Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2:: Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1:: многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1:: он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p - q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \underset{x\to a}{\longrightarrow} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2:: Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1:: $T_{a,n}f$.}}

Note 5

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: f(a).\}\}$$

Note 6

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left((x-a)^k\right)^{(n)}\Bigg|_{x=a} = \text{\{\{c1::}\begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}\text{\}\}}$$

Note 7

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3::Свойство n раз дифференцируемой функции}}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1:: $f(x) = o((x-a)^n), x \to a.$}}

Note 8

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
{{c1:: $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$$}}

Note 9

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 10

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 11

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 12

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 13

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 14

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$.

Note 15

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon|x-a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

$$|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon|c-a|^n < \varepsilon|x-a|^n$$

Note 16

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N},$ {{c2:: $f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1:: $o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 17

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3:: **Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и f n раз дифференцируема в точке a. }} Тогда {{c1::

$$T_{a,n}f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}