Пусть $x > 2$. Тогда

$$\int_1^x [xf'(x) + f(x-1)]\ dx = \cdots = xf(x) - \int_{x-1}^x f(x) = 0$$
$$\implies \int_{x-1}^x f(x) = xf(x)\,.$$

Отсюда по первой теореме о среднем интегрального исчисления

$$xf(x) = \int_{x-1}^x f = f(c_x), \quad \text{где } x-1 < c_x < x\,.$$

Выберем теперь $x_1 = c_x$ и $x_i = c_{x_{i-1}}$ для $i > 1$. Допустим, что все $x_i > 2$. Тогда для любого k

$$\begin{aligned} |f(x_k)| = x_{k-1}\,|f(x_{k-1})| = x_{k-1}x_{k-2}\,|f(x_{k-3})| = \cdots \\ = x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_1 \cdot xf(x) > 2^k\,|f(x)|\,. \end{aligned}$$

Но тогда в силу монотонности $\{x_k\}$

$$|f(\inf\{x_k\})| = \left|f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)\right| = \lim_{k\to\infty} |f(x_k)| > \lim 2^k\,|f(x)| = +\infty\,,$$

что невозможно в силу непрерывности f. Значит, через конечное число шагов мы получим $x_n \leqslant 2$ (при этом для $i < n$ имеем $x_i > 2$.) В силу предыдущей оценки и ограниченности f на $[0,2]$ имеем

$$2^n\,|f(x)| < |f(x_n)| < M, \quad \text{где } M \coloneqq \max_{x\in[0,2]} |f(x)| < +\infty\,.$$

Не трудно так же заметить, что $n \geqslant x-2$, поскольку $\Delta x_i < 1$. Отсюда

$$|f(x)| < \frac{M}{2^{x-2}} \underset{x\to\infty}{\mapsto} 0\,.$$

Значит по теореме о сжатой функции $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Аналогично, имея $x_n < 2$, получаем оценку

$$|f(x_n)| = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1 \cdot xf(x) > (\lfloor x\rfloor !)\cdot f(x)\,,$$
$$f(x) < \frac{M}{\lfloor x\rfloor !}\,,$$

из которой находится радиус R сходимости ряда $\sum f(n)x^n$, поскольку

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(n)|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{M}{n!}} = 0 \implies R = +\infty\,.$$