Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {2 Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

} называется {1 многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {1 он единственен.}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p-q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \xrightarrow[x \to a]{} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{2 Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a} обозначается {1 $T_{a,n} f$.}

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{3 Формула Тейлора для многочленов}»

Пусть p — {2 многочлен степени не более n.} Тогда {1

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \overset{\text{def}}{=} {}_{\{1} f(a).{}_{\}}$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\Big((x-a)^k\Big)^{(n)}\Bigg|_{x=a} = {}_{\{1} \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} {}_{\}}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{3 Свойство n раз дифференцируемой функции}»

Пусть {2 $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

} Тогда {1 $f(x) = o((x-a)^n), x \to a$.}

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{_1 \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|. \}$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x - a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon|x - a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c - a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon|c - a|^n < \varepsilon|x - a|^n$$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$, {2 $f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x - a)^n), \quad x \to a.$$

}

Тогда $f(x) =$ {1$o((x - a)^{n+1}), \quad x \to a.$}

Note 19

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{3 Формула Тейлора-Пеано}»

Пусть {2 $f : D \subset R \to \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a. } Тогда {1

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

> По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

> $$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{^{2}\Delta_{a,b}\} \overset{\text{def}}{=} \{^{1} \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{^{2}\widetilde{\Delta}_{a,b}\} \overset{\text{def}}{=} \{^{1} \begin{cases} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{cases} \}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{^{2}R_{a,n}f\} \overset{\text{def}}{=} \{^{1}f - T_{a,n}f\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{3 Формула Тейлора-Лагранжа}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, {2 $f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.} Тогда {1 найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {1 теореме Лагранжа}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x?

> $$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{_{2} e^x \} = \{_{1} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{_{2} \sin x \} = \{_{1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right). \}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{_{2} \cos x \} = \{_{1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{_{2} \ln(1+x) \} = \{_{1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{3 Обобщённый биномиальный коэффициент} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \{_{1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \}, \quad \alpha \in \{_{2} \mathbb{R} \}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{2 (1+x)^{\alpha} \} = \{1 \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^{k} + o(x^{n}) \,. \}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^{\alpha}$ называют {1 биномиальным разложением}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^{k} = (-1)^{k}.$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{2 (1+x)^{-1} \} = \{1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} x^{k} + o(x^{n}) \,. \}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {3 функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа.} Тогда если {2

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

} то {1

$$|R_{a,n} f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n \, dx = {\scriptstyle \{1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C {\scriptstyle \}}, \quad ({\scriptstyle \{2} n \neq -1 {\scriptstyle \}}).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} \, dx = {\scriptstyle \{1} \ln|x| + C {\scriptstyle \}}.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = {\scriptstyle \{1} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C {\scriptstyle \}}.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \, dx = {\scriptstyle \{1} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C {\scriptstyle \}}.$$

Note 5

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x \, dx = {\scriptstyle \{1} \frac{a^x}{\ln a} + C {\scriptstyle \}}.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

«{5 Критерий возрастания функции на промежутке}»

Пусть {4 $f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).} Тогда

- {2 $f \nearrow$ на $\langle A, B\rangle$} {3 $\iff$ } {1 $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}

Note 2

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

«{5 Достаточное условие строгого убывания функции на промежутке}»

Пусть {4 $f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).} Тогда

- {2 $f \nearrow\!\!\nearrow$ на $\langle A, B\rangle$} {3 $\Longleftarrow$ } {1 $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}

Note 3

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

«{5 Критерий постоянства функции на промежутке}»

Пусть {4 $f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).} Тогда

- {2 f постоянна на $\langle A, B\rangle$} {3 $\iff$ } {1 $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [A, B]$.}

Note 4

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть {3 $f, g \in C[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B).} Тогда
Если {2 $f(A) = g(A)$ и

$$f'(x)g'(x) \quad \forall x \in [A, B\rangle,$$

} то {1

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [A, B\rangle.$$

}

Note 5

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {2 точкой максимума функции f,} если {1

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leqslant f(a).$$

}

Note 6

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {2 точкой строгого максимума функции f,} если {1

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}

Note 7

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {2 точкой минимума функции f,} если {1

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geqslant f(a).$$

}

Note 8

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {2 точкой строгого минимума функции f,} если {1

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}

Note 9

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если {2 точка a является точкой минимума или максимума функции f,} то a называется {1 точкой экстремума f.}

Note 10 98f3cebf02ca464ab3cf9e94355caaa2

«{3 Необходимое условие экстремума}»

Пусть {2 $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a.} Тогда {1 если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$. }

Note 11 96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется {1 стационарной точкой функции f,} если

{2

$$f'(a) = 0.$$

}

Note 12 99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {1 точка $a \in (A, B)$} называется {2 критической точкой,} если {1 либо a стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке a.}

Note 13 40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда все {2 точки экстремума f, принадлежащие A, B,} лежат в {1 множестве её критических точек.}

Note 14 e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

{3 $\max f([a, b])$} $=$ {1 $\max\left\{f(a), f(b), \max f(C)\right\}$, }

где C — {2 множество критических точек f.}

Note 15 909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

«{4 Достаточное условие экстремума в терминах f'}»

Пусть {3 $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$.} Если {1

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

} то {2 a — точка строго максимума f.}

Note 16

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

«Достаточное условие экстремума в терминах f'»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если {1

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

} то {2 a — точка строго минимума f.}