Note 1

Каков первый шаг в доказательстве любого из законов де Моргана?

> Рассмотреть произвольный элемент a, принадлежащий левой (или правой) части соответствующего равенства.

Note 2

Какова основная идея доказательства любого из законов де Моргана?

> Надо показать, что условие принадлежности произвольного элемента a левой части совпадают с таковыми для правой части.

Note 3

Как показать, что произвольное бесконечное множество A содержит счётное подмножество?

> Выбрать
>
> - a_1 из A,
> - a_2 из $A \setminus \{a_1\}$,
> - a_3 из $A \setminus \{a_1, a_2\}$,
> $\ldots$
>
> Получим счётное множество $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A$.

Note 4

Как показать, что любое бесконечное подмножество B счётного подмножества A счётно?

> Пронумеровать элементы множества B в порядке их появления в последовательности $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ элементов множества A.

Note 5

Пусть A — счётное множество, $B \in A$. Что можно сказать о множестве B?

> B не более чем счётно.

Note 6

Как показать, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно?

> Расположить элементы множеств по строкам в таблицу и пронумеровать их в порядке их появления на "побочных" диагоналях.

Note 7

Как показать, что множество $\mathbb{Q}$ счетно?

> Представить его как объединение не более чем счетного семейства не более чем счётных множеств $\{\mathbb{Q}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где
>
> $$\mathbb{Q}_q := \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Note 8

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Как можно задать биекцию $\varphi : [a, b] \to [0, 1]$?

> $$\varphi(x) = \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note 9

Как доказать, что для любого бесконечного множества A и его конечного подмножества B (пусть $|B| = m$)

$$A \setminus B \sim A?$$

> Рассмотрим произвольную последовательность
>
> $$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$
>
> несовпадающих элементов множества A такую, что первые её m элементов — это все элементы множества B. Обозначим теперь
>
> $$\varphi(x) = \begin{cases} x_{k+m}, & x = x_k, \\ x, & x \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$
>
> Тогда $\varphi : A \to A \setminus B$ — биекция, а значит $A \setminus B \sim A$.

Note 10

Как доказать, что $[0,1] \sim \mathbb{R}$?

> - $[0,1] \sim (0,1)$, поскольку $(0,1) = [0,1] \setminus \{0,1\}$,
> - $(0,1) \sim \mathbb{R}$, поскольку $\cot(\pi x)|_{(0,1)}$ — биекция.
>
> Получаем $[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R} \implies [0,1] \sim \mathbb{R}$.

Note 11

Приведите пример системы вложенных отрезков в множестве $\mathbb{Q}$ для которой не выполняется аксиома Кантора.

> Можно рассмотреть последовательность вложенных отрезков
>
> $$\{[1;2], [1{,}4;1{,}5], [1{,}41;1{,}42], [1{,}414;1{,}415], \ldots\}$$
>
> концы которых — все более и более точные десятичные приближения иррационального числа $\sqrt{2}$.

Note 12

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Note 13

Как доказать, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$?

> $$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= C_n^k \cdot \left(\frac{n+1}{k+1}\right) \\ &= C_n^k \cdot \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \\ &= C_n^k + \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= C_n^k + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= C_n^k + C_n^{k+1}. \end{aligned}$$

Note 14

Как доказать, что во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший элемент?

> По индукции:
>
> - максимум множества из одного элемента есть сам этот элемент;
> - максимум множества из $n > 1$ элемента есть либо максимум каких-либо $n - 1$ его элементов, либо значение оставшегося n-ого элемента.

Note 15

Как доказать, что во всяком непустом ограниченном сверху множестве $A \subset \mathbb{Z}$ есть наибольший элемент?

> Выберем произвольный $x_0 \in A$ и обозначим
> $$A_0 = \{x \mid x \in A \wedge x \geqslant x_0\},$$
> $$A_1 = A \setminus A_0.$$

> Тогда A_0 — конечное подмножество $\mathbb{R}$, а значит существует $\max A_0$. При этом для любого $x \in A$ имеем два случая:
>
> 1. если $x \in A_0$, то $x \leqslant \max A_0$ по определению максимума;
> 2. если $x \notin A_0$, то по построению A_0 имеем
>
> $$\forall \hat{x} \in A_0 \quad x < \hat{x},$$
>
> а значит $x < \max A_0$.
>
> В любом случае имеем $x \leqslant \max A_0$, так что $\max A_0 = \max A$ по определению.

Note 16

Как доказать, что во всяком интервале есть хотя бы одно рациональное число?

> Пусть (a, b) — интервал в $\mathbb{R}$. Тогда по аксиоме Архимеда
>
> $$\exists n \in \mathbb{N} \quad n > \frac{1}{b-a} \implies b - a > \frac{1}{n}.$$
>
> Нетрудно показать, что
>
> $$\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

Note 17

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon$, то $a = b$.

Note 18

Как доказать, что если $\forall \varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon$, то $a = b$?

> Допустим, что $a \neq b$. Тогда для $\varepsilon = |b - a| > 0$ не выполняется $\varepsilon < |b - a| \implies$ противоречие $\implies a = b$.

Note 19

Как доказать, что у любой последовательности может быть не более одного предела?

> Из определения предела
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \qquad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$
>
> Но тогда
>
> $$\begin{aligned} |a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |b - x_n| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
>
> $\implies \forall \varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon \implies a = b.$