

# Лекция 07.02.22

## Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$ . Тогда  $V$  называется линейным подпространством, если

1.  $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$ ,
2.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$ .

}}

## Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « $V$  есть линейное подпространство в  $W$ » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

## Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда  $V$  — тоже линейное пространство.

## Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в  $\mathbb{R}^n$ ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

## Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $A \sim m \times n$ . Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку  $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$ .

## Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть  $V \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Тогда всегда существует  $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2:m \times n\}\}}$  такая, что  $\{\{c1::$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$\}\}$

## Note 7

dc727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$ . Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в  $W$ ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоже является их линейной комбинацией.

## Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

Да, всегда.

## Note 9

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

Нет, не всегда.

## Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\{\{c2:: V_1 + V_2\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}\}.\}$$

### Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}\}$$

### Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

### Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$  и  $e_1, e_2, \dots, e_k$  —  
 $\{\{c2:: \text{базис в } V.\}\}$  Тогда в  $W$  существует базис вида  $\{\{c1::$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

### Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

■ Дополнить базис в  $V_1 \cap V_2$  до базисов в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно и построить на их основе базис в  $V_1 + V_2$ .

### Note 15

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$  — базис в  $V_1$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_2$ .

Как можно построить базис в  $V_1 + V_2$ ?

■  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_1 + V_2$ .

# Семинар 09.02.22

## Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  называют матрицу  $C$  такую, что для любого  $v \in V$ , если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

## Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  обычно обозначают  $C_{e \rightarrow e'}$ .

## Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу  $C_{e \rightarrow e'}$ ?

Столбцы  $C_{e \rightarrow e'}$  — это координаты векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Лекция 14.02.22

### Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Сумму  $V_1 + V_2$  называют прямой суммой, если  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

### Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

### Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$  — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ;
- Для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно.

### Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно, то  $V_1 + V_2$  — прямая сумма?

■ Показать, что если  $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$ , то  $v_1 = v_2 = 0$ .

### Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

- $\dim V \leq \dim W$ ;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$ .

## Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется **линейным отображением**, если

- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

## Note 7

4008d3f9d224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

## Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор  $f : V \rightarrow W$  называется **изоморфизмом линейных пространств**, тогда и только тогда, когда  $f$  — биекция.

## Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства  $V$  и  $W$  называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

## Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

## Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если  $f : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $f^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

## Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

## Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть  $V, W$  — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

## Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора  $f$  в паре базисов в  $V$  и  $W$  соответственно называют матрицу  $A$ , переводящую координаты любого вектора  $v \in V$  в координаты вектора  $f(v) \in W$  в соответствующих базисах.

## Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в  $V$ ,
- $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$  — базис в  $W$ .

Как в явном виде задать матрицу оператора  $f$  в этих базисах?

$j$ -ый столбец — это координаты вектора  $f(e_j)$  в базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ .

## Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?



$$f(e) = \tilde{e}A.$$

### Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где  $\lambda$  — координаты вектора из  $V$  в базисе  $e$ .

### Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

### Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

## Лекция 21.02.22

### Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисах  $e$  и  $\tilde{e}$  соответственно. Как преобразуется матрица  $A$  при замене базисов  $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$ ?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисе  $e$ . Как преобразуется матрица  $A$  при замене базиса  $e \rightarrow e'$ ?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  и  $A'$  — матрицы оператора  $f$  в двух базисах  $e$  и  $e'$  соответственно. Тогда  $\det A' = \det A$ .

### Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора  $f : V \rightarrow V$  называется определитель матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора  $f : V \rightarrow V$  называется ранг матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы  $A$  обозначается  $\text{tr } A$ .

## Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть  $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$ . Тогда  $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$ .

## Note 8

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

## Note 9

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

## Note 10

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

## Note 11

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft V$ ?

Да, поскольку линейная комбинация нулей  $f$  — тоже нуль  $f$ .

## Note 12

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft W$ ?

Нет,  $\ker f \triangleleft V$ .

### Note 13

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft W$ ?

Да, поскольку  $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

### Note 14

7b17eb03a5e640f8bdefa0aaa6656c3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft V$ ?

Нет,  $\operatorname{im} f \not\triangleleft W$ .

### Note 15

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Как связаны размерности  $V$ ,  $\ker f$  и  $\operatorname{im} f$ ?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

### Note 16

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Дополнить базис в  $\ker f$  до базиса в  $V$  и построить из них базис в  $\operatorname{im} f$ .

### Note 17

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $\ker f$ ;
- $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V$ .

Как выглядит базис в  $\operatorname{im} f$ ?

|

$$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n).$$

### Note 18

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \{\{c1: \operatorname{rk} f.\}\}$$

### Note 19

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как показать, что

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f?$$

|

Показать, что в координатном выражении  $\operatorname{im} f$  есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора  $f$ .

### Note 20

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор.  $\{\{c1: \text{Пространство } V \triangleleft W\}\}$  называется  $\{\{c2: \text{инвариантным относительно оператора } f,\}\}$  если  $\{\{c1:$

$$f(V) \subset V.$$

$\}\}$

### Note 21

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора  $f : W \rightarrow W$ .

**Note 22**

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — дополнение до базиса в  $W$  базиса  $e_1, e_2, \dots, e_k$  в инвариантном подпространстве  $V \triangleleft W$ . Тогда матрица оператора  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_k$  примет вид

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

где  $T_{11}$  — это матрица  $f|_V$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

## Лекция 28.02.22

### Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор  $f : W \rightarrow W$  называется невырожденным, если  $\det f \neq 0$ .

### Note 2

2e565e676da342fb8cdac4d62de05e8

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1.  $f$  невырождено;
2.  $\ker f = \{0\}$ ;
3.  $\operatorname{im} f = V$ ;
4.  $\operatorname{rk} f = \dim V$ ;
5.  $f$  — биекция.

### Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — невырожденный оператор то  $f$  — биекция?

Показать, что если  $f$  задаётся матрицей  $A$ , то  $f^{-1}$  задаётся матрицей  $A^{-1}$ .

### Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — биекция, то  $f$  — невырожденный оператор.

$$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

## Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда число  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется собственным значением оператора  $f$ , если

$$\exists v \in V \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

## Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда вектор  $v \in V$  называется собственным вектором оператора  $f$ , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

## Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

Спектром оператора называется множество собственных значений этого оператора.

## Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

Спектр оператора  $f$  обозначается  $\text{spec } f$ .

## Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\lambda$  является собственным значением  $f$  тогда и только тогда, когда

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

## Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора  $f$ .



## Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора  $f$ .

## Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной  $\lambda$ ?

Если  $A$  — матрица оператора  $f$ , то  $|A - \lambda E|$  — многочлен переменной  $\lambda$ .

## Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$$