SOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL
MAT-103 SE(2-2020)
(Aux. Kevin Jhoel Flores Sarmiento)

1. Responda en forma clara y concisa.

a) **¿Cuales son los cofactores de la segunda fila de** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$**.**

Solución:

$A_{21}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(10-0) = -10$

$A_{22}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5-(-1)) = 6$

$A_{23}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0-2) = 2$

b) **Con los resultados del inciso anterior evaluar el determinante de** A**.**

Solución:

$|A| = a_{21}A_{21}^* + a_{22}A_{22}^* + a_{23}A_{23}^* = 3(-10) + 0(6) + 5(2) = -20$

c) **¿Qué limitaciones tiene a su juicio la regla de Cramer en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales?.**

Respuesta.- Para resolver un sistema de ecuaciones por Cramer, este debe cumplir 3 requisitos:

- El sistema debe ser no-homogeneo.
- El número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de coeficientes debe ser distinto de cero.

Siendo estás tres las limitaciones.

d) **Defina que es un sistema homogéneo y analice sus posibilidades de solución.**

Respuesta.- Sistema homogéneo es aquel sistema cuyos términos independientes son todos iguales a cero, su forma matricial es: $AX = 0$. Este tipo de sistema solo tiene dos tipos de soluciones:

- Solución Única(Trivial): $x_i = 0$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
- Soluciones infinitas: Además de la solución trivial existen muchas otras(infinitas) llamadas no triviales.

e) **Aplicando la función determinante, ¿Cómo se puede determinar si una matriz es singular?.**
Respuesta.- Si el determinante de dicha matriz es igual a cero entonces la matriz es singular, caso contrario es no singular.

2. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Encontrar la matriz X de la siguiente ecuación matricial: $(-2B + C^tX)^t = A^t$

Solución:

-Despejamos y calculamos

$$\begin{array}{c|l} (-2B + C^tX)^t = A^t & \\ -2B + C^tX = A^t & A^t + 2B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \\ C^tX = A^t + 2B & \\ (C^t)^{-1}C^tX = (C^t)^{-1}(A^t + 2B) & C^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ X = (C^t)^{-1}(A^t + 2B) & \end{array}$$

-Obtenemos $(C^t)^{-1}$

$$[C^t|I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ -3 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{A_{21(3)}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{M_{2(\frac{1}{5})}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \underset{A_{12(-1)}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Entonces $(C^t)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

-Calculamos X

$$X = (C^t)^{-1}(A^t + 2B) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

3. Analizar el siguiente sistema y analizar el valor de k para que el sistema sea un SCD, SCI, SI.

$$\begin{cases} y + x - kz = 1 \\ 2x - ky + z = 1 - 5k \\ -kz + 4x + y = 1 - 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - kz = 1 \\ 2x - ky + z = 1 - 5k \\ 4x + y - kz = 1 - 3k \end{cases}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & | & 1 \\ 2 & -k & 1 & | & 1-5k \\ 4 & 1 & -k & | & 1-3k \end{bmatrix} \underset{\substack{A_{21(-2)} \\ A_{31(-4)}}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & | & 1 \\ 0 & -k-2 & 2k+1 & | & -1-5k \\ 0 & -3 & 3k & | & -3-3k \end{bmatrix} \cong$$

$$\cdots \underset{A_{23(-\frac{2+k}{3})}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+1 & | & k^2-2k+1 \\ 0 & -3 & 3k & | & -3-3k \end{bmatrix} \underset{P_{23}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & | & 1 \\ 0 & -3 & 3k & | & -3-3k \\ 0 & 0 & -k^2+1 & | & k^2-2k+1 \end{bmatrix}$$

-Igualamos los términos de la última fila a cero:

$$\begin{array}{c|c} -k^2 + 1 = 0 & \\ -k^2 = -1 & k^2 - 2k + 1 = 0 \\ k^2 = 1 & (k-1)(k-1) = 0 \\ \sqrt{k^2} = \sqrt{1} & k = 1 \\ |k| = 1 & \\ k = \pm 1 & \end{array}$$

; Obteniendo así 2 valores de k para analizar $k = \pm 1$

-Concluyendo:

- **S.C.D..-** Si $k \neq \pm 1$ entonces $Rang(A) = Rang(A|B) = n = 3 \Rightarrow$ el sistema tiene solución única.
- **S.C.I..-** Si $k = 1$ entonces $Rang(A) = Rang(A|B) = 2 < n = 3 \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.
- **S.I..-** Si $k = -1$ entonces $Rang(A) = 2 < Rang(A|B) = 3 \Rightarrow$ el sistema no tiene solución.

4. Determine el determinante de la siguiente matriz por reducción a triangular superior o inferior: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$**.**

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{A_{21(2)} \\ A_{31(-1)}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1)(1)(-2) = -2$$

5. Daniel tiene 575 \$us(dolares) en billetes de uno, de cinco, y de diez. En total tiene 95 billetes, la cantidad de billetes de uno más la cantidad de billetes de diez menos cinco es igual al doble de la cantidad de billetes de cinco. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene?.

-Reconocer las incógnitas:

$x =$ Nº de billetes de \$1 ; y = Nº de billetes de \$5; $z =$ Nº de billetes de \$10

-Plantear y resolver:

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ x+5y+10z=575 \\ x+z-5=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=95 \\ x+5y+10z=575 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 5 & 10 & 575 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{A_{21(-1)} \\ A_{31(-1)}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 4 & 9 & 480 \\ 0 & -3 & 0 & -90 \end{array}\right] \underset{\substack{M_{3(-\frac{1}{3})} \\ P_{23}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 4 & 9 & 480 \end{array}\right] \cong \ldots$$

$$\ldots \underset{A_{32(-4)}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 9 & 360 \end{array}\right] \underset{\substack{A_{12(-1)} \\ M_{3(\frac{1}{9})}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \underset{A_{13(-1)}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=30 \\ z=40 \end{cases}$$

Respuesta.- Se tiene 25 billetes de 1 \$us, 30 billetes de 5 \$us y 40 billetes de 10 \$us.