

Лекция 07.02.22

Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. ^[2] Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

} называется ^[1] многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a .

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то ^[1] он единственен.

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p - q$. Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

^[2] Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a обозначается ^[1] $T_{a,n}f \cdot$

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«_{3} Формула Тейлора для многочленов »

Пусть p — _{2} многочлен степени не более n . Тогда _{1}

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \substack{{1}} f(a).$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left((x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \substack{{1}} \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«_{3} Свойство n раз дифференцируемой функции »

Пусть _{2} $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

_{1} Тогда $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a.$

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o -малого в терминах ε, δ .»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка D . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.)$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по n .

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

■ и расписать это равенство в терминах ε, δ .

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cd8bb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, {}_1 f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}
Тогда $f(x) = {}_1 o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a.$

«_{3} Формула Тейлора-Пеано »

Пусть _{2} $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a . _} Тогда _{1}

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aeca626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leq n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{^2\Delta_{a,b}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{^1\left\{\begin{array}{ll} [a,b], & a \leq b, \\ [b,a], & a \geq b. \end{array}\right.\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\widetilde{\Delta}_{a,b}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{^1\left\{\begin{array}{ll} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{array}\right.\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{^2R_{a,n}f\} \stackrel{\text{def}}{=} \{^1f - T_{a,n}f\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{^3$ Формула Тейлора-Лагранжа »

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, $\{^2 f \in C^n(\Delta_{a,x})$,
 $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$. Тогда $\{^1$ найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$,
 для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна $\{^1$ теореме Лагранжа.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

| Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x ?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2e^x\} = \{1 \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\}.$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2 \sin x\} = \{1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})\}.$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2 \cos x\} = \{1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})\}.$$

Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2 \ln(1+x)\} = \{1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\}.$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\{3 \text{ Обобщённый биномиальный коэффициент} \}$ задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \{1 \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}\}, \quad \alpha \in \{2\mathbb{R}\}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2(1+x)^\alpha\} = \{1 \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \}.$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют $\{1$ биномиальным разложением.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = (-1)^k.$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{2(1+x)^{-1}\} = \{1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \}.$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть $\{3$ функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа. $\} \{2$ Тогда если

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\} \text{ то } \{1$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right), \quad (n \neq -1).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} dx = (\ln |x| + C).$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right).$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = (\ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C).$$

Note 5

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x dx = \left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right).$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

«^{5} Критерий возрастания функции на промежутке »

Пусть ^{4} $f \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируема на (A, B) . Тогда

- ^{2} $f \nearrow$ на $\langle A, B \rangle$ ^{3} \iff ^{1} $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B)$.

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

«^{5} Достаточное условие строгого убывания функции на промежутке »

Пусть ^{4} $f \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируема на (A, B) . Тогда

- ^{2} $f \searrow$ на $\langle A, B \rangle$ ^{3} \iff ^{1} $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (A, B)$.

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

«^{5} Критерий постоянства функции на промежутке[}]»

Пусть ^{4} $f \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируема на (A, B) . Тогда

- ^{2} f постоянна на $\langle A, B \rangle$ ^{3} \iff [}] ^{1} $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [A, B]$.

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть ^{3} $f, g \in C[A, B]$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда
Если ^{2} $f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

} TO ^{1}

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть ^{3} $f, g \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда
Если ^{2} $f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

} TO ^{1}

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется ^{2} точкой максимума функции f , ^{1} если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a).$$

}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется ^{2} точкой строгого максимума функции f , ^{1} если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется ^{2} точкой минимума функции f , ^{1} если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geq f(a).$$

}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется ^{2} точкой строгого минимума функции f , ^{1} если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если ^{2} точка a является точкой минимума или максимума функции f , ^{1} то a называется ^{1} точкой экстремума f .

Note 15

98f3cebfb02ca464ab3cf9e94355caaa2

«^{3} Необходимое условие экстремума »

Пусть ^{2} $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a . Тогда ^{1} если a является точкой экстремума f , то $f'(a) = 0$. }

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к $f|_{[a-\delta, a+\delta]}$ для δ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется ^{1} стационарной точкой функции f , если ^{2}

$$f'(a) = 0.$$

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда ^{1} точка $a \in (A, B)$ называется ^{2} критической точкой, если ^{1} либо a стационарна для f , либо f не дифференцируема в точке a .

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда все ^{2} точки экстремума f , принадлежащие (A, B) , лежат в ^{1} множестве её критических точек.

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{^3 \max f([a, b])\} = \{^1 \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}, \}$$

где C — ^{2} множество критических точек f .

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

«_{{4} Достаточное условие экстремума в терминах f' _}»

Пусть _{{3} $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если _{{1}

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

_} то _{{2} a — точка строго максимума f . _}

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

«Достаточное условие экстремума в терминах f' »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если _{{1}

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

_} то _{{2} a — точка строго минимума f . _}