利用Floyed-Hungary法求解中国邮路问题

舒兴明
华南热带农业大学基础学院　海南儋州　571737)

摘要　对于中国邮路问题,可以用奇偶点作业法,但当顶点较多时,寻找每一个圈并对其进行检验的工作十分复杂。利用求图中各点之间最短路径的方法Floyed法和求解指派问题的方法Hungary法可提供一种对任意个顶点的中国邮路问题的解法—Floyed-Hungary法。

关键词　中国邮路问题　奇点　Floyed法　Hungary法
中图分类号　O 22

1　中国邮路问题的描述

1.1　中国邮路问题的提出

中国邮路问题是由我国管梅谷同志在1962年首先提出:一个邮递员负责某一个地区的信件投递。每天要从邮局出发,走遍该地区所有的街道再返回邮局,问应该怎样安排送信路线可以使所走的路程最短。

1.2　中国邮路问题的图描述

给定一个连通图G,每边都有非负权l(e),要求一条回路经过每边至少一次,且满足总权最小。

对于没有奇点的中国邮路问题,图G的任一条欧拉回路即为满足条件的路线(为可行回路),对于存在奇点的中国邮路问题,有些边必须重复至少一次才能找到一条可行回路。

2　有关的预备定理

(1)定理1:设中国邮路问题对应的图G=(V,E)含有奇点,给定一个边集$E_1 \subset E$,把G中属于E_1的边变为二重边,权相同,得到$G^*=G+E_1$,使G^*无奇点,则中国邮路问题的可行路线的总距离最小的充要条件为$\sum_{e \in E_1} l(e)$最小。

证明:见文献[1]。即中国邮路问题的可行回路的总路程最短的充要条件为邮递员所走的重复边的距离最小。

(2)定理2:设$C=(c_{ij})_{2n\times 2n}$是某个最小指派问题的系数矩阵[1],且满足①C为对称矩阵;②$c_{ii}=+\infty, i=1,2,\cdots,2n$

则用Hungary法求解[1]指派问题的最优解中一定存在的对称最优解,即存在2n个系数独立,系数和最小,且两两关于主对角线对称。

证明:设$C=(c_{ij})_{2n\times 2n}$为最小指派问题的系数矩阵,按照Hungary解法的结果,假设求出的最优解矩阵在C中对应的2n个独立的元素为$c_{1k_1}, c_{k_1k_2}, \cdots, c_{k_{2n-1}k_{2n}}, c_{k_{2n}k_{2n+1}}$,这2n个元素都不在主对角线上,且$c_{1k_1}+c_{k_1k_2}+\cdots+c_{k_{2n}k_{2n+1}}$为最小指派系数和。将这些系数的下脚标按照以下原则进行分类:

(1)定义集合列$A_1=\{1,k_1\}, A_2=\{k_1,k_2\}, A_3=\{k_2,k_3\}, \cdots, A_{2n}=\{k_{2n},k_{2n-1}\}$

(2)将(1)中2n个集合按下列步骤合成两类:

①取$U_0=\Phi$,令$U_1=U_0 \bigcup A_1$;

②对于A_i, $i=2,3,\cdots,2n$,若$k_{i-1} \notin U_{i-1}$且$k_i \notin U_{i-1}$,则令$U_i=U_{i-1} \bigcup A_i$,否则$U_i=U_{i-1}$。

③令$V=\bigcup_{i=1}^{2n}A_i-U_{2n},U=U_{2n}$，显然$V\bigcap U=\Phi$，且$A_1,A_2,\cdots,A_{2n}$中有n个包含在U中，有n个包含在V中。

⑶按照U和V中的元素分类：即若$A_i\subset U$，则c_{ki-1ki}归为第一组，若$A_i\subset V$，则将元素c_{ki-1ki}归为第二组，不防设$c_{1k1},c_{k2k3},\cdots,c_{k2n-1k2n}$为一组，剩下的元素为一组。

⑷比较两组元素和的大小，不妨设$c_{1k1}+c_{k2k3}+\cdots+c_{k2n-1k2n}\leqslant c_{k1k2}+\cdots+c_{k2nk2n+1}$，在矩阵C中将原来选出的最优的2n个独立元素去掉第二组中的元素，补充第一组中每个元素的对称元素，则得到新的2n个元素，显然这2n个元素处在不同行不同列，即这2n个元素独立，且

$$c_{1k1}+c_{k2k3}+\cdots+c_{k2n-1k2n}+c_{k11}+c_{k3k2}+\cdots+c_{k2nk2n-1}\leqslant$$
$$c_{1k1}+c_{k1k2}+\cdots+c_{k2n-1k2n}+c_{k2nk2n+1}$$

由于$c_{1k1}+c_{k1k2}+\cdots+c_{k2nk2n+1}$为2n个独立元素的最小和，该不等式中只能取等号。即$c_{1k1},c_{k11},c_{k2k3},c_{k3k2},\cdots,c_{k2n-1k2n},c_{k2nk2n-1}$为2n个独立元素和的最小值。故由$c_{1k1},c_{k11},c_{k2k3},c_{k3k2},\cdots,c_{k2n-1k2n},c_{k2nk2n-1}$构成的指派解也是最优解。而$c_{1k1},c_{k11},c_{k2k3},c_{k3k2},\cdots,c_{k2n-1k2n},c_{k2nk2n-1}$，两两对称。故结论成立。

3　中国邮路问题的解法

3.1　找出奇点及奇点数

设中国邮路问题对应的无向图G=(V,E)，且|V|=n，|E|=m，设图G有r个奇点，分别记为$v_{k1},v_{k2},\cdots v_{kr}$。由图的知识知，r为偶数。

3.2　求出各个奇点的最短距离

利用Floyed方法[1]，求出顶点v_i与v_j之间的最短距离，当然也求出了$v_{m1},v_{m2},\cdots,v_{mr}$中每两点之间的最短距离，记$f_{ij}$表示奇点$v_{mi}$与$v_{mj}$之间的最短距离，记$F=(f_{ij})_{r\times r}$，显然，F为对称矩阵。

3.3　找出各个奇点的两两配对的最优匹配方案

设矩阵$C=(c_{ij})_{r\times r}$，其中，$c_{ij}=\begin{cases}f_{ij},i\neq j\\+\infty,i=j\end{cases}$为最小指派问题的系数矩阵[1]，利用定理2的求法求出最小指派对称解，不妨设$c_{1k1},c_{k11},c_{k2k3},c_{k3k2},\cdots,c_{kr-1kr},c_{krkr-1}$为最小对称指派解。即$c_{1k1}+c_{k11}+c_{k2k3}+c_{k3k2}+\cdots+c_{kr-1kr}+c_{krkr-1}$为矩阵C中r个独立的元素和的最小值，则$f_{1k1}+f_{k11}+f_{k2k3}+f_{k3k2}+\cdots+f_{kr-1kr}+f_{krkr-1}$为F中r个独立元素和的最小值。则$f_{1k1}+f_{k2k3}+\cdots+f_{kr-1kr}$为奇点$v_{mr},v_{m2},\cdots,v_{mr}$两两配对的最小距离和。

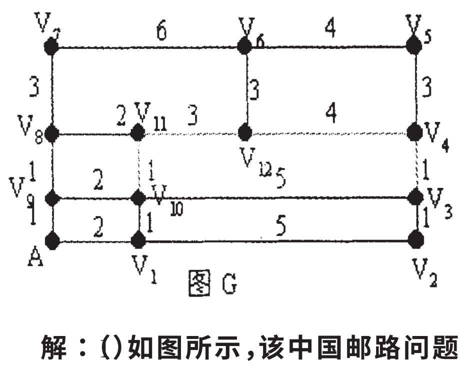
3.4　为各个配对奇点的最短路径加边

在图G中按照$f_{1k1}+f_{k2k3}+\cdots+f_{kr-1kr}$为奇点$V_{m1},V_{m2},\cdots,V_{mr}$两两配对，再按照Floyed方法找出配对奇点之间的路径，为该路径的每一条边增加一条重复边，则图G^*没有奇点，任意一条欧拉回路即为中国邮路问题的最优解。

称用上述方法求解中国邮路问题的方法为Floyed-Hungary方法。

4　中国邮路问题求解实例

例　求解如图所示的中国邮路问题，A点是邮局。



图G

解：⑴如图所示，该中国邮路问题有8个奇点，即$v_1,v_3,v_4,v_6,v_8,v_9,v_{11},v_{12}$的次均为奇数。

(2)利用Floyed方法,求得该图各个顶点之间的最短距离(计算过程省略,这里只列出奇点之间的最短距离矩阵F和相应的路径:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_3 & v_4 & v_6 & v_8 & v_9 & v_{11} & v_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{11} \\ v_{12} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 7 & 9 & 8 & 7 & 4 \\ 8 & 8 & 7 & 0 & 8 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 9 & 8 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 6 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 5 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = (f_{ij})_{8\times 8} = F$$

(3)求最优配对方案(令

$$c_{ij} = \begin{cases} f_{ij}, i \neq j \\ +\infty, i = j \end{cases}, i, j = 1,2,\cdots,8$$

设 $C=(c_{ij})_{8\times 8}$ 为最小指派问题的系数矩阵。由Hungary解法得:

$$C=\begin{pmatrix} +\infty & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & +\infty & 1 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 1 & +\infty & 7 & 9 & 8 & 7 & 4 \\ 8 & 8 & 7 & +\infty & 8 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 9 & 8 & +\infty & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 1 & +\infty & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 6 & 2 & 3 & +\infty & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 5 & 6 & 3 & +\infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} +\infty & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & +\infty & 0 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & +\infty & 6 & 8 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & +\infty & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 7 & +\infty & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 0 & +\infty & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 & 0 & 1 & +\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & +\infty \end{pmatrix} = C^*$$

在 C^* 中存在8个独立的0元,即 0_{17}, 0_{71}, 0_{23}, 0_{32}, 0_{48}, 0_{84}, 0_{56}, 0_{65} 为独立的8个0元,则最小指派解对应的系数和 $c_{17}+c_{71}+c_{23}+c_{32}+c_{48}+c_{84}+c_{56}+c_{65}$ 为最优指派解。所以 $f_{17}+f_{23}+f_{48}+f_{56}$ 为中国邮路问题的奇点的最优配对方案。即选择奇点 v_1, v_{11} 配对,v_3, v_4 配对,v_6, v_{12} 配对,v_8, v_9 配对。配对所得的最小和为 $f_{17}+f_{23}+f_{48}+f_{56}=2+1+3+1=7$。

(4)在邮路图中对每个配对奇点之间按照最短路径添加重复边。得到图 G^*, G^* 没有奇点。

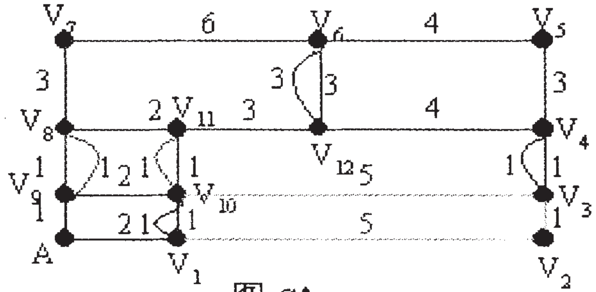


图 G^*

(5) 从邮局A出发，找出欧拉回路：$A-v_1-v_2-v_3-v_{10}-v_1-v_{10}-v_{11}-v_{12}-v_4-v_3-v_4-v_5-v_6-v_{12}-v_6-v_7-v_8-v_9-v_{10}-v_{11}-v_8-v_9-A$，此回路即为邮递员的最短路径，总路程为55。

参 考 文 献

1 胡运权. 运筹学教程. 北京：清华大学出版社，1998. 225~228，129~136，241~242

The Application of Floyed-Hungary Method in Solving Problems Concerning Chinese Postman

Shu Xingming
(College of Basic Studies South China University of Tropical Agriculture, Danzhou, Hainan, 571737)

Abstract Odd-even work method can be applied to solving problems in Chinese postman, but it involves in more and more complicated work when acmes of exercises are piled up. To solve this problem, this paper proposes a newly found method, namely, Floryed-Hungary method, which is based on the method of seeking for the shortest path between every two acmes in graph and the method of solving the minimal assignment

Key words Chinese postman odd acme floyed method hungary mehtod