Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть {{c3::W — линейное пространство, $V \subset W$.}} Тогда V называется {{c2::линейным подпространством}}, если {{c1::

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение «V есть линейное подпространство в W» обозначают {{c1::

$$V \lhd W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \lhd W$. Тогда V — {{c1:: тоже линейное пространство}}.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в $\mathbb{R}^n$?

> Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

> Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2::m\times n\}\}}$ такая, что {{c1::

$$V = \ker A.$$

}}

Note 7

dcb727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \dots a_n \in W$. Является ли

$$\mathscr{L}(a_1, a_2, \dots a_n)$$

подпространством в W?

> Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций $a_1, a_2, \dots a_n$ тоже является их линейной комбинацией.

Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

> Да, всегда.

Note 9

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

> Нет, не всегда.

Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2::V_1 + V_2\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}\}$$

Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1::\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}\}$$

Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

> Да, всегда.

Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$ и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — {{c2::базис в V.}} Тогда в W существует базис вида {{c1::

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n.$$

}}

Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

> Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 15

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \ldots e_k$ — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \ldots e_k, f_1, \ldots f_p$ — базис в V_1,
- $e_1, e_2, \ldots, e_k, g_1, \ldots g_q$ — базис в V_2.

Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

> $e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_p, g_1, \dots, g_q$ — базис в $V_1 + V_2$.

Note 16

d6aa3baccb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть

- $e_1, e_2, \dots e_k$ — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots e_k, f_1, \dots f_p$ — базис в V_1,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots g_q$ — базис в V_2.

Как доказать, что

$$e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_p, g_1, \dots, g_q$$

— базис в $V_1 + V_2$?

> Показать, что $\forall i \quad g_i \notin V_1$, а значит
>
> $$V_1 + V_2 = V_1 \oplus \mathscr{L}(g_1, \dots, g_q).$$

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве V. Тогда {{c2::матрицей перехода от базиса e к базису e'}} называют {{c1::матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$
$$v = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \cdots + \mu_n e'_n,$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

{{c2::Матрицу перехода от базиса e к базису e'}} обычно обозначают {{c1::$C_{e \to e'}$.}}

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \to e'}$?

> Столбцы $C_{e \to e'}$ — это координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. {{c2::Сумму $V_1 + V_2$}} называют {{c1::прямой суммой,}} если {{c2::$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
}}

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

{{c2::Прямая сумма подпространств V_1 и V_2}} обозначается {{c1::

$$V_1 \oplus V_2.$$

}}

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. {{c1::$V_1 + V_2$ — прямая сумма;}}
2. {{c2::$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;}}
3. {{c3::Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.}}

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

▌ Показать, что если $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«{{c3::Монотонность размерности подпространств}}»

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

1. {{c1::$\dim V \leqslant \dim W$,}}
2. {{c2::$\dim V = \dim W \iff V = W$.}}

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

{{c3::Отображение $f : V \to W$}} называется {{c2::линейным отображением,}} если {{c1::

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют {{c1::линейным оператором.}}

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \to W$ называется {{c1::изоморфизмом линейных пространств}} тогда и только тогда, когда {{c2::f — биекция.}}

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются {{c1::изоморфными}} тогда и только тогда, когда {{c2::существует изоморфизм

$$f : V \to W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение {{c2::изоморфности}} обозначается символом {{c1::

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \to W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \to V$ {{c1::— тоже изоморфизм.}}

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения {{c1::эквивалентности.}}

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$\{\{c2::V \simeq W\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1:: \dim V = \dim W.\}\}$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда {{c2::матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно}} называют {{c1::матрицу A, переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.}}

Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«{{c2::Теорема о матрице линейного оператора}}»

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- {{c3::$e_1, e_2, \ldots, e_n$}} — базис в V,
- {{c3::$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$}} — базис в W.

Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

> j-ый столбец — это координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$.

Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$
>
> где λ — координаты вектора из V в базисе e.

Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1::линейный оператор.}}

Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1::произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и $\tilde{e}$ соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \to e'$, $\tilde{e} \to \tilde{e}'$?

$$A' = C^{-1}_{\tilde{e}\to\tilde{e}'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e. Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \to e'$?

$$A' = C^{-1}_{e\to e'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' =$ {{c1:: $\det A$}}.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Определителем оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.
}}

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Рангом оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

{{c2::След матрицы A}} обозначается {{c1::$\operatorname{tr} A$.}}

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in$ {{c3::$\mathbb{R}^{n\times n}$}}. Тогда {{c2:: $\operatorname{tr} A$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$}}.

Note 8

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

{{c2::Следом оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::след матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 9

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

{{c2:: $\ker f$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$f^{-1}(\{0\})$.}}

Note 10

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

{{c2:: $\operatorname{im} f$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$f(V)$.}}

Note 11

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \lhd V$?

> Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f.

Note 12

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \lhd W$?

> Нет, $\ker f \lhd V$.

Note 13

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd W$?

> Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$
>
> $$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 14

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd V$?

> Нет, $\operatorname{im} f \lhd W$.

Note 15

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V, $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

> $$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 16

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

> Дополнить базис в $\ker f$ до базиса в V и построить из них базис в $\operatorname{im} f$.

Note 17

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис в $\ker f$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в V.

Как выглядит базис в $\operatorname{im} f$?

> $$f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n).$$

Note 18

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \text{{{c1::}} } \operatorname{rk} f. \text{}}}$$

Note 19

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как показать, что

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f?$$

> Показать, что в координатном выражении $\operatorname{im} f$ есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора f.

Note 20

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. {{c1::Пространство $V \triangleleft W$}} называется {{c2::инвариантным относительно оператора f,}} если {{c1::

$$f(V) \subset V.$$

}}

Note 21

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \to W$.

$$\ker f, \operatorname{im} f.$$

Note 22

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — {{c4:: дополнение до базиса в W базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k$ в инвариантном подпространстве $V \triangleleft W$.}} Тогда {{c3::матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$}} примет вид

$$A = \text{\{\{c1::} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \text{\}\}}$$

где T_{11} — это {{c2::матрица $f|_V$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$.}}

Лекция 28.02.22

Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор $f : W \to W$ называется {{c2::невырожденным,}} если {{c1::$\det f \neq 0$.}}

Note 2

2e565e676da342fb8cdacf4d62de05e8

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. f невырождено; {{c1::
2. $\ker f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = V$;
4. $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5. f — биекция.}}

Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — невырожденный оператор, то f — биекция?

> Показать, что если f задаётся матрицей A, то f^{-1} задаётся матрицей A^{-1}.

Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — биекция, то f — невырожденный оператор.

> $$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::число $\lambda \in \mathbb{C}$}} называется {{c2::собственным значением оператора f,}} если {{c1::

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::вектор $v \in V \setminus \{0\}$}} называется {{c2::собственным вектором оператора f,}} если {{c1::

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

{{c2::Спектром оператора}} называется {{c1::множество собственных значений этого оператора.}}

Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

{{c2::Спектр}} оператора f обозначается {{c1::$\operatorname{spec} f$.}}

Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$.}} Тогда λ является собственным значением f {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

}} называется {{c1::характеристическим уравнением оператора f.}}

Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть {{c3:: $f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

}} называется {{c1::характеристическим многочленом оператора f.}}

Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной λ?

> Если A — матрица оператора f, то $|A - \lambda E|$ — многочлен переменной λ.

Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

{{c2:: $|A - \lambda E|$ }} = {{c1::$|A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2$.}}

Лекция 07.03.22

Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. {{c2::Характеристический многочлен оператора f}} обозначается {{c1::

$$\chi_f.$$

}}

Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть {{c3::$f : W \to W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}\chi_{f|_V}\text{\}\}} — \text{\{\{c1::делитель } \chi_f.\text{\}\}}$$

Note 3

6deeef304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f. Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

> Показать, что χ_f — определитель соответствующей квазитреугольной матрицы оператора f.

Note 4

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть {{c3::$f : W \to W$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$.}} {{c1::Множество всех собственных векторов f с собственным значением λ, объединённое с нулём,}} обозначается {{c2::$V_f(\lambda)$.
}}

Note 5

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда {{c2::$V_f(\lambda)$}} называется {{c1::собственным подпространством оператора f.}}

Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fe38f36

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. В кратком выражении

$$\{\{c2::V_f(\lambda)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\ker(f - \lambda E).\}\}$$

Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

> Да, всегда, потому что $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$.

Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c1::Размерность $V_f(\lambda)$}} называют {{c2::геометрической кратностью собственного значения λ.}}

Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c2::Геометрическая кратность собственного значения λ}} обозначается {{c1::$S_f(\lambda)$.}}

Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c1::Кратность λ как корня χ_f}} называют {{c2::алгебраической кратностью собственным значением λ.}}

Note 11

856a933db82641cd87b0ee5f34647b1a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c2::Алгебраическая кратность собственного значения λ}} обозначается {{c1::$m_f(\lambda)$.}}

Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Тогда {{c1::$S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda)$.}}

Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Тогда $S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda)$.
В чем основная идея доказательства?

> Показать, что $V_f(\lambda)$ инвариантно относительно f
> $\implies \chi_f$ делится на $\chi_{\tilde{f}}$, где $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$.

Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f, {{c2::$\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$.}} Тогда

$$\{\{c3::\chi_{\tilde{f}}(t)\}\} = \{\{c1::(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}\}\}$$

Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f, $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$. Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

> $\tilde{f}$ представляется матрицей λE порядка $\dim V_f(\lambda)$.

Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

{{c2::Оператор $f : x \mapsto \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,}} называется {{c1::скалярным оператором.}}

Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} f называется {{c2::диагонализуемым оператором,}} если {{c1::существует базис в V, в котором матрица оператора f является диагональной.
}}

Note 18

b01b69fc3ebc4c0c839a0c153f85d041

{{c1::Диагональная матрица с элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на диагонали}} обозначается {{c2::

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

}}

Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть $f : V \to V$— линейный оператор. Если в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица оператора f равна $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то {{c2::$e_1, e_2, \ldots, e_n$}} — {{c1::собственные векторы f.}}

Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть $f : V \to V$— линейный оператор. Если в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица оператора f равна $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то {{c2::$a_1, a_2, \ldots, a_n$}} — {{c1::собственные значения f.}}

Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть {{c4::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда оператор f {{c2::диагонализуем}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::для любого собственного значения λ

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

}}

Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

> Показать, что если f представляется матрицей $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то по определению
>
> $$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda).$$

Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, {{c3::$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f,}} {{c2::

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

}} Тогда {{c1::система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно независима.
}}

Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно независима.
В чем основная идея доказательства?

> Применяем f к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

Note 25

cfe344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

> Составить систему векторов из базисов в $V_f(\lambda_j)$ и показать, что она является базисом V.

Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

> Из условия $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$, а значит система содержит $\deg \chi_f = \dim V$ элементов.

Note 27

5fd54902e7f34d00bad3222902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

> Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов $v_1, \ldots, v_n$, где $v_j \in V_f(\lambda_j)$.

Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор $f : V \to V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то {{c1::f диагонализуем.}}

Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор $f : V \to V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

> $$\forall \lambda \in \operatorname{spec} f \quad 1 \leqslant S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda) = 1 \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть {{c3::пространство $V = V_1 \oplus V_2$.}} {{c1::Оператор $P : V \to V$, переводящий сумму $v_1 + v_2$ векторов из V_1 и V_2 соответственно в вектор v_1,}} называется {{c2::оператором проектирования на V_1 параллельно V_2.}}

Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\operatorname{im} P = \text{{{c1::}} } V_1. \text{ }}}$$

Note 32

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\ker P = \{\{c1::V_2.\}\}$$

Note 33

27181bd7474e4091aee4fa9dba20ae0f

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\operatorname{spec} P = \{\{c1::\{0, 1\}.\}\}$$

Note 34

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$m_P(0) = \{\{c1::\dim V_2.\}\}$$

Note 35

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$S_P(0) = \{\{c1::\dim V_2.\}\}$$

Note 36

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$m_P(1) = \{\{c1::\dim V_1.\}\}$$

Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$S_P(1) = \text{\{\{c1::} \dim V_1 . \text{\}\}}$$

Лекция 14.03.22

Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$.}} Вектор v называется {{c2::корневым вектором высоты k оператора f,}} если {{c1::существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$(f - \lambda E)^k v = 0,$$
$$(f - \lambda E)^{k-1} v \neq 0.$$

}}

Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневой вектор высоты {{c2::1}} оператора f — это {{c1::собственный вектор этого оператора.}}

Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

λ из определения корневого вектора оператора f — это всегда {{c1::собственное значение f.}}

Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что λ из определения корневого вектора всегда является собственным вектором?

> Из определения $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0$.

Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть {{c3::v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f.}} Тогда {{c2::$(f - \lambda E)v$}} — {{c1::корневой вектор высоты $k - 1$.}}

Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f. Тогда $(f - \lambda E)v$ — корневой вектор высоты $k - 1$. В чем основная идея доказательства?

> Из определения корневого вектора
>
> $$(f - \lambda E)^{k-1} \cdot (f - \lambda E)v = 0$$
>
> и аналогично с неравенством нулю для степени $k - 2$.

Note 7

50c2388c1fa843dfa616f85d4cecfa2f

Система {{c3::корневых векторов разных высот,}} отвечающих {{c2::одному и тому же собственному значению оператора,}} {{c1::линейно независима.}}

Note 8

de47eb56e219455a8497a97ad90b861d

Как доказать, что система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению оператора, линейно независима.

> Приравнять линейную комбинацию к нулю и домножать её на $(f-\lambda E)^{k_j-1}$ в порядке убывания высот k_j корневых векторов системы.

Note 9

187218f20c2b46ab9309b3385f2012f4

Пусть {{c3::v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f.}} Тогда система {{c2::

$$v,\ (f - \lambda E)v,\ (f - \lambda E)^2 v,\ \ldots,\ (f - \lambda E)^{k-1} v$$

}} {{c1::линейно независима.}}

Note 10

f77f36f44a0a4dbfb7fe6d8a6b58db75

Пусть v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f. Тогда система

$$v,\ (f - \lambda E)v,\ (f - \lambda E)^2 v,\ \ldots,\ (f - \lambda E)^{k-1} v$$

линейно независима. В чем основная идея доказательства?

> Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению λ.

Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система {{c3::корневых векторов,}} отвечающих {{c2::разным собственным значениям оператора,}} {{c1::линейно независима.}}

Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f. Тогда {{c2:: $(f - \lambda E)^{k-1} v$}} — {{c1::это собственный вектор оператора f.}}

Note 13

59e9653333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

> Домножить произвольную линейную комбинацию на
>
> $$(f - \lambda_1 E)^{k_1 - 1} \ (f - \lambda_2 E)^{k_2} \cdots (f - \lambda_l E)^{k_l}$$
>
> и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. {{c1:: Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению λ, объединённое с нулём,}} называется {{c2:: корневым подпространством, отвечающим собственному значению λ.}}

Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. {{c2::Корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ,}} обозначается {{c1::$K_f(\lambda)$.}}

Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336c4a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Всегда ли $K_f(\lambda) \lhd V$?

▍ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$.}}

$$\text{{{c2::}}} N_{f,k}(\lambda) \text{}}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} \ker(f - \lambda E)^k.\text{}}}$$

Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$. Всегда ли $N_{f,k}(\lambda) \lhd V$?

▍ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Как $K_f(\lambda)$ выражается через $N_{f,k}(\lambda)$?

$$K_f(\lambda) = \bigcup_{k \geqslant 1} N_{f,k}(\lambda)$$

Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) =$ {{c1::$m_f(\lambda)$}}.

Note 21

efee3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$. В чем основная идея доказательства? TODO (?)

Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f.}} Тогда

$$\{\{c2::V\}\} = \{\{c1::K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).\}\}$$

Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

В чем основная идея доказательства?

> Показать, что сумма $K_f(\lambda_j)$
>
> 1. является прямой,
> 2. порождает все пространство V.

Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ прямая?

> Линейная комбинация векторов v_j из $K_f(\lambda_j)$ — это линяния комбинация корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям.

Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ порождает все V?

$$\sum_{j=1}^{l} \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{l} m_f(\lambda_j)$$

Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

{{c2::Жорданова клетка}} — это {{c1::квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

}}

Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты q, соответствующая некоторому числу λ, обозначается {{c1::

$$J_q(\lambda).$$

}}

Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

{{c2::Жорданова матрица}} — это {{c1::блочно диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.}}

Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Тогда, если {{c1::в некотором базисе в V матрица A оператора f имеет жорданов вид,}} то A называют {{c2::жордановой нормальной формой оператора f.}}

Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Тогда, если {{c1::в некотором базисе в V матрица оператора f имеет жорданов вид,}} то этот базис называют {{c2::жордановым базисом оператора f.}}

Note 31

69c2cd2726274e088ffcee35ddfc37af

Как называется основной алгоритм, который используется для построения жордановой нормальной формы линейного оператора?

> Жорданова лестница.

Note 32

d8f181b2d5004a47bd308a35849cddec

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Как для $k > 0$ соотносятся $N_{f,k}(\lambda)$ и $N_{f,k+1}(\lambda)$?

> Для всех k меньше некоторого q
>
> $$N_{f,k}(\lambda) \subsetneqq N_{f,k+1}(\lambda),$$
>
> а для всех $k \geqslant q$:
>
> $$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$