

# Лекция 07.09.22

## Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

Абсолютное значение мультииндекса  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  так же называют порядком  $\alpha$ .

## Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

Многочленом  $n$  переменных со значениями в  $\mathbb{R}^m$  называется отображение вида

$$x \mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha},$$

где  $\{c_{\alpha}\} \subset \mathbb{R}^m$  — конечное семейство и  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ .

## Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Если  $p \neq 0$ , то степень многочлена  $p$  называется числом

$$\max \{|\alpha| : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

}}

## Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Если  $p \equiv 0$ , то степень многочлена  $p$  полагают равной  $-\infty$ .

## Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Степень многочлена  $p$  обозначается

$$\deg p.$$

}}

## Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Многочлен  $p$  называется однородным, если для всех  $c_{\alpha} \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

## Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\{a \in \text{Int } E\}$ ,  $\{s \in \mathbb{Z}_+\}$ . Многочлен  $p$  степени не выше  $s$ , для которого

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

называется многочленом Тейлора  $f$  порядка  $s$  в точке  $a$ .

## Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Многочлен Тейлора  $f$  порядка  $s$  в точке  $a$  обозначается

$$T_{a,s}f.$$

}

## Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Если  $T_{a,s}f$  существует, то он единственный.

## Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Если  $T_{a,s}f$  существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

Разность двух многочленов есть  $o(\|x - a\|^s)$ ,  $x \rightarrow a$ .

## Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если

$$p(x) = o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

то  $p \equiv 0$ .

## Note 12

f753051ba1584ac3809a7b03ecf311f7

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x - a\|^s)$  при  $x \rightarrow a$ , то  $p \equiv 0$ . Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая:  $a = 0$  и  $a \neq 0$ .

## Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В чём ключевая идея доказательства?

■ Разбить  $p$  на однородные компоненты и рассмотреть  $p(tx)$  как многочлен переменной  $t$ .

## Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . Как представляется многочлен  $p(tx)$  в доказательстве?

$$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$

■ где  $p_k$  — однородный многочлен степени  $k$ .

## Note 15

8d6ec9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В доказательстве, что нужно показать про многочлен  $p(tx)$ ?

$$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

## Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В доказательстве мы получили, что  $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$  при  $t \rightarrow 0$ . Что дальше?

Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

## Note 17

833c8cc496364d6fa95263abc312262d

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x - a\|^s)$  при  $x \rightarrow a$ , то  $p \equiv 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $a \neq 0$ )?

$p(a + h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ .

## Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .  $T_{a,0}f$  существует тогда и только тогда, когда  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

## Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .  $T_{a,1}f$  существует тогда и только тогда, когда  $f$  дифференцируемо в точке  $a$ .

## Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $f$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то

$$f(a + h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

}}

## Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая:  $m = 1$  и  $m > 1$ .

## Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m > 1$ )?

■ Следует из случая  $m = 1$  для координатных функций.

## Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ )?

■ Индукция по  $s$  начиная с  $s = 1$ .

## Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ , база индукции)?

■ Выразить  $f(a+h)$  через дифференциал, а его через производные.

## Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ , индукционный переход)?

Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

## Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

«Формула Тейлора-Пеано»

## Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ec26

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

$$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq s.$$

## Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{k=0}^s \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}.$$

(в терминах дифференциалов)

## Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $\{\{c2::\text{многочлен степени не выше } s,\}$   
 $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \{\{c1::0.\}$$

## Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}\}.\}$$

## Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}\}\}$   $\{\{c6::\text{дифференцируемо } s + 1 \text{ раз на } E,\}$   
 $\{\{c5::a \neq x \text{ и } \Delta_{a,x} \subset E.\}$  Тогда  $\exists c \in \{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,x}\}$  для которой

$$\{\{c3::R_{a,s}f(x)\}\} = \{\{c1::\frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.\}$$

« $\{\{c7::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

## Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  
 $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда  $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,x}$  для которой

$$R_{a,s}f(x) = \frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции

$$t \mapsto f(a + th).$$

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$|R_{a,s}f(x)| \leq \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \frac{|d_c^{s+1}f(x-a)|}{(s+1)!}.$$



## Лекция 14.09.22

### Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $E$ ,  $a \neq b$  и  $\Delta_{a,b} \subset E$ . Тогда  $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,b}$ , для которой

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a).$$

}}

«Теорема о среднем»

### Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций  $n$  вещественных переменных?

Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

### Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

Нет, только для функций.

### Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

$x \mapsto (\cos x, \sin x)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ .

### Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$\|R_{a,s} f(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \cdot \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|d_c^{s+1} f(x - a)\|.$$

«Формула Тейлора-Лагранжа для отображений»

## Note 6

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть  $f : E \subset \{\{c5::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c5::\mathbb{R}^m\}\}$  непрерывно дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$\{\{c3:: \|R_{a,s}f(x)\|\}\} \leq \{\{c2:: \frac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\|x-a\|)^{s+1},\}\}$$

где

$$M = \{\{c1:: \max_{|\alpha|=s+1} \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\|\}\} < \{\{c6:: +\infty,\}\}$$

$$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$$

## Note 7

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы  $\mathbb{R}^{n+m}$  в виде  $\{\{c1::(x,y),\}\}$  где  $x \in \{\{c2::\mathbb{R}^n\}\}, y \in \{\{c2::\mathbb{R}^m\}\}$ .

## Note 8

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть  $f : E \subset \{\{c4::\mathbb{R}^{n+m}\}\} \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}^l\}\}$  и существует  $\psi : \{\{c3::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c3::\mathbb{R}^m\}\}$  такая, что  $\{\{c2::$

$$f(x,y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

$\}\}$  то  $\psi$  называют  $\{\{c1::$  неявным отображением, порождённым уравнением  $f(x,y) = 0$ . $\}\}$

## Note 9

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением  $f(x,y) = 0$ ,

$$f'_x(a) := \{\{c1:: \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \}\} \sim \{\{c2:: m \times n.\}\}$$

## Note 10

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением  $f(x, y) = 0$ ,

$$f'_y(a) := \left[ \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a) \right] \sim \{m \times m\}$$

## Note 11

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^s(E)$ . Тогда если

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

то существуют такие  $\delta > 0$  и  $\psi \in C^s(V_\delta(x^0))$ , что

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x)$$

$$\forall (x, y) \in V_\delta(x_0, y_0).$$

«Теорема о неявном отображении»

## Note 12

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение  $\psi$ , введённое в теореме о неявном отображении называется **неявным отображением**, порождённым уравнением  $f(x, y) = 0$  в окрестности точки  $(x^0, y^0)$ .

## Note 13

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

$$d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\dots) = 0.$$

## Note 14

dd7bb23f22a042dab6dacf623aca0455

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x^0, y^0) \in E$ . Если в окрестности точки  $(x^0, y^0)$  уравнение  $f(x, y) = 0$  порождает неявную функцию, то  $f$  называется **локально разрешимым** в точке  $(x^0, y^0)$ .

## Note 15

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Если  $f$  локально разрешимо в любой точке  $E$ , то  $f$  называется локально разрешимым на  $E$ .

## Лекция 21.09.22

### Note 1

434affe9da3e443d839fa7d6af1b180

Чем определение экстремума для функций  $n$  вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

■ Ничем.

### Note 2

2efcc79ba5154484aacbd7da7dfa4b1

В определении экстремума функции  $n$  вещественных переменных, для каких  $x$  требуется выполнение соответствующего неравенства?

■  $\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D(f).$

### Note 3

30ab720865e54af19fcc351cfa78d165

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $a$ . Точка  $a$  называется седловой, если  $d_a f \equiv 0$  и  $a$  — не экстремум.

### Note 4

27a6b8777b9b4bb9919dcfa31d963432

Тожественно нулевой оператор обозначается  $\mathbb{O}$ .

### Note 5

43fd5e0b1a8b410a887c991151fac7e0

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $a$ . Если  $a$  является точкой экстремума, то  $d_a f \equiv 0$ .

### Note 6

834aecf3894642098d0ddc0256091117

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $a$ . Если  $a$  является точкой экстремума, то  $d_a f \equiv 0$ .

«Необходимое условие экстремума»

## Note 7

e5cfde8512814dbbaed4676461636b0d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $a$ . Точку  $a$  называют стационарной для  $f$ , если  $d_a f \equiv 0$ .

## Note 8

c658e89677264e7bb7317334e026304e

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия экстремума для функций  $n$  вещественных переменных?

Рассмотреть функции  $t \mapsto f(a + te^k)$ .

## Note 9

02b9316ee1f84262ae08eebecbe71c2b

В доказательстве необходимого условия экстремума для функций  $n$  вещественных переменных, мы положили

$$F_k(t) = f(a + te^k).$$

Что нужно показать про функцию  $F_k$ ?

$0$  — точка экстремума  $F_k$  и рассмотреть  $F'_k(0)$ .

## Note 10

ec6b1873ffe44cc48c87520ef5bf2f10

Какие случаи не охватываются необходимым условием экстремума?

Когда дифференциал сохраняет знак, но не является положительно или отрицательно определённым.

## Note 11

091dad1735594dfa8923e46c5a461ab0

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ . Тогда если  $d_a f \equiv 0$ , то если  $d_a^2 f$  положительно определён, то  $a$  — точка строгого минимума  $f$ .

## Note 12

a87f168ae18d4f65b7595866b9407e8d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ ,  $d_a f \equiv 0$ . Тогда если  $d_a^2 f$  отрицательно определён, то  $a$  — точка строгого максимума  $f$ .

### Note 13

4643a84f76b84c9bbc34e220ec2196c3

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ ,  $d_a f \equiv 0$ . Тогда если  $\{d_a^2 f\}$  принимает как положительные, так и отрицательные значения, то  $f$  не имеет экстремума в точке  $a$ .

### Note 14

41fced97c432427e893b7c1e3b850374

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ . Матрица квадратичной формы  $d_a^2 f$  называется матрицей Гессе  $f$  в точке  $a$ .

### Note 15

36db8ae7809a4dcbb6f350f51ca0a54c

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ . Матрица Гессе  $f$  в точке  $a$  обозначается  $H(f)$ .

### Note 16

5ffaf8568eaa4a8fbb3815c215d20c25

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ . Матрица Гессе  $f$  в точке  $a$  имеет вид

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \sim n \times n.$$

### Note 17

56bf1e23f53c4cae8d62101295cb0a9b

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ ,  $d_a f \equiv 0$ . Тогда если  $\det H(f) < 0$ , то  $f$  не имеет экстремума в точке  $a$ .

(в терминах  $H(f)$ )

### Note 18

b78c95a2236a4edf964b8e2a29238dae

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в точке  $a$ ,  $d_a f \equiv 0$ . Тогда если  $\det H(f) < 0$ , то  $f$  не имеет экстремума в точке  $a$ . В чём ключевая идея доказательства?

Зафиксировать одну компоненту приращения  $d_a^2 f$  и показать, что он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

## Note 19

535062161d6044bdb41631a3ae479223

Дополнительные равенства, которым должны удовлетворять точки из области определения  $f$  в определении понятия условного экстремума называются уравнениями связи.

## Note 20

7dc4fe4c435946a091efc32d6a120ec1

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in E$ ,  $m < n$ . Если  $a$  является точкой экстремума сужения  $f$  на множество

$$\{x \in E \mid \Phi(x) = \Phi(a)\},$$

то  $a$  называется точкой условного экстремума  $f$ , подчинённого уравнениям связи  $\Phi(x) = \Phi(a)$ .

## Note 21

efd5b1690a340499b26b776ada24e98

Точку условного экстремума так же называют точкой относительного экстремума.

## Note 22

9f8b54ca8ee64e32987bdb713c25e8d7

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что

$$\Phi(a) = 0.$$

## Note 23

7866e63fde9849e0aaf93125f6796f8c

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что  $\Phi(a) = 0$ ?

Всегда можно рассмотреть  $\Phi^* : x \mapsto \Phi(x) - \Phi(a)$ .



## Note 24

fce85d7d2d244b4daaa0334b43719a92

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что  $\{\{c2::\Phi'_y(a)\}\} \{\{c1::\text{невыврождена.}\}\}$

## Note 25

b53cabcb0b0a24f6ead9453c041ad560d

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что  $\Phi'_y(a)$  невырождена?

■ Иначе какое-то из условий следует из остальных.

## Лекция 28.09.22

### Note 1

ffe18c64640a4c0c9009a7e054fc1af5

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{\{c6::m < n,\}\}$   $f \in \{\{c4::C^1(E, \mathbb{R})\}\}$ ,  $\Phi \in \{\{c4::C^1(E, \mathbb{R}^m)\}\}$ ,  $a \in E$ ,  $\{\{c5::\text{rk } \Phi'(a) = m.\}\}$  Тогда если  $\{\{c3::a - \text{условный экстремум } f, \text{ подчинённый } \Phi(x) = 0,\}\}$  то  $\{\{c2::\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R},\}\}$  для которых  $\{\{c1::$

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

$\}\}$

### Note 2

af9f952d67cd4db8a2bc302521d5f590

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ ,  $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ ,  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ ,  $a \in E$ ,  $\text{rk } \Phi'(a) = m$ . Тогда если  $a - \text{условный экстремум } f$ , подчинённый  $\Phi(x) = 0$ , то  $\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ , для которых

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

« $\{\{c1::\text{Необходимое условие относительного экстремума}\}\}$ »

### Note 3

82213d3b2284465e9b85ecf7bcfe686b

$\{\{c2::\text{Коэффициенты } \lambda_1, \dots, \lambda_m\}\}$  из теоремы о  $\{\{c3::\text{необходимом условии относительного экстремума}\}\}$  называются  $\{\{c1::\text{множителями Лагранжа } f \text{ в точке } a.\}\}$

### Note 4

832a0c560cf747c492a100c673d806cc

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия относительного экстремума?

■ Теорема о неявной функции для  $\Phi(x, y) = 0$ .

### Note 5

9434998277aa4d2d946b7fcdfeef36f8

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума мы построили неявную функцию  $\psi$  из уравнения  $\Phi(x, y) = 0$ . Что дальше?

■ Рассмотреть  $f(x, \psi(x)) - \lambda \Phi(x, \psi(x))$ .

## Note 6

feb9eccc46494af296a7c929c6b4fd57

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{c_2: x^0\}} = \{c_1: 0.\}$$

## Note 7

038381f4bf64457da1a04c86b8ab0eb5

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

■  $x_0$  — т. экстремума  $f(x, \psi(x))$ .

## Note 8

63892565775440a9afc699c3c9ed5419

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{\{c_2: x^0\}} = \{c_1: 0.\}$$

## Note 9

b333ed4af4a44349b84e8aed99b46a18

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x \Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

■  $\Phi(x, \psi(x)) = 0$  в окрестности  $x^0$ .

## Note 10

082928b830ed48038502597330cc2d6b

Чему равно  $\lambda$  из теоремы о необходимом условии относительного экстремума?

$$\lambda^T = f'_y(a) \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}.$$

### Note 11

c403eaa3be2d4d1dac52b422443e29b2

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума отображение

$$\{(x, \lambda)\} \mapsto \{f(x) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi_k(x)\}$$

называется функцией Лагранжа.

### Note 12

5568e5ccac324a0cb09e98b4ba65503b

В условиях теоремы о необходимом условии относительно экстремума функция Лагранжа обозначается  $L(x, \lambda)$ .

### Note 13

113bd38c503e4af990386a637b1aa830

Необходимое условие относительного экстремума в терминах функции Лагранжа примет вид

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \nabla L(a, \lambda) = 0.$$

### Note 14

10647bd11e764a13b935dd15418841c6

Пусть  $N \triangleleft \mathbb{R}^n$ ,  $f$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  называется положительно определённой на  $N$ , если  $f|_N$  положительно определена.

### Note 15

24a7c3a60b0144b78d3bdf59396178e9

Пусть  $N \triangleleft \mathbb{R}^n$ ,  $f$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  называется отрицательно определённой на  $N$ , если  $f|_N$  отрицательно определена.

## Note 16

6af1663b3c2f432eb8d779d75937d630

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума,  $f \in C^2(E)$  и  $g \in C^2(E)$ . Положим  $L(x) = L(x, \lambda)$ , где  $\lambda$  — множители Лагранжа. Тогда если  $d_a^2 L$  положительно определён на  $\ker d_a \Phi$ , то  $a$  — точка условного минимума, подчинённая  $\Phi(x) = \Phi(a)$ .

## Note 17

1abdb12e039f42bb991a4e08218c2bc0

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума  $f \in C^2(E)$  и  $g \in C^2(E)$ . Положим  $L(x) = L(x, \lambda)$ , где  $\lambda$  — множители Лагранжа. Тогда если  $d_a^2 L$  отрицательно определён на  $\ker d_a \Phi$ , то  $a$  — точка условного максимума, подчинённая  $\Phi(x) = \Phi(a)$ .

## Note 18

18275ac96f4145228cd295901a3c4aeb

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума  $f \in C^2(E)$  и  $g \in C^2(E)$ . Положим  $L(x) = L(x, \lambda)$ , где  $\lambda$  — множители Лагранжа. Тогда если  $d_a^2 L$  принимает на  $\ker d_a \Phi$  как положительные, так и отрицательные значения, то  $f$  не имеет в точке  $a$  условного экстремума, подчинённого  $\Phi(x) = \Phi(a)$ .

## Note 19

b5b66b7db90b4d1bacf06b32b1446fcb

Пусть  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  — вещественная последовательность. Рядом называется формальное выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

## Note 20

a5592c04ea8d40cd952f2bf6391ed438

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд. Элемент  $a_k$  называется общим членом ряда.

## Note 21

ff62bd61f29a475eb73a358793f8a46a

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд,  $\{\{c3::n \in \mathbb{N}\}\}$   $\{\{c2::\text{Сумму}\}$   
вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$\}} \{\{c1::\text{частичной суммой ряда}\}\}$

## Note 22

515ccf52bf2e4d89a5a2c282984860f2

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\{c1::\text{Сумму}\}$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n$$

$\}} \{\{c2::\text{часто обозначают } S_n\}\}$

## Note 23

ad2ee0b419444746bd51026b07fa19d6

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд.  $\{\{c1::\text{Величина}\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$\}} \{\{c2::\text{называется суммой ряда } \sum_{k=1}^{\infty} a_k\}\}$

## Note 24

6505e18ad4754436aa6c22aae25686bd

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд. Если  $\{\{c2::\text{величина } A\}$   
есть сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ,  $\}} \{\{c1::\text{то пишут}\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

$\}} \{\{c2::\text{сумма ряда}\}\}$

## Note 25

a3c5b50440ad4896bb8af7492d946bc5

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд. Говорят, что ряд  $\{\{c2::\text{сходится}\}\}$   
если  $\{\{c1::\text{его сумма существует и конечна}\}\}$

## Note 26

f1b03f6a351984ebf8a7077cc5c2126e4

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — вещественный ряд. Говорят, что ряд  $\{\{c2::\text{расходится}\}\}$   
если  $\{\{c1::\text{он не сходится}\}\}$

## Семинар 05.10.22

### Note 1

80570e9f813648cfa0315b3dd7e327a3

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, как определяется знакоопределённость  $d_a^2 L$  на  $\ker d_a \Phi$ ?

Через миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

### Note 2

66548b31237c4009a91c2423d6836660

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какие миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

рассматриваются для определения знакоопределённости  $d_a^2 L$  на  $\ker d_a \Phi$ ?

Начиная с  $\Delta_{2m+1}$ . ( $m$  — количество уравнений связи.)

### Note 3

ae3633661bf248a389c6fc301e701039

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы  $a$  была точкой условного минимума?

Все имеют знак  $(-1)^m$ .

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы  $a$  была точкой условного максимума?

■ Первый имеет знак  $(-1)^{m+1}$  и далее чередуются.



## Лекция 26.10.22

### Note 1

f86d2dd9e8f64a59a96d4d321a706cc4

Как определяется переместительное свойство ряда (интуитивно)?

■ Перестановка элементов не влияет на сумму.

### Note 2

eda4110756264d5885252e3c548ad9ac

Применимо ли переместительное свойство к расходящимся рядам?

■ Да.

### Note 3

f0d78b12e0654f259e4b5390870df0e0

Что означает переместительное свойство в контексте расходящихся рядов?

■ Любая перестановка тоже расходится.

### Note 4

2bd23513ad354d76a4f5dfcc5b23cf38

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Величина

$$\sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

называется Чебышёвским уклонением.

### Note 5

806916674138455a8d97f6dc173173b2

Пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Чебышёвское уклонение обозначается  $\rho(f, g)$ .

## Лекция 09.11.22

### Note 1

20bbdbfc6a3e47d5a68ff0fe6148f498

Пусть  $f$  и все  $f_n$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f_n \Rightarrow f$ .

Тогда

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

}}

### Note 2

8ac3641f138f4e04a7f112015f0cc4df

Пусть  $f$  и все  $f_n$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

«Предельный переход под знаком интеграла»

### Note 3

9ab163a208184d589048e4103dbf7978

Пусть все  $f_n$  и  $f$  интегрируемы и  $f_n \rightarrow f$ . При каком условии можно выполнять предельный переход под знаком интеграла  $\int_a^b f_n$ ?

■ Если сходимость равномерна.

### Note 4

73d904ec0c8444e989c74d892653ef06

Пример, показывающий, что поточечной сходимости не достаточно для выполнения предельного перехода под знаком интеграла.

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{на } [0, 1]$$

### Note 5

4a61840b6b7e43d88e86a8f43109394f

В чём основная идея доказательства теоремы о предельном переходе под знаком интеграла?

Определение равномерной сходимости и оценка сверху для модуля разности интегралов.