Лекция 07.02.22

Note 1

662fbe59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D$. {{c2:: Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n),$$
$$f(a) = p(a),$$

}} называется {{c1:: многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a.}}

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то {{c1:: он единственен.}}

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

> Пусть коэффициент r_m при $(x-a)^m$ — первый ненулевой коэффициент в многочлене $p-q$. Тогда
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} \xrightarrow[x \to a]{} r_m,$$
>
> но при этом
>
> $$\frac{p-q}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \implies r_m = 0.$$

Note 4

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

{{c2:: Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a}} обозначается {{c1:: $T_{a,n}f$.}}

Note 5

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::}\, f(a).\text{\}\}}$$

Note 6

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left((x-a)^k\right)^{(n)}\Big|_{x=a} = \text{\{\{c1::} \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases} \text{\}\}}$$

Note 7

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«{{c3:: Свойство n раз дифференцируемой функции}}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0.$$

}} Тогда {{c1:: $f(x) = o((x-a)^n), x \to a.$}}

Note 8

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o-малого в терминах ε, δ.»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a \overset{\text{def}}{\iff}$$

{{c1:: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$}}

Note 9

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$, {{c2:: $f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

}}

Тогда $f(x) =$ {{c1:: $o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$}}

Note 10

a6bfd750e8e142afadb6fb1ebdb5040d

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, f(a) = 0$,

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Каков первый шаг в доказательстве того, что

$$f(x) = o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a?$$

> Расписать равенство $f'(x) = o((x-a)^n)$ в терминах ε, δ. При этом δ выбирается так, что $\dot{V}_\delta(a) \subset D$.

Note 11

cb1eee862a1a4d34821bc2a7808afa0e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

В чем первая ключевая идея доказательства того, что

$$f(x) = o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a?$$

> По формуле конечных приращений
>
> $$f(x) = f'(a + \theta(x-a)) \cdot (x-a), \quad \theta \in (0,1).$$

Note 12

fe72b791cd844bf7909cbe33e50fd55d

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, f(a) = 0,$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

В чем вторая ключевая идея доказательства того, что

$$f(x) = o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a?$$

> $$a + \theta(x-a) \in \dot{V}_\delta(a) \implies |f'(a + \theta(x-a))| < \varepsilon |x-a|^n.$$

Note 13

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции?

> Индукция по n.

Note 14

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

> Из определения дифференцируемости следует, что
>
> $$f(x) = o(x - a).$$

Note 15

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n-раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

> Из индукционного предположения $f'(x) = o((x - a)^n)$, но тогда $f(x) = o((x - a)^{n+1})$

Note 16

99a8f041e1a34dba923a682c6500c46b

«{{c3::**Формула Тейлора-Пеано**}}»

Пусть {{c2:: $f : D \subset R \to \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}$ и f n раз дифференцируема в точке a. }} Тогда {{c1::

$$T_{a,n} f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

}}