

# Лекция 09.11.22

## Note 1

e60e9a5778ca41aaabad4a4a7e6c4fea

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

■ Обыкновенные; в частных производных.

## Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}} — это {{c1: уравнения относительно функции одной переменной и её производных.}}

## Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

“{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}}” сокращается как “{{c1: ОДУ.}}”

## Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

{{c2: Уравнения в частных производных}} — это {{c1: уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.}}

## Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

{{c2: Уравнения в частных производных}} в русскоязычной среде так же называют {{c1: уравнениями математической физики.}}

## Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

“{{c2: Уравнения в частных производных}}” сокращается как “{{c1: УрЧП.}}”

## Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

{{c2: Порядком}} дифференциального уравнения называется {{c1: порядок старшей производной, в него входящей.}}

## Note 8

69a06ae8b8d1413f84c38cc0ab521158

Является ли

$$F(x, y) = 0, y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

■ Нет, потому что нет производных.

## Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество  $G \subset \mathbb{R}^n$  называется  $\{\{c2: \text{областью},\}\}$  если  $\{\{c1: \text{оно открыто и связно.}\}\}$

## Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f63182

ОДУ первого порядка называется  $\{\{c2: \text{разрешённым относительно производной},\}\}$  если оно имеет вид  $\{\{c1: \cdot\}\}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$\{\{c2: \cdot\}\}$  где  $f$  —  $\{\{c2: \text{функция на области в } \mathbb{R}^2.\}\}$

## Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция  $y$  называется  $\{\{c3: \text{решением ОДУ на множестве } X,\}\}$  если  $\{\{c1: \text{в любой точке } X \text{ её подстановка её значений в ОДУ имеет смысл и приводит к верному равенству.}\}\}$

## Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть  $y$  —  $\{\{c3: \text{решение ОДУ.}\}\}$   $\{\{c1: \text{График } y\}\}$  называется  $\{\{c2: \text{интегральной кривой этого уравнения.}\}\}$

## Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

■ Сколь угодно много.

## Note 14

76c92fefc3414e8da3c06f458e9e80ee

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

■ Найти решение, отвечающее начальным условиям.

## Note 15

94e8aba670fa45cab4fae8fee8d23568

Что есть “начальные условия” из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

■  $y(x_0) = y_0$  для фиксированных  $x_0, y_0$ .

## Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения  $(x_0, y_0)$  в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Начальные данные.

## Note 17

aae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

## Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$ ?

■ Интервал, включающий  $x_0$ .

## Note 19

c6f2ec8c4ae142118b3840ddb828a96b

Как называется теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

## Теорема Пеано.

### Note 20

3623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

### Note 21

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

### Note 22

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

### Note 23

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

Через любую точку области проходит интегральная кривая.

### Note 24

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ?$$

Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

## Note 25

7dbfe4396c5545578771b6066869de5a

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

■ Они равны на некоторой  $V_\delta(x_0)$ .

## Note 26

c197734ceb654182bc3221591296e2f6

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Тогда если  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны, то  $\llcorner$ любая точка области является точкой единственности. $\lrcorner$

## Note 27

33930ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . При каком условии задача Коши для  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  однозначно разрешима в любой точке?

■  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны.

## Note 28

785b85c103cb446090843629aba6f668

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Что называют особым решением уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

■ Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

## Note 29

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Как называется решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , любая точка графика которого не является точкой единственности?

■ Особое решение.

### Note 30

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Что называют общим решением уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

■ Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

### Note 31

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Как задаётся общее решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

■ Отображение  $\Phi(x, c)$ , где  $c$  — параметр,  $x$  — переменная.

### Note 32

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Что называют частным решением уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

■ Одно из решений, входящих в некоторое общее решение.

### Note 33

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

[[c2: Векторное поле]] — это [[c1: отображение из линейного пространства в себя.]]

### Note 34

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a36

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

■ ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

## Note 35

bf5a5b553b8b4f74905e400cce49df6c

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Что называют полем направлений уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

## Note 36

7f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Как строится визуальное представление поля направлений уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

Через каждую точку сетки проводится соответствующий наклонённый отрезок.

## Note 37

a9509cb3d319496ca4f8cc25b5b988b2

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Гладкая кривая является интегральной кривой уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  тогда и только тогда, когда в любой точке она касается соответствующего элемента поля направлений.

(в терминах поля направлений)

## Note 38

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Что называется изоклиной уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

## Note 39

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть  $f$  — функция на области в  $\mathbb{R}^2$ . Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ?

$$\blacksquare \quad f(x, y) = c \text{ для } c \in \mathbb{R}.$$



# Лекция 16.11.22

## Note 1

84332aa7764648b3b6b73355b0fb7064

Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда выражение вида

$$m(x, y) \cdot dx + n(x, y) \cdot dy = 0, \quad \text{где } m, n : G \rightarrow \mathbb{R},$$

называется ОДУ первого порядка в симметричной форме.

## Note 2

0a8383be5d30458db9ab476e9ea34e84

Что называется решением ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение любого из порождённых ОДУ, разрешённых относительно производной.

## Note 3

89d64566d77b4dc7b52af28eb7dae35

Какие два уравнения порождает ОДУ первого порядка в симметричной форме?

$$\frac{dy}{dx} = \dots \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \dots$$

## Note 4

0981a7837c7644328e3f6ccbd939ec02

Всегда ли ОДУ первого порядка в симметричной форме порождает два уравнения?

Нет.

## Note 5

0bf3be66da26454f981de93a9f57fdb4

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0.$$

Точку, в которой  $m$  и  $n$  обращаются в 0, называют особой точкой этого уравнения.

## Note 6

4fb058ed5261465fbcf62958e5b93441

Как ставится задача Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Найти решение для любой из порождённых задач Коши для ОДУ, разрешённых относительно производной.

## Note 7

0d205d054d3843c19a806774476762c0

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0.$$

Что называется неособой точкой этого уравнения?

Точка, в которой либо  $m$ , либо  $n$  не обращается в 0.

## Note 8

61ddfc362e5649ab9020c85dd47f4454

При каком условии ОДУ в симметричной форме гарантированно имеет решение задачи Коши?

Если точка не является особой и функции при  $dx$  и  $dy$  непрерывны.

## Note 9

0ad4cca0576a409cbb3871385860853c

Что можно сказать про ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0,$$

если  $m, n$  непрерывны?

Оно имеет решение задачи Коши для любой неособой точки.

## Note 10

3d3a825102e94d268fceedc112aee02b

В чём основная идея доказательства теоремы о достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема Пеано для порождённого ОДУ, разрешённого относительно производной.

### Note 11

84670525aec14b12ab1c60bc7c6cb90f

Какое есть “тонкое” место в доказательстве достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Применить теорему о стабилизации непрерывной функции для неравенства нулю в какой-то окрестности.

### Note 12

e22e81451b75462bb23f42da429d0822

Какое есть дополнение к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Если обе определяющие функции не обращаются в ноль, то решение “двойственно.”

### Note 13

c5937908ffc3421b88d12e29cd18618a

В каком смысле двойственно решение задачи Коши в дополнении к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Обратная функция существует (на интервале) и является решением второй из порождённых задач Коши.

### Note 14

c77c237173dd4909bef0d7fbb475945a

Пусть для  $m, n \in C(G)$  дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0,$$

и  $y = \varphi(x)$  — решение задачи Коши в т.  $(x_0, y_0)$ . Почему  $\varphi$  обратима (на интервале)?

$\varphi' \neq 0$  и следствие из теоремы Дарбу о строгой монотонности.

### Note 15

1408fcbdb21643b29a526f5c9c698052

Что называется точкой единственности для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Точка, являющаяся точкой единственности для обеих из порождённых задач Коши.

### Note 16

f037d477228b4d1a983be67a181f7fc6

Каково условие для единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Функции при  $dx$  и  $dy$  являются гладкими и не равны нулю в точке.

### Note 17

b4d211a3083b4bfca552c183c7cd0ce8

Почему в теореме о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме мы требуем неравенство нулю функций при  $dx$  и  $dy$ ?

Иначе какая-то из задач Коши не имеет смысла.

### Note 18

91cb20330134439695809b01acd7909f

В каком смысле единственно решение задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме в теореме о единственности?

Точка является точкой единственности.

### Note 19

c34ebe00830e4594b9f2df519066c9f8

В чём ключевая идея доказательства теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема о единственности для ОДУ, разрешённого относительно производной.

## Note 20

83eb2e7882ac49fd950bc3c5d734f88c

Если  $(x_0, y_0)$  является точкой единственности для ОДУ первого порядка, то через неё проходит [[c1: единственная интегральная кривая.]]

## Note 21

931e9e5942144396af4bc98f8d917c45

В каком смысле единственна интегральная кривая, проходящая через точку единственности для ОДУ первого порядка?

Любые две интегральные кривые совпадают на какой-то окрестности.

## Note 22

67befacaa43b4d1daf13c54d0f3c9a18

Чем в первую очередь является интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Гладкая функция на всей области.

## Note 23

6cd34528c11649468f156e7160361bc4

Какому соотношению по определению должен удовлетворять интеграл  $u$  ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0?$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ m & n \end{array} \right| \equiv 0.$$

## Note 24

4e43bac3e13f49e890052b539cb99a0a

Интеграл  $u$  ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$$

называется [[c2: гладким,]] если [[c1:  $\nabla u \neq 0$  на всей области.]]

## Note 25

d57e85cf8770406ca4be015388980ff

Каково основное свойство гладкого интеграла и ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение уравнения  $u(x, y) = u(x_0, y_0)$  есть решение задачи Коши в  $(x_0, y_0)$ .

## Note 26

750fae6a0be8412885d8d65ccd8b532f

Пусть  $u$  — гладкий интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Для каких точек решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

есть решение задачи Коши в  $(x_0, y_0)$ ?

Для неособых.

## Note 27

3ec100db172a42a4821a9c2a59df0cdc

В контексте ОДУ первого порядка в симметричной форме, для какого объекта  $u$  решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

гарантированно является решением задачи Коши в неособой точке  $(x_0, y_0)$ ?

Гладкий интеграл.

## Note 28

2d035fe05f234a678fb45f0a77098ee9

В чём ключевая идея доказательства теоремы о представлении решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме через его интеграл?

Теорема о неявной функции для  $u(x, y) - u(x_0, y_0) = 0$ .

### Note 29

8ee64b4f58d64f3e9c544c3728edc66c

Что называется общим интегралом ОДУ первого порядка в симметричной форме?

■ Выражение  $u(x, y) = c$ , где  $u$  — интеграл уравнения.

### Note 30

4b9745c311764d9aa57c35f678ca0b4b

Пусть  $u$  — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Как называется выражение

$$u(x, y) = c?$$

■ Общий интеграл.

### Note 31

d24cae635b5149fca8646f3627b9bf90

Пусть  $u$  — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Что можно сказать о произвольном решении  $y(x)$  этого ОДУ?

■  $u(x, y(x)) \equiv \text{const}$  на всём интервале.

### Note 32

37ad7fd23ba04b2b8bf1e5946420d716

Каким свойством должен обладать интеграл  $u$  ОДУ первого порядка в симметричной форме, чтобы для любого решения  $y(x)$  было верно

$$u(x, y(x)) \equiv \text{const}?$$

■ Никаким.

# Семинар 10.11.22

## Note 1

d03e183932a84aff83ed3ed2ddd6cb39

Какие ОДУ называются уравнениями с разделяющимися переменными?

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

## Note 2

53d901a2d9e34a6f8cae6bc01a48fbeb

Как решаются ОДУ с разделяющимися переменными?

Собрать все с  $x$  и все с  $y$  с разных сторон и проинтегрировать.

## Note 3

6ec2b60aaf164b1ab14b191fd853fc08

Какое есть “тонкое” место при решении ОДУ с разделяющимися переменными?

Отдельно рассматривать случай равенства нулю при делении.

## Note 4

56d9aa3e00934312bd51c5b2873b2733

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $f$  называется однородной степени  $q$ , если

$$f(\lambda x) = \lambda^q f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

}}

## Note 5

99f9700cabbf4ae6aa184065479b2aab

Какие ОДУ называются однородными?

Зависит от типа ОДУ.



## Note 6

1a1f83b72fc544d0bbc883e1d551a4ab

Какие ОДУ первого порядка в симметричной форме называются однородными?

Обе определяющие функции являются однородными одной степени.

## Note 7

f1642f7a316a46b7873c4f05c9aabc18

Какие ОДУ первого порядка, разрешённые относительно производной, называются однородными?

Определяющая функция является однородной нулевой степени.

## Note 8

575d0a91af124785806cfd53d6872fe0

Как можно показать, что ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной является однородным?

Представить правую часть как функцию от  $\frac{y}{x}$ .

## Note 9

8211f8127d8b4dc38252a59d920e70b8

Как решаются однородные ОДУ?

$y = tx$  и выразить  $dy$ .

## Note 10

1a7488f29ba54697ac88b71b8158f763

Почему для однородных ОДУ работает подстановка  $y = tx$ ?

Из однородности выносится и сокращается  $x$ .