Логика высказываний

Note 1

4105104fcc464b9f8c59bbd454c55018

Высказывания могут быть {{c1::истинными}} или {{c1::ложными.}}

Note 2

de1b54d7432f42a488aa49e8895875f4

Высказывания можно {{c2::соединять друг с другом}} с помощью {{c1::«логических связок».}}

Note 3

efe0b8c83a7d42ba956a1aa0c2206d8b

Логическая связка {{c2::«A и B»}} называется {{c1::конъюнкцией.}}

Note 4

f832b96c89b645348cd5bce12659be41

Логическая связка {{c2::«A и B»}} обозначается

{{c1::$A \& B$}} {{c1::$A \wedge B$.}}

Note 5

a974b0e29e724094ae11458fec237466

Логическая связка {{c2::«A или B»}} называется {{c1::дизъюнкцией.}}

Note 6

6d584e09645042b781dbbfaac613fb5b

Логическая связка {{c2::«A или B»}} обозначается

{{c1::$A \vee B$.}}

Note 7

71cf2d212d4e4515b861e0c05c459de9

Логическая связка {{c2::«не A»}} называется {{c1::отрицанием.}}

Note 8

63977dd5c58c492eb2b405f32658fe6e

Логическая связка {{c2::«не A»}} обозначается

$$\{\{c1::\neg A\}\} \qquad \{\{c1:: \sim A\}\} \qquad \{\{c1::\overline{A}.\}\}$$

Note 9

7974978120c7467e8052614ab9497071

Логическая связка {{c2::«из A следует B»}} называется {{c1::импликацией.}}

Note 10

5332245f17ca45fc8a382edeafc3f5fd

Логическая связка {{c2::«из A следует B»}} обозначается

$$\{\{c1::A \to B\}\} \qquad \{\{c1::A \Rightarrow B\}\} \qquad \{\{c1::A \supset B.\}\}$$

Note 11

b3f6c41f719544a3836ef8c752c02311

В импликации $A \to B$ {{c2::высказывание A}} называется {{c1::посылкой или антецедентом.}}

Note 12

2f17f543a0fb4c1e872c5e894881a8d8

В импликации $A \to B$ {{c2::высказывание B}} называется {{c1::заключением или консеквентом.}}

Note 13

7ffade67cdfc4ba1916748d4d24eb205

Значения {{c2::**И** (истина) и **Л** (ложь)}} называют {{c1::истинностными значениями.}}

Note 14

6104c0e89dc84b4082b7bf5b1034a41c

Истинностное значение **И** так же обозначают {{c1::**T** или 1.}}

Note 15

1ffd99464a964a2d802713627284de05

Истинностное значение **Л** так же обозначают {{c1::**F** или 0.}}

Note 16

3a7d57b46b5446cbb1879ca5a88f99f1

Говорят, что высказывание имеет значение {{c2::**И**,}} если {{c1::оно истинно.}}

Note 17

39190b33ebc64ffea127054a389ba2fe

Говорят, что высказывание имеет значение {{c2::**Л**,}} если {{c1::оно ложно.}}

Note 18

f195f78759bd493fabd6353285403ac6

Высказывание {{c2::$A \wedge B$}} истинно, если {{c1::оба высказывания A и B истинны.}}

Note 19

4d34320fa4e049b3b9d25a44d54c51d6

Высказывание {{c2::$A \vee B$}} истинно, если {{c1::хотя бы одно из высказываний A и B истинно.}}

Note 20

2dd24cf0c3d7432295ed7a72663db077

Высказывание {{c2::$A \rightarrow B$}} истинно, если {{c1::A ложно или B истинно.}}

Note 21

a4c9e67aa6cd4603b5c54c110f4aa726

Высказывание {{c2::$\neg A$}} истинно, если {{c1::A ложно.}}

Note 22

62f4c5602b68482898cf2f25eee71998

{{c2::Элементарные высказывания, из которых составляются более сложные высказывания,}} называется {{c1::пропозициональными переменными.}}

Note 23

50f80c87e0ce459fa19869447ca5cf1c

{{c2::Пропозициональные переменные}} будем обозначать {{c1::маленькими латинскими буквами.}}

Note 24

e2ffb750b54545d9a36793717bd9f8c4

{{c3::Множество пропозициональных формул}} есть {{c2::минимальное надмножество множества пропозициональных переменных,}} {{c1::замкнутое относительно логических связок.}}

Note 25

652a82f3a2c04744b06854eb9802db27

Замкнутость относительно каких связок требуется в определении множества пропозициональных формул?

> «не», «и», «или» и импликация.

Note 26

49604013e544418bb20cd89b7548c5d4

{{c2::$\mathbb{B}$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\{0, 1\}$.}}

Note 27

4ce7564004a54b05a70415e8feffcdb9

{{c2::Отображения вида $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$}} называют {{c1::булевыми функциями n переменных.}}

Note 28

366bad41e3824924af52e47078565094

Пусть φ — пропозициональная формула, {{c2::содержащая не более n пропозициональных переменных.}} Тогда φ задаёт {{c1::булеву функцию n переменных.}}

Note 29

fcee92733caa4d679a755c4ee7b1d92d

Пусть φ — пропозициональная формула. Как вычисляется значение соответствующей булевой функции?

> Вместо пропозициональных переменных подставляются их истинностные значения.

Note 30

fdf2b62e30ae48e2b0a0187aa9129100

{{c2::Пропозициональные формулы, истинные при всех значениях их переменных,}} называют {{c1::тавтологиями.}}

Note 31

671a63ca209a42e49d5d782d1da8ff77

Две пропозициональные формулы называют {{c2::эквивалентными,}} если {{c1::они задают одну и ту же булеву функцию.
}}

Note 32

22583d6fdedc4b14b5ee74452624a641

Обязана ли пропозициональная формула содержать все переменные, от которых зависит порождённая ей булева функция?

▌ Не обязана.

Note 33

3f428c34bf344a849efa7109edd09021

Если пропозициональная формула содержит не все переменные, от которых зависит порождённая её булева функция, то {{c1::по некоторых аргументам эта функция постоянна.
}}

Note 34

0c628958376f4d8bb39bc8f93a28b81a

Две формулы φ и ψ {{c2::эквивалентны}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \text{ — тавтология.}$$

}}

Note 35

1aedce40881448628c79eedd50b0e6cc

{{c2::$(p \to q) \land (q \to p)$}} сокращается как {{c1::$p \leftrightarrow q$.}}

Note 36

2e54de05c39b423989f92d177f66967d

Используя сокращение $p \leftrightarrow q$ можно записывать утверждения об эквивалентности в виде {{c1::тавтологий.}}

Note 37

4f385dabf08045f9afc40ca97d97d8d1

Первые три свойства конъюнкции и дизъюнкции.

> Ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность.

Note 38

142ee54823b14d4bad73e4e09dcfac3c

Как утверждение о коммутативности конъюнкции записывается в виде тавтологии?

> $(p \land q) \leftrightarrow (p \land p)$.

Note 39

c93d5a120f0341749d62a3705aae96ab

{{c2::$\neg(p \land q)$}} $\leftrightarrow$ {{c1::$(\neg p \lor \neg q).$}}

Note 40

577f39ecc78a42d498fd72413341bdeb

{{c2::$\neg(p \lor q)$}} $\leftrightarrow$ {{c1::$(\neg p \land \neg q).$}}

Note 41

dc0dd2fdc0fe4e3d927f9c9938b1f4ed

$$\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q),$$
$$\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q).$$

«{{c1::Законы Де Моргана}}»

Note 42

fc8341e166fb4ed3a69456e055f57d8c

$(p \lor (p \land q)) \leftrightarrow$ {{c1::$p.$}}

Note 43

79971beeb5c749c0aa731ff75be7c184

$(p \land (p \lor q)) \leftrightarrow$ {{c1::$p.$}}

Note 44

74277840f9f74c64a3570075bf441dd3

$$(p \lor (p \land q)) \leftrightarrow p, (p \land (p \lor q)) \leftrightarrow p.$$

«{{c1::Законы поглощения}}»

Note 45

b0470e6ee152460e85f6765609b9d4ed

$$\{\{c2::(p \to q)\}\} \leftrightarrow \{\{c1::(\neg q \to \neg p).\}\}$$

«{{c3::Правило контрапозиции}}»

Note 46

e7790b37774d4e06845510cd77932583

$$\neg\neg p \leftrightarrow \{\{c1::p.\}\}$$

Note 47

cc36fc9a7d8945799fdc56d9124ce34b

$$\neg\neg p \leftrightarrow p.$$

«{{c1::Снятие двойного отрицания}}»

Note 48

12216d5d3e55466898f2f6ea416667e2

Пусть две пропозициональные формулы эквивалентны. Что произойдёт, если заменить все $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

> Они останутся эквивалентными.

Note 49

b89ed5bfb55a4cd190ae423d6659bb18

Пусть две пропозициональные формулы эквивалентны. Если заменить все $\wedge$ на $\vee$ и наоборот, то формулы останутся эквивалентными. В чём ключевая идея доказательства?

> Добавить везде отрицание через законы Де Моргана.

Note 50

95d2cc9c35bc48638505c9c8969657e9

{{c2::Префиксная}} форма записи пропозициональных формул называется {{c1::польской записью.}}

Note 51

b83adc1541294949a122d22e679e1d56

{{c2::Постфиксная}} форма записи пропозициональных формул называется {{c1::обратной польской записью.}}

Note 52

7d133f61d12048fd912eb4388951b4c0

Порядок действий в польской нотации {{c1::восстанавливается однозначно.}}

Note 53

06a383a050d64e979b6880df7567db76

Порядок действий в польской нотации восстанавливается однозначно. В чём ключевая идея доказательства?

> Показать однозначность разделения аргументов индукцией по построению.

Полные системы связок

Note 1

71e2d5041eca42ba9fcd55f998ae3ce2

Систему пропозициональных связок называют {{c2::полной,}} если {{c1::с их помощью можно записать любую булеву функцию.}}

Note 2

c8b1eecb42414717a222980ed4fdfaa0

Чем особенны системы связок $\wedge, \neg$ и $\vee, \neg$?

> Они полны.

Note 3

0f6f000efe6745dca1a602e59734b7ab

Почему система связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ не является полной?

> Все функции сохраняют единицу.

Note 4

784d6c8d9a9a4fb0ab449b6d64434024

Пример полной системы связок, содержащей только одну функцию. . .

> «не-и» (стрелка Пирса.)

Note 5

812488ce592f4317b3f8bc14acc7f362

Пример функции n аргументов, у которой любая дизъюнктивная или конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены длины n. . .

> Функция, меняющая свой значение при изменении значения любой переменной.

Note 6

c4ad9d49cf0d4bbd973f99622259455a

Функция, меняющая свой значение при изменении значения любой переменной. . .

> Сложение всех аргументов по модулю 2 (или его отрицание).

Note 7

69d66d93ae594c83b27e3763e8d934a6

Пусть f — монотонная булева функция. Если {{c2::f не постоянна,}} то она выражается {{c1::формулой, содержащей только $\wedge$ и $\vee$.}}

Note 8

537e947ad05943caa830adfcf438cf56

Пусть f — монотонная булева функция. Если f не постоянна, то она выражается формулой, содержащей только $\wedge$ и $\vee$. В чём ключевая идея доказательства?

> Разложение по первому аргументу и $f(0, \ldots)$ — импликанта $f(1, \ldots)$.

Note 9

cbefa3e8993c4d2585dc5e97c9df2516

Какая полная система связок была предложена Жегалкиным?

> $\oplus, \wedge, 1$.

Note 10

e95b0392865d49898adc27daa2ec1e8e

{{c2::Элементарную конъюнкцию без отрицаний}} называют {{c1::мономом.}}

Note 11

9a265e9d497a4722bc6ba397ae41b081

Сумма {{c2::мономов}} {{c3::по модулю 2}} называется {{c1::полиномом Жегалкина.}}

Note 12

2c2a6cc033574cfba14cb070595e83ea

Всякая булева функция представляется полиномом Жегалкина. В чём ключевая идея доказательства?

> Система связок $\oplus, \wedge, 1$ полна.

Note 13

c94d2db880174cad80ba29348cd07ad6

Всякая булева функция представляется полиномом Жегалкина. В чём ключевая идея доказательства **единственности** такого полинома?

> Различных полиномов столько же, сколько есть булевых функций n аргументов.

Note 14

73d18ee1747144479c5c0e4d37ffcb92

Сколько существует полиномов Жегалкина, тождественно равных нулю?

> Ровно один.

Note 15

054e669c99b749088d211b77b2ccde17

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства?

> Индукция по числу аргументов.

Note 16

17841160bf3b4c9f9c2f970ee5f4bc61

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства (база индукции)?

> Для нуля аргументов утверждение тривиально.

Note 17

d163a7b12827480d905c31c28d21bf79

Если полином Жегалкина тождественно равен нулю, то он не содержит мономов. В чём ключевая идея доказательства (шаг индукции)?

> Выделить мономы, содержащие первый аргумент и дистрибутивность.

Note 18

84002508531d44f593641b99932200eb

Говорят, что булева функция f {{c2::сохраняет единицу,}} если {{c1::

$$f(1, 1, \ldots, 1) = 1\,.$$

}}

Note 19

320179cbf3f8458684741a2425bd8447

Говорят, что булева функция f {{c2::сохраняет 0,}} если {{c1::

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0\,.$$

}}

Note 20

3e1cff512f704ef09599a3113eb6d55b

Говорят, что булева функция f {{c2::является монотонной по аргументу x}} если {{c1::$f|_{x=0} \to f|_{x=1}$.}}

Note 21

2957fb387679432686f1b934f4e82ed1

Говорят, что булева функция f {{c2::является монотонной}} если {{c1::она монотонна по любому из своих аргументов.}}

Note 22

96d0e06700b1448181e8535af7ff988e

Как можно определить монотонную булеву функцию в терминах частично упорядоченных множеств?

> Функция “уважает” покомпонентное сравнение на $\mathbb{B}^n$.

Note 23

4b5c6b3211774c9984319891e36b6d3c

Говорят, что булева функция f {{c2::является линейной}} если {{c1::если она представляется многочленом Жегалкина степени 1.}}

Note 24

77d0376f8c2b4f899babe0e721b80646

Какой вопрос рассматривается в теореме Поста?

> Полнота данной системы связок.

Note 25

1c32d408ef274167bfbe0a8f3498c584

Каким видом условия является теорема Поста?

> Критерий.

Note 26

667f4704fbf147b7a4673b3b55f98732

Каково условие критерия Поста?

> Система связок не содержится целиков ни в одном из «предполных классов».

Note 27

b16545ab13054773a86186f46c4059be

Какое количество классов рассматривается в качестве «предполных классов» в теореме Поста?

> Пять.

Note 28

745ffb1c0e4b4b0cb77d6319c9f03944

Что есть «предполные классы» из теоремы Поста?

> Классы: монотонных, сохраняющих 0, сохраняющих 1, линейных, самодвойственных.

Note 29

65e7950b98494aaaad1d9e3bbe8d40f7

В чём ключевая идея доказательства критерия Поста (необходимость)?

> Все «предполные классы» замкнуты.

Note 30

bf8091cba9de4849a54f96dd0904eceb

В чём ключевая идея доказательства критерия Поста (достаточность)?

> Выбрать по одной функции, не лежащей в определённом классе, и построить из них $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Note 31

24529dc587344856b5d48b1e6908bfb7

Какое первое построение выполняется в доказательстве теоремы Поста?

> Из функций, не сохраняющих 0 или 1, построить либо обе константы, либо отрицание.

Note 32

5f0a8406dd2746f1a3e9052ef61a42a5

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строиться отрицание, если на первом шаге получились только константы?

> Из немонотонной функции.

Note 33

a77e8f2aa64e473cbca51507c778340f

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строятся константы, если на первом шаге получилось только отрицание?

> Из несамодвойственной функции

Note 34

8466ffc193d04aea8f51b38bd4ef6c33

В доказательстве теоремы Поста, из какой функции строятся $\wedge$ или $\vee$, после построения $\neg$ и констант?

> Из нелинейной.

Note 35

00dd5f55dcad471aa30a70c20c99fe77

В доказательстве теоремы Поста, как из нелинейной функции строятся $\wedge$ или $\vee$, после построения $\neg$ и констант?

> Собрать слагаемые с $p_1p_2,\ p_1,\ p_2$; дистрибутивность и частные случаи.