30.05.22

Note 1

6fdd3ac4b4f644cea3704bcc79918836

{{c2::Группой $(G, \circ)$}} называется {{c1::непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $\circ : G \times G \to G$, удовлетворяющей аксиомам группы.}}

Note 2

827b57c3950c42b28e381d37a49ddf39

Сколько утверждений представлено в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Три.

Note 3

f526d0257921478ca77a37b97abb9d06

Какова первая аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Операция $\circ$ ассоциативна.

Note 4

ce2298302937453e87e0cf850f17af90

Какова вторая аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> Для операции $\circ$ существует нейтральный элемент.

Note 5

9f917456f2bf4fe6bf4e35f8042c9499

{{c2::Нейтральный элемент}} из определения группы $(G, \circ)$ обычно обозначают {{c1::e.}}

Note 6

3a8f693c011348fd9e88038d036a5b42

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c4::$a \in G$.}} {{c2::Элемент $\tilde{a} \in G$}} называется {{c3::обратным к a,}} если {{c1::

$$a \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ a = e.$$

}}

Note 7

13c9853893a445d9a33db6823c3a5146

Какова третья аксиома в наборе аксиом из определения группы $(G, \circ)$?

> $\forall a \in G$ существует обратный к a элемент.

Note 8

5ba5e27ac8a9481eac4302c3159a6596

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Обратный элемент к a}} обычно обозначают {{c1::a^{-1}.}}

Note 9

9f4da30e71b1403a998b7c3fdf192252

{{c2::Множество всех невырожденных $n \times n$ матриц над полем F}} вместе с {{c3::операцией умножения}} {{c1::называется общей линейной группой.}}

Note 10

27a09e6a00d14e859d7ad1d78a4f74a3

{{c2::Общая линейная группа из $n \times n$ матриц над полем F}} обозначается {{c1::$\mathrm{GL}(n, F)$.}}

Note 11

809c8a8f790e4a2a998a4a8038c03971

Группа $(G, \circ)$ называется {{c2::абелевой,}} если {{c1::операция $\circ$ коммутативна.}}

Note 12

e59ac970ec54461083354dae9eeb4047

Может ли группа иметь несколько нейтральных элементов?

> Нет, нейтральный элемент единственен.

Note 13

13fee55238844118889a790b6e0c7e37

Пусть $(G, \circ)$ — группа. Тогда если e и e' — нейтральные элементы для $\circ$, то $e = e'$. В чём основная идея доказательства?

> Рассмотреть $e \circ e'$.

Note 14
afa616033db44cee8d39131bb90173bd

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Может ли в G существовать несколько элементов, обратных к a?

> Нет, обратный элемент единственен.

Note 15
9f4dcde939af46639169bda602d721c5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Тогда если a^{-1} и $\tilde{a}$ — обратные элементы к a, то $\tilde{a} = a^{-1}$. В чём основная идея доказательства?

> Представить $\tilde{a}$ как $\tilde{a} \circ \left(a \circ a^{-1}\right)$.

Note 16
3db3d03590c84407bfb64b2a80b0e1c5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c2::$a, b \in G$.}} Тогда

$$(a \circ b)^{-1} = \text{\{\{c1::}b^{-1} \circ a^{-1}.\text{\}\}}$$

Note 17
10144a83e52a4f5cbf0f96c818e229a5

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$H \subset G$.}} Тогда {{c4::$(H, \circ)$}} называется {{c2::подгруппой группы $(G, \circ)$,}} если {{c1::$(H, \circ)$ является группой.}}

Note 18
9de4580c8d2545bcad2c525fe42930ec

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $H \subset G$. Выражение "$(H, \circ)$ является подгруппой $(G, \circ)$" обозначается

$$(H, \circ) \leqslant (G, \circ).$$

Note 19
bd4835b2c522436fac41030bf6b13a66

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c4::$a \in G$,}} {{c3::$n \in \mathbb{N}$.}}

$$\text{\{\{c2::}a^n\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ раз}}.\text{\}\}}$$

Note 20

2e41bce96a5249ca9d372d04f772b9b4

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c2::$a \in G$.}}

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} e. \text{}}}$$

Note 21

2cfa92bf39b847d4aa21d381a0d2c428

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G,\ n \in \mathbb{N}$.

$$\text{{{c2::}}} a^{-n} \text{}}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} \left(a^{-1}\right)^n . \text{}}}$$

Note 22

3994ad9b38154ec081e7042011939b50

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$a \in G$.}} {{c2::Порядком элемента a}} называется {{c1::либо $\min\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\}$, либо ∞, если таких n не существует.}}

Note 23

78e264e39e824819ace538828da51d7c

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Порядок элемента a}} обозначается {{c1::$\operatorname{ord} a$.}}

Note 24

2e3b057efc1e40b1843700b41b2052b9

Пусть $(G, \circ)$ — группа, {{c3::$a \in G$.}} {{c1::Множество $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ с операций $\circ$}} называется {{c2::подгруппой $(G, \circ)$, порождённой элементом a.}}

Note 25

fd96a89fdb1b45559782a7213101e400

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. {{c2::Подгруппа $(G, \circ)$, порождённая элементом a,}} обозначается {{c1::$\langle a \rangle$.}}

Note 26

54a6a6775d1940b09be51518008fabdc

Пусть $(G, \circ)$ — группа, $a \in G$. Тогда если {{c2::$\operatorname{ord} a < \infty$,}} то

$$\text{{{c3::}}} \langle a \rangle \text{}}} \simeq \text{{{c1::}}} \mathbb{Z}_{\operatorname{ord} a}. \text{}}}$$

Note 27

d83fe9abbfca4fc99b99e08866cc83a9

Пусть $(G, \circ)$ – группа, $a \in G$. Тогда если {{c2::$\operatorname{ord} a = \infty$,}} то

$$\text{{{c3::}}\langle a \rangle\text{}}} \simeq \text{{{c1::}}\mathbb{Z}.\text{}}}$$