Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2::Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1::многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1::он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Младший ненулевой коэффициент при $(x-a)^m$ в $p-q$ равен нулю $\implies \perp$. (Доказательство от противного.)

Note 4

91af14a03bea4b9fadee06859cbab64d

Пусть p и q — два многочлена Тейлора функции f, коэффициент r_m перед $(x-a)^m$ — младший ненулевой коэффициент в $p-q$. Как показать, что $r_m = 0$?

> Рассмотреть многочлен
>
> $$\frac{p(x)-q(x)}{(x-a)^m}.$$

Note 5

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2::Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1::$T_{a,n}f$.}}

Note 6

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{{c3::Формула Тейлора для многочленов}}»

Пусть p — {{c2::многочлен степени не более n.}} Тогда {{c1::

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}

Note 7

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } f(a). \text{}}}$$

Note 8

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\Big((x-a)^k\Big)^{(n)}\Bigg|_{x=a} = \text{{{c1::}} } \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} \text{}}}$$

Note 9

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 10

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3::Свойство n раз дифференцируемой функции}}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$ и {{c2::

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1::$f(x) = o((x-a)^n), x \to a$.}}

Note 11

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{\{c1::\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

Note 12

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 13

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 14

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 15

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 16

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 17

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x - a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$.

Note 18

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x - a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c - a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c - a|^n < \varepsilon |x - a|^n$$

Note 19

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N},$ {{c3::$f(a) = 0,$}} {{c2::

$$f'(x) = o((x - a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1::$o((x - a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 20

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3::**Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2::$f : D \subset R \to \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

> По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

> $$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\widetilde{\Delta}_{a,b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \begin{cases} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{cases} \}\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{{c3::**Формула Тейлора-Лагранжа**}}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq x, \quad$ {{c2::$f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.}} Тогда {{c1::найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {{c1::теореме Лагранжа}}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и далее по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\text{\{\{c2::}e^x\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).\text{\}\}}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\text{\{\{c2::} \sin x\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).\text{\}\}}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\text{\{\{c2::} \cos x\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).\text{\}\}}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\text{\{\{c2::} \ln(1+x)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).\text{\}\}}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{{c3::Обобщённый биномиальный коэффициент}} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \text{\{\{c1::} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\text{\}\}}, \quad \alpha \in \text{\{\{c2::}\mathbb{R}\text{\}\}}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::(1+x)^\alpha\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)\ .\}\}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют {{c1::биномиальным разложением}}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{\{c1::(-1)^k.\}\}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2::(1+x)^{-1}\}\} = \{\{c1::\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)\ .\}\}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {{c3::функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа.}} Тогда если {{c2::

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

}} то {{c1::

$$|R_{a,n}f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}}

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n\,dx = {{c1::\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}}, \quad ({{c2::n \neq -1}}).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int {{c2::\frac{1}{x}}}\,dx = {{c1::\ln|x|+C}}.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int {{c2::\frac{1}{1-x^2}}}\,dx = {{c1::\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C}}.$$

Note 4

337fddddf6d64dd38b5ced0cae2bbbf3

$$\int {{c2::\frac{1}{x^2-1}}}\,dx = {{c1::-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C}}.$$

Note 5

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int {{c2::\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}}\,dx = {{c1::\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C}}.$$

Note 6

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{{{c1::x^2 \pm a^2}}}}\,dx = \ln|x+\sqrt{{{c1::x^2 \pm a^2}}}|+C.$$

Note 7

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x\,dx = {{c1::\frac{a^x}{\ln a}+C}}.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

> Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2::$f \nearrow\!\!\nearrow$ на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\Longleftarrow$ }} {{c1::$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B)$.
}}

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

> Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть {{c4:: $f \in C\langle A, B\rangle$ и дифференцируема на (A, B).}} Тогда

- {{c2:: f постоянна на $\langle A, B\rangle$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1:: $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.}}

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

> Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть {{c3:: $f, g \in C[A, B\rangle$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда Если {{c2:: $f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B\rangle.$$

}}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть {{c3:: $f, g \in C\langle A, B]$ и дифференцируемы на (A, B).}} Тогда если {{c2:: $f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

}} то {{c1::

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B).$$

}}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leqslant f(a).$$

}}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого максимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geqslant f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется {{c2:: точкой строгого минимума функции f,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если {{c2::точка a является точкой минимума или максимума функции f,}} то a называется {{c1::точкой экстремума f.}}

Note 15

98f3cebf02ca464ab3cf9e94355caaa2

«{{c3::Необходимое условие экстремума}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a.}} Тогда {{c1::если a является точкой экстремума f, то $f'(a) = 0$.}}

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

> Применить теорему Ферма к сужению f на отрезок, включённый в окрестность $V_\delta(a)$ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется {{c1::стационарной точкой функции f,}} если {{c2::

$$f'(a) = 0.$$

}}

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::точка $a \in (A, B)$}} называется {{c2::критической точкой,}} если {{c1::либо a стационарна для f, либо f не дифференцируема в точке a.}}

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда все {{c2::точки экстремума f, принадлежащие (A, B),}} лежат в {{c1::множестве её критических точек.}}

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

{{c3:: $\max f([a, b])$}} $=$ {{c1:: $\max\{f(a), f(b), \max f(C)\}$,}}

где C — {{c2::множество критических точек f.}}

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, {{c3::$a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$.}} Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго максимума f.}}

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если {{c1::

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

}} то {{c2::a — точка строго минимума f.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$.}} Тогда если {{c1::$f''(a) > 0$,}} то {{c2::a — точка строгого минимума f.}}

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f'' определена в точке a, $f'(a) = 0$. Тогда если {{c1::$f''(a) < 0$,}} то {{c2::a — точка строгого максимума f.}}

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752fcaf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с
>
> $$o((x-a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f''?

> Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,}} {{c3::

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

}} Тогда если {{c2::n нечётно,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если {{c2::n чётно,}} {{c1::то достаточное условие экстремума аналогично достаточному условию в терминах f''.}}

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«{{c3::**Теорема Дарбу**}}»

Пусть {{c2::f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$, $a, b \in \langle A, B \rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

}} Тогда {{c1::$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.$}}

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

> По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c, далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

> c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

> Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b.

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть {{c3::f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$.}} Если {{c2::

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B\rangle,$$

}} то {{c1::f строго монотонна на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbdb8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

> Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B\rangle$. Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«{{c2::Следствие из теоремы Дарбу о сохранении промежутка.}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B\rangle$. Тогда $f'(\langle A, B\rangle)$ — промежуток.}}

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

> Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B\rangle$
>
> $$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B\rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B\rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leqslant f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f(\langle A, B \rangle)?$$

> Применить теорему Дарбу к функции
>
> $$F(x) = f(x) - y \cdot x$$
>
> в точках a и b.

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«{{c2::Следствие из теоремы Дарбу о скачках производной.}}»

{{c1::Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.}}

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> Допустить противное и показать, что $\operatorname{im} f'|_{[a,a+\delta)}$ — не промежуток.

Note 19

933fb7290ce844da8f84c48835915d5c

Какие допущения принимаются (для определённости) в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> f имеет скачёк справа в точке $a \in \langle A, B \rangle$ и
>
> $$L := \lim_{x \to a^+} f'(x) < f'(a).$$

Note 20

4fc5c84bb2b14241a99633260e7f76fc

Как выбирается δ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

> Так, что для некоторого $y \in (L, f'(a))$
>
> $$f'(x) < y \quad \forall x \in (a, a+\delta).$$

Note 21

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

{{c3::Функция $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::выпуклой на $\langle A, B \rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0,1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 22

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

{{c3::Функция $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::строго выпуклой на $\langle A, B \rangle$,}} если {{c1::

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0,1)$$
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

}}

Note 23

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«{{c3::Критерий}} {{c1::строгой выпуклости f на $\langle A, B \rangle$}}»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливо неравенство
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$
}}

(из леммы о трёх хордах)

Note 24

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«{{c4::Лемма о трёх хордах}}»

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда {{c3::равносильны}} следующие утверждения.

- {{c1::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$.}}
- {{c2::$\forall a, b, c \in \langle A, B\rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

}}

Note 25

c8e0bc0478654a5bbabdf38890b5f942

Каким образом доказываются критерий строгой выпуклости и лемма о трёх хордах?

> Строится цепочка импликаций
>
> $$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1).$$
>
> - (1) — строгая выпуклость f,
> - (2) — неравенство из леммы о трёх хордах.
> - (3) — неравенство из критерия выпуклости,

Note 26

11c8d7341f374a2e8d7d5c8df97eaba8

В чём основная идея доказательства критерия строгой выпуклости из леммы о трёх хордах (достаточность)?

> Положить $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ и отсюда выразить $c - a$ и $b - c$.

Note 27

1338324da4ea4cb7a93a5a15718852b5

В чем основная идея доказательства леммы о трёх хордах (необходимость)?

> Положить в определении выпуклости
>
> $$\lambda = \frac{b-c}{b-a}.$$

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in$ {{c3::$\langle A, B\rangle$}},

$$F(x) \coloneqq \text{\{\{c4::} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \text{\}\}}$$

Тогда если {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in$ {{c3::$\langle A, B\rangle$}},

$$F(x) \coloneqq \text{\{\{c4::} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \text{\}\}}$$

Тогда если {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::

$$F \nearrow\nearrow \text{ на } \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

d547aa237c104089813102cd73487563

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$. Откуда следует возрастание функции $F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$?

> Из леммы о трёх хордах.

Note 4

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in \langle A, B)$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 5

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 6

1ea150313caa4817b9f27c00d5c8e6d8

Откуда следует существование односторонних производных у выпуклой фукнции?

> Из теоремы о пределе монотонной функции для
>
> $$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Note 7

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть {{c3::f выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c2::$a \in (A, B)$.}} Тогда {{c1::$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ конечны и $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$.}}

Note 8

82fe965871ac446facad207a4f246b18

Пусть f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$. Откуда следует, что $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$?

> Из теоремы о пределе монотонной функции.

Note 9

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$, то она {{c1::непрерывна на (A, B).}}

Note 10

9390116052df401f8413ffb225259a9d

Пусть f выпукла на $\langle A, B\rangle$. Откуда следует, что она непрерывна на (A, B)?

> Из существования конечных односторонних производных f в любой точке (A, B).

Note 11

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$.}} {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 12

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B\rangle$. {{c2::Прямая $y = g(x)$}} называется {{c1::строго опорной для функции в точке a,}} если {{c2::она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 13

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть {{c5::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся {{c4::уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

}} Тогда прямая ℓ является {{c1::опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.}}

Note 14

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$, $a \in (A, B)$,}} прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является {{c1::строго опорной для функции f в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c2::$k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.
}}

Note 15

1da04fcb23dc406eba98567735e9e6dc

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что если прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f, то $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

> В определении опорной прямой выразить $f(x)$ через односторонние производные по определению дифференцируемости.

Note 16

9ab922ea4b1f422c855c9dc14925580a

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f, если $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

> По теореме о пределе монотонной функции сравнить
>
> $$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> с односторонними производными в точке a.

Note 17

f8f5608de51344b89b749bf6fb673e89

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Если {{c2::в каждой точке (A, B) функция f имеет опорную прямую,}} то {{c1::она выпукла на $\langle A, B \rangle$.
}}

(в терминах опорных прямых)

Note 18

0a5cbb4429524954af423e27fe0c32bc

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Если {{c2::в каждой точке (A, B) функция f имеет строго опорную прямую,}} то {{c1::она строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.}}

(в терминах опорных прямых)

Note 19

cfe92784a4e244ecb916f9627404f421

Пусть $f : \langle A, B \rangle \to \mathbb{R}$. Если в каждой точке $a \in (A, B)$ функция f имеет опорную прямую, то она выпукла на $\langle A, B \rangle$. В чем основная идея доказательства?

> Выбрать $x < a < y$ и показать для них выполнение неравенства критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Лекция 04.03.22

Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл $T_{a,1}f(x)$?

> График $T_{a,1}f(x)$ — это касательная к функции f в точке a.

Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B\rangle$$
$$f(x) \geqslant T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с её касательными»

Пусть {{c4::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::функция f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B\rangle \setminus \{a\}$$
$$f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 4

76ff105d143e49dea8fe8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (необходимость)?

> f дифференцируема в любой точке (A, B) $\implies$ касательная совпадает с опорной прямой.

Note 5

a71b501cf8434876a0ff83fdc763c8d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (достаточность)?

> Из условия f имеет опорную прямую в каждой точке (A, B).

Note 6

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) \geqslant kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 7

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть {{c3::$f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$.}} Тогда если {{c2::f строго выпукла на $(A, +\infty)$,}} то {{c1::

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 8

7046fd62e87e44c7a6dc18f4e94f7bd8

Пусть $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда если f строго выпукла на $(A, +\infty)$, то

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

В чем основная идея доказательства?

> Показать, что $f(x) - kx \searrow\searrow$. Далее по теореме о пределе монотонной функции.

Note 9

f0e5b2b8f6a74445a42cf0b35e854f39

Пусть $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$ и f строго выпукла на $(A, +\infty)$. Как показать, что $f(x) - kx \searrow\searrow$?

> По теореме о пределе монотонной функции для
> $$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Note 10

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 11

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f'»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дифференцируема на (A, B).}} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$f' \nearrow\!\!\nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 12

8b55ad03aaca4dfcb1ec7ce171dee0ce

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (необходимость)?

> Для $x < y$ сравнить значения $f'(x), f'(y)$ с $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Note 13

b1782e215a3d4a948b9fbddfbaed55d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (достаточность)?

> По теореме Лагранжа выполняется неравенство критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Note 14

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B). }} Тогда {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$}} {{c3::тогда и только тогда, когда }} {{c1::

$$f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 15

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

«Связь {{c2::выпуклости функции}} с f''»

Пусть {{c4::$f \in C\langle A, B\rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B). }} Тогда {{c2::f строго выпукла на $\langle A, B\rangle$,}} {{c3::если}} {{c1::

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

}}

Note 16

d912e4ab9b6a4459b2f104fabfc198f8

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f''?

> Применить критерий возрастания функции к f'.

Note 17

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$.}} Точка a называется {{c2:: точкой перегиба функции f,}} если {{c1::

- $\exists \delta > 0$ такое, что $V_\delta(a) \subset (A, B)$ и f имеет разный характер выпуклости на $(a - \delta, a]$ и $[a, a + \delta)$;
- f непрерывна в точке a;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

}}

Note 18

9aa5847a39ac46e8ad8dbee41e14a904

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дважды дифференцируема на a. Если {{c2::a является точкой перегиба f,}} то {{c1::$f''(a) = 0$.}}

Note 19

aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

> Нет, это только необходимое условие.

Note 20

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и имеет в ней производную из $\overline{\mathbb{R}}$.}} Тогда если {{c1::$\exists \delta > 0$ такое, что f дважды дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$ и

- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,
- либо $\quad \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,

}} то {{c2::a — точка перегиба f.}}

Семинар 03.03.22

Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeea82dcc793

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \ln x {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} x \ln x - x {\scriptstyle\}\}} + C$$

Note 2

310668af95114f9fbe87673be333fec8

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{1}{\sin x} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| {\scriptstyle\}\}} + C$$

Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{1}{\cos x} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} \ln \left|\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right| {\scriptstyle\}\}} + C$$

Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{1}{x^2 + a^2} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} {\scriptstyle\}\}} + C \quad ({\scriptstyle\{\{c3::} a \neq 0 {\scriptstyle\}\}})$$

Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{A}{x + a} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} A \ln |x + a| {\scriptstyle\}\}} + C$$

Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{1}{nx + a} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} \frac{1}{n} \ln \left|x + \frac{a}{n}\right| {\scriptstyle\}\}} + C \quad ({\scriptstyle\{\{c3::} n \neq 0 {\scriptstyle\}\}})$$

Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int {\scriptstyle\{\{c2::} \frac{A}{(x + a)^k} {\scriptstyle\}\}}\, dx = {\scriptstyle\{\{c1::} \frac{A}{(1 - k)(x + a)^{k-1}} {\scriptstyle\}\}} + C \quad ({\scriptstyle\{\{c3::} k \neq 1 {\scriptstyle\}\}})$$

Note 8

72b0aaea0b254078bbfcc47745885653

$$\int {{c4::\frac{Mx+N}{x^2+px+q}}} \, dx = {{c1::\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|}} + {{c2::\frac{2N-pM}{2a}\arctan\frac{2x+p}{2a}}} + C,$$

где $a^2 := {{c3::\frac{4q-p^2}{4}}},\quad {{c5::p^2-4q<0.}}$

Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beee8

$$\int {{c3::\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}}} \, dx = \int {{c1::\frac{N-M\frac{p}{2}}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt + {{c1::\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt + C,$$

где $\quad {{c4::t}} := {{c2::x+\frac{p}{2},}} \quad {{c4::a^2}} := {{c2::\frac{4q-p^2}{4}}}, \quad {{c5::p^2-4q<0.}}$

Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int {{c4::\frac{1}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt \quad ({{c5::k>1, a\neq 0}})$$

$$I_k = {{c3::\frac{1}{2(k-1)a^2}}} \cdot \left({{c1::(2k-3)I_{k-1}}} + {{c2::\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}}}\right)$$

Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int {{c2::\frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}}} \, dt = {{c1::\frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}}} + C$$

Лекция 07.03.22

Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$}} наызвается {{c2::первообразной функции f,}} если {{c1::F дифференцируема на $\langle A, B\rangle$ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B\rangle.$$

}}

Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

{{c1::Множество всех первообразных функции f на промежутке $\langle A, B\rangle$}} обозначается {{c2::$\mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$.}}

Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deaec

Пусть {{c4::$f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$.}} Тогда

{{c2::$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1::$\exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c$.}}

Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

> $(F - G)' \equiv 0 \implies F - G = const.$

Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$. Тогда

$$G \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle) \impliedby \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения первообразной.

Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcddd45

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$.}} {{c1::Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

}} называется {{c2::неопределённым интегралом f на $\langle A, B\rangle$.}}

Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Неопределённый интеграл функции f на $\langle A, B\rangle$}} обозначается {{c2::

$$\int f(x)\,dx.$$

}}

Note 8

7581f732c1c44de4bc99eae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ?$$

> Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B\rangle$.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } f(x).\text{}}}$$

Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fbea7ff

Пусть $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle), G \in \mathscr{P}_g(\langle A, B\rangle)$.

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } \Big\{F(x) + H(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\Big\}.\text{}}}$$

Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}.\}\}$$

Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из {{c3::теоремы Дарбу}} следует, что если {{c2::f имеет первообразную на промежутке $\langle A, B\rangle$,}} то {{c1::f не имеет скачков на $\langle A, B\rangle$}}

Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции f на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

> Нет, поскольку f может иметь точки разрыва второго рода.

Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

«Достаточное условие существования первообразной»

{{c1::Если f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то f имеет первообразную на $\langle A, B\rangle$.}}

Лекция 11.03.22

Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть {{c3::$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Функция $F : E \to \mathbb{R}$}} называется {{c2::первообразной f на множестве E,}} если {{c1::F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.}}

Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл $\int f(x)dx$ называется {{c2::берущимся,}} если {{c1::функция f имеет элементарную первообразную.}}

Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ имеют на $\langle A, B\rangle$ первообразную. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \text{{{c1::}}}\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.\text{}}}$$

Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 5

26b34c9a101f488aaed5ddee4ddd43d2

«{{c3::Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле}}»

Пусть {{c2::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $F \in \mathscr{P}_f(\langle A, B\rangle)$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle C, D\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

> По определению интеграла и первообразной.

Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть {{c3::$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle A, B\rangle$ и обратима.}} Тогда если {{c1::G — первообразная функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$,}} то

{{c2:: $$\int f(x)\,dx$$ }} $=$ {{c1:: $G(\varphi^{-1}(x)) + C.$ }}

Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

«{{c3::Формула интегрирования по частям}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C^1\langle A, B\rangle$.}} Тогда {{c1::

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

}}

Note 9

e2df459e1699495f980cdddacc633f6f

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для неопределённого интеграла?

> $$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx.$$

Лекция 18.03.22

Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет {{c1::элементарную первообразную.}}

Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a:b]\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::[a,b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть {{c3::$[a,b]$ – невырожденный отрезок.}} {{c1::Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^n : \quad a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

}} называется {{c2::разбиением отрезка $[a,b]$.}}

Note 4

e301682aa933430591e748e6973a1843

Пусть $[a,b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех разбиений отрезка $[a,b]$}} обозначается {{c2::$T[a,b]$.}}

Note 5

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

Note 6

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c1::
Величина

$$\max\{\Delta x_k\}$$

}} называется {{c2::рангом разбиения τ.}}

Note 7

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c2::
Ранг разбиения τ}} обозначается {{c1::λ_τ.}}

Note 8

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. {{c1:: Набор точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ таких, что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$}} называется {{c2::оснащением разбиения τ.}}

Note 9

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть {{c3::τ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, ξ — оснащение разбиения τ.}} Тогда {{c1::пара (τ,ξ)}} называется {{c2::оснащённым разбиением отрезка $[a,b]$.}}

Note 10

974eeb7d70c24d318e71abd3d9a95f3f

Пусть $[a,b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех оснащённых разбиений отрезка $[a,b]$}} обозначается {{c2::$T'[a,b]$.
}}

Note 11

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad (\tau,\xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — оснащённое разбиение $[a,b]$.}} {{c1::Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

}} называется {{c2::интегральной суммой функции f, отвечающей оснащённому разбиению (τ,ξ).}}

Note 12

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют {{c1::суммами Римана.
}}

Note 13

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

{{c2::Интегральная сумма функции f, отвечающая оснащённому разбиению (τ,ξ),}} обозначается как {{c1::

$$\sigma_\tau(f,\xi).$$

}}

Note 14

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} {{c4::Число $I \in \mathbb{R}$}} называют {{c2::пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю,}} если {{c1::

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где (τ, ξ) — оснащённое разбиение отрезка $[a, b]$.}}

(определение в терминах $(\varepsilon,\ \delta)$)

Note 15

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

{{c2::Предел интегральных сумм функции f при ранге разбиения стремящемся к нулю}} обозначается {{c1::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

}}

Note 16

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если {{c1::для любой последовательности оснащённых разбиений $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что $\lambda_{\tau_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

Семинар 17.03.22

Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

> Выделить полный квадрат под радикалом и раскрыть скобки.

Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

> Представить ответ в виде
>
> $$Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$
>
> продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в $Q_{n-1}(x)$ и λ из полученного соотношения.

Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int {\{\{c2::}\frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\}\}dx = \{\{c1::\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|\}\}+C.$$

Note 5 9b1156318f464dc79a658d6e94fe214d

$$\int {{c3::\frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}}}\,dx = {{c1::\arcsin\frac{2x-p}{2a}}} + C,$$

где $a := {{c2::\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}}}$.

Лекция 21.03.22

Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} f называется {{c2::интегрируемой по Риману на $[a, b]$,}} если {{c1::существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$.}}

Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$.}} Тогда {{c2::

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$$

}} называется {{c1::определённым интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.}}

Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

{{c2::Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$}} обозначается {{c1::

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

}}

Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::числа a, b}} называют {{c1::пределами интегрирования.}}

Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

{{c2::функцию f}} называют {{c1::подынтегральной функцией.}}

Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. {{c1::Множество всех функций интегрируемых по Риману на $[a, b]$}} обозначается {{c2::$\mathcal{R}[a, b]$.}}

Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbcb60

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau \in T[a, b]$. {{c1::Верхняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$S_\tau(f).$$

}}

Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$.}} Тогда {{c1::сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

}} называется {{c2::нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ.}}

Note 10
2bbefff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \tau \in T[a, b]$. {{c1::Нижняя интегральная сумма Дарбу функции f, отвечающая разбиению τ,}} обозначается {{c2::

$$s_\tau(f).$$

}}

Note 11
189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена сверху}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $S_\tau(f)$ конечна.}}

Note 12
083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть {{c4::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$.}} Тогда {{c2::f ограничена снизу}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::сумма $s_\tau(f)$ конечна.}}

Note 13
1c8af1c02f864877bddd4971a256a30e

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $S_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

> $$S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 14
7958d85410954f6280755a33f7bff6fb

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $s_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

> $$s_\tau(f) = \inf \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$$

Note 15
53ffcba153934fda879e5241f8e85387

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как, в общих чертах, доказать, что $S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$?

> Представить $\{\sigma_\tau(f,\xi) \mid \forall \xi\}$ как сумму множеств
>
> $$\Delta x_k \cdot f([x_k, x_{k+1}]).$$

Note 16

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть {{c2::$f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \ \tau, \tilde{\tau}$ — два разбиения $[a,b],\ \ \tau \subset \tilde{\tau}$.}}
Тогда {{c1::

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leqslant S_\tau(f),$$
$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geqslant s_\tau(f).$$

}}

Лекция 25.03.22

Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Как связаны $s_{\tau_1}(f)$ и $S_{\tau_2}(f)$ для произвольных разбиений τ_1, τ_2 отрезка $[a, b]$?

> $$s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$$

Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

> Да. $s_{\tau_1}(f) \leqslant S_{\tau_2}(f)$ для любых τ_1, τ_2

Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

> Для $\tau_1 = \tau_2$ утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

> Да. Например, функция Дирихле.

Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

> Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

Note 6

c6120328fd3e40a48f6d7e69fce29c9d

Как показать, что любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём?

> Если допустить, что f не ограниченна, то $\forall\tau$ имеем $S_\tau(f) = \sup\{\sigma_\tau(f,\xi)\} = +\infty$, а значит
>
> $$\nexists \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Note 7

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\inf\{S_\tau(f) \mid \forall\tau\}$$

}} называется {{c2::верхним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 8

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Верхний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I^*.}}

Note 9

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Величина {{c1::

$$\sup\{s_\tau(f) \mid \forall\tau\}$$

}} называется {{c2::нижним интегралом Дарбу функции f.}}

Note 10

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Нижний интеграл Дарбу функции f }} обычно обозначатся {{c2::I_*.}}

Note 11

83287fd934bc4878a99a742db1668220

«{{c3::Критерий}} {{c2::интегрируемости функции}}»

Пусть {{c4::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.}} Тогда {{c2::$f \in \mathcal{R}\,[a,b]$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda_t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

}}

Note 12

68b782b8c09040dfa994ede932b748bc

{{c2::$S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0$}} $\overset{\text{def}}{\iff}$

{{c1:: $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.\end{gathered}$$ }}

(в терминах ε, δ)

Note 13

6a94745f7ac74ef7a5be1b0a6128e303

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (необходимость)?

> По определению sup и inf
>
> $$I - \varepsilon \leqslant s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leqslant I + \varepsilon.$$

Note 14

53f49c34063149d892ad1eb1015abebd

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (достаточность)?

> $$\begin{gathered} s_\tau(f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau(f), \\ s_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant S_\tau(f). \end{gathered}$$
>
> для любого оснащённого разбиения (τ, ξ) отрезка $[a,b]$.

Note 15

f200bb84909d45898f1313f053135d3a

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Как соотносятся I^*, I_* и $\int_a^b f$?

$$I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Note 16

1e7ec80a8e8f4caf87b70493394d837a

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Как для произвольного разбиения τ соотносятся $s_\tau(f)$, $S_\tau(f)$ и $\int_a^b f$?

$$s_\tau(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau(f).$$

Note 17

c1ca9a97a9a948e685e22801cc7e1ee5

Если $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f) = \text{\{\{c1::}\int_a^b f.\text{\}\}}$$

Note 18

6a890ec9b5384ed2944133d968407712

Как показать, что

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f) = \int_a^b f?$$

Тривиально следует из критерия интегрируемости и неравенства

$$s_\tau(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau(f).$$

Note 19

1a704d6d276749bdaa56a88c05622b02

Если $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau(f) = \text{\{\{c1::}\int_a^b f.\text{\}\}}$$

Note 20

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть {{c3::$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.}} {{c1::Величина

$$\sup \Big\{ f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D \Big\}$$

}} называется {{c2::колебанием функции f на множестве D.}}

Note 21

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. {{c1::Колебание функции f на множестве D}} обозначается {{c2::$\omega(f)$.}}

Note 22

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\omega(f)\}\} = \{\{c1::\sup f(D) - \inf f(D).\}\}$$

(в терминах $\sup f$, $\inf f$)

Note 23

ec97e108f2394602934c87c2f28f2a39

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – разбиение $[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::\omega_k(f)\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::\omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]}).\}\}$$

Note 24

649783b3a0c14571bdbbb8caba0d07a3

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – разбиение $[a, b]$. Тогда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k.\}\}$$

(в терминах $\omega_k(f)$)

Note 25

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2:: \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau(f)\}\} = \{\{c1::I^*\}\}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 26

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2:: \lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau(f)\}\} = \{\{c1:: I_*\}\}.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \to 0$)

Note 27

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1::f ограничена на $[a, b]$ и $I_* = I^*$.}}

«{{c3::Критерий}} {{c4::Дарбу}}»

Note 28

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1::$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.}}

«{{c3::Критерий}} {{c4::Римана}}»

Note 29

8ba2a0bdc9754111b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 30

da9a4e99c01a42a4a8c5bccf8e3d24f7

Как, в общих чертах, доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём?

> Из теоремы Кантора получить равномерную непрерывность и по теореме Вейерштрасса оценить для $\lambda_\tau < \delta$ величину $\omega_k(f)$.

Note 31

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

> Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 32

7a4501cbb6414feaaf12589452716ae3

Как, в общих чертах, доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

> Для определённости $f \nearrow$. Для произвольного ε взять
>
> $$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$
>
> Далее по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

Семинар 24.03.22

Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегалы вида

$$\int {{c2::\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}}}\,dx$$

берутся с помощью {{c1::замены

$$t := \frac{1}{x-\alpha}.$$

}}

Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида {{c2::

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где R — рациональная функция,}} берутся с помощью {{c1:: подстановок Эйлера.}}

Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

> 1. $a > 0$;
> 2. $c > 0$;
> 3. $ax^2 + bx + c$ приводим над $\mathbb{R}$.

Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого ax^2+bx+c.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x - x_1),$$

где x_1 — корень ax^2+bx+c.

Note 7

5defd336f3aa4b4aa26b239431f04d17

$$\int \text{\{\{c2::}\sqrt{x^2 \pm a^2}\text{\}\}}\, dx = \text{\{\{c1::}\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\text{\}\}} + C$$

$$(a > 0)$$

Note 8

c6f5af39f62e4d7f9a4cee9e0c45d107

$$\int \sqrt{\text{\{\{c1::}x^2 \pm a^2\text{\}\}}}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{\text{\{\{c1::}x^2 \pm a^2\text{\}\}}} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{\text{\{\{c1::}x^2 \pm a^2\text{\}\}}}\right| + C$$

$$(a > 0)$$

Note 9

56abb403ab43437da9bf41b7ca9d15e8

$$\int \text{\{\{c2::}\sqrt{a^2 - x^2}\text{\}\}}\, dx = \text{\{\{c1::}\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\text{\}\}} + C$$

$$(a > 0).$$

Note 10 f3627073257a4cd7b1d3adf499699cb9

$$\int \sqrt{\text{{{c1::}}a^2 - x^2\text{}}}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{\text{{{c1::}}a^2 - x^2\text{}}} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$(a > 0).$$

Лекция 01.04.22

Note 1

60ff32d5ed7347ae8036518373a5bc61

Пусть {{c3::$f, \tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{R}[a,b]$,}} {{c4::$T \subset [a,b]$ конечно.}} Если {{c1::

$$\forall x \in [a,b] \setminus T \quad f(x) = \tilde{f}(x),$$

}} то {{c2::$\tilde{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.}}

Note 2

9f281cfda3464766a189207f5029d7ed

В чем ключевая идея доказательства того, что изменение значений функции $f \in \mathcal{R}[a,b]$ в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

> $$\sigma(f) - \sigma(\tilde{f}) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Note 3

94c3dcad5bc247568a21704cb1d05f72

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.}} Тогда {{c1::

$$f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}[\alpha,\beta].$$

}}

Note 4

385f602d08114dd39630009f76dbb7e0

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Тогда $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$.
В чем ключевая идея доказательства?

> Если $\tau_0 \in T[\alpha,\beta], \tau \in T[a,b], \tau_0 \subset \tau$, то
>
> $$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Note 5

ee426e669ae545b8ad6d128a5870373e

Пусть {{c3::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$.}} Тогда если {{c1::

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c] \quad \wedge \quad f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b],$$

}} то {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$.}}

Note 6

c8c134e6d7c442c3a7214585d20c41ac

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Тогда если

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
В чем ключевая идея доказательства?

> $$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega(f) \cdot \lambda_\tau,$$
> $$\tau \in T[a, b], \quad \tau' = \tau \cup \{c\},$$
> $$\tau_1 = \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, a].$$

Note 7

ccba27d6a29c468f8a60fbd0f106fec4

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.}} Функция f называется {{c2::кусочно непрерывной,}} если {{c1::множество её точек разрыва пусто или конечно, и все её разрывы суть разрывы первого рода.
}}

Note 8

86f712cafa53498fa3b282915340635c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то {{c1::$f \in \mathcal{R}[a, b]$.}}

Note 9

78e23f5a381e4d01b4c4467b16955dcb

Как показать, что кусочно непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$?

> Показать, что она интегрируема на каждом из непрерывных «кусков».

Note 10

682bfc21e35a489ebc7df5514e1d4690

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Говорят, что {{c2::множество E имеет нулевую меру,}} если {{c1::для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε.}}

Note 11

3be97c537ee44236bfc5f8bae48390e3

Пусть {{c5::$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.}} Тогда {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f ограничена на $[a,b]$ и множество точек разрыва f имеет нулевую меру.}}

«{{c3::Критерий}} {{c4::Лебега}}»

Note 12

1b3f6df593ba44b6b9558ee83720dd7e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{\{\{c1::}f+g\text{\}\}},\ \text{\{\{c1::}fg,\text{\}\}}\ \text{\{\{c1::}\alpha f\text{\}\}},\ \text{\{\{c1::}|f|\text{\}\}} \in \mathcal{R}[a,b].$$

Note 13

275d09f8b4c9445992ecc4f02cd9f6ba

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\inf_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0\text{\}\}} \implies \text{\{\{c1::}\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b].\text{\}\}}$$

Note 14

20347e63d70945cdbe073a675dbcb23a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Тривиально следует из определения предела интегральных сумм в терминах последовательностей.

Note 15

909d22f843c9421598278c307e29edb5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Дать верхнюю оценку для $\omega_k(f \cdot g)$ через $\omega_k(f), \omega_k(g)$ и верхние границы f и g.

Note 16

aad31d4599b94b8f8ee128bfbfec8251

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> Частный случай произведения двух функций.

Note 17

76538508e5574126a26e4dbf06fe4160

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
В чем основная идея доказательства?

> $$|f| = f \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathcal{R}[a,b].$$

Note 18

dea0bdf999ae4306b554167c63eeb231

Как показать, что sgn интегрируем?

> Показать, что sng кусочно непрерывен.

Note 19

6bb4953a2e6d41fb86cf8a801779a97f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a,b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b].$$

В чем основная идея доказательства?

> Представить $\frac{f}{g}$ как произведение функций $f \cdot \frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

Note 20

8dcb53c3642547a5bec77126b490908d

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a,b]} |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b].$$

В чем основная идея доказательства?

Оценить $\omega_k(1/f)$ сверху через $\omega_k(f)$ и $\inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Лекция 04.04.22

Note 1

40ffb14c933540e0a82a0f491c2ea946

Интегрируема ли функция Дирихле χ на произвольном невырожденном отрезке?

> Нет.

Note 2

488460418bc246fe90907796c4db58be

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, χ — функция Дирихле. Как показать, что $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$?

> $\omega(\chi|_{[\alpha,\beta]}) = 1$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Note 3

fdad8aea720d4949805e6d411e4d9cd0

Интегрируема ли функция Римана ψ на произвольном промежутке $[a, b]$?

> Да.

Note 4

c7099fd03a894c53b8c80146045e9127

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана.

$$\int_a^b \psi = \text{\{\{c1::}0.\text{\}\}}$$

Note 5

6350173ae50b44d8ac481bc4e58df52a

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. В чём ключевая идея доказательства того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Показать, что множество
>
> $$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \mid q \leqslant N \right\}$$
>
> конечно.

Note 6

83b18cc44cff41fc8f13f721bb95887f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается N в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Так, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Note 7

e897ef9db02f489f8f78e18c71f5ee40

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается δ в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> $$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}.$$

Note 8

aa4eaee1713d444292a6cdb20f5d2bed

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Какой критерий интегрируемости используется в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

> Критерий в терминах $S_\tau - s_\tau$.

Note 9

3bb574f8b37345f2b04629d2b5b0d2f6

Функция Римана {{c2::непрерывна}} {{c1::в любой иррациональной точке.}}

Note 10

d5900a0d5d414c44ad43c8a6780916b2

Функция Римана {{c2::разрыва}} {{c1::в любой рациональной точке.}}

Note 11

34b800b4ab96479abababab82ccb3d6f0b

Множество $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ есть множество меры {{c1::ноль.}}

Note 12

ac79fc72aeb440e9a666f8dc2433dcc8

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to [a, b]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}f \in C[a, b],\ g \in \mathcal{R}[c, d]\text{\}\}} \implies \text{\{\{c1::}f \circ g \in \mathcal{R}[c, d].\text{\}\}}$$

Note 13

bc11b9f7a4304f74b4bb3118d30cea22

Пусть {{c3::$a > b$, $f \in \mathcal{R}[b, a]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}\int_a^b f\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} -\int_b^a f.\text{\}\}}$$

Note 14

2be98235b82942f7bf08141dd983fe07

$$\int_a^a f \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}0.\text{\}\}}$$

Note 15

649acec0ca304bd5bc72134401215095

Пусть $f : [a, a] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, a] \overset{\text{def}}{\iff} \text{\{\{c1::}\top.\text{\}\}}$$

Note 16

cc427e206f4d435889e87acd827bc5b4

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\int_a^b f\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\int_a^c f + \int_c^b f.\text{\}\}}$$

Note 17

f57dd9f306a5429bb89c68b128c0e01f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\int_a^b \alpha f\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\alpha \int_a^b f.\text{\}\}}$$

Note 18

5aaf74ed1c3e414cb5b7c501e5970206

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\int_a^b (f \pm g)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\int_a^b f \pm \int_a^b g.\text{\}\}}$$

Note 19

d43171cbe636478098887433ff64ea61

Откуда следует линейность интеграла Римана?

> Из определения в терминах последовательностей.

Note 20

8db1f43273d041d6b3fbc674270d4f5b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \geqslant 0\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \geqslant 0.\}\}$$

Note 21

9778c1f4a58e4df9a9a25064935a647f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \leqslant g\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.\}\}$$

Note 22

9ba16cbdf8fb4b65bd032cb56c483a1b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2:: \left| \int_a^b f \right| \}\}\{\{c1:: \leqslant \int_a^b |f|.\}\}$$

Note 23

275d3bae3cfa48e9882d2d2a90ed21b8

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2:: |f| \leqslant M \in \mathbb{R}\}\} \implies \{\{c1:: \left| \int_a^b f \right| \leqslant M(b-a).\}\}$$

Note 24

84dfee5723b34bec8f05c42879c3e85f

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда

$$\{\{c2::f \geqslant 0\}\} \wedge \int_a^b f = 0 \implies \{\{c1::f \equiv 0.\}\}$$

Note 25

2f438df6b5304cd7acbd273214875635

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$f \geqslant 0 \wedge \int_a^b f = 0 \implies f \equiv 0.$$

В чем основная идея доказательства?

> От противного; допустить, что $\exists x_0 : f(x_0) > 0$ и использовать то, что $\exists \delta : f|_{V_\delta(x_0)} > \frac{f(x_0)}{2}$.

Note 26

03b2fb7149444b2db71b150b49f267a9

Пусть {{c3::$f \in \mathcal{R}[a, b]$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$,}}

$$\varphi(x) = \text{{{c2::}} \int_a^x f. \text{}}}$$

Тогда {{c1::φ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.}}

«{{c4::Теорема Барроу}}»

Note 27

2255bf6318be43ee834d6071ed740c89

В чем основная идея доказательства теоремы Барроу?

> Оценить разность $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ и получить дифференцируемость φ по определению.

Note 28

ec57d94464cc4ecf8920954c5d4cbf76

Как в доказательстве теоремы Барроу непосредственно используется непрерывность f?

> Для представления $f(x)$ как $f(x_0) + \Delta x$, где $\Delta x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Note 29

d26fa11d0b1e4d83bb4f4b224b9359a4

Почему в доказательстве теоремы Барроу

$$\Delta x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0?$$

$$\Delta x = f(x) - f(x_0) \to 0.$$

Note 30

cdc6a92b44fd4d488ca3b30c5e2b4232

В доказательстве теоремы Барроу

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \text{\{\{c1::} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx. \text{\}\}}$$

Note 31

c5dc36411f3a45598a70c9522a651022

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx = \text{\{\{c1::} f(x_0)h. \text{\}\}}$$

Note 32

1cea51f7fd9b4b438856a6ec7f4c1a48

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x\,dx = \text{\{\{c1::} o(h). \text{\}\}}$$

Note 33

455761e28fe94191b0bebcfa38fc5b89

Откуда в доказательстве теоремы Барроу следует, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x\,dx = o(h)?$$

$$\Delta x \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \overset{\text{def}}{\iff} \ldots\ |\Delta x| < \varepsilon.$$

Note 34

1109a435ae7543cf8263f72942677e95

Пусть {{c2::$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \geqslant 0$ (или $g \leqslant 0$), $m \leqslant f \leqslant M$.}} Тогда

$$\{\{c4::\exists \mu \in [m, M]\}\} \quad \{\{c1:: \int_a^b fg = \mu \int_a^b g\}\}$$

«{{c3::Первая теорема о среднем интегрального исчисления}}»

Note 35

2e6a92e370ed4445a1cd67bd8d0241f9

В чем основная идея доказательства первой теоремы о среднем интегрального исчисления?

> Проинтегрировать все части неравенства
>
> $$mg \leqslant fg \leqslant Mg \quad \text{(для } g \geqslant 0\text{).}$$

Note 36

bede3b8a7d14462fbd5fcb32d222eb2d

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g = 0$)?

> μ — произвольное значение из $[m, M]$.

Note 37

9137b877b68a4313b09fc0b2e748f6a4

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g \neq 0$)?

> $$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Лекция 08.04.22

Note 1

156407f3795145ac967eccf82e541fe0

Пусть {{c2::$f \in C[a, b]$, $g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \geqslant 0$ (или $g \leqslant 0$).}} Тогда {{c1::

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 2

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть {{c2::$f \in R[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$.}} Тогда {{c1::

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b f = \mu(b - a)$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 3

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть {{c2::$f \in C[a, b]$.}} Тогда {{c1::

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f = f(c) \cdot (b - a)$$

}}

(следствие из {{c3::первой теоремы о среднем}})

Note 4

df108f6ef527491996f1a2b6672c17fc

«{{c3::Формула Ньютона-Лейбница}}»

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[a, b]$, $F \in \mathscr{P}_f([a, b])$.}} Тогда {{c1::

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

}}

Note 5

bddc676c2daa42f0b218c91eac244ace

В чем основная идея доказательства формулы Ньютона-Лейбница?

> Выбрать нужное оснащение используя формулу конечных приращений.

Note 6

882e212c55614bb78548d3b6b7f2fbf2

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда {{c1::разность

$$f(b) - f(a)$$

}} называется {{c2::двойной подстановкой функции f на $[a, b]$.

}}

Note 7

b7e1b154b8de47bfbc3d2afdf73ef75c

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Двойная постановка функции f на $[a, b]$}} обозначается {{c2::

$$f\Big|_a^b,\ f(x)\Big|_a^b,\ f(x)\Big|_{x=a}^b$$

}}

Note 8

df6dee2f53354eb8ae50cd3a673878a0

Пусть {{c3::$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $[a, b]$, $f' \in \mathcal{R}[a, b]$.
}} Тогда

$$\text{{{c2::} } \int_a^b f' \text{ }} = \text{{{c1::}} f\Big|_a^b . \text{}}$$

Note 9

1146663e8ded4d63ba85b1b1ed35cb14

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, F — первообразная f за исключением конечного числа точек. Тогда {{c1::

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

}}

(обобщение формулы Ньютона-Лейбница)

Note 10

496225bfd55a484fa6f61e7174af39f4

В чём основная идея доказательства обобщения формулы Ньютона-Лейбница для $F \in \mathscr{P}_f([a, b] \setminus T),\ |T| < \aleph_0$.

> Разбить $[a, b]$ на отрезки, во всех внутренних точках которых $F' = f$.

Note 11

6abc693b3b104008b356cbca06692bdd

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, $F'|_{(a,b)} = f|_{(a,b)}$. Как показать, что $\int_a^b f = F\big|_a^b$?

> $$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f.$$

Note 12

a8b4457947d3495c9b5fca5d72fdae28

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f?$$

> Показать, что их разность стремится к нулю.

Note 13

8b853a07bfa94f17a0a6e43bd75e8226

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^{a+\varepsilon} f \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0?$$

> $$m\varepsilon \leqslant \int_a^{a+\varepsilon} f \leqslant M\varepsilon.$$

Note 14

6e131dfc6d004e86a827f88367981953

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Какова, в общем случае, зависимость между интегрируемостью f и существованием у неё первообразной?

В общем случае прямой зависимости нет.

Note 15

dcb24ef22e6c4921924ad580a30722c6

«{{c3::Интегрирование по частям для определённого интеграла}}»

Пусть {{c2::f, g дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$.}} Тогда {{c1::

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

}}

Note 16

a938ca4e00ae4fffaf1db99f384e1785

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для определённого интеграла?

$$(fg)' = fg' + f'g \in \mathcal{R}[a, b],$$
$$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b.$$

Note 17

46828f8f846b4de1a73aed39d5b9d7a0

«{{c3::Замена переменной в определённом интеграле}}»

Пусть {{c2::$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, $f \in C[a, b]$.}} Тогда {{c1::

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

}}

Note 18

7d8af4366130490fbb87408d659837e7

В чем основная идея доказательства теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

Формула Ньютона-Лейбница для $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$.

Note 19

89c18701291a4123afd5111e00b0e9c8

Как преобразуется $F \circ \varphi\big|_\alpha^\beta$ в доказательстве теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

$$F \circ \varphi\big|_\alpha^\beta = F\big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$$

Note 20

b6aa7eee0f404285b693fb392e8ea744

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[-a, a]$, f — чётна.}} Тогда

$$\int_{-a}^{a} f = \text{\{\{c1::}2\int_0^a f.\text{\}\}}$$

Note 21

53ccd4a61cc742818562b58b9bdce5b4

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[-a, a]$, f — нечётна.}} Тогда

$$\int_{-a}^{a} f = \text{\{\{c1::}0.\text{\}\}}$$

Семинар 31.03.22

Note 1

f6c10d5634604b8785e6d50a3b4179bb

Пусть {{c3::$y = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}(x) \setminus \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$.}} Тогда интеграл вида

$$\int \{\{c2::R(x, y^{p_1}, y^{p_2}, \ldots, y^{p_n})\}\}\, dx$$

берётся заменой {{c1::$t^N = y$, где N — общий знаменатель дробей $p_1, \ldots, p_n$.}}

Note 2

f28ac103f505434d9a7caa2eb9756579

{{c2::Дифференциальным биномом}} называется {{c1::дифференциал вида

$$x^m(a + bx^n)^p\, dx,$$
$$a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

}}

Note 3

6d980687cd794cb2b67482197892cb24

Каковы условия для применения каждой из подстановок применяемых для взятия интеграла от дифференциального бинома?

> $$p \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$$

Note 4

be2650fc8a6c4b88b1f39cd872a556b1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $p \in \mathbb{Z}$)?

> $t^N = x$, где N — общий знаменатель m и n.

Note 5

bcc008ea2e804fcc8d3df70bfe88cdc1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$)?

> $t^k = a + bx^n$, где k — знаменатель p.

Note 6

90e931c9722e44219fe1e08170da8e53

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$)?

> $t^k = ax^{-n} + b$, где k — знаменатель p.

Лекция 23.04.22 (1)

Note 1

57c65a69d4ce4beca2a4ef3d19482330

Пусть {{c3::$f \in C^{n+1}\langle A, B\rangle$, $a, x \in \langle A, B\rangle$,}} $n \in$ {{c4::$\mathbb{Z}_+$}}. Тогда

$$\text{{{c2::}} R_{a,n}f(x) \text{}}} = \text{{{c1::}} \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \text{}}}$$

(в интегральной форме)

Note 2

0a72287655664b3e99f6388731f26bfe

Какой метод доказательства используется в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме?

> Индукция по n.

Note 3

82254691571e452294750327ef22eb89

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (базовый случай)?

> При $n = 0$ получаем формулу Ньютона-Лейбница.

Note 4

4a33a11f8ade46f08ce296db479a9007

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (индукционный переход)?

> Применить к остатку формулу интегрирования по частям.

Note 5

aad636315afd4ee5a6744160d4b3e42d

{{c2::Интегральную форму}} остатка $R_{a,n}f(x)$ иногда называют {{c1::формой Якоби.}}

Note 6

397b0796dce04587adb64efce1dd1140

$$0!! \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} 1. \text{}}}$$

Note 7

cac7fe0bc23d40a59bc9dd6812577d01

$$(-1)!! \stackrel{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}1.\text{\}\}}$$

Note 8

7da7dd0bd19944abbe2d01d155086010

«{{c2::**Формула Валлиса**}}»

{{c1::

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

}}

Note 9

f54929de1ece44289c241d6590700ab5

В чём основная идея доказательства формулы Валлиса?

> Проинтегрировать на $[0, \frac{\pi}{2}]$ неравенство
>
> $$\sin^{2n+1} \leqslant \sin^{2n} \leqslant \sin^{2n-1} .$$

Note 10

b5c778232bc94244b23a8e4a617ed0e6

Пусть {{c3::$m \in \mathbb{Z}_+$.}}

$$\text{\{\{c2::} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx \text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m \text{ чётно,} \\ 1, & m \text{ нечётно.} \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 11

715b1cec8b8041949185220e4e40a41b

В чём основная идея в доказательстве явной формулы для

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx?$$

> Индукция по m и формула интегрирования по частям.

Note 12

38d390969b2741acbfc82267d2fe35fd

«{{c5::Вторая теорема о среднем интегрального исчисления}}»

Пусть {{c4::$f \in C[a,b], g \in C^1[a,b], g$ монотонна на $[a,b]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c3::}\exists c \in [a,b]\text{\}\}} \quad \text{\{\{c2::}\int_a^b fg\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f.\text{\}\}}$$

Note 13

69afab3fc5004157a7f35af02f3e3d12

{{c2::Вторую теорему о среднем интегрального исчисления}} так же называют {{c1::теоремой Бонне.}}

Note 14

f0f631536a7f4b96b0398f89ecaf9118

Каков первый шаг в доказательстве теоремы Бонне?

> Представить $\int_a^b fg$ как $\int_a^b F'g$, где $F(x) \coloneqq \int_a^x f$.

Note 15

2166048a6ca44d23af43256399b234c9

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b F'g$ в доказательстве теоремы Бонне?

> Интегрирование по частям.

Note 16

3029dc6c343e4d1c9888bf539fba3503

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b Fg'$? в доказательстве теоремы Бонне?

> Первая теорема о среднем.

Note 17

441ce64036224c3ebf472a05f4829979

Почему в доказательстве теоремы Бонне мы можем применить первую теорему о среднем к интегралу $\int_a^b Fg'$?

> По следствию из теоремы Дарбу g' не меняет знак на $[a, b]$.

Note 18

882ef3d613b947198a7bea4ad32d5160

Теорема Бонне {{c2::так же будет выполняться,}} если ослабить предположение до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}[a, b], \ \ g \text{ монотонна.}$$

}}

(без доказательства)

Лекция 23.04.22 (2)

Note 1

8b2c86d7991e4a2b91921581b1ef4490

«{{c4::Неравенство Йенсена для интеграла}}»

Пусть {{c3::$f \in C\langle A, B\rangle, \varphi, \lambda \in C[a, b], \varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle, \lambda \geqslant 0$.
}} Тогда если {{c2::f выпукла на $\langle A, B\rangle$ и $\int_a^b \lambda = 1$,}} то {{c1::

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi).$$

}}

Note 2

b1fef24356cb40989e268892f941d2bc

Какие два случая рассматриваются в доказательстве неравенства Йенсена для интеграла?

> $$1.\ \varphi = const, \quad 2.\ \varphi \neq const.$$

Note 3

0135fda5379a4582960532ada8cb52a9

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi = const$)?

> Доказываемое неравенство тривиальным образом обращается в равенство.

Note 4

77790770b54541099c9e486f28074f26

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$)?

> $\int_a^b \lambda\varphi \in (A, B)$, а значит f имеет в этой точке опорную прямую.

Note 5

402dc5f48e084c56acdbac1d8691cd46

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$) показать, что $\int_a^b \lambda\varphi \in (A, B)$?

$$\int_a^b \lambda\varphi \in (\inf \varphi, \sup \varphi) \subset [A, B].$$

Note 6

69bcf26030d34b71839c245e2f0b80ca

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq const$) показать, что $\int_a^b \lambda\varphi \neq \sup \varphi$?

От противного.

Note 7

3584b635c4dc44e7b9b1624c4019860f

Если в неравенстве Йенсена для интеграла {{c2::$\varphi \neq const$, а f строго выпукла,}} то {{c1::имеет место строгое неравенство.}}

Note 8

83892edbede849aeb7d89f4abc718e41

Пусть {{c3::$p, q \in (1, +\infty)$.}} {{c1::Числа p и q}} называются {{c2::сопряжёнными показателями,}} если {{c1::

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

}}

Note 9

40347c04583b4c95b7cac9a0158ee490

«{{c3::**Неравенство Гёльдера для сумм**}}»

Пусть {{c4::$\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$,}} {{c2::$p$ и q — сопряжённые показатели.}} Тогда {{c1::

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

}}

Note 10

97e460d86c3c4db6b2267d79218280cd

«{{c3::Неравенство Гёльдера для интегралов}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a, b]$,}} {{c4::p и q — сопряжённые показатели.}} Тогда {{c1::

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

}}

Note 11

fc914f6a007e42fc8512d6d3d277c03d

В чём основная идея в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

> Применить неравенство Гёльдера для сумм к интегральным суммам.

Note 12

e3416ff410fb47098739b40e48782ab7

Как представляется Δx_k в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

> $$\Delta x_k = (\Delta x_k)^{\frac{1}{p}} \cdot (\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}.$$

Note 13

89fc34798a62448d9c6bd5173c1ac247

«{{c3::Неравенство Коши-Буняковского для интегралов}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a, b]$.}} Тогда {{c1::

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

}}

Note 14

72d317fe9af54aa4b717962551ba6ea0

«{{c3::**Неравенство Минковского для сумм**}}»

Пусть {{c2::$\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$,}} {{c4::$p \geqslant 1$.}} Тогда {{c1::

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 15

19e57ef490ac48889603d288b4d8edd5

«{{c3::**Неравенство Минковского для интегралов**}}»

Пусть {{c2::$f, g \in C[a,b]$,}} {{c4::$p \geqslant 1$.}} Тогда {{c1::

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 16

e0ef8b3744ed4d93a9138b1d967a1792

В чём основная идея доказательства неравенства Минковского для интегралов?

> Применить неравенство Минковского для сумм к интегральным суммам.

Note 17

000b6517531b4ecc9a052a60b3a741a4

Функция $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется {{c2::локально интегрируемой на $\langle A, B\rangle$,}} если {{c1::

$$\forall [a,b] \subset \langle A, B\rangle \quad f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b].$$

}}

Note 18

6b661945d0ee47a7a04ba92793c704f2

{{c1::Множество функций, локально интегрируемых на $\langle A, B\rangle$, }} обозначается {{c2::$\mathcal{R}_{loc}(\langle A, B\rangle)$ или $\mathcal{R}_{loc}\langle A, B\rangle$.}}

Note 19

435bbbcd954b4c8bb3be63c6b63acc2a

Пусть {{c3::$-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$.}}

$$\{\{c2:: \int_a^{\to b} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.\}\}$$

Note 20

51919a133fa34a6b8ed5ed7ad5b76bac

Пусть {{c3::$-\infty \leqslant a < b < +\infty$, $f \in \mathcal{R}_{loc}(a, b]$.}}

$$\{\{c2:: \int_{\to a}^{b} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.\}\}$$

Note 21

27d9a13709de4fa5ab8baff3cd9fbaa0

Выражение

$$\int_a^{\to b} f$$

называют {{c1::несобственным интегралом f по промежутку $[a, b)$.}}

Note 22

bb25f0567eef47e7b707c500e9674f65

Выражение

$$\int_{\to a}^{b} f$$

называют {{c1::несобственным интегралом f по промежутку $(a, b]$.}}

Note 23

f741cd46bba044cfa110acd5e82b1af1

Несобственный интеграл называют {{c2::сходящимся,}} если {{c1::он определён и конечен.}}

Note 24

db034e9065e54430baecac9bfd0a644f

Несобственный интеграл называют {{c2::расходящимся,}} если {{c1::он имеет бесконечное значение или не существует.}}

Note 25

b0514d3cbba648c8a6e3b58d057869cd

Пусть {{c2::$f \in \mathcal{R}[a,b]$.}} Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \text{\{\{c1::} \int_a^b f. \text{\}\}}$$

Note 26

c8d35c7d4dfa4a8ab001d84f09a382bd

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Как показать, что $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$?

> Непосредственно следует из непрерывности функции $x \mapsto \int_a^x f$ (теорема Барроу).

Note 27

ad8461ebb11542bead198798c15c6a91

Пусть {{c3::$f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $c \in (a,b)$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} f \text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_a^c f + \int_c^{\to b} f. \text{\}\}}$$

Note 28

4873742f993743639632296fcb9c3fda

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $c \in (a,b)$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} f \text{ сходится\}\} \{\{c3::} \iff \text{\}\} \{\{c1::} \int_c^{\to b} f \text{ сходится.\}\}}$$

Note 29

7f5c166670d24acc8348a74343d875cc

Пусть {{c3::$f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $A \in (a,b)$.}} {{c1::Несобственный интеграл $\int_A^{\to b}$}} называется {{c2::остатком интеграла $\int_a^{\to b} f$.}}

Note 30

3e68bd52c99f47b59cb0f6c550c12420

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \text{\}\}\{\{c3::} \implies \text{\}\}\{\{c1::} \int_A^{\to b} f \xrightarrow[A \to b^-]{} 0. \text{\}\}}$$

Note 31

6f388abbe0394963abf8ebd7c8090616

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Как показать, что

$$\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \implies \int_A^{\to b} f \xrightarrow[A \to b^-]{} 0?$$

> Представить $\int_A^{\to b} f$ как $\int_a^{\to b} - \int_a^A f$.

Note 32

eed850367bd24674b9fa0cdbd5af00f5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)\}\} = \{\{c1::\alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g.\}\}$$

Note 33

1dcd21125ff841338d9ddad83b33302d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

{{c2::$\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)$ сходится}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ сходятся.}}

Note 34

5ca16eceb7f145959f15bd1feb33442e

«{{c3::Замена переменной в несобственном интеграле }}»

Пусть {{c2::$\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ монотонна, $f \in C[\varphi(\alpha), \varphi(\beta^-))$.}} Тогда {{c1::

$$\int_\alpha^{\to \beta} (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to \varphi(\beta^-)} f.$$

}}

Note 35

e96879968f0f4e3f8bcf844f10abfcc0

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$.

$$\{\{c2::f\Big|_a^{\to b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f(b^-) - f(a).\}\}$$

Note 36

a4c1c50607984cd88be2763ea1bce888

Пусть $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\{\{c2::f\Big|_{\to a}^{b}\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::f(b) - f(a^+).\}\}$$

Note 37

ceae3033619d408da982f6affab84e5b

Пусть {{c3::$f, g \in C^1[a, b)$ и $\exists \lim\limits_{x \to b^-} (f \cdot g)(x)$.}} Тогда

$$\{\{c2::\int_a^{\to b} fg'\}\} = \{\{c1::fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g.\}\}$$

Семинар 21.04.22

Note 1

c06a4a56c952416593e6c6aa940af048

Основное тригонометрическое тождество для гиперболических функций: {{c1::

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

}}

Note 2

e38aaa87d3a54ae0aa44b08a84229224

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::подстановкой $a \sin t = x$}} для $t \in$ {{c3::$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$}}.

Note 3

9c734267d24143218a9ed85452b8fb67

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::заменой $a \operatorname{sh} t = x$}} для $t \in$ {{c3::$\mathbb{R}$}}.

Note 4

8c5f51e8a73d4e3fbf734d43dd62b423

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\text{\}\}}\, dx$$

берутся {{c1::заменой $a \operatorname{ch} t = x$}} для $t \in$ {{c3::$\mathbb{R}_+$}}.

Note 5

56604ede765d4039b4eba27776ff61d0

Интегралы вида

$$\int \text{\{\{c2::}R(\sin x, \cos x)\text{\}\}}\, dx$$

берутся заменой {{c1::$t = \tan \frac{x}{2}$.}}

Note 6

a709df92e9fe4310a7c2687c5de50054

{{c2::Подстановку $t = \tan\frac{x}{2}$}} называют {{c1::универсальной тригонометрической подстановкой.}}

Note 7

a6d2e564dd8246af81224496b8f276b0

При взятии интегралов с помощью универсальной тригонометрической подстановки для определённости полагают, что {{c1::$x \in (-\pi, \pi)$.}}

Note 8

4baa637b1c464ab9b9b94bf7ef71fcc8

Как $\sin x$ выражается через $t = \tan\frac{x}{2}$?

> $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Note 9

3cee332cac3a4eee9f02834f87c159ea

Как $\cos x$ выражается через $t = \tan\frac{x}{2}$?

> $$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Note 10

dd942a562634467e97ec85771a1d7a27

Каковы условия для частных случаев при взятии интеграла

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx?$$

> 1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
> 2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
> 3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Note 11
ff62f0455f5449e6a2187727fb759f0d

Если {{c2::$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \cos x.$}}

Note 12
05898276b49140939ed972fa0dd24b19

Если {{c2::$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \sin x.$}}

Note 13
6d9149e716954e3694079d557eb41976

Если {{c2::$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$}} то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

берётся {{c1::заменой $t = \tan x.$}}

Note 14
ac6a5109ec254fdfbe4146361aef5293

Интегралы вида

$$\int \{\{c2:: \sin^n x \cdot \cos^m x\}\}\, dx, \quad n, m \in \mathbb{Q}$$

берутся {{c1::заменой $t = \sin x$}}

Лекция 30.04.22 (1)

Note 1

c145ba4d6dca4a06a50cec14e1551b20

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c4::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится}} {{c3:: $\iff$ }} функция {{c1::$x \mapsto \int_a^x f$}} ограничена сверху на $[a,b)$.

Note 2

0be99a47ac0e428faad6ea9879f39822

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f \geqslant 0$. Тогда $\int_a^{\to b} f$ сходится $\iff$ функция $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена сверху на $[a,b)$. В чём основная идея доказательства?

> $\int_a^x f \nearrow$ и теорема о пределе монотонной функции.

Note 3

e94553827bfa462995cb7abf3f169453

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c2::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f$ либо {{c1::сходится, }} либо {{c1::расходится к $+\infty$.}}

Note 4

2613f68b7e7b444ea053850e9887a1e8

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c2::$f \geqslant 0$.}} Тогда $\int_a^{\to b} f =$ {{c1:: $\sup\limits_{x \in [a,b)} \int_a^x f$}}.

Note 5

05b94ccacfa246db99eb2dcbfc408f2a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f, g \geqslant 0$,}}

$$f(x) = \text{{{c4::}}} O(g(x)), \quad x \to b^-.\text{}}}$$

Тогда {{c1:: $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}$}}{{c3:: $\Longleftarrow$ }}{{c2:: $\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$}}

Note 6

635015d74b6c4594817b074aa5417e29

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f, g \geqslant 0$,}}

$$f(x) = \text{{{c4::}}} O(g(x)), \quad x \to b^-.\text{}}}$$

Тогда {{c2:: $\int_a^{\to b} f \notin \mathbb{R}$}}{{c3:: $\Longrightarrow$ }}{{c1:: $\int_a^{\to b} g \notin \mathbb{R}$}}

Note 7

95f69b2a23484af79ddfafb4fda8cf09

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b),\ \ f, g \geqslant 0$,

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b^-.$$

Тогда, если $\int_a^{\to b} g$ сходится, то и $\int_a^{\to b} f$ сходится.
В чём основная идея доказательства?

> Из определения O-большого сравнить остатки $\int_\varepsilon^{\to b} f$ и $\int_\varepsilon^{\to b} g$.

Note 8

88104faac5ad425e8ad1e9d194e82fcf

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4::$\dfrac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$.
}} Тогда

$$\text{\{\{c1::} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \text{\}\}\{\{c2::} \iff \text{\}\}\{\{c3::} \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}. \text{\}\}}$$

Note 9

1c33032b82c74c258d783b6f03d0ec39

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b),\ \ f \geqslant 0,\ g > 0$ и $\dfrac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

> $\dfrac{f}{g}$ ограничена в окрестности $b \implies f(x) = O(g(x))$.

Note 10

cec6bac50bc74bf1b743dc23079418dc

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5::$f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4::$\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$.
}} Тогда

$$\text{\{\{c2::} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \text{\}\}\{\{c3::} \implies \text{\}\}\{\{c1::} \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}. \text{\}\}}$$

Note 11

156267ccd8034eca99dbb3d574fbf25e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f \geqslant 0$, $g > 0$ и $\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

> Поменять местами f и g, рассмотрев $\dfrac{g}{f}(b^-) \in [0, +\infty)$.

Note 12

1139c594c8b941fc9a945b4ca914a566

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5:: $f \geqslant 0, g > 0$}} и {{c4:: $\dfrac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty)$.
}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}\text{}}{{c3::}} \iff \text{}}{{c1::}} \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}.\text{}}}$$

Note 13

1588fad5b7a94fb7a874e07813b56e6a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, {{c5:: $f, g \geqslant 0$,}} {{c4::

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to b^-.$$

}} Тогда {{c2:: $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R}$}}{{c3:: $\iff$ }}{{c1:: $\int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$}}.

Note 14

3804d89199d040dea2d1a4ab5975760d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, $f, g \geqslant 0$,

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to b^-.$$

Тогда $\int_a^{\to b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\to b} g \in \mathbb{R}$.
В чём основная идея доказательства?

> Показать, что f и g ограничены по сравнению друг с другом.

Note 15

03152527c42d4e8bb83dd25771b6c907

Пусть $f \in C[a, +\infty)$, $f \geqslant 0$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R} \text{\{\{c1::} \not\Longrightarrow \text{\}\}} f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Note 16

3b29658e766c4cd28321fc274785321b

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

необходимым условием для сходимости $\int_a^{\to b} f$?

> Да, является.

Note 17

d8d5ca8f054b4f198c844c2fa4947b52

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

достаточным условием для сходимости $\int_a^{\to b} f$?

> Нет, она является только необходимым условием.

Note 18

0293c1fbae2c45939b37aee500e2e937

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Интеграл $\int_a^{\to b} f$ называют {{c2::сходящимся абсолютно,}} если {{c1::$\int_a^{\to b} |f|$ сходится.}}

Note 19

9f03ada404444f7b806ae914e3c10af8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $\int_a^{\to b} f$ и $\int_a^{\to b} g$ {{c2::сходятся абсолютно,}} то {{c3::$\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)$}} {{c1::сходится абсолютно.}}

Note 20

877bbbaf0aad47f18e73982ecb61a25c

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, то он {{c1::сходится.}}

Note 21

1e256a23b0234f618630bb0ecd81a5c1

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, то он сходится. В чём ключевая идея доказательства?

> Критерий Больцано-Коши сходимости функции для соответствующих интегралов с переменным верхним пределом.

Note 22

90872b464e394488bd0388fbf5e5fe3e

Может ли несобственный интеграл сходиться, не сходясь при этом абсолютно?

> Да, может.

Note 23

0268c46e88c24c1d9a2339d7f0d3ee01

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится, но не абсолютно,}} то говорят, что {{c1::он сходится условно или неабсолютно.}}

Note 24

8cf6a70282a945a2ba0dc4b0a63abad8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^{\to b} f$ {{c2::сходится условно,}} а $\int_a^{\to b} g$ {{c2::сходится абсолютно,}} то $\int_a^{\to b}(f+g)$ {{c1::сходится условно.}}

Note 25

710cc42101c14046a49743d5070986c1

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^{\to b} f$ сходится условно, а $\int_a^{\to b} g$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\to b}(f+g)$ сходится условно. В чём основная идея доказательства?

> Представить f как сумму $(f+g)-g$.

Note 26

4ff4773b59de42daa0a880e4a8a170e7

Пусть {{c4::$f \in C[a,b)$,}} {{c3::$g \in C^1[a,b)$, g — монотонна.}} Если {{c1::g бесконечно мала в точке b^-, а $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена на (a,b),}} то {{c2::$\int_a^{\to b}(f \cdot g)$ сходится.}}

«Признак {{c5::Дирихле}} {{c2::сходимости несобственного интеграла}}»

Note 27

ae6efc013b634d36a35078f6d529988d

В чём основная идея доказательства признака Дирихле сходимости несобственного интеграла?

> Применить формулу интегрирования по частям и показать абсолютную сходимость $\int_a^{\to b} Fg'$.

Note 28

2f08599a01e3436a9f48422e767ba763

Как в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла показать, что $\int_a^{\to b} Fg'$ сходится абсолютно?

> Оценить сверху значение $\int_a^{\to b} |Fg'|$.

Note 29

599be6e31a83462881df0f2734d270d5

Почему в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла интеграл $\int_a^{\to b} |Fg'|$ не может не существовать?

> Потому что $|Fg'| \geqslant 0$.

Note 30

fdf163be427a40e1a02bdfb1d3392f46

Пусть {{c4::$f \in C[a, b)$,}} {{c3::$g \in C^1[a, b)$, g — монотонна.}} Если {{c1::g — ограничена, а $\int_a^{\to b} f$ сходится,}} то {{c2::$\int_a^{\to b}(f \cdot g)$ сходится.}}

«Признак {{c5::Абеля}} {{c2::сходимости несобственного интеграла}}»

Note 31

5714e2e7542d4b4aa0316cb086c35aac

В чём основная идея доказательства признака Абеля сходимости несобственного интеграла?

> Признак Дирихле для функций f и
>
> $$x \mapsto g(x) - g(b^-).$$

Note 32

8ceee057705b4a778730645db78a3fb2

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла {{c2:: так же будет выполняться,}} если ослабить допущения до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \qquad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Note 33

3d0b9c7aa10142388b565e673f847be1

Признак Абеля сходимости несобственного интеграла {{c2:: так же будет выполняться,}} если ослабить допущения до: {{c1::

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \qquad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Лекция 30.04.22 (2)

Note 1

519087b524d64a7db308cfc813fb90f7

Отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется {{c2::движением пространства $\mathbb{R}^n$,}} если {{c1::оно сохраняет расстояние между точками.}}

Note 2

b1453ceeeece4b72b798234b7da1813d

{{c3::Площадью}} называется отображение $S :$ {{c1:: $\{P\} \to \mathbb{R}_+$}}, заданное на {{c4::некотором классе $\{P\}$ подмножеств плоскости,}} которое при этом {{c2::

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольниках;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 3

47470cb51b9e4e21bb69da097aba5d2b

{{c2::Фигуры из класса подмножеств плоскости, на которых задано отображение площади,}} называются {{c1::квадрируемыми фигурами.}}

Note 4

18345644cb79468f9ec377bda0dc0a8b

Пусть {{c3::P_1 и P_2 — квадрируемые фигуры и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.}} Тогда {{c1::$P_1 \cup P_2$ — квадрируемая фигура}} и {{c2::

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

(свойство {{c4::**аддитивности**}} из определения площади)

Note 5

76c9c3e2743049ffa9cc6d12f6dc926d

{{c1::Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.}}

(свойство {{c2::**нормируемости на прямоугольниках**}} из определения площади)

Note 6

21333bd49d034ec7af62abe5e5b689e7

Пусть {{c3::P — квадрируемая фигура и U — движение плоскости.}} Тогда {{c1::$U(P)$ — квадрируемая фигура}} и {{c2::

$$S(U(P)) = S(P).$$

}}

(свойство {{c4::**инвариантности относительно движений**}} из определения площади)

Note 7

b8107a1dd5d24f29a317e003bc6c9181

Пусть P, P_1 — квадрируемые фигуры, {{c2::$P_1 \subset P$}}. Тогда {{c1::

$$S(P_1) \leqslant S(P).$$

}}

({{c3::**монотонность**}} площади)

Note 8

c493291ddbb94c7682c53a108ac7fce4

В чём ключевая идея в доказательстве монотонности площади?

> Представить P как $P \cup (P \setminus P_1)$.

Note 9

d66f7a47310e439da162bfb5d766daa8

Если квадрируемая фигура P {{c2::содержится в некотором отрезке,}} то {{c1::$S(P) = 0$.}}

Note 10

4f73cf95243c4ae1a203f5a5cce2a024

Если квадрируемая фигура P содержится в некотором отрезке, то $S(P) = 0$. В чём основная идея доказательства?

> P можно заключить в прямоугольник сколь угодно малой площади.

Note 11

eea6ca09c1c445469a7fafb3cdf7c5c6

Пусть {{c1::P_1, P_2 — квадрируемые фигуры, $S(P_1 \cap P_2) = 0$.}}
Тогда {{c2::

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

({{c3::**усиленная аддитивность**}} площади)

Note 12

430f2d5b1ff841c29c7b3b184b5cd509

В чём основная идея доказательства усиленной аддитивности площади?

> Представить $P_1 \cup P_2$ как $(P_1 \setminus P_2) \cup P_2$.

Note 13

14e7b163e187481dbd050b6109d9c55a

Чему равна $S(P_1 \setminus P_2)$ в доказательства усиленной аддитивности площади?

> $$S(P_1 \setminus P_2) = S(P_1).$$

Note 14

a8841fa849b54fccb1d646f27b165f0d

{{c3::Объёмом}} называется отображение V : {{c1:: $\{T\} \to \mathbb{R}_+$}}, заданное на {{c4::некотором классе $\{T\}$ подмножеств $\mathbb{R}^3$,}} которое при этом {{c2::

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольных параллелепипедах;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 15

7cfda5f9df304d888f1d18b59b9c2805

{{c2::Элементы из класса подмножеств $\mathbb{R}^3$, на которых задано отображение объёма,}} называются {{c1::кубируемыми телами.

}}

Note 16

0857e7d4cb3949fa8150811b0b482d43

{{c1::Объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c равен abc.}}

(свойство {{c2::**нормируемости на прямоугольных параллелепипедах**}} из определения объёма)

Note 17

5718ba5a41374083b6fcc1508f440aa6

Если кубируемое тело T {{c2::содержится в некотором прямоугольнике,}} то {{c1::$V(T) = 0$.}}

Note 18

429679b187e449738c280e35b1c167ba

Пусть {{c3::$P \subset \mathbb{R}^2$, $h \geqslant 0$.}} {{c1::Множество $P \times [0, h]$, а так же всякий его образ при движении,}} называется {{c2::прямым цилиндром с основанием P и высотой h.}}

Note 19

910d0a9f9f5342c18ec7291c3bcf5a75

Пусть {{c3::P — квадрируемая фигура, $h \geqslant 0$.}} Тогда {{c1::цилиндр $P \times [0, h]$ кубируем}} и {{c2::

$$V(P \times [0, h]) = S(P)h.$$

}}

Note 20

09254f53532b46f2a53c623d390ebb80

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, {{c3::$x \in \mathbb{R}$.}} {{c1::Множество

$$\Big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\Big\}$$

}} называется {{c2::сечением множества T первой координатой x.}}

Note 21

364174b8e50c41769a37bd8c66b37c2f

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. {{c2::Сечение множества T первой координатой x}} обозначается {{c1::$T(x)$.}}

Note 22

897caf9d2c9e4338bb71941389908a3c

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m,\ t \in [a,b]$. {{c2::$i$-я координата вектора $\gamma(t)$}} обозначается {{c1::$\gamma_i(t)$.}}

Note 23

bfb45d16ad184797a2996ad01ffcef3e

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $i \in [1:m]$. {{c2::Функция $t \mapsto \gamma_i(t)$}} называется {{c1::i-й координатной функцией отображения γ.}}

Note 24

b14417cf3a944cb4a66a5e8e9d998e8e

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $i \in [1:m]$. {{c2::i-я координатная функция γ}} обозначается {{c1::γ_i.}}

Note 25

dd1a71a2fed04fe9afe31c7632361372

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Отображение γ называется {{c2::непрерывным на $[a,b]$,}} если {{c1::каждая его координатная функция непрерывна на $[a,b]$.}}

Note 26

b547615a5824427faef3dd11a3b25d6d

{{c2::Путём в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c1::непрерывное отображение

$$[a,b] \to \mathbb{R}^m.$$

}}

Note 27

22935aef61d54e6ca59da2c35faa2d07

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ – путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Точка $\gamma(a)$}} называется {{c1::началом пути γ.}}

Note 28

306f29e0450e438d99bc99ecf7bfc7f6

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ – путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Точка $\gamma(b)$}} называется {{c1::концом пути γ.}}

Note 29

8dd5f0f6a866470697eebadc0467f96f

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ – путь в $\mathbb{R}^m$. {{c1::Множество $\gamma([a,b])$}} называется {{c2::носителем пути γ.}}

Note 30

7d4bcf2b08264eb9ab15db7043690c48

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::замкнутым,}} если {{c1::$\gamma(a) = \gamma(b)$.}}

Note 31

5093bb30b14c48e3b3fadaef0c12afb8

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::простым или несамопересекающимся,}} если {{c1::

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ или } t_1, t_2 \in \{a, b\}\,.$$

}}

Note 32

d8f2c782ae694dd988da84bcb859ff74

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::k раз непрерывно дифференцируемым или k-гладким,}} если {{c1::все $\gamma_i \in C^k[a, b]$.}}

Note 33

05da85b7f0a84b368ee3c6bef725c8da

Множество всех k-гладких путей $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ обозначается {{c1::

$$C^k[a, b].$$

}}

Note 34

2915b1df3b9e42158ec7ffe997e98a04

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2::кусочно-гладким,}} если {{c1::существует такое разбиение отрезка $[a, b]$, что сужение γ на любой из отрезков разбиения — гладкий путь.}}

Note 35

9c342e15007543ee80fa38b9df7f3251

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь, задаваемый формулой {{c1::

$$t \mapsto \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b],$$

}} называется {{c2::противоположным пути γ.}}

Note 36

f069a263f684409d8ff3e26967cba803

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Путь, противоположный пути γ,}} обозначается {{c1::γ^-.}}

Note 37

591160f41fd4454bafe7bb81051e9799

Два пути $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ называются {{c2:: эквивалентными,}} если {{c1::существует строго возрастающая сюръекция

$$u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$$

такая, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$.}}

Note 38

fe470bb82a2b4926851a2edfc7a0e8bb

{{c2::Каждый класс эквивалентности путей в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c1::кривой.}}

Note 39

cbc0b68e357849a2ad4608976c677898

{{c2::Каждый из представителей класса эквивалентности, составляющего данную кривую,}} называется {{c1::параметризацией этой кривой.}}

Note 40

466347f360424036ba201c4d9083bb8b

Кривую в пространстве $\mathbb{R}^m$ обозначают как {{c1::$\{\gamma\}$, где γ — некоторая её параметризация.}}

Note 41

1faf6fe6c5d7403c89e416216d3e9699

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c1::Семейство отрезков, соединяющих точки $\gamma(\tau_k)$ и $\gamma(\tau_{k+1})$ для $\{\tau_k\} \in T[a, b]$,}} называют {{c2::ломаной, вписанной в путь γ.}}

Note 42

4be9559c1fbc4e42804714ea29cdf641

{{c2::Длиной}} ломаной называют {{c1::сумму длин составляющих её отрезков.}}

Note 43

2da98f4689254999b9cebf8a314d0ea1

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Длиной}} пути γ называется {{c1::величина

$$\sup_{\tau \in T[a,b]} \ell_\tau,$$

где ℓ_τ — длина ломаной, отвечающей разбиению τ.}}

Note 44

60df0982954545929b0ff63a854ca1d8

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. {{c2::Длина пути γ}} обозначается {{c1::s_γ.}}

Note 45

38b6d13987e84d16b683136f8cbc95af

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Путь γ называется {{c2:: спрямляемым,}} если {{c1::$s_\gamma < +\infty$.}}

Лекция 07.05.22 (1)

Note 1

a086c7c565474cc28e5e635aa58fbc68

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Множество

$$\left\{ \{\{c2::(x, y)\}\} \mid \{\{c1::x \in [a, b],\ y \in \Delta_{0, f(x)}\}\} \right\}$$

называется {{c3::подграфиком функции f.}}

Note 2

ce2924abf7304cfb861aa52962241aa0

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c1::Подграфик функции f}} обозначается {{c2::Q_f.}}

Note 3

938420b690a6454bb2d2f1eea1281a1b

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c3::Подграфик}} функции f называется {{c2::криволинейной трапецией,}} если {{c1::$f \geqslant 0,\ f \in C[a, b]$.}}

Note 4

8454114fa9b446d495fd999f8d6522b6

Как показать, что подграфик криволинейной трапеции является квадрируемой фигурой?

> Принять на веру. (В нашем курсе это не доказывается.)

Note 5

1bbedb3d7edc4466be39badd75fe893f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, {{c3::$f \geqslant 0$.}} Тогда {{c2::$S(Q_f)$}} $=$ {{c1:: $\int_a^b f$}}.

Note 6

913f7f98ebc549638163e89e85c4e29b

Пусть $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0$. Тогда $S(Q_f) = \int_a^b f$.
В чём ключевая идея доказательства?

> Ограничить значение $S(Q_f)$ через интегральные суммы Дарбу для произвольного разбиения.

Note 7

ce632e26e2cf4cb19eea3f0a4ab3c709

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда {{c2::$S(Q_f)$}} $=$ {{c1:: $\int_a^b |f|$ }}.

Note 8

381eae56ef164e66acf7fefebf662c4a

Пусть $f \in C[a,b],\ \ f \geqslant 0$. Как соотносятся величины $S(Q_f)$ и $S(Q_f \setminus \Gamma_f)$?

> Они равны.

Note 9

4cde7099bf1543dabb6d8f15b462ae9e

Пусть $f \in C[a,b],\ \ f \geqslant 0$. Откуда следует, что

$$S(Q_f) = S(Q_f \setminus \Gamma_f)?$$

> $S(\Gamma_f) = 0$.

Note 10

b6e7714d201749cd9fd4e7b0bd716384

Пусть {{c2::$f, g \in \mathcal{R}[a,b],\ \ f \leqslant g$.}} Фигура, заключённая между графиками f и g тоже называется {{c1::криволинейной трапецией.}}

Note 11

bc1564f4497f46e687c00d29b41fdb88

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b],\ \ f \leqslant g$. {{c2::Площадь криволинейной трапеции, заключённой между графиками f и g}} равна {{c1::

$$\int_a^b (g - f).$$

}}

Note 12

7b57ff51f8f74d7a9e4b6bc05043f32c

Пусть {{c4::$f \in C[\alpha,\beta],\ \ f \geqslant 0$,}} {{c5::$\beta - \alpha \leqslant 2\pi$.}} Множество точек

$$\Big\{ \text{{{c1::}} } r \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ }}} \mid \text{{{c2::}} } \varphi \in [\alpha,\beta],\ r \in [0, f(\varphi)] \text{ }}} \Big\}$$

называется {{c3::криволинейным сектором, ограниченным функцией f.}}

Note 13

92d60a9a490b49c2af35b60f685c4b05

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \in C[\alpha,\beta],\ \ f \geqslant 0.$ {{c2::Криволинейный сектор, ограниченный функцией f,}} обозначается {{c1:: $\widetilde{Q}_f$.}}

Note 14

45120420e85a4503b25a5dd34b000e9f

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \in C[\alpha,\beta],\ f \geqslant 0.$ Тогда

$$\{\{c2::S(\widetilde{Q}_f)\}\} = \{\{c1::\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2.\}\}$$

Note 15

896e566b8a2a4fe7817b2f52377d7fbd

Пусть $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \in C[\alpha,\beta],\ f \geqslant 0.$ Тогда

$$S(\widetilde{Q}_f) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Составить суммы, аналогичные суммам Дарбу, но составленные из площадей секторов, а не прямоугольников.

Note 16

8e9b6c0f033b44bc81a2f3d4bf467a83

При вычислении объёмов с помощью интеграла на фигуру $T \subset \mathbb{R}^3$ накладываются следующие ограничения:

- {{c1::$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad T \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2$}}
- {{c2::$\forall x \in [a,b] \quad T(x)$ — квадрируемая фигура с площадью $S(x)$, причём $S \in C[a,b]$;}}
- {{c3::$\forall$ отрезка $\Delta \subset [a,b] \quad \exists \xi^*_\Delta, \xi^{**}_\Delta \in \Delta \quad \forall x \in \Delta$

  $$T(\xi^*_\Delta) \subset T(x) \subset T(\xi^{**}_\Delta).$$

  }}

Note 17

a7e13633747d4baaad4c2c6b3fa89048

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям для вычисления объёма с помощью интеграла. Тогда

$$\{\{c2::V(T)\}\} = \{\{c1:: \int_a^b S.\}\}$$

Note 18

1470b2fb4bbc4e3f8bc341fee4c90bc8

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям для вычисления объёма с помощью интеграла. Тогда $V(T) = \int_a^b S$. В чём основная идея доказательства?

> Составить суммы Дарбу из объёмов цилиндров.

Note 19

bd53f21dcde04ea0b85cb5af9f3591a3

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c2::Тело вращения подграфика f вокруг оси Ox}} обозначается {{c1::T_f.}}

Note 20

ba286a05719545d7989f5b131598cf49

Пусть {{c3::$f : C[a, b]$.}} Тогда

$$\{\{c2::V(T_f)\}\} = \{\{c1::\pi \int_a^b f^2.\}\}$$

Note 21

0a669c3f221f45deb163b883985df4d8

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. {{c2::Тело вращения подграфика f вокруг оси Oy}} обозначается {{c1::T'_f.}}

Note 22

f584d6707a1844349499bd55a4a9ea9c

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::V(T'_f)\}\} = \{\{c1::2\pi \int_a^b xf(x)\, dx.\}\}$$

Note 23

28b42e81a08c4032a3b4ba6c93022f1f

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $V(T'_f) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$. В чём основная идея доказательства (на интуитивном уровне)?

> Интегрировать по “площадям” сечений цилиндрами, построенными на окружностях радиуса x.

Note 24

37ce05b3e5534f20b8ea802974f37e7d

Пусть {{c4::$f \in C[\alpha,\beta],\ f \geqslant 0$,}} {{c3::$\alpha,\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.}} {{c2::Тело вращения криволинейного сектора, ограниченного функцией f, вокруг оси Oy}} обозначается {{c1::$\widetilde{T}_f$.}}

Note 25

f3588c46da91488b9544a0278ca24931

Пусть $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\{\{c2::V(\widetilde{T}_f)\}\} = \{\{c1::\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta f^3(\theta)\cos\theta\, d\theta.\}\}$$

Note 26

752d8f77f5274d05967dca413b1c9472

Будут ли верны интегральные формулы площадей и объёмов для неограниченных множеств?

> Да, но выражающие их интегралы будут несобственными.

Note 27

081bd87639824313a4c4b6ea6161ff62

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, {{c3::все γ_i — дифференцируемые функции.}} Тогда

$$\{\{c2::\gamma'\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1::(\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m).\}\}$$

Note 28

78afc1de7241408b95a68a8f5ed2006a

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\{\{c2::\ \|\gamma\|\ \}\} = \{\{c1::\sqrt{\sum_i \gamma_i^2}.\}\}$$

Note 29

0fa2547514204ecfb3eac95208adab8e

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — путь в $\mathbb{R}^m$. Тогда, если {{c4::$\gamma \in C^1[a, b]$, }} то {{c2::γ спрямляем}} и {{c3::s_γ}} $=$ {{c1:: $\int_a^b \|\gamma'\|$ }}.

Note 30

5daa6e79dbb5424ca182eac7649bffc9

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда путь γ спрямляем. В чём основная идея доказательства?

> Выразить длину вписанной в γ ломаной по формуле конечных приращений и получить верхнюю и нижнюю оценку по теореме Вейерштрасса для γ_i'.

Note 31

4c3ec5ff5e45427bb896b92c52c88403

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\text{{{c2::}} M_\Delta^{(i)} \text{}}} \coloneqq \text{{{c1::}} \max_{t \in \Delta} \left|\gamma_i'(t)\right| . \text{}}}$$

Note 32

7f5b1dc3d77a415491d313007f0ee108

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\text{{{c2::}} m_\Delta^{(i)} \text{}}} \coloneqq \text{{{c1::}} \min_{t \in \Delta} \left|\gamma_i'(t)\right| . \text{}}}$$

Note 33

0c89ac8fb1834dcea867bf5186155c73

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. Почему в доказательстве $\min\limits_{t \in \Delta} \left|\gamma_i'(t)\right|$ корректно определён?

> По теореме Вейерштрасса.

Note 34

6cad9c7bb8554770b6c7376b8917e607

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\{\{c2::M_\Delta\}\} \coloneqq \{\{c1::\sqrt{\sum_i \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}.\}\}$$

Note 35

3009bc4c7b7f42c4a8a7709423d5fea7

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\{\{c2::m_\Delta\}\} \coloneqq \{\{c1::\sqrt{\sum_i \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}.\}\}$$

Note 36

be5f472eef994b36b5098bd5198aeb5a

Пусть $\tau = \{x_k\} \in T[a, b]$. Тогда {{c1::отрезок $[x_k, x_{k+1}]$}} называют {{c2::k-м отрезком разбиения τ.}}

Note 37

1a3f989dffdd437daf833cc70d90b6a1

Пусть $\tau = \{x_k\} \in T[a, b]$. {{c1::$k$-й отрезок разбиения τ}} часто обозначается {{c2::Δ_k.}}

Note 38

a1a12e6c06014e1b99f62f277a0c28c8

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В чём первая ключевая идея доказательства?

> Для $\{t_k\} \in T[a, b]$ оценить $s_{\gamma|_{\Delta_k}}$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\|$ через
>
> $$m_{\Delta_k} \cdot \Delta t_k \text{ и } M_{\Delta_k} \cdot \Delta t_k.$$

Note 39

42d735dd7d56418d8e5183c6c0447207

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В чём вторая ключевая идея доказательства?

> Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение, что
>
> $$\sum_k (M_{\Delta_k} - m_{\Delta_k})\Delta t_k < \varepsilon.$$

Note 40

3464c3cc94b94c8b85c146a920767fcf

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение, что

$$\sum_k (M_{\Delta_k} - m_{\Delta_k})\Delta t_k < \varepsilon?$$

> Из равномерной непрерывности всех γ_i'.

Note 41

a157e6a52b0e4e22a04e35a2b9981058

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. Как в доказательстве оценить значение $M_\Delta - m_\Delta$ через

$$M_\Delta^{(i)} - M_\Delta^{(i)}?$$

> Обратное неравенство треугольника и оценка $\|\cdot\|$ через $\max\limits_i |\cdot_i|$.

Лекция 07.05.22 (2)

Note 1

ddc3406fefdc4dccb10eeb102957c8ce

Пусть {{c2::$f \in C[a,b]$.}} При рассмотрении Γ_f как пути, полагают

$$\Gamma_f(t) = \text{\{\{c1::}(t, f(t)), \quad t \in [a,b].\text{\}\}}$$

Note 2

c2ae0466ac724aa8b74a18651e9b01b8

Пусть {{c3::$f \in C^1[a,b]$.}} Тогда {{c4::путь Γ_f спрямляем}} и

$$\text{\{\{c2::}s_{\Gamma_f}\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.\text{\}\}}$$

Note 3

d7845b70c0774392b73e28626dab39f8

Пусть {{c3::$f \in C[\alpha,\beta]$,}} {{c4::$f \geqslant 0$.}} Выражение "{{c2::путь γ задаётся в полярных координатах равенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$ }}" означает, что

$$\gamma(\theta) = \text{\{\{c1::} f(\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta), \text{\}\}}$$
$$\gamma : \text{\{\{c5::}[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2.\text{\}\}}$$

Note 4

58dcc2f7e9c04a209117dce56a3fdacb

Пусть $f \in C^1[\alpha,\beta]$, $f \geqslant 0$, путь γ задаётся {{c2::в полярных координатах неравенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$.}} Тогда

$$\text{\{\{c3::}s_\gamma\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2 + (f')^2}.\text{\}\}}$$

Note 5

25add1ae8161404b8e2dbf2e360cb9b2

Пусть $f \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \geqslant 0$, путь γ задаётся в полярных координатах неравенством $r = f(\theta),\ \theta \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{f^2 + (f')^2}.$$

В чём основная идея доказательства?

> Явным образом показать, что $\|\gamma'\| = \sqrt{f^2 + (f')^2}$.

Note 6

4602071ea2624afd86efae71e5fdd97d

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. {{c1::Работа силы F по перемещению тела из точки a в точку b}} обозначается {{c2::$A_F([a, b])$.}}

Note 7

1419127057294380a1afbb366aba2ff2

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — {{c3::сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. }} Тогда

$$\text{\{\{c2::}A_F([a, b])\text{\}\}} = \text{\{\{c1::} \int_a^b F.\text{\}\}}$$

Note 8

32b4e3e12e0a4026abaf8cce091d22ec

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. Тогда $A_F([a, b]) = \int_a^b F$. В чём ключевая идея доказательства?

> Ограничить $A_F([a, b])$ через суммы Дарбу F для произвольного разбиения.

Note 9

e74d0b4a860a42b48e714d90e8c31d07

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. Тогда $A_F([a, b]) = \int_a^b F$. Какое дополнительное допущение принимается для F?

> F непрерывна.

Note 10

a003b6fe2261408eb23f9662179a48ec

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. Тогда $A_F([a, b]) = \int_a^b F$. Какое первое свойство $A_F([a, b])$ используется в доказательстве?

> A_F аддитивна по отрезку.

Note 11

c0f2455f2051489c85b694d66bd9afdd

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — сила, действующая на движущееся по числовой оси тело, зависящая только от его положения. Тогда $A_F([a, b]) = \int_a^b F$. Какое второе свойство $A_F([a, b])$ используется в доказательстве?

> Если $m \leqslant F \leqslant M$ на отрезке $[a, b]$, то
>
> $$m(b - a) \leqslant A_F([a, b]) \leqslant M(b - a).$$

Лекция 14.05.22 (1)

Note 1

db30293ae2e34ccaad4737c4f196a676

{{c2::Отображение $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$}} называется {{c1::отображением n вещественных переменных.}}

Note 2

09a496c79f5646e49e9cbe8c39bc708e

{{c2::Отображение $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$}} называется {{c1::функцией n вещественных переменных.}}

Note 3

50d467eacead432fb753be92cd3e3d5b

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. {{c2::k-я координата точки x}} обозначается {{c1:: x_k.}}

Note 4

6298966bfb9a436cafb65c0ac1f3b462

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::$x \cdot y$}} $\overset{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$}}.

Note 5

82049479525249098f11edd6b86662f5

{{c2::Евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$}} называется {{c1::функция

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \sqrt{x \cdot x}.$$

}}

Note 6

0820d783bfc7483c983f2acd41905870

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. {{c2::Евклидова норма вектора x}} обозначается {{c1::

$$\|x\|.$$

}}

Note 7

f7962d62d97a4e45966cfbd5258d7be7

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \|\lambda x\| \text{\}\}} = \text{\{\{c1::} |\lambda| \cdot \|x\|. \text{\}\}}$$

Note 8

963d46ce6e6740c2ada2ae1586e864c8

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда {{c1::$\|x - y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|$.}}

(обратное неравенство треугольника для норм)

Note 9

197c20e358c34941810836f09234bb95

Пусть $x \in \mathbb{R}^n,\ k \in [1:n]$. Тогда

{{c2:: $|x_k|$ }}{{c4:: $\leqslant$ }}{{c1:: $\|x\|$ }}{{c4:: $\leqslant$ }}{{c3::$\sqrt{n} \cdot \max\limits_{i \in [1:n]} |x_i|$.}}

Note 10

56e8be63cc924fadaa65ad1a43d24b40

{{c2::$\overline{\mathbb{R}^n}$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.}}

Note 11

2d0130af589f4bc8be65d79c610c9313

Пусть {{c3::$\delta > 0$, }} $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::$V_\delta(a)$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1:: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$ }}

Note 12

3bdf65ade40048daae6226ad13c91370

Пусть {{c3::$\delta > 0$, }} $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::$\dot{V}_\delta(a)$}} $\stackrel{\text{def}}{=}$ {{c1::$V_\delta(a) \setminus \{a\}$.}}

Note 13

a872bc2223d54bab976847e9cf14cc91

Пусть {{c3::$\delta > 0$.}} Тогда {{c1::множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > \delta\}$}} называется {{c2::$\delta$-окрестностью бесконечно удалённой точки в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 14

2a6f33f0df8d4fd78ba6c02bccbc4f26

Пусть $\delta > 0$. Тогда {{c2::δ-окрестность бесконечно удалённой точки}} в $\mathbb{R}^n$ обозначается {{c1::$V_\delta(\infty)$.}}

Note 15

4180d71589654850ba33a99a79e3a0d0

Пусть $\delta > 0$. Тогда в {{c2::$\mathbb{R}^n$}} полагаем $\dot{V}_\delta(\infty) \overset{\text{def}}{=}$ {{c1::$V_\delta(\infty)$}}.

Note 16

cf41f3caf0a74d8392d85139c9968c07

В общем случае окрестности точек в $\mathbb{R}^n$ так же ещё называют {{c1::открытыми n-мерными шарами.}}

Note 17

bd99061f38de4188b72bb2a2fe1f68e8

Пусть $\delta > 0$. Тогда множество {{c1::$V_\delta(\infty) \cup \{\infty\}$}} называется {{c2::окрестностью бесконечно удалённой точки в $\overline{\mathbb{R}^n}$.}}

Note 18

40f1bd82241c4c7d8c8f327f0fd4f80e

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда

$$V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(a) = \text{\{\{c1::}V_{\min\{\delta_1,\delta_2\}}(a).\text{\}\}}$$

Note 19

c295589ac6fd4a91b7607784a4f6b94b

Пусть $\delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$V_{\delta_1}(\infty) \cap V_{\delta_2}(\infty) = \text{\{\{c1::}V_{\max\{\delta_1,\delta_2\}}(\infty).\text{\}\}}$$

Note 20

be9be70ce56541a69bfeec3663baa83f

Пересечение двух окрестностей одной и той же точки из $\overline{\mathbb{R}^n}$ — тоже {{c1::окрестность этой точки.}}

Note 21

1eab3119b89e42c7bb0b893175654a5b

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$, {{c2::$a \neq b$}}. Тогда существуют {{c1::такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$.}}

Note 22

91077edbd0ea4f8b85dd14c5a192ff70

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n},\ a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

> 1. $a, b \neq \infty$, 2. a или $b = \infty$.

Note 23

8409f167cccb4e7988de4cebf04f3fc9

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n},\ a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. В чём основная идея доказательства для $a, b \neq \infty$?

> Взять $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\|a-b\|}{2}$.

Note 24

7eb5b28213054f63a30990a588f653c9

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n},\ a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. В чём основная идея доказательства для $b = \infty$?

> Для произвольного $\delta_1 > 0$ положить $\delta_2 = \|a\| + \delta_1$.

Note 25

6a3a01e6983e4a8cb972e4752f7aaa36

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда

$$(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}f(x) + g(x).\text{\}\}}$$

Note 26

431a63ea7a8f400f997c1789317d2efc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c2::$\lambda : E \to \mathbb{R}$.}} Тогда

$$(\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\lambda(x) f(x).\text{\}\}}$$

Note 27

fe02a3d518ad41bcaa8eab77a41edcd0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда

$$(f \cdot g)(x) \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} f(x) \cdot g(x). \text{\}\}}$$

Note 28

06ea693e03bf49faa4cea59e4de68b73

Чем определения предела последовательности в $\mathbb{R}^n$ отличается от такового для $\mathbb{R}$?

> Вместо модулей используется евклидова норма.

Note 29

e7496a01680c4188ab2b77d49a956769

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::} \lim_{k\to\infty} x^k = a \text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::} \lim_{k\to\infty} \|x^k - a\| = 0. \text{\}\}}$$

(в терминах вещественных последовательностей)

Note 30

346e3e4f67cb4742a0a8c03f522ac66d

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\text{\{\{c2::} \lim_{k\to\infty} x^k = \infty \text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::} \lim_{k\to\infty} \|x^k\| = +\infty. \text{\}\}}$$

(в терминах вещественных последовательностей)

Note 31

181e5459680740b4b4bb06e2b4204fba

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in$ {{c2::$\overline{\mathbb{R}^n}$}}. Тогда

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \wedge x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \implies \text{\{\{c1::} a = b. \text{\}\}}$$

Note 32

a1f21b775a3b4ee5b487baccd44d3d6e

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \wedge x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \implies a = b.$$

В чём основная идея доказательства?

> От обратного и использовать существование непересекающихся окрестностей $V(a)$ и $V(b)$.

Note 33

a2015de5744c4595a00a42a327399672

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, {{c3::$x^k \to a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \text{{{c2::}}} \|x^k\| \text{}} = \text{{{c1::}}} \|a\|. \text{}}$$

Note 34

635954ced2b945f795fa2415739e634c

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n,\ x^k \to a \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k\| = \|a\|$. В чём основная идея доказательства?

> Обратное неравенство треугольника для $\big|\|x^k\| - \|a\|\big|$.

Note 35

398fb78214164adf83ccec280065c505

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n,\ i \in [1:n]$. {{c1::Последовательность $\left\{x_i^k\right\}$ }} называется {{c2::i-й координатной последовательностью последовательности $\left\{x^k\right\}$.}}

Note 36

435eee779e914a3b8c6aaa95f6a763e7

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда {{c2::$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} $\forall i \in [1:n]$ {{c1::

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i.$$

}}

Note 37

3fa906784d584b6e8ffd965de8a6322d

В чём основная идея в доказательстве теоремы о покоординатной сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$ (необходимость)?

> $$\left|(x^k - a)_i\right| \leqslant \left\|x^k - a\right\| \to 0.$$

Note 38

40c5520ef19c4bb39e271e243477ccd9

В чём основная идея в доказательстве теоремы о покоординатной сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$ (достаточность)?

> Показать, что $\left\|x^k - a\right\| \to 0$.

Note 39

3fd0844b01144973a767e49a2c96e78e

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \infty$, то координатные последовательности $\left\{x_i^k\right\}$ могут {{c1::не иметь предела.}}

Note 40

33857f75ca574dc4808d8d21766be6fe

Пусть $\left\{x^k\right\}, \left\{y^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$,

$$x^k \to a \in \text{{{c2::}}}\mathbb{R}^n, \text{}}}\ y^k \to b \in \text{{{c2::}}}\mathbb{R}^n.\text{}}}$$

Тогда

$$(x^k + y^k) \to \text{{{c1::}}}a + b.\text{}}}$$

Note 41

0d43a16117a1444dba74a29d0ca712b4

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$,

$$x^k \to a \in \text{{{c2::}}}\mathbb{R}^n, \text{}}}\ \lambda_k \to \lambda \in \text{{{c2::}}}\mathbb{R}.\text{}}}$$

Тогда

$$\lambda_k x^k \to \text{{{c1::}}}\lambda a.\text{}}}$$

Note 42

daf93a77a6d5452c882b4ec1bc279fc6

Пусть $\{x^k\}, \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$,

$$x^k \to a \in \text{{{c2::}}} \mathbb{R}^n, \text{}}} y^k \to b \in \text{{{c2::}}} \mathbb{R}^n. \text{}}}$$

Тогда

$$x^k \cdot y^k = \text{{{c1::}}} a \cdot b. \text{}}}$$

Note 43

abf40faf2fc04bae88f96f229e5991d1

В чём основная идея в доказательстве теоремы об арифметических операциях над пределами последовательностей в $\mathbb{R}^n$?

> Использовать покоординатную сходимость.

Note 44

84e580fe871e4a9099a8b893a7f7ff11

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x^{k_i}\}$ – подпоследовательность $\{x^k\}$, $a \in$ {{c2::$\overline{\mathbb{R}^n}$}}. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x^k = a \implies \text{{{c1::}}} \lim_{i\to\infty} x^{k_i} = a. \text{}}}$$

Note 45

b3b121ad972c4c2eb01797117a795d2b

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x^{k_i}\}$ – подпоследовательность $\{x^k\}$, {{c2::$a \in \overline{\mathbb{R}^n}$.}} Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x^k = a \implies \text{{{c1::}}} \lim_{i\to\infty} x^{k_i} = a. \text{}}}$$

Note 46

f3fc5ed889ed42c3ab9b94ad0dc2c4b6

В чём основная идея доказательства теоремы о пределе подпоследовательности в $\mathbb{R}^n$?

Свести к пределу подпоследовательности числовой последовательности.

Note 47

2cc6bf0ec4b744219216b8f7b9131c13

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется {{c2::ограниченным,}} если {{c1::$E \subset V_\delta(0)$ для некоторого конечного $\delta > 0$.}}

(в терминах окрестностей)

Note 48

3fdaf39b9f6849d3a7c1c0b77e0b2100

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется {{c2::ограниченным,}} если {{c1::множество $\{\|x\| \mid x \in E\}$ ограничено.}}

(в терминах норм)

Note 49

ef35bf7807bf49a4953be0fa863fa66a

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Отображение f называется {{c2::ограниченным,}} если {{c1::множество его значений ограничено.}}

Note 50

c361e11e60c0426c9096ce58059852fe

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::E ограничено}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$\sup\limits_{x \in E} \|x\| < +\infty$.
}}

(в терминах $\sup$)

Note 51

55039713f61943458ec789dbb6b145d8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ j \in [1 : n]$. {{c1::Множество $\{x_j \mid x \in E\}$}} называется {{c2::проекцией E на j-ю ось.}}

Note 52

558a15d4b2d8461a85f9900f08c2c24e

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ j \in [1 : n]$. {{c1::Проекция E на j-ю ось}} обозначается {{c2::E_j.}}

Note 53

5f2ada96a96d40f288abf00365fd2a8f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Как ограниченность E связана с проекциями E на координатные оси?

> Ограниченность E эквивалентна ограниченности каждой из его проекций E_j.

Note 54

f854719bde1446feb7b76aecad168192

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ограниченность E эквивалентна ограниченности каждой из его проекций E_j. В чём основная идея доказательства?

> Непосредственно следует из оценки
>
> $$|x_j| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i| \, .$$

Note 55

3869f37cb0f24c2184567f8561a31e1f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f ограничено тогда и только тогда, когда {{c1::каждая из его координатных функций ограничена}}.

(в терминах координатных функций)

Note 56

b7487016c4894d77a55418ebce7c8fc2

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f ограничено тогда и только тогда, когда каждая из его координатных функций ограничена. В чём основная идея доказательства?

> Множество $f(E)$ ограничено $\iff$ каждая из его проекций $f(E)_j$ ограничена, но $f(E)_j = f_j(E)$.

Note 57

229fec40da6c48ceac33727eebf79e42

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$\left\{x^k\right\}$ ограничена $\iff$ {{c1::$\left\{x_i^k\right\}$ ограничена $\forall i$.}}

(в терминах координатных функций)

Note 58

8166d65b01864fd88374f97ce75c3eda

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\left\{x^k\right\} \text{ ограничена } \iff \left\{x_i^k\right\} \text{ ограничена } \forall i.$$

В чём основная идея доказательства?

> Частный случай аналогичной теоремы для произвольных отображений.

Note 59

fec8d0a7bf5b47ecb36926b61a1818fb

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\left\{x^k\right\}$ сходится, то она {{c1::ограничена}}.

Note 60

7ac0f2188c6d4b72996dba94ed321553

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\left\{x^k\right\}$ сходится, то она ограничена. В чём основная идея доказательства?

> Покоординатная сходимость и аналогичная теорема для числовых последовательностей.

Note 61

5f6e1b3d2fac4b1d8da33e308f6c785b

В чём основная идея доказательства принципа выбора Больцано-Вейерштрасса для последовательностей в $\mathbb{R}^n$?

> Последовательно выбирать подпоследовательности, поочерёдно получая сходимость координатных последовательностей.

Note 62

3e127d0b24f142e9beec4653c5ae676b

Пусть $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\left\{x^k\right\}$ {{c2::не ограничена,}} то у неё есть подпоследовательность, стремящаяся к {{c1::∞.}}

Note 63

f4a0b38770684084b9485851c73d7764

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{x^k\}$ не ограничена, то у неё есть подпоследовательность, стремящаяся к ∞. В чём основная идея доказательства?

> Последовательность $\{\|x^k\|\}$ неограниченна.

Лекция 14.05.22 (2)

Note 1

8f1408b5072a4c4db503662e57f44fae

Чем определение последовательности Коши в $\mathbb{R}^n$ отличается от такового для последовательностей в $\mathbb{R}$?

> Вместо модуля используются евклидова норма.

Note 2

a55fb30e99b8448bbf4daad28b535da6

Выполняется ли критерий сходимости Больцано-Коши для последовательностей в $\mathbb{R}^n$?

> Да, выполняется.

Note 3

15ca58d336a843058f80b5e7f575bcd0

В чём основная идея доказательства критерия сходимости Больцано-Коши для последовательностей в $\mathbb{R}^n$ (необходимость)?

> Критерий Больцано-Коши для координатных последовательностей и неравенство
>
> $$|x_k| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i| .$$

Note 4

48fb62af875d46c5b05b401c40d098c4

Чем определение предельных точек для подмножеств $\mathbb{R}^n$ отличается от такового для подмножеств $\mathbb{R}$?

> Ничем.

Note 5

a669a63c0542458f9252161374cec7f3

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c4::$a \in \overline{\mathbb{R}^n}$.}} {{c2::Точка a является предельной для E}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \to a.$$

}}

(в терминах последовательностей)

Note 6

15109511ff924c4baaf5512ee750e154

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \to a.$$

Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

> 1. $a \neq \infty$; 2. $a = \infty$.

Note 7

75f06294c4514596b330d9f62883ed49

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \to a.$$

В чём основная идея доказательства для $a \neq \infty$ (необходимость)?

> Выбирать x^k по $\varepsilon = \frac{1}{k}$.

Note 8

c78fe01a6f214aa38a3343be15a6543f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \to a.$$

В чём основная идея доказательства для $a \neq \infty$ (достаточность)?

> Из определения предела $\forall \varepsilon \quad \exists x^k \in \dot{V}_{\varepsilon}(a)$.

Note 9

22db3f3ad0394102a1d98af06cc40fbd

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c3::$a \in E$.}} Точка a называется {{c2::внутренней для E,}} если {{c1::у неё есть окрестность, содержащаяся в E.}}

Note 10

18e311d437f341e9a873d377706cf0cb

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется {{c2::открытым в $\mathbb{R}^n$, }} если {{c1::любая его точка является внутренней для E.}}

Note 11

b8e86e0736db4159a59c29fffcb30ac8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется {{c2::замкнутым в $\mathbb{R}^n$, }} если {{c1::его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 12

6c14a78f8f304062aa09cf96ee030f48

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::E замкнуто в $\mathbb{R}^n$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::E содержит все свои предельные точки в $\mathbb{R}^n$.}}

(в терминах предельных точек)

Note 13

4313f6dffa4d4be288c13720b79f5e31

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда E содержит все свои предельные точки в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства (необходимость)?

> От обратного и противоречие с открытостью $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 14

338d88f6cd9b49a5b6e1fc14c46c07af

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда E содержит все свои предельные точки в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства (достаточность)?

> В $\mathbb{R}^n \setminus E$ нет предельных точек E.

Note 15

78034d8289654f2d989fd7d3cde60d2b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::E замкнуто в $\mathbb{R}^n$}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::

$$\lim_{k\to\infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$.}}

(в терминах последовательностей)

Note 16

c4a98576816047bd8e45761c09ffdc70

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \to \infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$. В чём основная идея доказательства (необходимость)?

> От обратного и противоречие с открытостью $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 17

2ad826deaebf4422a6d0864598a81e82

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \to \infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$. В чём основная идея доказательства (достаточность)?

> E содержит любую свою предельную точку.

Note 18

0f1ca1a114fe4768af83b2987f80c626

Пусть {{c3::$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.}} Тогда {{c2::$\bigcup E_\alpha$}} {{c1::открыто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 19

cced37c873934048bb8d05555dcb66cd

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Тогда $\bigcup E_\alpha$ открыто в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства?

> Любая точка $\bigcup E_\alpha$ принадлежит открытому подмножеству $\bigcup E_\alpha$.

Note 20

3592d4aa6f1d49a088ea09f8f4850695

Пусть {{c4::$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.}} Тогда если {{c3::$|A| < \aleph_0$,}} то {{c2::$\bigcap E_\alpha$}} {{c1::открыто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 21

223c7f10e64e4f73b422af6ce095038a

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — конечное семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Тогда $\bigcap E_\alpha$ открыто в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства?

$$\delta = \min_{\alpha \in A} \delta_\alpha.$$

Note 22

d5e0544892f344dcbd519b58b207d8b6

Пусть {{c3::$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$.}} Тогда {{c2::$\bigcap E_\alpha$}} {{c1::замкнуто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 23

203fb961ea984b4195210820a687183d

Пусть {{c4::$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$.}} Тогда если {{c3::$|A| < \aleph_0$,}} то {{c2::$\bigcup E_\alpha$}} {{c1::замкнуто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 24

cdbfd70790af41228a9ac6941706aed5

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если {{c4::$E$}} {{c3::открыто}}, а {{c4::F}} {{c3::замкнуто}}, то {{c2::$E \setminus F$}} {{c1::открыто.}}

Note 25

96551e5b3eda4e56a9e84b9c87023f35

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E открыто, а F замкнуто, то $E \setminus F$ открыто. В чём основная идея доказательства?

$$E \setminus F = E \cap (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

Note 26

11768bb518f845028aa77d77032444bf

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если {{c4::$E$}} {{c3::замкнуто}}, а {{c4::F}} {{c3::открыто}}, то {{c2::$E \setminus F$}} {{c1::замкнуто.}}

Note 27

a3e832b1aa1548b5a03d89eff807b690

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E замкнуто, а F открыто, то $E \setminus F$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

$$E \setminus F = E \cap (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

Note 28

db6839cb255845099043c9415f55b4af

Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $\mathbb{R}^n$?

И открыто, и замкнуто.

Note 29

7f1672e6cd054b6ea16112670e15fe3d

Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $\emptyset$?

И открыто, и замкнуто.

Note 30

866fb541bf1c4d37adc09e0e70ac8bd8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто и замкнуто. Тогда

$$E = \text{\{\{c1::}\mathbb{R}^n \text{ или } \emptyset.\text{\}\}}$$

Note 31

d23104a8197346939669f31522a74633

Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ произвольное конечное подмножество $\mathbb{R}^n$?

Замкнуто.

Note 32

685cbdd3894a49c79e96e14be1a73996

Пусть {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$,}} {{c3::$\delta > 0$.}}

$$\text{\{\{c2::}B_\delta(a)\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} \left\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\right\}.\text{\}\}}$$

Note 33

dc873817f70d4d40b1f3c824ad89ad17

Пусть {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$,}} {{c3::$\delta > 0$.}}

$$\text{{{c2::}}}\overline{B_\delta(a)}\text{}} = \text{{{c1::}}} \left\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leqslant \delta\right\}.\text{}}$$

Note 34

e9a3af0fa0004802a9b0d082df09338e

Пусть {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$,}} {{c3::$\delta > 0$.}}

$$\text{{{c2::}}}S_\delta(a)\text{}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}} \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = \delta\right\}.\text{}}$$

Note 35

f8f71a74217449c29d5e66761ce0fcb8

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $B_\delta(a)$?

> Открыто.

Note 36

39bd0c988fe2432690c57debf909ba66

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $B_\delta(a)$ открыто. В чём основная идея доказательства?

> Для произвольной точки из $B_\delta(a)$ выбрать достаточно маленькую о окрестность и далее по неравенству треугольника.

Note 37

537577c3bdfa4bde831b90a8d0f0615f

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $\overline{B_\delta(a)}$?

> Замкнуто.

Note 38

b9e15e7ee78842ed93fd8fcd816e9ffc

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\overline{B_\delta(a)}$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

> Использовать определение в терминах последовательностей.

Note 39

3230aeffdb12417ca0fdf94fb913dd39

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $S_\delta(a)$?

> Замкнуто.

Note 40

fdbfcb0397854628aace32977649b069

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $S_\delta(a)$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

> $$S_\delta(a) = \overline{B_\delta(a)} \setminus B_\delta(a).$$

Лекция 21.05.22 (1)

Note 1

59c721ad4aeb41949fb3434169a89aeb

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c2::Замыканием множества E}} называется {{c1:: наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее E.}}

Note 2

a94d9d6d06b6493c81f3b1e768b81375

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c1::Замыкание множества E}} обозначается {{c2::

$$\overline{E} \text{ или } \operatorname{Cl} E.$$

}}

Note 3

31d05cf282b9466e8a9a000950fede4b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::$\overline{E}$}} $=$ {{c1::$\bigcap \left\{ F \subset \mathbb{R}^n \mid F - \text{замкнуто},\ E \subset F \right\}$.}}

Note 4

69f36de3475242618fbb0eb4ae74b6dd

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

{{c2::$a \in \overline{E}$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$a \in E$ или a — предельная точка E.}}

Note 5

4bdd2826972c4b32bc4fdfbfcf85e6d3

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c4::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

{{c2::$a \in \overline{E}$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad x^k \to a$.}}

(в терминах последовательностей)

Note 6

8c1b27442afc42aa867e239a4bcdf4ce

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \implies a \in E \text{ или } a - \text{предельная точка } E.$$

В чём основная идея доказательства?

> От обратного и $\overline{E} \subset \mathbb{R}^n \setminus V_\delta(a)$.

Note 7

2f37ace18e674bf8bc8700263185d335

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \impliedby a \in E \text{ или } a - \text{предельная точка } E.$$

В чём основная идея доказательства?

> Можно построить последовательность, стремящуюся к a.

Note 8

54efca151faf4889b51828eff685beb6

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \implies \exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad x^k \to a$$

В чём основная идея доказательства?

> a – предельная точка E или $a \in E$.

Note 9

2939354f3cd74c96b19d07520618444b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \impliedby \exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad x^k \to a$$

В чём основная идея доказательства?

> $\left\{x^k\right\} \subset \overline{E}$, но $\overline{E}$ замкнуто.

Note 10

61bd6874e98f44a0882b56e7a750b9a0

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c2::Внутренностью E}} называется {{c1::множество всех внутренних точек E.}}

Note 11

139034b5d2bc422097d150cb9da30c33

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c2::Внутренность E}} обозначается {{c1::

$$\operatorname{Int} E \text{ или } \mathring{E}.$$

}}

Note 12

b8de5908fb8d44bf92fcd25520547f67

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}^n$ множество $\operatorname{Int} E$?

> Открыто.

Note 13

799638c4bc6f4c50bb965b8803d41eab

Пусть $E, G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если {{c3::$G$ открыто в $\mathbb{R}^n$}} и {{c2::$G \subset E$, }} то {{c1::$G \subset \operatorname{Int} E$.}}

Note 14

cd90c5fff5534fb981914ccc37bd7ae9

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c2::Внутренность E}} — это {{c1::наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в E.}}

(в терминах включения)

Note 15

a1e8aa28d96d49799f0c4a4040f2dead

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::$\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$}} $=$ {{c1:: $\operatorname{Int}(R^n \setminus E)$.}}

Note 16

442961e481cd45c3bc7df4d480b46b74

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \operatorname{Int}(R^n \setminus E).$$

В чём основная идея доказательства?

> Показать, что $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$ — это наибольшее по включению открытое подмножество $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 17

fb2a725e8e4b4c2fb0fa050078699cf5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::$\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} E$}} $=$ {{c1::$\overline{(\mathbb{R}^n \setminus E)}$.}}

Note 18

fe2c858bf3c04acfa21126cdd9904aef

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c2::Границей E}} называется {{c1::множество

$$\overline{E} \setminus \operatorname{Int} E.$$

}}

Note 19

0a35e47f857f43ec9bbff01116e04eb0

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c1::Граница множества E}} обозначается {{c2:: ∂E.}}

Note 20

88b2a73094fb4a239e5b513a46f3a622

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Открыто или замкнуто множество ∂E?

> Замкнуто.

Note 21

c7929bc62d394cb49c8411de71aff62d

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ∂E замкнуто в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства?

> ∂E — это разность замкнутого и открытого множеств.

Note 22

e5f44e996a0c40ec85bea1411325179d

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\operatorname{Int} B_\delta(a) =$ {{c1::$B_\delta(a)$}}.

Note 23

351b99e8bd1248d0b7d36a78fbdd1807

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\operatorname{Int} \overline{B_\delta(a)} =$ {{c1::$B_\delta(a)$}}.

Note 24

5134e609e6a542f895fa5477372047a1

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\partial B_\delta(a) =$ {{c1::$S_\delta(a)$}}.

Note 25

6d51fdba058545838e2402ff10db74ea

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\partial(\overline{B_\delta(a)}) =$ {{c1::$S_\delta(a)$}}.

Note 26

a2a8ac9541bc4edfb8e04b5522f23c70

Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ \delta > 0$. Тогда $\operatorname{Int} \overline{B_\delta(a)} = B_\delta(a)$. В чём основная идея доказательства?

> Показать, что $S_\delta(a)$ не содержит внутренних точек $\overline{B_\delta(a)}$.

Note 27

6091740d09a14c4da2f8435a9157b10d

Пусть {{c5::$E \subset \mathbb{R}^n$,}} {{c3::$F \subset E$.}} Точка $a \in$ {{c4::F}} называется {{c2::внутренней для F в E,}} если {{c1::

$$\exists \delta > 0 \quad (V_\delta(a) \cap E) \subset F.$$

}}

Note 28

d9c779744732420dbf907539811051e7

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c3::$F \subset E$.}} Множество F называется {{c2::открытым в E,}} если {{c1::любая его точка является внутренней для F в E.}}

Note 29

a6191d3dd3e94990aa8ee40f4b7e6d53

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c3::$F \subset E$.}} Множество F называется {{c2::замкнутым в E,}} если {{c1::$E \setminus F$ открыто в E.}}

Note 30

d0303c87476a424c80b3fb7522768304

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::$F$ открыто в E}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1:: существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого

$$F = E \cap G.$$

}}

(в терминах открытости/замкнутости в $\mathbb{R}^n$)

Note 31

4d33bc77c67b4b64898e5fee221058d8

Тогда F открыто в $E \implies$ существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

$$G = \bigcup_{a \in F} V_{\delta_a}(a).$$

Note 32

1b49cf9639924fec9017ea00ca0843fd

Тогда F открыто в E $\Longleftarrow$ существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

> Для произвольной точки из F выбрать окрестность из определения открытости G.

Note 33

33888ff338f94ea59f1f245c0f5ae61b

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда {{c2::$F$ замкнуто в E}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} существует {{c1::замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого

$$F = E \cap G.$$

}}

(в терминах открытости/замкнутости в $\mathbb{R}^n$)

Note 34

622fe773efcb41e080e51232557f15b9

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда F замкнуто в E $\Longleftrightarrow$ существует замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

> Применить аналогичную теорему для открытых множеств к $E \setminus F$.

Note 35

c75d8ade85014bf2a2e7c13cc3299418

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Если {{c4::$E$ открыто в $\mathbb{R}^n$,}} то

{{c2::F открыто в E}} {{c3:: $\Longleftrightarrow$ }} {{c1::F открыто в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 36

be4241d752ce41c1aab8a52ad449c33b

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Если E открыто в $\mathbb{R}^n$, то

$$F \text{ открыто в } E \iff F \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

В чём основная идея доказательства?

> $F = G \cap E$, где G открыто в $\mathbb{R}^n$.

Note 37

c4e6058390c44a47ab144bf71a132ed0

Открыто или замкнуто в $\mathbb{R}$ множество $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$?

> Ни открыто, ни замкнуто.

Note 38

d52b4279a3d34772a1cd57efbed032f8

Открыто или замкнуто в $\mathbb{Q}$ множество $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$?

> Открыто.

Note 39

8607c43c4d9145ce8b739f277bc467f5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c1::Семейство Ω подмножеств $\mathbb{R}^n$ такое, что $E \subset \bigcup_{A \in \Omega} A$,}} называется {{c2::покрытием множества E.}}

Note 40

89d8d5966eba46478e132c99f8a87207

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Если Ω — это покрытие E, то говорят, что Ω {{c1::покрывает E.}}

Note 41

69ac5bea935247e8ba609ec7be95b65f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Ω — покрытие E. {{c1::Подсемейство Ω, которое также покрывает E,}} называется {{c2::подпокрытием Ω.}}

Note 42

8e8ddb4f754b447b863761db2945f748

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Ω — покрытие E. Покрытие Ω называется {{c2::открытым,}} если {{c1::любое множество $A \in \Omega$ открыто.}}

Note 43

33da2e11009a4fe9a561efdb024b9f9e

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется {{c2::компактным (или компактом),}} если {{c1::из любого открытого покрытия E можно выбрать конечное подпокрытие.}}

Note 44

cdb5bd07b1d340dd9b11c009a8d0fa29

Пусть {{c3::$E \subset \mathbb{R}^n$ компактно.}} Тогда любое {{c1::замкнутое}} подмножество E {{c2::также компактно.}}

Note 45

4e97b4cdaea54940aa77bb448b02bc3c

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда любое замкнутое подмножество E также компактно. В чём основная идея доказательства?

> Если Ω — открытое покрытие F, то из $\Omega \cup \{\mathbb{R}^n \setminus F\}$ можно выбрать конечное подпокрытие E.

Note 46

83fdcb8dc7984543ac287632c88cdd2b

Пусть E — некоторое множество, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}E^n\text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ раз}}.\text{\}\}}$$

Note 47

8612ce6b751d42f5ad16af50fe9b34ab

{{c1::Множество $[a, b]^n$}} называется {{c2::n-мерным замкнутым гиперкубом в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 48

d7b9e7dbda10452fbbcb34b5bb5ab142

Любой замкнутый гиперкуб в $\mathbb{R}^n$ {{c1::компактен.}}

Note 49

d5ecf42c2e9e4f33a9b2c2233029ebca

Любой замкнутый гиперкуб в $\mathbb{R}^n$ компактен. В чём основная идея доказательства?

> От противного и построить последовательность $\{T_k\}$ "стягивающихся" гиперкубов, каждый из которых покрывается только бесконечным подпокрытием.

Note 50

0f927b1c30bb4f359979159a1d5f82dd

Любой замкнутый гиперкуб в $\mathbb{R}^n$ компактен. Что приводит к противоречию в доказательстве?

> Для достаточно большого k гиперкуб T_k будет достаточно мал, чтобы попасть в некоторое множество из изначального покрытия.

Note 51

86aecfa34161406bb7f4d85d2202e628

Любой замкнутый гиперкуб в $\mathbb{R}^n$ компактен. Пусть $\{T_k\}$ — последовательность "стягивающихся" гиперкубов из доказательства от противного. Как показать, что существует T_k покрывающийся одним множеством из покрытия.

> Взять множество U, покрывающее точку $a \in \bigcup_k T_k$. Тогда существует $T_k \subset V(a) \subset U$.

Note 52

6efd282fcad744ba898c1ed2ad57dcb2

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::E компактно}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::E замкнуто и ограничено.}}

«Теорема {{c4::Гейне-Бореля}}»

Note 53

d8a0467fa82d4e8db762642af19e20b2

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

{{c2::E компактно}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::
$$\forall \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i\to\infty} x^{k_i} \in E.$$
}}

(в терминах последовательностей)

Note 54

66985cb806c94dfa82c0b610d9c140f5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$E \text{ компактно} \implies E \text{ замкнуто и ограничено.}$$

В чём основная идея доказательства?

> Использовать определение в терминах последовательностей.

Note 55

0f59e19db625497a95c6bc7b86dd7f58

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$E \text{ компактно} \impliedby E \text{ замкнуто и ограничено.}$$

> E — замкнутое подмножество компакта $[-c, c]^n$.

Note 56

302a825507eb4e8f96bf410b9004a430

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$E \text{ компактно} \implies \forall \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i \to \infty} x^{k_i} \in E.$$

В чём основная идея доказательства?

> Выбрать последовательность по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса и от противного показать, что её предел лежит в E.

Note 57

e6a17f15d6204305b22ee5417b43761b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $\left\{x^k\right\} \subset E$ сходится. Как показать, что $a = \lim x^k \in E$?

> Если $a \notin E$, то любое конечное подсемейство покрытия
>
> $$\left\{\mathbb{R}^n \setminus \overline{V_\varepsilon(a)}\right\}_{\varepsilon > 0}$$
>
> не содержит x^k, достаточно близкие к a.

Note 58

56eb45f4f37f479e8dbff9c0e68d3e5b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$E \text{ компактно } \Longleftarrow \forall \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i \to \infty} x^{k_i} \in E.$$

В чём основная идея доказательства?

Показать, что E замкнуто и ограничено.

Лекция 21.05.22 (2)

Note 1

eab6566f65bf4003bec24142b9b187e5

{{c2::Отображение $E \subset R \to \mathbb{R}^m$}} называется {{c1::вектор-функцией.}}

Note 2

ff7b125dc2ee4647b62cf48f1c0edc4c

Чем определение предела $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по Коши принципиально отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

> Ничем.

Note 3

21646334c02042498ac8c3104a6f0b24

Чем определение предела отображения $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по Гейне отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

> Ничем.

Note 4

64df3a837c784e0795b58c971d418039

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}, A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \text{ по Коши } \implies f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \text{ по Гейне.}$$

В чём основная идея доказательства?

> Если $x^k \to a$, то $\forall k > N \quad x^k \in \dot{V}_\delta(a) \cap E$ для δ из определения предела по Коши.

Note 5

03ae6948b798427ca2cb62e910651e87

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}, A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \text{ по Гейне } \implies f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \text{ по Коши.}$$

В чём основная идея доказательства?

От противного и выбрать такую $\{x^k\}$, что

$$x^k \to a \quad \text{и} \quad f(x^k) \notin V_\varepsilon(a) \text{ для всех } k.$$

Note 6

911558d747cb439f8cd881a764ff8700

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$a \in \overline{\mathbb{R}^n}$,}} {{c2::$A, B \in \overline{\mathbb{R}^m}$.}} Тогда

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A \quad \wedge \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} B \implies \text{\{\{c1::}A = B.\text{\}\}}$$

Note 7

67a1a0e4aa664174a6c43da05087c80d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c5::$a \in \overline{\mathbb{R}^m}$,}} {{c4::$A \in \mathbb{R}^m$.}} Тогда

$$\text{\{\{c2::}f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}\forall i \quad f_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} A_i.\text{\}\}}$$

(в терминах координатных функций)

Note 8

897f1778b44c472ea1484dc061603ea0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E,

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если {{c1::$\top$,}} то

$$(f(x) + g(x)) \xrightarrow[x \to a]{} A + B.$$

Note 9

339c716c8963455ba9dc06fb9cac6365

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка E,

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда если {{c1::$\top$,}} то

$$\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha A.$$

Note 10

61daf1572b2540f3809ed6f770b68fe2

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a$ — предельная точка E,

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если {{c1:: $\top$,}} то

$$f(x) \cdot g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \cdot B.$$

Note 11

a80a77deaa7f4a91a4c9e4898c2d54a9

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a$ — предельная точка E,

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если {{c1::$m = 1$ и $B \neq 0$,}} то

$$\frac{f}{g}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

Note 12

d5a6f58c526346a3868af995d0553564

Пусть {{c4::$g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ \ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$,}} {{c3::$a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и $b \in F$ — предельные точки E и F соответственно.}} Тогда если {{c2::

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b, \quad g(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} g(b),$$

}} то {{c1::

$$(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g(b).$$

}}

Note 13

52e75393bace4aab93e0b2355fab03ed

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F,\ a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и $b \in F$ — предельные точки E и F соответственно. Тогда если

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b, \quad g(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} g(b),$$

то $(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g(b)$. В чём основная идея доказательства?

> Использовать определение в терминах последовательностей и непрерывность g.

Note 14

1fe3bd0f7cca46f3926bbb096e417e7c

Чем критерий Больцано-Коши для отображений

$$E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

> В место модулей используются евклидовы нормы.

Note 15

8d5f34996faf4cf3a85fbda1c16594d9

В чём основная идея доказательства критерия Больцано-Коши отображений вида $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (необходимость)?

> Определение предела по коши и неравенство треугольника.

Note 16

c832fecebd814e72a6c8940737e9278a

В чём основная идея доказательства критерия Больцано-Коши отображений вида $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (достаточность)?

> Использовать определение по Гейне и критерий Больцано-Коши для последовательностей.

Лекция 28.05.22 (1)

Note 1

3a257b829a434d649416ad3a35a9def7

Чем определение непрерывности для отображений n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

> В место модулей используются евклидовы нормы.

Note 2

05eb6decda1d4c768c55bab47812cc78

Пусть {{c4::$g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ \ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$,}} {{c3::$a \in E$.}} Тогда если {{c1::$f$ непрерывно в точке a и g непрерывно в точке $f(a)$,}} то {{c2::

$$g \circ f \text{ непрерывно в точке } a.$$

}}

Note 3

1ccd9792cd0a4baa9ec57a71d9aa928b

В чём основная идея доказательства теоремы о непрерывности композиция для многомерного случая?

> Использовать определение непрерывности в терминах последовательностей.

Note 4

8506368209b94616a8457215a2d77027

Какие операции рассматриваются в теореме о непрерывности и арифметических операциях?

> 1. $f + g$;
> 2. λf;
> 3. $f \cdot g$;
> 4. $\frac{f}{g}$, если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$.

Note 5

e18bda64d283443ca232d21db13a9e38

Какие два случая рассматриваются в доказательстве теоремы о непрерывности и арифметических операциях?

> 1. a — предельная точка; 2. a — изолированная точка.

Note 6

6d7f3f90d9f24869899e9e7ac81f69f5

В чём ключевая идея доказательства теоремы о непрерывности и арифметических операциях (если a — предельная точка)?

> Следует из теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Note 7

99a111875d1e432694393341d76b930c

В чём ключевая идея доказательства теоремы о непрерывности и арифметических операциях (если a — изолированная точка)?

> Следует из непрерывности отображений в изолированных точках.

Note 8

5c9917e3071449daadcafa9576104927

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Отображение f называется {{c2::непрерывным на множестве E,}} если {{c1::оно непрерывно в любой точке E.}}

Note 9

bf1c453e84fa41259b42e13c3b6767f5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m$. Утверждение «{{c2::$f$ непрерывна на E}}» обозначается {{c1::

$$f \in C(E, F).$$

}}

Note 10

0e7d7718906f4591a7e79f0cc0898a49

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Утверждение «{{c2::$f$ непрерывна на E}}» обозначается {{c1::

$$f \in C(E).$$

}}

Note 11

9cc2279aa7c241dda34320fbe721b6a5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда {{c3::$f$ непрерывно на E}} {{c4::тогда и только тогда, когда}} {{c2::для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$}} {{c1::множество $f^{-1}(G)$ открыто в E.}}

Note 12

df8d1d56c7c44a7188bb74ecebcfae54

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывно на E тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(G)$ открыто в E. В чём основная идея доказательства (необходимость)?

> $$f(V_\delta(a) \cap E) \subset V_\varepsilon(f(a)) \subset G.$$
>
> ε существует из открытости, δ существует из непрерывности.

Note 13

b8a0f6cf91f94332806bf44c0b9d89e9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывно на E тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(G)$ открыто в E. В чём основная идея доказательства (достаточность)?

> В $f^{-1}(V_\varepsilon(f(a)))$ содержится $V_\delta(a) \cap E$.
>
> ε произвольно, δ существует из открытости.

Note 14

a1e6ae84a00b4db1b56d5dd03fc808a3

В критерии непрерывности в терминах открытых множеств можно так же потребовать, что {{c1::G открыто в $f(E)$, а не в $\mathbb{R}^m$.}}

Note 15

9e66beee269447f4822adc404cf72389

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно. Если {{c2::множество E компактно,}} то {{c1::$f(E)$ компактно.}}

Note 16

a32bc2e4ac494e10a4f53f04bc6036f6

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно. Если множество E компактно, то $f(E)$ компактно. В чём основная идея доказательства?

> Для $\left\{y^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset f(E)$ рассмотреть $\left\{x^k \mid f(x^k) = y^k\right\}$ и использовать определение компактности в терминах последовательностей.

Note 17

80ef37043af445bab64ba594208d81b6

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{{{c2::}}}\Delta_{a,b}\text{}}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } \{a + \lambda(b - a) \mid \lambda \in [0, 1]\}\ .\text{}}}$$

Note 18

d8cd721e984b492293d2f6d157c7939a

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. {{c1::Образ множества E при некотором непрерывном отображении $E \to \mathbb{R}^m$}} называется {{c2::непрерывным образом множества E.}}

Note 19

9de330843e6847d88c36a3886c56961e

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\Delta_{a,b}$ {{c1::компактно в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 20

2e4c6c8c1d3f41bf89f4985e1fa000b6

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\Delta_{a,b}$ компактно в $\mathbb{R}^n$. В чём основная идея доказательства?

> $\Delta_{a,b}$ — непрерывный образ компакта $[0, 1]$.

Note 21

9fa1fef7f12440588ed450297e717cf7

Пусть {{c3::$E \subset \mathbb{R}^n$ компактно,}} {{c4::$f \in C(E, \mathbb{R}^m)$.}} Тогда если {{c2::$\top$,}} то {{c1::f ограничено на E.}}

«{{c5::Первая теорема Вейерштрасса}}»

Note 22

da681d4f58ad439198ff548cfb270653

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$. Тогда f ограничено на E. В чём основная идея доказательства?

> $f(E)$ компактно и потому ограничено.

Note 23

a2258f34bf7d440db0ea3e64cbf46073

Пусть {{c3::$E \subset \mathbb{R}^n$ компактно,}} {{c4::$f \in C(E, \mathbb{R}^m)$.}} Тогда если {{c2::$m = 1$,}} то {{c1::f достигает на E своего наибольшего и наименьшего значения.}}

«{{c5::Вторая теорема Вейерштрасса}}»

Note 24

37121c9343014eda991330666c7e918d

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E)$. Тогда f достигает на E своего наибольшего и наименьшего значения. В чём основная идея доказательства?

> Построить последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset f(E)$, стремящуюся к $\sup f(E)$, и использовать замкнутость $f(E)$.
>
> (для $\inf f(E)$ аналогично)

Note 25

cd79f01dd2ab4415ab29791ab3edc446

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E)$. Почему $f(E)$ замкнуто?

> $f(E)$ компактно как непрерывный образ компакта.

Note 26

e5f8b2c4993c434093b107158059bccd

Чем определение равномерной непрерывности для отображений $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ отличается от такового для одномерных функций?

> Вместо модулей используются евклидовы нормы.

Note 27

1f05bf13d87e4ab7a5621f034ce16921

Пусть {{c2::$E \subset \mathbb{R}^n$ компактно,}} {{c3::$f \in C(E, \mathbb{R}^m)$.}} Тогда {{c1::f равномерно непрерывно на E.}}

«{{c4::Теорема Кантора}}»

Note 28

cf88699422b6419b907c07fc4459ed40

Каков первый шаг в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений?

> Для $\varepsilon > 0$ построить открытое покрытие $\{V_{\delta_a}(a)\}_{a \in E}$, где δ_a — это δ из определения непрерывности в точке a.

Note 29

e8cb89e64a75456d8e3f3bd1abddc294

В чём основная идея доказательства теоремы Кантора для многомерных отображений?

> Выбрать конечное подпокрытие $\{V_{\delta_a}(a)\}_{a \in F}$ (где $F \subset E$) и положить $\delta = \min\limits_{a \in F} \delta_a$.

Note 30

48c7bc465a2047199ceb7f716af4da51

Как в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений показать, что

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon?$$

> $x \in V_{\delta_a}(a)$, где $a \in F$, $\implies y \in V_{2\delta_a}(a)$ и далее по неравенству треугольника для $\|f(x) - f(y)\|$.

Note 31

9f949bae890d4ebf8dfb5255514ed926

Почему в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений

$$y \in V_{2\delta_a}(a) \implies \|f(y) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}?$$

> Потому что в определении непрерывности мы можем использовать $2\delta_a$ вместо δ_a и $\frac{\varepsilon}{2}$ вместо ε.

Лекция 28.05.22 (2)

Note 1

f04423d3d7074770b762b08e5f0a2a70

O-большое и o-малое называют ещё {{c1::символами Ландау.

}}

Note 2

8e927c671db34917a4a5e1ab3dc1e06e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$a$ — предельная точка E,}} {{c4::$N \in \mathbb{N}$.}} Тогда если {{c2::отображение $x \mapsto \frac{f(x)}{\|x-a\|^N}$ локально ограничено в точке a,}} то говорят, что {{c1::

$$f(x) = O(\|x - a\|^N), \quad x \to a.$$

}}

Note 3

fad7e0a388954612964803b360fe5d3d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$a$ — предельная точка E,}} {{c4::$N \in \mathbb{N}$.}} Тогда если {{c2::отображение $x \mapsto \frac{f(x)}{\|x-a\|^N}$ бесконечно мало в точке a,}} то говорят, что {{c1::

$$f(x) = o(\|x - a\|^N), \quad x \to a.$$

}}

Note 4

ba6241aee88d4dea97d9f884f9d7ff3f

В определении o-малого для удобства полагают, что функция

$$x \mapsto \frac{f(x)}{\|x - a\|^N}$$

{{c1::непрерывна в точке a.}}

Note 5

d719dcdb5af849639ad736cd806340de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E. Утверждение {{c2::

$$f(x) = o(\|x - a\|), \quad x \to a$$

}} так же записывают как {{c1::

$$f(x) = o(x - a), \quad x \to a.$$

}}

Note 6

f602028d4e834727b205a0610a0c96ea

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E. Утверждение {{c2::

$$f(x) = O(\|x - a\|), \quad x \to a$$

}} так же записывают как {{c1::

$$f(x) = O(x - a), \quad x \to a.$$

}}

Note 7

6562de55c997431e8367a2848528370d

Пусть V, W — линейные пространства. Множество всех линейных операторов $V \to W$ обозначается {{c1::$\mathcal{L}(V, W)$.}}

Note 8

f77214b5ea714137a9cfb0073362925d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$.}} {{c3::Оператор

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

}} такой, что {{c2::

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + o(x - a), \quad x \to a.$$

}} называется {{c1::дифференциалом f в точке a.}}

Note 9

b36cf2416f8e4eed89f72e08a1e6e9a0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. {{c2::Дифференциал f в точке a}} обозначается {{c1::$d_a f$.}}

Note 10

cfce7e6a8d7f46ebac0428174d9baf01

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$a \in \operatorname{Int} E$.}} Отображение f называется {{c2::дифференцируемым в точке a,}} если {{c1::существует $d_a f$}}

Note 11

237f78f7b4834503aeb6a88373cdc14d

Здесь и далее подразумевается, что если $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a, то a — {{c1::внутренняя точка множества E.}}

Note 12

f46eb042f44a4dca88af3d73eae0ca1d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда {{c2::$d_a f$}} представляет из себя {{c1::линейную вектор функцию вида

$$h \mapsto h \cdot k, \quad \text{где } k \in \mathbb{R}^m.$$

}}

Note 13

34df7b7787e14e8595498cebf029d764

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. {{c2::Значение

$$d_a f(1)$$

}} называется {{c1::производной f в точке a.}}

Note 14

eb3aa6e0d4614b7ebef27ca5a3adb894

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. {{c2::Производная f в точке a}} обозначается {{c1::$f'(a)$.}}

Note 15

b2cec8ccbc6d4f3881bef37926780f68

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда f {{c1::непрерывно в точке a.}}

Note 16

882c243a18134406ba4e9bc78361ab97

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда f непрерывно в точке a. В чём основная идея доказательства?

> $$f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Note 17

ae6dcf68dac241c09aedc204bbb0c45a

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = const,\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d_a f(h) = \text{{{c1::}} } 0. \text{}}}$$

Note 18

6356837026ce46d0b56246cdf63f5b64

Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d_a f(h) = \text{\{\{c1::}f(h).\text{\}\}}$$

Note 19

aa19836f543d4d52b55111db827459a3

Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ a \in \mathbb{R}^n$. Тогда f дифференцируемо в точке a, если {{c1::$\top$.}}

Note 20

c5bde8eb01764970b5cf1e7da80b8aee

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c3::$e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}} {{c1:: Значение

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he) - f(a)}{h}$$

}} называется {{c2::производной f по вектору e в точке a.}}

Note 21

02f6ea926ce44e0798ce4c5a7069f787

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E,\ e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. {{c2::Производная f по вектору e в точке a}} обозначается {{c1::

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a).$$

}}

Note 22

fb3482c4672c476c80753762335f0899

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, {{c3::$e \in S_1(0)$.}} Тогда {{c2::$\frac{\partial f}{\partial e}(a)$}} называется {{c1::производной f по направлению e в точке a.}}

Note 23

eeba1ebe383d4749bd35920c721fe1d3

Может ли производная по вектору быть бесконечной?

> Строго говоря, может, но в большинстве случаев предполагают, что она принимает только конечные значения.

Note 24

76e3d0829d93417a9e2feaf78d34126b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, {{c3::$e \in S_1(0)$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \frac{\partial f}{\partial e}(a) \text{}}} = \text{{{c1::}} (f(a+te))'\big|_{t=0}. \text{}}}$$

(в терминах вектор функций)

Note 25

8a9b1ceb6c6844959b543e1e104d5e89

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $e \in S_1(0)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = (f(a+te))'\big|_{t=0}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> В определении производной выразить числитель через $g(t) = f(a+te)$ и затем через $d_a g(t)$.

Note 26

44cd6d8c12554833bb8afa0753b0910b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, {{c3::$e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \frac{\partial f}{\partial e} \text{}}} = \text{{{c1::}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial e}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial e} \right). \text{}}}$$

(в терминах координат)

Note 27

eaedf212617f4428bef386d4b81e2eed

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$\exists d_a f$,}} {{c3::$e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}} \frac{\partial f}{\partial e}(a) \text{}}} = \text{{{c1::}} d_a f(e). \text{}}}$$

Note 28

89f7b5294b944a95b75abdab905dbc98

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\exists d_a f$, $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e).$$

В чём основная идея доказательства?

> В определении $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$ выразить числитель через определение $d_a f$.

Note 29

67db980b491949d785fed96f33803237

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда $d_a f$ {{c1::определён однозначно.}}

Note 30

25f117cbf76f46f19ca4230ce0116654

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда $d_a f$ определён однозначно. В чём основная идея доказательства?

> Значение дифференциала определяется для любого вектора однозначно чрез связь с $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$.

Note 31

cf8143dde492494295964135369ed967

В контексте $\mathbb{R}^n$ через {{c2::e^i}} обозначают {{c1::i-й вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^n$.}}

Note 32

54153c0a672c4b90934ba69d7d0644f9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c3::$k \in [1 : n]$.}} Тогда {{c2::$\dfrac{\partial f}{\partial e^i}(a)$}} называется {{c1::частной производной f по k-й переменной в точке a.}}

Note 33

e1e682d22e3742e3948f24a25e2d2b56

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $k \in [1 : n]$. {{c2::Частная производная f по k-й переменной в точке a}} обозначается

{{c1::$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$}}, {{c1::$D_k f(a)$}}, {{c1::$\partial_k f(a)$}} или {{c1::$f'_{x_k}(a)$.}}

Note 34

267a17a4b2ac411699cab9e254ebf19a

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $k \in [1 : n]$. Тогда

{{c3::$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$}} $=$ {{c2::$\varphi'_k(a_k)$, }}

где $\varphi_k(t) \coloneqq$ {{c1::$f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$}}.

Note 35

6c71c8d7de9b44a1bd8a8327486543fd

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E,\ k \in [1:n]$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi_k'(a_k),$$

где $\varphi_k(t) \coloneqq f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. В чём ключевая идея доказательства?

> Представить $\varphi_k(t)$ как $f(a + (t - a_k)e^k)$.

Note 36

3a23259d797c45e6b298385e04016223

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

$$\{\{c2::d_a f(h)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k.\}\}$$

(в терминах частных производных)

Note 37

7f59884a7bf14df4939f4af780bc6989

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

$$d_a f(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k.$$

В чём основная идея доказательства?

> Разложить h по каноническому базису и использовать линейность $d_a f$.

Note 38

8f7aab5736454f5795f482c88b918b01

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a, {{c3:: $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}} Тогда

$$\{\{c2::\frac{\partial f}{\partial e}(a)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot e_k.\}\}$$

(в терминах частных производных)

Note 39

83de62d2dfa84469a6fbbb50b5934f72

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $a,\ e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot e_k.$$

В чём основная идея доказательства?

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e) = \ldots$$

Семинар 26.05.22

Note 1

2bbeb2bd5e114d1e844f0e6871141386

Пусть {{c3::$f \in C^1[a, b]$.}} {{c2::Площадь поверхности вращения графика функции f вокруг оси Ox}} равна {{c1::

$$2\pi \int_a^b |f| \sqrt{1 + (f')^2}.$$

}}

Лекция 04.06.22 (1)

Note 1

3158d37d03514cf6a48e5f1e50943280

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$.}} Тогда {{c2::$f$ дифференцируемо в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::все координатные функции f_k дифференцируемы в точке a.}}

Note 2

b03c50a5177e45d3af6168e742ff08e5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда f дифференцируемо в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_k дифференцируемы в точке a. В чём основная идея доказательства?

> Следует из теоремы о связи предела отображения с пределами координатных функций.

Note 3

3793d7bd0eb2413486ca9b2d557a8bfe

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда f дифференцируемо в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_k дифференцируемы в точке a. Какой предел рассматривается в доказательстве?

> Предел выражения o-малого из определения дифференцируемости в точке a.

Note 4

efafa6dd07b64b1e96f53a5412ca48c4

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

$$\text{\{\{c2::}d_a(f_k)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}(d_a f)_k\text{\}\}} \quad \forall k.$$

Note 5

b32f253473ed4e01ad2548075513a68c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

$$d_a(f_k) = (d_a f)_k \quad \forall k.$$

В чём основная идея доказательства?

> Выразить o-малое из определения дифференцируемости и использовать связь предела с пределами координатных функций.

Note 6

a31575ebc07f469ab443c54489a0f052

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::дифференцируемо в точке a.}} Тогда {{c1::матрица $d_a f$}} называется {{c2::матрицей Якоби f в точке a.}}

Note 7

475dd78374494ef48e52b268a9e7d737

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. {{c2::Матрица Якоби f в точке a}} обозначается {{c1::$f'(a)$.}}

Note 8

6e2acb045c654dce899895bfd332d261

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::дифференцируемо в точке a.}} Тогда {{c1::если $m = 1$, то вектор $f'(a)$}} называют {{c2::градиентом отображения f в точке a.}}

Note 9

8224bbff688b41bf8effa9d4e231ce37

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. {{c2::Градиент f в точке a}} обозначается {{c1::$\operatorname{grad} f(a)$}} или {{c1::$\nabla f(a)$ }}

Note 10

7fd19c7b8d4840b1b246ef7284641b60

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

$$\{\{c3::f'(a)\}\} = \left[\{\{c1::\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\}\}\right] \sim \{\{c2::m \times n.\}\}$$

Note 11

44b005f1da294a33b0146fb00ef1e53f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда {{c2::i-я строка}} {{c3::$f'(a)$}} — это {{c1::$\nabla f_i(a)$.}}

Note 12

d25499d991a74f439b7466323fbe46c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда i-я строка $f'(a)$ — это $\nabla f_i(a)$. В чём основная идея доказательства?

$$(d_a f)_i = d_a(f_i) = \nabla f_i(a).$$

Note 13

3820288f2e574fcf9121ea4a55c73afa

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда {{c2::j-й столбец}} {{c3::$f'(a)$}} — это {{c1::$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.}}

Note 14

d8575a15a00844589a8967ae38314f49

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда j-й столбец $f'(a)$ — это $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. В чём основная идея доказательства?

$$d_a f(h) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k.$$

Note 15

36f0f4f310d841a880520daa7da8194d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда

{{c2::$f(a+h)$}} $=$ {{c1::$f(a) + f'(a) \cdot h + o(h), \quad h \to 0.$}}

(в терминах матрицы Якоби)

Note 16

eda3b1356526444eb23d37159f97cf0e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c5::дифференцируемо в точке a.}} Тогда множество

$\Big\{$ {{c4::(x, y)}} $\mid$ {{c3::$x \in \mathbb{R}^n$,}} {{c2::$y = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$}} $\Big\}$.

задаёт {{c1::касательную n-мерную гиперплоскость к графику f.}}

Note 17

c3d92f858259477dbb835857dcc70ca9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда если {{c3::$\nabla f(a) \neq 0$,}} то {{c2::$\forall e \in S_1(0)$}} {{c1::

$$\left|\frac{\partial f}{\partial e}(a)\right| \leqslant \|\nabla f(a)\|.$$

}}

Note 18

a670a788fedf4625aaeeeb9ab231df7f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a,

$$e \in S_1(0), \quad \nabla f(a) \neq 0.$$

Тогда

{{c2:: $\left|\frac{\partial f}{\partial e}(a)\right| = \|\nabla f(a)\|$ }}{{c3:: $\iff$ }}{{c1::e и $\nabla f(a)$ коллинеарны.}}

Note 19

0566ef79af74469da7f15612aac5a762

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда если $\nabla f(a) \neq 0$, то $\forall e \in S_1(0)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial e}(a)\right| \leqslant \|\nabla f(a)\|.$$

В чём основная идея доказательства?

> $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \nabla f(a) \cdot e$ и неравенство Коши-Буняковского.

Note 20

41741682c49847e886b1a89746562a02

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда геометрически $\nabla f(a)$ указывает {{c1::направление скорейшего изменения f в точке a.}}

Note 21

2f208a0d1343496b987eb7b7424e71ae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда даже если

$$\{\{c3{::}\forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}\} \quad \{\{c2{::}\exists \frac{\partial f}{\partial e}(a),\}\}$$

{{c1::f может быть не дифференцируемо и даже разрывно в точке a.}}

Note 22

f17c92a006814a4e8b8073f811ffdd0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда даже если

$$\forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial e}(a),$$

f может быть не дифференцируемо и даже разрывно в точке a. Какой пример можно привести?

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0,\ y = x^2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Note 23

ab17b49628fc4264800bf3a6321f77c5

$$\exp x \overset{\text{def}}{=} \{\{c1{::}e^x,\}\} \quad x \in \{\{c2{::}\mathbb{R}.\}\}$$

Note 24

ae604bd77b1a4ff1abdb99848da38930

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда даже если

$$\{\{c3{::}\forall k \in [1 : n]\}\} \quad \{\{c2{::}\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),\}\}$$

{{c1::f может не иметь производных по всем направлениям в этой точке.}}

Note 25

98313332866e48c39a1d416e672b28fd

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда даже если

$$\forall k \in [1 : n] \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),$$

f может не иметь производных по всем направлениям в этой точке. Какой можно привести пример?

> $$(x, y) \mapsto xy \exp \frac{1}{x^2 + y^2},$$
>
> доопределённая в нуле нулём.

Лекция 04.06.22 (2)

Note 1

948a8a8e219d4a3ab57e65ab5d1289c5

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$. Тогда если {{c3::$f$ и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$,}} то {{c2::$g \circ f$ дифференцируемо в точке a}} и

$$\{\{c4::d_a(g \circ f)\}\} = \{\{c1::d_{f(a)} g \circ d_a f.\}\}$$

Note 2

1b52ae2889854ee2b0dfa687eb753ed4

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$. Тогда если f и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$, то

$$\{\{c2::(g \circ f)'(a)\}\} = \{\{c1::g'(f(a)) \cdot f'(a).\}\}$$

Note 3

43e06625aeec4391b7cef8a2bd9203ee

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$. Тогда если {{c3::$f$ и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$,}} то

$$\{\{c2::\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).\}\}$$

Note 4

7b0f43736c8845b5b283526e3e8f7a05

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ f : E \subset \mathbb{R}^n \to F$. Тогда если {{c3::$f$ и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$,}} то

$$\{\{c2::\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).\}\}$$

В чём ключевая идея доказательства?

> Из определения произведения матриц.

Note 5

35d2b5e589a74b12b8fbcbc65e61f035

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\text{\{\{c2::}d_a(\lambda f + \lambda g)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\lambda \cdot d_a f + \mu \cdot d_a g.\text{\}\}}$$

Note 6

0cbaa96d8bbc45b4a4363bcfd2566a25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда если $\lambda : E \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точка a, то

$$\text{\{\{c2::}d_a(\lambda f)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f.\text{\}\}}$$

Note 7

43c10798f11f4fa081e62f1041795fb0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда

$$\text{\{\{c2::}d_a(f \cdot g)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}g(a) \cdot d_a f + f(a) \cdot d_a g.\text{\}\}}$$

Note 8

c57f072ea6534d6cb7a5c6bcdd9c4192

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда если {{c3::$m = 1$ и $g(a) \neq 0$,}} то

$$\text{\{\{c2::}d_a \left(\frac{f}{g} \right)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\frac{g(a) \cdot d_a f - f(a) \cdot d_a g}{g^2(a)}.\text{\}\}}$$

Note 9

149d3a16b0664567883c8c004040bf67

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда если $f(a) \neq 0$, то

$$\text{\{\{c2::}d_a \left(\frac{1}{f} \right)\text{\}\}} = \text{\{\{c1::}-\frac{d_a f}{f^2(a)}.\text{\}\}}$$

Note 10

ade1a1301b7744559977e410fa10343d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда если $f(a) \neq 0$, то

$$d_a \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{d_a f}{f^2(a)}.$$

Какова интуитивная мотивация для этой формулы?

> $$d_a \left(f \cdot \frac{1}{f} \right) = 0$$
>
> и правило дифференцирования произведения.

Note 11

40e9c61d8cad4a68a4f9de5b4a43969c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a. Тогда если $f(a) \neq 0$, то

$$d_a \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{d_a f}{f^2(a)}.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> По определению дифференциала.

Note 12

54db552f4a6c4b648657e5b444dc1f39

Пусть {{c5::$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a.}} Тогда если {{c3::$d_a f$ обратим, f инъективно,}} {{c2::$f(a) \in \operatorname{Int} f(E)$ и f^{-1} непрерывно в точке $f(a)$,}} то

{{c4::$d_{f(a)}(f^{-1})$}} $=$ {{c1::$(d_a f)^{-1}$.}}

Note 13

720cedcc5ee04aaeb2578d94159a5dc5

В чём ключевая идея доказательства равенства

$$d_{f(a)}(f^{-1}) = (d_a f)^{-1}?$$

▌ В $f^{-1}(f(a)+y)$ положить $y=f(a+h)-f(a)$.

Note 14

8c3bdb6f7ea34c7a8c19240baad3f89f

Зачем в условиях для выполнения равенства

$$d_{f(a)}(f^{-1})=(d_af)^{-1}$$

требуют непрерывность f^{-1} в точке $f(a)$?

▌ Чтобы при $y\to 0$ иметь $h\to 0$.

Note 15

15e61ca44e4f430a9cbed9259236bd81

Пусть $f,g:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда

$$(d_af\cdot d_ag)(h)= \text{\{\{c1::}o(h),\quad h\to 0.\text{\}\}}$$

Note 16

cc1b2c69a7bd44f898587a705da60962

Пусть $f,g:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a. Тогда

$$d_af(h)\cdot d_ag(h)=o(h),\quad h\to 0.$$

В чём ключевая идея доказательства?

$$\begin{aligned}d_af(h)\cdot d_ag(h)=\|h\|\cdot\frac{d_af(h)\cdot d_ag(h)}{\|h\|}\\ =\|h\|\cdot\underbrace{d_af(h)}_{\text{б.м.}}\cdot\underbrace{d_ag\left(\frac{h}{\|h\|}\right)}_{\text{огр.}}.\end{aligned}$$

Note 17

71284fb4f90c4dc38af502ae45c52047

Пусть $f:E\to\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ E$ открыто. Тогда f называется {{c2:: дифференцируемым на E,}} если {{c1::оно дифференцируемо в любой точке множества E.}}

Note 18

f4e9d2f7d86342e6a46f0fd1f7d51a05

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c2::$a \in \operatorname{Int} E$.}} Если {{c2::все частные производные f определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a,}} то отображение f называется {{c1::непрерывно дифференцируемым в точке a.}}

Note 19

8471f80ad2b94d91955723821de9e7eb

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$E$ открыто.}} Тогда если {{c2::f непрерывно дифференцируемо в любой точке E,}} то оно называется {{c1::непрерывно дифференцируемым на E.}}

Note 20

45433e308f364161b5821365d29ce90c

Пусть f : {{c6::$E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$}}, {{c5::$V_\delta(a) \subset E$, $h \in V_\delta(0)$.}} Тогда если {{c4::все частные производные f определены на $V_\delta(a)$,}} то {{c3::$\exists \left\{c^k\right\} \subset V_\delta(a)$ такие,}} что

$$\{\{c2::f(a+h) - f(a)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k.\}\}$$

«Обобщение {{c2::формулы конечных приращений}}»

Note 21

10107bb4687c465bac4072f4779132e1

В чём ключевая идея доказательства обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных?

> Представить $f(a+h) - f(a)$ как сумму функций одной переменной и далее по теореме Лагранжа.

Note 22

5ab7dd4323b040289c5ab853212cb45c

В доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных полагают

$$F_k(\lambda) := \{\{c2::f(x^k + \lambda h_k \cdot e^k),\}\}$$

где $x^0 =$ {{c2::a}}, $x^{k+1} =$ {{c2::$x^k + h_k \cdot e^k$}}.

Note 23

9b71a7b420374789b2e2b3972f3e73e7

В доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных

$$F_k'(\lambda) = \{\{c1::\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^k + \lambda h_k \cdot e^k) \cdot h_k.\}\}$$

Note 24

78a4268e8f6d499980240c05305ef8de

Почему в доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных

$$F_k'(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^k + \lambda h_k \cdot e^k) \cdot h_k?$$

> Правило дифференцирования композиции.

Note 25

6846624cabef4f08afca4c090e76322e

Пусть {{c3::$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$}} {{c2::непрерывно дифференцируемо в точке a.}} Тогда {{c1::f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$ и дифференцируемо в точке a.}}

Note 26

b5517c26c32142f486c6acc4f296b172

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть случаи $m = 1$ и $m \neq 1$.

Note 27

2d35c52f1a0b43c99f53cb539b9b22d2

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m \neq 1$)?

> Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 28

f52141dfaa7041a38ae0b120a0b3dccd

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

> Локальная ограниченность $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, формула конечных приращений и неравенство Коши-Буняковского.

Note 29

44c54b436fe646ff811ada560cee320f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. К каким точкам в доказательстве применяется формула конечных приращений (случай $m = 1$)?

> $x \in V_\delta(a),\ h \in \mathbb{R}^n$, причём $\overline{V_{\|h\|}(x)} \subset V_\delta(a)$. Тогда
>
> $$f(x + h) - (x) = \cdots .$$

Note 30

5ed042452b254c4da61c0900b89de5b5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f дифференцируемо в точке a. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть случаи $m = 1$ и $m \neq 1$.

Note 31

483478141906430eb0aebd84115e60e0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f дифференцируемо в точке a. В чём ключевая идея доказательства (случай $m \neq 1$)?

> Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 32

7be084f196c54a349a0dab9b57f0354f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f дифференцируемо в точке a. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

> Непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в терминах (ε, δ), формула конечных приращений и неравенство Коши.

Note 33

e15dab279d654705a50123f72f8693dc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a. Тогда f дифференцируемо в точке a. К каким точка в доказательстве применяется формула конечных приращений (случай $m = 1$)?

> $h \in V_\delta(0)$ для δ из определения непрерывности. Тогда
>
> $$f(a+h) - f(a) = \cdots .$$

Note 34

11ed142e7cee42bca4f4f14ccaa6d0a0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c5::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c4::$s \in \mathbb{N}$.}} Тогда

$$\text{{{c1::}}}\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(a),\text{}}}\quad \text{где {{c2::}}}\{i_k\}_{k\in[s]} \subset [n],\text{}}}$$

называется {{c3::частной производной порядка s по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ в точке a.}}

Note 35

afce6f40275041b0895a8d367bbe4b4a

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. Частная производная

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(a)$$

называется {{c1::чистой,}} если {{c2::$i_1 = \cdots = i_s$.}}

Note 36

b4b880f53dec41ec913658ebe48a3fe3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Частная производная

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(a)$$

называется {{c1::смешанной,}} если {{c2::она не является чистой.
}}

Note 37

c58810ade99a4dd5b80a942765480841

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E,\ s \in \mathbb{N}$. Частная производная f порядка 0 в точке a — это {{c1::само отображение f.
}}

Note 38

2ea71ead58d64c54a969292826923965

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c3::$s \in \mathbb{N}$.}} Отображение f называется {{c3::s раз дифференцируемым в точке a,}} если

- {{c1::все частные производные f порядков $0, \ldots, s-2$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a;
}}
- {{c2::все частные производные f порядка $s-1$ дифференцируемы в точке a.}}

Note 39

87676ec127284cac91461e7ac6a5e765

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c3::$E$ открыто,}} $s \in \mathbb{N}$. Тогда если {{c2::f s раз дифференцируемо в любой точке E,}} то оно называется {{c1::s раз дифференцируемым на E.}}

Note 40

d52181b80ca94e93b448e509b9d2c450

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Отображение f называется {{c2::бесконечно дифференцируемым в точке a,}} если {{c1::оно дифференцируемо в a любое число раз.}}

Note 41

2edea04aa7ec4340b2fd3a723ce14f87

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$. Отображение f является 1-раз дифференцируемым в точке $a \iff$ {{c1::f дифференцируемо в точке a.}}

Note 42

ae5f107e91ec42bea69e60ce694dd1fd

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c3::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} Тогда если {{c2::все частные производные f порядка s дифференцируемы на $V_\delta(a)$,}} то {{c1::и все частные производные f порядков $0, \ldots, s-1$ дифференцируемы на $V_\delta(a)$.}}

Note 43

58ffebe22a904741ad453a58fa1f677e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E,\ s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда если все частные производные f порядка s дифференцируемы на $V_\delta(a)$, то и все частные производные f порядков $0, \ldots, s-1$ дифференцируемы на $V_\delta(a)$. В чём ключевая идея доказательства?

> Индукция по $s-k$ и непрерывная дифференцируемость на $V_\delta(a)$.

Note 44

82fd4f2ae58342ca89a0dfb4facd307b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c3::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} Отображение f называется {{c2::s раз непрерывно дифференцируемым в точке a,}} если {{c1::все частные производные f прядка s определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a.}}

Note 45

24d909cfebe34d9dbea5020004954fde

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ E$ открыто, $s \in \mathbb{Z}_+$. Отображение f называется {{c2::s раз непрерывно дифференцируемым на E,}} если {{c1::оно s раз непрерывно дифференцируемо в любой точке E.}}

Note 46

9aee7045f51244c6a28205fdffac2516

Пусть {{c3::$E \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $F \subset \mathbb{R}^m$,}} {{c3::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} {{c2::Класс s раз непрерывно дифференцируемых отображений $E \to F$}} обозначается

$$\{\{c1::C^s(E, F)\}\} \text{ или } \{\{c1::C^s(E \to F).\}\}$$

Note 47

f48c229fde1146c59261a9e58ea055b2

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $F \subset \mathbb{R}^m$.

$$\{\{c2::C^\infty(E, F)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\bigcap_{s=0}^{\infty} C^s(E, F).\}\}$$

Note 48

5f4d9ca691dd43dfabeed53211993f43

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$k, s \in \mathbb{N}$, $k < s$.}} Тогда {{c2::

$$f \in C^s(E, \mathbb{R}^m)$$

}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::все частные производные порядка k принадлежать классу $C^{s-k}(E, \mathbb{R}^m)$.}}

Note 49

91dfb67ce1114f4c869663609fbe77f9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда {{c2::f является s раз непрерывно дифференцируемым в точке a}} {{c3::тогда и только тогда, когда}} {{c1::все f_k s раз непрерывно дифференцируемы в точке a.}}

(в терминах координатных функций)

Note 50

0bbd5137012945c0a2837d3cfdcb4dbf

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Тогда $\forall k, s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $k \leqslant s$

$$C^s(E, \mathbb{R}^m) \{\{c1:: \subset \}\} C^k(E, \mathbb{R}^m).$$

Note 51

287c74396b324eb6b124d84b8ad8a2d6

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^s(E, \mathbb{R}^m)$. Тогда отображение f {{c1::s раз дифференцируемо на E.}}

Note 52

3cce08514b7048e8a02dd5eac699d108

Пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

> $f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, доопределённая нулём в нуле.

Note 53

8f24687099874445962dd67011e97e5b

Пусть {{c4::$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,}} {{c3::$(x^0, y^0) \in \operatorname{Int} E$.}} {{c1::Число

$$f(x^0+u, y^0+v) - f(x^0+u, y^0) \\ - f(x^0, y^0+v) + f(x^0, y^0)$$

}} называется {{c2::двойным приращением f в точке (x^0, y^0).}}

Note 54

256ffb8d304549a4bd2c41e4b6cf4061

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$. {{c1::Двойное приращение f в точке a}} обозначается {{c2::$\Delta_a^2 f(u, v)$.}}

Note 55

afc0c869f9c44eba9547c031b5f7d44f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x^0, y^0) \in \operatorname{Int} E$. Тогда если {{c4:: частные производные первого порядка определены на $V_\delta(a)$ и $(u, v) \in V_\delta(0)$,}} то {{c3::существует такое $\theta \in (0, 1)$,}} что

$$\{\{c2::\Delta_a^2 f(u, v)\}\} = \\ \{\{c1:: \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta u, y^0+v) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta u, y^0)\right) \cdot u.\}\}$$

(выражение через $\frac{\partial f}{\partial x}$)

Note 56

22809958f317481b83c1107321bccc81

В чём ключевая идея доказательства теоремы о связи двойного приращения с $\frac{\partial f}{\partial x}$?

> Представить $\Delta_a^2 f(u,v)$ как разность значений некоторой функции от одного аргумента и далее по теореме Лагранжа.

Note 57

bf1b436ef0954a00a1f2b9285b49fba7

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (x^0, y^0) \in \operatorname{Int} E$. Тогда если {{c4:: смешанные производные f второго порядка определены на $V_\delta(a)$,}} то {{c3::найдутся такие $\theta_x, \theta_y \in (0,1)$,}} что

$$\{\{c2::\Delta_a^2 f(u,v)\}\} = \{\{c1::\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0 + \theta_x u, y^0 + \theta_y v) \cdot uv.\}\}$$

(выражение через $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$)

Note 58

7a3d5695229048b2b11750777afb8d1f

В чём основная и идея доказательства теоремы о связи двойного приращения с $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$?

> Представить выражение $\Delta_a^2 f(u,v)$ через $\frac{\partial f}{\partial x}$ как разность значений некоторой функции одного аргумента и далее по теореме Лагранжа.

Note 59

99e7a9e11a1e48689ac060bd62dad6af

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x^0, y^0) \in \operatorname{Int} E$. Тогда если частные производные первого порядка определены на $V_\delta(a)$ и $(u,v) \in V_\delta(0)$, то существует такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\{\{c2::\Delta_a^2 f(u,v)\}\} = \{\{c1:: \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x^0 + u, y^0 + \theta v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0 + \theta v)\right) \cdot v.\}\}$$

(выражение через $\frac{\partial f}{\partial y}$)

Note 60

405cbcf8023e4de283e5cc014671049c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (x^0, y^0) \in \operatorname{Int} E$. Тогда если смешанные производные f второго порядка определены на $V_\delta(a)$, то найдутся такие $\theta_x, \theta_y \in (0,1)$, что

$$\{\{c2::\Delta_a^2 f(u,v)\}\} = \{\{c1::\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0 + \theta_x u, y^0 + \theta_y v) \cdot uv.\}\}$$

(выражение через $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

Note 61

044db708f2c54c219e270170f907a1ea

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{Int} E$ и {{c4::функция f имеет в a смешанные производные второго порядка.}} Тогда если

$$\begin{aligned}\{\{c3::\Delta_a^2 f(u,v)\}\} &= \{\{c1::\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot uv + o(u^2+v^2)\}\} \\ &= \{\{c1::\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \cdot uv + o(u^2+v^2), \quad (u,v) \to 0, \}\}\end{aligned}$$

то {{c2::$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.}}

Note 62

f51c2b307a5e4fc48ff6739d2fb12792

В чём ключевая идея доказательства теоремы о достаточном условии совпадения значений смешанных производных второго порядка функции $E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в терминах двойного приращения?

> Взять равные u, v и показать, что разность значений смешанных производных в точке a стремится к нулю.

Note 63

e47e22d176ab4771a327c6f034b1e6de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если {{c1::$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a,}} то {{c2::

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

}}

(в терминах непрерывности)

Note 64

c13c9bab93754013b91eb0b90f2c35cc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. К какой лемме сводится доказательство?

> Достаточное условие равенства смешанных производных в терминах двойного приращения.

Note 65

718656f6f9fc4232b139a9a17b868186

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. В чём ключевая идея доказательства?

> Выразить $\Delta_a^2 f(u, v)$ через смешанные частные производные второго порядка и далее методом “купи козу, продай козу”.

Note 66

934e8a2cf7004a77969eccaa66a09507

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если {{c1::функция f дважды дифференцируема в точке a,}} то {{c2::

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

}}

(в терминах дифференцируемости)

Note 67

9a501fcc2f664e44a8da4c2e3a07cc26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если функция f дважды дифференцируема в точке a, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. К какой лемме сводится доказательство?

> Достаточное условие равенства смешанных производных в терминах двойного приращения.

Note 68

c05c985bb5c7464abbacefb8a7df65a7

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ a \in \operatorname{Int} E$. Тогда если функция f дважды дифференцируема в точке a, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. В чём ключевая идея доказательства?

> Выразить $\Delta_a^2 f(u, v)$ через $\frac{\partial f}{\partial x}$ и преобразовать по определению дифференцируемости $\frac{\partial f}{\partial x}$ в точке a.

Note 69

2040e12c02dd4e5a802c3e3699139436

Как связаны достаточные условия равенства вторых смешанных производных вещественной функции двух переменных в терминах непрерывности производных и в терминах дифференцируемости функции?

> Они независимы: ни одно из них не вытекает из другого.

Note 70

e5d0840e014f416182a467e841612be7

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ {{c4::$a \in \operatorname{Int} E,$}} {{c3::$s \in \mathbb{Z}_+.$}} {{c1::Дифференциал f порядка s в точке a}} обозначается {{c2::$d_a^s f.$}}

Note 71

4a0eb2624a0b417c971d2809d916d439

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \ s \in \mathbb{Z}_+,$ {{c3::$h \in \mathbb{R}^n.$}} {{c1::Отображение $x \mapsto d_x^s f(h)$}} называется {{c2::дифференциалом f порядка s на приращении h.}}

Note 72

678b9037ec5546139752d16739190f43

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ s \in \mathbb{Z}_+,\ h \in \mathbb{R}^n.$ {{c1::Дифференциал f порядка s на приращении h}} обозначается {{c2::$d^s f(h).$}}

Note 73

3f6f7599179f4bfc9ff68b783fa854fe

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E$.

$$d_a^0 f(h) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(a).\}\}$$

Note 74

d50ddda5fe2e45b8ae3e6dd574301801

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in \operatorname{Int} E,$ {{c2::$h \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

$$d^0 f(h) = \{\{c1::f.\}\}$$

Note 75

b26ea1c33db448d78e2370a9b8da1714

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \ a \in \operatorname{Int} E,$ {{c5::$s \in \mathbb{N}$,}} {{c4::$h \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда если {{c2::$d^{s-1} f(h)$ дифференцируемо в точке a,}} то

$$\{\{c3::d_a^s f(h)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::d_a \left(d^{s-1} f(h)\right)(h).\}\}$$

Note 76

074bc517d3154bf99256c62ff0ccc825

По какому принципу определяются дифференциалы высших порядков для отображений n вещественных переменных?

> Индуктивно, начиная с дифференциалов нулевого порядка.

Note 77

db8b3646a02e48c0822f0cb0bf888011

{{c1::Любой вектор из $\mathbb{Z}_+^n$}} называется {{c2::n-мерным мультииндексом.}}

Note 78

36b41fdf60b04dc3990df80419df63d4

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс. Тогда {{c1::

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

}} называется {{c2::абсолютным значением α.}}

Note 79

a64074374f28419bb6aa71df69d8347b

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс. Тогда

$$\{\{c2::\alpha!\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!.\}\}$$

Note 80

7147cddaa4d449d2a180ad68b906cebc

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2::x^\alpha\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.\}\}$$

Note 81

ca2b48bd2a18414ab51a9417e7dd87e3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс. Тогда

$$\{\{c2::\partial^\alpha f(a)\}\} \overset{\text{def}}{=} \{\{c1:: \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a).\}\}$$

Note 82

c2871cb49fe94563a86528754b6c569c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c2::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда $d_a^s f$ {{c1::существует.}}

Note 83

38ec4052d4b84d6c8f0e1c8a8cdd1d22

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c4::s раз дифференцируемо в точке a,}} {{c5::$h \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

$$\{\{c3::d_a^s f(h)\}\} = \{\{c1:: \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(a) \cdot h^\alpha, \}\}$$

$$(\{\{c2::\alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}\}).$$

Note 84

4765cc75b79245358f6ca57e91719c78

Пусть {{c3::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} Тогда в контексте $\mathbb{R}^n$ полагают

$$\text{{{c2::}}I_s\text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}\Big\{ \{i_k\}_{k\in[s]} \mid \{i_k\} \subset [n] \Big\}.\text{}}}$$

Note 85

ae1134e6b1a448cba9d4685cef8c9cdb

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ i \in I_s$. Тогда

$$\text{{{c2::}}\partial_i f(a)\text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}(a).\text{}}}$$

Note 86

d808baf356294ea7a0300e5a4402d4ec

Пусть $h \in \mathbb{R}^n,\ i \in I_s$. Тогда

$$\text{{{c2::}}h_i\text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}h_{i_1} \cdots h_{i_s}.\text{}}}$$

Note 87

f96bce47b70048669ed978eb870ce0df

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a,}} {{c4::$h \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}d_a^s f(h)\text{}}} = \text{{{c1::}}\sum_{i\in I_s} \partial_i f(a) h_i.\text{}}}$$

(в терминах I_s)

Note 88

31de20b20a4f49e1bcc0998f098e2b0c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 2 раза дифференцируемо в точке $a,\ h \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\text{{{c2::}}d_a^2 f(h)\text{}}} = \text{{{c1::}}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j.\text{}}}$$