Интуитивная теория множеств

Note 1

6c0ed6eb23d8405e911650386a84b770

Под {{c2::множеством}} понимается {{c1::некоторая, вполне определённая совокупность объектов.}}

Note 2

5f9814dbb38246348e00ffce1554e94a

Два основных способа задания множеств.

> Перечисление, характеристическое правило.

Note 3

325300814df34c129e29e55cd92829be

{{c2::Пустое множество}} есть {{c1::множество, которое не содержит элементов.}}

Note 4

f4cb071a174b4cd29c7ac0c7cd405265

{{c2::Пустое}} множество обозначается {{c1::$\emptyset$ или $\{\}$.}}

Note 5

ee3c092ea6f8412982372151ed6a3ef8

Пусть A — множество. {{c1::Само множество A и пустое множество}} называют {{c2::несобственными подмножествами}} множества A.

Note 6

d2d19259b6054a569cee5d5a0b24b0fe

Пусть A — множество. {{c1::Все подмножества A, кроме $\emptyset$ и A, }} называют {{c2::собственными подмножествами}} множества A

Note 7

02ebf0e734664103a97df0f5c597b8c7

Пусть A — множество. {{c2::Множество всех подмножеств множества A}} называется {{c1::булеаном}} множества A.

Note 8

ac2c9531b8ad48eabb9e76bac3fdffaa

Пусть A — множество. {{c2::Булеан}} множества A обозначается {{c1::$\mathcal{P}(A)$.}}

Note 9

2355b9e8f18a44148a0a3fd9f08c2034

{{c2::Универсальное множество}} есть {{c1::множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.}}

Note 10

446b3cd12ece46568e02af4ed65f3155

{{c2::Универсальное}} множество обычно обозначается {{c1::U или I.}}

Note 11

6b9f3c8671f2472e9e3b9a20aeb66aa5

Пусть A и B — множества. Для удобства часто используется сокращение

$$\{\{c2::AB\}\} \coloneqq \{\{c1::A \cap B.\}\}$$

Note 12

dc6fc558021f401696123dddc6c61abe

Пусть A и B — множества. {{c2::Симметрической разностью}} множеств A и B называется множество {{c1::

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

}}

Note 13

1c0cfd677111482c8d16fb1c43f9f802

Пусть A и B — множества. {{c2::Симметрическая разность}} множеств A и B обозначается {{c1::$A \triangle B$.}}

Note 14

658fb28e676a412082702daf0103e08e

Пусть A — множество. {{c2::Дополнение A}} обозначается {{c1::$\overline{A}$.
}}

Note 15

13a0dc7af20b45a4b8d8785debbb106a

Три первых свойства свойства операций объединения и пересечения множеств.

- Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Note 16

0ab39012eaa94abcb901e5c26354d65b

Пусть A — множество.

$$A \cap A = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 17

99349135847f4ab7a28f76b06715594e

Пусть A — множество.

$$A \cup A = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 18

02876f67e1514f6d92d1e32ce2a5673f

Пусть A — множество.

$$A \cup \overline{A} = \{\{c1::U.\}\}$$

Note 19

3303d884a57c4c979ab67f664325626a

Пусть A — множество.

$$A \cap \overline{A} = \{\{c1::\emptyset.\}\}$$

Note 20

c6b6114579204c8e99c5bfbc80ac53b9

Пусть A — множество.

$$A \cup \emptyset = \{\{c1::A.\}\}$$

Note 21

35fbc385403041a7a92f1a9980d5643f

Пусть A — множество.

$$A \cap \emptyset = \text{\{\{c1::}\emptyset.\text{\}\}}$$

Note 22

bf06afa6211c4b10bd2ecffa833b05a2

Пусть A — множество.

$$A \cup U = \text{\{\{c1::}U.\text{\}\}}$$

Note 23

b5e4ab6a90eb4de38aa91aa27c7c4847

Пусть A — множество.

$$A \cap U = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

Note 24

4e1167b5fa7748e68b1a4b9a80eaacb3

Пусть A и B — множества.

$$A\text{\{\{c2::} \cup \text{\}\}}(A\text{\{\{c3::} \cap \text{\}\}}B) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c4::Закон поглощения}}»

Note 25

478752160fb94508a605ed54a8601340

Пусть A и B — множества.

$$A\text{\{\{c2::} \cap \text{\}\}}(A\text{\{\{c3::} \cup \text{\}\}}B) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c4::Закон поглощения}}»

Note 26

84569bc3ab574cb78e9bbc9f21dc6bd6

Пусть A и B — множества.

$$A \cap (B \cup \overline{A}) = \text{\{\{c1::}A \cap B.\text{\}\}}$$

Note 27

8c46cf622a9840ba818604b1ddcbd74f

Пусть A и B — множества.

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = \text{\{\{c1::}A \cup B.\text{\}\}}$$

Note 28

f391250023de4aefa419991a4de9c8ab

Пусть A и B — множества.

$$(A \cup B)\text{\{\{c2::}\cap\text{\}\}}(A \cup \overline{B}) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c3::Закон расщепления}}»

Note 29

29ec5d118d8849bea46146efcbbc4473

Пусть A и B — множества.

$$(A \cap B)\text{\{\{c2::}\cup\text{\}\}}(A \cap \overline{B}) = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

«{{c3::Закон расщепления}}»

Note 30

cfe43c6f8ac74a43a3f82ea5e01fee7d

Пусть A — множество.

$$\overline{\overline{A}} = \text{\{\{c1::}A.\text{\}\}}$$

Note 31

edcde29726c04401a88af2ef23f3c264

Пусть A и B — множества.

$$A \setminus B = \text{\{\{c1::}A \cap \overline{B}.\text{\}\}}$$

Note 32

aed19cd8fa0d4ee3abf314b502af697d

Пусть A, B и X — множества.

$$\text{\{\{c2::}X \cup A \subseteq B\text{\}\}\{\{c3::} \iff \text{\}\}\{\{c1::}X \subseteq B \text{ и } A \subseteq B.\text{\}\}}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 33

ec3c6b3684844799a206353c8668876c

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2::A \subseteq X \cap B\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1::A \subseteq X \text{ и } A \subseteq B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 34

5f70eba8ee804221a8e31f858c0b43ec

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2::X \cap A \subseteq B\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1::X \subseteq \overline{A} \cup B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 35

72ac0b5d9c1746c79264bb9bd3a0b5f2

Пусть A, B и X — множества.

$$\{\{c2::A \subseteq X \cup B\}\}\{\{c3:: \iff \}\}\{\{c1::A \cap \overline{B} \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 36

9d92e00aafb44695841b52ab137664da

Пусть A, B, C, D и X — множества.

$$\begin{cases} A \subseteq X \subseteq B \\ C \subseteq X \subseteq D \end{cases} \iff \{\{c2::A \cup C\}\} \subseteq X \subseteq \{\{c1::B \cap D.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 37

ee9afcd63b43416d954d357d1dc689bb

В чём основная идея общего алгоритма для решения систем уравнений со множествами?

> Привести систему к виду $AX \cup B\overline{X} = \emptyset$, где A и B не зависят от X.

Note 38

f443d4e12a8745178ba97fdf0f1d8772

Пусть A и B — множества.

$$\{\{c3::A = B\}\}\{\{c4::\iff\}\}\{\{c1::A \triangle B\}\} = \{\{c2::\emptyset.\}\}$$

Note 39

06c3d3d8c5614af3b760a31c9b94fdc8

Пусть A и B — множества.

$$A \cup B = \emptyset\{\{c2::\iff\}\}\{\{c1::A = \emptyset \text{ и } B = \emptyset.\}\}$$

Note 40

73259212f85a4411b131299cc49d90dc

Пусть A и X — множества.

$$AX = \emptyset \iff \{\{c1::X \subseteq \overline{A}.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 41

c02302f80f0143d0bb7cdc18b8929288

Пусть B и X — множества.

$$B\overline{X} = \emptyset \iff \{\{c1::B \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно X)

Note 42

96e46cd4122448b3a6c8a8543d793a05

Пусть A и B — множества. При каком условии система

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

имеет решение?

$B \subseteq \overline{A}$.

Note 43

5e8c77b24b74411e9c9d6769ee278443

Пусть A и B — множества. Каково решение системы

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

$$B \subseteq X \subseteq \overline{A}.$$

Note 44

f1c5541c7c884dba936d4374ff51af88

Пусть A и B — множества. Как в уравнении $AX \cup B\overline{X} \cup C = \emptyset$ избавиться от «свободного» множества C?

$C = \emptyset$ — условие совместности системы.

Note 45

86475fdea01944fba56365048d57b02d

Пусть A и B — множества.

$(A \times B) \cap (B \times A) =$ {{c2::$\emptyset$}} {{c3:: $\iff$ }} {{c1::$A \cap B = \emptyset$.}}

Note 46

8ca45754929648bda3ca5496c7cba70f

Операция {{c3::декартового произведения}} {{c2::дистрибутивна}} относительно {{c1::операций $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\triangle$.}}

Note 47

ad330727e2cb4c27970e8cb8fdcdeb23

Пусть A, B и C — множества. Равны ли множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$?

Их отождествляют и считают равными.

Note 48

06a0896de5284f44bac5ddff2170cbb1

Пусть A и B — множества. Для {{c2::конечных}} множеств,

$|A \times B| =$ {{c1:: $|A| \cdot |B|$.}}

Бинарные отношения

Note 1

cfc293ce41644e75b3df5d21a2bf036d

Пусть A и B — множества. {{c2::Бинарным отношением}} на множествах A и B называется {{c1::некоторое подмножество $A \times B$.}}

Note 2

3ba559fe73cf4c90b5b919ce1a45881a

Четыре способа задания бинарных отношений.

> Перечисление, правило, матрица, граф.

Note 3

c0ee3ac94a454d748e625d9e8c854763

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$aRb \overset{\text{def}}{\iff} \text{\{\{c1::}(a, b) \in R.\text{\}\}}$$

Note 4

cef6486539a64268a1827f863aa7b9e1

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Обратным отношением к R}} называется {{c1::множество

$$\{(b, a) \mid aRb\}.$$

}}

Note 5

5e2c602b70a3473684a8ea79d93c7d68

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Обратное отношение к R}} обозначается {{c1::R^{-1}.}}

Note 6

d6e34168370e44feafa7891c93b2df04

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда

$$R^{-1} \subseteq \text{\{\{c1::}B \times A\text{\}\}}.$$

Note 7

86c9a04a7ac14724b416780fec688449

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение.

$$(R^{-1})^{-1} = \text{\{\{c1::}R.\text{\}\}}$$

Note 8

e91e90545919488bb2c2ebe373b9e615

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Областью определения R}} называется {{c1::множество

$$\{x \mid \exists y : xRy\}.$$

}}

Note 9

08e952c62da84566a99743eb4c6c48a5

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Область определения R}} обозначается {{c1::$D(R)$,}} {{c1::δ_R}} или {{c1::$\operatorname{dom} R$.}}

Note 10

13e35bd817d9438690104754dc4d016d

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Областью значений R}} называется {{c1::множество

$$\{y \mid \exists x : xRy\}.$$

}}

Note 11

051cc32e89b94beebd49875c952f6b5b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. {{c2::Область значений R}} обозначается {{c1::$E(R)$,}} {{c1::ρ_R}} или {{c1::$\operatorname{im} R$.}}

Note 12

c0426f6bec33477e9bc759610c4d426b

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. {{c2::Композицией R и S}} называется {{c1::множество

$$\{(a, c) \mid \exists b : aRb \text{ и } bSc\}.$$

}}

Note 13

41418613a7934da4ab810abfcdf24e1a

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения. {{c2:: композиция R и S}} обозначается {{c1::

$$R \circ S.$$

}}

Note 14

78bbe389ea094b0aad40c370c5092937

Является ли операция композиции бинарных отношений коммутативной?

> Нет.

Note 15

63f83037312e4f29a81de945fb387d06

Является ли операция композиции бинарных отношений ассоциативной?

> Да.

Note 16

1530beb1e1c24540a8be6f534775cca0

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — бинарные отношения.

$$(R \circ S)^{-1} = \{\{c1::S^{-1} \circ R^{-1}.\}\}$$

Note 17

10fae1eae25a48a2998a9be7d6af2e4d

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}}. Отношение R называется {{c2::несимметричным,}} если {{c1::оно не симметрично, не асимметрично и не антисимметрично.}}

Note 18

8e02e778a9a5426fa89340cd47a6a0c5

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} — бинарное отношение. Отношение R называется {{c2::интранзитивным,}} если {{c1::

$$aRb \text{ и } bRc \implies \overline{aRc}.$$

}}

Note 19

fdbc65b9ca3c4a5c8c62ece25b744e92

Пусть $R \subseteq$ {{c3::$A \times A$}} — бинарное отношение. Отношение R называется {{c2::нетранзитивным,}} если {{c1::оно не транзитивно и не интранзитивно.}}

Note 20

f3fcca348ef844da9d3cf01b1e27fe1f

Матрица A называется {{c2::бинарной,}} если {{c1::все её элементы принадлежат множеству $\{0, 1\}$.}}

Note 21

25d02bbd94644780a0346254f22a07df

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::A и B конечны.}} {{c2::Матрицей отношения R}} называется {{c1::бинарная матрица

$$\left(a_i R b_j\right) \sim |A| \times |B| \,.$$

}}

Note 22

ce9cf9f0367d40f9bbdd914eb95eb396

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, A и B конечны. {{c2::Матрица отношения R}} обозначается {{c1::$\|R\|$.}}

Note 23

1f23045998c647aca7a97bcf2a5b5d31

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::$x \in A$.}} {{c1::Множество $\{b \mid xRb\}$}} называется {{c2::образом элемента x при отношении R.}}

Note 24

65b799e6a5bc4b01bff56d2146031199

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in A$. {{c2::Образ элемента x при отношении R}} обозначается {{c1::$R(x)$.}}

Note 25

477523df314842d1ad7c5a4d978f2f7a

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c3::$x \in B$.}} {{c1::Множество $\{a \mid aRx\}$}} называется {{c2::прообразом элемента x при отношении R.}}

Note 26

5150bf45802b4bad925b14f51a0d2f24

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, $x \in B$. {{c2::Прообраз элемента x при отношении R}} обозначается {{c1::$R^{-1}(x)$.
}}

Note 27

3348d69b0cf149a8a70f5ec94b05b306

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c2::$X \subseteq A$.}}

$$\{\{c3::R(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R(x).\}\}$$

Note 28

5c26a7f17db242d7b8db989512093cc6

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, {{c2::$X \subseteq B$.}}

$$\{\{c3::R^{-1}(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R^{-1}(x).\}\}$$

Note 29

5b5ba1073a2e479f8b8eca3f6c2c7329

Пусть A множество. {{c1::Отношение $\{(x, x) \mid x \in A\}$}} называется {{c2::тождественным отношением на A.}}

Note 30

c1e1caa30e724485b938627008bc28d0

Пусть A множество. {{c2::Тождественное отношение на A}} обозначается {{c1::E.}}

Note 31

1dc3c3c6dff84c6f8ba496ed57840291

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::рефлексивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$E \subseteq R.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 32

ebabe4fca55b4c1c89734c5895e06ff8

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::анти-рефлексивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap E = \emptyset.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 33

0b173912f3f54d539053ec72781173bf

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::симметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R = R^{-1}.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 34

1d0d52561f0b48f8a96ed987369af728

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::антисимметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap R^{-1} \subseteq E.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 35

92c95593c51a4ac08d44f6be1cf69e5e

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::асимметрично}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \cap R^{-1} = \emptyset.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 36

3fb92e0a21764e979cf2dce095e95aea

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::транзитивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$R \circ R \subseteq R.$$

}}

«В терминах множеств»

Note 37

045dab85eeaa4728b61896649dc1ba75

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\{\{c2::A \leqslant B\}\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1::a_{ij} \leqslant b_{ij} \quad \forall i, j.\}\}$$

Note 38

3b1e7f3609054643ae820caaeae6db2a

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда

$$\{\{c2::A < B\}\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1::A \leqslant B \text{ и } A \neq B.\}\}$$

Note 39

cfdc6aac0b1d4a87b2bec698ca44ce30

Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Матрицы A и B называют {{c2::несравнимыми,}} если {{c1::не выполняется ни $A \leqslant B$, ни $B \leqslant A$.}}

Note 40

303fa2bd38f446e59e6690ebc8c9c824

Бинарную операцию {{c2::«или»}} так же называют логистическим {{c1::сложением.}}

Note 41

46107ba23b0a4fcdaaa341d70b37861c

Бинарную операцию {{c2::«и»}} так же называют логистическим {{c1::умножением.}}

Note 42

1c75356f6fe44393ae1e2c195bed3c1e

Пусть $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$. Тогда

{{c2:: $\|R \circ S\|$ }} $=$ {{c1:: $\|R\| \cdot \|S\|$ (с логистическим сложением).}}

Note 43

1b250fddc61e44539e477e7d17458d9b

Пусть $R \subseteq A \times B$ — бинарное отношение. Тогда R {{c2::транзитивно}} тогда и только тогда, когда {{c1::

$$\|R\|^2 \leqslant \|R\| \quad \text{(с логистическим сложением).}$$

}}

«В терминах матриц»

Note 44

bb1c4dba55ad47adbacfd250e1f39101

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. {{c2::Множество классов эквивалентности R}} обозначается {{c1::$[A]_R$.
}}

Note 45

c54eb7123d974c8aba9972163019b4ac

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности, $a \in A$. {{c2::
Класс эквивалентности, порождённый a,}} обозначается {{c1::
$[a]$.}}

Note 46

b21c1b2e3c504807a89717a4205b3fdf

Пусть A — множество. {{c2::Разбиение множества A}} обозначается {{c1::$\langle A\rangle$.}}