本科概率论与数理统计作业卷(九)

一、填空题

1.设总体 $X\sim U(0,\theta],\theta>0$ 为未知参数,样本观测值为 0.3，0.8，0.27，0.35，0.62，0.55，则 θ 的矩法估计值为___________.

解 由 $\hat{\theta}_{矩}=2\bar{X}$ 计算得矩法估计值为 $\hat{\theta}=2\bar{x}\approx 0.9633$

2.为检验某种自来水消毒设备效果,现从消毒后的水中随机抽取 50 升,化验每升水中大肠杆菌的个数(设一升水中大肠杆菌个数服从参数为 λ 的泊松分布),化验结果如下：

大肠杆菌个数/升	0	1	2	3	4	5	6
升数	17	20	10	2	1	0	0

则据此可得 λ 的极大似然估计值为_______.

解 λ 的极大似然估计量为 $\lambda=\bar{X}$,经计算得样本均值为 1，故应填 1

3.设两个独立总体 X 和 Y 的均值都为 μ,方差都为 σ^2,现分别从中抽取容量为 n_1,n_2 的两组样本,样本均值分别为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$,记 $T=a\bar{X}+b\bar{Y}$,为使 T 成为 μ 的无偏估计,且使 T 的方差达到最小,则 a=____________,b=____________.

解 $EX=\mu,DX=\sigma^2$， $ET=aE\bar{X}+bE\bar{Y}=a\mu+b\mu=\mu\ \Rightarrow\ a+b=1$

又 $DT=a^2D\bar{X}+b^2D\bar{Y}=a^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}+b^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}=\left[\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2$ 记 $g(a)=\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}$

为求极小点,令 $\dfrac{d\,g(a)}{da}=0$ 得 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}\quad\Rightarrow\quad b=1-a=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$

4.某厂生产的 100 瓦灯泡的使用寿命 $X\sim N(\mu,100^2)$(单位:小时).现从一批灯泡中随机抽取 5 知测得它们的使用寿命如下:1455,1502,1370, 1610,1430.由此可得这批灯泡平均使用寿命 μ 的置信度为 95%的置信区间为___________________.已知 $\mu_{0.025}=1.96$

解 $\bar{x}=1473.4$,所求置信区间为 $\left(\bar{x}-\mu_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(1385.75,1561.05)$

二、选择题

1.设总体 $X\sim U(0,\theta],\theta>0$ 为未知参数,$X_1,\ldots,X_n$ 为样本,则 θ 的极大似然估计为_____

(A) $\max(X_1,\ldots,X_n)$ (B) $\min(X_1,\ldots,X_n)$ (C) $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

解 $L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^n,0<x_1,\ldots,x_n\le\theta\\ 0\end{cases}=\begin{cases}1/\theta^n,0<\min(x_1,\ldots,x_n)\le\max(x_1,\ldots,x_n)\le\theta\\ 0\end{cases}$

$L(\theta)$ 达极大 $\Leftrightarrow$ θ 达极小 $\Rightarrow$ $\theta=\max(x_1,\ldots,x_n)$ 故应选(A)

2.已知总体 X 的数学期望为 EX=0, 方差为 $DX=\sigma^2$,$X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的一组简单随机样本,$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则下列属于 σ^2 的无偏估计量的是______

(A) $n(\bar{X})^2+S^2$ (B) $\dfrac{1}{2}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]$ (C) $\dfrac{n}{3}(\bar{X})^2+S^2$ (D) $\dfrac{1}{4}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]$

解 $E\bar{X}=0,D\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sigma^2\quad\Rightarrow\quad E(\bar{X})^2=D\bar{X}+(E\bar{X})^2=\dfrac{1}{n}\sigma^2$ 又因为 $ES^2=\sigma^2$

容易验证只有 $E\left\{\dfrac{1}{2}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]\right\}=\sigma^2$ 故应选(B)

3.设 X_1,X_2 是取自正态总体 $N(\mu,2)$ 的两个样本,下列四个无偏估计中较优的是______

(A) $\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$ (B) $\hat{\mu}_2=\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$ (C) $\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ (D) $\hat{\mu}_4=\frac{4}{7}X_1+\frac{3}{7}X_2$

解 $\because D\hat{\mu}_1=\frac{5}{4}$; $D\hat{\mu}_2=\frac{26}{25}$; $D\hat{\mu}_3=1$; $D\hat{\mu}_4=\frac{50}{49}$ 由于 $D\hat{\mu}_3=1$最小 故应选(C)

4.设 $X_1,\ldots,X_n$ 是总体 X 的样本, $DX=\sigma^2, \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则下列论断成立的是______

(A) S 是 σ 的无偏估计　　(B) S 是 σ 的极大似然估计

(C) S 是 σ 的一致估计　　(D) S 与 $\bar{X}$ 相互独立

解 σ^2 的无偏估计是 S^2,无偏估计不具有不变性,一般情况下 S 不是 σ 的无偏估计;

σ^2 的极大似然估计是 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,故 σ 的极大似然估计是 S_n;

在正态分布情况下 S 与 $\bar{X}$ 相互独立; S 是 σ 的一致估计 故应选(C)

三、计算、证明题

1.总体 X 服从二项分布 $B(m,p)$,设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的样本,求未知参数 m 和 p 的矩估计.

解 $$\begin{cases}\overline{X}=EX=mp\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=EX^2=mp(1-p)+(mp)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{m}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S_n^2}\\ \hat{p}=\dfrac{\overline{X}-S_n^2}{\overline{X}}\end{cases},\text{其中}S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2$$

2.设总体 X 有概率密度 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $a>0$ 是待估参数, $X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的样本,

(1) 求 a 的矩估计; (2) 求 a 的极大似然估计.

解 (1) 令 $EX=\int_0^{+\infty}xp(x)dx=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}=\bar{X}$ 得 a 的矩估计为 $\hat{a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{X}$

(2) 似然函数 $L(a)=L(a)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=\left(\frac{4}{a^3\sqrt{\pi}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^2\right)e^{-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

令 $\frac{d\ln L(a)}{da}=0$ 解得 $\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$, 故 a 的极大似然估计为 $\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

3.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3 是 X 的一组样本,试证 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}(X_1+2X_2+X_3)$ 和 $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 都是总体期望 μ 的无偏估计,并比较哪一个更有效?

证明 $\because E\hat{\mu}_1=\mu$, $E\hat{\mu}_2=\mu$ 故 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是总体期望 μ 的无偏估计.

$\because D\hat{\mu}_1=\frac{1}{16}(DX_1+4DX_2+DX_3)=\frac{6}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2>\frac{1}{3}\sigma^2=D\hat{\mu}_2$ 故 $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 更有效

4.冷抽铜丝的折断力服从正态分布.从一批铜丝中任取 10 根测它们的折断力(单位:千克)如下: 578, 572, 570 ,568, 572, 570, 570, 596, 584, 572.求方差 σ^2 和标准差 σ 的 90%的置信区间.已知 $\chi^2_{\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

解 利用计算器计算得样本均值 $\bar{x}=575.2$ 和样本方差 $s=8.7025$; $n=10$, $\alpha=0.1$,

$$\therefore\left(\underline{\sigma^2},\overline{\sigma^2}\right)=\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(40.29, 204.99),\left(\underline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=(6.35,14.32)$$

本科概率论与数理统计作业卷(十)

一、填空题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,2^2)$，$x_1,\cdots,x_{16}$ 是一组样本值，$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i$．已知检验问题为 $H_0:\mu=0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1:\mu\neq 0$. 若拒绝域 $W=\{|\bar{x}|>1.29\}$，则此检验的显著水平 $\alpha=$_____，犯第一类错误的概率是_________.

解 取检验统计量 $U=\frac{\bar{X}-0}{2/\sqrt{16}}=2\bar{X}\sim N(0,1)$，若给定 α，则 $P\{2|\bar{x}|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$

由题设条件知 $P\{|\bar{x}|>1.29\}=P\{2|\bar{x}|>2.58\}=\alpha \quad \Rightarrow u_{\alpha/2}=2.58$

$\because \Phi(2.58)=0.995=1-\alpha/2 \quad \therefore \alpha=0.01$，犯第一类错误的概率为 α 即 0.01

2. 设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,4^2)$ 的样本，其中 μ 未知，检验问题 $H_0:\mu\le\mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1:\mu>\mu_0$，若 H_0 的拒绝域为 $W=\{\bar{x}-\mu_0>C\}$，则常数 $C=$____时可使检验的显著水平 $\alpha=0.05$.

解 因在显著水平 α 下 H_0 拒绝域为 $W=\left\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_\alpha\right\}=\left\{\bar{x}-\mu_0>\frac{4}{5}u_{0.05}\right\}$

$$C=\frac{4}{5}u_{0.05}=\frac{4}{5}\times 1.65=1.32$$

二、选择题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现对 μ 进行假设检验，若在显著性水平 α=0.05 下接受了 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.01$__________

(A) 接受 H_0 (B) 拒绝 H_0 (C) 可能接受，可能拒绝 H_0 (D) 犯第一类错误概率变大

解 应选择(A)

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 未知，检验问题 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，则选取的统计量及其拒绝域分别是__________

(A) $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n}\sqrt{n-1},\quad |T|>t_{\alpha/2}(n-1)$ (B) $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n},\quad |U|>u_{\alpha/2}$

(C) $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n}\sqrt{n-1},\quad |T|>t_{\alpha/2}(n)$ (D) $\chi^2=\frac{nS_n^2}{\sigma^2},\quad \chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

解 应选择(A)

三、计算、证明题

1. 已知某灯泡厂生产的灯泡寿命服从正态分布，即 $X\sim N(1800,100^2)$（单位:小时）.今从生产的一批灯泡中抽取 25 只灯泡进行检测，测得其灯泡平均寿命为 $\bar{x}=1730$ 小时.假定标准差保持不变，问能否认为这批灯泡的平均寿命仍为 1800 小时？

解 已知总体 $X\sim N(\mu,100^2)$，样本容量 $n=25$，样本均值为 $\bar{x}=1730$，

检验问题 $H_0:\mu=1800 \Leftrightarrow H_1:\mu\neq 1800$

H_0 为真时检验统计量 $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

对给定的检验水平 $\alpha=0.05$，$\mu_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

由样本值计算得 $u=\frac{1730-1800}{100/\sqrt{25}}=3.5>1.96=\mu_{0.025}$

故应拒绝 H_0，即不能认为这批灯泡的平均寿命仍为 1800 小时

2.某厂生产的维尼纶纤度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 σ^2 未知,正常生产时有 $\mu\geq 1.4$.现从某天生产的维尼纶中随机抽取 5 根,测得其纤度为 1.32，1.24，1.25，1.14，1.26.问该天的生产是否正常？ （$\alpha=0.05$）

解　利用计算器计算得 $\bar{x}=1.242$, $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.06496$

检验问题 $H_0:\mu\geq 1.4 \quad \Leftrightarrow \quad H_1:\mu<1.4$

H_0 为真时检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

对给定的检验水平 $\alpha=0.05$， $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$

由样本值计算得 $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{1.242-1.4}{0.06496}\times\sqrt{5}=-5.439<-2.1318=t_{0.05}(4)$

故应拒绝 H_0，即认为该天的生产显著不正常

3.某厂用自动包装机包装奶粉,今在某天生产的奶粉中随机抽取 10 袋,测得它们的重量(单位:克)如下: 495, 510, 505, 489, 503, 502, 512, 497, 506, 492.设包装机包装出的奶粉重量服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,若(1)已知 $\mu=500$；(2) μ 未知,分别检验各袋净重的标准差是否为 $\sigma_0=5$ 克？(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

解 检验问题为 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\sigma^2\neq 5^2$

n=10,利用计算器计算得 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2511537$, $\sum_{i=1}^{10}x_i=5011, \bar{x}=501.1, s=7.637$

$\alpha=0.05$ 时 $\chi^2_{\alpha/2}(n)=20.483,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n)=3.247, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=19.023,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=2.7$

(1)已知 $\mu=\mu_0=500$,当 H_0 为真时检验统计量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi^2(n)=\chi^2(10)$

拒绝域为 $W=\{\chi^2<3.247$ 或 $\chi^2>20.483\}$

$$\chi^2=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{10}(x_i-500)^2=\frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-1000\sum_{i=1}^{10}x_i+10\times 250000\right)=\frac{537}{25}=21.48$$

因为 $\chi^2=21.48>\chi^2_{0.025}(10)$　　应拒绝原假设,即不能认为各袋净重标准差为 5 克

(2) μ 未知,当 H_0 为真时检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)=\chi^2(9)$

拒绝域为 $W=\{\chi^2<2.7$ 或 $\chi^2>23.209\}$,计算得 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9\times 7.637^2}{25}\approx 21$

因为 $\chi^2=21>\chi^2_{\alpha/2}(9)$　　应拒绝原假设,即不能认为各袋净重标准差为 5 克

4.设甲乙两车间生产罐头食品,由长期积累的资料知,它们的水分活性均服从正态分布,且均方差分别为 0.142 和 0.105.今各取 15 罐,测得它们的水分活性平均值分别为 0.811 和 0.862.问甲乙两车间生产的罐头食品水分活性均值有无显著差异？(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

解　$n_1=n_2=15, \sigma_1=0.142, \sigma_2=0.105, \bar{x}=0.811, \bar{y}=0.862, \alpha=0.05, \mu_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

检验问题为 $H_0:\mu_1=\mu_2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$ 由于两总体的方差已知，故

当 H_0 为真时,取检验统计量 $u=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$

拒绝域为 $W=\{|u|>1.96\}$　　因为经计算得 $|u|=|-1.12|=1.12<1.96$

故不能拒绝原假设,即认为甲乙两车间生产的罐头食品水分活性均值无显著差异