

# Интуитивная теория множеств

## Note 1

6c0ed6eb23d8405e911650386a84b770

Под  $\{\{c2::\text{множеством}\}\}$  понимается  $\{\{c1::\text{некоторая, вполне определённая совокупность объектов.}\}\}$

## Note 2

5f9814dbb38246348e00fce1554e94a

Два основных способа задания множеств.

■ Перечисление, характеристическое правило.

## Note 3

325300814df34c129e29e55cd92829be

$\{\{c2::\text{Пустое множество}\}\}$  есть  $\{\{c1::\text{множество, которое не содержит элементов.}\}\}$

## Note 4

f4cb071a174b4cd29c7ac0c7cd405265

$\{\{c2::\text{Пустое}\}\}$  множество обозначается  $\{\{c1::\emptyset \text{ или } \{\}\}\}$

## Note 5

ee3c092ea6f8412982372151ed6a3ef8

Пусть  $A$  — множество.  $\{\{c1::\text{Само множество } A \text{ и пустое множество}\}\}$  называют  $\{\{c2::\text{несобственными подмножествами}\}\}$  множества  $A$ .

## Note 6

d2d19259b6054a569cee5d5a0b24b0fe

Пусть  $A$  — множество.  $\{\{c1::\text{Все подмножества } A, \text{ кроме } \emptyset \text{ и } A, \}\}\}$  называют  $\{\{c2::\text{собственными подмножествами}\}\}$  множества  $A$

## Note 7

02ebf0e734664103a97df0f5c597b8c7

Пусть  $A$  — множество.  $\{\{c2::\text{Множество всех подмножеств множества } A\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{булеаном}\}\}$  множества  $A$ .

## Note 8

ac2c9531b8ad48eabb9e76bac3fdffaa

Пусть  $A$  — множество.  $\{\{c2::\text{Булеан}\}\}$  множества  $A$  обозначается  $\{\{c1::\mathcal{P}(A)\}\}$

## Note 9

2355b9e8f18a44148a0a3fd9f08c2034

Универсальное множество — есть множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

## Note 10

446b3cd12ece46568e02af4ed65f3155

Универсальное множество обычно обозначается  $U$  или  $I$ .

## Note 11

c7621865085b4ac5a4b2b24efb11cf87

Приоритет операций над множествами:  $\overline{\phantom{x}}, \cap, \cup, \dots$

## Note 12

6b9f3c8671f2472e9e3b9a20aeb66aa5

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Для удобства часто используется сокращение

$$AB := A \cap B.$$

## Note 13

dc6fc558021f401696123dddc6c61abe

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

}

## Note 14

1c0cfd677111482c8d16fb1c43f9f802

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Симметрическая разность множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \triangle B$ .

## Note 15

658fb28e676a412082702daf0103e08e

Пусть  $A$  — множество. Дополнение  $A$  обозначается  $\overline{A}$ .

## Note 16

13a0dc7af20b45a4b8d8785debbb106a

Три первых свойства свойства операций объединения и пересечения множеств.

■ Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

## Note 17

0ab39012eaa94abcb901e5c26354d65b

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cap A = \{\{c1: A.\}\}$$

## Note 18

99349135847f4ab7a28f76b06715594e

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cup A = \{\{c1: A.\}\}$$

## Note 19

02876f67e1514f6d92d1e32ce2a5673f

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cup \overline{A} = \{\{c1: U.\}\}$$

## Note 20

3303d884a57c4c979ab67f664325626a

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cap \overline{A} = \{\{c1: \emptyset.\}\}$$

## Note 21

c6b6114579204c8e99c5bfbcb80ac53b9

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cup \emptyset = \{\{c1: A.\}\}$$

## Note 22

35fbc385403041a7a92f1a9980d5643f

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cap \emptyset = \{\{c1: \emptyset.\}\}$$

## Note 23

bf06afa6211c4b10bd2ecffa833b05a2

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cup U = \{\{c1: U.\}\}$$

## Note 24

b5e4ab6a90eb4de38aa91aa27c7c4847

Пусть  $A$  — множество.

$$A \cap U = \{\{c1: A.\}\}$$

## Note 25

4e1167b5fa7748e68b1a4b9a80eaacb3

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A_{\{\{c2:: \cup \}\}}(A_{\{\{c3:: \cap \}\}}B) = \{\{c1: A.\}\}$$

«{\[c4:Закон поглощения]\}

## Note 26

478752160fb94508a605ed54a8601340

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A_{\{\{c2:: \cap \}\}}(A_{\{\{c3:: \cup \}\}}B) = \{\{c1: A.\}\}$$

«{\[c4:Закон поглощения]\}

## Note 27

84569bc3ab574cb78e9bbc9f21dc6bd6

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A \cap (B \cup \overline{A}) = \{\{c1: A \cap B.\}\}$$

## Note 28

8c46cf622a9840ba818604b1ddcbd74f

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = \{ \{c1::A \cup B, \} \}$$

## Note 29

f391250023de4acfa419991a4de9c8ab

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$(A \cup B) \{ \{c2:: \cap \} \} (A \cup \overline{B}) = \{ \{c1::A, \} \}$$

« $\{ \{c3:: \text{Закон расщепления} \} \}$ »

## Note 30

29ec5d118d8849bea46146efcbbc4473

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$(A \cap B) \{ \{c2:: \cup \} \} (A \cap \overline{B}) = \{ \{c1::A, \} \}$$

« $\{ \{c3:: \text{Закон расщепления} \} \}$ »

## Note 31

cfe43c6f8ac74a43a3f82ea5e01fee7d

Пусть  $A$  — множество.

$$\overline{\overline{A}} = \{ \{c1::A, \} \}$$

## Note 32

edcde29726c04401a88af2ef23f3c264

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A \setminus B = \{ \{c1::A \cap \overline{B}, \} \}$$

## Note 33

aed19cd8fa0d4ee3abf314b502af697d

Пусть  $A, B$  и  $X$  — множества.

$$\{ \{c2:: X \cup A \subseteq B \} \} \{ \{c3:: \iff \} \} \{ \{c1:: X \subseteq B \text{ и } A \subseteq B, \} \}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 34

ec3c6b3684844799a206353c8668876c

Пусть  $A, B$  и  $X$  — множества.

$$\{\{c2:: A \subseteq X \cap B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: A \subseteq X \text{ и } A \subseteq B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 35

5f70eba8ec804221a8c31f858c0b43ec

Пусть  $A, B$  и  $X$  — множества.

$$\{\{c2:: X \cap A \subseteq B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: X \subseteq \overline{A} \cup B.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 36

72ac0b5d9c1746c79264bb9bd3a0b5f2

Пусть  $A, B$  и  $X$  — множества.

$$\{\{c2:: A \subseteq X \cup B\}\}\{\{c3:: \Longleftrightarrow\}\}\{\{c1:: A \cap \overline{B} \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 37

9d92e00aafb44695841b52ab137664da

Пусть  $A, B, C, D$  и  $X$  — множества.

$$\begin{cases} A \subseteq X \subseteq B \\ C \subseteq X \subseteq D \end{cases} \Longleftrightarrow \{\{c2:: A \cup C\}\} \subseteq X \subseteq \{\{c1:: B \cap D.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 38

ee9afcd63b43416d954d357d1dc689bb

В чём основная идея общего алгоритма для решения систем уравнений со множествами?

Привести систему к виду  $AX \cup B\overline{X} = \emptyset$ , где  $A$  и  $B$  не зависят от  $X$ .

### Note 39

f443d4e12a8745178ba97fd0f1d8772

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$\{\{c3:: A = B\}\}\{\{c4:: \} \} \iff \{\{c1:: A \triangle B\}\} = \{\{c2:: \emptyset.\}\}$$

### Note 40

06c3d3d8c5614af3b760a31c9b94fdc8

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$A \cup B = \emptyset \iff \{\{c1:: A = \emptyset \text{ и } B = \emptyset.\}\}$$

### Note 41

73259212f85a4411b131299cc49d90dc

Пусть  $A$  и  $X$  — множества.

$$AX = \emptyset \iff \{\{c1:: X \subseteq \overline{A}.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 42

c02302f80f0143d0bb7cdc18b8929288

Пусть  $B$  и  $X$  — множества.

$$B\overline{X} = \emptyset \iff \{\{c1:: B \subseteq X.\}\}$$

(при решений уравнений относительно  $X$ )

### Note 43

96e46cd4122448b3a6c8a8543d793a05

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. При каком условии система

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset \end{cases}$$

имеет решение?

$$| \quad B \subseteq \overline{A}.$$

#### Note 44

5e8c77b24b74411e9c9d6769ee278443

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Каково решение системы

$$\begin{cases} AX = \emptyset, \\ B\overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

$$| \quad B \subseteq X \subseteq \overline{A}.$$

#### Note 45

f1c5541c7c884dba936d4374ff51af88

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Как в уравнении  $AX \cup B\overline{X} \cup C = \emptyset$  избавиться от «свободного» множества  $C$ ?

|  $C = \emptyset$  — условие совместности системы.

#### Note 46

86475fdea01944fba56365048d57b02d

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\{c2::\emptyset\} \quad \{\{c3:: \iff\} \quad \{\{c1:: A \cap B = \emptyset.\}\}$$

#### Note 47

8ca45754929648bda3ca5496c7cba70f

Операция  $\{\{c3:: \text{декартового произведения}\} \quad \{\{c2:: \text{дистрибутивна}\}\}$  относительно  $\{\{c1:: \text{операций } \cap, \cup, \setminus, \Delta.\}\}$

#### Note 48

ad330727e2cb4c27970e8cb8fdcddeb23

Пусть  $A, B$  и  $C$  — множества. Равны ли множества  $(A \times B) \times C$  и  $A \times (B \times C)$ ?

| Их отождествляют и считают равными.

#### Note 49

06a0896de5284f44bac5ddff2170cbb1

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. Для  $\{\{c2:: \text{конечных}\} \}$  множеств,

$$|A \times B| = \{\{c1:: |A| \cdot |B|.\}\}$$



# Бинарные отношения

## Note 1

cfc293ce41644e75b3df5d21a2bf036d

Пусть  $A$  и  $B$  — множества.  $\{\{c2:: \text{Бинарным отношением}\}\}$  на множествах  $A$  и  $B$  называется  $\{\{c1:: \text{некоторое подмножество } A \times B.\}\}$

## Note 2

3ba559fe73cf4c90b5b919ce1a45881a

Четыре способа задания бинарных отношений.

■ Перечисление, правило, матрица, граф.

## Note 3

c0ee3ac94a454d748e625d9e8c854763

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.

$$aRb \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1:: (a, b) \in R.\}\}$$

## Note 4

cef6486539a64268a1827f863aa7b9e1

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{\{c2:: \text{Обратным отношением к } R\}\}$  называется  $\{\{c1:: \text{множество}$

$$\{(b, a) \mid aRb\}.$$

$\}\}$

## Note 5

5e2c602b70a3473684a8ea79d93c7d68

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{\{c2:: \text{Обратное отношение к } R\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: R^{-1}.\}\}$

## Note 6

d6e34168370e44feafa7891c93b2df04

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда

$$R^{-1} \subseteq \{\{c1:: B \times A.\}\}.$$

## Note 7

86c9a04a7ac14724b416780fec688449

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.

$$(R^{-1})^{-1} = \{ \{c1: R.\} \}$$

## Note 8

e91e90545919488bb2c2ebe373b9e615

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{ \{c2: \text{Областью определения } R\} \}$  называется  $\{ \{c1: \text{множество}$

$$\{x \mid \exists y : xRy\}.$$

$\}$

## Note 9

08e952c62da84566a99743eb4c6c48a5

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{ \{c2: \text{Область определения } R\} \}$  обозначается  $\{ \{c1: D(R), \} \}$   $\{ \{c1: \delta_R\} \}$  или  $\{ \{c1: \text{dom } R.\} \}$

## Note 10

13e35bd817d9438690104754dc4d016d

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{ \{c2: \text{Областью значений } R\} \}$  называется  $\{ \{c1: \text{множество}$

$$\{y \mid \exists x : xRy\}.$$

$\}$

## Note 11

051cc32e89b94bbebd49875c952f6b5b

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение.  $\{ \{c2: \text{Область значений } R\} \}$  обозначается  $\{ \{c1: E(R), \} \}$   $\{ \{c1: \rho_R\} \}$  или  $\{ \{c1: \text{im } R.\} \}$

## Note 12

c0426f6bec33477e9bc759610c4d426b

Пусть  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$  — бинарные отношения.  $\{ \{c2: \text{Композицией } R \text{ и } S\} \}$  называется  $\{ \{c1: \text{множество}$

$$\{(a, c) \mid \exists b : aRb \text{ и } bSc\}.$$

$\}$

### Note 13

41418613a7934da4ab810abfcdf24e1a

Пусть  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$  — бинарные отношения.  $\{\{c2::$   
композиция  $R$  и  $S\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$R \circ S.$$

$\}\}$

### Note 14

78bbe389ea094b0aad40c370c5092937

Является ли операция композиции бинарных отношений коммутативной?

■ Нет.

### Note 15

63f83037312e4f29a81de945fb387d06

Является ли операция композиции бинарных отношений ассоциативной?

■ Да.

### Note 16

1530beb1e1c24540a8be6f534775cca0

Пусть  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$  — бинарные отношения.

$$(R \circ S)^{-1} = \{\{c1::S^{-1} \circ R^{-1}.\}\}$$

### Note 17

10fae1eae25a48a2998a9be7d6af2e4d

Пусть  $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$ . Отношение  $R$  называется  $\{\{c2::$ несимметричным, $\}\}$  если  $\{\{c1::$ оно не симметрично, не асимметрично и не антисимметрично. $\}\}$

### Note 18

8e02e778a9a5426fa89340cd47a6a0c5

Пусть  $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$  — бинарное отношение. Отношение  $R$  называется  $\{\{c2::$ интранзитивным, $\}\}$  если  $\{\{c1::$

$$aRb \text{ и } bRc \implies \overline{aRc}.$$

$\}\}$

## Note 19

fdb65b9ca3c4a5c8c62ece25b744e92

Пусть  $R \subseteq \{\{c3::A \times A\}\}$  — бинарное отношение. Отношение  $R$  называется  $\{\{c2::\text{нетранзитивным},\}\}$  если  $\{\{c1::\text{оно не транзитивно и не интранзитивно},\}\}$

## Note 20

f3fcca348ef844da9d3cf01b1e27fe1f

Матрица  $A$  называется  $\{\{c2::\text{бинарной},\}\}$  если  $\{\{c1::\text{все её элементы принадлежат множеству } \{0, 1\},\}\}$

## Note 21

25d02bbd94644780a0346254f22a07df

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $\{\{c3::A \text{ и } B \text{ конечны},\}\}$   $\{\{c2::\text{Матрицей отношения } R\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{бинарная матрица}$

$$\left(a_i R b_j\right) \sim |A| \times |B|.$$

$\}\}$

## Note 22

ce9cf9f0367d40f9bbdd914eb95eb396

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $A$  и  $B$  конечны.  $\{\{c2::\text{Матрица отношения } R\}\}$  обозначается  $\{\{c1::\|R\|,\}\}$

## Note 23

1f23045998c647aca7a97bcf2a5b5d31

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $\{\{c3::x \in A,\}\}$   $\{\{c1::\text{Множество } \{b \mid x R b\},\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{образом элемента } x \text{ при отношении } R,\}\}$

## Note 24

65b799e6a5bc4b01bff56d2146031199

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $x \in A$ .  $\{\{c2::\text{Образ элемента } x \text{ при отношении } R\}\}$  обозначается  $\{\{c1::R(x),\}\}$

## Note 25

477523df314842d1ad7c5a4d978f2f7a

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $\{\{c3::x \in B,\}\}$   $\{\{c1::\text{Множество } \{a \mid a R x\},\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{прообразом элемента } x \text{ при отношении } R,\}\}$

## Note 26

5150bf45802b4bad925b14f51a0d2f24

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $x \in B$ .  $\{\{c2:: \text{Прообраз элемента } x \text{ при отношении } R\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: R^{-1}(x)\}.\}$

## Note 27

3348d69b0cf149a8a70f5ec94b05b306

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $\{\{c2:: X \subseteq A\}\}$

$$\{\{c3:: R(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R(x).\}\}$$

## Note 28

5c26a7f17db242d7b8db989512093cc6

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение,  $\{\{c2:: X \subseteq B\}\}$

$$\{\{c3:: R^{-1}(X)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \bigcup_{x \in X} R^{-1}(x).\}\}$$

## Note 29

5b5ba1073a2e479f8b8eca3f6c2c7329

Пусть  $A$  множество.  $\{\{c1:: \text{Отношение } \{(x, x) \mid x \in A\}\}\}$  называется  $\{\{c2:: \text{тождественным отношением на } A\}\}$

## Note 30

c1e1caa30e724485b938627008bc28d0

Пусть  $A$  множество.  $\{\{c2:: \text{Тождественное отношение на } A\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: E.\}\}$

## Note 31

1dc3c3c6dff84c6f8ba496ed57840291

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2:: \text{рефлексивно}\}\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1::$

$$E \subseteq R.$$

$\}\}$

«В терминах множеств»

### Note 32

ebabe4fca55b4c1c89734c5895e06ff8

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2::$  анти-рефлексивно  $\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1::$

$$R \cap E = \emptyset.$$

$\}$

«В терминах множеств»

### Note 33

0b173912f3f54d539053ec72781173bf

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2::$  симметрично  $\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1::$

$$R = R^{-1}.$$

$\}$

«В терминах множеств»

### Note 34

1d0d52561f0b48f8a96ed987369af728

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2::$  анти-симметрично  $\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1::$

$$R \cap R^{-1} \subseteq E.$$

$\}$

«В терминах множеств»

### Note 35

92c95593c51a4ac08d44f6be1cf69e5e

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2::$  асимметрично  $\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1::$

$$R \cap R^{-1} = \emptyset.$$

$\}$

«В терминах множеств»

## Note 36

3fb92e0a21764e979cf2dce095e95aea

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$   $\{\{c2: \text{транзитивно}\}\}$  тогда и только тогда, когда  $\{\{c1: \}$

$$R \circ R \subseteq R.$$

$\}\}$

«В терминах множеств»

## Note 37

045dab85eeaa4728b61896649dc1ba75

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Тогда

$$\{\{c2: A \leq B\}\} \xLeftrightarrow{\text{def}} \{\{c1: a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i, j.\}\}$$

## Note 38

3b1e7f3609054643ae820caae66db2a

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Тогда

$$\{\{c2: A < B\}\} \xLeftrightarrow{\text{def}} \{\{c1: A \leq B \text{ и } A \neq B.\}\}$$

## Note 39

cfdc6aac0b1d4a87b2bec698ca44ce30

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Матрицы  $A$  и  $B$  называют  $\{\{c2: \text{несравнимыми,}\}\}$  если  $\{\{c1: \text{не выполняется ни } A \leq B, \text{ ни } B \leq A.\}\}$

## Note 40

303fa2bd38f446e59e6690ebc8c9c824

Бинарную операцию  $\{\{c2: \text{«или»}\}\}$  так же называют логистическим  $\{\{c1: \text{сложением.}\}\}$

## Note 41

46107ba23b0a4fcdaaa341d70b37861c

Бинарную операцию  $\{\{c2: \text{«и»}\}\}$  так же называют логистическим  $\{\{c1: \text{умножением.}\}\}$

## Note 42

1c8c345204344de49b5b669a648c128d

Операция поэлементного умножения матриц называется произведением Адамара.

## Note 43

5510b762349a41cc87225739c6fe6dc0

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Произведение Адамара матриц  $A$  и  $B$  обозначается  $A \circ B$  или  $A \odot B$ .

## Note 44

5054e224483f4cc28f2739f6fad9f517

Пусть  $R, S \subseteq A \times B$  — бинарные отношение.

$$\|R \cap S\| = \|R\| \odot \|S\|$$

## Note 45

93467a16ee87438cbc954b8b71d23aa4

Пусть  $R, S \subseteq A \times B$  — бинарные отношение.

$$\|R \cup S\| = \|R\| + \|S\| \quad (\text{с логистическим сложением}).$$

## Note 46

1c75356f6fe44393ae1e2c195bed3c1e

Пусть  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$  — бинарные отношения.

$$\|R \circ S\| = \|R\| \cdot \|S\| \quad (\text{с логистическим сложением}).$$

## Note 47

525cce9b6e944f94911754eec1fc824b

Пусть  $R, S \subseteq A \times B$  — бинарные отношение.

$$R \subseteq S \iff \|R\| \leq \|S\|$$

(в терминах матриц)



## Note 48

1b250fddc61e44539e477e7d17458d9b

Пусть  $R \subseteq A \times B$  — бинарное отношение. Тогда  $R$  транзитивно тогда и только тогда, когда

$$\|R\|^2 \leq \|R\| \quad (\text{с логистическим сложением}).$$

}}

«В терминах матриц»

## Note 49

bb1c4dba55ad47adbacfd250e1f39101

Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности  $R$  обозначается  $[A]_R$ .

}}

## Note 50

c54eb7123d974c8aba9972163019b4ac

Пусть  $R \subseteq A \times A$  — отношение эквивалентности,  $a \in A$ . Класс эквивалентности, порождённый  $a$ , обозначается  $[a]$ .

## Note 51

b21c1b2e3c504807a89717a4205b3fdf

Пусть  $A$  — множество. Разбиение множества  $A$  обозначается  $\langle A \rangle$ .

## Note 52

3d8bf9b65a4b4898be5460faaecab86

Пусть  $R \subseteq A \times A$  — бинарное отношение. Транзитивным замыканием  $R$  называют наименьшее транзитивное отношение на  $A$ , включающее  $R$ .

## Note 53

08c79ddd7572454f9ecc2f3580a39674

Пусть  $R \subseteq A \times A$  — бинарное отношение. Если  $R$  транзитивно, то транзитивное замыкание  $R$  есть само  $R$ .

## Note 54

e7b56866ed8e4192a45f157195f949e4

Пусть  $R \subseteq A \times A$  — бинарное отношение. Транзитивным сокращением  $R$  называется минимальное отношение  $R'$  на  $A$  такое, что транзитивное замыкание  $R'$  совпадает с транзитивным замыканием  $R$ .

{{c3: Диаграмма Хассе}} — это вид диаграмм, используемый  
 для представления {{c1: конечного частично упорядоченного  
 множества}} в виде {{c2: графа его транзитивного сокращения.  
 }}

# Элементы комбинаторики

## Note 1

48bfce03d7414c5ab08f51dd7162fe63

[[c2:  $r$ -элементный набор из  $n$ -элементного множества]] называется [[c1: выборкой объёма  $r$  из  $n$  элементов.]]

## Note 2

9c40042b9af64db3823fd0fc687379f5

[[c2: Выборку объёма  $r$  из  $n$  элементов]] так же называют [[c1:  $(n, r)$ -выборкой.]]

## Note 3

7b9c414597ef428981257c73511e44d2

[[c2:  $(n, r)$ -выборка, в которой элементы могут повторяться,]] называется [[c1:  $(n, r)$ -выборкой с повторениями.]]

## Note 4

6afeb348dbbf4ce7a258ad26ba469c48

[[c2:  $(n, r)$ -выборка, в которой элементы попарно различны,]] называется [[c1:  $(n, r)$ -выборкой без повторений.]]

## Note 5

ef4dbbc893164d0db276530cb20c94c7

[[c2: Упорядоченная  $(n, r)$ -выборка]] называется [[c1:  $(n, r)$ -перестановкой.]]

## Note 6

514e05b8ce994556a7d4f31540bfec43

Число [[c1:  $(n, r)$ -перестановок без повторений]] обозначается [[c2:

$$P(n, r).$$

]]

## Note 7

400452c068e84e42a0865821bd703a7b

Число [[c2:  $(n, r)$ -перестановок с повторениями]] обозначается [[c1:

$$\hat{P}(n, r).$$

]]

## Note 8

376b9f21513d43118cf832e0ad6f8ef0

Неупорядоченная  $(n, r)$ -выборка называется  $(n, r)$ -сочетанием.

## Note 9

6470ab31727449d8a82512cafaea2837

Число  $(n, r)$ -сочетаний без повторений обозначается

$$C(n, r)$$

}}

## Note 10

ca7c36f0138749fb90d8876a44c92a24

Число  $(n, r)$ -сочетаний с повторениями обозначается

$$\hat{C}(n, r)$$

}}

## Note 11

59712aabfb56413995a990d0c381fbee

Пусть  $n \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}$ .

$$(n)_r \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1) \cdots (n-r+1).$$

## Note 12

a10b62e86c38446c85f4bb8c5807d6c2

Биномиальный коэффициент из  $n$  по  $r$  обозначается

$$C_n^r \quad \text{или} \quad \binom{n}{r}.$$

## Note 13

3221712b5dda4ebe9c522f4508804522

$$\binom{n}{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(n)_r}{r!}$$

## Note 14

e1ac7a181662466fa92a7768e3bb6899

$$P(n, r) = \llbracket \{c1::(n)_r\} \rrbracket$$

## Note 15

4722cda874c44899a9bc36727640274a

$$\hat{P}(n, r) = \llbracket \{c1::n^r.\} \rrbracket$$

## Note 16

bdb9dd6722f644019fedc6c94810b129

$$C(n, r) = \llbracket \{c1::\binom{n}{r}.\} \rrbracket$$

## Note 17

a46501a9e6f54cbb15eb513c9b73039

$$\hat{C}(n, r) = \llbracket \{c1::\binom{n+r-1}{n-1}.\} \rrbracket$$

# Алгебра логики

## Note 1

d782cd98cdeb44098d0d1c31a6912d8d

Кратко булев набор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  обозначается  $\{\{c1:\tilde{\alpha}^n\}\}$  или  $\{\{c1:\tilde{\alpha}.\}\}$

## Note 2

b4cabdff1da9430caa51dea1f7973ebb

$\{\{c2:\text{Множество всех двоичных наборов длины } n\}\}$  называют  $\{\{c1:n\text{-мерным булевым кубом.}\}\}$

## Note 3

ae679a4256e04958a9d0d03ce4b174a2

$\{\{c2:n\text{-мерный булев куб}\}\}$  обозначается  $\{\{c1:B^n\}\}$  или  $\{\{c1:E_2^n\}\}$

## Note 4

c06059c4d3014e8f8d7762ecb2e7fb4e

Пусть  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n$ .  $\{\{c2:\text{Расстоянием Хэмминга между } \tilde{\alpha}^n \text{ и } \tilde{\beta}^n\}\}$  называется  $\{\{c1:\text{число координат, в которых наборы } \tilde{\alpha} \text{ и } \tilde{\beta} \text{ различны.}\}\}$

## Note 5

4b632fb9309f40b5b4286d3acbc0f06d

Пусть  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n$ .  $\{\{c2:\text{Расстояние Хэмминга между } \tilde{\alpha} \text{ и } \tilde{\beta}\}\}$  обозначается  $\{\{c1:\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).\}\}$

## Note 6

37fb9e894285459ea68b457c8ce5d2d3

Булевы наборы  $\tilde{\alpha}^n$  и  $\tilde{\beta}^n$  называются  $\{\{c2:\text{соседними,}\}\}$  если  $\{\{c1:$

$$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1.$$

$\}\}$

## Note 7

96ae235391374f19821a21b56b6d8b98

Булевы наборы  $\tilde{\alpha}^n$  и  $\tilde{\beta}^n$  называются  $\{\{c2:\text{противоположными,}\}\}$  если  $\{\{c1:$

$$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = n.$$

$\}\}$

## Note 8

463c6576cc6b4f2cb06d5c75b36c3db1

Множество всех булевых функций, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$  будем обозначать через

$$P_2(X^n).$$

}}

## Note 9

d4d14bf7854d445e80552d7c67d03d4f

$$\|P_2(X^n)\| = 2^{2^n}.$$

## Note 10

152863b499e64f64b2374c749fbde8ad

Константы  $0, 1$  являются нульместными булевыми функциями.

## Note 11

a0b4e4b26484402aed619c4fd37ca24

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — булева функция. Что есть  $T(f)$ ?

Таблица, в которой слева — значения аргументов, справа — значения функции.

## Note 12

1122c8a455b64cf789b394df752b821e

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — булева функция. Что есть  $\Pi_{k,n-k}(f)$ ?

Таблица, в которой слева — значения  $k$  аргументов, сверху — значения остальных аргументов, на пересечении — значение функции.

## Note 13

903d8fda79124586a7240910bb5d8a70

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — булева функция. В каком порядке идут значения аргументов в таблице  $\Pi_{k,n-k}$ ?

Слева направо, сверху вниз.

## Note 14

53de4b3157f34550908c2cc6c8752a37

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — булева функция. Что есть  $N_f$ ?

■ Множество наборов  $\tilde{\alpha}$ , для которых  $f(\tilde{\alpha}) = 1$ .

## Note 15

ec43c333201b45f28e9a03f6a2828c27

Как булева функция задаётся в виде вектора значений?

■ Значения функции в лексикографическом порядке следования наборов аргументов.

## Note 16

d5f6af188d8a41b2a3a644065c3ffa60

Логическая операция  $\{\{c2::\text{«не-и»}\}\}$  так же называется  $\{\{c1::\text{штрихом Шеффера}\}\}$

## Note 17

5cb3b093852847ad992d8f92afed8778

В булевой алгебре,  $\{\{c2::\text{штрих Шеффера}\}\}$  обозначается  $\{\{c1::x_1 \mid x_2.\}\}$

## Note 18

53029bbdec0b455e801cee6510a98bf5

В чём смысл штриха Шеффера?

■ Аргументы не могут быть истинными одновременно.

## Note 19

77f305f399f947bd90023950db2c7072

Пусть  $\tilde{x} \in B^2$ . Как читается выражение  $\langle x_1 \mid x_2 \rangle$ ?

■  $x_1$  и  $x_2$  не совместны.

## Note 20

ec1d6d17cbb045b8abb57d404f0e5314

Логическая операция  $\{\{c2::\text{«не-или»}\}\}$  так же называется  $\{\{c1::\text{стрелкой Пирса}\}\}$



## Note 21

5bc24294b87949fe93f07f9db9363cc5

В булевой алгебре,  $\{\{c2::\text{стрелка Пирса}\}\}$  обозначается  $\{\{c1::x_1 \downarrow x_2.\}$   
 $\}\}$

## Note 22

8c3f9b67e62f4865a81c11d4cf2258c8

В чём смысл стрелки Пирса?

■ Оба аргумента ложны.

## Note 23

44e41888826f48bb87b5d52cfffdf82

Пусть  $\tilde{x} \in B^2$ . Как читается выражение « $x_1 \downarrow x_2$ »?

■ Ни  $x_1$ , ни  $x_2$ .

## Note 24

811fe08112ea4d4184e59731f1744d49

В алгебре логики,  $\{\{c2::\text{сложение по модулю 2}\}\}$  обозначается  
 $\{\{c1::\oplus.\}\}$

# Булевы алгебры

## Note 1

20f3d9e66cae48b4872cde6c9ed57d3a

Что есть верхняя граница в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

■ Элемент  $\geq$  любому элементу множества.

## Note 2

43fa1e0fee2c4a718e26e0c7f9c37c46

Что есть нижняя граница в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

■ Элемент  $\leq$  любому элементу множества.

## Note 3

0ac55444db6e4fed8fa19d402da0fde0

Что есть супремум в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

■ Наименьшая из верхних границ.

## Note 4

7f565979844841de8441229417e3e1c8

Что есть инфимум в контексте произвольного частично упорядоченного множества?

■ Наибольшая из нижних границ.

## Note 5

b6e17bbaad124d3ebd6e98b8381a867f

Какое множество рассматривается в определении решётки?

■ Частично упорядоченное.

## Note 6

99e77ba59fe64260b79e25d9f28cad08

Какое частично упорядоченное множество называется решёткой?

Любое двухэлементное подмножество имеет  $\sup$  и  $\inf$ .

## Note 7

37a3e12e05de4cdfab62d0dea07344d1

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $a, b \in X$ . Тогда

$$\{\{c2::a \vee b\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sup \{a, b\}.\}\}$$

## Note 8

c9da1f844e3f4bd9bbe116283730ceeb

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $a, b \in X$ . Тогда

$$\{\{c2::a \wedge b\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\inf \{a, b\}.\}\}$$

## Note 9

95e0104c61f1411a8b36c0dccc9a0c7d

Решётку так же можно определить как универсальную алгебру с операциями  $\{\{c1::\wedge \text{ и } \vee.\}\}$

## Note 10

647880d6a2d84657b6ed1d688cf8a568

Какие аксиомы должны выполняться в определении решётки как универсальной алгебры?

Идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, поглощение.

## Note 11

a70eaa64be014d1f8d32db2187ac39b0

$\{\{c1::$

$$a \wedge a = a \quad \text{и} \quad a \vee a = a.$$

$\}\}$

« $\{\{c2::\text{Идемпотентность}\}\}$ » (из определения решётки)

## Note 12

3d74bd246a8448588f6d80ab75840d4e

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $a, b \in X$ . Тогда

$$\{\{c2::a \leq b\}\} \iff a \wedge b = \{\{c1::a\}\}.$$

## Note 13

900809a351c54ff4a39993d52ae1c388

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $a, b \in X$ . Тогда

$$\{\{c2::a \leq b\}\} \iff a \vee b = \{\{c1::b\}\}.$$

## Note 14

33c337eccc8e4e5e8457ad2312f7a0ce

Решётка называется  $\{\{c2::\text{дистрибутивной},\}\}$  если  $\{\{c1::\text{в ней } \wedge \text{ и } \vee \text{ обоюдно дистрибутивны.}\}\}$

## Note 15

e6915cd9a90b49cdbbba81443ba0a14ab

$\{\{c2::\text{Нулём}\}\}$   $\{\{c3::\text{частично}\}\}$  упорядоченного множества называется  $\{\{c1::\text{его наименьший элемент.}\}\}$

## Note 16

12dd64fc8d0648eca210d44a0b7e5ae5

Ноль частично упорядоченного множества обозначается  $\{\{c1::\mathbf{0.}\}\}$

## Note 17

730dc345dc804811be6c1f82b9350a94

$\{\{c2::\text{Единицей}\}\}$   $\{\{c3::\text{частично}\}\}$  упорядоченного множества называется  $\{\{c1::\text{его наибольший элемент.}\}\}$

## Note 18

543c12d0c8214d79ac9fca56bb2ec02e

Единица частично упорядоченного множества обозначается  $\{\{c1::\mathbf{1.}\}\}$

## Note 19

b4bef54da8aa41d1863424cc97398a77

Пусть  $A$  — множество. Тогда ноль  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  — это  $\{\{c1::\emptyset.\}\}$

## Note 20

8c05502489844ebb8fa500e583edd7d1

Пусть  $A$  — множество. Тогда единица  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  — это  $\{\{c1::A.\}$

## Note 21

94ed508a73f945fc8a6b4c1803cef774

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $x, y \in X$ . Элементы  $x$  и  $y$  называются  $\{\{c2::$  дизъюнктивными, $\}$  если  $\{\{c1::$

$$x \wedge y = \mathbf{0}.$$

$\}$

## Note 22

ef9dbbf66ec64b659e16cdb4bb830f5e

Пусть  $(X, \leq)$  — решётка,  $x, y \in X$ . Элемент  $y$  называется  $\{\{c2::$  дополнением  $x$ , $\}$  если  $\{\{c1::$

$$x \wedge y = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad x \vee y = \mathbf{1}.$$

$\}$

## Note 23

eb16dfe04f534fcd95dfce6b0eab9636

Для каких решёток имеет смысл понятие дополнения?

■ Для решёток с нулём и единицей.

## Note 24

2b49c7f09eeb4fa09c205e6ef5416e6b

Для начала, булева алгебра — это  $\{\{c1::$  решётка, $\}$

## Note 25

e823cfd66b9a4b7aba2bcfeb6ae82e0c

Какую решётку называют булевой алгеброй?

■ Дистрибутивную; с нулём и единицей; каждый элемент имеет дополнение.

## Note 26

520a3543220b49dea92ab712105e5b01

Как называют дистрибутивную решётку с нулём и единицей, каждый элемент которой имеет дополнение?

■ Булева алгебра.

## Note 27

5486cf3db94f4129bf68eed1c3194939

Каждый элемент булевой алгебры имеет  $\{\{c1: \text{единственное дополнение.}\}\}$

## Note 28

eb156d1ea036435a89006401851c38d6

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра,  $x \in X$ .  $\{\{c2: \text{Дополнение } x\}\}$  обозначается  $\{\{c1: \overline{x}.\}\}$

## Note 29

2b88d7541f5641d5ac8623f8a78c3384

Каждый элемент булевой алгебры имеет единственное дополнение. В чём ключевая идея доказательства?

■ Умножить  $\overline{x}$  на  $x \vee x^*$ , где  $x^*$  — второе дополнение.

## Note 30

6baeed8e7301491ea3dfca0b6fd7750d

Для булевых алгебр верны  $\{\{c1: \text{все основные законы}\}\}$  алгебры логики.

## Note 31

4faa85785e62481db5f40d0026177f6e

В чём ключевая идея доказательства законов Де-Моргана для булевых алгебр?

■ Показать, что правая часть является дополнением по определению.

## Note 32

d7959d4251d34780bf02493d717f2c6a

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра,  $f, g : X^n \rightarrow X$ . Функции  $f$  и  $g$  называются  $\{\{c2: \text{взаимно двойственными}\}\}$ , если  $\{\{c1: \}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{g(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}.$$

$\}\}$

### Note 33

13cfa6ef0b5649518e5f73d626669239

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра,  $f : X^n \rightarrow X$ . Функция, двойственная к  $f$ , обозначается  $f^*$ .

### Note 34

dd63d9bebef6405bad499b8ac612b3d2

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра,  $f : X^n \rightarrow X$ .

$$(f^*)^* = f$$

### Note 35

f46b68627d9a4a49ac7759f86e1198b1

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра,  $f : X^n \rightarrow X$ . Функция  $f$  называется самодвойственной, если  $f^* = f$ .

### Note 36

f94e35db4a9047a7bee032a5cae511d0

Пусть  $f : B^n \rightarrow B$ . Если

$$f = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}),$$

то

$$f^* = (\bar{\alpha}_{2^n}, \dots, \bar{\alpha}_1).$$

### Note 37

cdf74506714e476ca5dfe2e59883d032

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра.  $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$ .

### Note 38

7a361ce9cbe84f77b236a38d96ee29a6

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра.  $\mathbf{1}^* = \mathbf{0}$ .

### Note 39

a83c28cd41a247c0905cb9b46bc30c39

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра.  $\wedge^* = \vee$ .

### Note 40

32ec500412874f4cb81569a5483da5c9

Пусть  $(X, \leq)$  — булева алгебра.  $\vee^* = \wedge$ .

### Note 41

1ed5cffe17343ef9953a3bed3081904

В алгебре логики,  $\oplus^* = \{\{c1:: \sim\}\}$ .

### Note 42

c7ec94fd1e224455bb8338bc967651b5

В алгебре логики,  $\sim^* = \{\{c1:: \oplus\}\}$ .

### Note 43

6d5ed061caee4a21b5e098a197019176

В алгебре логики,  $\mid^* = \{\{c1:: \downarrow\}\}$ .

### Note 44

d99e4bd6874d47aeb0185f58610c8ab8

В алгебре логики,  $\downarrow^* = \{\{c1:: \mid\}\}$ .

### Note 45

abf23bd834914587b24eb8d0cf857c59

Пусть  $f : B \rightarrow B$  и  $f(x) = x$ . Тогда  $f^* = \{\{c1:: f\}\}$ .