

Лекция 08.02.23 (1)

Note 1

c479b17923b04cc899ccd36d430abf6e

Для каких функций определяется интеграл Фурье?

Кусочно-гладких на любом отрезке и абсолютно интегрируемых на \mathbb{R} .

Note 2

2e470cdc0266434182a07d52209c1bca

Откуда, в общих чертах, возникает понятие интеграла Фурье?

Из предельного перехода от рядов Фурье.

Note 3

a801b28dfec4b9fa7c62fd2092d035a

Как выглядит ряд Фурье $2l$ -периодической функции?

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Note 4

a59aff7532704ca498a695bca1ca01d1

Как определяются коэффициенты a_n ряда Фурье $2l$ -периодической функции?

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Note 5

9ecca0b0846a4282ba65eb6706848d71

Как определяются коэффициенты b_n ряда Фурье $2l$ -периодической функции?

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx .$$

Note 6

64752d21c9814733ac5b4fc4a8ebb571

Для каких функций выполняется интегральная формула Фурье?

Кусочно-гладких на любом отрезке и абсолютно интегрируемых на \mathbb{R} .

Note 7

b4fb252816f14260aae170ff59eb8c0d

Как выводится интегральная формула Фурье?

Как предел разложения в ряд Фурье на $[-r, r]$ при $r \rightarrow \infty$.

Note 8

a459215af9634f8a9ef3a69def0eb908

Что в выводе интегральной формулы Фурье происходит со свободным членом разложения в ряд Фурье?

Он стремится к нулю.

Note 9

58b7f21884cd410fb9bd777ec693ebc4

Как в выводе интегральной формулы Фурье перейти от суммы к интегралу?

Использовать неформальное сходство с интегральной суммой соответствующего интеграла.

Note 10

c9abe7ec159c45c2a383de945f6c72e5

Как в выводе интегральной формулы Фурье показать неформальное сходство выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n(x-u)}{l} du \right)$$

с соответствующей интегральной суммой?

Ввести $\lambda_k = \frac{\pi n}{l}$, откуда $\Delta \lambda_k = \frac{\pi}{l}$.

Note 11

3b4198d58dcc4333b79c02b0ff82b891

Интеграл Фурье...

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$$

Note 12

c889f142f0cf44e0b06b987221c635da

Как определяется коэффициент $a(\lambda)$ в интеграле Фурье функции f ?

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos \lambda x dx.$$

Note 13

d1a6cd839e7c4a2786c48a1a3ad6b0fa

Как определяется коэффициент $b(\lambda)$ в интеграле Фурье функции f ?

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin \lambda x dx.$$

Note 14

3ea5ca54f4a44a11a08a441ec3f997ea

Коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в интеграле Фурье фактически задают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты.

Note 15

a77d334a54924e4ba13350819b4aa62e

Как называется интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{\mathbb{R}} f(u) \cos(\lambda(t-x)) du ?$$

■ Интеграл Фурье.

Note 16

2106cbd921f24b16abbcd357a0ca9e55

Что утверждает интегральная формула Фурье?

■ Равенство среднего значения односторонних пределов значению интегралу Фурье.

Note 17

0cb0976cbc5442fd977022e6b98b5088

Как интеграл Фурье упрощается для нечётных функций?

■ Остаются только синусы.

Note 18

ee2657adb0724053ab951a4022088d05

Как интеграл Фурье упрощается для чётных функций?

■ Остаются только косинусы.

Note 19

405a32411509412b8a3b7a6a0384c14b

Как интеграл Фурье строится для функций, определённых на $(0, +\infty)$?

■ Путём (не)чётного продолжения функции на \mathbb{R} .

Лекция 08.02.23 (2)

Note 1

2997689aa1c24e939f84c1392dfc1061

Чем в первую очередь является интеграл, зависящий от параметра?

- Функция, аргумент которой играет роль параметра.

Note 2

0e0c024c4c584815bc1daf2b87d001fe

Какие части интеграла, зависящего от параметра, собственно могут зависеть от параметра?

- Границы интегрирования и подынтегральная функция.

Note 3

b96f8eb96a4d42cdb1f17860eca8ffe9

Какой интеграл рассматривается в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

- Собственный интеграл по отрезку, не зависящему от параметра.

Note 4

d87dbab278f348399f0e5d5da2d74c2e

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

- Фиксированный отрезок.

Note 5

118ac67b133e45dc9bd834fbf8a12aef

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

- Подынтегральная функция двух аргументов непрерывна.

Note 6

3ba379f8ec1a47c5a1c1f1fd1d1ec848

На каком множестве определена подынтегральная функция в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

■ Декартово произведение соответствующих отрезков.

Note 7

7e1447d4172a450a926a1e0ccb1fcaf0

Что мы заключаем из теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

■ Интеграл непрерывен по параметру.

Note 8

1655e66842d543a8a4858d63d615d8d8

Пусть $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ — семейство функций на множестве D .
Говорят, что $\|c2\|: f_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x), \|$ если $\|c1\|:$

$$\forall x \in D \quad f_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x).$$

}}

Note 9

0ad3247020ff4518aea0a4cd78bab486

Пусть $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ — семейство функций на множестве D .
Говорят, что $\|c2\|: f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x), \|$ если $\|c1\|:$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \rho(f_\alpha, f) = 0.$$

}}

Note 10

0ae1565fef4c4cddbc291219e3597af6

Пусть $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ — семейство функций на множестве D .
Говорят, что $f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x)$, если $\|c1\|:$

$$\begin{aligned} \forall \{\alpha_k\} \subset A \setminus \{\alpha_0\} : \alpha_k &\mapsto \alpha_0 \\ f_{\alpha_k}(x) &\rightrightarrows_{k \rightarrow \infty} f(x). \end{aligned}$$

}}

(по Гейне)

Note 11

ba9496d1a74648c49695ad8a83703086

Пусть $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ – семейство функций на множестве D .
Говорят, что $f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x)$, если $\{\{c1::$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \alpha \in \dot{V}_\delta(\alpha_0) \cap A \\ |f_\alpha - f_{\alpha_0}| < \varepsilon.$$

$\}\}$

(по Коши)

Note 12

077ae4731b5248ca9b8596fbfef72eac

Пусть $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда $\forall y_0 \in [c, d]$
при $y \rightarrow y_0$ $\{\{c1::$

$$f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0).$$

$\}\}$

Note 13

7a2ac45c10144aa59a5e9582002f921b

В чём основная идея доказательства теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

| Равномерная непрерывность функции под интегралом и предельный переход под знаком интеграла.

Note 14

e55223eb41114fe092beeffc38509358

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

| Функция и её производная по параметру непрерывны.

Note 15

e287f587adf9483ebb3c4a0decaa74b6

Какой интеграл рассматривается в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Собственный интеграл по отрезку, не зависящему от параметра.

Note 16

c4bb67f8fb544eb982b967fc570ec6b0

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Фиксированный отрезок.

Note 17

7ecf4e70ff554f4b935fe30fb72d3b90

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Функция под интегралом и её производная по параметру непрерывны.

Note 18

7232b8f9240c403b9c4e58d656d379a7

На каком множестве определена подынтегральная функция в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Декартово произведение соответствующих отрезков.

Note 19

7ae69cc649ef498f8dd4813ce820fb56

Что мы в первую очередь заключаем из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Интеграл имеет непрерывную производную по параметру.

Note 20

6b76e966d30c45f898f47c3e102ecbb0

Что мы дополнительно заключаем из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Оператор дифференцирования по параметру можно внести под интеграл.

Note 21

24341c10b12c4a51a7a40f068f64f0b4

В чём основная идея доказательства теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Определение производной через предел и предельный переход под знаком интеграла.

Note 22

2a807a4554824403941c3c7ff5a961be

В доказательстве теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, как показать, что

$$\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) ?$$

Теорема Лагранжа, определение через (ε, δ) и равномерная непрерывность $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Note 23

5a5735d8797344c886913921f7e9007a

Что утверждает теорема об интегрировании интеграла по параметру?

При кратном собственном интегрировании непрерывной функции неважен порядок интегралов.

Note 24

a6589b1e039d4cc598e8d98f047d8a95

На каком множестве определена функция из теоремы об интегрировании интеграла по параметру?

Декартово произведение соответствующих отрезков.

Семинар 13.02.23

Note 1

73d8dc9a6be641fdb16ae59c9e766905

Если $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ есть ряд Фурье функции f , то пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

}}

Note 2

4b02dc9235904406b993092fcf164df3

Что можно сказать про коэффициенты Фурье функции f , если она является нечётной?

Кoefficients before $\cos nx$ turn to zero.

Note 3

28a6a43ea3f84c0791428245b2836c87

Что можно сказать про коэффициенты Фурье функции f , если она является чётной?

Кoefficients $\sin nx$ turn to zero.

Note 4

a67cfd6b10a54e3582540f8aa941aa25

Ряд Фурье для $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на $[-\pi, \pi]$...

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx .$$

Note 5

c013eb6c81d34b76b548427e583d4706

Пусть $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема. Как разложить f в ряд Фурье только по косинусам?

■ Продолжить f на $[-\pi, \pi]$ чётным образом.

Note 6

d53acb408ebf46339447f5b81493d648

Пусть $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема. Как разложить f в ряд Фурье только по синусам?

■ Продолжить f на $[-\pi, \pi]$ нечётным образом.

Лекция 15.02.23

Note 1

c0a105b141ee4aeca1e05563450c4793

Пусть $f : [a, b) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируема для любого y . Будем говорить, что $\{\int_a^{\cdot} f(\cdot, y) dx\}$ сходится равномерно относительно Y , если $\{\int_a^t f(\cdot, y) dx\}$ сходится равномерно при $t \rightarrow b^-$.

Note 2

883264877f984d4fb7b033e583259ae7

Критерием чего является критерий Больцано-Коши для несобственного интеграла, зависящего от параметра?

■ Равномерная сходимость интеграла.

Note 3

69524bef25574a2a982f8ab3f8372f38

Какое выражение оценивается в критерии Больцано-Коши для несобственного интеграла, зависящего от параметра?

■ Собственный интеграл по отрезку внутри δ -окрестности предельной точки.

Note 4

d6206f0e18a74f10a31ab64741e9d36d

Что мы рассматриваем в признаке Вейерштрасса для несобственного интеграла?

■ Несобственный интеграл, зависящий от параметра.

Note 5

bea8faaa39b44a12a6e8ce8ef8e490c5

При каком условии мы можем что-либо заключить из признака Вейерштрасса для несобственного интеграла

$$\int_a^{\cdot} f(x, y) dx ?$$

Если $|f(x, y)|$ мажорируется функцией от x , для которой сходится тот-же несобственный интеграл.

Note 6

ae19a084cd024ed0acc721977052f4a0

Что мы заключаем из признака Вейерштрасса для несобственного интеграла?

Несобственный интеграл сходится равномерно.

Note 7

01b01b2a10a54506909738f37a46ef78

Как в общих чертах можно описать подынтегральные функции-множители из признаков Абеля и Дирихле?

Монотонная и условно ограниченная.

Note 8

837b1fd2494d4f8b93d9cf71ca1579e1

Что мы рассматриваем в признаке Дирихле для равномерной сходимости несобственного интеграла?

Несобственный интеграл от произведения двух функций, зависящих от параметра.

Note 9

43bf33a64fdd4bd685aa2472ef1482bf

Какому условию должна удовлетворять монотонная функция в признаке Дирихле для равномерной сходимости несобственного интеграла?

Равномерно убывает к нулю на множестве значений параметра.

Note 10

af4fca413fdd415b97d09ac2980c753e

Нужно ли требовать ограниченность монотонной функции в признаке Дирихле для равномерной сходимости несобственного интеграла?

■ Нет.

Note 11

109c1cc0a0c84b689fe9c0edfec57317

Какому условию должна удовлетворять условно ограниченная функция в признаке Дирихле для равномерной сходимости несобственного интеграла?

■ Интегралы с переменным верхним пределом равномерно ограничены на множестве значений параметра.

Note 12

c203036fc9884bc1bda91a4b6ad8925b

Что мы заключаем из признака Дирихле для равномерной сходимости несобственного интеграла?

■ Несобственный интеграл сходится равномерно.

Note 13

5d8ca135f57247669d241947c806f0fb

Что мы рассматриваем в признаке Абеля для равномерной сходимости несобственного интеграла?

■ Несобственный интеграл от произведения двух функций, зависящих от параметра.

Note 14

fb83f03782a240ec94587429980ec7ec

Какому условию должна удовлетворять монотонная функция в признаке Абеля для равномерной сходимости несобственного интеграла?

■ Равномерно ограничена.

Note 15

d2305b1b099d48a4be34f030ec5efda9

Какому условию должна удовлетворять условно ограниченная функция в признаке Абеля для равномерной сходимости несобственного интеграла?

Несобственный интеграл сходится равномерно на множестве значений параметра.

Note 16

fd75aa25412e4fb281c8a0bb764605f6

Что мы заключаем из признака Абеля для равномерной сходимости несобственного интеграла?

Несобственный интеграл сходится равномерно.

Note 17

c4ba5348207742c3a9728dec94bec762

Пусть $f \in R_{loc}(a, b)$.

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f \stackrel{\text{def}}{=} \{ \{ c \mid \int_{\rightarrow a}^c f + \int_c^{\rightarrow b} f, \text{ где } c \in (a, b) \} \}$$

Note 18

08c693b86b194b22bb635f512e34ec5f

Что означает непрерывность отображения нескольких переменных по одной выделенной переменной?

Непрерывность как функции одной переменной при любом фиксированном значении остальных переменных.

Note 19

5d6dfe94c7ed46d2964c077feb3a3ea1

Какой интеграл мы рассматриваем в теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

Зависящий от параметра несобственный по фиксированному промежутку.

Note 20

6a7dc9d5dcad4ca9abd466e52032f5f3

Какому множеству принадлежат значения переменной в теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

■ Фиксированный промежуток.

Note 21

a3444184236f4e52b3c323ea15b6b425

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

■ Произвольное множество.

Note 22

480f2a86c3424829880c7a062fcddeb9f

Что мы требуем от подынтегральной функции в теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

■ Непрерывность по параметру в точке.

Note 23

d82edb6948f14193ab27d51fccf77b47

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

■ Несобственный интеграл сходится равномерно в некоторой окрестности рассматриваемого значения параметра.

Note 24

ad230edc93eb4d3d9101dd705c271d08

Что мы заключаем из теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру?

■ Несобственный интеграл по параметру непрерывен в точке.

Note 25

e59c01cb63f34ef5b754d7f8f8c0e7d8

Какой интеграл мы рассматриваем в теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

Зависящий от параметра несобственный по фиксированному промежутку.

Note 26

12ac15551f9b4528bd1b81627edbe1cb

Какому множеству принадлежат значения переменной в теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

Фиксированный промежуток.

Note 27

930aeb3c0b624ef4a19eabe5932e02e7

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

Произвольное множество.

Note 28

9c4eb12a1b514c4eb1240a1bdfd39041

Что мы требуем от подынтегральной функции в теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

Функция и её производная по параметру непрерывны по переменной интегрирования.

Note 29

e4a73bde1c744a9e81dce46e0c618d78

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

Если интеграл от производной по параметру сходится равномерно и изначальный интеграл сходится хотя бы при одном значении параметра.

Note 30

acee9a53028a4215b33ba47d4ae7cab3

Что мы заключаем из теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

■ Интеграл сходится равномерно и дифференцируем.

Note 31

1b8064f4186841d0a0640eadacc624f0

Что мы дополнительно заключаем из теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру?

■ Оператор дифференцирования можно внести под интеграл.

Note 32

412014afd6ee4ad3b67727ed039d44b1

Что мы рассматриваем в теореме об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Собственный интеграл от зависящего от параметра несобственного интеграла по фиксированному промежутку.

Note 33

cdafdb9f854b499cb8344534620b1990

Какому множеству принадлежат значения переменной в теореме об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Фиксированный промежуток.

Note 34

acffcc955702460895a609902ca1d0dc

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Фиксированный отрезок.

Note 35

af1221163501453e881248e60405aa4f

Что мы требуем от подынтегральной функции в теореме об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Непрерывности по переменной интегрирования.

Note 36

a13b3b9391cb40ba811ae1d0c34323dd

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Если несобственный интеграл сходится равномерно.

Note 37

215844644cca487e9f7f2bd15416340a

Что мы заключаем из теоремы об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Несобственный интеграл интегрируем по параметру на отрезке.

Note 38

a2835053a18f468aada0606d05f0d27a

Что мы дополнительно заключаем из теоремы об интегрируемости несобственного интеграла по параметру?

■ Операцию интегрирования по отрезку можно внести под несобственный интеграл.