

Лекция 07.09.22

Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

Абсолютное значение мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ так же называют порядком α .

Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

Многочленом n переменных со значениями в \mathbb{R}^m называется отображение вида

$$x \mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha},$$

где $\{c_{\alpha}\} \subset \mathbb{R}^m$ — конечное семейство и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Если $p \neq 0$, то степень многочлена p называется числом

$$\max \{|\alpha| : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

}}

Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Если $p \equiv 0$, то степень многочлена p полагают равной $-\infty$.

Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Степень многочлена p обозначается

$$\deg p.$$

}}

Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ — многочлен. Многочлен p называется однородным, если для всех $c_{\alpha} \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{a \in \text{Int } E\}$ $\{s \in \mathbb{Z}_+\}$ Многочлен p степени не выше s , для которого $\{$:

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

$\}$ называется $\{$ многочленом Тейлора f порядка s в точке a . $\}$

Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Многочлен Тейлора f порядка s в точке a обозначается $\{$:

$$T_{a,s}f.$$

$\}$

Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s}f$ существует, то он $\{$ единственный. $\}$

Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s}f$ существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

■ Разность двух многочленов есть $o(\|x - a\|^s)$, $x \rightarrow a$.

Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть p — многочлен $\{$ степени не выше s , $\}$ $\{a \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда если

$$p(x) = o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

то $\{p \equiv 0\}$

Note 12

f753051ba1584ac3809a7b03ecf311f7

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \rightarrow a$, то $p \equiv 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Разбить p на однородные компоненты и рассмотреть $p(tx)$ как многочлен переменной t .

Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. Как представляется многочлен $p(tx)$ в доказательстве?

$$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$

■ где p_k — однородный многочлен степени k .

Note 15

8d6ec9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве, что нужно показать про многочлен $p(tx)$?

$$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \rightarrow 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве мы получили, что $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$ при $t \rightarrow 0$. Что дальше?

Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

Note 17

833c8cc496364d6fa95263abc312262d

Пусть p — многочлен степени не выше s , $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \rightarrow a$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $a \neq 0$)?

$p(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$.

Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. $T_{a,0}f$ существует тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке a .

Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. $T_{a,1}f$ существует тогда и только тогда, когда f дифференцируемо в точке a .

Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда если f s раз дифференцируемо в точке a , то все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a .

$$f(a + h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая: $m = 1$ и $m > 1$.

Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m > 1$)?

■ Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

■ Индукция по s начиная с $s = 1$.

Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a + h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, база индукции)?

■ Выразить $f(a + h)$ через дифференциал, а его через производные.

Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a , то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \rightarrow 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, индукционный переход)?

Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

«Формула Тейлора-Пеано»

Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ec26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

$$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq s.$$

Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{k=0}^s \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}.$$

(в терминах дифференциалов)

Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — $\{\{c2::\text{многочлен степени не выше } s,\}$
 $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \{\{c1::0.\}$$

Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}.\}$$

Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}\} \{\{c6::\text{дифференцируемо } s+1 \text{ раз на } E,\}$
 $E,\}$ $\{\{c5::a \neq x \text{ и } \Delta_{a,x} \subset E.\}$ Тогда $\exists c \in \{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,x}\}$ для которой

$$\{\{c3::R_{a,s}f(x)\} = \{\{c1::\frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.\}$$

« $\{\{c7::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}$ »

Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

В чём ключевая идея доказательства формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции

$$t \mapsto f(a + t(x - a)).$$

Note 33

c38571e3a7ac499e984544d7e1cb11de

В доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных, что нужно показать про функцию

$$F(t) = f(a + t(x - a))?$$

$$F^{(n)}(t) = d_{a+t(x-a)}^n(x-a).$$

Note 34

7f5a03f5166f49b497d15704c438d38a

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных показать, что

$$F^{(n)}(t) = d_{a+t(x-a)}^n(x-a)?$$

По индукции.

Note 35

fbe5728e68fa4357ac80eb83d92039eb

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных преобразуется выражение

$$(F^{(n-1)})'(t)?$$

Как $d_t F^{(n-1)}(1)$.

Note 36

af12b84501e247f4a5f10dc1858bed67

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных представляется отображение

$$t \mapsto d_{a+t(x-a)}^n(x-a)?$$

Как композиция дифференциала на приращении и экстраполирующей функции.

Note 37

f845965a42004f789787a9030d7bc8a9

В доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных, как применяется одномерная формула Тейлора-Лагранжа к вспомогательной функции?

■ Для остатка $R_{0,s}F(1)$.

Note 38

f5319b0cf6d14e598448bc9db8842901

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\|R_{a,s}f(x)\| \leq \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \frac{|d_c^{s+1}f(x-a)|}{(s+1)!}.$$

Лекция 14.09.22

Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на E , $a \neq b$ и $\Delta_{a,b} \subset E$. Тогда $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,b}$, для которой

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a).$$

}}

«Теорема о среднем»

Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций n вещественных переменных?

■ Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

■ Нет, только для функций.

Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

■ $x \mapsto (\cos x, \sin x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\|R_{a,s} f(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \cdot \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|d_c^{s+1} f(x - a)\|.$$

«Формула Тейлора-Лагранжа для отображений»

Note 6

5c06031a81b94fd487c37098de2b01a3

Для каких отображений формула Тейлора-Лагранжа гарантированно даёт конечную оценку остатка $R_{a,s}f(x)$?

Для $s + 1$ раз непрерывно дифференцируемых на области определения.

Note 7

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо $s + 1$ раз на E , $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\|R_{a,s}f(x)\| \leq \frac{M}{(s+1)!} (\sqrt{n} \|x - a\|)^{s+1},$$

где

$$M = \max_{|\alpha|=s+1} \sup_{c \in \Delta_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\| < +\infty, \\ (\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$$

Note 8

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы \mathbb{R}^{n+m} в виде (x, y) , где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Note 9

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ и существует $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ такая, что

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

то ψ называют неявным отображением, порождённым уравнением $f(x, y) = 0$.

Note 10

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x, y) = 0$,

$$f'_x(a) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \sim m \times n.$$

Note 11

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x, y) = 0$,

$$f'_y(a) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a) \right] \sim \{c2: m \times m.\}$$

Note 12

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть $f : E \subset \{c4: \mathbb{R}^{n+m}\} \rightarrow \{c4: \mathbb{R}^m\}$, $\{c5: f \in C^s(E).\}$ Тогда если $\{c1:$

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

$\}$ то существуют такие $\{c2: \delta > 0$ и $\psi \in C^s(V_\delta(x^0)),\}$ что

$$\begin{aligned} \{c3: f(x, y) = 0 &\iff y = \psi(x)\} \\ \forall (x, y) \in \{c6: V_\delta(x_0, y_0).\} \end{aligned}$$

« $\{c7: \text{Теорема о неявном отображении}\}$ »

Note 13

ca552c41867740d9bf467700d3274414

Какой вид порождающего уравнения рассматривается в теореме о неявном отображении?

■ Равенство нулю вещественного отображения.

Note 14

6f8e8db949a545678fdb1cf13828d902

Какое ограничение накладывается на сигнатуру порождающего отображения в теореме о неявном отображении?

■ Число аргументов строго больше числа координат.

Note 15

2bdb39be9b80462191f784b3613ac9bf

Почему в теореме о неявном отображении число аргументов порождающего отображения должно быть строго больше числа его координат?

Число координат есть число порождаемых функций, так что должно остаться место и для переменных.

Note 16

8ba5e8c5d3884e5f871ed7aba1938b2a

Как представляются векторы из области значений порождающего отображения в теореме о неявном отображении?

Как пары (x, y) векторов содержащих, соответственно, независимые и зависимые переменные.

Note 17

8ff97b14e5a448b092aab1a7bfb4cfcb

Какому классу должно принадлежать порождающее отображение в теореме о неявном отображении?

s -раз непрерывно дифференцируемо, $s \geq 1$.

Note 18

e67993c2ee9347a38229d7c445c8cf8

Какая точка рассматривается в теореме о неявном отображении?

Точка, удовлетворяющая связывающему уравнению.

Note 19

7dd93438429b457e8ef57384cd27137d

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о неявном отображении?

В рассматриваемой точке невырождена матрица производных порождающего отображения по зависимым переменным.

Note 20

4b7ceaa04f6e489aafffd4b928eee4cb

Что мы заключаем из теоремы о неявном отображении?

Уравнение локально разрешимо в рассматриваемой точке.

Note 21

b99e8f1f32574e73af9bed27b26dbf3b

Что в теореме о неявном отображении дополнительно утверждается про порождённое неявное отображение?

Она того же класса гладкости, что и порождающее отображение.

Note 22

cc9235f618844c2199e11c98dcd64401

В теореме о неявном отображении, сколько координат имеет порождённое неявное отображение?

Столько же, сколько было уравнений связи (т.е. координат порождающей функции.)

Note 23

2a4e89e19d0f47cf92219ef9b6007711

В теореме о неявном отображении, сколько аргументов имеет порождённое неявное отображение?

Число аргументов порождающего отображение минус число его координат.

Note 24

e7ddb79889c457692641b48f1725223

Каково число порождаемых функций в теореме о неявном отображении?

Столько же, сколько было уравнений связи (т.е. координат порождающей функции.)

Note 25

acda34460aea4a0bbc83f35a69256b55

Как можно сформулировать утверждение теоремы о неявном отображении в терминах зависимости аргументов связывающего отображения?

Часть аргументов локально выражается через остальные из заданного уравнения.

Note 26

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение ψ , введённое в теореме о неявном отображении называется \llcorner c1: неявным отображением, порождённым уравнением $f(x, y) = 0$ в окрестности точки (x^0, y^0) . \lrcorner

Note 27

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

$$\llcorner d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\dots) = 0.$$

Note 28

dd7bb23f22a042dab6daf623aca0455

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x^0, y^0) \in E$. Если \llcorner c2: в окрестности точки (x^0, y^0) уравнение $f(x, y) = 0$ порождает неявную функцию, \lrcorner то f называется \llcorner c1: локально разрешимым в точке (x^0, y^0) . \lrcorner

Note 29

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Если \llcorner c2: f локально разрешимо в любой точке E , \lrcorner то f называется \llcorner c1: локально разрешимым на E . \lrcorner

Лекция 21.09.22

Note 1

434affe9da3e443d839fa7d6af1b180

Чем определение экстремума для функций n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

■ Ничем.

Note 2

2efcc79ba51544848aacbd7da7dfa4b1

В определении экстремума функции n вещественных переменных, для каких x требуется выполнение соответствующего неравенства?

■ $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D(f).$

Note 3

30ab720865e54af19fcc351cfa78d165

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a . Точка a называется седловой, если $d_a f \equiv 0$ и a — не экстремум.

Note 4

27a6b8777b9b4bb9919dcfa31d963432

Тожественно нулевой оператор обозначается \mathbb{O} .

Note 5

43fd5e0b1a8b410a887c991151fac7e0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

Note 6

834aecf3894642098d0ddc0256091117

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

«Необходимое условие экстремума»

Note 7

e5cfde8512814dbbaed4676461636b0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Точку a называют стационарной для f , если $d_a f \equiv 0$.

Note 8

c658e89677264e7bb7317334e026304e

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных?

Рассмотреть функции $t \mapsto f(a + te^k)$.

Note 9

02b9316ee1f84262ae08eebecbe71c2b

В доказательстве необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных, мы положили

$$F_k(t) = f(a + te^k).$$

Что нужно показать про функцию F_k ?

0 — точка экстремума F_k и рассмотреть $F'_k(0)$.

Note 10

ec6b1873ffe44cc48c87520ef5bf2f10

Какие случаи не охватываются необходимым условием экстремума?

Когда дифференциал сохраняет знак, но не является положительно или отрицательно определённым.

Note 11

091dad1735594dfa8923e46c5a461ab0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $d_a^2 f$ положительно определён, то a — точка строгого минимума f .

Note 12

a87f168ae18d4f65b7595866b9407e8d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $d_a^2 f$ отрицательно определён, то a — точка строгого максимума f .

Note 13

4643a84f76b84c9bbc34e220ec2196c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\{d_a^2 f\}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то f не имеет экстремума в точке a .

Note 14

41fcd97c432427e893b7c1e3b850374

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица квадратичной формы $d_a^2 f$ называется матрицей Гессе f в точке a .

Note 15

36db8ae7809a4dcb6f350f51ca0a54c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица Гессе f в точке a обозначается $H(f)$.

Note 16

5ffaf8568eaa4a8fbb3815c215d20c25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a . Матрица Гессе f в точке a имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \sim n \times n.$$

Note 17

56bf1e23f53c4cae8d62101295cb0a9b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a .

(в терминах $H(f)$)

Note 18

b78c95a2236a4edf964b8e2a29238dae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a , $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a . В чём ключевая идея доказательства?

Зафиксировать одну компоненту приращения $d_a^2 f$ и показать, что он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Note 19

535062161d6044bdb41631a3ae479223

Дополнительные равенства, которым должны удовлетворять точки из области определения f в определении понятия условного экстремума называются уравнениями связи.

Note 20

7dc4fe4c435946a091efc32d6a120ec1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in E$, $m < n$. Если a является точкой экстремума сужения f на множество

$$\{x \in E \mid \Phi(x) = \Phi(a)\},$$

то a называется точкой условного экстремума f , подчинённого уравнениям связи $\Phi(x) = \Phi(a)$.

Note 21

efd5b1690a340499b26b776ada24e98

Точку условного экстремума так же называют точкой относительного экстремума.

Note 22

9f8b54ca8ee64e32987bdb713c25e8d7

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что

$$\Phi(a) = 0.$$

Note 23

7866e63fde9849e0aaf93125f6796f8c

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что $\Phi(a) = 0$?

Всегда можно рассмотреть $\Phi^* : x \mapsto \Phi(x) - \Phi(a)$.

Note 24

fce85d7d2d244b4daaa0334b43719a92

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что $\{\{c2::\Phi'(a)\}\} \{\{c1::\text{невыврождена.}\}\}$

Note 25

b53cabcb0b0a24f6ead9453c041ad560d

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что $\Phi'(a)$ невырождена?

■ Иначе какое-то из условий следует из остальных.

Лекция 28.09.22

Note 1

ffe18c64640a4c0c9009a7e054fc1af5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{\{c6::m < n,\}\}$ $f \in \{\{c4::C^1(E, \mathbb{R})\}\}$, $\Phi \in \{\{c4::C^1(E, \mathbb{R}^m)\}\}$, $a \in E$, $\{\{c5::\text{rk } \Phi'(a) = m.\}\}$ Тогда если $\{\{c3::a - \text{условный экстремум } f, \text{ подчинённый } \Phi(x) = 0,\}\}$ то $\{\{c2::\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R},\}\}$ для которых $\{\{c1::$

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

$\}\}$

Note 2

af9f952d67cd4db8a2bc302521d5f590

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $a \in E$, $\text{rk } \Phi'(a) = m$. Тогда если $a - \text{условный экстремум } f$, подчинённый $\Phi(x) = 0$, то $\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$, для которых

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

« $\{\{c1::\text{Необходимое условие относительного экстремума}\}\}$ »

Note 3

82213d3b2284465e9b85ecf7bcfe686b

$\{\{c2::\text{Коэффициенты } \lambda_1, \dots, \lambda_m\}\}$ из теоремы о $\{\{c3::\text{необходимом условии относительного экстремума}\}\}$ называются $\{\{c1::\text{множителями Лагранжа } f \text{ в точке } a.\}\}$

Note 4

832a0c560cf747c492a100c673d806cc

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия относительного экстремума?

■ Теорема о неявной функции для $\Phi(x, y) = 0$.

Note 5

9434998277aa4d2d946b7fcdfeef36f8

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума мы построили неявную функцию ψ из уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Что дальше?

■ Рассмотреть $f(x, \psi(x)) - \lambda \Phi(x, \psi(x))$.

Note 6

feb9eccc46494af296a7c929c6b4fd57

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{c_2: x^0\}} = \{c_1: 0.\}$$

Note 7

038381f4bf64457da1a04c86b8ab0eb5

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

■ x_0 — т. экстремума $f(x, \psi(x))$.

Note 8

63892565775440a9afc699c3c9ed5419

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{c_2: x^0\}} = \{c_1: 0.\}$$

Note 9

b333ed4af4a44349b84e8aed99b46a18

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

■ $\Phi(x, \psi(x)) = 0$ в окрестности x^0 .

Note 10

082928b830ed48038502597330cc2d6b

Чему равно λ из теоремы о необходимом условии относительного экстремума?

$$\lambda^T = f'_y(a) \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}.$$

Note 11

c403eaa3be2d4d1dac52b422443e29b2

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума отображение

$$\{(x, \lambda)\} \mapsto \{f(x) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi_k(x)\}$$

называется функцией Лагранжа.

Note 12

5568e5ccac324a0cb09e98b4ba65503b

В условиях теоремы о необходимом условии относительно экстремума функция Лагранжа обозначается $L(x, \lambda)$.

Note 13

113bd38c503e4af990386a637b1aa830

Необходимое условие относительного экстремума в терминах функции Лагранжа примет вид

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \nabla L(a, \lambda) = 0.$$

Note 14

10647bd11e764a13b935dd15418841c6

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . f называется положительно определённой на N , если $f|_N$ положительно определена.

Note 15

24a7c3a60b0144b78d3bdf59396178e9

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . f называется отрицательно определённой на N , если $f|_N$ отрицательно определена.

Note 16

6af1663b3c2f432eb8d779d75937d630

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума, $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$. Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если $d_a^2 L$ положительно определён на $\ker d_a \Phi$, то a — точка условного минимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.

Note 17

1abdb12e039f42bb991a4e08218c2bc0

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$. Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если $d_a^2 L$ отрицательно определён на $\ker d_a \Phi$, то a — точка условного максимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.

Note 18

18275ac96f4145228cd295901a3c4aeb

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$. Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если $d_a^2 L$ принимает на $\ker d_a \Phi$ как положительные, так и отрицательные значения, то f не имеет в точке a условного экстремума, подчинённого $\Phi(x) = \Phi(a)$.

Note 19

b5b66b7db90b4d1bacf06b32b1446fcb

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — вещественная последовательность. Рядом называется формальное выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Note 20

a5592c04ea8d40cd952f2bf6391ed438

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Элемент a_k называется общим членом ряда.

Note 21

ff62bd61f29a475eb73a358793f8a46a

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, $\{\{c3::n \in \mathbb{N}\}\}$ $\{\{c2::\text{Сумму}\}$
вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$\}} \{\{c1::\text{частичной суммой ряда}\}\}$

Note 22

515ccf52bf2e4d89a5a2c282984860f2

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, $n \in \mathbb{N}$, $\{\{c1::\text{Сумму}\}$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n$$

$\}} \{\{c2::\text{часто обозначают}\}\}$ $\{\{c1::S_n\}\}$

Note 23

ad2ee0b419444746bd51026b07fa19d6

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. $\{\{c1::\text{Величина}\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$\}} \{\{c2::\text{называется}\}\}$ $\{\{c1::\text{суммой ряда}\}\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\}$

Note 24

6505e18ad4754436aa6c22aae25686bd

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Если $\{\{c2::\text{величина}\}$ A
есть сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\}} \{\{c1::\text{то пишут}\}\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

$\}} \{\{c1::\text{то пишут}\}\}$

Note 25

a3c5b50440ad4896bb8af7492d946bc5

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд $\{\{c2::\text{сходится}\}\}$,
если $\{\{c1::\text{его сумма существует и конечна}\}\}$

Note 26

f1b03f6a351984ebf8a7077cc5c2126e4

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд $\{\{c2::\text{расходится}\}\}$,
если $\{\{c1::\text{он не сходится}\}\}$

Семинар 05.10.22

Note 1

80570e9f813648cfa0315b3dd7e327a3

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, как определяется знакоопределённость $d_a^2 L$ на $\ker d_a \Phi$?

Через миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

Note 2

66548b31237c4009a91c2423d6836660

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какие миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

рассматриваются для определения знакоопределённости $d_a^2 L$ на $\ker d_a \Phi$?

Начиная с Δ_{2m+1} . (m — количество уравнений связи.)

Note 3

ae3633661bf248a389c6fc301e701039

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы a была точкой условного минимума?

Все имеют знак $(-1)^m$.

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы a была точкой условного максимума?

■ Первый имеет знак $(-1)^{m+1}$ и далее чередуются.

Лекция 26.10.22

Note 1

f86d2dd9e8f64a59a96d4d321a706cc4

Как определяется переместительное свойство ряда (интуитивно)?

■ Перестановка элементов не влияет на сумму.

Note 2

eda4110756264d5885252e3c548ad9ac

Применимо ли переместительное свойство к расходящимся рядам?

■ Да.

Note 3

f0d78b12e0654f259e4b5390870df0e0

Что означает переместительное свойство в контексте расходящихся рядов?

■ Любая перестановка тоже расходится.

Note 4

2bd23513ad354d76a4f5dfcc5b23cf38

Пусть $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

называется Чебышёвским уклонением.

Note 5

806916674138455a8d97f6dc173173b2

Пусть $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Чебышёвское уклонение обозначается $\rho(f, g)$.

Лекция 09.11.22

Note 1

20bbdbfc6a3e47d5a68ff0fe6148f498

Пусть f и все f_n интегрируемы на $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$.

Тогда

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

}}

Note 2

8ac3641f138f4e04a7f112015f0cc4df

Пусть f и все f_n интегрируемы на $[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

«Предельный переход под знаком интеграла»

Note 3

9ab163a208184d589048e4103dbf7978

Пусть все f_n и f интегрируемы и $f_n \rightarrow f$. При каком условии можно выполнять предельный переход под знаком интеграла $\int_a^b f_n$?

■ Если сходимость равномерна.

Note 4

73d904ec0c8444e989c74d892653ef06

Пример, показывающий, что поточечной сходимости не достаточно для выполнения предельного перехода под знаком интеграла.

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{на } [0, 1]$$

Note 5

4a61840b6b7e43d88e86a8f43109394f

В чём основная идея доказательства теоремы о предельном переходе под знаком интеграла?

Определение равномерной сходимости и оценка сверху для модуля разности интегралов.

Лекция 16.11.22

Note 1

cbbd0644365c41c8bad0a7182149b40d

Пусть $\{f_n\}$ все f_n и $\sum f_n$ интегрируемы на $[a, b]$. Если $\sum f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

}}

Лекция 23.11.22

Note 1

81b3a95a5a394f6792bcb6ecfeba6cc8

Степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку внутри множества сходимости.

Note 2

a4e98cb1efd6427b8cae76f4a590979

Степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку внутри множества сходимости. В чём ключевая идея доказательства?

Степенной ряд сходится равномерно на любом таком отрезке.

Лекция 30.11.22

Note 1

e71a98c1f27443538a4b0775e3034bd8

Какие ряды рассматриваются в теореме о радиусах степенных рядов?

Степенной ряд и ряды производных и первообразных его членов.

Note 2

d1689e2077044a749292b08131dd2c51

Что утверждается в теореме о радиусах степенных рядов?

Рассматриваемые ряды имеют одинаковые радиусы сходимости.

Лекция 07.12.22

Note 1

2e2030ff369747f6a18c94defaa57ba9

Пусть $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$. Функция f называется $\{\{c2::$ аналитической в точке $a,\}$ если $\{\{c1::$ на окрестности точки a она представляется степенным рядом с центром в точке a .
 $\}$

Note 2

24d660592f734550a7586675e3b2e307

Пусть $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f называется $\{\{c2::$ аналитической на промежутке $(A, B),\}$ если $\{\{c1::$ она аналитична в каждой точке $(A, B),\}$

Note 3

124c24286bb94e2281c6386440f38d2c

В чём основная задача анализа Фурье?

Разложение периодических функций в ряд по косинусам и синусам.

Note 4

f659146465f64b918c69ce46c8ae72e5

Задачей $\{\{c2::$ анализа Фурье, $\}$ является поиск разложения вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Note 5

c6879c7d93d34aadac9c7b7f69bdc5eb

Разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

применимо к функциям $\{\{c1::$ с периодом $2\pi,\}$

Note 6

2af4cc16ab5c4331ba6fdc4d8e33606d

Пусть функция f имеет период T . Как привезти её к функции с периодом 2π ?

Рассмотреть

$$x \mapsto f\left(\frac{x}{2\pi} \cdot T\right).$$

Note 7

dfca446221d84d72a637ce570b31bbce

Чем примечательно интегрирование периодических функций?

Значение интеграла по промежутку длиной в период не зависит от сдвига промежутка.

Note 8

512ee88e6ccc4fa193d82ca1d7252a90

Как показать, что система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ортогональна?

Явно вычислить скалярные произведения, используя формулы для произведений \sin и \cos .

Note 9

cf31d7904d0f4319829798700280b559

В контексте какого скалярного произведения система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

является ортогональной?

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f g.$$

Note 10

e680e2296ca447878109aa1bd98e0564

$$\int_0^{2\pi} \sin mx = \{\{c1:0, \}\} \quad (n > 0).$$

Note 11

a263ac35453841f1a469b0b5826b0799

$$\int_0^{2\pi} \cos nx = \{\{c1:0, \}\} \quad (n > 0).$$

Note 12

5c3bed81f2b94a069fc8c60688cd3739

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \{\{c1:0, \}\} \quad (\{\{c2:\forall n, m\}\})$$

Note 13

4cb5eceb345d4acbb7db16116de48c3b

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \{\{c1:0, \}\} \quad (\{\{c2:n \neq m\}\}).$$

Note 14

198569868a6b4e77a0e1891b73c4c088

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \{\{c1:\pi.\}\}$$

Note 15

2b2d5635b2a14ee18b7cf8824f1bbc56

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \{\{c1:0, \}\} \quad (\{\{c2:n \neq m\}\}).$$

Note 16

69df715bc9ba414bae72641bbf74d1f5

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \{\{c1:\pi.\}\}$$

Note 17

8a035b960ad54a9aa060b304bf8462ee

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Как можно найти значения коэффициента a_k ?

■ Проинтегрировать $f(x) \cos kx$ на $[0, 2\pi]$.

Note 18

ebe1bbddc4ce44c5941e1f2e887651d9

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Note 19

8a5ae715c85e4758b5c5fcc97e93bcd9

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Как можно найти значения коэффициента b_k ?

■ Проинтегрировать $f(x) \sin kx$ на $[0, 2\pi]$.

Note 20

cfcfaee0ac304ebe95c11b2b5c016c7d

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тогда

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Note 21

67542462c1d046c7b986155c804058a9

Пусть f периодична с периодом 2π . Коэффициенты,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx ,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

называются $\{\{c1: \text{коэффициентами Фурье функции } f.\}\}$

Note 22

7045668d58db45ad9892a6b3813128fd

Пусть f периодична с периодом 2π . $\{\{c2: \text{Разложение } f \text{ по системе } \{1, \cos nx, \sin nx\} \text{ с коэффициентами Фурье}}\}$ называется $\{\{c1: \text{рядом Фурье функции } f.\}\}$

Note 23

e548ae34226a44dbb7bfff902ff24ce38

Коэффициенты перед $\{\{c2: \cos nx\}\}$ в ряде Фурье периодической функций обычно обозначаются $\{\{c1: a_n.\}\}$

Note 24

485d606663f741c4aa0456d205bff990

Коэффициенты перед $\{\{c2: \sin nx\}\}$ в ряде Фурье периодической функций обычно обозначаются $\{\{c1: b_n.\}\}$

Note 25

fdee5342607e4a57933450d0d3fc819e

Как строится ряд Фурье для функции, определённой на конечном интервале?

Сначала функция периодически продолжается на всю числовую ось.

Лекция 14.12.22

Note 1

fe7d28e98d744f1981b58bcd9b88eb53

Функция $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно гладкой на множестве D , если её производная кусочно-непрерывна на D .

Note 2

a11d984e49654f1fbe979c15242cc24b

Для удобства будем считать, что периодическая функция является кусочно-непрерывной, если она кусочно-непрерывна на каком-либо отрезке длиной в период.

Note 3

49958c86df924ee8b4f132d6cb5e5ab9

Какой вопрос рассматривается в теореме Дирихле (о рядах Фурье)?

■ Сходимость ряда Фурье периодической функции.

Note 4

9d03d5873804424896da3f6d23a32213

Каким видом условия является теорема Дирихле (о рядах Фурье)?

■ Достаточным.

Note 5

1658d6c012f44632ac5d5b1a42ff3bbf

Какая функция рассматривается в теореме Дирихле (о рядах Фурье)?

■ Кусочно-гладкая на отрезке длиной в период.

Note 6

5f323e2ec77b4cfa81fe10bc0ef46eb2

Что мы заключаем из теоремы Дирихле (о рядах Фурье)?

■ Ряд Фурье функции сходится в любой точке к среднему значению односторонних пределов.

Note 7

18b17e6720aa4d3f85dbe0d61d54dc23

Что мы заключаем из теоремы Дирихле (о рядах Фурье) для точек непрерывности функции?

Ряд Фурье сходится к функции.

Note 8

a04607043611474398e000b5085c0486

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции?

Сходится в любой точке (но не обязательно к самой функции.)

Note 9

6fc46361ef9349e1985098dcd7af4b4d

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции в точках её непрерывности?

Сходится к значению функции.

Note 10

54ef07badb244f39a259e3237d5855c8

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции в точках её разрыва?

Сходится к среднему значению односторонних пределов.

Note 11

b5963613427a41178042d681a5259f4f

Как выглядит ряд Фурье функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx .$$

Note 12

e8a7d9c8925a418188d9ee3362f79705

Как с использованием рядов Фурье можно найти значение ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots?$$

■ Использовать ряд Фурье $f(x) = x$ в точке $\frac{\pi}{2}$.

Note 13

730f19be667548e9b24c9ce33ea43784

Для каких периодических функций ряд Фурье обязан сходиться абсолютно?

■ Для непрерывных и кусочно-гладких.

Note 14

bbe026a519824222b2c98c639678857a

Для каких периодических функций ряд Фурье обязан сходиться равномерно?

■ Для непрерывных и кусочно-гладких.

Note 15

5c566e83fa0340c58eac557785785279

Что можно сказать о ряде Фурье непрерывной кусочно гладкой периодической функции?

■ Он сходится к ней абсолютно и равномерно.

Note 16

aa0ff21a64b54ffd97cd4c26310596a9

Пусть периодическая функция f имеет непрерывные производные порядка вплоть до $N - 1$ и кусочно-непрерывную производную порядка N . Что можно сказать о её ряде Фурье?

■ $|f(x) - s_k(x)| < \frac{\delta_k}{k^{N-1/2}}, \quad \text{где } \delta_k \rightarrow 0.$

Note 17

24eb28a514eb4fc2811401b3ee9164d8

Для каких периодических функций верна оценка

$$|f(x) - s_k(x)| < \frac{\delta_k}{k^{N-1/2}}, \quad \text{где } \delta_k \rightarrow 0,$$

для остатка ряда Фурье?

Имеющих непрерывные производные порядка вплоть до $N - 1$ и кусочно-непрерывную производную порядка N .

Note 18

4c6aad88a3934ce89326f70fa8fdbeb0

Пусть f периодична и $f^{(k)}$ кусочно-гладка. Что можно сказать о коэффициентах ряда Фурье f ?

$$a_n, b_n = o(1/n^{k+1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Note 19

9b59e17ad69d491e8297660c69a7f64c

Для каких периодических функций верна оценка

$$a_n, b_n = o(1/n^k), \quad n \rightarrow \infty,$$

для коэффициентов ряда Фурье?

Имеющих кусочно-гладкую производную порядка $k - 1$.

Note 20

15a14a3394e24021a7a78a7cb85cf781

Пусть f периодична, $f^{(k-1)}$ непрерывна и $f^{(k)}$ кусочно-гладка. Что можно сказать о коэффициентах ряда Фурье f ?

$$a_n, b_n = O(1/n^{k+1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

Note 21

e9cbe9cc647b4cf7b15c0476a89bb310

Для каких периодических функций верна оценка

$$a_n, b_n = O(1/n^k), \quad n \rightarrow \infty,$$

для коэффициентов ряда Фурье?

■ Таких что $f^{(k-2)}$ непрерывна и $f^{(k-1)}$ кусочно-гладка.

Note 22

2b5908be228748108c55d8da7d970a5d

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Для какого выражения даётся верхняя оценка в неравенстве Бесселя, в контексте ряда Фурье f ?

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2).$$

Note 23

966d28a6d438455b9f7dc0d5a608af56

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Какое выражение выступает в качестве верхней оценки в неравенстве Бесселя, в контексте ряда Фурье f ?

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2.$$

Note 24

c1eb80029ccc472590e25f079f413198

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Допускает ли неравенство Бесселя, в контексте ряда Фурье f , равенство левой и правой его частей?

■ Да.

Note 25

51cba508f22a4be288d572f18d428542

Для каких периодических функций выполняется неравенство Бесселя для коэффициентов ряда Фурье?

■ Для любых.

Note 26

a8c7cbcd087d4a4eabdd85ccfc7ce2ec

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Как называется неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

для коэффициентов ряда Фурье f ?

■ Неравенство Бесселя.

Note 27

7b93ebc1526c495c84cb4ac052cd0641

Что моментально следует из неравенства Бесселя в контексте рядов Фурье?

■ Ряд из сумм квадратов коэффициентов сходится.

Note 28

303c44053e5f4bcebad6128bc2e8a82

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Что устанавливает равенство Парсеваля, в контексте ряда Фурье f ?

■ Неравенство Бесселя в пределе обращается в равенство.

Note 29

a64141f971434ca0880e5256d1e3e5f0

Для каких периодических функций выполняется равенство Парсеваля для коэффициентов ряда Фурье?

■ Квадратично-интегрируемых.

Note 30

15bdb891041c4f00a17f6c19d4244acc

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π -периодическая функция. Как называется равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

для коэффициентов ряда Фурье f ?

■ Равенство Парсеваля.

Семинар 23.12.22

Note 1

7c999c871dc44972b63eb58569ebb0a1

Как радикальный признак Коши применяется к комплексным рядам?

■ Так же, как к вещественным.

Note 2

4f946c4839c64b6ea3c62676a3dbe503

Как признак Даламбера применяется к комплексным рядам?

■ Так же, как к вещественным.

Note 3

7ca2abd7e18c49fa9d428134d358aae9

Как формула Коши-Адамара применяется к комплексным степенным рядам?

■ Так же, как к вещественным.

Note 4

5ae400877c8c4b039cfecabc92d3b07

Сходится ли ряд $\sum \frac{|\cos 3n|}{\sqrt{n}}$?

■ Расходится.

Note 5

f5e47353454b4e4fafc3b0c27a0e95ee

Как показать расходимость ряд $\sum \frac{|\cos 3n|}{\sqrt{n}}$?

■ Оценить снизу через квадрат косинуса + формула понижения степени.

Note 6

52af15d5e4b34a538fec7a76ab2870b6

Почему ряд $\sum \frac{1+\cos 6n}{2\sqrt{n}}$ расходится?

Он представляется как сумма расходящегося и сходящегося рядов.

Лекция 21.12.22

Note 1

f075132ed82c4c6a87d2bacaeb61a7a6

Как определяется частичная сумма ряда $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$?

■ Сумма от a_{-k} до a_k .

Note 2

52518a8f21a94b5ca40cce0ed48b6420

Как ряд Фурье запаивается в экспоненциальной форме?

■
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Note 3

5cb814e06e514bbab9de89636a2056de

Как ряд Фурье в тригонометрической записи привести к экспоненциальной форме?

■ Через формулы Эйлера.

Note 4

2a543da90ce94d149fc00d00159cf586

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Как c_n выражается через a_n, b_n для $n > 0$?

■ $\frac{1}{2}(a_n - ib_n).$

Note 5

8f1f4605f0d643f3a81edcb52c36b5bf

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Как c_{-n} выражается через a_n, b_n для $n > 0$?

$$\frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Note 6

17d3e4c6c13d4ff68957bcc03f88748d

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Как c_0 выражается через изначальные коэффициенты?

$$\frac{a_0}{2}.$$

Note 7

613d457df89a4ad68ab32c124f308600

Пусть f периодична с периодом 2π . Как выводится интегральная формула для коэффициентов ряда Фурье f ?

Через их связь с коэффициентами в тригонометрической записи.

Note 8

d3624b2bd96a4696b561dcae634c1da1

Пусть f периодична с периодом 2π . Как определяются коэффициенты Фурье f в тригонометрической форме?

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Note 9

e909dbe9a169419ea86fe2c964cae6a6

Как ядро Дирихле определяется в экспоненциальном виде?

Как частная сумма ряда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{iku}.$$

Note 10

fa9bdfb72168417c97cb711c6b13a465

Как ядро Дирихле определяется в тригонометрическом виде?

Частичная сумма ряда

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos ku .$$

Note 11

e6e5ee10845646ab8dcd748471112d90

Как ядро Дирихле выражается аналитически?

$$u \mapsto \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{\sin \frac{u}{2}} .$$

Note 12

9b31df11e6da4d819e4225dbf0471337

Как из тригонометрического вида ядра Дирихле получить его аналитическое выражение?

Умножить и поделить на $\sin \frac{u}{2}$.

Note 13

2dce5c69dca3450aaee6de2527a3d7dc

Как из экспоненциального вида ядра Дирихле получить его аналитическое выражение?

Частичная сумма геометрической прогрессии и формулы Эйлера.

Note 14

0d94bfa61d9242c9ae0ff4778349f8cd

Ядро Дирихле порядка n обозначается $D_n(\cdot)$.

Note 15

b6451f88225242628cd856a597e2f5f7

Ядро Дирихле порядка n периодически с периодом 2π .

Note 16

2f9896b98be041e09a26a90329bab0a3

$$D_n(0) = \llbracket c1: 2n + 1. \rrbracket$$

(D_n — ядро Дирихле.)

Note 17

7bcf23025ba446029af812c04f251f89

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \llbracket c1: 2\pi. \rrbracket$$

(D_n — ядро Дирихле.)

Note 18

33851282ccac4f6dac70325562a6aa45

Интегральная формула для частичной суммы ряда Фурье. . .

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du \right|$$

Note 19

a6d637214d9f42cd8836fad0a5a39966

Как выводится интегральная формула для частной суммы ряда Фурье?

| Из интегральных формул для коэффициентов и линейности интеграла.

Note 20

184da0d0964b462886c144f907c1dafc

Пусть f периодична с периодом 2π . Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du$$

есть значение $\llbracket c1: n\text{-й частичной суммы ряда Фурье } f. \rrbracket$

Note 21

0a7db5e527cf439382b61f1e7c347d15

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} f \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket c1: \int_{-\infty}^{+\infty} f. \rrbracket$$

Note 22

adfe18ba7f9749c7961ecfb7d937ffda

Какие функции рассматриваются в лемме Римана-Лебега?

■ Абсолютно интегрируемые на всей вещественной оси.

Note 23

9dbf920feec84079a6a4f541c78c6924

Какое условие ставится в лемме Римана-Лебега?

■ Конечность $\int_{\mathbb{R}} |f|$.

Note 24

5e6e11bdfaca408c965d6f7e3a98833a

Поведение какого интеграла рассматривается в лемме Римана-Лебега?

■
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\lambda x} dx .$$

Note 25

8d36f6c34bac455797f54b78e001c815

Что в лемме Римана-Лебега утверждается о поведении рассматриваемого интеграла?

■ Он бесконечно мал при $\lambda \rightarrow \infty$.

Note 26

7db9640421d04f6db0aff00e51f1b83c

Как лемма Римана-Лебега применяется к интегралам по конечным промежуткам?

■ Функция доопределяется нулём вне промежутка.

Note 27

572c5d54906f47cc8279963e0cbdc8aa

Как называется теорема, описывающая поведение интеграла $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\lambda x} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$?

■ Лемма Римана-Лебега.

Note 28

a466a9f04fb1474fb5df53f79796dffe

Пусть $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$. Что можно сказать о

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\lambda x) dx ?$$

■ Он бесконечно мал при $\lambda \rightarrow \infty$.

Note 29

a0d6e16577f64e99b33805b6860d3f7c

Пусть $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$. Что можно сказать о

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\lambda x) dx ?$$

■ Он бесконечно мал при $\lambda \rightarrow \infty$.

Note 30

2ea58c53c7584179b8b7217073e51415

К каким периодическим функциям применим принцип локализации для рядов Фурье?

■ К абсолютно интегрируемым.

Note 31

1eed1f99b5a4437c9994353ca3aeaacc

Что, в общих чертах, утверждает принцип локализации для рядов Фурье?

■ Поведение ряда Фурье в точке полностью определяется поведением функции в сколь угодно маленькой окрестности этой точки.

Note 32

e5ab08a7b763420bba7ab14e47f420b3

Окрестность какого радиуса рассматривается в формальной формулировке принципа локализации для рядов Фурье?

$$0 < \delta \leq \pi.$$

Note 33

c1cf97c7d3404af2b767c54158c019fc

Более формально, принцип локализации для рядов Фурье утверждает, что

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-u) D_n(u) du + o(1).$$

Note 34

706e7ddd1e444d7fb7bec84579b4415b

В чём ключевая идея доказательства принципа локализации для рядов Фурье?

Интегральная формула для частичных сумм; аддитивность интеграла и лемма Римана-Лебега.

Note 35

0ab72f4ed532466d89795d09d1eb6b99

В доказательстве принципа локализации для рядов Фурье, на какие промежутки разбивается интегральное выражение частных сумм?

$$[-\pi, -\delta], [-\delta, \delta], [\delta, \pi].$$

Note 36

f021db706f404ea083b936725132c607

Как доказать принцип локализации для рядов Фурье применить лемму Римана-Лебега к

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du ?$$

Дать нижнюю оценку знаменателю в аналитическом выражении $D_n(u)$.

Мои дополнения перед экзаменом третьего семестра

Note 1

525e3802649045d2be5574ce7eb3d4c2

Для каких точек вводят понятие левой производной вещественной функции?

■ В точках, в которых существует левый предел функции.

Note 2

164b0172eb1f413fbfb6a3a6376638b

Как определяется левая производная вещественной функции?

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}$$

Note 3

b2b2527592d84cf691b108265e42178a

Левая производная вещественной функции f в точке x обозначается $f'_-(x)$.

Note 4

734ed5fe71864c1982f124f8f992969c

Для каких точек вводят понятие правой производной вещественной функции?

■ В точках, в которых существует правый предел функции.

Note 5

0a6b9af00cf44d09bbf9a1f6a0bb1f14

Как определяется правая производная вещественной функции?

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

Note 6

68914903fab14a9f9362001d8d2cf3a8

Правая производная вещественной функции f в точке x обозначается $f'_+(x)$.

Note 7

7d2e4dab76c747bd99c8eb24fcfe1e38

Для каких периодических функций формулируется признак Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке?

Абсолютно интегрируемых.

Note 8

53cd927a2eec46f99ed2cf490251cb4c

При каком условии мы можем что-либо заключить из признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке?

Функция обладает в точке левой и правой производными.

Note 9

beaf78803ef74e9ab479d0322c43cb1f

Что мы заключаем из признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке?

Ряд Фурье сходится в точке к среднему значению односторонних пределов.

Note 10

9bb2c3a10a5245f2b2e663e38c54f93e

Как ведёт себя ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции, дифференцируемой в данной точке?

Сходится к значению функции.

Note 11

6f2b59356e66483b83683af46ba4828c

В чём основная идея доказательства признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке?

Интегральная формула для частичных сумм и лемма Римана-Лебега.

Note 12

78fec5b1160d475cb681d936adf02ae2

В доказательстве признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке, как преобразуется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du ?$$

Как два предела интегралов по отрезкам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$.

Note 13

1194e18c029d4f7bbde9e76528e87e

В доказательстве признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке, чему равны пределы соответствующих интегралов по отрезкам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$?

$$\frac{f(x^-)}{2} \text{ и } \frac{f(x^+)}{2}.$$

Note 14

8f484ddc3e0f4a3c9f8bb32acda230de

В доказательстве признака Дирихле для сходимости ряда Фурье в точке, как преобразуется доказываемое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u) du = \frac{f(x^+)}{2} ?$$

Домножить правую часть на $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n$ и перенести её на лево.

Note 15

509a806f365d4923b90b3536c66f2ce4

В доказательстве признака Дирихле для сходимости ряда Фурье как показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x^+)] D_n(u) du = 0 ?$$

■ Расписать ядро Дирихле и лемма Римана-Лебега.

Note 16

a8ca33aebc3341ec83b6e0ca504b8160

В доказательстве признака Дирихле для сходимости ряда Фурье как показать абсолютную интегрируемость

$$\frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin \frac{u}{2}}?$$

■ Критерий Лебега.