

Эквивалентность и порядок

Note 1

f30a93a82cb7436dbf01a4f27b739d36

Каким одним требованием можно заменить симметричность и транзитивность в определении отношения эквивалентности?

■ Евклидовость.

Note 2

d8936dde76084fbfaa621700f57c7cd4

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности R называется фактормножеством множества A по отношению R .

Note 3

e212c805b47c40c48f35bdbd5130db2b

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется отношением частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Note 4

2a3a6e89d50d41068b22bfd1c595b39a

Отношение частичного порядка обычно обозначается символом \leq .

Note 5

90faa1ffef764c7d808d6757d97dfa4b

Множество A с заданным на нём отношением частичного порядка называется частично упорядоченным множеством.

Note 6

4157aa1725c244a58f3e32a92a0937bb

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что x и y сравнимы, если $x \leq y$ или $y \leq x$.

Note 7

e75ca87d267f4673a53c15a0e7adcccb

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется отношением линейного порядка, если R — отношение частичного порядка и любые $x, y \in A$ сравнимы.

Note 8

79eba4d41c8b4aafa75c4a7c56268adb

Множество A с $\{\{c2::\text{заданным на нём отношением линейного порядка}\}$ называется $\{\{c1::\text{линейно упорядоченным множеством.}\}$

Note 9

e914e0e523ee44139c021af45c63a712

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что $\{\{c2::x < y,\}$ если $\{\{c1::x \leq y \text{ и } x \neq y,\}$

Note 10

c264501d4458400e8b0073eac66b95fe

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение $\{\{c2::<\}$ называют отношением $\{\{c1::\text{строгого}\}$ порядка.

Note 11

ec44ba694d2541deaae260221aaafdc5

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение $\{\{c2::\leq\}$ называют отношением $\{\{c1::\text{нестрого}\}$ порядка.

Note 12

962a3744a3cc4153bd9317aab2cb46cb

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $<$ как $\{\{c1::\text{«меньше»},\}$

Note 13

850b05ff29334d869b6a9c7e96cef9a9

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак \leq как $\{\{c1::\text{«меньше или равно»},\}$

Note 14

0e5d3d3ef97541309f99f132d7d20073

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда $\{\{c2::x \leq y\} \{\{c3::\text{тогда и только тогда, когда}\} \{\{c1::x < y\} \text{ или } \{\{c1::x = y\}$

Note 15

9b75255301e143ba94b347847852b33f

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ рефлексивным?

■ Нет.

Note 16

fcc7c32a4ca7455dbcd3260a478ecd97

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ антирефлексивным?

■ Да.

Note 17

2d5bf110950f42b4bc343f143b82dfc8

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ транзитивным?

■ Да.

Note 18

378780d3b9d74367a71bdf0fb3f67e9f

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ асимметричным?

■ Да.

Note 19

f4e2e2fe9c8140a6b8fcd896dd5da35

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $\{\{c2: x \leq y \leq x, \}\}$ то $\{\{c1: x = y, \}\}$

Note 20

1ca369e310d247782f82089ab512891

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $x \leq y \leq x$, то $x = y$. В чём ключевая идея доказательства?

Антисимметричность.

Note 21

0af7ee8e9a5c4ad88db6ea371bee9527

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Почему не стоит читать $x \leq y$ как « x не больше y »?

$\overline{x \geq y} \not\Rightarrow x \leq y$, если порядок не линеен.

Note 22

414d948920404634bec1fec01bd9b0b2

Бинарное отношение $R \subseteq \{c3::A \times A\}$ называется $\{c2::$ называется отношением предпорядка, $\}$ если $\{c1::$ оно рефлексивно и транзитивно. $\}$

Note 23

5a0d3dae2151442795c045fdb2e1ba7f

Пусть $\leq - \{c3::$ предпорядок $\}$ на множестве A . Тогда \leq задаёт естественное $\{c2::$ отношение частичного порядка $\}$ $\{c1::$ на фактор множестве A по отношению

$$x \leq y \text{ и } y \leq x.$$

$\}$

Note 24

ac3052b941bd4ae981f8d3559789c7e0

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $\{c3::B \subseteq A.$
 $\}\{c2::$ Частичный порядок $(\leq) \cap B^2\}$ называется $\{c1::$ частичным порядком на B , индуцированным из $A.$ $\}$

Note 25

01c0ab122f3d4940ab98f766e6b357c2

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$.
 $\{c2::$ Частичный порядок на B , индуцированный из $A,$ $\}$ обозначается $\{c1::\leq_B.$ $\}$

Note 26

2a1949206b6843f8859d96feb5f3d640

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. Если $\{c2::\leq$ линеен, $\}$ то $\{c1::$ и \leq_B линеен. $\}$

Note 27

76f003723d594be4bb2f9df3ea565469

Пусть X и Y — два множества. Что есть множество $X + Y$?

■ Объединение непересекающихся копий X и Y .

Note 28

c18350dfc5244bddb59d2f27a28a33ae

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y пересекаются, то как они разделяются в $X + Y$?

■ Элементы из Y записываются с чертой (как вариант).

Note 29

b9a67a4ebd2542d6b6cf86b0d4505d81

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как задаётся порядок на $X + Y$?

■ Внутри X и Y порядок обычный и $x \leq \bar{y}$.

Note 30

caa0e9e0bd594f80aff6ab6d1711059e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. При каком условии порядок на $X + Y$ будет линейным?

■ Только если порядки на X и Y линейны.

Note 31

2f6406e74c4443c191caa1532527294f

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определяются покомпонентное сравнение на $X \times Y$?

■ Первая координаты \leq_X и вторые \leq_Y .

Note 32

fec1ac2eb92d496e9677d8011742333e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. В чём недостаток покомпонентного сравнения на $X \times Y$?

■ Он не линейен.

Note 33

f80cf291316d430489b6ed3f5ea1f116

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определяются порядок на $X \times Y$?

■ Аналогично лексикографическому порядку.

Note 34

a3950be00a93447ba48cc93e24fc1436

Сколько различных линейных порядков на множестве из n элементов?

■ $n!$

Note 35

5dc17edbd7424921a6801b645ec91847

Всякий ли частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного?

■ Да.

Note 36

8ee88fb845d94611a7bad34e78b447b0

Всякий ли частичный порядок на бесконечном множестве можно продолжить до линейного?

■ Да.

Note 37

d5d18db2bf744c3f95cc4c390a2b63fa

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного. В чём ключевая идея доказательства?

■ По индукции выбирать минимальный элемент.

Note 38

53391ec9f26040328fc75be035ca15c7

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наибольшим?

■ Тот, что больше любого другого элемента.

Note 39

1fbc4c3d075344fb8889b64fc11d73cc

Какой элемент частично упорядоченного множества называется максимальным?

■ Тот, для которого не существует большего элемента.

Note 40

ba81375ada8245dc86f019d40cfc73b2

При каком условии понятия наибольшего и максимального элемента совпадают?

■ Если порядок линейен.

Note 41

df72779f7c5049dd82bb27f993c2a177

Сколько наибольших элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

■ Не более одного.

Note 42

dd861e24b4c246bc9769d4d9d8c1684a

Сколько максимальных элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

■ Сколь угодно.

Note 43

fe2b7f694c644bfbab346e18477d765

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наименьшим?

■ Тот, что меньше любого другого элемента.

Note 44

f42b3c3570904de282e2a8bfe96a337a

Какой элемент частично упорядоченного множества называется минимальным?

■ Тот, для которого не существует меньшего элемента.

Note 45

0d235255b51b40e2970c6f0c00ee671e

Любые два различных максимальных элемента $\{\{c1: \text{не сравнимы.}\}\}$

Note 46

e6a3453de9ae404f80ca583e6ea036c5

Пусть X — частично упорядоченное множество и $\{\{c2: X \text{ конечно.}\}\}$ Для любого $x \in X$ найдётся максимальный элемент $\{\{c1: \geq x.\}\}$

Изоморфизмы

Note 1

110d1d04fa2246daa69b785b7fd393fe

Пусть A, B — частично упорядоченные множества, $f : A \rightarrow B$.
Отображение f называется $\{\{c2\}$ изоморфизмом, $\}$ если $\{\{c1\}$ оно
биективно и сохраняет порядок. $\}$

Note 2

13d514bd40fc4478a6ed3a4ab34ff195

Пусть A, B — частично упорядоченные множества. Множества A и B называют $\{\{c2\}$ изоморфными, $\}$ если $\{\{c1\}$ существует
изоморфизм $f : A \rightarrow B$. $\}$

Note 3

007687446bf044fb8b2643fb03f6dcd9

Все частично упорядоченные множества разбиваются на
классы изоморфных, называемые $\{\{c1\}$ порядковыми типами.
 $\}$

Note 4

b680b5e72c204aad8c291c056457dc4d

$\{\{c1\}$ Конечные линейно упорядоченные множества $\{\{c2\}$ из оди-
накового числа элементов $\}$ $\{\{c3\}$ изоморфны. $\}$

Note 5

5083f28c1c664d26a48aba53a9beae8c

Конечные линейно упорядоченные множества из одина-
кового числа элементов изоморфны. В чём ключевая идея
доказательства?

Построить изоморфизм в $\{1, 2, \dots, n\}$, начиная с наи-
меньшего элемента.

Note 6

743cdca62182497686915562c74cf65d

Вещественная последовательность называется $\{\{c2\}$ финитной,
 $\}$ если $\{\{c1\}$ все её члены, кроме конечного числа, равны 0. $\}$

Note 7

fea26e4dd50b4a68ba7ff6f90da06332b

Множестве всех финитных последовательностей в $\{\{c4::\mathbb{Z}_+\}\}$ с $\{\{c3::\text{заданным на нём покомпонентным порядком}\}\}$ изоморфно $\{\{c2::\mathbb{N}\}\}$ с отношением $\{\{c1::\text{«быть делителем»}\}\}$

Note 8

f5d322f891eb4f7797645163e5f45497

Как изоморфизм частично упорядоченных множеств действует на наибольший элемент?

■ Переводит его в наибольший элемент.

Note 9

2793f2d5da5d4b4397c20d874b1fc14e

Пусть A — частично упорядоченное множество. $\{\{c2::\text{Изоморфизм } A \rightarrow A\}\}$ называется $\{\{c1::\text{автоморфизмом } A\}\}$

Note 10

5995ccccf4e2848ecbf953a18d27ff7cf

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества \mathbb{N} $\{\{c1::\text{является тождественным отображением}\}\}$

Note 11

9a1b8384b96b4c1b80082eaa74d708ad

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества \mathbb{N} является тождественным отображением. В чём ключевая идея доказательства?

■ По индукции $f(n) = n$.

Note 12

9ec39c6ae7d94216b153421659205a07

Пусть A — k -элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда

$$|\text{Aut } \mathcal{P}(A)| = \{\{c1::k!\}\}$$

Note 13

b8bb9cd707674a4a8df6e43759264a4e

Пусть A — k -элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда $|\text{Aut } \mathcal{P}(A)| = k!$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Автоморфизм определяется его действием на одноэлементных множествах.

Note 14

0c815486f4924485acded03c5bfcbbdd

Пусть \mathbb{N} упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда

$$|\text{Aut } \mathbb{N}| = |\{c1 \vdash c.\}|$$

Note 15

3e9541105db840b299859a32c0f7ceb9

Пусть \mathbb{N} упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда $|\text{Aut } \mathbb{N}| = c$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Можно “перемешать” простые числа.

Note 16

c0d051d05a0b4228902a6d0ea3506209

Изоморфен ли $([0, 1], \leq)$ множеству (\mathbb{R}, \leq) ?

■ Нет.

Note 17

6e4e63c5d18f46dd9e164c78f193c40e

Почему $([0, 1], \leq)$ не изоморфен (\mathbb{R}, \leq) ?

■ В \mathbb{R} нет наибольшего элемента.

Note 18

9a8f1a6138c949ba91eee96998f166b7

Изоморфно ли (\mathbb{Z}, \leq) множеству (\mathbb{Q}, \leq) ?

■ Нет.

Note 19

87d5dfed83174bec88c290c54882ec3a

Почему (\mathbb{Z}, \leq) не изоморфно (\mathbb{Q}, \leq) ?

■ \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

Note 20

2b69523f72144db68161c333b4e5ec82

Изоморфны ли (\mathbb{Z}, \leq) и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq)$?

■ Нет.

Note 21

23d161737e134362b37a92013b77c5d8

Почему (\mathbb{Z}, \leq) и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq)$ не изоморфны?

■ Между 0 и $\bar{0}$ бесконечно много элементов, что невозможно в \mathbb{Z} .

Note 22

360028f6f71143e99dc483ac687c9383

Изоморфны ли (\mathbb{N}, \leq) и (\mathbb{Z}, \leq) ?

■ Нет.

Note 23

7a70e9e2377c4257b8efb486b7967d89

Почему (\mathbb{N}, \leq) и (\mathbb{Z}, \leq) не изоморфны?

■ В \mathbb{N} есть наименьший элемент.

Note 24

697e50108ea547c3a372fb441f7d1448

Как можно визуально представить $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq)$?

■ Последовательность непересекающихся “столбцов”

$$\mathbb{Z} \times \{i\}.$$

Note 25

0c16841754c3437c88d0e4c139976fac

Как представить $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq)$ в виде суммы?

■ $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \dots$

Note 26

1a67db9b47ea40bf95ec1d08c9e9c699

Изоморфны ли $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$?

■ Нет.

Note 27

19a444a43c154a90be9f954bb3b05480

Почему $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$ не изоморфны?

■ От обратного и каждому “столбцу” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ соответствует “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Note 28

8a9b0bca924d47f4b16ce8a629424644

Допустим, что f — изоморфизм $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$. Как показать, что f сопоставляет “столбцу” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

■ Между элементами одного столбца есть лишь конечное число других элементов.

Note 29

100d9aff0d0a4aafa0d2cf77b58ef9e3

Изоморфны ли $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \leq)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$?

■ Нет.

Note 30

422d3d1f24854d10abc217203fc5af30

Почему $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \leq)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$ не изоморфны?

■ От обратного и любому “столбцу” в $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ соответствует “столбец” в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Note 31

2554b1cb3c6c4f17a2aae72ec3237ec4

Изоморфны ли $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leq)$ и $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq)$?

■ Да.

Note 32

b81b5778d5b84d9692f1a7e9b2a7213e

Почему $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leq)$ и $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq)$ изоморфны?

■ Можно разделить $\mathbb{Q} \times \{0\}$ на интервалы с иррациональными границами.

Note 33

38a9f34456fe49d897d1266a579abb34

Изоморфны ли упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$?

■ Да.

Note 34

349e19c69cbf4e538962f2b5647c9ec8

Упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$ изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

■ Выбрать строго возрастающие последовательности, сходящиеся к 1 и к $\sqrt{2}$, и построить кусочно-линейную функцию.

Note 35

9935ca5d5b984b1d8a3abdb6a136e45e

Для каких упорядоченных множеств вводят понятие соседних элементов?

■ Для линейно упорядоченных.

Note 36

6c9efbfcd1f248499b3684e875f90187

Какие два элемента линейно упорядоченного множества называются соседними?

■ $x < y$ и не существует элемента между ними.

Note 37

5257d91e2bd644a394471f45f956b381

Линейно упорядоченное множество называется плотным, если в нём нет соседних элементов.

Note 38

fb41cd3433e4f518aad0470091368f8

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны.

Note 39

897a90582ea34029857e54219cdaae9b

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

■ Построить изоморфизм по шагам.

Note 40

05c3a6d6aaf14ee2ace8ac0a6f341ede

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны. Что строится на n -м шаге доказательства?

■ Два изоморфных n -элементных подмножества.

Note 41

81d3607a53a44a02adc761c77683cfcfd

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны. Как строятся изоморфные подмножества на 0-м шаге?

■ Два пустых множества.

Note 42

8c36dbd253ad4e49accbfda588771eba

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны. Как строятся изоморфные подмножества на каждом следующем $((n + 1)$ -м) шаге?

Выбирается «неохваченный» элемент из X и для его позиции выбирается элемент из Y .

Note 43

4c20edaf13894fa6aad8ff406ff45512

Любые два счётных плотных линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны. Как в доказательстве гарантировать, что все элементы обоих множеств будут охвачены?

Пронумеровать и поочерёдно выбирать «неохваченный» элемент с наименьшим индексом.

Note 44

9046bf3a560244b1be2ff15bfb8fc1c5

Сколько существует неизоморфных счётных плотных линейных множеств?

Четыре.

Note 45

00ea7e2d37ed47ebba2ca53baf9f132c

Существует только 4 неизоморфных счётных плотных линейных множеств. В чём ключевая идея доказательства?

Изоморфность зависит только от наличия наибольших и наименьших элементов.

Note 46

888cf7317e604c62adeadeb29423837e

Всякое счётное линейно упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству \mathbb{Q} .

Note 47

3003b82fd8b342478147fe3f6da09ad4

Всякое счётное линейно упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству \mathbb{Q} . В чём ключевая идея доказательства?

■ По шагам «охватывать» элементы изоморфизмом.

Note 48

5071d1ba54de4db0955aa3bc403cbc54

Всякое счётное линейно упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству \mathbb{Q} . Почему именно \mathbb{Q} ?

■ Можно было взять любое счётное плотное линейно упорядоченное множество без наибольшего и наименьшего элементов.