

Лекция 09.11.22

Note 1

e60e9a5778ca41aaabad4a4a7e6c4fea

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

■ Обыкновенные; в частных производных.

Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}} — это {{c1: уравнения относительно функции одной переменной и её производных.}}

Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

“{{c2: Обыкновенные дифференциальные уравнения}}” сокращается как “{{c1: ОДУ.}}”

Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

{{c2: Уравнения в частных производных}} — это {{c1: уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.}}

Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

{{c2: Уравнения в частных производных}} в русскоязычной среде так же называют {{c1: уравнениями математической физики.}}

Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

“{{c2: Уравнения в частных производных}}” сокращается как “{{c1: УрЧП.}}”

Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

{{c2: Порядком}} дифференциального уравнения называется {{c1: порядок старшей производной, в него входящей.}}

Note 8

69a06ae8b8d1413f84c38cc0ab521158

Является ли

$$F(x, y) = 0, y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

■ Нет, потому что нет производных.

Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется $\{\{c2: \text{областью},\}\}$ если $\{\{c1: \text{оно открыто и связно.}\}\}$

Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f63182

ОДУ первого порядка называется $\{\{c2: \text{разрешённым относительно производной},\}\}$ если оно имеет вид $\{\{c1: \cdot\}\}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$\}} \text{ где } f - \{\{c2: \text{функция на области в } \mathbb{R}^2.\}\}$

Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция y называется $\{\{c3: \text{решением ОДУ на множестве } X,\}\}$ если $\{\{c1: \text{в любой точке } X \text{ её подстановка её значений в ОДУ имеет смысл и приводит к верному равенству.}\}\}$

Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть $y - \{\{c3: \text{решение ОДУ.}\}\}$ $\{\{c1: \text{График } y\}\}$ называется $\{\{c2: \text{интегральной кривой этого уравнения.}\}\}$

Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

■ Сколь угодно много.

Note 14

76c92fefc3414e8da3c06f458e9e80ee

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

■ Найти решение, отвечающее начальным условиям.

Note 15

94e8aba670fa45cab4fae8fee8d23568

Что есть “начальные условия” из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

■ $y(x_0) = y_0$ для фиксированных x_0, y_0 .

Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения (x_0, y_0) в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Начальные данные.

Note 17

aae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

■ Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) ?

■ Интервал, включающий x_0 .

Note 19

3623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 20

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

Note 21

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

Note 22

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

Через любую точку области проходит интегральная кривая.

Note 23

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)?$$

Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

Note 24

7dbfe4396c5545578771b6066869de5a

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

■ Они равны на некоторой $V_\delta(x_0)$.

Note 25

c397734ceb654182bc3221591296e2f6

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Тогда если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то \llcorner любая точка области является точкой единственности. \lrcorner

Note 26

339730ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . При каком условии задача Коши для $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ однозначно разрешима в любой точке?

■ f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны.

Note 27

785b85c103cb446090843629aba6f668

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют особым решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

■ Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

Note 28

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как называется решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, любая точка графика которого не является точкой единственности?

■ Особое решение.

Note 29

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют общим решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

Note 30

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как задаётся общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Отображение $\Phi(x, c)$, где c — параметр, x — переменная.

Note 31

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют частным решением уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Одно из решений, входящих в некоторое общее решение.

Note 32

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

Векторное поле — это отображение из линейного пространства в себя.

Note 33

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a36

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 34

bf3a5b553b8b4f74905e400cce49df6c

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют полем направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

Note 35

7f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как строится визуальное представление поля направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Через каждую точки сетки проводится соответствующе наклонённый отрезок.

Note 36

a9509cb3d319496ca4f8ce25b5b988b2

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Гладкая кривая является интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда в любой точке она касается соответствующего элемента поля направлений.

(в терминах поля направлений)

Note 37

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называется изоклиной уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

Note 38

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

$f(x, y) = c$ для $c \in \mathbb{R}$.