

# Лекция 07.09.22

## Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

Абсолютное значение мультииндекса  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  так же называют порядком  $\alpha$ .

## Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

Многочленом  $n$  переменных со значениями в  $\mathbb{R}^m$  называется отображение вида

$$x \mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha},$$

где  $\{c_{\alpha}\} \subset \mathbb{R}^m$  — конечное семейство и  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ .

## Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Если  $p \neq 0$ , то степень многочлена  $p$  называется числом

$$\max \{|\alpha| : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

}}

## Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Если  $p \equiv 0$ , то степень многочлена  $p$  полагают равной  $-\infty$ .

## Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Степень многочлена  $p$  обозначается

$$\deg p.$$

}}

## Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть  $p : x \mapsto \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$  — многочлен. Многочлен  $p$  называется однородным, если для всех  $c_{\alpha} \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

## Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\{a \in \text{Int } E\}$ ,  $\{s \in \mathbb{Z}_+\}$ . Многочлен  $p$  степени не выше  $s$ , для которого

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

называется многочленом Тейлора  $f$  порядка  $s$  в точке  $a$ .

## Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Многочлен Тейлора  $f$  порядка  $s$  в точке  $a$  обозначается

$$T_{a,s}f.$$

}}

## Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Если  $T_{a,s}f$  существует, то он единственный.

## Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Если  $T_{a,s}f$  существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

Разность двух многочленов есть  $o(\|x - a\|^s)$ ,  $x \rightarrow a$ .

## Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если

$$p(x) = o(\|x - a\|^s), \quad x \rightarrow a,$$

то  $p \equiv 0$ .

## Note 12

f753051ba1584ac3809a7b03ecf311f7

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x - a\|^s)$  при  $x \rightarrow a$ , то  $p \equiv 0$ . Каков первый шаг в доказательстве?

Рассмотреть два случая:  $a = 0$  и  $a \neq 0$ .

## Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В чём ключевая идея доказательства?

Разбить  $p$  на однородные компоненты и рассмотреть  $p(tx)$  как многочлен переменной  $t$ .

## Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . Как представляется многочлен  $p(tx)$  в доказательстве?

$$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$

где  $p_k$  — однородный многочлен степени  $k$ .

## Note 15

8d6ec9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В доказательстве, что нужно показать про многочлен  $p(tx)$ ?

$$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

## Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x\|^s)$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $p \equiv 0$ . В доказательстве мы получили, что  $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$  при  $t \rightarrow 0$ . Что дальше?

Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

## Note 17

833c8cc496364d6fa95263abc312262d

Пусть  $p$  — многочлен степени не выше  $s$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если  $p(x) = o(\|x - a\|^s)$  при  $x \rightarrow a$ , то  $p \equiv 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $a \neq 0$ )?

$p(a + h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ .

## Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .  $T_{a,0}f$  существует тогда и только тогда, когда  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

## Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \text{Int } E$ .  $T_{a,1}f$  существует тогда и только тогда, когда  $f$  дифференцируемо в точке  $a$ .

## Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то

$$f(a + h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

## Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть два случая:  $m = 1$  и  $m > 1$ .

## Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m > 1$ )?

■ Следует из случая  $m = 1$  для координатных функций.

## Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ )?

■ Индукция по  $s$  начиная с  $s = 1$ .

## Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ , база индукции)?

■ Выразить  $f(a+h)$  через дифференциал, а его через производные.

## Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда если  $f$  и все его частные производные порядка не выше  $s$  равны 0 в точке  $a$ , то  $f(a+h) = o(\|h\|^s)$  при  $h \rightarrow 0$ . В чём ключевая идея доказательства (случай  $m = 1$ , индукционный переход)?

Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

## Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

«Формула Тейлора-Пеано»

## Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ec26

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

$$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq s.$$

## Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  раз дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда

$$\{T_{a,s}f(x)\} = \sum_{k=0}^s \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}.$$

(в терминах дифференциалов)

## Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $\{\{c2::\text{многочлен степени не выше } s,\}$   
 $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \{\{c1::0.\}$$

## Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\}\}.\}$$

## Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}\}\}$   $\{\{c6::\text{дифференцируемо } s + 1 \text{ раз на } E,\}$   
 $\{\{c5::a \neq x \text{ и } \Delta_{a,x} \subset E.\}$  Тогда  $\exists c \in \{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,x}\}$  для которой

$$\{\{c3::R_{a,s}f(x)\}\} = \{\{c1::\frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.\}$$

« $\{\{c7::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

## Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  
 $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда  $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,x}$  для которой

$$R_{a,s}f(x) = \frac{d_c^{s+1}f(x-a)}{(s+1)!}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции

$$t \mapsto f(a + th).$$

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$|R_{a,s}f(x)| \leq \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \frac{|d_c^{s+1}f(x-a)|}{(s+1)!}.$$



## Лекция 14.09.22

### Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $E$ , и  $\Delta_{a,b} \subset E$ . Тогда  $\exists c \in \tilde{\Delta}_{a,b}$ , для которой

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a).$$

}}

«Теорема о среднем»

### Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций  $n$  вещественных переменных?

■ Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

### Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

■ Нет, только для функций.

### Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения 2-х переменных, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

■  $x \mapsto (\cos x, \sin x)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ .

### Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$\|R_{a,s} f(x)\| \leq \frac{1}{(s+1)!} \cdot \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|d_c^{s+1} f(x - a)\|.$$

«Формула Тейлора-Лагранжа для отображений»

## Note 6

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть  $f : E \subset \{\{c5::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c5::\mathbb{R}^m\}\} \{\{c4::\}$  непрерывно дифференцируемо  $s + 1$  раз на  $E$ ,  $a \neq x$  и  $\Delta_{a,x} \subset E$ . Тогда

$$\{\{c3:: \|R_{a,s}f(x)\|\} \} \leq \{\{c2:: \frac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\|x-a\|)^{s+1}, \}$$

где

$$M = \{\{c1:: \max_{|\alpha|=s+1} \sup_{c \in \tilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\| < +\infty.\}$$

$$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$$

## Note 7

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы  $\mathbb{R}^{n+m}$  в виде  $\{\{c1::(x,y),\}$  где  $x \in \{\{c2::\mathbb{R}^n\}\}, y \in \{\{c2::\mathbb{R}^m\}\}$ .

## Note 8

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть  $f : E \subset \{\{c4::\mathbb{R}^{n+m}\}\} \rightarrow \{\{c4::\mathbb{R}^m\}\}$  и существует  $\psi : \{\{c3::\mathbb{R}^n\}\} \rightarrow \{\{c3::\mathbb{R}^m\}\}$  такая, что  $\{\{c2::$

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

$\}$  то  $\psi$  называют  $\{\{c1::$  неявным отображением, порождённым уравнением  $f(x, y) = 0$ . $\}$

## Note 9

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением  $f(x, y) = 0$ ,

$$f'_x(a) := \{\{c1:: \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \} \} \sim \{\{c2:: m \times n.\}$$

## Note 10

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке  $a$ . Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением  $f(x, y) = 0$ ,

$$f'_y(a) := \left[ \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a) \right] \sim \{m \times m\}$$

## Note 11

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^s(E)$ . Тогда если

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

то существуют такие  $\delta > 0$  и  $\psi \in C^s(V_\delta(x^0))$ , что

$$f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x) \\ \forall (x, y) \in V_\delta(x_0, y_0).$$

«Теорема о неявном отображении»

## Note 12

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение  $\psi$ , введённое в теореме о неявном отображении называется **неявным отображением**, порождённым уравнением  $f(x, y) = 0$  в окрестности точки  $(x^0, y^0)$ .

## Note 13

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

$$d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\dots) = 0.$$

## Note 14

dd7bb23f22a042dab6dacf623aca0455

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x^0, y^0) \in E$ . Если в окрестности точки  $(x^0, y^0)$  уравнение  $f(x, y) = 0$  порождает неявную функцию, то  $f$  называется **локально разрешимым** в точке  $(x^0, y^0)$ .

## Note 15

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть  $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Если  $f$  локально разрешимо в любой точке  $E$ , то  $f$  называется локально разрешимым на  $E$ .