

Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть W — линейное пространство, $V \subset W$. Тогда V называется линейным подпространством, если

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « V есть линейное подпространство в W » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — тоже линейное пространство.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в \mathbb{R}^n ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{\{c2:m \times n\}\}}$ такая, что $\{\{c1::$

$$V = \ker A.$$

$\}\}$

Note 7

eecf9dfacd2b41218565f8582275c53b

Пусть $V = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \triangleleft \mathbb{R}^n$. Как найти матрицу такую, что $\ker A = V$?

Строки матрицы A – (транспонированная) ФСР соответствующей СЛАУ.

Note 8

dc6727a8588c412db845f88bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$. Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в W ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций a_1, a_2, \dots, a_n тоже является их линейной комбинацией.

Note 9

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W – линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

Да, всегда.

Note 10

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть W – линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

■ Нет, не всегда.

Note 11

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2:: V_1 + V_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}$$

Note 12

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}$$

Note 13

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

Note 14

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$ и e_1, e_2, \dots, e_k —
 $\{\{c2:: \text{базис в } V.\}$ Тогда в W существует базис вида $\{\{c1::$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

Note 15

7e41e14368b94d50be88ce5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Note 16

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1 , $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2 . Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

Объединить их в одну систему $\{e_i, f_j, g_k\}$.

Note 17

d6aa3bacb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1 , $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2 . Как показать, что $\{e_i, f_j, g_k\}$ — базис в $V_1 + V_2$?

Показать, что $\mathcal{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}$.

Note 18

28934bf74ae1452191c8e81b8cef0cf5

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$, $\{e_i, f_j\}$ — базис в V_1 , $\{e_i, g_k\}$ — базис в V_2 . В чём ключевая идея доказательства того, что

$$\mathcal{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}?$$

Если $\sum_k \lambda_k g_k \in V_1$, то она принадлежит и $V_1 \cap V_2$.

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве V . Тогда матрицей перехода от базиса e к базису e' называют матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса e к базису e' обычно обозначают $C_{e \rightarrow e'}$.

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \rightarrow e'}$?

Столбцы $C_{e \rightarrow e'}$ — это координаты векторов e'_1, e'_2, \dots, e'_n в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Сумму $V_1 + V_2$ называют прямой суммой, если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств V_1 и V_2 обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$ — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
- Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

Показать, что если $a = \begin{matrix} v_1 \\ \in V_1 \end{matrix} + \begin{matrix} v_2 \\ \in V_2 \end{matrix} \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«**Монотонность размерности подпространств**»

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

1. $\dim V \leq \dim W$,
2. $\dim V = \dim W \iff V = W$.

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение $f : V \rightarrow W$ называется **линейным отображением**, если

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V$,
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V$.

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \rightarrow W$ называется **изоморфизмом линейных пространств**, тогда и только тогда, когда f — биекция.

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \rightarrow W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно называют матрицу A , переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.

Note 15

74ef91d29ce940f8b894341a5836c812

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Матрица оператора f в паре базисов e, \tilde{e} в пространствах V и W соответственно обозначается

$$M_{e, \tilde{e}}(f).$$

}}

Note 16

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в V , $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ — базис в W . Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

| i -ый столбец — это координаты $f(e_i)$ в базисе $\{\tilde{e}_j\}$.

Note 17

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

|

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 18

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

|

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где λ — координаты вектора из V в базисе e .

Note 19

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

Note 20

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и \tilde{e} соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e . Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \rightarrow e'$?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' = \det A$.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора $f : V \rightarrow V$ называется определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора $f : V \rightarrow V$ называется ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы A обозначается $\text{tr } A$.

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$. Тогда $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$.

Note 8

e0b3b870a8444704a8569d15e3f761ed

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда

$$\operatorname{tr}(BA) = \{\{c1::\operatorname{tr}(AB)\}\}$$

Note 9

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$ называется $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

Note 10

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

Note 11

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

Note 12

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft V$?

Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f .

Note 13

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft W$?

■ Нет, $\ker f \triangleleft V$.

Note 14

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft W$?

Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 15

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft V$?

■ Нет, $\operatorname{im} f \triangleleft W$.

Note 16

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V , $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 17

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Дополнить базис в $\ker f$ до базиса в V и построить из них базис в $\operatorname{im} f$.

Note 18

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор,

- e_1, e_2, \dots, e_k — базис в $\ker f$;
- $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в V .

Как выглядит базис в $\operatorname{im} f$?

$$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n).$$

Note 19

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2:: \operatorname{rk} f\}\} = \{\{c1:: \dim \operatorname{im} f\}\}$$

(в терминах размерностей)

Note 20

2acbea4466f54360bc19c2065a44fc95

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как показать, что

$$\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{im} f.$$

Показать, что в координатном выражении $\operatorname{im} f$ есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора f .

Note 21

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. $\{\{c1:: \text{Пространство } V \triangleleft W\}\}$ называется $\{\{c2:: \text{инвариантным относительно оператора } f\}\}$ если $\{\{c1::$

$$f(V) \subset V.$$

$\}\}$

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \rightarrow W$.

|

$\ker f, \operatorname{im} f$.

Note 23

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, e_1, \dots, e_n — такой базис в W , что e_1, \dots, e_k (где $k \leq n$) — базис в инвариантном подпространстве $V \triangleleft W$. Тогда матрица оператора f в базисе e_1, \dots, e_n примет вид

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

где T_{11} — это матрица $f|_V$ в базисе e_1, \dots, e_k .

Лекция 28.02.22

Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор $f : W \rightarrow W$ называется невырожденным, если $\det f \neq 0$.

Note 2

2e565e676da342fb8cdac4d62de05e8

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. f невырождено;
2. $\ker f = \{0\}$;
3. $\operatorname{im} f = V$;
4. $\operatorname{rk} f = \dim V$;
5. f — биекция.

Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — невырожденный оператор, то f — биекция?

Показать, что если f задаётся матрицей A , то f^{-1} задаётся матрицей A^{-1} .

Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Как доказать, что если f — биекция, то f — невырожденный оператор.

$$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением оператора f , если

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда вектор $v \in V \setminus \{0\}$ называется собственным вектором оператора f , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}}

Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

Спектром оператора называется множество собственных значений этого оператора.

Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

Спектр оператора f обозначается $\text{spec } f$.

Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда λ является собственным значением f тогда и только тогда, когда

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}}

Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора f .

Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора f .

Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной λ ?

Если A — матрица оператора f , то $|A - \lambda E|$ — многочлен переменной λ .

Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$|A - \lambda E| = |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$$

Лекция 07.03.22

Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Характеристический многочлен оператора f обозначается

$$\chi_f.$$

}}

Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f . Тогда

$$\chi_{f|_V} \text{ — делитель } \chi_f.$$

Note 3

6deecf304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор и $V \triangleleft W$ инвариантно относительно f . Тогда

$$\chi_{f|_V} \text{ — делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что χ_f — определитель соответствующей квазитреугольной матрицы оператора f .

Note 4

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Тогда множество всех собственных векторов f , отвечающих собственному значению λ , объединённое с нулём, называется собственным подпространством оператора f , отвечающим собственному значению λ .

Note 5

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. Собственное подпространство f , отвечающее собственному значению λ , обозначается $V_f(\lambda)$.

Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fc38f36

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . В кратком выражении

$$\llbracket c2:: V_f(\lambda) \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket c1:: \ker(f - \lambda E) \rrbracket$$

Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

■ Да, всегда, потому что $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$.

Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c1:: \text{Размерность } V_f(\lambda) \rrbracket$ называют $\llbracket c2:: \text{геометрической кратностью собственного значения } \lambda \rrbracket$

Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c2:: \text{Геометрическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$ обозначается $\llbracket c1:: S_f(\lambda) \rrbracket$

Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c1:: \text{Кратность } \lambda \text{ как корня } \chi_f \rrbracket$ называют $\llbracket c2:: \text{алгебраической кратностью собственным значением } \lambda \rrbracket$

Note 11

856a933db82641cd87b0ee5f34647b1a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . $\llbracket c2:: \text{Алгебраическая кратность собственного значения } \lambda \rrbracket$ обозначается $\llbracket c1:: m_f(\lambda) \rrbracket$

Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Тогда $\{\{c1::S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)\}\}$

Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f . Тогда $S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)$.

В чем основная идея доказательства?

| $V_f(\lambda)$ инвариантно относительно f
 $\implies \chi_f$ делится на $\chi_f|_{V_f(\lambda)}$.

Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f , $\{\{c2::\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}\}\}$ Тогда

$$\{\{c3::\chi_{\tilde{f}}(t)\}\} = \{\{c1::(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}\}\}$$

Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — собственное значение f , $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$. Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

| \tilde{f} представляется матрицей λE порядка $\dim V_f(\lambda)$.

Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

$\{\{c2:: \text{Оператор } f : x \mapsto \lambda x, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},\}\}$ называется $\{\{c1:: \text{скаляр-ным оператором.}\}\}$

Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть $\{\{c3:: f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}\}$ f называется $\{\{c2:: \text{диагонализуемым оператором,}\}\}$ если $\{\{c1:: \text{существует базис в } V, \text{ в котором матрица оператора } f \text{ является диагональной.}\}\}$

Note 18

b01b69fc3ebc4c0c839a0c153f85d041

Диагональная матрица с элементами a_1, a_2, \dots, a_n на диагонали обозначается

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Если в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матрица оператора f равна $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то e_1, e_2, \dots, e_n — собственные векторы f .

Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Если в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матрица оператора f равна $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то a_1, a_2, \dots, a_n — собственные значения f .

Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда оператор f диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого собственного значения λ

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

Покзать, что если f представляется матрицей $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то по определению

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_i - \lambda).$$

Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — различные собственные значения оператора f ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов v_1, \dots, v_n линейно независима.

}}

Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — различные собственные значения оператора f ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов v_1, \dots, v_n линейно независима.

В чем основная идея доказательства?

Применяем f к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

Note 25

cfc344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

Составить систему векторов из базисов в $V_f(\lambda_j)$ и показать, что она является базисом V .

Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

Из условия $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$, а значит система содержит $\deg \chi_f = \dim V$ элементов.

Note 27

5fd54902e7f34d00bad3222902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов v_1, \dots, v_n , где $v_j \in V_f(\lambda_j)$.

Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор $f : V \rightarrow V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор $f : V \rightarrow V$ имеет $\dim V$ различных собственных значений, то f диагонализуем.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{spec } f \quad 1 \leq S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda) = 1 \\ \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda). \end{aligned}$$

Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Оператор

$$P : \begin{matrix} v_1 & + & v_2 \\ \in V_1 & & \in V_2 \end{matrix} \mapsto v_1, \quad V \rightarrow V$$

называется оператором проектирования на V_1 параллельно V_2 .

Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\text{im } P = V_1.$$

Note 32

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\ker P = \{c1:: V_2.\}$$

Note 33

27181bd7474e4091ace4fa9dba20ac0f

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$\text{спес } P = \{c1:: \{0, 1\}.\}$$

Note 34

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$m_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

Note 35

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$S_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

Note 36

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$m_P(1) = \{c1:: \dim V_1.\}$$

Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $P : V \rightarrow V$ — оператор проектирования на V_1 параллельно V_2 . Тогда

$$S_P(1) = \{\{c1: \dim V_1.\}\}$$

Лекция 14.03.22

Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$. Вектор v называется **корневым вектором высоты k** оператора f , если существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$\begin{aligned}(f - \lambda E)^k v &= 0, \\ (f - \lambda E)^{k-1} v &\neq 0.\end{aligned}$$

}}

Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневой вектор высоты 1 оператора f — это **собственный вектор** этого оператора.

Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

λ из определения корневого вектора оператора f — это всегда **собственное значение** f .

Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что λ из определения корневого вектора всегда является **собственным значением**?

■ Из определения $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0$.

Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть v — **корневой вектор** высоты $k \geq 2$ оператора f . Тогда $(f - \lambda E)v$ — **корневой вектор** высоты $k - 1$.

Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть v — **корневой вектор** высоты $k \geq 2$ оператора f . Тогда $(f - \lambda E)v$ — **корневой вектор** высоты $k - 1$. В чем основная идея доказательства?

Из определения корневого вектора

$$(f - \lambda E)^{k-1} \cdot (f - \lambda E)v = 0$$

и аналогично с неравенством нулю для степени $k - 2$.

Note 7

50c2388c1fa843dfa616f85d4cecfaf

Система $\{ \text{корневых векторов разных высот,} \}$ отвечающих $\{ \text{одному и тому же собственному значению оператора,} \}$ $\{ \text{линейно независима.} \}$

Note 8

de47eb56e219455a8497a97ad90b861d

Как доказать, что система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению оператора, линейно независима.

Приравнять линейную комбинацию к нулю и домножать её на $(f - \lambda E)^{k_j-1}$ в порядке убывания высот k_j корневых векторов системы.

Note 9

187218f20c2b46ab9309b3385f2012f4

Пусть $\{ \text{ } v \text{ — корневой вектор высоты } k \text{ оператора } f. \}$ Тогда система $\{ \text{ } \}$

$$v, (f - \lambda E)v, (f - \lambda E)^2v, \dots, (f - \lambda E)^{k-1}v$$

$\{ \text{линейно независима.} \}$

Note 10

f77f36f44a0a4dbfb7fe6d8a6b58db75

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f . Тогда система

$$v, (f - \lambda E)v, (f - \lambda E)^2v, \dots, (f - \lambda E)^{k-1}v$$

линейно независима. В чем основная идея доказательства?

Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению λ .

Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система $\{\{c3: \text{корневых векторов,}\} \text{ отвечающих} \{c2: \text{разным собственным значениям оператора,}\} \{c1: \text{линейно независима.}\}$

Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть v — корневой вектор высоты k оператора f . Тогда $\{c2: (f - \lambda E)^{k-1}v\} - \{c1: \text{это собственный вектор оператора } f.\}$

Note 13

59e965333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

Домножить произвольную линейную комбинацию на

$$(f - \lambda_1 E)^{k_1-1} (f - \lambda_2 E)^{k_2} \dots (f - \lambda_l E)^{k_l}$$

и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{спес } f$. $\{c1: \text{Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению } \lambda, \text{ объединённое с нулём,}\} \text{ называется } \{c2: \text{корневым подпространством, отвечающим собственному значению } \lambda.\}$

Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. $\{c2: \text{Корневое подпространство, отвечающее собственному значению } \lambda,\} \text{ обозначается } \{c1: K_f(\lambda).\}$

Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336e4a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Всегда ли $K_f(\lambda) \triangleleft V$?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$.

$$\|N_{f,k}(\lambda)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\ker(f - \lambda E)^k\|$$

Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $k \in \mathbb{N}$. Всегда ли $N_{f,k}(\lambda) \triangleleft V$?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Как $K_f(\lambda)$ выражается через $N_{f,k}(\lambda)$?

$$K_f(\lambda) = \bigcup_k N_{f,k}(\lambda)$$

Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$.

Note 21

efec3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Тогда $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$. В чем основная идея доказательства?
TODO (?)

Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Какова общая структура доказательства?

Показать, что сумма $K_f(\lambda_j)$

1. является прямой,
2. порождает все пространство V .

Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ прямая?

Линейная комбинация векторов v_j из $K_f(\lambda_j)$ — это линейная комбинация корневых векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все различные собственные значения f . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма $K_f(\lambda_j)$ порождает все V ?

$$\sum_{j=1}^l \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^l m_f(\lambda_j)$$

Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

Жорданова клетка — это квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты q , соответствующая некоторому числу λ , обозначается

$$J_q(\lambda).$$

Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

Жорданова матрица — это блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в V матрица A оператора f имеет жорданов вид, то A называют жордановой нормальной формой оператора f .

Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в V матрица оператора f имеет жорданов вид, то этот базис называют жордановым базисом оператора f .

Note 31

4617ac459f3846a1b581c79a9c044b7e

«Теорема о жордановой нормальной форме»

Любой оператор в векторном пространстве над полем \mathbb{C} имеет жорданову нормальную форму.

Note 32

d8f181b2d5004a47bd308a35849cddec

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $\lambda \in \text{spec } f$. Как для $k > 0$ соотносятся $N_{f,k}(\lambda)$ и $N_{f,k+1}(\lambda)$?

Для всех k меньше некоторого q

$$N_{f,k}(\lambda) \subsetneq N_{f,k+1}(\lambda),$$

а для всех $k \geq q$:

$$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$

Note 33

414400f8f69b41b58c7d5b2930735317

Каков первый шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Найти все собственные значения оператора f .

Note 34

a79be36515f64439b4db0f075099cbc3

Каков второй шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Для каждого собственного значения λ найти все подпространства $N_{f,k}(\lambda)$.

Note 35

adf2c488db4640a1aba232fba8286d63

Каков третий шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Построить жорданову лестницу в каждом из корневых подпространств f .

Note 36

2fe8afa7a09b49a1a7219ce868aaf67e

Каков заключительный шаг в построении жордановой нормальной формы оператора $f : V \rightarrow V$?

Объединить все построенные базисы в одну систему и построить матрицу f в полученном базисе.

Лекция 21.03.22

Note 1

61582b48320a46c3ad047eec84da3eb3

Пусть $A, A' \in \mathbb{C}^{\{c3:n \times n\}}$. Тогда матрицы A и A' называются $\{c2: \text{подобными,}\}$ если $\{c1: \text{существует невырожденная матрица } T \text{ такая, что}\}$

$$A = T A' T^{-1}.$$

$\}}}$

Note 2

6366e6bbaa1149eb8bba346a3cc38654

Отношение подобия матриц обозначается символом $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

\sim

$\}}}$

Note 3

1ae63106d8d0480b82ef6f9e9b3d62bb

Подобие матриц является отношением $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\}}}$

Note 4

de743729325e43f79f35a7b8c22d5bb2

Любая $\{c2: \text{квадратная матрица}\}$ подобна $\{c1: \text{своей жордановой нормальной форме,}\}$

(следствие из $\{c3: \text{теоремы о жордановой форме}\}$)

Note 5

82aa01fcbfb7476d84662ca5802dae5b

$\{c2: \text{Две квадратные матрицы подобны}\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1: \text{их жордановы формы совпадают с точностью до перестановки клеток,}\}$

(следствие из $\{c4: \text{теоремы о жордановой форме}\}$)

Note 6

198e1f3eef67411c89f83a35ade066d2

Пусть $A, \Lambda, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = T^{-1} \Lambda T$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$A^k = \{c1: T^{-1} \Lambda^k T.\}$$

Note 7

c1cf4048c475426683c811de00771765

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Тогда

$$p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k A^k, \quad \text{где } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E.$$

Note 8

59cb3566c41d4eca89ef63e626740c4e

Пусть $A, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$, $p \in \mathbb{C}[x]$. Тогда

$$p(TAT^{-1}) = T p(A) T^{-1}.$$

Note 9

ad579382cf8a42caabf0b8b6a5a4d76f

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in D$.

$$f(\lambda E) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) E.$$

Note 10

be2002dbe01149aa91e229d1c991143e

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Тогда

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} f(A_{11}) & 0 \\ 0 & f(A_{22}) \end{bmatrix}.$$

Note 11

455a3d16cf6744b39c1d1e21cab4e7f5

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in D$. Как определяют значение

$$f(J_k(\lambda))?$$

Представляют $f(J_k(\lambda))$ как $f(\lambda E + \varepsilon)$ и далее используют разложение f в ряд Тейлора в точке λE .

Note 12

c435657fd33d4705ae2de65b4bf5c682

Пусть $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in D$. Для каких k и λ определено значение $f(J_k(\lambda))$?

Должен существовать многочлен $T_{\lambda,k}f$.

Note 13

3450a4591ff748cb856f4578b3cda3c2

Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Многочлен p называется аннулирующим многочленом для матрицы A , если

$$p(A) = 0.$$

}}

Note 14

34b1edb015384033870e10717e8bbdb2

«Теорема Гамильтона-Кэли»

Характеристический многочлен квадратной матрицы является для неё аннулирующим.

Note 15

07bbead6e007486e93d2daa598a265b6

В чем ключевая идея доказательства теоремы Гамильтона-Кэли?

Для любого корневого вектора x имеем $\chi_A(A)x = 0$.

Лекция 28.03.22

Note 1

c4787ae5340942d2a27db89ea5f9d4df

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} . Билинейная форма f в V называется $\{\{c2\}$ положительно определённой, $\}$ если $\{\{c1\}$ для любого $v \in V$

$$f(v, v) \geq 0; \quad f(v, v) = 0 \iff v = 0.$$

$\}$

Note 2

18f442014f0e4614a642e429958b8931

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} . $\{\{c2\}$ Скалярным произведением в V $\}$ называется $\{\{c1\}$ симметричная положительно определённая билинейная форма в V . $\}$

Note 3

cea78871e8124a29945d3540057c0c68

$\{\{c2\}$ Евклидовым пространством $\}$ называется $\{\{c1\}$ вещественное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением $\}$.

Note 4

79a607edba4945a4a562d9b1fd8f2ce9

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} . Скалярное произведение векторов $v, w \in V$ обозначается $\{\{c1\}$

$$(v, w).$$

$\}$

Note 5

717ab493f110448bb867a49b37d29d83

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v \in V$. $\{\{c2\}$ Длиной вектора v $\}$ называется $\{\{c1\}$ величина $\sqrt{(v, v)}$. $\}$

Note 6

7bc89a880fb244a78c3e204575ac9005

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v \in V$. $\{\{c2\}$ Длина вектора v $\}$ обозначается $\{\{c1\}$ $|v|$ или $\|v\|$. $\}$

Note 7

de4db3a6688f4b198b8238b0e07dfce7

Длину вектора в евклидовом пространстве так же ещё называют $\{\{c1::\text{нормой этого вектора.}\}$ В таком случае чаще используется обозначение $\{\{c2::\|v\|.\}\}$.

Note 8

c0b109c4be9e4749ad794e9e38fffb2d

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v_0 \in V$, $\{\{c3::r \in \mathbb{R}_+\}\}$.
 $\{\{c2::\text{Сферой радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$ называют $\{\{c1::\text{множество}\}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| = r\}.$$

$\}$

Note 9

09b61a41cf5f45109c79e7cc61f63740

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v_0 \in V$, $r \in \mathbb{R}_+$.
 $\{\{c2::\text{Сфера радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$ обозначается $\{\{c1::$

$$S_r(v_0).$$

$\}$

Note 10

e63df21bb26d42269a7a5d45c6b828b8

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v_0 \in V$, $\{\{c3::r \in \mathbb{R}_+\}\}$.
 $\{\{c2::\text{Шаром радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$ называют $\{\{c1::\text{множество}\}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| \leq r\}.$$

$\}$

Note 11

d0d10cbbdb664b428b1f3284ff5321f9

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v_0 \in V$, $r \in \mathbb{R}_+$.
 $\{\{c2::\text{Шар радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$ обозначается $\{\{c1::$

$$B_r(v_0).$$

$\}$

Note 12

a7021008185a411e99300286ac245d14

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$.

Векторы v и w называются сонаправленными, если

$$\exists \lambda > 0 \quad v = \lambda w.$$

}}

Note 13

0cfd3b2d9f17418eb0b8fd2dd36ef1d4

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$.

Углом между векторами v, w называется угол $\varphi \in [0, \pi]$ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

}}

Note 14

097fc51b1eab4a699e7110a38f0bd670

«Неравенство Коши-Буняковского»

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{v, w \in V\}$. Тогда всегда $|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$.

Note 15

570b086e7e1b48e3b3012778f4841d1e

В чем основная идея доказательства неравенства Коши-Буняковского?

Оценить дискриминант квадратного уравнения $\|v - \lambda w\|^2 = 0$ относительно неизвестной λ .

Note 16

96bb9d37dba3499d8890f7b3eb1f04d4

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v, w \in V$. Тогда

$$|(v, w)| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v \text{ и } w \text{ пропорциональны.}$$

Note 17

d1941ac59ee44c82b045d6d1e954e0d8

«Неравенство треугольника»

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v, w \in V$. Тогда

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

}}

Note 18

4759501bf4b84cf0acf58f945229396c

В чем основная идея доказательства неравенства треугольника?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(v + w, v + w) = \|v + w\|^2.$$

Note 19

5378eb0c9d81404c9cd8ca40925b9ce8

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v, w \in V$. Тогда

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff v \uparrow \uparrow w$$

Note 20

8238aebbcc724e708990b61d8a0e3603

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v, w \in V$. Векторы v и w называются ортогональными, если $(v, w) = 0$.

}}

Note 21

ce138d9eefe6445bbe72eb3cafe43e8

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} . Система векторов в V называется ортогональной, если её векторы попарно ортогональны.

Note 22

2dbaa8c8157c42e08de67ebd6cc42e47

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная система векторов в V . Тогда система $\{e_j\}$ линейно независима $\iff e_j \neq 0$ для всех j .

Note 23

d20a32cfc1c3440a9e22f5d28c36b9d5

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная система ненулевых векторов в V . Как показать, что система $\{e_j\}$ линейно независима?

Умножить линейную комбинацию векторов $\{e_j\}$, равную нулю, на e_i для произвольного i и показать равенство нулю i -ого коэффициента.

Note 24

b9cf4cdf374445c4bc8412c8ca72847c

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональный базис в V . Тогда координаты вектора v в базисе $\{e_j\}$ имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

Note 25

5a4e71f923b84eb5b5f3e2b66ea26470

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $v \in V$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональный базис в V . Как показать, что координаты вектора v в базисе $\{e_j\}$ имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}?$$

Вычислить (v, e_j) , разложив v по базису $\{e_j\}$.

Note 26

7ede17a5d2d049c690090d4850f4ef60

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} , $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортогональная линейно независимая система в V . Тогда

называют

$$\frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

коэффициентами Фурье вектора v в системе $\{e_j\}$.

Пусть V — евклидово пространство над \mathbb{R} . Система векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ в V называется ортонормированной, если её векторы попарно ортогональны и $\|e_j\| = 1$ для всех j .

Лекция 04.04.22

Note 1

48fccb0908e94a3bbfc768f249c233a4

Пример ортогональной системы в пространстве $C[0, 2\pi]$ со скалярным произведением

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} fg.$$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx.$$

Note 2

25230410b91dd47619feafd9dd1e3909e

«Ортогонализация Грама-Шмидта»

Пусть V — евклидово пространство, e_1, \dots, e_n — базис в пространстве V . Тогда всегда существует ортогональный базис a_1, \dots, a_n в V такой, что

$$a_j \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_j) \quad \forall j.$$

}}

Note 3

89394003d65441209a81ec6be5c7f2df

В чем основная идея доказательства истинности теоремы об ортогонализации Грама-Шмидта?

Положить

$$a_1 = e_1,$$

$$a_2 = e_2 + \alpha_1 a_1,$$

$$a_3 = e_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$$

...

Note 4

067af76850ea49929f538a99ef2fb445

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Множество

$$\left\{ w \in W \mid (v, w) = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

называется ортогональным дополнением к V .

Note 5

dc34194cc9a642aeb10ad2ba1cbab7ad

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Ортогональное дополнение к пространству V обозначается V^\perp .

Note 6

800460fc49ee4f3b915a92addaba5141

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Всегда ли $V^\perp \triangleleft W$?

■ Да, всегда.

Note 7

ab8d62b25a294edebe7a3735b84dab19

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

$$\dim V^\perp = \dim W - \dim V.$$

Note 8

70166548d05745278d7a8f9de584d211

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

$$V + V^\perp = V \oplus V^\perp = W.$$

Note 9

eee9a5f3a40047629e2192983ab08770

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$. Как показать, что $W = V \oplus V^\perp$?

■ Выбрать ортогональный базис в V , дополнить его до ортогонального базиса в W и показать, что дополнение — базис в V^\perp .

Note 10

53d600a53a4f48a7b4d1e3a3822918fe

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, e_1, \dots, e_k — ортогональный базис в V , e_1, \dots, e_n — ортогональный базис в W . Как показать, что e_{k+1}, \dots, e_n — базис в V^\perp ?

Показать, что $\mathcal{L}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и V^\perp равны как множества.

Note 11

a9fc50cec2cc442d87f7f6a551043a18

Пусть W — евклидово пространство, $\{V \triangleleft W, w \in W.\}$ Тогда проекция w на V параллельно V^\perp называется проекцией вектора w на V .

Note 12

bcb91b5b6d4048febe0fd4e8da7302e9

Пусть W — евклидово пространство, $\{V \triangleleft W, w \in W.\}$ Тогда проекция w на V^\perp параллельно V называется перпендикуляром, опущенным из w на V .

Note 13

4e448e8833f94547ad7848fd34666613

Пусть e_1, \dots, e_k — система векторов в евклидовом пространстве. Матрицей Грама системы e_1, \dots, e_k называют матрицу

$$\left[(e_i, e_j) \right] \sim k \times k.$$

}}

Note 14

3bff6be501ed49109d5041f018ecab96

Пусть e_1, \dots, e_k — система векторов в евклидовом пространстве. Матрица Грама системы e_1, \dots, e_k обозначается

$$G(e_1, \dots, e_k).$$

}}

Note 15

f45df626ca1d4db1866e3f7aae0c6f2a

Пусть W — евклидово пространство, $w \in W$, e_1, \dots, e_k — базис в $V \triangleleft W$. Как найти проекцию w_0 вектора w на V ?

$$G(e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w, e_1) \\ \vdots \\ (w, e_k) \end{bmatrix},$$

$$w_0 = e\alpha.$$

Лекция 18.04.22

Note 1

b04c0920040847d0a5d99e72e1d5f32f

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. Расстоянием от точки f до пространства V называется величина

$$\min \{ \|f - g\| \mid g \in V \}.$$

}}

Note 2

3c3b40b9167c47199457c3614706e26e

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. Расстояние от точки f до подпространства V обозначается

$$d(f, V).$$

}}

Note 3

3e4d6f8b3aae4c73806dfc7764e669e3

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$,

$$f = f_0 + f^\perp, \\ \in V \quad \in V^\perp$$

}} Тогда

$$d(f, V) = \|f^\perp\|.$$

Note 4

d34143b5a6f347ebbd35b66500be29d0

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. В чем основная идея доказательства равенства $d(f, V) = \|f^\perp\|$?

Представить f как $f^\perp + f_0$ и явно вычислить $\|f - g\|$ для $g \in V$.

Note 5

c3802fe76b8740e28ef0bb2ce4d4aca0

Пусть W — евклидово пространство, $f, g \in W$. Угол между векторами f и g обозначается

$$(\widehat{f, g}).$$

}}

Note 6

d84678ac809d4c229902770a60fb6c11

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. $\{\{c2::\text{Углом между вектором } f \text{ и подпространством } V\}\}$ называется $\{\{c1::\text{величина}$

$$\min \left\{ \widehat{(f, g)} \mid g \in V \right\}.$$

$\}\}$

Note 7

75d1e7b4a26f4f578bda51afa099e06

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. $\{\{c2::\text{Угол между вектором } f \text{ и подпространством } V\}\}$ обозначается $\{\{c1::$

$$\widehat{(f, V)}.$$

$\}\}$

Note 8

19d3715d268b4c07a6ec6013b8a60e50

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$, $\{\{c3::$

$$f = f_0 + f^\perp, \quad \begin{matrix} \in V \\ \in V^\perp \end{matrix}.$$

$\}\}$ Тогда

$$\{\{c2::\widehat{(f, V)}\}\} = \{\{c1::\widehat{(f, f_0)}\}\}.$$

Note 9

24059676faa84badb5f0199c24f6f28b

Пусть W — евклидово пространство, $V \triangleleft W$, $f \in W$. В чем основная идея доказательства равенства $\widehat{(f, V)} = \widehat{(f, f_0)}$?

| Сравнить для $g \in V$ величины $\cos(\widehat{(f, g)})$ и $\cos(\widehat{(f, f_0)})$.

Note 10

e0b0c8a4f09c400ea5decb5c86c75027

Пусть W — евклидово пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. $\{\{c1::\text{Угол между подпространствами } V_1, V_2\}\}$ обозначается $\{\{c2::$

$$\widehat{(V_1, V_2)}.$$

$\}\}$

Note 11

fe6711839e2e4292aa55fdd4f80c6c80

Пусть W — евклидово пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$.

$$\begin{aligned} \{\{c3::(\widehat{V_1}, \widehat{V_2})\}\} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \min \{(\widehat{v_1}, \widehat{v_2}) \mid v_1 \in L_1, v_2 \in L_2\}\}, \} \\ L_{1,2} &:= \{\{c2:: V_{1,2} \cap (V_1 \cap V_2)^\perp.\}\} \end{aligned}$$

Note 12

1b70f983a1ad42c5919ee83b15a479c3

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. $\{\{c2:: \text{Параллелепипедом, натянутым на систему векторов } \{a_j\}\} \text{ называется } \{\{c1:: \text{множество}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n k_j a_j \mid k_j \in [0, 1] \quad \forall j \in [1 : n] \right\}.$$

$\}$

Note 13

3fa74674fa86420ab3f78529ea808264

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. $\{\{c2:: \text{Параллелепипед, натянутый на систему векторов } \{a_j\}\} \text{ обозначается } \{\{c1::$

$$\Pi(a_1, \dots, a_n).$$

$\}$

Note 14

b967d3e120fc46c7b7b7bd6a4ffe07a8

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. $\{\{c2:: n\text{-мерный объём параллелепипеда } \Pi(a_1, \dots, a_n)\} \text{ обозначается } \{\{c1::$

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n).$$

$\}$

Note 15

a7e0867fc1bc4ede8b8c8baf077dec8

Пусть V — евклидово пространство, $\{\{c3:: a_1 \in V.\}$

$$\{\{c2:: \text{vol}_1 \Pi(a_1)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \|a_1\|.\}\}$$

Note 16

27fc106d10454b36acb1d4fdb4d5ebc6

Пусть V — евклидово пространство, $\{\{c3::\{a_j\}_{j=1}^n \subset V, n \geq 2.\}\}$

$$\{\{c2:: \text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \text{vol}_{n-1} \Pi(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot d(a_n, \mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1}))\} \}$$

Note 17

62dd58a35b6e41618c5f4c14ba96d7df

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\{\{c2:: (\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2\} \} = \{\{c1:: \det G(a_1, \dots, a_n)\} \}$$

Note 18

8803537671b2486285e407e1661e183c

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

На каком методе основано доказательство?

■ Индукция по n .

Note 19

4644b404d3cf48b3aa477e6cf6346d8a

Пусть V — евклидово пространство, $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

В чём основная идея доказательства (индукционный переход)?

■ Представить a_n как

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k + a^\perp,$$

■ где a^\perp — перпендикуляр из a_n на $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1})$.

Note 20

5825ffe0a68e4a83a7e469b67b266431

Откуда следует корректность определения величины

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)?$$

Из теоремы о связи $\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)$ с матрицей Грама.

Note 21

8167d79d15c5496986c4ed42e064fa03

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{C} . Чем определение скалярного произведения для векторных пространств над \mathbb{C} отличается от определения для пространств над \mathbb{R} ?

Линейность только по первому аргументу и

$$(v, w) = \overline{(w, v)}.$$

Note 22

b2db7b3282094eea8733437c52bba06d

Унитарным/эрмитовым пространством называется комплексное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

Note 23

dee379a767e44b7fbc29a556ce456b02

Пусть V — унитарное пространство, $v \in V$. Откуда следует, что $(v, v) \in \mathbb{R}$?

Из аксиом линейного пространства $(v, v) = \overline{(v, v)}$.

Note 24

5d93df02453b469989ec31cb02334953

Пусть V — унитарное пространство, $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v).$$

Пример определения скалярного произведения для \mathbb{C}^n .

|

$$(z, w) = \sum_j z_j \overline{w_j}.$$

Лекция 25.04.22

Note 1

dd4a52e4947c482987ee915067979415

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} . Рассмотрим V , как векторного пространства над \mathbb{R} , называется ове-
ществлением V .

Note 2

fce4b5036a48493086a124057e1f048d

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} . Ове-
ществление V обозначается $V_{\mathbb{R}}$.

Note 3

1502c0b949d740cc9b70927038d34e79

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} , $f \in \text{End } V$. Рассмотрим f как оператора $V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ называется ове-
ществлением f .

Note 4

8fd578e0ac514b2c826528aa165fb19a

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} , $f \in \text{End } V$. Ове-
ществление f обозначается $f_{\mathbb{R}}$.

Note 5

76444b467049412d855fd6a8bb955fef

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} , $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис
в V . Тогда $\{e_j\} \cup \{ie_j\}$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$.

Note 6

8b1e99362cbc41f9ad58dce068e5a358

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} . Тогда

$$\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \cdot \dim V.$$

Note 7

cc3fd18a829c481eb6a18fd4944621b2

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в комплексном про-
странстве, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис в V . Тогда для базиса

$$\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^{2n} = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$$

}} пространства $\{\{c5::V_{\mathbb{R}}\}\}$ имеем

$$\{\{c2::M_{\tilde{e}}(f_{\mathbb{R}})\}\} = \{\{c1::\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}, \quad \text{где } B + iC = M_e(f).\}\}$$

Note 8

cc938e458f944909a9c35a4d1dc9cea0

Пусть $\{\{c3::V - \text{линейное пространство над } \mathbb{R}.\}\}$

$$\{\{c2::V_{\mathbb{C}}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{(u, v) \mid u, v \in V\}.\}\}$$

Note 9

117bb526f78d4eceace2fdea3f410d63

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} , $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\{\{c2::i(u, v)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::(-v, u).\}\}$$

Note 10

f3dbbf009e9b4e94972dfdbf0af435f6

Как запомнить правило умножения в пространстве $V_{\mathbb{C}}$?

■ “Представить” элемент $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$ как $u + iv$.

Note 11

389f838bfe634a94bbac20ddb28d838

$\{\{c2::\text{Пространство } V_{\mathbb{C}}\}\}$ называется $\{\{c1::\text{комплексификацией про-}$
странства $V.\}\}$

Note 12

d7b4cacadaa641759cab38db5ae47b15

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых про-
странствах. Оператор $g : \{\{c3::W \rightarrow V\}\}$ называется $\{\{c2::\text{сопря-}$
жённым оператором к оператору $f.\}\}$ если $\{\{c1::$

$$(f(v), w) = (v, g(w)) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

}}

Note 13

e40069d511a1495fb9dd3107a6d11084

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. $\{\{c2:: \text{Сопряжённый оператор к оператору } f\}\}$ обозначается $\{\{c1:: f^*.\}\}$

Note 14

5b47c38358684d31a1d171bdc613fa5f

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать, что f^* линейен?

Показать, что $f^*(\lambda w) - \lambda f^*(w)$ ортогонален всем векторам в V . Аналогично для суммы.

Note 15

d9bfeeafc3314b3582a8263231d7301b

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать существование f^* ?

Явным образом найти его матрицу.

Note 16

d532583798ec4eafb0bcc5c1a718f50

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах. Однозначно ли определён оператор f^* ?

Да, однозначно.

Note 17

49ba268bb22b4db9858de680fb15c62b

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах, $\{\{c3:: \{e_i\} \text{ и } \{\tilde{e}_j\} - \text{ортонормированные базисы в } V \text{ и } W, \text{ соответственно.}\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: M_{\tilde{e},e}(f^*)\}\} = \{\{c1:: (M_{e,\tilde{e}}(f))^T.\}\}$$

Note 18

bb4d8ef0dcd644128b6a2e296af6f5d2

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в евклидовых пространствах, $\{e_i\}$ и $\{\tilde{e}_j\}$ — ортонормированные базисы в V и W , соответственно. Как показать, что

$$M_{\tilde{e},e}(f) = (M_{e,\tilde{e}}(f))^T?$$

■ Вычислить коэффициенты Фурье $(e_i, f^*(\tilde{e}_j))$.

Note 19

fa653acddda24b31ab20506ac8538332

Пусть $f : V \rightarrow W$ линейный оператор в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(f^*)^* = \{\{c1::f.\}\}$$

Note 20

cbcf9ad889c446d8de6ca2776680205

Пусть $f_1, f_2 : V \rightarrow W$ линейные операторы в эрмитовых пространствах, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)^* = \{\{c1::\bar{\lambda}f_1^* + \bar{\mu}f_2^*.\}\}$$

Note 21

6e9f045a1c4e4808bfcdb69523e55ac3

Пусть $f_1, f_2 : V \rightarrow W$ линейные операторы в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(fg)^* = \{\{c1::g^*f^*.\}\}$$

Note 22

1520bcac46ee4b76aefe766faef8769e

Пусть $f : V \rightarrow V$ линейный оператор в эрмитовом пространстве, v — собственный вектор операторов $\{\{c2::f \text{ и } f^*,\}\}$ отвечающий $\{\{c3::\text{собственным значениям } \lambda \text{ и } \mu\}\}$ соответственно. Тогда $\{\{c1::$

$$\mu = \bar{\lambda}.$$

$\}\}$

Лекция 16.05.22

Note 1

3954a1f946d54d49843bb75beba5c6a2

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp.$$

Note 2

2b5bf9cde3b944f3829f6df51e0a5d46

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

Note 3

82658444368d432c84797667377faa14

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$. В чём основная идея доказательства?

$$v \in \ker f^* \iff (v, f(w)) = 0 \quad \forall w.$$

Note 4

ac28c64b9e0843ec85ca8d67e40ff6d1

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$. В чём основная идея доказательства?

$$\text{Следует из равенства } \ker(f^*)^* = (\operatorname{im} f^*)^\perp.$$

Note 5

0b903e3801544d2a9284c6c06caa3e11

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $V \triangleleft W$. Тогда, если V инвариантно относительно f , то V^\perp инвариантно относительно f^* .

}}

Note 6

6a68e47fbd554019b4f16972953073da

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $V \triangleleft W$. Тогда, если V инвариантно относительно f , то V^\perp инвариантно относительно f^* . В чём основная идея доказательства?

$$\boxed{(v, f^*(w)) = (f(v), w) = 0 \quad \forall w \in V^\perp.}$$

Note 7

cb0fd56398174603b26c14a08091c430

Пусть $a, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \mu$. Как из равенства $\lambda a = \mu a$ следует, что $a = 0$?

$$\boxed{\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} a = 0.}$$

Note 8

398d95972a0746bb8ca3fe90ec7fafe6

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$f^* = f \implies \text{spec } f \subseteq \mathbb{R}.$$

Note 9

6eec0c089bb9471397a72db6e6ea7c4b

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $f^* = f \implies \text{spec } f \subseteq \mathbb{R}$. В чём основная идея доказательства?

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{spec } f \quad \lambda = \bar{\lambda}.}$$

Note 10

01f37aa032dc4ae184b41741f1009cba

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{x, y\} \subseteq V$. Тогда, если x и y — собственные векторы оператора f , отвечающие разным собственным значениям, то $x \perp y$.

Note 11

9aab3b15d5bd4c1db803f7d44757e9f2

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*$, $x, y \in V$. Тогда если x и y — собственные векторы оператора f , отвечающие разным собственным значениям, то $x \perp y$. В чём основная идея доказательства?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(f(x), y) = (x, f(y)).$$

Note 12

9cd8e8889d15407b9c8bc0d715fc7b96

«Спектральная теорема для самосопряжённых операторов»

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда если $f^* = f$, то в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора f .

Note 13

7e1c25eb54d844309b458da40780c8f1

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для самосопряжённых операторов?

Для $\lambda \in \text{spec } f$ имеем $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp$, но оба этих пространства инвариантны относительно f .

Note 14

4884039a91ca44c2a72e903879e0cb15

Почему в доказательстве спектральной теоремы для самосопряжённых операторов нам важно, что оба пространства в прямой сумме $V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp = V$ инвариантны относительно f ?

Из этого следует, что f представляется соответствующей квазидиагональной матрицей.

Note 15

b4ac85781d214b28a62641aa58b35dac

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*$, $\lambda \in \text{spes } f$. Почему пространство $V_f(\lambda)^\perp$ инвариантно относительно f ?

$V_f(\lambda)$ инвариантно относительно $f \implies V_f(\lambda)^\perp$ инвариантно относительно $f^* = f$.

Note 16

6a3db890388d426ba9b6f47900bb8d01

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $f = f^*$. Почему f не может не иметь действительных собственных значений?

Любой оператор имеет комплексные собственные значения, но из самосопряжённости следует, что эти значения действительны.

Note 17

ca9ea18afa5c40f8873a302849e8b0b3

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Оператор f называется унитарным, если

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

Note 18

7ba81b35301b4520996b24d87bc4fd09

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в евклидовом пространстве. Оператор f называется ортогональным, если

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

Note 19

c7ddf42a012945c888c4d5178b28f2f0

Пусть $f : V \rightarrow V$ — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения f сохраняет длины и углы.

Note 20

7671b924a9f647578fd2fe26e4253413

Пусть $f : V \rightarrow V$ — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения f сохраняет длины и углы. В чём основная идея доказательства?

Длины и углы выражаются через скалярное произведение.

Note 21

89e9f8ff95e74665b47de711b04ebf2e

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарен тогда и только тогда, когда

$$f^* = f^{-1}.$$

}}

(в терминах f^*)

Note 22

41a4909e68244e2e9fd1312185a42e07

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарен тогда и только тогда, когда

$$\|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in V.$$

}}

(в терминах норм)

Note 23

2ecb4d7e7be047b887fa8953465857cb

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда f унитарен тогда и только тогда, когда f переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

(в терминах базисов)

Note 24

55a699f79e064eb7cbad7d49660f64b

Пусть $A \in \mathbb{C}^{\{c3:n \times n\}}$. Матрица A называется $\{c2: \text{унитарной}\}$ если $\{c1: \$

$$\overline{A}^\perp = A^{-1}.$$

$\}$

Note 25

3ddc6bb6b47d44c6900bc4593cea65ba

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в $\{c3: \text{эрмитовом про-}$
 $\text{странстве.}\}$ Тогда $\{c2: f \text{ унитарен}\}$ тогда и только тогда, ко-
гда $\{c1: \text{матрица } f \text{ в ортонормированном базисе унитарна.}\}$

$\}$

(в терминах матриц оператора)

Note 26

a749d29f6a92475aa3bac79533cb3dfe

Пусть $f : V \rightarrow V$ — унитарный оператор. Тогда $\forall \lambda \in \text{spec } f$
имеем $\{c1: |\lambda| = 1.\}$

Note 27

1977a9b870034e868dc7565fb5174779

Пусть $f : V \rightarrow V$ — унитарный оператор. Тогда $\forall \lambda \in \text{spec } f$
имеем $|\lambda| = 1$. В чём основная идея доказательства?

■ Для $v \in V_f(\lambda) \setminus \{0\}$ рассмотреть $(f(v), f(v))$.

Note 28

f3a34c6f96f24f3c91b5b5cb5b85386d

Пусть $f : W \rightarrow W$ — унитарный оператор, $V \triangleleft W$. Тогда ес-
ли $\{c4: V \text{ инвариантно относительно } f,\}$ то $\{c1: V^\perp\}$ $\{c3: \text{инвари-}$
 $\text{антно}\}$ относительно $\{c2: f.\}$

Note 29

fd57ae2625734c759ffb57bc00f69d8f

Пусть $f : W \rightarrow W$ — унитарный оператор, $V \triangleleft W$. Тогда ес-
ли V инвариантно относительно f , то и V^\perp инвариантно
относительно f . В чём основная идея доказательства?

■ V^\perp инвариантно относительно $f^* = f^{-1}$.

Note 30

05351f096d4a47cc90c2f500fbe4fe16

«Спектральная теорема для унитарных операторов»

Пусть $f : V \rightarrow V$ — унитарный оператор. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора f .

Note 31

5469fe81bf8641b2bca4525ca9e6599f

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для унитарных операторов?

■ Для $\lambda \in \text{spec } f$ имеем $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp$, но оба этих пространства инвариантны относительно f .

Note 32

1e6b5642085f4ef7a716fb7a5422b363

В \mathbb{R}^2 любое ортогональное преобразование — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой.

Семинар 20.04.22

Note 1

4af2a0956e564d7a8dcff91122d2862c

В процессе ортогонализации Грама-Шмидта определитель Грама не меняется.)

Note 2

dd5abffedea24431af7beec39693bcb2

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$\operatorname{sgn} |G(e_1, \dots, e_n)| \in \{0, 1\}.$$

Note 3

550eea6aa0654fe1bcff80057656cabf

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| = 0$$

тогда и только тогда, когда система $\{e_j\}$ линейно зависима.)

Note 4

c01adb60f10f465ea82f0eb8c910472c

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| \leq \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2.$$

Note 5

e3a8ea052f1b41b48d35050e054c8f59

Пусть V — эрмитово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$. Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| = \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2 \iff \begin{cases} \{e_j\} \text{ ортогональна,} \\ \exists j \quad e_j = 0. \end{cases}$$

Семинар 27.04.22

Note 1

15065bb7284d464eb733caa7ce69f5c2

Пусть L_1, L_2 — векторные подпространства, $\{\{c5::L_1 \cap L_2 = \{0\}\}$.

$\}} \text{ Тогда } \{\{c4::(\widehat{L_1}, \widehat{L_2})\} = \{\{c3::(\widehat{g}, \widehat{g_1})\}, \text{ где}$

- g — $\{\{c1::\text{проекция ненулевого вектора } x \in L_1 \text{ на } L_2,\}$
- g_1 — $\{\{c2::\text{проекция } g \text{ на } L_1.\}$

Note 2

6bc4328f156248a99ab740a54db23882

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор $f f^*$ $\{\{c1::\text{самосопряжён.}\}$

Note 3

ee802fb93fc34532abc98ffcbb813a0a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор $f^* f$ $\{\{c1::\text{самосопряжён.}\}$

Note 4

2298652c987c4036be1f1244e0d2d16a

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{\{c3::\det f \neq 0\}\}$. Тогда $\{\{c2::(f^{-1})^*\} = \{\{c1::(f^*)^{-1}\}$.

Note 5

3ed5769b04134886b2dae82e3c375951

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — $\{\{c4::\text{базис в } V.\}$ Тогда

$$\{\{c5::M_e(f^*)\} = \{\{c1::\overline{G^{-1}A^TG},\}$$

где $A = \{\{c2::M_e(f)\}$, $G = \{\{c3::G(e_1, \dots, e_n)\}$.

Note 6

2e0dde23d1142f492e32a3030b2abbe

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор в эрмитовом пространстве, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис в V . Тогда $M_e(f^*) = \overline{G^{-1}A^TG}$, где $A = M_e(f)$, $G = G(e_1, \dots, e_n)$. В чём основная идея доказательства?

■ Использовать G как матрицу полуторалинейной формы.

Note 7

fa1bb01afd4c43bbb1e902fcd3891a2

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times l}$. Тогда

$$\overline{AB} = \overline{\{c1::\overline{A} \overline{B}.\}}$$

Note 8

4a0309bd276e44448efb76c62e0fbfcf

Пусть $f, g : V \rightarrow V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда $\{c2:: \text{оператор } fg \text{ самосопряжён}\} \{c3:: \iff \} \{c1:: fg = gf.\}$

Note 9

3b50b418e4594bfeb03b83bb0f393857

Пусть $f, g : V \rightarrow V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда оператор $\{c2:: fg + gf\} \{c1:: \text{самосопряжён}.\}$

Note 10

480f285619264421ad7eebf15db6c3c5

Пусть $f, g : V \rightarrow V$ — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда если $\{c2:: \overline{\lambda} = -\lambda,\}$ то оператор $\{c3:: \lambda(fg - gf)\} \{c1:: \text{самосопряжён}.\}$

Лекция 23.05.22

Note 1

5a8ab0eed63d4e1cb7f6f69e11c2aabd

В \mathbb{R}^2 любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

1. $\text{spec } f \subset \mathbb{R}$, 2. $\text{spec } f \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Note 2

20fe0d9d75484cf1858bc7ea943f9e34

В \mathbb{R}^2 любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай $\text{spec } f \subset \mathbb{R}$)?

$\text{spec } f = \{\pm 1, \pm 1\}$, и во всех случаях получаем нужное преобразование.

Note 3

231ac7e677014b5c906070674ee0e438

В \mathbb{R}^2 любое ортогональное преобразование f — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай $\text{spec } f \cap \mathbb{R} = \emptyset$)?

Для $\lambda = \cos \varphi - i \sin \varphi \in \text{spec } f$ и $e = a + bi \in V_f(\lambda)$ расписать

$$f(e) = \lambda e.$$

Note 4

678857a6b6514b7e87cade6a771f4c53

Матрица поворота на угол φ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Note 5

398eb33a3cd34a718118f2be8f7095a2

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ — произвольный угол. Матрица поворота на угол φ обозначается R_{φ} .

Note 6

87e8bdb8fcb4fd9ac6ce183b1724513

Матрица вида

$$\text{diag}(R_{\varphi_1}, \dots, R_{\varphi_k}, \pm 1, \dots, \pm 1).$$

(с точностью до порядка клеток) называется каноническим видом матрицы ортогонального оператора.)

Note 7

951f954d7fc94632bfd90e091d13396e

В \mathbb{R}^n для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет канонический вид.)

Note 8

91344cb034d9420b9a63807b59bc1cbf

Отображение $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

называется квадратичной формой в \mathbb{R}^n .)

Note 9

9f5070390cb64df59f3c3a3edb21964d

Пусть $q : x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . Для удобства полагают, что $a_{ij} = a_{ji}$.)

Note 10

f3a4dfc29aec43e4be378badd310835b

Матрицей квадратичной формы $x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$ в \mathbb{R}^n называется матрица

$$[a_{ij}] \sim n \times n.$$

}}

Note 11

c20dec1b0cdf4cfb824cfb96603e87c6

Пусть q — квадратичная форма в \mathbb{R}^n , A — матрица q . Тогда

$$A^T = A.$$

Note 12

f47b5351d6cc4c4792454ba3ae253b45

Пусть q — квадратичная форма в \mathbb{R}^n , A — матрица q . Как $q(x)$ выражается через произведение матриц?

$$q(x) = x^T A x.$$

Note 13

80787c73077441aa88a40c590206c15e

Пусть q — квадратичная форма в \mathbb{R}^n , A — матрица q . Как $q(x)$ выражается через евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^n ?

$$q(x) = (Ax, x)$$

Note 14

78fd5f73a8bd4fe2bd9715e0dfc63f3e

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . Форма q называется $\{\{c2::\text{положительно определённой}\}\}$, если $\{\{c1::\forall x$

$$q(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad q(x) = 0 \iff x = 0.$$

$\}\}$

Note 15

e2a3814c661f4081a60e07f3ae077705

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . Тогда всегда $\{\{c3::\text{существует}\}\}$ такая $\{\{c2::\text{замена переменных } x = By,\}\}$ что $\{\{c1::$

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\text{rk } A} \mu_i y_i^2.$$

$\}\}$

Note 16

97b6d8cfbb8e499e8552699c8f4d0bf8

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n .

$$\{\{c2::\Delta_i\}\} := \{\{c1::M_{1,\dots,i}^{1,\dots,i}(A).\}\}$$

Note 17

70b0c89b87844a56bfbafcab882e879b

Пусть $q : x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . Тогда $\{\{c2:: q \text{ положительно определена}\} \{\{c3:: \iff\} \} \{\{c1::$

$$\forall j \quad \Delta_j > 0.$$

$\}\}$

$\{\{c3:: \text{критерий}\} \{\{c4:: \text{Сильвестра}\}\}$

Note 18

75e17707e4e446ed9ca2db4710251d36

Пусть $q : x \mapsto x^T A x$ — квадратичная форма в \mathbb{R}^n . Тогда всегда $\{\{c4:: \text{существует}\}\}$ такая $\{\{c3:: \text{ортогональная замена } x = By,\}$ что $\{\{c1::$

$$q(By) = \sum_i \lambda_i y_i^2,$$

$\}\}$ где $\{\lambda_j\} \{\{c2:: = \text{spec } A\}\}$.