Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2::Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1::многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1::он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p-q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \xrightarrow[x \to a]{} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2::Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1::$T_{a,n}f$.}}

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{{c3::Формула Тейлора для многочленов}}»

Пусть p — {{c2::многочлен степени не более n.}} Тогда {{c1::

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}f(a).\text{\}\}}$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left((x-a)^k\right)^{(n)}\Big|_{x=a} = \text{\{\{c1::} \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3::Свойство n раз дифференцируемой функции}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1::$f(x) = o((x-a)^n), x \to a$.}}

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{\{c1::\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c)\cdot(x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon|x-a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon|x-a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon|c-a|^n < \varepsilon|x-a|^n$$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$, {{c2::$f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1::$o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 19

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3::**Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset R \to \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

> По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

> $$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\widetilde{\Delta}_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{cases} \}\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{{c3::**Формула Тейлора-Лагранжа**}}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, $\quad$ {{c2::$f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.}} Тогда {{c1::найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {{c1::теореме Лагранжа}}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x?

> $$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::e^x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).\}\}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\sin x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).\}\}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\cos x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).\}\}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\ln(1+x)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).\}\}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{{c3::Обобщённый биномиальный коэффициент}} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \{\{c1::\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\}\}, \quad \alpha \in \{\{c2::\mathbb{R}\}\}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$${{c2::(1+x)^\alpha}} = {{c1:: \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)\,.}}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют {{c1::биномиальным разложением}}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = {{c1::(-1)^k.}}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$${{c2::(1+x)^{-1}}} = {{c1:: \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)\,.}}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {{c3::функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа.}} Тогда если {{c2::

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

}} то {{c1::

$$|R_{a,n} f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}}

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n \, dx = \{\{\text{c1::}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\}\}, \quad (\{\{\text{c2::}n \neq -1\}\}).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \{\{\text{c2::}\frac{1}{x}\}\} \, dx = \{\{\text{c1::}\ln|x| + C\}\}.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \{\{\text{c2::}\frac{1}{1-x^2}\}\} \, dx = \{\{\text{c1::}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\}\}.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \{\{\text{c2::}\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\}\} \, dx = \{\{\text{c1::}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C\}\}.$$

Note 5

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x \, dx = \{\{\text{c1::}\frac{a^x}{\ln a} + C\}\}.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

> Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow\!\!\nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\Longleftarrow$ }} {{c1::$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B)$.
}}

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::f постоянна на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть {{c3::$f, g \in C[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда Если {{c2::$f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B\rangle.$$

}}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть {{c3::$f, g \in C\langle A, B]$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда Если {{c2::$f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B).$$

}}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leqslant f(a).$$

}}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geqslant f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если {{c2::точка a является точкой минимума или максимума функции f,}} то a называется {{c1::точкой экстремума f.}}

Note 15

98f3cebf02ca464ab3cf9e94355caaa2

«{{c3::**Необходимое условие экстремума**}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$.}}

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к $f|_{[a-\delta,a+\delta]}$ для δ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется {{c1::стационарной точкой функции f,}} если {{c2::

$$f'(a) = 0.$$

}}

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::точка $a \in (A, B)$}} называется {{c2::критической точкой,}} если {{c1::либо a стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке a.}}

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда все {{c2::точки экстремума f, принадлежащие (A, B),}} лежат в {{c1::множестве её критических точек.}}

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\text{{{c3::}} \max f([a, b]) \text{}}} = \text{{{c1::}} \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}, \text{}}}$$

где C — {{c2::множество критических точек f.}}

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

«{{c4::Достаточное условие экстремума в терминах f'}}»

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$.}} Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго максимума f.}}

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

«Достаточное условие экстремума в терминах f'»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго минимума f.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

«{{c4::Достаточное условие экстремума в терминах f'' }}»

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$.}} Тогда если {{c1::$f''(a) > 0$,}} то {{c2::a — точка строгого минимума f.}}

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

«Достаточное условие экстремума в терминах f'' »

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$. Тогда если {{c1::$f''(a) < 0$,}} то {{c2::a — точка строгого максимума f.}}

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752fcaf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с
>
> $$o((x-a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

«{{c5::Связь экстремума со старшими производными}}»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,}} {{c3::

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

}} Тогда если {{c2::n нечётно,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

«Связь экстремума со старшими производными»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если {{c2::n чётно,}} {{c1::то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах f''.}}

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«{{c3::Теорема Дарбу}}»

Пусть {{c2::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$, $a, b \in \langle A, B\rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

}} Тогда {{c1::$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$.}}

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

> По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c, далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

> c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

> Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b.

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть {{c3::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$.}} Если {{c2::

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B\rangle,$$

}} то {{c1::f строго монотонна на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbdb8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

> Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B\rangle$. Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«{{c2::**Следствие из теоремы Дарбу о сохранении промежутка.**}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$. Тогда $f'(\langle A, B\rangle)$ — промежуток.}}

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B\rangle$
>
> $$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B\rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B\rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> $$f'(a) \leqslant f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f(\langle A, B\rangle)?$$

> Применить теорему Дарбу к функции
>
> $$F(x) = f(x) - y \cdot x$$
>
> в точках a и b.

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«{{c2::**Следствие из теоремы Дарбу о скачках производной.**}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?
TODO

Note 19

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

{{c3::Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::выпуклой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B\rangle, \lambda \in (0,1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 20

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

{{c3::Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::строго выпуклой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B\rangle, \lambda \in (0,1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 21

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«{{c4::Критерий строгой выпуклости f на $\langle A, B\rangle$}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливо неравенство
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$
}}

Note 22

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«{{c4::Лемма о трёх хордах}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow\!\!\nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in \langle A, B)$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 4

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 5

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B)$.}} Тогда {{c1::$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ конечны и $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$.}}

Note 6

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$, то она {{c1::непрерывна на (A, B).}}

Note 7

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$.}} {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 8

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$. {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::строго опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 9

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть {{c5::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся {{c4::уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

}}

Тогда прямая ℓ является {{c1::опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.}}

Note 10

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является {{c1::строго опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.
}}