2. Упорядоченные множества

Note 1

f30a93a82cb7436dbf01a4f27b739d36

Каким одним требованием можно заменить симметричность и транзитивность в определении отношения эквивалентности?

> Евклидовость.

Note 2

d8936dde76084fbfaa621700f57c7cd4

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. {{c2::Множество классов эквивалентности R}} называется {{c1::фактормножеством множества A по отношению R.}}

Note 3

e212c805b47c40c48f35bdbd5130db2b

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::называется отношением частичного порядка,}} если {{c1::оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.}}

Note 4

2a3a6e89d50d41068b22bfd1c595b39a

Отношение {{c2::частичного порядка}} обычно обозначается символом {{c1::$\leqslant$.}}

Note 5

90faa1ffef764c7d808d6757d97dfa4b

Множество A с {{c2::заданным на нём отношением частичного порядка}} называется {{c1::частично упорядоченным множеством.}}

Note 6

4157aa1725c244a58f3e32a92a0937bb

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что {{c2::x и y сравнимы,}} если {{c1::$x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.}}

Note 7

e75ca87d267f4673a53c15a0e7adcccb

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::отношением линейного порядка,}} если {{c1::R — отношение частичного порядка и любые $x, y \in A$ сравнимы.}}

Note 8

79eba4d41c8b4aafa75c4a7c56268adb

Множество A с {{c2::заданным на нём отношением линейного порядка}} называется {{c1::линейно упорядоченным множеством.}}

Note 9

e914e0e523ee44139c021af45c63a712

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что {{c2::$x < y$,}} если {{c1::$x \leqslant y$ и $x \neq y$.}}

Note 10

c264501d4458400e8b0073eac66b95fe

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение {{c2::$<$}} называют отношением {{c1::строгого}} порядка.

Note 11

ec44ba694d2541deaae260221aaafdc5

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение {{c2::$\leqslant$}} называют отношением {{c1::нестрого}} порядка.

Note 12

962a3744a3cc4153bd9317aab2cb46cb

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $<$ как {{c1::«меньше».}}

Note 13

850b05ff29334d869b6a9c7e96eef9a9

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $\leqslant$ как {{c1::«меньше или равно».}}

Note 14

0e5d3d3ef97541309f99f132d7d20073

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда {{c2::$x \leqslant y$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::$x < y$}} или {{c1::$x = y$.}}

Note 15

9b75255301e143ba94b347847852b33f

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ рефлексивным?

▌ Нет.

Note 16

fcc7c32a4ca7455dbcd3260a478ecd97

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ антирефлексивным?

▌ Да.

Note 17

2d5bf110950f42b4bc343f143b82dfc8

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ транзитивным?

▌ Да.

Note 18

378780d3b9d74367a71bdf0fb3f67e9f

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ асимметричным?

▌ Да.

Note 19

f4e2e2fe9c8140a6b8fcda896dd5da35

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если {{c2::$x \leqslant y \leqslant x$,}} то {{c1::$x = y$.}}

Note 20

1ca369e310d2477782f82089ab512891

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $x \leqslant y \leqslant x$, то $x = y$. В чём ключевая идея доказательства?

Антисимметричность.

Note 21

0af7ee8e9a5c4ad88db6ea371bee9527

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Почему не стоит читать $x \leqslant y$ как «x не больше y»?

$\overline{x \geqslant y} \not\Longrightarrow x \leqslant y$, если порядок не линеен.

Note 22

414d948920404634bec1fec01bd9b0b2

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::называется отношением предпорядка,}} если {{c1::оно рефлексивно и транзитивно.}}

Note 23

5a0d3dae2151442795c045fdb2e1ba7f

Пусть $\leqslant$ — {{c3::предпорядок}} на множестве A. Тогда $\leqslant$ задаёт естественное {{c2::отношение частичного порядка}} {{c1::на фактор множестве A по отношению

$$x \leqslant y \text{ и } y \leqslant x.$$

}}

Note 24

ac3052b941bd4ae981f8d3559789c7e0

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, {{c3::$B \subseteq A$.
}} {{c2::Частичный порядок $(\leqslant) \cap B^2$}} называется {{c1::частичным порядком на B, индуцированным из A.}}

Note 25

01c0ab122f3d4940ab98f766e6b357c2

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. {{c2::Частичный порядок на B, индуцированный из A,}} обозначается {{c1::$\leqslant_B$.}}

Note 26

2a1949206b6843f8859d96feb5f3d640

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. Если {{c2::$\leqslant$ линеен,}} то {{c1::и $\leqslant_B$ линеен.}}

Note 27

76f003723d594be4bb2f9df3ea565469

Пусть X и Y — два множества. Что есть множество $X + Y$?

> Объединение непересекающихся копий X и Y.

Note 28

c18350dfc5244bddb59d2f27a28a33ae

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y пересекаются, то как они разделяются в $X + Y$?

> Элементы из Y записываются с чертой (как вариант).

Note 29

b9a67a4ebd2542d6b6cf86b0d4505d81

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как задаётся порядок на $X + Y$?

> Внутри X и Y порядок обычный и $x \leqslant \overline{y}$.

Note 30

caa0e9e0bd594f80aff6ab6d1711059e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. При каком условии порядок на $X + Y$ будет линейным?

> Только если порядки на X и Y линейны.

Note 31

2f6406e74c4443c191caa1532527294f

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определятся покоординатное сравнение на $X \times Y$?

> Первая координаты $\leqslant_X$ и вторые $\leqslant_Y$.

Note 32

fec1ac2eb92d496e9677d8011742333e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. В чём недостаток покоординатного сравнения на $X \times Y$?

> Он не линеен.

Note 33

f80cf291316d430489b6ed3f5ea1f116

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определятся порядок на $X \times Y$?

> Аналогично лексикографическому порядку.

Note 34

a3950be00a93447ba48cc93e24fc1436

Сколько различных линейных порядков на множестве из n элементов?

> $n!$

Note 35

5dc17edbd7424921a6801b645ec91847

Всякий ли частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного?

> Да.

Note 36

8ee88fb845d94611a7bad34e78b447b0

Всякий ли частичный порядок на бесконечном множестве можно продолжить до линейного?

> Да.

Note 37

d5d18db2bf744c3f95cc4c390a2b63fa

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного. В чём ключевая идея доказательства?

> По индукции выбирать минимальный элемент.

Note 38
53391ec9f26040328fc75be035ca15c7

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наибольшим?

> Тот, что больше любого другого элемента.

Note 39
1fbc4c3d075344fb8889b64fc11d73cc

Какой элемент частично упорядоченного множества называется максимальным?

> Тот, для которого не существует большего элемента.

Note 40
ba81375ada8245dc86f019d40cfc73b2

При каком условии понятия наибольшего и максимального элемента совпадают?

> Если порядок линеен.

Note 41
df72779f7c5049dd82bb27f993c2a177

Сколько наибольших элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

> Не более одного.

Note 42
dd861e24b4c246bc9769d4d9d8c1684a

Сколько максимальных элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

> Сколь угодно.

Note 43
fe2b7f694c644bfbbab346e18477d765

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наименьшим?

> Тот, что меньше любого другого элемента.

Note 44

f42b3c3570904de282e2a8bfe96a337a

Какой элемент частично упорядоченного множества называется минимальным?

> Тот, для которого не существует меньшего элемента.

Note 45

0d235255b51b40e2970c6f0c00ee671e

Любые два различных максимальных элемента {{c1::не сравнимы.}}

Note 46

e6a3453de9ae404f80ca583e6ea036c5

Пусть X — частично упорядоченное множество и {{c2::X конечно.}} Для любого $x \in X$ найдётся максимальный элемент {{c1::$\geqslant x$.}}