Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть {{c3::W — линейное пространство, $V \subset W$.}} Тогда V называется {{c2::линейным подпространством}}, если {{c1::

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение «V есть линейное подпространство в W» обозначают {{c1::

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — {{c1::тоже линейное пространство}}.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в $\mathbb{R}^n$?

> Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

> Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2::m \times n\}\}}$ такая, что {{c1::

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

}}

Note 7

dcb727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \ldots a_n \in W$. Является ли

$$\mathscr{L}(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

подпространством в W?

> Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций $a_1, a_2, \ldots a_n$ тоже является их линейной комбинацией.

Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

> Да, всегда.

Note 9

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

> Нет, не всегда.

Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2::V_1 + V_2\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}\}$$

Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \text{\{\{c1::} \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \text{\}\}}$$

Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \lhd W?$$

> Да, всегда.

Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \lhd W$ и $e_1, e_2, \dots, e_k$ — {{c2::базис в V.}} Тогда в W существует базис вида {{c1::

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

}}

Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

> Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 15

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \dots e_k$ — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots e_k, f_1, \dots f_p$ — базис в V_1,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots g_q$ — базис в V_2.

Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

> $e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_p, g_1, \dots, g_q$ — базис в $V_1 + V_2$.

Note 16

d6aa3baccb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть

- $e_1, e_2, \dots e_k$ — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots e_k, f_1, \dots f_p$ — базис в V_1,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots g_q$ — базис в V_2.

Как доказать, что

$$e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_p, g_1, \dots, g_q$$

— базис в $V_1 + V_2$?

> Показать, что $\forall i \quad g_i \notin V_1$, а значит
>
> $$V_1 + V_2 = V_1 \oplus \mathscr{L}(g_1, \dots, g_q).$$

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве V. Тогда {{c2::матрицей перехода от базиса e к базису e'}} называют {{c1::матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$
$$v = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \cdots + \mu_n e'_n,$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

{{c2::Матрицу перехода от базиса e к базису e'}} обычно обозначают {{c1::$C_{e \to e'}$.}}

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \to e'}$?

> Столбцы $C_{e \to e'}$ — это координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. {{c2::Сумму $V_1 + V_2$}} называют {{c1::прямой суммой,}} если {{c2::$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
}}

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

{{c2::Прямая сумма подпространств V_1 и V_2}} обозначается {{c1::

$$V_1 \oplus V_2.$$

}}

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. {{c1::$V_1 + V_2$ — прямая сумма;}}
2. {{c2::$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;}}
3. {{c3::Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.}}

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

▌ Показать, что если $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«{{c3::Монотонность размерности подпространств}}»

Пусть W — линейное пространство, $V \lhd W$. Тогда

1. {{c1::$\dim V \leqslant \dim W$,}}
2. {{c2::$\dim V = \dim W \iff V = W$.}}

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

{{c3::Отображение $f : V \to W$}} называется {{c2::линейным отображением,}} если {{c1::

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют {{c1::линейным оператором.}}

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \to W$ называется {{c1::изоморфизмом линейных пространств}} тогда и только тогда, когда {{c2::f — биекция.}}

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются {{c1::изоморфными}} тогда и только тогда, когда {{c2::существует изоморфизм

$$f : V \to W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение {{c2::изоморфности}} обозначается символом {{c1::

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \to W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \to V$ {{c1::— тоже изоморфизм.}}

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения {{c1::эквивалентности.}}

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$\{\{c2::V \simeq W\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1:: \dim V = \dim W.\}\}$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда {{c2::матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно}} называют {{c1::матрицу A, переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.}}

Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«{{c2::Теорема о матрице линейного оператора}}»

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- {{c3::$e_1, e_2, \ldots, e_n$}} — базис в V,
- {{c3::$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$}} — базис в W.

Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

> j-ый столбец — это координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$.

Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$
>
> где λ — координаты вектора из V в базисе e.

Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1::линейный оператор.}}

Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1::произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и $\tilde{e}$ соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \to e', \tilde{e} \to \tilde{e}'$?

$$A' = C^{-1}_{\tilde{e}\to\tilde{e}'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e. Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \to e'$?

$$A' = C^{-1}_{e\to e'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' =$ {{c1:: $\det A$}}.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Определителем оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.
}}

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Рангом оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

{{c2::След матрицы A}} обозначается {{c1::$\operatorname{tr} A$.}}

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in$ {{c3::$\mathbb{R}^{n\times n}$}}. Тогда {{c2:: $\operatorname{tr} A$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$}}.

Note 8

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

{{c2::Следом оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::след матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 9

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

{{c2:: $\ker f$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$f^{-1}(\{0\})$.}}

Note 10

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

{{c2:: $\operatorname{im} f$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$f(V)$.}}

Note 11

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft V$?

> Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f.

Note 12

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft W$?

> Нет, $\ker f \triangleleft V$.

Note 13

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd W$?

> Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$
>
> $$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 14

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd V$?

> Нет, $\operatorname{im} f \lhd W$.

Note 15

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V, $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

> $$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 16

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

> Дополнить базис в $\ker f$ до базиса в V и построить из них базис в $\operatorname{im} f$.

Note 17

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис в $\ker f$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в V.

Как выглядит базис в $\operatorname{im} f$?

> $$f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n).$$

Note 18

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \text{\{\{c1::}\, \operatorname{rk} f. \text{\}\}}$$

Note 19

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как показать, что

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f?$$

> Показать, что в координатном выражении $\operatorname{im} f$ есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора f.

Note 20

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. {{c1::Пространство $V \triangleleft W$}} называется {{c2::инвариантным относительно оператора f,}} если {{c1::

$$f(V) \subset V.$$

}}

Note 21

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \to W$.

> $$\ker f, \operatorname{im} f.$$

Note 22

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — {{c4::дополнение до базиса в W базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k$ в инвариантном подпространстве $V \triangleleft W$.}} Тогда {{c3::матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$}} примет вид

$$A = \text{\{\{c1::} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \text{\}\}}$$

где T_{11} — это {{c2::матрица $f|_V$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$.}}

Лекция 28.02.22

Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор $f : W \to W$ называется {{c2::невырожденным,}} если {{c1::$\det f \neq 0$.}}

Note 2

2e565e676da342fb8cdacf4d62de05e8

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. f невырождено; {{c1::
2. $\ker f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = V$;
4. $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5. f — биекция.}}

Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — невырожденный оператор то f — биекция?

> Показать, что если f задаётся матрицей A, то f^{-1} задаётся матрицей A^{-1}.

Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — биекция, то f — невырожденный оператор.

> $$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::число $\lambda \in \mathbb{C}$}} называется {{c2::собственным значением оператора f,}} если {{c1::

$$\exists v \in V \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::вектор $v \in V$}} называется {{c2::собственным вектором оператора f,}} если {{c1::

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

{{c2::Спектром оператора}} называется {{c1::множество собственных значений этого оператора.}}

Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

{{c2::Спектр}} оператора f обозначается {{c1::spec f.}}

Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$.}} Тогда λ является собственным значением f {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

}} называется {{c1::характеристическим уравнением оператора f.}}

Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

}} называется {{c1::характеристическим многочленом оператора f.}}

Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной λ?

> Если A — матрица оператора f, то $|A - \lambda E|$ — многочлен переменной λ.

Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\text{\{\{c2::} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \text{\}\}} = \text{\{\{c1::} |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2. \text{\}\}}$$