

Эквивалентность и порядок

Note 1

f30a93a82cb7436dbf01a4f27b739d36

Каким одним требованием можно заменить симметричность и транзитивность в определении отношения эквивалентности?

■ Евклидовость.

Note 2

d8936dde76084fbfaa621700f57c7cd4

Пусть $R \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности R называется фактормножеством множества A по отношению R .

Note 3

e212c805b47c40c48f35bdbd5130db2b

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется отношением частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Note 4

2a3a6e89d50d41068b22bfd1c595b39a

Отношение частичного порядка обычно обозначается символом \leq .

Note 5

90faa1ffef764c7d808d6757d97dfa4b

Множество A с заданным на нём отношением частичного порядка называется частично упорядоченным множеством.

Note 6

4157aa1725c244a58f3e32a92a0937bb

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что x и y сравнимы, если $x \leq y$ или $y \leq x$.

Note 7

e75ca87d267f4673a53c15a0e7adccc

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется отношением линейного порядка, если R — отношение частичного порядка и любые $x, y \in A$ сравнимы.

Note 8

79eba4d41c8b4aafa75c4a7c56268adb

Множество A с $\{\{c2::\text{заданным на нём отношением линейного порядка}\}$ называется $\{\{c1::\text{линейно упорядоченным множеством.}\}$

Note 9

e914e0e523ee44139c021af45c63a712

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Говорят, что $\{\{c2::x < y,\}$ если $\{\{c1::x \leq y \text{ и } x \neq y,\}$

Note 10

c264501d4458400e8b0073eac66b95fe

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение $\{\{c2::<\}$ называют отношением $\{\{c1::\text{строгого}\}$ порядка.

Note 11

ec44ba694d2541deaae260221aaafdc5

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Во избежание путаницы, отношение $\{\{c2::\leq\}$ называют отношением $\{\{c1::\text{нестрого}\}$ порядка.

Note 12

962a3744a3cc4153bd9317aab2cb46cb

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак $<$ как $\{\{c1::\text{«меньше»},\}$

Note 13

850b05ff29334d869b6a9c7e96cef9a9

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Мы читаем знак \leq как $\{\{c1::\text{«меньше или равно»},\}$

Note 14

0e5d3d3ef97541309f99f132d7d20073

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда $\{\{c2::x \leq y\} \{\{c3::\text{тогда и только тогда, когда}\} \{\{c1::x < y\} \text{ или } \{\{c1::x = y\}$

Note 15

9b75255301e143ba94b347847852b33f

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ рефлексивным?

■ Нет.

Note 16

fcc7c32a4ca7455dbcd3260a478ecd97

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ антирефлексивным?

■ Да.

Note 17

2d5bf110950f42b4bc343f143b82dfc8

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ транзитивным?

■ Да.

Note 18

378780d3b9d74367a71bdf0fb3f67e9f

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество. Является ли отношение $<$ асимметричным?

■ Да.

Note 19

f4e2e2fe9c8140a6b8fcd896dd5da35

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $\{\{c2: x \leq y \leq x, \}\}$ то $\{\{c1: x = y, \}\}$

Note 20

1ca369e310d247782f82089ab512891

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Тогда если $x \leq y \leq x$, то $x = y$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Антисимметричность.

Note 21

0af7ee8e9a5c4ad88db6ea371bee9527

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $x, y \in A$. Почему не стоит читать $x \leq y$ как « x не больше y »?

■ $\overline{x \geq y} \not\Rightarrow x \leq y$, если порядок не линеен.

Note 22

414d948920404634bec1fec01bd9b0b2

Бинарное отношение $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$ называется $\{\{c2::\text{называется отношением предпорядка},\}\}$ если $\{\{c1::\text{оно рефлексивно и транзитивно.}\}\}$

Note 23

5a0d3dae2151442795c045fdb2e1ba7f

Пусть $\leq - \{\{c3::\text{предпорядок}\}\}$ на множестве A . Тогда \leq задаёт естественное $\{\{c2::\text{отношение частичного порядка}\}\}$ $\{\{c1::\text{на фактор множестве } A \text{ по отношению}\}\}$

$$x \leq y \text{ и } y \leq x.$$

$\}}}$

Note 24

ac3052b941bd4ae981f8d3559789c7e0

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $\{\{c3::B \subseteq A.\}\}$ $\{\{c2::\text{Частичный порядок } (\leq) \cap B^2\}\}$ называется $\{\{c1::\text{частичным порядком на } B, \text{ индуцированным из } A.\}\}$

Note 25

01c0ab122f3d4940ab98f766e6b357c2

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. $\{\{c2::\text{Частичный порядок на } B, \text{ индуцированный из } A,\}\}$ обозначается $\{\{c1::\leq_B.\}\}$

Note 26

2a1949206b6843f8859d96feb5f3d640

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество, $B \subseteq A$. Если $\{\{c2::\leq \text{ линеен},\}\}$ то $\{\{c1::\text{и } \leq_B \text{ линеен.}\}\}$

Note 27

76f003723d594be4bb2f9df3ea565469

Пусть X и Y — два множества. Что есть множество $X + Y$?

■ Объединение непересекающихся копий X и Y .

Note 28

c18350dfc5244bddb59d2f27a28a33ae

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y пересекаются, то как они разделяются в $X + Y$?

■ Элементы из Y записываются с чертой (как вариант).

Note 29

b9a67a4ebd2542d6b6cf86b0d4505d81

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как задаётся порядок на $X + Y$?

■ Внутри X и Y порядок обычный и $x \leq \bar{y}$.

Note 30

caa0e9e0bd594f80aff6ab6d1711059e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. При каком условии порядок на $X + Y$ будет линейным?

■ Только если порядки на X и Y линейны.

Note 31

2f6406e74c4443c191caa1532527294f

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определяются покомпонентное сравнение на $X \times Y$?

■ Первая координаты \leq_X и вторые \leq_Y .

Note 32

fec1ac2eb92d496e9677d8011742333e

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. В чём недостаток покомпонентного сравнения на $X \times Y$?

■ Он не линейен.

Note 33

f80cf291316d430489b6ed3f5ea1f116

Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества. Как определяются порядок на $X \times Y$?

■ Аналогично лексикографическому порядку.

Note 34

a3950be00a93447ba48cc93e24fc1436

Сколько различных линейных порядков на множестве из n элементов?

■ $n!$

Note 35

5dc17edbd7424921a6801b645ec91847

Всякий ли частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного?

■ Да.

Note 36

8ee88fb845d94611a7bad34e78b447b0

Всякий ли частичный порядок на бесконечном множестве можно продолжить до линейного?

■ Да.

Note 37

d5d18db2bf744c3f95cc4c390a2b63fa

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного. В чём ключевая идея доказательства?

■ По индукции выбирать минимальный элемент.

Note 38

53391ec9f26040328fc75be035ca15c7

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наибольшим?

■ Тот, что больше любого другого элемента.

Note 39

1fbc4c3d075344fb8889b64fc11d73cc

Какой элемент частично упорядоченного множества называется максимальным?

■ Тот, для которого не существует большего элемента.

Note 40

ba81375ada8245dc86f019d40cfc73b2

При каком условии понятия наибольшего и максимального элемента совпадают?

■ Если порядок линейен.

Note 41

df7279f7c5049dd82bb27f993c2a177

Сколько наибольших элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

■ Не более одного.

Note 42

dd861e24b4c246bc9769d4d9d8c1684a

Сколько максимальных элементов может существовать у произвольного частично упорядоченного множества?

■ Сколь угодно.

Note 43

fe2b7f694c644bfbbab346e18477d765

Какой элемент частично упорядоченного множества называется наименьшим?

■ Тот, что меньше любого другого элемента.

Note 44

f42b3c3570904de282e2a8bfe96a337a

Какой элемент частично упорядоченного множества называется минимальным?

■ Тот, для которого не существует меньшего элемента.

Note 45

0d235255b51b40e2970c6f0c00ee671e

Любые два различных максимальных элемента $\{\{c1: \text{не сравнимы.}\}\}$

Note 46

e6a3453de9ae404f80ca583e6ea036c5

Пусть X — частично упорядоченное множество и $\{\{c2: X \text{ конечно.}\}\}$ Для любого $x \in X$ найдётся максимальный элемент $\{\{c1: \geq x.\}\}$

Изоморфизмы

Note 1

110d1d04fa2246daa69b785b7fd393fe

Пусть A, B — частично упорядоченные множества, $f : A \rightarrow B$.
Отображение f называется $\{\{c2: \text{изоморфизмом},\}$ если $\{\{c1: \text{оно}$
биективно и сохраняет порядок.}}

Note 2

13d514bd40fc4478a6ed3a4ab34ff195

Пусть A, B — частично упорядоченные множества. Множества A и B называют $\{\{c2: \text{изоморфными},\}$ если $\{\{c1: \text{существует}$
изоморфизм $f : A \rightarrow B.\}$

Note 3

007687446bf044fb8b2643fb03f6dcd9

Все частично упорядоченные множества разбиваются на
классы изоморфных, называемые $\{\{c1: \text{порядковыми типами.}$
 $\}$

Note 4

b680b5e72c204aad8c291c056457dc4d

$\{\{c1: \text{Конечные линейно}$ упорядоченные множества $\{\{c2: \text{из оди-}$
накового числа элементов} $\}\}$ $\{\{c3: \text{изоморфны.}\}$

Note 5

5083f28c1c664d26a48aba53a9beae8c

Конечные линейно упорядоченные множества из одинакового числа элементов изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

Построить изоморфизм в $\{1, 2, \dots, n\}$, начиная с наименьшего элемента.

Note 6

743cdca62182497686915562c74cf65d

Вещественная последовательность называется $\{\{c2: \text{финитной},$
 $\}$ если $\{\{c1: \text{все её члены, кроме конечного числа, равны } 0.\}$

Note 7

fea26e4dd50b4a68ba7ff6f90da06332b

Множестве всех финитных последовательностей в $\{\{c4::\mathbb{Z}_+\}\}$ с $\{\{c3::\text{заданным на нём покомпонентным порядком}\}\}$ изоморфно $\{\{c2::\mathbb{N}\}\}$ с отношением $\{\{c1::\text{«быть делителем»}\}\}$

Note 8

f5d322f891eb4f7797645163e5f45497

Как изоморфизм частично упорядоченных множеств действует на наибольший элемент?

■ Переводит его в наибольший элемент.

Note 9

2793f2d5da5d4b4397c20d874b1fc14e

Пусть A — частично упорядоченное множество. $\{\{c2::\text{Изоморфизм } A \rightarrow A\}\}$ называется $\{\{c1::\text{автоморфизмом } A\}\}$

Note 10

5995ccccf4e2848ecbf953a18d27ff7cf

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества \mathbb{N} $\{\{c1::\text{является тождественным отображением}\}\}$

Note 11

9a1b8384b96b4c1b80082eaa74d708ad

Любой автоморфизм частично упорядоченного множества \mathbb{N} является тождественным отображением. В чём ключевая идея доказательства?

■ По индукции $f(n) = n$.

Note 12

9ec39c6ae7d94216b153421659205a07

Пусть A — k -элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда

$$|\text{Aut } \mathcal{P}(A)| = \{\{c1::k!\}\}$$

Note 13

b8bb9cd707674a4a8df6e43759264a4e

Пусть A — k -элементное множество и $\mathcal{P}(A)$ упорядоченно по включению. Тогда $|\text{Aut } \mathcal{P}(A)| = k!$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Автоморфизм определяется его действием на одноэлементных множествах.

Note 14

0c815486f4924485acded03c5bfcbbdd

Пусть \mathbb{N} упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда

$$|\text{Aut } \mathbb{N}| = |\{c1 \vdash c.\}|$$

Note 15

3e9541105db840b299859a32c0f7ceb9

Пусть \mathbb{N} упорядоченно отношением «быть делителем». Тогда $|\text{Aut } \mathbb{N}| = c$. В чём ключевая идея доказательства?

■ Можно “перемешать” простые числа.

Note 16

c0d051d05a0b4228902a6d0ea3506209

Изоморфен ли $([0, 1], \leq)$ множеству (\mathbb{R}, \leq) ?

■ Нет.

Note 17

6e4e63c5d18f46dd9e164c78f193c40e

Почему $([0, 1], \leq)$ не изоморфен (\mathbb{R}, \leq) ?

■ В \mathbb{R} нет наибольшего элемента.

Note 18

9a8f1a6138c949ba91eee96998f166b7

Изоморфно ли (\mathbb{Z}, \leq) множеству (\mathbb{Q}, \leq) ?

■ Нет.

Note 19

87d5dfed83174bec88c290c54882ec3a

Почему (\mathbb{Z}, \leq) не изоморфно (\mathbb{Q}, \leq) ?

■ \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

Note 20

38a9f34456fe49d897d1266a579abb34

Изоморфны ли упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$?

■ Да.

Note 21

349e19c69cbf4e538962f2b5647c9ec8

Упорядоченные множества рациональных точек интервалов $(0, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$ изоморфны. В чём ключевая идея доказательства?

■ Выбрать строго возрастающие последовательности, сходящиеся к 1 и к $\sqrt{2}$, и построить кусочно-линейную функцию.