Эквивалентность и порядок

Note 1

f30a93a82cb7436dbf01a4f27b739d36

Каким одним требованием можно заменить симметричность и транзитивность в определении отношения эквивалентности?

▌ Евклидовость.

Note 2

d8936dde76084fbfaa621700f57c7cd4

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. {{c2::Множество классов эквивалентности R}} называется {{c1::фактор-множеством множества A по отношению R.}}

Note 3

e212c805b47c40c48f35bdbd5130db2b

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::называется отношением частичного порядка,}} если {{c1::оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.}}

Note 4

2a3a6e89d50d41068b22bfd1c595b39a

Отношение {{c2::частичного порядка}} обычно обозначается символом {{c1::$\leqslant$.}}

Note 5

90faa1ffef764c7d808d6757d97dfa4b

Множество A с {{c2::заданным на нём отношением частичного порядка}} называется {{c1::частично упорядоченным множеством.}}

Note 6

4157aa1725c244a58f3e32a92a0937bb

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что {{c2::x и y сравнимы,}} если {{c1::$x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.}}

Note 7

e75ca87d267f4673a53c15a0e7adcccb

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::отношением линейного порядка,}} если {{c1::R — отношение частичного порядка и любые $x, y \in A$ сравнимы.}}

Note 8

79eba4d41c8b4aafa75c4a7c56268adb

Множество A с {{c2::заданным на нём отношением линейного порядка}} называется {{c1::линейно упорядоченным множеством.}}

Note 9

e914e0e523ee44139c021af45c63a712

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что {{c2::$x < y$,}} если {{c1::$x \leqslant y$ и $x \neq y$.}}

Note 10

c264501d4458400e8b0073eac66b95fe

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение {{c2::$<$}} называют отношением {{c1::строгого}} порядка.

Note 11

ec44ba694d2541deaae260221aaafdc5

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение {{c2::$\leqslant$}} называют отношением {{c1::нестрого}} порядка.

Note 12

962a3744a3cc4153bd9317aab2cb46cb

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $<$ как {{c1::«меньше».}}

Note 13

850b05ff29334d869b6a9c7e96eef9a9

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $\leqslant$ как {{c1::«меньше или равно».}}

Note 14

0e5d3d3ef97541309f99f132d7d20073

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда {{c2::$x \leqslant y$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::$x < y$}} или {{c1::$x = y$.}}

Note 15

9b75255301e143ba94b347847852b33f

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ рефлексивным?

▌ Нет.

Note 16

fcc7c32a4ca7455dbcd3260a478ecd97

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ антирефлексивным?

▌ Да.

Note 17

2d5bf110950f42b4bc343f143b82dfc8

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ транзитивным?

▌ Да.

Note 18

378780d3b9d74367a71bdf0fb3f67e9f

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ асимметричным?

▌ Да.

Note 19

f4e2e2fe9c8140a6b8fcda896dd5da35

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если {{c2::$x \leqslant y \leqslant x$,}} то {{c1::$x = y$.}}

Note 20

1ca369e310d2477782f82089ab512891

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $x \leqslant y \leqslant x$, то $x = y$. В чём ключевая идея доказательства?

▌ Антисимметричность.

Note 21

0af7ee8e9a5c4ad88db6ea371bee9527

Пусть $(A, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Почему не стоит читать $x \leqslant y$ как «x не больше y»?

▌ $\overline{x \geqslant y} \not\Longrightarrow x \leqslant y$, если порядок не линеен.

Note 22

414d948920404634bec1fec01bd9b0b2

Бинарное отношение $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} называется {{c2::называется отношением предпорядка,}} если {{c1::оно рефлексивно и транзитивно.}}

Note 23

5a0d3dae2151442795c045fdb2e1ba7f

Пусть $\leqslant$ — {{c3::предпорядок}} на множестве A. Тогда $\leqslant$ задаёт естественное {{c2::отношение частичного порядка}} {{c1::на фактор множестве A по отношению

$$x \leqslant y \text{ и } y \leqslant x.$$

}}

Note 24

ac3052b941bd4ae981f8d3559789c7e0

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, {{c3::$B \subseteq A$.
}} {{c2::Частичный порядок $(\leqslant) \cap B^2$}} называется {{c1::частичным порядком на B, индуцированным из A.}}

Note 25

01c0ab122f3d4940ab98f766e6b357c2

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. {{c2::Частичный порядок на B, индуцированный из A,}} обозначается {{c1::$\leqslant_B$.}}

Note 26

2a1949206b6843f8859d96feb5f3d640

Пусть $(A, \leqslant)$— частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. Если {{c2::$\leqslant$ линеен,}} то {{c1::и $\leqslant_B$ линеен.}}

Note 27

76f003723d594be4bb2f9df3ea565469

Пусть X и Y — два множества. Что есть множество $X + Y$?

> Объединение непересекающихся копий X и Y.

Note 28

c18350dfc5244bddb59d2f27a28a33ae

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y пересекаются, то как они разделяются в $X + Y$?

> Элементы из Y записываются с чертой (как вариант).

Note 29

b9a67a4ebd2542d6b6cf86b0d4505d81

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как задаётся порядок на $X + Y$?

> Внутри X и Y порядок обычный и $x \leqslant \overline{y}$.

Note 30

caa0e9e0bd594f80aff6ab6d1711059e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. При каком условии порядок на $X + Y$ будет линейным?

> Только если порядки на X и Y линейны.

Note 31

2f6406e74c4443c191caa1532527294f

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определятся покоординатное сравнение на $X \times Y$?

> Первая координаты $\leqslant_X$ и вторые $\leqslant_Y$.

Note 32

fec1ac2eb92d496e9677d8011742333e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. В чём недостаток покоординатного сравнения на $X \times Y$?

> Он не линеен.

Note 33

f80cf291316d430489b6ed3f5ea1f116

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определятся порядок на $X \times Y$?

> Аналогично лексикографическому порядку.

Note 34

a3950be00a93447ba48cc93e24fc1436

Сколько различных линейных порядков на множестве из n элементов?

> $n!$

Note 35

5dc17edbd7424921a6801b645ec91847

Всякий ли частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного?

> Да.

Note 36

8ee88fb845d94611a7bad34e78b447b0

Всякий ли частичный порядок на бесконечном множестве можно продолжить до линейного?

> Да.

Note 37

d5d18db2bf744c3f95cc4c390a2b63fa

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного. В чём ключевая идея доказательства?

> По индукции выбирать минимальный элемент.

Note 38

53391ec9f26040328fc75be035ca15c7

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наибольшим?

> Тот, что больше любого другого элемента.

Note 39

1fbc4c3d075344fb8889b64fc11d73cc

Какой элемент частично упорядоченного множества называется максимальным?

> Тот, для которого не существует большего элемента.

Note 40

ba81375ada8245dc86f019d40cfc73b2

При каком условии понятия наибольшего и максимального элемента совпадают?

> Если порядок линеен.

Note 41

df72779f7c5049dd82bb27f993c2a177

Сколько наибольших элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

> Не более одного.

Note 42

dd861e24b4c246bc9769d4d9d8c1684a

Сколько максимальных элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

> Сколь угодно.

Note 43

fe2b7f694c644bfbbab346e18477d765

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наименьшим?

> Тот, что меньше любого другого элемента.

Note 44

f42b3c3570904de282e2a8bfe96a337a

Какой элемент частично упорядоченного множества называется минимальным?

> Тот, для которого не существует меньшего элемента.

Note 45

0d235255b51b40e2970c6f0c00ee671e

Любые два различных максимальных элемента {{c1::не сравнимы.}}

Note 46

e6a3453de9ae404f80ca583e6ea036c5

Пусть X — частично упорядоченное множество и {{c2::X конечно.}} Для любого $x \in X$ найдётся максимальный элемент {{c1::$\geqslant x$.}}

Изоморфизмы

Note 1

110d1d04fa2246daa69b785b7fd393fe

Пусть A, B — частично упорядоченные множества, $f : A \to B$. Отображение f называется {{c2::изоморфизмом,}} если {{c1::оно биективно и сохраняет порядок.}}

Note 2

13d514bd40fc4478a6ed3a4ab34ff195

Пусть A, B — частично упорядоченные множества. Множества A и B называют {{c2::изоморфными,}} если {{c1::существует изоморфизм $f : A \to B$.}}

Note 3

007687446bf044fb8b2643fb03f6dcd9

Все частично упорядоченные множества разбиваются на классы изоморфных, называемые {{c1::порядковыми типами.
}}

Note 4

b680b5e72c204aad8c291c056457dc4d

{{c1::Конечные линейно}} упорядоченные множества {{c2::из одинакового числа элементов}} {{c3::изоморфны.}}

Note 5

5083f28c1c664d26a48aba53a9beae8c

Конечные линейно упорядоченные множества из одинакового числа элементов изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

> Построить изоморфизм в $\{1, 2, \ldots, n\}$, начиная с наименьшего элемента.

Note 6

743cdca62182497686915562c74cf65d

Вещественная последовательность называется {{c2::финитной,
}} если {{c1::все её члены, кроме конечного числа, равны 0.}}

Note 7

fea26e4dd50b4a68ba7f6f90da06332b

Множестве всех финитных последовательностей в {{c4::$\mathbb{Z}_+$}} с {{c3::заданным на нём покомпонентным порядком}} изоморфно {{c2::$\mathbb{N}$}} с отношением {{c1::«быть делителем».}}

Note 8

f5d322f891eb4f7797645163e5f45497

Как изоморфизм частично упорядоченных множеств действует на наибольший элемент?

> Переводит его в наибольший элемент.

Note 9

2793f2d5da5d4b4397c20d874b1fc14e

Пусть A — частично упорядоченное множество. {{c2::Изоморфизм $A \to A$}} называется {{c1::автоморфизмом A.}}

Note 10

5995cccf4e2848eebf953a18d27ff7cf

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества $\mathbb{N}$ {{c1::является тождественным отображением.}}

Note 11

9a1b8384b96b4c1b80082eaa74d708ad

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества $\mathbb{N}$ является тождественным отображением. В чём ключевая идея доказательства?

> По индукции $f(n) = n$.

Note 12

9ec39c6ae7d94216b153421659205a07

Пусть A — k-элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда

$$|\operatorname{Aut}\mathcal{P}(A)| = \{\{c1::k!.\}\}$$

Note 13

b8bb9cd707674a4a8df6e43759264a4e

Пусть A — k-элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда $|\operatorname{Aut}\mathcal{P}(A)| = k!$. В чём ключевая идея доказательства?

> Автоморфизм определяется его действием на одноэлементных множествах.

Note 14

0c815486f4924485acded03c5bcfcbdd

Пусть $\mathbb{N}$ упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда

$$|\operatorname{Aut}\mathbb{N}| = \text{{{c1::}}}\mathfrak{c}.\text{}}}$$

Note 15

3e9541105db840b299859a32c0f7ceb9

Пусть $\mathbb{N}$ упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда $|\operatorname{Aut}\mathbb{N}| = \mathfrak{c}$. В чём ключевая идея доказательства?

> Можно "перемешать" простые числа.

Note 16

c0d051d05a0b4228902a6d0ea3506209

Изоморфен ли $([0,1], \leqslant)$ множеству $(\mathbb{R}, \leqslant)$?

> Нет.

Note 17

6e4e63c5d18f46dd9e164c78f193c40e

Почему $([0,1], \leqslant)$ не изоморфен $(\mathbb{R}, \leqslant)$?

> В $\mathbb{R}$ нет наибольшего элемента.

Note 18

9a8f1a6138c949ba91eee96998f166b7

Изоморфно ли $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ множеству $(\mathbb{Q}, \leqslant)$?

Нет.

Note 19

87d5dfed83174bec88c290c54882ec3a

Почему $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ не изоморфно $(\mathbb{Q}, \leqslant)$?

> $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Note 20

2b69523f72144db68161c333b4e5ec82

Изоморфны ли $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leqslant)$?

> Нет.

Note 21

23d161737e134362b37a92013b77c5d8

Почему $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leqslant)$ не изоморфны?

> Между 0 и $\overline{0}$ бесконечно много элементов, что невозможно в $\mathbb{Z}$.

Note 22

360028f6f71143e99dc483ac687c9383

Изоморфны ли $(\mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z}, \leqslant)$?

> Нет.

Note 23

7a70e9e2377c4257b8efb486b7967d89

Почему $(\mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ не изоморфны?

> В $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.

Note 24

697e50108ea547c3a372fb441f7d1448

Как можно визуально представить $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leqslant)$?

> Последовательность непересекающихся “столбцов”
>
> $$\mathbb{Z} \times \{i\}\,.$$

Note 25

0c16841754c3437c88d0e4c139976fac

Как представить $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ в виде суммы?

> $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \dots$

Note 26

1a67db9b47ea40bf95ec1d08c9e9c699

Изоморфны ли $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$?

> Нет.

Note 27

19a444a43c154a90be9f954bb3b05480

Почему $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$ не изоморфны?

> От обратного и каждому “столбцу” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ соответствует “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Note 28

8a9b0bca924d47f4b16ce8a629424644

Допустим, что f — изоморфизм $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$. Как показать, что f сопоставляет “столбцу” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

> Между элементами одного столбца есть лишь конечное число других элементов.

Note 29

100d9aff0d0a4aafa0d2cf77b58ef9e3

Изоморфны ли $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$?

> Нет.

Note 30

422d3d1f24854d10abc217203fc5af30

Почему $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$ не изоморфны?

> От обратного и любому “столбцу” в $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ соответствует “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Note 31

2554b1cb3c6c4f17a2aae72ec3237ec4

Изоморфны ли $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$?

> Да.

Note 32

b81b5778d5b84d9692f1a7e9b2a7213e

Почему $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leqslant)$ изоморфны?

> Можно разделить $\mathbb{Q} \times \{0\}$ на интервалы с иррациональными границами.

Note 33

38a9f34456fe49d897d1266a579abb34

Изоморфны ли упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$?

> Да.

Note 34

349e19c69cbf4e538962f2b5647c9ec8

Упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$ изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

> Выбрать строго возрастающие последовательности, сходящиеся к 1 и к $\sqrt{2}$, и построить кусочно-линейную функцию.