

# Лекция 07.02.22

## Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть  $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Многочлен  $p(x)$  степени  $n$  такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$ .

## Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  существует, то он единственен.

## Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент  $r_m$  при  $(x-a)^m$  — первый ненулевой коэффициент в многочлене  $p - q$ . Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

## Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  обозначается  $T_{a,n}f$ .

## Note 5

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

## Note 6

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left( (x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} =_{\{\{c1::\}} \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} _{\}}}$$

## Note 7

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

« $\{\{c3::$  Свойство  $n$  раз дифференцируемой функции  $\}\}$ »

Пусть  $\{\{c2:: f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N} \text{ и}$

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

$\}\}$  Тогда  $\{\{c1:: f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a.\}$

## Note 8

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение  $o$ -малого в терминах  $\varepsilon, \delta$ .»

Пусть  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a$  — предельная точка  $D$ . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$$\{\{c1:: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.\}$$

## Note 9

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 10

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить  $f(a) = f'(a) = 0$  в определение дифференцируемости.

## Note 11

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

и расписать это равенство в терминах  $\varepsilon, \delta$ .

## Note 12

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на  $\delta$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

$\dot{V}_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный промежуток.

## Note 13

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что  $\exists \delta > 0$  такой, что  $\dot{V}_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный отрезок?

По определению дифференцируемости функции.

## Note 14

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

Выразить  $f(x) = f'(c) \cdot (x - a)$  по симметричной формуле конечных приращений и показать, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$ .

## Note 15

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что  $f'(c) < \varepsilon|x - a|^n$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

$$c \in \dot{V}_\delta(a) \implies f'(c) < \varepsilon|c - a|^n < \varepsilon|x - a|^n$$

## Note 16

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Тогда  $f(x) = o((x - a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a.$

## Note 17

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«Формула Тейлора-Пеано»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$  и  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ . Тогда

$$T_{a,n}f = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

}}