

## Note 1

61211f8d77d34c9fa47e8872540de683

Каков первый шаг в доказательстве любого из законов де Моргана?

Рассмотреть произвольный элемент  $a$ , принадлежащий левой (или правой) части соответствующего равенства.

## Note 2

7e46fe30f7624833823e79c0fedc16df

Какова основная идея доказательства любого из законов де Моргана?

Надо показать, что условие принадлежности произвольного элемента  $a$  левой части совпадают с таковыми для правой части.

## Note 3

010c7f55d37742fea697ec54e1b20715

Как показать, что произвольное бесконечное множество  $A$  содержит счётное подмножество?

Выбрать

- $a_1$  из  $A$ ,
- $a_2$  из  $A \setminus \{a_1\}$ ,
- $a_3$  из  $A \setminus \{a_1, a_2\}$ ,
- ...

Получим счётное множество  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A$ .

## Note 4

61cad32098d341eb8086313887d6cd8c

Как показать, что любое бесконечное подмножество  $B$  счётного подмножества  $A$  счётно?

Пронумеровать элементы множества  $B$  в порядке их появления в последовательности  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  элементов множества  $A$ .

### Note 5

3639a29f97084a048aae918aefdb9100

Пусть  $A$  — счётное множество,  $B \in A$ . Что можно сказать о множестве  $B$ ?

■  $B$  не более чем счётно.

### Note 6

bad29a5101fe46c3bd91ed4d7f33015b

Как показать, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно?

■ Расположить элементы множеств по строкам в таблицу и пронумеровать их в порядке их появления на “побочных” диагоналях.

### Note 7

23eae0cde4e049379eab7d391cd31769

Как показать, что множество  $\mathbb{Q}$  счетно?

■ Представить его как объединение не более чем счетного семейства не более чем счётных множеств  $\{\mathbb{Q}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , где

$$\mathbb{Q}_q := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### Note 8

fa0bde6f987c45f9b12f1e7a19f5ed7f

Пусть  $[a, b]$  — невырожденный отрезок. Как можно задать биекцию  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ ?

$$\varphi(x) = \frac{(x - a)^n}{(b - a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Note 9

d7dc9d0004e9406e8bedb136412f6d07

Как доказать, что для любого бесконечного множества  $A$  и его конечного подмножества  $B$  (пусть  $|B| = m$ )

$$A \setminus B \sim A?$$

Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

несовпадающих элементов множества  $A$  такую, что первые её  $m$  элементов — это все элементы множества  $B$ . Обозначим теперь

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_{k+m}, & x = x_k, \\ x, & x \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Тогда  $\varphi : A \rightarrow A \setminus B$  — биекция, а значит  $A \setminus B \sim A$ .

### Note 10

75dda33bf56f4c7dae2140052f8d6f52

Как доказать, что  $[0, 1] \sim \mathbb{R}$ ?

- $[0, 1] \sim (0, 1)$ , поскольку  $(0, 1) = [0, 1] \setminus \{0, 1\}$ ,
- $(0, 1) \sim \mathbb{R}$ , поскольку  $\cot(\pi x)|_{(0,1)}$  — биекция.

Получаем  $[0, 1] \sim (0, 1) \sim \mathbb{R} \implies [0, 1] \sim \mathbb{R}$ .

### Note 11

c8ec225de29d4338add7adcea48cc2a2

Приведите пример системы вложенных отрезков в множестве  $\mathbb{Q}$  для которой не выполняется аксиома Кантора.

Можно рассмотреть последовательность вложенных отрезков

$$\{[1; 2], [1, 4; 1, 5], [1, 41; 1, 42], [1, 414; 1, 415], \dots\}$$

концы которых — все более и более точные десятичные приближения иррационального числа  $\sqrt{2}$ .

### Note 12

e12a9ee541074f3f83c0236b906973d1

$$A \setminus (A \setminus B) = \{\{c1:: A \cap B.\}\}$$

### Note 13

59b526f72a4343fb936d1fa20561c886

Как доказать, что  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ ?

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= C_n^k \cdot \left( \frac{n+1}{k+1} \right) \\ &= C_n^k \cdot \left( 1 + \frac{n-k}{k+1} \right) \\ &= C_n^k + \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= C_n^k + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= C_n^k + C_n^{k+1}. \end{aligned}$$

### Note 14

a20a03ca2ebe4b5d85249845f15f1561

Как доказать, что во всяком конечном подмножестве  $\mathbb{R}$  есть наибольший элемент?

По индукции:

- максимум множества из одного элемента есть сам этот элемент;
- максимум множества из  $n > 1$  элемента есть либо максимум каких-либо  $n - 1$  его элементов, либо значение оставшегося  $n$ -ого элемента.

### Note 15

02fab2f581504672bc9dc06a5dfa4166

Как доказать, что во всяком непустом ограниченном сверху множестве  $A \subset \mathbb{Z}$  есть наибольший элемент?

Выберем произвольный  $x_0 \in A$  и обозначим

$$A_0 = \{x \mid x \in A \wedge x \geq x_0\},$$

$$A_1 = A \setminus A_0.$$

Тогда  $A_0$  — конечное подмножество  $\mathbb{R}$ , а значит существует  $\max A_0$ . При этом для любого  $x \in A$  имеем два случая:

1. если  $x \in A_0$ , то  $x \leq \max A_0$  по определению максимума;
2. если  $x \notin A_0$ , то по построению  $A_0$  имеем

$$\forall \hat{x} \in A_0 \quad x < \hat{x},$$

а значит  $x < \max A_0$ .

В любом случае имеем  $x \leq \max A_0$ , так что  $\max A_0 = \max A$  по определению.

## Note 16

c7dd2e717d9e47199cf723b912cf4e34

Как доказать, что во всяком интервале есть хотя бы одно рациональное число?

Пусть  $(a, b)$  — интервал в  $\mathbb{R}$ . Тогда по аксиоме Архимеда

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad n > \frac{1}{b-a} \implies b-a > \frac{1}{n}.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

## Note 17

9428e0290086401db17d784b26f66839

Если  $\forall \varepsilon > 0 \quad |b-a| < \varepsilon$ , то  $\{\{c1:: a = b.\}\}$

**Note 18**

3eaaa1f0f8624d8db6fa6824b7394a4a

Как доказать, что если  $\forall \varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon$ , то  $a = b$ ?

Допустим, что  $a \neq b$ . Тогда для  $\varepsilon = |b - a| > 0$  не выполняется  $\varepsilon < |b - a| \implies$  противоречие  $\implies a = b$ .

**Note 19**

d8e380894b49477d9b690778e94ae82c

Как доказать, что у любой последовательности может быть не более одного предела?

Из определения предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |b - x_n| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon \implies a = b$ .

**Note 20**

1e1fe886e2334eb18a97c2ab2cfadc49

Как доказать, что любая сходящаяся последовательность ограничена сверху?

Пусть  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ . Возьмём  $\varepsilon = 1$ ; тогда по определению предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a - 1 < x_n < a + 1,$$

т.е. множество  $A := \{x_n \mid n > N\}$  ограничено сверху значением  $a + 1$ , но тогда все множество  $A$  ограничено сверху значением

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_N, a + 1\}.$$

**Note 21**

4712e0fed7a44e8bac81bae5c16d1810

Если  $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon$ , то  $\{[c1:: a \leq b.]\}$

**Note 22**

b0c8d698cc304040a59c01dc5852ed8b

Как доказать, что если  $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon$ , то  $a \leq b$ ?

Допустим, что  $a > b$ . Тогда для  $\varepsilon = a - b > 0$  не выполняется  $a - b < \varepsilon \implies$  противоречие  $\implies a \leq b$ .

**Note 23**

f492d02ab40942c3bb31727a84b97f36

Как доказать теорему о предельном переходе в неравенстве для последовательностей?

Пусть  $x_n \rightarrow a, \quad y_n \rightarrow b, \quad \forall n \quad x_n \leq y_n$ .

Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad & \begin{cases} a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n, \\ y_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\ \implies a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n \leq y_n < b + \frac{\varepsilon}{2} & \\ \implies a - b < \varepsilon. & \end{aligned}$$

Получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon \implies a \leq b$ .

**Note 24**

6d56b828715344a4981b505177237b3d

Как доказать теорему о сжатой последовательности?

Пусть  $x_n \rightarrow a, \quad z_n \rightarrow a, \quad \forall n \quad x_n \leq y_n \leq z_n$ .

Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad & \begin{cases} a - \varepsilon < x_n, \\ z_n < a + \varepsilon \end{cases} \\ \implies a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon & \\ \implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon & \\ \stackrel{\text{def}}{\implies} y_n \rightarrow a. & \end{aligned}$$

**Note 25**

120b6a6635764d8eb06a8353c96ff71c

Как доказать, что  $\forall \{x_n\} \quad x \rightarrow a \iff x - a \rightarrow 0$ ?

Из определения предела

$$\begin{aligned} x \rightarrow a &\stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x - a| < \varepsilon \\ &\stackrel{\text{def}}{\iff} x - a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Note 26**

ee8b4fecca4148bcb931714d65a0f370

Как доказать, что произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая?

Пусть  $x_n \rightarrow 0$ ,  $\exists M > 0 \quad \forall n \quad |y_n| \leq M$ .

Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \\ \implies |x_n y_n| < \varepsilon \stackrel{\text{def}}{\implies} x_n y_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Note 27**

40b8a99aaa204cab959c483aa6fee51c

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ , то

$$x_n + y_n \rightarrow a + b?$$

Из определения предела

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\ \implies |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \\ \stackrel{\text{def}}{\implies} x_n + y_n \rightarrow a + b. \end{aligned}$$



**Note 28**

e6c2b0c279e043f4b1582b4b93a0a695

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ , то

$$x_n y_n \rightarrow ab?$$

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= x_n y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= \underbrace{x_n}_{\text{огр.}} \underbrace{(y_n - b)}_{\text{б.м.}} - \underbrace{b}_{\text{огр.}} \underbrace{(x_n - a)}_{\text{б.м.}} \rightarrow 0 \\ &\implies x_n y_n \rightarrow ab. \end{aligned}$$

**Note 29**

0ad2f5ec6e414af58c65e717bab87321

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a \neq 0$ , то  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  ограничена?

Возьмем  $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ . Тогда по определению предела

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| &< \frac{|a|}{2} \\ \implies |a| = |a - x_n + x_n| &\leq |x - x_n| + |x_n| < \frac{|a|}{2} + |x_n| \\ \implies \forall n > N \quad |x_n| &> \frac{|a|}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим  $k := \min \left\{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, \frac{|a|}{2} \right\}$ . Тогда

$$\forall n \quad \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{k}.$$

**Note 30**

321261a3f4294e4e93998ebc9b7ee7b6

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a$ , то

$$\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{a}?$$

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a} = \underbrace{(a - x_n)}_{\text{б.м.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x_n a}}_{\text{огр.}} \rightarrow 0$$

$$\implies \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

### Note 31

c0d240f325d2436fa82b626d092650ad

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b \neq 0$ , то

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}?$$

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

### Note 32

935ce2afa1d8446eaf3c05d6a8e7cc9f

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow a$ , то  $|x_n| \rightarrow |a|$ ?

Из определения предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\implies ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon \xrightarrow{\text{def}} |x_n| \rightarrow |a|.$$

### Note 33

530467bc97fb479e9e07f028a0339d42

Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$  и  $\{y_n\}$  ограничена снизу. Как доказать, что

$$x_n + y_n \rightarrow +\infty?$$

$\{y_n\}$  ограничена  $\implies \exists m > 0 \quad \forall n \quad y_n > m$ .

Тогда из определения предела

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > E - m$$

$$\implies x_n + y_n > E \xrightarrow{\text{def}} x_n + y_n \rightarrow +\infty.$$

**Note 34**

c6a76a8262d54e07a6c35d1ef23fb6df

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow +\infty$ , то  $(-x_n) \rightarrow -\infty$ ?

Из определения предела

$$\begin{aligned} \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > E \\ \implies -x_n < -E \stackrel{\text{def}}{\implies} (-x_n) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

**Note 35**

f3549ee7a37d4d2983df8f7b6f7308e2

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow -\infty$  и  $\{y_n\}$  ограничена сверху, то

$$x_n + y_n \rightarrow -\infty?$$

Очевидно, что  $-x_n \rightarrow +\infty$  и  $\{-y_n\}$  ограничена снизу, значит

$$-x_n - y_n \rightarrow +\infty \implies x_n + y_n \rightarrow -\infty.$$

**Note 36**

2a9c150676e64b28b32989c7bb381a61

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow \infty$  и  $\{y_n\}$  ограничена, то

$$x_n + y_n \rightarrow \infty?$$

$\{y_n\}$  ограничена  $\implies \exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad m < y_n < M$ .  
Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad & \begin{cases} x_n > E - M, \\ x_n < -E - m \end{cases} \\ \implies \begin{cases} x_n + y_n > E, \\ x_n + y_n < -E \end{cases} & \implies |x_n + y_n| > E \\ & \stackrel{\text{def}}{\implies} x_n + y_n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Note 37**

8eb238f0ba4e4993a464d39c5aa7d5ad

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow \pm\infty$  и  $\forall n \quad y_n \geq b > 0$ , то

$$x_n y_n \rightarrow \pm\infty?$$

Докажем для определённости случай с  $x_n \rightarrow +\infty$ .  
Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > \frac{E}{b} \\ \implies x_n y_n > E \xrightarrow{\text{def}} x_n y_n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Note 38**

136d69a689a14768bf3886968976cd48

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow \pm\infty$  и  $\forall n \quad y_n \leq b < 0$ , то

$$x_n y_n \rightarrow \pm\infty?$$

Докажем для определённости случай с  $x_n \rightarrow +\infty$ .  
Тогда из определения предела

$$\begin{aligned} \forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > \frac{E}{b} \implies x_n b < E \\ \implies x_n y_n \leq x_n b < E \implies x_n y_n < E \\ \xrightarrow{\text{def}} x_n y_n \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

**Note 39**

42c2ac7685c94559ac1625d9957beaef

Как доказать, что если  $x_n \rightarrow \infty$  и  $\forall n \quad |y_n| \geq b > 0$ , то

$$x_n y_n \rightarrow \infty?$$

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow \infty \implies |x_n| \rightarrow +\infty \implies |x_n y_n| \rightarrow +\infty \\ \implies x_n y_n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$