

Логика высказываний

Note 1

4105104fcc464b9f8c59bbd454c55018

Высказывания могут быть $\{\{c1: \text{истинными}\}\}$ или $\{\{c1: \text{ложными}\}\}$.

Note 2

de1b54d7432f42a488aa49e8895875f4

Высказывания можно $\{\{c2: \text{соединять друг с другом}\}\}$ с помощью $\{\{c1: \text{«логических связок»}\}\}$.

Note 3

efe0b8c83a7d42ba956a1aa0c2206d8b

Логическая связка $\{\{c2: \text{«}A \text{ и } B\}\}$ называется $\{\{c1: \text{конъюнкцией}\}\}$.

Note 4

f832b96c89b645348cd5bce12659be41

Логическая связка $\{\{c2: \text{«}A \text{ и } B\}\}$ обозначается

$$\{\{c1: A \& B\}\} \quad \{\{c1: A \wedge B\}\}$$

Note 5

a974b0e29e724094ae11458fec237466

Логическая связка $\{\{c2: \text{«}A \text{ или } B\}\}$ называется $\{\{c1: \text{дизъюнкцией}\}\}$.

Note 6

6d584e09645042b781dbbfaac613fb5b

Логическая связка $\{\{c2: \text{«}A \text{ или } B\}\}$ обозначается

$$\{\{c1: A \vee B\}\}$$

Note 7

71cf2d212d4e4515b861e0c05c459de9

Логическая связка $\{\{c2: \text{«не } A\}\}$ называется $\{\{c1: \text{отрицанием}\}\}$.

Note 8

63977dd5c58c492eb2b405f32658fe6e

Логическая связка $\{\{c2: \text{«не } A\}\}$ обозначается

$$\{\{c1: \neg A\}\} \quad \{\{c1: \sim A\}\} \quad \{\{c1: \overline{A}\}\}$$

Note 9

7974978120c7467e8052614ab9497071

Логическая связка $\{\{c2: \text{«из } A \text{ следует } B\}\}$ называется $\{\{c1: \text{импликацией}\}\}$

Note 10

5332245f17ca45fc8a382edeafc3f5fd

Логическая связка $\{\{c2: \text{«из } A \text{ следует } B\}\}$ обозначается

$$\{\{c1: A \rightarrow B\}\} \quad \{\{c1: A \Rightarrow B\}\} \quad \{\{c1: A \supset B\}\}$$

Note 11

b3f6c41f719544a3836ef8c752c02311

В импликации $A \rightarrow B$ $\{\{c2: \text{высказывание } A\}\}$ называется $\{\{c1: \text{посылкой или антецедентом}\}\}$

Note 12

2f17f543a0fb4c1e872c5e894881a8d8

В импликации $A \rightarrow B$ $\{\{c2: \text{высказывание } B\}\}$ называется $\{\{c1: \text{заключением или консеквентом}\}\}$

Note 13

7ffade67cdfc4ba1916748d4d24eb205

Значения $\{\{c2: \text{И (истина) и Л (ложь)}\}\}$ называют $\{\{c1: \text{истинностными значениями}\}\}$

Note 14

6104c0e89dc84b4082b7bf5b1034a41c

Истинностное значение И так же обозначают $\{\{c1: \text{Т или 1}\}\}$

Note 15

1ffd99464a964a2d802713627284de05

Истинностное значение Л так же обозначают $\{\{c1: \text{F или 0}\}\}$

Note 16

3a7d57b46b5446cbb1879ca5a88f99f1

Говорят, что высказывание имеет значение $\{\{c2: \mathbf{И},\}\}$ если $\{\{c1::$ оно истинно. $\}\}$

Note 17

39190b33ebc64ffea127054a389ba2fe

Говорят, что высказывание имеет значение $\{\{c2: \mathbf{Л},\}\}$ если $\{\{c1::$ оно ложно. $\}\}$

Note 18

f195f78759bd493fabd6353285403ac6

Высказывание $\{\{c2:: A \wedge B\}\}$ истинно, если $\{\{c1::$ оба высказывания A и B истинны. $\}\}$

Note 19

4d34320fa4e049b3b9d25a44d54c51d6

Высказывание $\{\{c2:: A \vee B\}\}$ истинно, если $\{\{c1::$ хотя бы одно из высказываний A и B истинно. $\}\}$

Note 20

2dd24cf0c3d7432295ed7a72663db077

Высказывание $\{\{c2:: A \rightarrow B\}\}$ истинно, если $\{\{c1:: A$ ложно или B истинно. $\}\}$

Note 21

a4c9e67aa6cd4603b5c54c110f4aa726

Высказывание $\{\{c2:: \neg A\}\}$ истинно, если $\{\{c1:: A$ ложно. $\}\}$

Note 22

62f4c5602b68482898cf2f25ee71998

$\{\{c2::$ Элементарные высказывания, из которых составляются более сложные высказывания, $\}\}$ называется $\{\{c1::$ пропозициональными переменными. $\}\}$

Note 23

50f80c87e0ce459fa19869447ca5cf1c

$\{\{c2::$ Пропозициональные переменные $\}\}$ будем обозначать $\{\{c1::$ маленькими латинскими буквами. $\}\}$

Note 24

e2ffb750b54545d9a36793717bd9f8c4

Множество пропозициональных формул — есть минимальное надмножество множества пропозициональных переменных, замкнутое относительно логических связок.

Note 25

652a82f3a2c04744b06854eb9802db27

Замкнутость относительно каких связок требуется в определении множества пропозициональных формул?

«не», «и», «или» и импликация.

Note 26

49604013e544418bb20cd89b7548c5d4

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\}.$$

Note 27

4ce7564004a54b05a70415e8feffcd9

Отображения вида $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ называют булевыми функциями n переменных.

Note 28

366bad41e3824924af52e47078565094

Пусть φ — пропозициональная формула, содержащая не более n пропозициональных переменных. Тогда φ задаёт булеву функцию n переменных.

Note 29

fcee92733caa4d679a755c4ee7b1d92d

Пусть φ — пропозициональная формула. Как вычисляется значение соответствующей булевой функции?

Вместо пропозициональных переменных подставляются их истинностные значения.

Note 30

fdf2b62e30ae48e2b0a0187aa9129100

Пропозициональные формулы, истинные при всех значениях их переменных, называют тавтологиями.

Note 31

671a63ca209a42e49d5d782d1da8ff77

Две пропозициональные формулы называют эквивалентными, если они задают одну и ту же булеву функцию.

}}

Note 32

22583d6fdedc4b14b5ee74452624a641

Обязана ли пропозициональная формула содержать все переменные, от которых зависит порождённая ей булева функция?

■ Не обязана.

Note 33

3f428c34bf344a849efa7109edd09021

Если пропозициональная формула содержит не все переменные, от которых зависит порождённая её булева функция, то по некоторым аргументам эта функция постоянна.

}}

Note 34

0c628958376f4d8bb39bc8f93a28b81a

Две формулы φ и ψ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \text{ — тавтология.}$$

}}

Note 35

1aedce40881448628c79eedd50b0e6cc

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ сокращается как $p \leftrightarrow q$.

Note 36

2e54de05c39b423989f92d177f66967d

Используя сокращение $p \leftrightarrow q$ можно записывать утверждения об эквивалентности в виде тавтологий.

Note 37

4f385dabf08045f9afc40ca97d97d8d1

Первые три свойства конъюнкции и дизъюнкции.

■ Ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность.

Note 38

142ee54823b14d4bad73e4e09dfac3c

Как утверждение о коммутативности конъюнкции записывается в виде тавтологии?

■ $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge p).$

Note 39

c93d5a120f0341749d62a3705aae96ab

$$\{\{c2::\neg(p \wedge q)\}\} \leftrightarrow \{\{c1::(\neg p \vee \neg q).\}\}$$

Note 40

577f39ecc78a42d498fd72413341bdeb

$$\{\{c2::\neg(p \vee q)\}\} \leftrightarrow \{\{c1::(\neg p \wedge \neg q).\}\}$$

Note 41

dc0dd2fdc0fe4e3d927f9c9938b1f4ed

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q),$$
$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q).$$

«{\{c1::Законы Де Моргана\}}»

Note 42

fc8341e166fb4ed3a69456e055f57d8c

$$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow \{\{c1::p.\}\}$$

Note 43

79971beeb5c749c0aa731ff75be7c184

$$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow \{\{c1::p.\}\}$$

Note 44

74277840f9f74c64a3570075bf441dd3

$$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p, (p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p.$$

«{\{c1::Законы поглощения\}}»

Note 45

b0470e6ee152460e85f6765609b9d4ed

$$\{\{c2::(p \rightarrow q)\}\} \leftrightarrow \{\{c1::(\neg q \rightarrow \neg p)\}\}$$

«{\{c3: Правило контрапозиции\}}»

Note 46

e7790b37774d4e06845510cd77932583

$$\neg\neg p \leftrightarrow \{\{c1::p\}\}$$

Note 47

cc36fc9a7d8945799fdc56d9124ce34b

$$\neg\neg p \leftrightarrow p.$$

«{\{c1: Снятие двойного отрицания\}}»

Note 48

12216d5d3e55466898f2f6ea416667e2

Пусть две пропозициональные формулы эквивалентны. Что произойдёт, если заменить все \wedge на \vee и наоборот.

■ Они останутся эквивалентными.

Note 49

b89ed5bfb55a4cd190ae423d6659bb18

Пусть две пропозициональные формулы эквивалентны. Если заменить все \wedge на \vee и наоборот, то формулы останутся эквивалентными. В чём ключевая идея доказательства?

■ Добавить везде отрицание через законы Де Моргана.

Note 50

95d2cc9c35bc48638505c9c8969657e9

\{\{c2: Префиксная\}\} форма записи пропозициональных формул называется \{\{c1: польской записью.\}\}

Note 51

b83adc1541294949a122d22e679e1d56

\{\{c2: Постфиксная\}\} форма записи пропозициональных формул называется \{\{c1: обратной польской записью.\}\}

Note 52

7d133f61d12048fd912eb4388951b4c0

Порядок действий в польской нотации `{{c1::восстанавливает-ся однозначно.}}`

Note 53

06a383a050d64e979b6880df7567db76

Порядок действий в польской нотации восстанавливается однозначно. В чём ключевая идея доказательства?

Показать однозначность разделения аргументов индукцией по построению.

Полные системы связок

Note 1

71e2d5041eca42ba9fd55f998ae3ce2

Систему пропозициональных связок называют **полной**, если с их помощью можно записать любую булеву функцию.

Note 2

c8b1eecb42414717a222980ed4fdfaa0

Чем особенны системы связок \wedge, \neg, \vee, \neg ?

■ Они полны.

Note 3

0f6f000efe6745dca1a602e59734b7ab

Почему система связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ не является полной?

■ Все функции сохраняют единицу.

Note 4

784d6c8d9a9a4fb0ab449b6d64434024

Пример полной системы связок, содержащей только одну функцию. . .

■ «не-и» (стрелка Пирса.)

Note 5

812488ce592f4317b3f8bc14acc7f362

Пример функции n аргументов, у которой любая дизъюнктивная или конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены длины n . . .

■ Функция, меняющая своё значение при изменении значения любой переменной.

Note 6

c4ad9d49cf0d4bbd973f99622259455a

Функция, меняющая своё значение при изменении значения любой переменной. . .

Сложение всех аргументов по модулю 2 (или его отрицание).

Note 7

69d66d93ae594c83b27e3763e8d934a6

Пусть f — монотонная булева функция. Если f не постоянна, то она выражается формулой, содержащей только \wedge и \vee .

Note 8

537e947ad05943caa830adfcf438cf56

Пусть f — монотонная булева функция. Если f не постоянна, то она выражается формулой, содержащей только \wedge и \vee . В чём ключевая идея доказательства?

Разложение по первому аргументу и $f(0, \dots)$ — импликанта $f(1, \dots)$.

Note 9

cbefa3e8993c4d2585dc5e97c9df2516

Какая полная система связей была предложена Жегалкиным?

$\oplus, \wedge, 1$.

Note 10

e95b0392865d49898adc27daa2ec1e8e

Элементарную конъюнкцию без отрицаний называют мономом.

Note 11

9a265e9d497a4722bc6ba397ae41b081

Сумма мономов по модулю 2 называется полиномом Жегалкина.

Note 12

2c2a6cc033574cfba14cb070595e83ea

Всякая булева функция представляется полиномом Жегалкина. В чём ключевая идея доказательства?

■ Система связок $\oplus, \wedge, 1$ полна.

Note 13

c94d2db880174cad80ba29348cd07ad6

Всякая булева функция представляется полиномом Жегалкина. В чём ключевая идея доказательства **единственности** такого полинома?

■ Различных полиномов столько же, сколько есть булевых функций n аргументов.

Note 14

73d18ee1747144479c5c0e4d37ffcb92

Сколько существует полиномов Жегалкина, тождественно равных нулю?

■ Ровно один.

Note 15

054e669c99b749088d211b77b2ccde17

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства?

■ Индукция по числу аргументов.

Note 16

17841160bf3b4c9f9c2f970ee5f4bc61

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства (база индукции)?

■ Для нуля аргументов утверждение тривиально.

Note 17

d163a7b12827480d905c31c28d21bf79

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства (шаг индукции)?

Выделить мономы, содержащие первый аргумент и дистрибутивность.

Note 18

84002508531d44f593641b99932200eb

Говорят, что булева функция f сохраняет единицу, если

$$f(1, 1, \dots, 1) = 1.$$

Note 19

320179cbf3f8458684741a2425bd8447

Говорят, что булева функция f сохраняет 0, если

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Note 20

3e1cff512f704ef09599a3113eb6d55b

Говорят, что булева функция f является монотонной по аргументу x , если $f|_{x=0} \rightarrow f|_{x=1}$.

Note 21

2957fb387679432686f1b934f4e82ed1

Говорят, что булева функция f является монотонной, если она монотонна по любому из своих аргументов.

Note 22

96d0e06700b1448181e8535af7ff988e

Как можно определить монотонную булеву функцию в терминах частично упорядоченных множеств?

Функция “уважает” покомпонентное сравнение на \mathbb{B}^n .

Note 23

4b5c6b3211774c9984319891e36b6d3c

Говорят, что булева функция f является линейной, если она представляется многочленом Жегалкина степени 1.

Note 24

77d0376f8c2b4f899babe0e721b80646

Какой вопрос рассматривается в теореме Поста?

■ Полнота данной системы связей.

Note 25

1c32d408ef274167bfbe0a8f3498c584

Каким видом условия является теорема Поста?

■ Критерий.

Note 26

667f4704fbf147b7a4673b3b55f98732

Каково условие критерия Поста?

■ Система связей не содержится целиком ни в одном из «предполных классов».

Note 27

b16545ab13054773a86186f46c4059be

Какое количество классов рассматривается в качестве «предполных классов» в теореме Поста?

■ Пять.

Note 28

745ffb1c0e4b4b0cb77d6319c9f03944

Что есть «предполные классы» из теоремы Поста?

■ Классы: монотонных, сохраняющих 0, сохраняющих 1, линейных, самодвойственных.

Note 29

65e7950b98494aaaad1d9e3bbe8d40f7

В чём ключевая идея доказательства критерия Поста (необходимость)?

■ Все «предполные классы» замкнуты.

Note 30

bf8091cba9de4849a54f96dd0904eceb

В чём ключевая идея доказательства критерия Поста (достоинство)?

Выбрать по одной функции, не лежащей в определённом классе, и построить из них \wedge , \vee , \neg .

Note 31

24529dc587344856b5d48b1e6908bfb7

Какое первое построение выполняется в доказательстве теоремы Поста?

Из функций, не сохраняющих 0 или 1, построить либо обе константы, либо отрицание.

Note 32

5f0a8406dd2746f1a3e9052ef61a42a5

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строится отрицание, если на первом шаге получились только константы?

Из немонотонной функции.

Note 33

a77e8f2aa64e473cbca51507c778340f

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строятся константы, если на первом шаге получилось только отрицание?

Из несамодвойственной функции

Note 34

8466ffc193d04aca8f51b38bd4ef6c33

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строятся \wedge или \vee , после построения \neg и констант?

Из нелинейной.

В доказательстве теоремы Поста, как из нелинейной функции строятся \wedge или \vee , после построения \neg и констант?

Собрать слагаемые с $p_1 p_2$, p_1 , p_2 ; дистрибутивность и частные случаи.

Схемы из функциональных элементов

Note 1

4b98018908a346fc8b14b5f49015d95e

Чем функциональные схемы принципиально отличаются от пропозициональных формул?

Возможностью ветвления для выходных значений элементов.

Note 2

bedfdd0ee69c46a3bcbd753ef0f3c919

Какие функциональные схемы соответствуют пропозициональным формулам?

Схемы без ветвления выходных значений.

Note 3

39fe011334154083b027c742f0986b05

Чем ограничено ветвление выходных значений при практической реализации функциональных схем?

«Нагрузочной способностью выхода.»

Note 4

d67b2ca52244565a49e56e2d8b33163

Что берётся за основу при определении функциональных схем?

Базис, входы и проводники.

Note 5

bdbb8188e4014802bec6994175862f47

Что называют базисом функциональной схемы?

Набор функций, используемых для связывания переменных схемы.

Note 6

fd3fe925d0f24450946748fe140cd046

Что называют входами функциональной схемы?

■ Выделенный набор независимых булевых переменных.

Note 7

d4381b1db9bb40da9c3bafc5bcf96663

Что называют проводниками функциональной схемы?

■ Выделенный набор зависимых булевых переменных.

Note 8

ffb7cf29b6fa40129798a4285193e052

Как связываются пропозициональные переменные функциональной схемы?

■ Для каждого проводника задана булева функция, выражающая его через другие переменные.

Note 9

ca28572bbe47406d863c48f017b65056

Что требуется от связей между переменными функциональной схемы для её корректной определённости?

■ Отсутствие циклов.

Note 10

7e0d72b7201f4c72ac3dc07b7cbcb38a

Что называют выходом функциональной схемы?

■ Некоторый выделенный проводник.

Note 11

2d028028d4c8428c90ac5a376058df0f

Что называют размером функциональной схемы?

■ Число её проводников.

Note 12

94cb3d94bafd4a888a6f1f67c540bb41

Что гарантирует возможность однозначного вычисления функциональной схемы?

■ Отсутствие циклов.

Note 13

a591955e1cd645398ac3ef97d5c930e9

Почему отсутствие циклов в функциональной схеме гарантирует возможность её однозначного вычисления?

■ Должен существовать проводник, зависящий только от входов и далее “по индукции”.

Note 14

2d11f7d1444e401192604dca6d2d29a4

Отсутствие циклов в функциональной схеме позволяет представить её в виде $\{\{c1: \text{последовательности присваиваний для значений проводников.}\}$

Note 15

1ff5ed4c111a4e6cb9fd76e210cdb731

Относительно чего вводится понятие сложности булевой функции?

■ Относительного заданного базиса.

Note 16

051ecd8e7b25466d99e169216aecf5a1

Что называется сложностью булевой функции f относительно базиса B ?

■ Минимальный размер функциональной схемы, вычисляющей f .

Note 17

e706ae8143d14a29872334dbe1807ac0

Как называется минимальный размер функциональной схемы в базисе B , вычисляющей булеву функцию f ?

■ Сложность f относительно базиса B .

Note 18

f82baad90aa24548bc7b3ec52251ddfa

Пусть B — базис, f — булева функция. Сложность f относительно B обозначается

$$\text{size}_B f.$$

}}