrix}159,04537 & 23,0233\\ 23,0233 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}154,31029\\ 34,2595\end{pmatrix}$$

- $159,04537\,B + 23,0233\,a = 154,31029$

  $\hookrightarrow B = \dfrac{154,31029 - 23,0233a}{159,04537}$

- $23,0233\,B + 5a = 34,2595$

  $23,0233\left(\dfrac{154,31029 - 23,0233a}{159,04537}\right) + 5a = 34,2595$

  $0,14475\,(154,31029 - 23,0233a) + 5a = 34,2595$

  $a \cdot 18,02 = 11,9216$

  $\boxed{a = -0,6615} \Rightarrow A = 0,51607$

  $\Rightarrow \boxed{B = 1,06602}$

$\Rightarrow \boxed{e(n) = 0,51607 \cdot x^{1,0}}$

(momento el tiempo)

b) y reemplazando $e(7500) = 6610,2006$

Índice de comentarios

2.1 recorda que son métodos numéricos, los cuantificamos en base a sus resultados, ejemplo: orden de convergencia y constante asintótica.
"poderoso" podría también ser Bisección dado que nos puede sacar de situaciones muy dificiles