本科概率论与数理统计作业卷(三)

一、填空题

1.设有随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 X 的分布函数为________________.

解　$x<-1$时 $F(x)=P\{X\le x\}=0$；$-1\le x<0$时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}$

$0\le x<1$时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$；$x\ge 1$时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\le x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

2.如果离散型随机变量 X 的分布律如下表所示,则 C=____________.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{2C}$	$\frac{1}{3C}$	$\frac{1}{4C}$

解　由分布律规范性得 $\sum_{i=1}^{4}P(x_i)=\frac{1}{C}+\frac{1}{2C}+\frac{1}{3C}+\frac{1}{4C}=\frac{25}{12C}=1 \Rightarrow C=\frac{25}{12}$

3.已知 X 的分布律如下表所示

X	0	1	2	3	4	5
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

则 $Y=(X-2)^2$ 的分布律为

Y	
$P\{Y=y\}$	

解　Y 的可能取值为 0,1,4,9

$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3}$;　$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

$P\{Y=4\}=P\{X=0\}+P\{X=4\}=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}=\frac{11}{36}$;　$P\{Y=9\}=P\{X=5\}=\frac{1}{9}$

故 $Y=(X-2)^2$ 的分布律为

Y	0	1	4	9
$P\{Y=y\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

二、选择题

1.设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$是某两个随机变量的分布函数,为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$成为某一随机变量的分布函数,在下列给定的各组数值中应取____________.

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　(B) $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$　(C) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

解 由分布函数规范性得 $F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$　故应选(A)

2.设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k,(k=1,2,3,\cdots)$ 且 $b>0$,则 λ 为__________

(A)$\lambda>0$的任意实数　(B) $\lambda=b+1$　(C)$\lambda=\frac{1}{1+b}$　(D) $\lambda=\frac{1}{b-1}$

解 由分布律规范性得 $\sum_{k=1}^{\infty}b\lambda^k=b\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k=b\frac{\lambda}{1-\lambda}=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{1+b}$　故应选(C)

三、计算、证明题

1.一个袋中有 5 只球,编号为 1,2,3,4,5,在其中任取 3 只,以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码,求 X 的概率分布.

解 若最大号码为 k,则另外两只球只能在号码为 $1,2,\ldots,k-1$ 的 $k-1$ 只球中取出,故

$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^2}{C_5^3}=\frac{(k-1)(k-2)}{20},(k=3,4,5)$，故 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2.一汽车沿一街道行使需要通过三个均设有红绿信号的路口,每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立,且红、绿两种信号显示时间差相等,以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数, 求 X 的概率分布.

解 由题意知 X 的可能取值为 0,1,2,3,设 A_i 表示“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”,

则 A_1,A_2,A_3 相互独立且 $P(A_i)=P(\bar{A}_i)=\frac{1}{2},(i=1,2,3)$，因此有

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2};\quad P\{X=1\}=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2^2};$$

$$P\{X=2\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2^3};$$

$$P\{X=3\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=\frac{1}{2^3}$$，故 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.设随机变量 X 的可能取值为 $-1,0,1$,且取这三个值的概率比为 1:2:3, 求 X 的概率分布.

解 据题意可设 X 取 $-1,0,1$ 的概率为 $p,2p,3p$,由分布律规范性得 $p+2p+3p=6p=1$

从而得 $p=\frac{1}{6}$，故 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

本科概率论与数理统计作业卷(四)

一、填空题

1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,则 $P\{X=4\}=$________.

解 由题意得 $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \Rightarrow \lambda=2,0$(舍去 0) $\therefore P\{X=4\}=\frac{2^4 e^{-2}}{4!}=\frac{2e^{-2}}{3}\approx 0.0902$

2. 设随机变量 X 服从参数为$(2,p)$的二项分布,随机变量 Y 服从参数为$(3,p)$的二项分布,若 $P\{X\geq 1\}=\frac{5}{9}$,则 $P\{Y\geq 1\}$ =______________.

解 $\frac{5}{9}=P\{X\geq 1\}=1-P\{X<1\}=1-C_2^0 p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2 \quad \Rightarrow \quad (1-p)=\frac{2}{3}$

$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y<1\}=1-C_3^0 p^0(1-p)^3=1-(1-p)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}\approx 0.7037$

3. 设随机变量 $X\sim U(0,2)$,则 $Y=X^2$ 在$(0,4)$内有概率密度 $f_Y(y)=$____________.

解 $0<y<4$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\left\{X\leq\sqrt{y}\right\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{y} \quad \therefore f_Y=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$

二、选择题

1.设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$,以 Y 表示对 X 的三次独立重复观测中事件$\left\{X\leq\frac{1}{2}\right\}$出现的次数,则 $P\{Y=2\}=$______________.

(A)$\frac{9}{64}$ (B)$\frac{7}{64}$ (C)$\frac{3}{64}$ (D)$\frac{9}{16}$

解 $p=P\left\{X\leq\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$,$P\{Y=2\}=C_3^2 p^2(1-p)=\frac{9}{64}$ 故应选(A)

2.设随机变量 X 具有对称的概率密度,即 $f(-x)=f(x)$,则对任意 $a>0$,$P(|X|>a)=$__________.

(A) $1-2F(a)$ (B) $2F(a)-1$ (C) $2-F(a)$ (D) $2[1-F(a)]$

解 $\because f(-x)=f(x) \quad \therefore F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=1-F(a)$

$\therefore P(|X|>a)=P(X<-a)+P(X>a)=F(-a)+1-F(a)=2[1-F(a)]$ 故应选(D)

3.设随机变量 $X\sim N(\mu,4^2),Y\sim N(\mu,5^2)$,记 $p_1=P\{X\leq\mu-4\},p_2=P\{Y\geq\mu+5\}$,则_____.

(A)对任何实数μ,都有 $p_1=p_2$ (B)对任何实数μ,都有 $p_1<p_2$

(C)只对 μ 的个别值,才有 $p_1=p_2$ (D)对任何实数μ,都有 $p_1>p_2$

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow P(X\leq x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\Phi(-x)=1-\Phi(x)$,故

$p_1=P\{X\leq\mu-4\}=\Phi\left(\frac{\mu-4-\mu}{4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$

$p_2=P\{Y\geq\mu+5\}=1-P\{Y<\mu+5\}=1-\Phi\left(\frac{\mu+5-\mu}{5}\right)=1-\Phi(1)$ 故应选(A)

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$ 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5, 则 $\mu=$______

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件为 $\Delta=4^2-4X<0 \Rightarrow X>4$, 由题意

$P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma}=0 \Rightarrow \mu=4$ 故应选(D)

三、计算、证明题

1. 连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$,求

(1) 系数 A； (2)X 落在区间内的概率 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$； (3) X 的分布函数.

解 (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\big|_{-1}^{1}=A\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{\pi}$

(2) $P\left\{-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2}=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{6}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\dfrac{1}{3}$

(3) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

2. 某地区的月降水量 X(单位 mm)服从正态分布 $N(40,4^2)$,试求该地区连续 10 个月降水量都不超过 50mm 的概率.

解 设 A= “该地区某月降水量不超过 50mm”，由 $X\sim N(40,4^2)$ 得

$$p=P(A)=P(X\le 50)=\Phi\left(\frac{50-40}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938,因此$$

该地区连续 10 个月降水量都不超过 50mm 的概率 $P=p^{10}=0.9938^{10}=0.9396$

3. 某地区一个月内发生交通事故的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布,据统计资料知，该地区一个月内发生 8 次交通事故的概率是发生 10 次交通事故概率的 2.5 倍,求

(1) 一个月内分别发生 8 次和 10 次交通事故的概率；

(2) 一个月内至少发生 1 次交通事故的概率；

(3) 一个月内最多发生 2 次交通事故的概率.

解 由题意 $P\{X=8\}=2.5P\{X=10\}$ 即 $\dfrac{\lambda^8e^{-\lambda}}{8!}=2.5\times\dfrac{\lambda^{10}e^{-\lambda}}{10!} \Rightarrow \lambda=6$

(1) $P\{X=8\}=\dfrac{6^8e^{-6}}{8!}\approx 0.1033$; $P\{X=10\}=\dfrac{6^{10}e^{-6}}{10!}\approx 0.0413$

(2) $P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-6}\approx 0.9975$

(3) $P\{X\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}+\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}+\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}=25e^{-\lambda}=25e^{-6}\approx 0.062$

4.设随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$,求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 采用常规方法求解：先求分布函数,再求导数得密度函数：

当 $y<1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx=1-\dfrac{1}{y}$

$\therefore f_Y(y)=\dfrac{dF_y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1 \\ 0, & y<1\end{cases}$ 也可用 $y=g(x), f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\cdot\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$ 直接求