Лекция 07.09.22

Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

{{c2::Абсолютное значение}} мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ так же называют {{c1::порядком α.}}

Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

{{c3::Многочленом n переменных со значениями в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c4::отображение}} вида

$$x \mapsto \text{\{\{c1::} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha, \text{\}\}} \quad \text{где \{\{c2::все } c_\alpha \in \mathbb{R}^m.\text{\}\}}$$

Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \not\equiv 0$,}} то {{c3::степенью}} многочлена p называется {{c1::число

$$\max \{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}.$$

}}

Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \equiv 0$,}} то {{c3::степень}} многочлена p полагают равной {{c1::$-\infty$.}}

Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. {{c2::Степень}} многочлена p обозначается {{c1::

$$\deg p.$$

}}

Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Многочлен p называется {{c2::однородным,}} если {{c1::для всех $c_\alpha \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c5::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} {{c2::Многочлен p степени не выше s,}} для которого {{c1::

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x-a\|^s), \quad x \to a,$$

}} называется {{c3::многочленом Тейлора f порядка s в точке a.}}

Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. {{c2::Многочлен Тейлора f порядка s в точке a}} обозначается {{c1::

$$T_{a,s} f.$$

}}

Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он {{c1::единственный.}}

Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

> Разность двух многочленов есть $o(\|x-a\|^s)$, $x \to a$.

Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть p — многочлен {{c2::степени не выше s,}} {{c3::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда если

$$p(x) = o(\|x-a\|^s), \quad x \to a,$$

то {{c1::$p \equiv 0$.}}

Note 12

f753051ba1584ae3809a7b03ecf311f7

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства?

> Разбить p на однородные компоненты и рассмотреть $p(tx)$ как многочлен переменной t.

Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. Как представляется многочлен $p(tx)$ в доказательстве?

> $$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$
>
> где p_k — однородный многочлен степени k.

Note 15

8d6ee9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве, что нужно показать про многочлен $p(tx)$?

> $$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \to 0.$$

Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве мы получили, что $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$ при $t \to 0$. Что дальше?

> Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

Note 17

833c8cc496364d6fa95263abe312262d

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $a \neq 0$)?

> $p(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$.

Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,0} f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f непрерывна в точке a.}}

Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,1} f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f дифференцируемо в точке a.
}}

Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда если {{c2::f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a,}} то {{c1::

$$f(a+h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \to 0.$$

}}

Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $m = 1$ и $m > 1$.

Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m > 1$)?

> Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

> Индукция по s начиная с $s = 1$.

Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, база индукции)?

> Выразить $f(a+h)$ через дифференциал, а его через производные.

Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, индукционный переход)?

> Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}T_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}}\sum_{|\alpha|\leqslant s} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.\text{}}}$$

«{{c4::Формула Тейлора-Пеано}}»

Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ee26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> $$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leqslant s.$$

Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}T_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}}\sum_{k=0}^{s} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}.\text{}}}$$

(в терминах дифференциалов)

Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — {{c2::многочлен степени не выше s,}} $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \text{{{c1::}}} 0. \text{}}}$$

Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{{{c2::}}}\widetilde{\Delta}_{a,b}\text{}}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}}\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}\ .\text{}}}$$

Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c6::дифференцируемо $s + 1$ раз на E,}} {{c5::$a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,x}$}} для которой

$$\text{{{c3::}}}R_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}}}\frac{d_c^{s+1} f(x-a)}{(s+1)!}.\text{}}}$$

«{{c7::Формула Тейлора-Лагранжа}}»

Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо $s + 1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда $\exists c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$ для которой

$$R_{a,s}f(x) = \frac{d_c^{s+1} f(x-a)}{(s+1)!}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции
>
> $$t \mapsto f(a + th).$$

Note 33

f5319b0cf6d14e598448bc9db8842901

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\{\{c2:: \left|R_{a,s} f(x)\right| \}\} \leqslant \{\{c1:: \sup_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \frac{\left|d_c^{s+1} f(x-a)\right|}{(s+1)!}.\}\}$$

Лекция 14.09.22

Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c5::дифференцируема на E,}} {{c4::$a \neq b$ и $\Delta_{a,b} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,b}$}}, для которой {{c1::

$$f(b) - f(a) = d_c f(b-a).$$

}}

«{{c3::Теорема о среднем}}»

Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций n вещественных переменных?

> Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для **отображений** нескольких переменных?

> Нет, только для функций.

Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения 2-х переменных, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

> $x \mapsto (\cos x, \sin x),\ a = 0,\ b = 2\pi.$

Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

{{c2:: $\left\|R_{a,s} f(x)\right\|$ }}{{c3:: $\leqslant$ }}{{c1:: $\dfrac{1}{(s+1)!} \cdot \sup\limits_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \left\|d_c^{s+1} f(x-a)\right\|.$}}

«{{c4::Формула Тейлора-Лагранжа для отображений}}»

Note 6

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть $f : E \subset$ {{c5::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} {{c4::непрерывно дифференцируемо $s+1$ раз на E,}} $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\text{\{\{c3::} \|R_{a,s}f(x)\| \text{\}\}} \leqslant \text{\{\{c2::} \frac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\,\|x-a\|)^{s+1}, \text{\}\}}$$

где

$$M = \text{\{\{c1::} \max_{|\alpha|=s+1} \sup_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\| < +\infty. \text{\}\}}$$

$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$