Семинар 16.07.22

Note 1

2523419404034ae8b9f8cccc3ba532e2

{{c2::Алгебра над полем}} — это {{c1::векторное пространство, снабжённое билинейным произведением.}}

Note 2

2dbf3b8106f34daead1805a80b0fb28a

Пусть X — топологическое пространство. {{c2::Алгебра всех комплексных функций, непрерывных на X}} обозначается {{c2::$C(X)$.}}

Note 3

13d6e19dd257402ab78d8b26cf54203d

Пусть G — группа, X — топологическое пространство. {{c3:: Действием группы G на пространство X}} называется {{c1:: отображение

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g(x),$$

}} такое, что {{c2::$\forall x \in X$

$$gh(x) = g(h(x)) \quad \forall g, h \in G,$$
$$e(x) = x.$$

}}

Note 4

fa2504287a174d5eb5063ef21d0e2191

Пусть G — группа, X — топологическое пространство. Если {{c2::задано действие G на X,}} то G называется {{c1::группой, действующей на X.}}

Note 5

f1bfa6fbf90b4a28a445080a7d8d954c

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. {{c3::Скрещенным произведением алгебры $C(X)$ и группы G}} называется алгебра сумм {{c1::

$$a = \sum_{g \in G} a_g(x) T_g,$$

}} где {{c2::для всех g

$$a_g \in C(X), \quad T_g - \text{формальный символ.}$$

}}

Note 6

19d452193f4649e48c0c687527934e5e

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. {{c2::Скрещенное произведение $C(X)$ и G}} обозначается {{c1::

$$C(X) \rtimes G.$$

}}

Note 7

c4f3819a786b4827a2d83e150447f344

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда для $a, b \in C(X) \rtimes G$

$$\text{\{\{c3::}ab\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c2::} \sum_{g \in G} c_g(x) T_g, \text{\}\}}$$

где

$$c_g(x) = \text{\{\{c1::} \sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1}(x) \cdot b_{g_2}(g_1^{-1}(x)). \text{\}\}}$$

Note 8

d74629e9c365489a886707b75712917f

Пусть X — топологическое пространство. Для удобства, любой элемент $f \in C(X)$ {{c2::отождествляется}} с оператором {{c1::

$$u(x) \mapsto f(x)u(x),$$
$$C(X) \to C(X).$$

}}

Note 9

b18bc7b3cd1d490d9465207948a2a7ab

В общем случае, {{c2::вложение некоторого объекта X в Y}} задаётся {{c1::инъективным отображением $X \to Y$, сохраняющим некоторую структуру.}}

Note 10

548919c39e5e4beb835a76d8e6d32d98

$X \xrightarrow{f} Y$ Если $f : X \to Y$ есть {{c2::вложение,}} то пишут {{c1::

$$f : X \hookrightarrow Y.$$

}}

Note 11

0060adf86b04424ca2977e10cf57149b

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X, {{c3::$g \in G$.}} {{c2::Отображение вида

$$u(x) \mapsto u(g^{-1}(x))$$

}} называется {{c1::оператором сдвига по элементу g.}}

Note 12

c1649977ba8340c9adc2dbb8096586c6

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X, {{c3::$g \in G$.}} {{c2::Оператор сдвига по элементу g}} обозначается {{c1::T_g.}}

Note 13

f297c8bf8e714c45b1849042d8856179

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X, $g, h \in G$. Тогда

$$T_g T_h = \text{{{c1::}} T_{gh}. \text{}}}$$

Note 14

300bb47328c6444bb9b5075d0838b28c

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда {{c3::$C(X) \rtimes G$}} — это подалгебра в {{c2::алгебре $\mathcal{L}(C(X), C(X))$,}} порождённая {{c1::$C(X)$ и всеми T_g.

}}

Note 15

91b2aedf157843449d78550095cf2a5a

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $a, b \in C(X)$ и $g, h \in G$, то

$$a(x)T_g \cdot b(x)T_h = \text{{{c1::}} a(x) \cdot b(g^{-1}(x)) \cdot T_{gh} \text{}}}$$

Note 16

530881c476554c1298eec9c9922e8976

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $a, b \in C(X)$ и $g, h \in G$, то

$$a(x)T_g \cdot b(x)T_h = a(x) \cdot b(g^{-1}(x)) \cdot T_{gh}$$

В чём ключевая идея доказательства?

> $$T_g b(x) = T_g b(x) T_g^{-1} \cdot T_g.$$

Note 17

8cc6c193acf84003aae8cb34420dd671

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $a \in C(X)$ и $g \in G$, то

$$T_g a(x) T_g^{-1} = \text{\{\{c1::}a(g^{-1}(x))\text{\}\}}$$

Note 18

283c514e338044a1b7080d65431ea8a9

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $g \in G$, то

$$T_g^{-1} : u(x) \mapsto \text{\{\{c1::}u(g(x)).\text{\}\}}$$

Note 19

95f5285bfc0d4800a355f5f549bcbbe0

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $G = \text{\{\{c2::} \{e\} \text{\}\}}$, то

$$C(X) \rtimes G \simeq \text{\{\{c1::}C(X).\text{\}\}}$$

Note 20

031cb4243696472893716f4da12f30ce

Пусть X — топологическое пространство. Тогда если $X = \text{\{\{c2::} \{p\} \text{\}\}}$, то

$$C(X) \simeq \text{\{\{c1::}\mathbb{C}.\text{\}\}}$$

Note 21

f3ee7aac98c146a6b535a01cb58d9cdd

Пусть G — группа. {{c1::Комплексное линейное пространство с базисом из всех элементов G и умножением, индуцированным от группы,}} называется {{c2::групповой алгеброй G.}}

Note 22

5cb452b8847e48d3a0ee11a002b6b93e

Пусть G — группа. {{c2::Групповая алгебра G}} обозначается {{c1:: $\mathbb{C}[G]$.}}

Note 23

4d516ad8a53f4d1ebb0491f89c44b511

Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X. Тогда если $X =$ {{c2:: $\{p\}$ }}, то

$$C(X) \rtimes G \simeq \text{{{c1::}}}\mathbb{C}[G]. \text{}}}$$