Note 1

61211f8d77d34c9fa47e8872540de683

Каков первый шаг в доказательстве любого из законов де Моргана?

> Рассмотреть произвольный элемент a, принадлежащий левой (или правой) части соответствующего равенства.

Note 2

7e46fe30f7624833823e79c0fedc16df

Какова основная идея доказательства любого из законов де Моргана?

> Надо показать, что условие принадлежности произвольного элемента a левой части совпадают с таковыми для правой части.

Note 3

010c7f55d37742fea697ee54e1b20715

Как показать, что произвольное бесконечное множество A содержит счётное подмножество?

> Выбрать
>
> - a_1 из A,
> - a_2 из $A \setminus \{a_1\}$,
> - a_3 из $A \setminus \{a_1, a_2\}$,
> $\ldots$
>
> Получим счётное множество $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A$.

Note 4

61cad32098d341eb8086313887d6cd8c

Как показать, что любое бесконечное подмножество B счётного подмножества A счётно?

> Пронумеровать элементы множества B в порядке их появления в последовательности $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ элементов множества A.

Note 5

3639a29f97084a048aae918aefdb9100

Пусть A — счётное множество, $B \in A$. Что можно сказать о множестве B?

> B не более чем счётно.

Note 6

bad29a5101fe46c3bd91ed4d7f33015b

Как показать, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно?

> Расположить элементы множеств по строкам в таблицу и пронумеровать их в порядке их появления на “побочных” диагоналях.

Note 7

23eae0cde4e049379eab7d391cd31769

Как показать, что множество $\mathbb{Q}$ счётно?

> Представить его как объединение не более чем счетного семейства не более чем счётных множеств $\{\mathbb{Q}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где
>
> $$\mathbb{Q}_q := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Note 8

fa0bde6f987c45f9b12f1e7a19f5ed7f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Как можно задать биекцию $\varphi : [a, b] \to [0, 1]$?

> $$\varphi(x) = \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note 9

d7dc9d0004e9406e8bedb136412f6d07

Как доказать, что для любого бесконечного множества A и его конечного подмножества B (пусть $|B| = m$)

$$A \setminus B \sim A?$$

> Рассмотрим произвольную последовательность
>
> $$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$
>
> несовпадающих элементов множества A такую, что первые её m элементов — это все элементы множества B. Обозначим теперь
>
> $$\varphi(x) = \begin{cases} x_{k+m}, & x = x_k, \\ x, & x \notin \{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$
>
> Тогда $\varphi : A \to A \setminus B$ — биекция, а значит $A \setminus B \sim A$.

Note 10

75dda33bf56f4c7dae2140052f8d6f52

Как доказать, что $[0,1] \sim \mathbb{R}$?

> - $[0,1] \sim (0,1)$, поскольку $(0,1) = [0,1] \setminus \{0,1\}$,
> - $(0,1) \sim \mathbb{R}$, поскольку $\cot(\pi x)|_{(0,1)}$ — биекция.
>
> Получаем $[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R} \implies [0,1] \sim \mathbb{R}$.

Note 11

c8ec225de29d4338add7adcea48cc2a2

Приведите пример системы вложенных отрезков в множестве $\mathbb{Q}$ для которой не выполняется аксиома Кантора.

> Можно рассмотреть последовательность вложенных отрезков
>
> $$\{[1;2], [1{,}4;1{,}5], [1{,}41;1{,}42], [1{,}414;1{,}415], \ldots\}$$
>
> концы которых — все более и более точные десятичные приближения иррационального числа $\sqrt{2}$.

Note 12

e12a9ee541074f3f83c0236b906973d1

$$A \setminus (A \setminus B) = \text{\{\{c1::} A \cap B. \text{\}\}}$$

Note 13

59b526f72a4343fb936d1fa20561c886

Как доказать, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$?

> $$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= C_n^k \cdot \left(\frac{n+1}{k+1}\right) \\ &= C_n^k \cdot \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \\ &= C_n^k + \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= C_n^k + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= C_n^k + C_n^{k+1}. \end{aligned}$$

Note 14

a20a03ca2ebe4b5d85249845f15f1561

Как доказать, что во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший элемент?

> По индукции:
>
> - максимум множества из одного элемента есть сам этот элемент;
> - максимум множества из $n > 1$ элемента есть либо максимум каких-либо $n - 1$ его элементов, либо значение оставшегося n-ого элемента.

Note 15

02fab2f581504672bc9dc06a5dfa4166

Как доказать, что во всяком непустом ограниченном сверху множестве $A \subset \mathbb{Z}$ есть наибольший элемент?

> Выберем произвольный $x_0 \in A$ и обозначим
>
> $$A_0 = \{x \mid x \in A \land x \geqslant x_0\},$$
> $$A_1 = A \setminus A_0.$$
>
> Тогда A_0 — конечное подмножество $\mathbb{R}$, а значит существует $\max A_0$. При этом для любого $x \in A$ имеем два случая:
>
> 1. если $x \in A_0$, то $x \leqslant \max A_0$ по определению максимума;
> 2. если $x \notin A_0$, то по построению A_0 имеем
>
> $$\forall \hat{x} \in A_0 \quad x < \hat{x},$$
>
>   а значит $x < \max A_0$.
>
> В любом случае имеем $x \leqslant \max A_0$, так что $\max A_0 = \max A$ по определению.

Note 16

c7dd2e717d9c47199cf723b912cf4e34

Как доказать, что во всяком интервале есть хотя бы одно рациональное число?

> Пусть (a, b) — интервал в $\mathbb{R}$. Тогда по аксиоме Архимеда
>
> $$\exists n \in \mathbb{N} \quad n > \frac{1}{b-a} \implies b - a > \frac{1}{n}.$$
>
> Нетрудно показать, что
>
> $$\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

Note 17

9428e0290086401db17d784b26f66839

Если $\forall\varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon$, то {{c1:: $a = b$.}}

Note 18

3eaaa1f0f8624d8db6fa6824b7394a4a

Как доказать, что если $\forall\varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon$, то $a = b$?

> Допустим, что $a \neq b$. Тогда для $\varepsilon = |b - a| > 0$ не выполняется $\varepsilon < |b - a| \implies$ противоречие $\implies a = b$.

Note 19

d8e380894b49477d9b690778e94ae82c

Как доказать, что у любой последовательности может быть не более одного предела?

> Из определения предела
>
> $$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$
>
> Но тогда
>
> $$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |b - x_n| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
>
> Получаем, что $\forall\varepsilon > 0 \quad |b - a| < \varepsilon \implies a = b$.

Note 20

1e1fe886e2334eb18a97c2ab2cfadc49

Как доказать, что любая сходящаяся последовательность ограничена сверху?

> Пусть $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon = 1$; тогда по определению предела
>
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a - 1 < x_n < a + 1,$$
>
> т.е. множество $\{x_n \mid n > N\}$ ограниченно сверху значением $a + 1$, но тогда все множество значений $\{x_n\}$ ограниченно сверху значением
>
> $$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, a + 1\}.$$

Note 21

4712e0fed7a44e8bac81bae5c16d1810

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon$, то {{c1:: $a \leqslant b$.}}

Note 22

b0c8d698cc304040a59c01dc5852ed8b

Как доказать, что если $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon$, то $a \leqslant b$?

> Допустим, что $a > b$. Тогда для $\varepsilon = a - b > 0$ не выполняется $a - b < \varepsilon \implies$ противоречие $\implies a \leqslant b$.

Note 23

f492d02ab40942c3bb31727a84b97f36

Как доказать теорему о предельном переходе в неравенстве для последовательностей?

> Пусть $\quad x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad \forall n\; x_n \leqslant y_n$.
> Тогда из определения предела
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \begin{cases} a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n, \\ y_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$
> $$\implies a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n \leqslant y_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$$
> $$\implies a - b < \varepsilon.$$
>
> Получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad a - b < \varepsilon \implies a \leqslant b$.

Note 24

6d56b828715344a4981b505177237b3d

Как доказать теорему о сжатой последовательности?

> Пусть $\quad x_n \to a, \quad z_n \to a, \quad \forall n\; x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$.
> Тогда из определения предела
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \begin{cases} a - \varepsilon < x_n, \\ z_n < a + \varepsilon \end{cases}$$
> $$\implies a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant x_n < a + \varepsilon$$
> $$\implies a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$
> $$\overset{\text{def}}{\implies} y_n \to a.$$

Note 25

120b6a6635764d8eb06a8353c96ff71c

Как доказать, что $\forall\{x_n\} \quad x \to a \iff x - a \to 0$?

> Из определения предела
>
> $$x \to a \overset{\text{def}}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x - a| < \varepsilon \overset{\text{def}}{\iff} x - a \to 0.$$

Note 26

ee8b4fecca4148bcb931714d65a0f370

Как доказать, что произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая?

> Пусть $x_n \to 0, \quad \exists M > 0 \quad \forall n \; |y_n| \leqslant M$.
> Тогда из определения предела
>
> $$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \implies |x_n y_n| < \varepsilon \overset{\text{def}}{\implies} x_n y_n \to 0.$$

Note 27

40b8a99aaa204cab959c483aa6fee51c

Как доказать, что если $\quad x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad$ то

$$x_n + y_n \to a + b?$$

> Из определения предела
>
> $$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > \mathbb{N} \quad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$
> $$\implies |(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$$
> $$\overset{\text{def}}{\implies} x_n + y_n \to a + b.$$

Note 28

e6c2b0c279e043f4b1582b4b93a0a695

Как доказать, что если $\quad x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad$ то

$$x_n y_n \to ab?$$

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= x_n y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= \underbrace{x_n}_{\text{огр.}} \underbrace{(y_n - b)}_{\text{б.м.}} - \underbrace{b}_{\text{огр.}} \underbrace{(x_n - a)}_{\text{б.м.}} \longrightarrow 0 \\ &\implies x_n y_n \to ab. \end{aligned}$$

Note 29

0ad2f5ec6e414af58c65e717bab87321

Как доказать, что если $x_n \to a \neq 0$, то $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ ограничена?

Возьмём $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Тогда по определению предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$$
$$\implies \forall n > N \quad |x_n| > \frac{|a|}{2}.$$

Обозначим $k := \min\left\{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, \frac{|a|}{2} \right\}$. Тогда

$$\forall n \quad \frac{1}{|x_n|} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Note 30

321261a3f4294e4e93998ebc9b7ee7b6

Как доказать, что если $\quad x_n \to a \neq 0, \quad$ то

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}?$$

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a} = \underbrace{(a - x_n)}_{\text{б.м.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x_n a}}_{\text{огр.}} \to 0$$

$$\implies \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}.$$

Note 31

c0d240f325d2436fa82b626d092650ad

Как доказать, что если $\quad x_n \to a, \quad y_n \to b \neq 0, \quad$ то

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}?$$

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Note 32

935ce2afa1d8446eaf3c05d6a8e7cc9f

Как доказать, что если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$?

Из определения предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$
$$\implies ||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon \overset{\text{def}}{\implies} |x_n| \to |a|.$$

Note 33

530467bc97fb479e9e07f028a0339d42

Пусть $x_n \to +\infty$ и $\{y_n\}$ ограниченна снизу. Как доказать, что

$$x_n + y_n \to +\infty?$$

$\{y_n\}$ ограничена $\implies \exists m > 0 \quad \forall n \; y_n > m.$
Тогда из определения предела

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > E - m$$
$$\implies x_n + y_n > E \overset{\text{def}}{\implies} x_n + y_n \to +\infty.$$

Note 34

c6a76a8262d54e07a6c35d1ef23fb6df

Как доказать, что если $x_n \to +\infty$, то $(-x_n) \to -\infty$?

> Из определения предела
>
> $$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > E \\ \implies -x_n < -E \overset{\text{def}}{\implies} (-x_n) \to -\infty.$$

Note 35

f3549ee7a37d4d2983df8f7b6f7308e2

Как доказать, что если $x_n \to -\infty$ и $\{y_n\}$ ограничена сверху, то

$$x_n + y_n \to -\infty?$$

> Очевидно, что $-x_n \to +\infty$ и $\{-y_n\}$ ограничена снизу, значит
>
> $$-x_n - y_n \to +\infty \implies x_n + y_n \to -\infty.$$

Note 36

2a9c150676e64b28b32989c7bb381a61

Как доказать, что если $x_n \to \infty$ и $\{y_n\}$ ограниченна, что

$$x_n + y_n \to \infty?$$

> $\{y_n\}$ ограничена $\implies \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad -M < y_n < M$. Тогда из определения предела
>
> $$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left[\begin{aligned} & x_n > E + M, \\ & x_n < -E - M \end{aligned}\right. \\ \implies \left[\begin{aligned} & x_n + y_n > E, \\ & x_n + y_n < -E \end{aligned}\right. \overset{\text{def}}{\implies} x_n + y_n \to \infty.$$

Note 37

8eb238f0ba4e4993a464d39c5aa7d5ad

Как доказать, что если $x_n \to \pm\infty$ и $\forall n \quad y_n \geqslant b > 0$, то

$$x_n y_n \to \pm\infty?$$

> Докажем для определённости случай с $x_n \to +\infty$.
> Тогда из определения предела
>
> $$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n > \frac{E}{b}$$
> $$\implies x_n y_n > E \overset{\text{def}}{\implies} x_n y_n \to +\infty.$$

Note 38

136d69a689a14768bf3886968976cd48

Как доказать, что если $x_n \to \pm\infty$ и $\forall n \quad y_n \leqslant b < 0$, то

$$x_n y_n \to \mp\infty?$$

> $$\forall n \quad -y_n \geqslant -b > 0 \implies x_n \cdot (-y_n) \to \pm\infty$$
> $$\implies x_n y_n \to \mp\infty.$$

Note 39

42c2ae7685c94559ac1625d9957beaef

Как доказать, что если $x_n \to \infty$ и $\forall n \quad |y_n| \geqslant b > 0$, то

$$x_n y_n \to \infty?$$

> $$x_n \to \infty \implies |x_n| \to +\infty \implies |x_n y_n| \to +\infty$$
> $$\implies x_n y_n \to \infty.$$

Note 40

5ddf20539ae042b89ed368baefea93fa

Как доказать, что $o(c \cdot f(x)) = o(f(x)) \quad \forall c \in \mathbb{R}$?

$$o(c \cdot f(x)) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.}} \cdot c \cdot f(x) = \underbrace{\alpha(x) \cdot c}_{\text{б.м.}} \cdot f(x) \overset{\text{def}}{=} o(f(x)).$$

Note 41

ff3a996ecf5440ef9fec11b8e2b11e57

Как доказать, что $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x))$?

$$\begin{aligned} o(f(x)) \pm o(f(x)) &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{\alpha_1(x)}_{\text{б.м.}} f(x) \pm \underbrace{\alpha_2(x)}_{\text{б.м.}} f(x) = \\ &= \underbrace{(\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))}_{\text{б.м.}} \cdot f(x) \overset{\text{def}}{=} o(f(x)). \end{aligned}$$

Note 42

31f4dbdff85847fd8f20fa30144e98b1

Как доказать, что $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$?

$$\begin{aligned} o(f(x)) \cdot o(g(x)) &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{\alpha_1(x)}_{\text{б.м.}} f(x) \cdot \underbrace{\alpha_2(x)}_{\text{б.м.}} \cdot g(x) \\ &= \underbrace{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}_{\text{б.м.}} \cdot f(x)g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \end{aligned}$$

Note 43

892f003287eb48a38ce2353f652924d2

Как доказать, что $f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$?

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x) \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = \alpha(x)g(x) \iff \\ f(x) &= (1 + \alpha'(x))g(x) = g(x) + \alpha'(x)g(x) \\ &\overset{\text{def}}{=} g(x) + o(g(x)), \end{aligned}$$

где $\quad \alpha(x) \to 1, \quad \alpha'(x) := \alpha(x) - 1 \to 0.$

Note 44

87497006d56b46f9a80f18cc9ac04c5e

Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность стягивающихся отрезков. Как доказать, что

$$\exists! c : \quad c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]?$$

> Из аксиомы Кантора о вложенных отрезках имеем существование c. Рассмотрим теперь произвольный $\bar{c}$ из $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Тогда
>
> $$\forall n \quad \begin{cases} a_n \leqslant c \leqslant b_n, \\ a_n \leqslant \bar{c} \leqslant b_n \end{cases} \implies a_n - b_n \leqslant c - \bar{c} \leqslant b_n - a_n,$$
>
> но по определению стягивающихся отрезков $a_n - b_n \to 0$, а значит по теореме о сжатой последовательности
>
> $$c - \bar{c} \to 0 \implies c - \bar{c} = 0 \implies \bar{c} = c.$$
>
> Получаем и единственность c.

Note 45

cd83a426bf4446d184de8e0899cdefbd

Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность стягивающихся отрезков, и

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Как доказать, что $a_n \to c$ и $b_n \to c$?

> Из условия имеем
>
> $$\forall n \quad a_n \leqslant c \leqslant b_n \implies a_n - b_n \leqslant c - b_n \leqslant 0,$$
>
> но $a_n - b_n \to 0$ по определению стягивающихся отрезков, а значит по теореме о сжатой последовательности
>
> $$c - b_n \to 0 \implies b_n \to c.$$
>
> Аналогично получаем, что и $a_n \to c$.

Note 46

cbd8c5c2b42a48db97ca14aaee80bd03

Как доказать, что если M — верхняя граница множества $A \subset \mathbb{R}$, и при этом

$$\exists \{x_n\} \subset A : x_n \to M,$$

то $M = \sup A$?

> Из определения предела
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad |x_n - M| < \varepsilon \implies M - x_n < \varepsilon \\ \implies x_n > M - \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon \\ \overset{\text{def}}{\implies} M = \sup A.$$

Note 47

a8068d8f45674dc8b8773d9b9326d19a

В чем основная идея доказательства теоремы о существовании верхней грани у любого непустого ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$?

> Нужно построить последовательность стягивающихся отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что
>
> $$\forall n \quad \begin{cases} [a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset, \\ (b_n, +\infty) \cap A = \emptyset, \end{cases}$$
>
> и показать, что точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ — это супремум A.