Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2::Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1::многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1::он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p-q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \xrightarrow[x \to a]{} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2::Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1::$T_{a,n}f$.}}

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{{c3::**Формула Тейлора для многочленов**}}»

Пусть p — {{c2::многочлен степени не более n.}} Тогда {{c1::

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } f(a). \text{}}}$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left.\Big((x-a)^k\Big)^{(n)}\right|_{x=a} = \text{{{c1::}} } \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} \text{}}}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3::**Свойство n раз дифференцируемой функции**}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1::$f(x) = o((x-a)^n), x \to a$.}}

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{\{c1::\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x - a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c - a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c - a|^n < \varepsilon |x - a|^n$$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$, {{c2::$f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x - a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1::$o((x - a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 19

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3::**Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset R \to \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

> По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

> $$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\widetilde{\Delta}_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{cases} \}\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{{c3::**Формула Тейлора-Лагранжа**}}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq x,$ {{c2::$f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.}} Тогда {{c1::найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {{c1::теореме Лагранжа}}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::e^x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).\}\}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\sin x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).\}\}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\cos x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).\}\}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\ln(1+x)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).\}\}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{{c3::Обобщённый биномиальный коэффициент}} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \{\{c1::\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\}\}, \quad \alpha \in \{\{c2::\mathbb{R}\}\}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::(1+x)^\alpha\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)\ .\}\}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют {{c1::биномиальным разложением}}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{\{c1::(-1)^k.\}\}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::(1+x)^{-1}\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)\ .\}\}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {{c3::функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа.}} Тогда если {{c2::

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

}} то {{c1::

$$|R_{a,n} f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}}

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n \, dx = \text{\{\{c1::}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\text{\}\}}, \quad (\text{\{\{c2::}n \neq -1\text{\}\}}).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \text{\{\{c2::}\frac{1}{x}\text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \ln|x| + C\text{\}\}}.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \text{\{\{c2::}\frac{1}{1-x^2}\text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::}\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\text{\}\}}.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \text{\{\{c2::}\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C\text{\}\}}.$$

Note 5

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{\{\{c1::}x^2 \pm 1\text{\}\}}}} \, dx = \ln|x + \sqrt{\text{\{\{c1::}x^2 \pm 1\text{\}\}}}| + C.$$

Note 6

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x \, dx = \text{\{\{c1::}\frac{a^x}{\ln a} + C\text{\}\}}.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

> Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow\!\nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\Longleftarrow$ }} {{c1::$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::f постоянна на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть {{c3::$f, g \in C[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда Если {{c2::$f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B\rangle.$$

}}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть {{c3::$f, g \in C\langle A, B]$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда если {{c2::$f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B).$$

}}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leqslant f(a).$$

}}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geqslant f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если {{c2::точка a является точкой минимума или максимума функции f,}} то a называется {{c1::точкой экстремума f.}}

Note 15

98f3cebf02ca464ab3cf9e94355caaa2

«{{c3::Необходимое условие экстремума}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$.}}

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

> Применить теорему Ферма к $f|_{[a-\delta,a+\delta]}$ для δ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется {{c1::стационарной точкой функции f,}} если {{c2::

$$f'(a) = 0.$$

}}

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::точка $a \in (A, B)$}} называется {{c2::критической точкой,}} если {{c1::либо a стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке a.}}

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда все {{c2::точки экстремума f, принадлежащие (A, B),}} лежат в {{c1::множестве её критических точек.}}

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

{{c3:: $\max f([a, b])$}} = {{c1:: $\max\{f(a), f(b), \max f(C)\}$,}}

где C — {{c2::множество критических точек f.}}

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

«{{c4::Достаточное условие экстремума в терминах f'}}»

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$.}} Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго максимума f.}}

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

«Достаточное условие экстремума в терминах f'»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строгого минимума f.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

«{{c4::Достаточное условие экстремума в терминах f'' }}»

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$.}} Тогда если {{c1::$f''(a) > 0$,}} то {{c2::a — точка строгого минимума f.}}

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

«Достаточное условие экстремума в терминах f'' »

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$. Тогда если {{c1::$f''(a) < 0$,}} то {{c2::a — точка строгого максимума f.}}

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752fcaf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с
>
> $$o((x-a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

«{{c5::Связь экстремума со старшими производными}}»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,}} {{c3::

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

}} Тогда если {{c2::n нечётно,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

«Связь экстремума со старшими производными»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если {{c2::n чётно,}} {{c1::то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах f''.}}

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«{{c3::Теорема Дарбу}}»

Пусть {{c2::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$, $a, b \in \langle A, B\rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

}} Тогда {{c1::$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$.}}

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

> По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c, далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

> c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

> Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b.

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть {{c3::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$.}} Если {{c2::

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B\rangle,$$

}} то {{c1::f строго монотонна на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbdb8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

> Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B\rangle$. Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«{{c2::**Следствие из теоремы Дарбу о сохранении промежутка.**}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$. Тогда $f'(\langle A, B\rangle)$ — промежуток.}}

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B \rangle$
>
> $$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B \rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B \rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> $$f'(a) \leqslant f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f(\langle A, B \rangle)?$$

> Применить теорему Дарбу к функции
>
> $$F(x) = f(x) - y \cdot x$$
>
> в точках a и b.

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«{{c2::**Следствие из теоремы Дарбу о скачках производной.**}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.}}

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?
TODO

Note 19

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

{{c3::Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::выпуклой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B\rangle, \lambda \in (0, 1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 20

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

{{c3::Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::строго выпуклой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B\rangle, \lambda \in (0, 1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 21

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«{{c4::Критерий строгой выпуклости f на $\langle A, B\rangle$}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливо неравенство
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$
}}

Note 22

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«{{c4::Лемма о трёх хордах}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow\nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in \langle A, B)$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 4

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 5

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B)$.}} Тогда {{c1::$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ конечны и $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$.}}

Note 6

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$, то она {{c1::непрерывна на (A, B).}}

Note 7

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$.}} {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 8

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$. {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::строго опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 9

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть {{c5::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся {{c4::уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

}}

Тогда прямая ℓ является {{c1::опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.}}

Note 10

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является {{c1::строго опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.
}}

04.03.22

Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл $T_{a,1}f(x)$?

> График $T_{a,1}f(x)$ — это касательная к функции f в точке a.

Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B\rangle$$
$$f(x) \geqslant T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B). }} Тогда {{c2::функция f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}$$
$$f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 4

76ff105d143e49dea8fe8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными?

> f дифференцируема в любой точке $(A, B) \implies$ касательная совпадает с опорной прямой.

Note 5

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) \geqslant kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 6

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f строго выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 7

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

«Связь выпуклости функции с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 8

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

«Связь выпуклости функции с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f' \nearrow\!\!\nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 9

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

«Связь выпуклости функции с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 10

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

«Связь выпуклости функции с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c3::если}} {{c1::

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 11

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$.}} Точка a называется {{c2::точкой перегиба функции f,}} если {{c1::

- $\exists \delta > 0$ такое, что $V_\delta(a) \subset (A, B)$ и f имеет разный характер выпуклости на $(a - \delta, a]$ и $[a, a + \delta)$;
- f непрерывна в точке a;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

}}

Note 12

9aa5847a39ac46e8ad8dbee41e14a904

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f дважды дифференцируема на a. Если {{c2::a является точкой перегиба f,}} то {{c1::$f''(a) = 0$.}}

Note 13 aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

> Нет, это только необходимое условие.

Note 14 c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и имеет в ней производную из $\overline{\mathbb{R}}$.}} Тогда если {{c1::$\exists \delta > 0$ такое, что f дважды дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$ и

- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$
- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$

}} то {{c2::a — точка перегиба f.}}

Семинар 03.03.22

Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeea82dcc793

$$\int \text{\{\{c2::} \ln x \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} x \ln x - x \text{\}\}} + C$$

Note 2

310668af95114f9fbe87673be333fec8

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{1}{\sin x} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \text{\}\}} + C$$

Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{1}{\cos x} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| \text{\}\}} + C$$

Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{1}{x^2 + a^2} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \text{\}\}} + C \quad (\text{\{\{c3::} a \neq 0 \text{\}\}})$$

Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{A}{x + a} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} A \ln |x + a| \text{\}\}} + C$$

Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{1}{nx + a} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \frac{1}{n} \ln \left| x + \frac{a}{n} \right| \text{\}\}} + C \quad (\text{\{\{c3::} n \neq 0 \text{\}\}})$$

Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int \text{\{\{c2::} \frac{A}{(x + a)^k} \text{\}\}} \, dx = \text{\{\{c1::} \frac{A}{(1 - k)(x + a)^{k-1}} \text{\}\}} + C \quad (\text{\{\{c3::} k \neq 1 \text{\}\}})$$

Note 8

72b0aaea0b254078bbfcc47745885653

$$\int \{\{c4:: \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \}\}\, dx = \{\{c1:: \frac{M}{2} \ln\left|x^2+px+q\right| \}\} + \{\{c2:: \frac{2N-pM}{2a} \arctan\frac{2x+p}{2a} \}\} + C,$$

где $a^2 := \{\{c3:: \frac{4q-p^2}{4} \}\}$, $\{\{c5:: p^2-4q<0. \}\}$

Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beee8

$$\int \{\{c3:: \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \}\}\, dx = \int \{\{c1:: \frac{N-M\frac{p}{2}}{(t^2+a^2)^k} \}\}\, dt + \{\{c1:: \int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^k} \}\}\, dt + C,$$

где $\{\{c4:: t \}\} := \{\{c2:: x+\frac{p}{2}, \}\}$ $\{\{c4:: a^2 \}\} := \{\{c2:: \frac{4q-p^2}{4} \}\}$, $\{\{c5:: p^2-4q<0.$
$\}\}$

Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int \{\{c4:: \frac{1}{(t^2+a^2)^k} \}\}\, dt \quad (\{\{c5:: k>1, a\neq 0 \}\})$$

$$I_k = \{\{c3:: \frac{1}{2(k-1)a^2} \}\} \cdot \left(\{\{c1:: (2k-3)I_{k-1} \}\} + \{\{c2:: \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} \}\} \right)$$

Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int \{\{c2:: \frac{Mt}{(t^2+a^2)^k} \}\}\, dt = \{\{c1:: \frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \}\} + C$$

Лекция 07.03.22

Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} наызвается {{c2::первообразной функции f,}} если {{c1::F дифференцируема на $\langle A, B\rangle$ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

{{c1::Множество всех первообразных функции f на промежутке $\langle A, B\rangle$}} обозначается {{c2::$\mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$.}}

Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deaec

Пусть {{c4::$f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$.}} Тогда

{{c2::$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1::$\exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c$.}}

Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

> $(F(x)-G(x))' \equiv 0$ на $\langle A, B\rangle \implies F(x)-G(x)$ постоянна на $\langle A, B\rangle$.

Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle) \impliedby \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения первообразной.

Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcddd45

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$.}} {{c1::Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

}} называется {{c2::неопределённым интегралом f на $\langle A, B \rangle$.}}

Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Неопределённый интеграл функции f на $\langle A, B \rangle$}} обозначается {{c2::

$$\int f(x)\, dx.$$

}}

Note 8

7581f732c1c44de4bc99eae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \quad ?$$

> Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}f(x).\text{\}\}}$$

Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fbea7ff

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle), G \in \mathscr{P}_g(\langle A, B \rangle)$.

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\Big\{ F(x) + H(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \Big\}.\text{\}\}}$$

Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\Big\{\lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\Big\}.\text{\}\}}$$

Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из {{c3::теоремы Дарбу}} следует, что если {{c2::f имеет первообразную на промежутке $\langle A, B \rangle$,}} то {{c1::f не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$}}

Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции f на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

> Нет, поскольку f может иметь точки разрыва второго рода.

Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

«Достаточное условие существования первообразной»

{{c1::Если f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.}}

Лекция 11.03.22

Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть {{c3::$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : E \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::первообразной f на множестве E,}} если {{c1::F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.}}

Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл $\int f(x)dx$ называется {{c2::берущимся,}} если {{c1::функция f имеет элементарную первообразную.}}

Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ имеют на $\langle A, B\rangle$ первообразную. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \text{{{c1::}}} \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \text{}}}$$

Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 5

26b34c9a101f488aaed5ddee4ddd43d2

«Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle C, D\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle A, B\rangle$ и обратима.}} Тогда если {{c1::G — первообразная функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$,}} то

$$\text{{{c2::}} \int f(x)\,dx \text{}}} = \text{{{c1::}} G(\varphi^{-1}(x)) + C. \text{}}}$$

Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

«Формула интегрирования по частям»

Пусть {{c2::$f, g \in C^1(\langle A, B\rangle)$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

}}

Note 9

e2df459e1699495f980cdddacc633f6f

В чем основная идея доказательства основной формулы интегрирования по частям?

> $$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx.$$

Лекция 18.03.22

Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет {{c1::элементарную первообразную.}}

Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a:b]\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::[a,b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть {{c3::$[a,b]$ – невырожденный отрезок.}} {{c1::Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^n : \quad a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

}} называется {{c2::разбиением отрезка $[a,b]$.}}

Note 4

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть {{c3::$\{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$.}} Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

Note 5

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c1::
Величина

$$\max\{\Delta x_k\}$$

}} называется {{c2::рангом разбиения τ.}}

Note 6

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c2::
Ранг разбиения τ}} обозначается {{c1::λ_τ.}}

Note 7

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. {{c1:: Набор точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ таких, что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$}} называется {{c2::оснащением разбиения τ.}}

Note 8

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть {{c3::τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, ξ — оснащение разбиения τ.}} Тогда {{c1::пара (τ, ξ)}} называется {{c2::оснащённым разбиением отрезка $[a, b]$.}}

Note 9

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; (\tau, \xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — оснащённое разбиение $[a, b]$.}} {{c1::Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

}} называется {{c2::интегральной суммой функции f, отвечающей оснащённому разбиению (τ, ξ).}}

Note 10

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют {{c1::суммами Римана.
}}

Note 11

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

{{c2::Интегральная сумма функции f, отвечающая оснащённому разбиению (τ, ξ),}} обозначается как {{c1::

$$\sigma_\tau(f, \xi).$$

}}

Note 12

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$.}} Число I называют {{c2::пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю,}} если {{c1::

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где (τ, ξ) — оснащённое разбиение отрезка $[a, b]$.}}

(определение в терминах (ε, δ))

Note 13

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

{{c2::Предел интегральных сумм функции f при ранге разбиения стремящемся к нулю}} обозначается {{c1::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

}}

Note 14

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если {{c1::для любой последовательности оснащённых разбиений $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что $\lambda_{\tau_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

Семинар 17.03.22

Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx+N)\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и затем внести его в скобки.

Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

> Представить ответ в виде
>
> $$Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$
>
> продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в $Q_{n-1}(x)$ и λ из полученного соотношения.

Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int {{c2:: \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}} }} dx = {{c1:: \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| }} + C.$$

Note 5

9b1156318f464dc79a658d6e94fe214d

$$\int {{c3::\frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}}}\,dx = {{c1::\arcsin\frac{2x+p}{2a}}} + C,$$

где $a := {{c2::\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}}}$.

Лекция 21.03.22

Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.}} f называется {{c2::интегрируемой по Риману на $[a,b]$,}} если {{c1::существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi)$.}}

Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.}} Тогда {{c2::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi)$$

}} называется {{c1::определённым интегралом Римана от функции f по отрезку $[a,b]$.}}

Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

{{c2::Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$}} обозначается {{c1::

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

}}

Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::числа a, b}} называют {{c1::пределами интегрирования.}}

Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::функцию f}} называют {{c1::подынтегральной функцией.}}

Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

{{c1::Множество всех функций интегрируемых на $[a,b]$}} обозначается {{c2::$\mathcal{R}[a,b]$.}}

Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbcb60

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — разбиение отрезка $[a,b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

{{c1::Верхняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$S_\tau(f).$$

}}

Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — разбиение отрезка $[a,b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 10

2bbefff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

{{c1::Нижняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$s_\tau(f).$$

}}

Note 11

189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть {{c4::$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a,b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена сверху}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $S_\tau(f)$ конечна.}}

Note 12

083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена снизу}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $s_\tau(f)$ конечна.}}

Note 13

1c8af1c02f864877bddd4971a256a30e

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $S_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

> $$S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 14

7958d85410954f6280755a33f7bff6fb

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $s_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

> $$s_\tau(f) = \inf \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 15

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть {{c2::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau, \tilde{\tau}$ — два разбиения $[a, b]$, $\tau \subset \tilde{\tau}$.}} Тогда {{c1::

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leqslant S_\tau(f),$$
$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geqslant s_\tau(f).$$

}}

Лекция 25.03.22

Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Как связаны $s_{\tau_1}(f)$ и $S_{\tau_2}(f)$ для произвольных разбиений τ_1, τ_2 отрезка $[a, b]$?

> $$s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$$

Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

> Да. $s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$ для любых τ_1, τ_2

Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

> Для $\tau_1 = \tau_2$ утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

> Да. Например, функция Дирихле.

Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

> Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

Note 6

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\inf \{S_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

}} называется {{c2::верхним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 7

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Верхний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I^*.}}

Note 8

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\sup \{s_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

}} называется {{c2::нижним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 9

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Нижний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I_*.}}

Note 10

83287fd934bc4878a99a742db1668220

Пусть {{c5::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} Тогда {{c3::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c4::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda_t \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

}} то есть {{c2::

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$$
$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

}}

Note 11

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть {{c3::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Величина

$$\sup \left\{ f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D \right\}$$

}} называется {{c2::колебанием функции f на множестве D.}}

Note 12

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. {{c1::Колебание функции f на множестве D}} обозначается {{c2::$\omega(f)$.}}

Note 13

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{{{c2::}}}\omega(f)\text{}}} = \text{{{c1::}}} \sup f(D) - \inf f(D).\text{}}}$$

(в терминах $\sup f$, $\inf f$)

Note 14

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{{{c2::}}} \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f)\text{}}} = \text{{{c1::}}}I^*\text{}}}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 15

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{{{c2::}}} \lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau(f)\text{}}} = \text{{{c1::}}}I_*\text{}}}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 16

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

{{c3::Критерий}} {{c4::Дарбу}} {{c2::интегрируемости функции }}

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::f ограничена $[a, b]$ и $I_* = I^*$.}}

Note 17

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

{{c3::Критерий}} {{c4::Римана}} {{c2::интегрируемости функции}}

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}\,[a, b]$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.}}

Note 18

8ba2a0bdc9754111b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 19

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Семинар 24.03.22

Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегалы вида

$$\int {{c2::\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}}}\,dx$$

берутся с помощью {{c1::замены

$$t := \frac{1}{x-\alpha}.$$

}}

Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида {{c2::

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad \text{где } R \in \mathbb{R}(x),$$

}} берутся с помощью {{c1::подстановок Эйлера.}}

Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

> 1. $a > 0$;
> 2. $c > 0$;
> 3. ax^2+bx+c приводим над $\mathbb{R}$.

Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для $a > 0$.

> $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого $ax^2 + bx + c$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1),$$

где x_1 — корень $ax^2 + bx + c$.