

# Лекция 07.02.22

## Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$ . Тогда  $V$  называется линейным подпространством, если

1.  $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$ ,
2.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$ .

}}

## Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « $V$  есть линейное подпространство в  $W$ » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

## Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда  $V$  — тоже линейное пространство.

## Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в  $\mathbb{R}^n$ ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

## Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $A \sim m \times n$ . Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку  $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$ .

## Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть  $V \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Тогда всегда существует  $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2:m \times n\}\}}$  такая, что  $\{\{c1::$

$$V = \ker A.$$

$\}\}$

## Note 7

eecf9dfacd2b41218565f8582275c53b

Пусть  $V = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Как найти матрицу такую, что  $\ker A = V$ ?

Строки матрицы  $A$  – (транспонированная) ФСР соответствующей СЛАУ.

## Note 8

dc6727a8588c412db845f88bf547fd9e

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$ . Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в  $W$ ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоже является их линейной комбинацией.

## Note 9

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть  $W$  – линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

Да, всегда.

## Note 10

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть  $W$  – линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

■ Нет, не всегда.

### Note 11

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\{\{c2:: V_1 + V_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}$$

### Note 12

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}$$

### Note 13

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

### Note 14

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$  и  $e_1, e_2, \dots, e_k$  —  
 $\{\{c2:: \text{базис в } V.\}$  Тогда в  $W$  существует базис вида  $\{\{c1::$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

### Note 15

7e41e14368b94d50be88ce5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

Дополнить базис в  $V_1 \cap V_2$  до базисов в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно и построить на их основе базис в  $V_1 + V_2$ .

## Note 16

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$  — базис в  $V_1$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_2$ .

Как можно построить базис в  $V_1 + V_2$ ?

$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_1 + V_2$ .

## Note 17

d6aa3bacb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$  — базис в  $V_1$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_2$ .

Как доказать, что

$$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$$

— базис в  $V_1 + V_2$ ?

Показать, что  $\forall i \quad g_i \notin V_1$ , а значит

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus \mathcal{L}(g_1, \dots, g_q).$$

# Семинар 09.02.22

## Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  называют матрицу  $C$  такую, что для любого  $v \in V$ , если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

## Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  обычно обозначают  $C_{e \rightarrow e'}$ .

## Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу  $C_{e \rightarrow e'}$ ?

Столбцы  $C_{e \rightarrow e'}$  — это координаты векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Лекция 14.02.22

### Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Сумму  $V_1 + V_2$  называют прямой суммой, если  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

### Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

### Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$  — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ;
- Для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно.

### Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно, то  $V_1 + V_2$  — прямая сумма?

■ Показать, что если  $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$ , то  $v_1 = v_2 = 0$ .

### Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

- $\dim V \leq \dim W$ ;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$ .

## Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется **линейным отображением**, если

- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

## Note 7

4008d3f9d224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

## Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор  $f : V \rightarrow W$  называется **изоморфизмом линейных пространств**, тогда и только тогда, когда  $f$  — биекция.

## Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства  $V$  и  $W$  называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

## Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

## Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если  $f : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $f^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

## Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

## Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть  $V, W$  — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

## Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора  $f$  в паре базисов в  $V$  и  $W$  соответственно называют матрицу  $A$ , переводящую координаты любого вектора  $v \in V$  в координаты вектора  $f(v) \in W$  в соответствующих базисах.

## Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в  $V$ ,
- $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$  — базис в  $W$ .

Как в явном виде задать матрицу оператора  $f$  в этих базисах?

$j$ -ый столбец — это координаты вектора  $f(e_j)$  в базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ .

## Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?



$$f(e) = \tilde{e}A.$$

### Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где  $\lambda$  — координаты вектора из  $V$  в базисе  $e$ .

### Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

### Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

## Лекция 21.02.22

### Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисах  $e$  и  $\tilde{e}$  соответственно. Как преобразуется матрица  $A$  при замене базисов  $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$ ?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисе  $e$ . Как преобразуется матрица  $A$  при замене базиса  $e \rightarrow e'$ ?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  и  $A'$  — матрицы оператора  $f$  в двух базисах  $e$  и  $e'$  соответственно. Тогда  $\det A' = \det A$ .

### Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора  $f : V \rightarrow V$  называется определитель матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора  $f : V \rightarrow V$  называется ранг матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы  $A$  обозначается  $\text{tr } A$ .

## Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть  $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$ . Тогда  $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$ .

## Note 8

e0b3b870a8444704a8569d15e3f761ed

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда

$$\operatorname{tr}(BA) = \{\{c1::\operatorname{tr}(AB)\}\}$$

## Note 9

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

## Note 10

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

## Note 11

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

## Note 12

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft V$ ?

Да, поскольку линейная комбинация нулей  $f$  — тоже нуль  $f$ .

### Note 13

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft W$ ?

■ Нет,  $\ker f \triangleleft V$ .

### Note 14

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft W$ ?

Да, поскольку  $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

### Note 15

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft V$ ?

■ Нет,  $\operatorname{im} f \triangleleft W$ .

### Note 16

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Как связаны размерности  $V$ ,  $\ker f$  и  $\operatorname{im} f$ ?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

### Note 17

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Дополнить базис в  $\ker f$  до базиса в  $V$  и построить из них базис в  $\operatorname{im} f$ .

### Note 18

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $\ker f$ ;
- $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V$ .

Как выглядит базис в  $\operatorname{im} f$ ?

$$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n).$$

### Note 19

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f.$$

### Note 20

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как показать, что

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f?$$

Показать, что в координатном выражении  $\operatorname{im} f$  есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора  $f$ .

### Note 21

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Пространство  $V \triangleleft W$  называется инвариантным относительно оператора  $f$ , если

$$f(V) \subset V.$$

}}

## Note 22

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора  $f : W \rightarrow W$ .

|

$\ker f, \operatorname{im} f$ .

## Note 23

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — дополнение до базиса в  $W$  базиса  $e_1, e_2, \dots, e_k$  в инвариантном подпространстве  $V \triangleleft W$ . Тогда матрица оператора  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  примет вид

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

где  $T_{11}$  — это матрица  $f|_V$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

# Лекция 28.02.22

## Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор  $f : W \rightarrow W$  называется невырожденным, если  $\det f \neq 0$ .

## Note 2

2e565e676da342fb8cdac4d62de05e8

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1.  $f$  невырождено;
2.  $\ker f = \{0\}$ ;
3.  $\operatorname{im} f = V$ ;
4.  $\operatorname{rk} f = \dim V$ ;
5.  $f$  — биекция.

## Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — невырожденный оператор, то  $f$  — биекция?

Показать, что если  $f$  задаётся матрицей  $A$ , то  $f^{-1}$  задаётся матрицей  $A^{-1}$ .

## Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — биекция, то  $f$  — невырожденный оператор.

$$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

## Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда число  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется собственным значением оператора  $f$ , если

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

## Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда вектор  $v \in V \setminus \{0\}$  называется собственным вектором оператора  $f$ , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

## Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

Спектром оператора называется множество собственных значений этого оператора.

## Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

Спектр оператора  $f$  обозначается  $\text{spec } f$ .

## Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\lambda$  является собственным значением  $f$  тогда и только тогда, когда

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

## Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора  $f$ .



## Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора  $f$ .

## Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной  $\lambda$ ?

Если  $A$  — матрица оператора  $f$ , то  $|A - \lambda E|$  — многочлен переменной  $\lambda$ .

## Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$|A - \lambda E| = |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$$

## Лекция 07.03.22

### Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Характеристический многочлен оператора  $f$  обозначается

$$\chi_f.$$

}}

### Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор и  $V \triangleleft W$  инвариантно относительно  $f$ . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

### Note 3

6deecf304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор и  $V \triangleleft W$  инвариантно относительно  $f$ . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что  $\chi_f$  — определитель соответствующей квадратной матрицы оператора  $f$ .

### Note 4

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Множество всех собственных векторов  $f$  с собственным значением  $\lambda$ , объединённое с нулём, обозначается  $V_f(\lambda)$ .

}}

### Note 5

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Тогда  $V_f(\lambda)$  называется собственным подпространством оператора  $f$ .

## Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fe38f36

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . В кратком выражении

$$\llbracket c2:: V_f(\lambda) \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket c1:: \ker(f - \lambda E) \rrbracket$$

## Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

■ Да, всегда, потому что  $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$ .

## Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\llbracket c1:: \text{Размерность } V_f(\lambda) \rrbracket$  называют  $\llbracket c2:: \text{геометрической кратностью собственного значения } \lambda \rrbracket$

## Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\llbracket c2:: \text{Геометрическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$  обозначается  $\llbracket c1:: S_f(\lambda) \rrbracket$

## Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\llbracket c1:: \text{Кратность } \lambda \text{ как корня } \chi_f \rrbracket$  называют  $\llbracket c2:: \text{алгебраической кратностью собственным значением } \lambda \rrbracket$

## Note 11

856a933db82641cd87b0ce5f34647b1a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\llbracket c2:: \text{Алгебраическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$  обозначается  $\llbracket c1:: m_f(\lambda) \rrbracket$

## Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Тогда  $\{\{c1::S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda).\}\}$

## Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Тогда  $S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)$ .

В чем основная идея доказательства?

Показать, что  $V_f(\lambda)$  инвариантно относительно  $f$   
 $\implies \chi_f$  делится на  $\chi_{\tilde{f}}$ , где  $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$ .

## Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ ,  $\{\{c2::\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}.\}\}$  Тогда

$$\{\{c3::\chi_{\tilde{f}}(t)\}\} = \{\{c1::(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}\}\}$$

## Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ ,  $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$ . Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

$\tilde{f}$  представляется матрицей  $\lambda E$  порядка  $\dim V_f(\lambda)$ .

## Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

$\{\{c2:: \text{Оператор } f : x \mapsto \lambda x, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},\}\}$  называется  $\{\{c1:: \text{скаляр-ным оператором.}\}\}$

## Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть  $\{\{c3:: f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}\}$   $f$  называется  $\{\{c2:: \text{диагонализуемым оператором,}\}\}$  если  $\{\{c1:: \text{существует базис в } V, \text{ в котором матрица оператора } f \text{ является диагональной.}\}\}$

## Note 18

b01b69fc3ebc4c0c839a0c153f85d041

Диагональная матрица с элементами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  на диагонали обозначается

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

## Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Если в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  матрица оператора  $f$  равна  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — собственные векторы  $f$ .

## Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Если в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  матрица оператора  $f$  равна  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — собственные значения  $f$ .

## Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда оператор  $f$  диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого собственного значения  $\lambda$

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

## Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

Покзать, что если  $f$  представляется матрицей  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то по определению

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_i - \lambda).$$

## Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  — различные собственные значения оператора  $f$ ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов  $v_1, \dots, v_n$  линейно независима.

}}

## Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — различные собственные значения оператора  $f$ ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов  $v_1, \dots, v_n$  линейно независима.

В чем основная идея доказательства?

Применяем  $f$  к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

## Note 25

cfc344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

Составить систему векторов из базисов в  $V_f(\lambda_j)$  и показать, что она является базисом  $V$ .

## Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

Из условия  $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$ , а значит система содержит  $\deg \chi_f = \dim V$  элементов.

## Note 27

5fd54902e7f34d00bad322902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов  $v_1, \dots, v_n$ , где  $v_j \in V_f(\lambda_j)$ .

## Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор  $f : V \rightarrow V$  имеет  $\dim V$  различных собственных значений, то  $f$  диагонализуем.

## Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор  $f : V \rightarrow V$  имеет  $\dim V$  различных собственных значений, то  $f$  диагонализуем.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{spec } f \quad 1 \leq S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda) = 1 \\ \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda). \end{aligned}$$

## Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$ . Оператор  $P : V \rightarrow V$ , переводящий сумму  $v_1 + v_2$  векторов из  $V_1$  и  $V_2$  соответственно в вектор  $v_1$ , называется оператором проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ .

## Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\text{im } P = V_1.$$

**Note 32**

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  – оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\ker P = \{c1:: V_2.\}$$

**Note 33**

27181bd7474e4091ace4fa9dba20ac0f

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  – оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\text{спес } P = \{c1:: \{0, 1\}.\}$$

**Note 34**

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  – оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$m_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

**Note 35**

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  – оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$S_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

**Note 36**

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  – оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$m_P(1) = \{c1:: \dim V_1.\}$$



### Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$S_P(1) = \{\{c1: \dim V_1.\}\}$$

## Лекция 14.03.22

### Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $v \in V$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Вектор  $v$  называется **корневым вектором высоты  $k$**  оператора  $f$ , если существует такое  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что

$$\begin{aligned}(f - \lambda E)^k v &= 0, \\ (f - \lambda E)^{k-1} v &\neq 0.\end{aligned}$$

}}

### Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневым вектором высоты 1 оператора  $f$  — это **собственный вектор** этого оператора.

### Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

$\lambda$  из определения корневого вектора оператора  $f$  — это всегда **собственное значение  $f$** .

### Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что  $\lambda$  из определения корневого вектора всегда является собственным значением?

■ Из определения  $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0$ .

### Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $k \geq 2$  оператора  $f$ . Тогда  $(f - \lambda E)v$  — корневой вектор высоты  $k - 1$ .

### Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $k \geq 2$  оператора  $f$ . Тогда  $(f - \lambda E)v$  — корневой вектор высоты  $k - 1$ . В чем основная идея доказательства?

© 2006 The Authors

\_\_\_\_\_

1870

I

I

 $\{ \{ \{$ 

I

I

H  
C  
C

15 SEPTEMBER 2006

I

I

IT

I

I

I  
C

J

Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению  $\lambda$ .

### Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система  $\{\{c3: \text{корневых векторов,}\} \text{отвечающих} \{c2: \text{разным собственным значениям оператора,}\} \{c1: \text{линейно независима.}\}\}$

### Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $k$  оператора  $f$ . Тогда  $\{(f - \lambda E)^{k-1}v\}$  —  $\{c1: \text{это собственный вектор оператора } f.\}$

### Note 13

59e965333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

Домножить произвольную линейную комбинацию на

$$(f - \lambda_1 E)^{k_1-1} (f - \lambda_2 E)^{k_2} \dots (f - \lambda_l E)^{k_l}$$

и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

### Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ .  $\{c1: \text{Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению } \lambda, \text{ объединённое с нулём,}\} \text{называется} \{c2: \text{корневым подпространством, отвечающим собственному значению } \lambda.\}$

### Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор.  $\{c2: \text{Корневое подпространство, отвечающее собственному значению } \lambda,\}$  обозначается  $\{c1: K_f(\lambda).\}$

### Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336e4a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Всегда ли  $K_f(\lambda) \triangleleft V$ ?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

### Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\|N_{f,k}(\lambda)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\ker(f - \lambda E)^k\|$$

### Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $k \in \mathbb{N}$ . Всегда ли  $N_{f,k}(\lambda) \triangleleft V$ ?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

### Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Как  $K_f(\lambda)$  выражается через  $N_{f,k}(\lambda)$ ?

$$K_f(\lambda) = \bigcup_{k \geq 1} N_{f,k}(\lambda)$$

### Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Тогда  $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$ .

### Note 21

efec3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Тогда  $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$ . В чем основная идея доказательства?  
TODO (?)

## Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$\{K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l)\} = \{V\}$$

## Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что сумма  $K_f(\lambda_j)$

1. является прямой,
2. порождает все пространство  $V$ .

## Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма  $K_f(\lambda_j)$  прямая?

Линейная комбинация векторов  $v_j$  из  $K_f(\lambda_j)$  — это линейная комбинация корневых векторов, отвечающих различным собственным значениям.

## Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма  $K_f(\lambda_j)$  порождает все  $V$ ?

$$\sum_{j=1}^l \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^l m_f(\lambda_j)$$

## Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

Жорданова клетка — это квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

## Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты  $q$ , соответствующая некоторому числу  $\lambda$ , обозначается

$$J_q(\lambda).$$

## Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

Жорданова матрица — это блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

## Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в  $V$  матрица  $A$  оператора  $f$  имеет жорданов вид, то  $A$  называют жордановой нормальной формой оператора  $f$ .

## Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда, если  $\{\{c1: в некотором базисе в  $V$  матрица оператора  $f$  имеет жорданов вид,\}$  то этот базис называют  $\{\{c2: жордановым базисом оператора  $f$ .\}$

## Note 31

4617ac459f3846a1b581c79a9c044b7e

« $\{\{c2: Теорема о жордановой нормальной форме\}\}$ »

$\{\{c1: Любый оператор в векторном пространстве над полем  $\mathbb{C}$  имеем жорданову нормальную форму.\}\}$

## Note 32

d8f181b2d5004a47bd308a35849eddec

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Как для  $k > 0$  соотносятся  $N_{f,k}(\lambda)$  и  $N_{f,k+1}(\lambda)$ ?

Для всех  $k$  меньше некоторого  $q$

$$N_{f,k}(\lambda) \subsetneq N_{f,k+1}(\lambda),$$

а для всех  $k \geq q$ :

$$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$

## Note 33

414400f8f69b41b58c7d5b2930735317

Каков первый шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Найти все собственные значения оператора  $f$ .

## Note 34

a79be36515f64439b4db0f075099cbc3

Каков второй шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?



Для каждого собственного значения  $\lambda$  найти все подпространства  $N_{f,k}(\lambda)$ .

### Note 35

adf2c488db4640a1aba232fba8286d63

Каков третий шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Построить жорданову лестницу в каждом из корневых подпространств  $f$ .

### Note 36

2fe8afa7a09b49a1a7219ce868aaf67e

Каков заключительный шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Объединить все построенные базисы в одну систему и построить матрицу  $f$  в полученном базисе.

## Лекция 21.03.22

### Note 1

61582b48320a46c3ad047eec84da3eb3

Пусть  $A, A' \in \mathbb{C}^{\{c3:n \times n\}}$ . Тогда матрицы  $A$  и  $A'$  называются  $\{c2: \text{подобными,}\}$  если  $\{c1: \text{существует невырожденная матрица } T \text{ такая, что}\}$

$$A = T A' T^{-1}.$$

$\}} \}$

### Note 2

6366e6bbaa1149eb8bba346a3cc38654

Отношение подобия матриц обозначается символом  $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\sim$

$\}} \}$

### Note 3

1ae63106d8d0480b82ef6f9e9b3d62bb

Подобие матриц является отношением  $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\}} \}$

### Note 4

de743729325e43f79f35a7b8c22d5bb2

Любая  $\{c2: \text{квадратная матрица}\}$  подобна  $\{c1: \text{своей жордановой нормальной форме,}\}$

(следствие из  $\{c3: \text{теоремы о жордановой форме}\}$ )

### Note 5

82aa01fcbfb7476d84662ca5802dae5b

$\{c2: \text{Две квадратные матрицы подобны}\}$   $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$   $\{c1: \text{их жордановы формы совпадают с точностью до перестановки клеток,}\}$

(следствие из  $\{c4: \text{теоремы о жордановой форме}\}$ )

### Note 6

198e1f3eef67411c89f83a35ade066d2

Пусть  $A, \Lambda, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = T^{-1} \Lambda T$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$A^k = \{c1: T^{-1} \Lambda^k T.\}$$

### Note 7

c1cf4048c475426683c811de00771765

Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Тогда

$$p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k A^k, \quad \text{где } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E.$$

### Note 8

59cb3566c41d4eca89ef63e626740c4e

Пусть  $A, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $p \in \mathbb{C}[x]$ . Тогда

$$p(TAT^{-1}) = T p(A) T^{-1}.$$

### Note 9

ad579382cf8a42caabf0b8b6a5a4d76f

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ .

$$f(\lambda E) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) E.$$

### Note 10

be2002dbe01149aa91e229d1c991143e

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Тогда

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} f(A_{11}) & 0 \\ 0 & f(A_{22}) \end{bmatrix}.$$

### Note 11

455a3d16cf6744b39c1d1e21cab4e7f5

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ . Как определяют значение

$$f(J_k(\lambda))?$$

Представляют  $f(J_k(\lambda))$  как  $f(\lambda E + \varepsilon)$  и далее используют разложение  $f$  в ряд Тейлора в точке  $\lambda E$ .

## Note 12

c435657fd33d4705ae2de65b4bf5c682

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ . Для каких  $k$  и  $\lambda$  определено значение  $J_k(\lambda)$ ?

Должен существовать многочлен  $T_{\lambda,k}f$ .

## Note 13

3450a4591ff748cb856f4578b3cda3c2

Пусть  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Многочлен  $p$  называется аннулирующим многочленом для матрицы  $A$ , если

$$p(A) = 0.$$

}}

## Note 14

34b1edb015384033870e10717e8bbdb2

«Теорема Гамильтона-Кэли»

Характеристический многочлен квадратной матрицы является для неё аннулирующим.

## Note 15

07bbead6e007486e93d2daa598a265b6

В чем ключевая идея доказательства теоремы Гамильтона-Кэли?

Для любого корневого вектора  $x$  имеем  $\chi_A(A)x = 0$ .

## Лекция 28.03.22

### Note 1

c4787ae5340942d2a27db89ea5f9d4df

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ . Билинейная форма  $f$  в  $V$  называется  $\{\{c2::\text{положительно определённой},\}\}$  если  $\{\{c1::\text{для любого } v \in V$

$$f(v, v) \geq 0; \quad f(v, v) = 0 \iff v = 0.$$

$\}\}$

### Note 2

18f442014f0e4614a642e429958b8931

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ .  $\{\{c2::\text{Скалярным произведением в } V\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{симметричная положи- тельно определённая билинейная форма в } V.\}\}$

### Note 3

cea78871e8124a29945d3540057c0c68

$\{\{c1::\text{Вещественное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением}\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{евклидовым про- странством.}\}\}$

### Note 4

79a607edba4945a4a562d9b1fd8f2ce9

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Скалярное произведение векторов  $v, w \in V$  обозначается  $\{\{c1::$

$$(v, w).$$

$\}\}$

### Note 5

717ab493f110448bb867a49b37d29d83

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ .  $\{\{c2::\text{Длиной вектора } v\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{величина } \sqrt{(v, v)}.\}\}$

### Note 6

7bc89a880fb244a78c3e204575ac9005

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ .  $\{\{c2::\text{Длина вектора } v\}\}$  обозначается  $\{\{c1::|v| \text{ или } \|v\|.\}\}$

## Note 7

de4db3a6688f4b198b8238b0e07dfce7

Длину вектора в евклидовом пространстве так же ещё называют  $\{\{c1::\text{нормой этого вектора.}\}$  В таком случае чаще используется обозначение  $\{\{c2::\|v\|.\}\}$

## Note 8

c0b109c4be9e4749ad794e9e38fffb2d

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $\{\{c3::r \in \mathbb{R}\}\}$ .  
 $\{\{c2::\text{Сферой радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  называют  $\{\{c1::\text{множество}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| = r\}.$$

$\}$

## Note 9

09b61a41cf5f45109c79e7cc61f63740

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .  
 $\{\{c2::\text{Сфера радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$S_r(v_0).$$

$\}$

## Note 10

e63df21bb26d42269a7a5d45c6b828b8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $\{\{c3::r \in \mathbb{R}\}\}$ .  
 $\{\{c2::\text{Шаром радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  называют  $\{\{c1::\text{множество}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| \leq r\}.$$

$\}$

## Note 11

d0d10cbbdb664b428b1f3284ff5321f9

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .  
 $\{\{c2::\text{Шар радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$B_r(v_0).$$

$\}$

## Note 12

a7021008185a411e99300286ac245d14

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$ .

Векторы  $v$  и  $w$  называются сонаправленными, если

$$\exists \lambda > 0 \quad v = \lambda w.$$

}}

## Note 13

0cfd3b2d9f17418eb0b8fd2dd36ef1d4

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$ .

Углом между векторами  $v, w$  называется угол  $\varphi \in [0, \pi]$  такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

}}

## Note 14

097fc51b1eab4a699e7110a38f0bd670

«Неравенство Коши-Буняковского»

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V\}$ . Тогда всегда  $|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ .

## Note 15

570b086e7e1b48e3b3012778f4841d1e

В чем основная идея доказательства неравенства Коши-Буняковского?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(v - \lambda w, v - \lambda w) \geq 0.$$

И показать, что дискриминант соответствующего квадратного уравнения  $\leq 0$ .

## Note 16

96bb9d37dba3499d8890f7b3eb1f04d4

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$|(v, w)| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v \text{ и } w \text{ пропорциональны.}$$

## Note 17

d1941ac59ee44c82b045d6d1e954e0d8

### «Неравенство треугольника»

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

}}

## Note 18

4759501bf4b84cf0acf58f945229396c

В чем основная идея доказательства неравенства треугольника?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(v + w, v + w) = \|v + w\|^2.$$

## Note 19

5378eb0c9d81404c9cd8ca40925b9ce8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff v \uparrow\uparrow w$$

## Note 20

8238aebbcc724e708990b61d8a0e3603

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Векторы  $v$  и  $w$  называются ортогональными, если  $(v, w) = 0$ .

}}

## Note 21

ce138d9eefe6445bbe72eb3cafe43e8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Система векторов в  $V$  называется ортогональной, если её векторы попарно ортогональны.

## Note 22

2dbaa8c8157c42e08de67ebd6cc42e47

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная система векторов в  $V$ . Тогда система  $\{e_j\}$  линейно независима  $\iff e_j \neq 0$  для всех  $j$ .



## Note 23

d20a32cfc1c3440a9e22f5d28c36b9d5

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная система ненулевых векторов в  $V$ . Как показать, что система  $\{e_j\}$  линейно независима?

Умножить линейную комбинацию векторов  $\{e_j\}$ , равную нулю, на  $e_i$  для произвольного  $i$  и показать равенство нулю  $i$ -ого коэффициента.

## Note 24

b9cf4cdf374445c4bc8412c8ca72847c

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональный базис в  $V$ . Тогда координаты вектора  $v$  в базисе  $\{e_j\}$  имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

## Note 25

5a4e71f923b84eb5b5f3e2b66ea26470

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональный базис в  $V$ . Как показать, что координаты вектора  $v$  в базисе  $\{e_j\}$  имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}?$$

Вычислить  $(v, e_j)$ , разложив  $v$  по базису  $\{e_j\}$ .

## Note 26

7ede17a5d2d049c690090d4850f4ef60

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная линейно независимая система в  $V$ . Тогда

$$\frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

называют коэффициентами Фурье вектора  $v$  в системе  $\{e_j\}$ .

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Система векторов  $\{e_j\}_{j=1}^n$  в  $V$  называется ортонормированной, если её векторы попарно ортогональны и  $\|e_j\| = 1$  для всех  $j$ .

## Лекция 04.04.22

### Note 1

25230410b91dd47619feafd9dd1c3909e

#### «Ортогонализация Грама-Шмидта»

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $e_1, \dots, e_n$  — базис в пространстве  $V$ . Тогда всегда существует ортогональный базис  $a_1, \dots, a_n$  в  $V$  такой, что

$$a_j \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_j) \quad \forall j.$$

}}

### Note 2

89394003d65441209a81ec6be5c7f2df

В чем основная идея доказательства истинности теоремы об ортогонализации Грама-Шмидта?

Положить

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1, \\ a_2 &= e_2 + \alpha_1 a_1, \\ a_3 &= e_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

### Note 3

067af76850ea49929f538a99ef2fb445

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Множество

$$\left\{ w \in W \mid (v, w) = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

называется ортогональным дополнением к  $V$ .

### Note 4

dc34194cc9a642aeb10ad2ba1cbab7ad

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Ортогональное дополнение к пространству  $V$  обозначается  $V^\perp$ .

### Note 5

800460fc49ee4f3b915a92addaba5141

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Всегда ли  $V^\perp \triangleleft W$ ?

■ Да, всегда.

### Note 6

ab8d62b25a294edebe7a3735b84dab19

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim V^\perp = \{\{c1:: \dim W - \dim V.\}\}$$

### Note 7

70166548d05745278d7a8f9de584d211

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

$$V + V^\perp = \{\{c1:: V \oplus V^\perp = W.\}\}$$

### Note 8

ee9a5f3a40047629e2192983ab08770

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Как показать, что  $W = V \oplus V^\perp$ ?

■ Выбрать ортогональный базис в  $V$ , дополнить его до ортогонального базиса в  $W$  и показать, что дополнение — базис в  $V^\perp$ .

### Note 9

53d600a53a4f48a7b4d1e3a3822918fe

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $e_1, \dots, e_k$  — ортогональный базис в  $V$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — ортогональный базис в  $W$ . Как показать, что  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V^\perp$ ?

■ Показать, что  $\mathcal{L}(e_{k+1}, \dots, e_n) = V^\perp$ .

### Note 10

a9fc50cec2cc442d87f7f6a551043a18

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $\{\{c3:: V \triangleleft W, w \in W.\}\}$  Тогда  $\{\{c1:: \text{проекция } w \text{ на } V \text{ параллельно } V^\perp\}\}$  называется  $\{\{c2:: \text{проекцией вектора } w \text{ на } V.\}\}$

## Note 11

bc91b5b6d4048febe0fd4e8da7302e9

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $\{V \triangleleft W, w \in W\}$ . Тогда проекция  $w$  на  $V^\perp$  параллельно  $V$  называется перпендикуляром, опущенным из  $w$  на  $V$ .

## Note 12

4e448e8833f94547ad7848fd34666613

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — система векторов в евклидовом пространстве. Матрицей Грама системы  $e_1, \dots, e_k$  называют матрицу

$$\left[ (e_i, e_j) \right] \sim k \times k.$$

}}

## Note 13

3bff6be501ed49109d5041f018ecab96

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — система векторов в евклидовом пространстве. Матрица Грама системы  $e_1, \dots, e_k$  обозначается

$$G(e_1, \dots, e_k).$$

}}

## Note 14

f45df626ca1d4db1866e3f7aae0c6f2a

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $w \in W$ ,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $V \triangleleft W$ . Как найти проекцию  $w_0$  вектора  $w$  на  $V$ ?

$$G(e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w, e_1) \\ \vdots \\ (w, e_k) \end{bmatrix},$$
$$w_0 = e\alpha.$$

## Лекция 18.04.22

### Note 1

b04c0920040847d0a5d99e72e1d5f32f

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . Расстоянием от точки  $f$  до пространства  $V$  называется величина

$$\min \{ \|f - g\| \mid g \in V \}.$$

}}

### Note 2

3c3b40b9167c47199457c3614706e26e

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . Расстояние от точки  $f$  до подпространства  $V$  обозначается

$$d(f, V).$$

}}

### Note 3

3e4d6f8b3aae4c73806dfc7764e669e3

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ ,

$$f = f_0 + f^\perp, \\ \in V \quad \in V^\perp$$

}} Тогда

$$d(f, V) = \|f^\perp\|.$$

### Note 4

d34143b5a6f347ebbd35b66500be29d0

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . В чем основная идея доказательства равенства  $d(f, V) = \|f^\perp\|$ ?

Представить  $f$  как  $f^\perp + f_0$  и явно вычислить  $\|f - g\|$  для  $g \in V$ .

### Note 5

c3802fe76b8740e28ef0bb2ce4d4aca0

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $f, g \in W$ . Угол между векторами  $f$  и  $g$  обозначается

$$(\widehat{f, g}).$$

## Note 6

d84678ac809d4c229902770a60fb6c11

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ .  $\{\{c2::$  Углом между вектором  $f$  и подпространством  $V\}$  называется  $\{\{c1::$  величина

$$\min \left\{ (\widehat{f, g}) \mid g \in V \right\}.$$

$\}$

## Note 7

75d1e7b4a26f4f578bdaf51afa099e06

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ .  $\{\{c2::$  Угол между вектором  $f$  и подпространством  $V\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$(\widehat{f, V}).$$

$\}$

## Note 8

19d3715d268b4c07a6ec6013b8a60e50

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ ,  $\{\{c3::$

$$f = f_0 + f^\perp, \\ \in V \quad \in V^\perp$$

$\}$  Тогда

$$\{\{c2:: (\widehat{f, V})\} = \{\{c1:: (\widehat{f, f_0})\}.$$

## Note 9

24059676faa84badb5f0199c24f6f28b

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . В чем основная идея доказательства равенства  $(\widehat{f, V}) = (\widehat{f, f_0})$ ?

**|** Сравнить для  $g \in V$  величины  $\cos(\widehat{f, g})$  и  $\cos(\widehat{f_0, g})$ .

## Note 10

1b70f983a1ad42c5919ee83b15a479c3

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ .  $\{\{c2::$  Параллелепипедом, натянутым на систему векторов  $\{a_j\}$  называется  $\{\{c1::$  множество

$$\left\{ \sum_{i=1}^n k_i a_i \mid k_i \in [0, 1] \quad \forall i \in [1 : n] \right\}.$$

$\}$

## Note 11

3fa74674fa86420ab3f78529ea808264

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Параллелепипед, натянутый на систему векторов  $\{a_j\}$  обозначается

$$\Pi(a_1, \dots, a_n).$$

}}

## Note 12

b967d3e120fc46c7b7bd6a4ffe07a8

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ .  $n$ -мерный объём параллелепипеда  $\Pi(a_1, \dots, a_n)$  обозначается

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n).$$

}}

## Note 13

a7e0867fc1bc4ede8b8c8baf077decb8

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $a_1 \in V$ .

$$\text{vol}_n \Pi(a_1) \stackrel{\text{def}}{=} \|a_1\|.$$

## Note 14

27fc106d10454b36acb1d4fdb4d5ebc6

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ ,  $n > 1$ .

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{vol}_{n-1} \Pi(a_1, \dots, a_n) \cdot d(a_n, \mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1})).$$

## Note 15

62dd58a35b6e41618c5f4c14ba96d7df

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$



## Note 16

8803537671b2486285e407e1661e183c

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

На каком методе основано доказательство?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 17

4644b404d3cf48b3aa477e6cf6346d8a

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

В чём основная идея доказательства (индукционный переход)?

Представить  $a_n$  как

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k + a^\perp,$$

где  $a^\perp$  — перпендикуляр из  $a_n$  на  $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1})$ .

## Note 18

5825ffe0a68e4a83a7e469b67b266431

Откуда следует корректность определения величины

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)?$$

■ Из теоремы о связи  $\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)$  с матрицей Грама.

## Note 19

8167d79d15c5496986c4ed42e064fa03

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ . Чем определение скалярного произведения для векторных пространств над  $\mathbb{C}$  отличается от определения для пространств над  $\mathbb{R}$ ?

Линейность только по первому аргументу и

$$(v, w) = \overline{(w, v)}.$$

## Note 20

b2db7b3282094eca8733437c52bba06d

Комплексное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением называется унитарным или эрмитовым пространством.)

## Note 21

dee379a767e44b7fbc29a556ce456b02

Пусть  $V$  — унитарное пространство,  $v \in V$ . Откуда следует, что  $(v, v) \in \mathbb{R}$ ?

Из аксиом линейного пространства  $(v, v) = \overline{(v, v)}$ .

## Note 22

5d93df02453b469989ec31cb02334953

Пусть  $V$  — унитарное пространство,  $u, v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v).$$

## Note 23

3c66004b6eb3476f85bb3505bdce5da3

Пример определения скалярного произведения для  $\mathbb{C}^n$ .

$$(z, w) = \sum_j z_j \overline{w_j}.$$