Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2::Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1::многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1::он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Младший ненулевой коэффициент при $(x-a)^m$ в $p-q$ равен нулю $\implies \perp$. (Доказательство от противного.)

Note 4

91af14a03bea4b9fadee06859cbab64d

Пусть p и q — два многочлена Тейлора функции f, коэффициент r_m перед $(x-a)^m$ — младший ненулевой коэффициент в $p-q$. Как показать, что $r_m = 0$?

> Рассмотреть многочлен
>
> $$\frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^m}.$$

Note 5

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2::Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1::$T_{a,n}f$.}}

Note 6
1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{{c3::Формула Тейлора для многочленов}}»

Пусть p — {{c2::многочлен степени не более n.}} Тогда {{c1::

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}

Note 7
97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} {{c1::f(a).}}$$

Note 8
cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left((x-a)^k\right)^{(n)}\Big|_{x=a} = {{c1:: \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} }}$$

Note 9
9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 10
7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3::Свойство n раз дифференцируемой функции}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1::$f(x) = o((x-a)^n), x \to a.$}}

Note 11

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{\{c1::\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

Note 12

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 13

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 14

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 15

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 16

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 17

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x - a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$.

Note 18

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c - a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c - a|^n < \varepsilon |x - a|^n$$

Note 19

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$, {{c2::$f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x - a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1::$o((x - a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 20

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3::**Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset R \to \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

> По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

> $$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\widetilde{\Delta}_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{cases} \}\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{{c3::**Формула Тейлора-Лагранжа**}}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq x,$ {{c2::$f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.}} Тогда {{c1::найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {{c1:: теореме Лагранжа}}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::e^x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).\}\}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\sin x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).\}\}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\cos x\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).\}\}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::\ln(1+x)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).\}\}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{{c3::Обобщённый биномиальный коэффициент}} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \{\{c1::\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\}\}, \quad \alpha \in \{\{c2::\mathbb{R}\}\}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$${{c2::(1+x)^\alpha}} = {{c1:: \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)\,.}}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют {{c1::биномиальным разложением}}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = {{c1::(-1)^k.}}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$${{c2::(1+x)^{-1}}} = {{c1:: \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)\,.}}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {{c3::функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа.}} Тогда если {{c2::

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

}} то {{c1::

$$|R_{a,n} f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}}

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n \, dx = \{\{c1::\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\}\}, \quad (\{\{c2::n \neq -1\}\}).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \{\{c2::\frac{1}{x}\}\} \, dx = \{\{c1::\ln|x| + C\}\}.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \{\{c2::\frac{1}{1-x^2}\}\} \, dx = \{\{c1::\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\}\}.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \{\{c2::\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\}\} \, dx = \{\{c1::\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C\}\}.$$

Note 5

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{\{\{c1::x^2 \pm 1\}\}}} \, dx = \ln|x + \sqrt{\{\{c1::x^2 \pm 1\}\}}| + C.$$

Note 6

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x \, dx = \{\{c1::\frac{a^x}{\ln a} + C\}\}.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

> Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow\!\!\nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\Longleftarrow$ }} {{c1::$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B)$.
}}

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::f постоянна на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть {{c3::$f, g \in C[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда Если {{c2::$f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B\rangle.$$

}}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть {{c3::$f, g \in C\langle A, B]$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда если {{c2::$f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B).$$

}}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leqslant f(a).$$

}}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geqslant f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если {{c2::точка a является точкой минимума или максимума функции f,}} то a называется {{c1::точкой экстремума f.}}

Note 15

98f3cebf02ca464ab3cf9e94355caaa2

«{{c3::Необходимое условие экстремума}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$.}}

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

> Применить теорему Ферма к $f|_{[a-\delta,a+\delta]}$ для δ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется {{c1::стационарной точкой функции f,}} если {{c2::

$$f'(a) = 0.$$

}}

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::точка $a \in (A, B)$}} называется {{c2::критической точкой,}} если {{c1::либо a стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке a.}}

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда все {{c2::точки экстремума f, принадлежащие (A, B),}} лежат в {{c1::множестве её критических точек.}}

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c3:: \max f([a, b])\}\} = \{\{c1:: \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}\ ,\}\}$$

где C — {{c2::множество критических точек f.}}

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$.}} Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго максимума f.}}

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго минимума f.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B), f''$ определена в точке a, $f'(a) = 0$.}} Тогда если {{c1::$f''(a) > 0$,}} то {{c2::a — точка строгого минимума f.}}

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$. Тогда если {{c1::$f''(a) < 0$,}} то {{c2::a — точка строгого максимума f.}}

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752fcaf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с
>
> $$o((x-a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,}} {{c3::

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

}} Тогда если {{c2::n нечётно,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если {{c2::n чётно,}} {{c1::то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах f''.}}

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«{{c3::**Теорема Дарбу**}}»

Пусть {{c2::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$, $a, b \in \langle A, B\rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

}} Тогда {{c1::$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.$}}

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

> По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c, далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

> c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

> Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b.

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть {{c3::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$.}} Если {{c2::

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B\rangle,$$

}} то {{c1::f строго монотонна на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbdb8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

> Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B\rangle$. Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«{{c2::Следствие из теоремы Дарбу о сохранении промежутка.}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$. Тогда $f'(\langle A, B\rangle)$ — промежуток.}}

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B\rangle$
>
> $$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B\rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B\rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leqslant f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f(\langle A, B \rangle)?$$

> Применить теорему Дарбу к функции
>
> $$F(x) = f(x) - y \cdot x$$
>
> в точках a и b.

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«{{c2::Следствие из теоремы Дарбу о скачках производной.}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.}}

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> Допустить противное и показать, что $\operatorname{im} f'|_{[a, a+\delta)}$ — не промежуток.

Note 19

933fb7290ce844da8f84c48835915d5c

Какие допущения принимаются (для определённости) в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> f имеет скачёк справа в точке $a \in \langle A, B \rangle$ и
>
> $$L := \lim_{x \to a^+} f'(x) < f'(a).$$

Note 20

4fc5c84bb2b14241a99633260e7f76fc

Как выбирается δ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> Так, что для некоторого $y \in (L, f'(a))$
>
> $$f'(x) < y \quad \forall x \in (a, a+\delta).$$

Note 21

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

{{c3::Функция $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::выпуклой на $\langle A, B \rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 22

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

{{c3::Функция $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::строго выпуклой на $\langle A, B \rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 23

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«{{c3::Критерий}} {{c1::строгой выпуклости f на $\langle A, B \rangle$}}»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливо неравенство
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$
}}

(из леммы о трёх хордах)

Note 24

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«{{c4::Лемма о трёх хордах}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

}}

Note 25

c8e0bc0478654a5bbabdf38890b5f942

Каким образом доказываются критерий строгой выпуклости и лемма о трёх хордах?

> Строится цепочка импликаций
>
> $$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1).$$
>
> - (1) — строгая выпуклость f,
> - (2) — неравенство из леммы о трёх хордах.
> - (3) — неравенство из критерия выпуклости,

Note 26

11c8d7341f374a2e8d7d5c8df97eaba8

В чём основная идея доказательства критерия строгой выпуклости из леммы о трёх хордах (достаточность)?

> Положить $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ и отсюда выразить $c - a$ и $b - c$.

Note 27

1338324da4ea4cb7a93a5a15718852b5

В чем основная идея доказательства леммы о трёх хордах (необходимость)?

> Положить в определении выпуклости
>
> $$\lambda = \frac{b-c}{b-a}.$$

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow\!\!\nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

d547aa237c104089813102cd73487563

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$. Откуда следует возрастание функции $F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$?

> Из леммы о трёх хордах.

Note 4

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in \langle A, B)$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 5

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B)$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 6

1ea150313caa4817b9f27c00d5c8e6d8

Откуда следует существование односторонних производных у выпуклой фукнции?

> Из теоремы о пределе монотонной функции для
>
> $$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Note 7

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B)$.}} Тогда {{c1::$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ конечны и $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$.}}

Note 8

82fe965871ac446facad207a4f246b18

Пусть f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$. Откуда следует, что $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$?

> Из теоремы о пределе монотонной функции.

Note 9

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$, то она {{c1::непрерывна на (A, B).}}

Note 10

9390116052df401f8413ffb225259a9d

Пусть f выпукла на $\langle A, B\rangle$. Откуда следует, что она непрерывна на (A, B)?

Из существования конечных односторонних производных f в любой точке (A, B).

Note 11

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$.}} {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 12

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$. {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::строго опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 13

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть {{c5::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся {{c4::уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

}} Тогда прямая ℓ является {{c1::опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.}}

Note 14

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является {{c1::строго опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.

}}

Note 15

1da04fcb23dc406eba98567735e9e6dc

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что если прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f, то $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

> В определении опорной прямой выразить $f(x)$ через односторонние производные по определению дифференцируемости.

Note 16

9ab922ea4b1f422c855c9dc14925580a

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f, если $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

> По теореме о пределе монотонной функции сравнить
>
> $$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> с односторонними производными в точке a.

Note 17

f8f5608de51344b89b749bf6fb673e89

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Если {{c2::в каждой точке (A, B) функция f имеет опорную прямую,}} то {{c1::она выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}

(в терминах опорных прямых)

Note 18

0a5cbb4429524954af423e27fe0c32bc

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Если {{c2::в каждой точке (A, B) функция f имеет строго опорную прямую,}} то {{c1::она строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}

(в терминах опорных прямых)

Note 19

cfe92784a4e244ecb916f9627404f421

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Если в каждой точке $a \in (A, B)$ функция f имеет опорную прямую, то она выпукла на $\langle A, B \rangle$. В чем основная идея доказательства?

> Выбрать $x < a < y$ и показать для них выполнение неравенства критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Лекция 04.03.22

Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл $T_{a,1}f(x)$?

> График $T_{a,1}f(x)$ — это касательная к функции f в точке a.

Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B\rangle$$
$$f(x) \geqslant T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::функция f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}$$
$$f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 4

76ff105d143e49dea8fe8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (необходимость)?

> f дифференцируема в любой точке (A, B) $\implies$ касательная совпадает с опорной прямой.

Note 5

a71b501cf8434876a0ff83fdc763c8d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (достаточность)?

> Из условия f имеет опорную прямую в каждой точке (A, B).

Note 6

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) \geqslant kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 7

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f строго выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 8

7046fd62e87e44c7a6dc18f4e94f7bd8

Пусть $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда если f строго выпукла на $(A, +\infty)$, то

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

В чем основная идея доказательства?

> Показать, что $f(x) - kx \searrow\searrow$. Далее по теореме о пределе монотонной функции.

Note 9

f0e5b2b8f6a74445a42cf0b35e854f39

Пусть $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$ и f строго выпукла на $(A, +\infty)$. Как показать, что $f(x) - kx \searrow\searrow$?

> По теореме о пределе монотонной функции для
>
> $$t \mapsto \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Note 10

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 11

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда

}} {{c1::

$$f' \nearrow\!\!\nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 12

8b55ad03aaca4dfcb1ec7ce171dee0ce

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (необходимость)?

> Для $x < y$ сравнить значения $f'(x), f'(y)$ с $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Note 13

b1782e215a3d4a948b9fbddfbaed55d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (достаточность)?

> По теореме Лагранжа выполняется неравенство критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Note 14

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B). }} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда }} {{c1::

$$f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 15

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B). }} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c3::если}} {{c1::

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 16

d912e4ab9b6a4459b2f104fabfc198f8

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f''?

> Применить критерий возрастания функции к f'.

Note 17

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$.}} Точка a называется {{c2:: точкой перегиба функции f,}} если {{c1::

- $\exists \delta > 0$ такое, что $V_\delta(a) \subset (A, B)$ и f имеет разный характер выпуклости на $(a - \delta, a]$ и $[a, a + \delta)$;
- f непрерывна в точке a;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

}}

Note 18

9aa5847a39ac46e8ad8dbee41e14a904

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дважды дифференцируема на a. Если {{c2::a является точкой перегиба f,}} то {{c1::$f''(a) = 0$.}}

Note 19

aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

> Нет, это только необходимое условие.

Note 20

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и имеет в ней производную из $\overline{\mathbb{R}}$.}} Тогда если {{c1::$\exists \delta > 0$ такое, что f дважды дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$ и

- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,
- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,

}} то {{c2::a — точка перегиба f.}}

Семинар 03.03.22

Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeea82dcc793

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \ln x {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} x \ln x - x {\scriptstyle \}\}} + C$$

Note 2

310668af95114f9fbe87673be333fec8

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{1}{\sin x} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| {\scriptstyle \}\}} + C$$

Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{1}{\cos x} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} \ln \left|\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right| {\scriptstyle \}\}} + C$$

Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{1}{x^2 + a^2} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} {\scriptstyle \}\}} + C \quad ({\scriptstyle \{\{c3::} a \neq 0 {\scriptstyle \}\}})$$

Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{A}{x + a} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} A \ln |x + a| {\scriptstyle \}\}} + C$$

Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{1}{nx + a} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} \frac{1}{n} \ln \left|x + \frac{a}{n}\right| {\scriptstyle \}\}} + C \quad ({\scriptstyle \{\{c3::} n \neq 0 {\scriptstyle \}\}})$$

Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int {\scriptstyle \{\{c2::} \frac{A}{(x + a)^k} {\scriptstyle \}\}}\, dx = {\scriptstyle \{\{c1::} \frac{A}{(1 - k)(x + a)^{k-1}} {\scriptstyle \}\}} + C \quad ({\scriptstyle \{\{c3::} k \neq 1 {\scriptstyle \}\}})$$

Note 8

72b0aaea0b254078bbfcc47745885653

$$\int {{c4::\frac{Mx+N}{x^2+px+q}}} \, dx = {{c1::\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|}} + {{c2::\frac{2N-pM}{2a}\arctan\frac{2x+p}{2a}}} + C,$$

где $a^2 :=$ {{c3::$\frac{4q-p^2}{4}$}}, {{c5::$p^2-4q<0.$}}

Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beee8

$$\int {{c3::\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}}} \, dx = \int {{c1::\frac{N-M\frac{p}{2}}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt + {{c1::\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt + C,$$

где {{c4::t}} $:=$ {{c2::$x+\frac{p}{2}$, }} {{c4::a^2}} $:=$ {{c2::$\frac{4q-p^2}{4}$}}, {{c5::$p^2-4q<0.$
}}

Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int {{c4::\frac{1}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt \quad ({{c5::k>1, a\neq 0}})$$

$$I_k = {{c3::\frac{1}{2(k-1)a^2}}} \cdot \left({{c1::(2k-3)I_{k-1}}} + {{c2::\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}}}\right)$$

Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int {{c2::\frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt = {{c1::\frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}}} + C$$

Лекция 07.03.22

Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$}} наызвается {{c2::первообразной функции f,}} если {{c1::F дифференцируема на $\langle A, B \rangle$ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

{{c1::Множество всех первообразных функции f на промежутке $\langle A, B \rangle$}} обозначается {{c2::$\mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$.}}

Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deaec

Пусть {{c4::$f, F, G : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$.}} Тогда

{{c2::$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1::$\exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c$.}}

Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

$$(F - G)' \equiv 0 \implies F - G = const.$$

Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle) \impliedby \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

> Тривиально следует из определения первообразной.

Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcddd45

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle)$.}} {{c1::Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

}} называется {{c2::неопределённым интегралом f на $\langle A, B \rangle$.}}

Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть {{c3::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Неопределённый интеграл функции f на $\langle A, B \rangle$}} обозначается {{c2::

$$\int f(x)\,dx.$$

}}

Note 8

7581f732c1c44de4bc99eae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ?$$

> Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } f(x). \text{}}}$$

Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fbea7ff

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B \rangle), G \in \mathscr{P}_g(\langle A, B \rangle)$.

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } \Big\{F(x) + H(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\Big\}. \text{}}}$$

Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \int f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\Big\{\lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\Big\}.\text{\}\}}$$

Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из {{c3::теоремы Дарбу}} следует, что если {{c2::f имеет первообразную на промежутке $\langle A, B \rangle$,}} то {{c1::f не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$}}

Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции f на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

> Нет, поскольку f может иметь точки разрыва второго рода.

Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

«Достаточное условие существования первообразной»

{{c1::Если f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.}}

Лекция 11.03.22

Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть {{c3::$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : E \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::первообразной f на множестве E,}} если {{c1::F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.}}

Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл $\int f(x)dx$ называется {{c2::берущимся,}} если {{c1::функция f имеет элементарную первообразную.}}

Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ имеют на $\langle A, B\rangle$ первообразную. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \text{{{c1::}}}\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.\text{}}}$$

Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 5

26b34c9a101f488aaed5ddee4ddd43d2

«{{c3::Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle C, D\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle A, B\rangle$ и обратима.}} Тогда если {{c1::G — первообразная функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$,}} то

$${{c2::} \int f(x)\,dx {}} = {{c1::} G(\varphi^{-1}(x)) + C. {}}$$

Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

«{{c3::Формула интегрирования по частям}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C^1\langle A, B\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

}}

Note 9

e2df459e1699495f980cdddacc633f6f

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для неопределённого интеграла?

> $$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx.$$

Лекция 18.03.22

Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет {{c1::элементарную первообразную.}}

Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a:b]\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::[a,b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть {{c3::$[a,b]$ – невырожденный отрезок.}} {{c1::Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^{n}: \quad a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

}} называется {{c2::разбиением отрезка $[a,b]$.}}

Note 4

e301682aa933430591e748e6973a1843

Пусть $[a,b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех разбиений отрезка $[a,b]$}} обозначается {{c2::$T[a,b]$.}}

Note 5

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

Note 6

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c1::
Величина

$$\max\{\Delta x_k\}$$

}} называется {{c2::рангом разбиения τ.}}

Note 7

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c2::
Ранг разбиения τ}} обозначается {{c1::λ_τ.}}

Note 8

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. {{c1:: Набор точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ таких, что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$}} называется {{c2::оснащением разбиения τ.}}

Note 9

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть {{c3::τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, ξ — оснащение разбиения τ.}} Тогда {{c1::пара (τ, ξ)}} называется {{c2::оснащённым разбиением отрезка $[a, b]$.}}

Note 10

974eeb7d70c24d318e71abd3d9a95f3f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех оснащённых разбиений отрезка $[a, b]$}} обозначается {{c2::$T'[a, b]$.
}}

Note 11

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (\tau, \xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — оснащённое разбиение $[a, b]$.}} {{c1::Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

}} называется {{c2::интегральной суммой функции f, отвечающей оснащённому разбиению (τ, ξ).}}

Note 12

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют {{c1::суммами Римана.
}}

Note 13

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

{{c2::Интегральная сумма функции f, отвечающая оснащённому разбиению (τ, ξ),}} обозначается как {{c1::

$$\sigma_\tau(f, \xi).$$

}}

Note 14

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$.}} Число I называют {{c2::пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю,}} если {{c1::

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \qquad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где (τ, ξ) — оснащённое разбиение отрезка $[a, b]$.}}

(определение в терминах (ε, δ))

Note 15

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

{{c2::Предел интегральных сумм функции f при ранге разбиения стремящемся к нулю}} обозначается {{c1::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

}}

Note 16

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если {{c1::для любой последовательности оснащённых разбиений $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что $\lambda_{\tau_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

Семинар 17.03.22

Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx + N)\sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и раскрыть скобки.

Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

> Представить ответ в виде
>
> $$Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx,$$
>
> продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в $Q_{n-1}(x)$ и λ из полученного соотношения.

Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int \text{\{\{c2::}\frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}}\text{\}\}} dx = \text{\{\{c1::} \ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right| \text{\}\}} + C.$$

Note 5

9b1156318f464dc79a658d6e94fe214d

$$\int {{c3::\frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}}}\,dx = {{c1::\arcsin\frac{2x-p}{2a}}} + C,$$

где $a := {{c2::\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}}}$.

Лекция 21.03.22

Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} f называется {{c2::интегрируемой по Риману на $[a, b]$,}} если {{c1::существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$.}}

Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$.}} Тогда {{c2::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$$

}} называется {{c1::определённым интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.}}

Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

{{c2::Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$}} обозначается {{c1::

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

}}

Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::числа a, b}} называют {{c1::пределами интегрирования.}}

Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::функцию f}} называют {{c1::подынтегральной функцией.}}

Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех функций интегрируемых по Риману на $[a, b]$}} обозначается {{c2::$\mathcal{R}[a, b]$.}}

Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbcb60

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau \in T[a, b]$. {{c1::Верхняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$S_\tau(f).$$

}}

Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 10

2bbefff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau \in T[a, b]$. {{c1::Нижняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$s_\tau(f).$$

}}

Note 11

189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена сверху}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $S_\tau(f)$ конечна.}}

Note 12

083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена снизу}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $s_\tau(f)$ конечна.}}

Note 13

1c8af1c02f864877bddd4971a256a30e

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $S_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

$$S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 14

7958d85410954f6280755a33f7bff6fb

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $s_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

$$s_\tau(f) = \inf \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 15

53ffcba153934fda879e5241f8e85387

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как, в общих чертах, доказать, что $S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$?

> Представить $\{\sigma_\tau(f,\xi) \mid \forall\xi\}$ как сумму множеств
>
> $$\Delta x_k \cdot f([x_k, x_{k+1}]).$$

Note 16

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть {{c2::$f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \ \tau, \tilde{\tau}$ — два разбиения $[a,b],\ \ \tau \subset \tilde{\tau}$.}}
Тогда {{c1::

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leqslant S_\tau(f),$$
$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geqslant s_\tau(f).$$

}}

Лекция 25.03.22

Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Как связаны $s_{\tau_1}(f)$ и $S_{\tau_2}(f)$ для произвольных разбиений τ_1, τ_2 отрезка $[a, b]$?

> $$s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$$

Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

> Да. $s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$ для любых τ_1, τ_2

Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

> Для $\tau_1 = \tau_2$ утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

> Да. Например, функция Дирихле.

Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

> Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

Note 6

c6120328fd3e40a48f6d7e69fce29c9d

Как показать, что любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём?

> Если допустить, что f не ограниченна, то $\forall\tau$ имеем $S_\tau(f) = \sup\{\sigma_\tau(f,\xi)\} = +\infty$, а значит
>
> $$\nexists \lim_{\lambda_\tau\to 0} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Note 7

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\inf\{S_\tau(f) \mid \forall\tau\}$$

}} называется {{c2::верхним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 8

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Верхний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I^*.}}

Note 9

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\sup\{s_\tau(f) \mid \forall\tau\}$$

}} называется {{c2::нижним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 10

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Нижний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I_*.}}

Note 11

83287fd934bc4878a99a742db1668220

«{{c3::Критерий}} {{c2::интегрируемости функции}}»

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} Тогда {{c2::$f \in \mathcal{R}\,[a, b]$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda_t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

}}

Note 12

68b782b8c09040dfa994ede932b748bc

{{c2::$S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0$}} $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

{{c1:: $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.\end{gathered}$$ }}

(в терминах ε, δ)

Note 13

6a94745f7ac74ef7a5be1b0a6128e303

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (необходимость)?

> По определению sup и inf
>
> $$I - \varepsilon \leqslant s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leqslant I + \varepsilon.$$

Note 14

53f49c34063149d892ad1eb1015abebd

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (достаточность)?

> $$\begin{gathered} s_\tau(f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau(f), \\ s_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f, \xi) \leqslant S_\tau(f). \end{gathered}$$
>
> для любого оснащённого разбиения (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

Note 15

f200bb84909d45898f1313f053135d3a

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Как соотносятся I^*, I_* и $\int_a^b f$?

> $$I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Note 16

1e7ec80a8e8f4caf87b70493394d837a

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Как для произвольного разбиения τ соотносятся $s_\tau(f)$, $S_\tau(f)$ и $\int_a^b f$?

> $$s_\tau(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau(f).$$

Note 17

c1ca9a97a9a948e685e22801cc7e1ee5

Если $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f) = \text{\{\{c1::}\int_a^b f.\text{\}\}}$$

Note 18

6a890ec9b5384ed2944133d968407712

Как показать, что

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f) = \int_a^b f?$$

> Тривиально следует из критерия интегрируемости и неравенства
> $$s_\tau(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau(f).$$

Note 19

1a704d6d276749bdaa56a88c05622b02

Если $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau(f) = \text{\{\{c1::}\int_a^b f.\text{\}\}}$$

Note 20

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть {{c3::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Величина

$$\sup\left\{f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D\right\}$$

}} называется {{c2::колебанием функции f на множестве D.}}

Note 21

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. {{c1::Колебание функции f на множестве D}} обозначается {{c2::$\omega(f)$.}}

Note 22

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\omega(f)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \sup f(D) - \inf f(D).\text{\}\}}$$

(в терминах $\sup f$, $\inf f$)

Note 23

ec97e108f2394602934c87c2f28f2a39

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – разбиение $[a, b]$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\omega_k(f)\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]}).\text{\}\}}$$

Note 24

649783b3a0c14571bdbbb8caba0d07a3

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – разбиение $[a, b]$. Тогда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \text{\{\{c1::} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k.\text{\}\}}$$

(в терминах $\omega_k(f)$)

Note 25

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}I^*\text{\}\}}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 26

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2:: \lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau(f)\}\} = \{\{c1:: I_*\}\}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 27

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

{{c3::Критерий}} {{c4::Дарбу}} {{c2::интегрируемости функции}}

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::f ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$.}}

Note 28

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

{{c3::Критерий}} {{c4::Римана}} {{c2::интегрируемости функции}}

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.}}

Note 29

8ba2a0bdc9754111b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 30

da9a4e99c01a42a4a8c5bccf8e3d24f7

Как, в общих чертах, доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём?

Из теоремы Кантора получить равномерную непрерывность и по теореме Вейерштрасса оценить для $\lambda_\tau < \delta$ величину $\omega_k(f)$.

Note 31

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 32

7a4501cbb6414feaaf12589452716ae3

Как, в общих чертах, доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

> Для определённости $f \nearrow$. Для произвольного ε взять
>
> $$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$
>
> Далее по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

Семинар 24.03.22

Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегалы вида

$$\int {{c2::\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}}}\, dx$$

берутся с помощью {{c1::замены

$$t := \frac{1}{x-\alpha}.$$

}}

Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида {{c2::

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx,$$

где R — рациональная функция,}} берутся с помощью {{c1:: подстановок Эйлера.}}

Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

> 1. $a > 0$;
> 2. $c > 0$;
> 3. $ax^2 + bx + c$ приводим над $\mathbb{R}$.

Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого $ax^2 + bx + c$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1),$$

где x_1 — корень $ax^2 + bx + c$.

Note 7

5defd336f3aa4b4aa26b239431f04d17

$$\int \{\{c2::\sqrt{x^2 \pm a^2}\}\}\, dx = \{\{c1::\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\}\} + C$$

$$(a > 0)$$

Лекция 01.04.22

Note 1

60ff32d5ed7347ae8036518373a5bc61

Пусть {{c3::$f, \tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R},\;\; f \in \mathcal{R}[a,b],\;\; T \subset [a,b],\;\; |T| < \aleph_0$.}}
Если {{c1::

$$\forall x \in [a,b] \setminus T \quad f(x) = \tilde{f}(x),$$

}} то {{c2::$\tilde{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.}}

Note 2

9f281cfda3464766a189207f5029d7ed

В чем ключевая идея доказательства того, что изменение значений функции $f \in \mathcal{R}[a,b]$ в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

> $$\sigma(f) - \sigma(\tilde{f}) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Note 3

94c3dcad5bc247568a21704cb1d05f72

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}[\alpha,\beta].$$

}}

Note 4

385f602d08114dd39630009f76dbb7e0

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Тогда $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$.
В чем ключевая идея доказательства?

> Если $\tau_0 \in T[\alpha,\beta], \tau \in T[a,b], \tau_0 \subset \tau$, то
>
> $$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Note 5

ee426e669ae545b8ad6d128a5870373e

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$.}} Тогда если {{c1::

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c] \quad \wedge \quad f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b],$$

}} то {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$.}}

Note 6

c8c134e6d7c442c3a7214585d20c41ac

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Тогда если

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
В чем ключевая идея доказательства?

> $$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega(f) \cdot \lambda_\tau,$$
> $$\tau \in T[a, b], \quad \tau' = \tau \cup \{c\},$$
> $$\tau_1 = \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, a].$$

Note 7

ccba27d6a29c468f8a60fbd0f106fec4

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} Функция f называется {{c2::кусочно непрерывной,}} если {{c1::множество её точек разрыва пусто или конечно, и все её разрывы суть разрывы первого рода.
}}

Note 8

86f712cafa53498fa3b282915340635c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то {{c1::$f \in \mathcal{R}[a, b]$.}}

Note 9

78e23f5a381e4d01b4c4467b16955dcb

Как показать, что кусочно непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$?

> Показать, что она интегрируема на каждом из непрерывных «кусков».

Note 10

682bfc21e35a489ebc7df5514e1d4690

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Говорят, что {{c2::множество E имеет нулевую меру,}} если {{c1::для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε.}}

Note 11

3be97c537ee44236bfc5f8bae48390e3

«{{c3::Критерий}} {{c4::Лебега}} {{c2::интегрируемости функции}}»

Пусть {{c5::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.}} Тогда {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f ограничена на $[a,b]$ и множество точек разрыва f имеет нулевую меру.}}

Note 12

1b3f6df593ba44b6b9558ee83720dd7e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c1::f+g\}\},\ \{\{c1::fg,\}\}\ \{\{c1::\alpha f\}\},\ \{\{c1::\ |f|\ \}\} \in \mathcal{R}[a,b].$$

Note 13

275d09f8b4c9445992ecc4f02cd9f6ba

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::\inf_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0\}\} \implies \{\{c1::\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b].\}\}$$

Note 14

20347e63d70945cdbe073a675dbcb23a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Тривиально следует из определения предела интегральных сумм в терминах последовательностей.

Note 15

909d22f843c9421598278c307e29edb5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Дать верхнюю оценку для $\omega_k(f \cdot g)$ через $\omega_k(f), \omega_k(g)$ и верхние границы f и g.

Note 16

aad31d4599b94b8f8ee128bfbfec8251

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Частный случай произведения двух функций.

Note 17

76538508e5574126a26e4dbf06fe4160

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> $$|f| = f \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathcal{R}[a,b].$$

Note 18

dea0bdf999ae4306b554167c63eeb231

Как показать, что sgn интегрируем?

> Показать, что sng кусочно непрерывен.

Note 19

6bb4953a2e6d41fb86cf8a801779a97f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\inf_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b].$$

В чем основная идея доказательства?

> Представить $\frac{f}{g}$ как произведение функций $f \cdot \frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

Note 20

8dcb53c3642547a5bec77126b490908d

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\inf_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b].$$

В чем основная идея доказательства?

Оценить $\omega_k(1/f)$ сверху через $\omega_k(f)$ и $\inf\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Лекция 04.04.22

Note 1

40ffb14c933540e0a82a0f491c2ea946

Интегрируема ли функция Дирихле χ на произвольном невырожденном отрезке?

> Нет.

Note 2

488460418bc246fe90907796c4db58be

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, χ — функция Дирихле. Как показать, что $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$?

> $\omega(\chi|_{[\alpha,\beta]}) = 1$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Note 3

fdad8aea720d4949805e6d411e4d9cd0

Интегрируема ли функция Римана ψ на произвольном промежутке $[a, b]$?

> Да.

Note 4

c7099fd03a894c53b8c80146045e9127

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана.

$$\int_a^b \psi = \text{\{\{c1::}0.\text{\}\}}$$

Note 5

6350173ae50b44d8ac481bc4e58df52a

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. В чём ключевая идея доказательства того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Показать, что множество
>
> $$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \mid q \leqslant N \right\}$$
>
> конечно.

Note 6

83b18cc44cff41fc8f13f721bb95887f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается N в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Так, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Note 7

e897ef9db02f489f8f78e18c71f5ee40

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается δ в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> $$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}.$$

Note 8

aa4eaee1713d444292a6cdb20f5d2bed

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Какой критерий интегрируемости используется в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Критерий в терминах $S_\tau - s_\tau$.

Note 9

ac79fc72aeb440e9a666f8dc2433dcc8

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to [a, b]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}f \in C[a, b],\ g \in \mathcal{R}[c, d]\text{\}\}} \implies \text{\{\{c1::}f \circ g \in \mathcal{R}[c, d].\text{\}\}}$$

Note 10

bc11b9f7a4304f74b4bb3118d30cea22

Пусть {{c3::$a > b$, $f \in \mathcal{R}[b, a]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}\int_a^b f\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}-\int_b^a f.\text{\}\}}$$

Note 11

2be98235b82942f7bf08141dd983fe07

$$\int_a^a f \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::0.\}\}$$

Note 12

649acec0ca304bd5bc72134401215095

Пусть $f : [a, a] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, a] \overset{\text{def}}{\iff} \{\{c1::\top.\}\}$$

Note 13

cc427e206f4d435889e87acd827bc5b4

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b f\}\} = \{\{c1::\int_a^c f + \int_c^b f.\}\}$$

Note 14

f57dd9f306a5429bb89c68b128c0e01f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b \alpha f\}\} = \{\{c1::\alpha \int_a^b f.\}\}$$

Note 15

5aaf74ed1c3e414cb5b7c501e5970206

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b (f \pm g)\}\} = \{\{c1::\int_a^b f \pm \int_a^b g.\}\}$$

Note 16

d43171cbe636478098887433ff64ea61

Откуда следует линейность интеграла Римана?

▌ Из определения в терминах последовательностей.

Note 17

8db1f43273d041d6b3fbc674270d4f5b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \geqslant 0\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \geqslant 0.\}\}$$

Note 18

9778c1f4a58e4df9a9a25064935a647f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \leqslant g\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.\}\}$$

Note 19

9ba16cbdf8fb4b65bd032cb56c483a1b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2:: \left|\int_a^b f\right|\}\}\{\{c1:: \leqslant \int_a^b |f|\,.\}\}$$

Note 20

275d3bae3cfa48e9882d2d2a90ed21b8

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2:: |f| \leqslant M \in \mathbb{R}\}\} \implies \{\{c1:: \left|\int_a^b f\right| \leqslant M(b-a).\}\}$$

Note 21

84dfee5723b34bec8f05c42879c3e85f

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \geqslant 0\}\} \wedge \int_a^b f = 0 \implies \{\{c1::f \equiv 0.\}\}$$

Note 22

2f438df6b5304cd7acbd273214875635

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$f \geqslant 0 \land \int_a^b f = 0 \implies f \equiv 0.$$

В чем основная идея доказательства?

> От противного; допустить, что $\exists x_0 : f(x_0) > 0$ и использовать то, что $\exists \delta : f|_{V_\delta(x_0)} > \frac{f(x_0)}{2}$.

Note 23

03b2fb7149444b2db71b150b49f267a9

«{{c4::**Теорема Барроу**}}»

Пусть {{c3::$f \in \mathcal{R}[a, b]$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$,}}

$$\varphi(x) = \text{{{c2::}} \int_a^x f. \text{}}}$$

Тогда {{c1::φ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.}}

Note 24

2255bf6318be43ee834d6071ed740c89

В чем основная идея доказательства теоремы Барроу?

> Оценить разность $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ и получить дифференцируемость φ по определению.

Note 25

ec57d94464cc4ecf8920954c5d4cbf76

Как в доказательстве теоремы Барроу непосредственно используется непрерывность f?

> Для представления $f(x)$ как $f(x_0) + \Delta x$, где $\Delta x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Note 26

d26fa11d0b1e4d83bb4f4b224b9359a4

Почему в доказательстве теоремы Барроу

$$\Delta x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0?$$

$$\Delta x = f(x) - f(x_0) \to 0.$$

Note 27

cdc6a92b44fd4d488ca3b30c5e2b4232

В доказательстве теоремы Барроу

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \text{\{\{c1::} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx.\text{\}\}}$$

Note 28

c5dc36411f3a45598a70c9522a651022

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx = \text{\{\{c1::} f(x_0)h.\text{\}\}}$$

Note 29

1cea51f7fd9b4b438856a6ec7f4c1a48

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x\,dx = \text{\{\{c1::} o(h).\text{\}\}}$$

Note 30

455761e28fe94191b0bebcfa38fc5b89

Откуда в доказательстве теоремы Барроу следует, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x\,dx = o(h)?$$

$$\Delta x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \overset{\text{def}}{\iff} \ldots\ |\Delta x| < \varepsilon.$$

Note 31

1109a435ae7543cf8263f72942677e95

«{{c3::Первая теорема о среднем интегрального исчисления}}»

Пусть {{c2::$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \geqslant 0$ (или $g \leqslant 0$), $m \leqslant f \leqslant M$.}} Тогда

{{c1::

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

}}

Note 32

2e6a92e370ed4445a1cd67bd8d0241f9

В чем основная идея доказательства первой теоремы о среднем интегрального исчисления?

> Проинтегрировать все части неравенства
>
> $$mg \leqslant fg \leqslant Mg \quad (\text{для } g \geqslant 0).$$

Note 33

bede3b8a7d14462fbd5fcb32d222eb2d

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g = 0$)?

> μ — произвольное значение из $[m, M]$.

Note 34

9137b877b68a4313b09fc0b2e748f6a4

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g \neq 0$)?

> $$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Лекция 08.04.22

Note 1

156407f3795145ac967eccf82e541fe0

Пусть {{c2::$f \in C[a,b]$, $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \geqslant 0$ (или $g \leqslant 0$).}} Тогда {{c1::

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 2

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть {{c2::$f \in R[a,b]$, $m \leqslant f \leqslant M$.}} Тогда {{c1::

$$\exists \mu \in [m,M] \quad \int_a^b f = \mu(b-a)$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 3

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть {{c2::$f \in C[a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f = f(c) \cdot (b-a)$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 4

df108f6ef527491996f1a2b6672c17fc

«{{c3::Формула Ньютона-Лейбница}}»

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $F \in \mathscr{P}_f([a,b])$.}} Тогда {{c1::

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

}}

Note 5

bddc676c2daa42f0b218c91eac244ace

В чем основная идея доказательства формулы Ньютона-Лейбница?

> Выбрать нужное оснащение используя формулу конечных приращений.

Note 6

882e212c55614bb78548d3b6b7f2fbf2

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::разность

$$f(b) - f(a)$$

}} называется {{c2::двойной подстановкой функции f на $[a, b]$.
}}

Note 7

b7e1b154b8de47bfbc3d2afdf73ef75c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Двойная постановка функции f на $[a, b]$}} обозначается {{c2::

$$f\Big|_a^b,\ f(x)\Big|_a^b,\ f(x)\Big|_{x=a}^b$$

}}

Note 8

df6dee2f53354eb8ae50cd3a673878a0

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $[a, b]$, $f' \in \mathcal{R}[a, b]$.
}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \int_a^b f' \text{}}} = \text{{{c1::}} f\Big|_a^b . \text{}}}$$

Note 9

1146663e8ded4d63ba85b1b1ed35cb14

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, F — первообразная f за исключением конечного числа точек. Тогда {{c1::

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

}}

(обобщение формулы Ньютона-Лейбница)

Note 10

496225bfd55a484fa6f61e7174af39f4

В чём основная идея доказательства обобщения формулы Ньютона-Лейбница для $F \in \mathscr{P}_f([a, b] \setminus T),\ |T| < \aleph_0$.

> Разбить $[a, b]$ на отрезки, во всех внутренних точках которых $F' = f$.

Note 11

6abc693b3b104008b356cbca06692bdd

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, $F'|_{(a,b)} = f|_{(a,b)}$. Как показать, что $\int_a^b f = F\big|_a^b$?

> $$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f.$$

Note 12

a8b4457947d3495c9b5fca5d72fdae28

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f?$$

> Показать, что их разность стремится к нулю.

Note 13

8b853a07bfa94f17a0a6e43bd75e8226

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^{a+\varepsilon} f \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0?$$

> $$m\varepsilon \leqslant \int_a^{a+\varepsilon} f \leqslant M\varepsilon.$$

Note 14

6e131dfc6d004e86a827f88367981953

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Какова, в общем случае, зависимость между интегрируемостью f и существованием у неё первообразной?

В общем случае прямой зависимости нет.

Note 15

dcb24ef22e6c4921924ad580a30722c6

«{{c3::Интегрирование по частям для определённого интеграла}}»

Пусть {{c2::f, g дифференцируемы на $[a,b]$, $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

}}

Note 16

a938ca4e00ae4fffaf1db99f384e1785

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для определённого интеграла?

$$(fg)' = fg' + f'g \in \mathcal{R}[a,b],$$
$$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b.$$

Note 17

46828f8f846b4de1a73aed39d5b9d7a0

«{{c3::Замена переменной в определённом интеграле}}»

Пусть {{c2::$\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, φ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, $f \in C[a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

}}

Note 18

7d8af4366130490fbb87408d659837e7

В чем основная идея доказательства теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

> Если $F \in \mathscr{P}_f([a,b])$, то $F \circ \varphi$ — первообразная функции
> $$(f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Note 19

b6aa7eee0f404285b693fb392e8ea744

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[-a,a]$, f — чётна.}} Тогда

$$\int_{-a}^{a} f = \text{{{c1::}}} 2 \int_{0}^{a} f. \text{}}}$$

Note 20

53ccd4a61cc742818562b58b9bdce5b4

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[-a,a]$, f — нечётна.}} Тогда

$$\int_{-a}^{a} f = \text{{{c1::}}} 0. \text{}}}$$

Семинар 31.03.22

Note 1

f6c10d5634604b8785e6d50a3b4179bb

Пусть {{c3::$y = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}(x) \setminus \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$.}} Тогда интеграл вида

$$\int {{c2::R(x, y^{p_1}, y^{p_2}, \ldots, y^{p_n})}}\, dx$$

берётся заменой {{c1::$t^N = y$, где N — общий знаменатель дробей $p_1, \ldots, p_n$.}}

Note 2

f28ac103f505434d9a7caa2eb9756579

{{c2::Дифференциальным биномом}} называется {{c1::дифференциал вида

$$x^m(a + bx^n)^p\, dx,$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

}}

Note 3

6d980687cd794cb2b67482197892cb24

Каковы условия для применения каждой из подстановок применяемых для взятия интеграла от дифференциального бинома?

> $$p \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$$

Note 4

be2650fc8a6c4b88b1f39cd872a556b1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $p \in \mathbb{Z}$)?

> $t^N = x$, где N — общий знаменатель m и n.

Note 5

bcc008ea2e804fcc8d3df70bfe88cdc1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$)?

> $t^k = a + bx^n$, где k — знаменатель p.

Note 6

90e931c9722e44219fe1e08170da8e53

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$)?

> $t^k = ax^{-n} + b$, где k — знаменатель p.

Лекция 23.04.22 (1)

Note 1

57c65a69d4ce4beca2a4ef3d19482330

Пусть {{c3::$n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{n+1}\langle A, B\rangle$, $a, x \in \langle A, B\rangle$.}} Тогда

$$\{\{c2::R_{a,n}f(x)\}\} = \{\{c1::\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.\}\}$$

(в интегральной форме)

Note 2

0a72287655664b3e99f6388731f26bfe

Какой метод доказательства используется в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме?

> Индукция по n.

Note 3

82254691571e452294750327ef22eb89

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (базовый случай)?

> При $n = 0$ получаем формулу Ньютона-Лейбница.

Note 4

4a33a11f8ade46f08ce296db479a9007

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (индукционный переход)?

> Применить к остатку формулу интегрирования по частям.

Note 5

aad636315afd4ee5a6744160d4b3e42d

{{c2::Интегральную форму}} остатка $R_{a,n}f(x)$ иногда называют {{c1::формой Якоби.}}

Note 6

397b0796dce04587adb64efce1dd1140

$$0!! \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::1.\}\}$$

Note 7

cac7fe0bc23d40a59bc9dd6812577d01

$$(-1)!! \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} 1. \text{}}}$$

Note 8

7da7dd0bd19944abbe2d01d155086010

«{{c2::**Формула Валлиса**}}»

{{c1::

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

}}

Note 9

f54929de1ece44289c241d6590700ab5

В чём основная идея доказательства формулы Валлиса?

> Проинтегрировать на $[0, \frac{\pi}{2}]$ неравенство
>
> $$\sin^{2n+1} \leqslant \sin^{2n} \leqslant \sin^{2n-1}.$$

Note 10

b5c778232bc94244b23a8e4a617ed0e6

Пусть {{c3::$m \in \mathbb{Z}_+$.}}

$$\text{{{c2::}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx \text{}}} = \text{{{c1::}} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m \text{ чётно}, \\ 1, & m \text{ нечётно}. \end{cases} \text{}}}$$

Note 11

715b1cec8b8041949185220e4e40a41b

В чём основная идея в доказательстве явной формулы для

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx?$$

> Индукция по m и формула интегрирования по частям.

Note 12

38d390969b2741acbfc82267d2fe35fd

«{{c5::Вторая теорема о среднем интегрального исчисления}}»

Пусть {{c4::$f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, g монотонна на $[a,b]$.}} Тогда

{{c3::$\exists c \in [a,b]$}} {{c2::$\displaystyle\int_a^b fg$}} $=$ {{c1::$\displaystyle g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f.$}}

Note 13

69afab3fc5004157a7f35af02f3e3d12

{{c2::Вторую теорему о среднем интегрального исчисления}} так же называют {{c1::теоремой Бонне.}}

Note 14

f0f631536a7f4b96b0398f89ecaf9118

Каков первый шаг в доказательстве теоремы Бонне?

> Представить $\int_a^b fg$ как $\int_a^b F'g$, где $F(x) \coloneqq \int_a^x f$.

Note 15

2166048a6ca44d23af43256399b234c9

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b F'g$ в доказательстве теоремы Бонне?

> Интегрирование по частям.

Note 16

3029dc6c343e4d1c9888bf539fba3503

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b Fg'$? в доказательстве теоремы Бонне?

> Первая теорема о среднем.

Note 17

441ce64036224c3ebf472a05f4829979

Почему в доказательстве теоремы Бонне мы можем применить первую теорему о среднем к интегралу $\int_a^b Fg'$?

> По следствию из теоремы Дарбу g' не меняет знак на $[a, b]$.

Note 18

882ef3d613b947198a7bea4ad32d5160

Теорема Бонне {{c2::так же будет выполняться,}} если ослабить предположение до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}[a, b],\ \ g \text{ монотонна.}$$

}}

(без доказательства)

Лекция 23.04.22 (2)

Note 1

8b2c86d7991e4a2b91921581b1ef4490

«{{c4::**Неравенство Йенсена для интеграла**}}»

Пусть {{c3::$f \in C\langle A, B\rangle, \varphi, \lambda \in C[a,b], \varphi : [a,b] \to \langle A, B\rangle, \lambda \geqslant 0$.
}} Тогда {{c2::если f выпукла на $\langle A, B\rangle$ и $\int_a^b \lambda = 1$,}} то {{c1::

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi).$$

}}

Note 2

b1fef24356cb40989e268892f941d2bc

Какие два случая рассматриваются в доказательстве неравенства Йенсена для интеграла?

> $$1.\ \varphi = const, \quad 2.\ \varphi \neq const.$$

Note 3

0135fda5379a4582960532ada8cb52a9

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi = const$)?

> Доказываемое неравенство тривиальным образом обращается в равенство.

Note 4

77790770b54541099c9e486f28074f26

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$)?

> $\int_a^b \lambda\varphi \in (A, B)$, а значит f имеет в этой точке опорную прямую.

Note 5

402dc5f48e084c56acdbac1d8691cd46

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$) показать, что $\int_a^b \lambda\varphi \in (A, B)$?

> $$\int_a^b \lambda\varphi \in (\inf \varphi, \sup \varphi) \subset [A, B].$$

Note 6

69bcf26030d34b71839c245e2f0b80ca

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$) показать, что $\int_a^b \lambda\varphi \neq \sup \varphi$?

> От противного.

Note 7

3584b635c4dc44e7b9b1624c4019860f

Если в неравенстве Йенсена для интеграла {{c2::$\varphi \neq const$, а f строго выпукла,}} то {{c1::имеет место строгое неравенство.}}

Note 8

83892edbede849aeb7d89f4abc718e41

Пусть {{c3::$p, q \in (1, +\infty)$.}} {{c1::Числа p и q}} называются {{c2::сопряжёнными показателями,}} если {{c1::

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

}}

Note 9

40347c04583b4c95b7cac9a0158ee490

«{{c3::**Неравенство Гёльдера для сумм**}}»

Пусть {{c4::$\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$,}} {{c2::$p$ и q — сопряжённые показатели.}} Тогда {{c1::

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

}}

Note 10

97e460d86c3c4db6b2267d79218280cd

«{{c3::Неравенство Гёльдера для интегралов}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a,b]$,}} {{c4::p и q — сопряжённые показатели.}} Тогда {{c1::

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

}}

Note 11

fc914f6a007e42fc8512d6d3d277c03d

В чём основная идея в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

> Применить неравенство Гёльдера для сумм к интегральным суммам.

Note 12

e3416ff410fb47098739b40e48782ab7

Как представляется Δx_k в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

> $$\Delta x_k = (\Delta x_k)^{\frac{1}{p}} \cdot (\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}.$$

Note 13

89fc34798a62448d9c6bd5173c1ac247

«{{c3::Неравенство Коши-Буняковского для интегралов}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

}}

Note 14

72d317fe9af54aa4b717962551ba6ea0

«{{c3::**Неравенство Минковского для сумм**}}»

Пусть {{c2::$\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$,}} {{c4::$p \in (1, +\infty)$.}} Тогда {{c1::

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 15

19e57ef490ac48889603d288b4d8edd5

«{{c3::**Неравенство Минковского для интегралов**}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a, b]$,}} {{c4::$p \geqslant 1$.}} Тогда {{c1::

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 16

e0ef8b3744ed4d93a9138b1d967a1792

В чём основная идея доказательства неравенства Минковского для интегралов?

> Применить неравенство Минковского для сумм к интегральным суммам.

Note 17

000b6517531b4ecc9a052a60b3a741a4

Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется {{c2::локально интегрируемой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall [a, b] \subset \langle A, B\rangle \quad f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a, b].$$

}}

Note 18

6b661945d0ee47a7a04ba92793c704f2

{{c1::Множество функций, локально интегрируемых на $\langle A, B\rangle$, }} обозначается {{c2::$\mathcal{R}_{loc}(\langle A, B\rangle)$ или $\mathcal{R}_{loc}\langle A, B\rangle$.}}

Note 19

435bbbcd954b4c8bb3be63c6b63acc2a

Пусть {{c3::$-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$.}}

$$\{\{c2:: \int_a^{\to b} f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.\}\}$$

Note 20

51919a133fa34a6b8ed5ed7ad5b76bac

Пусть {{c3::$-\infty \leqslant a < b < +\infty$, $f \in \mathcal{R}_{loc}(a, b]$.}}

$$\{\{c2:: \int_{\to a}^{b} f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.\}\}$$

Note 21

27d9a13709de4fa5ab8baff3cd9fbaa0

Выражение

$$\int_a^{\to b} f$$

называют {{c1::несобственным интегралом f по промежутку $[a, b)$.}}

Note 22

bb25f0567eef47e7b707c500e9674f65

Выражение

$$\int_{\to a}^{b} f$$

называют {{c1::несобственным интегралом f по промежутку $(a, b]$.}}

Note 23

f741cd46bba044cfa110acd5e82b1af1

Несобственный интеграл называют {{c2::сходящимся,}} если {{c1::он определён и конечен.}}

Note 24

db034e9065e54430baecac9bfd0a644f

Несобственный интеграл называют {{c2::расходящимся,}} если {{c1::он имеет бесконечное значение или не существует.}}

Note 25

b0514d3cbba648c8a6e3b58d057869cd

Пусть {{c2:: $f \in \mathcal{R}[a, b]$.}} Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \text{{{c1::}} \int_a^b f.\text{}}}$$

Note 26

c8d35c7d4dfa4a8ab001d84f09a382bd

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$?

> Непосредственно следует из непрерывности функции $x \mapsto \int_a^x f$ (теорема Барроу).

Note 27

ad8461ebb11542bead198798c15c6a91

Пусть {{c3:: $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \int_a^{\to b} f \text{}}} = \text{{{c1::}} \int_a^c f + \int_c^{\to b} f.\text{}}}$$

Note 28

4873742f993743639632296fcb9c3fda

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\text{{{c2::}} \int_a^{\to b} f \text{ сходится}\text{}}} \text{ {{c3::}} \iff \text{}}} \text{ {{c1::}} \int_c^{\to b} f \text{ сходится.}\text{}}}$$

Note 29

7f5c166670d24acc8348a74343d875cc

Пусть {{c3:: $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $A \in (a, b)$.}} {{c1::Несобственный интеграл $\int_A^{\to b}$}} называется {{c2::остатком интеграла $\int_a^{\to b} f$.}}

Note 30

3e68bd52c99f47b59cb0f6c550c12420

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\text{{{c2::}} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}\text{}}{{c3::}} \implies \text{}}{{c1::}} \int_A^{\to b} f \xrightarrow[A \to b^-]{} 0.\text{}}}$$

Note 31

6f388abbe0394963abf8ebd7c8090616

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Как показать, что

$$\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \implies \int_A^{\to b} f \xrightarrow[A \to b^-]{} 0?$$

> Представить $\int_A^{\to b} f$ как $\int_a^{\to b} - \int_a^A f$.

Note 32

eed850367bd24674b9fa0cdbd5af00f5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)\}\} = \{\{c1::\alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g.\}\}$$

Note 33

1dcd21125ff841338d9ddad83b33302d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) \text{ сходится}\}\} \ \{\{c3:: \iff \}\} \ \{\{c1::\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g \text{ сходятся.}\}\}$$

Note 34

5ca16eceb7f145959f15bd1feb33442e

«{{c3::Замена переменной в несобственном интеграле }}»

Пусть {{c2::$\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ монотонна, $f \in C[\varphi(\alpha), \varphi(\beta^-))$.}} Тогда {{c1::

$$\int_\alpha^{\to \beta} (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to \varphi(\beta^-)} f.$$

}}

Note 35

e96879968f0f4e3f8bcf844f10abfcc0

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$.

$$\{\{c2::f\Big|_a^{\to b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f(b^-) - f(a).\}\}$$

Note 36

a4c1c50607984cd88be2763ea1bce888

Пусть $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\text{\{\{c2::}f\Big|_{\to a}^{b}\text{\}\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}f(b) - f(a^+).\text{\}\}}$$

Note 37

ceae3033619d408da982f6affab84e5b

Пусть {{c3::$f, g \in C^1[a, b)$ и $\exists \lim\limits_{x \to b^-} (f \cdot g)(x)$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} fg' \text{\}\}} = \text{\{\{c1::} fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g. \text{\}\}}$$

Семинар 21.04.22

Note 1

c06a4a56c952416593e6c6aa940af048

Основное тригонометрическое тождество для гиперболических функций: {{c1::

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

}}

Note 2

e38aaa87d3a54ae0aa44b08a84229224

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::подстановкой $a \sin t = x$}} для $t \in$ {{c3::$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$}}.

Note 3

9c734267d24143218a9ed85452b8fb67

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::заменой $a \operatorname{sh} t = x$}} для $t \in$ {{c3::$\mathbb{R}$}}.

Note 4

8c5f51e8a73d4e3fbf734d43dd62b423

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::заменой $a \operatorname{ch} t = x$}} для $t \in$ {{c3::$\mathbb{R}_+$}}.

Note 5

56604ede765d4039b4eba27776ff61d0

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(\sin x, \cos x)\text{\}\}}\, dx$$

берутся заменой {{c1::$t = \tan \frac{x}{2}$.}}

Note 6

a709df92e9fe4310a7c2687c5de50054

{{c2::Подстановку $t = \tan\frac{x}{2}$}} называют {{c1::универсальной тригонометрической подстановкой.}}

Note 7

a6d2e564dd8246af81224496b8f276b0

При взятии интегралов с помощью универсальной тригонометрической подстановки для определённости полагают, что {{c1::$x \in (-\pi, \pi)$.}}

Note 8

4baa637b1c464ab9b9b94bf7ef71fcc8

Как $\sin x$ выражается через $t = \tan\frac{x}{2}$?

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Note 9

3cee332cac3a4eee9f02834f87c159ea

Как $\cos x$ выражается через $t = \tan\frac{x}{2}$?

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Note 10

dd942a562634467e97ec85771a1d7a27

Каковы условия для частных случаев при взятии интеграла

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx?$$

1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Note 11

ff62f0455f5449e6a2187727fb759f0d

Если {{c2::$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \cos x$.}}

Note 12

05898276b49140939ed972fa0dd24b19

Если {{c2::$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \sin x$.}}

Note 13

6d9149e716954e3694079d557eb41976

Если {{c2::$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \tan x$.}}

Note 14

ac6a5109ec254fdfbe4146361aef5293

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::} \sin^m x \cdot \cos^m x \text{\}\}}\, dx, \quad n, m \in \mathbb{Q}$$

берутся {{c1::заменой $t = \sin x$}}

Лекция 30.04.22 (1)

Note 1

c145ba4d6dca4a06a50cec14e1551b20

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$,{{c4::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится}} {{c3:: $\iff$ }} функция {{c1::$x \mapsto \int_a^x f$}} ограничена сверху на $[a,b)$.

Note 2

0be99a47ac0e428faad6ea9879f39822

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f \geqslant 0$. Тогда $\int_a^{\to b} f$ сходится $\iff$ функция $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена сверху на $[a,b)$. В чём основная идея доказательства?

> $\int_a^x f \nearrow$ и теорема о пределе монотонной функции.

Note 3

e94553827bfa462995cb7abf3f169453

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c2::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f$ либо {{c1::сходится, }} либо {{c1::расходится к $+\infty$.}}

Note 4

2613f68b7e7b444ea053850e9887a1e8

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c2::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f =$ {{c1:: $\sup\limits_{x \in [a,b)} \int_a^x f$}}.

Note 5

05b94ccacfa246db99eb2dcbfc408f2a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f, g \geqslant 0$,}}

$$f(x) = \text{{{c4::}} } O(g(x)), \quad x \to b^-. \text{}}}$$

Тогда {{c1:: $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}$}}{{c3:: $\Longleftarrow$ }}{{c2:: $\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$}}

Note 6

635015d74b6c4594817b074aa5417e29

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f, g \geqslant 0$,}}

$$f(x) = \text{{{c4::}} } O(g(x)), \quad x \to b^-. \text{}}}$$

Тогда {{c2:: $\int_a^{\to b} f \notin \mathbb{R}$}}{{c3:: $\Longrightarrow$ }}{{c1:: $\int_a^{\to b} g \notin \mathbb{R}$}}

Note 7

95f69b2a23484af79ddfafb4fda8cf09

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f, g \geqslant 0$,

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b^-.$$

Тогда, если $\int_a^{\to b} g$ сходится, то и $\int_a^{\to b} f$ сходится.
В чём основная идея доказательства?

> Из определения O-большого сравнить остатки $\int_\varepsilon^{\to b} f$ и $\int_\varepsilon^{\to b} g$.

Note 8

88104faac5ad425e8ad1e9d194e82fcf

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, {{c5::$f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4::$\dfrac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$.
}} Тогда

$$\text{\{\{c1::} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \text{\}\}\{\{c2::} \Longleftarrow \text{\}\}\{\{c3::} \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}. \text{\}\}}$$

Note 9

1c33032b82c74c258d783b6f03d0ec39

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geqslant 0$, $g > 0$ и $\dfrac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

> $\dfrac{f}{g}$ ограничена в окрестности $b \implies f(x) = O(g(x))$.

Note 10

cec6bac50bc74bf1b743dc23079418dc

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, {{c5::$f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4::$\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$.
}} Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \text{\}\}\{\{c3::} \implies \text{\}\}\{\{c1::} \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}. \text{\}\}}$$

Note 11

156267ccd8034eca99dbb3d574fbf25e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f \geqslant 0$, $g > 0$ и $\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

> Поменять местами f и g, рассмотрев $\dfrac{g}{f}(b^-) \in [0, +\infty)$.

Note 12

1139c594c8b941fc9a945b4ca914a566

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5:: $f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4:: $\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty)$.
}} Тогда

{{c2:: $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1:: $\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$.}}

Note 13

1588fad5b7a94fb7a874e07813b56e6a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5:: $f, g \geqslant 0$,}} {{c4::

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to b^-.$$

}} Тогда {{c2:: $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1:: $\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$}}.

Note 14

3804d89199d040dea2d1a4ab5975760d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f, g \geqslant 0$,

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to b^-.$$

Тогда $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$.
В чём основная идея доказательства?

> Показать, что f и g ограничены по сравнению друг с другом.

Note 15

03152527c42d4e8bb83dd25771b6c907

Пусть $f \in C[a, +\infty),\ f \geqslant 0$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R}_{\{\{c1::}\ \not\Longrightarrow\ _{\}\}} f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Note 16

3b29658e766c4cd28321fc274785321b

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

необходимым условием для сходимости $\int_a^{+\infty} f$?

> Да, является.

Note 17

d8d5ca8f054b4f198c844c2fa4947b52

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

достаточным условием для сходимости $\int_a^{+\infty} f$?

> Нет, она является только необходимым условием.

Note 18

0293c1fbae2c45939b37aee500e2e937

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Интеграл $\int_a^{\to b} f$ называют {{c2::сходящимся абсолютно,}} если {{c1::$\int_a^{\to b} |f|$ сходится.}}

Note 19

9f03ada404444f7b806ae914e3c10af8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $\int_a^{\to b} f$ и $\int_a^{\to b} g$ {{c2::сходятся абсолютно,}} то {{c3::$\int_a^{\to b}(\alpha f + \beta g)$}} {{c1::сходится абсолютно.}}

Note 20

877bbbaf0aad47f18e73982ecb61a25c

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, то он {{c1::сходится.}}

Note 21

1e256a23b0234f618630bb0ecd81a5c1

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, то он сходится. В чём ключевая идея доказательства?

> Критерий Больцано-Коши сходимости функции для
> $$x \mapsto \int_a^x |f|.$$

Note 22

90872b464e394488bd0388fbf5e5fe3e

Может ли несобственный интеграл сходиться, не сходясь при этом абсолютно?

> Да, может.

Note 23

0268c46e88c24c1d9a2339d7f0d3ee01

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится, но не абсолютно,}} то говорят, что {{c1::он сходится условно или неабсолютно.}}

Note 24

8cf6a70282a945a2ba0dc4b0a63abad8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если интеграл $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится условно,}} а $\int_a^{\to b} g$ {{c2::сходится абсолютно,}} то $\int_a^{\to b}(f+g)$ {{c1::сходится условно.}}

Note 25

710cc42101c14046a49743d5070986c1

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Если интеграл $\int_a^{\to b} f$ сходится условно, а $\int_a^{\to b} g$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\to b}(f+g)$ сходится условно. В чём основная идея доказательства?

> Представить f как сумму $(f+g)-g$.

Note 26

4ff4773b59de42daa0a880e4a8a170e7

«Признак {{c5::Дирихле}} {{c2::сходимости несобственного интеграла}}»

Пусть {{c4::$f \in C[a,b)$,}} {{c3::$g \in C^1[a,b)$, g — монотонна.}} Если {{c1::g бесконечно мала в точке b, а $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена на (a,b),}} то {{c2::$\int_a^{\to b}(f \cdot g)$ сходится.}}

Note 27

ae6efc013b634d36a35078f6d529988d

В чём основная идея доказательства признака Дирихле сходимости несобственного интеграла?

> Применить формулу интегрирования по частям и показать абсолютную сходимость $\int_a^{\to b} Fg'$.

Note 28

2f08599a01e3436a9f48422e767ba763

Как в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла показать, что $\int_a^{\to b} Fg'$ сходится абсолютно?

> Оценить сверху значение $\int_a^{\to b} |Fg'|$.

Note 29

599be6e31a83462881df0f2734d270d5

Почему в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла интеграл $\int_a^{\to b} |Fg'|$ не может не существовать?

> Потому что $|Fg'| \geqslant 0$.

Note 30

fdf163be427a40e1a02bdfb1d3392f46

«Признак {{c5::Абеля}} {{c2::сходимости несобственного интеграла}}»

Пусть {{c4::$f \in C[a, b)$,}} {{c3::$g \in C^1[a, b)$, g — монотонна.}} Если {{c1::g — ограничена, а $\int_a^{\to b} f$ сходится,}} то {{c2::$\int_a^{\to b} (f \cdot g)$ сходится.}}

Note 31

5714e2e7542d4b4aa0316cb086c35aac

В чём основная идея доказательства признака Абеля сходимости несобственного интеграла?

> Признак Дирихле для функций f и
>
> $$x \mapsto g(x) - g(b^-).$$

Note 32

8ceee057705b4a778730645db78a3fb2

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла {{c2:: так же будет выполняться,}} если ослабить допущения до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \qquad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Note 33

3d0b9c7aa10142388b565e673f847be1

Признак Абеля сходимости несобственного интеграла {{c2:: так же будет выполняться,}} если ослабить допущения до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \qquad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Лекция 30.04.22 (2)

Note 1

519087b524d64a7db308cfc813fb90f7

Отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется {{c2::движением пространства $\mathbb{R}^n$,}} если {{c1::оно сохраняет расстояние между точками.}}

Note 2

b1453ceeeece4b72b798234b7da1813d

{{c3::Площадью}} называется {{c1::отображение $S : \{P\} \to [0, +\infty)$, заданное на некотором классе $\{P\}$ подмножеств плоскости, }} которое при этом {{c2::

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольниках;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 3

47470cb51b9e4e21bb69da097aba5d2b

{{c2::Фигуры из класса подмножеств плоскости, на которых задано отображение площади,}} называются {{c1::квадрируемыми фигурами.}}

Note 4

18345644cb79468f9ec377bda0dc0a8b

Пусть {{c3::P_1 и P_2 — квадрируемые фигуры и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.}} Тогда {{c1::$P_1 \cup P_2$ — квадрируемая фигура}} и {{c2::

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

(свойство {{c4::**аддитивности**}} из определения площади)

Note 5

76c9c3e2743049ffa9cc6d12f6dc926d

{{c1::Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.}}

(свойство {{c2::**нормируемости на прямоугольниках**}} из определения площади)

Note 6

21333bd49d034ec7af62abe5e5b689e7

Пусть {{c3::P — квадрируемая фигура и U — движение плоскости.}} Тогда {{c1::$U(P)$ — квадрируемая фигура}} и {{c2::

$$S(U(P)) = S(P).$$

}}

(свойство {{c4::**инвариантности относительно движений**}} из определения площади)

Note 7

b8107a1dd5d24f29a317e003bc6c9181

Пусть P, P_1 — квадрируемые фигуры, {{c2::$P_1 \subset P$}}. Тогда {{c1::

$$S(P_1) \leqslant S(P).$$

}}

({{c3::**монотонность**}} площади)

Note 8

c493291ddbb94c7682c53a108ac7fce4

В чём ключевая идея в доказательстве монотонности площади?

> Представить P как $P \cup (P \setminus P_1)$.

Note 9

d66f7a47310e439da162bfb5d766daa8

Если квадрируемая фигура P {{c2::содержится в некотором отрезке,}} то {{c1::$S(P) = 0$.}}

Note 10

4f73cf95243c4ae1a203f5a5cce2a024

Если квадрируемая фигура P содержится в некотором отрезке, то $S(P) = 0$. В чём основная идея доказательства?

> P можно заключить в прямоугольник сколь угодно малой площади.

Note 11

eea6ca09c1c445469a7fafb3cdf7c5c6

Пусть {{c1::P_1, P_2 — квадрируемые фигуры, $S(P_1 \cap P_2) = 0$.}} Тогда {{c2::

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

({{c3::**усиленная аддитивность**}} площади)

Note 12

430f2d5b1ff841c29c7b3b184b5cd509

В чём основная идея доказательства усиленной аддитивности площади?

> Представить $P_1 \cup P_2$ как $(P_1 \setminus P_2) \cup P_2$.

Note 13

a8841fa849b54fccb1d646f27b165f0d

{{c3::Объёмом}} называется {{c1::отображение $V : \{T\} \to [0, +\infty)$, заданное на некотором классе $\{T\}$ подмножеств $\mathbb{R}^3$,}} которое при этом {{c2::

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольных параллелепипедах;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 14

7cfda5f9df304d888f1d18b59b9c2805

{{c2::Элементы из класса подмножеств $\mathbb{R}^3$, на которых задано отображение объёма,}} называются {{c1::кубируемыми телами.
}}

Note 15

0857e7d4cb3949fa8150811b0b482d43

{{c1::Объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c равен abc.}}

(свойство {{c2::**нормируемости на прямоугольных параллелепипедах**}} из определения площади)

Note 16

5718ba5a41374083b6fcc1508f440aa6

Если кубируемое тело T {{c2::содержится в некотором прямоугольнике,}} то {{c1::$V(T) = 0$.}}

Note 17

429679b187e449738c280e35b1c167ba

Пусть {{c3::$P \subset \mathbb{R}^2$, $h \geqslant 0$.}} {{c1::Множество $P \times [0, h]$, а так же всякий его образ при движении,}} называется {{c2::прямым цилиндром с основанием P и высотой h.}}

Note 18

910d0a9f9f5342c18ec7291c3bcf5a75

Пусть {{c3::P — квадрируемая фигура, $h \geqslant 0$.}} Тогда {{c1::цилиндр $P \times [0, h]$ кубируем}} и {{c2::

$$V(P \times [0, h]) = S(P)h.$$

}}

Note 19

09254f53532b46f2a53c623d390ebb80

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, {{c3::$x \in \mathbb{R}$.}} {{c1::Множество

$$\Big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\Big\}$$

}} называется {{c2::сечением множества первой координатой x.}}

Note 20

364174b8e50c41769a37bd8c66b37c2f

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. {{c2::Сечение множества T первой координатой x}} обозначается {{c1::$T(x)$.}}

Note 21

897caf9d2c9e4338bb71941389908a3c

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $t \in [a, b]$. {{c2::i-я координата вектора $\gamma(t)$}} обозначается {{c1::$\gamma_i(t)$.}}

Note 22

bfb45d16ad184797a2996ad01ffcef3e

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. {{c2::Функция $\gamma_i : t \mapsto \gamma_i(t)$}} называется {{c1::$i$-й координатной функцией отображения γ.}}

Note 23

dd1a71a2fed04fe9afe31c7632361372

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Отображение γ называется {{c2::непрерывным на $[a, b]$,}} если {{c1::каждая его координатная функция непрерывна на $[a, b]$.}}

Note 24

b547615a5824427faef3dd11a3b25d6d

{{c2::Путём в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c1::непрерывное отображение

$$[a, b] \to \mathbb{R}^m.$$

}}

Note 25

22935aef61d54e6ca59da2c35faa2d07

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Точка $\gamma(a)$}} называется {{c1::началом пути γ.}}

Note 26

306f29e0450e438d99bc99ecf7bfc7f6

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Точка $\gamma(b)$}} называется {{c1::концом пути γ.}}

Note 27

8dd5f0f6a866470697eebadc0467f96f

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c1::Множество $\gamma([a, b])$}} называется {{c2::носителем пути γ.}}

Note 28

7d4bcf2b08264eb9ab15db7043690c48

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::замкнутым,}} если {{c1::$\gamma(a) = \gamma(b)$.}}

Note 29

5093bb30b14c48e3b3fadaef0c12afb8

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::простым или несамопересекающимся,}} если {{c1::

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ или } t_1, t_2 \in \{a, b\}.$$

}}

Note 30

d8f2c782ae694dd988da84bcb859ff74

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::k раз непрерывно дифференцируемым или k-гладким,}} если {{c1::все $\gamma_i \in C^k[a,b]$.}}

Note 31

05da85b7f0a84b368ee3c6bef725c8da

Множество всех k-гладких путей $[a,b] \to \mathbb{R}^m$ обозначается {{c1::

$$C^k[a,b].$$

}}

Note 32

2915b1df3b9e42158ec7ffe997e98a04

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::кусочно-гладким,}} если {{c1::существует такое разбиение отрезка $[a,b]$, что сужение γ на любой из отрезков разбиения — гладкий путь.}}

Note 33

9c342e15007543ee80fa38b9df7f3251

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь, задаваемый формулой {{c1::

$$t \mapsto \gamma(a+b-t), \qquad t \in [a,b],$$

}} называется {{c2::противоположным пути γ.}}

Note 34

f069a263f684409d8ff3e26967cba803

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Путь, противоположный пути γ,}} обозначается {{c1::γ^-.}}

Note 35

591160f41fd4454bafe7bb81051e9799

Два пути $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ называются {{c2::эквивалентными,}} если {{c1::существует строго возрастающая сюръекция $u : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ такая, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$.}}

Note 36

fe470bb82a2b4926851a2edfc7a0e8bb

{{c2::Каждый класс эквивалентности путей в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c1::кривой.}}

Note 37

cbc0b68e357849a2ad4608976c677898

{{c2::Каждый из представителей класса эквивалентности, составляющего данную кривую,}} называется {{c1::параметризацией этой кривой.}}

Note 38

466347f360424036ba201c4d9083bb8b

Кривую в пространстве $\mathbb{R}^m$ обозначают как {{c1::$\{\gamma\}$, где γ — некоторая её параметризация.}}

Note 39

1faf6fe6c5d7403c89e416216d3e9699

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c1::Семейство отрезков, соединяющих точки $\gamma(\tau_k)$ и $\gamma(\tau_{k+1})$ для $\{\tau_k\} \in T[a, b]$,}} называют {{c2::ломаной, вписанной в путь γ.}}

Note 40

4be9559c1fbc4e42804714ea29cdf641

{{c2::Длиной}} ломаной называют {{c1::сумму длин составляющих её отрезков.}}

Note 41

2da98f4689254999b9cebf8a314d0ea1

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Длиной}} пути γ называется {{c1::величина

$$\sup_{\tau \in T[a,b]} \ell_\tau,$$

где ℓ_τ — длина ломаной, отвечающей разбиению τ.}}

Note 42

60df0982954545929b0ff63a854ca1d8

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Длина пути γ}} обозначается {{c1::s_γ.}}

Note 43

38b6d13987e84d16b683136f8cbc95af

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::спрямляемым,}} если {{c1::$s_\gamma < +\infty$.}}

Лекция 07.05.22 (1)

Note 1

a086c7c565474cc28e5e635aa58fbc68

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Множество

$$\Big\{ \text{\{\{c2::}(x, y)\text{\}\}} \mid \text{\{\{c1::}x \in [a, b],\ y \in \Delta_{0,f(x)}\text{\}\}} \Big\}$$

называется {{c3::подграфиком функции f.}}

Note 2

ce2924abf7304cfb861aa52962241aa0

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Подграфик функции f}} обозначается {{c2::Q_f.}}

Note 3

938420b690a6454bb2d2f1eea1281a1b

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Подграфик функции f называется {{c2::криволинейной трапецией,}} если {{c1::$f \geqslant 0,\ f \in C[a, b]$.}}

Note 4

8454114fa9b446d495fd999f8d6522b6

Как показать, что подграфик криволинейной трапеции является квадрируемой фигурой?

> Принять на веру. (В нашем курсе это не доказывается.)

Note 5

1bbedb3d7edc4466be39badd75fe893f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, {{c3::$f \geqslant 0$.}} Тогда {{c2::$S(Q_f)$}} $=$ {{c1::$\int_a^b f$}}.

Note 6

913f7f98ebc549638163e89e85c4e29b

Пусть $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0$. Тогда $S(Q_f) = \int_a^b f$.
В чём ключевая идея доказательства?

> Ограничить значение $S(Q_f)$ через интегральные суммы Дарбу для произвольного разбиения.

Note 7

ce632e26e2cf4cb19eea3f0a4ab3c709

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда {{c2::$S(Q_f)$}} $=$ {{c1::$\int_a^b |f|$}}.

Note 8

b6e7714d201749cd9fd4e7b0bd716384

Пусть {{c2::$f, g \in \mathcal{R}[a, b],\ \ f \leqslant g$.}} Фигура, заключённая между графиками f и g тоже называется {{c1::криволинейной трапецией.}}

Note 9

bc1564f4497f46e687c00d29b41fdb88

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b],\ \ f \leqslant g$. {{c2::Площадь криволинейной трапеции, заключённой между графиками f и g}} равна {{c1::

$$\int_a^b (g - f).$$

}}

Note 10

7b57ff51f8f74d7a9e4b6bc05043f32c

Пусть {{c5::$0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$,}} {{c4::$f \in C[\alpha, \beta],\ \ f \geqslant 0$.}} Множество

$$\Big\{ \text{\{\{c1::}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\text{\}\}} \mid \text{\{\{c2::}\varphi \in [\alpha, \beta],\ r \in [0, f(\varphi)]\text{\}\}} \Big\}$$

называется {{c3::криволинейным сектором.}}

Note 11

92d60a9a490b49c2af35b60f685c4b05

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ \ f \in C[\alpha, \beta],\ \ f \geqslant 0$. {{c2::Криволинейный сектор, ограниченный функцией f,}} обозначается {{c1::$\widetilde{Q}_f$.}}

Note 12

45120420e85a4503b25a5dd34b000e9f

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ \ f \in C[\alpha, \beta],\ \ f \geqslant 0$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}S(\widetilde{Q}_f)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2.\text{\}\}}$$

Note 13

896e566b8a2a4fe7817b2f52377d7fbd

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \in C[\alpha, \beta],\ f \geqslant 0$. Тогда

$$S(\widetilde{Q}_f) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Составить суммы, аналогичные суммам Дарбу, но составленные из площадей секторов, а не прямоугольников.

Note 14

8e9b6c0f033b44bc81a2f3d4bf467a83

При вычислении объёмов с помощью интеграла на фигуру $T \subset \mathbb{R}^3$ накладываются следующие ограничения:

- {{c1::$\exists [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \forall x \notin [a, b] \quad T(x) = \emptyset$;}}
- {{c2::$\forall x \in [a, b] \quad T(x)$ — квадрируемая фигура с площадью $S(x)$, причём $S \in C[a, b]$;}}
- {{c3::$\forall$ отрезка $\Delta \subset [a, b] \quad \exists \xi_\Delta^*, \xi_\Delta^{**} \in \Delta \quad \forall x \in \Delta$

  $$T(\xi_\Delta^*) \subset T(x) \subset T(\xi_\Delta^{**}).$$

  }}

Note 15

a7e13633747d4baaad4c2c6b3fa89048

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям для вычисления объёма с помощью интеграла. Тогда

$$\text{{{c2::}} V(T) \text{}}} = \text{{{c1::}} \int_a^b S. \text{}}}$$

Note 16

bd53f21dcde04ea0b85cb5af9f3591a3

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c2::Тело вращения подграфика f вокруг оси Ox}} обозначается {{c1::T_f.}}

Note 17

ba286a05719545d7989f5b131598cf49

Пусть {{c3::$f : C[a,b]$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}V(T_f)\text{}}} = \text{{{c1::}}\pi \int_a^b f^2.\text{}}}$$

Note 18

081bd87639824313a4c4b6ea6161ff62

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, {{c3::все γ_i — дифференцируемые функции.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}\gamma'\text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}(\gamma_m', \ldots, \gamma_m').\text{}}}$$

Note 19

78afc1de7241408b95a68a8f5ed2006a

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\text{{{c2::}} \|\gamma\| \text{}}} = \text{{{c1::}}\sqrt{\sum_i \gamma_i^2}.\text{}}}$$

Note 20

0fa2547514204ecfb3eac95208adab8e

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Тогда, если {{c4::$\gamma \in C^1[a,b]$, }} то {{c2::γ спрямляем}} и {{c3::s_γ}} $=$ {{c1:: $\int_a^b \|\gamma'\|$ }}.

Лекция 07.05.22 (2)

Note 1

ddc3406fefdc4dccb10eeb102957c8ce

Пусть {{c2::$f \in C[a,b]$.}} При рассмотрении Γ_f как пути, полагают

$$\Gamma_f(t) = \text{\{\{c1::}(t, f(t)), \quad t \in [a,b].\text{\}\}}$$

Note 2

c2ae0466ac724aa8b74a18651e9b01b8

Пусть {{c3::$f \in C^1[a,b]$.}} Тогда путь {{c4::Γ_f спрямляем}} и

$$\text{\{\{c2::}s_{\Gamma_f}\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_a^b \sqrt{1+f^2}.\text{\}\}}$$

Note 3

d7845b70c0774392b73e28626dab39f8

Пусть {{c3::$f \in C^1[\alpha,\beta]$, $f \geqslant 0$.}} Выражение “{{c2::путь γ задаётся в полярных координатах равенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$}}” означает, что

$$\gamma(\theta) = \text{\{\{c1::}(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [\alpha,\beta].\text{\}\}}$$

Note 4

58dcc2f7e9c04a209117dce56a3fdacb

Пусть $f \in C^1[\alpha,\beta]$, $f \geqslant 0$, путь γ задаётся {{c2::в полярных координатах неравенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c3::}s_\gamma\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_a^b \sqrt{f^2 + (f')^2}.\text{\}\}}$$