

# Лекция 07.02.22

## Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть  $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ . Многочлен  $p(x)$  степени  $n$  такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$ .

## Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  существует, то он единственен.

## Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент  $r_m$  при  $(x-a)^m$  — первый ненулевой коэффициент в многочлене  $p - q$ . Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

## Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции  $f$  порядка  $n$  в точке  $a$  обозначается  $T_{a,n}f$ .

## Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«**Формула Тейлора для многочленов**»

Пусть  $p$  — многочлен степени не более  $n$ . Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}}

## Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

## Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left( (x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

## Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать  $p(x)$  с неопределенными коэффициентами и вычислить  $p^{(k)}(a)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

## Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«**Свойство  $n$  раз дифференцируемой функции**»

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$  и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Тогда  $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$ .

## Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение  $o$ -малого в терминах  $\varepsilon, \delta$ .»

Пусть  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|. \rangle \rangle$$

## Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить  $f(a) = f'(a) = 0$  в определение дифференцируемости.

## Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

■ и расписать это равенство в терминах  $\varepsilon, \delta$ .

## Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на  $\delta$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный промежуток.

## Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что  $\exists \delta > 0$  такой, что  $V_\delta(a) \cap D$  есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

## Note 16

73ed2cd8bb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить  $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$  по симметричной формуле конечных приращений и показать, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ .

## Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что  $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$  в доказательстве свойства  $n$ -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■  $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

## Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, \{c2: f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Тогда  $f(x) = \{c1: o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a. \}$

«{{c3: Формула Тейлора-Пеано }}»

Пусть {{c2:  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ . }} Тогда {{c1:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

# Лекция 11.02.22

## Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через  $p(x)$  многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

## Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для  $k \leq n$  равна  $p^{(k)}(a)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

## Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству  $n$  раз дифференцируемой функции  $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$ .

## Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство  $n$  раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

## Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2:: \Delta_{a,b} \} \} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} [a, b], & a \leq b, \\ [b, a], & a \geq b. \end{cases} \} \}$$

## Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2:: \tilde{\Delta}_{a,b} \} \} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} (a, b), & a < b, \\ (b, a), & a > b. \end{cases} \} \}$$

## Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2:: R_{a,n}f \} \} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: f - T_{a,n}f \} \}$$

## Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{\{c3:: \text{Формула Тейлора-Лагранжа} \} \}$ »

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$ ,  $\{\{c2:: f \in C^n(\Delta_{a,x}), f^{(n)} \text{ дифференцируема на } \tilde{\Delta}_{a,x} \} \}$  Тогда  $\{\{c1:: \text{найдется } c \in \tilde{\Delta}_{a,x}, \text{ для которой}$

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\} \}$

## Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При  $n = 0$  формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна  $\{\{c1:: \text{теореме Лагранжа} \} \}$ .

## Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

Вычислить производную функции  $F(t) = R_{t,n}f(x)$  и найти точку  $c$  по теореме Коши.

### Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких  $t$  определяется функция  $F(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

### Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких  $t$  вычисляется  $F'(t)$  в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

### Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

### Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

### Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям  $F(t)$  и  $\varphi(t)$  с точках  $a$  и  $x$ ?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$



## Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{\{c2:: e^x\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \cdot\}\}$$

## Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{\{c2:: \sin x\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \cdot\}\}$$

## Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{\{c2:: \cos x\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \cdot\}\}$$

## Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{\{c2:: \ln(1+x)\}\} = \{\{c1:: \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \cdot\}\}$$

## Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\{\{c3:: \text{Обобщённый биномиальный коэффициент}\}\}$  задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \{\{c1:: \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\}\}, \quad \alpha \in \{\{c2:: \mathbb{R}\}\}.$$

## Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при  $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^\alpha \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \} \}$$

## Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для  $(1+x)^\alpha$  называют  $\{ \{c1:: \text{биноми-}$   
альным разложением  $\}$ .

## Note 23

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть  $\{ \{c3:: \text{функция } f \text{ удовлетворяет условиям для разложе-}$   
ния по формуле Тейлора-Лагранжа.  $\}$  Тогда если  $\{ \{c2::$

$$\forall t \in \tilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\}$  то  $\{ \{c1::$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$