本科概率论与数理统计作业卷(六)

一、填空题

1.设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E\left(X+\mathrm{e}^{-2X}\right)=$_______.

解　$E(X+\mathrm{e}^{-2X})=EX+E\mathrm{e}^{-2X}=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}dx+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

2.设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=2^k\right\}=\frac{2}{3^k},\ k=1,2,\cdots$,则 EX=_______.

解　$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p(x_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\cdot\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=2\times\frac{2/3}{1-2/3}=4$

3.已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 则 $E(3X\text{-}2)$=_________.

解　由 X 服从参数为 2 的泊松分布知 EX=2,故 $E(3X\text{-}2)$= $3EX\text{-}2$=4

4.箱中有 N 只球,其中白球数是随机变量 X 且 $EX=n$,则从箱中任取一球为白球的概率为__________.

解 记 A 表示“任取一球是白球”,则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{N}P\left\{A\mid X=k\right\}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}P\left\{X=k\right\}\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k\,P\{X=k\}=\frac{1}{N}EX=\frac{n}{N}$$

5.设 X 与 Y 是两个独立且均服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$ 的随机变量,则 $E\left|X-Y\right|$=________.

解　由独立正态分布随机变量之性质得 $Z=X-Y\sim N(0,1)$

$$E\left|X-Y\right|=E\left|Z\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

二、选择题

1.设 $P(X=n)=a^n$,$(n=1,2,\cdots)$ 且 EX=1,则 a=___________.

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解　$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}na^n=a\sum_{n=1}^{+\infty}na^{n-1}=a\frac{d}{da}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a^n\right)=a\frac{d}{da}\left(\frac{a}{1-a}\right)$

$=a\frac{d}{da}\left(1-\frac{1}{1-a}\right)=\frac{a}{(1-a)^2}=1\qquad\Rightarrow\quad a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

由分布律性质知 $0\le a\le 1$,　　故应选(B)

2.设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则 $Y=X^3+e^{-2X}$ 的数学期望为_________.

(A) $\frac{8}{3}$　　(B) $\frac{10}{3}$　　(C) $\frac{14}{3}$　　(D) $\frac{19}{3}$

解　$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $E(X^3)=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$　(或反复用分部积分计算)

$E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}\qquad\therefore E(Y)=E(X^3)+E(e^{-2X})=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$　　故应选(D)

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$,则数学期望 EX=_________.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{6}$

解 由于密度函数为偶函数,积分区间对称,故 EX=0(也可直接计算)　　故应选(A)

三、计算、证明题

1.设在一规定时间间隔里某电器设备处于最大负荷的时间 X(以分计)是一个随机变量,其密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(1500)^2}, & 0\le x\le 1500\\ \dfrac{3000-x}{(1500)^2}, & 1500<x\le 3000\\ 0 & ,其它\end{cases}$，求数学期望 EX.

解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{1500}x\dfrac{x}{1500^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\dfrac{3000-x}{1500^2}dx$ (第二个积分作变换 $y=x-1500$)

$$=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}(y+1500)\frac{1500-y}{1500^2}dy=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}\frac{1500^2-y^2}{1500^2}dy$$

$$=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}1dy-\int_0^{1500}\frac{y^2}{1500^2}dy=\int_0^{1500}1dy=1500(\text{分钟})$$

2.若在 n 把外形相同的钥匙中只有一把能打开门上的锁,现随机取一把去试开(试开后除去)直到打开门上的锁为止,试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望：

(1) 写出 X 的分布律； (2) 不写出 X 的分布律.

解 (1) X 的可能取值为 1,2,…,n，易得 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

(2) 引进随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$,令 $X_k=\begin{cases}k,若第\,k\,次把门打开\\ 0,其他\end{cases}$,则 $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$

$$\because P\{X_k=k\}=\frac{1}{n},P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{n}\qquad\therefore EX_k=\frac{k}{n}$$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n+1}{2}$$

3. 从甲地到乙地的汽车上有 20 位乘客,沿途经过 10 个车站,设每位乘客在各个车站下车是等可能的,到达一个车站时没有乘客下车就不停车.以 X 表示停车次数,求 EX.

解 任一乘客在第 k 站不下车的概率为 $\dfrac{9}{10}=0.9$,故第 k 站无人下车的概率为 0.9^{20}

令 $X_k=\begin{cases}1,第\,k\,站有人下车\\ 0,第\,k\,站无人下车\end{cases}$，则 $X_k\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.9^{20} & 1-0.9^{20}\end{pmatrix},(k=1,\ldots,10),X=\sum_{k=1}^{10}X_k$

$EX_k=1-0.9^{20},(k=1,2,\ldots,10)$ $\qquad\therefore\ E(X)=\sum_{k=1}^{10}EX_k=10\left(1-0.9^{20}\right)\approx 8.78$

4.在半圆直径上任取一点 P,过 P 作直径的垂线交圆周于 Q,设圆的半径为 1,求数学期望 $E(PQ)$和方差 $D(PQ)$.

解 以圆心为原点,P 点所在的直线为 x 轴建立坐标系,设 P 点的横坐标为 X,

则 $X\sim U[-1,1]$, X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1/2, & -1\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$, $PQ=\sqrt{1-X^2}$

$$\because E(PQ)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{4};E(PQ)^2=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{1}{2}dx=\frac{2}{3}\qquad\therefore D(PQ)=\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{16}$$

本科概率论与数理统计作业卷(七)

一、填空题

1.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$,已知 $EX=\dfrac{3}{5}$,则 DX=______.

解 由规范性 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(a+bx^2)\mathrm{d}x=a+\dfrac{1}{3}b$ 得 $3a+b=3$ ……(1)

由 $\dfrac{3}{5}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(a+bx^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$ 得 $2a+b=\dfrac{12}{5}$ ……(2)

联立(1)(2)两式解得 $a=\dfrac{3}{5},b=\dfrac{6}{5}$ $\quad\therefore EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{3x}{5}+\dfrac{6x^3}{5}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{3x^2}{5}+\frac{6x^4}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{25}\quad\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}$$

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且都服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Y=\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$,则 Y^2 的数学期望等于____________.

解 $\because EX_i=\lambda,(i=1,2,3)$ $\quad\therefore EY=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}EX_i=\lambda$, $DY=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{3}DX_i=\dfrac{1}{3}\lambda$

$$\Rightarrow\quad EY^2=(EY)^2+DY=\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$$

3. 设 10 次独立射击中命中目标次数为 X,每次射击命中目标概率为 0.4,则 EX^2=_____.

解 由题意 $X\sim B(10,0.4)$, 因此 $EX=10\times0.4=4$, $DX=10\times0.4\times(1-0.4)=2.4$

$\therefore EX^2=DX+(EX)^2=2.4+4^2=18.4$

4.已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}$,则 EX=_____, DX=______.

解 $\because f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times\frac{1}{2}}}$ $\quad\therefore X\sim N\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $EX=1$, $DX=\dfrac{1}{2}$

5. 设随机变量 X 的方差为 2,则据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-EX|\geq2\}\leq$_____.

解 由切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ 得 $P\{|X-EX|\geq2\}\leq\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$

二、选择题

1.设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$,已知 EX=0.5,DX=0.15,则关于系数 a,b,c,的正确选项为______

(A) $a=12,b=-12,c=3$ (B)$a=12,b=12,c=3$

(C)$a=-12,b=12,c=3$ (D)$a=-12,b=-12,c=3$

解 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx+c)dx$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b+c=1$ ……(1)

由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^1x(ax^2+bx+c)dx=0.5$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{2}c=0.5$ ……(2)

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx-0.5^2=\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c-0.5^2=0.15$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{5}a+\dfrac{1}{4}b+\dfrac{1}{3}c=0.4\cdots(3)$ 解(1)(2) (3 得 $a=12,b=-12,c=3$ 故应选(A)

2.设离散型随机变量 X 服从 0-1 分布,即 $P\{X=0\}=p, P\{X=1\}=1-p$,则正确的是______

(A) $EX=p$ (B) $EX<1-p$ (C) $DX=p^2$ (D) $DX\le 0.25$

解 $\because EX=0\times p+1\times(1-p)=1-p, EX^2=0^2\times p+1^2\times(1-p)=1-p$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=p-p^2=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}=0.25$ 故应选(D)

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X~$B(10,0.3)$,Y~$B(10,0.4)$,则 $E(2X-Y)^2=$______

(A) 12.6 (B) 14.8 (C) 15.2 (D) 18.9

解 由二项分布性质 $EX=np, DX=np(1-p)$ 得 $EX=3, DX=2.1, EY=4, DY=2.4$

$\therefore E(2X-Y)=2EX-EY=2$ 再由独立性得 $D(2X-Y)=4DX+EY=10.8$

$\therefore E(2X-Y)^2=D(2X-Y)+[E(2X-Y)]^2=14.8$ 故应选(B)

4.设(X,Y)是二维随机变量,$DX=4, DY=1$,相关系数 $\rho_{XY}=0.6$, 则 $D(3X-2Y)=$______

(A) 40 (B) 34 (C) 25.6 (D) 17.6

解 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1.2$,由 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abCov(X,Y)$

$D(3X-2Y)=9DX+4DY-12Cov(X,Y)=36+4-12\times1.2=25.6$ 故应选(C)

5.若抛投 n 次硬币中出现正面次数为 X,反面次数为 Y,则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$______

(A) -1 (B) 0 (C) 0.5 (D) 1

解 由 $X+Y=n$ 得 $Y=n-X$,即 X 和 Y 有成负线性关系,故 $\rho_{XY}=-1$ 故应选(A)

三、计算、证明题

1.已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$, $-\infty<x<+\infty$

(1) 求 EX 和 DX; (2) 若已知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$,求常数 c.

解 $\because p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times3}}$ $\therefore X\sim N(2,3)$

(1) 由正态分布性质得 $E(X)=2, D(X)=3$

(2) 由 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=P\{X\le c\}=\Phi\left(\frac{c-2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}=\Phi(0)$

$\Rightarrow$ $c=2$ 也可由 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数关于 $x=\mu$ 对称得 $c=\mu=2$

2.设 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布,且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$,求 λ.

解 $\because EX=DX=\lambda, EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$

$\therefore E[(X-1)(X-2)]=EX^2-3EX+2=\lambda^2-2\lambda+2=1$ $\Rightarrow$ $\lambda=1$

3. 设 X 为随机变量,C 为常数且 $C\ne EX$,证明 $DX<E(X-C)^2$.

证明 $DX=E(X-EX)^2=E[(X-C)+(C-EX)]^2$

$=E(X-C)^2+(C-EX)^2+2E[(X-C)(C-EX)]=E(X-C)^2-(C-EX)^2<E(X-C)^2$

4.设某种电子元件寿命服从均值为 100 小时的指数分布.现从中随机取出 16 只,设它们的寿命相互独立,求这 16 只元件的寿命总和 X 大于 1920 小时的概率.

解 设 X_i 表示第 i 只电子元件的寿命,由 $EX_i=\frac{1}{\lambda}$ 得 $\lambda=\frac{1}{100}$, $DX_i=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{10000}$

$X=\sum_{i=1}^{16}X_i$, $EX=\sum_{i=1}^{16}EX_i=1600$, $DX=\sum_{i=1}^{16}DX_i=160000$, X近似服从$N(1600,400^2)$

$P\{X>1920\}=1-P\{X\le1920\}=1-\Phi\left(\frac{1920-1600}{400}\right)=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$