Лекция 09.11.22

Note 1

e60e9a5778ca41aaabad4a4a7e6c4fea

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

> Обыкновенные; в частных производных.

Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

{{c2::Обыкновенные дифференциальные уравнения}} — это {{c1::уравнения относительно функции одной переменной и её производных.}}

Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

“{{c2::Обыкновенные дифференциальные уравнения}}” сокращается как “{{c1::ОДУ.}}”

Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

{{c2::Уравнения в частных производных}} — это {{c1::уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.}}

Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

{{c2::Уравнения в частных производных}} в русскоязычной среде так же называют {{c1::уравнениями математической физики.}}

Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

“{{c2::Уравнения в частных производных}}” сокращается как “{{c1::УрЧП.}}”

Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

{{c2::Порядком}} дифференциального уравнения называется {{c1::порядок старшей производной, в него входящей.}}

Note 8

69a06ae8b8d1413f84c38cc0ab521158

Является ли

$$F(x, y) = 0,\ y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

> Нет, потому что нет производных.

Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется {{c2::областью,}} если {{c1::оно открыто и связно.}}

Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f63182

ОДУ первого порядка называется {{c2::разрешённым относительно производной,}} если оно имеет вид {{c1::

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

}} где f — {{c2::функция на области в $\mathbb{R}^2$.}}

Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция y называется {{c2::решением ОДУ на множестве X,}} если {{c1::в любой точке X её подстановка её значений в ОДУ имеет смысл и приводит к верному равенству.}}

Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть y — {{c3::решение ОДУ.}} {{c1::График y}} называется {{c2::интегральной кривой этого уравнения.}}

Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

> Сколь угодно много.

Note 14

76c92fefc3414e8da3c06f458e9e80ee

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

> Найти решение, отвечающее начальным условиям.

Note 15

94e8aba670fa45eab4fae8fee8d23568

Что есть “начальные условия” из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

> $y(x_0) = y_0$ для фиксированных x_0, y_0.

Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения (x_0, y_0) в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

> Начальные данные.

Note 17

aae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

> Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0)?

> Интервал, включающий x_0.

Note 19

c6f2ec8c4ae142118b3840ddb828a96b

Как называется теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

> Теорема Пеано.

Note 20

3623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

> ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 21

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

> Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

Note 22

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

> Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

Note 23

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

> Через любую точку области проходит интегральная кривая.

Note 24

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,?$$

> Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

Note 25

7dbfe4396c5545578771b6066869de5a

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Они равны на некоторой $V_\delta(x_0)$.

Note 26

c197734ceb654182bc3221591296e2f6

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,.$$

Тогда если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то {{c1::любая точка области является точкой единственности.}}

Note 27

33930ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. При каком условии задача Коши для $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ однозначно разрешима в любой точке?

> f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны.

Note 28

785b85c103cb446090843629aba6f668

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют особым решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

Note 29

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как называется решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, любая точка графика которого не является точкой единственности?

> Особое решение.

Note 30

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют общим решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

Note 31

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как задаётся общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Отображение $\Phi(x, c)$, где c — параметр, x — переменная.

Note 32

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют частным решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Одно из решений, входящих в некоторое общее решение.

Note 33

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

{{c2::Векторное поле}} — это {{c1::отображение из линейного пространства в себя.}}

Note 34

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a36

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

> ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 35

bf5a5b553b8b4f74905e400cce49df6c

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называют полем направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

Note 36

7f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Как строится визуальное представление поля направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Через каждую точки сетки проводится соответствующе наклонённый отрезок.

Note 37

a9509cb3d319496ca4f8ce25b5b988b2

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Гладкая кривая является {{c2::интегральной кривой}} уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::в любой точке она касается соответствующего элемента поля направлений.}}

(в терминах поля направлений)

Note 38

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Что называется изоклиной уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

> Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

Note 39

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть f — функция на области в $\mathbb{R}^2$. Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

- $f(x, y) = c$ для $c \in \mathbb{R}$.

Лекция 16.11.22

Note 1

84332aa7764648b3b6b73355b0fb7064

Пусть {{c4::G — область в $\mathbb{R}^2$.}} Тогда выражение вида

$$\text{\{\{c2::}\, m(x,y)\cdot dx + n(x,y)\cdot dy = 0\,, \text{\}\}} \quad \text{где } \text{\{\{c3::}\, m, n : G \to \mathbb{R}\,, \text{\}\}}$$

называется {{c1::ОДУ первого порядка в симметричной форме.}}

Note 2

0a8383be5d30458db9ab476e9ea34e84

Что называется решением ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Решение любого из порождённых ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 3

89d64566d77b4dc7b52af28eab7dae35

Какие два уравнения порождает ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> $$\frac{dy}{dx} = \cdots \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \cdots$$

Note 4

0981a7837c7644328e3f6ccbd939ec02

Всегда ли ОДУ первого порядка в симметричной форме порождает два уравнения?

> Нет.

Note 5

0bf3be66da26454f981de93a9f57fdb4

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,.$$

{{c2::Точку, в которой и m, и n обращаются в 0,}} называют {{c1::особой точкой этого уравнения.}}

Note 6

4fb058ed5261465fbcf62958e5b93441

Как ставится задача Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Найти решение для любой из порождённых задач Коши для ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 7

0d205d054d3843c19a806774476762c0

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0\,.$$

Что называется неособой точкой этого уравнения?

> Точка, в которой либо m, либо n не обращается в 0.

Note 8

61ddfc362e5649ab9020c85dd47f4454

При каком условии ОДУ в симметричной форме гарантированно имеет решение задачи Коши?

> Если точка не является особой и функции при dx и dy непрерывны.

Note 9

0ad4cca0576a409cbb3871385860853c

Что можно сказать про ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0\,,$$

если m, n непрерывны?

> Оно имеет решение задачи Коши для любой неособой точки.

Note 10

3d3a825102e94d268fceedc112aee02b

В чём основная идея доказательства теоремы о достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Теорема Пеано для порождённого ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 11

84670525aec14b12ab1c60bc7c6cb90f

Какое есть “тонкое” место в доказательстве достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Применить теорему о стабилизации непрерывной функции для неравенства нулю в какой-то окрестности.

Note 12

e22e81451b75462bb23f42da429d0822

Какое есть дополнение к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Если обе определяющие функции не обращаются в ноль, то решение “двойственно.”

Note 13

c5937908ffc3421b88d12e29cd18618a

В каком смысле двойственно решение задачи Коши в дополнении к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Обратная функция существует (на интервале) и является решением второй из порождённых задач Коши.

Note 14

c77c237173dd4909bef0d7fbb475945a

Пусть для $m, n \in C(G)$ дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,,$$

и $y = \varphi(x)$ — решение задачи Коши в т. (x_0, y_0). Почему φ обратима (на интервале)?

> $\varphi' \neq 0$ и следствие из теоремы Дарбу о строгой монотонности.

Note 15

1408fcbdb21643b29a526f5c9c698052

Что называется точкой единственности для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Точка, являющаяся точкой единственности для обеих из порождённых задач Коши.

Note 16

f037d477228b4d1a983be67a181f7fc6

Каково условие для единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Функции при dx и dy являются гладкими и не равны нулю в точке.

Note 17

b4d211a3083b4bfca552c183c7cd0ce8

Почему в теореме о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме мы требуем неравенство нулю функций при dx и dy?

> Иначе какая-то из задач Коши не имеет смысла.

Note 18

91cb20330134439695809b01acd7909f

В каком смысле единственно решение задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме в теореме о единственность?

> Точка является точкой единственности.

Note 19

c34ebe00830e4594b9f2df519066c9f8

В чём ключевая идея доказательства теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Теорема о единственности для ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 20

83eb2e7882ac49fd950bc3c5d734f88c

Если (x_0, y_0) является точкой единственности для ОДУ первого порядка, то через неё проходит {{c1::единственная интегральная кривая.}}

Note 21

931e9e5942144396af4bc98f8d917c45

В каком смысле единственна интегральная кривая, проходящая через точку единственности для ОДУ первого порядка?

> Любые две интегральные кривые совпадают на какой-то окрестности.

Note 22

67befaeaa43b4d1daf13c54d0f3c9a18

Чем в первую очередь является интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Гладкая функция на всей области.

Note 23

6cd34528c11649468f156e7160361bc4

Какому соотношению по определению должен удовлетворять интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0\,?$$

> $$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ m & n \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Note 24

4e43bac3e13f49e890052b539cb99a0a

Интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$$

называется {{c2::гладким,}} если {{c1::$\nabla u \neq 0$ на всей области.}}

Note 25

d57e85cf8770406ca4be0153888980ff

Каково основное свойство гладкого интеграла u ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Решение уравнения $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ есть решение задачи Коши в (x_0, y_0).

Note 26

750fae6a0be8412885d8d65ccd8b532f

Пусть u — гладкий интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Для каких точек решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

есть решение задачи Коши в (x_0, y_0)?

> Для неособых.

Note 27

3ec100db172a42a4821a9c2a59df0cdc

В контексте ОДУ первого порядка в симметричной форме, для какого объекта u решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

гарантированно является решением задачи Коши в неособой точке (x_0, y_0)?

> Гладкий интеграл.

Note 28

2d035fe05f234a678fb45f0a77098ee9

В чём ключевая идея доказательства теоремы о представлении решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме через его интеграл?

> Теорема о неявной функции для $u(x, y) - u(x_0, y_0) = 0$.

Note 29

8ee64b4f58d64f3e9c544c3728edc66c

Что называется общим интегралом ОДУ первого порядка в симметричной форме?

> Выражение $u(x, y) = c$, где u — интеграл уравнения.

Note 30

4b9745c311764d9aa57c35f678ca0b4b

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Как называется выражение

$$u(x, y) = c\,?$$

> Общий интеграл.

Note 31

d24cae635b5149fca8646f3627b9bf90

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Что можно сказать о произвольном решении $y(x)$ этого ОДУ?

> $u(x, y(x)) \equiv const$ на всём интервале.

Note 32

37ad7fd23ba04b2b8bf1e5946420d716

Каким свойством должен должен обладать интеграл u ОДУ первого порядка в симметричной форме, чтобы для любого решения $y(x)$ было верно

$$u(x, y(x)) \equiv const\,?$$

> Никаким.

Лекция 23.11.22

Note 1

3ae25bc9f84c408eb1dfcf3dc3b35ed1

Какое выражение называется ОДУ с разделёнными переменными?

> $m(x)dx + n(y)dy = 0.$

Note 2

d625dac9c8dd43e0a5fa91bdeec1f8da

На каких множествах определены функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

> Некоторые два интервала.

Note 3

ec328e8cd19d4c57a27c32e263138ce7

На какой области рассматриваются ОДУ с разделёнными переменными?

> Декартово произведение областей определения функций-коэффициентов.

Note 4

5cac08cbed25499493dc1b18d0df3ce1

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

> Непрерывными.

Note 5

afa181edb7c84bdea0ac73d5a39b338e

Чем примечательны ОДУ с разделёнными переменными?

> У него есть общий интеграл в известной форме.

Note 6

8422d34d16d74daba0b88c018148285d

Как выражается интеграл $u(x, y)$ ОДУ с разделёнными переменными

$$m(x)dx + n(y)dy = 0\,?$$

> $$\int_{x_0}^{x} m + \int_{y_0}^{y} n\,.$$

Note 7

8dbb27c86a01499b83be44a189e22c09

При каком условии интеграл ОДУ с разделёнными переменными является гладким?

> Если нет особых точек.

Note 8

af655cb8e5aa41348f1b128abe72c8f2

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ с разделёнными переменными?

> Любая точка из области определения.

Note 9

a7ee1153931c46d59a1a71e028b00b0a

Как на практике задаётся общий интеграл ОДУ с разделёнными переменными?

> С неопределёнными интегралами.

Note 10

dd91a079474849748c001328b0709b66

Что называется ОДУ с разделяющимися переменными?

> ОДУ в симметричной форме, у которого коэффициенты представляются как произведения функций одной переменной.

Note 11

4405ce3a7fc64f66a33baddd2945d5e2

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделяющимися переменными?

> Непрерывными.

Note 12

7007d702730d4b4bb53ea6b9fc990bfa

Какие ОДУ называются уравнениями в полных дифференциалах?

> Оду в симметричной форме, представимые в виде $du = 0$, где u — гладкая функция на области.

Note 13

a18c66c2343a4d1ab182426f9393edac

Представимость $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ в виде $du = 0$ в определении ОДУ в полных дифференциалах означает, что

{{c1::

$$\nabla u = (m, n).$$

}}

Note 14

5c173b6af64a42a48e1a9e79cf27b712

Чем примечательны ОДУ в полных дифференциалах?

> У них есть общий интеграл в известной форме.

Note 15

ce9b4078bbd64be0893565bf2b878c9d

Как выражается интеграл ОДУ в полых дифференциалах?

> Функция u из определения и есть интеграл.

Note 16

d545e5481d8648c084c87047ded49bc4

Как определить, является ли уравнение ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

ОДУ в полных дифференциалах?

> Является $\iff m'_y = n'_x$.

Note 17

385f908cec6342339c9a708dc9e734a5

Что можно сказать о ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,,$$

если $m'_y \equiv n'_x$?

> Это ОДУ в полных дифференциалах.

Note 18

2d3ee1ddf95c48f0b570c8fcbf997605

Какими должны быть функции-коэффициенты ОДУ в симметричной форме в критерии ОДУ в полных дифференциалах?

> Гладкими (т.е. из C^1.)

Note 19

e5db36f5f9f8404e8d347d5f20461e67

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (необходимость)?

> Достаточное условие равенства вторых производных.

Note 20

188e7ec06df04d23872b628d4ae87856

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (достаточность)?

Явно предоставить интеграл u.

Note 21

de914195b18342b8bf511d5f61cfb004

Как выражается интеграл ОДУ в полных дифференциалах

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0\,?$$

$$\int_{x_0}^{x} m(\,\cdot\,,y) + \int_{y_0}^{y} n(x_0,\,\cdot\,)\,.$$

(или, аналогично, y_0 и x)

Note 22

e0c076b820de4d93b46b1b2098c87e2c

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ в полных дифференциалах?

Любая точка из области определения.

Note 23

e55223eb41114fe092beeffc38509358

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

Функция и её производная по параметру непрерывны.

Note 24

766a804de4ef42379f53963b92bd5472

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^2,\ f, f'_y \in C(E)$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\,dx\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,.\text{\}\}}$$

Семинар 10.11.22

Note 1

53d901a2d9e34a6f8caeebc01a48fbeb

Как решаются ОДУ с разделяющимися переменными?

> Собрать все с x и все с y с разных сторон и проинтегрировать.

Note 2

6ec2b60aaf164b1ab14b191fd853fc08

Какое есть "тонкое" место при решении ОДУ с разделяющимися переменными?

> Отдельно рассматривать случай равенства нулю при делении.

Note 3

56d9aa3e00934312bd51c5b2873b2733

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция f называется {{c2::однородной степени q,}} если {{c1::

$$f(\lambda x) = \lambda^q f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

}}

Note 4

99f9700eabbf4ae6aa184065479b2aab

Какие ОДУ называются однородными?

> Зависит от типа ОДУ.

Note 5

1a1f83b72fc544d0bbc883e1d551a4ab

Какие ОДУ первого порядка в симметричной форме называются однородными?

> Обе определяющие функции являются однородными одной степени.

Note 6

f1642f7a316a46b7873c4f05c9aabc18

Какие ОДУ первого порядка, разрешённые относительно производной, называются однородными?

> Определяющая функция является однородной нулевой степени.

Note 7

575d0a91af124785806cfd53d6872fe0

Как можно показать, что ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной является однородным?

> Представить правую часть как функцию от $\frac{y}{x}$.

Note 8

8211f8127d8b4dc38252a59d920e70b8

Как решаются однородные ОДУ?

> $y = tx$ и выразить dy.

Note 9

1a7488f29ba54697ac88b71b8158f763

Почему для однородных ОДУ работает подстановка $y = tx$?

> Из однородности выносится и сокращается x.

Семинар 24.11.22

Note 1

ace60f48b6414173867b0ab70d5e367f

Как решаются ОДУ в симметричной форме с линейными коэффициентами?

> Заменой переменных сводятся к однородным.

Note 2

245fd749caee40409a18db2183e4ba4f

{{c2::Уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

}} называются {{c1::линейными ОДУ первого порядка.}}

Note 3

c436a0567cc849e38bfb6e9f64e5a7be

Как называется метод решения линейных ОДУ первого порядка?

> Метод Бернулли.

Note 4

23dafe9e59384eadab89ccf1265da08a

Какие ОДУ решаются методом Бернулли?

> Линейные ОДУ первого порядка.

Note 5

59ace38917f5481e968e4f918be1aacd

В чём основная идея метода Бернулли для решения линейных ОДУ первого порядка?

> Представить функцию как произведение, и удачно подобрать один из множителей.

Note 6

62d24394b1b342568f532607f56260fb

Как подбирается второй множитель при решении линейных ОДУ первого порядка методом Бернулли?

> Подставить произведение в изначальное уравнение и "занулить" два слагаемых в левой части.

Семинар 01.12.22

Note 1

820af7a707d14597ae03a86364f7f109

Для каких ОДУ первого порядка применим метод введения параметра?

> Для которых можно выразить y через x, y'.

Note 2

0f79aa4b959d44ec81cd48e536c7548c

В чём состоит метод введения параметра для решения ОДУ первого порядка?

> Ввести параметр $p = y'$ и взять полный дифференциал y и его выражения (через x, y'.)

Семинар 08.12.22

Note 1

db6bdb752fda41a0adb8fa99386aacf2

Как понизить степень ОДУ первого порядка, не содержащего искомую функцию?

> Взять низшую из производных за неизвестную.

Note 2

259ae7c54d674879b528902f8acfdfd7

Как понизить степень ОДУ первого порядка, не содержащего независимую переменную?

> Взять искомую функцию за независимое переменное, а производную — за искомую функцию.

Note 3

65478a36706440d488ab1a196c9f2a2f

Как понизить степень ОДУ первого порядка, однородного относительно y и его производных?

> Постановкой $y' = yt$.

Лекция 30.12.22

Note 1

1bbbb42e2ec34ff190e8fe2fa258a219

Для каких ОДУ вводят понятие интегрирующего множителя?

> ОДУ первого порядка в симметричной форме.

Note 2

4be57b13e2ff4fc0812c48c168caf8d8

Что есть интегрирующий множитель ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0\,?$$

> Гладкая ненулевая функция, умножение на которую приводит к уравнению в полных дифференциалах.

Note 3

607c3ff75892464ea473b71badf112c3

Как в общем случае находится интегрирующий множитель ОДУ в симметричной форме?

> Общего алгоритма нет.

Note 4

0ec5420a438e44be9c69d3e0a06c84c5

Какой частный случай рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя?

> Множитель — функция от гладкой функции на области.

Note 5

4b053d6afd1c429f90535aafc57a1beb

Каким типом условия является теорема о существовании интегрирующего множителя?

> Критерий.

Note 6

dccef2b32f784a0ba2b1c390f25df44e

Какое условие рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя?

> Определённое выражение зависит только от функции-аргумента множителя.

Note 7

e92e49ddfb2a440897504bd8660493fb

Какое выражение рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя для ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0\,?$$

> $$\frac{m\frac{\partial w}{\partial y} - n\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}}\,,$$
>
> где w — функция-аргумент.

Note 8

b32b28f5868247118234555ca71d17ed

Пусть $w \in C^1$ и дано ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0\,.$$

Что можно сказать, если $\frac{m\frac{\partial w}{\partial y} - n\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}}$ зависит только от w?

> Существует интегрирующий множитель вида $\mu \circ w$.

Note 9

c3227395f1404ab295f4401b9c8401f2

В чём основная идея доказательства теоремы о существовании интегрирующего множителя?

> Критерий ОДУ в полных дифференциалах.

Note 10

4e0f81875d544375856a688e78b0c9af

Какими должны быть функции-коэффициенты линейного ОДУ первого прядка?

Непрерывными.

Лекция 07.12.22

Note 1

da7b414e99214fe49b3937bbc5dda688

В чём основная идея доказательства теоремы Пеано?

> Построить последовательность приближённых решений для эквивалентного интегрального уравнения.

Note 2

f915e26dcad547a99a1887f67b12cc3b

Какому интегральному уравнению эквивалентна задача Коши для ОДУ $y' = f(x, y)$?

> $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\,\cdot\,, y(\,\cdot\,))\,.$$

Note 3

e97baee3a1da423dad9aeaab712b5c7d

Какой задаче эквивалентно интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\,\cdot\,, y(\,\cdot\,))\,?$$

> Задача Коши для $y' = f(x, y)$.

Note 4

5e1f2452132742b5a3deabc36f2f8793

Какому неявному условию по определению должно удовлетворять рушение интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\,\cdot\,, y(\,\cdot\,))\,?$$

> y непрерывно.

Note 5

c9d9d231274245aeaf8e21605d2035fb

Как называются приближённые решения, которые строятся в доказательстве теоремы Пеано?

> Ломанные Эйлера.

Note 6

9f784236d56b4901bbf0de08fd7434e0

На каком промежутке строится ломаная Эйлера?

> На $[x_0, x_0 + h]$.

Note 7

ec996ad5c7374554aac558bce5d3ffcf

Что берётся за основу при построении ломанной Эйлера?

> Некоторое разбиение рассматриваемого промежутка.

Note 8

0f3242cb1bcd48b28fbbf01ca56d6a11

Как строится ломанная Эйлера?

> Строим отрезок из начальной точки с наклоном $f(x_0, y_0)$, потом из его конца с новым наклоном и так далее.

Note 9

240af69e8cab404e913e4c4c30969144

На каком множестве строится i-й отрезок ломанной Эйлера?

> i-й промежуток разбиения.

Лекция 14.12.22

Note 1

1dbe2f8bdd994378839dddcaf69ffebf

Что называется нормальной системой ОДУ?

> Система ОДУ $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_m)$ для $i = 1, \ldots, m$.

Note 2

5acbc74ff5274cebae6e7b060adfd7fc

Какой должны быть функции f_i из определения нормальной системы ОДУ?

> Любые функции на некоторой общей области.

Note 3

62d1d346e7d84fa480c253bc7ffe8feb

Любое дифференциальное уравнение, разрешённое относительно старшей производной, сводится к {{c1::нормальной системе ОДУ специальной вида.}}

Note 4

96ea219edca14258bd7a4fce45d39800

Какие ОДУ высших порядков гарантированно сводятся к нормальной системе ОДУ?

> Разрешённые относительно старшей производной.

Note 5

85cb7f9eac2b41d8ac0ff8551a26e0b6

К какой нормальной системе сводится ОДУ

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\,?$$

> $$\begin{cases} y_0 = y, \\ y_{i+1} = y_i', \\ y_m = f(\ldots). \end{cases}$$

Note 6

0ad55ab69a854bcbbb1a172e5f3ea76c

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. {{c2::Величина

$$\max_i |x_i|$$

}} называется {{c1::максимум-нормой вектора x.}}

Note 7

5148d0bcd40f4a1caf2a3cb03b8d1fe2

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. {{c2::Максимум-норма вектора x}} обозначается {{c1::$|x|$.}}

Note 8

898c3fb2a0e949ec92dfe51da414f60f

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Каким соотношением связаны $\|x\|$ и $|x|$? (Оценка снизу для $|x|$.)

$$\|x\| \leqslant \sqrt{n}\,|x| \ .$$

Note 9

7104b4d248e24eb68bd2b7ba38bad530

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Каким соотношением связаны $\|x\|$ и $|x|$? (Оценка сверху для $|x|$.)

$$|x| \leqslant \|x\| \ .$$

Note 10

489adc55335c42919fe3f46965f5a6ae

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. {{c2::Величина

$$\max_{i,j} |a_{ij}|$$

}} называется {{c1::максимум-нормой матрицы A.}}

Note 11

f810fa6058094303a4bd1bb3cedaaf8e

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. {{c2::Максимум-норма матрицы A}} обозначается {{c1::$\|A\|$.}}

Note 12

b352b66d7dd14b1a9b2ba2e66d888d5c

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$. Что можно сказать о $\|A \cdot B\|$?

$$\|A \cdot B\| \leqslant m \|A\| \|B\| \ .$$

Note 13

335e8560b4c44a4c806181b559981011

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}^{m}$. Что можно сказать о $|Ax|$?

$$|x| \leqslant m \|A\| \cdot |x| \ .$$

Note 14

b4cbd2c25e924ec78b6044c556b86bf3

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Вектор-функция f называется {{c2::интегрируемой,}} если {{c1::все f_i интегрируемы.}}

Note 15

04c57fb9b7804a999fdec80fd902491c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2:: \int_a^b f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \left(\int_a^b f_i\right) \in \mathbb{R}^n.\}\}$$

Note 16

ee80a65e53c644b7a5ad9908f5e49528

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ интегрируема и {{c2::$|f| \leqslant M$.}} Тогда

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \{\{c1:: M(b-a).\}\}$$

Note 17

b957e9e00eee4363903fc87643ce7fd5

Как в векторном виде записывается нормальная система ОДУ?

> $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,,$$
>
> где y — вектор-функция, f — отображение на области.

Note 18

ee6d475bfc6d40e5af0793bfd09da0e8

Что фактически является решением нормальной системы ОДУ в векторном виде?

> Вектор-функция на некотором интервале.

Note 19

231b400e13e949e9a728a321099f9010

Как ставится задача Коши для нормальной системы ОДУ?

> Так же как для ОДУ первого порядка, но с векторными начальными данными.

Note 20

c7fa040588b644e0872aab7d789419ec

Что устанавливает условие Липшица (интуитивно)?

> Отображение увеличивает расстояние между точками не более чем в L раз.

Note 21

f828a753435f412b8a1544ceaffdf050

Как выглядит условие Липшица для $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

> $$\begin{gathered} \|f(x) - f(y)\| \leqslant L\,\|x - y\| \\ \forall x, y \in G\,. \end{gathered}$$

Note 22

ccc2b3d677b44cc2a1105918d53fa9db

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Как называется условие

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L \|x - y\|$$
$$\forall x, y \in G\,?$$

▌ Условие Липшица.

Note 23

4b7cc86c9503491290ec6d101a4cb723

{{c2::Значение L}} из определения {{c2::условия Липшица}} называют {{c1::константой Липшица.}}

Note 24

d28025b79af146e8a00c926de2bd80b8

Множество {{c2::всех липшицевых отображений}} на множестве H обозначается {{c1::$\operatorname{Lip}(H)$.}}

Note 25

f57d54d7b53747ae9e26af0c12ea83f0

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Говорят, что {{c2::$f$ удовлетворяет условию Липшица по набору переменных,}} если {{c1::f является липшицевой с одной и той же константой при любом фиксированном значении остальных переменных.}}

Note 26

8f3c6f4b5a514cf5a5bd4fc268c0ca17

Множество {{c2::всех функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной x,}} на множестве H обозначается {{c1::$\operatorname{Lip}_x(H)$.}}

Note 27

8dd4d146c7f6410d81e59d0d9cf70e79

Говорят, что $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c2::удовлетворяет условию Липшица локально в точке $x_0 \in G$,}} если {{c1::внутри G найдётся окрестность x_0, на которой f является липшицевой.}}

Note 28

915f61d4e6dd41e3ae1cc164fdeb321b

Говорят, что $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c2::удовлетворяет условию Липшица локально на G,}} если {{c1::f локально липшицева в любой точке G.}}

Note 29

51c47fa7fd634814985cc777d605fbff

Множество {{c2::всех локально липшицевых отображений}} на множестве H обозначается {{c1::$\operatorname{Lip}_{loc}(H)$.}}

Note 30

021e656ff17a413980caea28d688c37f

Множество {{c2::всех локально липшицевых по переменной x отображений}} на множестве H обозначается {{c1::$\operatorname{Lip}_{x,loc}(H)$.
}}

Note 31

4b7a29c8468344d09b177c34482c7a14

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие локальной липшицевости f на G?

> $f \in C^1(G)$.

Note 32

9ce16ab1d1de4fee86933cb29ce5d26e

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие локальной липшицевости f по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ на G?

> Частная производная по любой из этих переменных непрерывна на G.

Note 33

8ed16a99d0bc4e2a94bec19c9886a11b

В чём основная идея доказательства достаточного условия локальной липшицевости для отображений

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,?$$

Теорема Вейерштрасса для частных производных и обобщение формулы конечных приращений.

Note 34

272334ddc9d341549659ef7e3d32a75f

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие липшицевости f на G?

G выпукло и все частные производные ограничены.

Note 35

935bbf65c0ef43c8a2615048d6af6b1d

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие липшицевости f по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ на G?

G выпукло и частные производные по этим переменным ограничены.

Note 36

35012253e1c4488eaa030f235a65f273

В чём основная идея доказательства достаточного условия липшицевости для отображений

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \, ?$$

Обобщение формулы конченых приращений.

Note 37

43cc43e729214560aaedb47fa260e441

Пусть $f \in G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G выпукло и $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \leqslant M$. Тогда

{{c1::

$$f \in \operatorname{Lip}(G) \, .$$

}}

Note 38

462d147efec24f439dd6356252e621a3

Пусть $f \in G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G выпукло и $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \leqslant M$. Тогда $f \in \operatorname{Lip}(G)$ с константой Липшица {{c1::nM.}}

Note 39

40866342d8ef4347bb227a60e324e0d0

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально на G. Тогда {{c1::$f \in C(G)$.}}

Note 40

93f75da5f4874eac83a77174dbd34cd1

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально на G. Тогда {{c2::f удовлетворяет условию Липшица }} на любом {{c1::компакте в G.}}

Лекция 21.12.22

Note 1

46397f19bad0426aa2f76c3cbf7570c6

Какой вопрос рассматривается в теореме Пикара?

> Существование решения задачи Коши для нормальной нормальной системы ОДУ.

Note 2

1ef2b2bd4b93471bb778e7a0df3a4558

При каком условии теорема Пикара применима к нормальной системе ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,?$$

> f удовлетворяет условию Липшица локально по переменной y.

Note 3

1099f8e6f2bb4a329a48e08dfcb62b8a

Каким типом условия является теорема Пикара?

> Достаточным.

Note 4

15e101fcaadf4288a9a08569a6d4cad2

Какой вывод делается в теореме Пикара?

> Нормальная система имеет решение задачи Коши в любой точке области.

Note 5

b0f68c20aaa1405984630292726e5593

Какому интегральному уравнению эквивалентна задача Коши для нормальной системы ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,?$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\,\cdot\,, y(\,\cdot\,))$$

Note 6

90272d0d6764483a8cb93bf4dacfe77c

В чём основная идея доказательства теоремы Пикара?

> Построить последовательность приближённых решения для эквивалентного интегрального уравнения.