UNIVERSIDAD AUTÓNOMA GABRIEL RENE MORENO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA

TEXTO GUÍA
MAT-102

Ing. MSc. Carlos Roberto Lazo Arteaga

Santa Cruz – Septiembre 2012

TABLA DE CONTENIDO

UNIDAD I

FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

I.1. Funciones de dos Variables

Definición.

Según James Stewart (1), una función "f" de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) de un conjunto "D", un número real único denotado por f(x,y). El conjunto "D" es el dominio de f y su imagen es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x,y)/(x,y) \in D\}$.

Estas funciones se encuentran en un espacio de tres dimensiones.

Por Ejemplo, el área de un triángulo "A", depende de la base "b" y la altura "h" del mismo, por lo que se puede afirmar que el área de un triángulo es función de las dos variables (b,h), es decir: $A=f_{(b,h)}$.

Para calcular el área de un triángulo, utilizamos la siguiente ecuación:

A=bh/2

Donde:
b = Base del triángulo
h = Altura del triángulo

En esta ecuación decimos que "A" es una función de b y h, y lo escribimos:

$$A_{(b,h)} = \frac{bh}{2}$$

Otra forma que acostumbramos utilizar para representar una función de dos variables es:

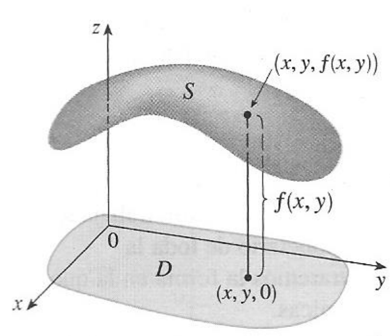
$$z = f_{(x,y)}$$

para hacer explícito el valor tomado por f en un punto (x,y).

Debe entenderse que las variables "x" y "y" son variables independientes y que "z" es una variable dependiente.

James Stewart (1) afirma que: una función de dos variables es sólo una función cuyo dominio es un subconjunto de R^2 y cuya imagen es un subconjunto de R.

Otra forma de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica:



"Si "f" es una función de dos variables con dominio D, entonces la gráfica de "f" es el conjunto de los puntos (x, y, z) de W tales que z=f(x, y) y (x, y) está en "D".

Así como la gráfica de una función “f” de una variable es una curva C con ecuación y=f(x) la gráfica de una función “f” de dos variables es una superficie “S” con ecuación z = f(x, y). Podemos visualizar la gráfica “S” de “f” como si se encontrara directamente arriba o abajo de su dominio “D” en el plano xy” (James Stewart (1)).

“Si una función “f” está dada por una fórmula y no se especifica su dominio, entonces el dominio de “f” se entiende que es el conjunto de todos los pares (x,y) para los cuales la expresión dada es un número real bien definido” (James Stewart (1)).

Para garantizar lo citado anteriormente, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1.- No existe expresión numérica que se divida por cero, el denominador de una expresión numérica debe ser diferente de cero.

Si: $\frac{A}{B}$ Entonces: $B \neq 0$

2.- No existe raíz cuando el radicando es negativo y el índice es par.

Si: $\sqrt{A}$ Entonces: $A \geq 0$

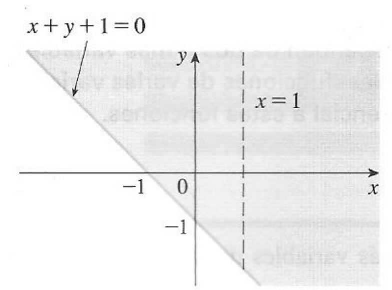
3.- No existe logaritmo cuando el argumento es menor o igual que cero.

Si: $\ln(A)$ Entonces: $A \rangle 0$

EJERCICIOS:

a) Halle los dominios de las siguientes funciones y evalúe f(3,2).

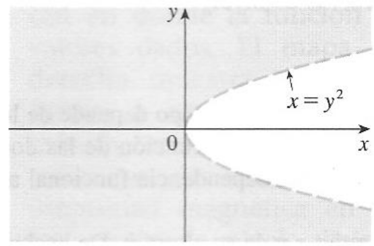
$$\text{(a)}\quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$



$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

(b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$



$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

$$D = \{(x, y) \mid x < y^2\}.$$

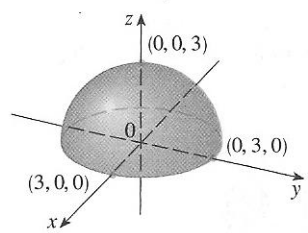
b) Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

$$z \geqslant 0,$$



PRACTICO N°1

Trace el dominio de las siguientes funciones:

1. $f_{(x,y)} = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
2. $f_{(x,y)} = x\ln(y^2 - x)$
3. $g_{(x,y)} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
4. $f_{(x,y)} = \sqrt{x+y}$
5. $f_{(x,y)} = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
6. $f_{(x,y)} = \dfrac{3x+5y}{x^2 + y^2 - 4}$
7. $f_{(x,y)} = xy\sqrt{x^2 + y}$
8. $f_{(x,y)} = 4x^2 + y^2$
9. $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$
10. $f(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$
11. $f_{(x,y)} = \dfrac{x+y}{xy}$
12. $f_{(x,y)} = e^{\frac{x}{y}}$
13. $f_{(x,y)} = \ln(xy - 6)$
14. $f_{(x,y)} = \dfrac{xy}{x-y}$
15. $f_{(x,y)} = x\sqrt{y}$

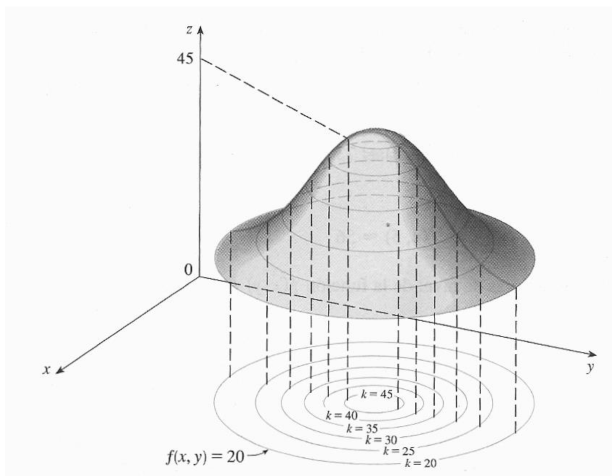
I.2. Curvas de nivel

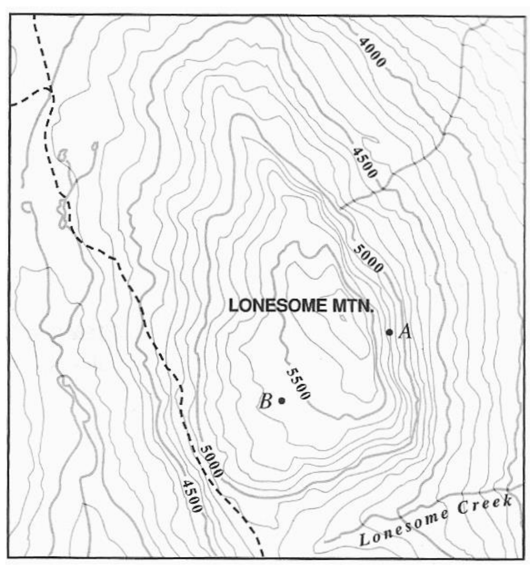
Otro método empleado para visualizar funciones, es un mapa de contorno, en el que se unen puntos de elevación constante para formar *curvas de contorno o cuervas de nivel.*

Definición: Según James Stewart (1), las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones f(x,y)= k, donde k es una constante(que pertenece a la imagen de f).

Una curva de nivel f(x,y)= k es el conjunto de los puntos del dominio de f en los que f toma un valor dado "k". En otras palabras, muestra dónde la gráfica de f tiene altura k.

Un ejemplo común de curvas de nivel se presenta en mapas topográficos de regiones montañosas. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante sobre el nivel del mar.

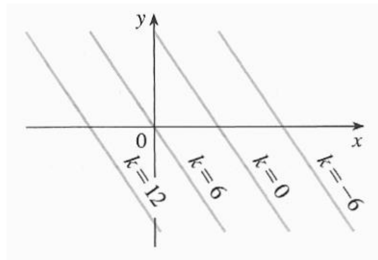




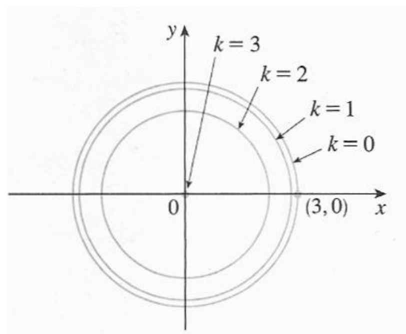
EJERCICIOS

Trace las curvas de nivel de la función:

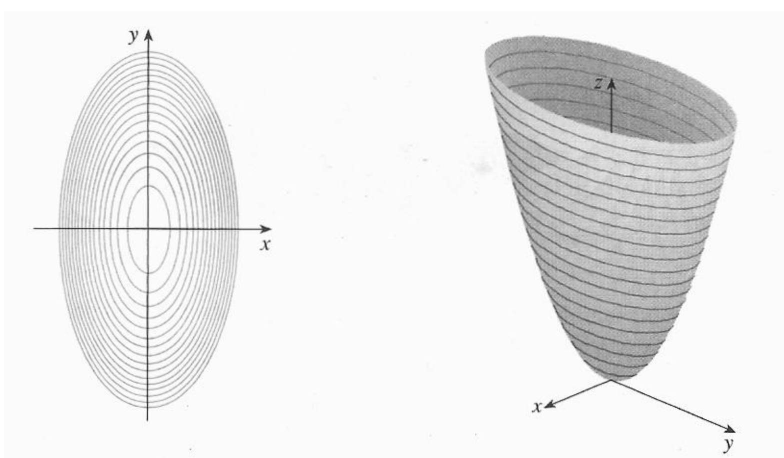
$f_{(x,y)} = 6 - 3x - 2y$　　para k=-6,0,6,12



$g_{(x,y)} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$　　Para k=0,1,2,3



$h_{(x,y)} = 4x^2 + y^2$



(a) Mapa de contorno　　(b) Las trazas horizontales son curvas de de nivel alzadas

I.3. Funciones de tres o más Variables

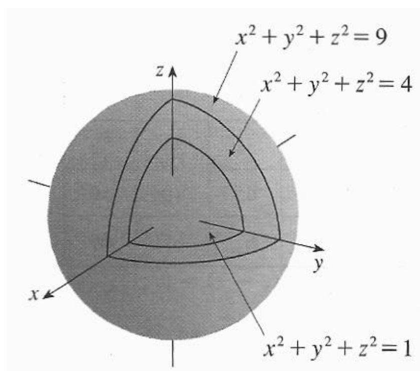
Según James Stewart (1), una función de tres variables, "f" es una regla que asigna a cada terna ordenada (x,y,z) de un dominio $D \subset R^3$ un número real único denotado por f(x,y,z). Por ejemplo, la temperatura "T" en un punto en la superficie de la tierra depende de la longitud "x", la latitud "y" del punto y el tiempo "t", de modo que escribimos T=f(x,y,t).

Es muy difícil visualizar una función "f" de tres variables por su gráfica, puesto que estaría en un espacio de cuatro dimensiones, pero obtenemos alguna información de "f" al examinar sus superficies de nivel, que son las superficies con ecuaciones f(x,y,z)=k, donde "k" es una constante. Si el punto (x,y,z) se mueve a lo largo de una superficie de nivel, el valor de f(x,y,z) permanece fijo.

Halle las superficies de nivel de la función:

$$f_{(x,y,z)} = x^2 + y^2 + z^2$$

Las superficies de nivel son $x^2+y^2+z^2=k$, donde k>0. Éstas forman una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$. Entonces, cuando (x,y,z) varía en cualquier esfera con centro en O, el valor de f(x,y,z) permanece fijo.



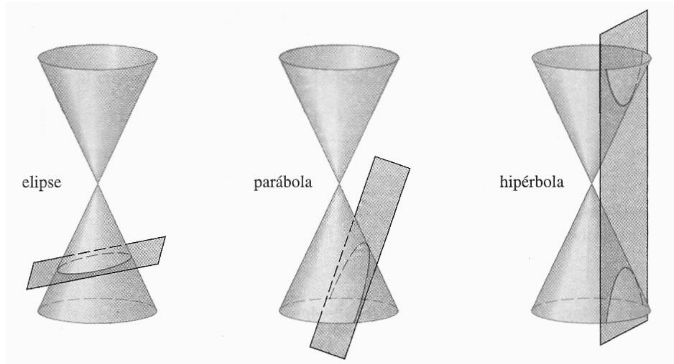
También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una función de "n" variables es una regla que asigna un número $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a una entupla $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de números reales. Denotados por R^n al conjunto de todas las entuplas. Por ejemplo si una compañía utiliza "n" ingredientes diferentes en la elaboración de un producto alimenticio, "c_i" es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y se utilizan "x_i" unidades del ingrediente i-ésimo, entonces el costo total "C" de los ingredientes es una función de las "n" variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$

$$C=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)= c1x1+c2x2+\ldots+cnxn$$

La función "f" es una función de valor real cuyo dominio es un subconjunto de R^n.

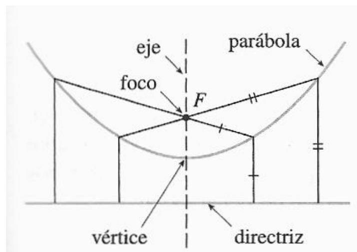
I.4. Secciones Cónicas

En esta parte presentaremos las definiciones geométricas de la parábola, la elipse y la hipérbola. Estas curvas se denominan **Secciones Cónicas** (o simplemente **Cónicas**), porque son el resultado de intersectar un cono con un plano.



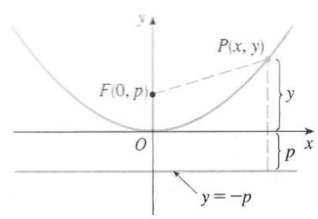
I.4.1. Parábolas

Una parábola es el conjunto de puntos, que equidistan de un punto fijo, F (**foco**) y una recta fija (**directriz**).



La ecuación de una parábola con foco en (0,p) y directriz y=-p es

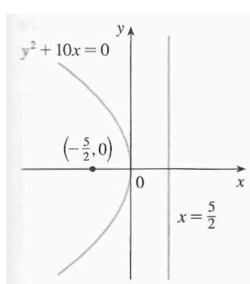
$$x^2 = 4yp \qquad\qquad (x-h)^2 = 4p(y-k)\ ;\ V=(h,k)$$



EJERCICIO

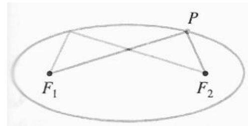
Localice el foco y la directriz de la parábola $y^2+10x=0$ y trace su gráfica.

Si escribimos la ecuación en la forma $y^2 = -10x$ y la comparamos con la ecuación $y^2=4px$, vemos que $4p = -10$, así que $p = -5/2$. En consecuencia el foco está en $(p, 0)=(-5/2, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = 5/2$.

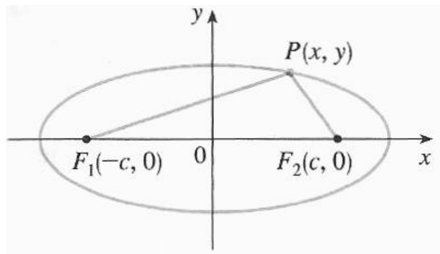


I.4.2. Elipses

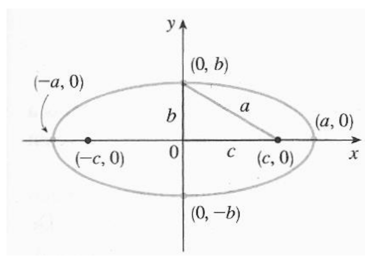
Una elipse es el conjunto de puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F1 y F2 es constante.



Esos dos puntos fijos se llaman focos. Una de las leyes de Kepler dice que las órbitas de los planetas del sistema solar son elipses y que el Sol está en uno de los focos.



La elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad a \geq b > 0$ tiene los focos en $(\pm c, 0)$, donde $(c^2 = a^2 - b^2)$, y sus vértices están en $(\pm a, 0)$.



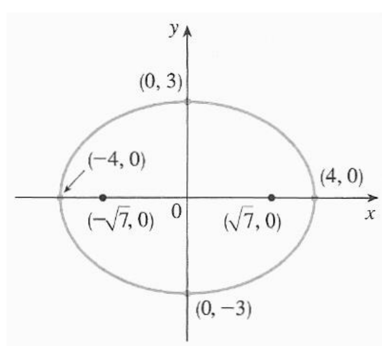
EJERCICIO

Trace la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

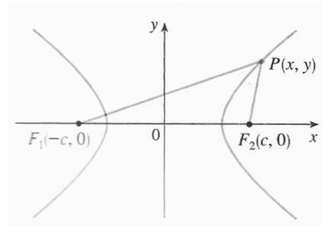
La ecuación se encuentra ahora en su forma canónica, con lo cual $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$, y $b = 3$. Las abscisas al origen son ±4 y las ordenadas al origen ±3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, así que $c = \sqrt{7}$ y los focos están en $(\pm\sqrt{7}, 0)$.



Al igual que las parábolas, las elipses presentan una propiedad reflectora interesante, de consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente luminosa o sonora en uno de los focos de una superficie de sección transversal elíptica, toda la luz o el sonido se refleja de la superficie hacia el otro foco.

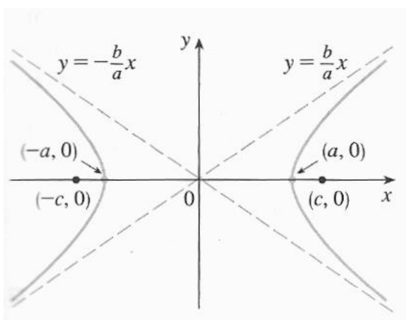
I.4.3. Hipérbolas

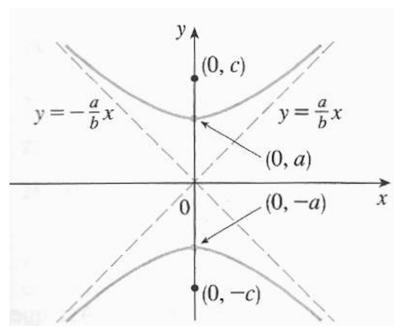
Una hipérbola es el conjunto de los puntos en un plano cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos, F1 y F2 (los focos), son iguales a una constante.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tiene sus focos en $(\pm c,0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, sus vértices en $(\pm a,0)$, y sus asíntotas tienen ecuaciones $y = \pm(b/a)x$.





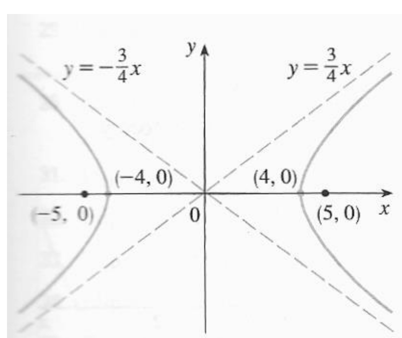
EJERCICIO

Determine los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$

Si dividimos ambos lados de la ecuación entre 144, obtenemos:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Con a=4 y b=3. Ya que $c^2=16+9=5$, los focos están en (±5,0). Las asíntotas son las rectas y=3/4x y y=-3/4x.



PRACTICO N°2

Localice el vértice y el foco, deduzca la ecuación de la directriz de la parábola y trace su gráfica

1. $x = 2y^2$
2. $4y + x^2 = 0$
3. $4x^2 = -y$
4. $y^2 = 12x$
5. $(x+2)^2 = 8(y-3)$
6. $x - 1 = (y+5)^2$
7. $2x + y^2 - 8y + 12 = 0$
8. $x^2 + 12x - y + 39 = 0$

Halle los vértices y focos de la elipse, trace su gráfica.

11. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
12. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$
13. $25x^2 + 9y^2 = 225$
14. $4x^2 + 25y^2 = 25$
15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$
16. $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$

Localice los vértices y los focos de la cónica y trace su gráfica. Si es una hipérbola, determine las ecuaciones de sus asíntotas.

19. $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$
20. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{36} = 1$
21. $9y^2 - x^2 = 9$
22. $x^2 - y^2 = 1$
23. $2y^2 - 3x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$
24. $16x^2 - 9y^2 + 64x - 90y = 305$

I.5. Cilindros y superficies cuadráticas

Luego de estudiar las superficies planas y esféricas, investigaremos otros dos tipos de superficie: cilindros y superficies cuadráticas.

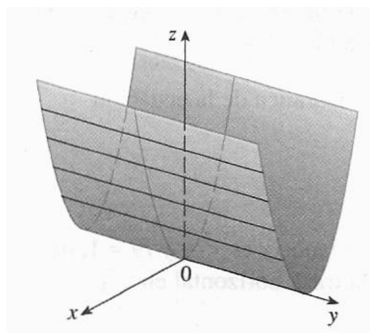
Para trazar la gráfica de una superficie, es útil determinar las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos a los planos de las coordenadas. Estas curvas se llaman **trazas**(o secciones transversales) de la superficie.

I.5.1. Cilindros

Según James Stewart (1), un cilindro es una superficie formada por todas las rectas (llamadas **generatrices**) que son paralelas a una recta dada, y que pasan por una curva plana dada.

Ejemplo 1.- Trace la gráfica de la superficie $z=x^2$

La gráfica es una superficie, llamada **cilindro parabólico**, formado con un número infinito de copias desplazadas de la misma parábola. Aquí las generatrices del cilindro son paralelas al eje y.



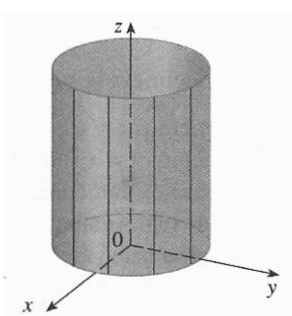
La superficie $z=x^2$ es un cilindro parabólico

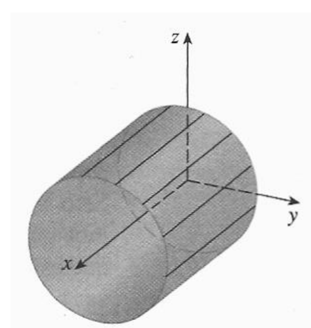
Observamos que falta la variable "y" en la ecuación del cilindro del ejemplo anterior. Esto es típico de una superficie cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes de coordenadas. Si falta una de las variables, x,y o z, en la ecuación de una superficie, entonces la superficie es un cilindro.

EJERCICIO

Identifique y trace las superficies:

$x^2+y^2=1$ $y^2+z^2=1$





Cuando se manejen superficies, es importante reconocer que una ecuación como $x^2+y^2=1$ representa un cilindro y no un círculo. La traza del cilindro $x^2+y^2=1$ en el plano xy es el círculo con ecuaciones $x^2+y^2=1$ y $z=0$.

I.5.2. Superficies cuadráticas

James Stewart (1) superficie cuadrática es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x, y y z. La ecuación general es:

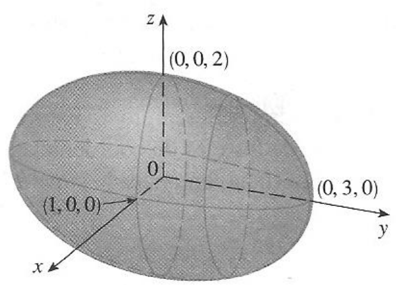
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{o} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuadráticas son la analogía tridimensional de las secciones cónicas en el plano.

EJERCICIO

1.- Utilice las trazas para delinear la superficie cuadrática de la ecuación:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$



La figura indica la forma de la superficie. Se llama elipsoide porque todos sus trazos son elipses. Note que es simétrica con respecto a cada plano de coordenadas; esto se debe a que, en su ecuación, aparecen sólo potencias pares de "x","y" y "z".

En gral. La traza horizontal en el plano z=k es una elipse:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4}$$ Siempre que $k^2<4$, es decir, $-2<k<2$

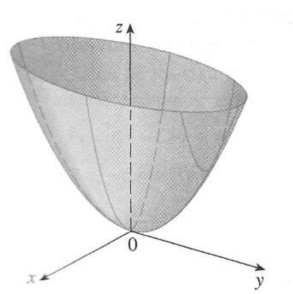
Análogamente, las trazas verticales también son elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2$$ x=k (si $-1<k<1$)

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9}$$ y=k (si $-3<k<3$)

2.- Use las trazas para delinear la superficie

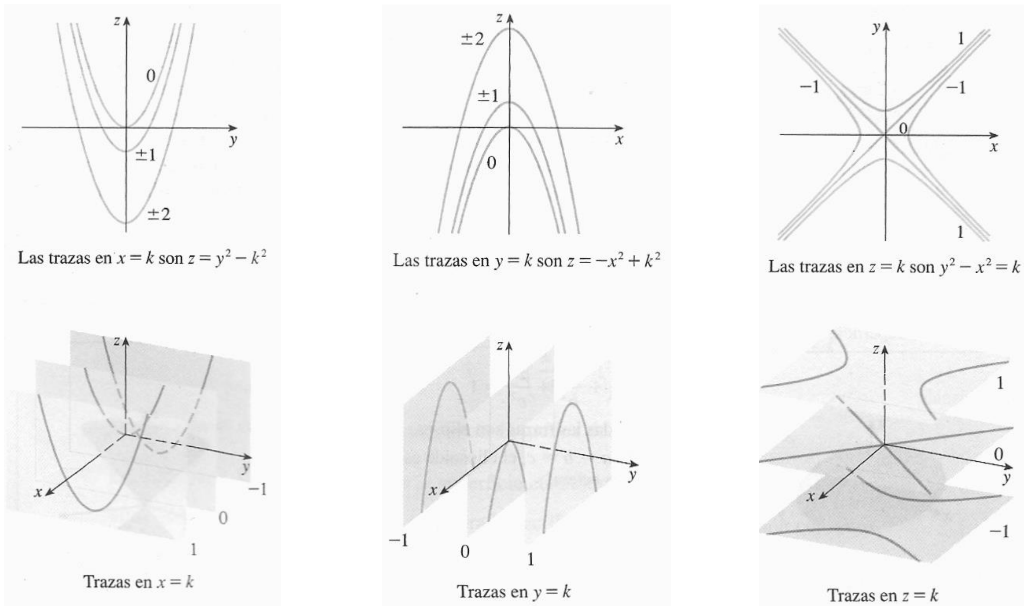
$$z = 4x^2 + y^2$$



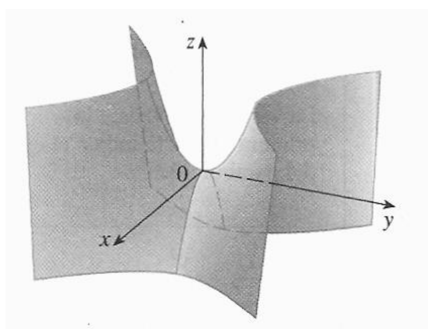
La superficie es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses y las verticales son parábolas

3.- Trace la Superficie

$$z = y^2 - x^2$$

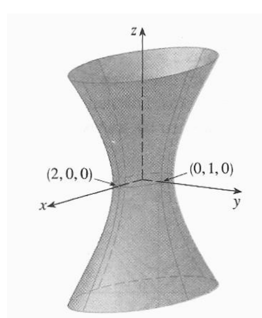


Unimos las trazas de la figura anterior para formar la superficie $z = y^2 - x^2$, la que se denomina **Paraboloide Hiperbólico.** Note que la forma de la superficie cerca del origen se asemeja a una silla de montar.



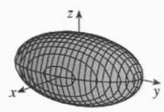
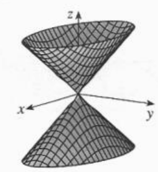
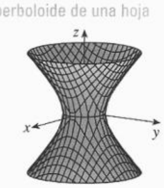
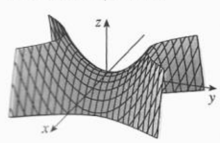
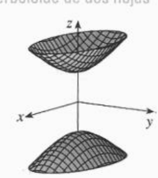
4.- Trace la superficie:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$



Esta superficie se llama **Hiperboloide de una hoja.**

La idea de usar trazas para dibujar superficies se utiliza en los software para graficar en tres dimensiones. En la mayor parte de estos software, las trazas en los planos verticales x=k y y=k se dibujan para valores igualmente espaciados de k, y se eliminan partes de la gráfica con el uso de la remoción de líneas ocultas. La siguiente tabla muestra las gráficas generadas por computadora de los seis tipos básicos de superficies cuadráticas en forma general. Todas las superficies son simétricas con respecto al eje z. Si una superficie cuadrática es simétrica alrededor de un eje diferente, su ecuación cambia de acuerdo a éste.

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todas las trazas son elipses. Si $a=b=c$, el elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x=k$ y $y=k$ son hipérbolas si $k\neq 0$, pero son pares de rectas si $k=0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso donde $c<0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Los dos signos menos indican dos hojas.

PRACTICO N°3

I) Encuentre las trazas de la superficie dada en los planos x=k, y=k, z=k. Luego, identifique la superficie y trácela.

1) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

2) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

3) $4z^2 - x^2 - y^2 = 1$

4) $y^2 = x^2 + z^2$

5) $x^2 + 4z^2 - y = 0$

6) $y = z^2 - x^2$

II) Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie y trácela.

1) $z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12$

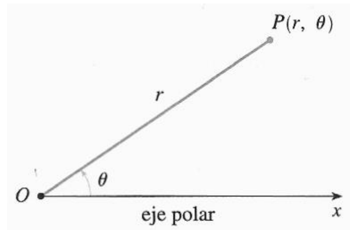
2) $z = x^2 + y^2 + 1$

3) $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$

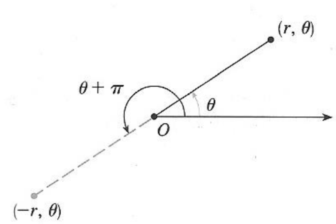
4) $x^2 - y^2 + 4y + z = 4$

I.6. Coordenadas Polares.

Un sistema de coordenadas representa un punto en el plano a través de las coordenadas. Hasta ahora hemos empleado las coordenadas cartesianas. En esta sección describiremos un sistema de coordenadas introducido por Newton, llamado **Sistema de Coordenadas Polares**.



El punto "P" está representado por el par ordenado (r,θ) y se conocen como Coordenadas polares de "P". Adoptaremos la convención de que el ángulo es positivo si se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, partiendo del eje polar, y negativo su se toma en la dirección en que giran las manecillas del reloj.



Los puntos $(-r,\theta)$ y (r,θ) están en la misma recta que pasa por "O" y a la misma distancia, /r/ de "O", pero en los lados opuestos de "O". Si r>0, el punto (r,θ) está en el mismo cuadrante que θ; si r<0, se encuentra en el cuadrante opuesto respecto al polo. Observe que $(-r,\theta)$ representa el mismo punto que $(r,(\theta+\pi))$.

Si el punto "P" tiene coordenadas cartesianas (x,y) y polares (r,θ), entonces, de acuerdo con la figura:

X=rcosθ y=rsenθ

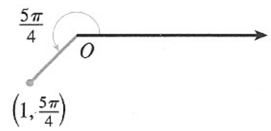
Para determinar r y θ, conociendo "x" y "y", usamos las siguientes. Ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

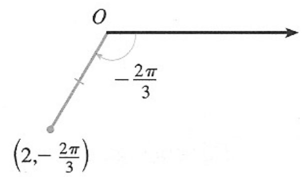
EJERCICIO

1.- Grafique los puntos cuyas coordenadas polares se dan a continuación:

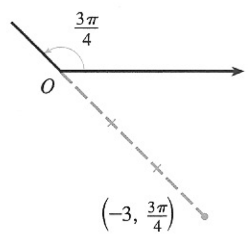
a) $(1\ ,\ 5\pi/4)$



b) $(2\ ,\ -2\pi/3)$



c) $(-3\ ,\ 3\pi/4)$



2.- Exprese el punto $(2\ ,\ \pi/3)$ en coordenadas cartesianas.

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

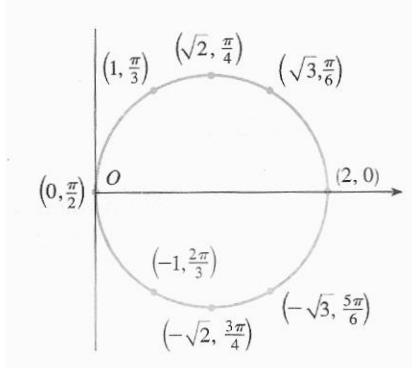
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

3.- Represente en coordenadas polares el punto cuyas coordenadas cartesianas son: $(1\ ,\ -1)$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

4.- Trace la curva cuya ecuación polar es $r=2\cos\theta$ y deduzca la ecuación cartesiana de esta curva.



(b) Para convertir la ecuación original en una ecuación cartesiana empleamos las ecuaciones 1 y 2. De acuerdo con $x = r\cos\theta$ tenemos que $\cos\theta = x/r$, con lo cual la ecuación $r = 2\cos\theta$ se transforma en $r = 2x/r$, con ello se obtiene

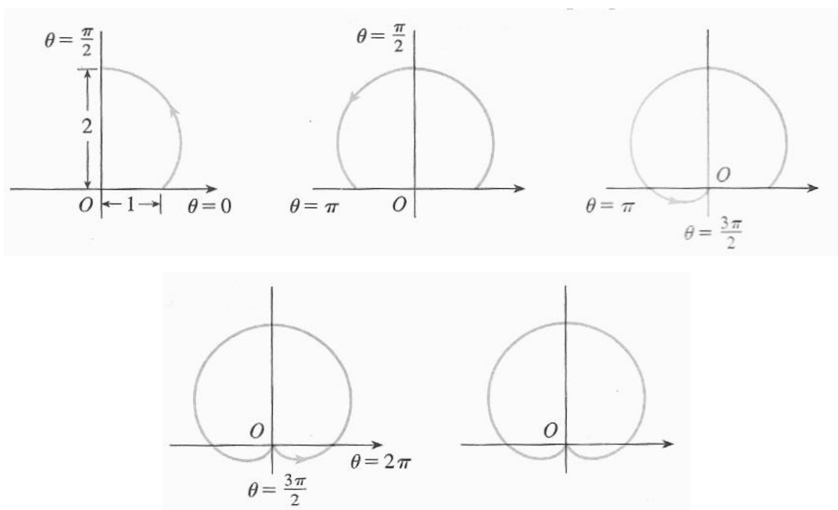
$$2x = r^2 = x^2 + y^2$$

o bien
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

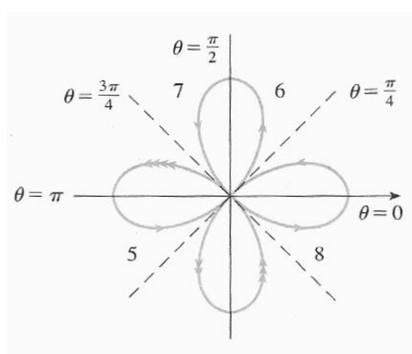
Si completamos el cuadrado obtendremos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

5.- Trace la curva cuya ecuación polar es: r=1+senθ.



6.- Trace la curva cuya ecuación polar es: r=cos(2θ).



PRACTICO N°4

1.- A partir de las coordenadas cartesianas dadas, hallar las coordenadas polares.

a) (1,1)

b) $(2\sqrt{3},-2)$

c) $(-1,-\sqrt{3})$

2.- Halle la ecuación cartesiana descrita por la curva polar dada:

a) r=3sen θ

b) rcos θ =1

c) r=1/(1+2sen θ)

3.- Deduzca una ecuación polar de la curva representada por la ecuación cartesiana dada:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 = 4y$

4.- Trace la curva correspondiente a cada una de las ecuaciones polares:

a) r=5

b) r=2(1-sen θ)

c) r=1/ θ

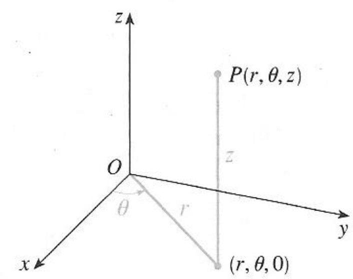
d) r=2cos4 θ

e) r=2cos(3 θ /2)

I.7. Coordenadas Cilíndricas y Esféricas.

En tres dimensiones tenemos dos sistemas de coordenadas que son semejantes al de las coordenadas polares y dan descripciones cómodas de algunas superficies y sólidos que aparecen frecuentemente.

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto "P" del espacio tridimensional está representado por la terna ordenada (r, θ,z), donde "r" y "θ" son las coordenadas polares de la proyección de "P" en el plano "x-y" y "z" es la distancia dirigida del plano "xy" a "P".



Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares empleamos las siguientes ecuaciones:

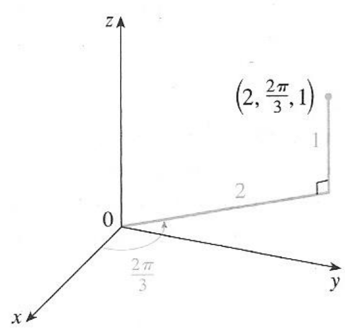
$$x = r\cos\theta \qquad y = r sen\,\theta \qquad z = z$$

Mientras que para convertir de coordenadas rectangulares a cilíndricas usamos:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejemplo:

1) Determine el Punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ y encuentre sus coordenadas rectangulares.

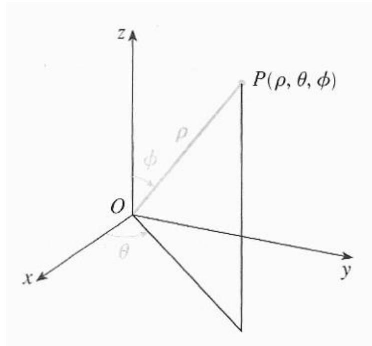


El punto es: $(-1, \sqrt{3}, 1)$

2) Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares (3,-3,-7).

El punto es: $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ o $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$

Las coordenadas esféricas están compuestas por (ρ, θ, ϕ) de un punto "P" en el espacio, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a "P", θ es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas, y ϕ es el ángulo entre el semieje positivo "z" y el segmento de recta OP.



La esfera con centro en el origen y radio "c" tiene la ecuación $\rho = c$. La gráfica de la ecuación $\theta = c$ es un semiplano vertical y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono con el eje "z" como su eje.

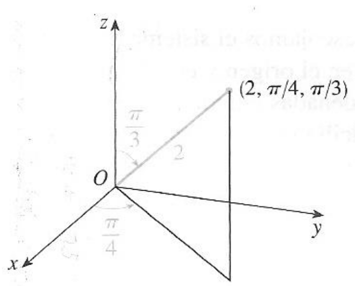
Para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares, empleamos las ecuaciones:

$$x = \rho sen\phi \cos\theta \qquad y = \rho sen\phi sen\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Ejemplo:

El punto $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ está dado en coordenadas esféricas. Grafique el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.



R: $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre sus coordenadas esféricas.

R: $(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$

PRACTICO N°5

I) Grafique y encuentre las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos cuyas coordenadas cilíndricas son:

$$(3, \pi/2, 1)$$
$$(3, 0, -6)$$
$$(4, -\pi/3, 5)$$

III) Cambie las siguientes coordenadas rectangulares a Cilindricas:

$$(1, -1, 4)$$
$$(-1, -\sqrt{3}, 2)$$

IV) Grafique y encuentre las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos cuyas coordenadas esféricas son:

$$(1, 0, 0)$$
$$(1, \pi/6, \pi/6)$$
$$(2, \pi/3, \pi/4)$$

V) Cambie de Coordenadas rectangulares a Esféricas:

$$(-3, 0, 0)$$
$$(\sqrt{3}, 0, 1)$$

VI) Cambie de Coordenadas Cilíndricas a Esféricas:

$$(\sqrt{2}, \pi/4, 0)$$
$$(4, \pi/3, 4)$$

VII) Cambie de Coordenadas Esféricas a Cilíndricas:

$$(2, 0, 0)$$
$$(8, \pi/6, \pi/2)$$

I.8. Límites y Continuidad

En general, empleamos la notación:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{(x,y)} = L$$

Para indicar que los valores de f(x,y) se aproximan al número L cuando el punto (x,y)se aproxima al punto (a,b) a lo largo de cualquier trayectoria que permanezca dentro del dominio de f.

Definición.

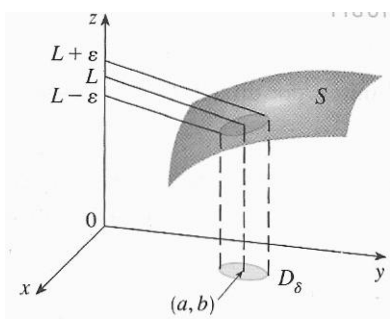
Sea "f" una función de dos variables cuyo dominio "D" incluye puntos arbitrariamente cercanos a (a,b). Entonces decimos que el límite de f(x,y) cuando (x,y) se aproxima a (a,b) es "L" y escribimos:

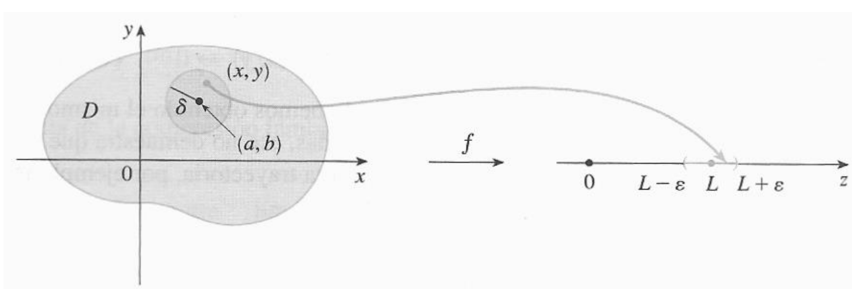
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{(x,y)} = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que $\left| f_{(x,y)} - L \right| < \varepsilon$ siempre que $(x,y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

Otras notaciones para el límite de la definición anterior son:

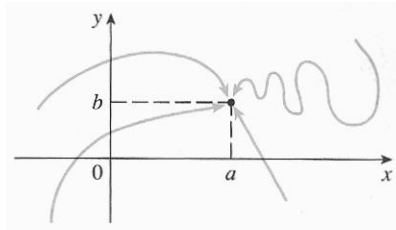
$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_{(x,y)} = L \qquad \text{y} \qquad f_{(x,y)} \to L \text{ cuando } (x,y) \to (a,b)$$





Para funciones de una sola variable, cuando hacemos que "x" se aproxime a "a", solo hay dos posibles direcciones para aproximarse, desde la izquierda o desde la derecha. Si el $\lim_{x\to a^-} f_{(x)} \neq \lim_{x\to a^+} f_{(x)}$, entonces el $\lim_{x\to a} f_{(x)}$ no existe.

Para funciones de dos variables, la situación no es tan sencilla porque podemos hacer que (x,y) se aproxime a (a,b) desde un número infinito de direcciones en cualquier forma mientras (x,y) permanezca dentro del dominio de "f".



Si podemos hallar dos trayectorias diferentes de aproximación por las cuales f(x,y) tiene límites diferentes, entonces el $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f_{(x,y)}$ no existe.

Si $f_{(x,y)} \to L_1$ cuando (x,y) $\to$ (a,b) por una trayectoria C_1 y $f_{(x,y)} \to L_2$ cuando (x,y) $\to$ (a,b) por otra trayectoria C_2 donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f_{(x,y)}$ no existe.

Ejemplo:

Demuestre que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Encuentre $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 2x+3y=11$

Encuentre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ si existe.

I.8.1. Continuidad.

Recuerde que la evaluación de límites de funciones continuas de una sola variable es fácil. Se efectúa por sustitución directa porque la propiedad de definición de una función continua es $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = f_{(a)}$. Las funciones continuas de dos variables también están definidas por la propiedad de sustitución directa.

Una función de dos variables se denomina continua en (a,b) si:

I) $f_{(a,b)}$ está definido.

II) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_{(x,y)}$ existe.

III) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_{(x,y)} = f_{(a,b)}$

Ejemplo:

Donde es continua la función:

$$f_{(x,y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{4x^2 y + 3y^2}{2x - y}$$

Resolver el límite:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} \frac{3x - 2y}{x + 4y}$$

Hallar δ

$$\lim_{(x,y) \to (1,3)} (3x + 2y) = -9$$

Determine si el límite existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

PRACTICO N°6

Donde es continua la función:

$$f_{(x,y)} = \frac{x^2}{y-1}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{4x^2y+3y^2}{2x-y}$$

$$f_{(x,y)} = \ln(25-x^2-y^2)$$

$$f_{(x,y)} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{x}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$$

Resolver el límite:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} (3x^2+xy-2y^2)$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 4}} (5x^2-2xy+y^2)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ y\to 4}} y^3\sqrt{x^3+2y}$$

Hallar δ para un $\varepsilon > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} (3x-4y)=1$$

$$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (5x+4y)=-6$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,4)} (5x-3y)=-2$$

Determine si el límite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$$

UNIDAD II

DERIVACIÓN PARCIAL

II.1. Derivadas Parciales

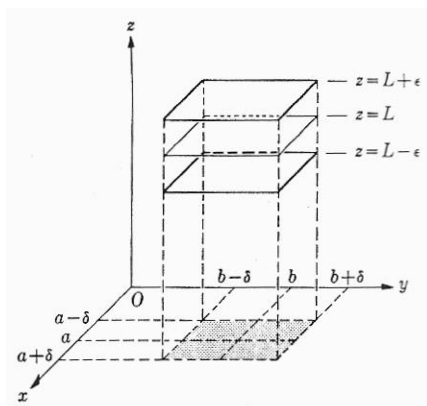
Una expresión de la forma: $z = F_{(x,y)}$, donde "x" y "y" son variables independientes, indica que la variable dependiente "z" es una función de ambas variables independientes.

Una función de tres variables se escribe: $w = G_{(x,y,z)}$, donde "x", "y" y "z" son variables independientes y "w" es la variable dependiente. También podemos considerar funciones de cuatro, cinco o cualquier número de variables independientes. Si el número exacto de variables independientes es "n", escribimos:

$$y = f(x, x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde $x, x_1, x_2, ... x_n$ son "n" variables independientes y "y" es la variable dependiente.

En la siguiente Figura se ilustra una interpretación geométrica de esta definición. La definición afirma que siempre que las (x, y) están en el cuadrado sombreado, como se muestra en la figura, entonces los valores de la función que representamos por z deben estar en el paralelepípedo rectangular de altura 2ε entre los valores L — ε Y L ± ε.



Las funciones de dos o más variables no poseen derivadas ordinarias del tipo que hemos estudiado para funciones de una variable. Si "f" es una función de dos variables, digamos de "x" y "y", entonces para cada valor fijo de "y", "f" es una función de una sola variable "x". La derivada con respecto a "x" (manteniendo "y" fijo) se llama derivada parcial con respecto a "x". Para x fijo y "y" variable, obtenemos una derivación parcial con respecto a "y".

Definición.

Definimos las derivadas parciales de una función "f" de las variables "x" y "y" mediante:

$$f_{,1}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_{,2}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

donde "y" se mantiene fijo en el primer límite y "x" en el segundo. Si "F" es una función de las tres variables "x","y" y "z", definimos las derivadas parciales $F_{,1}, F_{,2} F_{,3}$ mediante:

$$f_{,1}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}, DONDE\_(y,z\_son\_fijos)$$
$$f_{,2}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}, DONDE\_(x,z\_son\_fijos)$$
$$f_{,3}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}, DONDE\_(x,y\_son\_fijos)$$

En otras palabras, para hallar la derivada parcial de $F_{,1}$ de una función de tres variables, se consideran "y" y "z" constantes y se denomina la derivada ordinaria con respecto a "x"; análogamente, se determinan las derivadas $F_{,2} y F_{,3}$. Se aplica el mismo procedimiento a funciones de cualquier número de variables.

Ejemplo:

Dado f(x,y)=x³+7x²y+8y³+3x-2y+7, hallar $F_{,1} y F_{,2}$.

Dado f(x,y,z)=x3+y3+z3+3xyz, hallar $F_{,1}, F_{,2} y F_{,3}$

Dado f(x,y)=x2-3xy+2x-3y+5, hallar $f_{,1}(2,3)$

II.2. Derivación Implícita

Una ecuación que contiene a "x","y" y "z" establece una relación entre las variables. Si podemos despejar "z" en funciones de "x" y "y", entonces podemos obtener una o más funciones determinadas por la relación. Por ejemplo, la ecuación: $2x^2+y^2+z^2-16=0$, puede resolverse para "z" y dar: $z=\pm\sqrt{16-2x^2-y^2}$.

Si una o más funciones están determinadas por una relación, es posible calcular implícitamente las derivadas parciales en forma análoga a los métodos utilizados para las derivadas ordinarias.

Por ejemplo, en la ecuación anterior, considerando a "x" y a "y" como variables independientes y a "z" como variable dependiente, podemos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ directamente. Manteniendo fijo "y" y derivando implícitamente con respecto a "x", se obtiene:

$$4x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{z}$$

EJERCICIOS

Supongamos que "x,y,z" son variables, y además z es una función de "x" y "y" que satisface: $x^3+y^3+z^3+3xyz=5$, hallar: $\frac{\partial z}{\partial x} y \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3yz + 3xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + yz}{xy + z^2}$$

$Ana\log amente:$

$$3y^2 + 3z^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 3xy\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 3xz = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + xz}{xy + z^2}$$

Si "w" es una función de "r","s" y "t", que satisface $e^{rt} - 2se^{w} + wt - 3w^2 r = 5$, hallar: $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}\, y\, \frac{\partial w}{\partial t}$.

PRACTICO N°7

En cada uno de los Siguientes problemas hallar $f_{,1}(x,y)\_y\_f_{,2}(x,y)$.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - 2x$$
$$f(x,y) = x^3 y - 3x^2 y^2 + 2xy$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$
$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

En cada uno de los siguientes problemas hallar: $f_{,1}\_y\_f_{,2}$ en los valores indicados.

$$f(x,y) = x\arcsin(x-y), x = 1, y = 2$$
$$f(x,y) = e^{\sin x}\tan xz, x = \frac{\pi}{4}, z = 1$$
$$f(x,y) = x^{xy}, x = y = 2$$

En cada uno de los siguientes problemas hallar: $f_{,1}(x,y,z), f_{,2}(x,y,z) y f_{,3}(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = x^2 y - 2x^2 z + 3xyz - y^2 z + 2xz^2$$
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$f(x,y,z) = e^{xyz}\sin(xy)\cos(2xz)$$

Hallar la derivada parcial indicada en cada caso:

$$w = \ln\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right); \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$w = (r^2 + s^2 + t^2)\cosh(rst); \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial t}$$
$$w = e^{\sin(y/x)}; \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$w = (\sec(tu))\arcsin(tv); \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$$

En los siguientes problemas, suponer que “w” es una función de todas las otras variables. Hallar las derivadas parciales indicadas en cada caso:

$$3x^2+2y^2+6w^2-x+y-12=0;\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$x^2-2xy+2xw+3y^2+w^2=21;\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w-(r^2+s^2)\cosh rw=0;\ \frac{\partial w}{\partial r},\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$e^{xyw} senxy\cos 2xw-4=0;\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$xyz+x^2z+xzw-yzw+yz^2-w^3=3;\ \frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}$$

II.3. Regla de la Cadena

La regla de la cadena es uno de los métodos más efectivos para calcular derivadas ordinarias. Demostraremos en esta sección cómo se extiende la regla de la cadena para el cálculo de derivadas parciales. La base de la regla en el caso de funciones de una variable es el lema fundamental de derivación.

Supongamos que la función $z = f(x,y)$ y sus derivadas parciales $f_{,1}$ y $f_{,2}$ son continuas. Además, que $x = x(r,s)$ y $y = y(r,s)$ son funciones de "r" y "s" para las cuales existen las derivadas parciales $x_{,1}, x_{,2}, y_{,1}, y_{,2}$. entonces "z" es una función de "r" y "s" y se tienen las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Supongamos que $f(x,y) = x^3 + y^3, x = 2r + s, y = 3r - 2s$. Hallar $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}$.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (3x^2)(2) + (3y^2)(3) = 6x^2 + 9y^2 = 6(2r+s)^2 + 9(3r-2s)^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial s} = (3x^2)(1) + (3y^2)(-2) = 3x^2 - 6y^2 = 3(2r+s)^2 - 6(3r-2s)^2$$

"r" y "s" son variables independientes; las variables "x" y "y" son **intermediarias** y, naturalmente, "z" es la variable dependiente. Las fórmulas que hemos deducido se extienden fácilmente a cualquier número de variables independientes e intermediarias. Por ejemplo, si

$w = f(x,y,z)$

y si

$x = x(r,s),\_\ y = y(r,s),\_\ z = z(r,s)$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

y existe una fórmula análoga para $\frac{\partial f}{\partial s}$.

Observación.

Como un medio de recordar la regla de la cadena, observamos que *hay tantos términos en la fórmula como variables intermediarias.*

EJERCICIO

2) Si $z = 2x^2 + xy - y^2 + 2x - 3y + 5, x = 2s - t, y = s + t$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

3) Dado $w = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 4x - y + 3z - 1$, $x = t^2 - 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = t^2 + 4t - 3$, hallar $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ cuando $t = 2$.

PRACTICO N°8

1) En cada uno de los problemas, obtener, utilizando la regla de la cadena, la derivada parcial indicada.

$$f(x,y) = x^2 + y^2; x = s - 2t, y = 2s + t; \_ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2; x = s^2 - t^2, y = 2st; \_ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; x = 2s - t, y = s + 2t; \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy - 2xz + 4; x = 3s + t, y = 2s - t, z = s + 2t; \_ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2; x = r^2 + 1, y = r^2 - 2r + 1, z = r^2 - 2; \_ \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$f(u) = u^3 + 2u^2 - 3u + 1; u = r^2 - s^2 + t^2; \_ \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

2) En los siguientes problemas, calcular las derivadas para los valores dados, utilizando la regla de la cadena.

$$a) z = x^2 - y^2; x = r\cos\theta, y = rsen\theta; \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} donde, r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$b) w = xy + yz + zx; x = t\cos t, y = tsent, z = t; \frac{dw}{dt} donde, t = \frac{\pi}{4}$$

$$c) z = \frac{xy}{x^2 + y^2}; x = r\cos\theta, y = rsen\theta; \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} donde, r = 3, \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$d) w = x^3 + y^3 + z^3 - u^2 - v^2; x = r^2 + s^2 + t^2, y = r^2 + s^2 - t^2, z = r^2 - s^2 - t^2,$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ u = r^2 + t^2, v = r^2 - s^2; \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, donde, r = 1, s = 0, t = -1$$

II.4. Aplicación de la regla de la cadena.

En muchos tipos de aplicaciones se utiliza efectivamente la regla de la cadena. Tales aplicaciones se ilustran mejor con ejemplos:

1) La altura de un cono circular recto es de 30 pulg en un cierto instante y crece a razón de 2 pulg/seg. El radio de la base, en ese mismo instante, es de 20 pulg y crece a razón de 1 pulg/seg. ¿A qué velocidad crece el volumen en aquel instante?

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial v}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h\frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\pi(20)(30)(1) + \frac{1}{3}\pi(20)^2(2) = \frac{2000\pi}{3}\frac{pu\lg^3}{seg}$$

2) La longitud de la base "B" de un trapecio crece a razón de 2 pulg./seg y la longitud de la base "b" decrece a razón de 1 pulg/seg. Si la altura "h" crece a razón de 3 pulg/seg, ¿con qué velocidad varía el área "A" cuando B=30 pulg, b=50pulg, y h=10 pulg?

3) Un avión vuela hacia el este a 300 millas/h y se eleva a razón de 600 pies/min. En un cierto instante, el avión está 12000 pies de altura sobre el suelo y a 5 millas al oeste de un observador que está en el suelo. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre el avión y el observador en ese instante?

PRACTICO N°9

1.- En un cierto instante, el radio de la base de un cilindro circular recto es de 10 pulg y la altura de 15 pulg. En ese instante el radio decrece a razón de 5 pulg/seg y la altura crece a razón de 4 pulg/seg. ¿Con qué rapidez cambia el volumen en ese momento?

2.- Un gas satisface la ley $pv = RT$ (R = const). En un cierto instante, mientras el gas es comprimido, $v = 15 pies^3$, $p = 25 lb/pu\lg^2$, "v" decrece a razón de 3 pies^3/min y "p" crece a razón de 6 $\frac{2}{3}$ lb/pulg^2/min. Hallar $\frac{dT}{dt}$.(Dar la respuesta en función de R.)

3.- De un tanque de forma cónica sale agua a razón de 0.5 pies^3/min; el tanque se dilata de manera que mientras permanece cónico, la distancia del vértice a la superficie de agua crece a razón de 0.2 pies/min. ¿Con que rapidez cambia la altura "h" del agua en el instante en que h=10 y el volumen del agua es de 75 pies^3?

4.- Dado $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy\ln(y/x)$, demostrar que $xf_{,1} + yf_{,2} = 2f$.

II.5. Planos Tangentes

El plano cuya ecuación es $z - z_0 = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0)$ donde

$$z_0 = f(x_0, y_0) \qquad m_1 = f_{,1}(x_0, y_0) \qquad m_2 = f_{,2}(x_0, y_0)$$

se llama **plano tangente** a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0).

La recta de ecuaciones $\dfrac{x - x_0}{m_1} = \dfrac{y - y_0}{m_2} = \dfrac{z - z_0}{-1}$, con $z_0 = f(x_0, y_0)$, $m_1 = f_{,1}(x_0, y_0)$, $m_2 = f_{,2}(x_0, y_0)$, se llama la recta normal a la superficie en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Claramente, la recta es perpendicular al plano tangente.

EJERCICIOS

1) Encontrar la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la recta normal a la superficie $z = x^2 + xy - y^2$ en el punto donde $x = 2, y = -1$.

Si la ecuación de la superficie se da en forma implícita es posible utilizar los métodos para hallar $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ en el punto deseado.

2) Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en (3,-1,2) al lugar geométrico de $xy + yz + xz - 1 = 0$.

Supongamos que las ecuaciones $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ representan superficies que se cortan en una curva *C*. La recta tangente a la intersección en un punto *P* de *C* es, por definición, la recta de intersección de los planos tangentes a *f* y *g* en *P*.

Podemos utilizar el álgebra vectorial para hallar las ecuaciones de esta recta tangente en la forma siguiente. Si las coordenadas de P son (x_0, y_0, z_0), entonces

$$u = f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j + (-1)k$$

es un vector perpendicular al plano tangente a *f* en *P*. Análogamente tenemos que

$$v = g_x(x_0, y_0)i + g_y(x_0, y_0)j + (-1)k$$

es un vector perpendicular al plano tangente a *g* en *P*. La recta de intersección a estos planos tangentes es perpendicular a ***u*** y a ***v***. Del estudio de vectores se sabe que ***u*** y v son vectores no paralelos, el vector $u \times v$ es perpendicular a ***u*** y a ***v***. Definiendo el vector $w = ai + bj + ck$ mediante la relación $w = u \times v$, deducimos que las ecuaciones de la recta de intersección de los planos tangentes son

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

3) Hallar las ecuaciones de la recta tangente a la intersección de las superficies $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $z = g(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 1$ en el punto (2,1,6).

PRACTICO N°10

En los problemas 1 a 14, hallar, en cada caso, la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la recta normal a la superficie dada en el punto dado.

$$1. z =$$
$$2. z = 3x^2 - y^2 - 2; (-1,2,-3)$$
$$3. z = xy; (2,-1,-2)$$
$$4. z = x^2 y^2; (-2,2,16)$$
$$5. z = e^x \sin y; (1, \frac{\pi}{2}, e)$$
$$6. z = e^{2x} \cos 3y; (1, \frac{\pi}{3}, -e^2)$$
$$7. z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; (-3,4, \ln 5)$$
$$8. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6; (1,1,-1)$$
$$9. x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3; (2,1,-1)$$
$$10. x^2 + 3y^2 - z^2 = 0; (2,-2,4)$$
$$11. x^2 + z^2 = 25; (4,-2,-3)$$
$$12. xy + yz + xz = 1; (2,3,-1)$$
$$13. x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 6; (4,1,9)$$
$$14. y^{1/2} + z^{1/2} = 7; (3,16,9)$$

En los problemas 19 a 22, hallar las ecuaciones de la recta tangente a la intersección de las dos superficies en el punto dado.

$$19. z = x^2 + y^2, z = 2x + 4y + 20; (4,-2,20)$$
$$20. z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2x - 3y - 13; (3,-4,5)$$
$$21. z = x^2, z = 25 - y^2; (4,-3,16)$$
$$22. z = \sqrt{25 - 9x^2}, z = e^{xy} + 3; (1,0,4)$$

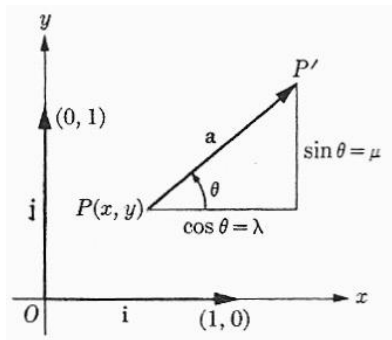
DERIVADA DIRECCIONAL

La derivada parcial de una función con respecto a "x" puede considerarse como la derivada en la dirección *x*; la derivada parcial con respecto a y es la derivada en la dirección *y*. Ahora mostraremos como se puede definir la derivada en *cualquier dirección*.

Definiendo el vector "**a**" mediante la relación:

$$\mathbf{a}=\lambda\,\mathbf{i}+\mu\,\mathbf{j},$$

donde $\lambda=\cos\theta$, $\mu=sen\theta$, i y j son los vectores unitarios usuales. Observamos que "**a**" es un vector de longitud unidad. El vector "**a**" determina la misma dirección que el ángulo θ.



Definición.- Sea *f* una función de dos variables. Definimos la **derivada direccional** $D_a f$ de *f* **en la dirección de a** mediante

$$D_a f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\lambda h,y+\mu h)-f(x,y)}{h}$$

En el teorema que sigue se establece una fórmula que permite el cálculo con las derivadas direccionales.

Si $f(x,y)$ y sus derivadas parciales son continuas y

$$\mathbf{a}=(\cos\theta)\,\mathbf{i}+(\sin\theta)\,\mathbf{j},$$

entonces $$D_a f(x,y)=f_{,1}(x,y)\cos\theta+f_{,2}(x,y)sen\theta$$

Ejemplo 1.- Dado $f(x,y)=x^2+2y^2-3x+2y$, hallar la derivada direccional de f en la dirección $\theta=\pi/6$.¿Cuál es el valor de esta derivada n el punto(2,-1)?

Otra notación para la derivada direccional de funciones de dos variables es el símbolo $d_\theta f(x,y)$.

Un problema común en máximos y mínimos es hallar el valor de θ tal que la derivada direccional en un punto dado sea máxima o mínima.

Ejemplo 2.- Dado $f(x,y)=x^2-xy-y^2$, hallar $d_\theta f(x,y)$ en el punto (2,-3. ¿Para qué valor de θ toma $d_\theta(2,-3)$ su valor máximo?

Para hallar el máximo de esta función de θ derivamos

$$\tan\theta = \frac{4}{7} \qquad \theta = \begin{cases} 29^\circ 45' \text{ aproximadamente} \\ 209^\circ 45' \text{ aproximadamente} \end{cases}$$

La definición de derivada direccional para funciones de dos variables se generaliza a funciones de tres variables. En el espacio, una dirección está determinada por un conjunto de cosenos directores λ, μ, ν o en forma equivalente, por un vector **a**= λ **i**+ μ **j**+ ν **k**.

Recordando que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, resulta que **a** es un vector **unitario.**

Definición.- Definimos la **derivada direccional** $D_a f$ **de** $f(x,y,z)$ **en la dirección de a** mediante

$$D_a f(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\lambda h, y+\mu h, z+\nu h) - f(x,y,z)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Si $f(x,y,z)$ y sus derivadas parciales son continuas y

a= λ **i**+ μ **j**+ ν **k** es un vector unitario, entonces

$$D_a f(x,y,z) = \lambda f_{,1}(x,y,z) + \mu f_{,2}(x,y,z) + \nu f_{,3}(x,y,z).$$

Ejemplo:

Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 2xz - yz$ en el punto P(1,2,-1)

GRADIENTE

La definición que sigue muestra que el *gradiente* de una función es un vector que contiene las derivadas parciales de la función.

Si $f(x,y)$ posee derivadas parciales definimos el vector gradiente

$$\textbf{grad}\, f(x,y) = f_{,1}(x,y)\,\mathbf{i} + f_{,2}(x,y)\,\mathbf{j}.$$

Si $g(x,y,z)$ posee derivadas parciales, definimos

$$\textbf{grad}\, g(x,y,z) = g_{,1}(x,y,z)\,\mathbf{i} + g_{,2}(x,y,z)\,\mathbf{j} + g_{,3}(x,y,z)\,\mathbf{k}.$$

El símbolo ∇, "nabla", se utiliza generalmente para designar el gradiente. Frecuentemente escribiremos ∇f en vez de **grad** *f*.

Si **a** es un *vector* unitario con **a**= λ **i**+ μ **j**+ ν **k**, tenemos la fórmula

$$D_a f = \lambda f_{,1} + \mu f_{,2} + \nu f_{,3} = \mathbf{a}.\nabla f.$$

Visto de otra manera, el producto escalar de a y ∇ ***f está dado por: a.*** ∇ ***f=a*** ∇ ***fcosΦ=Daf donde Φ es el ángulo determinado por a y*** ∇ ***f. En este sentido deducimos que cuando Φ es cero, Daf es máxima, es decir cuando "a" tiene la dirección del "grad f".***

Ejemplo:

Dada la función: $f(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 4xyz$ hallar el valor máximo de $D_a f$ en el punto P(-1,1,2).

PRACTICO N°11

En los problemas 1 a 6, hallar, en cada caso, $d_\theta f(x,y)$ en el punto dado.

$$
\begin{aligned}
&1. f(x,y) = x^2 + y^2; (3,4)\\
&2. f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2; (1,-2)\\
&3. f(x,y) = \arctan(y/x); (4,3)\\
&4. f(x,y) = \sin xy; (2,\pi/4)\\
&5. f(x,y) = e^x \cos y; (0,\pi/3)\\
&6. f(x,y) = (\sin x)^{xy}; (\pi/2,0)
\end{aligned}
$$

En cada uno de los problemas del 7 al 10, hallar el valor de $d_\theta f(x,y)$ en el punto dado. Además, hallar el valor de θ para el cual $d_\theta f$ es máximo en este punto. Expresar la respuesta en función de senθ y cosθ.

$$
\begin{aligned}
&7. f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3y; (2,-1)\\
&8. f(x,y) = \arctan(x/y); (3,4)\\
&9. f(x,y) = e^x \sin y; (0,\pi/6)\\
&10. f(x,y) = (\sin y)^{xy}; (0,\pi/2)
\end{aligned}
$$

En cada uno de los problemas del 11 al 14, hallar $D_a f$ en el punto dado.

$$
\begin{aligned}
&11. f(x,y,z) = x^2 + xy - xz + y^2 - z^2; (2,1,-2)\\
&12. f(x,y,z) = x^2y + xze^y - xye^z; (-2,3,0)\\
&13. f(x,y,z) = \cos xy + \sin xz; (0,2,-1)\\
&14. f(x,y,z) = \ln(x+y+z) - xyz; (-1,2,1)
\end{aligned}
$$

En los problemas 15 a 18, hallar, en cada caso, $D_a f$ en el punto dado **P** cuando **a** es el vector unitario dado.

15. $f(x,y,z)=x^2+2xy-y^2+xz+z^2; P(2,1,1); a=\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$

16. $f(x,y,z)=x^2y+xye^z-2xze^y; P(1,2,0); a=\frac{2}{7}i-\frac{3}{7}j+\frac{6}{7}k$

17. $f(x,y,z)=\sin xz+\cos xy; P(0,-1,2); a=\frac{1}{\sqrt{6}}i-\frac{1}{\sqrt{6}}j+\frac{2}{\sqrt{6}}k$

18. $f(x,y,z)=\tan xyz+\sin xy-\cos xz; P(0,1,1); a=\frac{1}{\sqrt{26}}i+\frac{3}{\sqrt{26}}j+\frac{4}{\sqrt{26}}k$

DERIVADAS DE SEGUNDO ORDEN Y DE ORDEN SUPERIOR

Si *f* es una función de dos variables –digamos *x* y *y*- entonces $f_{,1}$ y $f_{,2}$ son también funciones de las mismas dos variables. Cuando derivamos $f_{,1}$ y $f_{,2}$ obtenemos derivadas parciales de segundo orden.

$$f_{,1,1}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f_{,1}(x+h,y)-f_{,1}(x,y)}{h}$$

$$f_{,1,2}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f_{,1}(x,y+k)-f_{,1}(x,y)}{k}$$

Existen una gran variedad de notaciones para derivadas parciales que a veces conducen a confusión. Por ejemplo, si escribimos $z=f(x,y)$, entonces los 5 símbolos siguientes tienen el mismo significado:

$$f_{,1,1};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\qquad f_{xx};\qquad z_{xx}\,.$$

Para las otras derivadas parciales tenemos la variedad de expresiones:

$$f_{,1,2}=f_{x,y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=z_{xy},$$

$$f_{,2,1}=f_{y,x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=z_{yx},$$

$$f_{,1,2,1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=f_{xyx}=z_{xyx},$$

Observamos que en la notación con subíndices los símbolos tales como f_{xyy} o z_{xyy} significan que el orden de la derivada parcial se toma de izquierda a derecha -es decir, primero con respecto a *x* y luego dos veces con respecto a *y*. por otra parte, el símbolo

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$$

afirma que las dos primeras derivadas se toman con respecto a y y luego con respecto a x. El símbolo con denominador y el símbolo con subíndice son inversos uno del otro.

Ejemplo 1. Dado $z = x^3 + 3x^2 y - 2x^2 y^2 - y^4 + 3xy$, hallar

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

En el ejemplo anterior, no es accidenta que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Si f es una función de un cierto número de variables y s y t son dos de ellas, entonces

$$f_{st} = f_{ts}.$$

Por ejemplo, si la función es $f(x,y,s,t,u,v)$,entonces

$$f_{xt} = f_{tx}, \qquad f_{yu} = f_{uy}, \qquad f_{yv} = f_{vy}, \quad \text{etc.}$$

Para las derivadas del tercero, cuarto u orden superior no interesa el orden en que se efectúen las derivaciones con respecto a las diferentes variables. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial y \partial x}$$
$$= \frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 z}{\partial y \partial y \partial x \partial x}$$

Observaciones. Es cierto que existen funciones para las cuales f_{xy} es diferente de f_{yx}. Naturalmente, la hipótesis vista anteriormente, no se cumple para tales funciones.

Todas las funciones que hemos considerado hasta ahora y las que consideraremos en adelante verifican la hipótesis anterior. Por lo tanto será indiferente el orden de la derivación.

Ejemplo 2. Dado $u = e^x \cos y + e^y senz$, hallar todas las primeras derivadas parciales y comprobar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

PRACTICO N°12

En cada uno de los problemas comprobar que $f_{,1,2} = f_{,2,1}$.

$$\begin{aligned}
&1.\, f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \\
&2.\, f(x, y) = x^3 - x^2 y + 2xy^2 \\
&3.\, f(x, y) = e^{rs} \sin r \cos s \\
&4.\, f(x, y) = \arctan(t / s) \\
&5.\, u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&6.\, u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&7.\, u = exy / \sqrt{x^2 + z^2}
\end{aligned}$$

Dado $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, comprobar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Dado $u = xe^x \cos y$, comprobar que $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$.

TABLA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a \, D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\operatorname{sen} u) = \cos u \, D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\operatorname{sen} u \, D_x u$
10. $D_x(\tan u) = \sec^2 u \, D_x u$
11. $D_x(\cot u) = -\csc^2 u \, D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \tan u \, D_x u$
13. $D_x(\csc u) = -\csc u \cot u \, D_x u$
14. $D_x(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u \, D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \operatorname{senh} u \, D_x u$
22. $D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \, D_x u$
23. $D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \, D_x u$
24. $D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \, D_x u$
25. $D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \, D_x u$

UNIDAD III

DIFERENCIACIÓN

DIFERENCIAL TOTAL. APROXIMACIÓN

La diferencial de una función de una variable es una función de dos variables elegidas en una forma especial. Recordemos que si $y = f(x)$, entonces la diferencial de *f*, *df*, está definida mediante la relación

$$df = f'(x)h,$$

donde *h* y *x* son variables independientes.

Sea *f* una función de varias variables; la definición que sigue es apropiada para generalizar la noción de diferencial a tales funciones.

Definiciones. La **diferencial total** de *f(x,y)* es la función *df* de cuatro variables *x, y, h, k* dada por la fórmula

$$df(x,y,h,k) = f_{,1}(x,y)h + f_{,2}(x,y)k.$$

Si *F* es una función de tres variables –digamos *x,y* y *z*– definimos la **diferencial total** como la función de seis variables, *x, y, z, h, k, l* dada por

$$dF(x,y,z,h,k,l) = F_{,1}(x,y,z)h + F_{,2}(x,y,z)k + F_{,3}(x,y,z)l.$$

Una cantidad asociada a la diferencial total es la diferencia de una función en dos valores próximos. Como es costumbre, utilizaremos la notación Δ y, para funciones de dos variables, definimos Δf mediante la relación

$$\Delta f \equiv \Delta f(x,y,h,k) = f(x+h, y+k) - f(x,y).$$

Aquí Δf es una función de cuatro variables como lo es *df*. Si *f* depende de *x,y* y *z*, entonces Δf es una función de seis variables definida mediante

$$\Delta f \equiv \Delta f(x,y,z,h,k,l) = f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z).$$

Ejemplo 1. Dada la función $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 2y + 4,$ hallar $df(a,b,h,k)$ y $\Delta f(a,b,h,k)$ para $a = 3, b = 1.$

$$f(3,1) = 7; \quad f_{,1}(x,y) = 2x + y - 3; \quad f_{,2}(x,y) = x - 4y + 2;$$
$$f_{,1}(3,1) = 4; \quad f_{,2}(3,1) = 1.$$

$$f(3+h, 1+k) = (3+h)^2 + (3+h)(1+k) - 2(1+k)^2 - 3(3+h) + 2(1+k) + 4 = h^2 + hk - 2k^2 + 4h + k + 7.$$

$$df(3,1,h,k) = 4h + k; \quad \Delta f(3,1,h,k) = 4h + k + h^2 + hk - 2k^2.$$

En el teorema se mostró la estrecha relación entre *df* y Δf . La ecuación (1) de aquel teorema se puede expresar en la forma

$$\Delta f(x_0, y_0, h, k) = df(x_0, y_0, h, k) + G_1(h,k)h + G_2(h,k)k.$$

La conclusión del teorema implica que $\dfrac{\Delta f - df}{|h| + |k|} \to 0$ cuando $h, k \to 0$, porque G_1 y G_2 tienden a cero cuando *h* y *k* tienden a cero.

Como en el caso de las funciones de una variable, el simbolismo para la diferencial total se pede utilizar como una ayuda en la derivación. Sea $z = f(x, y)$ y empleamos los símbolos

dz para df, dx para h y dy para k.

Como en el caso de una variable, existe un cierta ambigüedad, porque dz tiene una definición precisa como diferencia total, mientras que dx y dy se utilizan como variables independientes. El teorema que sigue muestra cómo la regla de la cadena permite salvar todas las dificultades cuando dx y dy son a su vez funciones de otras variables (es decir, dx y dy son las que llamamos intermediarias).

Teorema 6. Supongamos que $z = f(x, y)$, y que x y y son funciones de alguna otra variable. Entonces

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

El resultado para $w = F(x, y, z)$ es análogo. Es decir, la fórmula

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Por otra parte,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}h + \frac{\partial z}{\partial t}k$$

y, utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ejemplo. Dado $z = e^x \cos y + e^y \sin x,\quad x = r^2 - t^2,\quad y = 2rt.$ Hallar $dz(r, t, h, k)$ en dos formas.

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= (e^x \cos y + e^y \cos x)\,dx + (-e^x \sin y + e^y \sin x)\,dy; \\ dx &= 2rh - 2tk; \\ dy &= 2th + 2rk. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= (e^x \cos y + e^y \cos x)(2rh - 2tk) + (-e^x \sin y + e^y \sin x)(2th + 2rk) \\ &= 2[e^x \cos y + e^y \cos x)r + (e^y \sin x - e^x \sin y)t]h \\ &\quad + 2[(-e^x \cos y - e^y \cos x)t + (e^y \sin x - e^x \sin y)r]k. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}h + \frac{\partial z}{\partial t}k$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (e^x \cos y + e^y \cos x)(2r) + (e^y \sin x - e^x \sin y)(2t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (e^x \cos y + e^y \cos x)(-2t) + (e^y \sin x - e^x \sin y)(2r).$$

PRACTICO N°13

En cada uno de los problemas del 1 al 6, hallar $df(x,y,h,k)$ y $\Delta f(x,y,h,k)$ para los valores dados de x, y, h y k.

1. $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$, $x = 2$, $y = -1$, $h = -0.01$, $k = 0.02$
2. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2$, $x = 1$, $y = 2$, $h = -0.02$, $k = -0.01$
3. $f(x,y) = \sin xy + \cos(x+y)$, $x = \pi/6$, $y = 0$, $h = 2\pi$, $k = 3\pi$
4. $f(x,y) = e^{xy}\sin(x+y)$, $x = \pi/4$, $y = 0$, $h = -\pi/2$, $k = 4\pi$
5. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, $x = -2$, $y = 1$, $h = -0.03$, $k = -0.02$
6. $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 3x$, $x = 1$, $y = 1$, $h = 0.02$, $k = 0.01$

En cada uno de los problemas del 7 al 10, hallar $df(x,y,z,h,k,l)$ y $\Delta f(x,y,z,h,k,l)$ para los valores dados de x, y, z, h, k y l.

7. $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xz$; $(x,y,z) = (2,-1,3)$; $(h,k,l) = (0.01,-0.02,0.03)$
8. $f(x,y,z) = xy - xz + yz + 2x - 3y + 1$; $(x,y,z) = (2,0,-3)$; $(h,k,l) = (0.1,0.2,0.1)$
9.. $f(x,y,z) = x^2y - xyz + z^3$; $(x,y,z) = (1,2,-1)$; $(h,k,l) = (-0.02,0.01,0.02)$
10. $f(x,y,z) = \sin(x+y) - \cos(x-z) + \sin(y+2z)$;
    $(x,y,z) = (\pi/3, \pi/6, 0)$; $(h,k,l) = (\pi/4, \pi/2, 2\pi)$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL TOTAL

Una de las fórmulas más simples, que desarrollaremos a continuación, utiliza el hecho de que la diferencial total de una constante es cero. Supongamos que "x" y "y" están vinculadas por alguna ecuación tal como:

$$f(x,y)=0$$

Si consideramos "y" como una función de "x", podemos calcular la derivada dy/dx en la forma usual para las funciones implícitas. Sin embargo, también podemos utilizar otro procedimiento. Como f=0, la diferencial df también se anula. Por lo tanto, podemos escribir:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

o:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{si:} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0\right)$$

EJEMPLO:

Calcular, utilizando los métodos de la derivada parcial, dy/dx si:

$$x^4+3x^2y^2-y^4+2x-3y=5$$

$$f(x,y)=x^4+3x^2y^2-y^4+2x-3y-5=0,$$

$$f_x=4x^3+6xy^2+2, \qquad f_y=6x^2y-4y^3-3.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3+6xy^2+2}{6x^2y-4y^3-3}.$$

Naturalmente obtenemos el mismo resultado por el proceso usual de derivación implícita.

Se puede generalizar el método anterior de derivación ordinaria al caso de las derivadas parciales. Suponemos que "x", "y" y "z" están vinculadas por una relación de la forma:

$$F(x,y,z)=0$$

y consideramos "z" como una función de "x" y "y". Es decir, suponemos que es posible despejar "z" en función de "x" y "y", aunque no intentamos hacerlo;

Si "z" es una función de "x" y "y", entonces la fórmula para la diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Por otra parte, como F=0, la diferencial dF es también cero. Por lo tanto:

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

Despejando dz, obtenemos:

$$dz = \left(-\frac{F_x}{F_z}\right)dx + \left(-\frac{F_y}{F_z}\right)dy$$

suponiendo que $F_z \neq 0$. Comparando las ecuaciones anteriores es posible concluir que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

EJEMPLO:

Utilizando la formula anterior, hallar $\frac{\partial z}{\partial x} y \frac{\partial z}{\partial y}$ si:

$$e^{xy}\cos z + e^{-xz} seny + e^{yz}\cos x = 0$$

$$F(x, y, z) = e^{xy}\cos z + e^{-xz}\sin y + e^{yz}\cos x,$$

$$F_x = ye^{xy}\cos z - ze^{-xz}\sin y - e^{yz}\sin x,$$
$$F_y = xe^{xy}\cos z + e^{-xz}\cos y + ze^{yz}\cos x,$$
$$F_z = -e^{xy}\sin z - xe^{-xz}\sin y + ye^{yz}\cos x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ye^{xy}\cos z - ze^{-xz}\sin y - e^{yz}\sin x}{-e^{xy}\sin z - xe^{-xz}\sin y + ye^{yz}\cos x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^{xy}\cos z + e^{-xz}\cos y + ze^{yz}\cos x}{-e^{xy}\sin z - xe^{-xz}\sin y + ye^{yz}\cos x}.$$

PRACTICO N°14

En cada uno de los problemas siguientes, hallar, por los métodos de derivación parcial, la derivada dy/dx.

1) $x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

2) $x^3 3x^2 y - 4xy^2 + y^3 - x^2 + 2y - 1 = 0$

3) $\ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} = 5$

4) $x^4 - 3x^2 y^2 + y^4 - x^2 y + 2xy^2 = 3$

5) $e^{xy} + \sin xy + 1 = 0$

6) $xe^y + ye^x + \sin(x + y) - 2 = 0$

7) $\arctan(y/x) + (x^2 + y^2)^{3/2} = 2$

En cada uno de los problemas del 8 al 12, supongamos que *w* es una función de las variables restantes. Hallar las derivadas parciales por el método estudiado anteriormente (fórmula de los no pensantes).

8) $x^2 + y^2 + w^2 - 3xyw - 4 = 0; \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y}$

9) $x^3 + 3x^2 w - y^2 w + 2yw^2 - 3w + 2x = 8; \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x}$

10) $e^{xy} + e^{yw} - e^{xw} + xyw = 4; \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y}$

11) $\sin(xyw) + x^2 + y^2 + w^2 = 3; \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x}$

12) $(w^2 - y^2)(w^2 + x^2)(x^2 - y^2) = 1 \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y}$

DIFERENCIALES EXACTAS

En la sección anterior vimos que la diferencial de una función $f(x,y)$ está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \ .$$

La expresión df es una función de cuatro variables, porque $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son funciones de "x" y "y" y "dx" y "dy" son variables independientes adicionales. Resulta que las expresiones de la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

aparecen frecuentemente en problemas de Ingeniería. Es natural preguntar cuándo tal expresión es la diferencial total de una función f. Por ejemplo, si nos dan

$$(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3y^2)dy \ ,$$

podemos pensar (correctamente) que la función $f(x,y) = x^3 + 4xy - y^3$ posee la expresión anterior como su diferencial total df. Por otra parte si nos dan

$$(2x^2 - 3y)dx + (2x - y^3)dy \ ,$$

se puede demostrar que *no existe una función f* cuya diferencial total sea la expresión anterior.

DEFINICIÓN. Si existe una función $f(x,y)$ tal que

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

para todo (x,y) en alguna región y para todos los valores de dx y dy, decimos que

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

es una **diferencial exacta**. Si existe una función $F(x,y,z)$ tal que

$$dF = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

para todo (x,y,z) en alguna región y para todos los valores de dx, dy y dz, decimos que $Pdx+Qdy+Rdz$ es una **diferencial exacta**. La generalización para el caso de funciones con cualquier número de variables es inmediata.

Supongamos que $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ *son continuas en un rectángulo S. Entonces la expresión*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

es una diferencial exacta para (x,y) en la región S si y sólo si $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *para todo (x,y)en S.*

Ejemplo 1. Demostrar que $(3x^2+6y)dx+(3y^2+6x)dy$ es una diferencial exacta y determinar la función f de la cual es diferencial total.

$$P = 3x^2+6y,\ Q = 3y^2+6x,$$

$$Q_x = 6, \qquad P_y = 6,$$

$$f_x = 3x^2+6y$$

$$f = x^3+6xy+C(y).$$

$$f_y = 6x+C'(y),$$

$$6x+C'(y) = 3y^2+6x$$

$$C'(y) = 3y^2, \quad C(y) = y^3+C_1.$$

$$f(x,y) = x^3+6xy+y^3+C_1.$$

Ejemplo 2. Demostrar que $(e^x\cos y-e^y\sin x)dx+(e^y\cos x-e^x\sin y)dy$ es una diferencial exacta y determinar la función f de la cual es diferencial total.

$$P = e^x\cos y-e^y\sin x,\ Q = e^y\cos x-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x\sin y-e^y\sin x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$f(x,y) = e^x\cos y+e^y\cos x+C(y).$$

$$f_y = -e^x\sin y+e^y\cos x+C'(y) = Q = e^y\cos x-e^x\sin y.$$

$$f(x,y) = e^x\cos y+e^y\cos x+C.$$

Supongamos que $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *son continuas en algún paralelepípedo rectangular S. Entonces*

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

es una diferencial exacta en S si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Se supone que todas las derivadas parciales anteriores son funciones continuas de (x,y,z) en S.

Ejemplo: Determinar si la expresión

$$(3x^2 - 4xy + z^2 + yz - 2)dx + (xz - 6y^2 - 2x^2)dy + (9z^2 + 2xz + xy + 6z)dz$$

es o no una diferencial exacta, determinar la función *f* de la cual es diferencial total.

$$P_y = -4x + z = Q_x, \qquad P_z = 2z + y = R_x, \qquad Q_z = x = R_y.$$

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x + C(y, z).$$

$$f_y(x, y, z) = -2x^2 + xz + C_y(y, z) = Q = xz - 6y^2 - 2x^2.$$

$$C_y(y, z) = -6y^2$$

$$C(y, z) = -2y^3 + C_1(z).$$

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x - 2y^3 + C_1(z),$$

$$f_z = 2xz + xy + C_1'(z) = R = 9z^2 + 2xz + xy + 6z.$$

$$C_1'(z) = 9z^2 + 6z \quad \text{and} \quad C_1(z) = 3z^3 + 3z^2 + C_2.$$

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + 3z^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz + 3z^2 - 2x + C_2.$$

PRACTICO N°15

En cada uno de los problemas del 1 al 18, determinar cuales de las diferenciales son exactas. En caso de que una diferencial sea exacta, determinar la función de la cual es diferencial total.

1.- $(x^3 + 3x^2y)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$

2.- $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)\,dy$

3.- $\left(2y - \frac{1}{x}\right) dx + \left(2x + \frac{1}{y}\right) dy$

4.- $(x^2 + 2xy)\,dx + (y^3 - x^2)\,dy$

5.- $x^2 \sin y\,dx + x^2 \cos y\,dy$

6.- $\frac{x^2 + y^2}{2y^2}\,dx - \frac{x^3}{3y^3}\,dy$

7.- $2xe^{x^2} \sin y\,dx + e^{x^2} \cos y\,dy$

8.- $(ye^{xy} + 3x^2)\,dx + (xe^{xy} - \cos y)\,dy$

9.- $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},\ x > 0$

10.- $(2x \ln y)\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy$

11.- $(x + \cos x \tan y)\,dx + (y + \tan x \cos y)\,dy$

12.- $\frac{1}{y} e^{2x/y}\,dx - \frac{1}{y^3} e^{2x/y}(y + 2x)\,dy$

13.- $(3x^2 \ln y - x^3)\,dx + \frac{3x^2}{y}\,dy$

14.- $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2\right) dy$

15.- $(2x - y + 3z)\,dx + (3y + 2z - x)\,dy + (2x + 3y - z)\,dz$

16.- $(2xy + z^2)\,dx + (2yz + x^2)\,dy + (2xz + y^2)\,dz$

17.- $(e^x \sin y \cos z)\,dx + (e^x \cos y \cos z)\,dy - (e^x \sin y \sin z)\,dz$

18.- $\left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{x^2z} - \frac{z}{x^2y}\right) dx + \left(\frac{1}{xz} - \frac{x}{y^2z} - \frac{z}{xy^2}\right) dy + \left(\frac{1}{xy} - \frac{x}{yz^2} - \frac{y}{xz^2}\right) dz$

MAXIMOS Y MINIMOS

Una de las aplicaciones fundamentales de la derivación de funciones de una variable aparece en el estudio de máximos y mínimos.

Un estudio de máximos y mínimos de funciones de dos, tres o más variables se basa en el teorema que sigue.

Teorema. Sea "*R*" una región del plano "*xy*" cuya curva frontera también se considera como parte de "*R*". Si "*f*" es una función de dos variables definida y contínua en "*R*", entonces existe(al menos) un punto de "*R*", donde "*f*" toma un valor máximo y también existe (al menos) un punto de "*R*" donde "*f*" toma un valor mínimo.

Se pueden establecer teoremas similares para funciones de tres, cuatro o más variables. Los máximos y mínimos pueden aparecer en la frontera de "*R*". Así, como en el caso de una variable donde el intervalo debe ser ***cerrado***, también la región *"R" debe contener su frontera* para asegurar la valides del resultado.

DEFINICIÓN. Una función $f(x,y)$ posee un máximo relativo en (x_0,y_0) si existe alguna región que contiene a (x_0,y_0) *como punto interior* tal que

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

para todo (x,y) en esa región. Con mayor precisión, debe existir algún número positivo "δ" (tan "pequeño" como se quiera) tal que se verifique la desigualdad anterior para todo (x,y) el cuadrado

$$|x-x_0| \langle \ \delta, \qquad |y-y_0| \langle \ \delta\ .$$

Se tiene una definición análoga para **mínimo relativo** cuando se verifica la desigualdad $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ en todo cuadrado de centro (x_0,y_0). Se extienden fácilmente las definiciones anteriores a funciones de tres, cuatro o más variables.

Las condiciones de que $f_{,1}$ y $f_{,2}$ se anulen en un punto son ***necesarias*** para la existencia de un máximo o un mínimo relativo. Es fácil dar una función para la cual $f_{,1}$ y $f_{,2}$ se anulen en un punto sin que la función posea un máximo o un mínimo relativo en aquel punto. Un punto crítico donde f no es máximo ni mínimo es un "**punto de silla**".

El criterio fundamental para hallar máximos y mínimos de funciones de dos variables es el llamado criterio de la segunda derivada, que establecemos a continuación.

Teorema. Supongamos que f y sus derivadas parciales, incluyendo hasta el orden tres, son continuas en un entorno de (a,b); y supongamos también que

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0\,;$$

es decir, (a,b) es un punto crítico. Entonces se tiene

(i) un mínimo local si

$$f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) \rangle\ 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a,b) \rangle\ 0\,;$$

(ii) un máximo local si

$$f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) \rangle\ 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a,b) \langle\ 0\,;$$

(iii) un punto silla si

$$f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) \langle\ 0\,;$$

(iv) no hay información si

$$f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) = 0$$

Ejemplo. Determinar si la función f definida mediante $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ posee máximos y mínimos relativos.

Ejemplo. Hallar las dimensiones de la caja rectangular, sin contar la tapa superior, que tenga un volumen máximo si el área de la superficie es 12.

La determinación de máximos y mínimos depende de nuestra habilidad para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resulta cuando ponemos $f_x = 0$ y $f_y = 0$. En algunos ejemplos las ecuaciones son lineales y, por lo tanto, fáciles de resolver. Sin embargo, existen otros ejemplos donde las ecuaciones no son lineales, y no hay métodos rutinarios para resolver ecuaciones simultáneas no lineales.

Los cursos elementales de algebra generalmente no consideran tales tópicos y el estudiante desarrolla sus propios métodos.

La única regla general que podemos establecer es: tratar de resolver una de las ecuaciones para una de las incógnitas en función de la segunda ecuación. De otra manera, utilizar el ingenio.

En la práctica real, puede resolverse sistemas de ecuaciones no lineales con una variedad de técnicas numéricas. Los desarrollos fundamentales de las computadoras electrónicas ayudan a resolver tales problemas.

Las definiciones de punto crítico, máximo y mínimo relativo, para funciones de tres, cuatro o más variables son generalizaciones simples del caso de dos variables. Si $f(x, y, z)$ posee derivadas de primer orden, entonces un punto donde

$$f_x = 0, \qquad f_y = 0, \qquad f_z = 0$$

es un **punto crítico**. Hallamos tales puntos resolviendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para obtener los puntos críticos de funciones de n variables, igualamos a cero las n derivadas de primer orden y resolvemos el sistema de las n ecuaciones con n incógnitas. En cursos más avanzados se dan las generalizaciones del criterio de la segunda derivada para funciones de tres o más variables.

PRÁCTICO N° 16

En cada uno de los problemas del 1 al 6, determinar los máximos y los mínimos relativos de las funciones f.

$$1.\ f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$$
$$2.\ f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 10y + 9$$
$$3.\ f(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$$
$$4.\ f(x,y) = 3x^2 y + x^2 - 6x - 3y - 2$$
$$5.\ f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$
$$6.\ f(x,y) = 8^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3}$$

En los problemas 7 y 8, hallar los puntos críticos.

$$7.\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 3x + y - z - 2$$
$$8.\ f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - 2xy + 4xz + 3xt - 2yt + 4x - 5y - 3$$

9. Hallar las dimensiones de la caja rectangular cerrada de volumen máximo de 16 plg^2 de superficie.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El problema de hallar los máximos y mínimos de una función de varias variables sin agregar condiciones se conoce con el nombre de problema de máximos y mínimos libres. Cuando se impone una condición a una función, el problema de hallar los máximos y mínimos de tal función se llama problema de máximos y mínimos vinculados. La condición que se agrega se llama una condición auxiliar. Los problemas de máximos y mínimos pueden tener una o mas condiciones auxiliares. Cuando aparecen tales condiciones, generalmente son cruciales.

El método general, conocido como el método de multiplicadores de Lagrange, puede enunciarse así: Para obtener los puntos críticos de una función

$$f(x,y,z)$$

sujeta a la condición adicional

$$\phi(x,y,z)=0$$

se construye la función

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$$

y se determinan los puntos críticos de F considerada como una función de las cuatro variables $x,y,z,\lambda.$

El método es tan general que pueden introducirse varios "multiplicadores" si hay varias condiciones auxiliares. Para hallar los puntos críticos de

$$f(x,y,z)\,,$$

sujeta a las condiciones

$$\phi_1(x,y,z)=0 \quad \text{y} \quad \phi_2(x,y,z)=0$$

formamos la función

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1\phi_1(x,y,z) + \lambda_2\phi_2(x,y,z)$$

y buscamos los puntos críticos de F como una función de las cinco variables x, y, z, λ_1 y λ_2.

Ejemplo 1. Determinar el mínimo de la función

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 3y \ ,$$

con la condición de que x y y satisfagan la ecuación

$$x^2 - y = 1 \ .$$

$$F(x,y,\lambda) = (x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 3y) + \lambda(x^2 - y - 1).$$

$$F_x = 2x + 2y + 2 + 2x\lambda = 0,$$
$$F_y = 4y + 2x + 3 - \lambda = 0,$$
$$F_\lambda = x^2 - y - 1 = 0.$$

$$y = x^2 - 1$$

$$x + x^2 - 1 + 1 + \lambda x = 0, \qquad 4x^2 - 4 + 2x + 3 = \lambda.$$

$$x = 0, \qquad y = -1, \qquad \lambda = -1,$$
$$x = -\tfrac{3}{4}, \qquad y = -\tfrac{7}{16}, \qquad \lambda = -\tfrac{1}{4}.$$

Podríamos resolver este problema cono uno de máximo y mínimo sustituyendo $y = x^2 - 1$ en la ecuación de f y encontrando los puntos críticos de la función resultante de una sola variable x. Sin embargo, en algunos problemas la condición adicional puede ser tan complicada que no sea fácil despejar una de las variables en función de las otras, aunque esto sea posible teóricamente, en estos casos se hace más aparente el poder del método de los multiplicadores de Lagrange. El sistema de ecuaciones que se obtiene igualando las derivadas de primer orden a cero se puede resolver aun en el caso de que la condición adicional no sea posible.

Ejemplo 2. Hallar el mínimo de la función

$$f(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + z^2 + t^2 \ ,$$

con las condiciones $\begin{array}{l} x+3y-z+t=2, \\ 2x-y+z+2t=4. \end{array}$

$$F(x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2) = (x^2 + 2y^2 + z^2 + t^2) + \lambda_1(x + 3y - z + t - 2) + \lambda_2(2x - y + z + 2t - 4).$$

$$F_x = 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \qquad F_t = 2t + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0,$$
$$F_y = 4y + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \qquad F_{\lambda_1} = x + 3y - z + t - 2 = 0,$$
$$F_z = 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad F_{\lambda_2} = 2x - y + z + 2t - 4 = 0.$$

$$x = \tfrac{67}{69}, \quad y = \tfrac{6}{69}, \quad z = \tfrac{14}{69}, \quad t = \tfrac{67}{69}.$$

$\lambda_1 = -26/69, \lambda_2 = -54/69.$

PRÁCTICO N° 17

Resolver los siguientes problemas mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

1. Hallar el mínimo de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ bajo la condición de que $x+3y-2z=4$.

2. Hallar el mínimo de $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+4z^2$ bajo la condición de que $2x+4y-6z+5=0$.

3. Hallar el mínimo de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ si (x,y,z) está en la recta de intersección de los planos

$$x+2y+z-1=0, \qquad 2x-y-3z-4=0.$$

4. Hallar el mínimo de $f(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2$ si (x,y,z) está en la recta de intersección de los planos

$$2x+y-3z=4, \qquad x-y+2z=6 .$$

5. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ donde (x,y,z) está en el plano $x+y+z=4$.

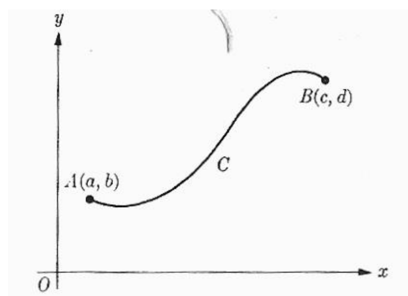
6. Hallar el mínimo de la función $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+t^2$ sujeta a la condición $3x+2y-4z+t=2.$

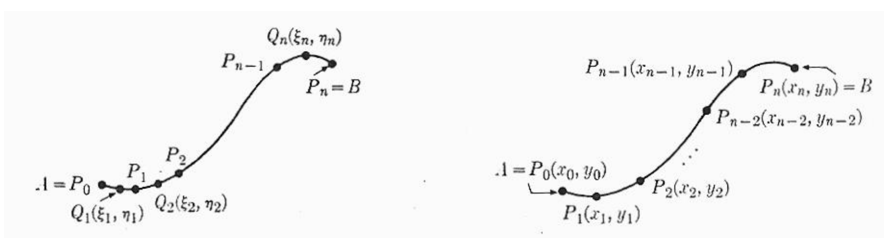
7. Hallar el mínimo de la función $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+t^2$ bajo las condiciones

$$x+y-z+2t=2, \qquad 2x-y+z+3t=3.$$

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA (INTEGRAL CURVILINEA)

Sea "C" un arco del plano que une los puntos $A(a,b)$ y $B(c,d)$, como muestra la figura. Supongamos que $f(x,y)$ es una función continua definida en una región cuyo interior contiene el arco "C". Efectuamos una descomposición del arco C mediante (n - 1) puntos de C entre A y B a lo largo de C. Designamos estos puntos con $P_1, P_2, ..., P_{n-2}, P_{n-1}$ y hacemos $A = P_0, B = P_n$. Designamos las coordenadas del punto P_i con $(x_i, y_i), i = 0,1,2,...,n$. Entre cada par de puntos sucesivos de la subdivisión elegimos un punto en la curva. Llamamos $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ a estos puntos, y designamos las coordenadas de Q_i con $(\xi_i, \eta_i), i = 1,2,...,n.$ Esta selección de Q_i entre P_{i-1} y P_i puede hacerse en forma arbitraria.





Construimos la suma

$$f(\xi_1,\eta_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2,\eta_2)(x_2 - x_i) + ... + f(\xi_n,\eta_n)(x_n - x_{n-1}),$$

o, más breve, escribimos

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta_i x.$$

Definimos la *norma de la subdivisión* $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ de la curva "C" como el máximo de la distancia entre dos puntos consecutivos de la subdivisión. Designamos la norma con $\|\Delta\|$.

Definición. Supongamos que existe un número L con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon \rangle 0$ existe un $\delta \rangle 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| \quad \langle \quad \varepsilon \qquad (1)$$

para cada subdivisión con $\|\Delta\| \langle \delta$ y para cualquier elección de los puntos (ξ_i, η_i) descritos anteriormente. Entonces decimos que **existe la integral curvilínea de f con respecto a x a lo largo de la curva C, y su valor es L.** Se utilizan gran número de notaciones para esta integral curvilínea tales como

$$\int_C f(x,y)dx \text{ y } (C)\int_A^B f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Observamos que el valor de la integral dependerá, en general, no solamente de f y de los puntos A y B sino también del arco de curva C considerado.

La expresión (1) es uno de los dos tipos de sumas que generalmente se forman en las integrales curvilíneas. También consideramos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

donde se eligen los puntos (ξ_i, η_i), como antes. El límite, si existe, (cuando $\|\Delta\| \to 0$)es la integral curvilínea

$$(C)\int_A^B f(x,y)dy. \qquad (3)$$

y generalmente tiene un valor diferente de (2).

Directamente de las definiciones se deducen las propiedades de las integrales curvilíneas, análogas a las de las integrales ordinarias. Por ejemplo, si se recorre el arco C en la dirección opuesta, cambia el signo de la integral curvilínea. Es decir,

$$(C)\int_A^B f(x,y)dx = -(C)\int_B^A f(x,y)dx.$$

Si C_1 es un arco de A_1 a A_2 y C_2 es un arco de A_2 a A_3, entonces

$$(C_1)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx + (C_2)\int_{A_2}^{A_3} f(x,y)dx = (C_1+C_2)\int_{A_1}^{A_3} f(x,y)dx, \qquad (4)$$

donde $C_1 + C_2$ tiene el significado usual. Como en el caso de las integrales ordinarias, las integrales curvilíneas tienen la propiedad aditiva.

Existe un tipo más de integral curvilínea que podemos definir. Si el arco C y la función f son como antes y si "s" designa la longitud de arco a lo largo de C medida desde el punto A al punto B, podemos definir la ***integral curvilínea con respecto a la longitud de arco "s"***. Utilizamos el símbolo

$$(C)\int_A^B f(x,y)ds.$$

para esta integral curvilínea. Si se da C en la forma $y = g(x)$, utilizamos la relación $ds = \left[\sqrt{1+(g'(x))^2}\right]dx$ para definir:

$$(C)\int_A^B f(x,y)ds = (C)\int_A^B f(x,y)\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx\ ,$$

donde el segundo miembro ya se ha definido. Si la curva C se da en la forma $x = h(y)$, escribimos

$$(C)\int_A^B f(x,y)ds = (C)\int_A^B f(x,y)\sqrt{1+(h'(y))^2}\,dy\ .$$

Si C no está en la forma $y = g(x)$ ni $x = h(y)$, podemos descomponerla en una suma de arcos, cada una de las cuales tiene una forma funcional apropiada.

Entonces las integrales sobre cada parte de la descomposición se pueden calcular, y luego sumar los resultados.

En el espacio ordinario se pueden definir las integrales curvilíneas en forma análoga a la que se definieron en el plano. Un arco C que une los puntos A y B del espacio se puede expresar o bien en forma paramétrica mediante tres ecuaciones o en forma no paramétrica mediante dos ecuaciones

$$y = g_1(x) \qquad\qquad z = g_2(x)$$

Si $f(x, y, z)$ es una función definida sobre C, entonces una subdivisión del arco C conduce a una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

la cual, a su vez, es una aproximación a la integral curvilínea

$$\int_C f(x, y, z)dx\ .$$

Se definen análogamente las integrales curvilíneas tales como

$$\int_c f(x, y, z)dy,\ \int_c f(x, y, z)dz\ .$$

CÁLCULO DE INTEGRALES CURVILINEAS

En la sección anterior hemos definido varios tipos de integrales curvilíneas, y ahora mostraremos métodos para calcular el valor de estas integrales cuando se dan la curva "C" y la función "f" Es interesante observar que todas las integrales de los tipos mencionados se pueden reducir a integrales ordinarias del tipo que ya hemos estudiado. Una vez efectuada la reducción, el problema es de simple rutina; y se pueden utilizar todas las fórmulas que hemos aprendido para calcular integrales.

El teorema que sigue establece la regla para reducir una integración curvilínea a una ordinaria de una función de una variable.

Teorema. Sea C un arco rectificable dado en la forma

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_0 \le t \le t_1, \qquad (1)$$

Tal que los puntos A(a,b)y B(c,d) corresponden, respectivamente, a t_0 y t_1. Supongamos que f(x,y) es una función continua sobre C, y que son continuas x'(t), y'(t).

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dx.$$

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$(C)\int_A^B f(x, y)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]x'(t)\, dt,$$
$$(C)\int_A^B f(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]y'(t)\, dt,$$
$$(C)\int_A^B f(x, y)\, ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Si el arco C se da en la forma

$$y = g(x)$$

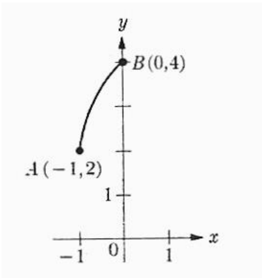
Entonces

$$(C)\int_A^B f(x, y)\, dx = \int_a^c f[x, g(x)]\, dx.$$

Porque, si y = g(x), entonces se puede utilizar x como un parámetro en vez de t en (1), y resulta el corolario como una simple consecuencia del teorema. Pueden enunciarse proposiciones análogas si se da C mediante una ecuación del tipo x = h(y).

Ejemplo:

Calcular la integral:



$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx - \int_C 2xy\,dy$$

Donde "c" es el arco:

$$x = t^2 - 1, \qquad y = t^2 + t + 2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$x'(t) = 2t, \qquad y'(t) = 2t + 1$$

$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx = \int_0^1 \left[(t^2 - 1)^2 - (t^2 + t + 2)^2\right] \cdot 2t\,dt,$$

$$-\int_C 2xy\,dy = -2\int_0^1 (t^2 - 1)(t^2 + t + 2)(2t + 1)\,dt.$$

$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx = 2\int_0^1 (-2t^3 - 7t^2 - 4t - 3)t\,dt,$$

$$-2\int_C xy\,dy = -2\int_0^1 (t^4 + t^3 + t^2 - t - 2)(2t + 1)\,dt.$$

$$\int_C [(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy] = -2\int_0^1 (2t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 3t^2 - 2t - 2)\,dt = -\frac{11}{3}.$$

Calcular la integral:

$$\int_C (x^2 - 3xy + y^3)\,dx$$

Donde "c" es:

$$y = 2x^2, \qquad 0 \le x \le 2.$$

$$\int_C (x^2 - 3xy + y^3)\,dx = \int_0^2 [x^2 - 3x(2x^2) + (2x^2)^3]\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{7}x^7\right]_0^2 = \frac{2624}{21}.$$

Calcular:

$$\int_C y\,ds$$

Donde "c" es el arco:

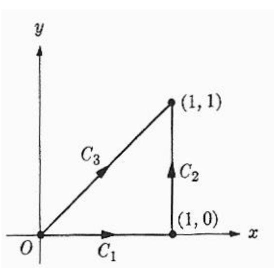
$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 6.$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}\,dx,$$

$$\int_C y\,ds = \frac{1}{2}\int_0^6 \sqrt{x}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^6 \sqrt{1+4x}\,d(1+4x)$$
$$= \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x)^{3/2}\right]_0^6 = \frac{31}{3}.$$

Calcular:

$$\int_C [(x+2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy],$$



donde "C" es la unión de los segmentos rectilíneos C_1 de (0, 0) a (1,0) y C_2 de (1,0) a (1, 1).

Solución. A lo largo de C_1 tenemos x=x, y=0; $0 \le X \le 1$, por lo tanto, dx=dx, dy=0 y:

$$\int_{C_1} [(x+2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

A lo largo de C_2 tenemos x = 1, y = y; luego dx = 0, dy = dy. Obtenemos

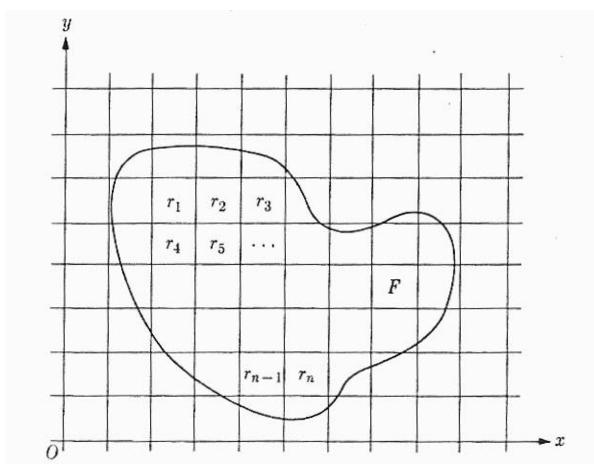
$$\int_{C_2} [(x + 2y)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy] = \int_0^1 (1 - y^2)\, dy = \frac{2}{3}.$$

$$\int_C [(x + 2y)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy] = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

DEFINICION DE INTEGRAL DOBLE

Sea F una región de área A del plano xy. Siempre supondremos que una región incluye su curva frontera. Tales regiones se llaman regiones cerradas en analogía con los intervalos cerrados de la recta real, es decir, los que incluyen sus extremos.

Subdividimos el plano xy en rectángulos mediante rectas paralelas a los ejes coordenados. Estas rectas pueden o no ser igualmente espaciadas (ver figura). Partiendo de algún lugar conveniente (tal como el extremo superior izquierdo de F), numeramos sistemáticamente todos los rectángulos que están dentro de F. Supongamos que hay "n" de tales rectángulos y los designamos con r_1, $r_2 \ldots, r_n$.



Si "f" está definida en una región "F", decimos que f es integrable sobre F, y escribimos:

$$\iint_F f(x, y)\, dA.$$

A la expresión anterior la llamaremos también integral doble de "f" sobre F.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

Enunciamos varias propiedades básicas de la integral doble, en analogía con las propiedades de la integral definida de funciones de una variable. Las propiedades más simples se dan en los dos teoremas siguientes:

1.- Si c es un número y f es integrable sobre una región cerrada F, entonces cf es integrable y:

$$\iint_F cf(x, y)\, dA = c\iint_F f(x, y)\, dA.$$

2.- Si f y g son integrables sobre una región cerrada F, entonces:

$$\iint_F [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_F f(x, y)\, dA + \iint_F g(x, y)\, dA.$$

El resultado anterior vale para la suma de cualquier número finito de funciones integrables. Las demostraciones de los teoremas 1 y 2 resultan directamente de la definición.

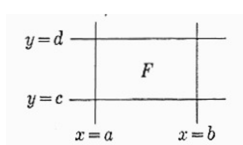
CALCULO DE INTEGRALES DOBLES. INTEGRALES ITERADAS

La definición de la integral doble no es muy útil para su evaluación en cualquier caso en particular. Naturalmente, puede suceder que la función f(x,y) y la región F sean simples, de manera que el límite de la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)A(r_i)$ pueda calcularse

directamente. Sin embargo, en general no se pueden determinar tales límites. Como en el caso de las integrales ordinarias y curvilíneas, conviene desarrollar métodos simples y de rutina para determinar el valor de una integral doble dada. En esta

sección, mostraremos cómo se puede evaluar una integral doble mediante evaluaciones sucesivas de integrales simples. En otras palabras, reduciremos el problema a uno que ya hemos estudiado.

Sea F el rectángulo cuyos lados son x= a, x = b, y=c, y=d, como se muestra en la Figura:



Supongamos que f(x,y) es continua en cada (x,y) de F. Formamos

la integral ordinaria con respecto a x:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

La función A(y) está definida para c ≤ y ≤ d y, de hecho, se puede demostrar que si f(x,y) es continua en F entonces A(y) es continua en (c,d). Se puede calcular la integral de A(y), y se escribe:

$$\int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy. \quad \text{.........(1)}$$

Podríamos haber fijado x primero y luego formar la integral:

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Entonces:

$$\int_a^b B(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx. \quad \text{..............(2)}$$

Observamos que las integrales se calculan sucesivamente; en (1) integramos primero con respecto a x (considerando "y" constante) y luego con respecto a y; en (2) integramos primero con respecto a y (considerando x constante) y luego con respecto a x.

Ejemplo:

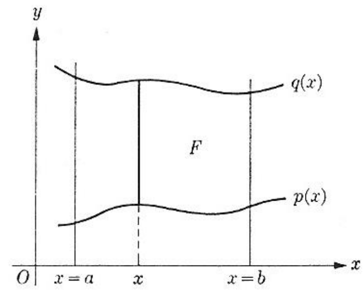
Calcular:

$$\int_1^4 \int_{-2}^3 (x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx\,dy.$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + y^3x\right]_{-2}^3 \\ &= 9 - 9y^2 + 3y^3 - \left(-\frac{8}{3} - 4y^2 - 2y^3\right) \\ &= \frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_{-2}^3 (x^2 - 2xy^2 + y^3)\,dx\,dy &= \int_1^4 \left(\frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3\right) dy \\ &= \left[\frac{35}{3}y - \frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^4\right]_1^4 = \frac{995}{4}.\end{aligned}$$

Se pueden definir las integrales iteradas sobre regiones F limitadas por curvas. Esta situación es más complicada que la que hemos discutido. Consideremos una región F tal corno muestra la Figura:

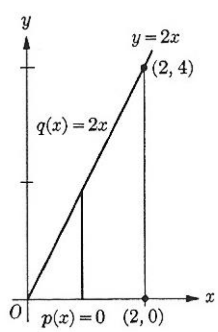


donde la frontera consta de las rectas x = a, x = b y las graficas de las funciones p(x) y q(x) con p(x)≤q(x) para a ≤ x ≤ b. Definimos:

$$\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)\, dy\, dx,$$

donde primero integramos (para x fija) desde la curva inferior hasta la superior, es decir, a lo largo de un segmento típico, como muestra la Figura anterior; luego, integramos con respecto a x sobre todos los segmentos típicos de a a b.

Con mayor generalidad, se pueden definir las integrales iteradas sobre una región F tal como aparece en la Figura:

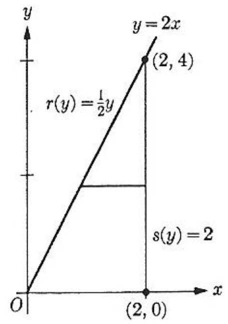


(a)

Integrando primero con respecto a y, tenemos:

$$\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Por otra parte, cuando se toma primero la integral con respecto a x es necesario representar F, como muestra la Figura:

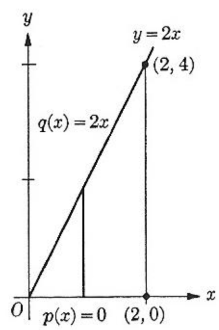


Entonces tenemos:

$$\int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

EJEMPLO 2. Dada la función f(x,y) = xy y la región triangular F limitada por las rectas

y = 0, y = 2x, x = 2, hallar los valores de ambas integrales iteradas.



(a)

$$\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} xy\, dy\, dx,$$

Tenernos p(x)=0, q(x) = 2 a = 0, b = 2. Porto tanto,

$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{2x} dx$$
$$= \int_0^2 2x^3\, dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = 8.$$

Integrando primero con respecto a x, tenemos:

$$\int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} xy\,dx\,dy$$

$$r(y) = \frac{1}{2}y, \quad s(y) = 2, \quad c = 0, \quad d = 4.$$

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{y/2}^2 dy$$
$$= \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy = \left[y^2 - \frac{1}{32}y^4\right]_0^4 = 8.$$

PRÁCTICO N° 18

En los problemas 1 a 10, calcular las integrales iteradas dadas.

√ 1. $\int_1^4 \int_2^5 (x^2 - y^2 + xy - 3)\,dx\,dy$ 2. $\int_0^2 \int_{-3}^2 (x^3 + 2x^2y - y^3 + xy)\,dy\,dx$

√ 3. $\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy\,dx$ 4. $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - xy)\,dy\,dx$

√ 5. $\int_2^3 \int_{1+y}^{\sqrt{y}} (x^2y + xy^2)\,dx\,dy$ 6. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$

7. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{18-2y^2}}^{+\sqrt{18-2y^2}} x\,dx\,dy$ 8. $\int_{-3}^3 \int_{x^2}^{18-x^2} xy^3\,dy\,dx$

9. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dy\,dx$ 10. $\int_1^2 \int_{x^3}^{4x^3} \frac{1}{y}\,dy\,dx$

11. $\iint_F (x^2 + y^2)\,dA$, $F: 0 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le 4$

12. $\iint_F x\cos y\,dA$, F bounded by the curve $y = x^2$ and the lines $y = 0$, $x = \sqrt{\pi/2}$

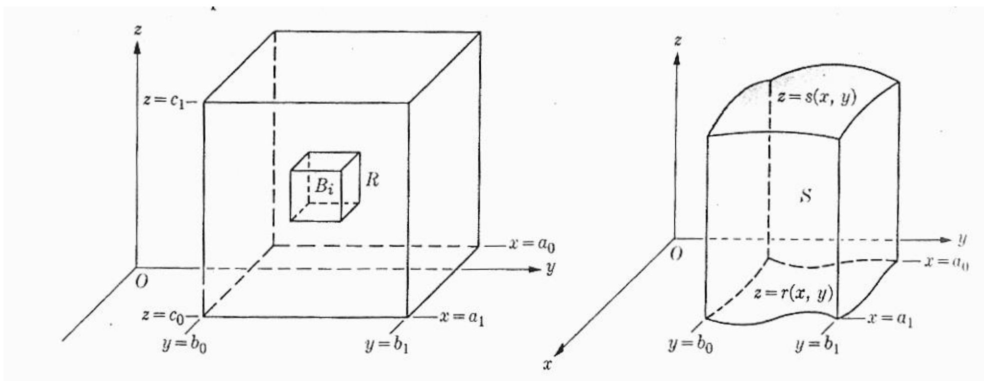
13. $\iint_F \frac{x}{x^2 + y^2}\,dA$, F bounded by $y = 0$, $y = x$, $x = 1$, and $x = \sqrt{3}$

14. $\iint_F \ln y\,dA$, F bounded by $y = 1$, $y = x - 1$, and $x = 3$

15. $\iint_F \frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}\,dA$, F bounded by $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, and $y = x$

LA INTEGRAL TRIPLE

La definición de la integral triple es análoga a la de la integral doble. En el caso más simple, consideramos una caja rectangular R acotada por los 6 planos $x=a_0$ $x=a_1$ $y=b_0$, $y=b_1$, $z=c_0$ $z=c_1$.



Sea f(x,y,z) una función de tres variables definida en todo (x,y,z) de R. Subdividimos el espacio en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Sean B_1, $B_2 ... B_n$ aquellas cajas de la subdivisión que contienen puntos de R. Designamos con $V(B_i)$ el volumen de la i-ésima caja, B_i. Elegimos un punto $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ en B_i esta elección se puede hacer en forma arbitraria. La sama

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V(B_i)$$

es una aproximación a la integral triple. La norma de la subdivisión es la longitud de la mayor diagonal de las cajas $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Si las sumas anteriores tienden a un límite cuando las normas de las subdivisiones tienden a cero y para elecciones arbitrarias de los puntos P_i, a este límite lo llamamos la integral triple de f sobre R. La expresión:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV$$

se utiliza para representar este límite.

Así como la integral doble es igual a dos integrales iteradas, también la integral triple es igual a tres integrales iteradas. Para el caso de la caja rectangular R, obtenemos:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_{a_0}^{a_1}\left\{\int_{b_0}^{b_1}\left[\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx.$$

Las integrales iteradas se efectúan considerando todas las variables constantes, excepto aquella respecto a la cual se íntegra. Se omiten los paréntesis en las integrales múltiples si no existe peligro de confusión,

EJEMPLO: Calcular la integral iterada

$$\int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-(2/3)y-(4/3)z} yz\,dx\,dy\,dz.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-(2/3)y-(4/3)z} yz\,dx\,dy\,dz
&= \int_0^3\int_0^{6-2z} \left[xyz\right]_0^{4-(2/3)y-(4/3)z} dy\,dz\\
&= \int_0^3\int_0^{6-2z} yz\left(4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z\right)dy\,dz\\
&= \int_0^3\left[2zy^2-\frac{2}{9}zy^3-\frac{2}{3}y^2z^2\right]_0^{6-2z} dz\\
&= \int_0^3\left[\left(2z-\frac{2}{3}z^2\right)(6-2z)^2-\frac{2}{9}z(6-2z)^3\right]dz\\
&= \frac{1}{9}\int_0^3 z(6-2z)^3\,dz.
\end{aligned}$$

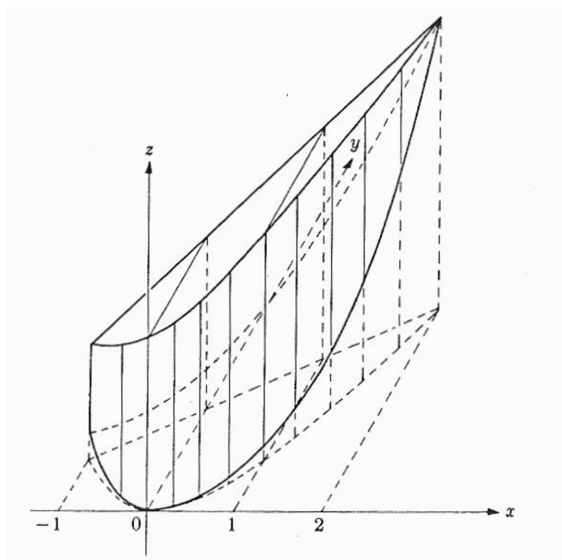
La principal dificultad es la determinación de los límites de integración al reducir una integral triple a una iterada. El estudiante que resuelva un buen número de problemas desarrollará su poder de visualización de figuras en el espacio. No existe una técnica mecánica sencilla para determinar los límites de integración en la gran variedad de problemas que encontramos. El ejemplo que sigue ilustra el proceso.

EJEMPLO: Calcular la integral iterada

$$\iiint_S x\, dV,$$

Donde S es la región limitada por las superficies:

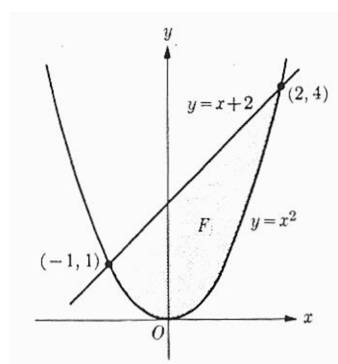
$$y = x^2,\ y = x + 2,\ 4z = x^2 + y^2 \qquad z = x + 3.$$



Para transformar la integral triple en una iterada debemos determinar los límites de integración. La proyección de S sobre el plano xy es la región F acotada por las curvas $y=x^2$ y $y=x+2$, como se muestra en la Figura. De esta proyección, se levanta la región con planos verticales, limitada inferiormente por el paraboloide $z=1/4(x^2+y^2)$ y superiormente por el plano $z=x+3$. Como F está descrita por las desigualdades:

$$-1 \le x \le 2, \qquad x^2 \le y \le x + 2,$$

$$S: \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ x^2 \le y \le x + 2, \\ \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \le z \le x + 3. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\iiint_S x\,dV &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\int_{(x^2+y^2)/4}^{x+3} x\,dz\,dy\,dx\\ &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\left[x^2+3x-\frac{1}{4}(x^3+xy^2)\right]dy\,dx\\ &= \int_{-1}^{2}\left\{\left(3x+x^2-\frac{1}{4}x^3\right)(2+x-x^2)-\frac{x}{12}\left[(2+x)^3-x^6\right]\right\}dx\\ &= \frac{837}{160}.\end{aligned}$$

En el caso de las integrales dobles, existen dos órdenes posibles de integración siendo generalmente más fácil el cálculo en uno de ellos. En el caso de las integrales triples existen 6 órdenes posibles de integración. Es cuestión de práctica y método de tanteos el hallar cuál es el más conveniente.

A veces se pueden hallar los limites de integración proyectando la región sobre uno de los planos coordenados y determinando las ecuaciones de las superficies 'tapa" y "base". Este método se utilizó en el ejemplo anterior. Si parte de la frontera es

un cilindro perpendicular a uno de los planos coordenados se puede utilizar este hecho para determinar los límites de integración.

PRÁCTICO N° 19

En cada uno de los problemas del 1 al 6, hallar el valor de la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{1-y^2}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2y^2\sqrt{x}\,dz\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\int_0^{y+z} xy\,dx\,dz\,dy$

4. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2-z} z\,dx\,dy\,dz$

6. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y \frac{1+\sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}}\,dz\,dy\,dx$

En los problemas 7 a 17, calcular:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV$$

7. $z=0,\ y=0,\ y=x,\ x+y=2,\ x+y+z=3;\ f(x,y,z)=x$
8. $x=0,\ x=\sqrt{a^2-y^2-z^2};\ f(x,y,z)=x$
9. $z=0,\ x^2+z=1,\ y^2+z=1,\ f(x,y,z)=z^2$
10. $x^2+z^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2,\ f(x,y,z)=x^2+y^2$
11. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x/a)+(y/b)+(z/c)=1,\ (a,b,c>0);\ f(x,y,z)=z$
12. $y=z^2,\ y^2=z,\ x=0,\ x=y-z^2;\ f(x,y,z)=y+z^2$
13. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=a^{1/2};\ f(x,y,z)=z$
14. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ y^2=4-z,\ x=y+2;\ f(x,y,z)=x^2$
15. $z=x^2+y^2,\ z=27-2x^2-2y^2;\ f(x,y,z)=1$
16. $z^2=4ax,\ x^2+y^2=2ax;\ f(x,y,z)=1$

*17. $y^2+z^2=4ax,\ y^2=ax,\ x=3a;\ f(x,y,z)=x^2$

En los problemas 18 a 22, expresar cada integral iterada como una integral triple, describiendo el conjunto S sobre la cual se efectúa la integración. Dibujar el conjunto S y luego expresar la integral iterada en dos órdenes distintos del original. No deben calcularse las integrales.

18. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{1-y^2}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2y^2\sqrt{x}\,dz\,dx\,dy$

BIBLIOGRAFÍA:

(1) James Stewart. "Cálculo" Thomson, México, 2002.

Protter, Morrey. "Análisis Matemático" Fondo Educativo InterAmericano, E.E.U.U. 1969.

Piskunonv, N. "Cálculo Diferencial e Integral" Mir, 1980.

Leithold, L. "El Cálculo" Oxford University, México 1998.

Larson, Hostetler, Edwards. "Cálculo Diferencial e Integral" McGraw-Hill, México 2005.

Alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Épsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Ómicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω