Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2:: Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1:: многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a. }}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1:: он единственен. }}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p-q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \xrightarrow[x\to a]{} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2:: Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a }} обозначается {{c1:: $T_{a,n}f$. }}

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«{{c3:: Формула Тейлора для многочленов }}»

Пусть p — {{c2:: многочлен степени не более n. }} Тогда {{c1::

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

}}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)\big|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{{{c1::}} } f(a). \text{ }}}$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left((x-a)^k\right)^{(n)}\Bigg|_{x=a} = \text{{{c1::}} } \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} \text{ }}}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

> Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3:: Свойство n раз дифференцируемой функции }}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1:: $f(x) = o((x-a)^n), x \to a$. }}

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$\{\{c1:: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|. \}\}$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Заметить, что из индукционного предположения
>
> $$f'(x) = o((x-a)^n)$$
>
> и расписать это равенство в терминах ε, δ.

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

> По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cdbb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Выразить $f(x) = f'(c)\cdot(x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon|x-a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon|x-a|^n$ в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> $$|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon|c-a|^n < \varepsilon|x-a|^n$$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N},$ {{c2:: $f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1:: $o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$ }}

Note 19
99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3:: **Формула Тейлора-Пеано** }}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и f n раз дифференцируема в точке a. }} Тогда {{c1::

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1
3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:
>
> $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2
6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leqslant n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

> $$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3
72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leqslant n \quad (f(x) - p(x))^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\text{\{\{c2::}\ \Delta_{a,b}\ \text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ \begin{cases} [a,b], & a \leqslant b, \\ [b,a], & a \geqslant b. \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\text{\{\{c2::}\ \widetilde{\Delta}_{a,b}\ \text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ \begin{cases} (a,b), & a \leqslant b, \\ (b,a), & a \geqslant b. \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\text{\{\{c2::}\ R_{a,n}f\ \text{\}\}} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\ f - T_{a,n}f\ \text{\}\}}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

«{{c3:: **Формула Тейлора-Лагранжа** }}»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, $\quad$ {{c2:: $f \in C^n(\Delta_{a,x})$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$. }} Тогда {{c1:: найдется $c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}$, для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

}}

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна {{c1:: теореме Лагранжа }}.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> $$t \in \widetilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

> К $F(t)$ и $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$.

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

К границам отрезка $\Delta_{a,x}$.

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2:: e^x \}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \}\}$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2:: \sin x \}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right). \}\}$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2:: \cos x \}\} = \{\{c1:: \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \}\}$$

Note 19

90ff22c33f67493fae3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\{\{c2:: \ln(1+x) \}\} = \{\{c1:: \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \}\}$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

{{c3:: Обобщённый биномиальный коэффициент }} задаётся формулой

$$C_\alpha^k = \text{\{\{c1::}\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\ \text{\}\}}, \quad \alpha \in \text{\{\{c2::}\ \mathbb{R}\ \text{\}\}}.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \to 0$

$$\text{\{\{c2::}\ (1+x)^\alpha\ \text{\}\}} = \text{\{\{c1::}\ \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)\ .\ \text{\}\}}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют {{c1:: биномиальным разложением }}.

Note 23

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть {{c3:: функция f удовлетворяет условиям для разложения по формуле Тейлора-Лагранжа. }} Тогда если {{c2::

$$\forall t \in \widetilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M,$$

}} то {{c1::

$$|R_{a,n} f(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

}}