

Лекция 07.02.22

Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть W — линейное пространство, $V \subset W$. Тогда V называется линейным подпространством, если

1. $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$,
2. $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.

}}

Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « V есть линейное подпространство в W » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда V — тоже линейное пространство.

Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в \mathbb{R}^n ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть $W = \mathbb{R}^n$, $A \sim m \times n$. Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

■ Да, поскольку $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$.

Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть $V \triangleleft \mathbb{R}^n$. Тогда всегда существует $A \in \mathbb{R}^{\{c2:m \times n\}}$ такая, что $\{c1::$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$\}\}$

Note 7

dc727a8588c412db845188bf547fd9e

Пусть $W = \mathbb{R}^n, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in W$. Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в W ?

■ Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций a_1, a_2, \dots, a_n тоже является их линейной комбинацией.

Note 8

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

Note 9

9c714ab9fad4b457f993438ef25421061

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

■ Нет, не всегда.

Note 10

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\{\{c2: V_1 + V_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}$$

Note 11

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}$$

Note 12

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

Note 13

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$ и e_1, e_2, \dots, e_k —
 $\{\{c2: \text{базис в } V.\}$ Тогда в W существует базис вида $\{\{c1:$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

Note 14

7e41e14368b94d50be88c6e5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

■ Дополнить базис в $V_1 \cap V_2$ до базисов в V_1 и V_2 соответственно и построить на их основе базис в $V_1 + V_2$.

Пусть

- e_1, e_2, \dots, e_k — базис в $V_1 \cap V_2$,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p$ — базис в V_1 ,
- $e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, \dots, g_q$ — базис в V_2 .

Как можно построить базис в $V_1 + V_2$?

■ $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ — базис в $V_1 + V_2$.

Семинар 09.02.22

Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве V . Тогда матрицей перехода от базиса e к базису e' называют матрицу C такую, что для любого $v \in V$, если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса e к базису e' обычно обозначают $C_{e \rightarrow e'}$.

Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу $C_{e \rightarrow e'}$?

Столбцы $C_{e \rightarrow e'}$ — это координаты векторов e'_1, e'_2, \dots, e'_n в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Лекция 14.02.22

Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть W — линейное пространство, $V_1, V_2 \triangleleft W$. Сумму $V_1 + V_2$ называют прямой суммой, если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств V_1 и V_2 обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть V_1 и V_2 — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$ — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
- Для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно.

Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого $a \in V_1 + V_2$ разложение a в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, единственно, то $V_1 + V_2$ — прямая сумма?

■ Показать, что если $a = v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$, то $v_1 = v_2 = 0$.

Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«Монотонность размерности подпространств»

Пусть W — линейное пространство, $V \triangleleft W$. Тогда

- $\dim V \leq \dim W$;
- $\dim V = \dim W \iff V = W$.

Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение $f : V \rightarrow W$ называется **линейным отображением**, если

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V.$

}}

Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор $f : V \rightarrow W$ называется **изоморфизмом линейных пространств** тогда и только тогда, когда f — биекция.

Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства V и W называются **изоморфными** тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если $f : V \rightarrow W$ — изоморфизм, то $f^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.

Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть V, W — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора f в паре базисов в V и W соответственно называют матрицу A , переводящую координаты любого вектора $v \in V$ в координаты вектора $f(v) \in W$ в соответствующих базисах.

Note 15

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор,

- e_1, e_2, \dots, e_n — базис в V ,
- $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ — базис в W .

Как в явном виде задать матрицу оператора f в этих базисах?

j -ый столбец — это координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$.

Note 16

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

Note 17

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где λ — координаты вектора из V в базисе e .

Note 18

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

Note 19

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

Лекция 21.02.22

Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисах e и \tilde{e} соответственно. Как преобразуется матрица A при замене базисов $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A — матрица оператора f в базисе e . Как преобразуется матрица A при замене базиса $e \rightarrow e'$?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть $f : V \rightarrow V$ — линейный оператор, A и A' — матрицы оператора f в двух базисах e и e' соответственно. Тогда $\det A' = \det A$.

Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора $f : V \rightarrow V$ называется определитель матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора $f : V \rightarrow V$ называется ранг матрицы оператора f в произвольном базисе.

Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы A обозначается $\text{tr } A$.

Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$. Тогда $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$.

Note 8

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$ называется $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

Note 9

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

Note 10

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

Note 11

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft V$?

Да, поскольку линейная комбинация нулей f — тоже нуль f .

Note 12

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\ker f \triangleleft W$?

Нет, $\ker f \triangleleft V$.

Note 13

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft W$?

Да, поскольку $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

Note 14

7b17eb03a5e640f8bdefa0aaa6656c3

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда $\operatorname{im} f \triangleleft V$?

Нет, $\operatorname{im} f \triangleleft W$.

Note 15

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть $f : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Как связаны размерности V , $\ker f$ и $\operatorname{im} f$?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

Note 16

8a962591377f49c1a6b297a1efc008e9

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} f.$$

Note 17

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть $f : W \rightarrow W$ — линейный оператор. Пространство $V \triangleleft W$ называется инвариантным относительно оператора f , если

$$f(V) \subset V.$$

}}

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора $f : W \rightarrow W$.

|

$\ker f, \operatorname{im} f$.