Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть {{c3::W — линейное пространство, $V \subset W$.}} Тогда V называется {{c2::линейным подпространством}}, если {{c1::

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение «V есть линейное подпространство в W» обозначают {{c1::

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — {{c1::тоже линейное пространство}}.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в $\mathbb{R}^n$?

> Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

> Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2::m\times n\}\}}$ такая, что {{c1::

$$V = \ker A.$$

}}

Note 7

eecf9dfacd2b41218565f8582275c53b

Пусть $V = \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m) \triangleleft \mathbb{R}^n$. Как найти матрицу такую, что $\ker A = V$?

> Строки матрицы A — (транспонированная) ФСР соответствующей СЛАУ.

Note 8

dcb727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \ldots a_n \in W$. Является ли

$$\mathscr{L}(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

подпространством в W?

> Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций $a_1, a_2, \ldots a_n$ тоже является их линейной комбинацией.

Note 9

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

> Да, всегда.

Note 10

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

▌ Нет, не всегда.

Note 11

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Тогда

$$\{\{c2::V_1 + V_2\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}\}$$

Note 12

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1::\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}\}$$

Note 13

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \lhd W?$$

▌ Да, всегда.

Note 14

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \lhd W$ и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — {{c2::базис в V.}} Тогда в W существует базис вида {{c1::

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n.$$

}}

Note 15

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 16

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1, $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2. Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

Объединить их в одну систему $\{e_i, f_j, g_k\}$.

Note 17

d6aa3baccb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1, $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2. Как показать, что $\{e_i, f_j, g_k\}$ — базис в $V_1 + V_2$?

Показать, что $\mathscr{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}$.

Note 18

28934bf74ae1452191c8e81b8cef0cf5

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1, $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2. В чём ключевая идея доказательства того, что

$$\mathscr{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}?$$

Если $\sum_k \lambda_k g_k \in V_1$, то она принадлежит и $V_1 \cap V_2$.

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве V. Тогда {{c2::матрицей перехода от базиса e к базису e'}} называют {{c1::матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$
$$v = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n,$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

{{c2::Матрицу перехода от базиса e к базису e'}} обычно обозначают {{c1::$C_{e \to e'}$.}}

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \to e'}$?

> Столбцы $C_{e \to e'}$ — это координаты векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. {{c2::Сумму $V_1 + V_2$}} называют {{c1::прямой суммой,}} если {{c2::$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
}}

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

{{c2::Прямая сумма подпространств V_1 и V_2}} обозначается {{c1::

$$V_1 \oplus V_2.$$

}}

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. {{c1::$V_1 + V_2$ — прямая сумма;}}
2. {{c2::$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;}}
3. {{c3::Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.}}

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

> Показать, что если $a = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2} \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«{{c3::Монотонность размерности подпространств}}»

Пусть W — линейное пространство, $V \lhd W$. Тогда

1. {{c1::$\dim V \leqslant \dim W$,}}
2. {{c2::$\dim V = \dim W \iff V = W$.}}

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

{{c3::Отображение $f : V \to W$}} называется {{c2::линейным отображением,}} если {{c1::

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V$,
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V$.

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют {{c1::линейным оператором.}}

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \to W$ называется {{c1::изоморфизмом линейных пространств}} тогда и только тогда, когда {{c2::f — биекция.}}

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются {{c1::изоморфными}} тогда и только тогда, когда {{c2::существует изоморфизм

$$f : V \to W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение {{c2::изоморфности}} обозначается символом {{c1::

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \to W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \to V$ {{c1::— тоже изоморфизм.}}

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения {{c1::эквивалентности.}}

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

{{c2::$V \simeq W$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1:: $\dim V = \dim W$.}}

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда {{c2::матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно}} называют {{c1::матрицу A, переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.}}

Note 15

74ef91d29ce940f8b894341a5836c812

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. {{c2::Матрица оператора f в паре базисов $e, \tilde{e}$ в пространствах V и W соответственно}} обозначается {{c1::

$$M_{e,\tilde{e}}(f).$$

}}

Note 16

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«{{c2::Теорема о матрице линейного оператора}}»

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор, {{c3::$\{e_i\}_{i=1}^n$}} — базис в V, {{c3::$\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$}} — базис в W. Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

> i-ый столбец — это координаты $f(e_i)$ в базисе $\{\tilde{e}_j\}$.

Note 17

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 18

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$
> где λ — координаты вектора из V в базисе e.

Note 19

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1::линейный оператор.}}

Note 20

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1::произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и $\tilde{e}$ соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \to e'$, $\tilde{e} \to \tilde{e}'$?

$$A' = C^{-1}_{\tilde{e}\to\tilde{e}'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e. Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \to e'$?

$$A' = C^{-1}_{e\to e'}\ A\ C_{e\to e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' =$ {{c1:: $\det A$}}.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Определителем оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.
}}

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

{{c2::Рангом оператора $f : V \to V$}} называется {{c1::ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

{{c2::След матрицы A}} обозначается {{c1::$\operatorname{tr} A$.}}

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in$ {{c3:: $\mathbb{R}^{n\times n}$ }}. Тогда {{c2:: $\operatorname{tr} A$ }} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ }}.

Note 8

e0b3b870a8444704a8569d15e3f761ed

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда

$$\operatorname{tr}(BA) = \text{\{\{c1::} \operatorname{tr}(AB).\text{\}\}}$$

Note 9

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

{{c2::Следом оператора $f : V \to V$ }} называется {{c1::след матрицы оператора f в произвольном базисе.}}

Note 10

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \ker f \text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} f^{-1}(\{0\}).\text{\}\}}$$

Note 11

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \operatorname{im} f \text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} f(V).\text{\}\}}$$

Note 12

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft V$?

> Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f.

Note 13

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \lhd W$?

> Нет, $\ker f \lhd V$.

Note 14

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd W$?

> Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$
>
> $$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 15

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \lhd V$?

> Нет, $\operatorname{im} f \lhd W$.

Note 16

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V, $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

> $$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 17

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

> Дополнить базис в $\ker f$ до базиса в V и построить из них базис в $\operatorname{im} f$.

Note 18

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис в $\ker f$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в V.

Как выглядит базис в $\operatorname{im} f$?

> $$f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n).$$

Note 19

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2:: \operatorname{rk} f\}\} = \{\{c1:: \dim \operatorname{im} f.\}\}$$

(в терминах размерностей)

Note 20

2acbea4466f54360bc19e2065a44fc95

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как показать, что

$$\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{im} f.$$

> Показать, что в координатном выражении $\operatorname{im} f$ есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора f.

Note 21

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. {{c1::Пространство $V \lhd W$}} называется {{c2::инвариантным относительно оператора f,}} если {{c1::

$$f(V) \subset V.$$

}}

Note 22

e3d31c73908d4103b6c9caf2377e4432

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \to W$.

$$\ker f, \operatorname{im} f.$$

Note 23

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $e_1, \ldots, e_n$ — {{c4:: такой базис в W, что $e_1, \ldots, e_k$ (где $k \leqslant n$) — базис в инвариантном подпространстве $V \triangleleft W$.}} Тогда {{c3::матрица оператора f в базисе $e_1, \ldots, e_n$}} примет вид

$$A = \{\{c1:: \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \}\}$$

где T_{11} — это {{c2::матрица $f|_V$ в базисе $e_1, \ldots, e_k$.}}

Лекция 28.02.22

Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор $f : W \to W$ называется {{c2::невырожденным,}} если {{c1::$\det f \neq 0$.}}

Note 2

2e565e676da342fb8cdacf4d62de05e8

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. f невырождено; {{c1::
2. $\ker f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = V$;
4. $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5. f — биекция.}}

Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — невырожденный оператор, то f — биекция?

> Показать, что если f задаётся матрицей A, то f^{-1} задаётся матрицей A^{-1}.

Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — биекция, то f — невырожденный оператор.

> $$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::число $\lambda \in \mathbb{C}$}} называется {{c2::собственным значением оператора f,}} если {{c1::

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c1::вектор $v \in V \setminus \{0\}$}} называется {{c2::собственным вектором оператора f,}} если {{c1::

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

{{c2::Спектром оператора}} называется {{c1::множество собственных значений этого оператора.}}

Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

{{c2::Спектр}} оператора f обозначается {{c1::$\operatorname{spec} f$.}}

Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$.}} Тогда λ является собственным значением f {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

}} называется {{c1::характеристическим уравнением оператора f.}}

Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть {{c3:: $f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда {{c2::выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

}} называется {{c1::характеристическим многочленом оператора f.}}

Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной λ?

> Если A — матрица оператора f, то $|A - \lambda E|$ — многочлен переменной λ.

Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

{{c2:: $|A - \lambda E|$ }} $=$ {{c1:: $|A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$}}

Лекция 07.03.22

Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор. {{c2::Характеристический многочлен оператора f}} обозначается {{c1::

$$\chi_f.$$

}}

Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть {{c3::$f : W \to W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}\chi_{f|_V}\text{\}\}} — \text{\{\{c1::делитель } \chi_f.\text{\}\}}$$

Note 3

6deeef304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f. Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

> Показать, что χ_f — определитель соответствующей квазитреугольной матрицы оператора f.

Note 4

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда {{c2::множество всех собственных векторов f, отвечающих собственному значению λ, объединённое с нулём,}} называется {{c1::собственным подпространством оператора f, отвечающим собственному значению λ.}}

Note 5

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. {{c1::Собственное подпространство f, отвечающее собственному значению λ,}} обозначается {{c2::$V_f(\lambda)$.}}

Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fe38f36

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. В кратком выражении

$$\{\{c2::V_f(\lambda)\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::\ker(f - \lambda E).\}\}$$

Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть $f : W \to W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

> Да, всегда, потому что $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$.

Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c1::Размерность $V_f(\lambda)$}} называют {{c2::геометрической кратностью собственного значения λ.}}

Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c2::Геометрическая кратность собственного значения λ}} обозначается {{c1::$S_f(\lambda)$.}}

Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c1::Кратность λ как корня χ_f}} называют {{c2::алгебраической кратностью собственным значением λ.}}

Note 11

856a933db82641cd87b0ee5f34647b1a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. {{c2::Алгебраическая кратность собственного значения λ}} обозначается {{c1::$m_f(\lambda)$.}}

Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Тогда {{c1::$S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda)$.}}

Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f. Тогда $S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda)$.
В чем основная идея доказательства?

> $V_f(\lambda)$ инвариантно относительно f
> $\implies \chi_f$ делится на $\chi_{f|_{V_f(\lambda)}}$.

Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f, {{c2::$\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$.}} Тогда

{{c3::$\chi_{\tilde{f}}(t)$}} $=$ {{c1::$(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}$}}

Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f, $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$. Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

> $\tilde{f}$ представляется матрицей λE порядка $\dim V_f(\lambda)$.

Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

{{c2::Оператор $f : x \mapsto \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,}} называется {{c1::скалярным оператором.}}

Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} f называется {{c2::диагонализуемым оператором,}} если {{c1::существует базис в V, в котором матрица оператора f является диагональной.
}}

Note 18

b01b69fc3ebc4c0c839a0c153f85d041

{{c1::Диагональная матрица с элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на диагонали}} обозначается {{c2::

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

}}

Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть $f : V \to V$— линейный оператор. Если в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица оператора f равна $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то {{c2::$e_1, e_2, \ldots, e_n$}} — {{c1::собственные векторы f.}}

Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть $f : V \to V$— линейный оператор. Если в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица оператора f равна $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то {{c2::$a_1, a_2, \ldots, a_n$}} — {{c1::собственные значения f.}}

Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть {{c4::$f : V \to V$ — линейный оператор.}} Тогда оператор f {{c2::диагонализуем}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::для любого собственного значения λ

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

}}

Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

> Показать, что если f представляется матрицей $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то по определению
>
> $$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda).$$

Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, {{c3::$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f,}} {{c2::

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

}} Тогда {{c1::система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно независима.
}}

Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно независима.
В чем основная идея доказательства?

> Применяем f к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

Note 25

cfe344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

> Составить систему векторов из базисов в $V_f(\lambda_j)$ и показать, что она является базисом V.

Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

> Из условия $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$, а значит система содержит $\deg \chi_f = \dim V$ элементов.

Note 27

5fd54902e7f34d00bad3222902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

> Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов $v_1, \dots, v_n$, где $v_j \in V_f(\lambda_j)$.

Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор $f : V \to V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то {{c1::f диагонализуем.}}

Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор $f : V \to V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

> $$\forall \lambda \in \operatorname{spec} f \quad 1 \leqslant S_f(\lambda) \leqslant m_f(\lambda) = 1 \\ \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть {{c3::пространство $V = V_1 \oplus V_2$.}} {{c1::Оператор

$$P : \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2} \mapsto v_1, \quad V \to V$$

}} называется {{c2::оператором проектирования на V_1 параллельно V_2.}}

Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\operatorname{im} P = \text{{{c1::}} } V_1. \text{ }\}\}$$

Note 32

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\ker P = \{\{c1::V_2.\}\}$$

Note 33

27181bd7474e4091aee4fa9dba20ae0f

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$\operatorname{spec} P = \{\{c1:: \{0, 1\}\ .\}\}$$

Note 34

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$m_P(0) = \{\{c1:: \dim V_2.\}\}$$

Note 35

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$S_P(0) = \{\{c1:: \dim V_2.\}\}$$

Note 36

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$m_P(1) = \{\{c1:: \dim V_1.\}\}$$

Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \to V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2. Тогда

$$S_P(1) = \text{\{\{c1::} \dim V_1 . \text{\}\}}$$

Лекция 14.03.22

Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$.}} Вектор v называется {{c2::корневым вектором высоты k оператора f,}} если {{c1::существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$(f - \lambda E)^k v = 0,$$
$$(f - \lambda E)^{k-1} v \neq 0.$$

}}

Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневой вектор высоты {{c2::1}} оператора f — это {{c1::собственный вектор этого оператора.}}

Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

λ из определения корневого вектора оператора f — это всегда {{c1::собственное значение f.}}

Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что λ из определения корневого вектора всегда является собственным значением?

> Из определения $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0.$

Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть {{c3::v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f.}} Тогда {{c2::$(f - \lambda E)v$}} — {{c1::корневой вектор высоты $k - 1$.}}

Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть v — корневой вектор высоты $k \geqslant 2$ оператора f. Тогда $(f - \lambda E)v$ — корневой вектор высоты $k - 1$. В чем основная идея доказательства?

> Из определения корневого вектора
>
> $$(f - \lambda E)^{k-1} \cdot (f - \lambda E)v = 0$$
>
> и аналогично с неравенством нулю для степени $k - 2$.

Note 7

50c2388c1fa843dfa616f85d4cecfa2f

Система {{c3::корневых векторов разных высот,}} отвечающих {{c2::одному и тому же собственному значению оператора,}} {{c1::линейно независима.}}

Note 8

de47eb56e219455a8497a97ad90b861d

Как доказать, что система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению оператора, линейно независима.

> Приравнять линейную комбинацию к нулю и домножать её на $(f - \lambda E)^{k_j - 1}$ в порядке убывания высот k_j корневых векторов системы.

Note 9

187218f20c2b46ab9309b3385f2012f4

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, {{c3::v — корневой вектор высоты k оператора f.}} Тогда система {{c2::

$$v,\ (f - \lambda E)v,\ (f - \lambda E)^2 v,\ \ldots,\ (f - \lambda E)^{k-1} v$$

}} {{c1::линейно независима.}}

Note 10

f77f36f44a0a4dbfb7fe6d8a6b58db75

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f. Тогда система

$$v,\ (f - \lambda E)v,\ (f - \lambda E)^2 v,\ \ldots,\ (f - \lambda E)^{k-1} v$$

линейно независима. В чем основная идея доказательства?

> Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению λ.

Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система {{c3::корневых векторов,}} отвечающих {{c2::разным собственным значениям оператора,}} {{c1::линейно независима.}}

Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f. Тогда {{c2::$(f-\lambda E)^{k-1}v$}} — {{c1::это собственный вектор оператора f.}}

Note 13

59e9653333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

> Домножить произвольную линейную комбинацию на
>
> $$(f-\lambda_1 E)^{k_1-1}\ \ (f-\lambda_2 E)^{k_2}\cdots(f-\lambda_l E)^{k_l}$$
>
> и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. {{c1::Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению λ, объединённое с нулём,}} называется {{c2::корневым подпространством, отвечающим собственному значению λ.}}

Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. {{c2::Корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ,}} обозначается {{c1::$K_f(\lambda)$.}}

Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336c4a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Всегда ли $K_f(\lambda) \triangleleft V$?

> Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть {{c3::$f : V \to V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$.}}

$$\text{\{\{c2::}N_{f,k}(\lambda)\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ker(f - \lambda E)^k.\text{\}\}}$$

Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$. Всегда ли $N_{f,k}(\lambda) \triangleleft V$?

> Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Как $K_f(\lambda)$ выражается через $N_{f,k}(\lambda)$?

> $$K_f(\lambda) = \bigcup_k N_{f,k}(\lambda)$$

Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) =$ {{c1::$m_f(\lambda)$}}.

Note 21

efee3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$. В чем основная идея доказательства? TODO (?)

Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, {{c3::$\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f.}} Тогда

$$\{\{c2::V\}\} = \{\{c1::K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).\}\}$$

Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Какова общая структура доказательства?

> Показать, что сумма $K_f(\lambda_j)$
>
> 1. является прямой,
> 2. порождает все пространство V.

Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ прямая?

> Линейная комбинация векторов v_j из $K_f(\lambda_j)$ — это линяния комбинация корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям.

Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f. Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ порождает все V?

$$\sum_{j=1}^{l} \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{l} m_f(\lambda_j)$$

Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

{{c2::Жорданова клетка}} — это {{c1::квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

}}

Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты q, соответствующая некоторому числу λ, обозначается {{c1::

$$J_q(\lambda).$$

}}

Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

{{c2::Жорданова матрица}} — это {{c1::блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.}}

Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Тогда, если {{c1::в некотором базисе в V матрица A оператора f имеет жорданов вид,}} то A называют {{c2::жордановой нормальной формой оператора f.}}

Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Тогда, если {{c1::в некотором базисе в V матрица оператора f имеет жорданов вид,}} то этот базис называют {{c2::жордановым базисом оператора f.}}

Note 31

4617ac459f3846a1b581c79a9c044b7e

«{{c2::Теорема о жордановой нормальной форме}}»

{{c1::Любой оператор в векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ имеем жорданову нормальную форму.}}

Note 32

d8f181b2d5004a47bd308a35849cddec

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f$. Как для $k > 0$ соотносятся $N_{f,k}(\lambda)$ и $N_{f,k+1}(\lambda)$?

> Для всех k меньше некоторого q
>
> $$N_{f,k}(\lambda) \subsetneqq N_{f,k+1}(\lambda),$$
>
> а для всех $k \geqslant q$:
>
> $$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$

Note 33

414400f8f69b41b58c7d5b2930735317

Каков первый шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \to V$?

> Найти все собственные значения оператора f.

Note 34

a79be36515f64439b4db0f075099cbc3

Каков второй шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \to V$?

> Для каждого собственного значения λ найти все подпространства $N_{f,k}(\lambda)$.

Note 35

adf2c488db4640a1aba232fba8286d63

Каков третий шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \to V$?

> Построить жорданову лестницу в каждом из корневых подпространств f.

Note 36

2fe8afa7a09b49a1a7219ce868aaf67e

Каков заключительный шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \to V$?

> Объединить все построенные базисы в одну систему и построить матрицу f в полученном базисе.

Лекция 21.03.22

Note 1

61582b48320a46c3ad047eec84da3eb3

Пусть $A, A' \in \mathbb{C}^{\{\{c3::n\times n\}\}}$. Тогда матрицы A и A' называются {{c2::подобными,}} если {{c1::существует невырожденная матрица T такая, что

$$A = T\,A'\,T^{-1}.$$

}}

Note 2

6366e6bbaa1149eb8bba346a3cc38654

Отношение подобия матриц обозначается символом {{c1::

$$\sim$$

}}

Note 3

1ae63106d8d0480b82ef6f9e9b3d62bb

Подобие матриц является отношением {{c1::эквивалентности.
}}

Note 4

de743729325e43f79f35a7b8c22d5bb2

Любая {{c2::квадратная матрица}} подобна {{c1::своей жордановой нормальной форме.}}

(следствие из {{c3::теоремы о жордановой форме}})

Note 5

82aa01fcbfb7476d84662ca5802dae5b

{{c2::Две квадратные матрицы подобны}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::их жордановы формы совпадают с точностью до перестановки клеток.}}

(следствие из {{c4::теоремы о жордановой форме}})

Note 6

198e1f3eef67411c89f83a35ade066d2

Пусть $A, \Lambda, T \in \mathbb{C}^{n\times n},\ A = T^{-1}\Lambda T,\ k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A^k = \{\{c1::T^{-1}\Lambda^k T.\}\}$$

Note 7

c1cf4048c475426683c811de00771765

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ p \in \mathbb{C}[x],\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Тогда

$$p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} a_k A^k, \quad \text{где } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E.\}\}$$

Note 8

59cb3566c41d4eca89ef63e626740c4e

Пусть $A, T \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \det T \neq 0,\ p \in \mathbb{C}[x]$. Тогда

$$p(TAT^{-1}) = \{\{c1::T\, p(A)\, T^{-1}.\}\}$$

Note 9

ad579382cf8a42caabf0b8b6a5a4d76f

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \lambda \in D$.

$$f(\lambda E) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(\lambda)E.\}\}$$

Note 10

be2002dbe01149aa91e229d1c991143e

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\begin{bmatrix} f(A_{11}) & 0 \\ 0 & f(A_{22}) \end{bmatrix}.\}\}$$

Note 11

455a3d16cf6744b39c1d1e21cab4e7f5

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \lambda \in D$. Как определяют значение

$$f(J_k(\lambda))?$$

Представляют $f(J_k(\lambda))$ как $f(\lambda E + \varepsilon)$ и далее используют разложение f в ряд Тейлора в точке λE.

Note 12

c435657fd33d4705ae2de65b4bf5c682

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\lambda \in D$. Для каких k и λ определено значение $f(J_k(\lambda))$?

Должен существовать многочлен $T_{\lambda,k} f$.

Note 13

3450a4591ff748cb856f4578b3cda3c2

Пусть $p \in \mathbb{C}[x],\ \ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. {{c1::Многочлен p}} называется {{c2:: аннулирующим многочленом для матрицы A,}} если {{c1::

$$p(A) = 0.$$

}}

Note 14

34b1edb015384033870e10717e8bbdb2

«{{c2::**Теорема Гамильтона-Кэли**}}»

{{c1::Характеристический многочлен квадратной матрицы является для неё аннулирующим.}}

Note 15

07bbead6e007486e93d2daa598a265b6

В чем ключевая идея доказательства теоремы Гамильтона-Кэли?

Для любого корневого вектора x имеем $\chi_A(A)\, x = 0$.

Лекция 28.03.22

Note 1

c4787ae5340942d2a27db89ea5f9d4df

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Билинейная форма f в V называется {{c2::положительно определённой,}} если {{c1::для любого $v \in V$

$$f(v,v) \geqslant 0; \quad f(v,v) = 0 \iff v = 0.$$

}}

Note 2

18f442014f0e4614a642e429958b8931

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. {{c2::Скалярным произведением в V}} называется {{c1::симметричная положительно определённая билинейная форма в V.}}

Note 3

cea78871e8124a29945d3540057c0c68

{{c2::Евклидовым пространством}} называется {{c1::вещественное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением}}.

Note 4

79a607edba4945a4a562d9b1fd8f2ce9

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$. Скалярное произведение векторов $v, w \in V$ обозначается {{c1::

$$(v, w).$$

}}

Note 5

717ab493f110448bb867a49b37d29d83

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v \in V$. {{c2::Длиной вектора v}} называется {{c1::величина $\sqrt{(v,v)}$.}}

Note 6

7bc89a880fb244a78c3e204575ac9005

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v \in V$. {{c2::Длина вектора v}} обозначается {{c1::$|v|$ или $\|v\|$.}}

Note 7

de4db3a6688f4b198b8238b0e07dfce7

Длину вектора в еклидовом пространства так же ещё называют {{c1::нормой этого вектора.}} В таком случае чаще используется обозначение {{c2::$\|v\|$.}}

Note 8

c0b109c4be9e4749ad794e9e38fffb2d

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v_0 \in V$, {{c3::$r \in \mathbb{R}_+$}}. {{c2::Сферой радиуса r с центром в точке v_0}} называют {{c1::множество

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| = r\}\,.$$

}}

Note 9

09b61a41cf5f45109c79e7cc61f63740

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v_0 \in V$, $r \in \mathbb{R}_+$. {{c2::Сфера радиуса r с центром в точке v_0}} обозначается {{c1::

$$S_r(v_0).$$

}}

Note 10

e63df21bb26d42269a7a5d45c6b828b8

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v_0 \in V$, {{c3::$r \in \mathbb{R}_+$}}. {{c2::Шаром радиуса r с центром в точке v_0}} называют {{c1::множество

$$\{v \in V | \, \|v - v_0\| \leqslant r\}\,.$$

}}

Note 11

d0d10cbbdb664b428b1f3284ff5321f9

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v_0 \in V$, $r \in \mathbb{R}_+$. {{c2::Шар радиуса r с центром в точке v_0}} обозначается {{c1::

$$B_r(v_0).$$

}}

Note 12

a7021008185a411e99300286ac245d14

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v, w \in V \setminus \{0\}$.}} Векторы v и w называются {{c2::сонаправленными,}} если {{c1::

$$\exists \lambda > 0 \quad v = \lambda w.$$

}}

Note 13

0cfd3b2d9f17418eb0b8fd2dd36ef1d4

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v, w \in V \setminus \{0\}$.}} {{c2::Углом между векторами v, w}} называется {{c1::угол $\varphi \in [0, \pi]$ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

}}

Note 14

097fc51b1eab4a699e7110a38f0bd670

«{{c2::Неравенство Коши-Буняковского}}»

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v, w \in V$.}} Тогда всегда {{c1::$|(v, w)| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$.}}

Note 15

570b086e7e1b48e3b3012778f4841d1e

В чем основная идея доказательства неравенства Коши-Буняковского?

> Оценить дискриминант квадратного уравнения $\|v - \lambda w\|^2 = 0$ относительно неизвестной λ.

Note 16

96bb9d37dba3499d8890f7b3eb1f04d4

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v, w \in V$. Тогда

$|(v, w)| = \|v\| \cdot \|w\|$ {{c2:: $\iff$ }} {{c1::v и w пропорциональны.}}

Note 17

d1941ac59ee44c82b045d6d1e954e0d8

«{{c2::**Неравенство треугольника**}}»

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v, w \in V$.}} Тогда {{c1::

$$\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|.$$

}}

Note 18

4759501bf4b84cf0acf58f945229396c

В чем основная идея доказательства неравенства треугольника?

> Рассмотреть скалярное произведение
>
> $$(v+w, v+w) = \|v+w\|^2.$$

Note 19

5378eb0c9d81404c9cd8ca40925b9ce8

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v, w \in V$. Тогда

$$\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \text{ {{c2::}} } \Longleftrightarrow \text{ }} {{c1::} v \uparrow\uparrow w \text{}}}$$

Note 20

8238aebbcc724e708990b61d8a0e3603

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v, w \in V$. Векторы v и w называются {{c2::ортогональными,}} если {{c1::$(v, w) = 0$.
}}

Note 21

ce138d9eefe6445bbe72ecb3cafe43e8

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$. Система векторов в V называется {{c2::ортогональной,}} если {{c1::её векторы попарно ортогональны.}}

Note 22

2dbaa8c8157c42e08de67ebd6cc42e47

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c4::$\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная система векторов в V.}} Тогда {{c3::система $\{e_j\}$ линейно независима}} {{c2:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1::$e_j \neq 0$ для всех j.}}

Note 23

d20a32cfc1c3440a9e22f5d28c36b9d5

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная система ненулевых векторов в V. Как показать, что система $\{e_j\}$ линейно независима?

> Умножить линейную комбинацию векторов $\{e_j\}$, равную нулю, на e_i для произвольного i и показать равентсво нулю i-ого коэффициента.

Note 24

b9cf4cdf374445c4bc8412c8ca72847c

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v \in V$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональный базис в V.}} Тогда {{c2::координаты вектора v в базисе $\{e_j\}$}} имеют вид

$$v_j = \text{{{c1::}}} \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}. \text{}}}$$

Note 25

5a4e71f923b84eb5b5f3e2b66ea26470

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $v \in V$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональный базис в V. Как показать, что координаты вектора v в базисе $\{e_j\}$ имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}?$$

> Вычислить (v, e_j), разложив v по базису $\{e_j\}$.

Note 26

7ede17a5d2d049c690090d4850f4ef60

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, {{c3::$v \in V$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная линейно независима система в V.}} Тогда {{c1::числа

$$\frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

}} называют {{c2::коэффициентами Фурье вектора v в системе $\{e_j\}$.}}

Note 27

04027e25ae114e76a8cf6f9500e1ae28

Пусть V — евклидово пространство над $\mathbb{R}$. Система векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ в V называется {{c2::ортонормированной,}} если {{c1::её векторы попарно ортогональны и $\|e_j\| = 1$ для всех j.}}

Лекция 04.04.22

Note 1

48fccb0908e94a3bbfc768f249c233a4

Пример ортогональной системы в пространстве $C[0, 2\pi]$ со скалярным произведением

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} fg.$$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx.$$

Note 2

25230410b91d47619feafd9dd1e3909e

«{{c3::Ортогонализация Грама-Шмидта}}»

Пусть {{c2::V — евклидово пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве V.}} Тогда {{c1::всегда существует ортогональный базис $a_1, \ldots, a_n$ в V такой, что

$$a_j \in \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_j) \quad \forall j.$$

}}

Note 3

89394003d65441209a81ec6be5c7f2df

В чем основная идея доказательства истинности теоремы об ортогонализации Грама-Шмидта?

Положить

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1, \\ a_2 &= e_2 + \alpha_1 a_1, \\ a_3 &= e_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Note 4

067af76850ea49929f538a99ef2fb445

Пусть {{c3::W — евклидово пространство, $V \lhd W$.}} {{c1::Множество

$$\Big\{ w \in W \mid (v, w) = 0 \quad \forall v \in V \Big\}$$

}} называется {{c2::ортогональным дополнением к V.}}

Note 5

dc34194cc9a642aeb10ad2ba1cbab7ad

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$. {{c1::Ортогональное дополнение к пространству V}} обозначается {{c2::$V^\perp$.}}

Note 6

800460fc49ee4f3b915a92addaba5141

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$. Всегда ли $V^\perp \lhd W$?

> Да, всегда.

Note 7

ab8d62b25a294edebe7a3735b84dab19

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$. Тогда

$$\dim V^\perp = \text{\{\{c1::}\dim W - \dim V.\text{\}\}}$$

Note 8

70166548d05745278d7a8f9de584d211

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$. Тогда

$$V + V^\perp = \text{\{\{c1::}V \oplus V^\perp = W.\text{\}\}}$$

Note 9

eee9a5f3a40047629e2192983ab08770

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$. Как показать, что $W = V \oplus V^\perp$?

> Выбрать ортогональный базис в V, дополнить его до ортогонального базиса в W и показать, что дополнение — базис в $V^\perp$.

Note 10

53d600a53a4f48a7b4d1e3a3822918fe

Пусть W — евклидово пространство, $V \lhd W$, $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональный базис в V, $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис в W. Как показать, что $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в $V^\perp$?

> Показать, что $\mathscr{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ и $V^\perp$ равны как множества.

Note 11

a9fc50cec2cc442d87f7f6a551043a18

Пусть W — евклидово пространство, {{c3::$V \lhd W$, $w \in W$.}} Тогда {{c1::проекция w на V параллельно $V^\perp$}} называется {{c2::проекцией вектора w на V.}}

Note 12

bcb91b5b6d4048febe0fd4e8da7302e9

Пусть W — евклидово пространство, {{c3::$V \lhd W$, $w \in W$.}} Тогда {{c1::проекция w на $V^\perp$ параллельно V}} называется {{c2::перпендикуляром, опущенным из w на V.}}

Note 13

4e448e8833f94547ad7848fd34666613

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система векторов в евклидовом пространстве. {{c2::Матрицей Грама системы $e_1, \ldots, e_k$}} называют {{c1::матрицу

$$\Big[(e_i, e_j)\Big] \sim k \times k.$$

}}

Note 14

3bff6be501ed49109d5041f018ecab96

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система векторов в евклидовом пространстве. {{c2::Матрица Грама системы $e_1, \ldots, e_k$}} обозначается {{c1::

$$G(e_1, \ldots, e_k).$$

}}

Note 15

90d9812ff67d48d78cc56919ecac7303

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система векторов в евклидовом пространстве. Тогда $\det G(e_1, \ldots, e_k)$ {{c2::не зависит}} от {{c1::порядка, в котором берутся вектора в системе.}}

Note 16

99ad93f5f3e846aca763fb36d81d3df0

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система векторов в евклидовом пространстве. Тогда $\det G(e_1, \ldots, e_k)$ не зависит от порядка, в котором берутся вектора в системе. В чём ключевая идея доказательства?

> Перестановка пары векторов в $\{e_j\}$ соответствует перестановке пары строк и пары столбцов в $G(e_1, \ldots, e_k)$.

Note 17

f45df626ca1d4db1866e3f7aae0c6f2a

Пусть W — евклидово пространство, $w \in W$, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $V \triangleleft W$. Как найти проекцию w_0 вектора w на V?

> $$G(e_1, \ldots, e_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w, e_1) \\ \vdots \\ (w, e_k) \end{bmatrix},$$
> $$w_0 = e\alpha.$$

Лекция 18.04.22

Note 1

b04c0920040847d0a5d99e72e1d5f32f

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. {{c2::Расстоянием от точки f до пространства V}} называется {{c1::величина

$$\min \{\|f - g\| \mid g \in V\}.$$

}}

Note 2

3c3b40b9167c47199457c3614706c26e

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. {{c1::Расстояние от точки f до подпространства V}} обозначается {{c2::

$$d(f, V).$$

}}

Note 3

3e4d6f8b3aae4e73806dfc7764e669e3

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$, {{c3::

$$f = \underset{\in V}{f_0} + \underset{\in V^\perp}{f^\perp}.$$

}} Тогда

{{c2::$d(f, V)$}} $=$ {{c1::$\|f^\perp\|$.}}

Note 4

d34143b5a6f347ebbd35b66500be29d0

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. В чем основная идея доказательства равенства $d(f, V) = \|f^\perp\|$?

> Представить f как $f^\perp + f_0$ и явно вычислить $\|f - g\|$ для $g \in V$.

Note 5

093b736f8d264f6d81ad0aee60603024

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. Тогда

{{c2::$d(f, V) = 0$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1::$f \in V$.}}

Note 6

d7b770f1d6df4aa787e73eb19f14b1ac

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. Тогда

$$d(f, V) = 0 \iff f \in V.$$

В чём ключевая идея доказательства?

▌ Перпендикуляр равен нулю $\iff$ проекция равна f.

Note 7

c3802fe76b8740e28ef0bb2ce4d4aca0

Пусть W — евклидово пространство, $f, g \in W$. {{c2::Угол между векторами f и g}} обозначается {{c1::

$$(\widehat{f, g}).$$

}}

Note 8

d84678ac809d4c229902770a60fb6c11

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. {{c2::Углом между вектором f и подпространством V}} называется {{c1::величина

$$\min_{g \in V} (\widehat{f, g}).$$

}}

Note 9

75d1e7b4a26f4f578bdaf51afa099e06

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. {{c2::Угол между вектором f и подпространством V}} обозначается {{c1::

$$(\widehat{f, V}).$$

}}

Note 10

19d3715d268b4c07a6ec6013b8a60e50

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$, {{c3::

$$f = \underset{\in V}{f_0} + \underset{\in V^\perp}{f^\perp}.$$

}} Тогда

$${{c2::}}(\widehat{f, V}){{}} = {{c1::}}(\widehat{f, f_0}).{{}}$$

Note 11

24059676faa84badb5f0199c24f6f28b

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. В чем основная идея доказательства равенства $(\widehat{f, V}) = (\widehat{f, f_0})$?

> Сравнить для $g \in V$ величины $\cos(\widehat{f, g})$ и $\cos(\widehat{f, f_0})$.

Note 12

e0b0c8a4f09c400ea5decb5c86c75027

Пусть W — евклидово пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. {{c1::Угол между подпространствами V_1, V_2}} обозначается {{c2::

$$(\widehat{V_1, V_2}).$$

}}

Note 13

fe6711839e2e4292aa55fdd4f80c6c80

Пусть W — евклидово пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$.

{{c3::$(\widehat{V_1, V_2})$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\min \left\{ (\widehat{v_1, v_2}) \mid v_1 \in L_1, v_2 \in L_2 \right\}$,}}

$L_{1,2} :=$ {{c2::$V_{1,2} \cap (V_1 \cap V_2)^{\perp}$.}}

Note 14

1b70f983a1ad42c5919ee83b15a479c3

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. {{c2::Параллелепипедом, натянутым на систему векторов $\{a_j\}$}} называется {{c1::множество

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} k_j a_j \mid k_j \in [0,1] \quad \forall j \in [1:n] \right\}.$$

}}

Note 15

3fa74674fa86420ab3f78529ea808264

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. {{c2::Параллелепипед, натянутый на систему векторов $\{a_j\}$}} обозначается {{c1::

$$\Pi(a_1, \dots, a_n).$$

}}

Note 16

b967d3e120fc46c7b7b7bd6a4ffe07a8

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. {{c2::$n$-мерный объём параллелепипеда $\Pi(a_1, \ldots, a_n)$}} обозначается {{c1::

$$\mathrm{vol}_n\, \Pi(a_1, \ldots, a_n).$$

}}

Note 17

a7e0867fc1bc4ede8b8c8baf077decb8

Пусть V — евклидово пространство, {{c3::$a_1 \in V$.}}

$$\text{\{\{c2::}\ \mathrm{vol}_1\, \Pi(a_1)\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ \|a_1\|\ .\text{\}\}}$$

Note 18

27fc106d10454b36acb1d4fdb4d5ebc6

Пусть V — евклидово пространство, {{c3::$\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$, $n \geqslant 2$.}}

$$\text{\{\{c2::}\ \mathrm{vol}_n\, \Pi(a_1, \ldots, a_n)\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ \mathrm{vol}_{n-1}\, \Pi(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot d(a_n, \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_{n-1})).\text{\}\}}$$

Note 19

62dd58a35b6e41618c5f4c14ba96d7df

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\ (\mathrm{vol}_n\, \Pi(a_1, \ldots, a_n))^2\ \text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\ \det G(a_1, \ldots, a_n).\text{\}\}}$$

Note 20

8803537671b2486285e407e1661e183c

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$(\mathrm{vol}_n\, \Pi(a_1, \ldots, a_n))^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n).$$

На каком методе основано доказательство?

Индукция по n.

Note 21

4644b404d3cf48b3aa477e6cf6346d8a

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$(\operatorname{vol}_n \Pi(a_1, \ldots, a_n))^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n).$$

В чём основная идея доказательства (индукционный переход)?

> Представить a_n как
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k + a^{\perp},$$
>
> где $a^{\perp}$ — перпендикуляр из a_n на $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Note 22

5825ffe0a68e4a83a7e469b67b266431

Откуда следует корректность определения величины

$$\operatorname{vol}_n \Pi(a_1, \ldots, a_n)?$$

> Из теоремы о связи $\operatorname{vol}_n \Pi(a_1, \ldots, a_n)$ с матрицей Грама.

Note 23

8167d79d15c5496986c4ed42e064fa03

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Чем определение скалярного произведения для векторных пространств над $\mathbb{C}$ отличается от определения для пространств над $\mathbb{R}$?

> Линейность только по первому аргументу и
>
> $$(v, w) = \overline{(w, v)}.$$

Note 24

b2db7b3282094eea8733437c52bba06d

{{c1::Унитарным/эрмитовым пространством}} называется {{c2::комплексное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением.}}

Note 25

dee379a767e44b7fbc29a556ce456b02

Пусть V — унитарное пространство, $v \in V$. Откуда следует, что $(v, v) \in \mathbb{R}$?

> Из аксиом линейного пространства $(v, v) = \overline{(v, v)}$.

Note 26

5d93df02453b469989ec31cb02334953

Пусть V — унитарное пространство, $u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

{{c2::$(u, \lambda v)$}} $=$ {{c1::$\overline{\lambda}(u, v)$.}}

Note 27

3c66004b6eb3476f85bb3505bdce5da3

Пример определения скалярного произведения для $\mathbb{C}^n$.

> $$(z, w) = \sum_j z_j \overline{w_j}.$$

Лекция 25.04.22

Note 1

dd4a52e4947c482987ee915067979415

Пусть {{c3::V — линейное пространство над $\mathbb{C}$.}} {{c1::Рассмотрение V, как векторного пространства над $\mathbb{R}$,}} называется {{c2::овеществлением V.}}

Note 2

fce4b5036a48493086a124057e1f048d

Пусть {{c3::V — линейное пространство над $\mathbb{C}$.}} {{c1::Овеществление V}} обозначается {{c2::$V_{\mathbb{R}}$.}}

Note 3

1502c0b949d740cc9b70927038d34e79

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $f \in \operatorname{End} V$. {{c1::Рассмотрение f как оператора $V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$}} называется {{c2::овеществлением f.}}

Note 4

8fd578e0ac514b2c826528aa165fb19a

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $f \in \operatorname{End} V$. {{c2::Овеществление f}} обозначается {{c1::$f_{\mathbb{R}}$.}}

Note 5

76444b467049412d855fd6a8bb955fef

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, {{c3::$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис в V.}} Тогда {{c1::$\{e_j\} \cup \{ie_j\}$}} — {{c2::базис в $V_{\mathbb{R}}$.}}

Note 6

8b1e99362cbc41f9ad58dce068e5a358

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда

$$\dim V_{\mathbb{R}} = \text{{{c1::}} } 2 \cdot \dim V. \text{}}}$$

Note 7

cc3fd18a829c481eb6a18fd4944621b2

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в комплексном пространстве, {{c4::$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис в V.}} Тогда для базиса {{c3::

$$\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^{2n} = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$$

}} пространства {{c5::$V_{\mathbb{R}}$}} имеем

$$\text{{{c2::}}} M_{\tilde{e}}(f_{\mathbb{R}}) \text{}}} = \text{{{c1::}}} \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}, \quad \text{где } B + iC = M_e(f). \text{}}}$$

Note 8

cc938e458f944909a9c35a4d1dc9cea0

Пусть {{c3::V — линейное пространство над $\mathbb{R}$.}}

$$\text{{{c2::}}} V_{\mathbb{C}} \text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} \{(u, v) \mid u, v \in V\}. \text{}}}$$

Note 9

117bb526f78d4eceace2fdea3f410d63

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\text{{{c2::}}} i(u, v) \text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} (-v, u). \text{}}}$$

Note 10

f3dbbf009e9b4e94972dfdbf0af435f6

Как запомнить правило умножения в пространстве $V_{\mathbb{C}}$?

> "Представить" элемент $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$ как $u + iv$.

Note 11

389f838bfe634a94bbac20ddbd28d838

{{c2::Пространство $V_{\mathbb{C}}$}} называется {{c1::комплексификацией пространства V.}}

Note 12

d7b4cacadaa641759cab38db5ae47b15

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Оператор g : {{c3::$W \to V$}} называется {{c2::сопряжённым оператором к оператору f,}} если {{c1::

$$(f(v), w) = (v, g(w)) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

}}

Note 13

e40069d511a1495fb9dd3107a6d11084

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. {{c2::Сопряжённый оператор к оператору f}} обозначается {{c1::f^*.}}

Note 14

5b47c38358684d31a1d171bdc613fa5f

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать, что f^* линеен?

> Показать, что $f^*(\lambda w) - \lambda f^*(w)$ ортогонален всем векторам в V. Аналогично для суммы.

Note 15

d9bfeeafc3314b3582a8263231d7301b

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать существование f^*?

> Явным образом найти его матрицу.

Note 16

d532583798ec4eafb0bcec5c1a718f50

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Однозначно ли определён оператор f^*?

> Да, однозначно.

Note 17

49ba268bb22b4db9858de680fb15c62b

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах, {{c3::$\{e_i\}$ и $\{\tilde{e}_j\}$ — ортонормированные базисы в V и W, соответственно.}} Тогда

{{c2::$M_{\tilde{e},e}(f^*)$}} $=$ {{c1::$(M_{e,\tilde{e}}(f))^T$.}}

Note 18

bb4d8ef0dcd644128b6a2e296af6f5d2

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в евклидовых пространствах, $\{e_i\}$ и $\{\tilde{e}_j\}$ — ортонормированные базисы в V и W, соответственно. Как показать, что

$$M_{\tilde{e},e}(f) = (M_{e,\tilde{e}}(f))^T?$$

> Вычислить коэффициенты Фурье $(e_i, f^*(\tilde{e}_j))$.

Note 19

fa653accdda24b31ab20506ac8538332

Пусть $f : V \to W$ линейный оператор в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(f^*)^* = \text{{{c1::}} f. \text{}}}$$

Note 20

cbcfd9ad889c446d8de6ca2776680205

Пусть $f_1, f_2 : V \to W$ линейные операторы в эрмитовых пространствах, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)^* = \text{{{c1::}} \overline{\lambda} f_1^* + \overline{\mu} f_2^*. \text{}}}$$

Note 21

6e9f045a1c4e4808bfcbd69523e55ac3

Пусть $f_1, f_2 : V \to W$ линейные операторы в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(fg)^* = \text{{{c1::}} g^* f^*. \text{}}}$$

Note 22

1520bcac46ee4b76aefe766faef8769e

Пусть $f : V \to V$ линейный оператор в эрмитовом пространстве, v — собственный вектор операторов {{c2::f и f^*, }} отвечающий {{c3::собственным значениям λ и μ}} соответственно. Тогда {{c1::

$$\mu = \overline{\lambda}.$$

}}

Лекция 16.05.22

Note 1

3954a1f946d54d49843bb75beba5c6a2

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\ker f^*\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}(\operatorname{im} f)^\perp\text{\}\}}.$$

Note 2

2b5bf9cde3b944f3829f6df51e0a5d46

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\operatorname{im} f^*\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}(\ker f)^\perp\text{\}\}}.$$

Note 3

82658444368d432c84797667377faa14

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$. В чём основная идея доказательства?

> $v \in \ker f^* \iff (v, f(w)) = 0 \quad \forall w.$

Note 4

ac28c64b9e0843ee85ea8d67e40ff6d1

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$. В чём основная идея доказательства?

> Следует из равенства $\ker(f^*)^* = (\operatorname{im} f^*)^\perp$.

Note 5

0b903e3801544d2a9284c6c06caa3e11

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $V \triangleleft W$. Тогда, если {{c4::V инвариантно относительно f,}} то {{c1::$V^\perp$}} {{c3::инвариантно}} относительно {{c2::f^*.
}}

Note 6

6a68e47fbd554019b4f16972953073da

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $V \triangleleft W$. Тогда, если V инвариантно относительно f, то $V^\perp$ инвариантно относительно f^*. В чём основная идея доказательства?

> $(v, f^*(w)) = (f(v), w) = 0 \quad \forall w \in V^\perp.$

Note 7

cb0fd56398174603b26c14a08091c430

Пусть $a, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \lambda \neq \mu$. Как из равенства $\lambda a = \mu a$ следует, что $a = 0$?

> $$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} a = 0.$$

Note 8

398d95972a0746bb8ca3fe90ee7fafe6

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$f^* = f \implies \operatorname{spec} f \text{\{\{c1::} \subset \mathbb{R}.\text{\}\}}$$

Note 9

6eec0c089bb9471397a72db6e6ea7c4b

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $f^* = f \implies \operatorname{spec} f \subset \mathbb{R}$. В чём основная идея доказательства?

> $\forall \lambda \in \operatorname{spec} f \quad \lambda = \overline{\lambda}.$

Note 10

01f37aa032dc4ae184b41741f1009cba

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, {{c3::$f = f^*$,}} $x, y \in V$. Тогда, если x и y — {{c1::собственные векторы оператора f, отвечающие разным собственным значениям,}} то {{c2::$x \perp y$.}}

Note 11

9aab3b15d5bd4c1db803f7d44757e9f2

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*$, $x, y \in V$. Тогда если x и y — собственные векторы оператора f, отвечающие разным собственным значениям, то $x \perp y$. В чём основная идея доказательства?

> Рассмотреть скалярное произведение
> $$(f(x), y) = (x, f(y)).$$

Note 12

9cd8e8889d15407b9c8bc0d715fc7b96

«{{c3::Спектральная теорема для самосопряжённых операторов}}»

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда если {{c2::$f^* = f$,}} то в пространстве V существует {{c1::ортонормированный базис из собственных векторов оператора f.}}

Note 13

7e1c25eb54d844309b458da40780c8f1

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для самосопряжённых операторов?

> Для $\lambda \in \operatorname{spec} f$ имеем $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp$, но оба этих пространства инвариантны относительно f.

Note 14

4884039a91ca44c2a72e903879e0cb15

Почему в доказательстве спектральной теоремы для самосопряжённых операторов нам важно, что оба пространства в прямой сумме $V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp = V$ инвариантны относительно f?

> Из этого следует, что f представляется соответствующей квазидиагональной матрицей.

Note 15

b4ac85781d214b28a62641aa58b35dac

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*,\ \lambda \in \operatorname{spec} f$. Почему пространство $V_f(\lambda)^\perp$ инвариантно относительно f?

> $V_f(\lambda)$ инвариантно относительно $f \implies V_f(\lambda)^\perp$ инвариантно относительно $f^* = f$.

Note 16

6a3db890388d426ba9b6f47900bb8d01

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*$. Почему f не может не иметь действительных собственных значений?

> Любой оператор имеет комплексные собственные значения, но из самосопряжённости следует, что эти значения действительны.

Note 17

ca9ea18afa5c40f8873a302849e8b0b3

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::эрмитовом пространстве.}} Оператор f называется {{c2::унитарным,}} если {{c1::

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

Note 18

7ba81b35301b4520996b24d87bc4fd09

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::евклидовом пространстве.}} Оператор f называется {{c2::ортогональным,}} если {{c1::

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

Note 19

c7ddf42a012945c888c4d5178b28f2f0

Пусть $f : V \to V$ — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения f сохраняет {{c1::длины и углы.}}

Note 20

7671b924a9f647578fd2fe26e4253413

Пусть $f : V \to V$ — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения f сохраняет длины и углы. В чём основная идея доказательства?

> Длины и углы выражаются через скалярное произведение.

Note 21

89e9f8ff95e74665b47de711b04ebf2e

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::эрмитовом пространстве.}} Тогда {{c2::f унитарнен}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$f^* = f^{-1}.$$

}}

(в терминах f^*)

Note 22

41a4909e68244e2e9fd1312185a42e07

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::эрмитовом пространстве.}} Тогда {{c2::f унитарнен}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$\|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in V.$$

}}

(в терминах норм)

Note 23

865b571c22cf4ed9bf1c3a80e8e88c8c

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарнен $\Longleftarrow$ $\|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in V$. В чём ключевая идея доказательства?

> Рассмотреть $\|a + b\|^2$ и $\|a + ib\|^2$, получив сохранение отдельно вещественной и отдельно мнимой частей скалярного произведения.

Note 24

e1de7c2dfa3d4ea9b1cd75ce8c764c17

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $z + \overline{z} =$ {{c1::$2 \cdot \Re(z)$.}}

Note 25

5e9e6d646883410db5ecf8c401d3026d

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $z - \overline{z} =$ {{c1::$2i \cdot \Im(z)$.}}

Note 26

2ecb4d7e7be047b887fa8953465857cb

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::эрмитовом пространстве.}} Тогда {{c2::f унитарнен}} тогда и только тогда, когда {{c1::f переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.}}

(в терминах базисов)

Note 27

b4fdcc1c898f454cb1ca4e9fe9d18ef0

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарнен $\Longleftarrow$ f переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис. В чём ключевая идея доказательства?

> Показать, что f сохраняет длины.

Note 28

55a699f79e064eb7bcbad7d49660f64b

Пусть $A \in \mathbb{C}^{\{\{c3::n \times n\}\}}$. Матрица A называется {{c2::унитарной}} если {{c1::

$$\overline{A}^{\perp} = A^{-1}.$$

}}

Note 29

3ddc6bb6b47d44c6900bc4593cea65ba

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в {{c3::эрмитовом пространстве.}} Тогда {{c2::f унитарнен}} тогда и только тогда, когда {{c1::матрица f в ортонормированном базисе унитарна.}}

(в терминах матриц оператора)

Note 30

4754847a2e4c47108a24063de1aeb2e7

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарнен тогда и только тогда, когда матрица f в ортонормированном базисе унитарна. В чём ключевая идея доказательства?

> $f^* = f^{-1} \iff$ равны и их матрицы.

Note 31

a749d29f6a92475aa3bac79533cb3dfe

Пусть $f : V \to V$ — унитарный оператор. Тогда $\forall \lambda \in \operatorname{spec} f$ имеем {{c1::$|\lambda| = 1$.}}

Note 32

1977a9b870034e868dc7565fb5174779

Пусть $f : V \to V$ — унитарный оператор. Тогда $\forall \lambda \in \operatorname{spec} f$ имеем $|\lambda| = 1$. В чём основная идея доказательства?

> Для $v \in V_f(\lambda) \setminus \{0\}$ рассмотреть $(f(v), f(v))$.

Note 33

f3a34c6f96f24f3c91b5b5cb5b85386d

Пусть $f : W \to W$ — унитарный оператор, $V \lhd W$. Тогда если {{c4::V инвариантно относительно f,}} то {{c1::$V^\perp$}} {{c3::инвариантно}} относительно {{c2::f.}}

Note 34

fd57ae2625734c759ffb57bc00f69d8f

Пусть $f : W \to W$ — унитарный оператор, $V \lhd W$. Тогда если V инвариантно относительно f, то и $V^\perp$ инвариантно относительно f. В чём основная идея доказательства?

> $V^\perp$ инвариантно относительно $f^* = f^{-1}$.

Note 35

05351f096d4a47cc90c2f500fbe4fe16

«{{c3::Спектральная теорема для унитарных операторов}}»

Пусть $f : V \to V$ — {{c2::унитарный оператор.}} Тогда в пространстве V существует {{c1::ортонормированный базис из собственных векторов оператора f.}}

Note 36

5469fe81bf8641b2bca4525ca9e6599f

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для унитарных операторов?

> Для $\lambda \in \operatorname{spec} f$ имеем $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^{\perp}$, но оба этих пространства инвариантны относительно f.

Note 37

1e6b5642085f4ef7a716fb7a5422b363

В $\mathbb{R}^2$ любое ортогональное преобразование — есть либо {{c1::поворот,}} либо {{c2::отражение относительно прямой.}}

Семинар 20.04.22

Note 1

4af2a0956e564d7a8dcff91122d2862c

В процессе ортогонализации Грама-Шмидта определитель Грама {{c1::не меняется.}}

Note 2

5cedf320bb5941209a88b04057e3dbff

В процессе ортогонализации Грама-Шмидта определитель Грама не меняется. В чём ключевая идея доказательства?

> Ортогонализация соответствует ЭПМ, не меняющим значение определителя.

Note 3

dd5abffedea24431af7beee39693bcb2

Пусть V — эрмитово пространство, {{c2::$\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$.}} Тогда

$$\operatorname{sgn}|G(e_1,\dots,e_n)| \in \text{{{c1::}} } \{0,1\} \text{ .}\}\}$$

Note 4

db24bbf9fd7b489abaf22b6d4dc0998b

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\operatorname{sgn}|G(e_1,\dots,e_n)| \in \{0,1\}\,.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Использовать связь с n-мерным объёмом.

Note 5

550eea6aa0654fe1bcff80057656cabf

Пусть V — эрмитово пространство, {{c4::$\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$.}} Тогда {{c2::

$$|G(e_1,\dots,e_n)| = 0$$

}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::система $\{e_j\}$ линейно зависима.}}

Note 6

a335c5a6e17b498f8d3ee9caa93d6b9f

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \ldots, e_n)| = 0$$

тогда и только тогда, когда система $\{e_j\}$ линейно зависима. В чём ключевая идея доказательства?

> Использовать связь определителя Грама с n-мерным объёмом.

Note 7

00720dec33a24976930d32a68b35db90

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\operatorname{vol}_n \Pi(e_1, \ldots, e_n)\text{\{\{c2::} = 0\text{\}\} \{\{c3::} \iff \text{\}\} \{\{c1::}\{e_j\} \text{ линейно зависима.\}\}}$$

Note 8

52d0e0ee37124ceeb134e6261126d6b9

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\operatorname{vol}_n \Pi(e_1, \ldots, e_n) = 0 \iff \{e_j\} \text{ линейно зависима.}$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Какое-то из $d(e_j, \mathscr{L}(\ldots))$ из определения объёма равно нулю.

Note 9

c01adb60f10f465ea82f0eb8c910472c

Пусть V — эрмитово пространство, {{c3::$\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$.}} Тогда

$$|G(e_1, \ldots, e_n)| \text{\{\{c2::} \leqslant \text{\}\}\{\{c1::} \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2 . \text{\}\}}$$

Note 10

8ab6bf94daa540feb140ea8b73482041

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \ldots, e_n)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 .$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Использовать связь с n-мерным объёмом.

Note 11

e3a8ea052f1b41b48d35050e054c8f59

Пусть V — эрмитово пространство, {{c5::$\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$.}} Тогда

$|G(e_1, \ldots, e_n)|$ {{c4:: $=$ }}{{c3:: $\prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2$ }}{{c2:: $\iff$ }}{{c1:: $\left[\begin{array}{l} \{e_j\} \text{ ортогональна,} \\ \exists j \quad e_j = 0. \end{array}\right.$ }}

Note 12

cc78cd0e52934eaf89bbd0be8dd6df0c

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \ldots, e_n)| = \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \implies \left[\begin{array}{l} \{e_j\} \text{ ортогональна,} \\ \exists j \quad e_j = 0. \end{array}\right.$$

Какие два случая расстраиваются в доказательстве?

> 1. Все $e_j \neq 0$; 2. Существует $e_j = 0$.

Note 13

d2d2bc3022e14cf0b41d9881403f47be

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \ldots, e_n)| = \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \implies \left[\begin{array}{l} \{e_j\} \text{ ортогональна,} \\ \exists j \quad e_j = 0. \end{array}\right.$$

В чём ключевая идея доказательства (все $e_j \neq 0$)?

Использовать связь с n-мерным объёмом.

Семинар 27.04.22

Note 1
15065bb7284d464eb733caa7ce69f5c2

Пусть L_1, L_2 — векторные подпространства, {{c5::$L_1 \cap L_2 = \{0\}$. }} Тогда {{c4::$(\widehat{L_1, L_2})$}} $=$ {{c3::$(\widehat{g, g_1})$}}, где

g — {{c1::проекция ненулевого вектора $x \in L_1$ на L_2,}}
g_1 — {{c2::проекция g на L_1.}}

Note 2
6bc4328f156248a99ab740a54db23882

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор ff^* {{c1::самосопряжён.}}

Note 3
ee802fb93fc34532abc98ffcbb813a0a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор f^*f {{c1::самосопряжён.}}

Note 4
2298652c987c4036be1f1244e0d2d16a

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, {{c3::$\det f \neq 0$}}. Тогда {{c2::$(f^{-1})^*$}} $=$ {{c1::$(f^*)^{-1}$}}.

Note 5
f9e1ce5c80d84b1fa0d487d5057a623f

Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Тогда

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } \left[\overline{a_{ij}}\right]. \text{}}}$$

Note 6
3ed5769b04134886b2dae82e3c375951

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — {{c4::базис в V.}} Тогда

$$\text{{{c5::}}} M_e(f^*) \text{}}} = \text{{{c1::}}} \overline{G^{-1}A^TG}, \text{}}}$$

где $A =$ {{c2::$M_e(f)$}}, $G =$ {{c3::$G(e_1, \ldots, e_n)$}}.

Note 7

2e0ddee23d1142f492e32a3030b2abbe

Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис в V. Тогда $M_e(f^*) = \overline{G^{-1}A^T G}$, где $A = M_e(f)$, $G = G(e_1, \ldots, e_n)$. В чём основная идея доказательства?

> Использовать G как матрицу полуторалинейной формы.

Note 8

fa1bb01afd4c43bbb1e902fcdf3891a2

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times l}$. Тогда

$$\overline{AB} = \text{\{\{c1::}\overline{A}\,\overline{B}.\text{\}\}}$$

Note 9

4a0309bd276e44448efb76c62e0fbfcf

Пусть $f, g : V \to V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда {{c2::оператор fg самосопряжён}} {{c3::$\iff$}} {{c1::$fg = gf$.}}

Note 10

3b50b418e4594bfeb03b83bb0f393857

Пусть $f, g : V \to V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда оператор {{c2::$fg + gf$}} {{c1::самосопряжён.}}

Note 11

480f285619264421ad7eebf15db6c3c5

Пусть $f, g : V \to V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда если {{c2::$\overline{\lambda} = -\lambda$,}} то оператор {{c3::$\lambda(fg - gf)$}} {{c1::самосопряжён.}}

Лекция 23.05.22

Note 1

5a8ab0eed63d4e1cb7f6f69e11c2aabd

В $\mathbb{R}^2$ любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

> 1. $\operatorname{spec} f \subset \mathbb{R}$, 2. $\operatorname{spec} f \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Note 2

20fe0d9d75484cf1858bc7ea943f9e34

В $\mathbb{R}^2$ любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай $\operatorname{spec} f \subset \mathbb{R}$)?

> $\operatorname{spec} f = \{\pm 1, \pm 1\}$, и во всех случаях получаем нужное преобразование.

Note 3

231ac7e677014b5c906070674ee0e438

В $\mathbb{R}^2$ любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай $\operatorname{spec} f \cap \mathbb{R} = \emptyset$)?

> Для $\lambda = \cos\varphi - i\sin\varphi \in \operatorname{spec} f$ и $e = a + bi \in V_f(\lambda)$ расписать
> $$f(e) = \lambda e.$$

Note 4

31d69048b8654670a45bed290ffb4052

Пусть f : {{c4::$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$}} — линейный оператор, $\lambda \in$ {{c5::$\operatorname{spec} f \setminus \mathbb{R}$}}. Тогда если {{c2::$a + ib \in V_{f_\mathbb{C}}(\lambda) \setminus \{0\}$}} (где {{c3::$a, b \in \mathbb{R}^n$}}), то {{c1:: a и b линейно независимы.}}

Note 5

a8555ff624e746ceae88a1597c9ebcf4

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $\lambda \in \operatorname{spec} f \setminus \mathbb{R}$. Тогда если $a + ib \in V_{f_\mathbb{C}}(\lambda) \setminus \{0\}$ (где $a, b \in \mathbb{R}^n$), то a и b линейно независимы. В чём ключевая идея доказательства?

> От обратного и тогда $f(a) = \lambda a$, что невозможно, поскольку $a, f(a) \in \mathbb{R}^n$.

Note 6

678857a6b6514b7e87cade6a771f4c53

{{c2::Матрица поворота на угол φ}} имеет вид: {{c1::

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

}}

Note 7

398eb33a3cd34a718118f2be8f7095a2

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ — произвольный угол. {{c1::Матрица поворота на угол φ}} обозначается {{c2::R_φ.}}

Note 8

87e8bdb8fccb4fd9ac6ce183b1724513

{{c1::Матрица вида

$$\operatorname{diag}(R_{\varphi_1}, \ldots, R_{\varphi_k}, \pm 1, \ldots, \pm 1).$$

(с точностью до порядка клеток)}} называется {{c2::каноническим видом матрицы ортогонального оператора.}}

Note 9

951f954d7fc94632bfd90e091d13396e

В $\mathbb{R}^n$ для любого ортогонального оператора существует {{c1:: ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет канонический вид.}}

Note 10

e8a3805f9a3f4bae8dd14745c6603d37

В $\mathbb{R}^n$ для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет канонический вид. В чём ключевая идея доказательства?

> Выбрать собственное значение, построить отвечающий ему блок и далее “по индукции” для сужения на ортогональное дополнение.

Note 11

3dbcabf7585c41e590b7515d2294cb74

Пусть f — ортогональный оператор, $a + bi$ — его собственный вектор. Тогда a и b {{c1::ортогональны и имеют равную длину.}}

Note 12

5b4055b476de4754a0eab034334b564d

Пусть f — ортогональный оператор, $a + bi$ — его собственный вектор. Тогда a и b ортогональны и имеют равную длину. В чём ключевая идея доказательства?

> Выразить (a, b) и (a, a) через значения $f(a)$ и $f(b)$ и составить СЛАУ.

Note 13

ebbc584e56104a56ab20c37cb3f76036

Пусть f — ортогональный оператор, $a + bi$ — его собственный вектор. Тогда a и b ортогональны и имеют равную длину. Относительно каких переменных составляется СЛАУ в доказательстве?

> Относительно (a, b) и $(a, a) - (b, b)$

Note 14

91344cb034d9420b9a63807b59bc1cbf

Отображение q : {{c1::$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$}} вида

$$q(x) = \text{{{c2::}} \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.\text{}}$$

называется {{c3::квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 15

9f5070390cb64df59f3c3a3edb21964d

Пусть $q : x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Для удобства полагают, что {{c1::$a_{ij} = a_{ji}$.}}

Note 16
f3a4dfc29aec43e4be378badd310835b

Матрицей квадратичной формы $x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$ в $\mathbb{R}^n$ называется {{c1::матрица

$$\left[a_{ij}\right] \sim n \times n.$$

}}

Note 17
c20dec1b0cdf4cfb824cfb96603e87c6

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, A — матрица q. Тогда

$$A^T = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

Note 18
f47b5351d6cc4c4792454ba3ae253b45

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, A — матрица q. Как $q(x)$ выражается через произведение матриц?

$$q(x) = x^T A x.$$

Note 19
80787c73077441aa88a40c590206c15e

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, A — матрица q. Как $q(x)$ выражается через евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$?

$$q(x) = (Ax, x)$$

Note 20
78fd5f73a8bd4fe2bd9715e0dfc63f3e

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Форма q называется {{c2::положительно определённой,}} если {{c1::$\forall x$

$$q(x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad q(x) = 0 \iff x = 0.$$

}}

Note 21

e2a3814c661f4081a60e07f3ae077705

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда всегда {{c3::существует}} такая {{c2::замена переменных $x = By$,}} что

{{c1::

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \mu_i y_i^2.$$

}}

Note 22

5efae3fe5ee64edabaa2a50d91d8714f

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует такая замена переменных $x = By$, что

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \mu_i y_i^2.$$

В чём ключевая идея доказательства (без использования спектральной теоремы)?

> Элементарными преобразованиями строк и столбцов привести матрицу q к диагональному виду.

Note 23

2b6bd1f239a0448cb62e2d9e6ba8e5a7

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c1::Представление $q(x)$ в виде

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \mu_i y_i^2.$$

}} называется {{c2::каноническим видом квадратичной формы q.}}

Note 24

d28a23b8889943d4b3ffc14e52cb4e21

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c1::Число положительных коэффициентов в каноническом виде q }} называется {{c2::положительным индексом инерции q.}}

Note 25

e3c4dedc4bea411e996ba571573fe4ab

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c2::Положительный индекс инерции q}} обычно обозначается {{c1::π.
}}

Note 26

45d2e04c6dc0495c8c53da1a9a52fa03

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c2::Отрицательный индекс инерции q}} обычно обозначается {{c1::ν.
}}

Note 27

ccfa3006b8dd4d76a4d29b6bd06efa0e

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c1::Число отрицательных коэффициентов в каноническом виде q}} называется {{c2::отрицательным индексом инерции q.}}

Note 28

e0192c4d7f9b4c8da63ea34e5b91d7b5

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c3::Положительные и отрицательные индексы инерции q}} {{c2::не зависят }} от {{c1::замены переменных, приводящей q к каноническому виду.}}

Note 29

7c4f4a41668546169076f4a02bb73f41

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда {{c2:: π}} — это {{c1::максимальная размерность подпространства, на котором форма q положительно определена.}}

(в терминах положительной определённости)

Note 30

24dea29600d54b75b2530902cfa4a5af

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда {{c2:: ν}} — это {{c1::максимальная размерность подпространства, на котором форма q отрицательно определена.}}

(в терминах положительной определённости)

Note 31

2efa1a15074a49d19d8568cb77fd70d7

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда π — это максимальная размерность подпространства, на котором форма q положительно определена. В чём ключевая идея доказательства?

> Выбрать базис e, в котором
>
> $$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

Note 32

7a2d2be95e6543ff9f5642410cda1fc7

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Почему мы знаем, что существует базис e, в котором

$$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

> Диагональный вид существует из спектральной теоремы. Остаётся нормировать и переставить базисные векторы.

Note 33

2002e141fa3345999d474a7c75a27b69

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, e — базис такой, что

$$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

Что можно сказать про $L = \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_\pi)$?

> q положительно определена на L.

Note 34

a5149aa8efff4d5ba3531d0dc96ec6ba

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, e — базис такой, что

$$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

Что можно сказать про $L = \mathscr{L}(e_{\pi+1}, \ldots, e_{\pi+\nu})$?

> q отрицательно определена на L.

Note 35

456d6973756f4ab9bfbfd28f53e7a060

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, e — базис такой, что

$$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

Тогда если {{c2::q положительно определена на G,}} то {{c1::$\dim G \leqslant \pi$.
}}

Note 36

93b97c5f8fa2484e9cd48faeac9b577e

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, e — базис такой, что

$$q(e\lambda) = \lambda^T \begin{bmatrix} E_\pi & & \\ & -E_\nu & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda.$$

Тогда если q положительно определена на G, то $\dim G \leqslant \pi$.
В чём ключевая идея доказательства?

> В G не может лежать векторов из $\mathscr{L}(e_{\pi+1}, \ldots, e_n)$.

Note 37

5fc4db6c932e4c5bac06afaafb2e8a68

Пусть q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Почему π и ν корректно определены?

> Следует из связи значений π и ν с размерностями подпространств, на которых q положительно/отрицательно определена.

Note 38

97b6d8cfbb8e499e8552699c8f4d0bf8

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, $i \in [1 : n]$.

{{c2::Δ_i}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$M^{1\ldots i}_{1\ldots i}(A)$.}}

Note 39

70b0c89b87844a56bfbafcab882e879b

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::q положительно определена}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1::

$$\forall j \quad \Delta_j > 0.$$

}}

«{{c3::Критерий}} {{c4::Сильвестра}}»

Note 40

6fc3ef1864d246d2a2ee658a1f0902fc

В чём основная идея доказательства критерия Сильвестра для квадратичных форм?

> Элементарными преобразованиями, не меняющими значений угловых миноров, привести матрицу формы к диагональному виду.

Note 41

b67b00fb8e7741c2bde46724543c741d

К чему применяются элементарные преобразования в доказательстве критерия Сильвестра для квадратичных форм: к строкам или к столбцам?

> И к строкам, и к столбцам одновременно.

Note 42

5673368bd606421b82198acfa11aa4d1

Какие элементарные преобразования применяются к матрице квадратичной формы в доказательстве критерия Сильвестра?

> Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число. Для столбцов то же, но зеркально.

Note 43

ee57ba62b118492b8faabc390f478fce

Почему в доказательства критерия Сильвестра для квадратичных форм (необходимость) можно считать, что все λ_i в полученном диагональном виде отличны от нуля?

> Первое $\lambda_i = 0 \implies \Delta_i = 0$.

Note 44

8629aff0d2a945f2bb5ae5fbb13440e6

Почему в доказательства критерия Сильвестра для квадратичных форм (достаточность) можно считать, что все λ_i в полученном диагональном виде отличны от нуля?

> От обратного и тогда $\exists x \neq 0 : q(x) = 0$.

Note 45

75e17707e4e446ed9ca2db4710251d36

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда всегда {{c4::существует}} такая {{c3::ортогональная замена $x = By$,}} что {{c1::

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \lambda_i y_i^2,$$

}} где $\{\lambda_j\}$ {{c2:: $= \operatorname{spec} A$}}.

Note 46

2cbc861e5ee44f50a82f862ca8317fbf

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует такая ортогональная замена $x = By$, что

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \lambda_i y_i^2,$$

где $\{\lambda_j\} = \operatorname{spec} A$. В чём ключевая идея доказательства?

> Спектральная теорема для самосопряжённых операторов.

Note 47

27069c1e2308471e94c9d33659f5c2c0

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ {{c2::симметрична.}} Тогда по {{c3::спектральной теореме для самосопряжённых операторов}} A {{c1::диагонализуема.}}

Note 48

092c2617bcad4d609ecc2818ad32ac07

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична. Почему A самосопряжена?

> $$A^* = \overline{A^T}.$$

Note 49

31b3b048ada040338acc82b240da632e

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична. Тогда по спектральной теореме для самосопряжённых операторов

$$A = C \Lambda C^{-1}.$$

Что можно сказать про матрицу C?

> Она ортогональна.

Note 50

e9126cafe6c945e795c28f3684b96f54

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична. Тогда по спектральной теореме для самосопряжённых операторов

$$A = C \Lambda C^{-1}.$$

Почему матрица C ортогональна?

> C — матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.

Note 51

c71cb32466464fd1b45a573370778a8a

Пусть $A \in$ {{c4::$\mathbb{R}^{n \times n}$}} {{c3::ортогональна}}. Тогда {{c2::A^{-1}}} $=$ {{c1::A^T}}.

Note 52

b68e5c8fd9d34bb59b547f8004aabf07

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична. Тогда по спектральной теореме для самосопряжённых операторов

$$A = C \Lambda C^{-1}.$$

Почему Λ не может иметь комплексных значений на диагонали?

> A самосопряжена $\implies \operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}$.

Семинар 18.05.22

Note 1

b6887df7065f4a8ab54f2db4f3a0d40b

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда если

{{c2::

$$\forall j \leqslant \operatorname{rk} A \quad \Delta_j \neq 0,$$

}} то q приводится к каноническому виду

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \lambda_i y_i^2, \quad \text{где } \{\{c1::\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}.\}\}$$

«{{c3::формула Якоби}}»

Note 2

4f977e40188141d2a3865d203cba08d5

В чём основная идея доказательства формулы Якоби для квадратичных форм?

> Элементарными преобразованиями, не меняющими значений угловых миноров, привести матрицу формы к диагональному виду.

Note 3

52494560052c4c2ca0b504c059601cdd

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c1::Величина $\pi - \nu$}} называется {{c2::сигнатурой q.}}

Note 4

0fbf18cec5d54ec6823be4c8821294e1

Пусть $q : x \mapsto x^T Ax$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. {{c2::Сигнатура q}} обычно обозначается {{c1::σ.}}

Семинар 25.05.22

Note 1

3388e39da8554cabbe1722fa7348f91b

Пусть {{c4::M — конечное множество,}} {{c5::$f : M \to M$.}} Тогда

$${{c3::} f \text{ инъективно} {}} {{c1::} \iff {}} {{c2::} f \text{ сюрьективно.} {}}$$

Note 2

377d2404fa034f7c938eb2f12061ab6f

{{c2::Группа обратимых элементов}} кольца K обозначается {{c1::K^*.}}