Интуитивная теория множеств

Note 1

6c0ed6eb23d8405e911650386a84b770

Под {{c2::множеством}} понимается {{c1::некоторая, вполне определённая совокупность объектов.}}

Note 2

5f9814dbb38246348e00ffce1554e94a

Два основных способа задания множеств.

> Перечисление, характеристическое правило.

Note 3

325300814df34c129e29e55cd92829be

{{c2::Пустое множество}} есть {{c1::множество, которое не содержит элементов.}}

Note 4

f4cb071a174b4cd29c7ac0c7cd405265

{{c2::Пустое}} множество обозначается {{c1::$\emptyset$ или $\{\}$.}}

Note 5

ee3c092ea6f8412982372151ed6a3ef8

Пусть A — множество. {{c1::Само множество A и пустое множество}} называют {{c2::несобственными подмножествами}} множества A.

Note 6

d2d19259b6054a569cee5d5a0b24b0fe

Пусть A — множество. {{c1::Все подмножества A, кроме $\emptyset$ и A, }} называют {{c2::собственными подмножествами}} множества A

Note 7

02ebf0e734664103a97df0f5c597b8c7

Пусть A — множество. {{c2::Множество всех подмножеств множества A}} называется {{c1::булеаном}} множества A.

Note 8

ac2c9531b8ad48eabb9e76bac3fdffaa

Пусть A — множество. {{c2::Булеан}} множества A обозначается {{c1::$\mathcal{P}(A)$.}}

Note 9

2355b9e8f18a44148a0a3fd9f08c2034

{{c2::Универсальное множество}} есть {{c1::множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.}}

Note 10

446b3cd12ece46568e02af4ed65f3155

{{c2::Универсальное}} множество обычно обозначается {{c1::U или I.}}

Note 11

c7621865085b4ac5a4b2b24efb11cf87

Приоритет операций над множествами: {{c1::$\overline{\cdot}, \cap, \cup, \ldots$}}

Note 12

6b9f3c8671f2472e9e3b9a20aeb66aa5

Пусть A и B — множества. Для удобства часто используется сокращение

$$\{\{c2::AB\}\} \coloneqq \{\{c1::A \cap B.\}\}$$

Note 13

dc6fc558021f401696123dddc6c61abe

Пусть A и B — множества. {{c2::Симметрической разностью}} множеств A и B называется множество {{c1::

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

}}

Note 14

1c0cfd677111482c8d16fb1c43f9f802

Пусть A и B — множества. {{c2::Симметрическая разность}} множеств A и B обозначается {{c1::$A \triangle B$.}}

Note 15

658fb28e676a412082702daf0103e08e

Пусть A — множество. {{c2::Дополнение A}} обозначается {{c1::$\overline{A}$.
}}

Note 16

13a0dc7af20b45a4b8d8785debbb106a

Три первых свойства свойства операций объединения и пересечения множеств.

▌ Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Note 17

0ab39012eaa94abcb901e5c26354d65b

Пусть A — множество.

$$A \cap A = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 18

99349135847f4ab7a28f76b06715594e

Пусть A — множество.

$$A \cup A = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 19

02876f67e1514f6d92d1e32ce2a5673f

Пусть A — множество.

$$A \cup \overline{A} = \{\{c1::U.\}\}$$

Note 20

3303d884a57c4c979ab67f664325626a

Пусть A — множество.

$$A \cap \overline{A} = \{\{c1::\emptyset.\}\}$$

Note 21

c6b6114579204c8e99c5bfbc80ac53b9

Пусть A — множество.

$$A \cup \emptyset = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 22

35fbc385403041a7a92f1a9980d5643f

Пусть A — множество.

$$A \cap \emptyset = \{\{c1::\emptyset.\}\}$$

Note 23

bf06afa6211c4b10bd2ecffa833b05a2

Пусть A — множество.

$$A \cup U = \{\{c1::U.\}\}$$

Note 24

b5e4ab6a90eb4de38aa91aa27c7c4847

Пусть A — множество.

$$A \cap U = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 25

4e1167b5fa7748e68b1a4b9a80eaacb3

Пусть A и B — множества.

$$A\{\{c2:: \cup \}\}(A\{\{c3:: \cap \}\}B) = \{\{c1::A.\}\}$$

«{{c4::Закон поглощения}}»

Note 26

478752160fb94508a605ed54a8601340

Пусть A и B — множества.

$$A\{\{c2:: \cap \}\}(A\{\{c3:: \cup \}\}B) = \{\{c1::A.\}\}$$

«{{c4::Закон поглощения}}»

Note 27

84569bc3ab574cb78e9bbc9f21dc6bd6

Пусть A и B — множества.

$$A \cap (B \cup \overline{A}) = \{\{c1::A \cap B.\}\}$$

Note 28

8c46cf622a9840ba818604b1ddcbd74f

Пусть A и B — множества.

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = \text{\{\{c1::}A \cup B.\text{\}\}}$$

Note 29

f391250023de4aefa419991a4de9c8ab

Пусть A и B — множества.

$$(A \cup B)\text{\{\{c2::} \cap \text{\}\}}(A \cup \overline{B}) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c3::Закон расщепления}}»

Note 30

29ec5d118d8849bea46146efcbbc4473

Пусть A и B — множества.

$$(A \cap B)\text{\{\{c2::} \cup \text{\}\}}(A \cap \overline{B}) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c3::Закон расщепления}}»

Note 31

cfe43c6f8ac74a43a3f82ea5e01fee7d

Пусть A — множество.

$$\overline{\overline{A}} = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

Note 32

edcde29726c04401a88af2ef23f3c264

Пусть A и B — множества.

$$A \setminus B = \text{\{\{c1::}A \cap \overline{B}.\text{\}\}}$$

Note 33

aed19cd8fa0d4ee3abf314b502af697d

Пусть A, B и X — множества.

$$\text{\{\{c2::}X \cup A \subseteq B\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}X \subseteq B \text{ и } A \subseteq B.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 34

ec3c6b3684844799a206353c8668876c

Пусть A, B и X — множества.

$$\text{\{\{c2::}A \subseteq X \cap B\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}A \subseteq X \text{ и } A \subseteq B.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 35

5f70eba8ee804221a8e31f858c0b43ec

Пусть A, B и X — множества.

$$\text{\{\{c2::}X \cap A \subseteq B\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}X \subseteq \overline{A} \cup B.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 36

72ac0b5d9c1746c79264bb9bd3a0b5f2

Пусть A, B и X — множества.

$$\text{\{\{c2::}A \subseteq X \cup B\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}A \cap \overline{B} \subseteq X.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 37

9d92e00aafb44695841b52ab137664da

Пусть A, B, C, D и X — множества.

$$\begin{cases} A \subseteq X \subseteq B \\ C \subseteq X \subseteq D \end{cases} \iff \text{\{\{c2::}A \cup C\text{\}\}} \subseteq X \subseteq \text{\{\{c1::}B \cap D.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 38

ee9afcd63b43416d954d357d1dc689bb

В чём основная идея общего алгоритма для решения систем уравнений со множествами?

> Привести систему к виду $AX \cup B\overline{X} = \emptyset$, где A и B не зависят от X.

Note 39

f443d4e12a8745178ba97fdf0f1d8772

Пусть A и B — множества.

$$\{\{c3::A = B\}\}\{\{c4:: \iff \}\}\{\{c1::A \triangle B\}\} = \{\{c2::\emptyset.\}\}$$

Note 40

06c3d3d8c5614af3b760a31c9b94fdc8

Пусть A и B — множества.

$$A \cup B = \emptyset\{\{c2:: \iff \}\}\{\{c1::A = \emptyset \text{ и } B = \emptyset.\}\}$$

Note 41

73259212f85a4411b131299cc49d90dc

Пусть A и X — множества.

$$AX = \emptyset \iff \{\{c1::X \subseteq \overline{A}.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 42

c02302f80f0143d0bb7cdc18b8929288

Пусть B и X — множества.

$$B\overline{X} = \emptyset \iff \{\{c1::B \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 43

96e46cd4122448b3a6c8a8543d793a05

Пусть A и B — множества. При каком условии система

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

имеет решение?

$B \subseteq \overline{A}$.

Note 44

5e8c77b24b74411e9c9d6769ee278443

Пусть A и B — множества. Каково решение системы

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

$$B \subseteq X \subseteq \overline{A}.$$

Note 45

f1c5541c7c884dba936d4374ff51af88

Пусть A и B — множества. Как в уравнении $AX \cup B\overline{X} \cup C = \emptyset$ избавиться от «свободного» множества C?

$C = \emptyset$ — условие совместности системы.

Note 46

86475fdea01944fba56365048d57b02d

Пусть A и B — множества.

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \text{\{\{c2::}\emptyset\text{\}\}} \quad \text{\{\{c3::} \iff \text{\}\}} \quad \text{\{\{c1::}A \cap B = \emptyset.\text{\}\}}$$

Note 47

8ca45754929648bda3ca5496c7cba70f

Операция {{c3::декартового произведения}} {{c2::дистрибутивна}} относительно {{c1::операций $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\triangle$.}}

Note 48

ad330727e2cb4c27970e8cb8fdcdeb23

Пусть A, B и C — множества. Равны ли множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$?

Их отождествляют и считают равными.

Note 49

06a0896de5284f44bac5ddff2170cbb1

Пусть A и B — множества. Для {{c2::конечных}} множеств,

$$|A \times B| = \text{\{\{c1::} |A| \cdot |B|\,.\text{\}\}}$$

Бинарные отношения

Note 1

cfc293ce41644e75b3df5d21a2bf036d

Пусть A и B — множества. {{c2::Бинарным отношением}} на множествах A и B называется {{c1::некоторое подмножество $A \times B$.}}

Note 2

3ba559fe73cf4c90b5b919ce1a45881a

Четыре способа задания бинарных отношений.

> Перечисление, правило, матрица, граф.

Note 3

c0ee3ac94a454d748e625d9e8c854763

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$aRb \overset{\text{def}}{\iff} \text{{{c1::}} } (a, b) \in R. \text{}}$$

Note 4

cef6486539a64268a1827f863aa7b9e1

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Обратным отношением к R}} называется {{c1::множество

$$\{(b, a) \mid aRb\}.$$

}}

Note 5

5e2c602b70a3473684a8ea79d93c7d68

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Обратное отношение к R}} обозначается {{c1::R^{-1}.}}

Note 6

d6e34168370e44feafa7891c93b2df04

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда

$$R^{-1} \subseteq \text{{{c1::}} } B \times A \text{}}.$$

Note 7

86c9a04a7ac14724b416780fec688449

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$(R^{-1})^{-1} = \{\{c1::R.\}\}$$

Note 8

e91e90545919488bb2c2ebe373b9e615

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Областью определения R}} называется {{c1::множество

$$\{x \mid \exists y : xRy\}.$$

}}

Note 9

08e952c62da84566a99743eb4c6c48a5

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Область определения R}} обозначается {{c1::$D(R)$,}} {{c1::δ_R}} или {{c1::$\operatorname{dom} R$.}}

Note 10

13e35bd817d9438690104754dc4d016d

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Областью значений R}} называется {{c1::множество

$$\{y \mid \exists x : xRy\}.$$

}}

Note 11

051cc32e89b94beebd49875c952f6b5b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Область значений R}} обозначается {{c1::$E(R)$,}} {{c1::ρ_R}} или {{c1::$\operatorname{im} R$.}}

Note 12

c0426f6bec33477e9bc759610c4d426b

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. {{c2::Композицией R и S}} называется {{c1::множество

$$\{(a, c) \mid \exists b : aRb \text{ и } bSc\}.$$

}}

Note 13

41418613a7934da4ab810abfcdf24e1a

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. {{c2:: композиция R и S}} обозначается {{c1::

$$R \circ S.$$

}}

Note 14

78bbe389ea094b0aad40c370c5092937

Является ли операция композиции бинарных отношений коммутативной?

> Нет.

Note 15

63f83037312e4f29a81de945fb387d06

Является ли операция композиции бинарных отношений ассоциативной?

> Да.

Note 16

1530beb1e1c24540a8be6f534775cca0

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения.

$$(R \circ S)^{-1} = \text{\{\{c1::}S^{-1} \circ R^{-1}.\text{\}\}}$$

Note 17

10fae1eae25a48a2998a9be7d6af2e4d

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}}. Отношение R называется {{c2::несимметричным,}} если {{c1::оно не симметрично, не асимметрично и не антисимметрично.}}

Note 18

8e02e778a9a5426fa89340cd47a6a0c5

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} — бинарное отношение. Отношение R называется {{c2::интранзитивным,}} если {{c1::

$$aRb \text{ и } bRc \implies \overline{aRc}.$$

}}

Note 19

fdbc65b9ca3c4a5c8c62ece25b744e92

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} — бинарное отношение. Отношение R называется {{c2::нетранзитивным,}} если {{c1::оно не транзитивно и не интранзитивно.}}

Note 20

f3fcca348ef844da9d3cf01b1e27fe1f

Матрица A называется {{c2::бинарной,}} если {{c1::все её элементы принадлежат множеству $\{0, 1\}$.}}

Note 21

25d02bbd94644780a0346254f22a07df

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::A и B конечны.}} {{c2::Матрицей отношения R}} называется {{c1::бинарная матрица

$$\left(a_i R b_j\right) \sim |A| \times |B| \,.$$

}}

Note 22

ce9cf9f0367d40f9bbdd914eb95eb396

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, A и B конечны. {{c2::Матрица отношения R}} обозначается {{c1::$\|R\|$.}}

Note 23

1f23045998c647aca7a97bcf2a5b5d31

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::$x \in A$.}} {{c1::Множество $\{b \mid xRb\}$}} называется {{c2::образом элемента x при отношении R.}}

Note 24

65b799e6a5bc4b01bff56d2146031199

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in A$. {{c2::Образ элемента x при отношении R}} обозначается {{c1::$R(x)$.}}

Note 25

477523df314842d1ad7c5a4d978f2f7a

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::$x \in B$.}} {{c1::Множество $\{a \mid aRx\}$}} называется {{c2::прообразом элемента x при отношении R.}}

Note 26

5150bf45802b4bad925b14f51a0d2f24

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in B$. {{c2::Прообраз элемента x при отношении R}} обозначается {{c1::$R^{-1}(x)$.
}}

Note 27

3348d69b0cf149a8a70f5ec94b05b306

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c2::$X \subseteq A$.}}

$$\{\{c3::R(X)\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R(x).\}\}$$

Note 28

5c26a7f17db242d7b8db989512093cc6

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c2::$X \subseteq B$.}}

$$\{\{c3::R^{-1}(X)\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R^{-1}(x).\}\}$$

Note 29

5b5ba1073a2e479f8b8eca3f6c2c7329

Пусть A множество. {{c1::Отношение $\{(x, x) \mid x \in A\}$}} называется {{c2::тождественным отношением на A.}}

Note 30

c1e1caa30e724485b938627008bc28d0

Пусть A множество. {{c2::Тождественное отношение на A}} обозначается {{c1::E.}}

Note 31

1dc3c3c6dff84c6f8ba496ed57840291

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::рефлексивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$E \subseteq R.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 32

ebabe4fca55b4c1c89734c5895e06ff8

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::анти-рефлексивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap E = \emptyset.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 33

0b173912f3f54d539053ec72781173bf

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::симметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R = R^{-1}.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 34

1d0d52561f0b48f8a96ed987369af728

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::антисимметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap R^{-1} \subseteq E.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 35

92c95593c51a4ac08d44f6be1cf69e5e

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::асимметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap R^{-1} = \emptyset.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 36

3fb92e0a21764e979cf2dce095e95aea

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::транзитивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \circ R \subseteq R.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 37

045dab85eeaa4728b61896649dc1ba75

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}A \leqslant B\text{\}\}} \overset{\text{def}}{\iff} \text{\{\{c1::}a_{ij} \leqslant b_{ij} \quad \forall i, j.\text{\}\}}$$

Note 38

3b1e7f3609054643ae820caaeae6db2a

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}A < B\text{\}\}} \overset{\text{def}}{\iff} \text{\{\{c1::}A \leqslant B \text{ и } A \neq B.\text{\}\}}$$

Note 39

cfdc6aac0b1d4a87b2bec698ca44ce30

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Матрицы A и B называют {{c2::несравнимыми,}} если {{c1::не выполняется ни $A \leqslant B$, ни $B \leqslant A$.}}

Note 40

303fa2bd38f446e59e6690ebc8c9c824

Бинарную операцию {{c2::«или»}} так же называют логистическим {{c1::сложением.}}

Note 41

46107ba23b0a4fcdaaa341d70b37861c

Бинарную операцию {{c2::«и»}} так же называют логистическим {{c1::умножением.}}

Note 42

1c8c345204344de49b5b669a648c128d

{{c2::Операция поэлементного умножения матриц}} называется {{c1::произведением Адамара.}}

Note 43

5510b762349a41cc87225739c6fe6dc0

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. {{c2::Произведение Адамара матриц A и B}} обозначается {{c1::$A \circ B$}} или {{c1::$A \odot B$.}}

Note 44

5054e224483f4cc28f2739f6fad9f517

Пусть $R, S \subseteq A \times B$ — бинарные отношение.

$$\{\{c2:: \|R \cap S\| \}\} = \{\{c1:: \|R\| \odot \|S\| .\}\}$$

Note 45

93467a16ee87438cbc954b8b71d23aa4

Пусть $R, S \subseteq A \times B$ — бинарные отношение.

$$\{\{c2:: \|R \cup S\| \}\} = \{\{c1:: \|R\| + \|S\| \quad \text{(с логистическим сложением).}\}\}$$

Note 46

1c75356f6fe44393ae1e2c195bed3c1e

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения.

$$\{\{c2:: \|R \circ S\| \}\} = \{\{c1:: \|R\| \cdot \|S\| \quad \text{(с логистическим сложением).}\}\}$$

Note 47

525cce9b6e944f94911754eec1fc824b

Пусть $R, S \subseteq A \times B$ — бинарные отношение.

$$\{\{c2::R \subseteq S\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1:: \|R\| \leqslant \|S\| .\}\}$$

(в терминах матриц)

Note 48

1b250fddc61e44539e477e7d17458d9b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::транзитивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$\|R\|^2 \leqslant \|R\| \qquad \text{(с логистическим сложением).}$$

}}

«В терминах матриц»

Note 49

bb1c4dba55ad47adbacfd250e1f39101

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. {{c2::Множество классов эквивалентности R}} обозначается {{c1::$[A]_R$.
}}

Note 50

c54eb7123d974c8aba9972163019b4ac

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности, $a \in A$. {{c2::
Класс эквивалентности, порождённый a,}} обозначается {{c1::
$[a]$.}}

Note 51

b21c1b2e3c504807a89717a4205b3fdf

Пусть A — множество. {{c2::Разбиение множества A}} обозначается {{c1::$\langle A \rangle$.}}

Note 52

3d8bf9b65a4b4898be5460faaaecab86

Пусть $R \subseteq A \times A$ — бинарное отношение. {{c2::Транзитивным замыканием R}} называют {{c1::наименьшее транзитивное отношение на A, включающее R.}}

Note 53

08c79ddd7572454f9ecc2f3580a39674

Пусть $R \subseteq A \times A$ — бинарное отношение. Если {{c2::R транзитивно,}} то транзитивное замыкание R есть {{c1::само R.}}

Note 54

e7b56866ed8e4192a45f157195f949e4

Пусть $R \subseteq A \times A$ — бинарное отношение. {{c3::Транзитивным сокращением R}} называется {{c2::минимальное отношение R' на A}} такое, что {{c1::транзитивное замыкание R' совпадает с транзитивным замыканием R.}}

Note 55

6de64f5b2a734fa0a32f7312d9f29346

{{c3::Диаграмма Ха́ссе}} — это вид диаграмм, используемый для представления {{c1::конечного частично упорядоченного множества}} в виде {{c2::графа его транзитивного сокращения.
}}

Элементы комбинаторики

Note 1

48bfce03d7414c5ab08f51dd7162fe63

{{c2::r-элементный набор из n-элементного множества}} называется {{c1::выборкой объёма r из n элементов.}}

Note 2

9c40042b9af64db3823fd0fc687379f5

{{c2::Выборку объёма r из n элементов}} так же называют {{c1::(n, r)-выборкой.}}

Note 3

7b9c414597ef428981257c73511e44d2

{{c2::(n, r)-выборка, в которой элементы могут повторяться,}} называется {{c1::(n, r)-выборкой с повторениями.}}

Note 4

6afeb348dbbf4ce7a258ad26ba469c48

{{c2::(n, r)-выборка, в которой элементы попарно различны,}} называется {{c1::(n, r)-выборкой без повторений.}}

Note 5

ef4dbbc893164d0db276530cb20c94c7

{{c2::Упорядоченная (n, r)-выборка}} называется {{c1::(n, r)-перестановкой.}}

Note 6

514e05b8ce994556a7d4f31540bfee43

Число {{c1::(n, r)-перестановок без повторений}} обозначается

{{c2::

$$P(n, r).$$

}}

Note 7

400452c068e84e42a0865821bd703a7b

Число {{c2::(n, r)-перестановок с повторениями}} обозначается

{{c1::

$$\widehat{P}(n, r).$$

}}

Note 8

376b9f21513d43118cf832e0ad6f8ef0

{{c2::Неупорядоченная (n, r)-выборка}} называется {{c1::(n, r)-сочетанием.}}

Note 9

6470ab31727449d8a82512cafaea2837

Число {{c2::(n, r)-сочетаний без повторений}} обозначается {{c1::

$$C(n, r)$$

}}

Note 10

ca7c36f0138749fb90d8876a44c92a24

Число {{c2::(n, r)-сочетаний с повторениями}} обозначается {{c1::

$$\widehat{C}(n, r)$$

}}

Note 11

59712aabfb56413995a990d0c381fbee

Пусть $n \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$.

{{c2::$(n)_r$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$n(n-1)\cdots(n-r+1).$}}

Note 12

a10b62e86e38446c85f4bb8c5807d6c2

Биномиальный коэффициент из n по r обозначается

{{c1::C_n^r}} или {{c1::$\binom{n}{r}.$}}

Note 13

3221712b5dda4ebe9e522f4508804522

$\binom{n}{r} \stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$\frac{(n)_r}{r!}$}}

Note 14

e1ac7a181662466fa92a7768e3bb6899

$$P(n, r) = \{\{c1::(n)_r\}\}$$

Note 15

4722cda874c44899a9bc36727640274a

$$\widehat{P}(n, r) = \{\{c1::n^r.\}\}$$

Note 16

bdb9dd6722f644019fedc6c94810b129

$$C(n, r) = \{\{c1::\binom{n}{r}.\}\}$$

Note 17

a46501a9e6f54ccbb15eb513c9b73039

$$\widehat{C}(n, r) = \{\{c1::\binom{n+r-1}{n-1}.\}\}$$

Алгебра логики

Note 1

d782cd98cdeb44098d0d1c31a6912d8d

Кратко булев набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ обозначается {{c1::$\widetilde{\alpha}^n$}} или {{c1::$\widetilde{\alpha}$.}}

Note 2

b4eabdff1da9430caa51dea1f7973ebb

{{c2::Множество всех двоичных наборов длины n}} называют {{c1::n-мерным булевым кубом.}}

Note 3

ae679a4256e04958a9d0d03ce4b174a2

{{c2::n-мерный булев куб}} обозначается {{c1::B^n}} или {{c1::E_2^n.}}

Note 4

c06059c4d3014e8f8d7762ecb2e7fb4e

Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^n$. {{c2::Расстоянием Хэмминга между $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ }} называется {{c1::число координат, в которых наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ различны.}}

Note 5

4b632fb9309f40b5b4286d3acbc0f06d

Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^n$. {{c2::Расстояние Хэмминга между $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$}} обозначается {{c1::$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$.}}

Note 6

37fb9e894285459ea68b457c8ce5d2d3

Булевы наборы $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ называются {{c2::соседними,}} если {{c1::

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1.$$

}}

Note 7

96ae235391374f19821a21b56b6d8b98

Булевы наборы $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ называются {{c2::противоположными, }} если {{c1::

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n.$$

}}

Note 8

463c6576cc6b4f2cb06d5c75b36c3db1

{{c2::Множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$}} будем обозначать через {{c1::

$$P_2(X^n).$$

}}

Note 9

d4d14bf7854d445e80552d7c67d03d4f

$$\|P_2(X^n)\| = \text{{{c1::}} } 2^{2^n}. \text{}}}$$

Note 10

152863b499e64f64b2374c749fbde8ad

{{c1::Константы $0, 1$}} являются {{c2::нульместными}} булевыми функциями.

Note 11

d06f0289418d4a41b071c552a48bff09

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. Тогда {{c2::переменные

$$x_1, x_2, \ldots, x_2$$

}} называются {{c1::аргументами функции f.}}

Note 12

a0b4e4b264844402aed619c4fd37ca24

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. Что есть $T(f)$?

> Таблица, в которой слева — значения аргументов, справа — значения функции.

Note 13

bf9b50dc17e84201a627f5c871ea6c31

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. {{c2::Таблица $T(f)$}} называется {{c1::таблицей истинности f.}}

Note 14

1122c8a455b64cf789b394df752b821e

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. Что есть $\Pi_{k,n-k}(f)$?

> Таблица, в которой слева — значения k аргументов, сверху — значения остальных аргументов, на пересечении — значение функции.

Note 15

903d8fda79124586a7240910bb5d8a70

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. В каком порядке идут значения аргументов в таблице $\Pi_{k,n-k}$?

> Слева направо, сверху вниз.

Note 16

53de4b3157f34550908c2cc6c8752a37

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. Что есть N_f?

> Множество наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Note 17

ec43c333201b45f28e9a03f6a2828c27

Как булева функция задаётся в виде вектора значений?

> Значения функции в лексикографическом порядке следования наборов аргументов.

Note 18

6b8ed8864e3f468bb75dec0ad534e2b6

Как строится разложение булевой функции по нескольким переменным?

> Аналогично разложению по одной построить дизъюнкцию по всем возможным значениям этих переменных.

Note 19

3915fbd594044a7782a5ecfb1b697c23

Пусть f — булева функция. Переменная x_i называется {{c2:: фиктивной,}} если {{c1:: f выражается формулой, не содержащей x_i.}}

Note 20

ca616b103ccb43dbbb362f5dcf0fa7f6

Пусть f — булева функция. Переменная x_i называется {{c2::существенной,}} если {{c1::она не является фиктивной.}}

Note 21

1a853308fb53438c836240f876a13076

Пусть f — булева функция. Как показать, что x_i является существенной переменной?

> Найти два набора аргументов, отличающихся только значением x_i, для которых отличается значение f.

Note 22

b171f4d5373543008b3c7165b170294d

Пусть $x_i \in X^n$ и $\sigma \in B$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}x_i^\sigma\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} \begin{cases} x_i, & \sigma = 1, \\ \bar{x}_i, & \sigma = 0. \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 23

3ff8ee76361d4f8aa2dc6817fb8e23c5

Пусть $x_i \in X^n$ и $\sigma \in B$. Выражение x_i^σ называется {{c1::буквой.
}}

Note 24

434c03fe1f394ebf9ed47f45f7432dcc

Что называется конъюнкцией над множеством переменных?

> Конъюнкция набора букв из этих переменных.

Note 25

285409914ff4434dba7d33024928ee2c

Что называется дизъюнкцией над множеством переменных?

> Дизъюнкция набора букв из этих переменных.

Note 26

08a4fb8d8f014dfab25d4e1bb8a7f2e3

Конъюнкция (или дизъюнкция) над множеством переменных называется {{c2::элементарной,}} если она {{c1::не содержит двух одинаковых переменных.}}

Note 27

69bac32971cb4720860b4dd4a9d453cb

{{c2::Число букв}} в элементарной конъюнкции (или дизъюнкции) называется {{c1::её рангом.}}

Note 28

085748c48aca434f80ee81ccc4326795

Что считают элементарной конъюнкцией нулевого ранга?

> Константу 1.

Note 29

54299e611ec9467c80fdf0edb992ffda

Что считают элементарной дизъюнкцией нулевого ранга?

> Константу 0.

Note 30

7daec66acbc147049ae871ee63127e67

{{c1::Дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций}} называется {{c2::дизъюнктивной нормальной формой.}}

Note 31

9da6ac44d6864608adffeff2f2653b9e

{{c1::Конъюнкция попарно различных элементарных дизъюнкций}} называется {{c2::конъюнктивной нормальной формой.}}

Note 32

4b63a16430be4e91a44d687409d1a59f

Дизъюнктивная нормальная форма называется {{c2::совершенной,}} если {{c1::все её элементарные конъюнкции имеют максимальный ранг.}}

Note 33

7f6e14160f284a26b1685ab037b732a0

Конъюнктивная нормальная форма называется {{c2::совершенной,}} если {{c1::все её элементарные дизъюнкции имеют максимальный ранг.}}

Note 34

5f9836f8024544a29c0d75faa28110d8

Что для элементарной конъюнкции означает обладание максимальным рангом?

> Она содержит все переменные.

Note 35

5c8cca9d57834de1a77e826c87fcff5f

Что называется минимальным термом набора переменных?

> Элементарная конъюнкция, содержащая все эти переменные.

Note 36

487bd0adfeec4611abb3e25da2b5c9d7

{{c2::Минимальный терм}} сокращается как {{c1::минтерм.}}

Note 37

bbfcc84390d84f24abd0aee0aa1dfc13

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция. Тогда

$$f(\widetilde{x}^n) = \text{{{c1::}} x_i \cdot f|_{x_i=1} \vee \bar{x}_i \cdot f|_{x_i=0}. \text{}}}$$

«{{c2::Теорема разложения для д.н.ф.}}»

Note 38

45d478dc3b0b46789b3b2af3d10d0c35

Каждая булева функция {{c3::единственным образом}} представляется в виде {{c1::совершенной}} дизъюнктивной (или конъюнктивной) нормальной формы {{c2::своих аргументов.
}}

Note 39

3115335543484943b10f4139847114fa

Каждая булева функция единственным образом представляется в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы своих аргументов. В чём ключевая идея доказательства?

> С.д.н.ф. состоит из минтермов, отвечающих единицам в векторе значений.

Note 40

ad0588753e0342ea901fb670f955419b

Как строится с.д.н.ф. по таблице значений булевой функции?

> Для каждой единицы строится соответствующий минтерм.

Note 41

86b0370b79784d5cb1f61f8d43ea62ca

Как строится с.к.н.ф. по таблице значений булевой функции?

> Для каждого нуля строится соответствующая элементарная дизъюнкция.

Note 42

d5f6af188d8a41b2a3a644065c3ffa60

Логическая операция {{c2::«не-и»}} так же называется {{c1::штрихом Шеффера.}}

Note 43

5cb3b093852847ad992d8f92afed8778

В булевой алгебре, {{c2::штрих Шеффера}} обозначается {{c1::$x_1 \mid x_2$.}}

Note 44

53029bbedc0b455e801cee6510a98bf5

В чём смысл штриха Шеффера?

▌ Аргументы не могут быть истинными одновременно.

Note 45

77f305f399f947bd90023950db2c7072

Пусть $\widetilde{x} \in B^2$. Как читается выражение «$x_1 \mid x_2$»?

▌ x_1 и x_2 не совместны.

Note 46

ec1d6d17cbb045b8abb57d404f0e5314

Логическая операция {{c2::«не-или»}} так же называется {{c1::стрелкой Пирса.}}

Note 47

5bc24294b87949fe93f07f9db9363cc5

В булевой алгебре, {{c2::стрелка Пирса}} обозначается {{c1::$x_1 \downarrow x_2$.}}

Note 48

8c3f9b67e62f4865a81c11d4cf2258c8

В чём смысл стрелки Пирса?

▌ Оба аргумента ложны.

Note 49

44e41888826f48bb87b5d52cfffdff82

Пусть $\widetilde{x} \in B^2$. Как читается выражение «$x_1 \downarrow x_2$»?

▌ Ни x_1, ни x_2.

Note 50

811fe08112ea4d4184e59731f1744d49

В алгебре логики, {{c2::сложение по модулю 2}} обозначается {{c1::$\oplus$.}}

Note 51

e2f54e00eb6649a2924ef3362262984c

В алгебре логики, $\overline{a \sim b} =$ {{c1::$a \oplus b$}}.

Note 52

c2e62b1e91d7494ba8a272bc7d96ae90

В алгебре логики, $\overline{a \oplus b} =$ {{c1::$a \sim b$}}.

Булевы алгебры

Note 1

20f3d9e66cae48b4872cde6c9ed57d3a

Что есть верхняя граница в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

> Элемент $\geqslant$ любому элементу множества.

Note 2

43fa1e0fee2c4a718e26e0c7f9c37c46

Что есть нижняя граница в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

> Элемент $\leqslant$ любому элементу множества.

Note 3

0ac55444db6e4fed8fa19d402da0fde0

Что есть супремум в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

> Наименьшая из верхних границ.

Note 4

7f565979844841de8441229417e3e1c8

Что есть инфимум в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

> Наибольшая из нижних границ.

Note 5

b6e17bbaad124d3ebd6e98b8381a867f

Какое множество рассматривается в определении решётки?

> Частично упорядоченное.

Note 6

99e77ba59fe64260b79e25d9f28cad08

Какое частично упорядоченное множество называется решёткой?

> Любое двухэлементное подмножество имеет sup и inf.

Note 7

37a3e12e05de4cdfab62d0dea07344d1

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $a, b \in X$. Тогда

$$\{\{c2::a \vee b\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sup\{a, b\}.\}\}$$

Note 8

c9da1f844e3f4bd9bbe116283730ceeb

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $a, b \in X$. Тогда

$$\{\{c2::a \wedge b\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\inf\{a, b\}.\}\}$$

Note 9

95e0104c61f1411a8b36c0dccc9a0c7d

Решётку так же можно определить как универсальную алгебру с операциями {{c1::$\wedge$ и $\vee$.}}

Note 10

647880d6a2d84657b6ed1d688cf8a568

Какие аксиомы должны выполняться в определении решётки как универсальной алгебры?

> Идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, поглощение.

Note 11

a9dc77aa008449b2a79f45c128715ce9

В определении решётки {{c1::свойство идемпотентности}} на самом деле выводится из {{c2::свойства поглощения.}}

Note 12

a70eaa64be014d1f8d32db2187ac39b0

{{c1::

$$a \wedge a = a \quad \text{и} \quad a \vee a = a.$$

}}

«{{c2::Идемпотентность}}» (из определения решётки)

Note 13

3d74bd246a8448588f6d80ab75840d4e

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $a, b \in X$. Тогда

$$\{\{c2::a \leq b\}\} \iff a \wedge b = \{\{c1::a\}\}.$$

Note 14

900809a351c54ff4a39993d52ae1e388

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $a, b \in X$. Тогда

$$\{\{c2::a \leq b\}\} \iff a \vee b = \{\{c1::b\}\}.$$

Note 15

33c337ecec8e4e5e8457ad2312f7a0ce

Решётка называется {{c2::дистрибутивной,}} если {{c1::в ней $\wedge$ и $\vee$ обоюдно дистрибутивны.}}

Note 16

e6915cd9a90b49cdbba81443ba0a14ab

{{c2::Нулём}} {{c3::частично}} упорядоченного множества называется {{c1::его наименьший элемент.}}

Note 17

12dd64fc8d0648eca210d44a0b7e5ae5

Ноль частично упорядоченного множества обозначается {{c1:: $\mathbf{0}$.}}

Note 18

730dc345dc804811be6c1f82b9350a94

{{c2::Единицей}} {{c3::частично}} упорядоченного множества называется {{c1::его наибольший элемент.}}

Note 19

543c12d0c8214d79ac9fca56bb2ec02e

Единица частично упорядоченного множества обозначается {{c1::$\mathbf{1}$.}}

Note 20

b4bef54da8aa41d1863424cc97398a77

Пусть A — множество. Тогда ноль $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ — это {{c1::$\emptyset$.}}

Note 21

8c05502489844ebb8fa500e583edd7d1

Пусть A — множество. Тогда единица $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ — это {{c1::A.

}}

Note 22

94ed508a73f945fc8a6b4c1803cef774

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $x, y \in X$. Элементы x и y называются {{c2::дизъюнктивными,}} если {{c1::

$$x \wedge y = \mathbf{0}.$$

}}

Note 23

ef9dbbf66ec64b659e16cdb4bb830f5e

Пусть $(X, \leqslant)$ — решётка, $x, y \in X$. Элемент y называется {{c2::дополнением x,}} если {{c1::

$$x \wedge y = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad x \vee y = \mathbf{1}.$$

}}

Note 24

eb16dfe04f534fcd95dfce6b0eab9636

Для каких решёток имеет смысл понятие дополнения?

> Для решёток с нулём и единицей.

Note 25

2b49c7f09eeb4fa09c205e6ef5416e6b

Для начала, булева алгебра — это {{c1::решётка.}}

Note 26

e823cfd66b9a4b7aba2bcfeb6ae82e0c

Какую решётку называют булевой алгеброй?

> Дистрибутивную; с нулём и единицей; каждый элемент имеет дополнение.

Note 27

520a3543220b49dea92ab712105e5b01

Как называют дистрибутивную решётку с нулём и единицей, каждый элемент которой имеет дополнение?

> Булева алгебра.

Note 28

55a7f39372324f8692538470e13cebb7

В определении {{c3::булевой алгебры}} {{c2::свойство поглощения }} можно заменить на {{c1::закон тождественности.}}

Note 29

7c150397485f4e128ed7a0aa7d34f6cc

{{c1::

$$a \wedge 1 = a \quad \text{и} \quad a \vee 0 = a.$$

}}

«{{c2::Закон тожественности}}»
(из определения булевой алгебры)

Note 30

5486cf3db94f4129bf68eed1e3194939

Каждый элемент булевой алгебры имеет {{c1::единственное дополнение.}}

Note 31

eb156d1ea036435a89006401851c38d6

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра, $x \in X$. {{c2::Дополнение x}} обозначается {{c1::$\overline{x}$.}}

Note 32

2b88d7541f5641d5ac8623f8a78c3384

Каждый элемент булевой алгебры имеет единственное дополнение. В чём ключевая идея доказательства?

> Умножить $\overline{x}$ на $x \vee x^*$, где x^* — второе дополнение.

Note 33

6baeed8e7301491ea3dfca0b6fd7750d

Для булевых алгебр верны {{c1::все основные законы}} алгебры логики.

Note 34
4faa85785e62481db5f40d0026177f6e

В чём ключевая идея доказательства законов Де-Моргана для булевых алгебр?

> Показать, что правая часть является дополнением по определению.

Note 35
d7959d4251d34780bf02493d717f2c6a

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра, $f, g : X^n \to X$. Функции f и g называются {{c2::взаимно двойственными,}} если {{c1::

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

}}

Note 36
13cfa6ef0b5649518e5f73d626669239

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра, $f : X^n \to X$. {{c2::Функция, двойственная к f,}} обозначается {{c1::f^*.}}

Note 37
dd63d9bebef6405bad499b8ac612b3d2

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра, $f : X^n \to X$.

$$(f^*)^* = \text{\{\{c1::}f.\text{\}\}}$$

Note 38
f46b68627d9a4a49ae7759f86e1198b1

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра, $f : X^n \to X$. Функция f называется {{c1::самодвойственной,}} если {{c2::$f^* = f$.}}

Note 39
f94e35db4a9047a7bee032a5cae511d0

Пусть $f : B^n \to B$. Если

$$f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}),$$

то

$$f^* = \text{\{\{c1::}(\bar{\alpha}_{2^n}, \ldots, \bar{\alpha}_1).\text{\}\}}$$

Note 40

cdf74506714e476ca5dfe2e59883d032

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра. $\mathbf{0}^* =$ {{c1::$\mathbf{1}$}}.

Note 41

7a361ce9cbe84f77b236a38d96ee29a6

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра. $\mathbf{1}^* =$ {{c1::$\mathbf{0}$}}.

Note 42

a83c28cd41a247e0905cb9b46bc30c39

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра. $\wedge^* =$ {{c1:: $\vee$ }}.

Note 43

32ec500412874f4cb81569a5483da5c9

Пусть $(X, \leqslant)$ — булева алгебра. $\vee^* =$ {{c1:: $\wedge$ }}.

Note 44

1ed5cffea17343ef9953a3bed3081904

В алгебре логики, $\oplus^* =$ {{c1:: $\sim$ }}.

Note 45

c7ec94fd1e224455bb8338bc967651b5

В алгебре логики, $\sim^* =$ {{c1:: $\oplus$ }}.

Note 46

6d5ed061caee4a21b5e098a197019176

В алгебре логики, $|^*=$ {{c1:: $\downarrow$ }}.

Note 47

d99e4bd6874d47aeb0185f58610c8ab8

В алгебре логики, $\downarrow^*=$ {{c1:: $|$ }}.

Note 48

abf23bd834914587b24eb8d0cf857c59

Пусть $f : B \to B$ и $f(x) = x$. Тогда $f^* =$ {{c1::f}}.