Лекция 09.11.22

Note 1

a60a9a5778ca41aaabad4a4a7a6c4faa

Какие есть основные виды дифференциальных уравнений?

Обыкновенные; в частных производных.

Note 2

5e9fddb7111e4705aa4a145bb98b111f

 ${\it (с. 2)}$ Обыкновенные дифференциальные уравнения — это ${\it (с. 1)}$ уравнения относительно функции одной переменной и её производных.

Note 3

304a53cb8187428aaba248e942576ea2

" $\{(c): Oбыкновенные дифференциальные уравнения<math>\}$ " сокращается как " $\{(c): OДУ.\}$ "

Note 4

27aba707c8db4ff0aaa02aa522cb353d

 $\{(ca.)$ Уравнения в частных производных — это $\{(ca.)$ уравнения относительно функции нескольких переменных и её частных производных.

Note 5

54188b1d277440558390f93807cf9e7e

 $\{(ca)$ Уравнения в частных производных $\{(ca)$ уравнениями математической физики. $\{(ca)$

Note 6

6ed94a06c0164651bcacf8ee9c9f96fb

" $\{|c|=$ Уравнения в частных производных $\|$ " сокращается как " $\{|c|=$ УрЧ Π . $\|$ "

Note 7

0fd7b116352242aba166bb75e3487f7e

«2 Порядком» дифференциального уравнения называется казывается к

Является ли

$$F(x,y) = 0, \ y = y(x)$$

дифференциальным уравнением?

Нет, потому что нет производных.

Note 9

f8ab33c8a60a4901a4c26ccff8a6fd1a

Множество $G\subset\mathbb{R}^n$ называется (селобластью,)) если (селоно открыто и связно.))

Note 10

1425377052ae4b228fc834d5b4f6318

ОДУ первого порядка называется (се разрешённым относительно производной,)) если оно имеет вид (са:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

 $_{\mathbb{R}}$ где $f-_{\mathbb{R}^{2}}$ функция на области в \mathbb{R}^{2} . $_{\mathbb{R}}$

Note 11

aa5c740235f848c79fb3bbc39d4a3160

Функция y называется (сетрешением ОДУ на множестве X,)) если (сетв любой точке X её подстановка её значений в ОДУ имеет смысл и приводит к верному равенству.))

Note 12

8515eff1b5844e0cba265de7445cf1a0

Пусть $y-\{\{c\}\}$ решение ОДУ. $\{\{c\}\}$ График $y_{\{\}}\}$ называется $\{\{c\}\}$ интегральной кривой этого уравнения. $\{c\}$

Note 13

01533944715c4477a02b8f21087f96d2

Сколько решений может иметь произвольное ОДУ?

Сколь угодно много.

В чём состоит задача Коши для ОДУ первого порядка?

Найти решение, отвечающее начальным условиям.

Note 15

94e8aha670fa45eah4fae8fee8d2356

Что есть "начальные условия" из формулировки задачи Коши для ОДУ первого порядка?

 $y(x_0) = y_0$ для фиксированных x_0, y_0 .

Note 16

0277eb8d5c00466ca6bb797bd58c8279

Как называются значения (x_0, y_0) в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

Начальные данные.

Note 17

1ae5b8ef39d14aab9d038ebe894b7b99

Какие значения могут принимать начальные данные в задаче Коши для ОДУ первого порядка?

Любые, для которых ОДУ имеет смысл.

Note 18

4ecfb902661d484682379f7f0b7b2567

На каком множестве нужно найти решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) ?

Интервал, включающий x_0 .

Note 19

c6f2ec8c4ae142118b3840ddb828a96b

Как называется теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

Note 20

623dc3931814e958fe21c89ae0b0c6e

Какое уравнение рассматривается в теореме Пеано?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.

Note 21

5abd317c6b0b4b02ab50a72f0ea7d792

При каком условии можно что-либо заключить из теоремы Пеано?

Функция, задающая разрешённое ОДУ, непрерывна на области.

Note 22

dfdb355bf4d84b1d89e76ebd9e215e4a

Что можно заключить из теоремы Пеано?

Для любой точки существует решение задачи Коши с этими начальными данными.

Note 23

3290d174cc33491e924cbd8ec7137a8a

Каков геометрический смысл теоремы Пеано?

Через любую точку области проходит интегральная кривая.

Note 24

59c04413608e4901a682dfb9a1d29161

Что называют точкой единственности для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
?

Точка, для которой любые два решения задачи Коши совпадают (в какой-то окрестности).

В каком именно смысле совпадают любые два решения соответствующей задачи Коши в определении точки единственности уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

Они равны на некоторой $V_{\delta}(x_0)$.

Note 26

c197734ceb654182bc3221591296e2f

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) .$$

Тогда если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то польобая точка области является точкой единственности.

Note 27

33930ae47c60424a9e1c3f6f5482f236

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . При каком условии задача Коши для $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ однозначно разрешима в любой точке?

f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны.

Note 28

785b85c103cb446090843629aba6f66

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют особым решением уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

Решение, любая точка графика которого не является точкой единственности (внутри интервала).

Note 29

37a7853a3e8d43aa9d89f5bb427f5ebc

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как называется решение уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, любая точка графика которого не является точкой единственности?

Особое решение.

Note 30

8c95e3912938472e90263540e560fb33

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют общим решением уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

Параметризованная совокупность решений, содержащая решение задачи Коши для любой точки области.

Note 31

94b869be37d9483ea16e55b821468d6a

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как задаётся общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$?

Отображение $\Phi(x,c)$, где c — параметр, x — переменная.

Note 32

845626784e214307bef975cf77f33ece

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют частным решением уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

Одно из решений, входящих в некоторое общее решение

Note 33

e4f00b810c5346e7883e4848222bac62

 $\{\{c2\}$ Векторное поле $\}$ — это $\{\{c1\}$ отображение из линейного пространства в себя. $\}$

Note 34

c910d42c89d94c0e911e1b327e5b0a3

Для каких ОДУ имеет смысл понятие поля направлений?

ОДУ первого порядка, разрешённое относительно про-изводной.

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называют полем направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$?

Векторное поле нормализованных векторов, задающих направления касательных к интегральным кривым.

Note 36

f47ec07174947169cc1a095d3b5dbd0

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Как строится визуальное представление поля направлений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$?

Через каждую точки сетки проводится соответствующе наклонённый отрезок.

Note 37

a9509cb3d319496ca4f8ce25b5b988b

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Гладкая кривая является пределинтегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ погда и только тогда, когдар пределений получений получений.

(в терминах поля направлений)

Note 38

1895f43f66e747cc9ce6e8a4dd317258

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Что называется изоклиной уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

Кривая, во всех точках которой значение поля направлений одинаково.

Note 39

efd8be00720a4e449757b00e4434d684

Пусть f — функция на области в \mathbb{R}^2 . Каким уравнением задаётся произвольная изоклина уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

f(x,y)=c для $c\in\mathbb{R}.$

Лекция 16.11.22

Note 1

84332aa7764648b3b6b73355b0fb7064

Пусть $\{G^{-1}: G - \text{ область в } \mathbb{R}^2.\}$ Тогда выражение вида

{{c2::}}
$$m(x,y) \cdot dx + n(x,y) \cdot dy = 0$$
 , }} где {{c3::}} $m,n:G o \mathbb{R}$, }}

называется $\{can OДУ первого порядка в симметричной форме.$

Note 2

0a8383be5d30458db9ab476e9ea34e84

Что называется решением ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение любого из порождённых ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 3

89d64566d77b4dc7b52af28eab7dae35

Какие два уравнения порождает ОДУ первого порядка в симметричной форме?

$$\frac{dy}{dx} = \cdots$$
 и $\frac{dx}{dy} = \cdots$

Note 4

0981a7837c7644328e3f6ccbd939ec02

Всегда ли ОДУ первого порядка в симметричной форме порождает два уравнения?

Нет.

Note 5

0bf3be66da26454f981de93a9f57fdb4

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0.$$

 $\{\{can}$ Точку, в которой и m, и n обращаются в $0, \|$ называют $\{\{can}$ особой точкой этого уравнения. $\|$

Как ставится задача Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Найти решение для любой из порождённых задач Коши для ОДУ, разрешённых относительно производной.

Note 7

0d205d054d3843c19a806774476762c0

Пусть дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0.$$

Что называется неособой точкой этого уравнения?

Точка, в которой либо m, либо n не обращается в 0.

Note 8

61ddfc362e5649ab9020c85dd47f4454

При каком условии ОДУ в симметричной форме гарантированно имеет решение задачи Коши?

Если точка не является особой и функции при dx и dy непрерывны.

Note 9

0ad4cca0576a409cbb3871385860853

Что можно сказать про ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0,$$

если m,n непрерывны?

Оно имеет решение задачи Коши для любой неособой точки.

Note 10

3d3a825102e94d268fceedc112aee02b

В чём основная идея доказательства теоремы о достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема Пеано для порождённого ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 11

84670525aec14b12ab1c60bc7c6cb90f

Какое есть "тонкое" место в доказательстве достаточного условия существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Применить теорему о стабилизации непрерывной функции для неравенства нулю в какой-то окрестности.

Note 12

e22e81451b75462bb23f42da429d082

Какое есть дополнение к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Если обе определяющие функции не обращаются в ноль, то решение "двойственно."

Note 13

c5937908 ff c3421 b88 d12 e29 cd18618 a

В каком смысле двойственно решение задачи Коши в дополнении к достаточному условию существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Обратная функция существует (на интервале) и является решением второй из порождённых задач Коши.

Note 14

c77c237173dd4909bef0d7fbb475945a

Пусть для $m,n\in C(G)$ дано ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0,$$

и $y=\varphi(x)$ — решение задачи Коши в т. (x_0,y_0) . Почему φ обратима (на интервале)?

 $\varphi' \neq 0$ и следствие из теоремы Дарбу о строгой монотонности

Note 15

1408fcbdb21643b29a526f5c9c698052

Что называется точкой единственности для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Точка, являющаяся точкой единственности для обеих из порождённых задач Коши.

Note 16

f037d477228b4d1a983be67a181f7fc6

Каково условие для единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Функции при dx и dy являются гладкими и не равны нулю в точке.

Note 17

b4d211a3083b4bfca552c183c7cd0ce8

Почему в теореме о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме мы требуем неравенство нулю функций при dx и dy?

Иначе какая-то из задач Коши не имеет смысла.

Note 18

91cb20330134439695809b01acd7909f

В каком смысле единственно решение задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме в теореме о единственность?

Точка является точкой единственности.

Note 19

c34ebe00830e4594b9f2df519066c9f8

В чём ключевая идея доказательства теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Теорема о единственности для ОДУ, разрешённого относительно производной.

Note 20

83eb2e7882ac49fd950bc3c5d734f886

Если (x_0,y_0) является точкой единственности для ОДУ первого порядка, то через неё проходит перединственная интегральная кривая.

Note 21

931e9e5942144396af4bc98f8d917c45

В каком смысле единственна интегральная кривая, проходящая через точку единственности для ОДУ первого порядка?

Любые две интегральные кривые совпадают на какой-то окрестности.

Note 22

67befaeaa43b4d1daf13c54d0f3c9a18

Чем в первую очередь является интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Гладкая функция на всей области.

Note 23

6cd34528c11649468f156e7160361bc4

Какому соотношению по определению должен удовлетворять интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0?$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ m & n \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Note 24

4e43bac3e13f49e890052b539cb99a0a

Интеграл u ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

называется ([c2:гладким,]) если ([c1::abla u
eq 0 на всей области.])

Каково основное свойство гладкого интеграла u ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Решение уравнения $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ есть решение задачи Коши в (x_0,y_0) .

Note 26

750fae6a0be8412885d8d65ccd8b532f

Пусть u — гладкий интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Для каких точек решение уравнения

$$u(x,y) = u(x_0, y_0)$$

есть решение задачи Коши в (x_0, y_0) ?

Для неособых.

Note 27

3ec100db172a42a4821a9c2a59df0cdc

В контексте ОДУ первого порядка в симметричной форме, для какого объекта u решение уравнения

$$u(x,y) = u(x_0, y_0)$$

гарантированно является решением задачи Коши в неособой точке (x_0, y_0) ?

Гладкий интеграл.

Note 28

2d035fe05f234a678fb45f0a77098ee9

В чём ключевая идея доказательства теоремы о представлении решения задачи Коши для ОДУ первого порядка в симметричной форме через его интеграл?

Теорема о неявной функции для $u(x,y) - u(x_0,y_0) = 0$.

Что называется общим интегралом ОДУ первого порядка в симметричной форме?

Выражение u(x,y)=c, где u — интеграл уравнения.

Note 30

lh9745c311764d9aa57c35f678ca0h4l

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Как называется выражение

$$u(x,y) = c$$
?

Общий интеграл.

Note 31

d24cae635b5149fca8646f3627b9bf90

Пусть u — интеграл ОДУ первого порядка в симметричной форме. Что можно сказать о произвольном решении y(x) этого ОДУ?

 $u(x,y(x))\equiv const$ на всём интервале.

Note 32

37ad7fd23ha04h2h8hf1e5946420d71

Каким свойством должен должен обладать интеграл u ОДУ первого порядка в симметричной форме, чтобы для любого решения y(x) было верно

$$u(x, y(x)) \equiv const?$$

Никаким.

Лекция 23.11.22

Note 1

3ae25bc9f84c408eb1dfcf3dc3b35ed1

Какое выражение называется ОДУ с разделёнными переменными?

$$m(x)dx + n(y)dy = 0.$$

Note 2

d625dac9c8dd43e0a5fa91bdeec1f8da

На каких множествах определены функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

Некоторые два интервала.

Note 3

ec328e8cd19d4c57a27c32e263138ce7

На какой области рассматриваются ОДУ с разделёнными переменными?

Декартово произведение областей определения функций-коэффициентов.

Note 4

5cac08cbed25499493dc1b18d0df3ce1

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделёнными переменными?

Непрерывными.

Note 5

afa181edb7c84bdea0ac73d5a39b338e

Чем примечательны ОДУ с разделёнными переменными?

У него есть общий интеграл в известной форме.

Как выражается интеграл u(x,y) ОДУ с разделёнными переменными

$$m(x)dx + n(y)dy = 0?$$

$$\int_{x_0}^x m + \int_{y_0}^y n \,.$$

Note 7

8dbb27c86a01499b83be44a189e22c09

При каком условии интеграл ОДУ с разделёнными переменными является гладким?

Если нет особых точек.

Note 8

rf655cb8e5aa41348f1b128abe72c8f2

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ с разделёнными переменными?

Любая точка из области определения.

Note 9

a7ee1153931c46d59a1a71e028b00b0a

Как на практике задаётся общий интеграл ОДУ с разделёнными переменными?

С неопределёнными интегралами.

Note 10

dd91a079474849748c001328b0709b66

Что называется ОДУ с разделяющимися переменными?

ОДУ в симметричной форме, у которого коэффициенты представляются как произведения функций одной переменной.

Какими должны быть функции-коэффициенты, задающие ОДУ с разделяющимися переменными?

Непрерывными.

Note 12

7007d702730d4b4bb53ea6b9fc990bfa

Какие ОДУ называются уравнениями в полных дифференциалах?

Оду в симметричной форме, представимые в виде du=0, где u- гладкая функция на области.

Note 13

a18c66c2343a4d1ab182426f9393eda

Представимость m(x,y)dx+n(x,y)dy=0 в виде du=0 в определении ОДУ в полных дифференциалах означает, что

$$\nabla u = (m, n).$$

}}

Note 14

c173b6af64a42a48e1a9e79cf27b712

Чем примечательны ОДУ в полных дифференциалах?

У них есть общий интеграл в известной форме.

Note 15

ce9b4078bbd64be0893565bf2b878c9d

Как выражается интеграл ОДУ в полых дифференциалах?

Функция u из определения и есть интеграл.

Как определить, является ли уравнение ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

ОДУ в полных дифференциалах?

Является $\iff m_y' = n_x'$.

Note 17

385f908cec6342339c9a708dc9e734a5

Что можно сказать о ОДУ в симметричной форме

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0,$$

если $m'_y \equiv n'_x$?

Это ОДУ в полных дифференциалах.

Note 18

2d3ee1ddf95c48f0b570c8fcbf997605

Какими должны быть функции-коэффициенты ОДУ в симметричной форме в критерии ОДУ в полных дифференциалах?

Гладкими (т.е. из C^1 .)

Note 19

e5db36f5f9f8404e8d347d5f20461e67

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (необходимость)?

Достаточное условие равенства вторых производных.

Note 20

188e7ec06df04d23872b628d4ae87856

В чём ключевая идея доказательства критерия ОДУ в полных дифференциалах (достаточность)?

Явно предоставить интеграл u.

Note 21

de914195b18342b8bf511d5f61cfb004

Как выражается интеграл ОДУ в полных дифференциалах

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$
?

$$\int_{x_0}^x m(\,\cdot\,,y) + \int_{y_0}^y n(x_0,\,\cdot\,)\,.$$

(или, аналогично, y_0 и x)

Note 22

e0c076b820de4d93b46b1b2098c87e2

Какие значения могут принимать параметры (x_0, y_0) из общего вида интеграла ОДУ в полных дифференциалах?

Любая точка из области определения.

Note 23

e55223eb41114fe092beeffc3850935

При каком условии можно дифференцировать по параметру под знаком определённого интеграла?

Функция и её производная по параметру непрерывны.

Note 24

766a804de4ef42379f53963b92bd5472

Пусть $E\subseteq \mathbb{R}^2$, $f,f'_u\in C(E)$. Тогда

$$\{\{c^2::rac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\;dx\}\}=\{\{c^2::\int_a^b rac{\partial f}{\partial y}(x,y)\;dx\,.\}\}$$

Семинар 10.11.22

Note 1

3d901a2d9e34a6f8caeehc01a48fheh

Как решаются ОДУ с разделяющимися переменными?

Собрать все с x и все с y с разных сторон и проинтегрировать.

Note 2

6ec2b60aaf164b1ab14b191fd853fc08

Какое есть "тонкое" место при решении ОДУ с разделяющимися переменными?

Отдельно рассматривать случай равенства нулю при делении.

Note 3

56d9aa3e00934312bd51c5b2873b273

Пусть $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция f называется ((с2) однородной степени q,)) если ((с1)

$$f(\lambda x) = \lambda^q f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Note 4

99f9700eabbf4ae6aa184065479b2aab

Какие ОДУ называются однородными?

Зависит от типа ОДУ.

Note 5

la1f83b72fc544d0bbc883e1d551a4ab

Какие ОДУ первого порядка в симметричной форме называются однородными?

Обе определяющие функции являются однородными одной степени.

Какие ОДУ первого порядка, разрешённые относительно производной, называются однородными?

Определяющая функция является однородной нулевой степени.

Note 7

75d0a91af124785806cfd53d6872fe0

Как можно показать, что ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной является однородным?

Представить правую часть как функцию от $\frac{y}{x}$.

Note 8

8211f8127d8b4dc38252a59d920e70b8

Как решаются однородные ОДУ?

y = tx и выразить dy.

Note 9

1a7488f29ba54697ac88b71b8158f76

Почему для однородных ОДУ работает подстановка y=tx?

Из однородности выносится и сокращается x.

Семинар 24.11.22

Note 1

ce60f48b6414173867b0ab70d5e367f

Как решаются ОДУ в симметричной форме с линейными коэффициентами?

Заменой переменных сводятся к однородным.

Note 2

245fd749caee40409a18db2183e4ba4

{{с2::Уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x)$$

» называются «спединейными ОДУ первого порядка.»

Note 3

c436a0567cc849e38bfb6e9f64e5a7bc

Как называется метод решения линейных ОДУ первого порядка?

Метод Бернулли.

Note 4

23dafe9e59384eadab89ccf1265da08a

Какие ОДУ решаются методом Бернулли?

Линейные ОДУ первого порядка.

Note 5

59ace38917f5481e968e4f918be1aacd

В чём основная идея метода Бернулли для решения линейных ОДУ первого порядка?

Представить функцию как произведение, и удачно подобрать один из множителей.

Note 6

62d24394b1b342568f532607f56260fl

Как подбирается второй множитель при решении линейных ОДУ первого порядка методом Бернулли?

Подставить произведение в изначальное уравнение и "занулить" два слагаемых в левой части.

Семинар 01.12.22

Note 1

220af7a707d14507aa03a86364f7f100

Для каких ОДУ первого порядка применим метод введения параметра?

Для которых можно выразить y через x, y'.

Note 2

0f79aa4b959d44ec81cd48e536c7548c

В чём состоит метод введения параметра для решения ОДУ первого порядка?

Ввести параметр p=y' и взять полный дифференциал y и его выражения (через x,y'.)