

Лекция 09.11.22

Note 1

e60e9a5778ca41aaabad4a4a7e6c4fea

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

■ Обыкновенные; в частных производных.

Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}} — это {{c1: уравнения относительно функции одной переменной и её производных.}}

Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

“{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}}” сокращается как “{{c1: ОДУ.}}”

Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

{{c2: Уравнения в частных производных}} — это {{c1: уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.}}

Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

{{c2: Уравнения в частных производных}} в русскоязычной среде так же называют {{c1: уравнениями математической физики.}}

Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

“{{c2: Уравнения в частных производных}}” сокращается как “{{c1: УрЧП.}}”

Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

{{c2: Порядком}} дифференциального уравнения называется {{c1: порядок старшей производной, в него входящей.}}

Note 8

69a06ae8b8d1413f84c38cc0ab521158

Является ли

$$F(x, y) = 0, y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

■ Нет, потому что нет производных.

Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется $\{\{c2: \text{областью},\}\}$ если $\{\{c1: \text{оно от-}$
крыто и связно.\}\}

Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f63182

ОДУ первого порядка называется $\{\{c2: \text{разрешённым относи-}$
тельно производной,\}\} если оно имеет вид $\{\{c1: \cdot\}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$\}$ где f — $\{\{c2: \text{функция на области в } \mathbb{R}^2.\}\}$

Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция y называется $\{\{c3: \text{решением ОДУ на множестве } X,\}\}$
если $\{\{c1: \text{в любой точке } X \text{ её подстановка её значений в ОДУ}$
имеет смысл и приводит к верному равенству.\}\}

Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть y — $\{\{c3: \text{решение ОДУ}.\}\}$ $\{\{c1: \text{График } y\}\}$ называется $\{\{c2: \text{ин-}$
тегральной кривой этого уравнения.\}\}

Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

■ Сколь угодно много.

Note 14

76c92fefc3414e8da3c06f458e9e80ee

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

■ Найти решение, отвечающее начальным условиям.

Note 15

94e8aba670fa45cab4fae8fee8d23568

Что есть “начальные условия” из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

■ $y(x_0) = y_0$ для фиксированных x_0, y_0 .

Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения (x_0, y_0) в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Начальные данные.

Note 17

aae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) ?

■ Интервал, включающий x_0 .

Note 19

c6f2ec8c4ae142118b3840ddb828a96b

Как называется теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

Теорема Пеано.

Note 20

3623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 21

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

Note 22

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

Note 23

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

Через любую точку области проходит интегральная кривая.

Note 24

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ?$$

Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

Note 25

7dbfe4396c5545578771b6066869de5a

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

■ Они равны на некоторой $V_\delta(x_0)$.

Note 26

c197734ceb654182bc3221591296e2f6

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Тогда если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то $\{[c1:]$ любая точка области является точкой единственности. $\}$

Note 27

33930ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . При каком условии задача Коши для $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ однозначно разрешима в любой точке?

■ f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны.

Note 28

785b85c103cb446090843629aba6f668

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют особым решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

■ Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

Note 29

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как называется решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, любая точка графика которого не является точкой единственности?

Особое решение.

Note 30

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют общим решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

Note 31

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как задаётся общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Отображение $\Phi(x, c)$, где c — параметр, x — переменная.

Note 32

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют частным решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Одно из решений, входящих в некоторое общее решение.

Note 33

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

Векторное поле — это отображение из линейного пространства в себя.

Note 34

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a36

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 35

bf5a5b553b8b4f74905e400cce49df6c

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют полем направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

Note 36

7f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как строится визуальное представление поля направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Через каждую точку сетки проводится соответствующий наклонённый отрезок.

Note 37

a9509cb3d319496ca4f8cc25b5b988b2

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Гладкая кривая является интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда в любой точке она касается соответствующего элемента поля направлений.

(в терминах поля направлений)

Note 38

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называется изоклиной уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

Note 39

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

$$\blacksquare \quad f(x, y) = c \text{ для } c \in \mathbb{R}.$$

Лекция 16.11.22

Note 1

84332aa7764648b3b6b73355b0fb7064

Пусть G — область в \mathbb{R}^2 . Тогда выражение вида

$$m(x, y) \cdot dx + n(x, y) \cdot dy = 0, \quad \text{где } m, n : G \rightarrow \mathbb{R},$$

называется ОДУ первого порядка в симметричной форме.

Note 2

0a8383be5d30458db9ab476e9ea34e84

Что называется решением ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение любого из порождённых ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 3

89d64566d77b4dc7b52af28eb7dae35

Какие два уравнения порождает ОДУ первого порядка в симметричной форме?

$$\frac{dy}{dx} = \dots \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \dots$$

Note 4

0981a7837c7644328e3f6ccbd939ec02

Всегда ли ОДУ первого порядка в симметричной форме порождает два уравнения?

Нет.

Note 5

0bf3be66da26454f981de93a9f57fdb4

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0.$$

Точку, в которой m и n обращаются в 0, называют особой точкой этого уравнения.

Note 6

4fb058ed5261465fbcf62958e5b93441

Как ставится задача Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Найти решение для любой из порождённых задач Коши для ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 7

0d205d054d3843c19a806774476762c0

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0.$$

Что называется неособой точкой этого уравнения?

Точка, в которой либо m , либо n не обращается в 0.

Note 8

61ddfc362e5649ab9020c85dd47f4454

При каком условии ОДУ в симметричной форме гарантированно имеет решение задачи Коши?

Если точка не является особой и функции при dx и dy непрерывны.

Note 9

0ad4cca0576a409cbb3871385860853c

Что можно сказать про ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0,$$

если m, n непрерывны?

Оно имеет решение задачи Коши для любой неособой точки.

Note 10

3d3a825102e94d268fceedc112aee02b

В чём основная идея доказательства теоремы о достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема Пеано для порождённого ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 11

84670525aec14b12ab1c60bc7c6cb90f

Какое есть “тонкое” место в доказательстве достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Применить теорему о стабилизации непрерывной функции для неравенства нулю в какой-то окрестности.

Note 12

e22e81451b75462bb23f42da429d0822

Какое есть дополнение к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Если обе определяющие функции не обращаются в ноль, то решение “двойственно.”

Note 13

c5937908ffc3421b88d12e29cd18618a

В каком смысле двойственно решение задачи Коши в дополнении к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Обратная функция существует (на интервале) и является решением второй из порождённых задач Коши.

Note 14

c77c237173dd4909bef0d7fbb475945a

Пусть для $m, n \in C(G)$ дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0,$$

и $y = \varphi(x)$ — решение задачи Коши в т. (x_0, y_0) . Почему φ обратима (на интервале)?

$\varphi' \neq 0$ и следствие из теоремы Дарбу о строгой монотонности.

Note 15

1408fcbdb21643b29a526f5c9c698052

Что называется точкой единственности для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Точка, являющаяся точкой единственности для обеих из порождённых задач Коши.

Note 16

f037d477228b4d1a983be67a181f7fc6

Каково условие для единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Функции при dx и dy являются гладкими и не равны нулю в точке.

Note 17

b4d211a3083b4bfca552c183c7cd0ce8

Почему в теореме о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме мы требуем неравенство нулю функций при dx и dy ?

Иначе какая-то из задач Коши не имеет смысла.

Note 18

91cb20330134439695809b01acd7909f

В каком смысле единственно решение задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме в теореме о единственности?

Точка является точкой единственности.

Note 19

c34ebe00830e4594b9f2df519066c9f8

В чём ключевая идея доказательства теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема о единственности для ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 20

83eb2e7882ac49fd950bc3c5d734f88c

Если (x_0, y_0) является точкой единственности для ОДУ первого порядка, то через неё проходит [[c1: единственная интегральная кривая.]]

Note 21

931e9e5942144396af4bc98f8d917c45

В каком смысле единственна интегральная кривая, проходящая через точку единственности для ОДУ первого порядка?

Любые две интегральные кривые совпадают на какой-то окрестности.

Note 22

67befacaa43b4d1daf13c54d0f3c9a18

Чем в первую очередь является интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Гладкая функция на всей области.

Note 23

6cd34528c11649468f156e7160361bc4

Какому соотношению по определению должен удовлетворять интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0?$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ m & n \end{array} \right| \equiv 0.$$

Note 24

4e43bac3e13f49e890052b539cb99a0a

Интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$$

называется [[c2: гладким,]] если [[c1: $\nabla u \neq 0$ на всей области.]]

Note 25

d57e85cf8770406ca4be015388980ff

Каково основное свойство гладкого интеграла u ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение уравнения $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ есть решение задачи Коши в (x_0, y_0) .

Note 26

750fae6a0be8412885d8d65ccd8b532f

Пусть u — гладкий интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Для каких точек решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

есть решение задачи Коши в (x_0, y_0) ?

Для неособых.

Note 27

3ec100db172a42a4821a9c2a59df0cdc

В контексте ОДУ первого порядка в симметричной форме, для какого объекта u решение уравнения

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

гарантированно является решением задачи Коши в неособой точке (x_0, y_0) ?

Гладкий интеграл.

Note 28

2d035fe05f234a678fb45f0a77098ee9

В чём ключевая идея доказательства теоремы о представлении решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме через его интеграл?

Теорема о неявной функции для $u(x, y) - u(x_0, y_0) = 0$.

Note 29

8ee64b4f58d64f3e9c544c3728edc66c

Что называется общим интегралом ОДУ первого порядка в симметричной форме?

■ Выражение $u(x, y) = c$, где u — интеграл уравнения.

Note 30

4b9745c311764d9aa57c35f678ca0b4b

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Как называется выражение

$$u(x, y) = c?$$

■ Общий интеграл.

Note 31

d24cae635b5149fca8646f3627b9bf90

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Что можно сказать о произвольном решении $y(x)$ этого ОДУ?

■ $u(x, y(x)) \equiv \text{const}$ на всём интервале.

Note 32

37ad7fd23ba04b2b8bf1e5946420d716

Каким свойством должен обладать интеграл u ОДУ первого порядка в симметричной форме, чтобы для любого решения $y(x)$ было верно

$$u(x, y(x)) \equiv \text{const}?$$

■ Никаким.

Лекция 23.11.22

Note 1

3ac25bc9f84c408eb1dfcf3dc3b35ed1

Какое выражение называется ОДУ с разделёнными переменными?

■ $m(x)dx + n(y)dy = 0.$

Note 2

d625dac9c8dd43e0a5fa91bdeec1f8da

На каких множествах определены функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

■ Некоторые два интервала.

Note 3

ec328e8cd19d4c57a27c32e263138ce7

На какой области рассматриваются ОДУ с разделёнными переменными?

■ Декартово произведение областей определения функций-коэффициентов.

Note 4

5cac08cbcd25499493dc1b18d0df3ce1

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

■ Непрерывными.

Note 5

afa181edb7c84bdea0ac73d5a39b338e

Чем примечательны ОДУ с разделёнными переменными?

■ У него есть общий интеграл в известной форме.

Note 6

8422d34d16d74daba0b88c018148285d

Как выражается интеграл $u(x, y)$ ОДУ с разделёнными переменными

$$m(x)dx + n(y)dy = 0?$$

$$\int_{x_0}^x m + \int_{y_0}^y n .$$

Note 7

8dbb27c86a01499b83be44a189e22c09

При каком условии интеграл ОДУ с разделёнными переменными является гладким?

■ Если нет особых точек.

Note 8

af655cb8e5aa41348f1b128abe72c8f2

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ с разделёнными переменными?

■ Любая точка из области определения.

Note 9

a7ee1153931c46d59a1a71e028b00b0a

Как на практике задаётся общий интеграл ОДУ с разделёнными переменными?

■ С неопределёнными интегралами.

Note 10

dd91a079474849748c001328b0709b66

Что называется ОДУ с разделяющимися переменными?

■ ОДУ в симметричной форме, у которого коэффициенты представляются как произведения функций одной переменной.

Note 11

4405ce3a7fc64f66a33baddd2945d5e2

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделяющимися переменными?

■ Непрерывными.

Note 12

7007d702730d4b4bb53ea6b9fc990bfa

Какие ОДУ называются уравнениями в полных дифференциалах?

■ Оду в симметричной форме, представимые в виде $du = 0$, где u — гладкая функция на области.

Note 13

a18c66c2343a4d1ab182426f9393edac

Представимость $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ в виде $du = 0$ в определении ОДУ в полных дифференциалах означает, что

{{c1::

$$\nabla u = (m, n).$$

}}

Note 14

5c173b6af64a42a48e1a9e79cf27b712

Чем примечательны ОДУ в полных дифференциалах?

■ У них есть общий интеграл в известной форме.

Note 15

ce9b4078bbd64be0893565bf2b878c9d

Как выражается интеграл ОДУ в полных дифференциалах?

■ Функция u из определения и есть интеграл.

Note 16

d545e5481d8648c084c87047ded49bc4

Как определить, является ли уравнение ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$$

ОДУ в полных дифференциалах?

■ Является $\iff m'_y = n'_x$.

Note 17

385f908cec6342339c9a708dc9e734a5

Что можно сказать о ОДУ в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0,$$

если $m'_y \equiv n'_x$?

■ Это ОДУ в полных дифференциалах.

Note 18

2d3ee1dddf95c48f0b570c8fcbf997605

Какими должны быть функции-коэффициенты ОДУ в симметричной форме в критерии ОДУ в полных дифференциалах?

■ Гладкими (т.е. из C^1 .)

Note 19

e5db36f5f9f8404e8d347d5f20461e67

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (необходимость)?

■ Достаточное условие равенства вторых производных.

Note 20

188e7ec06df04d23872b628d4ae87856

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (достаточность)?

■ Явно предоставить интеграл u .

Note 21

de914195b18342b8bf511d5f61cfb004

Как выражается интеграл ОДУ в полных дифференциалах

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0?$$

$$\int_{x_0}^x m(\cdot, y) + \int_{y_0}^y n(x_0, \cdot).$$

(или, аналогично, y_0 и x)

Note 22

e0c076b820de4d93b46b1b2098c87e2c

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ в полных дифференциалах?

■ Любая точка из области определения.

Note 23

e55223eb41114fe092beffc38509358

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

■ Функция и её производная по параметру непрерывны.

Note 24

766a804de4ef42379f53963b92bd5472

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, f'_y \in C(E)$. Тогда

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx \right\} = \left\{ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right\}$$

Семинар 10.11.22

Note 1

53d901a2d9e34a6f8caeabc01a48fbeb

Как решаются ОДУ с разделяющимися переменными?

Собрать все с x и все с y с разных сторон и проинтегрировать.

Note 2

6ec2b60aaf164b1ab14b191fd853fc08

Какое есть “тонкое” место при решении ОДУ с разделяющимися переменными?

Отдельно рассматривать случай равенства нулю при делении.

Note 3

56d9aa3e00934312bd51c5b2873b2733

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f называется однородной степени q , если

$$f(\lambda x) = \lambda^q f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

}}

Note 4

99f9700eabbf4ae6aa184065479b2aab

Какие ОДУ называются однородными?

Зависит от типа ОДУ.

Note 5

1a1f83b72fc544d0bbc883e1d551a4ab

Какие ОДУ первого порядка в симметричной форме называются однородными?

Обе определяющие функции являются однородными одной степени.

Note 6

f1642f7a316a46b7873c4f05c9aabc18

Какие ОДУ первого порядка, разрешённые относительно производной, называются однородными?

Определяющая функция является однородной нулевой степени.

Note 7

575d0a91af124785806cfd53d6872fe0

Как можно показать, что ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной является однородным?

Представить правую часть как функцию от $\frac{y}{x}$.

Note 8

8211f8127d8b4dc38252a59d920e70b8

Как решаются однородные ОДУ?

$y = tx$ и выразить dy .

Note 9

1a7488f29ba54697ac88b71b8158f763

Почему для однородных ОДУ работает подстановка $y = tx$?

Из однородности выносится и сокращается x .

Семинар 24.11.22

Note 1

ace60f48b6414173867b0ab70d5e367f

Как решаются ОДУ в симметричной форме с линейными коэффициентами?

■ Заменой переменных сводятся к однородным.

Note 2

245fd749caee40409a18db2183e4ba4f

{{c2: Уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

}} называются {{c1: линейными ОДУ первого порядка.}}

Note 3

c436a0567cc849e38bf6e9f64e5a7be

Как называется метод решения линейных ОДУ первого порядка?

■ Метод Бернулли.

Note 4

23dafe9e59384eadab89ccf1265da08a

Какие ОДУ решаются методом Бернулли?

■ Линейные ОДУ первого порядка.

Note 5

59acc38917f5481e968e4f918be1aacd

В чём основная идея метода Бернулли для решения линейных ОДУ первого порядка?

■ Представить функцию как произведение, и удачно подобрать один из множителей.

Note 6

62d24394b1b342568f532607f56260fb

Как подбирается второй множитель при решении линейных ОДУ первого порядка методом Бернулли?

Подставить произведение в изначальное уравнение и “занулить” два слагаемых в левой части.

Семинар 01.12.22

Note 1

820af7a707d14597ae03a86364f7f109

Для каких ОДУ первого порядка применим метод введения параметра?

■ Для которых можно выразить y через x, y' .

Note 2

0f79aa4b959d44ec81cd48e536c7548c

В чём состоит метод введения параметра для решения ОДУ первого порядка?

■ Ввести параметр $p = y'$ и взять полный дифференциал y и его выражения (через $x, y'.$)

Семинар 08.12.22

Note 1

db6bdb752fda41a0adb8fa99386aacf2

Как понизить степень ОДУ первого порядка, не содержащего искомую функцию?

■ Взять низшую из производных за неизвестную.

Note 2

259ae7c54d674879b528902f8acfd7

Как понизить степень ОДУ первого порядка, не содержащего независимую переменную?

■ Взять искомую функцию за независимое переменное, а производную — за искомую функцию.

Note 3

65478a36706440d488ab1a196c9f2a2f

Как понизить степень ОДУ первого порядка, однородного относительно y и его производных?

■ Постановкой $y' = yt$.

Лекция 30.12.22

Note 1

1bbbb42e2ec34ff190e8fe2fa258a219

Для каких ОДУ вводят понятие интегрирующего множителя?

■ ОДУ первого порядка в симметричной форме.

Note 2

4be57b13e2ff4fc0812c48c168caf8d8

Что есть интегрирующий множитель ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0?$$

■ Гладкая ненулевая функция, умножение на которую приводит к уравнению в полных дифференциалах.

Note 3

607c3ff75892464ea473b71badf112c3

Как в общем случае находится интегрирующий множитель ОДУ в симметричной форме?

■ Общего алгоритма нет.

Note 4

0ec5420a438e44be9c69d3e0a06c84c5

Какой частный случай рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя?

■ Множитель — функция от гладкой функции на области.

Note 5

4b053d6afd1c429f90535aafc57a1beb

Каким типом условия является теорема о существовании интегрирующего множителя?

■ Критерий.

Note 6

dccef2b32f784a0ba2b1c390f25df44e

Какое условие рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя?

Определённое выражение зависит только от функции-аргумента множителя.

Note 7

e92e49ddf2a440897504bd8660493fb

Какое выражение рассматривается в теореме о существовании интегрирующего множителя для ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0?$$

$$\frac{m \frac{\partial w}{\partial y} - n \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}},$$

где w — функция-аргумент.

Note 8

b32b28f5868247118234555ca71d17ed

Пусть $w \in C^1$ и дано ОДУ в симметричной форме

$$mdx + ndy = 0.$$

Что можно сказать, если $\frac{m \frac{\partial w}{\partial y} - n \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}}$ зависит только от w ?

Существует интегрирующий множитель вида $\mu \circ w$.

Note 9

c3227395f1404ab295f4401b9c8401f2

В чём основная идея доказательства теоремы о существовании интегрирующего множителя?

Критерий ОДУ в полных дифференциалах.

Note 10

4e0f81875d544375856a688e78b0c9af

Какими должны быть функции-коэффициенты линейного ОДУ первого порядка?

■ Непрерывными.

Лекция 07.12.22

Note 1

da7b414e99214fe49b3937bbc5dda688

В чём основная идея доказательства теоремы Пеано?

Построить последовательность приближённых решений для эквивалентного интегрального уравнения.

Note 2

f915e26dcad547a99a1887f67b12cc3b

Какому интегральному уравнению эквивалентна задача Коши для ОДУ $y' = f(x, y)$?

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\cdot, y(\cdot)) \, d\cdot.$$

Note 3

e97baec3a1da423dad9aeaab712b5c7d

Какой задаче эквивалентно интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\cdot, y(\cdot)) \, d\cdot?$$

Задача Коши для $y' = f(x, y)$.

Лекция 14.12.22

Note 1

1dbe2f8bdd994378839dddc6f69ffebf

Что называется нормальной системой ОДУ?

Система ОДУ $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_m)$ для $i = 1, \dots, m$.

Note 2

5acbc74ff5274cebae6e7b060adfd7fc

Какой должны быть функции f_i из определения нормальной системы ОДУ?

Любые функции на некоторой общей области.

Note 3

62d1d346e7d84fa480c253bc7ffe8feb

Любое дифференциальное уравнение, разрешённое относительно старшей производной, сводится к нормальной системе ОДУ специального вида.)

Note 4

96ea219edca14258bd7a4fce45d39800

Какие ОДУ высших порядков гарантированно сводятся к нормальной системе ОДУ?

Разрешённые относительно старшей производной.

Note 5

85cb7f9eac2b41d8ac0ff8551a26e0b6

К какой нормальной системе сводится ОДУ

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})?$$

$$\begin{cases} y_0 = y, \\ y_{i+1} = y'_i, \\ y_m = f(\dots). \end{cases}$$

Note 6

0ad55ab69a854bcbbb1a172e5f3ea76c

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Величина

$$\max_i |x_i|$$

называется максимум-нормой вектора x .

Note 7

5148d0bcd40f4a1caf2a3cb03b8d1fe2

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Максимум-норма вектора x обозначается $|x|$.

Note 8

898c3fb2a0e949ec92dfe51da414f60f

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Каким соотношением связаны $\|x\|$ и $|x|$? (Оценка снизу для $|x|$.)

$$\|x\| \leq \sqrt{n} |x|.$$

Note 9

7104b4d248e24eb68bd2b7ba38bad530

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Каким соотношением связаны $\|x\|$ и $|x|$? (Оценка сверху для $|x|$.)

$$|x| \leq \|x\|.$$

Note 10

489adc55335c42919fe3f46965f5a6ae

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Величина

$$\max_{i,j} |a_{ij}|$$

называется максимум-нормой матрицы A .

Note 11

f810fa6058094303a4bd1bb3cedaaf8e

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Максимум-норма матрицы A обозначается $\|A\|$.

Note 12

b352b66d7dd14b1a9b2ba2e66d888d5c

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$. Что можно сказать о $\|A \cdot B\|$?

$$\|A \cdot B\| \leq m \|A\| \|B\| .$$

Note 13

335e8560b4c44a4c806181b559981011

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$. Что можно сказать о $|Ax|$?

$$|x| \leq m \|A\| \cdot |x| .$$

Note 14

b4cbd2c25e924ec78b6044c556b886bf3

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Вектор-функция f называется $\{\{c2::\text{интегрируемой},\}\}$ если $\{\{c1::\text{все } f_i \text{ интегрируемы.}\}\}$

Note 15

04c57fb9b7804a999fddec80fd902491c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2:: \int_a^b f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \left(\int_a^b f_i\right) \in \mathbb{R}^n.\}\}$$

Note 16

ee80a65e53c644b7a5ad9908f5e49528

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ интегрируема и $\{\{c2::|f| \leq M.\}\}$ Тогда

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \{\{c1:: M(b-a).\}\}$$

Note 17

b957e9e00ecce4363903fc87643ce7fd5

Как в векторном виде записывается нормальная система ОДУ?

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где y — вектор-функция, f — отображение на области.

Note 18

ee6d475bfc6d40e5af0793bfd09da0e8

Что фактически является решением нормальной системы ОДУ в векторном виде?

Вектор-функция на некотором интервале.

Note 19

231b400e13e949e9a728a321099f9010

Как ставится задача Коши для нормальной системы ОДУ?

Так же как для ОДУ первого порядка, но с векторными начальными данными.

Note 20

c7fa040588b644e0872aab7d789419ec

Что устанавливает условие Липшица (интуитивно)?

Отображение увеличивает расстояние между точками не более чем в L раз.

Note 21

f828a753435f412b8a1544ceaffdf050

Как выглядит условие Липшица для $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

$$\forall x, y \in G.$$

Note 22

ccc2b3d677b44cc2a1105918d53fa9db

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Как называется условие

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \\ \forall x, y \in G?$$

■ Условие Липшица.

Note 23

4b7cc86c9503491290ec6d101a4cb723

Значение L из определения условия Липшица называют константой Липшица.

Note 24

d28025b79af146e8a00c926de2bd80b8

Множество всех липшицевых отображений на множестве H обозначается $\text{Lip}(H)$.

Note 25

f57d54d7b53747ae9e26af0c12ea83f0

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Говорят, что f удовлетворяет условию Липшица по набору переменных, если f является липшицевой с одной и той же константой при любом фиксированном значении остальных переменных.

Note 26

8f3c6f4b5a514cf5a5bd4fc268c0ca17

Множество всех функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной x , на множестве H обозначается $\text{Lip}_x(H)$.

Note 27

8dd4d146c7f6410d81e59d0d9cf70e79

Говорят, что $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально в точке $x_0 \in G$, если внутри G найдётся окрестность x_0 , на которой f является липшицевой.

Note 28

915f61d4e6dd41e3ae1cc164fdeb321b

Говорят, что $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально на G , если f локально липшицева в любой точке G .

Note 29

51e47fa7fd634814985ce777d605fbff

Множество всех локально липшицевых отображений на множестве H обозначается $\text{Lip}_{loc}(H)$.

Note 30

021e656ff17a413980caea28d688c37f

Множество всех локально липшицевых по переменной x отображений на множестве H обозначается $\text{Lip}_{x,loc}(H)$.

Note 31

4b7a29c8468344d09b177c34482c7a14

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие локальной липшицевости f на G ?

| $f \in C^1(G)$.

Note 32

9ce16ab1d1de4fee86933cb29ce5d26e

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие локальной липшицевости f по переменным x_{i_1}, \dots, x_{i_k} на G ?

| Частная производная по любой из этих переменных непрерывна на G .

Note 33

8ed16a99d0bc4e2a94bec19c9886a11b

В чём основная идея доказательства достаточного условия локальной липшицевости для отображений

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m ?$$

Теорема Вейерштрасса для частных производных и обобщение формулы конечных приращений.

Note 34

272334ddc9d341549659ef7e3d32a75f

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие липшицевости f на G ?

G выпукло и все частные производные ограничены.

Note 35

935bbf65c0ef43c8a2615048d6af6b1d

Пусть $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. В чём состоит достаточное условие липшицевости f по переменным x_{i_1}, \dots, x_{i_k} на G ?

G выпукло и частные производные по этим переменным ограничены.

Note 36

35012253e1c4488eaa030f235a65f273

В чём основная идея доказательства достаточного условия липшицевости для отображений

$$f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m ?$$

Обобщение формулы конечных приращений.

Note 37

43cc43e729214560aaedb47fa260e441

Пусть $f \in G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, G выпукло и $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \leq M$. Тогда

$$f \in \text{Lip}(G).$$

}}

Note 38

462d147efec24f439dd6356252e621a3

Пусть $f \in G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, G выпукло и $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| \leq M$. Тогда $f \in \text{Lip}(G)$ с константой Липшица $\{\{c1:nM.\}$

Note 39

40866342d8ef4347bb227a60e324e0d0

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально на G . Тогда $\{\{c1:: f \in C(G).\}$

Note 40

93f75da5f4874eac83a77174dbd34cd1

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально на G . Тогда $\{\{c2:: f \text{ удовлетворяет условию Липшица } \}$ на любом $\{\{c1:: \text{компакте в } G.\}$

Лекция 21.12.22

Note 1

46397f19bad0426aa2f76c3cbf7570c6

Какой вопрос рассматривается в теореме Пикара?

Существование решения задачи Коши для нормальной нормальной системы ОДУ.

Note 2

1ef2b2bd4b93471bb778e7a0df3a4558

При каком условии теорема Пикара применима к нормальной системе ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ?$$

f удовлетворяет условию Липшица локально по переменной y .

Note 3

1099f8e6f2bb4a329a48e08dfcb62b8a

Каким типом условия является теорема Пикара?

Достаточным.

Note 4

15e101fcaadf4288a9a08569a6d4cad2

Какой вывод делается в теореме Пикара?

Нормальная система имеет решение задачи Коши в любой точке области.

Note 5

b0f68c20aaa1405984630292726e5593

Какому интегральному уравнению эквивалентна задача Коши для нормальной системы ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ?$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\cdot, y(\cdot))$$

Note 6

90272d0d6764483a8cb93bf4dacfe77c

В чём основная идея доказательства теоремы Пикара?

Построить последовательность приближённых решения для эквивалентного интегрального уравнения.