SEGUNDO PARCIAL MAT-103 SE(1-2020)
(Archivo creado por Aux. Jhoel Flores)

1. CONTESTE EN FORMA CLARA Y CONCISA.

a) **Si un vector es combinación lineal de otros vectores decimos que ese conjunto de vectores es...**
Respuesta.- Linealmente dependiente.

b) **Cuándo el conjunto de vectores rebasa la dimensión del espacio que los contiene, el conjunto de vectores es...**
Respuesta.- Linealmente dependiente.

c) **¿Cómo es el siguiente conjuntos vectores?,** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$.
Respuesta.- Es linealmente dependiente, ya que un vector se repite.

d) **¿Cómo es el siguiente conjunto de vectores?,** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$
Respuesta.- Es linealmente independiente.

e) **Si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente:** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$**, ¿Cómo será el siguiente conjunto de vectores:** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$?
Respuesta.- Sera linealmente independiente.

2. ¿PARA QUE VALORES DE a EL SIGUIENTE CONJUNTO DE VECTORES ES L.I. Y L.D.
$(1, a+4, 4), (-2, 1, a+6), (3, a, -6)$

Solución.- Colocamos el vector nulo como combinación lineal de los vectores:

$$(0,0,0) = x(1, a+4, 4) + y(-2, 1, a+6) + z(3, a, -6)$$

Obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ (a+4)x + y + az = 0 \\ 4x + (a+6)y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ (a+4) & 1 & a & 0 \\ 4 & (a+6) & -6 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{A_{31(-4)} \\ A_{21(-a-4)}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2a+9 & -2a-12 & 0 \\ 0 & a+14 & -18 & 0 \end{array}\right] \cong$$

$$\underset{A_{23\left(\frac{-2a-12}{18}\right)}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2a^2-4a-6 & 0 & 0 \\ 0 & a+14 & -18 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{PC_{23} \\ P_{23}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -18 & a+14 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2-4a-6 & 0 \end{array}\right]$$

Para que sea L.D. deben existir soluciones no triviales, es decir $Rang(A) = Rang(A|B) < n = 3$, consecuentemente $-2a^2 - 4a - 6 = 0$, está ecuación no tiene solución en los reales.
$\therefore$ Será L.I. para todo valor de a $\in \mathbb{R}$ y no será L.D. para todo valor de a $\in \mathbb{R}$.
(No importa el valor de a, los vectores no serán LD).

3. VERIFIQUE SI LOS SIGUIENTES VECTORES FORMAN UNA BASE PARA LOS POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO:
$L = \{a^2 + a - 1, a^2 - a, a^2 + a + 1\}$

Solución.-

i) **Verificar si generan a los polinomios de segundo grado.**
Escojo un $(\vec{p} = \alpha a^2 + \beta a + \gamma) \in \mathrm{P}^2$, y lo expreso cómo combinación lineal de L.

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = x(a^2 + a - 1) + y(a^2 - a) + z(a^2 + a + 1)$$

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x - y + z = \beta \\ -x + 0y + z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right] \underset{\substack{A_{21(-1)} \\ A_{31(1)}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \gamma + \alpha \end{array}\right] \underset{\substack{A_{23(2)} \\ P_{23}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \gamma + \alpha \\ 0 & 0 & 4 & \alpha + \beta + 2\gamma \end{array}\right]$$

Tenemos que el Rang(A) será siempre igual al Rang(A|B), es decir habrá soluciones sin restricciones, por lo tanto L genera a P^2.

ii) **Verificar si son L.I.**
Expresamos el vector nulo cómo combinación lineal de los vectores:

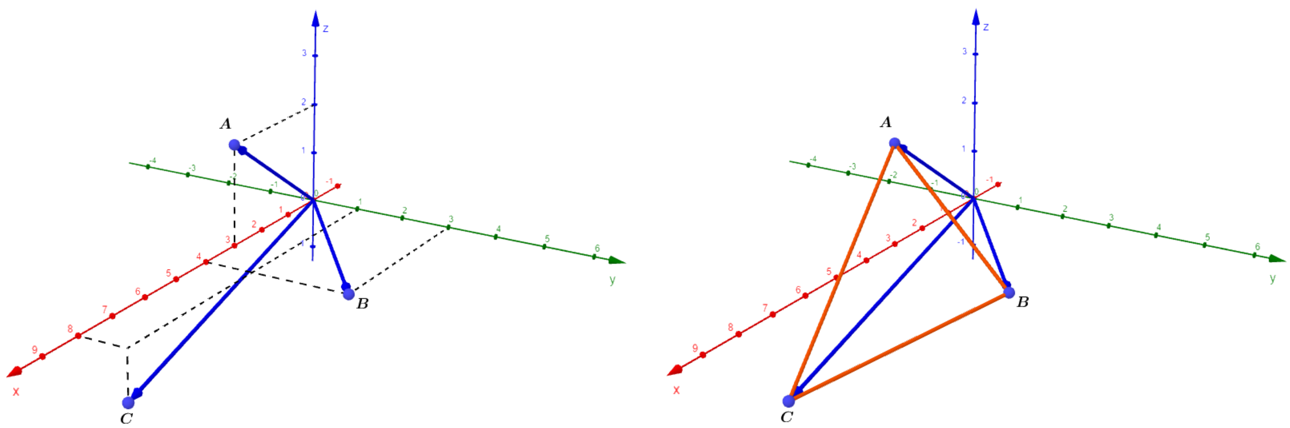
$$0a^2+0a+0=x(a^2+a-1)+y(a^2-a)+z(a^2+a+1)$$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+0y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{A_{21(-1)} \\ A_{31(1)}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{A_{23(2)} \\ P_{23}}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Tenemos que Rang(A)=Rang(A|B)=n=3, por lo tanto solo existe la solución trivial $\Rightarrow$ Los vectores son L.I.

$\therefore$ de i) y ii) podemos afirmar que L es una base de P^2.

4. DEMOSTRAR ANALÍTICAMENTE QUE LOS SIGUIENTE VECTORES $\vec{A}=(3,0,2)$, $\vec{B}=(4,3,0)$, $\vec{C}=(8,1,-1)$, SON LOS VÉRTICES DE UN TRIANGULO RECTÁNGULO.



Un triangulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, entonces basta con comprobar que uno de los ángulos del triangulo dado es recto ($\alpha=\frac{\pi}{2}$). Intentemos con $ABC\measuredangle$, obtendremos entonces $\vec{v}=\vec{A}-\vec{B}$, y $\vec{u}=\vec{C}-\vec{B}$, me queda $\vec{v}=(-1,-3,2)$ y $\vec{u}=(4,-2,-1)$, realizamos el producto punto, $\vec{v}\bullet\vec{u}=-1(4)-3(-2)+2(-1)=-4+6-2=0$, esto quiere decir que aquel ángulo es recto ($\alpha=\frac{\pi}{2}$), condición suficiente para afirmar que se trata de un triangulo rectángulo.

5. DADO UN ESPACIO VECTORIAL V=POLINOMIOS, DEMOSTRAR QUE $P_x^2=\{ax^2+bx+c/\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$,ES UN SUBESPACIO DE V.
Solución.-
Usaremos el criterio de subespacio para determinarlo.

i) **Cerrado para la suma.**
Tomamos dos vectores genéricos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_1=ax^2+bx+c \\ \vec{p}_2=\alpha x^2+\beta x+\gamma \end{array}\right\}\in P_x^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a,b,c\in\mathbb{R} \\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \end{array}\right. ; \quad \text{Ahora obtenemos su suma, } (\vec{p}_1+\vec{p}_2)=(a+\alpha)x^2+(b+\beta)x+(c+\gamma)$$

La cuestión es ¿$(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\in P_x^2$?, para eso verificamos la condición. y es sabido que la suma de dos reales me da como resultado otro número real, por lo tanto los coeficientes de $(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$ son también números reales, entonces $\vec{p}_1+\vec{p}_2\in P_x^2$ (Es cerrado para la suma).

ii) **Cerrado para la multiplicación por escalar.**
Tomaremos:

$$\begin{array}{l} k\in\mathbb{R} \\ \vec{p}_1=ax^2+bx+c\in P_x^2 \end{array} ; \quad \text{Ahora obtenemos: } \vec{kp}=(ka)x^2+(kb)x+(kc)$$

De nuevo la pregunta es similar ¿$(\vec{kp})\in P_x^2$?, de nuevo al ver la condición nos damos cuenta que solo es necesario que los coeficientes sean reales, y la multiplicación entre dos reales(k con a,b,c) siempre me da otro real, por lo tanto si pertenece, es decir que es cerrado para la multiplicación por escalar.

$\therefore$ de i) y ii) podemos afirmar que P_x^2 es un subespacio vectorial.