

# Лекция 07.02.22

## Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$ . Тогда  $V$  называется линейным подпространством, если

1.  $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$ ,
2.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$ .

}}

## Note 2

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$  — линейное подпространство в  $W$ . Тогда  $V$  — тоже линейное пространство.

## Note 3

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в  $\mathbb{R}^n$ ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

## Note 4

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $A \sim m \times n$ . Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку  $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$ .

## Note 5

a5081684e6014ceb8d4cd352f7dfd46b

Пусть  $V$  — подпространство в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда всегда существует  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  такая, что

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

}}

## Note 6

dc7727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$ . Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в  $W$ ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоже является их линейной комбинацией.

## Note 7

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1, V_2 \subset W$  — два линейных подпространства в  $W$ . Всегда ли  $V_1 \cap V_2$  — тоже линейное подпространство в  $W$ ?

Да, всегда.

## Note 8

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1, V_2 \subset W$  — два линейных подпространства в  $W$ . Всегда ли  $V_1 \cup V_2$  — тоже линейное подпространство в  $W$ ?

Нет, не всегда.

## Note 9

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1, V_2 \subset W$  — два линейных подпространства в  $W$ . Тогда

$$\{\{c2:: V_1 + V_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}$$

## Note 10

cd25e86c13c141be80e3673edfeca8d2

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1, V_2 \subset W$  — два линейных подпространства в  $W$ . Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}$$

## Note 11

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1, V_2 \subset W$  — два линейных подпространства в  $W$ . Всегда ли  $V_1 + V_2$  — тоже линейное подпространство в  $W$ ?

■ Да, всегда.

## Note 12

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $V$  — линейное подпространство в  $W$  и  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V$ . Тогда в  $W$  существует базис вида  $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ .

## Note 13

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

■ Дополнить базис в  $V_1 \cap V_2$  до базисов в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно и построить на их основе базис в  $V_1 + V_2$ .

## Note 14

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$  — базис в  $V_1$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_2$ .

Как можно построить базис в  $V_1 + V_2$ ?

■  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_1 + V_2$ .

# Семинар 09.02.22

## Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  называют матрицу  $C$  такую, что для любого  $v \in V$ , если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

## Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  обычно обозначают  $C_{e \rightarrow e'}$ .

## Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу  $C_{e \rightarrow e'}$ ?

Столбцы  $C_{e \rightarrow e'}$  — это координаты векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Лекция 14.02.22

### Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Сумму  $V_1 + V_2$  называют прямой суммой, если  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

### Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

### Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$  — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ;
- Для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно.

### Note 4

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

- $\dim V \leq \dim W$ ;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$ .

### Note 5

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется линейным отображением, если

- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

## Note 6

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют  $\{\{c1:: \text{линейным оператором.}\}$

## Note 7

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор  $f : V \rightarrow W$  называется  $\{\{c1:: \text{изоморфизмом линейных пространств}\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c2:: f \text{ — биекция.}\}$

## Note 8

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства  $V$  и  $W$  называются  $\{\{c1:: \text{изоморфными}\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1:: \text{существует изоморфизм}$

$$f : V \rightarrow W.$$

$\}\}$

## Note 9

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение  $\{\{c2:: \text{изоморфности}\}$  обозначается символом  $\{\{c1:: \simeq.$

$\}\}$

## Note 10

7112c4dda614005b6a37c3f4fbd3edc

Если  $f : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $f^{-1} : W \rightarrow V$   $\{\{c1:: \text{— тоже изоморфизм.}\}$

## Note 11

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть  $V, W$  — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$\{\{c2:: V \simeq W\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1:: \dim V = \dim W.\}\}$$

## Note 12

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда  $\{\{c2:: \text{матрицей линейного оператора } f \text{ в паре базисов в } V \text{ и } W \text{ соответственно}\}$  называют  $\{\{c1:: \text{матрицу } A, \text{ переводящую координаты любого вектора } v \in V \text{ в координаты вектора } f(v) \in W \text{ в соответствующих базисах.}\}$

## Note 13

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в  $V$ ,
- $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$  — базис в  $W$ .

Как в явном виде задать матрицу оператора  $f$  в этих базисах?

**|**  $j$ -ый столбец — это координаты вектора  $f(e_j)$  в базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$

## Note 14

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже  $\{\{c1:: \text{линейный оператор.}\}$