

Интуитивная теория множеств

Note 1

6c0ed6eb23d8405e911650386a84b770

Под $\{\{c2::\text{множеством}\}\}$ понимается $\{\{c1::\text{некоторая, вполне определённая совокупность объектов.}\}\}$

Note 2

5f9814dbb38246348e00fce1554e94a

Два основных способа задания множеств.

■ Перечисление, характеристическое правило.

Note 3

325300814df34c129e29e55cd92829be

$\{\{c2::\text{Пустое множество}\}\}$ есть $\{\{c1::\text{множество, которое не содержит элементов.}\}\}$

Note 4

f4cb071a174b4cd29c7ac0c7cd405265

$\{\{c2::\text{Пустое}\}\}$ множество обозначается $\{\{c1::\emptyset \text{ или } \{\}\}\}$

Note 5

ee3c092ea6f8412982372151ed6a3ef8

Пусть A — множество. $\{\{c1::\text{Само множество } A \text{ и пустое множество}\}\}$ называют $\{\{c2::\text{несобственными подмножествами}\}\}$ множества A .

Note 6

d2d19259b6054a569cee5d5a0b24b0fe

Пусть A — множество. $\{\{c1::\text{Все подмножества } A, \text{ кроме } \emptyset \text{ и } A, \}\}\}$ называют $\{\{c2::\text{собственными подмножествами}\}\}$ множества A

Note 7

02ebf0e734664103a97df0f5c597b8c7

Пусть A — множество. $\{\{c2::\text{Множество всех подмножеств множества } A\}\}$ называется $\{\{c1::\text{булеаном}\}\}$ множества A .

Note 8

ac2c9531b8ad48eabb9e76bac3fdffaa

Пусть A — множество. $\{\{c2::\text{Булеан}\}\}$ множества A обозначается $\{\{c1::\mathcal{P}(A)\}\}$

Note 9

2355b9e8f18a44148a0a3fd9f08c2034

Универсальное множество — есть множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Note 10

446b3cd12ece46568e02af4ed65f3155

Универсальное множество обычно обозначается U или I .

Note 11

c7621865085b4ac5a4b2b24efb11cf87

Приоритет операций над множествами: $\overline{}, \cap, \cup, \dots$

Note 12

6b9f3c8671f2472e9e3b9a20aeb66aa5

Пусть A и B — множества. Для удобства часто используется сокращение

$$AB := A \cap B.$$

Note 13

dc6fc558021f401696123dddc6c61abe

Пусть A и B — множества. Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

}

Note 14

1c0cfd677111482c8d16fb1c43f9f802

Пусть A и B — множества. Симметрическая разность множеств A и B обозначается $A \triangle B$.

Note 15

658fb28e676a412082702daf0103e08e

Пусть A — множество. Дополнение A обозначается \overline{A} .

Note 16

13a0dc7af20b45a4b8d8785debbb106a

Три первых свойства свойства операций объединения и пересечения множеств.

■ Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Note 17

0ab39012eaa94abcb901e5c26354d65b

Пусть A — множество.

$$A \cap A = \{\{c1: A.\}\}$$

Note 18

99349135847f4ab7a28f76b06715594e

Пусть A — множество.

$$A \cup A = \{\{c1: A.\}\}$$

Note 19

02876f67e1514f6d92d1e32ce2a5673f

Пусть A — множество.

$$A \cup \overline{A} = \{\{c1: U.\}\}$$

Note 20

3303d884a57c4c979ab67f664325626a

Пусть A — множество.

$$A \cap \overline{A} = \{\{c1: \emptyset.\}\}$$

Note 21

c6b6114579204c8e99c5bfbcb80ac53b9

Пусть A — множество.

$$A \cup \emptyset = \{\{c1: A.\}\}$$

Note 22

35fbc385403041a7a92f1a9980d5643f

Пусть A — множество.

$$A \cap \emptyset = \{\{c1: \emptyset.\}\}$$

Note 23

bf06afa6211c4b10bd2ecffa833b05a2

Пусть A — множество.

$$A \cup U = \{\{c1: U.\}\}$$

Note 24

b5e4ab6a90eb4de38aa91aa27c7c4847

Пусть A — множество.

$$A \cap U = \{\{c1: A.\}\}$$

Note 25

4e1167b5fa7748e68b1a4b9a80eaacb3

Пусть A и B — множества.

$$A_{\{\{c2:: \cup \}\}}(A_{\{\{c3:: \cap \}\}}B) = \{\{c1: A.\}\}$$

«{\[c4:Закон поглощения]\}

Note 26

478752160fb94508a605ed54a8601340

Пусть A и B — множества.

$$A_{\{\{c2:: \cap \}\}}(A_{\{\{c3:: \cup \}\}}B) = \{\{c1: A.\}\}$$

«{\[c4:Закон поглощения]\}

Note 27

84569bc3ab574cb78e9bbc9f21dc6bd6

Пусть A и B — множества.

$$A \cap (B \cup \overline{A}) = \{\{c1: A \cap B.\}\}$$

Note 28

8c46cf622a9840ba818604b1ddcbd74f

Пусть A и B — множества.

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = \{c1::A \cup B.\}$$

Note 29

f391250023de4acfa419991a4de9c8ab

Пусть A и B — множества.

$$(A \cup B) \{c2:: \cap \} (A \cup \overline{B}) = \{c1::A.\}$$

«{c3::Закон расщепления}»

Note 30

29ec5d118d8849bea46146efcbbc4473

Пусть A и B — множества.

$$(A \cap B) \{c2:: \cup \} (A \cap \overline{B}) = \{c1::A.\}$$

«{c3::Закон расщепления}»

Note 31

cfe43c6f8ac74a43a3f82ea5e01fee7d

Пусть A — множество.

$$\overline{\overline{A}} = \{c1::A.\}$$

Note 32

edcde29726c04401a88af2ef23f3c264

Пусть A и B — множества.

$$A \setminus B = \{c1::A \cap \overline{B}.\}$$

Note 33

aed19cd8fa0d4ee3abf314b502af697d

Пусть A, B и X — множества.

$$\{c2::X \cup A \subseteq B\} \{c3:: \iff \} \{c1::X \subseteq B \text{ и } A \subseteq B.\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 34

ec3c6b3684844799a206353c8668876c

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2:: A \subseteq X \cap B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: A \subseteq X \text{ и } A \subseteq B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 35

5f70eba8ec804221a8c31f858c0b43ec

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2:: X \cap A \subseteq B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: X \subseteq \overline{A} \cup B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 36

72ac0b5d9c1746c79264bb9bd3a0b5f2

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2:: A \subseteq X \cup B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: A \cap \overline{B} \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 37

9d92e00aafb44695841b52ab137664da

Пусть A, B, C, D и X — множества.

$$\begin{cases} A \subseteq X \subseteq B \\ C \subseteq X \subseteq D \end{cases} \Longleftrightarrow \{\{c2:: A \cup C\}\} \subseteq X \subseteq \{\{c1:: B \cap D.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 38

ee9afcd63b43416d954d357d1dc689bb

В чём основная идея общего алгоритма для решения систем уравнений со множествами?

Привести систему к виду $AX \cup B\overline{X} = \emptyset$, где A и B не зависят от X .

Note 39

f443d4e12a8745178ba97fd0f1d8772

Пусть A и B — множества.

$$\{\{c3:: A = B\}\}\{\{c4:: \} \iff \}\{\{c1:: A \triangle B\} = \{\{c2:: \emptyset.\}\}$$

Note 40

06c3d3d8c5614af3b760a31c9b94fdc8

Пусть A и B — множества.

$$A \cup B = \emptyset \{\{c2:: \} \iff \}\{\{c1:: A = \emptyset \text{ и } B = \emptyset.\}\}$$

Note 41

73259212f85a4411b131299cc49d90dc

Пусть A и X — множества.

$$AX = \emptyset \iff \{\{c1:: X \subseteq \overline{A}.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 42

c02302f80f0143d0bb7cdc18b8929288

Пусть B и X — множества.

$$B\overline{X} = \emptyset \iff \{\{c1:: B \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 43

96e46cd4122448b3a6c8a8543d793a05

Пусть A и B — множества. При каком условии система

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

имеет решение?

$$B \subseteq \overline{A}.$$

Note 44

5e8c77b24b74411e9c9d6769ee278443

Пусть A и B — множества. Каково решение системы

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

$$B \subseteq X \subseteq \overline{A}.$$

Note 45

f1c5541c7c884dba936d4374ff51af88

Пусть A и B — множества. Как в уравнении $AX \cup B\overline{X} \cup C = \emptyset$ избавиться от «свободного» множества C ?

$C = \emptyset$ — условие совместности системы.

Note 46

86475fdea01944fba56365048d57b02d

Пусть A и B — множества.

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\{c2::\emptyset\} \iff \{c3::A \cap B = \emptyset.\}\}$$

Note 47

8ca45754929648bda3ca5496c7cba70f

Операция $\{\{c3::\text{декартового произведения}\}\}$ $\{\{c2::\text{дистрибутивна}\}\}$ относительно $\{\{c1::\text{операций } \cap, \cup, \setminus, \Delta.\}\}$

Note 48

ad330727e2cb4c27970e8cb8fdcddeb23

Пусть A, B и C — множества. Равны ли множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$?

Их отождествляют и считают равными.

Note 49

06a0896de5284f44bac5ddff2170cbb1

Пусть A и B — множества. Для $\{\{c2::\text{конечных}\}\}$ множеств,

$$|A \times B| = \{\{c1::|A| \cdot |B|.\}\}$$

Бинарные отношения

Note 1

cfc293ce41644e75b3df5d21a2bf036d

Пусть A и B — множества. $\{\{c2:: \text{Бинарным отношением}\}\}$ на множествах A и B называется $\{\{c1:: \text{некоторое подмножество } A \times B.\}\}$

Note 2

3ba559fe73cf4c90b5b919ce1a45881a

Четыре способа задания бинарных отношений.

■ Перечисление, правило, матрица, граф.

Note 3

c0ee3ac94a454d748e625d9e8c854763

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$aRb \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1:: (a, b) \in R.\}\}$$

Note 4

cef6486539a64268a1827f863aa7b9e1

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2:: \text{Обратным отношением к } R\}\}$ называется $\{\{c1:: \text{множество}\}\}$

$$\{(b, a) \mid aRb\}.$$

$\}$

Note 5

5e2c602b70a3473684a8ea79d93c7d68

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2:: \text{Обратное отношение к } R\}\}$ обозначается $\{\{c1:: R^{-1}.\}\}$

Note 6

d6e34168370e44feafa7891c93b2df04

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда

$$R^{-1} \subseteq \{\{c1:: B \times A.\}\}.$$

Note 7

86c9a04a7ac14724b416780fec688449

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$(R^{-1})^{-1} = \{\{c1: R.\}\}$$

Note 8

e91e90545919488bb2c2ebe373b9e615

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2: \text{Областью определения } R\}\}$ называется $\{\{c1: \text{множество}$

$$\{x \mid \exists y : xRy\}.$$

$\}\}$

Note 9

08e952c62da84566a99743eb4c6c48a5

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2: \text{Область определения } R\}\}$ обозначается $\{\{c1: D(R),\}\}$ $\{\{c1: \delta_R\}\}$ или $\{\{c1: \text{dom } R.\}\}$

Note 10

13e35bd817d9438690104754dc4d016d

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2: \text{Областью значений } R\}\}$ называется $\{\{c1: \text{множество}$

$$\{y \mid \exists x : xRy\}.$$

$\}\}$

Note 11

051cc32e89b94bbebd49875c952f6b5b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. $\{\{c2: \text{Область значений } R\}\}$ обозначается $\{\{c1: E(R),\}\}$ $\{\{c1: \rho_R\}\}$ или $\{\{c1: \text{im } R.\}\}$

Note 12

c0426f6bec33477e9bc759610c4d426b

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. $\{\{c2: \text{Композицией } R \text{ и } S\}\}$ называется $\{\{c1: \text{множество}$

$$\{(a, c) \mid \exists b : aRb \text{ и } bSc\}.$$

$\}\}$

Note 13

41418613a7934da4ab810abfcdf24e1a

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. $\{\{c2::$
композиция R и $S\}$ обозначается $\{\{c1::$

$$R \circ S.$$

$\}\}$

Note 14

78bbe389ea094b0aad40c370c5092937

Является ли операция композиции бинарных отношений коммутативной?

■ Нет.

Note 15

63f83037312e4f29a81de945fb387d06

Является ли операция композиции бинарных отношений ассоциативной?

■ Да.

Note 16

1530beb1e1c24540a8be6f534775cca0

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения.

$$(R \circ S)^{-1} = \{\{c1::S^{-1} \circ R^{-1}.\}\}$$

Note 17

10fae1eae25a48a2998a9be7d6af2e4d

Пусть $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$. Отношение R называется $\{\{c2::$ несимметричным, $\}\}$ если $\{\{c1::$ оно не симметрично, не асимметрично и не антисимметрично. $\}\}$

Note 18

8e02e778a9a5426fa89340cd47a6a0c5

Пусть $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$ — бинарное отношение. Отношение R называется $\{\{c2::$ интранзитивным, $\}\}$ если $\{\{c1::$

$$aRb \text{ и } bRc \implies \overline{aRc}.$$

$\}\}$

Note 19

fdb65b9ca3c4a5c8c62ece25b744e92

Пусть $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$ — бинарное отношение. Отношение R называется $\{\{c2::\text{нетранзитивным},\}\}$ если $\{\{c1::\text{оно не транзитивно и не интранзитивно},\}\}$

Note 20

f3fcca348ef844da9d3cf01b1e27fe1f

Матрица A называется $\{\{c2::\text{бинарной},\}\}$ если $\{\{c1::\text{все её элементы принадлежат множеству } \{0, 1\},\}\}$

Note 21

25d02bbd94644780a0346254f22a07df

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $\{\{c3::A \text{ и } B \text{ конечны},\}\}$ Матрицей отношения R называется $\{\{c1::\text{бинарная матрица}$

$$\left(a_i R b_j\right) \sim |A| \times |B|.$$

$\}\}$

Note 22

ce9cf9f0367d40f9bbdd914eb95eb396

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, A и B конечны. $\{\{c2::\text{Матрица отношения } R\}\}$ обозначается $\{\{c1::\|R\|,\}\}$

Note 23

1f23045998c647aca7a97bcf2a5b5d31

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $\{\{c3::x \in A,\}\}$ Множество $\{b \mid x R b\}$ называется $\{\{c2::\text{образом элемента } x \text{ при отношении } R,\}\}$

Note 24

65b799e6a5bc4b01bff56d2146031199

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in A$. $\{\{c2::\text{Образ элемента } x \text{ при отношении } R\}\}$ обозначается $\{\{c1::R(x),\}\}$

Note 25

477523df314842d1ad7c5a4d978f2f7a

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $\{\{c3::x \in B,\}\}$ Множество $\{a \mid a R x\}$ называется $\{\{c2::\text{прообразом элемента } x \text{ при отношении } R,\}\}$

Note 26

5150bf45802b4bad925b14f51a0d2f24

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in B$. $\{\{c2:: \text{Прообраз элемента } x \text{ при отношении } R\}\}$ обозначается $\{\{c1:: R^{-1}(x)\}\}$

Note 27

3348d69b0cf149a8a70f5ec94b05b306

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $\{\{c2:: X \subseteq A\}\}$

$$\{\{c3:: R(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R(x)\}\}$$

Note 28

5c26a7f17db242d7b8db989512093cc6

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $\{\{c2:: X \subseteq B\}\}$

$$\{\{c3:: R^{-1}(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R^{-1}(x)\}\}$$

Note 29

5b5ba1073a2e479f8b8eca3f6c2c7329

Пусть A множество. $\{\{c1:: \text{Отношение } \{(x, x) \mid x \in A\}\}\}$ называется $\{\{c2:: \text{тождественным отношением на } A\}\}$

Note 30

c1e1caa30e724485b938627008bc28d0

Пусть A множество. $\{\{c2:: \text{Тождественное отношение на } A\}\}$ обозначается $\{\{c1:: E\}\}$

Note 31

1dc3c3c6dff84c6f8ba496ed57840291

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2:: \text{рефлексивно}\}\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$E \subseteq R.$$

$\}\}$

«В терминах множеств»

Note 32

ebabe4fca55b4c1c89734c5895e06ff8

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2::$ анти-рефлексивно $\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$R \cap E = \emptyset.$$

$\}$

«В терминах множеств»

Note 33

0b173912f3f54d539053ec72781173bf

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2::$ симметрично $\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$R = R^{-1}.$$

$\}$

«В терминах множеств»

Note 34

1d0d52561f0b48f8a96ed987369af728

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2::$ анти-симметрично $\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$R \cap R^{-1} \subseteq E.$$

$\}$

«В терминах множеств»

Note 35

92c95593c51a4ac08d44f6be1cf69e5e

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2::$ асимметрично $\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$R \cap R^{-1} = \emptyset.$$

$\}$

«В терминах множеств»

Note 36

3fb92e0a21764e979cf2dce095e95aea

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2: \text{транзитивно}\}\}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1: \}$

$$R \circ R \subseteq R.$$

$\}\}$

«В терминах множеств»

Note 37

045dab85eeaa4728b61896649dc1ba75

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\{\{c2: A \leq B\}\} \xLeftrightarrow{\text{def}} \{\{c1: a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i, j.\}\}$$

Note 38

3b1e7f3609054643ae820caae66db2a

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\{\{c2: A < B\}\} \xLeftrightarrow{\text{def}} \{\{c1: A \leq B \text{ и } A \neq B.\}\}$$

Note 39

cfdc6aac0b1d4a87b2bec698ca44ce30

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Матрицы A и B называют $\{\{c2: \text{несравнимыми,}\}\}$ если $\{\{c1: \text{не выполняется ни } A \leq B, \text{ ни } B \leq A.\}\}$

Note 40

303fa2bd38f446e59e6690ebc8c9c824

Бинарную операцию $\{\{c2: \text{«или»}\}\}$ так же называют логистическим $\{\{c1: \text{сложением.}\}\}$

Note 41

46107ba23b0a4fcdaaa341d70b37861c

Бинарную операцию $\{\{c2: \text{«и»}\}\}$ так же называют логистическим $\{\{c1: \text{умножением.}\}\}$

Note 42

1e75356f6fe44393ae1e2c195bed3c1e

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$. Тогда

$$\{\{c2:: \|R \circ S\| \} \} = \{\{c1:: \|R\| \cdot \|S\| \} \} \quad (\text{с логистическим сложением}).$$

Note 43

1b250fddc61e44539e477e7d17458d9b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R $\{\{c2:: \text{тран-}$
 $\text{зитивно} \} \}$ тогда и только тогда, когда $\{\{c1::$

$$\|R\|^2 \leq \|R\| \quad (\text{с логистическим сложением}).$$

$\} \}$

«В терминах матриц»

Note 44

bb1c4dba55ad47adbacfd250e1f39101

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. $\{\{c2:: \text{Мно-}$
 $\text{жество классов эквивалентности } R, \} \}$ обозначается $\{\{c1:: [A]_R.$
 $\} \}$

Note 45

c54eb7123d974c8aba9972163019b4ac

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности, $a \in A$. $\{\{c2::$
Класс эквивалентности, порождённый $a, \} \}$ обозначается $\{\{c1::$
 $[a]. \} \}$

Note 46

b21c1b2e3c504807a89717a4205b3fdf

Пусть A — множество. $\{\{c2:: \text{Разбиение множества } A, \} \}$ обозна-
чается $\{\{c1:: \langle A \rangle. \} \}$