

## Лекция 08.02.23 (1)

### Note 1

c479b17923b04cc899ccd36d430abf6e

Для каких функций определяется интеграл Фурье?

Кусочно-гладких на любом отрезке и абсолютно интегрируемых на  $\mathbb{R}$ .

### Note 2

2e470cdc0266434182a07d52209c1bca

Откуда, в общих чертах, возникает понятие интеграла Фурье?

Из предельного перехода от рядов Фурье.

### Note 3

a801b28dfec4b9fa7c62fd2092d035a

Как выглядит ряд Фурье  $2l$ -периодической функции?

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

### Note 4

a59aff7532704ca498a695bca1ca01d1

Как определяются коэффициенты  $a_n$  ряда Фурье  $2l$ -периодической функции?

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

### Note 5

9ecca0b0846a4282ba65eb6706848d71

Как определяются коэффициенты  $b_n$  ряда Фурье  $2l$ -периодической функции?

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx .$$

### Note 6

64752d21c9814733ac5b4fc4a8ebb571

Для каких функций выполняется интегральная формула Фурье?

Кусочно-гладких на любом отрезке и абсолютно интегрируемых на  $\mathbb{R}$ .

### Note 7

b4fb252816f14260aae170ff59eb8c0d

Как выводится интегральная формула Фурье?

Как предел разложения в ряд Фурье на  $[-r, r]$  при  $r \rightarrow \infty$ .

### Note 8

a459215af9634f8a9ef3a69def0eb908

Что в выводе интегральной формулы Фурье происходит со свободным членом разложения в ряд Фурье?

Он стремится к нулю.

### Note 9

58b7f21884cd410fb9bd777ec693ebc4

Как в выводе интегральной формулы Фурье перейти от суммы к интегралу?

Использовать неформальное сходство с интегральной суммой соответствующего интеграла.

## Note 10

c9abe7ec159c45c2a383de945f6c72e5

Как в выводе интегральной формулы Фурье показать неформальное сходство выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left( \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n(x-u)}{l} du \right)$$

с соответствующей интегральной суммой?

Ввести  $\lambda_k = \frac{\pi n}{l}$ , откуда  $\Delta \lambda_k = \frac{\pi}{l}$ .

## Note 11

3b4198d58dcc4333b79c02b0ff82b891

Интеграл Фурье...

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$$

## Note 12

c889f142f0cf44e0b06b987221c635da

Как определяется коэффициент  $a(\lambda)$  в интеграле Фурье функции  $f$ ?

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos \lambda x dx.$$

## Note 13

d1a6cd839e7c4a2786c48a1a3ad6b0fa

Как определяется коэффициент  $b(\lambda)$  в интеграле Фурье функции  $f$ ?

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin \lambda x dx.$$

## Note 14

3ea5ca54f4a44a11a08a441ec3f997ea

Коэффициенты  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  в интеграле Фурье фактически задают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты.

## Note 15

a77d334a54924e4ba13350819b4aa62e

Как называется интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{\mathbb{R}} f(u) \cos(\lambda(t-x)) du ?$$

■ Интеграл Фурье.

## Note 16

2106cbd921f24b16abbcd357a0ca9e55

Что утверждает интегральная формула Фурье?

■ Равенство среднего значения односторонних пределов значению интегралу Фурье.

## Note 17

0cb0976cbc5442fd977022e6b98b5088

Как интеграл Фурье упрощается для нечётных функций?

■ Остаются только синусы.

## Note 18

ee2657adb0724053ab951a4022088d05

Как интеграл Фурье упрощается для чётных функций?

■ Остаются только косинусы.

## Note 19

405a32411509412b8a3b7a6a0384c14b

Как интеграл Фурье строится для функций, определённых на  $(0, +\infty)$ ?

■ Путём (не)чётного продолжения функции на  $\mathbb{R}$ .

## Лекция 08.02.23 (2)

### Note 1

2997689aa1c24e939f84c1392dfc1061

Чем в первую очередь является интеграл, зависящий от параметра?

- Функция, аргумент которой играет роль параметра.

### Note 2

0e0c024c4c584815bc1daf2b87d001fe

Какие части интеграла, зависящего от параметра, собственно могут зависеть от параметра?

- Границы интегрирования и подынтегральная функция.

### Note 3

b96f8eb96a4d42cdb1f17860eca8ffe9

Какой интеграл рассматривается в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

- Собственный интеграл по отрезку, не зависящему от параметра.

### Note 4

d87dbab278f348399f0e5d5da2d74c2e

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

- Фиксированный отрезок.

### Note 5

118ac67b133e45dc9bd834fbf8a12aef

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

- Подынтегральная функция двух аргументов непрерывна.

## Note 6

3ba379f8ec1a47c5a1c1f1fd1d1ec848

На каком множестве определена подынтегральная функция в теореме о непрерывности интеграла по параметру?

■ Декартово произведение соответствующих отрезков.

## Note 7

7e1447d4172a450a926a1e0ccb1fcaf0

Что мы заключаем из теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

■ Интеграл непрерывен по параметру.

## Note 8

1655e66842d543a8a4858d63d615d8d8

Пусть  $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$  — семейство функций на множестве  $D$ .  
Говорят, что  $\|c2\|: f_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x), \|$  если  $\|c1\|:$

$$\forall x \in D \quad f_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x).$$

}}

## Note 9

0ad3247020ff4518aea0a4cd78bab486

Пусть  $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$  — семейство функций на множестве  $D$ .  
Говорят, что  $\|c2\|: f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x), \|$  если  $\|c1\|:$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \rho(f_\alpha, f) = 0.$$

}}

## Note 10

0ae1565fef4c4cddbc291219e3597af6

Пусть  $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$  — семейство функций на множестве  $D$ .  
Говорят, что  $f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x)$ , если  $\|c1\|:$

$$\begin{aligned} \forall \{\alpha_k\} \subset A \setminus \{\alpha_0\} : \alpha_k \mapsto \alpha_0 \\ f_{\alpha_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x). \end{aligned}$$

}}

(по Гейне)

## Note 11

ba9496d1a74648c49695ad8a83703086

Пусть  $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$  – семейство функций на множестве  $D$ .  
Говорят, что  $f_\alpha(x) \rightrightarrows f(x)$ , если  $\{\{c1::$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \alpha \in \dot{V}_\delta(\alpha_0) \cap A \\ |f_\alpha - f_{\alpha_0}| < \varepsilon.$$

$\}\}$

(по Коши)

## Note 12

077ae4731b5248ca9b8596fbfef72eac

Пусть  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда  $\forall y_0 \in [c, d]$   
при  $y \rightarrow y_0$   $\{\{c1::$

$$f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0).$$

$\}\}$

## Note 13

7a2ac45c10144aa59a5e9582002f921b

В чём основная идея доказательства теоремы о непрерывности интеграла по параметру?

**|** Равномерная непрерывность функции под интегралом и предельный переход под знаком интеграла.

## Note 14

e55223eb41114fe092beeffc38509358

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

**|** Функция и её производная по параметру непрерывны.

## Note 15

e287f587adf9483ebb3c4a0decaa74b6

Какой интеграл рассматривается в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Собственный интеграл по отрезку, не зависящему от параметра.

### Note 16

c4bb67f8fb544eb982b967fc570ec6b0

Какому множеству принадлежат значения параметра в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Фиксированный отрезок.

### Note 17

7ecf4e70ff554f4b935fe30fb72d3b90

При каком условии мы можем что-либо заключить из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Функция под интегралом и её производная по параметру непрерывны.

### Note 18

7232b8f9240c403b9c4e58d656d379a7

На каком множестве определена подынтегральная функция в теореме о дифференцировании интеграла по параметру?

Декартово произведение соответствующих отрезков.

### Note 19

7ae69cc649ef498f8dd4813ce820fb56

Что мы в первую очередь заключаем из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Интеграл имеет непрерывную производную по параметру.

### Note 20

6b76e966d30c45f898f47c3e102ecbb0

Что мы дополнительно заключаем из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?



Оператор дифференцирования по параметру можно внести под интеграл.

## Note 21

24341c10b12c4a51a7a40f068f64f0b4

В чём основная идея доказательства теоремы о дифференцировании интеграла по параметру?

Определение производной через предел и предельный переход под знаком интеграла.

## Note 22

2a807a4554824403941c3c7ff5a961be

В доказательстве теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, как показать, что

$$\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) ?$$

Теорема Лагранжа, определение через  $(\varepsilon, \delta)$  и равномерная непрерывность  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Note 23

5a5735d8797344c886913921f7e9007a

Что утверждает теорема об интегрировании интеграла по параметру?

При кратном собственном интегрировании непрерывной функции неважен порядок интегралов.

## Note 24

a6589b1e039d4cc598e8d98f047d8a95

На каком множестве определена функция из теоремы об интегрировании интеграла по параметру?

Декартово произведение соответствующих отрезков.

# Семинар 13.02.23

## Note 1

73d8dc9a6be641fdb16ae59c9e766905

Если  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  есть ряд Фурье функции  $f$ , то пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

}}

## Note 2

4b02dc9235904406b993092fcf164df3

Что можно сказать про коэффициенты Фурье функции  $f$ , если она является нечётной?

Кoefficients before  $\cos nx$  turn to zero.

## Note 3

28a6a43ea3f84c0791428245b2836c87

Что можно сказать про коэффициенты Фурье функции  $f$ , если она является чётной?

Кoefficients  $\sin nx$  turn to zero.

## Note 4

a67cfd6b10a54e3582540f8aa941aa25

Ряд Фурье для  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  на  $[-\pi, \pi]$ ...

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx .$$

## Note 5

c013eb6c81d34b76b548427e583d4706

Пусть  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема. Как разложить  $f$  в ряд Фурье только по косинусам?

■ Продолжить  $f$  на  $[-\pi, \pi]$  чётным образом.

### Note 6

d53acb408ebf46339447f5b81493d648

Пусть  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема. Как разложить  $f$  в ряд Фурье только по синусам?

■ Продолжить  $f$  на  $[-\pi, \pi]$  нечётным образом.

## Лекция 15.02.23

### Note 1

c0a105b141ee4aeca1e05563450c4793

Пусть  $f : [a, b) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  локально интегрируема для любого  $y$ . Будем говорить, что  $\int_a^{\rightarrow b} f(\cdot, y)$  сходится равномерно относительно  $Y$ , если  $\int_a^t f(\cdot, y)$  сходится равномерно при  $t \rightarrow b^-$ .

### Note 2

883264877f984d4fb7b033e583259ae7

Критерием чего является критерий Больцано-Коши для несобственного интеграла, зависящего от параметра?

■ Равномерная сходимость интеграла.

### Note 3

69524bef25574a2a982f8ab3f8372f38

Какое выражение оценивается в критерии Больцано-Коши для несобственного интеграла, зависящего от параметра?

■ Собственный интеграл по отрезку внутри  $\delta$ -окрестности предельной точки.

### Note 4

d6206f0e18a74f10a31ab64741e9d36d

Что мы рассматриваем в признаке Вейерштрасса для несобственного интеграла?

■ Несобственный интеграл, зависящий от параметра.

### Note 5

bea8faaa39b44a12a6e8ce8ef8e490c5

При каком условии мы можем что-либо заключить из признака Вейерштрасса для несобственного интеграла

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx ?$$

Если  $|f(x, y)|$  мажорируется функцией от  $x$ , для которой сходится тот-же несобственный интеграл.

## Note 6

ae19a084cd024ed0acc721977052f4a0

Что мы заключаем из признака Вейерштрасса для несобственного интеграла?

Несобственный интеграл сходится равномерно.