本科概率论与数理统计作业卷(八)

一、填空题

1.设两个总体 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(0,3^2)$, $X_1,\ldots,X_9$ 和 $Y_1,\ldots,Y_9$ 是分别取自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则统计量 $\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从______分布,参数为_______.

解 $\because \dfrac{X_i}{3}\sim N(0,1),\dfrac{Y_i}{3}\sim N(0,1)\quad \therefore \overline{X}=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i\sim N(0,1)$,$U=\sum_{i=1}^{9}\left(\dfrac{Y_i}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\sim\chi^2(9)$

$\therefore U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\dfrac{\overline{X}}{\sqrt{U/9}}\sim t(9)$ 故应填 t 为 9

2.在天平上重复称量一重量为 a 的物品,假设各次称量的结果相互独立且均服从正态分布 $N(a,0.2^2)$,若以 $\overline{X_n}$ 表示 n 次称量结果的算术平均值,则为使 $P\left\{|\overline{X_n}-a|<0.1\right\}\geq 0.95$,需要称量的次数 n 的最少次数应为____________.

解 $\because \overline{X_n}\sim N\left(a,\dfrac{0.2^2}{n}\right)\qquad \therefore \dfrac{\overline{X_n}-a}{0.2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$$\therefore P\left\{|\overline{X_n}-a|<0.1\right\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X_n}-a}{0.2/\sqrt{n}}\right|<\frac{\sqrt{n}}{2}\right\}=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq 0.95$$

$\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.975 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.96 \Rightarrow n\geq(1.96\times 2)^2\approx 15.37$ 故 n 最少应取 16.

3.设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,2^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_7$ 是取自总体 X 的七个样本,若要求统计量 $a(X_1-2X_2+X_3)^2+b(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(n)$,则应取 a=____, b=____, n=____.

解 $\because E(X_1-2X_2+X_3)=0, D(X_1-2X_2+X_3)=DX_1+4X_2+DX_3=24$

$\therefore X_1-2X_2+X_3\sim N(0,24)\quad \therefore \dfrac{X_1-2X_2+X_3}{\sqrt{24}}\sim N(0,1)\quad \therefore \dfrac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$

类似可得 $\dfrac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(1)$ 由独立 χ^2-分布随机变量具有可加性得

$\dfrac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2+\dfrac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(2)$ 故 $a=\dfrac{1}{24},b=\dfrac{1}{16},n=2$

二、选择题

1.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ 已知, σ^2 未知, X_1,X_2,X_3 是取自该总体的三个样本,则不是统计量的是__________.

(A) $X_1+X_2+X_3$ (B) $\max\{X_1,X_2,X_3\}$ (C) $\sigma^2(X_1+X_2+X_3)$ (D) $\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3)$

解 由于统计量是不含任何未知参数的样本的函数 故应选(C)

2.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ 和 σ^2 均未知, $X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的样本,则下列选项正确的是______

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ (B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n)$ (C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n+1)$ (D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-2)$

解 $\because \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 及,由 t-分布定义 应选(A)

3.设 $X_1,\ldots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, μ 和 σ^2 均已知,则下列选项错误的是____

(A) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ (B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)S}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

解 由数理统计基本知识知(A)、(B)、(C)均正确, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 故应选(D)

4.设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则下列选项正确的是__________

(A) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ (B) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$ (C) $nS^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $n\bar{X} \sim N(0,1)$

解 $\because X_1 \sim N(0,1)$ $\therefore X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$

$$\therefore \frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2/(n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$$ 故应选(B)

三、计算、证明题

1.设总体服从正态分布 $N(0, 0.3^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 X 的一组样本,求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$.

解 $\because \frac{X_i}{0.3} \sim N(0,1), (i=1, \cdots, 10)$ 且它们相互独立 $\therefore Y = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2 = \frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \sim \chi^2(10)$

$$\therefore P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right) = P\left(\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > \frac{1.44}{0.09}\right) = P(Y > 16) = \alpha$$

故 16 是 $\chi^2(10)$ 的右侧分位数,查 $\chi^2(10)$ 分布表得 $\alpha = 0.1$ $\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = 0.1$

2.设总体 X 服从 $(0,\theta)$ 上的均匀分布, $\theta > 0$ 是未知参数, $X_1, \ldots X_n$ 是总体 X 的一组样本,记 $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 和 $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ 分别是 $X_1, \ldots X_n$ 的最小顺序统计量和最大顺序统计量,求 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的概率密度函数 $f_{X_{(1)}}(x)$ 和 $f_{X_{(n)}}(x)$.

解 因总体 X 的密度函数和分布函数分别为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, x \in (0,\theta) \\ 0, \text{其它} \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, 0 \leq x < \theta \\ 0, x \geq \theta \end{cases}$

$$\therefore f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, x \in (0,\theta) \\ 0 \quad , \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, 0 < x < \theta \\ 0 \quad , \quad \text{其它} \end{cases}$$

3.已知 $T \sim t(n)$, 证明 $T^2 \sim F(1,n)$

证明 设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,且 X 与 Y 相互独立,则由 t-分布定义知 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

又因为 $X^2 \sim \chi^2(1)$ 并由 F-分布定义知 $T^2 = \frac{X^2}{Y/n} = \frac{X^2/1}{Y/n} \sim F(1,n)$