

Лекция 07.02.22

Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x-a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a .

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то он единственен.

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p - q$. Тогда

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} \xrightarrow{x \rightarrow a} r_m,$$

но при этом

$$\frac{p - q}{(x - a)^m} = o((x - a)^{n-m}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a обозначается $T_{a,n}f$.

Note 5

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«**Формула Тейлора для многочленов**»

Пусть p — многочлен степени не более n . Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}}

Note 6

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

Note 7

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left((x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

Note 8

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Note 9

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«**Свойство n раз дифференцируемой функции**»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Тогда $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a.$

Note 10

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o -малого в терминах ε, δ .»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка D . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1:: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.\}\}$$

Note 11

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по n .

Note 12

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 13

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

■ и расписать это равенство в терминах ε, δ .

Note 14

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 15

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

Note 16

73ed2cd8bb8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$.

Note 17

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

Note 18

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, \{c\}_2: f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Тогда $f(x) = \{c\}_1: o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a.$

«Формула Тейлора-Пеано»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aecaa626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leq n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} [a,b], & a \leq b, \\ [b,a], & a \geq b. \end{array}\right.\}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{array}\right.\}\}$$

Note 7

dbb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{\{c3::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, $\{\{c2::f \in C^n(\Delta_{a,x})\}\}$,
 $f^{(n)}$ дифференцируема на $\tilde{\Delta}_{a,x}$. Тогда $\{\{c1::\text{найдется } c \in \tilde{\Delta}_{a,x},$
 для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\}\}$

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна $\{\{c1::$
 теореме Лагранжа $\}\}$.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы
 Тейлора-Лагранжа?

Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и
 найти точку c по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket e^x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \rrbracket$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \sin x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \rrbracket$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \cos x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \rrbracket$$

Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \ln(1+x) \rrbracket = \llbracket \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \rrbracket$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\llbracket \text{Обобщённый биномиальный коэффициент} \rrbracket$ задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \llbracket \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \rrbracket, \quad \alpha \in \llbracket \mathbb{R} \rrbracket.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^\alpha \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \} \}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют $\{ \{c1:: \text{биноми-}$
альным разложением} \}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{ \{c1:: (-1)^k \} \}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^{-1} \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \} \}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть $\{ \{c3:: \text{функция } f \text{ удовлетворяет условиям для разложе-}$
ния по формуле Тейлора-Лагранжа} \} Тогда если $\{ \{c2::$

$$\forall t \in \tilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\} \text{ то } \{ \{c1::$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Note 5

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Note 6

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$ Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$ Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируема на (A, B) . Тогда

- f постоянна на $\langle A, B \rangle$ $\iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть $f, g \in C[A, B]$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда Если $f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть $f, g \in C[A, B]$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда если $f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой максимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a).$$

}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой строгого максимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой минимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geq f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой строгого минимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если точка a является точкой минимума или максимума функции f , то a называется точкой экстремума f .

Note 15

98f3ceb02ca464ab3cf9e94355caaa2

«Необходимое условие экстремума»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a . Тогда если a является точкой экстремума f , то $f'(a) = 0$.

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к $f|_{[a-\delta, a+\delta]}$ для δ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется $\{\{c1::$ стационарной точкой функции $f,$ $\}$ если $\{\{c2::$

$$f'(a) = 0.$$

$\}\}$

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\{\{c1::$ точка $a \in (A, B)$ $\}$ называется $\{\{c2::$ критической точкой, $\}$ если $\{\{c1::$ либо a стационарна для f , либо f не дифференцируема в точке $a.$ $\}$

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда все $\{\{c2::$ точки экстремума f , принадлежащие $(A, B),$ $\}$ лежат в $\{\{c1::$ множестве её критических точек. $\}$

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcdc

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c3:: \max f([a, b])\}\} = \{\{c1:: \max \{f(a), f(b), \max f(C)\}, \}\}$$

где C — $\{\{c2::$ множество критических точек $f.$ $\}$

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

« $\{\{c4::$ Достаточное условие экстремума в терминах f' $\}\}$ »

Пусть $\{\{c3:: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B), f$ непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a), \delta > 0.$ $\}$ Если $\{\{c1::$

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

$\}\}$ то $\{\{c2:: a$ — точка строго максимума $f.$ $\}$

«Достаточное условие экстремума в терминах f' »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

то a — точка строго минимума f .

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

«Достаточное условие экстремума в терминах f'' »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f'' определена в точке a , $f'(a) = 0$. Тогда если $f''(a) > 0$, то a — точка строгого минимума f .

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

«Достаточное условие экстремума в терминах f'' »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f'' определена в точке a , $f'(a) = 0$. Тогда если $f''(a) < 0$, то a — точка строгого максимума f .

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbc7752caf1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f'' ?

Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с

$$o((x - a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f'' ?

Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если n нечётно, то f не имеет экстремума в точке a .

Note 6

b8ec49e21174443588a98b2e5c8cc032

«**Связь экстремума со старшими производными**»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если n чётно, то достаточное условие аналогично достаточному условию в терминах f'' .

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

«**Теорема Дарбу**»

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle, a, b \in \langle A, B \rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

Тогда $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$.

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c , далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bde1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

■ c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

■ Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b .

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Если

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle,$$

то f строго монотонна на $\langle A, B \rangle$.

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbd8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

■ Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B \rangle$.
Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

«Следствие из теоремы Дарбу
о сохранении промежутка.»

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда $f'(\langle A, B \rangle)$ — промежуток.

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B \rangle$

$$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B \rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B \rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leq f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f'(\langle A, B \rangle)?$$

Применить теорему Дарбу к функции

$$F(x) = f(x) - y \cdot x$$

в точках a и b .

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abe3

«**Следствие из теоремы Дарбу
о скачках производной.**»

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

Допустить противное и показать, что $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ — не промежуток.

Note 19

933fb7290ce844da8f84c48835915d5c

Какие допущения принимаются (для определённости) в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

f имеет скачок справа в точке $a \in \langle A, B \rangle$ и

$$L := \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) < f'(a).$$

Note 20

4fc5c84bb2b14241a99633260e7f76fc

Как выбирается δ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

Так, что для некоторого $y \in (L, f'(a))$

$$f'(x) < y \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

Note 21

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

Функция $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется выпуклой на $\langle A, B \rangle$, если

$$\forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

}}

Note 22

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

Функция $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется строго выпуклой на $\langle A, B \rangle$, если

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \end{aligned}$$

}}

Note 23

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«Критерий строгой выпуклости f на $\langle A, B \rangle$ »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливо неравенство

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

Note 24

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«Лемма о трёх хордах»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если f выпукла на $\langle A, B \rangle$, то

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

}}

Тогда если f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, то

$$F \nearrow \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 4

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Тогда

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 5

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть $\{\{c3: f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: a \in (A, B), \}\}$. Тогда $\{\{c1: f'_+(a) \text{ и } f'_-(a) \text{ конечны и } f'_-(a) \leq f'_+(a), \}\}$

Note 6

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B \rangle$, то она $\{\{c1: \text{непрерывна на } (A, B), \}\}$

Note 7

9f16939e7619449e9fe1d75a7aae2e87

Пусть $\{\{c3: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle, \}\} \{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

$\}$

Note 8

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in \langle A, B \rangle$. $\{\{c2: \text{Прямая } y = g(x) \text{ называется } \{\{c1: \text{строга опорной для функции в точке } a, \}\} \text{ если } \{\{c2: \text{она проходит через точку } (a, f(a)) \text{ и}$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

$\}$

Note 9

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть $\{\{c5: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle, a \in (A, B), \}\}$ прямая ℓ задаётся $\{\{c4: \text{уравнением}$

$$y = f(a) + k(x - a).$$

$\}$

Тогда прямая ℓ является $\{\{c1: \text{опорной для функции } f \text{ в точке } a, \}\} \{\{c3: \text{тогда и только тогда, когда } \{\{c2: k \in [f'_-(a), f'_+(a)], \}\}$

Note 10

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$, прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является строго опорной для функции f в точке a тогда и только тогда, когда $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.

}}

04.03.22

Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл $T_{a,1}f(x)$?

График $T_{a,1}f(x)$ — это касательная к функции f в точке a .

Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$.
Тогда функция f выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B \rangle \\ f(x) \geq T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$.
Тогда функция f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\} \\ f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 4

76ff105d143e49dea8fc8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными?

f дифференцируема в любой точке $\langle A, B \rangle \implies$ касательная совпадает с опорной прямой.

Note 5

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть $\{c3: f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ имеет при } x \rightarrow +\infty \text{ асимптоту } y = kx + b.\}$ Тогда если $\{c2: f \text{ выпукла на } (A, +\infty),\}$ то $\{c1:$

$$f(x) \geq kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

$\}$

Note 6

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть $\{c3: f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ имеет при } x \rightarrow +\infty \text{ асимптоту } y = kx + b.\}$ Тогда если $\{c2: f \text{ строго выпукла на } (A, +\infty),\}$ то $\{c1:$

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

$\}$

Note 7

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

«Связь выпуклости функции с f' »

Пусть $\{c4: f \in C\langle A, B \rangle, f \text{ дифференцируема на } (A, B),.\}$ Тогда $\{c2: f \text{ выпукла на } \langle A, B \rangle\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1:$

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

$\}$

Note 8

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

«Связь выпуклости функции с f' »

Пусть $\{c4: f \in C\langle A, B \rangle, f \text{ дифференцируема на } (A, B),.\}$ Тогда $\{c2: f \text{ строго выпукла на } \langle A, B \rangle\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1:$

$$f' \nearrow \nearrow \text{ на } (A, B).$$

$\}$

Note 9

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

«Связь выпуклости функции с f'' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B) .

Тогда f выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

||

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

Note 10

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

«Связь выпуклости функции с f'' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B) .

Тогда f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, если

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

Note 11

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$. Точка a называется точкой перегиба функции f , если

- $\exists \delta > 0$ такое, что $V_\delta(a) \subset (A, B)$ и f имеет разный характер выпуклости на $(a - \delta, a]$ и $[a, a + \delta)$;
- f непрерывна в точке a ;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

||

Note 12

9aa5847a39ac46e8ad8dbec41c14a904

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f дважды дифференцируема на a . Если a является точкой перегиба f , то $f''(a) = 0$.

Note 13

aca76c8bcbef4e38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

■ Нет, это только необходимое условие.

Note 14

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и имеет в ней производную из $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда если $\exists \delta > 0$ такое, что f дважды дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$ и

- либо $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,
 - либо $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a)$,
- то a — точка перегиба f .

Семинар 03.03.22

Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeca82dcc793

$$\int_{\{c2::\ln x\}} dx = \{c1::x \ln x - x\} + C$$

Note 2

310668af95114f9f8e87673be333fec8

$$\int_{\{c2::\frac{1}{\sin x}\}} dx = \{c1::\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|\} + C$$

Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int_{\{c2::\frac{1}{\cos x}\}} dx = \{c1::\ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right|\} + C$$

Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int_{\{c2::\frac{1}{x^2 + a^2}\}} dx = \{c1::\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\} + C \quad (\{c3::a \neq 0\})$$

Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int_{\{c2::\frac{A}{x+a}\}} dx = \{c1::A \ln |x+a|\} + C$$

Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int_{\{c2::\frac{1}{nx+a}\}} dx = \{c1::\frac{1}{n} \ln \left| x + \frac{a}{n} \right|\} + C \quad (\{c3::n \neq 0\})$$

Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int_{\{c2::\frac{A}{(x+a)^k}\}} dx = \{c1::\frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}}\} + C \quad (\{c3::k \neq 1\})$$

Note 8

72b0aaca0b254078bbfcc47745885653

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2N - pM}{2a} \arctan \frac{2x + p}{2a} + C,$$

$$\text{где } a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beec8

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{N - M\frac{p}{2}}{(t^2 + a^2)^k} dt + \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt + C,$$

$$\text{где } t := x + \frac{p}{2}, \quad a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \quad (k > 1, a \neq 0)$$

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \left((2k-3)I_{k-1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right)$$

Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{M}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C$$

Лекция 07.03.22

Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной функции f , если F дифференцируема на $\langle A, B \rangle$ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

Множество всех первообразных функции f на промежутке $\langle A, B \rangle$ обозначается $\mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$.

Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deacc

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

$(F(x) - G(x))' \equiv 0$ на $\langle A, B \rangle \implies F(x) - G(x)$ постоянна на $\langle A, B \rangle$.

Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения первообразной.

Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcd445

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

называется неопределённым интегралом f на $\langle A, B \rangle$.

Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Неопределённый интеграл функции f на $\langle A, B \rangle$ обозначается

$$\int f(x) dx.$$

}}

Note 8

7581f732c1c44de4bc99cae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad ?$$

Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

$$\left(\int f(x) dx \right)' \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fba7ff

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$, $G \in \mathcal{P}_g(\langle A, B \rangle)$.

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из теоремы Дарбу следует, что если f имеет первообразную на промежутке $\langle A, B \rangle$, то f не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.

Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции f на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

Нет, поскольку f может иметь точки разрыва второго рода.

Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

«Достаточное условие существования первообразной»

Если f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

Лекция 11.03.22

Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной f на множестве E , если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.

Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл $\int f(x) dx$ называется берущимся, если функция f имеет элементарную первообразную.

Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеют на $\langle A, B \rangle$ первообразную. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

■ По определению интеграла и первообразной.

Note 5

26b34c9a101f488aaed5dde4ddd43d2

**«Теорема о замене переменной
в неопределённом интеграле»**

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ и φ дифференцируема на $\langle C, D \rangle$. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

■ По определению интеграла и первообразной.

Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ и φ дифференцируема на $\langle A, B \rangle$ и обратима. Тогда если G — первообразная функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ то

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

«Формула интегрирования по частям»

Пусть $f, g \in C^1(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

}}

Note 9

e2df459e1699495f980cddacc633f6f

В чем основная идея доказательства основной формулы интегрирования по частям?

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu' dx + \int uv' dx.$$

Лекция 18.03.22

Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет $\{\{c1::\text{элементарную первообразную.}\}\}$

Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a : b]\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::[a, b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть $\{\{c3::[a, b] - \text{невыврожденный отрезок.}\}\}$ Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

$\}\}$ называется $\{\{c2::\text{разбиением отрезка } [a, b].\}\}$

Note 4

e301682aa933430591e748e6973a1843

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. $\{\{c1::\text{Множество всех разбиений отрезка } [a, b]\}\}$ обозначается $\{\{c2::T[a, b].\}\}$

Note 5

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

Note 6

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. $\{\{c1::\text{Величина}$

$$\max \{\Delta x_k\}$$

$\}\}$ называется $\{\{c2::\text{рангом разбиения } \tau.\}\}$

Note 7

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. $\{\{c2::\text{Ранг разбиения } \tau\}\}$ обозначается $\{\{c1::\lambda_\tau.\}\}$

Note 8

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$.
Набор точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ таких, что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ называется
оснащением разбиения τ .

Note 9

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, ξ — оснащение разбиения τ . Тогда пара (τ, ξ) называется оснащённым разбиением отрезка $[a, b]$.

Note 10

974eeb7d70c24d318e71abd3d9a95f3f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Множество всех оснащённых разбиений отрезка $[a, b]$ обозначается $T'[a, b]$.

Note 11

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\tau, \xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — оснащённое разбиение $[a, b]$. Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

называется интегральной суммой функции f , отвечающей оснащённому разбиению (τ, ξ) .

Note 12

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют суммами Римана.

Note 13

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

Интегральная сумма функции f , отвечающая оснащённому разбиению (τ, ξ) обозначается как

$$\sigma_\tau(f, \xi).$$

Note 14

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}\}$ Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где (τ, ξ) — оснащённое разбиение отрезка $[a, b]$.

(определение в терминах (ε, δ))

Note 15

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

Предел интегральных сумм функции f при ранге разбиения стремящемся к нулю обозначается

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

}}

Note 16

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если для любой последовательности оснащённых разбиений $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^\infty$ такой, что $\lambda_{\tau_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

Семинар 17.03.22

Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx + N) \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и затем внести его в скобки.

Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

Представить ответ в виде

$$Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в $Q_{n-1}(x)$ и λ из полученного соотношения.

Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right| + C.$$

Note 5

9b1156318f464dc79a658d6e94fe214d

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + px + q}} dx = \arcsin \frac{2x - p}{2a} + C,$$

где $a := \sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}$.

Лекция 21.03.22

Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если существует $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$.

Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$$

называется определённым интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ обозначается

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

}}

Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

числа a, b называют пределами интегрирования.

Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

функцию f называют подынтегральной функцией.

Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Множество всех функций интегрируемых на $[a, b]$ обозначается $\mathcal{R}[a, b]$.

Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbcb60

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ .

Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau \in T[a, b]$. Верхняя интегральная сумма Дарбу функции f , отвечающая разбиению τ , обозначается

$$S_\tau(f).$$

}}

Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ .

Note 10

2bbefff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau \in T[a, b]$. Нижняя интегральная сумма Дарбу функции f , отвечающая разбиению τ , обозначается

$$s_\tau(f).$$

}}

Note 11

189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Тогда f ограничена сверху тогда и только тогда, когда сумма $S_\tau(f)$ конечна.

Note 12

083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Тогда f ограничена снизу тогда и только тогда, когда сумма $s_\tau(f)$ конечна.

Note 13

1c8af1c02f864877bddd4971a256a30e

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $S_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

$$S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

Note 14

7958d85410954f6280755a33f7bff6fb

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как $s_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

$$s_\tau(f) = \inf \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

Note 15

53ffcba153934fda879e5241f8e85387

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ — разбиение $[a, b]$. Как, в общих чертах, доказать, что $S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$?

Представить $\{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$ как сумму множеств

$$\Delta x_k \cdot f([x_k, x_{k+1}]).$$

Note 16

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau, \tilde{\tau}$ — два разбиения $[a, b]$, $\tau \subset \tilde{\tau}$.

Тогда

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leq S_{\tau}(f),$$

$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geq s_{\tau}(f).$$

}}

Лекция 25.03.22

Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Как связаны $s_{\tau_1}(f)$ и $S_{\tau_2}(f)$ для произвольных разбиений τ_1, τ_2 отрезка $[a, b]$?

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

Да. $s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$ для любых τ_1, τ_2

Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

Для $\tau_1 = \tau_2$ утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

Да. Например, функция Дирихле.

Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

Note 6

c6120328fd3e40a48f6d7e69fce29c9d

Как показать, что любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём?

Если допустить, что f не ограничена, то $\forall \tau$ имеем $S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi)\} = +\infty$, а значит

$$\nexists \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Note 7

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\inf \{S_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется верхним интегралом Дарбу функции f .

Note 8

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Верхний интеграл Дарбу функции f обычно обозначается

Note 9

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\sup \{s_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется нижним интегралом Дарбу функции f .

Note 10

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Нижний интеграл Дарбу функции f обычно обозначается

Note 11

83287fd934bc4878a99a742db1668220

«**Критерий интегрируемости функции**»

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_t \rightarrow 0} 0.$$

}}

Note 12

68b782b8c09040dfa994ede932b748bc

$$\begin{aligned}
\{c2:: S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_t \rightarrow 0} 0\} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \\
&\{c1:: S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon. \}
\end{aligned}$$

(в терминах ε, δ)

Note 13

6a94745f7ac74cf7a5be1b0a6128e303

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (необходимость)?

По определению \sup и \inf

$$I - \varepsilon \leq s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leq I + \varepsilon.$$

Note 14

53f49c34063149d892ad1eb1015abebd

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (достаточность)?

$$\begin{aligned}
s_\tau(f) &\leq I_* \leq I^* \leq S_\tau(f), \\
s_\tau(f) &\leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f).
\end{aligned}$$

для любого оснащённого разбиения (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

Note 15

f200bb84909d45898f1313f053135d3a

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Как соотносятся I^* , I_* и $\int_a^b f$?

$$I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Note 16

1e7ec80a8e8f4caf87b70493394d837a

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Как для произвольного разбиения τ соотносятся $s_\tau(f)$, $S_\tau(f)$ и $\int_a^b f$?

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

Note 17

c1ca9a97a9a948e685e22801cc7e1ee5

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \int_a^b f.$$

Note 18

6a890ec9b5384ed2944133d968407712

Как показать, что

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \int_a^b f?$$

Тривиально следует из критерия интегрируемости и неравенства

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

Note 19

1a704d6d276749bdaa56a88c05622b02

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Note 20

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\sup \left\{ f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D \right\}$$

называется колебанием функции f на множестве D .

Note 21

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Колебание функции f на множестве D обозначается $\omega(f)$.

Note 22

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\omega(f) = \sup_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x)$$

(в терминах $\sup f, \inf f$)

Note 23

ec97e108f2394602934c87c2f28f2a39

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Тогда

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$$

Note 24

649783b3a0c14571bdbbb8caba0d07a3

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Тогда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k$$

(в терминах $\omega_k(f)$)

Note 25

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = I^*.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \rightarrow 0$)

Note 26

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = I_*.$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \rightarrow 0$)

Note 27

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

Критерий Дарбу интегрируемости функции

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и } I_* = I^*.$$

Note 28

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

Критерий Римана интегрируемости функции

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Note 29

8ba2a0bdc9754111b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 30

da9a4e99c01a42a4a8c5bccf8e3d24f7

Как, в общих чертах, доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём?

Из теоремы Кантора получить равномерную непрерывность и далее по теореме Вейерштрасса оценить для $\lambda_\tau < \delta$ величину $\omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$.

Note 31

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 32

7a4501cbb6414feaaf12589452716ac3

Как, в общих чертах, доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Для определённости $f \nearrow$. Для произвольного ε взять

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Далее по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

Семинар 24.03.22

Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

берутся с помощью замены

$$t := \frac{1}{x - \alpha}.$$

}}

Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где R — рациональная функция, берутся с помощью подстановок Эйлера.

Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

1. $a > 0$;
2. $c > 0$;
3. $ax^2 + bx + c$ приводим над \mathbb{R} .

Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого $ax^2 + bx + c$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1),$$

где x_1 — корень $ax^2 + bx + c$.

Лекция 01.04.22

Note 1

60ff32d5ed7347ae8036518373a5bc61

Пусть $\{\{c3:: f, \tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[a, b], T \subset [a, b], |T| < \aleph_0.\}$

Если $\{\{c1::$

$$\forall x \in [a, b] \setminus T \quad f(x) = \tilde{f}(x),$$

$\}\}$ то $\{\{c2:: \tilde{f} \in \mathcal{R}[a, b] \text{ и } \int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.\}$

Note 2

30e9c514b2a7470bb6370c764380a14b

Каков первый шаг доказательства того, что изменение значений функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

Показать, что f и \tilde{f} ограничены по модулю некоторыми значениями A и $\tilde{A} \in \mathbb{R}$.

Note 3

9f281cfda3464766a189207f5029d7ed

В чем ключевая идея доказательства того, что изменение значений функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

Разность интегральных сумм f и \tilde{f} ограничена по модулю значением $2m(A + \tilde{A})\lambda_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0$.

Note 4

94c3dcad5bc247568a21704cb1d05f72

Пусть $\{\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b].\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta].$$

$\}\}$

Note 5

385f602d08114dd39630009f76dbb7e0

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда $f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$.

В чем ключевая идея доказательства?

Если $\tau_0 \in T[\alpha, \beta]$, $\tau \in T[a, b]$, $\tau_0 \subset \tau$, то

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leq S_{\tau} - s_{\tau}.$$

Note 6

ee426e669ae545b8ad6d128a5870373e

Пусть $\{c3: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b).\}$ Тогда если $\{c1:$

$$f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

$\}\}$ то $\{c2: f \in \mathcal{R}[a, b].\}$

Note 7

c8c134e6d7c442c3a7214585d20c41ac

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Тогда если

$$f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем ключевая идея доказательства?

$$\begin{aligned} S_{\tau} - s_{\tau} &\leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega(f) \cdot \lambda_{\tau}, \\ \tau &\in T[a, b], \quad \tau' = \tau \cup \{c\}, \\ \tau_1 &= \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b]. \end{aligned}$$

Note 8

ccba27d6a29c468f8a60fbd0f106fec4

Пусть $\{c3: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.\}$ Функция f называется $\{c2:$ кусочно непрерывной, $\}$ если $\{c1:$ множество её точек разрыва пусто или конечно, и все её разрывы суть разрывы первого рода.

$\}\}$

Note 9

86f712cafa53498fa3b282915340635c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то $\{c1: f \in \mathcal{R}[a, b].\}$

Note 10

78e23f5a381e4d01b4c4467b16955dcb

Как показать, что кусочно непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$?

Показать, что она интегрируема на каждом из непрерывных «кусков».

Note 11

682bfc21e35a489ebc7df5514e1d4690

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Говорят, что множество E имеет нулевую меру, если для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε .

Note 12

3be97c537ee44236bfc5f8bae48390e3

«Критерий Лебега интегрируемости функции»

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a, b]$ и множество точек разрыва f имеет нулевую меру.

Note 13

1b3f6df593ba44b6b9558ee83720dd7e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f + g, fg, \alpha f, |f| \in \mathcal{R}[a, b].$$

Note 14

275d09f8b4c9445992ecc4f02cd9f6ba

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].$$

Note 15

20347e63d70945cdbe073a675dbcb23a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения предела интегральных сумм в терминах последовательностей.

Note 16

909d22f843c9421598278c307e29edb5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

Дать верхнюю оценку для $\omega_k(f \cdot g)$ через $\omega_k(f), \omega_k(g)$ и верхние границы f и g .

Note 17

aad31d4599b94b8f8ee128bfbfec8251

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

Частный случай произведения двух функций.

Note 18

76538508e5574126a26e4dbf06fe4160

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

$|f| = f \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Note 19

dea0bdf999ae4306b554167c63eeb231

Как показать, что sgn интегрируем?

Показать, что sgn кусочно непрерывен.

Note 20

6bb4953a2e6d41fb86cf8a801779a97f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

Представить $\frac{f}{g}$ как произведение функций $f \cdot \frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.

Note 21

8dcb53c3642547a5bec77126b490908d

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

Оценить $\omega_k(1/g)$ сверху через $\omega_k(g)$ и $\inf_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Лекция 04.04.22

Note 1

40ffb14c933540e0a82a0f491c2ea946

Интегрируема ли функция Дирихле χ на произвольном невырожденном отрезке?

■ Нет.

Note 2

488460418bc246fe90907796c4db58be

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, χ — функция Дирихле. Как показать, что $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$?

■ $\omega(\chi|_{[\alpha, \beta]}) = 1$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Note 3

fdad8aea720d4949805e6d411e4d9cd0

Интегрируема ли функция Римана ψ на произвольном промежутке $[a, b]$?

■ Да.

Note 4

c7099fd03a894c53b8c80146045e9127

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана.

$$\int_a^b \psi = \{c1:0.\}$$

Note 5

6350173ae50b44d8ac481bc4e58df52a

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. В чём ключевая идея доказательства того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

Показать, что множество

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \mid q \leq N \right\}$$

конечно.

Note 6

83b18cc44cff41fc8f13f721bb95887f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается N в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■ Так, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Note 7

e897ef9db02f489f8f78e18c71f5ee40

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается δ в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■
$$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}.$$

Note 8

aa4eace1713d444292a6cdb20f5d2bed

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Какой критерий интегрируемости используется в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■ Критерий в терминах $S_\tau - s_\tau$.

Note 9

ac79fc72aeb440e9a666f8dc2433dcc8

Пусть $\{\{c3:: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [c, d] \rightarrow [a, b].\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[c, d]\}\} \implies \{\{c1:: f \circ g \in \mathcal{R}[c, d].\}\}$$

Note 10

bc11b9f7a4304f74b4bb3118d30cea22

Пусть $\{\{c3:: a > b, f \in \mathcal{R}[b, a].\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: \int_a^b f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: - \int_b^a f.\}\}$$

Note 11

2be98235b82942f7bf08141dd983fe07

$$\int_a^a f \stackrel{\text{def}}{=} \{[c1: 0.]\}$$

Note 12

649accec0ca304bd5bc72134401215095

Пусть $f : [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, a] \stackrel{\text{def}}{\iff} \{[c1: \top.]\}$$

Note 13

cc427e206f4d435889e87acd827bc5b4

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\{[c2: \int_a^b f]\} = \{[c1: \int_a^c f + \int_c^b f.]\}$$

Note 14

f57dd9f306a5429bb89c68b128c0e01f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{[c2: \int_a^b \alpha f]\} = \{[c1: \alpha \int_a^b f.]\}$$

Note 15

5aaf74ed1c3e414cb5b7c501c5970206

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{[c2: \int_a^b (f \pm g)]\} = \{[c1: \int_a^b f \pm \int_a^b g.]\}$$

Note 16

d43171cbe636478098887433ff64ea61

Откуда следует линейность интеграла Римана?

Из определения в терминах последовательностей.

Note 17

8db1f43273d041d6b3fbc674270d4f5b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \geq 0.\}\}$$

Note 18

9778c1f4a58e4df9a9a25064935a647f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \leq g\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leq \int_a^b g.\}\}$$

Note 19

9ba16cbdf8fb4b65bd032cb56c483a1b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: \left| \int_a^b f \right| \}\}\{\{c1:: \leq \int_a^b |f| .\}\}$$

Note 20

275d3bae3cfa48e9882d2d2a90ed21b8

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: |f| \leq M \in \mathbb{R}\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leq M(b-a).\}\}$$

Note 21

84dfce5723b34bec8f05c42879c3e85f

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \wedge \int_a^b f = 0 \implies \{\{c1:: f \equiv 0.\}\}$$

Note 22

2f438df6b5304cd7acbd273214875635

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \implies f \equiv 0.$$

В чем основная идея доказательства?

От противного: допустить, что $\exists x_0 : f(x_0) > 0$ и использовать то, что $\exists \delta : f|_{V_\delta(x_0)} > 0$.

Note 23

03b2fb7149444b2db71b150b49f267a9

«Теорема Барроу»

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$ непрерывна в точке x_0 ,

$$\varphi(x) = \int_a^x f.$$

Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

Note 24

1109a435ae7543cf8263f72942677e95

«Первая теорема о среднем
интегрального исчисления»

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \geq 0$ (или $g \leq 0$), $m \leq f \leq M$. Тогда

«

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

»

Note 25

2e6a92e370ed4445a1cd67bd8d0241f9

В чем основная идея доказательства первой теоремы о среднем интегрального исчисления?

Показать, что

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$$

Note 26

bede3b8a7d14462fbd5fcb32d222eb2d

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g = 0$)?

■ μ — произвольное значение из $[m, M]$.

Note 27

9137b877b68a4313b09fc0b2e748f6a4

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g \neq 0$)?

■

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Лекция 08.03.22

Note 1

156407f3795145ac967ecf82e541fe0

Пусть $\{c2: f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[a, b], g \geq 0 \text{ (или } g \leq 0)\}.$ Тогда $\{c1:$

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

$\}$

(следствие из $\{c3:$ первой теоремы о среднем $\}$)

Note 2

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть $\{c2: f \in R[a, b], m \leq f \leq M.\}$ Тогда $\{c1:$

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b f = \mu(b - a)$$

$\}$

(следствие из $\{c3:$ первой теоремы о среднем $\}$)

Note 3

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть $\{c2: f \in C[a, b], m \leq f \leq M.\}$ Тогда $\{c1:$

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f = f(c) \cdot (b - a)$$

$\}$

(следствие из $\{c3:$ первой теоремы о среднем $\}$)

Note 4

df108f6ef527491996f1a2b6672c17fc

« $\{c3:$ Формула Ньютона-Лейбница $\}$ »

Пусть $\{c2: f \in \mathcal{R}[a, b], F \in \mathcal{P}_f([a, b]).\}$ Тогда $\{c1:$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

$\}$

Note 5

bddc676c2daa42f0b218c91eac244ace

В чем основная идея доказательства формулы Ньютона-Лейбница?

По теореме Лагранжа $\forall \tau \in T[a, b]$ существует оснащение $\{\xi_k\}$ такое, что

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)\Delta x_k.$$

Note 6

882e212c55614bb78548d3b6b7f2fbf2

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\llbracket c1 \rrbracket$ разность

$$f(b) - f(a)$$

\rrbracket называется $\llbracket c2 \rrbracket$ двойной подстановкой функции f на $[a, b]$.

\rrbracket

Note 7

b7e1b154b8de47bfbcb3d2afdf73ef75c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\llbracket c1 \rrbracket$ Двойная постановка функции f на $[a, b]$ \rrbracket обозначается $\llbracket c2 \rrbracket$

$$f|_a^b, f(x)|_a^b, f(x)|_{x=a}^b$$

\rrbracket

Note 8

1146663e8ded4d63ba85b1b1ed35cb14

Пусть $\llbracket c2 \rrbracket f \in \mathcal{R}[a, b], F \in \mathcal{P}_f([a, b] \setminus T), |T| < \aleph_0.$ Тогда $\llbracket c1 \rrbracket$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

\rrbracket

(обобщение формулы Ньютона-Лейбница)

Note 9

496225bfd55a484fa6f61e7174af39f4

В чём основная идея доказательства обобщения формулы Ньютона-Лейбница для $F \in \mathcal{P}_f([a, b] \setminus T), |T| < \aleph_0$.

TODO

Note 10

6e131dfc6d004e86a827f88367981953

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Какова, в общем случае, зависимость между интегрируемостью f и существованием у неё первообразной?

В общем случае прямой зависимости нет.

Note 11

dcb24ef22e6c4921924ad580a30722c6

«Интегрирование по частям
для определённого интеграла»

Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g.$$

}}

Note 12

a938ca4e00ae4fffa1db99f384e1785

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для определённого интеграла?

$$(fg)' = fg' + f'g \in \mathcal{R}[a, b],$$
$$\int_a^b (fg)' = fg \Big|_a^b.$$

Note 13

46828f8f846b4de1a73aed39d5b9d7a0

«Замена переменной в определённом интеграле»

Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

}}

Note 14

7d8af4366130490fbb87408d659837e7

В чем основная идея доказательства теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

Если $F \in \mathcal{P}_f([a, b])$, то $F \circ \varphi$ — первообразная функции

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Note 15

b6aa7eee0f404285b693fb392e8ea744

Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$, f — чётна. Тогда

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

Note 16

53ccd4a61cc742818562b58b9bdce5b4

Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$, f — нечётна. Тогда

$$\int_{-a}^a f = 0.$$