Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть {{c3:: W — линейное пространство, $V \subset W$. }} Тогда V называется {{c2::линейным подпространством}}, если {{c1::

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение «V есть линейное подпространство в W» обозначают {{c1::

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — {{c1:: тоже линейное пространство}}.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в $\mathbb{R}^n$?

> Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

> Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0.$

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \lhd \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2::m \times n\}\}}$ такая, что {{c1::

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

}}

Note 7

dcb727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \dots a_n \in W$. Является ли

$$\mathscr{L}(a_1, a_2, \dots a_n)$$

подпространством в W?

> Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций $a_1, a_2, \dots a_n$ тоже является их линейной комбинацией.

Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \lhd W?$$

> Да, всегда.

Note 9

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \lhd W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \lhd W?$$

> Нет, не всегда.

Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2::V_1 + V_2\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}\}$$

Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1::\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}\}$$

Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

> Да, всегда.

Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$ и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — {{c2::базис в V.}} Тогда в W существует базис вида {{c1::

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n.$$

}}

Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

> Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 15

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть

- $e_1, e_2, \dots e_k$ — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots e_k, f_1, \dots f_p$ — базис в V_1,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots g_q$ — базис в V_2.

Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

> $e_1, \dots e_k, f_1, \dots f_p, g_1, \dots, g_q$ — базис в $V_1 + V_2$.

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве V. Тогда {{c2:: матрицей перехода от базиса e к базису e'}} называют {{c1:: матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$
$$v = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \cdots + \mu_n e'_n,$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

{{c2:: Матрицу перехода от базиса e к базису e'}} обычно обозначают {{c1:: $C_{e \to e'}$.}}

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \to e'}$?

> Столбцы $C_{e \to e'}$ — это координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. {{c2:: Сумму V_1+V_2}} называют {{c1::прямой суммой,}} если {{c2::$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.}}

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

{{c2::Прямая сумма подпространств V_1 и V_2}} обозначается {{c1::

$$V_1 \oplus V_2.$$

}}

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. {{c1::$V_1 + V_2$ — прямая сумма;}}
2. {{c2::$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;}}
3. {{c3::Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.}}

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

▌ Показать, что если $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«{{c3::Монотонность размерности подпространств}}»

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

1. {{c1::$\dim V \leqslant \dim W$,}}
2. {{c2::$\dim V = \dim W \iff V = W$.}}

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

{{c3:: Отображение $f : V \to W$}} называется {{c2:: линейным отображением,}} если {{c1::

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют {{c1::линейным оператором.}}

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \to W$ называется {{c1:: изоморфизмом линейных пространств}} тогда и только тогда, когда {{c2:: f — биекция.}}

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются {{c1::изоморфными}} тогда и только тогда, когда {{c1:: существует изоморфизм

$$f : V \to W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение {{c2::изоморфности}} обозначается символом {{c1::

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \to W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \to V$ {{c1::— тоже изоморфизм.}}

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения {{c1::эквивалентности.}}

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$\{\{c2::V \simeq W\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1::\dim V = \dim W.\}\}$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор. Тогда {{c2::матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно}} называют {{c1::матрицу A, переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.}}

Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«{{c2::Теорема о матрице линейного оператора}}»

Пусть $f : V \to W$ — линейный оператор,

- {{c3::$e_1, e_2, \ldots, e_n$}} — базис в V,
- {{c3::$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$}} — базис в W.

Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

> j-ый столбец — это координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$.

Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

> $$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$
>
> где λ — координаты вектора из V в базисе e.

Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:: линейный оператор.}}

Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1::произведение матриц этих операторов.}}