

Лекция 07.02.22

Note 1

662fbc59ca984f5b820ad1041f1eb840

Пусть $f(x) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Многочлен $p(x)$ степени n такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o((x - a)^n), \\ f(a) &= p(a), \end{aligned}$$

называется **многочленом Тейлора функции f порядка n в точке a** .

Note 2

738279ec323b45e29a170a4e41b4bce0

Если многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a существует, то он **единственен**.

Note 3

8f605243b193465799ba06e1576d171e

В чём ключевая идея доказательства единственности многочлена Тейлора?

Младший ненулевой коэффициент при $(x - a)^m$ в $p - q$ равен нулю $\implies \perp$. (Доказательство от противного.)

Note 4

91af14a03bea4b9fadee06859cbab64d

Пусть p и q — два многочлена Тейлора функции f , коэффициент r_m перед $(x - a)^m$ — младший ненулевой коэффициент в $p - q$. Как показать, что $r_m = 0$?

Рассмотреть многочлен

$$\frac{p(x) - q(x)}{(x - a)^m}.$$

Note 5

f4110a9b63c640be96d810d835d0d1fd

Многочлен Тейлора функции f порядка n в точке a обозначается $T_{a,n}f$.

Note 6

1b7244a616994615a1d41bbc85768a3f

«**Формула Тейлора для многочленов**»

Пусть p — многочлен степени не более n . Тогда

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

}}

Note 7

97c12315facb454e987cb94fae99be75

$$f(x)|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f(a).$$

Note 8

cf7e5ab30b564c139557fd0a940f8204

$$\left. \left((x-a)^k \right)^{(n)} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ n!, & n = k. \end{cases}$$

Note 9

9b6c61f4867142bea860ca4d00c07174

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора для многочленов?

Записать $p(x)$ с неопределенными коэффициентами и вычислить $p^{(k)}(a)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Note 10

7597b782ce5f4e92998cc6445ce6f40e

«**Свойство n раз дифференцируемой функции**»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$ и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Тогда $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$.

Note 11

22aa07051d4c4e0ebb08ce0114be5429

«Определение o -малого в терминах ε, δ .»

Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка D . Тогда

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\iff} \{ \varepsilon : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap \dot{V}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \}$$

Note 12

b7ddf1bbcdf84c769dd7b409e5be494d

Какой метод используется в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции?

■ Индукция по n .

Note 13

f04179797fd64614827341d425616341

Какова основная идея в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (базовый случай)?

■ Подставить $f(a) = f'(a) = 0$ в определение дифференцируемости.

Note 14

7a10e93958724ee6b93bc1637a13773f

Каков первый шаг в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Заметить, что из индукционного предположения

$$f'(x) = o((x - a)^n)$$

и расписать это равенство в терминах ε, δ .

Note 15

b863b13c8a8b45c09c6444b48e5c0b75

Какие ограничения накладываются на δ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный промежуток.

Note 16

2506d5781f234e13a94358880699831a

Почему в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход) мы можем сказать, что $\exists \delta > 0$ такой, что $V_\delta(a) \cap D$ есть невырожденный отрезок?

■ По определению дифференцируемости функции.

Note 17

73ed2cd8b8b444ce991d587d9ed279ed

В чем ключевая идея доказательства свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ Выразить $f(x) = f'(c) \cdot (x-a)$ по симметричной формуле конечных приращений и показать, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$.

Note 18

a08796d96ad841bd91a8e7daaab1857d

Откуда следует, что $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$ в доказательстве свойства n -раз дифференцируемой функции (индукционный переход)?

■ $|c-a| < \delta \implies |f'(c)| < \varepsilon |c-a|^n < \varepsilon |x-a|^n$

Note 19

957fd9747bd84545bd6b1cca723d72ba

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, n \in \mathbb{N}, \{c3: f(a) = 0, \}$ $\{c2:$

$$f'(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

$\}$

Тогда $f(x) = \{c1: o((x-a)^{n+1}), \quad x \rightarrow a. \}$

«Формула Тейлора-Пеано»

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и f n раз дифференцируема в точке a . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

}}

Лекция 11.02.22

Note 1

3bf65c72c3374838aeca626de8a3a4d

Каков первый шаг в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

Обозначить через $p(x)$ многочлен в формуле:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{p(x)} + o((x-a)^n).$$

Note 2

6f41684761ec41308bf9f95619ec1849

Чему для $k \leq n$ равна $p^{(k)}(a)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Пеано?

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Note 3

72455c0671414c80aca4c9ef2ba63d44

В чем основная идея доказательства истинности формулы Тейлора-Пеано?

По свойству n раз дифференцируемой функции $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$.

Note 4

db6e4a55afed4c5d95a38869cf9d2e00

Что позволяет применить свойство n раз дифференцируемой функции в доказательстве формулы Тейлора-Пеано?

$$\forall k \leq n \quad (f(x) - p(x))^{(k)} \Big|_{x=a} = 0$$

Note 5

8c823210f5c94ab99024c3e8c3d6778a

$$\{\{c2::\Delta_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} [a,b], & a \leq b, \\ [b,a], & a \geq b. \end{array}\right\}\}\}$$

Note 6

9755fb6343494fa9b0034b4542e518d3

$$\{\{c2::\tilde{\Delta}_{a,b}\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::\left\{\begin{array}{ll} (a,b), & a < b, \\ (b,a), & a > b. \end{array}\right\}\}\}$$

Note 7

ddb25fcd6e834aa2ae54ec6ddc0c6787

$$\{\{c2::R_{a,n}f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::f - T_{a,n}f\}\}$$

Note 8

0d92b12a18f34554a0251578aa811b7f

« $\{\{c3::\text{Формула Тейлора-Лагранжа}\}\}$ »

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, x \in \mathbb{R}, a \neq x$, $\{\{c2::f \in C^n(\Delta_{a,x})\}\}$,
 $f^{(n)}$ дифференцируема на $\tilde{\Delta}_{a,x}$. Тогда $\{\{c1::\text{найдется } c \in \tilde{\Delta}_{a,x},$
 для которой

$$f(x) = T_{a,n}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\}\}$

Note 9

f9314b4b0e184f52826c8f740c873e21

При $n = 0$ формула Тейлора-Лагранжа эквивалентна $\{\{c1::$
 теореме Лагранжа $\}\}$.

Note 10

5fe508cfd3c445c4b15093e8d2c8c504

В чем основная идея доказательства истинности формулы
 Тейлора-Лагранжа?

| Вычислить производную функции $F(t) = R_{t,n}f(x)$ и
 далее по теореме Коши.

Note 11

e1a329fbc3ef4c5981773d8baad7d3b1

Для каких t определяется функция $F(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \Delta_{a,x}.$$

Note 12

a4f7e43161cc4c9fb58ac7a250610c50

Для каких t вычисляется $F'(t)$ в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$t \in \tilde{\Delta}_{a,x}.$$

Note 13

73e4df5e1b074010a95ee5dbe0458338

К каким функциям применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(t) \text{ и } \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Note 14

b1d63dae062e4a438ceb891f94a33e96

К каким точкам применяется теорема Коши в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$\text{К границам отрезка } \Delta_{a,x}.$$

Note 15

b8f3f99b66794d59b6fa546eb06d7fb3

Какое неявное условие позволяет применить теорему Коши к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ с точках a и x в доказательстве истинности формулы Тейлора-Лагранжа?

$$F(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

Note 16

e425a1ef13124799b6b391e3884f86f1

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket e^x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \rrbracket$$

Note 17

70a13102af174271b95762b24e6b1169

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \sin x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \rrbracket$$

Note 18

9c528f645b0741ef90f268989f7701eb

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \cos x \rrbracket = \llbracket \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \rrbracket$$

Note 19

90ff22c33f67493fac3fa800e93905f4

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\llbracket \ln(1+x) \rrbracket = \llbracket \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \rrbracket$$

Note 20

aaf8ef38d3bb409baf7c7fcc1df14f48

$\llbracket \text{Обобщённый биномиальный коэффициент} \rrbracket$ задаётся формулой

$$C_{\alpha}^k = \llbracket \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \rrbracket, \quad \alpha \in \llbracket \mathbb{R} \rrbracket.$$

Note 21

5ed01e7f4e8e4b22adf1929f60e4d4f5

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^\alpha \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n) \} \}$$

Note 22

eb36b5f5a2b04e44b4d5b13d2278ff40

Формулу Тейлора-Пеано для $(1+x)^\alpha$ называют $\{ \{c1:: \text{биноми-}$
альным разложением} \}.

Note 23

c766c427b7e44be8a2e40e872ec7dd2b

$$C_{-1}^k = \{ \{c1:: (-1)^k \} \}$$

Note 24

82717b22134b4f66b014c17df3ba337c

По формуле Тейлора-Пиано при $x \rightarrow 0$

$$\{ \{c2:: (1+x)^{-1} \} \} = \{ \{c1:: \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \} \}$$

Note 25

7d3d35d9fcb344458f0d82ed7b2d940f

Пусть $\{ \{c3:: \text{функция } f \text{ удовлетворяет условиям для разложе-}$
ния по формуле Тейлора-Лагранжа} \} Тогда если $\{ \{c2::$

$$\forall t \in \tilde{\Delta}_{a,x} \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

$\} \text{ то } \{ \{c1::$

$$|R_{a,n}f(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\}$

Семинар 17.02.22

Note 1

05fb49aabf444b3daf73947c33bf8f10

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

Note 2

3eae90c7fe9944e6a9d07784205f0d1d

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Note 3

af533d11b4c2421baaad26c4fca61b2a

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

Note 4

8939b90686dc43ae81c37c01fa728294

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Note 5

edb57ab590834e5db5946311b9910393

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Note 6

709b5fa5f404426ea7b67b17dc16f830

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Лекция 18.02.22

Note 1

b55d92bf361d4e31b5e60975656b3fb4

Пусть $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$ Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

Note 2

eb69e8bd92104c0ab3b235de95941521

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (необходимость)?

Показать, что произвольное разностное отношение неотрицательно.

Note 3

7d9850f850c2465aa217f34c4dbd1a66

Каков основной шаг в доказательстве критерия возрастания функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 4

63e919dff3ba4ea282cb06d25b445300

Пусть $\{c4:: f \in C\langle A, B \rangle \text{ и дифференцируема на } (A, B).\}$ Тогда

- $\{c2:: f \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle\} \{c3:: \iff \} \{c1:: f'(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).\}$

Note 5

0e1b8bb37eca4c29af2ca084fcedc196

Каков основной шаг в доказательстве достаточного условия строгого возрастания функции на промежутке?

Выразить для $a < b$ разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 6

2e3edf0757ba4f72bbdbb5b66dca690d

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$ и дифференцируема на (A, B) . Тогда

- f постоянна на $\langle A, B \rangle$ $\iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (A, B)$.

Note 7

b036d705ddbe49b6814f53a6ad2b93f9

Каков основной шаг в доказательстве критерия постоянства функции на промежутке (достаточность)?

Выразить для произвольных a и b разность $f(b) - f(a)$ через формулу конечных приращений.

Note 8

2dfd421d331745a0a8b2da63493d1b4f

Пусть $f, g \in C[A, B]$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда Если $f(A) = g(A)$ и

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

Note 9

e2c4b9fb4f4147a3bf25e2ab97a3e24f

Пусть $f, g \in C[A, B]$ и дифференцируемы на (A, B) . Тогда если $f(B) = g(B)$ и

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (A, B),$$

то

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (A, B).$$

}

Note 10

0f2a5e13f0a2495388e631ac0b4776aa

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой максимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a).$$

}

Note 11

a89063cdc4a34df7aa891ad50a98d0a8

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой строгого максимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) < f(a).$$

}}

Note 12

0c2db077ea274453a5c14d982fe1c571

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой минимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \geq f(a).$$

}}

Note 13

3bc6223309d34118a582302414c9632e

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. Тогда точка a называется точкой строгого минимума функции f , если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap D \quad f(x) > f(a).$$

}}

Note 14

a1e964e24fc6456ca0a297c008405c34

Если точка a является точкой минимума или максимума функции f , то a называется точкой экстремума f .

Note 15

98f3cebff02ca464ab3cf9e94355caaa2

«Необходимое условие экстремума»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B)$, f дифференцируема в точке a . Тогда если a является точкой экстремума f , то $f'(a) = 0$.

Note 16

acfe3357868e41809070b12ea6034081

Каков основной шаг в доказательстве необходимого условия экстремума?

Применить теорему Ферма к сужению f на отрезок, включённый в окрестность $V_\delta(a)$ из определения экстремума.

Note 17

96502706cad4449ab9ac44074765a384

Точка a называется стационарной точкой функции f , если

$$f'(a) = 0.$$

}}

Note 18

99ca6c71ff484416941c4e10086ca6ea

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда точка $a \in (A, B)$ называется критической точкой, если либо a стационарна для f , либо f не дифференцируема в точке a .

Note 19

40f1ebf761e14f5ba885b2276d64dae7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда все точки экстремума f , принадлежащие (A, B) , лежат в множестве её критических точек.

Note 20

e8adcc7d8b474840907e72b38014fcde

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\max_{f([a, b])} = \max \{f(a), f(b), \max_{f(C)}\},$$

где C — множество критических точек f .

Note 21

909932c22cec4a5fb5d8cfb506e7dbfb

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

то a — точка строго максимума f .

Note 22

1b1674e5941040ee87e83073a1a0d57b

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f непрерывна в точке a и дифференцируема на $\dot{V}_\delta(a)$, $\delta > 0$. Если $\{\{c1::$

$$\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$$

$\}\}$ то $\{\{c2::a — точка строго минимума f .$

Лекция 21.02.22

Note 1

4d119e495cf043019ed8ee01f9a7957a

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f'' определена в точке a , $f'(a) = 0$. Тогда если $f''(a) > 0$, то a — точка строгого минимума f .

Note 2

f8b71055f7eb427f8226b47df9ed1e05

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f'' определена в точке a , $f'(a) = 0$. Тогда если $f''(a) < 0$, то a — точка строгого максимума f .

Note 3

5e0ea19ce2b043c693e2cbe7752fcfa1

Каков первый шаг в доказательстве достаточного условия экстремума в терминах f'' ?

Выразить $f(x) - f(a)$ по формуле Тейлора-Пиано с

$$o((x - a)^2).$$

Note 4

3124302c512c44bfac961f48e231e1cc

В чем основная идея доказательства достаточного условия экстремума в терминах f'' ?

Вынести в формуле Тейлора-Пиано $\frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$ за скобки, далее по теореме о стабилизации функции.

Note 5

bb068aa42bfe43deb084eaa739cd08c6

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если n нечётно, то f не имеет экстремума в точке a .

Note 6

b8ec49e2117443588a98b2e5c8cc032

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$,

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда если $\{c2: n \text{ чётно,}\} \{c1:$ то достаточное условие экстремума аналогично достаточному условию в терминах $f''\}$.

Note 7

d2426d6723fd4c20966bd4397dce3eb3

« $\{c3:$ **Теорема Дарбу** $\}$ »

Пусть $\{c2: f$ дифференцируема на $\langle A, B \rangle$, $a, b \in \langle A, B \rangle$,

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

$\}$ Тогда $\{c1: \exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0.\}$

Note 8

43152412fd6f41e984fc4a4e96521633

В чем основная идея доказательства теоремы Дарбу?

По теореме Вейерштрасса существует точка минимума c , далее по теореме Ферма.

Note 9

b0b7d5c649bf4839bdc1e90102df6405

Что позволяет применить теорему Ферма в доказательстве теоремы Дарбу?

c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Note 10

d480b573cf054a67a6bf5596881b0afb

Как в доказательстве теорему Дарбу показать, что c не лежит на границе $[a, b]$?

Расписать $f'(a)$ через правосторонний предел и показать, что a — не локальный минимум. Аналогично для b .

Note 11

bc1402d472ba422ea18b051e2a0615c4

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Если

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle A, B \rangle,$$

то f строго монотонна на $\langle A, B \rangle$.

Note 12

e29cdd0f22c346cab64fe288db3fbd8

В чем основная идея доказательства следствия о монотонности функции с ненулевой производной?

Доказать от противного, что f' не меняет знак на $\langle A, B \rangle$.
Далее по достаточному условию строгой монотонности.

Note 13

9fc77ac828a342f885c48ee472c09734

**«Следствие из теоремы Дарбу
о сохранении промежутка.»**

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда $f'(\langle A, B \rangle)$ — промежуток.

Note 14

56d20a83493a46d1ac834fec9f4ebdef

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

Показать, что для любых $a, b \in \langle A, B \rangle$

$$[f'(a), f'(b)] \subset f'(\langle A, B \rangle).$$

Note 15

0cd99b9f1fae4d1aadfac35788f440c6

Какое упрощение принимается (для определённости) для точек $a, b \in \langle A, B \rangle$ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка?

$$f'(a) \leq f'(b).$$

Note 16

9ee92cbcb63b46e78fe63b31bbf7f924

Как в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о сохранении промежутка показать, что

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad y \in f'(\langle A, B \rangle)?$$

Применить теорему Дарбу к функции

$$F(x) = f(x) - y \cdot x$$

в точках a и b .

Note 17

3c1144d31e264164b099479d41f9abc3

«**Следствие из теоремы Дарбу
о скачках производной.**»

Пусть f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$. Тогда функция f' не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.

Note 18

f94b4bdf90b14fa0a4256a492cf742a5

В чем основная идея доказательства следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

Допустить противное и показать, что $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ — не промежуток.

Note 19

933fb7290ce844da8f84c48835915d5c

Какие допущения принимаются (для определённости) в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

f имеет скачок справа в точке $a \in \langle A, B \rangle$ и

$$L := \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) < f'(a).$$

Note 20

4fc5c84bb2b14241a99633260e7f76fc

Как выбирается δ в доказательстве следствия из теоремы Дарбу о скачках производной?

Так, что для некоторого $y \in (L, f'(a))$

$$f'(x) < y \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

Note 21

027449ca442a449786b58ca872e4aff2

Функция $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется выпуклой на $\langle A, B \rangle$, если

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \end{aligned}$$

}}

Note 22

0073407c9c4f473cb4759784548208bd

Функция $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется строго выпуклой на $\langle A, B \rangle$, если

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \langle A, B \rangle, \lambda \in (0, 1) \\ f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \end{aligned}$$

}}

Note 23

a0e64a51b1ac405c9e5806d135c272da

«Критерий строгой выпуклости f на $\langle A, B \rangle$ »

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливо неравенство

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

(из леммы о трёх хордах)

Note 24

8969555424f24b2c8347358586f381e8

«Лемма о трёх хордах»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения.

- f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.
- $\forall a, b, c \in \langle A, B \rangle, a < c < b$ справедливы неравенства

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

}}

Note 25

c8e0bc0478654a5bbabdf38890b5f942

Каким образом доказываются критерий строгой выпуклости и лемма о трёх хордах?

Строится цепочка импликаций

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1).$$

- (1) — строгая выпуклость f ,
- (2) — неравенство из леммы о трёх хордах.
- (3) — неравенство из критерия выпуклости,

Note 26

11c8d7341f374a2e8d7d5c8df97eaba8

В чём основная идея доказательства критерия строгой выпуклости из леммы о трёх хордах (достаточность)?

Положить $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ и отсюда выразить $c - a$ и $b - c$.

В чем основная идея доказательства леммы о трёх хордах (необходимость)?

Положить в определении выпуклости

$$\lambda = \frac{b - c}{b - a}.$$

Лекция 25.02.22

Note 1

0abcc31a29c74496883c555de61b5af7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B \rangle$,

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Тогда если f выпукла на $\langle A, B \rangle$, то

$$F \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 2

6658c8d28bde461584886f85aacf4977

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B \rangle$,

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Тогда если f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, то

$$F \nearrow \nearrow \text{ на } \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 3

d547aa237c104089813102cd73487563

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B \rangle$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$. Откуда следует возрастание функции $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$?

■ Из леммы о трёх хордах.

Note 4

0bb5876454d448878db0853372d90fe7

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\exists f'_+(a) \in [-\infty, +\infty).$$

}}

Note 5

960c7add5b8c4ab4b798301f26f12648

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in \langle A, B \rangle$. Тогда

$$\exists f'_-(a) \in (-\infty, +\infty].$$

}}

Note 6

1ea150313caa4817b9f27c00d5c8e6d8

Откуда следует существование односторонних производных у выпуклой функции?

Из теоремы о пределе монотонной функции для

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Note 7

2e664465fdc5410ca8b72059cfe627bc

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$. Тогда $f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ конечны и $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.

Note 8

82fe965871ac446facad207a4f246b18

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Откуда следует, что $f'_-(a) \leq f'_+(a)$?

Из теоремы о пределе монотонной функции.

Note 9

eb64f07db3d3434197d40b0980a78e66

Если функция f выпукла на $\langle A, B \rangle$, то она непрерывна на (A, B) .

Note 10

9390116052df401f8413ffb225259a9d

Пусть f выпукла на $\langle A, B \rangle$. Откуда следует, что она непрерывна на (A, B) ?

Из существования конечных односторонних производных f в любой точке (A, B) .

Note 11

9f16939e7619449e9fe1d75a7aac2e87

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B \rangle$. Прямая $y = g(x)$ называется опорной для функции в точке a , если она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

Note 12

7b835ae738654ba5a0921df5133181e7

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \langle A, B \rangle$. Прямая $y = g(x)$ называется строго опорной для функции в точке a , если она проходит через точку $(a, f(a))$ и

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\}.$$

}}

Note 13

fedf029d618e48ddabe81280b131b72b

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$, прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является опорной для функции f в точке a , тогда и только тогда, когда $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.

Note 14

8ceccffa4cbe4c8d8330451f4f53876c

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$, прямая ℓ задаётся уравнением

$$y = f(a) + k(x - a).$$

Тогда прямая ℓ является строго опорной для функции f в точке a , тогда и только тогда, когда $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$.

}}

Note 15

1da04fcb23dc406eba98567735e9e6dc

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что если прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f , то $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

В определении опорной прямой выразить $f(x)$ через односторонние производные по определению дифференцируемости.

Note 16

9ab922ea4b1f422c855c9dc14925580a

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f выпукла на $\langle A, B \rangle$, $a \in (A, B)$. Как показать, что прямая $y = f(a) + k(x - a)$ является опорной для f , если $k \in [f'_-(a), f'_+(a)]$?

По теореме о пределе монотонной функции сравнить

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

с односторонними производными в точке a .

Note 17

f8f5608de51344b89b749bf6fb673e89

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\{\{c2\}$ в каждой точке (A, B) функция f имеет опорную прямую, $\}$ то $\{\{c1\}$ она выпукла на $\langle A, B \rangle$.

(в терминах опорных прямых)

Note 18

0a5cbb4429524954af423e27fe0c32bc

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\{\{c2\}$ в каждой точке (A, B) функция f имеет строго опорную прямую, $\}$ то $\{\{c1\}$ она строго выпукла на $\langle A, B \rangle$.

(в терминах опорных прямых)

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если в каждой точке $a \in (A, B)$ функция f имеет опорную прямую, то она выпукла на $\langle A, B \rangle$. В чем основная идея доказательства?

Выбрать $x < a < y$ и показать для них выполнение неравенства критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Лекция 04.03.22

Note 1

acc9492d0b4f4c4a8e6b1688ee26ed5e

В чем геометрический смысл $T_{a,1}f(x)$?

График $T_{a,1}f(x)$ — это касательная к функции f в точке a .

Note 2

570272578ee74dd988ea80f9e95cbc6f

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$.
Тогда функция f выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), \quad x \in \langle A, B \rangle \\ f(x) \geq T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 3

32700c2a93204435b3f66db20ea03bf7

«Связь выпуклости функции с её касательными»

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на $\langle A, B \rangle$.
Тогда функция f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in (A, B), x \in \langle A, B \rangle \setminus \{a\} \\ f(x) > T_{a,1}f(x).$$

}}

Note 4

76ff105d143e49dea8fe8db2b74ee9ff

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (необходимость)?

f дифференцируема в любой точке $\langle A, B \rangle \implies$ касательная совпадает с опорной прямой.

Note 5

a71b501cf8434876a0ff83fdc763c8d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с её касательными (достаточность)?

Из условия f имеет опорную прямую в каждой точке (A, B) .

Note 6

3b6d6467bd5144febe2b52fd934c971a

Пусть $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда если f выпукла на $(A, +\infty)$, то

$$f(x) \geq kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 7

e766cccf8cdf4765b58203bef6244390

Пусть $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда если f строго выпукла на $(A, +\infty)$, то

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

}}

Note 8

7046fd62e87e44c7a6dc18f4e94f7bd8

Пусть $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда если f строго выпукла на $(A, +\infty)$, то

$$f(x) > kx + b \quad \forall x \in (A, +\infty).$$

В чем основная идея доказательства?

Показать, что $f(x) - kx \searrow$. Далее по теореме о пределе монотонной функции.

Note 9

f0e5b2b8f6a74445a42cf0b35e854f39

Пусть $f : (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $y = kx + b$ и f строго выпукла на $(A, +\infty)$. Как показать, что $f(x) - kx \searrow$?

По теореме о пределе монотонной функции для

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Note 10

94e7cdb6145142c3bb7cc8115035e5ad

«Связь выпуклости функции с f' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дифференцируема на (A, B) . Тогда f выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$f' \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 11

cfdb1a58f41247169b530e3bc3f5b061

«Связь выпуклости функции с f' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дифференцируема на (A, B) . Тогда f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

}}

$$f' \nearrow \nearrow \text{ на } (A, B).$$

}}

Note 12

8b55ad03aaca4dfcb1ec7ce171dee0ce

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (необходимость)?

Для $x < y$ сравнить значения $f'(x)$, $f'(y)$ с $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Note 13

b1782e215a3d4a948b9fbddfbaed55d3

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f' (достаточность)?

По теореме Лагранжа выполняется неравенство критерия выпуклости из леммы о трёх хордах.

Note 14

1db6c044058c49e68328ad272c648da8

«Связь выпуклости функции с f'' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B) .

Тогда f выпукла на $\langle A, B \rangle$ тогда и только тогда, когда

||

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

Note 15

d78c1dfaebde4a2e89fdccfb43309163

«Связь выпуклости функции с f'' »

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle$, f дважды дифференцируема на (A, B) .

Тогда f строго выпукла на $\langle A, B \rangle$, если

||

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (A, B).$$

||

Note 16

d912e4ab9b6a4459b2f104fabfc198f8

В чем основная идея доказательства теоремы о связи выпуклости функции с f'' ?

■ Применить критерий возрастания функции к f' .

Note 17

399c82ffb7094f2e8e4a74da8023fc60

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$. Точка a называется точкой перегиба функции f , если

||

- $\exists \delta > 0$ такое, что $V_\delta(a) \subset (A, B)$ и f имеет разный характер выпуклости на $(a - \delta, a]$ и $[a, a + \delta)$;
- f непрерывна в точке a ;
- $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

||

Note 18

9aa5847a39ac46c8ad8dbec41e14a904

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$, f дважды дифференцируема на a . Если $\{\{c2::a \text{ является точкой перегиба } f,\}\}$ то $\{\{c1:: f''(a) = 0,\}\}$

Note 19

aca76c8bcbef4c38ad13dd619d48d19d

Является ли нулевая вторая производная достаточным условием перегиба?

■ Нет, это только необходимое условие.

Note 20

c3615f4ec8d84748bde8c518c9e98375

Пусть $\{\{c3:: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, a \in (A, B), f \text{ непрерывна в точке } a \text{ и имеет в ней производную из } \overline{\mathbb{R}}.\}\}$ Тогда если $\{\{c1:: \exists \delta > 0 \text{ такое, что } f \text{ дважды дифференцируема на } \dot{V}_\delta(a) \text{ и}$

- либо $\text{sgn } f''(x) = \text{sgn}(a - x) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$
 - либо $\text{sgn } f''(x) = \text{sgn}(x - a) \quad \forall x \in \dot{V}_\delta(a),$
- $\}\}$ то $\{\{c2:: a \text{ — точка перегиба } f.\}\}$

Семинар 03.03.22

Note 1

655ebf6da8c1489f84fdaeca82dcc793

$$\int_{\{\{c2::\ln x\}\}} dx = \{\{c1::x \ln x - x\}\} + C$$

Note 2

310668af95114f9f8e87673be333fec8

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{\sin x}\}\}} dx = \{\{c1::\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \}\} + C$$

Note 3

898276fe3ef943c49921748d594000c8

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{\cos x}\}\}} dx = \{\{c1::\ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| \}\} + C$$

Note 4

ce3022e62a4f4a6ea2d13195a9f94d31

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{x^2 + a^2}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\}\} + C \quad (\{\{c3::a \neq 0\}\})$$

Note 5

8661888336db411a89fed337ad926a76

$$\int_{\{\{c2::\frac{A}{x+a}\}\}} dx = \{\{c1::A \ln |x+a| \}\} + C$$

Note 6

2cd6c699811f4760be34715a24b0081f

$$\int_{\{\{c2::\frac{1}{nx+a}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{1}{n} \ln \left| x + \frac{a}{n} \right| \}\} + C \quad (\{\{c3::n \neq 0\}\})$$

Note 7

b7b778e748574ee8b52225ae5669cbe6

$$\int_{\{\{c2::\frac{A}{(x+a)^k}\}\}} dx = \{\{c1::\frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}}\}\} + C \quad (\{\{c3::k \neq 1\}\})$$

Note 8

72b0aaca0b254078bbfcc47745885653

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2N - pM}{2a} \arctan \frac{2x + p}{2a} + C,$$

$$\text{где } a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Note 9

c7fcc3d1ab9443d2855e310bfb0beec8

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{N - M\frac{p}{2}}{(t^2 + a^2)^k} dt + \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt + C,$$

$$\text{где } t := x + \frac{p}{2}, \quad a^2 := \frac{4q - p^2}{4}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Note 10

a3d0cc7201b74c4c9fab9590e7a6c0b2

$$I_k =: \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \quad (k > 1, a \neq 0)$$

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \left((2k-3)I_{k-1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \right)$$

Note 11

972b3ecb92a94f62b12e46795945593d

$$\int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{M}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C$$

Лекция 07.03.22

Note 1

8d4e84ad6e1a4cdc91020e2f61878f24

Пусть $\{\{c3: f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}\} \mid \{c1: \text{Функция } F : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}\} \text{ называется } \{c2: \text{первообразной функции } f\}, \mid \text{если } \{c1: F \text{ дифференцируема на } \langle A, B \rangle \text{ и}}\}$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle A, B \rangle.$$

}}

Note 2

5436ab9b46cf488eb5fa6c2353bd3616

$\{\{c1: \text{Множество всех первообразных функции } f \text{ на промежутке } \langle A, B \rangle\} \mid \{c2: \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)\} \}$

Note 3

ec64c5e7734140f888511699374deaec

Пусть $\{\{c4: f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)\} \mid \text{Тогда}$

$$\{\{c2: G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)\} \mid \{c3: \iff \mid \{c1: \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.\} \}$$

Note 4

e9bbf7b29a8d40b48aad130674b03cc9

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

$$\mid (F - G)' \equiv 0 \implies F - G = \text{const.}$$

Note 5

64bcacf18cb94a4e9b96e551eff15e5b

Пусть $f, F, G : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Тогда

$$G \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle) \iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x) + c.$$

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения первообразной.

Note 6

b196b146568446a2b31a62a77bcd445

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$. Множество функций

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

называется неопределённым интегралом f на $\langle A, B \rangle$.

Note 7

98516b869bc740b9bacfcc5244a89cb0

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Неопределённый интеграл функции f на $\langle A, B \rangle$ обозначается

$$\int f(x) dx.$$

}}

Note 8

7581f732c1c44de4bc99cae39e01f4ea

Корректна ли запись

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad ?$$

Строго говоря нет, поскольку формально интеграл является множеством, а не функцией, но такая запись удобна на практике.

Note 9

ad021cd0f9bd4d9ca316d3574a3b67a4

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

$$\left(\int f(x) dx \right)' \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

Note 10

a2f17fea47484277b1a9d9349fba7ff

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$, $G \in \mathcal{P}_g(\langle A, B \rangle)$.

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note 11

7d5f8b97d72747df93959cee3fb0bae9

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

Note 12

3fb6e723afb54981be16c06cf2bfb210

Из теоремы Дарбу следует, что если f имеет первообразную на промежутке $\langle A, B \rangle$, то f не имеет скачков на $\langle A, B \rangle$.

Note 13

3c586c7317d247a3be4f7b50373a0d46

Является ли непрерывность функции f на промежутке необходимым условием для существования у неё первообразной?

Нет, поскольку f может иметь точки разрыва второго рода.

Note 14

ca1243ec222b4440903a1f5a22a53b16

«Достаточное условие существования первообразной»

Если f непрерывна на $\langle A, B \rangle$, то f имеет первообразную на $\langle A, B \rangle$.

Лекция 11.03.22

Note 1

8d01db3371424aba95e1092ffa2cd4dc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной f на множестве E , если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.

Note 2

a36222511f224d049fc0a1fc0c465aa5

Интеграл $\int f(x) dx$ называется берущимся, если функция f имеет элементарную первообразную.

Note 3

937d08196fed4fea9d424dfd802f1c82

Пусть $f, g : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеют на $\langle A, B \rangle$ первообразную. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Note 4

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать свойство линейности неопределённого интеграла?

■ По определению интеграла и первообразной.

Note 5

26b34c9a101f488aaed5dde4ddd43d2

**Теорема о замене переменной
в неопределённом интеграле»**

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{P}_f(\langle A, B \rangle)$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ и φ дифференцируема на $\langle C, D \rangle$. Тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

}}

Note 6

2f7dd89b9a244dacbf41650571c4f13c

Как доказать теорему о замене переменной в неопределённом интеграле?

■ По определению интеграла и первообразной.

Note 7

cf45cd81236549efb89f81fcce13349f

Пусть $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \langle C, D \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ и φ дифференцируема на $\langle A, B \rangle$ и обратима. Тогда если G — первообразная функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ то

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Note 8

f1d541a0c135409c8aef89920ad254e8

«Формула интегрирования по частям»

Пусть $f, g \in C^1\langle A, B \rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

}}

Note 9

e2df459e1699495f980cddacc633f6f

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для неопределённого интеграла?

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int vu' dx + \int uv' dx.$$

Лекция 18.03.22

Note 1

ae4062806eca4ddd9b9f4afa5197e8e5

Любая рациональная функция имеет $\{\{c1::\text{элементарную первообразную.}\}\}$

Note 2

e8574dd4be844dd3a30f41aa822525cb

$$\{\{c2::[a : b]\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::[a, b] \cap \mathbb{Z}.\}\}$$

Note 3

c4e15a9924f5453cbaa5673cf84f62f5

Пусть $\{\{c3::[a, b] - \text{невыврожденный отрезок.}\}\}$ Набор точек

$$\{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

$\}\}$ называется $\{\{c2::\text{разбиением отрезка } [a, b].\}\}$

Note 4

e301682aa933430591e748e6973a1843

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. $\{\{c1::\text{Множество всех разбиений отрезка } [a, b]\}\}$ обозначается $\{\{c2::T[a, b].\}\}$

Note 5

6f5e8266e0b44eeebba980ac5d8c6112

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::\Delta x_k\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::x_{k+1} - x_k.\}\}$$

Note 6

22701dee44544e9092fe48e0e077273a

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. $\{\{c1::\text{Величина}$

$$\max \{\Delta x_k\}$$

$\}\}$ называется $\{\{c2::\text{рангом разбиения } \tau.\}\}$

Note 7

7c1e8de0a92a44b897b789c2e84da964

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. $\{\{c2::\text{Ранг разбиения } \tau\}\}$ обозначается $\{\{c1::\lambda_\tau.\}\}$

Note 8

47c24c1487804ce88e30a8dfb2519b37

Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$.
 Набор точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$ таких, что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ называется
 оснащением разбиения τ .

Note 9

5e83015672844d94a0a89355f7af372e

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, ξ — оснащение разбиения τ . Тогда пара (τ, ξ) называется оснащённым разбиением отрезка $[a, b]$.

Note 10

974eeb7d70c24d318e71abd3d9a95f3f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Множество всех оснащённых разбиений отрезка $[a, b]$ обозначается $T'[a, b]$.

Note 11

ef2c57fbd464435c9896c8e8f24db8b5

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\tau, \xi) = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — оснащённое разбиение $[a, b]$. Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

называется интегральной суммой функции f , отвечающей оснащённому разбиению (τ, ξ) .

Note 12

f4adab8132d7489fb5594271853a86c7

Интегральные суммы так же называют суммами Римана.

Note 13

c14685fee7ff492d9e5452c059f94fb6

Интегральная сумма функции f , отвечающая оснащённому разбиению (τ, ξ) обозначается как

$$\sigma_\tau(f, \xi).$$

Note 14

f356a2fc28ae4487aae50ba5b3064cee

Пусть $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\tau, \xi) : \lambda_\tau < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon,$$

где (τ, ξ) — оснащённое разбиение отрезка $[a, b]$.

(определение в терминах (ε, δ))

Note 15

ed766ec774814eba83502c9dd75a2e49

Предел интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, обозначается

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad \text{или} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

}}

Note 16

46f5a6ad385a4386813c6f707bd08927

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм функции f при ранге разбиения, стремящемся к нулю, если для любой последовательности оснащённых разбиений $\{(\tau_j, \xi_j)\}_{j=1}^\infty$ такой, что $\lambda_{\tau_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$,

$$\sigma_{\tau_j}(f, \xi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I.$$

}}

(определение в терминах последовательностей)

Семинар 17.03.22

Note 1

e25a48aad5c048c3b2d3b7e2d9af0b98

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и почленно поделить числитель на знаменатель.

Note 2

79c04c292b2a4aeb8fb583ccc7916c2a

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int (Mx + N)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

Выделить полный квадрат под радикалом и раскрыть скобки.

Note 3

30fa84062ed64fdabc405fa09e0c6148

Алгоритм взятия интеграла вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad \text{где } P_n \in \mathbb{R}[x]_n.$$

Представить ответ в виде

$$Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

продифференцировать левую и правую часть равенства и найти неизвестные коэффициенты в $Q_{n-1}(x)$ и λ из полученного соотношения.

Note 4

15f51247a7d04b4fb445ea745f418ca4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right| + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + px + q}} \, dx = \arcsin \frac{2x - p}{2a} + C,$$

где $a := \sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}$.

Лекция 21.03.22

Note 1

679c0a0615d44749bc685cda9a47b233

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$.

Note 2

d6b62c8f08a842b2829447ab45a27e8c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi)$$

называется определённым интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Note 3

7dc12d32c0ce407f87be1d7c51d0b1b3

Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ обозначается

$$\int_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

}}

Note 4

e5e082ef6db649858cc60a662cb312b1

В выражении

$$\int_a^b f$$

числа a, b называют пределами интегрирования.

Note 5

44bd096f622b475f908006fcf8e88426

В выражении

$$\int_a^b f$$

функцию f называют подынтегральной функцией.

Note 6

4e8ab8723a9e485abea045a4aa0c79f0

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Множество всех функций интегрируемых по Риману на $[a, b]$ обозначается $\mathcal{R}[a, b]$.

Note 7

1294b085870d432eae003c1159bbc60

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{где } M_k := \sup f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется верхней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ .

Note 8

8807ccc652554a53aa9f97a7ee09ad99

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau \in T[a, b]$. Верхняя интегральная сумма Дарбу функции f , отвечающая разбиению τ , обозначается

$$S_\tau(f).$$

}}

Note 9

220907a5d6e248b78f987af0d058e64c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \text{где } m_k := \inf f([x_k, x_{k+1}]),$$

называется нижней интегральной суммой Дарбу, отвечающей разбиению τ .

Note 10

2bbefff21b2c4c8fba866cd8eea6b02c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau \in T[a, b]$. Нижняя интегральная сумма Дарбу функции f , отвечающая разбиению τ , обозначается

$$s_\tau(f).$$

}}

Note 11

189f37e44f0a45048e5cb16973582e14

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a, b]$. Тогда f ограничена сверху тогда и только тогда, когда сумма $S_\tau(f)$ конечна.

Note 12

083512018d304036a80002a9df45af7e

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a, b]$. Тогда f ограничена снизу тогда и только тогда, когда сумма $s_\tau(f)$ конечна.

Note 13

1c8af1c02f864877bdd4971a256a30e

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a, b]$. Как $S_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

|

$$S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

Note 14

7958d85410954f6280755a33f7bfff6b

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a, b]$. Как $s_\tau(f)$ выражается через суммы Римана?

|

$$s_\tau(f) = \inf \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$$

Note 15

53ffcba153934fda879e5241f8e85387

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tau$ — разбиение $[a, b]$. Как, в общих чертах, доказать, что $S_\tau(f) = \sup \{ \sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi \}$?

Представить $\{\sigma_\tau(f, \xi) \mid \forall \xi\}$ как сумму множеств

$$\Delta x_k \cdot f([x_k, x_{k+1}]).$$

Note 16

453749996f00487b9b845f66318e9f7c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau, \tilde{\tau}$ — два разбиения $[a, b]$, $\tau \subset \tilde{\tau}$.

Тогда

$$S_{\tilde{\tau}}(f) \leq S_{\tau}(f),$$

$$s_{\tilde{\tau}}(f) \geq s_{\tau}(f).$$

}}

Лекция 25.03.22

Note 1

a23a2495841f4894a31b489127b41054

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Как связаны $s_{\tau_1}(f)$ и $S_{\tau_2}(f)$ для произвольных разбиений τ_1, τ_2 отрезка $[a, b]$?

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$$

Note 2

84c295b304a64dd3a80a791f82958c91

Верно ли, что каждая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит каждой верхней суммы Дарбу этой же функции даже для разных разбиений отрезка?

Да. $s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$ для любых τ_1, τ_2

Note 3

b7fac4e6a3324160adefc29c06d73479

Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу. В чем основная идея доказательства?

Для $\tau_1 = \tau_2$ утверждение тривиально. В ином случае рассмотреть суммы Дарбу для разбиения $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

Note 4

be394bd9e8e2456284b7c108e7e973f8

Существует ли ограниченная на отрезке функция, неинтегрируемая на нём?

Да. Например, функция Дирихле.

Note 5

3b28a2ca07d44ea38f8d2df0ce9f396f

Существует ли интегрируемая на отрезке функция, неограниченная на нём?

Нет. Любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём.

Note 6

c6120328fd3e40a48f6d7e69fce29c9d

Как показать, что любая интегрируемая на отрезке функция ограничена на нём?

Если допустить, что f не ограничена, то $\forall \tau$ имеем $S_\tau(f) = \sup \{\sigma_\tau(f, \xi)\} = +\infty$, а значит

$$\nexists \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Note 7

e5921a1f2caa4ed583198b136ce6b34c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\inf \{S_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется верхним интегралом Дарбу функции f .

Note 8

fcfb0f775cac40c9a18563576c086827

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Верхний интеграл Дарбу функции f обычно обозначается

Note 9

304c0f4c87fe44cb922eeaf557997d02

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\sup \{s_\tau(f) \mid \forall \tau\}$$

называется нижним интегралом Дарбу функции f .

Note 10

bd7f75d9e429454599a993144985b2dc

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Нижний интеграл Дарбу функции f обычно обозначается

Note 11

83287fd934bc4878a99a742db1668220

«**Критерий интегрируемости функции**»

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0.$$

}}

Note 12

68b782b8c09040dfa994ede932b748bc

$$\begin{aligned} \{ \{ c2 :: S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0 \} \} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \{ \{ c1 :: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \\ &\quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon. \} \} \end{aligned}$$

(в терминах ε, δ)

Note 13

6a94745f7ac74cf7a5be1b0a6128e303

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (необходимость)?

По определению \sup и \inf

$$I - \varepsilon \leq s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leq I + \varepsilon.$$

Note 14

53f49c34063149d892ad1eb1015abebd

В чем ключевая идея доказательства критерия интегрируемости функции (достаточность)?

$$\begin{aligned} s_\tau(f) &\leq I_* \leq I^* \leq S_\tau(f), \\ s_\tau(f) &\leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f). \end{aligned}$$

для любого оснащённого разбиения (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

Note 15

f200bb84909d45898f1313f053135d3a

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Как соотносятся I^* , I_* и $\int_a^b f$?

$$I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Note 16

1e7ec80a8e8f4caf87b70493394d837a

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Как для произвольного разбиения τ соотносятся $s_\tau(f)$, $S_\tau(f)$ и $\int_a^b f$?

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

Note 17

c1ca9a97a9a948e685e22801cc7e1ee5

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \left(\int_a^b f \right).$$

Note 18

6a890ec9b5384ed2944133d968407712

Как показать, что

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = \int_a^b f?$$

Тривиально следует из критерия интегрируемости и неравенства

$$s_\tau(f) \leq \int_a^b f \leq S_\tau(f).$$

Note 19

1a704d6d276749bdaa56a88c05622b02

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = \left(\int_a^b f \right).$$

Note 20

f274e2ec8d6648a383184e816782dedf

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Величина

$$\sup \left\{ f(x) - f(\hat{x}) \mid x, \hat{x} \in D \right\}$$

называется колебанием функции f на множестве D .

Note 21

073304f993f94da7ab2f56d20b074752

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Колебание функции f на множестве D обозначается $\omega(f)$.

Note 22

0a7ceb7d5f804209a506b41349ce11c9

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\omega(f) = \sup f(D) - \inf f(D)$$

(в терминах $\sup f, \inf f$)

Note 23

ec97e108f2394602934c87c2f28f2a39

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Тогда

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f|_{[x_k, x_{k+1}]})$$

Note 24

649783b3a0c14571bdbbb8caba0d07a3

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Тогда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k$$

(в терминах $\omega_k(f)$)

Note 25

82a86f84ecc44f89aac1396d471738d1

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau(f) = I^*$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \rightarrow 0$)

Note 26

79915436f5b44d41a053bf8c0bf9e3ac

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau(f) = I_*$$

(в терминах предела при $\lambda_\tau \rightarrow 0$)

Note 27

180307492ee647ac8b1bb30c91dcfb0d

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и } I_* = I^*.$$

«Критерий Дарбу»

Note 28

4fec9ca16e3d4d6a8ee9ac0f388eb31c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \quad S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

«Критерий Римана»

Note 29

8ba2a0bdc975411b4f3eae4493a895d

Существует ли непрерывная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 30

da9a4e99c01a42a4a8c5bccf8e3d24f7

Как, в общих чертах, доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём?

Из теоремы Кантора получить равномерную непрерывность и по теореме Вейерштрасса оценить для $\lambda_\tau < \delta$ величину $\omega_k(f)$.

Note 31

cb2eb65d72554cea90a47503d1d97474

Существует ли монотонная на отрезке функция, неинтегрируемая на этом отрезке?

Нет. Любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Note 32

7a4501cbb6414feaf12589452716ae3

Как, в общих чертах, доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Для определённости $f \nearrow$. Для произвольного ε взять

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Далее по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

Семинар 24.03.22

Note 1

e2a6745c55e2452bb18cc67eb3b51eb9

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

берутся с помощью замены

$$t := \frac{1}{x - \alpha}.$$

}}

Note 2

76f25092a99044e7b985eeafa85ca9ca

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где R — рациональная функция, берутся с помощью подстановок Эйлера.

Note 3

f341e2ce094542f98b0a97abf09c7254

Каковы условия для применения каждой из подстановок Эйлера?

1. $a > 0$;
2. $c > 0$;
3. $ax^2 + bx + c$ приводим над \mathbb{R} .

Note 4

f0d585d86f5542a088764032d1d2eef8

Замена переменной в подстановке Эйлера для $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

Note 5

3eb88f39c10241c1a11c805b799d8ae2

Замена переменной в подстановке Эйлера для $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

Note 6

9df1ed5f198d4793bc9ff466bc983224

Замена переменной в подстановке Эйлера для приводимого $ax^2 + bx + c$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1),$$

где x_1 — корень $ax^2 + bx + c$.

Note 7

5defd336f3aa4b4aa26b239431f04d17

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$(a > 0)$$

Note 8

c6f5af39f62e4d7f9a4cee9e0c45d107

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$(a > 0)$$

Note 9

56abb403ab43437da9bf41b7ca9d15e8

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(a > 0).$$

$$\int \sqrt{\{c1:a^2 - x^2\}} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{\{c1:a^2 - x^2\}} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(a > 0).$$

Лекция 01.04.22

Note 1

60ff32d5ed7347ae8036518373a5bc61

Пусть $\{\{c3:: f, \tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[a, b],\}\}$ $\{\{c4:: T \subset [a, b] \text{ конечно.}\}$

$\}\}$ Если $\{\{c1::$

$$\forall x \in [a, b] \setminus T \quad f(x) = \tilde{f}(x),$$

$\}\}$ то $\{\{c2:: \tilde{f} \in \mathcal{R}[a, b] \text{ и } \int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.\}\}$

Note 2

9f281cfda3464766a189207f5029d7ed

В чем ключевая идея доказательства того, что изменение значений функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ в конечном числе точек не влияет на интегрируемость?

$$\sigma(f) - \sigma(\tilde{f}) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0.$$

Note 3

94c3dcad5bc247568a21704cb1d05f72

Пусть $\{\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b].\}\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta].$$

$\}\}$

Note 4

385f602d08114dd39630009f76dbb7e0

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда $f|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$.

В чем ключевая идея доказательства?

Если $\tau_0 \in T[\alpha, \beta], \tau \in T[a, b], \tau_0 \subset \tau$, то

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leq S_\tau - s_\tau.$$

Note 5

ee426e669ae545b8ad6d128a5870373e

Пусть $\{\{c3:: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b).\}\}$ Тогда если $\{\{c1::$

$$f|_{[a, c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c, b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

$\}\}$ то $\{\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b].\}\}$

Note 6

c8c134e6d7c442c3a7214585d20c41ac

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Тогда если

$$f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c] \quad \wedge \quad f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b],$$

то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем ключевая идея доказательства?

$$\begin{aligned} S_\tau - s_\tau &\leq S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega(f) \cdot \lambda_\tau, \\ \tau &\in T[a, b], \quad \tau' = \tau \cup \{c\}, \\ \tau_1 &= \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b]. \end{aligned}$$

Note 7

ccba27d6a29c468f8a60fbd0f106fec4

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f называется кусочно непрерывной, если множество её точек разрыва пусто или конечно, и все её разрывы суть разрывы первого рода.

Note 8

86f712cafa53498fa3b282915340635c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Если f кусочно непрерывна на $[a, b]$, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Note 9

78e23f5a381e4d01b4c4467b16955dcb

Как показать, что кусочно непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$?

Показать, что она интегрируема на каждом из непрерывных «кусков».

Note 10

682bfc21e35a489ebc7df5514e1d4690

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Говорят, что E имеет нулевую меру, если для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε .

Note 11

3be97c537ee44236bfc5f8bae48390e3

Пусть $\{c5: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.\}$ Тогда $\{c2: f \in \mathcal{R}[a, b]\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1: f \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и множество точек разрыва } f \text{ имеет нулевую меру.}\}$

« $\{c3: \text{Критерий}\}$ $\{c4: \text{Лебега}\}$ »

Note 12

1b3f6df593ba44b6b9558ee83720dd7e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{c1: f + g\}, \{c1: fg\}, \{c1: \alpha f\}, \{c1: |f|\} \in \mathcal{R}[a, b].$$

Note 13

275d09f8b4c9445992ecc4f02cd9f6ba

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{c2: \inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0\} \implies \{c1: \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].\}$$

Note 14

20347e63d70945cdb073a675dbcb23a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

Тривиально следует из определения предела интегральных сумм в терминах последовательностей.

Note 15

909d22f843c9421598278c307e29edb5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

Дать верхнюю оценку для $\omega_k(f \cdot g)$ через $\omega_k(f), \omega_k(g)$ и верхние границы f и g .

Note 16

aad31d4599b94b8f8ee128bfbfec8251

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

■ Частный случай произведения двух функций.

Note 17

76538508e5574126a26e4dbf06fe4160

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

В чем основная идея доказательства?

■ $|f| = f \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathcal{R}[a, b].$

Note 18

dea0bdf999ae4306b554167c63eeb231

Как показать, что sgn интегрируем?

■ Показать, что sgn кусочно непрерывен.

Note 19

6bb4953a2e6d41fb86cf8a801779a97f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

■ Представить $\frac{f}{g}$ как произведение функций $f \cdot \frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.

Note 20

8dcb53c3642547a5bec77126b490908d

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b].$$

В чем основная идея доказательства?

Оценить $\omega_k(1/f)$ сверху через $\omega_k(f)$ и $\inf_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Лекция 04.04.22

Note 1

40ffb14c933540e0a82a0f491c2ea946

Интегрируема ли функция Дирихле χ на произвольном невырожденном отрезке?

■ Нет.

Note 2

488460418bc246fe90907796c4db58be

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, χ — функция Дирихле. Как показать, что $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$?

■ $\omega(\chi|_{[\alpha, \beta]}) = 1$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Note 3

fdad8aea720d4949805e6d411e4d9cd0

Интегрируема ли функция Римана ψ на произвольном промежутке $[a, b]$?

■ Да.

Note 4

c7099fd03a894c53b8c80146045e9127

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана.

$$\int_a^b \psi = \{c1:0.\}$$

Note 5

6350173ae50b44d8ac481bc4e58df52a

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. В чём ключевая идея доказательства того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

Показать, что множество

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \mid q \leq N \right\}$$

конечно.

Note 6

83b18cc44cff41fc8f13f721bb95887f

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается N в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■ Так, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Note 7

e897ef9db02f489f8f78e18c71f5ee40

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Как выбирается δ в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■
$$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}.$$

Note 8

aa4eace1713d444292a6cdb20f5d2bed

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок, ψ — функция Римана. Какой критерий интегрируемости используется в доказательстве того, что $\psi \in \mathcal{R}[a, b]$?

■ Критерий в терминах $S_\tau - s_\tau$.

Note 9

ac79fc72aeb440e9a666f8dc2433dcc8

Пусть $\{\{c3:: f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [c, d] \rightarrow [a, b].\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[c, d]\}\} \implies \{\{c1:: f \circ g \in \mathcal{R}[c, d].\}\}$$

Note 10

bc11b9f7a4304f74b4bb3118d30cea22

Пусть $\{\{c3:: a > b, f \in \mathcal{R}[b, a].\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: \int_a^b f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: - \int_b^a f.\}\}$$

Note 11

2be98235b82942f7bf08141dd983fe07

$$\int_a^a f \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::0.\}\}$$

Note 12

649accec0ca304bd5bc72134401215095

Пусть $f : [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \in \mathcal{R}[a, a] \stackrel{\text{def}}{\iff} \{\{c1::\top.\}\}$$

Note 13

cc427e206f4d435889e87acd827bc5b4

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b f\}\} = \{\{c1::\int_a^c f + \int_c^b f.\}\}$$

Note 14

f57dd9f306a5429bb89c68b128c0e01f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b \alpha f\}\} = \{\{c1::\alpha \int_a^b f.\}\}$$

Note 15

5aaf74ed1c3e414cb5b7c501c5970206

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2::\int_a^b (f \pm g)\}\} = \{\{c1::\int_a^b f \pm \int_a^b g.\}\}$$

Note 16

d43171cbe636478098887433ff64ea61

Откуда следует линейность интеграла Римана?

Из определения в терминах последовательностей.

Note 17

8db1f43273d041d6b3fbc674270d4f5b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \geq 0.\}\}$$

Note 18

9778c1f4a58e4df9a9a25064935a647f

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \leq g\}\} \implies \{\{c1:: \int_a^b f \leq \int_a^b g.\}\}$$

Note 19

9ba16cbdf8fb4b65bd032cb56c483a1b

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: \left| \int_a^b f \right| \}\}\{\{c1:: \leq \int_a^b |f| .\}\}$$

Note 20

275d3bae3cfa48e9882d2d2a90ed21b8

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: |f| \leq M \in \mathbb{R}\}\} \implies \{\{c1:: \left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a).\}\}$$

Note 21

84dfce5723b34bec8f05c42879c3e85f

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: f \geq 0\}\} \wedge \int_a^b f = 0 \implies \{\{c1:: f \equiv 0.\}\}$$

Note 22

2f438df6b5304cd7acbd273214875635

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$f \geq 0 \wedge \int_a^b f = 0 \implies f \equiv 0.$$

В чем основная идея доказательства?

От противного; допустить, что $\exists x_0 : f(x_0) > 0$ и использовать то, что $\exists \delta : f|_{V_\delta(x_0)} > \frac{f(x_0)}{2}$.

Note 23

03b2fb7149444b2db71b150b49f267a9

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = \int_a^x f.$$

Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

«Теорема Барроу»

Note 24

2255bf6318be43ee834d6071ed740c89

В чем основная идея доказательства теоремы Барроу?

Оценить разность $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ и получить дифференцируемость φ по определению.

Note 25

ec57d94464cc4ecf8920954c5d4cbf76

Как в доказательстве теоремы Барроу непосредственно используется непрерывность f ?

Для представления $f(x)$ как $f(x_0) + \Delta x$, где $\Delta x \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Note 26

d26fa11d0b1e4d83bb4f4b224b9359a4

Почему в доказательстве теоремы Барроу

$$\Delta x \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0?$$

$$\Delta x = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0.$$

Note 27

cdc6a92b44fd4d488ca3b30c5e2b4232

В доказательстве теоремы Барроу

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx.$$

Note 28

c5dc36411f3a45598a70c9522a651022

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dx = f(x_0)h.$$

Note 29

1cea51f7fd9b4b438856a6ec7f4c1a48

В доказательстве теоремы Барроу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x dx = o(h).$$

Note 30

455761e28fe94191b0becfa38fc5b89

Откуда в доказательстве теоремы Барроу следует, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \Delta x dx = o(h)?$$

$$\Delta x \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \dots |\Delta x| < \varepsilon.$$

Note 31

1109a435ae7543cf8263f72942677e95

Пусть $\{\{c2: f, g \in \mathcal{R}[a, b], g \geq 0 \text{ (или } g \leq 0), m \leq f \leq M.\}\}$ Тогда

$$\{\{c4: \exists \mu \in [m, M]\}\} \quad \{\{c1: \int_a^b fg = \mu \int_a^b g\}\}$$

« $\{\{c3: \text{Первая теорема о среднем интегрального исчисления}\}\}$ »

Note 32

2e6a92e370ed4445a1cd67bd8d0241f9

В чем основная идея доказательства первой теоремы о среднем интегрального исчисления?

Проинтегрировать все части неравенства

$$mg \leq fg \leq Mg \quad (\text{для } g \geq 0).$$

Note 33

bede3b8a7d14462fbd5fcb32d222eb2d

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g = 0$)?

μ — произвольное значение из $[m, M]$.

Note 34

9137b877b68a4313b09fc0b2e748f6a4

Чему равно μ из первой теоремы о среднем интегрального исчисления ($\int_a^b g \neq 0$)?

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Лекция 08.04.22

Note 1

156407f3795145ac967ecf82e541fe0

Пусть $\{\{c2:: f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[a, b], g \geq 0 \text{ (или } g \leq 0)\}.\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

$\}\}$

(следствие из $\{\{c3:: \text{первой теоремы о среднем}\}\}$)

Note 2

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть $\{\{c2:: f \in R[a, b], m \leq f \leq M.\}\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b f = \mu(b - a)$$

$\}\}$

(следствие из $\{\{c3:: \text{первой теоремы о среднем}\}\}$)

Note 3

ba06ad7c7c3c453fa47427d955b922bb

Пусть $\{\{c2:: f \in C[a, b].\}\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f = f(c) \cdot (b - a)$$

$\}\}$

(следствие из $\{\{c3:: \text{первой теоремы о среднем}\}\}$)

Note 4

df108f6ef527491996f1a2b6672c17fc

« $\{\{c3:: \text{Формула Ньютона-Лейбница}\}\}$ »

Пусть $\{\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b], F \in \mathcal{P}_f([a, b]).\}\}$ Тогда $\{\{c1::$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

$\}\}$

Note 5

bddc676c2daa42f0b218c91eac244ace

В чем основная идея доказательства формулы Ньютона-Лейбница?

Выбрать нужное оснащение используя формулу конечных приращений.

Note 6

882e212c55614bb78548d3b6b7f2fbf2

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\{c1\}$ разность

$$f(b) - f(a)$$

$\}} \text{ называется } \{c2\} \text{ двойной подстановкой функции } f \text{ на } [a, b].$
 $\}}$

Note 7

b7e1b154b8de47bfbcb3d2afdf73ef75c

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\{c1\}$ Двойная постановка функции f на $[a, b]$ обозначается $\{c2\}$

$$f|_a^b, f(x)|_a^b, f(x)|_{x=a}^b$$

$\}}$

Note 8

df6dee2f53354eb8ae50cd3a673878a0

Пусть $\{c3\} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на $[a, b]$, $f' \in \mathcal{R}[a, b]$.
 $\}} \text{ Тогда}$

$$\{c2\} \int_a^b f' = \{c1\} f|_a^b.$$

Note 9

1146663e8ded4d63ba85b1b1ed35cb14

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, F — первообразная f за исключением конечного числа точек. Тогда $\{c1\}$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

$\}}$

(обобщение формулы Ньютона-Лейбница)

Note 10

496225bfd55a484fa6f61e7174af39f4

В чём основная идея доказательства обобщения формулы Ньютона-Лейбница для $F \in \mathcal{P}_f([a, b] \setminus T)$, $|T| < \aleph_0$.

Разбить $[a, b]$ на отрезки, во всех внутренних точках которых $F' = f$.

Note 11

6abc693b3b104008b356cbca06692bdd

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$, $F \in C[a, b]$, $F'|_{(a,b)} = f|_{(a,b)}$. Как показать, что $\int_a^b f = F|_a^b$?

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f.$$

Note 12

a8b4457947d3495c9b5fca5d72fdae28

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f?$$

Показать, что их разность стремится к нулю.

Note 13

8b853a07bfa94f17a0a6e43bd75e8226

Пусть $f : \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что

$$\int_a^{a+\varepsilon} f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0?$$

$$m\varepsilon \leq \int_a^{a+\varepsilon} f \leq M\varepsilon.$$

Note 14

6e131dfc6d004e86a827f88367981953

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Какова, в общем случае, зависимость между интегрируемостью f и существованием у неё первообразной?

В общем случае прямой зависимости нет.

Note 15

dc24ef22e6c4921924ad580a30722c6

«Интегрирование по частям для определённого интеграла»

Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b]$, $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g.$$

}}

Note 16

a938ca4e00ae4ffaf1db99f384e1785

В чем основная идея доказательства формулы интегрирования по частям для определённого интеграла?

$$(fg)' = fg' + f'g \in \mathcal{R}[a, b],$$

$$\int_a^b (fg)' = fg|_a^b.$$

Note 17

46828f8f846b4de1a73aed39d5b9d7a0

«Замена переменной в определённом интеграле»

Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

}}

Note 18

7d8af4366130490fbb87408d659837e7

В чем основная идея доказательства теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

■ Формула Ньютона-Лейбница для $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$.

Note 19

89c18701291a4123afd5111e00b0e9c8

Как преобразуется $F \circ \varphi|_{\alpha}^{\beta}$ в доказательстве теоремы о замене переменной в определённом интеграле?

■
$$F \circ \varphi|_{\alpha}^{\beta} = F|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$$

Note 20

b6aa7eee0f404285b693fb392e8ea744

Пусть $\{\{c2: f \in \mathcal{R}[-a, a], f - \text{чётна.}\}\}$ Тогда

$$\int_{-a}^a f = \{\{c1: 2 \int_0^a f.\}\}$$

Note 21

53ccd4a61cc742818562b58b9bdce5b4

Пусть $\{\{c2: f \in \mathcal{R}[-a, a], f - \text{нечётна.}\}\}$ Тогда

$$\int_{-a}^a f = \{\{c1: 0.\}\}$$

Семинар 31.03.22

Note 1

f6c10d5634604b8785e6d50a3b4179bb

Пусть $\{c3: y = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}(x) \setminus \mathbb{R}, p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Q}\}$ Тогда интеграл вида

$$\int_{\{c2: R(x, y^{p_1}, y^{p_2}, \dots, y^{p_n})\}} dx$$

берётся заменой $\{c1: t^N = y$, где N — общий знаменатель дробей $p_1, \dots, p_n\}$

Note 2

f28ac103f505434d9a7caa2eb9756579

$\{c2: \text{Дифференциальным биномом}\}$ называется $\{c1: \text{дифференциал вида}$

$$x^m(a + bx^n)^p dx, \\ a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

$\}$

Note 3

6d980687cd794cb2b67482197892cb24

Каковы условия для применения каждой из подстановок применяемых для взятия интеграла от дифференциального бинома?

$$p \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$$

Note 4

b2650fc8a6c4b88b1f39cd872a556b1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $p \in \mathbb{Z}$)?

$t^N = x$, где N — общий знаменатель m и n .

Note 5

bcc008ea2e804fcc8d3df70bfc88cdc1

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$)?

■ $t^k = a + bx^n$, где k — знаменатель p .

Note 6

90e931c9722e44219fe1e08170da8e53

Какая подстановка используется для взятия интеграла от дифференциального бинома (случай $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$)?

■ $t^k = ax^{-n} + b$, где k — знаменатель p .

Лекция 23.04.22 (1)

Note 1

57c65a69d4ce4beca2a4ef3d19482330

Пусть $\{\{c3: f \in C^{n+1}\langle A, B \rangle, a, x \in \langle A, B \rangle, \} \} n \in \{\{c4: \mathbb{Z}_+\} \}$. Тогда

$$\{\{c2: R_{a,n}f(x)\} \} = \{\{c1: \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.\} \}$$

(в интегральной форме)

Note 2

0a72287655664b3e99f6388731f26bfc

Какой метод доказательства используется в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме?

■ Индукция по n .

Note 3

82254691571e452294750327ef22eb89

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (базовый случай)?

■ При $n = 0$ получаем формулу Ньютона-Лейбница.

Note 4

4a33a11f8ade46f08ce296db479a9007

В чём основная в доказательстве формулы Тейлора с остатком в интегральной форме (индукционный переход)?

■ Применить к остатку формулу интегрирования по частям.

Note 5

aad636315afd4ee5a6744160d4b3e42d

$\{\{c2: \text{Интегральную формулу}\} \}$ остатка $R_{a,n}f(x)$ иногда называют $\{\{c1: \text{формой Якоби.}\} \}$

Note 6

397b0796dce04587adb64efce1dd1140

$$0!! \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1: 1.\} \}$$

Note 7

cac7fe0bc23d40a59bc9dd6812577d01

$$(-1)!! \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::1.\}\}$$

Note 8

7da7dd0bd19944abbe2d01d155086010

« $\{\{c2::\text{Формула Валлиса}\}\}$ »

$\{\{c1::$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

$\}\}$

Note 9

f54929de1ece44289c241d6590700ab5

В чём основная идея доказательства формулы Валлиса?

Проинтегрировать на $[0, \frac{\pi}{2}]$ неравенство

$$\sin^{2n+1} \leq \sin^{2n} \leq \sin^{2n-1}.$$

Note 10

b5c778232bc94244b23a8e4a617ed0e6

Пусть $\{\{c3::m \in \mathbb{Z}_+.\}\}$

$$\{\{c2:: \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx\}\} = \{\{c1:: \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m \text{ чётно,} \\ 1, & m \text{ нечётно.} \end{cases} \}\}$$

Note 11

715b1cec8b8041949185220e4e40a41b

В чём основная идея в доказательстве явной формулы для

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx?$$

Индукция по m и формула интегрирования по частям.

Note 12

38d390969b2741acbf82267d2fe35fd

«Вторая теорема о среднем интегрального исчисления»

Пусть $f \in C[a, b], g \in C^1[a, b], g$ монотонна на $[a, b]$. Тогда

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f g = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f.$$

Note 13

69afab3fc5004157a7f35af02f3e3d12

Вторую теорему о среднем интегрального исчисления так же называют теоремой Бонне.

Note 14

f0f631536a7f4b96b0398f89eca9118

Каков первый шаг в доказательстве теоремы Бонне?

Представить $\int_a^b f g$ как $\int_a^b F' g$, где $F(x) := \int_a^x f$.

Note 15

2166048a6ca44d23af43256399b234c9

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b F' g$ в доказательстве теоремы Бонне?

Интегрирование по частям.

Note 16

3029dc6c343e4d1c9888bf539fba3503

Какое преобразование применяется к интегралу $\int_a^b F g'$ в доказательстве теоремы Бонне?

Первая теорема о среднем.

Note 17

441ce64036224c3ebf472a05f4829979

Почему в доказательстве теоремы Бонне мы можем применить первую теорему о среднем к интегралу $\int_a^b F g'$?

По следствию из теоремы Дарбу g' не меняет знак на $[a, b]$.

Note 18

882ef3d613b947198a7bea4ad32d5160

Теорема Бонне ~~так же будет выполняться,~~ если ослабить предположение до: $f \in \mathcal{R}[a, b]$, g монотонна.

}}

(без доказательства)

Лекция 23.04.22 (2)

Note 1

8b2c86d7991e4a2b91921581b1ef4490

«Неравенство Йенсена для интеграла»

Пусть $f \in C\langle A, B \rangle, \varphi, \lambda \in C[a, b], \varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle, \lambda \geq 0$.

Тогда если f выпукла на $\langle A, B \rangle$ и $\int_a^b \lambda = 1$, то

$$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi).$$

}}

Note 2

b1fef24356cb40989e268892f941d2bc

Какие два случая рассматриваются в доказательстве неравенства Йенсена для интеграла?

1. $\varphi = \text{const}$,
2. $\varphi \neq \text{const}$.

Note 3

0135fda5379a4582960532ada8cb52a9

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi = \text{const}$)?

Доказываемое неравенство тривиальным образом обращается в равенство.

Note 4

77790770b54541099c9e486f28074f26

В чём основная идея в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq \text{const}$)?

$\int_a^b \lambda \varphi \in (A, B)$, а значит f имеет в этой точке опорную прямую.

Note 5

402dc5f48e084c56acdbac1d8691cd46

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq \text{const}$) показать, что $\int_a^b \lambda \varphi \in (A, B)$?

$$\int_a^b \lambda \varphi \in (\inf \varphi, \sup \varphi) \subset [A, B].$$

Note 6

69bcf26030d34b71839c245e2f0b80ca

Как в доказательстве неравенства Йенсена (случай $\varphi \neq \text{const}$) показать, что $\int_a^b \lambda \varphi \neq \sup \varphi$?

От противного.

Note 7

3584b635c4dc44e7b9b1624c4019860f

Если в неравенстве Йенсена для интеграла $\varphi \neq \text{const}$, а f строго выпукла, то имеет место строгое неравенство.

Note 8

83892edbede849aeb7d89f4abc718e41

Пусть $p, q \in (1, +\infty)$. Числа p и q называются сопряжёнными показателями, если

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Note 9

40347c04583b4c95b7cac9a0158ee490

Неравенство Гёльдера для сумм

Пусть $\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$, p и q — сопряжённые показатели. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Note 10

97e460d86c3c4db6b2267d79218280cd

«Неравенство Гёльдера для интегралов»

Пусть $f, g \in C[a, b]$, p и q — сопряжённые показатели.

Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

}}

Note 11

fc914f6a007e42fc8512d6d3d277c03d

В чём основная идея в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

Применить неравенство Гёльдера для сумм к интегральным суммам.

Note 12

e3416ff410fb47098739b40e48782ab7

Как представляется Δx_k в доказательстве неравенства Гёльдера для интегралов?

$$\Delta x_k = (\Delta x_k)^{\frac{1}{p}} \cdot (\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}.$$

Note 13

89fc34798a62448d9c6bd5173c1ac247

«Неравенство Коши-Буняковского для интегралов»

Пусть $f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

}}

Note 14

72d317fe9af54aa4b717962551ba6ea0

«Неравенство Минковского для сумм»

Пусть $\{a_i\}, \{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 15

19e57ef490ac48889603d288b4d8edd5

«Неравенство Минковского для интегралов»

Пусть $f, g \in C[a, b]$, $p \geq 1$. Тогда

$$\left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

}}

Note 16

e0ef8b3744ed4d93a9138b1d967a1792

В чём основная идея доказательства неравенства Минковского для интегралов?

Применить неравенство Минковского для сумм к интегральным суммам.

Note 17

000b6517531b4ecc9a052a60b3a741a4

Функция $f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется локально интегрируемой на $\langle A, B \rangle$, если

$$\forall [a, b] \subset \langle A, B \rangle \quad f|_{[a, b]} \in \mathcal{R}[a, b].$$

}}

Note 18

6b661945d0ee47a7a04ba92793c704f2

Множество функций, локально интегрируемых на $\langle A, B \rangle$, обозначается $\mathcal{R}_{loc}(\langle A, B \rangle)$ или $\mathcal{R}_{loc}\langle A, B \rangle$.

Note 19

435bbcd954b4c8bb3be63c6b63acc2a

Пусть $\{\{c3:: -\infty < a < b \leq +\infty, f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b]\}\}$

$$\{\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f\}\}$$

Note 20

51919a133fa34a6b8ed5ed7ad5b76bac

Пусть $\{\{c3:: -\infty \leq a < b < +\infty, f \in \mathcal{R}_{loc}(a, b]\}\}$

$$\{\{c2:: \int_{\rightarrow a}^b f\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1:: \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f\}\}$$

Note 21

27d9a13709de4fa5ab8baff3cd9fbaa0

Выражение

$$\int_a^{\rightarrow b} f$$

называют $\{\{c1:: \text{несобственным интегралом } f \text{ по промежутку } [a, b)\}\}$

Note 22

bb25f0567eef47e7b707c500e9674f65

Выражение

$$\int_{\rightarrow a}^b f$$

называют $\{\{c1:: \text{несобственным интегралом } f \text{ по промежутку } (a, b]\}\}$

Note 23

f741cd46bba044cfa110acd5e82b1af1

Несобственный интеграл называют $\{\{c2:: \text{сходящимся}\}\}$ если $\{\{c1:: \text{он определён и конечен}\}\}$

Note 24

db034e9065e54430baecac9bfd0a644f

Несобственный интеграл называют $\{\{c2:: \text{расходящимся}\}\}$ если $\{\{c1:: \text{он имеет бесконечное значение или не существует}\}\}$

Note 25

b0514d3cbba648c8a6e3b58d057869cd

Пусть $\{c2:: f \in \mathcal{R}[a, b].\}$ Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \{c1:: \int_a^b f.\}$$

Note 26

c8d35c7d4dfa4a8ab001d84f09a382bd

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Как показать, что $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$?

Непосредственно следует из непрерывности функции $x \mapsto \int_a^x f$ (теорема Барроу).

Note 27

ad8461ebb11542bead198798c15c6a91

Пусть $\{c3:: f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), c \in (a, b).\}$ Тогда

$$\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f\} = \{c1:: \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f.\}$$

Note 28

4873742f993743639632296fcb9c3fda

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), c \in (a, b)$. Тогда

$$\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f \text{ сходится}\} \{c3:: \iff \} \{c1:: \int_c^{\rightarrow b} f \text{ сходится.}\}$$

Note 29

7f5c166670d24acc8348a74343d875cc

Пусть $\{c3:: f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), A \in (a, b).\}$ $\{c1::$ Несобственный интеграл $\int_A^{\rightarrow b}$ называется $\{c2::$ остатком интеграла $\int_a^{\rightarrow b} f.$

Note 30

3e68bd52c99f47b59cb0f6c550c12420

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R}\} \{c3:: \implies \} \{c1:: \int_A^{\rightarrow b} f \xrightarrow{A \rightarrow b^-} 0.\}$$

Note 31

6f388abbe0394963abf8ebd7c8090616

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Как показать, что

$$\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \implies \int_A^{\rightarrow b} f \xrightarrow{A \rightarrow b^-} 0?$$

Представить $\int_A^{\rightarrow b} f$ как $\int_a^{\rightarrow b} f - \int_a^A f$.

Note 32

eed850367bd24674b9fa0cdbc5af00f5

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g.$$

Note 33

1dcd21125ff841338d9ddad83b33302d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) \text{ сходится} \iff \int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся.}$$

Note 34

5ca16eceb7f145959f15bd1feb33442e

«Замена переменной в несобственном интеграле»

Пусть $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$ монотонна, $f \in C[\varphi(\alpha), \varphi(\beta^-))$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\rightarrow \varphi(\beta^-)} f.$$

}}

Note 35

e96879968f0f4e3f8bcf844f10abfcc0

Пусть $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f|_a^{\rightarrow b} \stackrel{\text{def}}{=} f(b^-) - f(a).$$

Note 36

a4c1c50607984cd88be2763ea1bce888

Пусть $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\{ \{c2:: f|_{\rightarrow a}^b\} \} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \{c1:: f(b) - f(a^+).\} \}$$

Note 37

ceae3033619d408da982f6affab84e5b

Пусть $\{ \{c3:: f, g \in C^1[a, b) \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow b^-} (f \cdot g)(x).\} \}$ Тогда

$$\{ \{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f g' \} \} = \{ \{c1:: f g|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g.\} \}$$

Семинар 21.04.22

Note 1

c06a4a56c952416593e6c6aa940af048

Основное тригонометрическое тождество для гиперболических функций: $\{c1::$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$\}\}$

Note 2

e38aaa87d3a54ae0aa44b08a84229224

Интегралы вида

$$\int \{c2::R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\} dx$$

берутся $\{c1::$ подстановкой $a \sin t = x\}$ для $t \in \{c3::[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$.

Note 3

9c734267d24143218a9ed85452b8fb67

Интегралы вида

$$\int \{c2::R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\} dx$$

берутся $\{c1::$ заменой $a \operatorname{sh} t = x\}$ для $t \in \{c3::\mathbb{R}\}$.

Note 4

8c5f51e8a73d4e3fbf734d43dd62b423

Интегралы вида

$$\int \{c2::R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\} dx$$

берутся $\{c1::$ заменой $a \operatorname{ch} t = x\}$ для $t \in \{c3::\mathbb{R}_+\}$.

Note 5

56604ede765d4039b4eba27776ff61d0

Интегралы вида

$$\int \{c2::R(\sin x, \cos x)\} dx$$

берутся заменой $\{c1::t = \tan \frac{x}{2}\}$

Note 6

a709df92e9fe4310a7c2687c5de50054

Подстановку $t = \tan \frac{x}{2}$ называют универсальной тригонометрической подстановкой.)

Note 7

a6d2e564dd8246af81224496b8f276b0

При взятии интегралов с помощью универсальной тригонометрической подстановки для определённости полагают, что $x \in (-\pi, \pi)$.

Note 8

4baa637b1c464ab9b94bf7ef71fcc8

Как $\sin x$ выражается через $t = \tan \frac{x}{2}$?

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Note 9

3cee332cac3a4eee9f02834f87c159ea

Как $\cos x$ выражается через $t = \tan \frac{x}{2}$?

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Note 10

dd942a562634467e97ec85771a1d7a27

Каковы условия для частных случаев при взятии интеграла

$$\int R(\sin x, \cos x) dx?$$

1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x);$
2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x);$
3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$

Note 11

ff62f0455f5449e6a2187727fb759f0d

Если $\{c2: R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)\}$ то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

берётся $\{c1: \text{заменой } t = \cos x.\}$

Note 12

05898276b49140939ed972fa0dd24b19

Если $\{c2: R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)\}$ то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

берётся $\{c1: \text{заменой } t = \sin x.\}$

Note 13

6d9149e716954e3694079d557eb41976

Если $\{c2: R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)\}$ то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

берётся $\{c1: \text{заменой } t = \tan x.\}$

Note 14

ac6a5109ec254fdfbe4146361aef5293

Интегралы вида

$$\int \{c2: \sin^n x \cdot \cos^m x\} dx, \quad n, m \in \mathbb{Q}$$

берутся $\{c1: \text{заменой } t = \sin x\}$

Лекция 30.04.22 (1)

Note 1

c145ba4d6dca4a06a50cec14e1551b20

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\{c4:: f \geq 0.\}$ Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ $\{c2:: \text{сходится}\}$ $\{c3:: \iff\}$ функция $\{c1:: x \mapsto \int_a^x f\}$ ограничена сверху на $[a, b)$.

Note 2

0be99a47ac0e428faad6ea9879f39822

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится \iff функция $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена сверху на $[a, b)$. В чём основная идея доказательства?

■ $\int_a^x f \nearrow$ и теорема о пределе монотонной функции.

Note 3

e94553827bfa462995cb7abf3f169453

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\{c2:: f \geq 0.\}$ Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ либо $\{c1:: \text{сходится},\}$ либо $\{c1:: \text{расходится к } +\infty.\}$

Note 4

2613f68b7e7b444ea053850e9887a1e8

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\{c2:: f \geq 0.\}$ Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f = \{c1:: \sup_{x \in [a, b)} \int_a^x f\}$.

Note 5

05b94ccacfa246db99eb2dcbfca408f2a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\{c5:: f, g \geq 0,\}$

$$f(x) = \{c4:: O(g(x)), \quad x \rightarrow b^-. \}$$

Тогда $\{c1:: \int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R}\} \{c3:: \iff\} \{c2:: \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}\}$

Note 6

635015d74b6c4594817b074aa5417c29

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\{c5:: f, g \geq 0,\}$

$$f(x) = \{c4:: O(g(x)), \quad x \rightarrow b^-. \}$$

Тогда $\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} f \notin \mathbb{R}\} \{c3:: \implies\} \{c1:: \int_a^{\rightarrow b} g \notin \mathbb{R}\}$

Note 7

95f69b2a23484af79ddfafb4fda8cf09

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f, g \geq 0$,

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow b^-.$$

Тогда, если $\int_a^{\rightarrow b} g$ сходится, то и $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится.

В чём основная идея доказательства?

Из определения O -большого сравнить остатки $\int_\varepsilon^{\rightarrow b} f$ и $\int_\varepsilon^{\rightarrow b} g$.

Note 8

88104faac5ad425e8ad1e9d194e82fcf

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0, g > 0$ и $\frac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$.

Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}.$$

Note 9

1c33032b82c74c258d783b6f03d0ec39

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0, g > 0$ и $\frac{f}{g}(b^-) \in [0, +\infty)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

$\frac{f}{g}$ ограничена в окрестности $b \implies f(x) = O(g(x))$.

Note 10

c6c6bac50bc74bf1b743dc23079418dc

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0, g > 0$ и $\frac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$.

Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}.$$

Note 11

156267ccd8034eca99dbb3d574fbf25e

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$, $g > 0$ и $\frac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty]$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \implies \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}.$$

В чём основная идея доказательства?

Поменять местами f и g , рассмотрев $\frac{g}{f}(b^-) \in [0, +\infty)$.

Note 12

1139c594c8b941fc9a945b4ca914a566

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f \geq 0, g > 0$ и $\frac{f}{g}(b^-) \in (0, +\infty)$.
 Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}.$$

Note 13

1588fad5b7a94fb7a874e07813b56e6a

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f, g \geq 0$.

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow b^-.$$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}$.

Note 14

3804d89199d040dea2d1a4ab5975760d

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $f, g \geq 0$,

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow b^-.$$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f \in \mathbb{R} \iff \int_a^{\rightarrow b} g \in \mathbb{R}$.

В чём основная идея доказательства?

Показать, что f и g ограничены по сравнению друг с другом.

Note 15

03152527c42d4e8bb83dd25771b6c907

Пусть $f \in C[a, +\infty)$, $f \geq 0$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Note 16

3b29658e766c4cd28321fc274785321b

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

необходимым условием для сходимости $\int_a^{\rightarrow b} f$?

■ Да, является.

Note 17

d8d5ca8f054b4f198c844c2fa4947b52

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Является ограниченность функции

$$x \mapsto \int_a^x f$$

достаточным условием для сходимости $\int_a^{\rightarrow b} f$?

■ Нет, она является только необходимым условием.

Note 18

0293c1fbac2c45939b37aee500e2e937

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Интеграл $\int_a^{\rightarrow b} f$ называют $\{\{c2::\text{сходящим-}$
ся абсолютно,\}\} если $\{\{c1::\int_a^{\rightarrow b} |f| \text{ сходится.}\}\}$

Note 19

9f03ada40444f7b806ae914e3c10af8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ и $\int_a^{\rightarrow b} g$ $\{\{c2::\text{схо-}$
дятся абсолютно,\}\} то $\{\{c3::\int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) \}\}$ $\{\{c1::\text{сходится абсолют-}$
но,\}\}

Note 20

877bbbf0aad47f18e73982ecb61a25c

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, то он
{{c1: сходится.}}

Note 21

1e256a23b0234f618630bb0ecd81a5c1

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, то он сходится. В чём ключевая идея доказательства?

Критерий Больцано-Коши сходимости функции для соответствующих интегралов с переменным верхним пределом.

Note 22

90872b464e394488bd0388fbf5e5fc3e

Может ли несобственный интеграл сходиться, не сходясь при этом абсолютно?

Да, может.

Note 23

0268c46e88c24c1d9a2339d7f0d3ee01

Пусть $f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ {{c2: сходится, но не абсолютно,}} то говорят, что {{c1: он сходится условно или неабсолютно.}}

Note 24

8cf6a70282a945a2ba0dc4b0a63abad8

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^{\rightarrow b} f$ {{c2: сходится условно,}} а $\int_a^{\rightarrow b} g$ {{c2: сходится абсолютно,}} то $\int_a^{\rightarrow b} (f + g)$ {{c1: сходится условно.}}

Note 25

710cc42101c14046a49743d5070986c1

Пусть $f, g \in \mathcal{R}_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится условно, а $\int_a^{\rightarrow b} g$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\rightarrow b} (f + g)$ сходится условно. В чём основная идея доказательства?

Представить f как сумму $(f + g) - g$.

Note 26

4ff4773b59de42daa0a880e4a8a170e7

Пусть $\{c4:: f \in C[a, b),\}$ $\{c3:: g \in C^1[a, b), g \text{ — монотонна.}\}$ Если $\{c1:: g$ бесконечно мала в точке b^- , а $x \mapsto \int_a^x f$ ограничена на $(a, b),\}$ то $\{c2:: \int_a^{\rightarrow b} (f \cdot g)$ сходится. $\}$

«Признак $\{c5:: \text{Дирихле}\}$ $\{c2:: \text{сходимости несобственного интеграла}\}$ »

Note 27

ae6efc013b634d36a35078f6d529988d

В чём основная идея доказательства признака Дирихле сходимости несобственного интеграла?

Применить формулу интегрирования по частям и показать абсолютную сходимость $\int_a^{\rightarrow b} F g'$.

Note 28

2f08599a01c3436a9f48422e767ba763

Как в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла показать, что $\int_a^{\rightarrow b} F g'$ сходится абсолютно?

Оценить сверху значение $\int_a^{\rightarrow b} |F g'|$.

Note 29

599be6e31a83462881df0f2734d270d5

Почему в доказательстве признака Дирихле сходимости несобственного интеграла интеграл $\int_a^{\rightarrow b} |F g'|$ не может не существовать?

Потому что $|F g'| \geq 0$.

Note 30

fdf163be427a40e1a02bdfb1d3392f46

Пусть $\{f \in C[a, b], g \in C^1[a, b], g \text{ — монотонна.}\}$ Если $\{g \text{ — ограничена, а } \int_a^b f \text{ сходится,}\}$ то $\{\int_a^b (f \cdot g) \text{ сходится.}\}$

«Признак $\{g \in C^1[a, b], g \text{ — монотонна.}\}$ сходимости
несобственного интеграла»

Note 31

5714e2e7542d4b4aa0316cb086c35aac

В чём основная идея доказательства признака Абеля сходимости несобственного интеграла?

Признак Дирихле для функций f и

$$x \mapsto g(x) - g(b^-).$$

Note 32

8ceee057705b4a778730645db78a3fb2

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла так же будет выполняться, если ослабить допущения до:

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \quad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Note 33

3d0b9c7aa10142388b565e673f847be1

Признак Абеля сходимости несобственного интеграла так же будет выполняться, если ослабить допущения до:

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[a, b), \quad g \text{ монотонна на } [a, b).$$

}}

(без доказательства)

Лекция 30.04.22 (2)

Note 1

519087b524d64a7db308cfc813fb90f7

Отображение $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **движением пространства \mathbb{R}^n** , если оно сохраняет расстояние между точками.

Note 2

b1453ceeece4b72b798234b7da1813d

Площадь называется отображение $S : \{P\} \rightarrow \mathbb{R}_+$, заданное на некотором классе $\{P\}$ подмножеств плоскости, которое при этом

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольниках;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 3

47470cb51b9e4e21bb69da097aba5d2b

Фигуры из класса подмножеств плоскости, на которых задано отображение площади, называются **квадрируемыми фигурами**.

Note 4

18345644cb79468f9ec377bda0dc0a8b

Пусть P_1 и P_2 — квадрируемые фигуры и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Тогда $P_1 \cup P_2$ — квадрируемая фигура и

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

(свойство **аддитивности** из определения площади)

Note 5

76c9c3e2743049ffa9cc6d12f6dc926d

Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab .

(свойство **нормируемости на прямоугольниках** из определения площади)

Note 6

21333bd49d034ec7af62abe5e5b689e7

Пусть $\{\{c3::P - \text{квадрируемая фигура и } U - \text{движение плоскости.}\}\}$ Тогда $\{\{c1::U(P) - \text{квадрируемая фигура}\}\}$ и $\{\{c2::$

$$S(U(P)) = S(P).$$

$\}\}$

(свойство $\{\{c4::\text{инвариантности относительно движений}\}\}$ из определения площади)

Note 7

b8107a1dd5d24f29a317e003bc6c9181

Пусть P, P_1 — квадрируемые фигуры, $\{\{c2::P_1 \subset P\}\}$. Тогда $\{\{c1::$

$$S(P_1) \leq S(P).$$

$\}\}$

($\{\{c3::\text{монотонность}\}\}$ площади)

Note 8

c493291ddbb94c7682c53a108ac7fce4

В чём ключевая идея в доказательстве монотонности площади?

■ Представить P как $P \cup (P \setminus P_1)$.

Note 9

d66f7a47310e439da162bfb5d766daa8

Если квадрируемая фигура P $\{\{c2::\text{содержится в некотором отрезке,}\}\}$ то $\{\{c1::S(P) = 0.\}\}$

Note 10

4f73cf95243c4ae1a203f5a5cce2a024

Если квадрируемая фигура P содержится в некотором отрезке, то $S(P) = 0$. В чём основная идея доказательства?

■ P можно заключить в прямоугольник сколь угодно малой площади.

Note 11

eea6ca09c1c445469a7fafb3cdf7c5c6

Пусть $\{P_1, P_2\}$ — квадратируемые фигуры, $S(P_1 \cap P_2) = 0$.

Тогда

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

}}

(усиленная аддитивность) площади

Note 12

430f2d5b1ff841c29c7b3b184b5cd509

В чём основная идея доказательства усиленной аддитивности площади?

Представить $P_1 \cup P_2$ как $(P_1 \setminus P_2) \cup P_2$.

Note 13

14e7b163e187481dbd050b6109d9c55a

Чему равна $S(P_1 \setminus P_2)$ в доказательства усиленной аддитивности площади?

$$S(P_1 \setminus P_2) = S(P_1).$$

Note 14

a8841fa849b54fcdb1d646f27b165f0d

Объёмом называется отображение $V : \{T\} \rightarrow \mathbb{R}_+$, заданное на некотором классе $\{T\}$ подмножеств \mathbb{R}^3 , которое при этом

- аддитивно;
- нормируемо на прямоугольных параллелепипедах;
- и инвариантно относительно движений.

}}

Note 15

7cfda5f9df304d888f1d18b59b9c2805

Элементы из класса подмножеств \mathbb{R}^3 , на которых задано отображение объёма, называются кубическими телами.

}}

Note 16

0857e7d4cb3949fa8150811b0b482d43

Объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c равен abc .

(свойство нормируемости на прямоугольных параллелепипедах из определения объёма)

Note 17

5718ba5a41374083b6fcc1508f440aa6

Если кубируемое тело T содержится в некотором прямоугольнике, то $V(T) = 0$.

Note 18

429679b187e449738c280e35b1c167ba

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$, $h \geq 0$. Множество $P \times [0, h]$, а так же всякий его образ при движении, называется прямым цилиндром с основанием P и высотой h .

Note 19

910d0a9f9f5342c18ec7291c3bcf5a75

Пусть P — квадратуемая фигура, $h \geq 0$. Тогда цилиндр $P \times [0, h]$ кубируем и

$$V(P \times [0, h]) = S(P)h.$$

}}

Note 20

09254f53532b46f2a53c623d390ebb80

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$\left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T \right\}$$

называется сечением множества T первой координатой x .

Note 21

364174b8e50c41769a37bd8c66b37c2f

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. Сечение множества T первой координатой x обозначается $T(x)$.

Note 22

897caf9d2c9e4338bb71941389908a3c

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \in [a, b]$. $\{\{c2: i\text{-я координата вектора } \gamma(t)\}\}$ обозначается $\{\{c1: \gamma_i(t)\}\}$

Note 23

bfb45d16ad184797a2996ad01ffcef3e

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i \in [1 : m]$. $\{\{c2: \text{Функция } t \mapsto \gamma_i(t)\}\}$ называется $\{\{c1: i\text{-й координатной функцией отображения } \gamma.\}\}$

Note 24

b14417cf3a944cb4a66a5e8e9d998e8e

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i \in [1 : m]$. $\{\{c2: i\text{-я координатная функция } \gamma\}\}$ обозначается $\{\{c1: \gamma_i.\}\}$

Note 25

dd1a71a2fed04fe9afe31c7632361372

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Отображение γ называется $\{\{c2: \text{непрерывным на } [a, b]\}\}$, если $\{\{c1: \text{каждая его координатная функция непрерывна на } [a, b]\}\}$

Note 26

b547615a5824427faef3dd11a3b25d6d

$\{\{c2: \text{Путь в } \mathbb{R}^m\}\}$ называется $\{\{c1: \text{непрерывное отображение}$

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

$\}\}$

Note 27

22935aef61d54e6ca59da2c35faa2d07

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . $\{\{c2: \text{Точка } \gamma(a)\}\}$ называется $\{\{c1: \text{началом пути } \gamma.\}\}$

Note 28

306f29e0450e438d99bc99ecf7bfc7f6

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . $\{\{c2: \text{Точка } \gamma(b)\}\}$ называется $\{\{c1: \text{концом пути } \gamma.\}\}$

Note 29

8dd5f0f6a866470697eebadc0467f96f

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . $\{\{c1: \text{Множество } \gamma([a, b])\}\}$ называется $\{\{c2: \text{носителем пути } \gamma.\}\}$

Note 30

7d4bcf2b08264eb9ab15db7043690c48

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь γ называется замкнутым, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Note 31

5093bb30b14c48e3b3fadaef0c12af8

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь γ называется простым или несамопересекающимся, если

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ или } t_1, t_2 \in \{a, b\}.$$

}}

Note 32

d8f2c782ae694dd988da84bcb859ff74

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь γ называется k раз непрерывно дифференцируемым или k -гладким, если все $\gamma_i \in C^k[a, b]$.

Note 33

05da85b7f0a84b368ee3c6bef725c8da

Множество всех k -гладких путей $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ обозначается

$$C^k[a, b].$$

}}

Note 34

2915b1df3b9e42158ec7ffe997e98a04

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь γ называется кусочно-гладким, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$, что сужение γ на любой из отрезков разбиения — гладкий путь.

Note 35

9c342e15007543ce80fa38b9df7f3251

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь, задаваемый формулой

$$t \mapsto \gamma(a + b - t), \quad t \in [a, b],$$

называется противоположным пути γ .

Note 36

f069a263f684409d8ff3e26967cba803

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь, противоположный пути γ , обозначается γ^- .

Note 37

591160f41fd4454bafef7bb81051e9799

Два пути $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ называются эквивалентными, если существует строго возрастающая сюръекция

$$u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$$

такая, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ u$.

Note 38

fe470bb82a2b4926851a2edfc7a0e8bb

Каждый класс эквивалентности путей в \mathbb{R}^m называется кривой.

Note 39

cbe0b68e357849a2ad4608976c677898

Каждый из представителей класса эквивалентности, составляющего данную кривую, называется параметризацией этой кривой.

Note 40

466347f360424036ba201c4d9083bb8b

Кривую в пространстве \mathbb{R}^m обозначают как $\{\gamma\}$, где γ — некоторая её параметризация.

Note 41

1faf6fe6c5d7403c89e416216d3e9699

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Семейство отрезков, соединяющих точки $\gamma(\tau_k)$ и $\gamma(\tau_{k+1})$ для $\{\tau_k\} \in T[a, b]$ называют ломаной, вписанной в путь γ .

Note 42

4be9559c1fbc4e42804714ea29cdf641

Длиной ломаной называют сумму длин составляющих её отрезков.

Note 43

2da98f4689254999b9ceb8a314d0ea1

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . $\{\{c2::\text{Длиной}\}\}$ пути γ называется $\{\{c1::\text{величина}\}\}$

$$\sup_{\tau \in T[a, b]} \ell_{\tau},$$

где ℓ_{τ} — длина ломаной, отвечающей разбиению τ .

Note 44

60df0982954545929b0ff63a854ca1d8

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . $\{\{c2::\text{Длина пути } \gamma\}\}$ обозначается $\{\{c1::s_{\gamma}\}\}$

Note 45

38b6d13987e84d16b683136f8cbe95af

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Путь γ называется $\{\{c2::\text{спрямляемым}\}\}$ если $\{\{c1::s_{\gamma} < +\infty\}\}$

Лекция 07.05.22 (1)

Note 1

a086c7c565474cc28e5e635aa58fbc68

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Множество

$$\left\{ (x, y) \mid x \in [a, b], y \in \Delta_{0, f(x)} \right\}$$

называется подграфиком функции f .

Note 2

ce2924abf7304cfb861aa52962241aa0

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Подграфик функции f обозначается Q_f .

Note 3

938420b690a6454bb2d2f1eea1281a1b

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Подграфик функции f называется криволинейной трапецией, если $f \geq 0$, $f \in C[a, b]$.

Note 4

8454114fa9b446d495fd999f8d6522b6

Как показать, что подграфик криволинейной трапеции является квадратируемой фигурой?

■ Принять на веру. (В нашем курсе это не доказывается.)

Note 5

1bbdb3d7edc4466bc39badd75fe893f

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $f \geq 0$. Тогда $S(Q_f) = \int_a^b f$.

Note 6

913f7f98ebc549638163e89e85c4e29b

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Тогда $S(Q_f) = \int_a^b f$.

В чём ключевая идея доказательства?

■ Ограничить значение $S(Q_f)$ через интегральные суммы Дарбу для произвольного разбиения.

Note 7

ce632e26e2cf4cb19eea3f0a4ab3c709

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $S(Q_f) = \int_a^b |f|$.

Note 8

381cae56ef164e66acf7fefebf662c4a

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Как соотносятся величины $S(Q_f)$ и $S(Q_f \setminus \Gamma_f)$?

■ Они равны.

Note 9

4cde7099bf1543dabb6d8f15b462ae9e

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Откуда следует, что

$$S(Q_f) = S(Q_f \setminus \Gamma_f)?$$

■ $S(\Gamma_f) = 0$.

Note 10

b6e7714d201749cd9fd4e7b0bd716384

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $f \leq g$. Фигура, заключённая между графиками f и g тоже называется криволинейной трапецией.

Note 11

bc1564f4497f46e687c00d29b41fdb88

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $f \leq g$. Площадь криволинейной трапеции, заключённой между графиками f и g равна

$$\int_a^b (g - f).$$

}}

Note 12

7b57ff51f8f74d7a9e4b6bc05043f32c

Пусть $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Множество точек

$$\left\{ r \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \in [\alpha, \beta], r \in [0, f(\varphi)] \right\}$$

называется криволинейным сектором, ограниченным функцией f .

Note 13

92d60a9a490b49c2af35b60f685c4b05

Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$. [[c2::Криволиней-
 ный сектор, ограниченный функцией f ,]] обозначается [[c1::
 \tilde{Q}_f]]

Note 14

45120420e85a4503b25a5dd34b000e9f

Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$. Тогда

$$\{\{c2::S(\tilde{Q}_f)\}\} = \{\{c1::\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2.\}\}$$

Note 15

896e566b8a2a4fe7817b2f52377d7fbd

Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$. Тогда

$$S(\tilde{Q}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2.$$

В чём ключевая идея доказательства?

Составить суммы, аналогичные суммам Дарбу, но составленные из площадей секторов, а не прямоугольников.

Note 16

8e9b6c0f033b44bc81a2f3d4bf467a83

При вычислении объёмов с помощью интеграла на фигуру $T \subset \mathbb{R}^3$ накладываются следующие ограничения:

- [[c1:: $\exists a, b \in \mathbb{R} \quad T \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2$]]
- [[c2:: $\forall x \in [a, b] \quad T(x)$ — квадратируемая фигура с площадью $S(x)$, причём $S \in C[a, b]$;]]
- [[c3:: \forall отрезка $\Delta \subset [a, b] \quad \exists \xi_{\Delta}^*, \xi_{\Delta}^{**} \in \Delta \quad \forall x \in \Delta$

$$T(\xi_{\Delta}^*) \subset T(x) \subset T(\xi_{\Delta}^{**}).$$

]]

Note 17

a7e13633747d4baaad4c2c6b3fa89048

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям для вычисления объёма с помощью интеграла. Тогда

$$\{\{c2:: V(T)\}\} = \{\{c1:: \int_a^b S.\}\}$$

Note 18

1470b2fb4bbce4e3f8bc341fee4c90bc8

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям для вычисления объёма с помощью интеграла. Тогда $V(T) = \int_a^b S$. В чём основная идея доказательства?

■ Составить суммы Дарбу из объёмов цилиндров.

Note 19

bd53f21dcde04ea0b85cb5af9f3591a3

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\{\{c2:: \text{Тело вращения подграфика } f \text{ вокруг оси } Ox\}\}$ обозначается $\{\{c1:: T_f.\}\}$

Note 20

ba286a05719545d7989f5b131598cf49

Пусть $\{\{c3:: f : C[a, b].\}\}$ Тогда

$$\{\{c2:: V(T_f)\}\} = \{\{c1:: \pi \int_a^b f^2.\}\}$$

Note 21

0a669c3f221f45deb163b883985df4d8

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\{\{c2:: \text{Тело вращения подграфика } f \text{ вокруг оси } Oy\}\}$ обозначается $\{\{c1:: T'_f.\}\}$

Note 22

f584d6707a1844349499bd55a4a9ea9c

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\{\{c2:: V(T'_f)\}\} = \{\{c1:: 2\pi \int_a^b x f(x) dx.\}\}$$

Note 23

28b42e81a08c4032a3b4ba6c93022f1f

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $V(T'_f) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$. В чём основная идея доказательства (на интуитивном уровне)?

Интегрировать по “площадям” сечений цилиндрами, построенными на окружностях радиуса x .

Note 24

37ce05b3e5534f20b8ea802974f37e7d

Пусть $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$, $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Тело вращения криволинейного сектора, ограниченного функцией f , вокруг оси Oy обозначается T_f .

Note 25

f3588c46da91488b9544a0278ca24931

Пусть $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$V(\tilde{T}_f) = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} f^3(\theta) \cos \theta d\theta.$$

Note 26

752d8f77f5274d05967dca413b1c9472

Будут ли верны интегральные формулы площадей и объёмов для неограниченных множеств?

Да, но выражающие их интегралы будут несобственными.

Note 27

081bd87639824313a4c4b6ea6161ff62

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, все γ_i — дифференцируемые функции. Тогда

$$\gamma' \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m).$$

Note 28

78afc1de7241408b95a68a8f5ed2006a

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\|\gamma\| = \sqrt{\sum_i \gamma_i^2}.$$

Note 29

0fa2547514204ecfb3eac95208adab8e

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь в \mathbb{R}^m . Тогда, если $\{\{c4::\gamma \in C^1[a, b],$
 $\}\}$ то $\{\{c2::\gamma \text{ спрямляем}\}\}$ и $\{\{c3::s_\gamma\}\} = \{\{c1::\int_a^b \|\gamma'\|\}\}$.

Note 30

5daa6e79dbb5424ca182eac7649bffc9

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда путь γ спрямляем. В чём основная идея доказательства?

Выразить длину вписанной в γ ломаной по формуле конечных приращений и получить верхнюю и нижнюю оценку по теореме Вейерштрасса для γ'_i .

Note 31

4c3ec5ff5e45427bb896b92c52c88403

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\{\{c2::M_\Delta^{(i)}\}\} := \{\{c1::\max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|\}\}$$

Note 32

7f5b1dc3d77a415491d313007f0ee108

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\{\{c2::m_\Delta^{(i)}\}\} := \{\{c1::\min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|\}\}$$

Note 33

0c89ac8fb1834dcea867bf5186155c73

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. Почему в доказательстве $\min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$ корректно определён?

По теореме Вейерштрасса.

Note 34

6cad9c7bb8554770b6c7376b8917e607

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\|M_\Delta\| := \sqrt{\sum_i \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}.$$

Note 35

3009bc4c7b7f42c4a8a7709423d5fea7

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В доказательстве полагают

$$\|m_\Delta\| := \sqrt{\sum_i \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}.$$

Note 36

be5f472eef994b36b5098bd5198acb5a

Пусть $\tau = \{x_k\} \in T[a, b]$. Тогда $\| \text{отрезок } [x_k, x_{k+1}] \|$ называют k -м отрезком разбиения τ .

Note 37

1a3f989dffdd437daf833cc70d90b6a1

Пусть $\tau = \{x_k\} \in T[a, b]$. k -й отрезок разбиения τ часто обозначается Δ_k .

Note 38

a1a12e6c06014e1b99f62f277a0c28c8

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В чём первая ключевая идея доказательства?

Для $\{t_k\} \in T[a, b]$ оценить $s_{\gamma|_{\Delta_k}}$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\|$ через $m_{\Delta_k} \cdot \Delta t_k$ и $M_{\Delta_k} \cdot \Delta t_k$.

Note 39

42d735dd7d56418d8e5183c6c0447207

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. В чём вторая ключевая идея доказательства?

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение, что

$$\sum_k (M_{\Delta_k} - m_{\Delta_k}) \Delta t_k < \varepsilon.$$

Note 40

3464c3cc94b94c8b85c146a920767fcf

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение, что

$$\sum_k (M_{\Delta_k} - m_{\Delta_k}) \Delta t_k < \varepsilon?$$

Из равномерной непрерывности всех γ'_i .

Note 41

a157e6a52b0e4e22a04e35a2b9981058

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$. Как в доказательстве оценить значение $M_\Delta - m_\Delta$ через

$$M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}?$$

Обратное неравенство треугольника и оценка $\|\cdot\|$ через $\max_i |\cdot|_i$.

Лекция 07.05.22 (2)

Note 1

ddc3406fefdc4dcdb10eeb102957c8ce

Пусть $\{f \in C[a, b]\}$. При рассмотрении Γ_f как пути, полагают

$$\Gamma_f(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].$$

Note 2

c2ae0466ac724aa8b74a18651e9b01b8

Пусть $f \in C^1[a, b]$. Тогда путь Γ_f спрямляем и

$$s_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Note 3

d7845b70c0774392b73e28626dab39f8

Пусть $f \in C[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$. Выражение “путь γ задаётся в полярных координатах равенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ ” означает, что

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= (f(\theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)), \\ \gamma : [\alpha, \beta] &\rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Note 4

58dcc2f7e9c04a209117dce56a3fdacb

Пусть $f \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$, путь γ задаётся в полярных координатах неравенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$s_\gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2 + (f')^2}.$$

Пусть $f \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \geq 0$, путь γ задаётся в полярных координатах неравенством $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{f^2 + (f')^2}.$$

В чём основная идея доказательства?

| Явным образом показать, что $\|\gamma'\| = \sqrt{f^2 + (f')^2}$.

Лекция 14.05.22 (1)

Note 1

db30293ae2e34ccaad4737c4f196a676

Отображение $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется отображением n вещественных переменных.

Note 2

09a496c79f5646e49e9cbe8c39bc708e

Отображение $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией n вещественных переменных.

Note 3

50d467eacead432fb753be92cd3e3d5b

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. k -я координата точки x обозначается x_k .

Note 4

6298966bfb9a436cafb65c0ac1f3b462

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Note 5

82049479525249098f11edd6b86662f5

Евклидовой нормой в \mathbb{R}^n называется функция

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \sqrt{x \cdot x}.$$

}}

Note 6

0820d783bfc7483c983f2acd41905870

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Евклидова норма вектора x обозначается

}}

$$\|x\|.$$

}}

Note 7

f7962d62d97a4e45966cfbd5258d7be7

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Note 8

963d46ce6e6740c2ada2ae1586e864c8

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$.

(обратное неравенство треугольника для норм)

Note 9

197c20e358c34941810836f09234bb95

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in [1 : n]$. Тогда

$$|x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i \in [1:n]} |x_i|$$

Note 10

56e8be63cc924fadaa65ad1a43d24b40

$$\overline{\mathbb{R}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

Note 11

2d0130af589f4bc8be65d79c610c9313

Пусть $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$V_\delta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$$

Note 12

3bdf65ade40048daae6226ad13c91370

Пусть $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\dot{V}_\delta(a) \stackrel{\text{def}}{=} V_\delta(a) \setminus \{a\}$$

Note 13

a872bc2223d54bab976847e9cf14cc91

Пусть $\delta > 0$. Тогда множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > \delta\}$ называется δ -окрестностью бесконечно удалённой точки в \mathbb{R}^n .

Note 14

2a6f33f0df8d4fd78ba6c02bccbc4f26

Пусть $\delta > 0$. Тогда δ -окрестность бесконечно удалённой точки в \mathbb{R}^n обозначается $V_\delta(\infty)$.

Note 15

4180d71589654850ba33a99a79e3a0d0

Пусть $\delta > 0$. Тогда в $\{\{c2::\mathbb{R}^n\}\}$ полагаем $\dot{V}_\delta(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1::V_\delta(\infty)\}\}$.

Note 16

cf41f3caf0a74d8392d85139c9968c07

В общем случае окрестности точек в \mathbb{R}^n так же ещё называют $\{\{c1::\text{открытыми } n\text{-мерными шарами.}\}\}$

Note 17

bd99061f38de4188b72bb2a2fe1f68e8

Пусть $\delta > 0$. Тогда множество $\{\{c1::V_\delta(\infty) \cup \{\infty\}\}\}$ называется $\{\{c2::\text{окрестностью бесконечно удалённой точки в } \overline{\mathbb{R}^n}\}\}$

Note 18

40f1bd82241c4c7d8c8f327f0fd4f80e

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда

$$V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(a) = \{\{c1::V_{\min\{\delta_1, \delta_2\}}(a)\}\}$$

Note 19

c295589ac6fd4a91b7607784a4f6b94b

Пусть $\delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда в пространстве \mathbb{R}^n

$$V_{\delta_1}(\infty) \cap V_{\delta_2}(\infty) = \{\{c1::V_{\max\{\delta_1, \delta_2\}}(\infty)\}\}$$

Note 20

be9be70ce56541a69bfec3663baa83f

Пересечение двух окрестностей одной и той же точки из $\overline{\mathbb{R}^n}$ — тоже $\{\{c1::\text{окрестность этой точки.}\}\}$

Note 21

1eab3119b89e42c7bb0b893175654a5b

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $\{\{c2::a \neq b\}\}$. Тогда существуют $\{\{c1::\text{такие окрестности } V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b), \text{ что } V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset.\}\}$

Note 22

91077edbd0ea4f8b85dd14c5a192ff70

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

■ 1. $a, b \neq \infty$, 2. a или $b = \infty$.

Note 23

8409f167cccb4e7988de4ceb04f3fc9

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. В чём основная идея доказательства для $a, b \neq \infty$?

■ Взять $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\|a-b\|}{2}$.

Note 24

7eb5b28213054f63a30990a588f653c9

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $a \neq b$. Тогда существуют такие окрестности $V_{\delta_1}(a), V_{\delta_2}(b)$, что $V_{\delta_1}(a) \cap V_{\delta_2}(b) = \emptyset$. В чём основная идея доказательства для $b = \infty$?

■ Для произвольного $\delta_1 > 0$ положить $\delta_2 = \|a\| + \delta_1$.

Note 25

6a3a01e6983e4a8cb972e4752f7aaa36

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=}_{\{\{c1\}: f(x) + g(x).\}} (f(x) + g(x)).$$

Note 26

431a63ea7a8f400f997c1789317d2efc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c2\}: \lambda : E \rightarrow \mathbb{R},.\}$ Тогда

$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=}_{\{\{c1\}: \lambda(x)f(x).\}} \lambda(x)f(x).$$

Note 27

fe02a3d518ad41bcaa8eab77a41edcd0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{[c1:: f(x) \cdot g(x).]\}$$

Note 28

06ea693e03bf49faa4cea59e4dc68b73

Чем определения предела последовательности в \mathbb{R}^n отличается от такового для \mathbb{R} ?

■ Вместо модулей используется евклидова норма.

Note 29

e7496a01680c4188ab2b77d49a956769

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{[c4:: a \in \mathbb{R}^n.]\}$ Тогда

$$\{[c2:: \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a]\}\{[c3:: \} \iff \{[c1:: \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - a\| = 0.]\}$$

(в терминах вещественных последовательностей)

Note 30

346e3e4f67cb4742a0a8c03f522ac66d

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{[c2:: \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \infty]\}\{[c3:: \} \iff \{[c1:: \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = +\infty.]\}$$

(в терминах вещественных последовательностей)

Note 31

181e5459680740b4b4bb06e2b4204fba

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \overline{\{[c2:: \mathbb{R}^n]\}}$. Тогда

$$x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a \wedge x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b \implies \{[c1:: a = b.]\}$$

Note 32

a1f21b775a3b4ee5b487baced44d3d6e

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда

$$x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \wedge x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \implies a = b.$$

В чём основная идея доказательства?

От обратного и использовать существование непересекающихся окрестностей $V(a)$ и $V(b)$.

Note 33

a2015de5744c4595a00a42a327399672

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\{c3: x^k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n.\}\}$ Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{\{c2: \|x^k\|\}\} = \{\{c1: \|a\|\}\}$$

Note 34

635954ced2b945f795fa2415739e634c

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $x^k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \|a\|$.

В чём основная идея доказательства?

Обратное неравенство треугольника для $\|\|x^k\| - \|a\|\|$.

Note 35

398fb78214164adf83ccce280065c505

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $i \in [1 : n]$. Последовательность $\{x_i^k\}$ называется i -й координатной последовательностью последовательности $\{x^k\}$.

Note 36

435eee779e914a3b8c6aaa95f6a763e7

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\{c4: a \in \mathbb{R}^n.\}\}$ Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$ тогда и только тогда, когда $\forall i \in [1 : n]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i.$$

}}

Note 37

3fa906784d584b6e8ffd965de8a6322d

В чём основная идея в доказательстве теоремы о покомпонентной сходимости последовательности в \mathbb{R}^n (необходимость)?

$$\left| (x^k - a)_i \right| \leq \|x^k - a\| \rightarrow 0.$$

Note 38

40c5520ef19c4bb39c271c243477ccd9

В чём основная идея в доказательстве теоремы о покомпонентной сходимости последовательности в \mathbb{R}^n (достаточность)?

Показать, что $\|x^k - a\| \rightarrow 0$.

Note 39

3fd0844b01144973a767e49a2c96e78e

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \infty$, то координатные последовательности $\{x_i^k\}$ могут не иметь предела.

Note 40

33857f75ca574dc4808d8d21766be6fe

Пусть $\{x^k\}, \{y^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$,

$$x^k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n, y^k \rightarrow b \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$(x^k + y^k) \rightarrow a + b.$$

Note 41

0d43a16117a1444dba74a29d0ca712b4

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n, \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$,

$$x^k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n, \lambda_k \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\lambda_k x^k \rightarrow \lambda a.$$

Note 42

daf93a77a6d5452c882b4ec1bc279fc6

Пусть $\{x^k\}, \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$,

$$x^k \rightarrow a \in \{\{c2::\mathbb{R}^n, \}\} y^k \rightarrow b \in \{\{c2::\mathbb{R}^n.\}\}$$

Тогда

$$x^k \cdot y^k = \{\{c1::a \cdot b.\}\}$$

Note 43

abf40faf2fc04bae88f96f229c5991d1

В чём основная идея в доказательстве теоремы об арифметических операциях над пределами последовательностей в \mathbb{R}^n ?

■ Использовать покоординатную сходимость.

Note 44

84e580fe871e4a9099a8b893a7f7ff11

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x^{k_i}\}$ — подпоследовательность $\{x^k\}$, $a \in \{\{c2::\overline{\mathbb{R}^n}\}\}$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a \implies \{\{c1:: \lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} = a.\}\}$$

Note 45

b3b121ad972c4c2eb01797117a795d2b

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x^{k_i}\}$ — подпоследовательность $\{x^k\}$, $\{\{c2::a \in \overline{\mathbb{R}^n}\}\}$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a \implies \{\{c1:: \lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} = a.\}\}$$

Note 46

f3fc5ed889ed42c3ab9b94ad0dc2c4b6

В чём основная идея доказательства теоремы о пределе подпоследовательности в \mathbb{R}^n ?

Свести к пределу подпоследовательности числовой последовательности.

Note 47

2cc6bf0ec4b744219216b8f7b9131c13

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется $\{\{c2: \text{ограниченным,}\}$ если $\{\{c1: E \subset V_\delta(0) \text{ для некоторого конечного } \delta > 0.\}$

(в терминах окрестностей)

Note 48

3fdaf39b9f6849d3a7c1c0b77e0b2100

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется $\{\{c2: \text{ограниченным,}\}$ если $\{\{c1: \text{множество } \{\|x\| \mid x \in E\} \text{ ограничено.}\}$

(в терминах норм)

Note 49

ef35bf7807bf49a4953be0fa863fa66a

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Отображение f называется $\{\{c2: \text{ограниченным,}\}$ если $\{\{c1: \text{множество его значений ограничено.}\}$

Note 50

c361e11e60c0426c9096ce58059852fe

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\{\{c2: E \text{ ограничено}\} \iff \{\{c1: \sup_{x \in E} \|x\| < +\infty.\}$

$\}$

(в терминах sup)

Note 51

55039713f61943458ec789dbb6b145d8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $j \in [1 : n]$. $\{\{c1: \text{Множество } \{x_j \mid x \in E\}\}$ называется $\{\{c2: \text{проекцией } E \text{ на } j\text{-ю ось.}\}$

Note 52

558a15d4b2d8461a85f9900f08c2c24e

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $j \in [1 : n]$. $\{\{c1: \text{Проекция } E \text{ на } j\text{-ю ось}\}$ обозначается $\{\{c2: E_j.\}$

Note 53

5f2ada96a96d40f288abf00365fd2a8f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Как ограниченность E связана с проекциями E на координатные оси?

Ограниченность E эквивалентна ограниченности каждой из его проекций E_j .

Note 54

f854719bde1446feb7b76aecad168192

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ограниченность E эквивалентна ограниченности каждой из его проекций E_j . В чём основная идея доказательства?

Непосредственно следует из оценки

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i|.$$

Note 55

3869f37cb0f24c2184567f8561a31e1f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда f ограничено тогда и только тогда, когда $\{\{c1\}$ каждая из его координатных функций ограничена.

(в терминах координатных функций)

Note 56

b7487016c4894d77a55418ebce7c8fc2

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда f ограничено тогда и только тогда, когда каждая из его координатных функций ограничена. В чём основная идея доказательства?

Множество $f(E)$ ограничено \iff каждая из его проекций $f(E)_j$ ограничена, но $f(E)_j = f_j(E)$.

Note 57

229fec40da6c48ceac33727eebf79e42

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{x^k\} \text{ ограничена } \iff \{\{c1\} \{x_i^k\} \text{ ограничена } \forall i.\}$$

(в терминах координатных функций)

Note 58

8166d65b01864fd88374f97ce75c3eda

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{x^k\} \text{ ограничена} \iff \{x_i^k\} \text{ ограничена } \forall i.$$

В чём основная идея доказательства?

Частный случай аналогичной теоремы для произвольных отображений.

Note 59

fec8d0a7bf5b47ecb36926b61a1818fb

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{x^k\}$ сходится, то она ограничена.

Note 60

7ac0f2188c6d4b72996dba94ed321553

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{x^k\}$ сходится, то она ограничена. В чём основная идея доказательства?

Покоординатная сходимость и аналогичная теорема для числовых последовательностей.

Note 61

5f6e1b3d2fac4b1d8da33e308f6c785b

В чём основная идея доказательства принципа выбора Больцано-Вейерштрасса для последовательностей в \mathbb{R}^n ?

Последовательно выбирать подпоследовательности, попеременно получая сходимости координатных последовательностей.

Note 62

3e127d0b24f142e9beec4653c5ac676b

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{x^k\}$ не ограничена, то у неё есть подпоследовательность, стремящаяся к ∞ .

Note 63

f4a0b38770684084b9485851c73d7764

Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{x^k\}$ не ограничена, то у неё есть подпоследовательность, стремящаяся к ∞ . В чём основная идея доказательства?

■ Последовательность $\{\|x^k\|\}$ неограниченна.

Лекция 14.05.22 (2)

Note 1

8f1408b5072a4c4db503662e57f44fae

Чем определение последовательности Коши в \mathbb{R}^n отличается от такового для последовательностей в \mathbb{R} ?

■ Вместо модуля используются евклидова норма.

Note 2

a55fb30e99b8448bbf4daad28b535da6

Выполняется ли критерий сходимости Больцано-Коши для последовательностей в \mathbb{R}^n ?

■ Да, выполняется.

Note 3

15ca58d336a843058f80b5e7f575bcd0

В чём основная идея доказательства критерия сходимости Больцано-Коши для последовательностей в \mathbb{R}^n (необходимость)?

Критерий Больцано-Коши для координатных последовательностей и неравенство

$$|x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i|.$$

Note 4

48fb62af875d46c5b05b401c40d098c4

Чем определение предельных точек для подмножеств \mathbb{R}^n отличается от такового для подмножеств \mathbb{R} ?

■ Ничем.

Note 5

a669a63c0542458f9252161374cec7f3

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{a \in \overline{\mathbb{R}^n}\}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \rightarrow a.$$

}}

(в терминах последовательностей)

Note 6

15109511ff924c4baaf5512ee750e154

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \rightarrow a.$$

Какие два случая рассматриваются в доказательстве?

- 1. $a \neq \infty$; 2. $a = \infty$.

Note 7

75f06294c4514596b330d9f62883ed49

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \rightarrow a.$$

В чём основная идея доказательства для $a \neq \infty$ (необходимость)?

- Выбирать x^k по $\varepsilon = \frac{1}{k}$.

Note 8

c78fe01a6f214aa38a3343be15a6543f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Точка a является предельной для E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{a\} \quad x^k \rightarrow a.$$

В чём основная идея доказательства для $a \neq \infty$ (достаточность)?

- Из определения предела $\forall \varepsilon \quad \exists x^k \in \dot{V}_{\varepsilon}(a)$.

Note 9

22db3f3ad0394102a1d98af06cc40fbdb

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{\{c3: a \in E.\}\}$ Точка a называется $\{\{c2: \text{внутренней для } E,\}\}$ если $\{\{c1: \text{у неё есть окрестность, содержащаяся в } E.\}\}$

Note 10

18e311d437f341e9a873d377706cf0cb

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется $\{\{c2::\text{открытым в } \mathbb{R}^n,\}$
 $\}$ если $\{\{c1::\text{любая его точка является внутренней для } E.\}\}$

Note 11

b8e86e0736db4159a59c29ffcb30ac8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется $\{\{c2::\text{замкнутым в } \mathbb{R}^n,\}$
 $\}$ если $\{\{c1::\text{его дополнение } \mathbb{R}^n \setminus E \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.\}\}$

Note 12

6c14a78f8f304062aa09cf96ce030f48

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\{\{c2::E \text{ замкнуто в } \mathbb{R}^n\}\} \{\{c3::\text{тогда и только тогда, когда}\}\} \{\{c1::E \text{ содержит все свои предельные точки в } \mathbb{R}^n.\}\}$

(в терминах предельных точек)

Note 13

4313f6dffa4d4be288c13720b79f5e31

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда E содержит все свои предельные точки в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства (необходимость)?

■ От обратного и противоречие с открытостью $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 14

338d88f6cd9b49a5b6e1fc14c46c07af

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда E содержит все свои предельные точки в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства (достаточность)?

■ В $\mathbb{R}^n \setminus E$ нет предельных точек E .

Note 15

78034d8289654f2d989fd7d3cde60d2b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\{\{c2::E \text{ замкнуто в } \mathbb{R}^n\}\} \{\{c3::\text{тогда и только тогда, когда}\}\} \{\{c1::$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E.\}$

(в терминах последовательностей)

Note 16

c4a98576816047bd8e45761c09ffdc70

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$. В чём основная идея доказательства (необходимость)?

■ От обратного и противоречие с открытостью $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 17

2ad826deacbf4422a6d0864598a81e82

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in E$$

для любой сходящейся последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$. В чём основная идея доказательства (достаточность)?

■ E содержит любую свою предельную точку.

Note 18

0f1ca1a114fe4768af83b2987f80c626

Пусть $\{\{c_3: \{E_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — семейство открытых подмножеств } \mathbb{R}^n.\}$
|| Тогда $\{\{c_2: \bigcup E_\alpha\} \mid \{c_1: \text{открыто в } \mathbb{R}^n.\}\}$

Note 19

cced37c873934048bb8d05555dc666cd

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых подмножеств \mathbb{R}^n . Тогда $\bigcup E_\alpha$ открыто в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства?

■ Любая точка $\bigcup E_\alpha$ принадлежит открытому подмножеству $\bigcup E_\alpha$.

Note 20

3592d4aa6f1d49a088ea09f8f4850695

Пусть $\{\{c_4: \{E_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — семейство открытых подмножеств } \mathbb{R}^n.\}$
|| Тогда если $\{\{c_3: |A| < \aleph_0, \}\}$ то $\{\{c_2: \bigcap E_\alpha\} \mid \{c_1: \text{открыто в } \mathbb{R}^n.\}\}$

Note 21

223c7f10e64e4f73b422af6ce095038a

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — конечное семейство открытых подмножеств \mathbb{R}^n . Тогда $\bigcap E_\alpha$ открыто в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства?

$$\delta = \min_{\alpha \in A} \delta_\alpha.$$

Note 22

d5e0544892f344dcbd519b58b207d8b6

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство замкнутых подмножеств \mathbb{R}^n .
Тогда $\bigcap E_\alpha$ замкнуто в \mathbb{R}^n .

Note 23

203fb961ea984b4195210820a687183d

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство замкнутых подмножеств \mathbb{R}^n .
Тогда если $|A| < \aleph_0$, то $\bigcup E_\alpha$ замкнуто в \mathbb{R}^n .

Note 24

cdbfd70790af41228a9ac6941706aed5

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E открыто, а F замкнуто, то $E \setminus F$ открыто.

Note 25

96551e5b3eda4e56a9e84b9c87023f35

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E открыто, а F замкнуто, то $E \setminus F$ открыто. В чём основная идея доказательства?

$$E \setminus F = E \cap (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

Note 26

11768bb518f845028aa77d77032444bf

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E замкнуто, а F открыто, то $E \setminus F$ замкнуто.

Note 27

a3e832b1aa1548b5a03d89eff807b690

Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если E замкнуто, а F открыто, то $E \setminus F$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

$$E \setminus F = E \cap (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

Note 28

db6839cb255845099043c9415f55b4af

Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество \mathbb{R}^n ?

И открыто, и замкнуто.

Note 29

7f1672e6cd054b6ea16112670e15fe3d

Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество \emptyset ?

И открыто, и замкнуто.

Note 30

866fb541bf1c4d37adc09e0e70ac8bd8

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто и замкнуто. Тогда

$$E = \{\mathbb{R}^n \text{ или } \emptyset\}.$$

Note 31

d23104a8197346939669f31522a74633

Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n произвольное конечное подмножество \mathbb{R}^n ?

Замкнуто.

Note 32

685cbdd3894a49c79e96e14be1a73996

Пусть $a \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$.

$$B_\delta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}.$$

Note 33

dc873817f70d4d40b1f3c824ad89ad17

Пусть $\{\{c4: a \in \mathbb{R}^n, \} \} \{c3: \delta > 0, \}$

$$\{\{c2: \overline{B_\delta(a)}\} \} = \{\{c1: \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\} .\} \}$$

Note 34

e9a3af0fa0004802a9b0d082df09338e

Пусть $\{\{c4: a \in \mathbb{R}^n, \} \} \{c3: \delta > 0, \}$

$$\{\{c2: S_\delta(a)\} \} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c1: \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = \delta\} .\} \}$$

Note 35

f8f71a74217449c29d5e66761ce0fcb8

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество $B_\delta(a)$?

■ Открыто.

Note 36

39bd0c988fe2432690c57def909ba66

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $B_\delta(a)$ открыто. В чём основная идея доказательства?

■ Для произвольной точки из $B_\delta(a)$ выбрать достаточно маленькую окрестность и далее по неравенству треугольника.

Note 37

537577c3bdfa4bde831b90a8d0f0615f

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество $\overline{B_\delta(a)}$?

■ Замкнуто.

Note 38

b9e15e7ee78842ed93fd8fcd816e9ffc

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\overline{B_\delta(a)}$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

Использовать определение в терминах последовательностей.

Note 39

3230aeffdb12417ca0fdf94fb913dd39

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество $S_\delta(a)$?

Замкнуто.

Note 40

fdbfcb0397854628aace32977649b069

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $S_\delta(a)$ замкнуто. В чём основная идея доказательства?

$$S_\delta(a) = \overline{B_\delta(a)} \setminus B_\delta(a).$$

Лекция 21.05.22 (1)

Note 1

59c721ad4aeb41949fb3434169a89aeb

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Замыканием множества E называется наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее E .

Note 2

a94d9d6d06b6493c81f3b1e768b81375

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Замыкание множества E обозначается

$$\overline{E} \text{ или } Cl E.$$

}}

Note 3

31d05cf282b9466e8a9a000950fede4b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\overline{E} = \bigcap \{F \subset \mathbb{R}^n \mid F - \text{замкнуто, } E \subset F\}.$$

Note 4

69f36de3475242618fbb0eb4ae74b6dd

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Тогда

$$a \in \overline{E} \iff a \in E \text{ или } a - \text{предельная точка } E.$$

Note 5

4bdd2826972c4b32bc4fdfbfcf85e6d3

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Тогда

$$a \in \overline{E} \iff \exists \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad x^k \rightarrow a.$$

(в терминах последовательностей)

Note 6

8c1b27442afc42aa867e239a4bcd4ce

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \implies a \in E \text{ или } a - \text{предельная точка } E.$$

В чём основная идея доказательства?

От обратного и $\overline{E} \subset \mathbb{R}^n \setminus V_\delta(a)$.

Note 7

2f37acc18e674bf8bc8700263185d335

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \iff a \in E \text{ или } a \text{ — предельная точка } E.$$

В чём основная идея доказательства?

Можно построить последовательность, стремящуюся к a .

Note 8

54efca151faf4889b51828eff685beb6

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \implies \exists \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \quad x^k \rightarrow a$$

В чём основная идея доказательства?

a — предельная точка E или $a \in E$.

Note 9

2939354f3cd74c96b19d07520618444b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$a \in \overline{E} \iff \exists \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \quad x^k \rightarrow a$$

В чём основная идея доказательства?

$\{x^k\} \subset \overline{E}$, но \overline{E} замкнуто.

Note 10

61bd6874e98f44a0882b56e7a750b9a0

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Внутренностью E называется множество всех внутренних точек E .

Note 11

139034b5d2bc422097d150cb9da30c33

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Внутренность E обозначается

$$\text{Int } E \text{ или } \overset{\circ}{E}.$$

}}

Note 12

b8de5908fb8d44bf92fcd25520547f67

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Открыто или замкнуто в \mathbb{R}^n множество $\text{Int } E$?

■ Открыто.

Note 13

799638c4bc6f4c50bb965b8803d41eab

Пусть $E, G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\{\{c3: G \text{ открыто в } \mathbb{R}^n\}\}$ и $\{\{c2:: G \subset E,$
 $\}\}$ то $\{\{c1: G \subset \text{Int } E.\}\}$

Note 14

cd90c5fff534fb981914ccc37bd7ae9

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. $\{\{c2: \text{Внутренность } E\}\}$ — это $\{\{c1: \text{наибольшее по}$
включению открытое множество, содержащееся в $E.\}\}$

(в терминах включения)

Note 15

a1e8aa28d96d49799f0c4a4040f2dead

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2: \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}\}\} = \{\{c1: \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus E).\}\}$$

Note 16

442961e481cd45c3bc7df4d480b46b74

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus E).$$

В чём основная идея доказательства?

■ Показать, что $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$ — это наибольшее по включению
открытое подмножество $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Note 17

fb2a725e8e4b4c2fb0fa050078699cf5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2: \mathbb{R}^n \setminus \text{Int } E\}\} = \{\{c1: \overline{(\mathbb{R}^n \setminus E)}.\}\}$$

Note 18

fe2c858bf3c04acfa21126cdd9904aef

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Границей E называется множество

$$\overline{E} \setminus \text{Int } E.$$

}}

Note 19

0a35e47f857f43ec9bbff01116e04eb0

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Граница множества E обозначается ∂E .

Note 20

88b2a73094fb4a239e5b513a46f3a622

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Открыто или замкнуто множество ∂E ?

■ Замкнуто.

Note 21

c7929bc62d394cb49c8411de71aff62d

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ∂E замкнуто в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства?

■ ∂E — это разность замкнутого и открытого множеств.

Note 22

e5f44e996a0c40ec85bea1411325179d

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\text{Int } B_\delta(a) = \text{Int } B_\delta(a)$.

Note 23

351b99e8bd1248d0b7d36a78fbd1807

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\text{Int } \overline{B_\delta(a)} = \overline{\text{Int } B_\delta(a)}$.

Note 24

5134e609e6a542f895fa5477372047a1

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\partial B_\delta(a) = \partial S_\delta(a)$.

Note 25

6d51fdbba058545838e2402ff10db74ea

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\partial(\overline{B_\delta(a)}) = \overline{\partial B_\delta(a)}$.

Note 26

a2a8ac9541bc4edfb8e04b5522f23c70

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Тогда $\text{Int } \overline{B_\delta(a)} = B_\delta(a)$. В чём основная идея доказательства?

Показать, что $S_\delta(a)$ не содержит внутренних точек $\overline{B_\delta(a)}$.

Note 27

6091740d09a14c4da2f8435a9157b10d

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $a \in E$ называется внутренней для F в E , если

$$\exists \delta > 0 \quad (V_\delta(a) \cap E) \subset F.$$

}}

Note 28

d9c779744732420dbf907539811051e7

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество F называется открытым в E , если любая его точка является внутренней для F в E .

Note 29

a6191d3dd3e94990aa8ee40f4b7e6d53

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество F называется замкнутым в E , если $E \setminus F$ открыто в E .

Note 30

d0303c87476a424c80b3fb7522768304

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда F открыто в E \iff существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого

$$F = E \cap G.$$

}}

(в терминах открытости/замкнутости в \mathbb{R}^n)

Note 31

4d33bc77c67b4b64898e5fec221058d8

Тогда F открыто в $E \implies$ существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

$$G = \bigcup_{a \in F} V_{\delta_a}(a).$$

Note 32

1b49cf9639924fec9017ca00ca0843fd

Тогда F открыто в $E \iff$ существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

Для произвольной точки из F выбрать окрестность из определения открытости G .

Note 33

33888ff338f94ea59f1f245c0f5ae61b

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда F замкнуто в $E \iff$ существует замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого

$$F = E \cap G.$$

}}

(в терминах открытости/замкнутости в \mathbb{R}^n)

Note 34

622fe773efcb41e080e51232557f15b9

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда F замкнуто в $E \iff$ существует замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для которого $F = E \cap G$. В чём основная идея доказательства?

Применить аналогичную теорему для открытых множеств к $E \setminus F$.

Note 35

c75d8ade85014bf2a2e7c13cc3299418

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Если E открыто в \mathbb{R}^n , то

$$F \text{ открыто в } E \iff F \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

Note 36

be4241d752ce41c1aab8a52ad449c33b

Пусть $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$. Если E открыто в \mathbb{R}^n , то

$$F \text{ открыто в } E \iff F \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

В чём основная идея доказательства?

■ $F = G \cap E$, где G открыто в \mathbb{R}^n .

Note 37

c4e6058390c44a47ab144bf71a132ed0

Открыто или замкнуто в \mathbb{R} множество $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$?

■ Ни открыто, ни замкнуто.

Note 38

d52b4279a3d34772a1cd57efbed032f8

Открыто или замкнуто в \mathbb{Q} множество $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$?

■ Открыто.

Note 39

8607c43c4d9145ce8b739f277bc467f5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Семейство Ω подмножеств \mathbb{R}^n такое, что $E \subset \bigcup_{A \in \Omega} A$, называется покрытием множества E .

Note 40

89d8d5966eba46478e132c99f8a87207

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Если Ω — это покрытие E , то говорят, что Ω покрывает E .

Note 41

69ac5bea935247e8ba609ec7be95b65f

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Ω — покрытие E . Подсемейство Ω , которое также покрывает E , называется подпокрытием Ω .

Note 42

8e8ddb4f754b447b863761db2945f748

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Ω — покрытие E . Покрытие Ω называется открытым, если любое множество $A \in \Omega$ открыто.

Note 43

33da2e11009a4fe9a561cfdb024b9f9e

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество E называется $\{\{c2: \text{компактным (или компактом)}\}\}$ если $\{\{c1: \text{из любого открытого покрытия } E \text{ можно выбрать конечное подпокрытие.}\}\}$

Note 44

edb5bd07bd340dd9b11c009a8d0fa29

Пусть $\{\{c3: E \subset \mathbb{R}^n \text{ компактно.}\}\}$ Тогда любое $\{\{c1: \text{замкнутое}\}\}$ подмножество E $\{\{c2: \text{также компактно.}\}\}$

Note 45

4e97b4cdaca54940aa77bb448b02bc3c

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда любое замкнутое подмножество E также компактно. В чём основная идея доказательства?

Если Ω — открытое покрытие F , то из $\Omega \cup \{\mathbb{R}^n \setminus F\}$ можно выбрать конечное подпокрытие E .

Note 46

83fdbcb8dc7984543ac287632c88cdd2b

Пусть E — некоторое множество, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\{\{c2: E^n\}\} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\{\{c1: E \times \cdots \times E\}\}}_{n \text{ раз}}$$

Note 47

8612ce6b751d42f5ad16af50fe9b34ab

$\{\{c1: \text{Множество } [a, b]^n\}\}$ называется $\{\{c2: n\text{-мерным замкнутым гиперкубом в } \mathbb{R}^n\}\}$

Note 48

d7b9e7dbda10452fbbcb34b5bb5ab142

Любой замкнутый гиперкуб в \mathbb{R}^n $\{\{c1: \text{компактен.}\}\}$

Note 49

d5ecf42c2e9e4f33a9b2c2233029ebca

Любой замкнутый гиперкуб в \mathbb{R}^n компактен. В чём основная идея доказательства?

От противного и построить последовательность $\{T_k\}$ “стягивающихся” гиперкубов, каждый из которых покрывается только бесконечным подпокрытием.

Note 50

0f927b1c30bb4f359979159a1d5f82dd

Любой замкнутый гиперкуб в \mathbb{R}^n компактен. Что приводит к противоречию в доказательстве?

Для достаточно большого k гиперкуб T_k будет достаточно мал, чтобы попасть в некоторое множество из начального покрытия.

Note 51

86aecfa34161406bb7f4d85d2202e628

Любой замкнутый гиперкуб в \mathbb{R}^n компактен. Пусть $\{T_k\}$ — последовательность “стягивающихся” гиперкубов из доказательства от противного. Как показать, что существует T_k покрываемый одним множеством из покрытия.

Взять множество U , покрывающее точку $a \in \bigcup_k T_k$. Тогда существует $T_k \subset V(a) \subset U$.

Note 52

6efd282fcad744ba898c1ed2ad57dcb2

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2::E \text{ компактно}\}\} \{\{c3:: \iff \}\} \{\{c1::E \text{ замкнуто и ограничено.}\}\}$$

«Теорема $\{\{c4::\text{Гейне-Бореля}\}\}$ »

Note 53

d8a0467fa82d4e8db762642af19e20b2

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\{\{c2::E \text{ компактно}\}\} \{\{c3:: \iff \}\} \{\{c1:: \forall \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} \in E.\}\}$$

(в терминах последовательностей)

Note 54

66985cb806c94dfa82c0b610d9c140f5

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

E компактно $\implies E$ замкнуто и ограничено.

В чём основная идея доказательства?

Использовать определение в терминах последовательностей.

Note 55

0f59e19db625497a95c6bc7b86dd7f58

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

E компактно $\iff E$ замкнуто и ограничено.

E — замкнутое подмножество компакта $[-c, c]^n$.

Note 56

302a825507eb4e8f96bf410b9004a430

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

E компактно $\implies \forall \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} \in E$.

В чём основная идея доказательства?

Выбрать последовательность по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса и от противного показать, что её предел лежит в E .

Note 57

e6a17f15d6204305b22ec5417b43761b

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $\{x^k\} \subset E$ сходится. Как показать, что $a = \lim x^k \in E$?

Если $a \notin E$, то любое конечное подсемейство покрытия

$$\left\{ \mathbb{R}^n \setminus \overline{V_\varepsilon(a)} \right\}_{\varepsilon > 0}$$

не содержит x^k , достаточно близкие к a .

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$E \text{ компактно} \iff \forall \{x^k\}_{k=1}^\infty \subset E \quad \exists \{x^{k_i}\} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x^{k_i} \in E.$$

В чём основная идея доказательства?

■ Показать, что E замкнуто и ограничено.

Лекция 21.05.22 (2)

Note 1

eab6566f65bf4003bec24142b9b187e5

Отображение $E \subset R \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется вектор-функцией.

Note 2

ff7b125dc2ee4647b62cf48f1c0edc4c

Чем определение предела $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ по Коши принципиально отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

■ Ничем.

Note 3

21646334c02042498ac8c3104a6f0b24

Чем определение предела отображения $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ по Гейне отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

■ Ничем.

Note 4

64df3a837c784e0795b58c971d418039

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \text{ по Коши} \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \text{ по Гейне.}$$

В чём основная идея доказательства?

Если $x^k \rightarrow a$, то $\forall k > N \quad x^k \in \dot{V}_\delta(a) \cap E$ для δ из определения предела по Коши.

Note 5

03ae6948b798427ca2cb62e910651e87

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Тогда

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \text{ по Гейне} \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \text{ по Коши.}$$

В чём основная идея доказательства?

От противного и выбрать такую $\{x^k\}$, что

$$x^k \rightarrow a \quad \text{и} \quad f(x^k) \notin V_\varepsilon(a) \quad \text{для всех } k.$$

Note 6

911558d747cb439f8cd881a764ff8700

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c3::a \in \overline{\mathbb{R}^n}\}, \{\{c2::A, B \in \overline{\mathbb{R}^m}\}\}$ Тогда

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \quad \wedge \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \implies \{\{c1::A = B.\}\}$$

Note 7

67a1a0e4aa664174a6c43da05087c80d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c5::a \in \overline{\mathbb{R}^m}\}, \{\{c4::A \in \mathbb{R}^m.\}\}$ Тогда

$$\{\{c2::f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A\}\} \{\{c3::\} \iff \}\{\{c1::\forall i \quad f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A_i.\}\}$$

(в терминах координатных функций)

Note 8

897f1778b44c472ea1484dc061603ea0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E ,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если $\{\{c1::\top,\}\}$ то

$$(f(x) + g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} A + B.$$

Note 9

339c716c8963455ba9dc06fb9cac6365

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка E ,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда если $\{\{c1::\top,\}\}$ то

$$\lambda(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha A.$$

Note 10

61daf1572b2540f3809ed6f770b68fe2

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E ,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если $\{\{c1::\top,\}\}$ то

$$f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \cdot B.$$

Note 11

a80a77deaa7f4a91a4c9e4898c2d54a9

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E ,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in \mathbb{R}^m, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда если $\{\{c1::m = 1 \text{ и } B \neq 0,\}\}$ то

$$\frac{f}{g}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{A}{B}.$$

Note 12

d5a6f58c526346a3868af995d0553564

Пусть $\{\{c4::g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F,\}\} \quad \{\{c3::a \in \overline{\mathbb{R}^n} \text{ и } b \in F \text{ — предельные точки } E \text{ и } F \text{ соответственно.}\}\}$ Тогда если $\{\{c2::$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} g(b),$$

$\}\}$ то $\{\{c1::$

$$(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(b).$$

$\}\}$

Note 13

52e75393bace4aab93e0b2355fab03ed

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и $b \in F$ — предельные точки E и F соответственно. Тогда если

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} g(b),$$

то $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(b)$. В чём основная идея доказательства?

Использовать определение в терминах последовательностей и непрерывность g .

Note 14

1fe3bd0f7cca46f3926bbb096e417e7c

Чем критерий Больцано-Коши для отображений

$$E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

отличается от такового для функций $E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

В место модулей используются евклидовы нормы.

Note 15

8d5f34996faf4cf3a85fbda1c16594d9

В чём основная идея доказательства критерия Больцано-Коши отображений вида $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (необходимость)?

Определение предела по Коши и неравенство треугольника.

Note 16

c832fecebd814e72a6c8940737e9278a

В чём основная идея доказательства критерия Больцано-Коши отображений вида $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (достаточность)?

Использовать определение по Гейне и критерий Больцано-Коши для последовательностей.

Лекция 28.05.22 (1)

Note 1

3a257b829a434d649416ad3a35a9def7

Чем определение непрерывности для отображений n вещественных переменных отличается от такового для одномерных функций?

В место модулей используются евклидовы нормы.

Note 2

05eb6decda1d4c768c55bab47812cc78

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Тогда если f непрерывно в точке a и g непрерывно в точке $f(a)$, то

$g \circ f$ непрерывно в точке a .

}}

Note 3

1ccd9792cd0a4baa9ec57a71d9aa928b

В чём основная идея доказательства теоремы о непрерывности композиции для многомерного случая?

Использовать определение непрерывности в терминах последовательностей.

Note 4

8506368209b94616a8457215a2d77027

Какие операции рассматриваются в теореме о непрерывности и арифметических операциях?

1. $f + g$;
2. λf ;
3. $f \cdot g$;
4. $\frac{f}{g}$, если $m = 1$ и $g(a) \neq 0$.

Note 5

e18bda64d283443ca232d21db13a9e38

Какие два случая рассматриваются в доказательстве теоремы о непрерывности и арифметических операциях?

1. a — предельная точка; 2. a — изолированная точка.

Note 6

6d7f3f90d9f24869899e9e7ac81f69f5

В чём ключевая идея доказательства теоремы о непрерывности и арифметических операциях (если a — предельная точка)?

Следует из теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Note 7

99a111875d1e432694393341d76b930c

В чём ключевая идея доказательства теоремы о непрерывности и арифметических операциях (если a — изолированная точка)?

Следует из непрерывности отображений в изолированных точках.

Note 8

5c9917e3071449daadcafa9576104927

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Отображение f называется непрерывным на множестве E , если оно непрерывно в любой точке E .

Note 9

bf1c453e84fa41259b42e13c3b6767f5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}^m$. Утверждение « f непрерывна на E » обозначается

$$f \in C(E, F).$$

}}

Note 10

0e7d7718906f4591a7e79f0cc0898a49

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Утверждение « f непрерывна на E » обозначается

$$f \in C(E).$$

}}

Note 11

9cc2279aa7c241dda34320fbc721b6a5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывно на E тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(G)$ открыто в E .

Note 12

df8d1d56c7c44a7188bb74ecebcfae54

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывно на E тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(G)$ открыто в E . В чём основная идея доказательства (необходимость)?

$$f(V_\delta(a) \cap E) \subset V_\varepsilon(f(a)) \subset G.$$

ε существует из открытости, δ существует из непрерывности.

Note 13

b8a0f6cf91f94332806bf44c0b9d89e9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывно на E тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(G)$ открыто в E . В чём основная идея доказательства (достаточность)?

$$V_\varepsilon(f(a)) \subset G \Rightarrow f^{-1}(V_\varepsilon(f(a))) \supset f^{-1}(G) \cap E.$$

ε произвольно, δ существует из открытости.

Note 14

a1e6ae84a00b4db1b56d5dd03fc808a3

В критерии непрерывности в терминах открытых множеств можно так же потребовать, что G открыто в $f(E)$, а не в \mathbb{R}^m .

Note 15

9e66bee269447f4822adc404cf72389

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно. Если множество E компактно, то $f(E)$ компактно.

Note 16

a32bc2e4ac494e10a4f53f04bc6036f6

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно. Если множество E компактно, то $f(E)$ компактно. В чём основная идея доказательства?

Для $\{y^k\}_{k=1}^\infty \subset f(E)$ рассмотреть $\{x^k \mid f(x^k) = y^k\}$ и использовать определение компактности в терминах последовательностей.

Note 17

80ef37043af445bab64ba594208d81b6

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$\Delta_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + \lambda(b - a) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Note 18

d8cd721e984b492293d2f6d157c7939a

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Образ множества E при некотором непрерывном отображении $E \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется непрерывным образом множества E .

Note 19

9de330843e6847d88c36a3886c56961e

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\Delta_{a,b}$ компактно в \mathbb{R}^n .

Note 20

2e4c6c8c1d3f41bf89f4985e1fa000b6

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\Delta_{a,b}$ компактно в \mathbb{R}^n . В чём основная идея доказательства?

$\Delta_{a,b}$ — непрерывный образ компакта $[0, 1]$.

Note 21

9fa1fef7f12440588ed450297e717cf7

Пусть $\{E \subset \mathbb{R}^n \text{ компактно}, f \in C(E, \mathbb{R}^m)\}$. Тогда если T , то f ограничено на E .

«Первая теорема Вейерштрасса»

Note 22

da681d4f58ad439198ff548cfb270653

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$. Тогда f ограничено на E . В чём основная идея доказательства?

| $f(E)$ компактно и потому ограничено.

Note 23

a2258f34bf7d440db0ea3e64cbf46073

Пусть $\{E \subset \mathbb{R}^n \text{ компактно}, f \in C(E, \mathbb{R}^m)\}$. Тогда если $m = 1$, то f достигает на E своего наибольшего и наименьшего значения.

«Вторая теорема Вейерштрасса»

Note 24

37121c9343014eda991330666c7e918d

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E)$. Тогда f достигает на E своего наибольшего и наименьшего значения. В чём основная идея доказательства?

| Построить последовательность $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset f(E)$, стремящуюся к $\sup f(E)$, и использовать замкнутость $f(E)$.

(для $\inf f(E)$ аналогично)

Note 25

cd79f01dd2ab4415ab29791ab3edc446

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f \in C(E)$. Почему $f(E)$ замкнуто?

■ $f(E)$ компактно как непрерывный образ компакта.

Note 26

e5f8b2c4993c434093b107158059bccd

Чем определение равномерной непрерывности для отображений $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ отличается от такового для одномерных функций?

■ Вместо модулей используются евклидовы нормы.

Note 27

1f05bf13d87e4ab7a5621f034ce16921

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$ равномерно непрерывно на E .

«Теорема Кантора»

Note 28

cf88699422b6419b907c07fc4459ed40

Каков первый шаг в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений?

■ Для $\varepsilon > 0$ построить открытое покрытие $\{V_{\delta_a}(a)\}_{a \in E}$, где δ_a — это δ из определения непрерывности в точке a .

Note 29

e8cb89e64a75456d8e3f3bd1abddc294

В чём основная идея доказательства теоремы Кантора для многомерных отображений?

■ Выбрать конечное подпокрытие $\{V_{\delta_a}(a)\}_{a \in F}$ (где $F \subset E$) и положить $\delta = \min_{a \in F} \delta_a$.

Note 30

48c7bc465a2047199ceb7f716af4da51

Как в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений показать, что

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon?$$

$x \in V_{\delta_a}(a)$, где $a \in F$, $\implies y \in V_{2\delta_a}(a)$ и далее по неравенству треугольника для $\|f(x) - f(y)\|$.

Note 31

9f949bae890d4ebf8dfb5255514ed926

Почему в доказательстве теоремы Кантора для многомерных отображений

$$y \in V_{2\delta_a}(a) \implies \|f(y) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}?$$

Потому что в определении непрерывности мы можем использовать $2\delta_a$ вместо δ_a и $\frac{\varepsilon}{2}$ вместо ε .

Лекция 28.05.22 (2)

Note 1

f04423d3d7074770b762b08e5f0a2a70

O -большое и o -малое называют ещё символами Ландау.
}}

Note 2

8e927c671db34917a4a5e1ab3dc1e06e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E , $N \in \mathbb{N}$. Тогда если отображение $x \mapsto \frac{f(x)}{\|x-a\|^N}$ локально ограничено в точке a , то говорят, что

$$f(x) = O(\|x - a\|^N), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Note 3

fad7e0a388954612964803b360fc5d3d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E , $N \in \mathbb{N}$. Тогда если отображение $x \mapsto \frac{f(x)}{\|x-a\|^N}$ бесконечно мало в точке a , то говорят, что

$$f(x) = o(\|x - a\|^N), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Note 4

ba6241aee88d4dea97d9f884f9d7ff3f

В определении o -малого для удобства полагают, что функция

$$x \mapsto \frac{f(x)}{\|x - a\|^N}$$

непрерывна в точке a .

Note 5

d719dcdb5af849639ad736cd806340de

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E . Утверждение

$$f(x) = o(\|x - a\|), \quad x \rightarrow a$$

так же записывают как

$$f(x) = o(x - a), \quad x \rightarrow a.$$

}}

Note 6

f602028d4e834727b205a0610a0c96ea

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a — предельная точка E . Утверждение $\{\{c2::$

$$f(x) = O(\|x - a\|), \quad x \rightarrow a$$

$\}\}$ так же записывают как $\{\{c1::$

$$f(x) = O(x - a), \quad x \rightarrow a.$$

$\}\}$

Note 7

6562de55c997431e8367a2848528370d

Пусть V, W — линейные пространства. Множество всех линейных операторов $V \rightarrow W$ обозначается $\{\{c1::\mathcal{L}(V, W).\}$

Note 8

f77214b5ea714137a9cfb0073362925d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c4::a \in \text{Int } E.\}\}$ $\{\{c3::$ Оператор

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$\}\}$ такой, что $\{\{c2::$

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + o(x - a), \quad x \rightarrow a.$$

$\}\}$ называется $\{\{c1::$ дифференциалом f в точке $a.\}$

Note 9

b36cf2416f8e4eed89f72e08a1c6e9a0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. $\{\{c2::$ Дифференциал f в точке $a\}$ обозначается $\{\{c1::d_a f.\}$

Note 10

cfce7e6a8d7f46ebac0428174d9baf01

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c3::a \in \text{Int } E.\}\}$ Отображение f называется $\{\{c2::$ дифференцируемым в точке $a,\}$ если $\{\{c1::$ существует $d_a f\}$

Note 11

f46eb042f44a4dca88af3d73eae0ca1d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда $\{d_a f\}$ представляет из себя $\{c1\}$ -линейную вектор функцию вида

$$h \mapsto h \cdot k, \quad \text{где } k \in \mathbb{R}^m.$$

$\}$

Note 12

34df7b7787e14e8595498cebf029d764

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . $\{c2\}$ Значение

$$d_a f(1)$$

$\}$ называется $\{c1\}$ производной f в точке a .

Note 13

eb3aa6e0d4614b7ebef27ca5a3adb894

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . $\{c2\}$ Производная f в точке a обозначается $\{c1\}$ $f'(a)$.

Note 14

b2cec8ccbc6d4f3881bef37926780f68

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда f $\{c1\}$ непрерывно в точке a .

Note 15

882c243a18134406ba4e9bc78361ab97

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно в точке a . В чём основная идея доказательства?

$|$

$$f(a+h) - f(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Note 16

ae6dcf68dac241c09aedc204bbb0c45a

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = \text{const}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d_a f(h) = \{c1\}0.$$

Note 17

6356837026ce46d0b56246cdf63f5b64

Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d_a f(h) = \{[c1::f(h).]\}$$

Note 18

aa19836f543d4d52b55111db827459a3

Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда f дифференцируемо в точке a , если $\{[c1::\top.]\}$

Note 19

c5bde8eb01764970b5cf1e7da80b8aee

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{[c4::a \in \text{Int } E,]\} \{[c3::e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.]\} \{[c1::$
Значение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he) - f(a)}{h}$$

$\}\}$ называется $\{[c2::$ производной f по вектору e в точке a . $\}$

Note 20

02f6ea926ce44e0798ce4c5a7069f787

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\{[c2::$ Производная f по вектору e в точке a . $\}$ обозначается $\{[c1::$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a).$$

$\}\}$

Note 21

fb3482c4672c476c80753762335f0899

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $\{[c3::e \in S_1(0).]\}$ Тогда $\{[c2::$
 $\frac{\partial f}{\partial e}(a)\}$ называется $\{[c1::$ производной f по направлению e в
точке a . $\}$

Note 22

ecba1ebe383d4749bd35920c721fe1d3

Может ли производная по вектору быть бесконечной?

Строго говоря, может, но в большинстве случаев предполагают, что она принимает только конечные значения.

Note 23

76e3d0829d93417a9e2feaf78d34126b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $\{c_3: e \in S_1(0)\}$. Тогда

$$\{c_2: \frac{\partial f}{\partial e}(a)\} = \{c_1: (f(a + te))' \big|_{t=0}\}$$

(в терминах вектор функций)

Note 24

44cd6d8c12554833bb8afa0753b0910b

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $\{c_3: e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$. Тогда

$$\{c_2: \frac{\partial f}{\partial e}\} = \{c_1: \left(\frac{\partial f_1}{\partial e}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial e} \right) \cdot \}$$

(в терминах координат)

Note 25

eaedf212617f4428bef386d4b81e2eed

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{c_4: \exists d_a f\}$, $\{c_3: e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$. Тогда

$$\{c_2: \frac{\partial f}{\partial e}(a)\} = \{c_1: d_a f(e)\}$$

Note 26

89f7b5294b944a95b75abdab905dbc98

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\exists d_a f$, $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e).$$

В чём основная идея доказательства?

В определении $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$ выразить числитель через определение $d_a f$.

Note 27

67db980b491949d785fed96f33803237

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда $d_a f$ $\{c_1: \text{определён однозначно}\}$

Note 28

25f117cbf76f46f19ca4230ce0116654

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда $d_a f$ определён однозначно. В чём основная идея доказательства?

Значение дифференциала определяется для любого вектора однозначно чрез связь с $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$.

Note 29

cf8143dde492494295964135369ed967

В контексте \mathbb{R}^n через $\{\{c2::e^i\}\}$ обозначают $\{\{c1::i\}$ -й вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^n\}$.

Note 30

54153c0a672c4b90934ba69d7d0644f9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{\{c4::a \in \text{Int } E\}\}$, $\{\{c3::k \in [1 : n]\}\}$. Тогда $\{\{c2::\frac{\partial f}{\partial e^i}(a)\}\}$ называется $\{\{c1::$ частной производной f по k -й переменной в точке $a\}$.

Note 31

e1e682d22e3742e3948f24a25e2d2b56

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $k \in [1 : n]$. $\{\{c2::$ Частная производная f по k -й переменной в точке $a\}$ обозначается

$$\{\{c1::\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\}\}, \{\{c1::D_k f(a)\}\}, \{\{c1::\partial_k f(a)\}\} \text{ или } \{\{c1::f'_{x_k}(a)\}\}.$$

Note 32

267a17a4b2ac411699cab9e254cbf19a

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$, $k \in [1 : n]$. Тогда

$$\{\{c3::\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\}\} = \{\{c2::\varphi'_k(a_k)\}\},$$

где $\varphi_k(t) := \{\{c1::f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)\}\}$.

Note 33

3a23259d797c45e6b298385e04016223

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{\{c2::d_a f(h)\}\} = \{\{c1::\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k\}\}$$

(в терминах частных производных)

Note 34

7f59884a7bf14df4939f4af780bc6989

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$d_a f(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k.$$

В чём основная идея доказательства?

Разложить h по каноническому базису и использовать линейность $d_a f$.

Note 35

8f7aab5736454f5795f482c88b918b01

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a , $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e}(a) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot e_k.$$

(в терминах частных производных)

Note 36

83de62d2dfa84469a6fbbb50b5934f72

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a , $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot e_k.$$

В чём основная идея доказательства?

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e) = \dots$$

Семинар 26.05.22

Note 1

2bbeb2bd5e114d1e844f0e6871141386

Пусть $f \in C^1[a, b]$. Площадь поверхности вращения графика функции f вокруг оси Ox равна

$$2\pi \int_a^b |f| \sqrt{1 + (f')^2}.$$

}}

Лекция 04.06.22 (1)

Note 1

3158d37d03514cf6a48e5f1e50943280

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\{c4: a \in \text{Int } E.\}$ Тогда $\{c2: f \text{ дифференцируемо в точке } a\}$ $\{c3: \text{тогда и только тогда, когда}\}$ $\{c1: \text{все координатные функции } f_k \text{ дифференцируемы в точке } a.\}$

Note 2

b03c50a5177e45d3af6168e742ff08e5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда f дифференцируемо в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_k дифференцируемы в точке a . В чём основная идея доказательства?

Следует из теоремы о связи предела отображения с пределами координатных функций.

Note 3

3793d7bd0eb2413486ca9b2d557a8bfc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда f дифференцируемо в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_k дифференцируемы в точке a . Какой предел рассматривается в доказательстве?

Предел выражения o -малого из определения дифференцируемости в точке a .

Note 4

efafa6dd07b64b1e96f53a5412ca48c4

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$\{c2: d_a(f_k)\} = \{c1: (d_a f)_k\} \quad \forall k.$$

Note 5

b32f253473ed4e01ad2548075513a68c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$d_a(f_k) = (d_a f)_k \quad \forall k.$$

В чём основная идея доказательства?

Выразить o -малое из определения дифференцируемости и использовать связь предела с пределами координатных функций.

Note 6

a31575ebc07f469ab443c54489a0f052

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда матрица $d_a f$ называется матрицей Якоби f в точке a .

Note 7

475dd78374494ef48e52b268a9e7d737

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Матрица Якоби f в точке a обозначается $f'(a)$.

Note 8

6e2acb045c654dce899895bfd332d261

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда если $m = 1$, то вектор $f'(a)$ называют градиентом отображения f в точке a .

Note 9

8224bbff688b41bf8effa9d4e231ce37

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a . Градиент f в точке a обозначается $\text{grad } f(a)$ или $\nabla f(a)$.

Note 10

7fd19c7b8d4840b1b246ef7284641b60

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$f'(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \sim m \times n.$$

Note 11

44b005f1da294a33b0146fb00ef1e53f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда $f'_i(a)$ — это $\nabla f_i(a)$.

Note 12

d25499d991a74f439b7466323fbe46c3

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда i -я строка $f'(a)$ — это $\nabla f_i(a)$. В чём основная идея доказательства?

$$(d_a f)_i = d_a(f_i) = \nabla f_i(a).$$

Note 13

3820288f2e574fcf9121ea4a55c73afa

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда j -й столбец $f'(a)$ — это $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Note 14

d8575a15a00844589a8967ae38314f49

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда j -й столбец $f'(a)$ — это $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. В чём основная идея доказательства?

$$d_a f(h) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k.$$

Note 15

36f0f4f310d841a880520daa7da8194d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

(в терминах матрицы Якоби)

Note 16

eda3b1356526444eb23d37159f97cf0e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда множество

$$\left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) \right\}.$$

задаёт касательную n -мерную гиперплоскость к графику f .

Note 17

c3d92f858259477dbb835857dcc70ca9

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a . Тогда если $\nabla f(a) \neq 0$, то $\forall e \in S_1(0)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial e}(a) \right| \leq \|\nabla f(a)\|.$$

}}

Note 18

a670a788fedf4625aaeeeb9ab231df7f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a ,

$$e \in S_1(0), \quad \nabla f(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial e}(a) \right| = \|\nabla f(a)\| \iff e \text{ и } \nabla f(a) \text{ коллинеарны.}$$

Note 19

0566ef79af74469da7f15612aac5a762

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a . Тогда если $\nabla f(a) \neq 0$, то $\forall e \in S_1(0)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial e}(a) \right| \leq \|\nabla f(a)\|.$$

В чём основная идея доказательства?

■ $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \nabla f(a) \cdot e$ и неравенство Коши-Буняковского.

Note 20

41741682c49847e886b1a89746562a02

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a . Тогда геометрически $\nabla f(a)$ указывает направление скорейшего изменения f в точке a .

Note 21

2f208a0d1343496b987eb7b7424e71ae

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда даже если

$$\forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial e}(a),$$

f может быть не дифференцируемо и даже разрывно в точке a .

Note 22

f17c92a006814a4e8b8073f811ffdd0d

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда даже если

$$\forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial e}(a),$$

f может быть не дифференцируемо и даже разрывно в точке a . Какой пример можно привести?

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, y = x^2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Note 23

ab17b49628fc4264800bf3a6321f77c5

$$\exp x \stackrel{\text{def}}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note 24

ae604bd77b1a4ff1abdb99848da38930

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда даже если

$$\forall k \in [1 : n] \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),$$

f может не иметь производных по всем направлениям в этой точке.

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{Int } E$. Тогда даже если

$$\forall k \in [1 : n] \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),$$

f может не иметь производных по всем направлениям в этой точке. Какой можно привести пример?

$$(x, y) \mapsto xy \exp \frac{1}{x^2 + y^2},$$

доопределённая в нуле нулём.

Лекция 04.06.22 (2)

Note 1

948a8a8e219d4a3ab57e65ab5d1289c5

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Тогда если f и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируемо в точке a и

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f.$$

Note 2

1b52ae2889854ee2b0dfa687cb753ed4

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Тогда если f и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$, то

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Note 3

43e06625aeec4391b7cef8a2bd9203ee

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Тогда если f и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$, то

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Note 4

7b0f43736c8845b5b283526e3e8f7a05

Пусть $g : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Тогда если f и g дифференцируемы соответственно в точках a и $f(a)$, то

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

В чём ключевая идея доказательства?

■ Из определения произведения матриц.

Note 5

35d2b5e589a74b12b8fbc65e61f035

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a . Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\{\{c2::d_a(\lambda f + \mu g)\}\} = \{\{c1::\lambda \cdot d_a f + \mu \cdot d_a g.\}\}$$

Note 6

0cbaa96d8bbc45b4a4363bfd2566a25

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a . Тогда если $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точка a , то

$$\{\{c2::d_a(\lambda f)\}\} = \{\{c1::f(a) \cdot d_a \lambda + \lambda(a) \cdot d_a f.\}\}$$

Note 7

43c10798f11f4fa081e62f1041795fb0

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a . Тогда

$$\{\{c2::d_a(f \cdot g)\}\} = \{\{c1::g(a) \cdot d_a f + f(a) \cdot d_a g.\}\}$$

Note 8

c57f072ea6534d6cb7a5c6bcd9c4192

Пусть $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a . Тогда если $\{\{c3::m = 1 \text{ и } g(a) \neq 0,\}\}$ то

$$\{\{c2::d_a\left(\frac{f}{g}\right)\}\} = \{\{c1::\frac{g(a) \cdot d_a f - f(a) \cdot d_a g}{g^2(a)}.\}\}$$

Note 9

54db552f4a6c4b648657e5b444dc1f39

Пусть $\{\{c5::f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ дифференцируемо в точке } a.\}\}$ Тогда если $\{\{c3::d_a f \text{ обратим, } f \text{ инъективно,}\}\}$ $\{\{c2::f(a) \in \text{Int } f(E) \text{ и } f^{-1} \text{ непрерывно в точке } f(a),\}\}$ то

$$\{\{c4::d_{f(a)}(f^{-1})\}\} = \{\{c1::(d_a f)^{-1}.\}\}$$

Note 10

71284fb4f90c4dc38af502ae45c52047

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, E открыто. Тогда f называется дифференцируемым на E , если оно дифференцируемо в любой точке множества E .

Note 11

f4e9d2f7d86342e6a46f0fd1f7d51a05

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in E$. Если все частные производные f определены в некоторой окрестности a и непрерывны в точке a , то отображение f называется непрерывно дифференцируемым в точке a .

Note 12

8471f80ad2b94d91955723821de9e7eb

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, E открыто. Тогда если f непрерывно дифференцируемо в любой точке E , то оно называется непрерывно дифференцируемым на E .

Note 13

45433e308f364161b5821365d29ce90c

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V_\delta(a) \subset E$, $h \in V_\delta(0)$. Тогда если все частные производные f определены на $V_\delta(a)$, то $\exists \{c^k\} \subset V_\delta(a)$ такие, что

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k.$$

«Обобщение формулы конечных приращений»

Note 14

10107bb4687c465bac4072f4779132e1

В чём ключевая идея доказательства обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных?

Представить $f(a+h) - f(a)$ как сумму функций одной переменной и далее по теореме Лагранжа.

Note 15

5ab7dd4323b040289c5ab853212cb45c

В доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных полагают

$$F_k(\lambda) := f(x^k + \lambda h_k \cdot e^k),$$

где $x^0 = a$, $x^{k+1} = x^k + h_k \cdot e^k$.

Note 16

9b71a7b420374789b2e2b3972f3e73e7

В доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных

$$F'_k(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^k + \lambda h_k \cdot e^k) \cdot h_k$$

Note 17

78a4268e8f6d499980240c05305ef8de

Почему в доказательстве обобщения формулы конечных приращений для функций n вещественных переменных

$$F'_k(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^k + \lambda h_k \cdot e^k) \cdot h_k?$$

■ Правило дифференцирования композиции.

Note 18

6846624cabef4f08afca4c090e76322e

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$ и дифференцируемо в точке a .

Note 19

b5517c26c32142f486c6acc4f296b172

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть случаи $m = 1$ и $m \neq 1$.

Note 20

2d35c52f1a0b43c99f53cb539b9b22d2

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m \neq 1$)?

■ Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 21

f52141dfaa7041a38ae0b120a0b3dccd

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

■ Локальная ограниченность $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, формула конечных приращений и неравенство Коши-Буняковского.

Note 22

44c54b436fe646ff811ada560cee320f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f непрерывно на некоторой $V_\delta(a)$. К каким точкам в доказательстве применяется формула конечных приращений (случай $m = 1$)?

■ $x \in V_\delta(a)$, $h \in \mathbb{R}^n$, причём $\overline{V_{\|h\|}(x)} \subset V_\delta(a)$. Тогда

$$f(x + h) - f(x) = \dots$$

Note 23

5ed042452b254c4da61c0900b89de5b5

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f дифференцируемо в точке a . Каков первый шаг в доказательстве?

■ Рассмотреть случаи $m = 1$ и $m \neq 1$.

Note 24

483478141906430eb0aebd84115e60e0

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f дифференцируемо в точке a . В чём ключевая идея доказательства (случай $m \neq 1$)?

■ Следует из случая $m = 1$ для координатных функций.

Note 25

7be084f196c54a349a0dab9b57f0354f

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f дифференцируемо в точке a . В чём ключевая идея доказательства (случай $m = 1$)?

■ Непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в терминах (ε, δ) , формула конечных приращений и неравенство Коши.

Note 26

e15dab279d654705a50123f72f8693dc

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в точке a . Тогда f дифференцируемо в точке a . К какому случаю в доказательстве применяется формула конечных приращений (случай $m = 1$)?

■ $h \in V_\delta(0)$ для δ из определения непрерывности. Тогда

$$f(a + h) - f(a) = \dots$$