Лекция 07.09.22

Note 1

1afcb80707524feb886d294c984a52dc

{{c2::Абсолютное значение}} мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ так же называют {{c1::порядком α.}}

Note 2

18494d24db8b401ab85e8094eb880381

{{c3::Многочленом n переменных со значениями в $\mathbb{R}^m$}} называется {{c4::отображение}} вида

$$x \mapsto \text{\{\{c1::} \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha, \text{\}\}}$$

где {{c2::$\{c_\alpha\} \subset \mathbb{R}^m$ — конечное семейство}} и {{c5::$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.}}

Note 3

3ac8ca4a2feb446b91d36973c81be6c9

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \not\equiv 0$,}} то {{c3::степенью}} многочлена p называется {{c1::число

$$\max\{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}.$$

}}

Note 4

b531da86b4704f8a98fa60c7e92fed4f

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Если {{c2::$p \equiv 0$,}} то {{c3::степень}} многочлена p полагают равной {{c1::$-\infty$.}}

Note 5

a810b4eb7a9c412e956ede41dfa9bf20

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. {{c2::Степень}} многочлена p обозначается {{c1::

$$\deg p.$$

}}

Note 6

208b23c3a625454aa756b911bec91ab0

Пусть $p : x \mapsto \sum c_\alpha x^\alpha$ — многочлен. Многочлен p называется {{c2::однородным,}} если {{c1::для всех $c_\alpha \neq 0$

$$|\alpha| = \deg p.$$

}}

Note 7

544930fdea1c4e5d80a0df01959e347d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, {{c4::$a \in \operatorname{Int} E$,}} {{c5::$s \in \mathbb{Z}_+$.}} {{c2::Многочлен p степени не выше s,}} для которого {{c1::

$$p(a) = f(a) \quad \text{и} \quad f(x) = p(x) + o(\|x-a\|^s), \quad x \to a,$$

}} называется {{c3::многочленом Тейлора f порядка s в точке a.}}

Note 8

eb19d56da526470cb6e9080b543d4274

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. {{c2::Многочлен Тейлора f порядка s в точке a}} обозначается {{c1::

$$T_{a,s} f.$$

}}

Note 9

933573807d4c48759570240ceab80b99

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он {{c1::единственный.}}

Note 10

58c9f6950530458f9675a1dbdf0ada74

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Если $T_{a,s} f$ существует, то он единственный. В чём ключевая идея доказательства?

> Разность двух многочленов есть $o(\|x-a\|^s)$, $x \to a$.

Note 11

279f256b32fa4f1597e48070542d1328

Пусть p — многочлен {{c2::степени не выше s,}} {{c3::$a \in \mathbb{R}^n$.}} Тогда если

$$p(x) = o(\|x-a\|^s), \quad x \to a,$$

то {{c1::$p \equiv 0$.}}

Note 12

f753051ba1584ae3809a7b03ecf311f7

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x - a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Note 13

dbbbdf10a7154a108f480966e50f47f4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства?

> Разбить p на однородные компоненты и рассмотреть $p(tx)$ как многочлен переменной t.

Note 14

f5bb46b7a1ed4834958c83c4ad14592b

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. Как представляется многочлен $p(tx)$ в доказательстве?

> $$p(tx) = \sum_k p_k(x) \cdot t^k,$$
>
> где p_k — однородный многочлен степени k.

Note 15

8d6ee9673c3342a08abd86f26262f4d4

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве, что нужно показать про многочлен $p(tx)$?

> $$p(tx) = o(|t|^s) \quad \text{при } x \to 0.$$

Note 16

d1c7e28676534f9c9c27d38c3b300a28

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x\|^s)$ при $x \to 0$, то $p \equiv 0$. В доказательстве мы получили, что $\sum_k p_k(x) \cdot t^k = o(|t|^s)$ при $t \to 0$. Что дальше?

> Применить аналогичную теорему к координатным функциям.

Note 17

833c8cc496364d6fa95263abe312262d

Пусть p — многочлен степени не выше s, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $p(x) = o(\|x-a\|^s)$ при $x \to a$, то $p \equiv 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $a \neq 0$)?

> $p(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$.

Note 18

6fd36ee18228464ca25e12817347ca1c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,0}f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f непрерывна в точке a.}}

Note 19

803bd99b5a65458a8e290e6262c9de9d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int} E$. $T_{a,1}f$ существует {{c2::тогда и только тогда, когда}} {{c1::f дифференцируемо в точке a.
}}

Note 20

2f87c61fe7f54f968db50ac94e832bae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда если {{c2::f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a,}} то {{c1::

$$f(a+h) = o(\|h\|^s) \quad \text{при } h \to 0.$$

}}

Note 21

1058f8e8aff94db385633d84438c4915

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. Каков первый шаг в доказательстве?

> Рассмотреть два случая: $m = 1$ и $m > 1$.

Note 22

5c30a0ff84484046b766901eef5af420

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m > 1$)?

> Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 23

82636304ac3c484eb96726ccdc702d46

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

> Индукция по s начиная с $s = 1$.

Note 24

e2a21df035814a499b4289ae94f9ce3b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, база индукции)?

> Выразить $f(a+h)$ через дифференциал, а его через производные.

Note 25

8470c9b044c34960816bc23c9dacd863

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда если f и все его частные производные порядка не выше s равны 0 в точке a, то $f(a+h) = o(\|h\|^s)$ при $h \to 0$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$, индукционный переход)?

> Индукционное предположение для первых частных производных и формула конечных приращений.

Note 26

440fc6e6c8f44ad2a31f2846aff7b4a1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}T_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.\text{}}}$$

«{{c4::Формула Тейлора-Пеано}}»

Note 27

2aeb576d5fa547d7bda0b219d979ee26

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s раз дифференцируемо в точке a. Тогда

$$T_{a,s}f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)(x-a)^\alpha.$$

В чём ключевая идея доказательства?

> $$\frac{\partial^\alpha (f-p)}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \text{для } |\alpha| \leqslant s.$$

Note 28

e0459301f4f34ae58524dc3c38939440

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::s раз дифференцируемо в точке a.}} Тогда

$$\text{{{c2::}}T_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}} \sum_{k=0}^{s} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}.\text{}}}$$

(в терминах дифференциалов)

Note 29

caac2b23fb274c30b7cb6175b0f99c2f

Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — {{c2::многочлен степени не выше s,}} $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$R_{a,s}p(x) = \text{{{c1::}}} 0.\text{}}}$$

Note 30

4be29edc8e4d451e828ecd8e46049315

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{{{c2::}}}\widetilde{\Delta}_{a,b}\text{}}} \overset{\text{def}}{=} \text{{{c1::}}}\Delta_{a,b} \setminus \{a, b\} .\text{}}}$$

Note 31

e167a0bd9f704b6c9c7939124e1af308

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c6::дифференцируемо $s + 1$ раз на E,}} {{c5::$a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,x}$}} для которой

$$\text{{{c3::}}}R_{a,s}f(x)\text{}}} = \text{{{c1::}}}\frac{d_c^{s+1} f(x-a)}{(s+1)!}.\text{}}}$$

«{{c7::Формула Тейлора-Лагранжа}}»

Note 32

41ca37ac01bb45e0a61e5ef62d8970de

В чём ключевая идея доказательства формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных?

> Одномерная формула Тейлора-Лагранжа для функции
>
> $$t \mapsto f(a + t(x - a)) .$$

Note 33

c38571e3a7ac499e984544d7e1cb11de

В доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных, что нужно показать про функцию

$$F(t) = f(a + t(x - a)) ?$$

$$F^{(n)}(t) = d^n_{a+t(x-a)}(x-a)\,.$$

Note 34

7f5a03f5166f49b497d15704c438d38a

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для отображений нескольких переменных показать, что

$$F^{(n)}(t) = d^n_{a+t(x-a)}(x-a)\,?$$

По индукции.

Note 35

fbe5728e68fa4357ac80eb83d92039eb

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных преобразуется выражение

$$(F^{(n-1)})'(t)\,?$$

Как $d_t F^{(n-1)}(1)$.

Note 36

af12b84501e247f4a5f10dc1858bed67

Как в доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных представляется отображение

$$t \mapsto d^n_{a+t(x-a)}(x-a)\,?$$

Как композиция дифференциала на приращении и экстраполирующей функции.

Note 37

f845965a42004f789787a9030d7bc8a9

В доказательстве формулы Тейлора-Лагранжа для нескольких переменных, как применяется одномерная формула Тейлора-Лагранжа к вспомогательной функции?

Для остатка $R_{0,s}F(1)$.

Note 38

f5319b0cf6d14e598448bc9db8842901

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

$$\text{\{\{c2::}\,\left|R_{a,s}f(x)\right|\,\text{\}\}} \leqslant \text{\{\{c1::}\,\sup_{c\in\widetilde{\Delta}_{a,x}} \frac{\left|d_c^{s+1}f(x-a)\right|}{(s+1)!}.\text{\}\}}$$

Лекция 14.09.22

Note 1

5bfe3eea62cf4923be0b768ada48f104

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c5::дифференцируема на E,}} {{c4::$a \neq b$ и $\Delta_{a,b} \subset E$.}} Тогда $\exists c \in$ {{c2::$\widetilde{\Delta}_{a,b}$}}, для которой {{c1::

$$f(b) - f(a) = d_c f(b-a).$$

}}

«{{c3::Теорема о среднем}}»

Note 2

43e52abb706d4b2490ad6248608ac691

В чём ключевая идея доказательства теоремы о среднем для функций n вещественных переменных?

> Формула Тейлора-Лагранжа для многочлена Тейлора степени 0.

Note 3

4772fe28cbb6493b9863306e7b371ceb

Верна ли формула Тейлора-Лагранжа для **отображений** нескольких переменных?

> Нет, только для функций.

Note 4

e3d62c0a50b24f098a41c202d267ca75

Пример отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, для которого не верна формула Тейлора-Лагранжа.

> $x \mapsto (\cos x, \sin x),\ a = 0,\ b = 2\pi.$

Note 5

26f3582d133f4c2894e1a02890184d65

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} дифференцируемо $s+1$ раз на E, $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

{{c2:: $$\left\| R_{a,s} f(x) \right\|$$ }}{{c3:: $$\leqslant$$ }}{{c1:: $$\frac{1}{(s+1)!} \cdot \sup_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \left\| d_c^{s+1} f(x-a) \right\| .$$ }}

«{{c4::Формула Тейлора-Лагранжа для отображений}}»

Note 6

5c06031a81b94fd487e37098de2b01a3

Для каких отображений формула Тейлора-Лагранжа гарантированно даёт конечную оценку остатка $R_{a,s}f(x)$?

> Для $s+1$ раз непрерывно дифференцируемых на области определения.

Note 7

a15c2119bc5c43b38389896cea1098b3

Пусть $f : E \subset$ {{c5::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c5::$\mathbb{R}^m$}} {{c4::непрерывно дифференцируемо $s+1$ раз на E,}} $a \neq x$ и $\Delta_{a,x} \subset E$. Тогда

{{c3:: $\|R_{a,s}f(x)\|$ }} $\leqslant$ {{c2:: $\dfrac{M}{(s+1)!}(\sqrt{n}\,\|x-a\|)^{s+1}$, }}

где

$M =$ {{c1:: $\max\limits_{|\alpha|=s+1} \sup\limits_{c \in \widetilde{\Delta}_{a,x}} \|\partial^\alpha f(c)\|$ }} $<$ {{c6:: $+\infty$.}}

$(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$

Note 8

785a0606f4ba4f8982e917a94bd795a4

Будем записывать элементы $\mathbb{R}^{n+m}$ в виде {{c1::(x,y),}} где $x \in$ {{c2::$\mathbb{R}^n$}}, $y \in$ {{c2::$\mathbb{R}^m$}}.

Note 9

0dc937ef2a384d4187a878487bec114b

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^{n+m}$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}^l$}} и существует $\psi :$ {{c3::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c3::$\mathbb{R}^m$}} такая, что {{c2::

$$f(x,y) = 0 \iff y = \psi(x),$$

}} то ψ называют {{c1::неявным отображением, порождённым уравнением $f(x,y)=0$.}}

Note 10

142e9f4e8b2b46f2adbaafa498f6208b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x,y)=0$,

$f'_x(a) :=$ {{c1:: $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]$ }} $\sim$ {{c2::$m \times n$.}}

Note 11

c673a237b83846babd512f854f96bb58

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда в контексте теоремы о неявном отображении, порождённом уравнением $f(x,y) = 0$,

$$f'_y(a) \coloneqq \text{{{c1::}} \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a)\right] \text{}}} \sim \text{{{c2::}} m \times m. \text{}}}$$

Note 12

0d54b2d03b084afebb7c5cc072280a39

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^{n+m}$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}^m$}}, {{c5::$f \in C^s(E)$.}} Тогда если

{{c1::

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \det f'_y(x^0, y^0) \neq 0,$$

}} то существуют такие {{c2::$\delta > 0$ и $\psi \in C^s(V_\delta(x^0))$,}} что

$$\text{{{c3::}} f(x,y) = 0 \iff y = \psi(x) \text{}}}$$
$$\forall (x,y) \in \text{{{c6::}} V_\delta(x_0, y_0). \text{}}}$$

«{{c7::Теорема о неявном отображении}}»

Note 13

5891b9dc6bf94339a65fafd5858d8186

Отображение ψ, введённое в теореме о неявном отображении называется {{c1::неявным отображением, порождённым уравнением $f(x,y) = 0$ в окрестности точки (x^0, y^0).}}

Note 14

d2223a858b21419e921d5878682e3338

В чём основная идея доказательства теоремы о неявном отображении (интуитивно)?

> $d_a f(x - x^0, y - y^0) = o(\|h\|) \implies d_a f(\ldots) = 0.$

Note 15

dd7bb23f22a042dab6dacf623aca0455

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,\ (x^0, y^0) \in E$. Если {{c2::в окрестности точки (x^0, y^0) уравнение $f(x,y) = 0$ порождает неявную функцию,}} то f называется {{c1::локально разрешимым в точке (x^0, y^0).}}

Note 16

0e4cd0362fdd4f31a10ea88deaf016fc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Если {{c2::$f$ локально разрешимо в любой точке E,}} то f называется {{c1::локально разрешимым на E.}}

Лекция 21.09.22

Note 1

434affe9da3e443d839f4a7d6af1b180

Чем определение экстремума для функций n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

Ничем.

Note 2

2efcc79ba51544848aacbd7da7dfa4b1

В определении экстремума функции n вещественных переменных, для каких x требуется выполнение соответствующего неравенства?

$\forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D(f)$.

Note 3

30ab720865e54af19fcc351cfa78d165

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ {{c3::дифференцируема в точке a.}} Точка a называется {{c2::седловой,}} если {{c1::$d_a f \equiv 0$ и a — не экстремум.}}

Note 4

27a6b8777b9b4bb9919dcfa31d963432

{{c2::Тождественно нулевой оператор}} обозначается {{c1::$\mathbb{O}$.}}

Note 5

43fd5e0b1a8b410a887c991151fac7e0

Пусть $f : E \subset$ {{c4::$\mathbb{R}^n$}} $\to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c3::дифференцируема в точке a.}} Если {{c2::a является точкой экстремума,}} то {{c1::$d_a f \equiv 0$.}}

Note 6

834aecf3894642098d0ddc0256091117

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a. Если a является точкой экстремума, то $d_a f \equiv 0$.

«{{c1::Необходимое условие экстремума}}»

Note 7

e5cfde8512814dbbaed4676461636b0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c3::дифференцируема в точке a.}} Точку a называют {{c2::стационарной для f,}} если {{c1::$d_a f \equiv 0$.}}

Note 8

c658e89677264e7bb7317334e026304e

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных?

> Рассмотреть функции $t \mapsto f(a + te^k)$.

Note 9

02b9316ee1f84262ae08eebecbe71c2b

В доказательстве необходимого условия экстремума для функций n вещественных переменных, мы положили

$$F_k(t) = f(a + te^k).$$

Что нужно показать про функцию F_k?

> 0 — точка экстремума F_k и рассмотреть $F_k'(0)$.

Note 10

ec6b1873ffe44cc48c87520ef5bf2f10

Какие случаи не охватываются необходимым условием экстремума?

> Когда дифференциал сохраняет знак, но не является положительно или отрицательно определённым.

Note 11

091dad1735594dfa8923e46c5a461ab0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ {{c4::дважды дифференцируема в точке a,}} {{c3::$d_a f \equiv 0$.}} Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ положительно определён,}} то {{c1::a — точка строгого минимума f.}}

Note 12

a87f168ae18d4f65b7595866b9407e8d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ отрицательно определён,}} то {{c1::a — точка строгого максимума f.}}

Note 13

4643a84f76b84c9bbc34e220ee2196c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если {{c2::$d_a^2 f$ принимает как положительные, так и отрицательные значения,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

Note 14

41fccd97c432427e893b7c1e3b850374

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to$ {{c4::$\mathbb{R}$}} {{c3::дважды дифференцируема в точке a.}} {{c2::Матрица квадратичной формы $d_a^2 f$}} называется {{c1::матрицей Гессе f в точке a.}}

Note 15

36db8ae7809a4dcbb6f350f51ca0a54c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a. {{c2::Матрица Гессе f в точке a}} обозначается {{c1::$H(f)$.}}

Note 16

5ffaf8568eaa4a8fbb3815c215d20c25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a. {{c2::Матрица Гессе f в точке a}} имеет вид

{{c1:: $$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] \sim n \times n.$$ }}

Note 17

56bf1e23f53c4cae8d62101295cb0a9b

Пусть $f : E \subset$ {{c3::$\mathbb{R}^2$}} $\to$ {{c3::$\mathbb{R}$}} дважды дифференцируема в точке a, {{c4::$d_a f \equiv 0$.}} Тогда если {{c2::$\det H(f) < 0$,}} то {{c1::f не имеет экстремума в точке a.}}

(в терминах $H(f)$)

Note 18

b78c95a2236a4edf964b8e2a29238dae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a, $d_a f \equiv 0$. Тогда если $\det H(f) < 0$, то f не имеет экстремума в точке a. В чём ключевая идея доказательства?

> Зафиксировать одну компоненту приращения $d_a^2 f$ и показать, что он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Note 19

535062161d6044bdb41631a3ae479223

{{c2::Дополнительные равенства, которым должны удовлетворять точки из области определения f}} в определении понятия условного экстремума называются {{c1::уравнениями связи.}}

Note 20

7dc4fe4c435946a091efc32d6a120ec1

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, {{c4::$\Phi : E \to \mathbb{R}^m$,}} $a \in E$, {{c3::$m < n$.}} Если {{c1::a является точкой экстремума сужения f на множество

$$\{x \in E \mid \Phi(x) = \Phi(a)\},$$

}} то a называется {{c2::точкой условного экстремума f, подчинённого уравнениям связи $\Phi(x) = \Phi(a)$.}}

Note 21

efdc5b1690a340499b26b776ada24e98

Точку условного экстремума так же называют {{c1::точкой относительного экстремума.}}

Note 22

9f8b54ca8ee64e32987bdb713c25e8d7

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что

$$\{\{c2::\Phi(a)\}\} = \{\{c1::0.\}\}$$

Note 23

7866e63fde9849e0aaf93125f6796f8c

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что $\Phi(a) = 0$?

> Всегда можно рассмотреть $\Phi^* : x \mapsto \Phi(x) - \Phi(a)$.

Note 24

fce85d7d2d244b4daaa0334b43719a92

В определении условного экстремума не умаляя общности считают, что {{c2::$\Phi'(a)$}} {{c1::невырождена.}}

Note 25

b53cabc0b0a24f6ead9453c041ad560d

Почему в определении условного экстремума можно не умаляя общности считать, что $\Phi'(a)$ невырождена?

> Иначе какое-то из условий следует из остальные.

Лекция 28.09.22

Note 1

ffe18c64640a4c0c9009a7e054fc1af5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, {{c6::$m < n$,}} $f \in$ {{c4::$C^1(E, \mathbb{R})$}}, $\Phi \in$ {{c4::$C^1(E, \mathbb{R}^m)$}}, $a \in E$, {{c5::$\operatorname{rk} \Phi'(a) = m$.}} Тогда если {{c3::$a$ — условный экстремум f, подчинённый $\Phi(x) = 0$,}} то {{c2::$\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$,}} для которых {{c1::

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

}}

Note 2

af9f952d67cd4db8a2bc302521d5f590

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $a \in E$, $\operatorname{rk} \Phi'(a) = m$. Тогда если a — условный экстремум f, подчинённый $\Phi(x) = 0$, то $\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$, для которых

$$\nabla f(a) = \sum_k \lambda_k \cdot \nabla \Phi_k(a).$$

«{{c1::Необходимое условие относительного экстремума}}»

Note 3

82213d3b2284465e9b85ecf7bcfe686b

{{c2::Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$}} из теоремы о {{c3::необходимом условии относительного экстремума}} называются {{c1::множителями Лагранжа f в точке a.}}

Note 4

832a0c560cf747c492a100c673d806cc

В чём ключевая идея доказательства необходимого условия относительного экстремума?

> Теорема о неявной функции для $\Phi(x, y) = 0$.

Note 5

9434998277aa4d2d946b7fcdfecf36f8

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума мы построили неявную функцию ψ из уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Что дальше?

▌ Рассмотреть $f(x, \psi(x)) - \lambda\Phi(x, \psi(x))$.

Note 6

feb9eccc46494af296a7c929c6b4fd57

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x\Big|_{\{\{c2::\boldsymbol{x^0}\}\}} = \{\{c1::0.\}\}$$

Note 7

038381f4bf64457da1a04c86b8ab0eb5

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$f(x, \psi(x))'_x\Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

▌ x_0 — т. экстремума $f(x, \psi(x))$.

Note 8

63892565775440a9afc699c3c9ed5419

В доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x\Big|_{\{\{c2::\boldsymbol{x^0}\}\}} = \{\{c1::0.\}\}$$

Note 9

b333ed4af4a44349b84e8aed99b46a18

Почему в доказательстве необходимого условия относительного экстремума

$$\Phi(x, \psi(x))'_x\Big|_{x^0} = 0 \quad ?$$

▌ $\Phi(x, \psi(x)) = 0$ в окрестности x^0.

Note 10

082928b830ed48038502597330cc2d6b

Чему равно λ из теоремы о необходимом условии относительного экстремума?

$$\lambda^T = f'_y(a) \cdot \left(\Phi'_y(a)\right)^{-1}.$$

Note 11

c403eaa3be2d4d1dac52b422443e29b2

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума отображение

$$\{\{c3::(x, \lambda)\}\} \mapsto \{\{c2::f(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Phi_k(x)\}\}$$

называется {{c1::функцией Лагранжа.}}

Note 12

5568e5ccac324a0cb09e98b4ba65503b

В условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума {{c2::функция Лагранжа}} обозначается {{c1::$L(x, \lambda)$.

}}

Note 13

113bd38c503e4af990386a637b1aa830

Необходимое условие относительного экстремума в терминах функции Лагранжа примет вид {{c1::

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \nabla L(a, \lambda) = 0.$$

}}

Note 14

10647bd11e764a13b935dd15418841c6

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. f называется {{c2::положительно определённой на N,}} если {{c1::$f|_N$ положительна определена.}}

Note 15

24a7c3a60b0144b78d3bdf59396178e9

Пусть $N \triangleleft \mathbb{R}^n$, f — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$. f называется {{c2::отрицательно определённой на N,}} если {{c1::$f|_N$ отрицательно определена.}}

Note 16

6af1663b3c2f432eb8d779d75937d630

Пусть в условиях теоремы {{c6::о необходимом условии относительного экстремума}} $f \in$ {{c5::$C^2(E)$}} и $g \in$ {{c5::$C^2(E)$}} Положим $L(x) =$ {{c4::$L(x, \lambda)$}}, где λ — {{c3::множители Лагранжа. }} Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ положительно определён на $\ker d_a \Phi$,}} то {{c2::a — точка условного минимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.

}}

Note 17

1abdb12e039f42bb991a4e08218e2bc0

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$ Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ отрицательно определён на $\ker d_a \Phi$,}} то {{c2::a — точка условного максимума, подчинённая $\Phi(x) = \Phi(a)$.}}

Note 18

18275ac96f4145228cd295901a3c4aeb

Пусть в условиях теоремы о необходимом условии относительного экстремума $f \in C^2(E)$ и $g \in C^2(E)$ Положим $L(x) = L(x, \lambda)$, где λ — множители Лагранжа. Тогда если {{c1::$d_a^2 L$ принимает на $\ker d_a \Phi$ как положительные, так и отрицательные значения,}} то {{c2::f не имеет в точке a условного экстремума, подчинённого $\Phi(x) = \Phi(a)$.}}

Note 19

b5b66b7db90b4d1bacf06b32b1446fcb

Пусть {{c3::$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — вещественная последовательность.}} {{c2::Рядом}} называется {{c1::формальное выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

}}

Note 20

a5592c04ea8d40cd952f2bf6391ed438

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. {{c2::Элемент a_k}} называется {{c1::общим членом ряда.}}

Note 21

ff62bd61f29a475eb73a358793f8a46a

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, {{c3::$n \in \mathbb{N}$.}} {{c2::Сумму вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

}} называют {{c1::частичной суммой ряда.}}

Note 22

515ccf52bf2e4d89a5a2c282984860f2

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд, $n \in \mathbb{N}$. {{c1::Сумму

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n$$

}} часто обозначают {{c2::S_n.}}

Note 23

ad2ee0b419444746bd51026b07fa19d6

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. {{c1::Величина

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

}} называется {{c2::суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.}}

Note 24

6505e18ad4754436aa6c22aae25686bd

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Если {{c2::величина A есть сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$,}} то пишут {{c1::

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

}}

Note 25

a3c5b50440ad4896bb8af7492d946bc5

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд {{c2::сходится,}} если {{c1::его сумма существует и конечна.}}

Note 26

fb03f6a351984ebf8a7077cc5c2126e4

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — вещественный ряд. Говорят, что ряд {{c2::расходится,}} если {{c1::он не сходится.}}

Семинар 05.10.22

Note 1

80570e9f813648cfa0315b3dd7e327a3

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, как определяется знакоопределённость $d_a^2 L$ на $\ker d_a \Phi$?

> Через миноры матрицы
> $$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

Note 2

66548b31237c4009a91c2423d6836660

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какие миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

рассматриваются для определения знакоопределённости $d_a^2 L$ на $\ker d_a \Phi$?

> Начиная с Δ_{2m+1}. (m — количество уравнений связи.)

Note 3

ae3633661bf248a389c6fc301e701039

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы a была точкой условного минимума?

> Все имеют знак $(-1)^m$.

В условиях теоремы о достаточном условии относительного экстремума, какими должны быть рассматриваемые миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi' \\ (\Phi')^T & H(L) \end{bmatrix}.$$

чтобы a была точкой условного максимума?

> Первый имеет знак $(-1)^{m+1}$ и далее чередуются.

Лекция 26.10.22

Note 1

f86d2dd9e8f64a59a96d4d321a706cc4

Как определяется переместительное свойство ряда (интуитивно)?

> Перестановка элементов не влияет на сумму.

Note 2

eda4110756264d5885252e3c548ad9ac

Применимо ли переместительное свойство к расходящимся рядам?

> Да.

Note 3

f0d78b12e0654f259e4b5390870df0e0

Что означает преместительное свойство в контексте расходящихся рядов?

> Любая перестановка тоже расходится.

Note 4

2bd23513ad354d76a4f5dfcc5b23cf38

Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$. {{c1::Величина

$$\sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

}} называется {{c2::Чебышёвским уклонением.}}

Note 5

806916674138455a8d97f6dc173173b2

Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$. {{c2::Чебышёвское уклонение}} обозначается {{c1::$\rho(f, g)$.}}

Лекция 09.11.22

Note 1

20bbdbfc6a3e47d5a68ff0fe6148f498

Пусть {{c3::f и все f_n интегрируемы на $[a, b]$}} и {{c2::$f_n \rightrightarrows f$.}} Тогда {{c1::

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

}}

Note 2

8ac3641f138f4e04a7f112015f0cc4df

Пусть f и все f_n интегрируемы на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

«{{c1::Предельный переход под знаком интеграла}}»

Note 3

9ab163a208184d589048e4103dbf7978

Пусть все f_n и f интегрируемы и $f_n \to f$. При каком условии можно выполнять предельный переход под знаком интеграла $\int_a^b f_n$?

> Если сходимость равномерна.

Note 4

73d904ec0c8444e989c74d892653ef06

Пример, показывающий, что поточечной сходимости не достаточно для выполнения предельного перехода под знаком интеграла.

> $$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{на } [0, 1]$$

Note 5

4a61840b6b7e43d88e86a8f43109394f

В чём основная идея доказательства теоремы о предельном переходе под знаком интеграла?

> Определение равномерной сходимости и оценка сверху для модуля разности интегралов.

Лекция 16.11.22

Note 1

cbbd0644365c41c8bad0a7182149b40d

Пусть {{c3::все f_n и $\sum f_n$ интегрируемы на $[a, b]$.}} Если {{c2::$\sum f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$,}} то {{c1::

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

}}

Лекция 23.11.22

Note 1

81b3a95a5a394f6792bcb6ecfeba6cc8

Степенной ряд можно {{c2::интегрировать почленно}} по любому отрезку внутри {{c1::множества сходимости.}}

Note 2

a4e98cb1efd6427b8caee76f4a590979

Степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку внутри множества сходимости. В чём ключевая идея доказательства?

> Степенной ряд сходится равномерно на любом таком отрезке.

Лекция 30.11.22

Note 1

e71a98c1f27443538a4b0775e3034bd8

Какие ряды рассматриваются в теореме о радиусах степенных рядов?

> Степенной ряд и ряды производных и первообразных его членов.

Note 2

d1689e2077044a749292b08131dd2c51

Что утверждается в теореме о радиусах степенных рядов?

> Рассматриваемые ряды имеют одинаковые радиусы сходимости.

Лекция 07.12.22

Note 1

2e2030ff369747f6a18c94defaa57ba9

Пусть $f : (A, B) \to \mathbb{R}, a \in (A, B)$. Функция f называется {{c2::аналитической в точке a,}} если {{c1::на окрестности точки a она представляется степенным рядом с центром в точке a.}}

Note 2

24d660592f734550a7586675e3b2e307

Пусть $f : (A, B) \to \mathbb{R}$. Функция f называется {{c2::аналитической на промежутке (A, B),}} если {{c1::она аналитична в каждой точке (A, B).}}

Note 3

124c24286bb94e2281c6386440f38d2c

В чём основная задача анализа Фурье?

> Разложение периодических функций в ряд по косинусам и синусам.

Note 4

f659146465f64b918c69ce46c8ae72e5

Задачей {{c2::анализа Фурье}} является поиск разложения вида

$$f(x) = \text{\{\{c1::}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \,.\text{\}\}}$$

Note 5

c6879c7d93d34aadac9c7b7f69bdc5eb

Разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \,.$$

применимо к функциям {{c1::с периодом 2π.}}

Note 6

2af4cc16ab5c4331ba6fdc4d8e33606d

Пусть функция f имеет период T. Как привезти её к функции с периодом 2π?

> Рассмотреть
> $$x \mapsto f\left(\frac{x}{2\pi} \cdot T\right).$$

Note 7

dfca446221d84d72a637ce570b31bbce

Чем примечательно интегрирование периодических функций?

> Значение интеграла по промежутку длиной в период не зависит от сдвига промежутка.

Note 8

512ee88e6cec4fa193d82ca1d7252a90

Как показать, что система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

ортогональна?

> Явно вычислить скалярные произведения, используя формулы для произведений $\sin$ и $\cos$.

Note 9

cf31d7904d0f4319829798700280b559

В контексте какого скалярного произведения система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

является ортогональной?

> $$(f, g) = \int_0^{2\pi} fg\,.$$

Note 10

e680e2296ca447878109aa1bd98e0564

$$\int_0^{2\pi} \sin mx = \text{\{\{c1::}0,\text{\}\}} \quad (n > 0).$$

Note 11

a263ac35453841f1a469b0b5826b0799

$$\int_0^{2\pi} \cos nx = \text{\{\{c1::}0,\text{\}\}} \quad (n > 0).$$

Note 12

5c3bed81f2b94a069fc8c60688cd3739

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \text{\{\{c1::}0,\text{\}\}} \quad (\text{\{\{c2::}\forall n, m\text{\}\}})$$

Note 13

4cb5eceb345d4acbb7db16116de48c3b

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \text{\{\{c1::}0,\text{\}\}} \quad (\text{\{\{c2::}n \neq m\text{\}\}}).$$

Note 14

198569868a6b4e77a0e1891b73c4c088

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \text{\{\{c1::}\pi.\text{\}\}}$$

Note 15

2b2d5635b2a14ee18b7cf8824f1bbc56

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \text{\{\{c1::}0,\text{\}\}} \quad (\text{\{\{c2::}n \neq m\text{\}\}}).$$

Note 16

69df715bc9ba414bae72641bbf74d1f5

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \text{\{\{c1::}\pi.\text{\}\}}$$

Note 17

8a035b960ad54a9aa060b304bf8462ee

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Как можно найти значения коэффициента a_k?

> Проинтегрировать $f(x)\cos kx$ на $[0, 2\pi]$.

Note 18

ebe1bbbdc4ce44c5941e1f2e887651d9

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Тогда

$$a_k = \text{\{\{c1::}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,.\text{\}\}}$$

Note 19

8a5ae715c85e4758b5c5fcc97e93bcd9

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Как можно найти значения коэффициента b_k?

> Проинтегрировать $f(x)\sin kx$ на $[0, 2\pi]$.

Note 20

cfcfaee0ac304ebe95c11b2b5c016c7d

Пусть функция f имеет разложение вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Тогда

$$b_k = \text{\{\{c1::}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.\text{\}\}}$$

Note 21

67542462c1d046c7b986155c804058a9

Пусть f периодична с периодом 2π. Коэффициенты,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

называются {{c1::коэффициентами Фурье функции f.}}

Note 22

7045668d58db45ad9892a6b3813128fd

Пусть f периодична с периодом 2π. {{c2::Разложение f по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ с коэффициентами Фурье}} называется {{c1::рядом Фурье функции f.}}

Note 23

e548ae34226a44dbb7bff902ff24ce38

Коэффициенты перед {{c2::$\cos nx$}} в ряде Фурье периодической функций обычно обозначаются {{c1::a_n.}}

Note 24

485d606663f741c4aa0456d205bff990

Коэффициенты перед {{c2::$\sin nx$}} в ряде Фурье периодической функций обычно обозначаются {{c1::b_n.}}

Note 25

fdee5342607e4a57933450d0d3fe819e

Как строится ряд Фурье для функции, определённой на конечном интервале?

> Сначала функция периодически продолжается на всю числовую ось.

Лекция 14.12.22

Note 1

fe7d28e98d744f1981b58bcd9b88eb53

Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется {{c2::кусочно гладкой на множестве D,}} если {{c1::её производная кусочно-непрерывна на D.}}

Note 2

a11d984e49654f1fbe979c15242cc24b

Для удобства будем считать, что периодическая функция является {{c2::кусочно-непрерывной,}} если {{c1::она кусочно-непрерывна на каком-либо отрезке длинной в период.}}

Note 3

49958c86df924ee8b4f132d6cb5e5ab9

Какой вопрос рассматривается в теореме Дирихле (о рядах Фурье)?

> Сходимость ряда Фурье периодической функции.

Note 4

9d03d5873804424896da3f6d23a32213

Каким видом условия является теорема Дирихле (о рядах Фурье)?

> Достаточным.

Note 5

1658d6c012f44632ac5d5b1a42ff3bbf

Какая функция рассматривается в теореме Дирихле (о рядах Фурье)?

> Кусочно-гладкая на отрезке длинной в период.

Note 6

5f323e2ec77b4cfa81fe10bc0ef46eb2

Что мы заключаем из теоремы Дирихле (о рядах Фурье)?

> Ряд Фурье функции сходится в любой точке к среднему значению односторонних переделов.

Note 7

18b17e6720aa4d3f85dbe0d61d54dc23

Что мы заключаем из теоремы Дирихле (о рядах Фурье) для точек непрерывности функции?

> Ряд Фурье сходится к функции.

Note 8

a04607043611474398e000b5085c0486

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции?

> Сходится в любой точке (но не обязательно к самой функции.)

Note 9

6fc46361ef9349e1985098dcd7af4b4d

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции в точках её непрерывности?

> Сходится к значению функции.

Note 10

54ef07badb244f39a259e3237d5855c8

Как ведёт себя ряд Фурье кусочно-гладкой периодической функции в точках её разрыва?

> Сходится к среднему значению односторонних пределов.

Note 11

b5963613427a41178042d681a5259f4f

Как выглядит ряд Фурье функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$?

> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \,.$$

Note 12

e8a7d9c8925a418188d9ee3362f79705

Как с использованием рядов Фурье можно найти значение ряда
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ?$$

> Использовать ряд Фурье $f(x) = x$ в точке $\frac{\pi}{2}$.

Note 13

730f19be667548e9b24c9ce33ea43784

Для каких периодических функций ряд Фурье обязан сходится абсолютно?

> Для непрерывных и кусочно-гладких.

Note 14

bbe026a519824222b2c98c639678857a

Для каких периодических функций ряд Фурье обязан сходится равномерно?

> Для непрерывных и кусочно-гладких.

Note 15

5c566e83fa0340c58eac557785785279

Что можно сказать о ряде Фурье непрерывной кусочно гладкой периодической функции?

> Он сходится к ней абсолютно и равномерно.

Note 16

aa0ff21a64b54ffd97cd4c26310596a9

Пусть периодическая функция f имеет непрерывные производные порядка вплоть до $N - 1$ и кусочно-непрерывную производную порядка N. Что можно сказать о её ряде Фурье?

> $$|f(x) - s_k(x)| < \frac{\delta_k}{k^{N-1/2}}\,, \quad \text{где } \delta_k \to 0\,.$$

Note 17

24eb28a514eb4fc2811401b3ee9164d8

Для каких периодических функций верна оценка

$$|f(x) - s_k(x)| < \frac{\delta_k}{k^{N-1/2}}\,, \quad \text{где } \delta_k \to 0\,,$$

для остатка ряда Фурье?

> Имеющих непрерывные производные порядка вплоть до $N-1$ и кусочно-непрерывную производную порядка N.

Note 18

4c6aad88a3934ce89326f70fa8fdbeb0

Пусть f периодична и $f^{(k)}$ кусочно-гладка. Что можно сказать о коэффициентах ряда Фурье f?

> $$a_n, b_n = o(1/n^{k+1})\,, \quad n \to \infty\,.$$

Note 19

9b59e17ad69d491e8297660c69a7f64c

Для каких периодических функций верна оценка

$$a_n, b_n = o(1/n^k)\,, \quad n \to \infty\,,$$

для коэффициентов ряда Фурье?

> Имеющих кусочно-гладкую производную порядка $k-1$.

Note 20

15a14a3394e24021a7a78a7cb85cf781

Пусть f периодична, $f^{(k-1)}$ непрерывна и $f^{(k)}$ кусочно-гладка. Что можно сказать о коэффициентах ряда Фурье f?

> $$a_n, b_n = O(1/n^{k+1})\,, \quad n \to \infty\,,$$

Note 21

e9cbe9cc647b4cf7b15c0476a89bb310

Для каких периодических функций верна оценка

$$a_n, b_n = O(1/n^k)\,, \quad n \to \infty\,,$$

для коэффициентов ряда Фурье?

> Таких что $f^{(k-2)}$ непрерывна и $f^{(k-1)}$ кусочно-гладка.

Note 22

2b5908be228748108c55d8da7d970a5d

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Для какого выражения даётся верхняя оценка в неравенстве Бесселя, в контексте ряда Фурье f?

> $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2)\,.$$

Note 23

966d28a6d438455b9f7dc0d5a608af56

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Какое выражение выступает в качестве верхней оценки в неравенстве Бесселя, в контексте ряда Фурье f?

> $$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2\,.$$

Note 24

c1eb80029ccc472590e25f079f413198

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Допускает ли неравенство Бесселя, в контексте ряда Фурье f, равенство левой и правой его частей?

> Да.

Note 25

51cba508f22a4be288d572f18d428542

Для каких периодических функций выполняется неравенство Бесселя для коэффициентов ряда Фурье?

> Для любых.

Note 26

a8c7cbed087d4a4eabdd85ccfc7ce2ec

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Как называется неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2$$

для коэффициентов ряда Фурье f?

> Неравенство Бесселя.

Note 27

7b93ebc1526c495c84cb4ac052cd0641

Что моментально следует из неравенства Бесселя в контексте рядов Фурье?

> Ряд из сумм квадратов коэффициентов сходится.

Note 28

303c44053e5f4bcebada6128be2e8a82

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Что устанавливает равенство Парсеваля, в контексте ряда Фурье f?

> Неравенство Бесселя в пределе обращается в равенство.

Note 29

a64141f971434ca0880e5256d1e3e5f0

Для каких периодических функций выполняется равенство Парсеваля для коэффициентов ряда Фурье?

▌ Квадратично-интегрируемых.

Note 30

15bdb891041c4f00a17f6c19d4244acc

Пусть f — квадратично интегрируемая, 2π-периодическая функция. Как называется равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2$$

для коэффициентов ряда Фурье f?

▌ Равенство Парсеваля.

Семинар 23.12.22

Note 1

7c999c871dc44972b63eb58569ebb0a1

Как радикальный признак Коши применяется к комплексным рядам?

> Так же, как к вещественным.

Note 2

4f946c4839c64b6ea3c62676a3dbe503

Как признак Даламбера применяется к комплексным рядам?

> Так же, как к вещественным.

Note 3

7ca2abd7e18c49fa9d428134d358aae9

Как формула Коши-Адамара применяется к комплексным степенным рядам?

> Так же, как к вещественным.

Note 4

5ae400877c8c4b039cfebcabc92d3b07

Сходится ли ряд $\sum \frac{|\cos 3n|}{\sqrt{n}}$?

> Расходится.

Note 5

f5e47353454b4e4fafc3b0c27a0e95ee

Как показать расходимость ряд $\sum \frac{|\cos 3n|}{\sqrt{n}}$?

> Оценить снизу через квадрат косинуса + формула понижения степени.

Note 6

52af15d5e4b34a538fec7a76ab2870b6

Почему ряд $\sum \frac{1+\cos 6n}{2\sqrt{n}}$ расходится?

> Он представляется как сумма расходящегося и сходящегося рядов.

Лекция 21.12.22

Note 1

f075132ed82c4c6a87d2bacaeb61a7a6

Как определяется частичная сумма ряда $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$?

> Сумма от a_{-k} до a_k.

Note 2

52518a8f21a94b5ca40cce0ed48b6420

Как ряд Фурье запаивается в экспоненциальной форме?

> $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Note 3

5cb814e06e514bbab9de89636a2056de

Как ряд Фурье в тригонометрической записи привести к экспоненциальной форме?

> Через формулы Эйлера.

Note 4

2a543da90ce94d149fc00d00159cf586

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Как c_n выражается через a_n, b_n для $n > 0$?

> $\frac{1}{2}(a_n - ib_n)$.

Note 5

8f1f4605f0d643f3a81edcb52c36b5bf

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Как c_{-n} выражается через a_n, b_n для $n > 0$?

> $\frac{1}{2}(a_n + ib_n)$.

Note 6

17d3e4c6c13d4ff68957bcc03f88748d

Пусть дан ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} .$$

Как c_0 выражается через изначальные коэффициенты?

> $\frac{a_0}{2}$.

Note 7

613d457df89a4ad68ab32c124f308600

Пусть f периодична с периодом 2π. Как выводится интегральная формула для коэффициентов ряда Фурье f?

> Через их связь с коэффициентами в тригонометрической записи.

Note 8

d3624b2bd96a4696b561dcae634c1da1

Пусть f периодична с периодом 2π. Как определяются коэффициенты Фурье f в тригонометрической форме?

> $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx .$$

Note 9

e909dbe9a169419ea86fe2c964eae6a6

Как ядро Дирихле определяется в экспоненциальном виде?

> Как частная сумма ряда
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{iku} .$$

Note 10

fa9bdfb72168417c97cb711c6b13a465

Как ядро Дирихле определяется в тригонометрическом виде?

> Частичная сумма ряда
> $$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos ku\,.$$

Note 11

e6e5ee10845646ab8dcd748471112d90

Как ядро Дирихле выражается аналитически?

> $$u \mapsto \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})u\right]}{\sin\frac{u}{2}}\,.$$

Note 12

9b31df11e6da4d819e4225dbf0471337

Как из тригонометрического вида ядра Дирихле получить его аналитическое выражение?

> Умножить и поделить на $\sin\frac{u}{2}$.

Note 13

2dce5c69dca3450aaee6de2527a3d7dc

Как из экспоненциального вида ядра Дирихле получить его аналитическое выражение?

> Частичная сумма геометрической прогрессии и формулы Эйлера.

Note 14

0d94bfa61d9242c9ae0ff4778349f8cd

{{c2::Ядро Дирихле порядка n}} обозначается {{c1::$D_n(\,\cdot\,)$.}}

Note 15

b6451f88225242628cd856a597e2f5f7

Ядро Дирихле порядка n периодично с периодом {{c1::2π.}}

Note 16

2f9896b98be041e09a26a90329bab0a3

$$D_n(0) = \text{\{\{c1::}2n + 1.\text{\}\}}$$

(D_n — ядро Дирихле.)

Note 17

7bcf23025ba446029af812c04f251f89

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \text{\{\{c1::}2\pi.\text{\}\}}$$

(D_n — ядро Дирихле.)

Note 18

33851282ccac4f6dac70325562a6aa45

Интегральная формула для частичной суммы ряда Фурье...

> $$\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)\,du\,.$$

Note 19

a6d637214d9f42cd8836fad0a5a39966

Как выводится интегральная формула для частной суммы ряда Фурье?

> Из интегральных формул для коэффициентов и линейности интеграла.

Note 20

184da0d0964b462886c144f907c1dafc

Пусть f периодична с периодом 2π. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)\,du$$

есть значение {{c1::n-й частичной суммы ряда Фурье f.}}

Note 21

0a7db5e527cf439382b61f1e7c347d15

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} f \overset{\text{def}}{=} \text{\{\{c1::} \int_{-\infty}^{+\infty} f\ .\text{\}\}}$$

Note 22

adfe18ba7f9749c7961ecfb7d937ffda

Какие функции рассматриваются в лемме Римана-Лебега?

> Абсолютно интегрируемые на всей вещественной оси.

Note 23

9dbf920feee84079a6a4f541c78c6924

Какое условие ставится в лемме Римана-Лебега?

> Конечность $\int_{\mathbb{R}} |f|$.

Note 24

5e6e11bdfaca408c965d6f7e3a98833a

Поведение какого интеграла рассматривается в лемме Римана-Лебега?

> $$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\,.$$

Note 25

8d36f6c34bac455797f54b78e001c815

Что в лемме Римана-Лебега утверждается о поведении рассматриваемого интеграла?

> Он бесконечно мал при $\lambda \to \infty$.

Note 26

7db9640421d04f6db0aff00e51f1b83c

Как лемма Римана-Лебега применяется к интегралам по конечным промежуткам?

> Функция доопределяется нулём вне промежутка.

Note 27

a466a9f04fb1474fb5df53f79796dffe

Пусть $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$. Что можно сказать о

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\lambda x)\,dx\,?$$

Он бесконечно мал при $\lambda \to \infty$.

Note 28

a0d6e16577f64e99b33805b6860d3f7c

Пусть $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$. Что можно сказать о

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\lambda x)\, dx\,?$$

Он бесконечно мал при $\lambda \to \infty$.

Note 29

2ea58c53c7584179b8b7217073e51415

К каким периодическим функциям применим принцип локализации для рядов Фурье?

К абсолютно интегрируемым.

Note 30

1eed1f99b5a4437c9994353ca3aeaaec

Что, в общих чертах, утверждает принцип локализации для рядов Фурье?

Поведение ряда Фурье в точке полностью определяется поведением функции в сколь угодно маленькой окрестности этой точки.

Note 31

e5ab08a7b763420bba7ab14e47f420b3

Окрестность какого радиуса рассматривается в формальной формулировке принципа локализации для рядов Фурье?

$0 < \delta \leqslant \pi$.

Note 32

c1cf97c7d3404af2b767c54158c019fc

Более формально, {{c2::принцип локализации}} для рядов Фурье утверждает, что

$$s_n(x) = \text{\{\{c1::}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-u) D_n(u)\, du + o(1)\,.\text{\}\}}$$

Note 33

706e7ddd1e444d7fb7bec84579b4415b

В чём ключевая идея доказательства принципа локализации для рядов Фурье?

> Интегральная формула для частичных сумм; аддитивность интеграла и лемма Римана-Лебега.

Note 34

0ab72f4ed532466d89795d09d1eb6b99

В доказательстве принципа локализации для рядов Фурье, на какие промежутки разбивается интегральное выражение частных сумм?

> $[-\pi, -\delta],\ [-\delta, \delta],\ [\delta, \pi]$.

Note 35

f021db706f404ea083b936725132c607

Как доказательстве принципа локализации для рядов Фурье применить лемму Римана-Лебега к

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du\,?$$

> Дать нижнюю оценку знаменателю в аналитическом выражении $D_n(u)$.