

# Лекция 07.02.22

## Note 1

b84aca6df42d4d74ad1fea51970c01d9

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \subset W$ . Тогда  $V$  называется линейным подпространством, если

1.  $\forall v \in V, k \in \mathbb{R} \implies kv \in V$ ,
2.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$ .

}}

## Note 2

a2e780e4b5ff4b4199b594e34bf762c6

Выражение « $V$  есть линейное подпространство в  $W$ » обозначают

$$V \triangleleft W$$

}}

## Note 3

baa489a3d13c4978866a82630be13e73

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда  $V$  — тоже линейное пространство.

## Note 4

3c2988d9ae174eb4aa377f43ebd61f74

Является ли прямая проходящая через начало координат подпространством в  $\mathbb{R}^n$ ?

Да, поскольку любая линейная комбинация векторов на прямой тоже лежит на этой прямой.

## Note 5

18b402a364da457aaaf95095b9113dcd

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $A \sim m \times n$ . Является ли множество

$$V = \{x \in W \mid Ax = 0\}$$

линейным подпространством?

Да, поскольку  $\forall u, v \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha u + \beta v) = 0$ .

## Note 6

a5081684e6014eeb8d4cd352f7dfd46b

Пусть  $V \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Тогда всегда существует  $A \in \mathbb{R}^{\{c2:m \times n\}}$  такая, что  $\{c1::$

$$V = \ker A.$$

$\}$

## Note 7

eecf9dfacd2b41218565f8582275c53b

Пусть  $V = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \triangleleft \mathbb{R}^n$ . Как найти матрицу такую, что  $\ker A = V$ ?

Строки матрицы  $A$  – (транспонированная) ФСР соответствующей СЛАУ.

## Note 8

dc6727a8588c412db845f88bf547fd9e

Пусть  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in W$ . Является ли

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

подпространством в  $W$ ?

Да, является, поскольку любая линейная комбинация линейных комбинаций  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоже является их линейной комбинацией.

## Note 9

d633780bbade46968c2bcb66d05be478

Пусть  $W$  – линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cap V_2 \triangleleft W?$$

Да, всегда.

## Note 10

9c714ab9fa4b457f993438ef25421061

Пусть  $W$  – линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 \cup V_2 \triangleleft W?$$

■ Нет, не всегда.

### Note 11

2b9216d113914ad98cbc81b055dc174b

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\{\{c2:: V_1 + V_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2\}.\}$$

### Note 12

cd25e86c13c141be80e3673edfece8d2

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \{\{c1:: \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).\}$$

### Note 13

ecf370041c6b4016a92ca63a4b3675eb

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Всегда ли

$$V_1 + V_2 \triangleleft W?$$

■ Да, всегда.

### Note 14

fe58542dc0ee4e48ab330cd68be1fd77

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$  и  $e_1, e_2, \dots, e_k$  —  
 $\{\{c2:: \text{базис в } V.\}$  Тогда в  $W$  существует базис вида  $\{\{c1::$

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n.$$

$\}\}$

### Note 15

7e41e14368b94d50be88ce5b025c706

В чем основная идея доказательства теоремы о размерности суммы подпространств?

Дополнить базис в  $V_1 \cap V_2$  до базисов в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно и построить на их основе базис в  $V_1 + V_2$ .

### Note 16

01ac0beb84404bed8a9f676002a2804c

Пусть  $\{e_i\}$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,  $\{e_i, f_j\}$  — базис в  $V_1$ ,  $\{e_i, g_k\}$  — базис в  $V_2$ . Как можно построить базис в  $V_1 + V_2$ ?

Объединить их в одну систему  $\{e_i, f_j, g_k\}$ .

### Note 17

d6aa3bacb104c5d857dad61f06b75e7

Пусть  $\{e_i\}$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,  $\{e_i, f_j\}$  — базис в  $V_1$ ,  $\{e_i, g_k\}$  — базис в  $V_2$ . Как показать, что  $\{e_i, f_j, g_k\}$  — базис в  $V_1 + V_2$ ?

Показать, что  $\mathcal{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}$ .

### Note 18

28934bf74ae1452191c8e81b8cef0cf5

Пусть  $\{e_i\}$  — базис в  $V_1 \cap V_2$ ,  $\{e_i, f_j\}$  — базис в  $V_1$ ,  $\{e_i, g_k\}$  — базис в  $V_2$ . В чём ключевая идея доказательства того, что

$$\mathcal{L}(\{g_k\}) \cap V_1 = \{0\}?$$

Если  $\sum_k \lambda_k g_k \in V_1$ , то она принадлежит и  $V_1 \cap V_2$ .

# Семинар 09.02.22

## Note 1

3fd21160928849f8acbc526a60229e49

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  называют матрицу  $C$  такую, что для любого  $v \in V$ , если

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \\ v &= \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \dots + \mu_n e'_n, \end{aligned}$$

то

$$C \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

}}

## Note 2

88fab27df46a451190278cbc1d38698f

Матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$  обычно обозначают  $C_{e \rightarrow e'}$ .

## Note 3

c9e84965d5ea4157b50f6576e2cbddad

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в линейном пространстве. Как в явном виде задать матрицу  $C_{e \rightarrow e'}$ ?

Столбцы  $C_{e \rightarrow e'}$  — это координаты векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Лекция 14.02.22

### Note 1

825be05cbe9f4850806682f4db48f5e1

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ . Сумму  $V_1 + V_2$  называют прямой суммой, если  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

### Note 2

90c98477312541878454fb9689685fc8

Прямая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  обозначается

$$V_1 \oplus V_2.$$

### Note 3

951dc5cc9d7d4722ac40423e92273c7a

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — два линейных подпространства. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- $V_1 + V_2$  — прямая сумма;
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ;
- Для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно.

### Note 4

fc93fb548c854d70af3f9cf3017866cb

В чем основная идея доказательства того, что если для любого  $a \in V_1 + V_2$  разложение  $a$  в сумму  $v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , единственно, то  $V_1 + V_2$  — прямая сумма?

Показать, что если  $a = \begin{matrix} v_1 \\ \in V_1 \end{matrix} + \begin{matrix} v_2 \\ \in V_2 \end{matrix} \in V_1 \cap V_2$ , то  $v_1 = v_2 = 0$ .

## Note 5

78239c298e504fa9841235fdd06ac419

«**Монотонность размерности подпространств**»

Пусть  $W$  — линейное пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

1.  $\dim V \leq \dim W$ ,
2.  $\dim V = \dim W \iff V = W$ .

## Note 6

a6b854ec7f5b4473a76276e0bff1e272

Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется **линейным отображением**, если

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V$ ,
2.  $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V$ .

}}

## Note 7

4008d3f9d2224ec38cb2e9b8a78aab64

Линейное отображение так же ещё называют **линейным оператором**.

## Note 8

df5862f6f1d4456cb943a7f07c8d8b68

Линейный оператор  $f : V \rightarrow W$  называется **изоморфизмом линейных пространств**, тогда и только тогда, когда  $f$  — биекция.

## Note 9

d8bd78dfda034119ae049b476da96449

Линейные пространства  $V$  и  $W$  называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм

$$f : V \rightarrow W.$$

}}

## Note 10

2d4f456313e24261b688216f4b7f199e

Отношение **изоморфности** обозначается символом

$$\simeq$$

}}

## Note 11

7112c4ddaf614005b6a37c3f4fbd3edc

Если  $f : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $f^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

## Note 12

b439505227ea4814b084a811815b59d3

Отношение изоморфности удовлетворяет аксиомам отношения эквивалентности.

## Note 13

9fa02b16e5e74fcea192355d84b99109

Пусть  $V, W$  — конечномерные линейные пространства. Тогда

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

## Note 14

13b90eb2ff704cc69e067a3f047966cc

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда матрицей линейного оператора  $f$  в паре базисов в  $V$  и  $W$  соответственно называют матрицу  $A$ , переводящую координаты любого вектора  $v \in V$  в координаты вектора  $f(v) \in W$  в соответствующих базисах.

## Note 15

74ef91d29ce940f8b894341a5836c812

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Матрица оператора  $f$  в паре базисов  $e, \tilde{e}$  в пространствах  $V$  и  $W$  соответственно обозначается

$$M_{e, \tilde{e}}(f).$$

}}

## Note 16

d8ecf4d0e7a546668528944588ba6060

«Теорема о матрице линейного оператора»

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\{e_i\}_{i=1}^n$  — базис в  $V$ ,  $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$  — базис в  $W$ . Как в явном виде задать матрицу оператора  $f$  в этих базисах?



**|**  $i$ -ый столбец — это координаты  $f(e_i)$  в базисе  $\{\tilde{e}_j\}$ .

### Note 17

1235d9dc6038426387ee1c7475309a4f

Как можно компактно перефразировать утверждение теоремы о матрице линейного оператора?

**|**

$$f(e) = \tilde{e}A.$$

### Note 18

8e1ba2b68d414caeb7d229ba34833e8d

В чем ключевая идея доказательства теоремы о матрице линейного оператора?

**|**

$$f(e\lambda) = f(e)\lambda = \tilde{e}A\lambda,$$

где  $\lambda$  — координаты вектора из  $V$  в базисе  $e$ .

### Note 19

b595ad9b198f46299eb5af10d49e413d

Композиция линейных операторов — тоже {{c1:линейный оператор.}}

### Note 20

c13a12af79d9432ab1df0d1bab6f905c

Матрица композиции линейных операторов есть {{c1:произведение матриц этих операторов.}}

## Лекция 21.02.22

### Note 1

13db7f12a2e14ffca2f5e09197cd3e07

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисах  $e$  и  $\tilde{e}$  соответственно. Как преобразуется матрица  $A$  при замене базисов  $e \rightarrow e', \tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'$ ?

$$A' = C_{\tilde{e} \rightarrow \tilde{e}'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 2

015e02c15f134a53b50a24729fb6ac3d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  — матрица оператора  $f$  в базисе  $e$ . Как преобразуется матрица  $A$  при замене базиса  $e \rightarrow e'$ ?

$$A' = C_{e \rightarrow e'}^{-1} A C_{e \rightarrow e'}.$$

### Note 3

e3c3292adefb4657a177843c8840476d

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  и  $A'$  — матрицы оператора  $f$  в двух базисах  $e$  и  $e'$  соответственно. Тогда  $\det A' = \det A$ .

### Note 4

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Определителем оператора  $f : V \rightarrow V$  называется определитель матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 5

79b8fed369c447dfb53f352258ed6940

Рангом оператора  $f : V \rightarrow V$  называется ранг матрицы оператора  $f$  в произвольном базисе.

### Note 6

d36be29fb7a342599a7f73709043bb1f

След матрицы  $A$  обозначается  $\text{tr } A$ .

## Note 7

3c423489fc4f422aaa906fbcc2041ec3

Пусть  $A \in \{\{c3::\mathbb{R}^{n \times n}\}\}$ . Тогда  $\{\{c2::\operatorname{tr} A\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\sum_{i=1}^n a_{ii}\}\}$ .

## Note 8

e0b3b870a8444704a8569d15e3f761ed

Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда

$$\operatorname{tr}(BA) = \{\{c1::\operatorname{tr}(AB)\}\}$$

## Note 9

55e76656e4fc4920969acdfb57634355

$\{\{c2::\text{Следом оператора } f : V \rightarrow V\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{след матрицы оператора } f \text{ в произвольном базисе.}\}\}$

## Note 10

1da0c4fffac341f89821707b4a1b38a6

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\ker f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f^{-1}(\{0\})\}\}$$

## Note 11

f8fe0ceb74f84386932c4100743fb775

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2::\operatorname{im} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f(V)\}\}$$

## Note 12

56a80e8376154f29b490e470ceac8bc3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft V$ ?

Да, поскольку линейная комбинация нулей  $f$  — тоже нуль  $f$ .

### Note 13

28f55b0f2daa4b35b1859196e2d41ede

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\ker f \triangleleft W$ ?

■ Нет,  $\ker f \triangleleft V$ .

### Note 14

a4bde4e9272d4bef89c915f6390ca148

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft W$ ?

Да, поскольку  $\forall f(u), f(v) \in \operatorname{im} f$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{im} f.$$

### Note 15

7b17eb03a5e640f8bddefa0aaa6656c3

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Можно ли утверждать, что всегда  $\operatorname{im} f \triangleleft V$ ?

■ Нет,  $\operatorname{im} f \triangleleft W$ .

### Note 16

5c7bf3d386eb4fa181cdb696fc0f9ab5

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. Как связаны размерности  $V$ ,  $\ker f$  и  $\operatorname{im} f$ ?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

### Note 17

b6ef54a20af44801aceb30b556b95011

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор. В чем основная идея доказательства следующей формулы?

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Дополнить базис в  $\ker f$  до базиса в  $V$  и построить из них базис в  $\operatorname{im} f$ .

### Note 18

26a0af100d5b4c459a74ba6384b7c554

Пусть  $f : V \rightarrow W$  — линейный оператор,

- $e_1, e_2, \dots, e_k$  — базис в  $\ker f$ ;
- $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V$ .

Как выглядит базис в  $\operatorname{im} f$ ?

$$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n).$$

### Note 19

8a962591377f49c1a6b297a1efe008e9

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Тогда

$$\{\{c2:: \operatorname{rk} f\}\} = \{\{c1:: \dim \operatorname{im} f\}\}$$

(в терминах размерностей)

### Note 20

2acbea4466f54360bc19c2065a44fc95

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как показать, что

$$\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{im} f.$$

Показать, что в координатном выражении  $\operatorname{im} f$  есть линейная оболочка столбцов матрицы оператора  $f$ .

### Note 21

a85a7d7b1e3d47939cc717cb8da889ac

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор.  $\{\{c1:: \text{Пространство } V \triangleleft W\}\}$  называется  $\{\{c2:: \text{инвариантным относительно оператора } f\}\}$  если  $\{\{c1::$

$$f(V) \subset V.$$

$\}\}$

Примеры инвариантных подпространств в контексте произвольного оператора  $f : W \rightarrow W$ .

|

$\ker f, \operatorname{im} f$ .

## Note 23

e64a247c0efb47f8be38d4ab4ef17b05

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $e_1, \dots, e_n$  — такой базис в  $W$ , что  $e_1, \dots, e_k$  (где  $k \leq n$ ) — базис в инвариантном подпространстве  $V \triangleleft W$ . Тогда матрица оператора  $f$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  примет вид

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

где  $T_{11}$  — это матрица  $f|_V$  в базисе  $e_1, \dots, e_k$ .

# Лекция 28.02.22

## Note 1

9932dc2853764661928eedc8d44ddd74

Линейный оператор  $f : W \rightarrow W$  называется невырожденным, если  $\det f \neq 0$ .

## Note 2

2e565e676da342fb8cdac4d62de05e8

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Следующие 5 условий эквивалентны:

1.  $f$  невырождено;
2.  $\ker f = \{0\}$ ;
3.  $\operatorname{im} f = V$ ;
4.  $\operatorname{rk} f = \dim V$ ;
5.  $f$  — биекция.

## Note 3

8f9f5108ac8847299f21fd40619c6612

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — невырожденный оператор, то  $f$  — биекция?

Показать, что если  $f$  задаётся матрицей  $A$ , то  $f^{-1}$  задаётся матрицей  $A^{-1}$ .

## Note 4

0c8915aebdc24427ab211efa79c6e07a

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Как доказать, что если  $f$  — биекция, то  $f$  — невырожденный оператор.

$$\det(f \circ f^{-1}) = |E| \implies \det f \neq 0.$$

## Note 5

198b26e615c745edbd313c2f62029546

Пусть  $\{f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}$  Тогда  $\{\lambda \in \mathbb{C}\}$  называется собственным значением оператора  $f$ , если

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad f(v) = \lambda v.$$

}

## Note 6

f0b8dcb8a69748a0a51393ae495884b4

Пусть  $\{f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}$  Тогда  $\{v \in V \setminus \{0\}\}$  называется собственным вектором оператора  $f$ , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad f(v) = \lambda v.$$

}

## Note 7

22a614bf26ea4db3ae297b5c647e6517

$\{\text{Спектр оператора}\}$  называется  $\{\text{множество собственных значений этого оператора.}\}$

## Note 8

1f331a6bd4c84dc4996f323fd40b5a22

$\{\text{Спектр}\}$  оператора  $f$  обозначается  $\{\text{spec } f.\}$

## Note 9

ff82c9b056384c19b0a176b637c3941c

Пусть  $\{f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор, } \lambda \in \mathbb{C}.\}$  Тогда  $\lambda$  является собственным значением  $f$  тогда и только тогда, когда

$$\det(f - \lambda E) = 0.$$

}

## Note 10

a96c7b61477946699a72e8a792c8bf75

Пусть  $\{f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор.}\}$  Тогда уравнение

$$\det(f - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим уравнением оператора  $f$ .



## Note 11

a7a86475fc014d3c8fe1d63fa3a766ea

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда выражение

$$\det(f - \lambda E)$$

называется характеристическим многочленом оператора  $f$ .

## Note 12

976ac89d4ea7486080b6c2c8473946d9

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Почему

$$\det(f - \lambda E)$$

является многочленом переменной  $\lambda$ ?

Если  $A$  — матрица оператора  $f$ , то  $|A - \lambda E|$  — многочлен переменной  $\lambda$ .

## Note 13

5376672e8b21438896bc774aa4ac2275

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$|A - \lambda E| = |A| - \lambda \operatorname{tr} A + \lambda^2.$$

## Лекция 07.03.22

### Note 1

0d6c679eb377462e90e8ac9bba29dd61

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор. Характеристический многочлен оператора  $f$  обозначается

$$\chi_f.$$

}}

### Note 2

78106143b649485eb1c075b2388eb22e

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор и  $V \triangleleft W$  инвариантно относительно  $f$ . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

### Note 3

6deecf304fd8465bbff331e4241bde67

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор и  $V \triangleleft W$  инвариантно относительно  $f$ . Тогда

$$\chi_{f|_V} — \text{делитель } \chi_f.$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что  $\chi_f$  — определитель соответствующей квазитреугольной матрицы оператора  $f$ .

### Note 4

785c107694984499a5fd89afd052841c

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Тогда множество всех собственных векторов  $f$ , отвечающих собственному значению  $\lambda$ , объединённое с нулём, называется собственным подпространством оператора  $f$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

### Note 5

cdb0a7bde4e044e48a5a798a8052f163

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ . Собственное подпространство  $f$ , отвечающее собственному значению  $\lambda$ , обозначается  $V_f(\lambda)$ .

## Note 6

545e4fc3988d45fdafc099f74fc38f36

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . В кратком выражении

$$\{\{c2:: V_f(\lambda)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \ker(f - \lambda E).\}\}$$

## Note 7

edf7cad1b7df422181105ad8bf31a210

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Всегда ли

$$V_f(\lambda) \triangleleft W?$$

■ Да, всегда, потому что  $V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda E)$ .

## Note 8

de964305c22b4993819a8d5095504e53

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\{\{c1:: \text{Размерность } V_f(\lambda)\}\}$  называют  $\{\{c2:: \text{геометрической кратностью собственного значения } \lambda.\}\}$

## Note 9

f6b8139d2f0e46d38a2dd075ff83b2f4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\{\{c2:: \text{Геометрическая кратность собственного значения } \lambda\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: S_f(\lambda).\}\}$

## Note 10

eff6d05e42b34f078450044f6153939b

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\{\{c1:: \text{Кратность } \lambda \text{ как корня } \chi_f\}\}$  называют  $\{\{c2:: \text{алгебраической кратностью собственным значением } \lambda.\}\}$

## Note 11

856a933db82641cd87b0ce5f34647b1a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ .  $\{\{c2:: \text{Алгебраическая кратность собственного значения } \lambda\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: m_f(\lambda).\}\}$

## Note 12

b7431a88515043deacf49cf7fdb735c6

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Тогда  $\{\{c1::S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)\}\}$

## Note 13

6b913f908a194114bee71fb9a7526282

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ . Тогда  $S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda)$ .

В чем основная идея доказательства?

**|**  $V_f(\lambda)$  инвариантно относительно  $f$   
 $\implies \chi_f$  делится на  $\chi_f|_{V_f(\lambda)}$ .

## Note 14

58579b404ae34478b736df96c853c6e6

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ ,  $\{\{c2::\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}\}\}$  Тогда

$$\{\{c3::\chi_{\tilde{f}}(t)\}\} = \{\{c1::(\lambda - t)^{S_f(\lambda)}\}\}$$

## Note 15

8d63ff53045545709809018e1492b231

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — собственное значение  $f$ ,  $\tilde{f} = f|_{V_f(\lambda)}$ . Откуда следует, что

$$\chi_{\tilde{f}}(t) = (\lambda - t)^{S_f(\lambda)} \quad ?$$

**|**  $\tilde{f}$  представляется матрицей  $\lambda E$  порядка  $\dim V_f(\lambda)$ .

## Note 16

a3b9ba1c4e884a7bb1e3c4764f063d1f

$\{\{c2:: \text{Оператор } f : x \mapsto \lambda x, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}\}\}$  называется  $\{\{c1:: \text{скалярным оператором}\}\}$

## Note 17

51a455604c9c4d7eadc3fe5ab0af6397

Пусть  $\{\{c3:: f : V \rightarrow V \text{ — линейный оператор}\}\}$   $f$  называется  $\{\{c2:: \text{диагонализуемым оператором}\}\}$ , если  $\{\{c1:: \text{существует базис в } V, \text{ в котором матрица оператора } f \text{ является диагональной}\}\}$

## Note 18

b01b69f3ebc4c0c839a0c153f85d041

Диагональная матрица с элементами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  на диагонали обозначается

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

## Note 19

8066b576097a49fb9d5aa3c4580a27c5

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Если в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  матрица оператора  $f$  равна  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — собственные векторы  $f$ .

## Note 20

19e6a7fb9c8e4f04a3711d479f2c628e

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Если в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  матрица оператора  $f$  равна  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — собственные значения  $f$ .

## Note 21

1176411a2bf147348b94dd69b9bbad73

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда оператор  $f$  диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого собственного значения  $\lambda$

$$S_f(\lambda) = m_f(\lambda).$$

## Note 22

ca827a11abb047fda276763e1e593ef1

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (необходимость)?

Покзать, что если  $f$  представляется матрицей  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то по определению

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_i - \lambda).$$

## Note 23

0fc84832f2b548cfa9a4ef9a51326b77

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — различные собственные значения оператора  $f$ ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов  $v_1, \dots, v_n$  линейно независима.

}}

## Note 24

2a1e5294e5c34d889ca747ab0b44fa0a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — различные собственные значения оператора  $f$ ,

$$\forall j \quad v_j \in V_f(\lambda_j).$$

Тогда система векторов  $v_1, \dots, v_n$  линейно независима.

В чем основная идея доказательства?

Применяем  $f$  к произвольной равной нулю линейной комбинации, пока не получится СЛАУ с основной матрицей — определителем Вандермонда.

## Note 25

cfc344113f4e40b2b27ecfee11beb647

В чем основная идея доказательства критерия диагонализуемости оператора (достаточность)?

Составить систему векторов из базисов в  $V_f(\lambda_j)$  и показать, что она является базисом  $V$ .

## Note 26

fbb72d710ce84fe6b5237ee1f15112a8

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является порождающей?

Из условия  $\dim V_f(\lambda_j) = m_f(\lambda_j)$ , а значит система содержит  $\deg \chi_f = \dim V$  элементов.

## Note 27

5fd54902e7f34d00bad3222902a6bdf6

Почему система векторов, составленная в доказательстве критерия диагонализуемости оператора (достаточность), является линейно независимой?

Любая её линейная комбинация есть линейная комбинация системы векторов  $v_1, \dots, v_n$ , где  $v_j \in V_f(\lambda_j)$ .

## Note 28

435490ce764048d9a55b762d6175cf59

Если оператор  $f : V \rightarrow V$  имеет  $\dim V$  различных собственных значений, то  $f$  диагонализуем.

## Note 29

8757ff57337847268575f5903d640f08

Как доказать, что если оператор  $f : V \rightarrow V$  имеет  $\dim V$  различных собственных значений, то  $f$  диагонализуем.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{spec } f \quad 1 \leq S_f(\lambda) \leq m_f(\lambda) = 1 \\ \implies S_f(\lambda) = m_f(\lambda). \end{aligned}$$

## Note 30

b7cd455d24424dd0879b90d7cad89a6b

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$ . Оператор

$$P : \begin{matrix} v_1 + v_2 \\ \in V_1 \quad \in V_2 \end{matrix} \mapsto v_1, \quad V \rightarrow V$$

называется оператором проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ .

## Note 31

522c1911d5d04c898b070c53537026b2

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\text{im } P = V_1.$$

**Note 32**

0e8f1308502e41f9bfbddc3a9a153514

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\ker P = \{c1:: V_2.\}$$

**Note 33**

27181bd7474e4091aee4fa9dba20ae0f

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$\text{спес } P = \{c1:: \{0, 1\}.\}$$

**Note 34**

448f428dbef544a9a7ad66228e473bea

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$m_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

**Note 35**

d4a2a9780d1a4e1db35238e91f3875b9

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$S_P(0) = \{c1:: \dim V_2.\}$$

**Note 36**

322376ccf5e4418bb64b5e8b886d8aac

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$m_P(1) = \{c1:: \dim V_1.\}$$



### Note 37

c81e19cdfaa649f18565d2f7625646ce

Пусть  $V = V_1 \oplus V_2$  и  $P : V \rightarrow V$  — оператор проектирования на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . Тогда

$$S_P(1) = \{\{c1: \dim V_1.\}\}$$

## Лекция 14.03.22

### Note 1

d32917879c284285842d17bbfc251d30

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $v \in V$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Вектор  $v$  называется **корневым вектором высоты  $k$**  оператора  $f$ , если существует такое  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что

$$\begin{aligned}(f - \lambda E)^k v &= 0, \\ (f - \lambda E)^{k-1} v &\neq 0.\end{aligned}$$

}}

### Note 2

83d2e0cc0a894b54ac4d3604babf2d57

Корневым вектором высоты 1 оператора  $f$  — это **собственный вектор** этого оператора.

### Note 3

9e3747b6754c4bad9076277f39c4e920

$\lambda$  из определения корневого вектора оператора  $f$  — это всегда **собственное значение  $f$** .

### Note 4

a4093e0c9f55478ebd2eb2defda323df

Как показать, что  $\lambda$  из определения корневого вектора всегда является **собственным значением**?

Из определения  $(f - \lambda E)^k v = 0 \implies \det(f - \lambda E) = 0$ .

### Note 5

999c7f68724546db81750f9e997d0a1b

Пусть  $v$  — **корневой вектор высоты  $k \geq 2$**  оператора  $f$ . Тогда  $(f - \lambda E)v$  — **корневой вектор высоты  $k - 1$** .

### Note 6

264901faf0bb401e91105512f04f06dc

Пусть  $v$  — **корневой вектор высоты  $k \geq 2$**  оператора  $f$ . Тогда  $(f - \lambda E)v$  — **корневой вектор высоты  $k - 1$** . В чем основная идея доказательства?

Из определения корневого вектора

$$(f - \lambda E)^{k-1} \cdot (f - \lambda E)v = 0$$

и аналогично с неравенством нулю для степени  $k - 2$ .

## Note 7

50c2388c1fa843dfa616f85d4cecfaf

Система  $\{ \text{корневых векторов разных высот,} \}$  отвечающих  $\{ \text{одному и тому же собственному значению оператора,} \}$   $\{ \text{линейно независима.} \}$

## Note 8

de47eb56e219455a8497a97ad90b861d

Как доказать, что система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению оператора, линейно независима.

Приравнять линейную комбинацию к нулю и домножать её на  $(f - \lambda E)^{k_j-1}$  в порядке убывания высот  $k_j$  корневых векторов системы.

## Note 9

187218f20c2b46ab9309b3385f2012f4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\{ \text{ } v \text{ — корневой вектор высоты } k \text{ оператора } f. \}$  Тогда система  $\{ \{ \text{ } \}$

$$v, (f - \lambda E)v, (f - \lambda E)^2v, \dots, (f - \lambda E)^{k-1}v$$

$\{ \{ \text{ } \}$   $\{ \text{линейно независима.} \}$

## Note 10

f77f36f44a0a4dbfb7fe6d8a6b58db75

Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $k$  оператора  $f$ . Тогда система

$$v, (f - \lambda E)v, (f - \lambda E)^2v, \dots, (f - \lambda E)^{k-1}v$$

линейно независима. В чем основная идея доказательства?

Показать, что это система корневых векторов разных высот, отвечающих одному и тому же собственному значению  $\lambda$ .

### Note 11

3ab579b8e03a47ec865a43fc21bd39b7

Система  $\{\{c3: \text{корневых векторов,}\} \text{отвечающих} \{c2: \text{разным собственным значениям оператора,}\} \{c1: \text{линейно независима.}\}$

### Note 12

04c77a5799504d088141691461b44095

Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $k$  оператора  $f$ . Тогда  $\{c2: (f - \lambda E)^{k-1}v\} - \{c1: \text{это собственный вектор оператора } f.\}$

### Note 13

59e965333744cccaf670372a881ab06

Как доказать, что система корневых векторов, отвечающих разным собственным значениям оператора, линейно независима.

Домножить произвольную линейную комбинацию на

$$(f - \lambda_1 E)^{k_1-1} (f - \lambda_2 E)^{k_2} \dots (f - \lambda_l E)^{k_l}$$

и получить равенство нулю первого коэффициента. Далее аналогично для остальных коэффициентов.

### Note 14

5b16ae3e6ef643508aa2e1f086ffde51

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{спес } f$ .  $\{c1: \text{Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению } \lambda, \text{объединённое с нулём,}\}$  называется  $\{c2: \text{корневым подпространством, отвечающим собственному значению } \lambda.\}$

### Note 15

2779025573314db7aa326077599c90b3

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор.  $\{c2: \text{Корневое подпространство, отвечающее собственному значению } \lambda,\}$  обозначается  $\{c1: K_f(\lambda).\}$

### Note 16

d70f06c975144b6e835736be38336e4a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Всегда ли  $K_f(\lambda) \triangleleft V$ ?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

### Note 17

e3330d597cd547a385f694495c2dc291

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\|N_{f,k}(\lambda)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\ker(f - \lambda E)^k\|$$

### Note 18

42d32fc206824eafb2be52cb821ffafd

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $k \in \mathbb{N}$ . Всегда ли  $N_{f,k}(\lambda) \triangleleft V$ ?

■ Да, всегда (тривиально следует из определения).

### Note 19

ba89f8d6240947edac91e39df44d92bc

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Как  $K_f(\lambda)$  выражается через  $N_{f,k}(\lambda)$ ?

$$K_f(\lambda) = \bigcup_k N_{f,k}(\lambda)$$

### Note 20

c11610dbf64143fbaeeb57dfc3d66af0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Тогда  $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$ .

### Note 21

efec3536114a40d28eb925c540f796bf

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Тогда  $\dim K_f(\lambda) = m_f(\lambda)$ . В чем основная идея доказательства?  
TODO (?)

## Note 22

d928d6cded3a434a9c3f615c48190ff0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$\{V\} = \{K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l)\}.$$

## Note 23

16e24ba8ea07492581171c4ee92a6c95

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Какова общая структура доказательства?

Показать, что сумма  $K_f(\lambda_j)$

1. является прямой,
2. порождает все пространство  $V$ .

## Note 24

12b8b0705d6b4daf886d155d26b8d4f4

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма  $K_f(\lambda_j)$  прямая?

Линейная комбинация векторов  $v_j$  из  $K_f(\lambda_j)$  — это линейная комбинация корневых векторов, отвечающих различным собственным значениям.

## Note 25

ae4ac17697d146c194afc0f17091b028

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  — все различные собственные значения  $f$ . Тогда

$$V = K_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus K_f(\lambda_l).$$

Почему сумма  $K_f(\lambda_j)$  порождает все  $V$ ?

$$\sum_{j=1}^l \dim K_f(\lambda_j) = \sum_{j=1}^l m_f(\lambda_j)$$

## Note 26

e23c324999e1436d8c6d50a246244d60

Жорданова клетка — это квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

## Note 27

d354e3255a1a46e99261a422c4e41207

Жорданова клетка высоты  $q$ , соответствующая некоторому числу  $\lambda$ , обозначается

$$J_q(\lambda).$$

## Note 28

49446743b36c41b2825ed009c2fe6cd6

Жорданова матрица — это блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

## Note 29

c2e8392343e8487288fc8b5d700aeafa

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в  $V$  матрица  $A$  оператора  $f$  имеет жорданов вид, то  $A$  называют жордановой нормальной формой оператора  $f$ .

## Note 30

4e0cce0726054534a2f4f1fa1beaffbb

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Тогда, если в некотором базисе в  $V$  матрица оператора  $f$  имеет жорданов вид, то этот базис называют жордановым базисом оператора  $f$ .

## Note 31

4617ac459f3846a1b581c79a9c044b7e

«Теорема о жордановой нормальной форме»

Любой оператор в векторном пространстве над полем  $\mathbb{C}$  имеет жорданову нормальную форму.

## Note 32

d8f181b2d5004a47bd308a35849cddec

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda \in \text{spec } f$ . Как для  $k > 0$  соотносятся  $N_{f,k}(\lambda)$  и  $N_{f,k+1}(\lambda)$ ?

Для всех  $k$  меньше некоторого  $q$

$$N_{f,k}(\lambda) \subsetneq N_{f,k+1}(\lambda),$$

а для всех  $k \geq q$ :

$$N_{f,k}(\lambda) = N_{f,k+1}(\lambda)$$

## Note 33

414400f8f69b41b58c7d5b2930735317

Каков первый шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Найти все собственные значения оператора  $f$ .

## Note 34

a79be36515f64439b4db0f075099cbc3

Каков второй шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?



Для каждого собственного значения  $\lambda$  найти все подпространства  $N_{f,k}(\lambda)$ .

### Note 35

adf2c488db4640a1aba232fba8286d63

Каков третий шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Построить жорданову лестницу в каждом из корневых подпространств  $f$ .

### Note 36

2fe8afa7a09b49a1a7219ce868aaf67e

Каков заключительный шаг в построении жордановой нормальной формы оператора  $f : V \rightarrow V$ ?

Объединить все построенные базисы в одну систему и построить матрицу  $f$  в полученном базисе.

## Лекция 21.03.22

### Note 1

61582b48320a46c3ad047eec84da3eb3

Пусть  $A, A' \in \mathbb{C}^{\{c3:n \times n\}}$ . Тогда матрицы  $A$  и  $A'$  называются  $\{c2: \text{подобными,}\}$  если  $\{c1: \text{существует невырожденная матрица } T \text{ такая, что}\}$

$$A = T A' T^{-1}.$$

$\}}}$

### Note 2

6366e6bbaa1149eb8bba346a3cc38654

Отношение подобия матриц обозначается символом  $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\sim$

$\}}}$

### Note 3

1ae63106d8d0480b82ef6f9e9b3d62bb

Подобие матриц является отношением  $\{c1: \text{эквивалентности,}\}$

$\}}}$

### Note 4

de743729325e43f79f35a7b8c22d5bb2

Любая  $\{c2: \text{квадратная матрица}\}$  подобна  $\{c1: \text{своей жордановой нормальной форме,}\}$

(следствие из  $\{c3: \text{теоремы о жордановой форме}\}$ )

### Note 5

82aa01fcbfb7476d84662ca5802dae5b

$\{c2: \text{Две квадратные матрицы подобны}\}$   $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$   $\{c1: \text{их жордановы формы совпадают с точностью до перестановки клеток,}\}$

(следствие из  $\{c4: \text{теоремы о жордановой форме}\}$ )

### Note 6

198e1f3eef67411c89f83a35ade066d2

Пусть  $A, \Lambda, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = T^{-1} \Lambda T$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$A^k = \{c1: T^{-1} \Lambda^k T.\}$$

### Note 7

c1cf4048c475426683c811de00771765

Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Тогда

$$p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k A^k, \quad \text{где } A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E.$$

### Note 8

59cb3566c41d4eca89ef63e626740c4e

Пусть  $A, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $p \in \mathbb{C}[x]$ . Тогда

$$p(TAT^{-1}) = T p(A) T^{-1}.$$

### Note 9

ad579382cf8a42caabf0b8b6a5a4d76f

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ .

$$f(\lambda E) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) E.$$

### Note 10

be2002dbe01149aa91e229d1c991143e

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Тогда

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} f(A_{11}) & 0 \\ 0 & f(A_{22}) \end{bmatrix}.$$

### Note 11

455a3d16cf6744b39c1d1e21cab4e7f5

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ . Как определяют значение

$$f(J_k(\lambda))?$$

Представляют  $f(J_k(\lambda))$  как  $f(\lambda E + \varepsilon)$  и далее используют разложение  $f$  в ряд Тейлора в точке  $\lambda E$ .

## Note 12

c435657fd33d4705ae2de65b4bf5c682

Пусть  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in D$ . Для каких  $k$  и  $\lambda$  определено значение  $f(J_k(\lambda))$ ?

Должен существовать многочлен  $T_{\lambda,k}f$ .

## Note 13

3450a4591ff748cb856f4578b3cda3c2

Пусть  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Многочлен  $p$  называется аннулирующим многочленом для матрицы  $A$ , если

$$p(A) = 0.$$

}}

## Note 14

34b1edb015384033870e10717e8bbdb2

«Теорема Гамильтона-Кэли»

Характеристический многочлен квадратной матрицы является для неё аннулирующим.

## Note 15

07bbead6e007486e93d2daa598a265b6

В чем ключевая идея доказательства теоремы Гамильтона-Кэли?

Для любого корневого вектора  $x$  имеем  $\chi_A(A)x = 0$ .

## Лекция 28.03.22

### Note 1

c4787ae5340942d2a27db89ea5f9d4df

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ . Билинейная форма  $f$  в  $V$  называется  $\{\{c2:\text{положительно определённой},\}$  если  $\{\{c1:\text{для любого } v \in V$

$$f(v, v) \geq 0; \quad f(v, v) = 0 \iff v = 0.$$

$\}$

### Note 2

18f442014f0e4614a642e429958b8931

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ .  $\{\{c2:\text{Скалярным произведением в } V\}\}$  называется  $\{\{c1:\text{симметричная положи-}$   
тельно определённая билинейная форма в  $V.\}$

### Note 3

cea78871e8124a29945d3540057c0c68

$\{\{c2:\text{Евклидовым пространством}\}\}$  называется  $\{\{c1:\text{вещественное}$   
линейное пространство с заданным на нём скалярным про-  
изведением $\}\}$ .

### Note 4

79a607edba4945a4a562d9b1fd8f2ce9

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Скалярное про-  
изведение векторов  $v, w \in V$  обозначается  $\{\{c1:|$

$$(v, w).$$

$\}$

### Note 5

717ab493f110448bb867a49b37d29d83

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ .  $\{\{c2:\text{Длиной}$   
вектора  $v\}\}$  называется  $\{\{c1:|$  величина  $\sqrt{(v, v)}.\}$

### Note 6

7bc89a880fb244a78c3e204575ac9005

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ .  $\{\{c2:\text{Длина}$   
вектора  $v\}\}$  обозначается  $\{\{c1:|$   $|v|$  или  $\|v\|.\}$

## Note 7

de4db3a6688f4b198b8238b0e07dfce7

Длину вектора в евклидовом пространстве так же ещё называют  $\{\{c1::\text{нормой этого вектора.}\}$  В таком случае чаще используется обозначение  $\{\{c2::\|v\|.\}\}$ .

## Note 8

c0b109c4be9e4749ad794e9e38fffb2d

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $\{\{c3::r \in \mathbb{R}_+\}\}$ .  
 $\{\{c2::\text{Сферой радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  называют  $\{\{c1::\text{множество}\}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| = r\}.$$

$\}$

## Note 9

09b61a41cf5f45109c79e7cc61f63740

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ .  
 $\{\{c2::\text{Сфера радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$S_r(v_0).$$

$\}$

## Note 10

e63df21bb26d42269a7a5d45c6b828b8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $\{\{c3::r \in \mathbb{R}_+\}\}$ .  
 $\{\{c2::\text{Шаром радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  называют  $\{\{c1::\text{множество}\}$

$$\{v \in V \mid \|v - v_0\| \leq r\}.$$

$\}$

## Note 11

d0d10cbbdb664b428b1f3284ff5321f9

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v_0 \in V$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ .  
 $\{\{c2::\text{Шар радиуса } r \text{ с центром в точке } v_0\}\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$B_r(v_0).$$

$\}$

## Note 12

a7021008185a411e99300286ac245d14

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$ .

Векторы  $v$  и  $w$  называются сонаправленными, если

$$\exists \lambda > 0 \quad v = \lambda w.$$

}}

## Note 13

0cfd3b2d9f17418eb0b8fd2dd36ef1d4

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V \setminus \{0\}\}$ .

Углом между векторами  $v, w$  называется угол  $\varphi \in [0, \pi]$  такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

}}

## Note 14

097fc51b1eab4a699e7110a38f0bd670

«Неравенство Коши-Буняковского»

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{v, w \in V\}$ . Тогда всегда  $|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ .

## Note 15

570b086e7e1b48e3b3012778f4841d1e

В чем основная идея доказательства неравенства Коши-Буняковского?

Оценить дискриминант квадратного уравнения  $\|v - \lambda w\|^2 = 0$  относительно неизвестной  $\lambda$ .

## Note 16

96bb9d37dba3499d8890f7b3eb1f04d4

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$|(v, w)| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v \text{ и } w \text{ пропорциональны.}$$

## Note 17

d1941ac59ee44c82b045d6d1e954e0d8

### «Неравенство треугольника»

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

}}

## Note 18

4759501bf4b84cf0acf58f945229396c

В чем основная идея доказательства неравенства треугольника?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(v + w, v + w) = \|v + w\|^2.$$

## Note 19

5378eb0c9d81404c9cd8ca40925b9ce8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Тогда

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff v \uparrow \uparrow w$$

## Note 20

8238aebbcc724e708990b61d8a0e3603

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v, w \in V$ . Векторы  $v$  и  $w$  называются ортогональными, если  $(v, w) = 0$ .

}}

## Note 21

ce138d9eefe6445bbe72eb3cafe43e8

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Система векторов в  $V$  называется ортогональной, если её векторы попарно ортогональны.

## Note 22

2dbaa8c8157c42e08de67ebd6cc42e47

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная система векторов в  $V$ . Тогда система  $\{e_j\}$  линейно независима  $\iff e_j \neq 0$  для всех  $j$ .



## Note 23

d20a32cfc1c3440a9e22f5d28c36b9d5

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная система ненулевых векторов в  $V$ . Как показать, что система  $\{e_j\}$  линейно независима?

Умножить линейную комбинацию векторов  $\{e_j\}$ , равную нулю, на  $e_i$  для произвольного  $i$  и показать равенство нулю  $i$ -ого коэффициента.

## Note 24

b9cf4cdf374445c4bc8412c8ca72847c

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональный базис в  $V$ . Тогда координаты вектора  $v$  в базисе  $\{e_j\}$  имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

## Note 25

5a4e71f923b84eb5b5f3e2b66ea26470

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональный базис в  $V$ . Как показать, что координаты вектора  $v$  в базисе  $\{e_j\}$  имеют вид

$$v_j = \frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}?$$

Вычислить  $(v, e_j)$ , разложив  $v$  по базису  $\{e_j\}$ .

## Note 26

7ede17a5d2d049c690090d4850f4ef60

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортогональная линейно независимая система в  $V$ . Тогда

$$\frac{(v, e_j)}{\|e_j\|^2}$$

называют коэффициентами Фурье вектора  $v$  в системе  $\{e_j\}$ .

Пусть  $V$  — евклидово пространство над  $\mathbb{R}$ . Система векторов  $\{e_j\}_{j=1}^n$  в  $V$  называется ортонормированной, если её векторы попарно ортогональны и  $\|e_j\| = 1$  для всех  $j$ .

## Лекция 04.04.22

### Note 1

48fccb0908e94a3bbfc768f249c233a4

Пример ортогональной системы в пространстве  $C[0, 2\pi]$  со скалярным произведением

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} fg.$$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx.$$

### Note 2

25230410b91dd47619feafd9dd1e3909e

«Ортогонализация Грама-Шмидта»

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $e_1, \dots, e_n$  — базис в пространстве  $V$ . Тогда всегда существует ортогональный базис  $a_1, \dots, a_n$  в  $V$  такой, что

$$a_j \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_j) \quad \forall j.$$

}}

### Note 3

89394003d65441209a81ec6be5c7f2df

В чем основная идея доказательства истинности теоремы об ортогонализации Грама-Шмидта?

Положить

$$a_1 = e_1,$$

$$a_2 = e_2 + \alpha_1 a_1,$$

$$a_3 = e_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$$

...

### Note 4

067af76850ea49929f538a99ef2fb445

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Множество

$$\left\{ w \in W \mid (v, w) = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

называется ортогональным дополнением к  $V$ .

## Note 5

dc34194cc9a642aeb10ad2ba1cbab7ad

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Ортогональное дополнение к пространству  $V$  обозначается  $V^\perp$ .

## Note 6

800460fc49ee4f3b915a92addaba5141

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Всегда ли  $V^\perp \triangleleft W$ ?

■ Да, всегда.

## Note 7

ab8d62b25a294edebe7a3735b84dab19

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

$$\dim V^\perp = \dim W - \dim V.$$

## Note 8

70166548d05745278d7a8f9de584d211

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Тогда

$$V + V^\perp = V \oplus V^\perp = W.$$

## Note 9

eee9a5f3a40047629e2192983ab08770

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ . Как показать, что  $W = V \oplus V^\perp$ ?

■ Выбрать ортогональный базис в  $V$ , дополнить его до ортогонального базиса в  $W$  и показать, что дополнение — базис в  $V^\perp$ .

## Note 10

53d600a53a4f48a7b4d1e3a3822918fe

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $e_1, \dots, e_k$  — ортогональный базис в  $V$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — ортогональный базис в  $W$ . Как показать, что  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V^\perp$ ?

Показать, что  $\mathcal{L}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  и  $V^\perp$  равны как множества.

### Note 11

a9fc50cec2cc442d87f7f6a551043a18

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $\{V \triangleleft W, w \in W.\}$  Тогда проекция  $w$  на  $V$  параллельно  $V^\perp$  называется проекцией вектора  $w$  на  $V$ .

### Note 12

bcb91b5b6d4048febe0fd4e8da7302e9

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $\{V \triangleleft W, w \in W.\}$  Тогда проекция  $w$  на  $V^\perp$  параллельно  $V$  называется перпендикуляром, опущенным из  $w$  на  $V$ .

### Note 13

4e448e8833f94547ad7848fd34666613

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — система векторов в евклидовом пространстве. Матрицей Грама системы  $e_1, \dots, e_k$  называют матрицу

$$\left[ (e_i, e_j) \right] \sim k \times k.$$

}}

### Note 14

3bff6be501ed49109d5041f018ecab96

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — система векторов в евклидовом пространстве. Матрица Грама системы  $e_1, \dots, e_k$  обозначается

$$G(e_1, \dots, e_k).$$

}}

### Note 15

f45df626ca1d4db1866e3f7aae0c6f2a

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $w \in W$ ,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $V \triangleleft W$ . Как найти проекцию  $w_0$  вектора  $w$  на  $V$ ?

$$G(e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w, e_1) \\ \vdots \\ (w, e_k) \end{bmatrix},$$

$$w_0 = e\alpha.$$

## Лекция 18.04.22

### Note 1

b04c0920040847d0a5d99e72e1d5f32f

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . Расстоянием от точки  $f$  до пространства  $V$  называется величина

$$\min \{ \|f - g\| \mid g \in V \}.$$

}}

### Note 2

3c3b40b9167c47199457c3614706e26e

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . Расстояние от точки  $f$  до подпространства  $V$  обозначается

$$d(f, V).$$

}}

### Note 3

3e4d6f8b3aae4c73806dfc7764e669e3

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ ,

$$f = f_0 + f^\perp, \\ \in V \quad \in V^\perp$$

}} Тогда

$$d(f, V) = \|f^\perp\|.$$

### Note 4

d34143b5a6f347ebbd35b66500be29d0

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . В чем основная идея доказательства равенства  $d(f, V) = \|f^\perp\|$ ?

Представить  $f$  как  $f^\perp + f_0$  и явно вычислить  $\|f - g\|$  для  $g \in V$ .

### Note 5

c3802fe76b8740e28ef0bb2ce4d4aca0

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $f, g \in W$ . Угол между векторами  $f$  и  $g$  обозначается

$$(\widehat{f, g}).$$

}}

## Note 6

d84678ac809d4c229902770a60fb6c11

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ .  $\{\{c2::\text{Углом между вектором } f \text{ и подпространством } V\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{величина}$

$$\min_{g \in V} (\widehat{f, g}).$$

$\}\}$

## Note 7

75d1e7b4a26f4f578bda51afa099e06

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ .  $\{\{c2::\text{Угол между вектором } f \text{ и подпространством } V\}\}$  обозначается  $\{\{c1::$

$$(\widehat{f, V}).$$

$\}\}$

## Note 8

19d3715d268b4c07a6ec6013b8a60e50

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ ,  $\{\{c3::$

$$f = f_0 + f^\perp.$$

$\in V$ 
 $\in V^\perp$

$\}\}$  Тогда

$$\{\{c2::(\widehat{f, V})\}\} = \{\{c1::(\widehat{f, f_0})\}\}.$$

## Note 9

24059676faa84badb5f0199c24f6f28b

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V \triangleleft W$ ,  $f \in W$ . В чем основная идея доказательства равенства  $(\widehat{f, V}) = (\widehat{f, f_0})$ ?

**|** Сравнить для  $g \in V$  величины  $\cos(\widehat{f, g})$  и  $\cos(\widehat{f, f_0})$ .

## Note 10

e0b0c8a4f09c400ea5decb5c86c75027

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ .  $\{\{c1::\text{Угол между подпространствами } V_1, V_2\}\}$  обозначается  $\{\{c2::$

$$(\widehat{V_1, V_2}).$$

$\}\}$

## Note 11

fe6711839e2e4292aa55fdd4f80c6c80

Пусть  $W$  — евклидово пространство,  $V_1, V_2 \triangleleft W$ .

$$\begin{aligned} \{\{c3::(\widehat{V_1}, \widehat{V_2})\}\} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \min \{(\widehat{v_1}, \widehat{v_2}) \mid v_1 \in L_1, v_2 \in L_2\}\}, \} \\ L_{1,2} &:= \{\{c2:: V_{1,2} \cap (V_1 \cap V_2)^\perp.\}\} \end{aligned}$$

## Note 12

1b70f983a1ad42c5919ee83b15a479c3

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ .  $\{\{c2:: \text{Параллелепипедом, натянутым на систему векторов } \{a_j\}\} \text{ называется } \{\{c1:: \text{множество}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n k_j a_j \mid k_j \in [0, 1] \quad \forall j \in [1 : n] \right\}.$$

$\}$

## Note 13

3fa74674fa86420ab3f78529ea808264

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ .  $\{\{c2:: \text{Параллелепипед, натянутый на систему векторов } \{a_j\}\} \text{ обозначается } \{\{c1::$

$$\Pi(a_1, \dots, a_n).$$

$\}$

## Note 14

b967d3e120fc46c7b7b7bd6a4ffe07a8

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ .  $\{\{c2:: n\text{-мерный объём параллелепипеда } \Pi(a_1, \dots, a_n)\} \text{ обозначается } \{\{c1::$

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n).$$

$\}$

## Note 15

a7e0867fc1bc4ede8b8c8baf077dec8

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{\{c3:: a_1 \in V.\}$

$$\{\{c2:: \text{vol}_1 \Pi(a_1)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \|a_1\|.\}\}$$



## Note 16

27fc106d10454b36acb1d4fdb4d5ebc6

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{\{c3::\{a_j\}_{j=1}^n \subset V, n \geq 2.\}\}$

$$\{\{c2:: \text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \text{vol}_{n-1} \Pi(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot d(a_n, \mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1}))\}\}$$

## Note 17

62dd58a35b6e41618c5f4c14ba96d7df

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$\{\{c2:: (\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2\} = \{\{c1:: \det G(a_1, \dots, a_n)\}\}$$

## Note 18

8803537671b2486285e407e1661e183c

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

На каком методе основано доказательство?

■ Индукция по  $n$ .

## Note 19

4644b404d3cf48b3aa477e6cf6346d8a

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$(\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n).$$

В чём основная идея доказательства (индукционный переход)?

■ Представить  $a_n$  как

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k + a^\perp,$$

■ где  $a^\perp$  — перпендикуляр из  $a_n$  на  $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_{n-1})$ .

## Note 20

5825ffe0a68e4a83a7e469b67b266431

Откуда следует корректность определения величины

$$\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)?$$

Из теоремы о связи  $\text{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n)$  с матрицей Грама.

## Note 21

8167d79d15c5496986c4ed42e064fa03

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ . Чем определение скалярного произведения для векторных пространств над  $\mathbb{C}$  отличается от определения для пространств над  $\mathbb{R}$ ?

Линейность только по первому аргументу и

$$(v, w) = \overline{(w, v)}.$$

## Note 22

b2db7b3282094eea8733437c52bba06d

Унитарным/эрмитовым пространством называется комплексное линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

## Note 23

dee379a767e44b7fbc29a556ce456b02

Пусть  $V$  — унитарное пространство,  $v \in V$ . Откуда следует, что  $(v, v) \in \mathbb{R}$ ?

Из аксиом линейного пространства  $(v, v) = \overline{(v, v)}$ .

## Note 24

5d93df02453b469989ec31cb02334953

Пусть  $V$  — унитарное пространство,  $u, v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v).$$

Пример определения скалярного произведения для  $\mathbb{C}^n$ .

|

$$(z, w) = \sum_j z_j \overline{w_j}.$$

## Лекция 25.04.22

### Note 1

dd4a52e4947c482987ee915067979415

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . Рассмотрение  $V$ , как векторного пространства над  $\mathbb{R}$ , называется овеществлением  $V$ .

### Note 2

fce4b5036a48493086a124057e1f048d

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . Овеществление  $V$  обозначается  $V_{\mathbb{R}}$ .

### Note 3

1502c0b949d740cc9b70927038d34e79

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \text{End } V$ . Рассмотрение  $f$  как оператора  $V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$  называется овеществлением  $f$ .

### Note 4

8fd578e0ac514b2c826528aa165fb19a

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \text{End } V$ . Овеществление  $f$  обозначается  $f_{\mathbb{R}}$ .

### Note 5

76444b467049412d855fd6a8bb955fef

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис в  $V$ . Тогда  $\{e_j\} \cup \{ie_j\}$  — базис в  $V_{\mathbb{R}}$ .

### Note 6

8b1e99362cbc41f9ad58dce068e5a358

Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . Тогда

$$\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \cdot \dim V.$$

### Note 7

cc3fd18a829c481eb6a18fd4944621b2

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в комплексном пространстве,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис в  $V$ . Тогда для базиса

$$\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^{2n} = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$$

}} пространства  $\{\{c5::V_{\mathbb{R}}\}\}$  имеем

$$\{\{c2::M_{\tilde{e}}(f_{\mathbb{R}})\}\} = \{\{c1::\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}\}, \quad \text{где } B + iC = M_e(f).\}$$

## Note 8

cc938e458f944909a9c35a4d1dc9cea0

Пусть  $\{\{c3::V - \text{линейное пространство над } \mathbb{R}.\}\}$

$$\{\{c2::V_{\mathbb{C}}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\{(u, v) \mid u, v \in V\}.\}\}$$

## Note 9

117bb526f78d4eceace2fdea3f410d63

Пусть  $V - \text{линейное пространство над } \mathbb{R}, (u, v) \in V_{\mathbb{C}}.$  Тогда

$$\{\{c2::i(u, v)\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::(-v, u).\}\}$$

## Note 10

f3dbbf009e9b4e94972dfdbf0af435f6

Как запомнить правило умножения в пространстве  $V_{\mathbb{C}}$ ?

■ “Представить” элемент  $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$  как  $u + iv$ .

## Note 11

389f838bfe634a94bbac20ddb28d838

$\{\{c2::\text{Пространство } V_{\mathbb{C}}\}\}$  называется  $\{\{c1::\text{комплексификацией про-}$   
странства  $V.\}\}$

## Note 12

d7b4cacadaa641759cab38db5ae47b15

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых про-  
странствах. Оператор  $g : \{\{c3::W \rightarrow V\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{сопря-}$   
жённым оператором к оператору  $f.\}\}$  если  $\{\{c1::$

$$(f(v), w) = (v, g(w)) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

}}

### Note 13

e40069d511a1495fb9dd3107a6d11084

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах.  $\{\{c2:: \text{Сопряжённый оператор к оператору } f\}\}$  обозначается  $\{\{c1:: f^*.\}\}$

### Note 14

5b47c38358684d31a1d171bdc613fa5f

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать, что  $f^*$  линейен?

■ Показать, что  $f^*(\lambda w) - \lambda f^*(w)$  ортогонален всем векторам в  $V$ . Аналогично для суммы.

### Note 15

d9bfeeafc3314b3582a8263231d7301b

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах. Как показать существование  $f^*$ ?

■ Явным образом найти его матрицу.

### Note 16

d532583798ec4eafb0bcc5c1a718f50

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах. Однозначно ли определён оператор  $f^*$ ?

■ Да, однозначно.

### Note 17

49ba268bb22b4db9858de680fb15c62b

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах,  $\{\{c3:: \{e_i\} \text{ и } \{\tilde{e}_j\} - \text{ортонормированные базисы в } V \text{ и } W, \text{ соответственно.}\}\}$  Тогда

$$\{\{c2:: M_{\tilde{e},e}(f^*)\}\} = \{\{c1:: (M_{e,\tilde{e}}(f))^T.\}\}$$

### Note 18

bb4d8ef0dcd644128b6a2e296af6f5d2

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в евклидовых пространствах,  $\{e_i\}$  и  $\{\tilde{e}_j\}$  — ортонормированные базисы в  $V$  и  $W$ , соответственно. Как показать, что

$$M_{\tilde{e},e}(f) = (M_{e,\tilde{e}}(f))^T?$$

■ Вычислить коэффициенты Фурье  $(e_i, f^*(\tilde{e}_j))$ .

### Note 19

fa653acddda24b31ab20506ac8538332

Пусть  $f : V \rightarrow W$  линейный оператор в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(f^*)^* = \{\{c1::f.\}\}$$

### Note 20

cbcf9ad889c446d8de6ca2776680205

Пусть  $f_1, f_2 : V \rightarrow W$  линейные операторы в эрмитовых пространствах,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)^* = \{\{c1::\bar{\lambda}f_1^* + \bar{\mu}f_2^*.\}\}$$

### Note 21

6e9f045a1c4e4808bfcdb69523e55ac3

Пусть  $f_1, f_2 : V \rightarrow W$  линейные операторы в эрмитовых пространствах. Тогда

$$(fg)^* = \{\{c1::g^*f^*.\}\}$$

### Note 22

1520bcac46ee4b76aefe766faef8769e

Пусть  $f : V \rightarrow V$  линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $v$  — собственный вектор операторов  $\{\{c2::f \text{ и } f^*,\}\}$  отвечающий  $\{\{c3::\text{собственным значениям } \lambda \text{ и } \mu\}\}$  соответственно. Тогда  $\{\{c1::$

$$\mu = \bar{\lambda}.$$

$\}\}$

## Лекция 16.05.22

### Note 1

3954a1f946d54d49843bb75beba5c6a2

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp.$$

### Note 2

2b5bf9cde3b944f3829f6df51e0a5d46

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp.$$

### Note 3

82658444368d432c84797667377faa14

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$ . В чём основная идея доказательства?

$$v \in \ker f^* \iff (v, f(w)) = 0 \quad \forall w.$$

### Note 4

ac28c64b9e0843ec85ca8d67e40ff6d1

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$ . В чём основная идея доказательства?

$$\text{Следует из равенства } \ker(f^*)^* = (\operatorname{im} f^*)^\perp.$$

### Note 5

0b903e3801544d2a9284c6c06caa3e11

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $V \triangleleft W$ . Тогда, если  $V$  инвариантно относительно  $f$ , то  $V^\perp$  инвариантно относительно  $f^*$ .

}}



## Note 6

6a68e47fbd554019b4f16972953073da

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $V \triangleleft W$ . Тогда, если  $V$  инвариантно относительно  $f$ , то  $V^\perp$  инвариантно относительно  $f^*$ . В чём основная идея доказательства?

$$\boxed{(v, f^*(w)) = (f(v), w) = 0 \quad \forall w \in V^\perp.}$$

## Note 7

cb0fd56398174603b26c14a08091c430

Пусть  $a, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq \mu$ . Как из равенства  $\lambda a = \mu a$  следует, что  $a = 0$ ?

$$\boxed{\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} a = 0.}$$

## Note 8

398d95972a0746bb8ca3fe90ec7fafe6

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда

$$f^* = f \implies \text{spec } f \subseteq \mathbb{R}.$$

## Note 9

6eec0c089bb9471397a72db6e6ea7c4b

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f^* = f \implies \text{spec } f \subseteq \mathbb{R}$ . В чём основная идея доказательства?

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{spec } f \quad \lambda = \bar{\lambda}.}$$

## Note 10

01f37aa032dc4ae184b41741f1009cba

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $\{x, y\} \subseteq \text{spec } f$ . Тогда, если  $x$  и  $y$  — собственные векторы оператора  $f$ , отвечающие разным собственным значениям, то  $x \perp y$ .

## Note 11

9aab3b15d5bd4c1db803f7d44757e9f2

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $f = f^*$ ,  $x, y \in V$ . Тогда если  $x$  и  $y$  — собственные векторы оператора  $f$ , отвечающие разным собственным значениям, то  $x \perp y$ . В чём основная идея доказательства?

Рассмотреть скалярное произведение

$$(f(x), y) = (x, f(y)).$$

## Note 12

9cd8e8889d15407b9c8bc0d715fc7b96

«Спектральная теорема для  
самосопряжённых операторов»

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда если  $f^* = f$ , то в пространстве  $V$  существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $f$ .

## Note 13

7e1c25eb54d844309b458da40780c8f1

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для самосопряжённых операторов?

Для  $\lambda \in \text{spec } f$  имеем  $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp$ , но оба этих пространства инвариантны относительно  $f$ .

## Note 14

4884039a91ca44c2a72e903879e0cb15

Почему в доказательстве спектральной теоремы для самосопряжённых операторов нам важно, что оба пространства в прямой сумме  $V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp = V$  инвариантны относительно  $f$ ?

Из этого следует, что  $f$  представляется соответствующей квазидиагональной матрицей.

## Note 15

b4ac85781d214b28a62641aa58b35dac

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $f = f^*$ ,  $\lambda \in \text{spres } f$ . Почему пространство  $V_f(\lambda)^\perp$  инвариантно относительно  $f$ ?

$V_f(\lambda)$  инвариантно относительно  $f \implies V_f(\lambda)^\perp$  инвариантно относительно  $f^* = f$ .

## Note 16

6a3db890388d426ba9b6f47900bb8d01

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $f = f^*$ . Почему  $f$  не может не иметь действительных собственных значений?

Любой оператор имеет комплексные собственные значения, но из самосопряжённости следует, что эти значения действительны.

## Note 17

ca9ea18afa5c40f8873a302849e8b0b3

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Оператор  $f$  называется унитарным, если

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

## Note 18

7ba81b35301b4520996b24d87bc4fd09

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в евклидовом пространстве. Оператор  $f$  называется ортогональным, если

$$(f(v), f(w)) = (v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

}}

## Note 19

c7ddf42a012945c888c4d5178b28f2f0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения  $f$  сохраняет длины и углы.

## Note 20

7671b924a9f647578fd2fe26e4253413

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — унитарный оператор. Тогда помимо скалярного произведения  $f$  сохраняет длины и углы. В чём основная идея доказательства?

Длины и углы выражаются через скалярное произведение.

## Note 21

89e9f8ff95e74665b47de711b04ebf2e

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен тогда и только тогда, когда

$$f^* = f^{-1}.$$

}}

(в терминах  $f^*$ )

## Note 22

41a4909e68244e2e9fd1312185a42e07

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен тогда и только тогда, когда

$$\|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in V.$$

}}

(в терминах норм)

## Note 23

865b571c22cf4ed9bf1c3a80e8e88c8c

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен  $\iff \|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in V$ . В чём ключевая идея доказательства?

$\|a + b\| = \|f(a + b)\|$  и по линейности скалярного произведения.

## Note 24

2ecb4d7e7be047b887fa8953465857cb

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен тогда и только тогда, когда  $f$  переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

(в терминах базисов)

## Note 25

b4fdcc1c898f454cb1ca4e9fe9d18ef0

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен  $\iff f$  переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис. В чём ключевая идея доказательства?

■ Показать, что  $f$  сохраняет длины.

## Note 26

55a699f79e064eb7cbad7d49660f64b

Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Матрица  $A$  называется унитарной, если

$$\overline{A}^T = A^{-1}.$$

}}

## Note 27

3ddc6bb6b47d44c6900bc4593cea65ba

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен тогда и только тогда, когда матрица  $f$  в ортонормированном базисе унитарна.

}}

(в терминах матриц оператора)

## Note 28

4754847a2e4c47108a24063de1aeb2e7

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда  $f$  унитарен тогда и только тогда, когда матрица  $f$  в ортонормированном базисе унитарна. В чём ключевая идея доказательства?

■  $f^* = f^{-1} \iff$  равны и их матрицы.

### Note 29

a749d29f6a92475aa3bac79533cb3dfc

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — унитарный оператор. Тогда  $\forall \lambda \in \text{spec } f$  имеем  $\{c1::|\lambda| = 1.\}$

### Note 30

1977a9b870034e868dc7565fb5174779

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — унитарный оператор. Тогда  $\forall \lambda \in \text{spec } f$  имеем  $|\lambda| = 1$ . В чём основная идея доказательства?

■ Для  $v \in V_f(\lambda) \setminus \{0\}$  рассмотреть  $(f(v), f(v))$ .

### Note 31

f3a34c6f96f24f3c91b5b5cb5b85386d

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — унитарный оператор,  $V \triangleleft W$ . Тогда если  $\{c4::V$  инвариантно относительно  $f,\}$  то  $\{c1::V^\perp\}$   $\{c3::$ инвариантно $\}$  относительно  $\{c2::f.\}$

### Note 32

fd57ae2625734c759ffb57bc00f69d8f

Пусть  $f : W \rightarrow W$  — унитарный оператор,  $V \triangleleft W$ . Тогда если  $V$  инвариантно относительно  $f$ , то и  $V^\perp$  инвариантно относительно  $f$ . В чём основная идея доказательства?

■  $V^\perp$  инвариантно относительно  $f^* = f^{-1}$ .

### Note 33

05351f096d4a47cc90c2f500fbc4fe16

« $\{c3::$ Спектральная теорема для унитарных операторов $\}$ »

Пусть  $f : V \rightarrow V$  —  $\{c2::$ унитарный оператор $\}$ . Тогда в пространстве  $V$  существует  $\{c1::$ ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $f.\}$

## Note 34

5469fe81bf8641b2bca4525ca9e6599f

В чём основная идея доказательства спектральной теоремы для унитарных операторов?

Для  $\lambda \in \text{spec } f$  имеем  $V = V_f(\lambda) \oplus V_f(\lambda)^\perp$ , но оба этих пространства инвариантны относительно  $f$ .

## Note 35

1e6b5642085f4ef7a716fb7a5422b363

В  $\mathbb{R}^2$  любое ортогональное преобразование — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой.

# Семинар 20.04.22

## Note 1

4af2a0956e564d7a8dcff91122d2862c

В процессе ортогонализации Грама-Шмидта определитель Грама не меняется.)

## Note 2

dd5abffedea24431af7beec39693bcb2

Пусть  $V$  — эрмитово пространство,  $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$\operatorname{sgn} |G(e_1, \dots, e_n)| \in \{0, 1\}.$$

## Note 3

550eea6aa0654fe1bcff80057656cabf

Пусть  $V$  — эрмитово пространство,  $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| = 0$$

тогда и только тогда, когда система  $\{e_j\}$  линейно зависима.)

## Note 4

c01adb60f10f465ea82f0eb8c910472c

Пусть  $V$  — эрмитово пространство,  $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| \leq \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2.$$

## Note 5

e3a8ea052f1b41b48d35050e054c8f59

Пусть  $V$  — эрмитово пространство,  $\{e_j\}_{j=1}^n \subset V$ . Тогда

$$|G(e_1, \dots, e_n)| = \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2 \iff \begin{cases} \{e_j\} \text{ ортогональна,} \\ \exists j \quad e_j = 0. \end{cases}$$



## Семинар 27.04.22

### Note 1

15065bb7284d464eb733caa7ce69f5c2

Пусть  $L_1, L_2$  — векторные подпространства,  $\{\{c5: L_1 \cap L_2 = \{0\}\}$ .

}} Тогда  $\{\{c4: (\widehat{L_1}, \widehat{L_2})\}\} = \{\{c3: (\widehat{g}, \widehat{g_1})\}\}$ , где

- $g$  —  $\{\{c1: \text{проекция ненулевого вектора } x \in L_1 \text{ на } L_2, \}$
- $g_1$  —  $\{\{c2: \text{проекция } g \text{ на } L_1, \}$

### Note 2

6bc4328f156248a99ab740a54db23882

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор  $ff^*$   $\{\{c1: \text{самосопряжён.}\}$

### Note 3

ee802fb93fc34532abc98ffcbb813a0a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда оператор  $f^*f$   $\{\{c1: \text{самосопряжён.}\}$

### Note 4

2298652c987c4036be1f1244e0d2d16a

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $\{\{c3: \det f \neq 0\}\}$ . Тогда  $\{\{c2: (f^{-1})^*\}\} = \{\{c1: (f^*)^{-1}\}\}$ .

### Note 5

f9e1ce5c80d84b1fa0d487d5057a623f

Пусть  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Тогда

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1: [\overline{a_{ij}}] \cdot \}$$

### Note 6

3ed5769b04134886b2dae82e3c375951

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  —  $\{\{c4: \text{базис в } V, \}$  Тогда

$$\{\{c5: M_e(f^*)\}\} = \{\{c1: \overline{G^{-1}A^TG}, \}$$

где  $A = \{\{c2: M_e(f)\}\}$ ,  $G = \{\{c3: G(e_1, \dots, e_n)\}\}$ .

## Note 7

2e0dde23d1142f492e32a3030b2abbe

Пусть  $f : V \rightarrow V$  — линейный оператор в эрмитовом пространстве,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис в  $V$ . Тогда  $M_e(f^*) = \overline{G^{-1}A^TG}$ , где  $A = M_e(f)$ ,  $G = G(e_1, \dots, e_n)$ . В чём основная идея доказательства?

■ Использовать  $G$  как матрицу полуторалинейной формы.

## Note 8

fa1bb01afd4c43bbb1e902fcdcf3891a2

Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times l}$ . Тогда

$$\overline{AB} = \{\{c1::\overline{A} \overline{B}.\}\}$$

## Note 9

4a0309bd276e44448efb76c62e0fbfcf

Пусть  $f, g : V \rightarrow V$  — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда  $\{\{c2::\text{оператор } fg \text{ самосопряжён}\}\} \{\{c3:: \iff \}\} \{\{c1::fg = gf.\}\}$

## Note 10

3b50b418e4594bfeb03b83bb0f393857

Пусть  $f, g : V \rightarrow V$  — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве. Тогда оператор  $\{\{c2::fg + gf\}\} \{\{c1::\text{самосопряжён.}\}\}$

## Note 11

480f285619264421ad7eebf15db6c3c5

Пусть  $f, g : V \rightarrow V$  — самосопряжённые операторы в эрмитовом пространстве,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда если  $\{\{c2::\overline{\lambda} = -\lambda,\}\} \{\{c3::\lambda(fg - gf)\}\} \{\{c1::\text{самосопряжён.}\}\}$

## Лекция 23.05.22

### Note 1

5a8ab0eed63d4e1cb7f6f69e11c2aabd

В  $\mathbb{R}^2$  любое ортогональное преобразование  $f$  — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

1.  $\text{spec } f \subset \mathbb{R}$ , 2.  $\text{spec } f \cap \mathbb{R} = \emptyset$ .

### Note 2

20fe0d9d75484cf1858bc7ea943f9e34

В  $\mathbb{R}^2$  любое ортогональное преобразование  $f$  — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай  $\text{spec } f \subset \mathbb{R}$ )?

$\text{spec } f = \{\pm 1, \pm 1\}$ , и во всех случаях получаем нужное преобразование.

### Note 3

231ac7e677014b5c906070674ee0e438

В  $\mathbb{R}^2$  любое ортогональное преобразование  $f$  — есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. В чём основная идея доказательства (случай  $\text{spec } f \cap \mathbb{R} = \emptyset$ )?

Для  $\lambda = \cos \varphi - i \sin \varphi \in \text{spec } f$  и  $e = a + bi \in V_f(\lambda)$  написать

$$f(e) = \lambda e.$$

### Note 4

678857a6b6514b7e87cade6a771f4c53

Матрица поворота на угол  $\varphi$  имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

### Note 5

398eb33a3cd34a718118f2be8f7095a2

Пусть  $\varphi \in \mathbb{R}$  — произвольный угол. Матрица поворота на угол  $\varphi$  обозначается  $R_{\varphi}$ .

## Note 6

87e8bdb8fcb4fd9ac6ce183b1724513

Матрица вида

$$\text{diag}(R_{\varphi_1}, \dots, R_{\varphi_k}, \pm 1, \dots, \pm 1).$$

(с точностью до порядка клеток) называется каноническим видом матрицы ортогонального оператора.)

## Note 7

951f954d7fc94632bfd90e091d13396e

В  $\mathbb{R}^n$  для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет канонический вид.)

## Note 8

91344cb034d9420b9a63807b59bc1cbf

Отображение  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

называется квадратичной формой в  $\mathbb{R}^n$ .)

## Note 9

9f5070390cb64df59f3c3a3edb21964d

Пусть  $q : x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Для удобства полагают, что  $a_{ij} = a_{ji}$ .)

## Note 10

f3a4dfc29aec43e4be378badd310835b

Матрицей квадратичной формы  $x \mapsto \sum a_{ij} \cdot x_i x_j$  в  $\mathbb{R}^n$  называется матрица

$$[a_{ij}] \sim n \times n.$$

}}

## Note 11

c20dec1b0cdf4cfb824cfb96603e87c6

Пусть  $q$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  — матрица  $q$ . Тогда

$$A^T = A.$$

## Note 12

f47b5351d6cc4c4792454ba3ae253b45

Пусть  $q$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  — матрица  $q$ . Как  $q(x)$  выражается через произведение матриц?

$$q(x) = x^T A x.$$

## Note 13

80787c73077441aa88a40c590206c15e

Пусть  $q$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  — матрица  $q$ . Как  $q(x)$  выражается через евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ?

$$q(x) = (Ax, x)$$

## Note 14

78fd5f73a8bd4fe2bd9715e0dfc63f3e

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Форма  $q$  называется  $\{\{c2\}$  положительно определённой,  $\}$  если  $\{\{c1\} \cdot \forall x$

$$q(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad q(x) = 0 \iff x = 0.$$

$\}$

## Note 15

e2a3814c661f4081a60e07f3ae077705

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда всегда  $\{\{c3\}$  существует  $\}$  такая  $\{\{c2\}$  замена переменных  $x = By, \}$  что  $\{\{c1\} :$

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\text{rk } A} \mu_i y_i^2.$$

$\}$

## Note 16

2b6bd1f239a0448cb62e2d9e6ba8e5a7

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\{c1\} :$  Представление  $q(x)$  в виде

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\text{rk } A} \mu_i y_i^2.$$

$\rangle$  называется  $\{\{c2::\text{каноническим видом квадратичной формы } q.\}\}$

### Note 17

d28a23b8889943d4b3ffc14e52cb4e21

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\{c1::\text{Число положительных коэффициентов в каноническом виде } q\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{положительным индексом инерции } q.\}\}$

### Note 18

e3c4dedc4bea411e996ba571573fe4ab

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\{c2::\text{Положительный индекс инерции } q\}\}$  обычно обозначается  $\{\{c1::\pi.\}\}$

### Note 19

45d2e04c6dc0495c8c53da1a9a52fa03

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\{c2::\text{Отрицательный индекс инерции } q\}\}$  обычно обозначается  $\{\{c1::\nu.\}\}$

### Note 20

cfca3006b8dd4d76a4d29b6bd06efa0e

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ .  $\{\{c1::\text{Число отрицательных коэффициентов в каноническом виде } q\}\}$  называется  $\{\{c2::\text{отрицательным индексом инерции } q.\}\}$

### Note 21

e0192c4d7f9b4c8da63ea34e5b91d7b5

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{\{c3::\text{Положительные и отрицательные индексы инерции } q\}\}$   $\{\{c2::\text{не зависят}\}\}$  от  $\{\{c1::\text{замены переменных, приводящих } q \text{ к каноническому виду.}\}\}$

### Note 22

97b6d8cfbb8e499e8552699c8f4d0bf8

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $i \in [1 : n]$ .

$$\{\{c2::\Delta_i\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::M_{1\dots i}^{1\dots i}(A).\}\}$$

## Note 23

70b0c89b87844a56bfbafcab882e879b

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\llbracket c2::q$  положительно определена  $\rrbracket \llbracket c3:: \iff \rrbracket \llbracket c1::$

$$\forall j \quad \Delta_j > 0.$$

$\rrbracket$

« $\llbracket c3::$ Критерий $\rrbracket \llbracket c4::$ Сильвестра $\rrbracket$ »

## Note 24

75e17707e4e446ed9ca2db4710251d36

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда всегда  $\llbracket c4::$ существует $\rrbracket$  такая  $\llbracket c3::$ ортогональная замена  $x = B y,$  что  $\llbracket c1::$

$$q(B y) = \sum_{i=1}^{\text{rk } A} \lambda_i y_i^2,$$

$\rrbracket$  где  $\{\lambda_j\} \llbracket c2:: = \text{spec } A \rrbracket.$

## Семинар 18.05.22

### Note 1

b6887df7065f4a8ab54f2db4f3a0d40b

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда если

$$\forall j \leq \operatorname{rk} A \quad \Delta_j \neq 0,$$

то  $q$  приводится к каноническому виду

$$q(By) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rk} A} \lambda_i y_i^2, \quad \text{где } \lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}.$$

«формула Якоби»

### Note 2

52494560052c4c2ca0b504c059601cdd

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Величина  $\pi - \nu$  называется

### Note 3

0fbf18cec5d54ec6823be4c8821294e1

Пусть  $q : x \mapsto x^T A x$  — квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Сигнатура  $q$  обычно обозначается



# Семинар 25.05.22

## Note 1

3388e39da8554cabbe1722fa7348f91b

Пусть  $M$  — конечное множество,  $f : M \rightarrow M$ . Тогда

$$f \text{ инъективно} \iff f \text{ сюръективно.}$$

## Note 2

377d2404fa034f7c938eb2f12061ab6f

Группа обратимых элементов кольца  $K$  обозначается  $K^*$ .