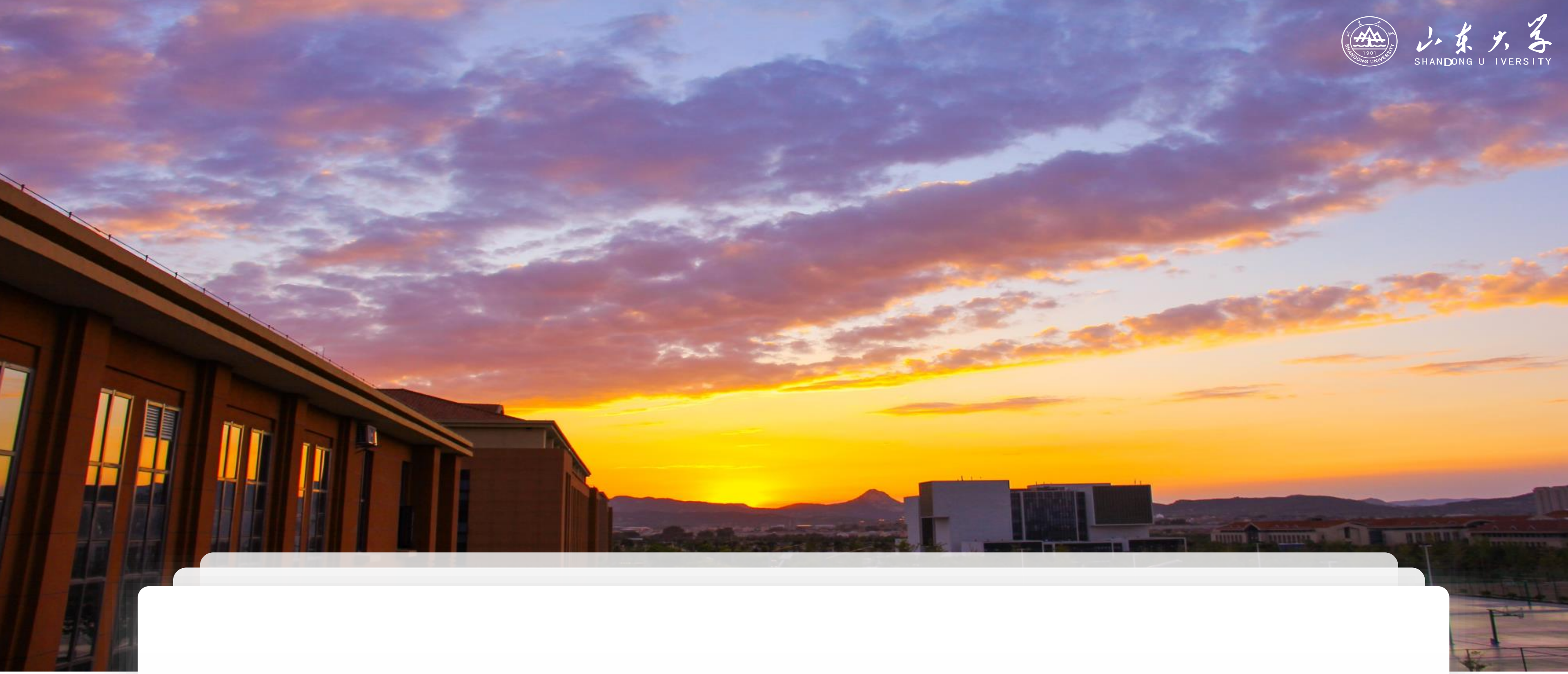

# 程序设计思维与实践

Thinking and Practice in Programming

数学基础与方法应用 | 内容负责：郑得贤



# 1 数学基础

Prefix sum and Difference

# 取模运算

- 取模运算(mod)，也即 C/C++ 中的 “%”
- $a \bmod p = b$，$b$ 是 $a$ 除以 $p$ 的余数
- 读作 “ $a$ 模 $p$ 等于 $b$”
- 为了方便大家观看，就直接用“%”代替 mod 表示

- 任何一个整数 $a$,对于一个确定的模数 $p$，都可以转换为如下形式

$$a = kp + b$$
$$0 < b < p$$
$$k \in Z$$

而此时的 $b$ ,也就等于 $a \bmod p$，而 $k$ 就是$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor$

# 取模运算

- 取模运算有一些运算性质
- $(a \pm b)\%p = (a\%p \pm b\%p)\%p$

$$a = k_1 p + a_0$$

$$b = k_2 p + b_0$$

$$(a \pm b)\%p = \big((k_1 p + a_0) \pm (k_2 p + b_0)\big)\%p = (a_0 \pm b_0)\%p$$

- $(a \times b)\%p = \big((a\%p) \times (b\%p)\big)\%p$

$$(a \times b)\%p = \big((k_1 p + a_0) \times (k_2 p + b_0)\big)\%p = (a_0 \times b_0)\%p$$

- 注意，$\frac{a}{b}\%p \neq \frac{a\%p}{b\%p}\ \%p$
- 根据费马小定理，$\frac{1}{a} = a^{p-2}$

# 取模运算

- 有些题目中会涉及到取模运算，这种题目往往会出现直接乘中间过程爆int或者long long的情况（溢出），而取模的结果不会爆int或者long long
- 比如计算 $(10^{15}\times 10^{16})\%(10^9+7)$，如果我们直接计算 $10^{15}\times 10^{16}$，则会爆long long，但是如果使用取模运算的运算规则，则不会出现爆long long的情况。

- 在编写程序时，一定要注意结果溢出的问题
- 例如模数p是1e9+7，两个int型变量a、b相乘，为了避免溢出，可以写作a*1ll*b%p

# 位运算

- & 按位与
- | 按位或
- ~ 取反
- ^ 按位异或
- >> 右移
- << 左移

# 位运算

- 1<<n 计算 $2^n$
- a<<1 计算 $a \times 2$ a>>1 计算 $a/2$ （向下取整）
- a<<m a>>m
- a&1 若为真，则 $a$ 为奇数，否则为偶数
- a&(1<<m)
- a^1
- a^(1<<m)
- -a=~a+1

# 快速幂

- 计算 $a^b \bmod p$ 的结果 $0 < a, b, p \le 10^9$
- 如果直接循环计算，则需要 $O(b)$ 的复杂度，会TLE

- 引入分治的思想

- $a^b = \begin{cases} \left(a^{\frac{b}{2}}\right)^2, b\text{是偶数} \\ a\left(a^{\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor}\right)^2, b\text{是奇数} \end{cases}$
- 每次可以将 $b$ 除以 2 ，复杂度 $O(\log b)$

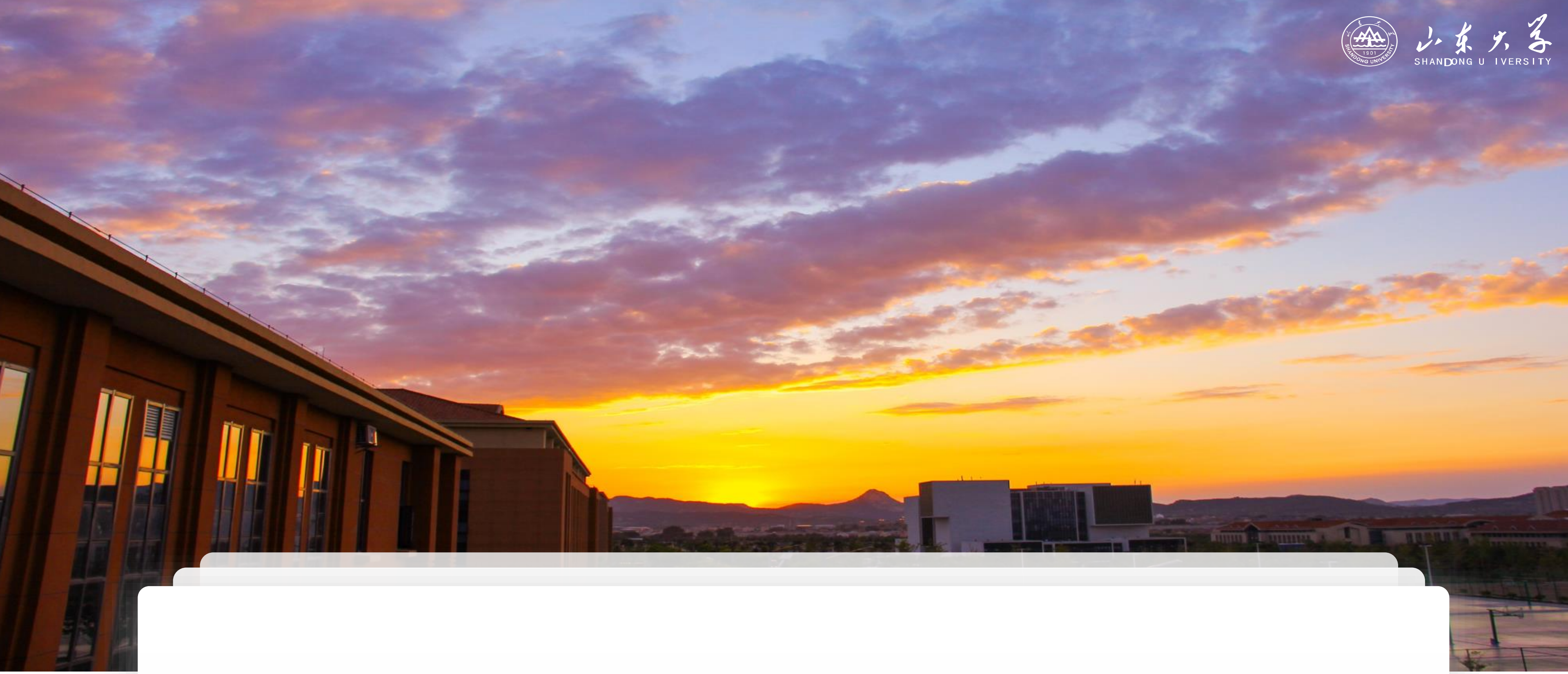
# 快速幂

```
ll Pow1(ll v, ll u)  {
    if (!u) return 1;
    if (u % 2) return v * Pow1(v, u - 1) % mod;
    return Pow1(v * v % mod, u / 2);
}

ll Pow2(ll v, ll u)  {
    ll res = 1;
    while (u)  {
        if (u % 2) res = res * v % mod;
        v = v * v % mod;
        u >>= 1;
    }
    return res;
}
```

# 快速幂

- 计算 $A^b$ 的结果，$A$ 是一个方阵
- 因为矩阵乘法满足结合律，所以这个也可以像快速幂那样运算
- 使用递归写法可能会导致栈溢出



2

# 前 缀 和 与 差 分

Prefix sum and Difference

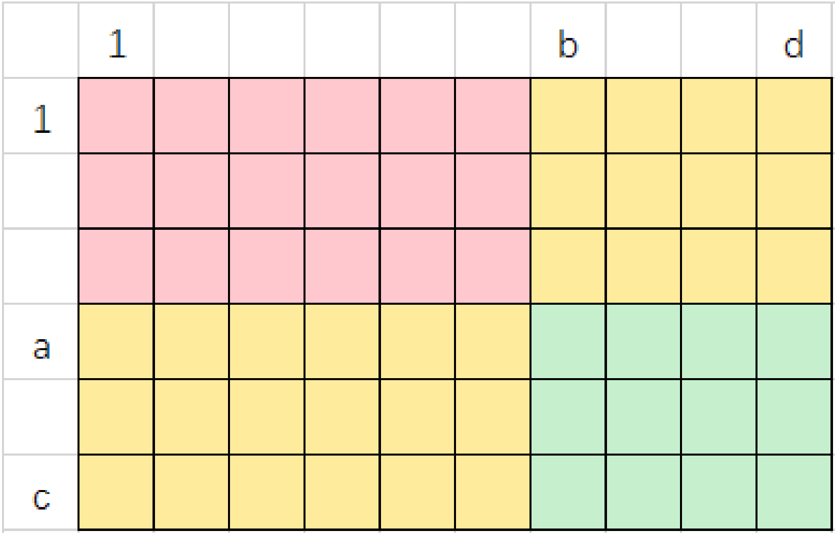
# 前缀和

- 前缀和作用
  - O(1) 求出一个区域所有元素数值之和
  - 当涉及快速求取某一区域和时，可考虑使用前缀和进行快速计算
  - 即前缀和通常用于优化算法中的某一步骤，进而降低复杂度

- 一维前缀和
  - sum[i] = sum[i-1] + a[i]
  - 可以sum数组表示a数组的区间和
  - a[L]+a[L+1] +…+ a[R-1] + a[R]= sum[R] – sum[L-1]

# 二维前缀和

- 二维前缀和涉及基础容斥
- 预处理公式
  - sum[x, y] = sum[x-1, y] + sum[x, y-1] – sum[x-1, y-1]+a[x,y]
- 快速计算区域和
  - 左上角 (a, b)
  - 右下角 (c, d)




  - SUM = sum[c, d] - sum[a-1, d]- sum[c, b-1] + sum[a-1, b-1]

# 差分

- 差分构造方式
  - 原数组 A，差分数组 B，数组范围 [1, n]
  - B[1] = A[1]
  - B[i] = A[i] - A[i-1]
- 差分特点
  - B 数组前缀和 ⇔ A 数组元素值
    - SUM{B[1~i]} = A[i]
- B[1]=A[1]
- B[2]=A[2]-A[1]　　B[2]+B[1]=A[2]-A[1]+A[1]=A[2]
- B[3]=A[3]-A[2]　B[3]+B[2]+B[1]=A[3]-A[2]+A[2]=A[3]
- …

# 差分

- 差分特点
  - A 数组的区间加 ⇔ B 数组的单点修改
    - A[L]~A[R] 均加上 c
    - 等价于 B[L] += c, B[R+1] -= c
- B[1]=A[1]+C
- B[2]=A[2]-A[1]
  - B[2]+B[1]=A[2]-A[1]+A[1]+C= A[2]+C
  - B[3] + B[2]+B[1]=A[3]-A[2]+A[2]+C=A[3]+C
  - ...

# 差分

- 差分特点
  - A 数组的区间加 ⇔ B 数组的单点修改
    - A[L]~A[R] 均加上 c
    - 等价于 B[L] += c, B[R+1] -= c

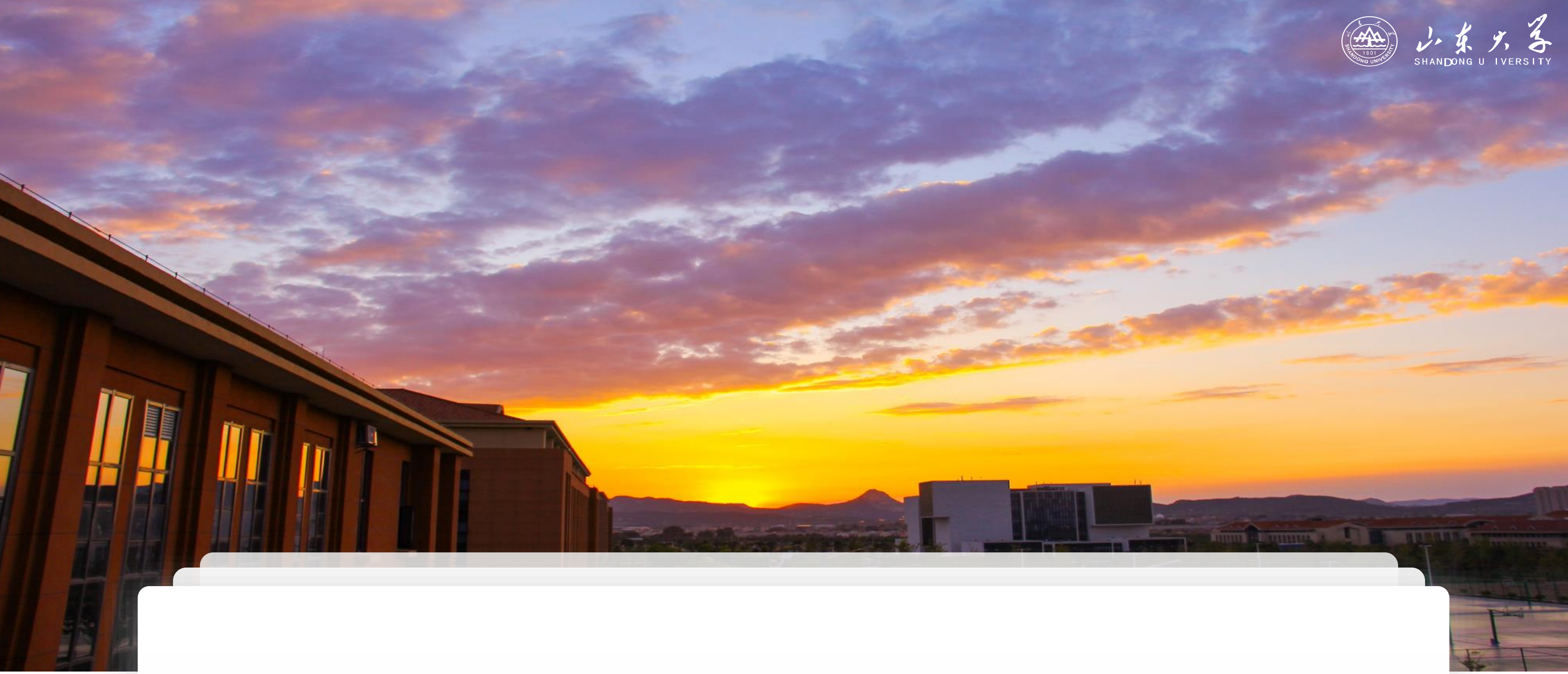
- 通俗的解释是，数组A的第i个元素是数组B前i个元素的和。数组B前i个元素中，只要有一个元素加了C，那么数组A的第i个元素就会加上C。所以对数组B的第i个元素加C，会导致数组A中第i、i+1、i+2..n个元素都加上C。

# 3 例 1 讲 解

E x a m p l e 4

# 例1讲解

- 题意
  - 长度为 n 的数组，一共 q 次操作，$1 \le n, q \le 10^5$
  - 每次操作给出 L, R，c，表示区间 [L, R] 中各个数均加上 c
  - 求 q 次操作结束后，数组中各个元素值?
- 思路
  - 暴力做法，$O(qn)$，超时
  - 将原数组转变为差分数组，将区间修改转变为单点修改
  - A[L, R] += c ⇔ B[L] += c, B[R+1] -= c
  - B 数组前缀和即为 A 数组最终数值， $O(\mathrm{n} + q)$



4

# 尺取法

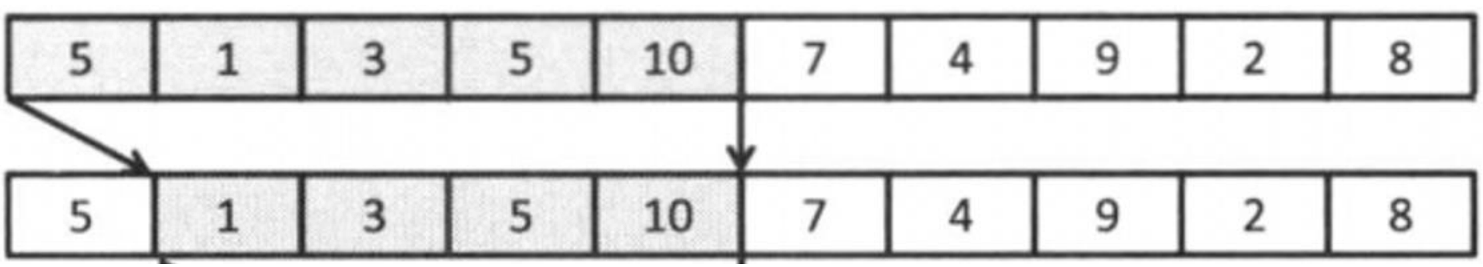
Two Pointers

# 尺取法

- 概念讲解
  - 尺取法，又称双指针法，是数组上的一种常见操作
  - 以下述经典例题为例进行讲解
- 题意
  - 长度为 n 的数组，每个数均为正整数
  - 给出正整数 S，要求 O(n) 内求出长度最小的连续区间，使 $S \leq$ 区间和
- 样例
  - [1 2 3 4 5]，S = 11
  - [1 2 3 4 5]，$11 \leq 3+4+5$，答案为 3

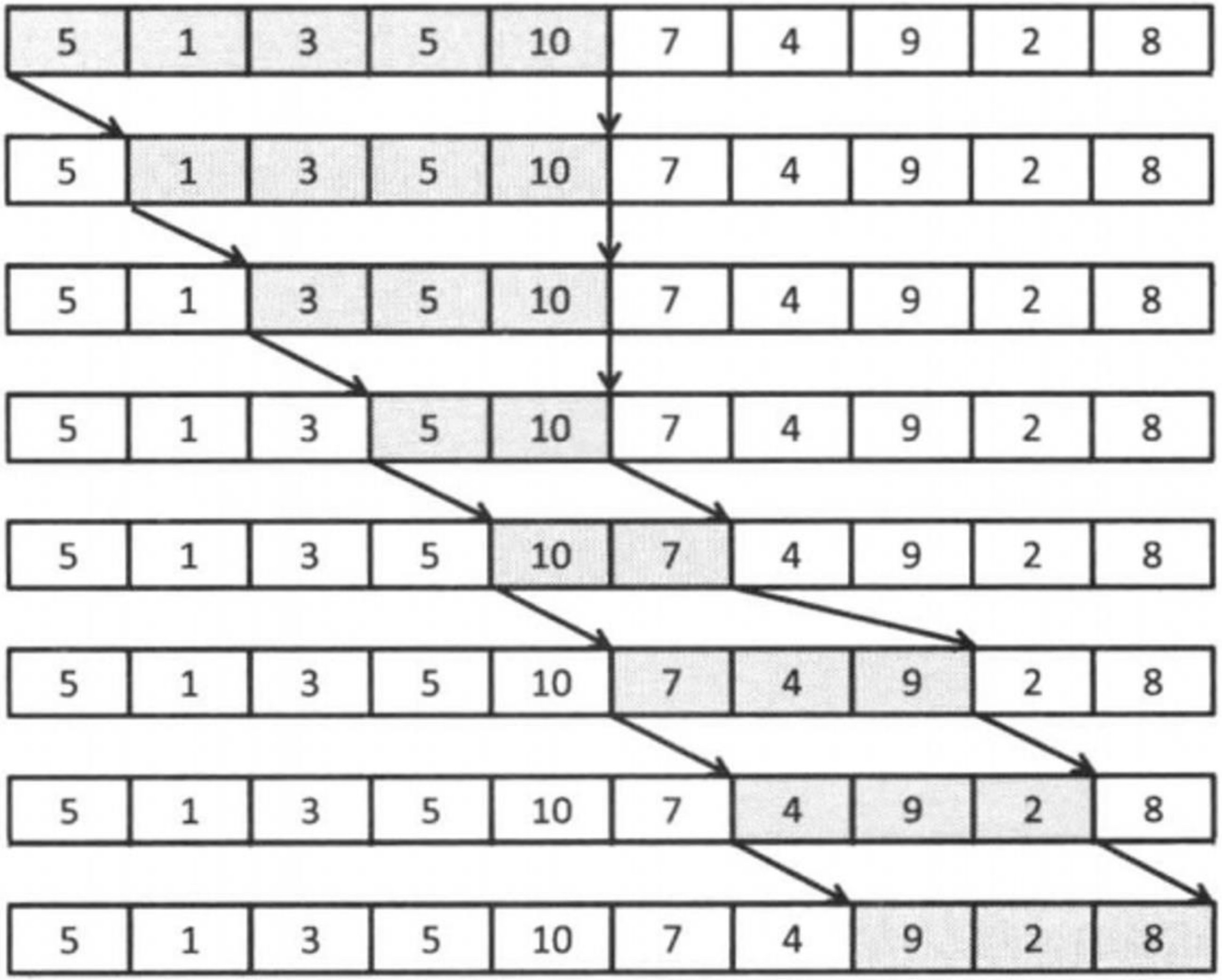
# 尺取法

- 以 [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8]，S = 15 来例介绍该算法
- 具体流程
  - 维护双指针 L、R，初始 L = R = 1，sum = a[L]
  - 当 sum >= S 时，符合要求，用 (R-L+1) 更新答案，且 L++；若 L = R，则 L++，R++
  - 当 sum < S 时，不符合要求，R++



# 尺取法

- [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8]，S = 15



# 简要证明

- [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8]，S = 15
- 根据算法流程可知
  - 左端点 L 能够遍历到区间中的所有点
  - 对于每个左端点 L 所形成的最终区间 [L,R]
    - sum[L~R] 如果小于 S，则令R右移
    - sum[L~R] 如果大于等于S，此时 sum[L~R] ≥ S，sum[L~(R-1)] < S
- 对于一个左端点 L ， 最后找到的一个区间 [L,R] ， R是满足条件的最小值
- 因此答案区间一定会在上述尺取流程中出现

# 尺取算法总结

- 维护双指针（下标）
  - 尺取法，又称双指针法，即在遍历数组过程中，用两个相同方向进行扫描
- 什么情况下能使用尺取法?
  - 所求解答案为一个连续区间
  - 对于一个左端点 L， [L,R] 的区间是否满足条件是单调的
- 经典例题
  - 长度最小的区间和 ≥ S 的连续区间

# 5 例 2 讲 解

Example 3

# 例2讲解

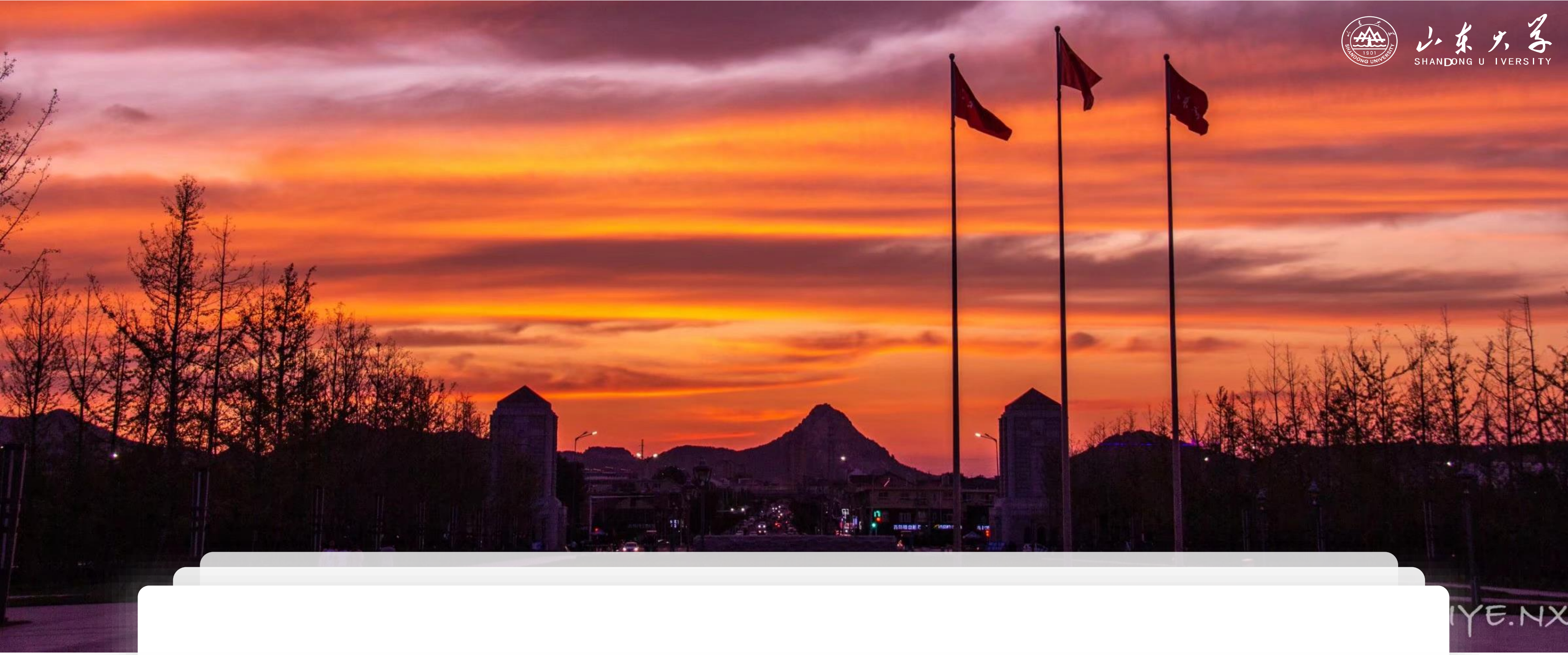
- 题意
  - 一个长度为 n 的字符串 s，其中仅包含 'A', 'B', 'C', 'D' 四种字符（n 为 4 的倍数）
  - 如果四种字符在字符串中出现次数均为 n/4，则其为一个平衡字符串
  - 现可以将 s 中连续的一段,将段内字符替换成任意字符，使其变为一个平衡字符串，问替换子串的最小长度?
- 样例
  - s = "AABC"
  - 转变为 "DABC"，答案为 1

# 解题思路

- 是否可以用尺取法?
  - 所求解答案为一个连续区间 ✓
  - 对于一个左端点 L， [L,R] 的区间是否满足条件单调✓
    - 若[L,R]不满足要求，[L,R-1]也不满足要求
    - 若[L,R]满足要求，[L,R+1]满足要求，第R+1个字符替换成本身
    - 当前 [L, R] 满足要求，则 L++
    - 当前 [L, R] 不满足要求，则 R++
- 因此可以用尺取法，思考如何判断当前 [L, R] 是否满足要求

# 解题思路

- 给定 [L, R]，判断是否满足要求?
  - 用 cntA, cntB, cntC, cntD 分别记录在区间 [L, R] 字符 'A', 'B', 'C', 'D' 的个数
  - 用 sumA, sumB, sumC, sumD 表示字符 ‘A’，‘B’，‘C’，‘D’的总个数
  - 如果 sumA-cntA>n/4或者sumB-cntB>n/4或者sumC-cntC>n/4或者sumD-cntD>n/4，则不符合条件



# 6 单调栈

Monotone Stack

# 单调栈

- 单调栈 = 单调 + 栈
- 单调
  - 单调递增 1 2 3 4 5 6 7...
  - 单调递减 7 6 5 4 3 2 1...
  - 单调非减 1 1 2 3 4 4 5...
  - 单调非增 7 7 6 5 4 4 3...
- 栈
  - 一种线性数据结构，支持 push 和 pop 操作
  - 已经在「数据结构与算法」课程中学习过
  - 满足先进后出 FILO 原则
- 单调栈 = 栈内元素 **自栈顶到栈底** 满足 **单调性**

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作
  - 现有一数组 [10, 3, 7, 4, 12]，从左到右依次入栈。
  - 如果栈为 **空** 或者栈顶元素 **大于** 入栈元素，则入栈。
  - 否则，入栈则会破坏栈内元素的单调性，则需要将不满足条件的栈顶元素全部弹出后，将入栈元素入栈。

- 单调递减栈与之相反

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 3 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈;

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 7 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 4 7 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 7 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作　[ 10 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [ ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；栈空，入栈

# 单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [ 12 ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；栈空，入栈

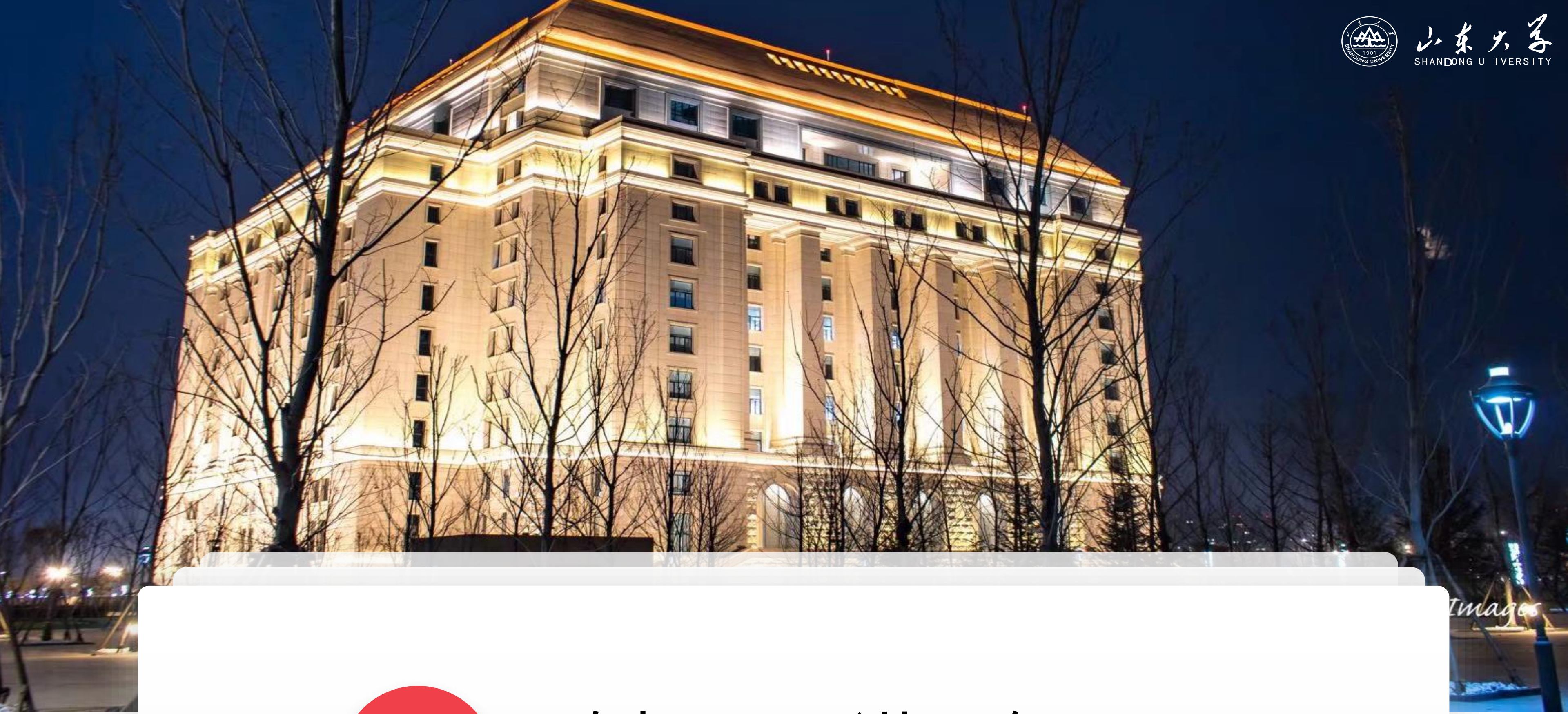
# 单调栈

- 单调递增栈的伪代码

```
INITIALIZE stack
FOR each element u DO
  WHILE stack.size() > 0 and stack.top() <= u DO
    stack.pop()
  END
  stack.push(u)
END
```

# 单调栈

- 单调栈的作用
  - 线性的时间复杂度
  - **单调递增栈** 可以找到数组中往左/往右第一个比当前元素 **大** 的元素
  - **单调递减栈** 可以找到数组中往左/往右第一个比当前元素 **小** 的元素
  - 可以求得以当前元素为最值的最大区间



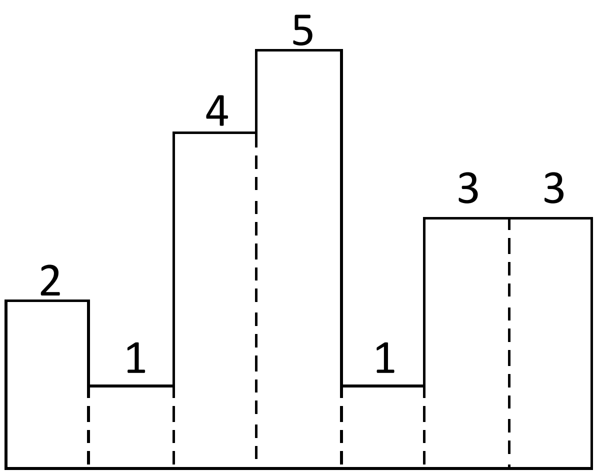
7

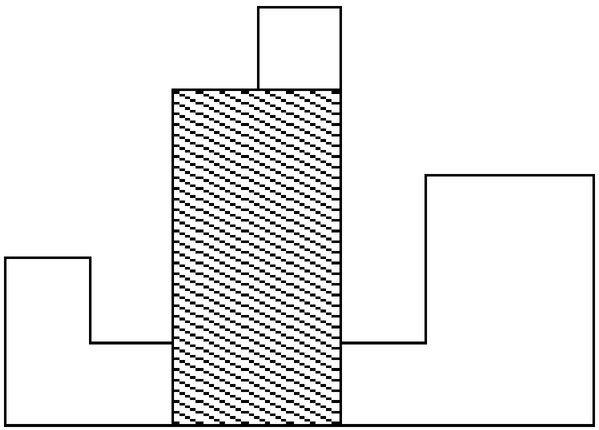
# 例 3 讲 解

E x a m p l e 1

# 例3讲解

- 给一个直方图，求直方图中的最大矩形的面积
- $1 \leq n \leq 100000$
- n=7, a = [2 1 4 5 1 3 3]
- Ans = 8



# 例3讲解

- 如果确定了一个矩形的左端点为l，右端点为r，那么矩形的高怎么确定？
  - 根据题意，高度不能超过l到r中的最小值
  - 要是整个矩形最大，那么高度就确定为l到r中的最小值
- 同理，如果确定了矩形的高度，那么左端点一定是越靠左，右端点越靠右，这个矩形的面积才可能最大
  - 左端点可以确定为往左数第一个小于此高度点右边的点
  - 右端点可以确定为往右数第一个小于此高度点左边的点

- 两遍单调栈处理出以每个点为高时的左右端点

# 8 单调队列

Monotone Queue

# 单调队列

- 单调队列 = 单调 + 队列
- 单调
  - 单调递增 1 2 3 4 5 6 7…
  - 单调递减 7 6 5 4 3 2 1…
  - 单调非减 1 1 2 3 4 4 5…
  - 单调非增 7 7 6 5 4 4 3…
- 队列
  - 一种线性数据结构，支持 push 和 pop 操作
  - 已经在「数据结构与算法」课程中学习过
  - 满足先进先出 FIFO 原则
- 单调队列 = 队列里的元素满足 **单调性**

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作
  - 现有一数组 [10, 3, 7, 4, 12]，从左到右依次入队。
  - 如果队列为 **空** 或者队尾元素 **小于** 入队元素，则入队。
  - 否则，入队则会破坏队内元素的单调性，则需要将不满足条件的队尾元素全部出队后，将入队元素入队。

- 单调递减队列与之相反

# 单调队列

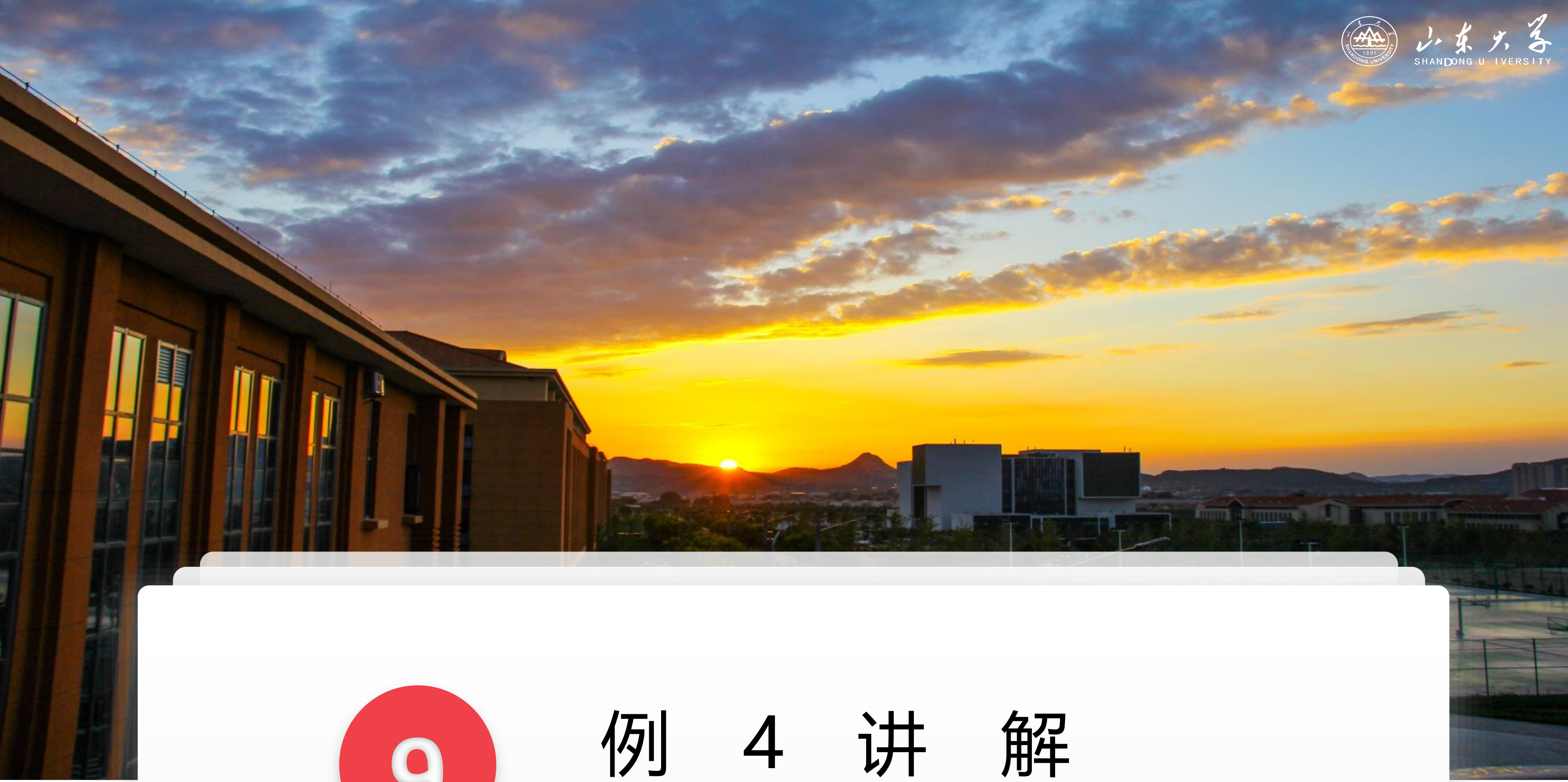
- 单调队列的维护过程与单调栈相似
- 区别在于
  - 单调栈只维护一端(栈顶)，而单调队列可以维护两端(队首和队尾)
  - 单调栈通常维护 **全局** 的单调性，而单调队列通常维护 **局部** 的单调性

- 由于单调队列 **可以队首出队** 以及 **前面的元素一定比后面的元素先入队** 的性质，使得它可以维护局部的单调性
- 考虑区间[L,R]，依次将区间内的数加入单调递增队列，则队首是区间最小值。若区间要变成[L+1,R+1]，将R+1加入队列。判断第L个元素是不是队首。如果不是队首，说明队首元素在L后面，是区间[L+1,R+1]最小值。如果是队首，将队首出队，新队首是区间[L+1,R+1]最小值。
- 时间复杂度与单调栈一致

# 单调队列

- 单调递增队列的伪代码

```
INITIALIZE queue
FOR each element u DO
  WHILE queue.size() > 0 AND queue.front() does not belong to the interval DO
    queue.pop_front()
  END
  WHILE queue.size() > 0 AND queue.back() > u DO
    queue.pop_back()
  END
  queue.push(u)
END
```



9

# 例 4 讲 解

E x a m p l e  2

# 例4讲解

- 有一个长度为 n 的数列和一个大小为 k 的窗口，窗口可以在数列上来回移动. 现在想知道在窗口从左往右滑的时候，每次窗口内数的最大值和最小值分别是多少.
- $1 \leq \mathrm{n} \leq 1000000, 1 \leq k \leq n$

# 例4讲解

- 例如当数列为 [ 1 3 -1 -3 5 3 6 7 ], k=3 时

| Window position | Minimum value | Maximum value |
|---|---|---|
| [1 3 -1] -3 5 3 6 7 | -1 | 3 |
| 1 [3 -1 -3] 5 3 6 7 | -3 | 3 |
| 1 3 [-1 -3 5] 3 6 7 | -3 | 5 |
| 1 3 -1 [-3 5 3] 6 7 | -3 | 5 |
| 1 3 -1 -3 [5 3 6] 7 | 3 | 6 |
| 1 3 -1 -3 5 [3 6 7] | 3 | 7 |

# 例4讲解

- 如果查找全局的最小值，可以使用单调栈，尽管有些多余
- 现在要求查找窗口内的最小值，是一个 **局部** 的概念

- 维护一个单调递增队列，队列中的元素均属于当前窗口
- 当元素不属于当前窗口时，将队首元素弹出即可

- 可以手动模拟一下整个过程

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ ]
  - 1 入队时，队空，入队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　　[ 1 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [ 1 3 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [ 1 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　　[ ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ -1 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [ ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ -3 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ -3 5 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素 5 大于 3，5出队

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ -3 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ -3　3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ 3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ 3 6 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3
  - 7入队时，队尾元素6小于7，入队，并记录当前最小值3

# 单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ 3 6 7 ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3
  - 7入队时，队尾元素6小于7，入队，并记录当前最小值3


# 感谢收听

Thank You For Your Listening