

# Лекция 07.02.22

## Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть  $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Многочлен  $p(x)$  степени  $n$  такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$ .

## Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  существует, то он единственен.

## Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент  $r_m$  при  $(x-a)^m$  — первый ненулевой коэффициент в многочлене  $p - q$ . Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

## Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  обозначается  $T_{a,n}f$ .

## Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«**Формула Тейлора для многочленов**»

Пусть  $p$  —  $n$ -многочлен степени не более  $n$ . Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}}

## Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

## Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left( (x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

## Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать  $p(x)$  с неопределенными коэффициентами и вычислить  $p^{(k)}(a)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

## Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«**Свойство  $n$  раз дифференцируемой функции**»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$  и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Тогда  $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a.$

## Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение  $o$ -малого в терминах  $\varepsilon, \delta$ .»

Пусть  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1:: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

## Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить  $f(a) = f'(a) = 0$  в определение дифференцируемости.

## Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

■ и расписать это равенство в терминах  $\varepsilon, \delta$ .

## Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на  $\delta$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный промежуток.

## Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что  $\exists \delta > 0$  такой, что  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

## Note 16

73ed2cd8b8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить  $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$  по симметричной формуле конечных приращений и показать, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ .

## Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

## Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, \{c\}_2: f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Тогда  $f(x) = \{c\}_1: o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a.$

«Формула Тейлора-Пеано»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

# Лекция 11.02.22

## Note 1

3bf65c72c3374838aeca626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через  $p(x)$  многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

## Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для  $k \leq n$  равна  $p^{(k)}(a)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

## Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству  $n$  раз дифференцируемой функции  $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$ .

## Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство  $n$  раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

## Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} [a,b], & a \leq b, \\ [b,a], & a \geq b. \end{array}\right.\}\}$$

## Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{array}\right.\}\}$$

## Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

## Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{\{c3::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$ ,  $\{\{c2::f \in C^n(\Delta_{a,x})\}\}$ ,  $f^{(n)}$  дифференцируема на  $\tilde{\Delta}_{a,x}$ . Тогда  $\{\{c1::\text{найдется } c \in \tilde{\Delta}_{a,x}, \text{ для которой}\}$

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\}\}$

## Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При  $n = 0$  формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна  $\{\{c1::\text{теореме Лагранжа}\}\}$ .

## Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

Вычислить производную функции  $F(t) = R_{t,n}f(x)$  и найти точку  $c$  по теореме Коши.

### Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких  $t$  определяется функция  $F(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

### Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких  $t$  вычисляется  $F'(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

### Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

### Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

### Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям  $F(t)$  и  $\varphi(t)$  с точках  $a$  и  $x$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$



## Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket e^x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \rrbracket$$

## Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \sin x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \rrbracket$$

## Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \cos x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \rrbracket$$

## Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \ln(1+x) \rrbracket = \llbracket \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \rrbracket$$

## Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\llbracket \text{Обобщённый биномиальный коэффициент} \rrbracket$  задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \llbracket \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \rrbracket, \quad \alpha \in \llbracket \mathbb{R} \rrbracket.$$

## Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^\alpha \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \} \}$$

## Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для  $(1+x)^\alpha$  называют  $\{ \{c1:: \text{биноми-}$   
альным разложением} \}.

## Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{ \{c1:: (-1)^k \} \}$$

## Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^{-1} \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \} \}$$

## Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть  $\{ \{c3:: \text{функция } f \text{ удовлетворяет условиям для разложе-}$   
ния по формуле Тейлора-Лагранжа} \} Тогда если  $\{ \{c2::$

$$\forall t \in \tilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\} \text{ то } \{ \{c1::$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$

# Семинар 17.02.22

## Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

## Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

## Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

## Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

## Note 5

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

## Note 6

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

## Лекция 18.02.22

### Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть  $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$  Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

### Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

### Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для  $a < b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

### Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть  $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$  Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

### Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

Выразить для  $a < b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

## Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$  и дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда

- $f$  постоянна на  $\langle A, B \rangle \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$ .

## Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для произвольных  $a$  и  $b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

## Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть  $f, g \in C[A, B]$  и дифференцируемы на  $(A, B)$ . Тогда Если  $f(A) = g(A)$  и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

## Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть  $f, g \in C[A, B]$  и дифференцируемы на  $(A, B)$ . Тогда если  $f(B) = g(B)$  и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

## Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой максимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a).$$

}

### Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой строгого максимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

### Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой минимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geq f(a).$$

}}

### Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой строгого минимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

### Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если точка  $a$  является точкой минимума или максимума функции  $f$ , то  $a$  называется точкой экстремума  $f$ .

### Note 15

98f3ceb02ca464ab3cf9e94355caaa2

«Необходимое условие экстремума»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Тогда если  $a$  является точкой экстремума  $f$ , то  $f'(a) = 0$ .

### Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к  $f|_{[a-\delta, a+\delta]}$  для  $\delta$  из определения экстремума.

### Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка  $a$  называется  $\{\{c1::$  стационарной точкой функции  $f,$   $\}$  если  $\{\{c2::$

$$f'(a) = 0.$$

$\}\}$

### Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\{\{c1::$  точка  $a \in (A, B)$   $\}$  называется  $\{\{c2::$  критической точкой,  $\}$  если  $\{\{c1::$  либо  $a$  стационарна для  $f$ , либо  $f$  не дифференцируема в точке  $a.$   $\}$

### Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда все  $\{\{c2::$  точки экстремума  $f$ , принадлежащие  $(A, B),$   $\}$  лежат в  $\{\{c1::$  множестве её критических точек.  $\}$

### Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c3:: \max f([a, b])\}\} = \{\{c1:: \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}, \}\}$$

где  $C$  —  $\{\{c2::$  множество критических точек  $f.$   $\}$

### Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

« $\{\{c4::$  Достаточное условие экстремума в терминах  $f'$   $\}\}$ »

Пусть  $\{\{c3:: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B), f$  непрерывна в точке  $a$  и дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a), \delta > 0.$   $\}$  Если  $\{\{c1::$

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

$\}\}$  то  $\{\{c2:: a$  — точка строго максимума  $f.$   $\}$

**«Достаточное условие экстремума в терминах  $f'$ »**

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$  и дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a)$ ,  $\delta > 0$ . Если

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

то  $a$  — точка строго минимума  $f$ .



## Лекция 21.02.22

### Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

«Достаточное условие экстремума в терминах  $f''$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f''$  определена в точке  $a$ ,  $f'(a) = 0$ . Тогда если  $f''(a) > 0$ , то  $a$  — точка строгого минимума  $f$ .

### Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

«Достаточное условие экстремума в терминах  $f''$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f''$  определена в точке  $a$ ,  $f'(a) = 0$ . Тогда если  $f''(a) < 0$ , то  $a$  — точка строгого максимума  $f$ .

### Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752fcaf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах  $f''$ ?

Выразить  $f(x) - f(a)$  по формуле Тейлора-Пиано с

$$o((x - a)^2).$$

### Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах  $f''$ ?

Вынести в формуле Тейлора-Пиано  $\frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$  за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

## Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если  $n$  нечётно, то  $f$  не имеет экстремума в точке  $a$ .

## Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если  $n$  чётно, то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах  $f''$ .

## Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«**Теорема Дарбу**»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle, a, b \in \langle A, B \rangle$ ,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

Тогда  $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$ .

## Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

По теореме Вейерштрасса существует точка минимума  $c$ , далее по теореме Ферма.

## Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

■  $c$  — внутренняя точка отрезка  $[a, b]$ .

## Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что  $c$  не лежит на границе  $[a, b]$ ?

■ Расписать  $f'(a)$  через правосторонний предел и показать, что  $a$  — не локальный минимум. Аналогично для  $b$ .

## Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Если

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle,$$

то  $f$  строго монотонна на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbd8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

■ Доказать от противного, что  $f'$  не меняет знак на  $\langle A, B \rangle$ .  
Далее по достаточному условию строгой монотонности.

## Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«Следствие из теоремы Дарбу  
о сохранении промежутка.»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда  $f'(\langle A, B \rangle)$  — промежуток.

## Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

Показать, что для любых  $a, b \in \langle A, B \rangle$

$$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B \rangle).$$

## Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек  $a, b \in \langle A, B \rangle$  в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leq f'(b).$$

## Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f'(\langle A, B \rangle)?$$

Применить теорему Дарбу к функции

$$F(x) = f(x) - y \cdot x$$

в точках  $a$  и  $b$ .

## Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«**Следствие из теоремы Дарбу  
о скачках производной.**»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда функция  $f'$  не имеет скачков на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

TODO

## Note 19

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

Функция  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

}}

## Note 20

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

Функция  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется строго выпуклой на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

}}

## Note 21

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«Критерий строгой выпуклости  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда равносильны следующие утверждения.

- $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ .
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$  справедливо неравенство

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

«Лемма о трёх хордах»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда следующие утверждения.

- $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ .
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$  справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

## Лекция 25.02.22

### Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

### Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то

$$F \nearrow \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

### Note 3

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in \langle A, B \rangle$ . Тогда

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

### Note 4

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in (A, B)$ . Тогда

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

## Note 5

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть  $\{\{c3: f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: a \in (A, B), \}\}$ . Тогда  $\{\{c1: f'_+(a) \text{ и } f'_-(a) \text{ конечны и } f'_-(a) \leq f'_+(a), \}\}$

## Note 6

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то она  $\{\{c1: \text{непрерывна на } (A, B), \}\}$

## Note 7

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть  $\{\{c3: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

$\}$

## Note 8

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$ .  $\{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{строга опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

$\}$

## Note 9

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть  $\{\{c5: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, a \in (A, B), \}\}$  прямая  $\ell$  задаётся  $\{\{c4: \text{уравнением}$

$$y = f(a) + k(x - a).$$

$\}$

Тогда прямая  $\ell$  является  $\{\{c1: \text{опорной для функции } f \text{ в точке } a, \}\} \{\{c3: \text{тогда и только тогда, когда } \{\{c2: k \in [f'_-(a), f'_+(a)], \}\}$



## Note 10

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in (A, B)$ , прямая  $\ell$  задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая  $\ell$  является строго опорной для функции  $f$  в точке  $a$  тогда и только тогда, когда  $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$ .

}}

## 04.03.22

### Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл  $T_{a,1}f(x)$ ?

График  $T_{a,1}f(x)$  — это касательная к функции  $f$  в точке  $a$ .

### Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

#### «Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ .  
Тогда функция  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B \rangle \\ f(x) \geq T_{a,1}f(x).$$

}}

### Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

#### «Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ .  
Тогда функция  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\} \\ f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

### Note 4

76ff105d143e49dea8fc8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными?

$f$  дифференцируема в любой точке  $\langle A, B \rangle \implies$  касательная совпадает с опорной прямой.

## Note 5

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть  $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоту  $y = kx + b$ . Тогда если  $f$  выпукла на  $(A, +\infty)$ , то

$$f(x) \geq kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

## Note 6

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть  $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоту  $y = kx + b$ . Тогда если  $f$  строго выпукла на  $(A, +\infty)$ , то

}}

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

## Note 7

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

### «Связь выпуклости функции с $f'$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

## Note 8

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

### «Связь выпуклости функции с $f'$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

}}

$$f' \nearrow \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

## Note 9

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

### «Связь выпуклости функции с $f''$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $(A, B)$ .

Тогда  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

||

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

## Note 10

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

### «Связь выпуклости функции с $f''$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $(A, B)$ .

Тогда  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

## Note 11

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ . Точка  $a$  называется точкой перегиба функции  $f$ , если

- $\exists \delta > 0$  такое, что  $V_\delta(a) \subset (A, B)$  и  $f$  имеет разный характер выпуклости на  $(a - \delta, a]$  и  $[a, a + \delta)$ ;
- $f$  непрерывна в точке  $a$ ;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$ .

||

## Note 12

9aa5847a39ac46e8ad8dbec41c14a904

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $a$ . Если  $a$  является точкой перегиба  $f$ , то  $f''(a) = 0$ .

## Note 13

aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

■ Нет, это только необходимое условие.

## Note 14

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$  и имеет в ней производную из  $\overline{\mathbb{R}}$ . Тогда если  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f$  дважды дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a)$  и

- либо  $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$ ,
  - либо  $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$ ,
- то  $a$  — точка перегиба  $f$ .

## Семинар 03.03.22

### Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeca82dcc793

$$\int_{\{\{c2::\ln x\}\}} dx = \{\{c1::x \ln x - x\}\} + C$$

### Note 2

310668af95114f9f8e87673be333fec8

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{\sin x}\}\}} dx = \{\{c1::\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \}\} + C$$

### Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{\cos x}\}\}} dx = \{\{c1::\ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| \}\} + C$$

### Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{x^2 + a^2}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\}\} + C \quad (\{\{c3::a \neq 0\}\})$$

### Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int_{\{\{c2::\frac{A}{x+a}\}\}} dx = \{\{c1::A \ln |x+a| \}\} + C$$

### Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{nx+a}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{1}{n} \ln \left| x + \frac{a}{n} \right| \}\} + C \quad (\{\{c3::n \neq 0\}\})$$

### Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int_{\{\{c2::\frac{A}{(x+a)^k}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}}\}\} + C \quad (\{\{c3::k \neq 1\}\})$$

## Note 8

72b0aaea0b254078bbfcc47745885653

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2N - pM}{2a} \arctan \frac{2x + p}{2a} + C,$$

$$\text{где } a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

## Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beec8

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{N - M\frac{p}{2}}{(t^2 + a^2)^k} dt + \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt + C,$$

$$\text{где } t := x + \frac{p}{2}, \quad a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

## Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \quad (k > 1, a \neq 0)$$

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \left( (2k-3)I_{k-1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right)$$

## Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{M}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C$$

# Лекция 07.03.22

## Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной функции  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$  и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

## Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

Множество всех первообразных функции  $f$  на промежутке  $\langle A, B \rangle$  обозначается  $\mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ .

## Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deacc

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

## Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

$(F(x) - G(x))' \equiv 0$  на  $\langle A, B \rangle \implies F(x) - G(x)$  постоянна на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?



Тривиально следует из определения первообразной.

## Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcd445

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

называется неопределённым интегралом  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Неопределённый интеграл функции  $f$  на  $\langle A, B \rangle$  обозначается

$$\int f(x) dx.$$

}}

## Note 8

7581f732c1c44de4bc99cae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad ?$$

Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

## Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle$ .

$$\left( \int f(x) dx \right)' \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

## Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fba7ff

Пусть  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ ,  $G \in \mathcal{P}_g(\langle A, B \rangle)$ .

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

## Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из теоремы Дарбу следует, что если  $f$  имеет первообразную на промежутке  $\langle A, B \rangle$ , то  $f$  не имеет скачков на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции  $f$  на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

Нет, поскольку  $f$  может иметь точки разрыва второго рода.

## Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

### «Достаточное условие существования первообразной»

Если  $f$  непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ , то  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle$ .

# Лекция 11.03.22

## Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной  $f$  на множестве  $E$ , если  $F$  дифференцируема на  $E$  и  $F'(x) = f(x)$  для любого  $x \in E$ .

## Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл  $\int f(x) dx$  называется берущимся, если функция  $f$  имеет элементарную первообразную.

## Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  имеют на  $\langle A, B \rangle$  первообразную. Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

## Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

■ По определению интеграла и первообразной.

## Note 5

26b34c9a101f488aaed5dde4ddd43d2

**«Теорема о замене переменной  
в неопределённом интеграле»**

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ ,  $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  и  $\varphi$  дифференцируема на  $\langle C, D \rangle$ . Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

## Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

■ По определению интеграла и первообразной.

## Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  и  $\varphi$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$  и обратима. Тогда если  $G$  — первообразная функции  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  то

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

## Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

### «Формула интегрирования по частям»

Пусть  $f, g \in C^1(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

}}

## Note 9

e2df459e1699495f980cddacc633f6f

В чем основная идея доказательства основной формулы интегрирования по частям?

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu' dx + \int uv' dx.$$

## Лекция 18.03.22

### Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет  $\{\{c1::\text{элементарную первообразную.}\}\}$

### Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a : b]\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::[a, b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

### Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть  $\{\{c3::[a, b] - \text{невыврожденный отрезок.}\}\}$  Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

$\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{разбиением отрезка } [a, b].\}\}$

### Note 4

e301682aa933430591e748e6973a1843

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок.  $\{\{c1::\text{Множество всех разбиений отрезка } [a, b]\}\}$  обозначается  $\{\{c2::T[a, b].\}\}$

### Note 5

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть  $\{x_k\}_{k=0}^n$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

### Note 6

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ .  $\{\{c1::\text{Величина}$

$$\max \{\Delta x_k\}$$

$\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{рангом разбиения } \tau.\}\}$

### Note 7

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ .  $\{\{c2::\text{Ранг разбиения } \tau\}\}$  обозначается  $\{\{c1::\lambda_\tau.\}\}$

## Note 8

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ .  
Набор точек  $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$  таких, что  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  называется  
оснащением разбиения  $\tau$ .

## Note 9

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть  $\tau$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\xi$  — оснащение разбиения  $\tau$ . Тогда пара  $(\tau, \xi)$  называется оснащённым разбиением отрезка  $[a, b]$ .

## Note 10

974eeb7d70c24d318e71abd3d9a95f3f

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок. Множество всех оснащённых разбиений отрезка  $[a, b]$  обозначается  $T'[a, b]$ .

## Note 11

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\tau, \xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$  — оснащённое разбиение  $[a, b]$ . Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

называется интегральной суммой функции  $f$ , отвечающей оснащённому разбиению  $(\tau, \xi)$ .

## Note 12

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют суммами Римана.

## Note 13

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

Интегральная сумма функции  $f$ , отвечающая оснащённому разбиению  $(\tau, \xi)$  обозначается как

$$\sigma_\tau(f, \xi).$$

## Note 14

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть  $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}\}$  Число  $I$  называют пределом интегральных сумм функции  $f$  при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где  $(\tau, \xi)$  — оснащённое разбиение отрезка  $[a, b]$ .

(определение в терминах  $(\varepsilon, \delta)$ )

## Note 15

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

Предел интегральных сумм функции  $f$  при ранге разбиения стремящемся к нулю обозначается

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

}}

## Note 16

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ . Число  $I$  называют пределом интегральных сумм функции  $f$  при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если для любой последовательности оснащённых разбиений  $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^\infty$  такой, что  $\lambda_{\tau_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

# Семинар 17.03.22

## Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

## Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx + N) \left( \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и затем внести его в скобки.

## Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

Представить ответ в виде

$$Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в  $Q_{n-1}(x)$  и  $\lambda$  из полученного соотношения.

## Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right| + C.$$



## Note 5

9b1156318f464dc79a658d6e94fe214d

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + px + q}} dx = \arcsin \frac{2x - p}{2a} + C,$$

где  $a := \sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}$ .

# Лекция 21.03.22

## Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$ , если существует  $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$ .

## Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ . Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$$

называется определённым интегралом Римана от функции  $f$  по отрезку  $[a, b]$ .

## Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

Интеграл Римана от функции  $f$  по отрезку  $[a, b]$  обозначается

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

}}

## Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

числа  $a, b$  называют пределами интегрирования.

## Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

функцию  $f$  называют подынтегральной функцией.

## Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок. Множество всех функций интегрируемых на  $[a, b]$  обозначается  $\mathcal{R}[a, b]$ .

## Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbcb60

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению  $\tau$ .

## Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau \in T[a, b]$ . Верхняя интегральная сумма Дарбу функции  $f$ , отвечающая разбиению  $\tau$ , обозначается

$$S_\tau(f).$$

}}

## Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению  $\tau$ .

## Note 10

2bbeff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau \in T[a, b]$ . Нижняя интегральная сумма Дарбу функции  $f$ , отвечающая разбиению  $\tau$ , обозначается

$$s_\tau(f).$$

}}

## Note 11

189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ . Тогда  $f$  ограничена сверху тогда и только тогда, когда сумма  $S_\tau(f)$  конечна.

## Note 12

083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ . Тогда  $f$  ограничена снизу тогда и только тогда, когда сумма  $s_\tau(f)$  конечна.

## Note 13

1c8af1c02f864877bddd4971a256a30e

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ . Как  $S_\tau(f)$  выражается через суммы Римана?

$$S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

## Note 14

7958d85410954f6280755a33f7bff6fb

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ . Как  $s_\tau(f)$  выражается через суммы Римана?

$$s_\tau(f) = \inf \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

## Note 15

53ffcba153934fda879e5241f8e85387

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ . Как, в общих чертах, доказать, что  $S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$ ?

Представить  $\{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$  как сумму множеств

$$\Delta x_k \cdot f([x_k, x_{k+1}]).$$

## Note 16

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau, \tilde{\tau}$  — два разбиения  $[a, b]$ ,  $\tau \subset \tilde{\tau}$ .

Тогда

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leq S_{\tau}(f),$$

$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geq s_{\tau}(f).$$

}}

## Лекция 25.03.22

### Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Как связаны  $s_{\tau_1}(f)$  и  $S_{\tau_2}(f)$  для произвольных разбиений  $\tau_1, \tau_2$  отрезка  $[a, b]$ ?

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

### Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции  $f$  не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

Да.  $s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$  для любых  $\tau_1, \tau_2$

### Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

Для  $\tau_1 = \tau_2$  утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ .

### Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

Да. Например, функция Дирихле.

### Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

## Note 6

c6120328fd3e40a48f6d7e69fce29c9d

Как показать, что любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём?

Если допустить, что  $f$  не ограничена, то  $\forall \tau$  имеем  $S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi)\} = +\infty$ , а значит

$$\nexists \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

## Note 7

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Величина

$$\inf \{S_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется верхним интегралом Дарбу функции  $f$ .

## Note 8

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Верхний интеграл Дарбу функции  $f$  обычно обозначается

## Note 9

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Величина

$$\sup \{s_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется нижним интегралом Дарбу функции  $f$ .

## Note 10

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Нижний интеграл Дарбу функции  $f$  обычно обозначается

## Note 11

83287fd934bc4878a99a742db1668220

«**Критерий интегрируемости функции**»

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  тогда и только тогда, когда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_t \rightarrow 0} 0.$$

}}

## Note 12

68b782b8c09040dfa994ede932b748bc

$$\begin{aligned} \{S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_t \rightarrow 0} 0\} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta & \\ \{S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon\} & \end{aligned}$$

(в терминах  $\varepsilon, \delta$ )

## Note 13

6a94745f7ac74ef7a5be1b0a6128e303

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (необходимость)?

Показать, что по определению супремума

$$S_\tau(f), s_\tau(f) \in \dot{V}_\varepsilon(I)$$

для  $\tau, \varepsilon, I$  из определения предела интегральных сумм.

## Note 14

53f49c34063149d892ad1eb1015abebd

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (достаточность)?

Показать, что

$$\begin{aligned} s_\tau(f) &\leq I_* \leq I^* \leq S_\tau(f), \\ s_\tau(f) &\leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f). \end{aligned}$$

для любого оснащённого разбиения  $(\tau, \xi)$  отрезка  $[a, b]$ .



### Note 15

f200bb84909d45898f1313f053135d3a

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Как соотносятся  $I^*$ ,  $I_*$  и  $\int_a^b f$ ?

$$I_* = I^* = \int_a^b f.$$

### Note 16

1e7ec80a8e8f4caf87b70493394d837a

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Как для произвольного разбиения  $\tau$  соотносятся  $s_\tau(f)$ ,  $S_\tau(f)$  и  $\int_a^b f$ ?

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

### Note 17

c1ca9a97a9a948e685e22801cc7e1ee5

Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \int_a^b f.$$

### Note 18

6a890ec9b5384ed2944133d968407712

Как показать, что

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \int_a^b f?$$

Тривиально следует из критерия интегрируемости и неравенства

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

## Note 19

1a704d6d276749bdaa56a88c05622b02

Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = \int_a^b f(x) dx$$

## Note 20

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Величина

$$\sup \left\{ f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D \right\}$$

называется колебанием функции  $f$  на множестве  $D$ .

## Note 21

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Колебание функции  $f$  на множестве  $D$  обозначается  $\omega(f)$ .

## Note 22

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\omega(f) = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$$

(в терминах  $\sup f, \inf f$ )

## Note 23

ec97e108f2394602934c87c2f28f2a39

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — разбиение  $[a, b]$ . Тогда

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$$

## Note 24

649783b3a0c14571bdbbb8caba0d07a3

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$  — разбиение  $[a, b]$ . Тогда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k$$

(в терминах  $\omega_k(f)$ )

## Note 25

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = I^*.$$

(в терминах предела при  $\lambda_\tau \rightarrow 0$ )

## Note 26

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = I_*.$$

(в терминах предела при  $\lambda_\tau \rightarrow 0$ )

## Note 27

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

**Критерий Дарбу интегрируемости функции**

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и } I_* = I^*.$$

## Note 28

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

**Критерий Римана интегрируемости функции**

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

## Note 29

8ba2a0bdc9754111b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

### Note 30

da9a4e99c01a42a4a8c5bccf8e3d24f7

Как, в общих чертах, доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём?

Из теоремы Кантора получить равномерную непрерывность и далее по теореме Вейерштрасса оценить для  $\lambda_\tau < \delta$  величину  $\omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$ .

### Note 31

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

### Note 32

7a4501cbb6414feaaaf12589452716ae3

Как, в общих чертах, доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Для определённости  $f \nearrow$ . Для произвольного  $\varepsilon$  взять

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Далее по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

# Семинар 24.03.22

## Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

берутся с помощью замены

$$t := \frac{1}{x - \alpha}.$$

}}

## Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция, берутся с помощью подстановок Эйлера.

## Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

1.  $a > 0$ ;
2.  $c > 0$ ;
3.  $ax^2 + bx + c$  приводим над  $\mathbb{R}$ .

## Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для  $a > 0$ .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

## Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для  $c > 0$ .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

## Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого  $ax^2 + bx + c$ .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1),$$

где  $x_1$  — корень  $ax^2 + bx + c$ .

# Лекция 01.04.22

## Note 1

60ff32d5ed7347ae8036518373a5bc61

Пусть  $\{\{c3:: f, \tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[a, b], T \subset [a, b], |T| < \aleph_0.\}$

Если  $\{\{c1::$

$$\forall x \in [a, b] \setminus T \quad f(x) = \tilde{f}(x),$$

$\}\}$  то  $\{\{c2:: \tilde{f} \in \mathcal{R}[a, b] \text{ и } \int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.\}$

## Note 2

30e9c514b2a7470bb6370c764380a14b

Каков первый шаг доказательства того, что изменение значений функции  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

Показать, что  $f$  и  $\tilde{f}$  ограничены по модулю некоторыми значениями  $A$  и  $\tilde{A} \in \mathbb{R}$ .

## Note 3

9f281cfda3464766a189207f5029d7ed

В чем ключевая идея доказательства того, что изменение значений функции  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

Разность интегральных сумм  $f$  и  $\tilde{f}$  ограничена по модулю значением  $2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0$ .

## Note 4

94c3dcad5bc247568a21704cb1d05f72

Пусть  $\{\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b].\}$  Тогда  $\{\{c1::$

$$f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta].$$

$\}\}$

## Note 5

385f602d08114dd39630009f76dbb7e0

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Тогда  $f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ .

В чем ключевая идея доказательства?

Если  $\tau_0 \in T[\alpha, \beta]$ ,  $\tau \in T[a, b]$ ,  $\tau_0 \subset \tau$ , то

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leq S_{\tau} - s_{\tau}.$$

## Note 6

ee426e669ae545b8ad6d128a5870373e

Пусть  $\{c3: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b).\}$  Тогда если  $\{c1:$

$$f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

$\}\}$  то  $\{c2: f \in \mathcal{R}[a, b].\}$

## Note 7

c8c134e6d7c442c3a7214585d20c41ac

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$ . Тогда если

$$f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

то  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

В чем ключевая идея доказательства?

$$\begin{aligned} S_{\tau} - s_{\tau} &\leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega(f) \cdot \lambda_{\tau}, \\ \tau &\in T[a, b], \quad \tau' = \tau \cup \{c\}, \\ \tau_1 &= \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b]. \end{aligned}$$

## Note 8

ccba27d6a29c468f8a60fbd0f106fec4

Пусть  $\{c3: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.\}$  Функция  $f$  называется  $\{c2:$  кусочно непрерывной, $\}$  если  $\{c1:$  множество её точек разрыва пусто или конечно, и все её разрывы суть разрывы первого рода.

$\}\}$

## Note 9

86f712cafa53498fa3b282915340635c

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $f$  кусочно непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\{c1: f \in \mathcal{R}[a, b].\}$



## Note 10

78e23f5a381e4d01b4c4467b16955dcb

Как показать, что кусочно непрерывная функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $[a, b]$ ?

Показать, что она интегрируема на каждом из непрерывных «кусков».

## Note 11

682bfc21e35a489ebc7df5514e1d4690

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ . Говорят, что множество  $E$  имеет нулевую меру, если для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $E$  можно заключить в не более чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше  $\varepsilon$ .

## Note 12

3be97c537ee44236bfc5f8bae48390e3

«Критерий Лебега интегрируемости функции»

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  тогда и только тогда, когда  $f$  ограничена на  $[a, b]$  и множество точек разрыва  $f$  имеет нулевую меру.

## Note 13

1b3f6df593ba44b6b9558ee83720dd7e

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$f + g, fg, \alpha f, |f| \in \mathcal{R}[a, b].$$

## Note 14

275d09f8b4c9445992ecc4f02cd9f6ba

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].$$

### Note 15

20347e63d70945cdbe073a675dbcb23a

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ .

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения предела интегральных сумм в терминах последовательностей.

### Note 16

909d22f843c9421598278c307e29edb5

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $fg \in \mathcal{R}[a, b]$ .

В чем основная идея доказательства?

Дать верхнюю оценку для  $\omega_k(f \cdot g)$  через  $\omega_k(f), \omega_k(g)$  и верхние границы  $f$  и  $g$ .

### Note 17

aad31d4599b94b8f8ee128bfbfec8251

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

В чем основная идея доказательства?

Частный случай произведения двух функций.

### Note 18

76538508e5574126a26e4dbf06fe4160

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ .

В чем основная идея доказательства?

$|f| = f \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

### Note 19

dea0bdf999ae4306b554167c63eeb231

Как показать, что  $\operatorname{sgn}$  интегрируем?

Показать, что  $\operatorname{sgn}$  кусочно непрерывен.

## Note 20

6bb4953a2e6d41fb86cf8a801779a97f

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

Представить  $\frac{f}{g}$  как произведение функций  $f \cdot \frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$ .

## Note 21

8dcb53c3642547a5bec77126b490908d

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

Оценить  $\omega_k(1/g)$  сверху через  $\omega_k(g)$  и  $\inf_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

## Лекция 04.04.22

### Note 1

40ffb14c933540e0a82a0f491c2ea946

Интегрируема ли функция Дирихле  $\chi$  на произвольном невырожденном отрезке?

■ Нет.

### Note 2

488460418bc246fe90907796c4db58be

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\chi$  — функция Дирихле. Как показать, что  $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$ ?

■  $\omega(\chi|_{[\alpha, \beta]}) = 1$  для любого отрезка  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

### Note 3

fdad8aea720d4949805e6d411e4d9cd0

Интегрируема ли функция Римана  $\psi$  на произвольном промежутке  $[a, b]$ ?

■ Да.

### Note 4

c7099fd03a894c53b8c80146045e9127

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\psi$  — функция Римана.

$$\int_a^b \psi = \{c1:0.\}$$

### Note 5

6350173ae50b44d8ac481bc4e58df52a

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\psi$  — функция Римана. В чём ключевая идея доказательства того, что  $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$ ?

Показать, что множество

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \mid q \leq N \right\}$$

конечно.

## Note 6

83b18cc44cff41fc8f13f721bb95887f

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\psi$  — функция Римана. Как выбирается  $N$  в доказательстве того, что  $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$ ?

Так, что  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .

## Note 7

e897ef9db02f489f8f78e18c71f5ee40

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\psi$  — функция Римана. Как выбирается  $\delta$  в доказательстве того, что  $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$ ?

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}.$$

## Note 8

aa4eace1713d444292a6cdb20f5d2bed

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок,  $\psi$  — функция Римана. Какой критерий интегрируемости используется в доказательстве того, что  $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$ ?

Критерий в терминах  $S_\tau - s_\tau$ .

## Note 9

ac79fc72aeb440e9a666f8dc2433dcc8

Пусть  $\{\{c3:: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [c, d] \rightarrow [a, b].\}\}$  Тогда

$$\{\{c2:: f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[c, d]\}\} \implies \{\{c1:: f \circ g \in \mathcal{R}[c, d].\}\}$$

## Note 10

bc11b9f7a4304f74b4bb3118d30cea22

Пусть  $\{\{c3:: a > b, f \in \mathcal{R}[a, b].\}\}$  Тогда

$$\{\{c2:: \int_a^b f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: - \int_b^a f.\}\}$$

## Note 11

2be98235b82942f7bf08141dd983fe07

$$\int_a^a f \stackrel{\text{def}}{=} \{[c1: 0.]\}$$

## Note 12

649accec0ca304bd5bc72134401215095

Пусть  $f : [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, a] \stackrel{\text{def}}{\iff} \{[c1: \top.]\}$$

## Note 13

cc427e206f4d435889e87acd827bc5b4

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $c \in (a, b)$ . Тогда

$$\{[c2: \int_a^b f]\} = \{[c1: \int_a^c f + \int_c^b f.]\}$$

## Note 14

f57dd9f306a5429bb89c68b128c0e01f

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\{[c2: \int_a^b \alpha f]\} = \{[c1: \alpha \int_a^b f.]\}$$

## Note 15

5aaf74ed1c3e414cb5b7c501c5970206

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\{[c2: \int_a^b (f \pm g)]\} = \{[c1: \int_a^b f \pm \int_a^b g.]\}$$

## Note 16

d43171cbe636478098887433ff64ea61

Откуда следует линейность интеграла Римана?

## ■ Из определения в терминах последовательностей.

### Note 17

8db1f43273d041d6b3fbc674270d4f5b

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \geq 0.\}\}$$

### Note 18

9778c1f4a58e4df9a9a25064935a647f

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2:: f \leq g\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leq \int_a^b g.\}\}$$

### Note 19

9ba16cbdf8fb4b65bd032cb56c483a1b

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2:: \left| \int_a^b f \right| \}\}\{\{c1:: \leq \int_a^b |f| .\}\}$$

### Note 20

275d3bae3cfa48e9882d2d2a90ed21b8

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2:: |f| \leq M \in \mathbb{R}\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leq M(b-a).\}\}$$

### Note 21

84dfce5723b34bec8f05c42879c3e85f

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \wedge \int_a^b f = 0 \implies \{\{c1:: f \equiv 0.\}\}$$

## Note 22

2f438df6b5304cd7acbd273214875635

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда

$$f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \implies f \equiv 0.$$

В чем основная идея доказательства?

От противного: допустить, что  $\exists x_0 : f(x_0) > 0$  и использовать то, что  $\exists \delta : f|_{V_\delta(x_0)} > 0$ .

## Note 23

03b2fb7149444b2db71b150b49f267a9

«Теорема Барроу»

Пусть  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  непрерывна в точке  $x_0$ ,

$$\varphi(x) = \int_a^x f.$$

Тогда  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $\varphi'(x_0) = f(x_0)$ .

## Note 24

1109a435ae7543cf8263f72942677e95

«Первая теорема о среднем  
интегрального исчисления»

Пусть  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $g \geq 0$  (или  $g \leq 0$ ),  $m \leq f \leq M$ . Тогда

«

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

»

## Note 25

2e6a92e370ed4445a1cd67bd8d0241f9

В чем основная идея доказательства первой теоремы о среднем интегрального исчисления?

Показать, что

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$



## Note 26

bede3b8a7d14462fbd5fcb32d222eb2d

Чему равно  $\mu$  из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ( $\int_a^b g = 0$ )?

■  $\mu$  — произвольное значение из  $[m, M]$ .

## Note 27

9137b877b68a4313b09fc0b2e748f6a4

Чему равно  $\mu$  из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ( $\int_a^b g \neq 0$ )?

■

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$