

## Лекция 07.02.22

### Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$ . Тогда  $V$  называется линейным подпространством, если

1.  $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$ ,
2.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$ .

}}

### Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « $V$  есть линейное подпространство в  $W$ » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

### Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда  $V$  — тоже линейное пространство.

### Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в  $\mathbb{R}^n$ ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

### Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $A \sim m \times n$ . Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

■ Да, поскольку  $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$ .

## Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть  $V \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Тогда всегда существует  $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2m \times n\}\}}$  такая, что  $\{\{c1::$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$\}\}$

## Note 7

dc727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть  $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in W$ . Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в  $W$ ?

■ Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоже является их линейной комбинацией.

## Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

## Note 9

9c714ab9fad4b457f993438ef25421061

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

■ Нет, не всегда.

## Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\llbracket c2: V_1 + V_2 \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket c1: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}. \rrbracket$$

## Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \llbracket c1: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \rrbracket$$

## Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

## Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$  и  $e_1, e_2, \dots, e_k$  —  
 $\llbracket c2: \text{базис в } V. \rrbracket$  Тогда в  $W$  существует базис вида  $\llbracket c1:$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\rrbracket$

## Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

■ Дополнить базис в  $V_1 \cap V_2$  до базисов в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно и построить на их основе базис в  $V_1 + V_2$ .

Пусть

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$  — базис в  $V_1$ ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_2$ .

Как можно построить базис в  $V_1 + V_2$ ?

■  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$  — базис в  $V_1 + V_2$ .

## Семинар 09.02.22

### Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  называют матрицу  $C$  такую, что для любого  $v \in V$ , если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

### Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  обычно обозначают  $C_{e \rightarrow e'}$ .

### Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу  $C_{e \rightarrow e'}$ ?

Столбцы  $C_{e \rightarrow e'}$  — это координаты векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Лекция 14.02.22

### Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Сумму  $V_1 + V_2$  называют прямой суммой, если  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

### Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

}}

### Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$  — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ;
- Для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно.

### Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно, то  $V_1 + V_2$  — прямая сумма?

■ Показать, что если  $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$ , то  $v_1 = v_2 = 0$ .

### Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

- $\dim V \leq \dim W$ ;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$ .

## Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется линейным отображением, если

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
2.  $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

## Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют линейным оператором.

## Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор  $f : V \rightarrow W$  называется изоморфизмом линейных пространств тогда и только тогда, когда  $f$  — биекция.

## Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства  $V$  и  $W$  называются изоморфными тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

## Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение изоморфности обозначается символом

$$\simeq$$

}}

## Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если  $f : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $f^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

## Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения  $\{\{c1::\text{эквивалентности.}\}\}$

## Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть  $V, W$  — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$\{\{c2::V \simeq W\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1::\dim V = \dim W.\}\}$$

## Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда  $\{\{c2::\text{матрицей линейного оператора } f \text{ в паре базисов в } V \text{ и } W \text{ соответственно}\}\}$  называют  $\{\{c1::\text{матрицу } A, \text{ переводящую координаты любого вектора } v \in V \text{ в координаты вектора } f(v) \in W \text{ в соответствующих базисах.}\}\}$

## Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

« $\{\{c2::\text{Теорема о матрице линейного оператора}\}\}$ »

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $\{\{c3::e_1, e_2, \dots, e_n\}\}$  — базис в  $V$ ,
- $\{\{c3::\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m\}\}$  — базис в  $W$ .

Как в явном виде задать матрицу оператора  $f$  в этих базисах?

**|**  $j$ -ый столбец — это координаты вектора  $f(e_j)$  в базисе  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ .

## Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?



$$f(e) = \tilde{e}A.$$

### Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где  $\lambda$  — координаты вектора из  $V$  в базисе  $e$ .

### Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже `{{c1:: линейный оператор.}}`

### Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть `{{c1:: произведение матриц этих операторов.}}`