30.05.22

Note 1

9a902d381d8f4e4fb5ff8c1e77b38c57

Пусть G — непустое множество. {{c1::Отображение вида

$$G \times G \to G$$

}} называется {{c2::бинарной операцией на множестве G.}}

Note 2

6fdd3ac4b4f644cea3704bcc79918836

Пусть {{c1::G — непустое множество,}} {{c2::$\circ$ — бинарная операция на G.}} {{c4::Пара $(G, \circ)$}} называется {{c3::группой,}} если {{c4::она удовлетворяет аксиомам группы.}}

Note 3

827b57c3950c42b28e381d37a49ddf39

Сколько утверждений представлено в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Три.

Note 4

f526d0257921478ca77a37b97abb9d06

Какова первая аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Операция $\circ$ ассоциативна.

Note 5

ce2298302937453e87e0cf850f17af90

Какова вторая аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Для операции $\circ$ существует нейтральный элемент.

Note 6

9f917456f2bf4fe6bf4e35f8042c9499

{{c2::Нейтральный элемент}} из определения группы $(G, \circ)$ обычно обозначают {{c1::e.}}

Note 7

3a8f693c011348fd9e88038d036a5b42

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c4::$a \in G$.}} {{c2::Элемент $\tilde{a} \in G$}} называется {{c3::обратным к a,}} если {{c1::

$$a \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ a = e.$$

}}

Note 8

13c9853893a445d9a33db6823c3a5146

Какова третья аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> $\forall a \in G$ существует обратный к a элемент.

Note 9

5ba5e27ac8a9481eac4302c3159a6596

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Обратный элемент к a}} обычно обозначают {{c1::a^{-1}.}}

Note 10

9f4da30e71b1403a998b7c3fdf192252

{{c2::Множество всех невырожденных $n \times n$ матриц над полем F}} вместе с {{c3::операцией умножения}} называется {{c1::общей линейной группой.}}

Note 11

27a09e6a00d14e859d7ad1d78a4f74a3

{{c2::Общая линейная группа из $n \times n$ матриц над полем F}} обозначается {{c1::$\mathrm{GL}(n, F)$.}}

Note 12

809c8a8f790e4a2a998a4a8038c03971

Группа $(G, \circ)$ называется {{c2::абелевой,}} если {{c1::операция $\circ$ коммутативна.}}

Note 13

e59ac970ec54461083354dae9eeb4047

Может ли группа иметь несколько нейтральных элементов?

Нет, нейтральный элемент единственен.

Note 14

13fee55238844118889a790b6e0c7e37

Пусть $(G, \circ)$ — группа. Тогда если e и e' — нейтральные элементы для $\circ$, то $e = e'$. В чём основная идея доказательства?

Рассмотреть $e \circ e'$.

Note 15

afa616033db44cee8d39131bb90173bd

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Может ли в G существовать несколько элементов, обратных к a?

Нет, обратный элемент единственен.

Note 16

9f4dcde939af46639169bda602d721c5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Тогда если a^{-1} и $\tilde{a}$ — обратные элементы к a, то $\tilde{a} = a^{-1}$. В чём основная идея доказательства?

Представить $\tilde{a}$ как $\tilde{a} \circ \left(a \circ a^{-1}\right)$.

Note 17

3db3d03590c84407bfb64b2a80b0e1c5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c2::$a, b \in G$.}} Тогда

$$(a \circ b)^{-1} = \text{{{c1::}} } b^{-1} \circ a^{-1}. \text{}}}$$

Note 18

10144a83e52a4f5cbf0f96c818e229a5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$H \subset G$.}} Тогда {{c4::$(H, \circ)$}} называется {{c2::подгруппой группы $(G, \circ)$,}} если {{c1::$(H, \circ)$ является группой.}}

Note 19

9de4580c8d2545bcad2c525fe42930ec

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $H \subset G$. Выражение "$(H, \circ)$ является подгруппой $(G, \circ)$" обозначается

$$(H, \circ) \leqslant (G, \circ).$$

Note 20

bd4835b2c522436fac41030bf6b13a66

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c4::$a \in G$,}} {{c3::$n \in \mathbb{N}$.}}

$$\text{\{\{c2::}a^n\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ раз}}.\text{\}\}}$$

Note 21

2e41bce96a5249ca9d372d04f772b9b4

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c2::$a \in G$.}}

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}e.\text{\}\}}$$

Note 22

2cfa92bf39b847d4aa21d381a0d2c428

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{\{\{c2::}a^{-n}\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\left(a^{-1}\right)^n.\text{\}\}}$$

Note 23

3994ad9b38154ec081e7042011939b50

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$a \in G$.}} {{c2::Порядком элемента a}} называется {{c1::либо

$$\min\left\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\right\}.$$

либо ∞, если таких n не существует.}}

Note 24

78e264e39e824819ace538828da51d7c

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Порядок элемента a}} обозначается {{c1::$\operatorname{ord} a$.}}

Note 25

2e3b057efc1e40b1843700b41b2052b9

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$a \in G$.}} {{c1::Множество $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ с операций $\circ$}} называется {{c2::подгруппой $(G, \circ)$, порождённой элементом a.}}

Note 26

fd96a89fdb1b45559782a7213101e400

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Подгруппа $(G, \circ)$, порождённая элементом a,}} обозначается {{c1::$\langle a \rangle$.}}

Note 27

54a6a6775d1940b09be51518008fabdc

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Тогда если {{c2::$\operatorname{ord} a < \infty$,}} то

$$\{\{c3::\langle a \rangle\}\} \simeq \{\{c1::\mathbb{Z}_{\operatorname{ord} a}.\}\}$$

Note 28

d83fe9abbfca4fc99b99e08866cc83a9

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Тогда если {{c2::$\operatorname{ord} a = \infty$,}} то

$$\{\{c3::\langle a \rangle\}\} \simeq \{\{c1::\mathbb{Z}.\}\}$$