Лекция 07.09.22

Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

{{c2::Абсолютное значение}} мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ так же называют {{c1::порядком α.}}

Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

{{c3::Многочленом n переменных со значениями в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c4::отображение}} вида

$$x \mapsto \text{\{\{c1::} \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha, \text{\}\}}$$

где {{c2::$\{c_\alpha\} \subset \mathbb{R}^m$ — конечное семейство}} и {{c5::$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.}}

Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \not\equiv 0$,}} то {{c3::степенью}} многочлена p называется {{c1::число

$$\max \{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}.$$

}}

Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \equiv 0$,}} то {{c3::степень}} многочлена p полагают равной {{c1::$-\infty$.}}

Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. {{c2::Степень}} многочлена p обозначается {{c1::

$$\deg p.$$

}}

Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Многочлен p называется {{c2::однородным,}} если {{c1::для всех $c_\alpha \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c5::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} {{c2::Многочлен p степени не выше s,}} для которого {{c1::

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x - a\|^s), \quad x \to a,$$

}} называется {{c3::многочленом Тейлора f порядка s в точке a.}}

Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. {{c2::Многочлен Тейлора f порядка s в точке a}} обозначается {{c1::

$$T_{a,s} f.$$

}}

Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он {{c1::единственный.}}

Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

> Разность двух многочленов есть $o(\|x - a\|^s)$, $x \to a$.

Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть p — многочлен {{c2::степени не выше s,}} {{c3::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда если

$$p(x) = o(\|x - a\|^s), \quad x \to a,$$

то {{c1::$p \equiv 0$.}}

Note 12

f753051ba1584ae3809a7b03ecf311f7

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства?

> Разбить p на однородные компоненты и рассмотреть $p(tx)$ как многочлен переменной t.

Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. Как представляется многочлен $p(tx)$ в доказательстве?

> $$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$
>
> где p_k — однородный многочлен степени k.

Note 15

8d6ee9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве, что нужно показать про многочлен $p(tx)$?

> $$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \to 0.$$

Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве мы получили, что $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$ при $t \to 0$. Что дальше?

> Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

Note 17

833c8cc496364d6fa95263abe312262d

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $a \neq 0$)?

> $p(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$.

Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,0}f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f непрерывна в точке a.}}

Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,1}f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f дифференцируемо в точке a.
}}

Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда если {{c2::f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a,}} то {{c1::

$$f(a + h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \to 0.$$

}}

Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $m = 1$ и $m > 1$.

Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m > 1$)?

> Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

> Индукция по s начиная с $s = 1$.

Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, база индукции)?

> Выразить $f(a+h)$ через дифференциал, а его через производные.

Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, индукционный переход)?

> Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} T_{a,s}f(x) \text{}}} = \text{{{c1::}} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha. \text{}}}$$

«{{c4::Формула Тейлора-Пеано}}»

Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ee26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> $$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leqslant s.$$

Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} T_{a,s}f(x) \text{}}} = \text{{{c1::}} \sum_{k=0}^{s} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}. \text{}}}$$

(в терминах дифференциалов)

Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — {{c2::многочлен степени не выше s,}} $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \text{{{c1::}}}0.\text{}}}$$

Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{{{c2::}}}\widetilde{\Delta}_{a,b}\text{}}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}}\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}\ .\text{}}}$$

Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c6::дифференцируемо $s + 1$ раз на E,}} {{c5::$a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,x}$}} для которой

$$\text{{{c3::}}}R_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}}}\frac{d_c^{s+1} f(x-a)}{(s+1)!}.\text{}}}$$

«{{c7::Формула Тейлора-Лагранжа}}»

Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда $\exists c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$ для которой

$$R_{a,s}f(x) = \frac{d_c^{s+1} f(x-a)}{(s+1)!}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции
>
> $$t \mapsto f(a + th).$$

Note 33

f5319b0cf6d14e598448bc9db8842901

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \left|R_{a,s}f(x)\right| \text{\}\}} \leqslant \text{\{\{c1::} \sup_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \frac{\left|d_c^{s+1} f(x-a)\right|}{(s+1)!}. \text{\}\}}$$

Лекция 14.09.22

Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c5::дифференцируема на E,}} {{c4::$a \neq b$ и $\Delta_{a,b} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,b}$}}, для которой {{c1::

$$f(b) - f(a) = d_c f(b-a).$$

}}

«{{c3::Теорема о среднем}}»

Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций n вещественных переменных?

> Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для **отображений** нескольких переменных?

> Нет, только для функций.

Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

> $x \mapsto (\cos x, \sin x),\ a = 0,\ b = 2\pi.$

Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

{{c2:: $\left\| R_{a,s} f(x) \right\|$ }}{{c3:: $\leqslant$ }}{{c1:: $\dfrac{1}{(s+1)!} \cdot \sup\limits_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \left\| d_c^{s+1} f(x-a) \right\|$.}}

«{{c4::Формула Тейлора-Лагранжа для отображений}}»

Note 6

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть $f : E \subset$ {{c5::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} {{c4::непрерывно дифференцируемо $s+1$ раз на E,}} $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\text{\{\{c3::}\ \|R_{a,s}f(x)\|\ \text{\}\}} \leqslant \text{\{\{c2::}\ \frac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\,\|x-a\|)^{s+1},\ \text{\}\}}$$

где

$$M = \text{\{\{c1::}\ \max_{|\alpha|=s+1}\ \sup_{c\in\widetilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\|\ \text{\}\}} < \text{\{\{c6::}\ +\infty.\text{\}\}}$$

$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$

Note 7

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы $\mathbb{R}^{n+m}$ в виде {{c1::(x, y),}} где $x \in$ {{c2::$\mathbb{R}^n$}}, $y \in$ {{c2::$\mathbb{R}^m$}}.

Note 8

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^{n+m}$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}^m$}} и существует $\psi :$ {{c3::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c3::$\mathbb{R}^m$}} такая, что {{c2::

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

}} то ψ называют {{c1::неявным отображением, порождённым уравнением $f(x, y) = 0$.}}

Note 9

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x, y) = 0$,

$$f'_x(a) \coloneqq \text{\{\{c1::}\ \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]\ \text{\}\}} \sim \text{\{\{c2::}\ m \times n.\text{\}\}}$$

Note 10

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x,y) = 0$,

$$f'_y(a) \coloneqq \{\{c1:: \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a)\right] \}\} \sim \{\{c2:: m \times m. \}\}$$

Note 11

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^{n+m}$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}^m$}}, {{c5::$f \in C^s(E)$.}} Тогда если

{{c1::

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

}} то существуют такие {{c2::$\delta > 0$ и $\psi \in C^s(V_\delta(x^0))$,}} что

$$\{\{c3:: f(x,y) = 0 \iff y = \psi(x) \}\}$$
$$\forall (x,y) \in \{\{c6:: V_\delta(x_0, y_0). \}\}$$

«{{c6::Теорема о неявном отображении}}»

Note 12

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение ψ, введённое в теореме о неявном отображении называется {{c1::неявным отображением, порождённым уравнением $f(x,y) = 0$ в окрестности точки (x^0, y^0).}}

Note 13

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

> $$d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\ldots) = 0.$$

Note 14

dd7bb23f22a042dab6dacf623aca0455

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,\ (x^0, y^0) \in E$. Если {{c2::в окрестности точки (x^0, y^0) уравнение $f(x,y) = 0$ порождает неявную функцию,}} то f называется {{c1::локально разрешимым в точке (x^0, y^0).}}

Note 15

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Если {{c2::$f$ локально разрешимо в любой точке E,}} то f называется {{c1::локально разрешимым на E.}}

Лекция 21.09.22

Note 1
434affe9da3e443d839f4a7d6af1b180

Чем определение экстремума для функций n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

> Ничем.

Note 2
2efcc79ba51544848aacbd7da7dfa4b1

В определении экстремума функции n вещественных переменных, для каких x требуется выполнение соответствующего неравенства?

> $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D(f)$.

Note 3
30ab720865e54af19fcc351cfa78d165

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::дифференцируема в точке a.}} Точка a называется {{c2::седловой,}} если {{c1::$d_a f \equiv 0$ и a — не экстремум.}}

Note 4
27a6b8777b9b4bb9919dcfa31d963432

{{c2::Тождественно нулевой оператор}} обозначается {{c1::$\mathbb{O}$.}}

Note 5
43fd5e0b1a8b410a887c991151fac7e0

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c3::дифференцируема в точке a.}} Если {{c2::a является точкой экстремума,}} то {{c1::$d_a f \equiv 0$.}}

Note 6
834aecf3894642098d0ddc0256091117

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a. Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

«{{c1::Необходимое условие экстремума}}»

Note 7

e5cfde8512814dbbaed4676461636b0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c3::дифференцируема в точке a.}} Точку a называют {{c2::стационарной для f,}} если {{c1::$d_a f \equiv 0$.}}

Note 8

c658e89677264e7bb7317334e026304e

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных?

> Рассмотреть функции $t \mapsto f(a + te^k)$.

Note 9

02b9316ee1f84262ae08eebecbe71c2b

В доказательстве необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных, мы положили

$$F_k(t) = f(a + te^k).$$

Что нужно показать про функцию F_k?

> 0 — точка экстремума F_k и рассмотреть $F_k'(0)$.

Note 10

ec6b1873ffe44cc48c87520ef5bf2f10

Какие случаи не охватываются необходимым условием экстремума?

> Когда дифференциал сохраняет знак, но не является положительно или отрицательно определённым.

Note 11

091dad1735594dfa8923e46c5a461ab0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c4::дважды дифференцируема в точке a,}} {{c3::$d_a f \equiv 0$.}} Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ положительно определён,}} то {{c1::a — точка строгого минимума f.}}

Note 12

a87f168ae18d4f65b7595866b9407e8d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ отрицательно определён,}} то {{c1::a — точка строгого максимума f.}}

Note 13

4643a84f76b84c9bbc34e220ee2196c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ принимает как положительные, так и отрицательные значения,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 14

41fccd97c432427e893b7c1e3b850374

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c3::дважды дифференцируема в точке a.}} {{c2::Матрица квадратичной формы $d_a^2 f$}} называется {{c1::матрицей Гессе f в точке a.}}

Note 15

36db8ae7809a4dcbb6f350f51ca0a54c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a. {{c2::Матрица Гессе f в точке A}} обозначается {{c1::$H(f)$.}}

Note 16

5ffaf8568eaa4a8fbb3815c215d20c25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a. {{c2::Матрица Гессе f в точке a}} имеет вид

$$\text{\{\{c1::}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] \sim n \times n.\text{\}\}}$$

Note 17

56bf1e23f53c4cae8d62101295cb0a9b

Пусть $f : E \subset$ {{c3::$\mathbb{R}^2$}} $\to$ {{c3::$\mathbb{R}$}} дважды дифференцируема в точке a, {{c4::$d_a f \equiv 0$.}} Тогда если {{c2::$\det H(f) < 0$,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

(в терминах $H(f)$)

Note 18

b78c95a2236a4edf964b8e2a29238dae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a. В чём ключевая идея доказательства?

> Зафиксировать одну компоненту приращения $d_a^2 f$ и показать, что он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Note 19

535062161d6044bdb41631a3ae479223

{{c2::Дополнительные равенства, которым должны удовлетворять точки из области определения f}} в определении понятия условного экстремума называются {{c1::уравнениями связи.}}

Note 20

7dc4fe4c435946a091efc32d6a120ec1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, {{c4::$\Phi : E \to \mathbb{R}^m$,}} $a \in E$, {{c3::$m < n$.}} Если {{c1::a является точкой экстремума сужения f на множество

$$\{x \in E \mid \Phi(x) = 0\},$$

}} то a называется {{c2::точкой условного экстремума f, подчинённого уравнениям связи $\Phi(x) = 0$.}}

Note 21

efdc5b1690a340499b26b776ada24e98

Точку условного экстремума так же называют {{c1::точкой относительного экстремума.}}

Лекция 28.09.22

Note 1

ffe18c64640a4c0c9009a7e054fc1af5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c6::$m < n$,}} $f \in$ {{c4::$C^1(E, \mathbb{R})$}}, $\Phi \in$ {{c4::$C^1(E, \mathbb{R}^m)$}}, $a \in E$, {{c5::$\operatorname{rk} \Phi'(a) = m$.}} Тогда если {{c3::$a$ — условный экстремум f, подчинённый $\Phi(x) = 0$,}} то {{c2::$\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$,}} для которых {{c1::

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

}}

Note 2

af9f952d67cd4db8a2bc302521d5f590

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $a \in E$, $\operatorname{rk} \Phi'(a) = m$. Тогда если a — условный экстремум f, подчинённый $\Phi(x) = 0$, то $\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$, для которых

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

«{{c1::Необходимое условие относительного экстремума}}»

Note 3

82213d3b2284465e9b85ecf7bcfe686b

{{c2::Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$}} из теоремы о {{c3::необходимом условии относительного экстремума}} называются {{c1::множителями Лагранжа f в точке a.}}

Note 4

832a0c560cf747c492a100c673d806cc

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия относительного экстремума?

> Теорема о неявной функции для $\Phi(x, y) = 0$.

Note 5

9434998277aa4d2d946b7fcdfecf36f8

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума мы построили неявную функцию ψ из уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Что дальше?

Рассмотреть $f(x, \psi(x)) - \lambda\Phi(x, \psi(x))$.

Note 6

feb9eccc46494af296a7c929c6b4fd57

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{\{c2::x^0\}\}} = \{\{c1::0.\}\}$$

Note 7

038381f4bf64457da1a04c86b8ab0eb5

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

x_0 — т. экстремума $f(x, \psi(x))$.

Note 8

63892565775440a9afc699c3c9ed5419

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{\{c2::x^0\}\}} = \{\{c1::0.\}\}$$

Note 9

b333ed4af4a44349b84e8aed99b46a18

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

$\Phi(x, \psi(x)) = 0$ в окрестности x^0.

Note 10

082928b830ed48038502597330cc2d6b

Чему равно λ из теоремы о необходимом условии относительного экстремума?

$$\lambda^T = f'_y(a) \cdot \left(\Phi'_y(a)\right)^{-1}.$$

Note 11

c403eaa3be2d4d1dac52b422443e29b2

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума отображение

$$\{\{c3::(x,\lambda)\}\} \mapsto \{\{c2::f(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Phi_k(x)\}\}$$

называется {{c1::функцией Лагранжа.}}

Note 12

5568e5ccac324a0cb09e98b4ba65503b

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума {{c2::функция Лагранжа}} обозначается {{c1::$L(x,\lambda)$.
}}

Note 13

113bd38c503e4af990386a637b1aa830

Необходимое условие относительного экстремума в терминах функции Лагранжа примет вид {{c1::

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \nabla L(a,\lambda) = 0.$$

}}

Note 14

10647bd11e764a13b935dd15418841c6

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. f называется {{c2::положительно определённой на N,}} если {{c1::$f|_N$ положительна определена.}}

Note 15

24a7c3a60b0144b78d3bdf59396178e9

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. f называется {{c2::отрицательно определённой на N,}} если {{c1::$f|_N$ отрицательно определена.}}

Note 16

6af1663b3c2f432eb8d779d75937d630

Пусть в условиях теоремы {{c6::о необходимом условии относительного экстремума}} $f \in$ {{c5::$C^2(E)$}} и $g \in$ {{c5::$C^2(E)$}} Положим $L(x) =$ {{c4::$L(x, \lambda)$}}, где λ — {{c3::множители Лагранжа.}} Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ положительно определён на $\ker d_a \Phi$,}} то {{c2::a — точка условного минимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.}}

Note 17

1abdb12e039f42bb991a4e08218e2bc0

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$ Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ отрицательно определён на $\ker d_a \Phi$,}} то {{c2::a — точка условного максимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.}}

Note 18

18275ac96f4145228cd295901a3c4aeb

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$ Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ принимает на $\ker d_a \Phi$ как положительные, так и отрицательные значения,}} то {{c2::f не имеет в точке a условного экстремума, подчинённого $\Phi(x) = 0$.}}

Note 19

b5b66b7db90b4d1bacf06b32b1446fcb

Пусть {{c3::$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — вещественная последовательность.}} {{c2::Рядом}} называется {{c1::формальное выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

}}

Note 20

a5592c04ea8d40cd952f2bf6391ed438

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. {{c2::Элемент a_k}} называется {{c1::общим членом ряда.}}

Note 21

ff62bd61f29a475eb73a358793f8a46a

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, {{c3::$n \in \mathbb{N}$.}} {{c2::Сумму вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

}} называют {{c1::частичной суммой ряда.}}

Note 22

515ccf52bf2e4d89a5a2c282984860f2

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, $n \in \mathbb{N}$. {{c1::Сумму

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n$$

}} часто обозначают {{c2::S_n.}}

Note 23

ad2ee0b419444746bd51026b07fa19d6

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. {{c1::Величина

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

}} называется {{c2::суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.}}

Note 24

6505e18ad4754436aa6c22aae25686bd

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Если {{c2::величина A есть сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$,}} то пишут {{c1::

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

}}

Note 25

a3c5b50440ad4896bb8af7492d946bc5

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд {{c2::сходится,}} если {{c1::его сумма существует и конечна.}}

Note 26

fb03f6a351984ebf8a7077cc5c2126e4

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд {{c2::расходится,}} если {{c1::он не сходится.}}