

Лекция 07.09.22

Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

Абсолютное значение мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ так же называют порядком α .

Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

Многочленом n переменных со значениями в \mathbb{R}^m называется отображение вида

$$x \mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha},$$

где $\{c_{\alpha}\} \subset \mathbb{R}^m$ — конечное семейство и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Если $p \neq 0$, то степень многочлена p называется числом

$$\max \{|\alpha| : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

}}

Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Если $p \equiv 0$, то степень многочлена p полагают равной $-\infty$.

Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Степень многочлена p обозначается

$$\deg p.$$

}}

Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Многочлен p называется однородным, если для всех $c_{\alpha} \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Многочлен p степени не выше s , для которого

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

называется многочленом Тейлора f порядка s в точке a .

Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Многочлен Тейлора f порядка s в точке a обозначается

$$T_{a,s}f.$$

}}

Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s}f$ существует, то он единственный.

Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s}f$ существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

Разность двух многочленов есть $o(\|x - a\|^s)$, $x \rightarrow a$.

Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если

$$p(x) = o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

то $p \equiv 0$.

Note 12

f753051ba1584ac3809a7b03ecf311f7

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \rightarrow a$, то $p \equiv 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

Рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства?

Разбить p на однородные компоненты и рассмотреть $p(tx)$ как многочлен переменной t .

Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. Как представляется многочлен $p(tx)$ в доказательстве?

$$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$

где p_k — однородный многочлен степени k .

Note 15

8d6ec9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве, что нужно показать про многочлен $p(tx)$?

$$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве мы получили, что $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$ при $t \rightarrow 0$. Что дальше?

Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

Note 17

833c8cc496364d6fa95263abc312262d

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \rightarrow a$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $a \neq 0$)?

$p(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$.

Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. $T_{a,0}f$ существует тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке a .

Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. $T_{a,1}f$ существует тогда и только тогда, когда f дифференцируемо в точке a .

Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то

$$f(a + h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

}}

Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая: $m = 1$ и $m > 1$.

Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m > 1$)?

■ Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

■ Индукция по s начиная с $s = 1$.

Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, база индукции)?

■ Выразить $f(a + h)$ через дифференциал, а его через производные.

Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, индукционный переход)?

Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{ \{c2::T_{a,s}f(x)\} \} = \{ \{c1:: \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha \} \}$$

«{c4::Формула Тейлора-Пеано}»

Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ec26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

$$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq s.$$

Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{ \{c2::T_{a,s}f(x)\} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^s \frac{d_a^k f(x-a)}{k!} \} \}$$

(в терминах дифференциалов)

Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — $\{\{c2::\text{многочлен степени не выше } s,\}$
 $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \{\{c1::0.\}$$

Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}\}.\}$$

Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}\}\}$ $\{\{c6::\text{дифференцируемо } s + 1 \text{ раз на } E,\}$
 $\{\{c5::a \neq x \text{ и } \Delta_{a,x} \subset E.\}$ Тогда $\exists c \in \{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,x}\}$ для которой

$$\{\{c3::R_{a,s}f(x)\}\} = \{\{c1::\frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.\}$$

« $\{\{c7::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E ,
 $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,x}$ для которой

$$R_{a,s}f(x) = \frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции

$$t \mapsto f(a + th).$$

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$|R_{a,s}f(x)| \leq \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \frac{|d_c^{s+1}f(x-a)|}{(s+1)!}.$$

Лекция 14.09.22

Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на E , $a \neq b$ и $\Delta_{a,b} \subset E$. Тогда $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,b}$, для которой

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a).$$

}}

«Теорема о среднем»

Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций n вещественных переменных?

■ Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

■ Нет, только для функций.

Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

■ $x \mapsto (\cos x, \sin x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\|R_{a,s} f(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \cdot \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|d_c^{s+1} f(x - a)\|.$$

«Формула Тейлора-Лагранжа для отображений»

Note 6

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть $f : E \subset \{\{c5::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c5::\mathbb{R}^m\}\}$ непрерывно дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\{\{c3:: \|R_{a,s}f(x)\|\}\} \leq \{\{c2:: \frac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\|x-a\|)^{s+1},\}\}$$

где

$$M = \{\{c1:: \max_{|\alpha|=s+1} \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\|\}\} < \{\{c6:: +\infty,\}\}$$

$$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$$

Note 7

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы \mathbb{R}^{n+m} в виде $\{\{c1::(x,y),\}\}$ где $x \in \{\{c2::\mathbb{R}^n\}\}$, $y \in \{\{c2::\mathbb{R}^m\}\}$.

Note 8

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть $f : E \subset \{\{c4::\mathbb{R}^{n+m}\}\} \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}^m\}\}$ и существует $\psi : \{\{c3::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c3::\mathbb{R}^m\}\}$ такая, что $\{\{c2::$

$$f(x,y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

$\}\}$ то ψ называют $\{\{c1::$ неявным отображением, порождённым уравнением $f(x,y) = 0$. $\}\}$

Note 9

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x,y) = 0$,

$$f'_x(a) := \{\{c1:: \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \}\} \sim \{\{c2:: m \times n.\}\}$$

Note 10

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x, y) = 0$,

$$f'_y(a) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a) \right] \sim \{m \times m\}$$

Note 11

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^s(E)$. Тогда если

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

то существуют такие $\delta > 0$ и $\psi \in C^s(V_\delta(x^0))$, что

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x) \\ \forall (x, y) \in V_\delta(x_0, y_0).$$

«Теорема о неявном отображении»

Note 12

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение ψ , введённое в теореме о неявном отображении называется неявным отображением, порождённым уравнением $f(x, y) = 0$ в окрестности точки (x^0, y^0) .

Note 13

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

$$d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\dots) = 0.$$

Note 14

dd7bb23f22a042dab6dacf623aca0455

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x^0, y^0) \in E$. Если в окрестности точки (x^0, y^0) уравнение $f(x, y) = 0$ порождает неявную функцию, то f называется локально разрешимым в точке (x^0, y^0) .

Note 15

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Если f локально разрешимо в любой точке E , то f называется локально разрешимым на E .

Лекция 21.09.22

Note 1

434affe9da3e443d839fa7d6af1b180

Чем определение экстремума для функций n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

■ Ничем.

Note 2

2efcc79ba51544848aacbd7da7dfa4b1

В определении экстремума функции n вещественных переменных, для каких x требуется выполнение соответствующего неравенства?

■ $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D(f).$

Note 3

30ab720865e54af19fcc351cfa78d165

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a . Точка a называется седловой, если $d_a f \equiv 0$ и a — не экстремум.

Note 4

27a6b8777b9b4bb9919dcfa31d963432

Тожественно нулевой оператор обозначается \mathbb{O} .

Note 5

43fd5e0b1a8b410a887c991151fac7e0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

Note 6

834aecf3894642098d0ddc0256091117

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

«Необходимое условие экстремума»

Note 7

e5cfde8512814dbbaed4676461636b0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Точку a называют стационарной для f , если $d_a f \equiv 0$.

Note 8

c658e89677264e7bb7317334e026304e

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных?

Рассмотреть функции $t \mapsto f(a + te^k)$.

Note 9

02b9316ee1f84262ae08eebecbe71c2b

В доказательстве необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных, мы положили

$$F_k(t) = f(a + te^k).$$

Что нужно показать про функцию F_k ?

0 — точка экстремума F_k и рассмотреть $F'_k(0)$.

Note 10

ec6b1873ffe44cc48c87520ef5bf2f10

Какие случаи не охватываются необходимым условием экстремума?

Когда дифференциал сохраняет знак, но не является положительно или отрицательно определённым.

Note 11

091dad1735594dfa8923e46c5a461ab0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Тогда если $d_a f \equiv 0$. Тогда если $d_a^2 f$ положительно определён, то a — точка строгого минимума f .

Note 12

a87f168ae18d4f65b7595866b9407e8d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $d_a^2 f$ отрицательно определён, то a — точка строгого максимума f .

Note 13

4643a84f76b84c9bbc34e220ec2196c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\{d_a^2 f\}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то f не имеет экстремума в точке a .

Note 14

41fcd97c432427e893b7c1e3b850374

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица квадратичной формы $d_a^2 f$ называется матрицей Гессе f в точке a .

Note 15

36db8ae7809a4dcbb6f350f51ca0a54c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица Гессе f в точке A обозначается $H(f)$.

Note 16

5ffaf8568eaa4a8fbb3815c215d20c25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица Гессе f в точке a имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \sim n \times n.$$

Note 17

56bf1e23f53c4cae8d62101295cb0a9b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a .

(в терминах $H(f)$)

Note 18

b78c95a2236a4edf964b8e2a29238dae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a . В чём ключевая идея доказательства?

Зафиксировать одну компоненту приращения $d_a^2 f$ и показать, что он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Note 19

535062161d6044bdb41631a3ae479223

Дополнительные равенства, которым должны удовлетворять точки из области определения f в определении понятия условного экстремума называются уравнениями связи.

Note 20

7dc4fe4c435946a091efc32d6a120ec1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in E$, $m < n$. Если a является точкой экстремума сужения f на множество

$$\{x \in E \mid \Phi(x) = 0\},$$

то a называется точкой условного экстремума f , подчинённого уравнениям связи $\Phi(x) = 0$.

Note 21

efdc5b1690a340499b26b776ada24e98

Точку условного экстремума так же называют точкой относительного экстремума.