

Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть W — линейное пространство, $V \subset W$. Тогда V называется линейным подпространством, если

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « V есть линейное подпространство в W » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — тоже линейное пространство.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в \mathbb{R}^n ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2:m \times n\}\}}$ такая, что $\{\{c1::$

$$V = \ker A.$$

$\}\}$

Note 7

dc727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$. Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в W ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций a_1, a_2, \dots, a_n тоже является их линейной комбинацией.

Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

Да, всегда.

Note 9

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

Нет, не всегда.

Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2::V_1 + V_2\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}\}.\}$$

Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}\}$$

Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$ и e_1, e_2, \dots, e_k —
 $\{\{c2:: \text{базис в } V.\}\}$ Тогда в W существует базис вида $\{\{c1::$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

■ Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 15

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- e_1, e_2, \dots, e_k — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$ — базис в V_1 ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$ — базис в V_2 .

Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

■ $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ — базис в $V_1 + V_2$.

Note 16

d6aa3bacb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть

- e_1, e_2, \dots, e_k — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$ — базис в V_1 ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$ — базис в V_2 .

Как доказать, что

$$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$$

— базис в $V_1 + V_2$?

■ Показать, что $\forall i \quad g_i \notin V_1$, а значит

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus \mathcal{L}(g_1, \dots, g_q).$$

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве V . Тогда матрицей перехода от базиса e к базису e' называют матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса e к базису e' обычно обозначают $C_{e \rightarrow e'}$.

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \rightarrow e'}$?

Столбцы $C_{e \rightarrow e'}$ — это координаты векторов e'_1, e'_2, \dots, e'_n в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Сумму $V_1 + V_2$ называют прямой суммой, если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств V_1 и V_2 обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$ — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
- Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

■ Показать, что если $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

- $\dim V \leq \dim W$;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$.

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение $f : V \rightarrow W$ называется **линейным отображением**, если

- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

Note 7

4008d3f9d224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \rightarrow W$ называется **изоморфизмом линейных пространств**, тогда и только тогда, когда f — биекция.

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \rightarrow W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно называют матрицу A , переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.

Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор,

- e_1, e_2, \dots, e_n — базис в V ,
- $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ — базис в W .

Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

j -ый столбец — это координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$.

Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где λ — координаты вектора из V в базисе e .

Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и \tilde{e} соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e . Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \rightarrow e'$?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' = \det A$.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора $f : V \rightarrow V$ называется определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора $f : V \rightarrow V$ называется ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы A обозначается $\text{tr } A$.

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$. Тогда $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$.

Note 8

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$ называется $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

Note 9

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

Note 10

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

Note 11

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft V$?

Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f .

Note 12

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft W$?

Нет, $\ker f \triangleleft V$.

Note 13

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft W$?

Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 14

7b17eb03a5e640f8bdefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft V$?

Нет, $\operatorname{im} f \not\triangleleft W$.

Note 15

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V , $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 16

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Дополнить базис в $\ker f$ до базиса в V и построить из них базис в $\operatorname{im} f$.

Note 17

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор,

- e_1, e_2, \dots, e_k — базис в $\ker f$;
- $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в V .

Как выглядит базис в $\operatorname{im} f$?

|

$$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n).$$

Note 18

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \{\{c1: \operatorname{rk} f.\}\}$$

Note 19

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как показать, что

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f?$$

|

Показать, что в координатном выражении $\operatorname{im} f$ есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора f .

Note 20

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. $\{\{c1: \text{Пространство } V \triangleleft W\}\}$ называется $\{\{c2: \text{инвариантным относительно оператора } f,\}\}$ если $\{\{c1:$

$$f(V) \subset V.$$

$\}\}$

Note 21

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \rightarrow W$.

Note 22

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, e_1, e_2, \dots, e_n — дополнение до базиса в W базиса e_1, e_2, \dots, e_k в инвариантном подпространстве $V \triangleleft W$. Тогда матрица оператора f в базисе e_1, e_2, \dots, e_n примет вид

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

где T_{11} — это матрица $f|_V$ в базисе e_1, e_2, \dots, e_k .

Лекция 28.02.22

Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор $f : W \rightarrow W$ называется невырожденным, если $\det f \neq 0$.

Note 2

2e565e676da342fb8cdac4d62de05e8

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. f невырождено;
2. $\ker f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = V$;
4. $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5. f — биекция.

Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — невырожденный оператор, то f — биекция?

Показать, что если f задаётся матрицей A , то f^{-1} задаётся матрицей A^{-1} .

Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — биекция, то f — невырожденный оператор.

$$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением оператора f , если

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда вектор $v \in V \setminus \{0\}$ называется собственным вектором оператора f , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

Спектром оператора называется множество собственных значений этого оператора.

Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

Спектр оператора f обозначается $\text{spec } f$.

Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда λ является собственным значением f тогда и только тогда, когда

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора f .

Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора f .

Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной λ ?

Если A — матрица оператора f , то $|A - \lambda E|$ — многочлен переменной λ .

Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$|A - \lambda E| = |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$$

Лекция 07.03.22

Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Характеристический многочлен оператора f обозначается

$$\chi_f.$$

}}

Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

Note 3

6deecf304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что χ_f — определитель соответствующей квадратной матрицы оператора f .

Note 4

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Множество всех собственных векторов f с собственным значением λ , объединённое с нулём, обозначается $V_f(\lambda)$.

}}

Note 5

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Тогда $V_f(\lambda)$ называется собственным подпространством оператора f .

Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fc38f36

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . В кратком выражении

$$\llbracket c2:: V_f(\lambda) \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket c1:: \ker(f - \lambda E) \rrbracket$$

Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

■ Да, всегда, потому что $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$.

Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c1:: \text{Размерность } V_f(\lambda) \rrbracket$ называют $\llbracket c2:: \text{геометрической кратностью собственного значения } \lambda \rrbracket$

Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c2:: \text{Геометрическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$ обозначается $\llbracket c1:: S_f(\lambda) \rrbracket$

Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c1:: \text{Кратность } \lambda \text{ как корня } \chi_f \rrbracket$ называют $\llbracket c2:: \text{алгебраической кратностью собственным значением } \lambda \rrbracket$

Note 11

856a933db82641cd87b0ee5f34647b1a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c2:: \text{Алгебраическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$ обозначается $\llbracket c1:: m_f(\lambda) \rrbracket$

Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Тогда $\{\{c1::S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda).\}\}$

Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Тогда $S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)$.

В чем основная идея доказательства?

Показать, что $V_f(\lambda)$ инвариантно относительно f
 $\implies \chi_f$ делится на $\chi_{\tilde{f}}$, где $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$.

Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f , $\{\{c2::\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}.\}\}$ Тогда

$$\{\{c3::\chi_{\tilde{f}}(t)\}\} = \{\{c1::(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}\}\}$$

Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f , $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$. Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

\tilde{f} представляется матрицей λE порядка $\dim V_f(\lambda)$.

Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

$\{\{c2:: \text{Оператор } f : x \mapsto \lambda x, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},\}\}$ называется $\{\{c1:: \text{скаляр-ным оператором.}\}\}$

Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть $\{\{c3:: f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}\}$ f называется $\{\{c2:: \text{диагонализуемым оператором,}\}\}$ если $\{\{c1:: \text{существует базис в } V, \text{ в котором матрица оператора } f \text{ является диагональной.}\}\}$

Note 18

b01b69f3ebc4c0c839a0c153f85d041

Диагональная матрица с элементами a_1, a_2, \dots, a_n на диагонали обозначается

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Если в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матрица оператора f равна $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то e_1, e_2, \dots, e_n — собственные векторы f .

Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Если в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матрица оператора f равна $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то a_1, a_2, \dots, a_n — собственные значения f .

Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда оператор f диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого собственного значения λ

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

Покзать, что если f представляется матрицей $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то по определению

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_i - \lambda).$$

Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — различные собственные значения оператора f ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов v_1, \dots, v_n линейно независима.

}}

Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов v_1, \dots, v_n линейно независима.

В чем основная идея доказательства?

Применяем f к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

Note 25

cfc344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

Составить систему векторов из базисов в $V_f(\lambda_j)$ и показать, что она является базисом V .

Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

Из условия $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$, а значит система содержит $\deg \chi_f = \dim V$ элементов.

Note 27

5fd54902e7f34d00bad322902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов v_1, \dots, v_n , где $v_j \in V_f(\lambda_j)$.

Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор $f : V \rightarrow V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор $f : V \rightarrow V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{spec } f \quad 1 \leq S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda) = 1 \\ \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda). \end{aligned}$$

Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Оператор $P : V \rightarrow V$, переводящий сумму $v_1 + v_2$ векторов из V_1 и V_2 соответственно в вектор v_1 , называется оператором проектирования на V_1 параллельно V_2 .

Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\text{im } P = V_1.$$

Note 32

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\ker P = \{c1:: V_2.\}$$

Note 33

27181bd7474e4091aee4fa9dba20ae0f

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\text{спес } P = \{c1:: \{0, 1\}.\}$$

Note 34

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$m_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

Note 35

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$S_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

Note 36

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$m_P(1) = \{c1:: \dim V_1.\}$$

Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$S_P(1) = \{\{c1: \dim V_1.\}\}$$

Лекция 14.03.22

Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$. Вектор v называется **корневым вектором высоты k** оператора f , если существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$\begin{aligned}(f - \lambda E)^k v &= 0, \\ (f - \lambda E)^{k-1} v &\neq 0.\end{aligned}$$

}}

Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневым вектором высоты 1 оператора f — это **собственный вектор** этого оператора.

Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

λ из определения корневого вектора оператора f — это всегда **собственное значение f** .

Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что λ из определения корневого вектора всегда является собственным вектором?

■ Из определения $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0$.

Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть v — корневой вектор высоты $k \geq 2$ оператора f . Тогда $(f - \lambda E)v$ — корневой вектор высоты $k - 1$.

Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть v — корневой вектор высоты $k \geq 2$ оператора f . Тогда $(f - \lambda E)v$ — корневой вектор высоты $k - 1$. В чем основная идея доказательства?

© 2006 The Authors

1870

I

I

 $\{ \{ \{$

I

I

H
C
C

1000000

I

I

IT

I

I

I
C

J

Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению λ .

Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система $\{\{c3: \text{корневых векторов,}\} \text{ отвечающих} \{c2: \text{разным собственным значениям оператора,}\} \{c1: \text{линейно независима.}\}$

Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f . Тогда $\{c2: (f - \lambda E)^{k-1}v\} - \{c1: \text{это собственный вектор оператора } f.\}$

Note 13

59e965333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

Домножить произвольную линейную комбинацию на

$$(f - \lambda_1 E)^{k_1-1} (f - \lambda_2 E)^{k_2} \dots (f - \lambda_l E)^{k_l}$$

и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. $\{c1: \text{Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению } \lambda, \text{ объединённое с нулём,}\} \text{ называется } \{c2: \text{корневым подпространством, отвечающим собственному значению } \lambda.\}$

Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. $\{c2: \text{Корневое подпространство, отвечающее собственному значению } \lambda,\} \text{ обозначается } \{c1: K_f(\lambda).\}$

Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336e4a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Всегда ли $K_f(\lambda) \triangleleft V$?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$.

$$\{N_{f,k}(\lambda)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ker(f - \lambda E)^k\}.$$

Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$. Всегда ли $N_{f,k}(\lambda) \triangleleft V$?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Как $K_f(\lambda)$ выражается через $N_{f,k}(\lambda)$?

$$K_f(\lambda) = \bigcup_{k \geq 1} N_{f,k}(\lambda)$$

Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$.

Note 21

efec3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$. В чем основная идея доказательства?
TODO (?)

Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$\{c_2: V\} = \{c_1: K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l)\}.$$

Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что сумма $K_f(\lambda_j)$

1. является прямой,
2. порождает все пространство V .

Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ прямая?

Линейная комбинация векторов v_j из $K_f(\lambda_j)$ — это линейная комбинация корневых векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ порождает все V ?

$$\sum_{j=1}^l \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^l m_f(\lambda_j)$$

Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

Жорданова клетка — это квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты q , соответствующая некоторому числу λ , обозначается

$$J_q(\lambda).$$

Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

Жорданова матрица — это блочно диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в V матрица A оператора f имеет жорданов вид, то A называют жордановой нормальной формой оператора f .

Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда, если $\{\{c1: в некотором базисе в V матрица оператора f имеет жорданов вид,\}$ то этот базис называют $\{\{c2: жордановым базисом оператора f .\}$

Note 31

d8f181b2d5004a47bd308a35849cddec

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Как для $k > 0$ соотносятся $N_{f,k}(\lambda)$ и $N_{f,k+1}(\lambda)$?

Для всех k меньше некоторого q

$$N_{f,k}(\lambda) \subsetneq N_{f,k+1}(\lambda),$$

а для всех $k \geq q$:

$$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$

Note 32

414400f8f69b41b58c7d5b2930735317

Каков первый шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Найти все собственные значения оператора f .

Note 33

a79be36515f64439b4db0f075099cbc3

Каков второй шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Для каждого собственного значения λ найти все подпространства $N_{f,k}(\lambda)$.

Note 34

adf2c488db4640a1aba232fba8286d63

Каков третий шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Построить жорданову лестницу в каждом из корневых подпространств f .

Note 35

2fe8afa7a09b49a1a7219cc868aaf67e

Каков заключительный шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Объединить все построенные базисы в одну систему и построить матрицу f в полученном базисе.

Лекция 21.03.22

Note 1

61582b48320a46c3ad047eec84da3eb3

Пусть $A, A' \in \mathbb{C}^{\{c3:n \times n\}}$. Тогда матрицы A и A' называются $\{c2: \text{подобными,}\}$ если $\{c1: \text{существует невырожденная матрица } T \text{ такая, что}\}$

$$A = T A' T^{-1}.$$

$\}} \}$

Note 2

6366e6bbaa1149eb8bba346a3cc38654

Отношение подобия матриц обозначается символом $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

\sim

$\}} \}$

Note 3

1ae63106d8d0480b82ef6f9e9b3d62bb

Подобие матриц является отношением $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\}} \}$

Note 4

de743729325e43f79f35a7b8c22d5bb2

Любая $\{c2: \text{квадратная матрица}\}$ подобна $\{c1: \text{своей жордановой нормальной форме,}\}$

(следствие из $\{c3: \text{теоремы о жордановой форме}\}$)

Note 5

82aa01fcbfb7476d84662ca5802dae5b

$\{c2: \text{Две квадратные матрицы подобны}\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1: \text{их жордановы формы совпадают с точностью до перестановки клеток,}\}$

(следствие из $\{c4: \text{теоремы о жордановой форме}\}$)

Note 6

198e1f3eef67411c89f83a35ade066d2

Пусть $A, \Lambda, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = T^{-1} \Lambda T$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A^k = \{c1: T^{-1} \Lambda^k T.\}$$

Note 7

c1cf4048c475426683c811de00771765

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Тогда

$$p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k A^k, \quad \text{где } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E.$$

Note 8

3450a4591ff748cb856f4578b3cda3c2

Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Многочлен p называется аннулирующим многочленом для матрицы A , если $p(A) = 0$.

Note 9

34b1edb015384033870e10717e8bbdb2

«Теорема Гамильтона-Кэли»

Характеристический многочлен квадратной матрицы является для неё аннулирующим.