

# Лекция 07.02.22

## Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть  $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Многочлен  $p(x)$  степени  $n$  такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$ .

## Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  существует, то он единственен.

## Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент  $r_m$  при  $(x-a)^m$  — первый ненулевой коэффициент в многочлене  $p - q$ . Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

## Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  обозначается  $T_{a,n}f$ .

## Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«**Формула Тейлора для многочленов**»

Пусть  $p$  —  $n$ -многочлен степени не более  $n$ . Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}}

## Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

## Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left( (x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

## Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать  $p(x)$  с неопределенными коэффициентами и вычислить  $p^{(k)}(a)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

## Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«**Свойство  $n$  раз дифференцируемой функции**»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$  и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Тогда  $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a.$

## Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение  $o$ -малого в терминах  $\varepsilon, \delta$ .»

Пусть  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1:: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

## Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить  $f(a) = f'(a) = 0$  в определение дифференцируемости.

## Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

■ и расписать это равенство в терминах  $\varepsilon, \delta$ .

## Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на  $\delta$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный промежуток.

## Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что  $\exists \delta > 0$  такой, что  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

## Note 16

73ed2cd8b8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить  $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$  по симметричной формуле конечных приращений и показать, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ .

## Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

## Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, \{c\}_2: f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Тогда  $f(x) = \{c\}_1: o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a.$

«Формула Тейлора-Пеано»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

# Лекция 11.02.22

## Note 1

3bf65c72c3374838aeca626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через  $p(x)$  многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

## Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для  $k \leq n$  равна  $p^{(k)}(a)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

## Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству  $n$  раз дифференцируемой функции  $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$ .

## Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство  $n$  раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

## Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} [a,b], & a \leq b, \\ [b,a], & a \geq b. \end{array}\right.\}\}$$

## Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{array}\right.\}\}$$

## Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

## Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{\{c3::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$ ,  $\{\{c2::f \in C^n(\Delta_{a,x})\}\}$ ,  $f^{(n)}$  дифференцируема на  $\tilde{\Delta}_{a,x}$ . Тогда  $\{\{c1::\text{найдется } c \in \tilde{\Delta}_{a,x}, \text{ для которой}\}$

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\}\}$

## Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При  $n = 0$  формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна  $\{\{c1::\text{теореме Лагранжа}\}\}$ .

## Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

Вычислить производную функции  $F(t) = R_{t,n}f(x)$  и найти точку  $c$  по теореме Коши.

### Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких  $t$  определяется функция  $F(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

### Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких  $t$  вычисляется  $F'(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

### Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

### Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

### Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям  $F(t)$  и  $\varphi(t)$  с точках  $a$  и  $x$ ?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$



## Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket e^x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \rrbracket$$

## Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \sin x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \rrbracket$$

## Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \cos x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \rrbracket$$

## Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \ln(1+x) \rrbracket = \llbracket \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \rrbracket$$

## Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\llbracket \text{Обобщённый биномиальный коэффициент} \rrbracket$  задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \llbracket \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \rrbracket, \quad \alpha \in \llbracket \mathbb{R} \rrbracket.$$

## Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^\alpha \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \} \}$$

## Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для  $(1+x)^\alpha$  называют  $\{ \{c1:: \text{биноми-}$   
альным разложением} \}.

## Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{ \{c1:: (-1)^k \} \}$$

## Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^{-1} \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \} \}$$

## Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть  $\{ \{c3:: \text{функция } f \text{ удовлетворяет условиям для разложе-}$   
ния по формуле Тейлора-Лагранжа} \} Тогда если  $\{ \{c2::$

$$\forall t \in \tilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\} \text{ то } \{ \{c1::$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$

# Семинар 17.02.22

## Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

## Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

## Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

## Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

## Note 5

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

## Лекция 18.02.22

### Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть  $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$  Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

### Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

### Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для  $a < b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

### Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть  $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$  Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

### Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

Выразить для  $a < b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

## Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$  и дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда

- $f$  постоянна на  $\langle A, B \rangle \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$ .

## Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для произвольных  $a$  и  $b$  разность  $f(b) - f(a)$  через формулу конечных приращений.

## Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть  $f, g \in C[A, B]$  и дифференцируемы на  $(A, B)$ . Тогда Если  $f(A) = g(A)$  и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

## Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть  $f, g \in C[A, B]$  и дифференцируемы на  $(A, B)$ . Тогда Если  $f(B) = g(B)$  и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

## Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой максимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a).$$

}

### Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой строгого максимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

### Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой минимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geq f(a).$$

}}

### Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Тогда точка  $a$  называется точкой строгого минимума функции  $f$ , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

### Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если точка  $a$  является точкой минимума или максимума функции  $f$ , то  $a$  называется точкой экстремума  $f$ .

### Note 15

98f3cebff02ca464ab3cf9e94355caaa2

«Необходимое условие экстремума»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Тогда если  $a$  является точкой экстремума  $f$ , то  $f'(a) = 0$ .

### Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к  $f|_{[a-\delta, a+\delta]}$  для  $\delta$  из определения экстремума.

### Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка  $a$  называется  $\{\{c1::$  стационарной точкой функции  $f,$   $\}$  если  $\{\{c2::$

$$f'(a) = 0.$$

$\}\}$

### Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\{\{c1::$  точка  $a \in (A, B)$   $\}$  называется  $\{\{c2::$  критической точкой,  $\}$  если  $\{\{c1::$  либо  $a$  стационарна для  $f$ , либо  $f$  не дифференцируема в точке  $a.$   $\}$

### Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда все  $\{\{c2::$  точки экстремума  $f$ , принадлежащие  $(A, B),$   $\}$  лежат в  $\{\{c1::$  множестве её критических точек.  $\}$

### Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда

$$\{\{c3:: \max f([a, b])\}\} = \{\{c1:: \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}, \}\}$$

где  $C$  —  $\{\{c2::$  множество критических точек  $f.$   $\}$

### Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

« $\{\{c4::$  Достаточное условие экстремума в терминах  $f'$   $\}\}$ »

Пусть  $\{\{c3:: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B), f$  непрерывна в точке  $a$  и дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a), \delta > 0.$   $\}$  Если  $\{\{c1::$

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

$\}\}$  то  $\{\{c2:: a$  — точка строго максимума  $f.$   $\}$

**«Достаточное условие экстремума в терминах  $f'$ »**

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$  и дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a)$ ,  $\delta > 0$ . Если

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

то  $a$  — точка строго минимума  $f$ .



## Лекция 21.02.22

### Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

«Достаточное условие экстремума в терминах  $f''$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f''$  определена в точке  $a$ ,  $f'(a) = 0$ . Тогда если  $f''(a) > 0$ , то  $a$  — точка строгого минимума  $f$ .

### Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

«Достаточное условие экстремума в терминах  $f''$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f''$  определена в точке  $a$ ,  $f'(a) = 0$ . Тогда если  $f''(a) < 0$ , то  $a$  — точка строгого максимума  $f$ .

### Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752caf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах  $f''$ ?

Выразить  $f(x) - f(a)$  по формуле Тейлора-Пиано с

$$o((x - a)^2).$$

### Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах  $f''$ ?

Вынести в формуле Тейлора-Пиано  $\frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$  за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

## Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если  $n$  нечётно, то  $f$  не имеет экстремума в точке  $a$ .

## Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$ ,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если  $n$  чётно, то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах  $f''$ .

## Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«**Теорема Дарбу**»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle, a, b \in \langle A, B \rangle$ ,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

Тогда  $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$ .

## Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

По теореме Вейерштрасса существует точка минимума  $c$ , далее по теореме Ферма.

## Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

■  $c$  — внутренняя точка отрезка  $[a, b]$ .

## Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что  $c$  не лежит на границе  $[a, b]$ ?

■ Расписать  $f'(a)$  через правосторонний предел и показать, что  $a$  — не локальный минимум. Аналогично для  $b$ .

## Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Если

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle,$$

то  $f$  строго монотонна на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbd8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

■ Доказать от противного, что  $f'$  не меняет знак на  $\langle A, B \rangle$ .  
Далее по достаточному условию строгой монотонности.

## Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«Следствие из теоремы Дарбу  
о сохранении промежутка.»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда  $f'(\langle A, B \rangle)$  — промежуток.

## Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

Показать, что для любых  $a, b \in \langle A, B \rangle$

$$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B \rangle).$$

## Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек  $a, b \in \langle A, B \rangle$  в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leq f'(b).$$

## Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f'(\langle A, B \rangle)?$$

Применить теорему Дарбу к функции

$$F(x) = f(x) - y \cdot x$$

в точках  $a$  и  $b$ .

## Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«**Следствие из теоремы Дарбу  
о скачках производной.**»

Пусть  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ . Тогда функция  $f'$  не имеет скачков на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

TODO

## Note 19

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

Функция  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

}}

## Note 20

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

Функция  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется строго выпуклой на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

}}

## Note 21

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«Критерий строгой выпуклости  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ »

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда равносильны следующие утверждения.

- $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ .
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$  справедливо неравенство

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

«Лемма о трёх хордах»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда следующие утверждения.

- $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ .
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$  справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

## Лекция 25.02.22

### Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

### Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то

$$F \nearrow \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

### Note 3

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in \langle A, B \rangle$ . Тогда

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

### Note 4

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in (A, B)$ . Тогда

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

## Note 5

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть  $\{\{c3: f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: a \in (A, B), \}\}$ . Тогда  $\{\{c1: f'_+(a) \text{ и } f'_-(a) \text{ конечны и } f'_-(a) \leq f'_+(a), \}\}$

## Note 6

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , то она  $\{\{c1: \text{непрерывна на } (A, B), \}\}$

## Note 7

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть  $\{\{c3: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

$\}$

## Note 8

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$ .  $\{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{строга опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

$\}$

## Note 9

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть  $\{\{c5: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, a \in (A, B), \}\}$  прямая  $\ell$  задаётся  $\{\{c4: \text{уравнением}$

$$y = f(a) + k(x - a).$$

$\}$

Тогда прямая  $\ell$  является  $\{\{c1: \text{опорной для функции } f \text{ в точке } a, \}\} \{\{c3: \text{тогда и только тогда, когда } \{\{c2: k \in [f'_-(a), f'_+(a)], \}\}$



## Note 10

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ ,  $a \in (A, B)$ , прямая  $\ell$  задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая  $\ell$  является строго опорной для функции  $f$  в точке  $a$  тогда и только тогда, когда  $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$ .

}}

## 04.03.22

### Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл  $T_{a,1}f(x)$ ?

График  $T_{a,1}f(x)$  — это касательная к функции  $f$  в точке  $a$ .

### Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

#### «Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ .  
Тогда функция  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B \rangle \\ f(x) \geq T_{a,1}f(x).$$

}}

### Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

#### «Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$ .  
Тогда функция  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\} \\ f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

### Note 4

76ff105d143e49dea8fc8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными?

$f$  дифференцируема в любой точке  $\langle A, B \rangle \implies$  касательная совпадает с опорной прямой.

## Note 5

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть  $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоту  $y = kx + b$ . Тогда если  $f$  выпукла на  $(A, +\infty)$ , то

$$f(x) \geq kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}

## Note 6

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть  $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоту  $y = kx + b$ . Тогда если  $f$  строго выпукла на  $(A, +\infty)$ , то

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}

## Note 7

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

### «Связь выпуклости функции с $f'$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}

## Note 8

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

### «Связь выпуклости функции с $f'$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дифференцируема на  $(A, B)$ . Тогда  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$f' \nearrow \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}

## Note 9

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

### «Связь выпуклости функции с $f''$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $(A, B)$ .

Тогда  $f$  выпукла на  $\langle A, B \rangle$  тогда и только тогда, когда

||

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

## Note 10

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

### «Связь выпуклости функции с $f''$ »

Пусть  $f \in C\langle A, B \rangle$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $(A, B)$ .

Тогда  $f$  строго выпукла на  $\langle A, B \rangle$ , если

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

## Note 11

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ . Точка  $a$  называется точкой перегиба функции  $f$ , если

- $\exists \delta > 0$  такое, что  $V_\delta(a) \subset (A, B)$  и  $f$  имеет разный характер выпуклости на  $(a - \delta, a]$  и  $[a, a + \delta)$ ;
- $f$  непрерывна в точке  $a$ ;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$ .

||

## Note 12

9aa5847a39ac46e8ad8dbec41c14a904

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $a$ . Если  $a$  является точкой перегиба  $f$ , то  $f''(a) = 0$ .

## Note 13

aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

■ Нет, это только необходимое условие.

## Note 14

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (A, B)$ ,  $f$  непрерывна в точке  $a$  и имеет в ней производную из  $\overline{\mathbb{R}}$ . Тогда если  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f$  дважды дифференцируема на  $\dot{V}_\delta(a)$  и

- либо  $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$ ,
  - либо  $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$ ,
- то  $a$  — точка перегиба  $f$ .

# Семинар 03.02.22

## Note 1

95c692ffa52646cfb2ce013546586bc2

Основная формула метода интегрирования по частям:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

## Note 2

e2df459e1699495f980cddacc633f6f

В чем основная идея доказательства основной формулы интегрирования по частям?

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu' \, dx + \int uv' \, dx.$$

## Note 3

655ebf6da8c1489f84fdaeea82dcc793

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

## Note 4

310668af95114f9fbe87673be333fec8

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

## Note 5

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$$

## Лекция 07.03.22

### Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной функции  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle A, B \rangle$  и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

### Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

Множество всех первообразных функции  $f$  на промежутке  $\langle A, B \rangle$  обозначается  $\mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ .

### Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deacc

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

### Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

$(F(x) - G(x))' \equiv 0$  на  $\langle A, B \rangle \implies F(x) - G(x)$  постоянна на  $\langle A, B \rangle$ .

### Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть  $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения первообразной.

## Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcd445

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ . Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

называется неопределённым интегралом  $f$  на  $\langle A, B \rangle$ .

## Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Неопределённый интеграл функции  $f$  на  $\langle A, B \rangle$  обозначается

$$\int f(x) dx.$$

}}

## Note 8

7581f732c1c44de4bc99cae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad ?$$

Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

## Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle$ .

$$\left( \int f(x) dx \right)' \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

## Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fba7ff

Пусть  $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$ ,  $G \in \mathcal{P}_g(\langle A, B \rangle)$ .

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$



## Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть  $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=}_{\{\{c1:\}\}} \left\{ \lambda f(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bf5b210

Из  $\{\{c3:\}$  теоремы Дарбу  $\}\}$  следует, что если  $\{\{c2::f$  имеет первообразную на промежутке  $\langle A, B \rangle, \}\}$  то  $\{\{c1::f$  не имеет скачков на  $\langle A, B \rangle, \}\}$

## Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции  $f$  необходимым условием для существования у неё первообразной?

Нет, поскольку  $f$  может иметь точки разрыва второго рода.

## Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

### «Достаточное условие существования первообразной»

$\{\{c1:\}$  Если  $f$  непрерывна на  $\langle A, B \rangle$ , то  $f$  имеет первообразную на  $\langle A, B \rangle, \}\}$