本科概率论与数理统计作业卷(五)

一、填空题

1.设 X 和 Y 为两个随机变量,且 $P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=3/7$, $P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=4/7$,则 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$__________.

解 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=P\{X\ge 0 或 Y\ge 0\}=P\{X\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=5/7$

2.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$,则二次方程 $\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根的概率为____________.

解 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, $\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根等价于

$\Delta=4X^2-4Y\ge 0$,即 X 与 Y 应满足 $Y\le X^2$,故所求概率为

$$P=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 2xdx\int_0^{x^2} e^{-y}dy=\int_0^1 2x(1-e^{-x^2})dx=1+(e^{-1}-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

3.已知随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(\mu, 0.5)$,若 $P\{X+Y\leqslant 1\}=0.5$,则 $\mu=$______.

解 由独立性及正态分布性质知 $X+Y\sim N(2\mu,1)$,再据题设条件得

$$P(X+Y\le 1)=\Phi(1-2\mu)=\Phi(1-2\mu)=0.5 \quad\Rightarrow\quad 1-2\mu=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=0.5$$

4.设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量(X,Y)联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\boxed{\frac{1}{24}}$	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{1}{12}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{3}{4}}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	1

解 利用边缘密度 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ 及独立性性质 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 可得

二、选择题

1. 设相互独立的随机变量 X 和 Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$,则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$的分布律为________________.

(A) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (B) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ (C) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ (D) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4}\end{pmatrix}$

解 $P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/4$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=3/4$ 故应选(B)

2.设 $p(x,y)$和 $g(x,y)$ 均为二维连续型随机变量的联合密度,令 $f(x,y)=ap(x,y)+bg(x,y)$.要使 $f(x,y)$是某个二维连续型随机变量的联合密度,则 a,b 应满足____________.

(A) $a+b=1$ (B) $a>0, b>0$ (C) $0\le a\le 1, 0\le b\le 1$ (D) $a\ge 0, b\ge 0$, 且 $a+b=1$

解 要求 $f(x,y)$满足非负性和规范性条件 故应选(D)

3.设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/2$.则 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为__________.

(A) 0　　　　(B) 1　　　　(C) 2　　　　(D) 3

解 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\mid Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\le z\mid Y=1\}P\{Y=1\}$

$$=\frac{1}{2}P\{X\cdot 0\le z\mid Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\mid Y=1\}=\begin{cases}\frac{1}{2}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}\Phi(z), z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}[1+\Phi(z)], z\ge 0\end{cases}$$

仅 $z=0$ 为间断点　　　　　　　　　　　　　　　　故应选(B)

三、计算、证明题

1．已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布 $X_1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 且 $P\{X_1X_2=0\}=1$

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布；　　　(2) 判断 X_1 和 X_2 是否独立并说明理由.

解 (1) 由 $P\{X_1X_2=0\}=1\Rightarrow P\{X_1X_2\ne 0\}=0\Rightarrow P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$

$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}=1/4$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}-P\{X_1=1,X_2=1\}=1/2$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}-P\{X_1=1,X_2=1\}=1/4$

$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-1/4-1/2-1/4=0$ 故 X_1 和 X_2 的联合分布及边缘分布为

X_2 \ X_1	-1	0	1	X_2 的边缘分布律
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/2$	0	$1/2$
X_1 的边缘分布律	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

(2) $\because P\{X_1=0,X_2=0\}=0\ne P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=1/4$，所以 X_1 和 X_2 不独立

2.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$，求

(1) 随机变量 X 的密度 $f_X(x)$；　　　(2) 求概率 $P\{X+Y\le 1\}$

解 (1) $x\le 0$时 $f_X(x)=0$；$x>0$时 $f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$　$\therefore f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从$[0,a]$上的均匀分布,求 $Z=X+Y$ 的分布密度.

解 $f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases}1/a, x\in[0,a]\\ 0, & 其它\end{cases}$ 由独立性得 $f(x,y)=\begin{cases}1/a^2, 0\le x\le a, 0\le y\le a\\ 0, & 其它\end{cases}$

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z^2}{2a^2}, & 0\le z\le a\\ \frac{1}{a^2}\left[a^2-\frac{1}{2}(2a-z)^2\right], & a<z\le 2a\\ 1, & 其它\end{cases}\qquad \therefore f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}\frac{z}{a^2}, & 0\le z\le a\\ \frac{2a-z}{a^2}, & a<z\le 2a\\ 0, & 其它\end{cases}$$