Лекция 09.11.22

Note 1

e60e9a5778ca41aaabad4a4a7e6c4fea

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

> Обыкновенные; в частных производных.

Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

{{c2::Обыкновенные дифференциальные уравнения}} — это {{c1::уравнения относительно функции одной переменной и её производных.}}

Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

"{{c2::Обыкновенные дифференциальные уравнения}}" сокращается как "{{c1::ОДУ.}}"

Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

{{c2::Уравнения в частных производных}} — это {{c1::уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.}}

Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

{{c2::Уравнения в частных производных}} в русскоязычной среде так же называют {{c1::уравнениями математической физики.}}

Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

"{{c2::Уравнения в частных производных}}" сокращается как "{{c1::УрЧП.}}"

Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

{{c2::Порядком}} дифференциального уравнения называется {{c1::порядок старшей производной, в него входящей.}}

Note 8

69a06ae8b8d1413f84c38cc0ab521158

Является ли

$$F(x, y) = 0,\ y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

> Нет, потому что нет производных.

Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется {{c2::областью,}} если {{c1::оно открыто и связно.}}

Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f63182

ОДУ первого порядка называется {{c2::разрешённым относительно производной,}} если оно имеет вид {{c1::

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

}} где f — {{c2::функция на области в $\mathbb{R}^2$.}}

Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция y называется {{c2::решением ОДУ на множестве X,}} если {{c1::в любой точке X её подстановка её значений в ОДУ имеет смысл и приводит к верному равенству.}}

Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть y — {{c3::решение ОДУ.}} {{c1::График y}} называется {{c2::интегральной кривой этого уравнения.}}

Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

> Сколь угодно много.

Note 14

76c92fefc3414e8da3c06f458e9e80ee

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

> Найти решение, отвечающее начальным условиям.

Note 15

94e8aba670fa45eab4fae8fee8d23568

Что есть "начальные условия" из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

> $y(x_0) = y_0$ для фиксированных x_0, y_0.

Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения (x_0, y_0) в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

> Начальные данные.

Note 17

aae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

> Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0)?

> Интервал, включающий x_0.

Note 19

c6f2ec8c4ae142118b3840ddb828a96b

Как называется теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

> Теорема Пеано.

Note 20

3623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

> ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 21

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

> Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

Note 22

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

> Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

Note 23

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

> Через любую точку области проходит интегральная кривая.

Note 24

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,?$$

> Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

Note 25

7dbfe4396c5545578771b6066869de5a

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Они равны на некоторой $V_\delta(x_0)$.

Note 26

c197734ceb654182bc3221591296e2f6

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,.$$

Тогда если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то {{c1::любая точка области является точкой единственности.}}

Note 27

33930ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. При каком условии задача Коши для $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ однозначно разрешима в любой точке?

> f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны.

Note 28

785b85c103cb446090843629aba6f668

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют особым решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

Note 29

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как называется решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, любая точка графика которого не является точкой единственности?

> Особое решение.

Note 30

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют общим решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

Note 31

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как задаётся общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Отображение $\Phi(x, c)$, где c — параметр, x — переменная.

Note 32

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют частным решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Одно из решений, входящих в некоторое общее решение.

Note 33

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

{{c2::Векторное поле}} — это {{c1::отображение из линейного пространства в себя.}}

Note 34

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a36

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

> ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 35

bf5a5b553b8b4f74905e400cce49df6c

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют полем направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

Note 36

7f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как строится визуальное представление поля направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Через каждую точки сетки проводится соответствующе наклонённый отрезок.

Note 37

a9509cb3d319496ca4f8ce25b5b988b2

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Гладкая кривая является {{c2::интегральной кривой}} уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ {{c3:: тогда и только тогда, когда}} {{c1::в любой точке она касается соответствующего элемента поля направлений.}}

(в терминах поля направлений)

Note 38

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называется изоклиной уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

Note 39

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

- $f(x, y) = c$ для $c \in \mathbb{R}$.

Лекция 16.11.22

Note 1

84332aa7764648b3b6b73355b0fb7064

Пусть {{c4::G — область в $\mathbb{R}^2$.}} Тогда выражение вида

$$\text{{{c2::}} m(x,y) \cdot dx + n(x,y) \cdot dy = 0\,, \text{}}} \quad \text{где {{c3::}} m, n : G \to \mathbb{R}\,, \text{}}}$$

называется {{c1::ОДУ первого порядка в симметричной форме.}}

Note 2

0a8383be5d30458db9ab476e9ea34e84

Что называется решением ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Решение любого из порождённых ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 3

89d64566d77b4dc7b52af28eab7dae35

Какие два уравнения порождает ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> $$\frac{dy}{dx} = \cdots \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \cdots$$

Note 4

0981a7837c7644328e3f6ccbd939ec02

Всегда ли ОДУ первого порядка в симметричной форме порождает два уравнения?

> Нет.

Note 5

0bf3be66da26454f981de93a9f57fdb4

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,.$$

{{c2::Точку, в которой и m, и n обращаются в 0,}} называют {{c1::особой точкой этого уравнения.}}

Note 6

4fb058ed5261465fbcf62958e5b93441

Как ставится задача Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Найти решение для любой из порождённых задач Коши для ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 7

0d205d054d3843c19a806774476762c0

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0\,.$$

Что называется неособой точкой этого уравнения?

> Точка, в которой либо m, либо n не обращается в 0.

Note 8

61ddfc362e5649ab9020c85dd47f4454

При каком условии ОДУ в симметричной форме гарантированно имеет решение задачи Коши?

> Если точка не является особой и функции при dx и dy непрерывны.

Note 9

0ad4cca0576a409cbb3871385860853c

Что можно сказать про ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0\,,$$

если m, n непрерывны?

> Оно имеет решение задачи Коши для любой неособой точки.

Note 10

3d3a825102e94d268fceedc112aee02b

В чём основная идея доказательства теоремы о достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Теорема Пеано для порождённого ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 11

84670525aec14b12ab1c60bc7c6cb90f

Какое есть “тонкое” место в доказательстве достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Применить теорему о стабилизации непрерывной функции для неравенства нулю в какой-то окрестности.

Note 12

e22e81451b75462bb23f42da429d0822

Какое есть дополнение к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Если обе определяющие функции не обращаются в ноль, то решение “двойственно.”

Note 13

c5937908ffc3421b88d12e29cd18618a

В каком смысле двойственно решение задачи Коши в дополнении к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Обратная функция существует (на интервале) и является решением второй из порождённых задач Коши.

Note 14

c77c237173dd4909bef0d7fbb475945a

Пусть для $m, n \in C(G)$ дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,,$$

и $y = \varphi(x)$ — решение задачи Коши в т. (x_0, y_0). Почему φ обратима (на интервале)?

> $\varphi' \neq 0$ и следствие из теоремы Дарбу о строгой монотонности.

Note 15

1408fcbdb21643b29a526f5c9c698052

Что называется точкой единственности для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Точка, являющаяся точкой единственности для обеих из порождённых задач Коши.

Note 16

f037d477228b4d1a983be67a181f7fc6

Каково условие для единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Функции при dx и dy являются гладкими и не равны нулю в точке.

Note 17

b4d211a3083b4bfca552c183c7cd0ce8

Почему в теореме о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме мы требуем неравенство нулю функций при dx и dy?

> Иначе какая-то из задач Коши не имеет смысла.

Note 18

91cb20330134439695809b01acd7909f

В каком смысле единственно решение задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме в теореме о единственность?

> Точка является точкой единственности.

Note 19

c34ebe00830e4594b9f2df519066c9f8

В чём ключевая идея доказательства теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Теорема о единственности для ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 20

83eb2e7882ac49fd950bc3c5d734f88c

Если (x_0, y_0) является точкой единственности для ОДУ первого порядка, то через неё проходит {{c1::единственная интегральная кривая.}}

Note 21

931e9e5942144396af4bc98f8d917c45

В каком смысле единственна интегральная кривая, проходящая через точку единственности для ОДУ первого порядка?

> Любые две интегральные кривые совпадают на какой-то окрестности.

Note 22

67befaeaa43b4d1daf13c54d0f3c9a18

Чем в первую очередь является интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Гладкая функция на всей области.

Note 23

6cd34528c11649468f156e7160361bc4

Какому соотношению по определению должен удовлетворять интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,?$$

> $$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ m & n \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Note 24

4e43bac3e13f49e890052b539cb99a0a

Интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

называется {{c2::гладким,}} если {{c1::$\nabla u \neq 0$ на всей области.}}

Note 25

d57e85cf8770406ca4be0153888980ff

Каково основное свойство гладкого интеграла u ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Решение уравнения $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ есть решение задачи Коши в (x_0, y_0).

Note 26

750fae6a0be8412885d8d65ccd8b532f

Пусть u — гладкий интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Для каких точек решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

есть решение задачи Коши в (x_0, y_0)?

> Для неособых.

Note 27

3ec100db172a42a4821a9c2a59df0cdc

В контексте ОДУ первого порядка в симметричной форме, для какого объекта u решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

гарантированно является решением задачи Коши в неособой точке (x_0, y_0)?

> Гладкий интеграл.

Note 28

2d035fe05f234a678fb45f0a77098ee9

В чём ключевая идея доказательства теоремы о представлении решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме через его интеграл?

> Теорема о неявной функции для $u(x, y) - u(x_0, y_0) = 0$.

Note 29

8ee64b4f58d64f3e9c544c3728edc66c

Что называется общим интегралом ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Выражение $u(x, y) = c$, где u — интеграл уравнения.

Note 30

4b9745c311764d9aa57c35f678ca0b4b

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Как называется выражение

$$u(x, y) = c\,?$$

> Общий интеграл.

Note 31

d24cae635b5149fca8646f3627b9bf90

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Что можно сказать о произвольном решении $y(x)$ этого ОДУ?

> $u(x, y(x)) \equiv const$ на всём интервале.

Note 32

37ad7fd23ba04b2b8bf1e5946420d716

Каким свойством должен должен обладать интеграл u ОДУ первого порядка в симметричной форме, чтобы для любого решения $y(x)$ было верно

$$u(x, y(x)) \equiv const\,?$$

> Никаким.

Лекция 23.11.22

Note 1

3ae25bc9f84c408eb1dfcf3dc3b35ed1

Какое выражение называется ОДУ с разделёнными переменными?

> $m(x)dx + n(y)dy = 0.$

Note 2

d625dac9c8dd43e0a5fa91bdeec1f8da

На каких множествах определены функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

> Некоторые два интервала.

Note 3

ec328e8cd19d4c57a27c32e263138ce7

На какой области рассматриваются ОДУ с разделёнными переменными?

> Декартово произведение областей определения функций-коэффициентов.

Note 4

5cac08cbed25499493dc1b18d0df3ce1

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

> Непрерывными.

Note 5

afa181edb7c84bdea0ac73d5a39b338e

Чем примечательны ОДУ с разделёнными переменными?

> У него есть общий интеграл в известной форме.

Note 6

8422d34d16d74daba0b88c018148285d

Как выражается интеграл $u(x, y)$ ОДУ с разделёнными переменными

$$m(x)dx + n(y)dy = 0\,?$$

> $$\int_{x_0}^{x} m + \int_{y_0}^{y} n\,.$$

Note 7

8dbb27c86a01499b83be44a189e22c09

При каком условии интеграл ОДУ с разделёнными переменными является гладким?

> Если нет особых точек.

Note 8

af655cb8e5aa41348f1b128abe72c8f2

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ с разделёнными переменными?

> Любая точка из области определения.

Note 9

a7ee1153931c46d59a1a71e028b00b0a

Как на практике задаётся общий интеграл ОДУ с разделёнными переменными?

> С неопределёнными интегралами.

Note 10

dd91a079474849748c001328b0709b66

Что называется ОДУ с разделяющимися переменными?

> ОДУ в симметричной форме, у которого коэффициенты представляются как произведения функций одной переменной.

Note 11

4405ce3a7fc64f66a33baddd2945d5e2

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделяющимися переменными?

> Непрерывными.

Note 12

7007d702730d4b4bb53ea6b9fc990bfa

Какие ОДУ называются уравнениями в полных дифференциалах?

> Оду в симметричной форме, представимые в виде $du = 0$, где u — гладкая функция на области.

Note 13

a18c66c2343a4d1ab182426f9393edac

Представимость $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ в виде $du = 0$ в определении ОДУ в полных дифференциалах означает, что

{{c1::

$$\nabla u = (m, n).$$

}}

Note 14

5c173b6af64a42a48e1a9e79cf27b712

Чем примечательны ОДУ в полных дифференциалах?

> У них есть общий интеграл в известной форме.

Note 15

ce9b4078bbd64be0893565bf2b878c9d

Как выражается интеграл ОДУ в полых дифференциалах?

> Функция u из определения и есть интеграл.

Note 16

d545e5481d8648c084c87047ded49bc4

Как определить, является ли уравнение ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

ОДУ в полных дифференциалах?

> Является $\iff m'_y = n'_x$.

Note 17

385f908cec6342339c9a708dc9e734a5

Что можно сказать о ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,,$$

если $m'_y \equiv n'_x$?

> Это ОДУ в полных дифференциалах.

Note 18

2d3ee1ddf95c48f0b570c8fcbf997605

Какими должны быть функции-коэффициенты ОДУ в симметричной форме в критерии ОДУ в полных дифференциалах?

> Гладкими (т.е. из C^1.)

Note 19

e5db36f5f9f8404e8d347d5f20461e67

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (необходимость)?

> Достаточное условие равенства вторых производных.

Note 20

188e7ec06df04d23872b628d4ae87856

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (достаточность)?

Явно предоставить интеграл u.

Note 21

de914195b18342b8bf511d5f61cfb004

Как выражается интеграл ОДУ в полных дифференциалах

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,?$$

$$\int_{x_0}^{x} m(\,\cdot\,, y) + \int_{y_0}^{y} n(x_0, \,\cdot\,)\,.$$

(или, аналогично, y_0 и x)

Note 22

e0c076b820de4d93b46b1b2098c87e2c

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ в полных дифференциалах?

Любая точка из области определения.

Note 23

e55223eb41114fe092beeffc38509358

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

Функция и её производная по параметру непрерывны.

Note 24

766a804de4ef42379f53963b92bd5472

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, f'_y \in C(E)$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\,dx\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,.\text{\}\}}$$

Семинар 10.11.22

Note 1

53d901a2d9e34a6f8caeebc01a48fbeb

Как решаются ОДУ с разделяющимися переменными?

> Собрать все с x и все с y с разных сторон и проинтегрировать.

Note 2

6ec2b60aaf164b1ab14b191fd853fc08

Какое есть "тонкое" место при решении ОДУ с разделяющимися переменными?

> Отдельно рассматривать случай равенства нулю при делении.

Note 3

56d9aa3e00934312bd51c5b2873b2733

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция f называется {{c2::однородной степени q,}} если {{c1::

$$f(\lambda x) = \lambda^q f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

}}

Note 4

99f9700eabbf4ae6aa184065479b2aab

Какие ОДУ называются однородными?

> Зависит от типа ОДУ.

Note 5

1a1f83b72fc544d0bbc883e1d551a4ab

Какие ОДУ первого порядка в симметричной форме называются однородными?

> Обе определяющие функции являются однородными одной степени.

Note 6

f1642f7a316a46b7873c4f05c9aabc18

Какие ОДУ первого порядка, разрешённые относительно производной, называются однородными?

> Определяющая функция является однородной нулевой степени.

Note 7

575d0a91af124785806cfd53d6872fe0

Как можно показать, что ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной является однородным?

> Представить правую часть как функцию от $\frac{y}{x}$.

Note 8

8211f8127d8b4dc38252a59d920e70b8

Как решаются однородные ОДУ?

> $y = tx$ и выразить dy.

Note 9

1a7488f29ba54697ac88b71b8158f763

Почему для однородных ОДУ работает подстановка $y = tx$?

> Из однородности выносится и сокращается x.