

30.05.22

Note 1

9a902d381d8f4e4fb5ff8c1e77b38c57

Пусть G — непустое множество. $\{\{c1:: \text{Отображение вида}$

$$G \times G \rightarrow G$$

$\}\}$ называется $\{\{c2:: \text{бинарной операцией на множестве } G.\}\}$

Note 2

6fdd3ac4b4f644cea3704bcc79918836

Пусть $\{\{c1:: G \text{ — непустое множество,}\}\}$ $\{\{c2:: \circ \text{ — бинарная опера-$
ция на $G.\}\}$ $\{\{c4:: \text{Пара } (G, \circ)\}\}$ называется $\{\{c3:: \text{группой,}\}\}$ если $\{\{c4::$
она удовлетворяет аксиомам группы.\}

Note 3

827b57c3950c42b28c381d37a49ddf39

Сколько утверждений представлено в наборе аксиом из определения группы (G, \circ) ?

■ Три.

Note 4

f526d0257921478ca77a37b97abb9d06

Какова первая аксиома в наборе аксиом из определения группы (G, \circ) ?

■ Операция \circ ассоциативна.

Note 5

ce2298302937453e87e0cf850f17af90

Какова вторая аксиома в наборе аксиом из определения группы (G, \circ) ?

■ Для операции \circ существует нейтральный элемент.

Note 6

9f917456f2bf4fe6bf4e35f8042c9499

$\{\{c2:: \text{Нейтральный элемент}\}\}$ из определения группы (G, \circ) обычно обозначают $\{\{c1:: e.\}\}$

Note 7

3a8f693c011348fd9e88038d036a5b42

Пусть (G, \circ) — группа, $\{c4: a \in G.\}$ $\{c2: \text{Элемент } \tilde{a} \in G\}$ называется $\{c3: \text{обратным к } a,\}$ если $\{c1: \text{$

$$a \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ a = e.$$

$\}$

Note 8

13c9853893a445d9a33db6823c3a5146

Какова третья аксиома в наборе аксиом из определения группы (G, \circ) ?

■ $\forall a \in G$ существует обратный к a элемент.

Note 9

5ba5e27ac8a9481eac4302c3159a6596

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. $\{c2: \text{Обратный элемент к } a\}$ обычно обозначают $\{c1: a^{-1}.\}$

Note 10

9f4da30e71b1403a998b7c3fdf192252

$\{c2: \text{Множество всех невырожденных } n \times n \text{ матриц над полем } F\}$ вместе с $\{c3: \text{операцией умножения}\}$ $\{c1: \text{называется общей линейной группой.}\}$

Note 11

27a09e6a00d14e859d7ad1d78a4f74a3

$\{c2: \text{Общая линейная группа из } n \times n \text{ матриц над полем } F\}$ обозначается $\{c1: \text{GL}(n, F).\}$

Note 12

809c8a8f790e4a2a998a4a8038c03971

Группа (G, \circ) называется $\{c2: \text{абелевой,}\}$ если $\{c1: \text{операция } \circ \text{ коммутативна.}\}$

Note 13

e59ac970ec54461083354dae9eeb4047

Может ли группа иметь несколько нейтральных элементов?

■ Нет, нейтральный элемент единственен.

Note 14

13fee55238844118889a790b6e0c7e37

Пусть (G, \circ) — группа. Тогда если e и e' — нейтральные элементы для \circ , то $e = e'$. В чём основная идея доказательства?

■ Рассмотреть $e \circ e'$.

Note 15

afa616033db44cee8d39131bb90173bd

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. Может ли в G существовать несколько элементов, обратных к a ?

■ Нет, обратный элемент единственен.

Note 16

9f4dcde939af46639169bda602d721c5

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. Тогда если a^{-1} и \tilde{a} — обратные элементы к a , то $\tilde{a} = a^{-1}$. В чём основная идея доказательства?

■ Представить \tilde{a} как $\tilde{a} \circ (a \circ a^{-1})$.

Note 17

3db3d03590c84407bfb64b2a80b0e1c5

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c2: a, b \in G.\}\}$ Тогда

$$(a \circ b)^{-1} = \{\{c1: b^{-1} \circ a^{-1}.\}\}$$

Note 18

10144a83e52a4f5cbf0f96c818e229a5

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c3: H \subset G.\}\}$ Тогда $\{\{c4: (H, \circ)\}\}$ называется $\{\{c2: \text{подгруппой группы } (G, \circ),\}\}$ если $\{\{c1: (H, \circ) \text{ является группой.}\}\}$

Note 19

9de4580c8d2545bcad2c525fe42930ec

Пусть (G, \circ) — группа, $H \subset G$. Выражение “ (H, \circ) является подгруппой (G, \circ) ” обозначается

$$(H, \circ) \leqslant (G, \circ).$$

Note 20

bd4835b2c522436fac41030bf6b13a66

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c4:a \in G,\} \{c3:n \in \mathbb{N}.\}$

$$\{\{c2:a^n.\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \underbrace{a \circ \dots \circ a}_{n \text{ раз}}.\}\}$$

Note 21

2e41bce96a5249ca9d372d04f772b9b4

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c2:a \in G,\}$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:e.\}\}$$

Note 22

2cfa92bf39b847d4aa21d381a0d2c428

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\{\{c2:a^{-n}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: (a^{-1})^n.\}\}$$

Note 23

3994ad9b38154ec081e7042011939b50

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c3:a \in G,\} \{c2:\text{Порядком элемента } a\}$ называется $\{\{c1::\text{либо } \min \{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\}, \text{ либо } \infty, \text{ если та-}\}$ ких n не существует.}}

Note 24

78e264e39e824819ace538828da51d7c

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. $\{\{c2::\text{Порядок элемента } a\}\}$ обозначается $\{\{c1::\text{ord } a.\}\}$

Note 25

2e3b057efc1e40b1843700b41b2052b9

Пусть (G, \circ) — группа, $\{\{c3::a \in G.\}\}$ $\{\{c1::$ Множество $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ с операций $\circ\}$ называется $\{\{c2::$ подгруппой (G, \circ) , порождённой элементом $a.\}$

Note 26

fd96a89fdb1b45559782a7213101e400

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. $\{\{c2::$ Подгруппа (G, \circ) , порождённая элементом $a,\}$ обозначается $\{\{c1::\langle a \rangle.\}$

Note 27

54a6a6775d1940b09be51518008fabdc

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. Тогда если $\{\{c2::\text{ord } a < \infty,\}$ то

$$\{\{c3::\langle a \rangle\}\} \simeq \{\{c1::\mathbb{Z}_{\text{ord } a}.\}\}$$

Note 28

d83fe9abbbfca4fc99b99e08866cc83a9

Пусть (G, \circ) — группа, $a \in G$. Тогда если $\{\{c2::\text{ord } a = \infty,\}$ то

$$\{\{c3::\langle a \rangle\}\} \simeq \{\{c1::\mathbb{Z}.\}\}$$