



第四章 CLTI系统的频域分析

内容提要

- 第一讲 频率特性
- 第二讲 典型环节的频率特性曲线
- 第三讲 绘制幅相频率特性曲线一般方法
- 第四讲 闭环系统稳定性环路分析
- 第五讲 稳定性与开环频域指标
- 第六讲 Nyquist稳定性判据
- 第七讲 Nyquist稳定性判据的应用
- 第八讲 Doyle稳定鲁棒性
- 第九讲 典型环节Bode图
- 第十讲 绘制Bode图的一般方法与稳定性
- 第十一讲 Bode幅相关系与最小相位系统
- 第十二讲 频率特性测试与辨识
- 第十三讲 利用开环频率特性分析闭环
- 第十四讲 闭环频域性能指标及其相关关系

第一讲 频率特性

频率特性的原意是稳态条件下交流正弦信号在系统环路传输过程中幅值与相位随频率的变化特性，可以表征系统的动态行为特性，包括系统在外部扰动作用下的系统响应特性和内部结构、参数变化条件下系统性能的变化。频率特性数学基础是Fourier变换。

频率响应与频率特性

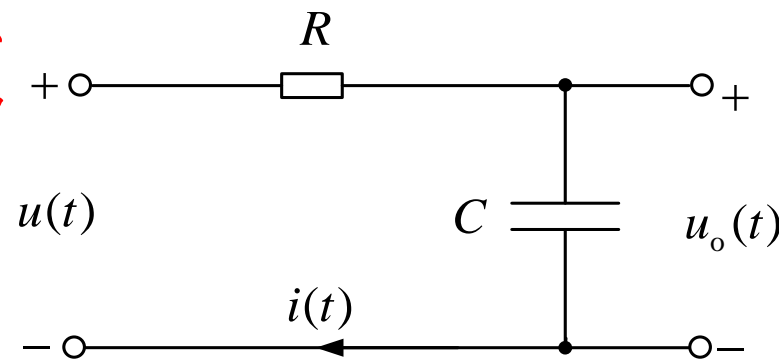
□ 引例：RC网络 $RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u$

▣ 输入是正弦信号 $u(t) = \sin \omega t$

▣ 系统的稳态输出 $u_o(t) = A(\omega) \sin[\omega t - \varphi(\omega)]$

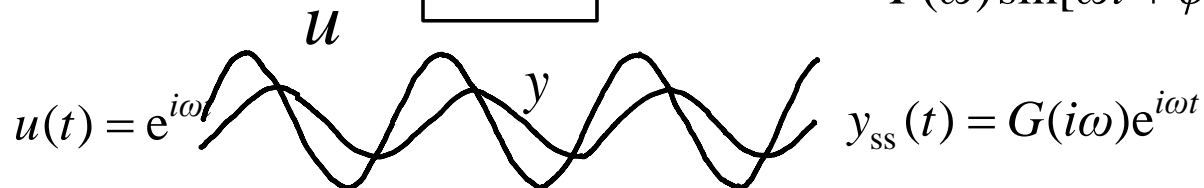
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \varphi(\omega) = \arctan \omega T, T = RC$$

！输出同频率的正弦信号，但幅值和相角发生变化！



□ 对稳定的 LTI 系统，若输入正弦信号，则系统稳态输出 y_{ss} (暂态过程已衰减完) 也是同频率正弦信号 (频率响应)。但幅值和相角发生变化。

$$u(t) = \sin \omega t \xrightarrow{G(s)} y_{ss}(t) = \text{Im}[G(i\omega)e^{i\omega t}] = Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$



幅频函数	相频函数
$Y(\omega) = G(i\omega) $	$\varphi(\omega) = \arg G(i\omega)$

说明：通过求响应的laplace逆变换后整理便可得。

□ 频率特性：正弦信号激励下，系统稳态输出与输入信号的复数比

$$G(i\omega) = y_{ss}^{\text{complex}}(t) / u^{\text{complex}}(t)$$

频率特性物理意义与分析性能的思路

- **物理意义**：频率特性表征了系统对**不同频率正弦输入的响应特性**。
 - ▣ 有些频率信号可以畅通无阻的通过系统
 - ▣ 有些频率信号通过系统后，被衰减，甚至被抑制掉
- **应用频率特性分析系统性能的基本思路**
 - ▣ 施加于控制系统的周期或非周期信号都可表示成由许多谐波分量组成的Fourier级数或用Fourier积分表示的连续频谱函数，
 - ▣ 因此根据控制系统对于正弦谐波函数这类典型信号的响应可以推算出它在任意周期信号或非周期信号作用下的运动情况。
 - ▣ 对CLTI系统，频率特性的**幅频特性**代表某种频率信号通过系统后的**增益**，**相频特性**代表某种频率信号通过系统后的**相角变化(滞后/延迟、超前)**，它们全包含 $G(i\omega)$ 中。

Fourier变换与频率特性

□ Fourier变换与反变换

$$F(i\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = F^{-1}[F(i\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

□ 成立条件：

▣ 时间函数在任一有限区间上满足Dirichlet条件

▣ 时间函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积

□ 该表达式的物理意义：在满足成立条件下，任何时间函数 $f(t)$ 可以由频率为 $\omega=-\infty\sim+\infty$ 的正弦信号构造。

□ 对于因果、稳定系统， $y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow Y(i\omega) = G(i\omega)U(i\omega)$

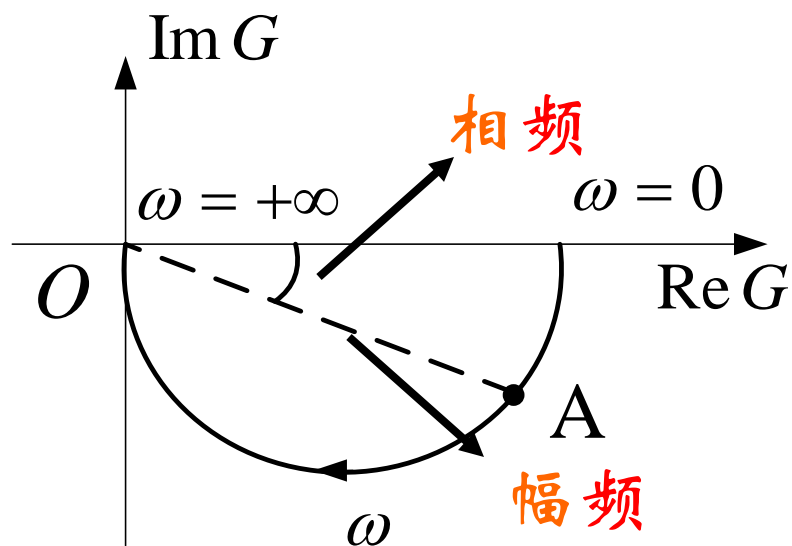
□ 故，频率特性又可定义为输出信号与输入信号的Fourier变换之比。

广义频率特性与图形表示方法

- 若LTI系统的脉冲响应函数绝对可积，则传递函数与频率特性具有如下的对应关系： $G(i\omega) = G(s) \big|_{s=i\omega}$
- 广义频率特性是拓展：在闭环稳定或可以使闭环稳定的条件下，即使开环系统的脉冲响应函数不是绝对可积的，也可以使用上式定义不稳定开环系统的频率特性。
- 故，将传递函数看作频域模型。从频率特性曲线图形可获得关于系统的许多重要信息。
- 图形表示方法
 - ▣ 幅相频率特性曲线---极坐标图---Nyquist图-----重点
 - ▣ 对数频率特性曲线---Bode图-----重点
 - ▣ 对数幅相曲线---Nichols图-----非重点

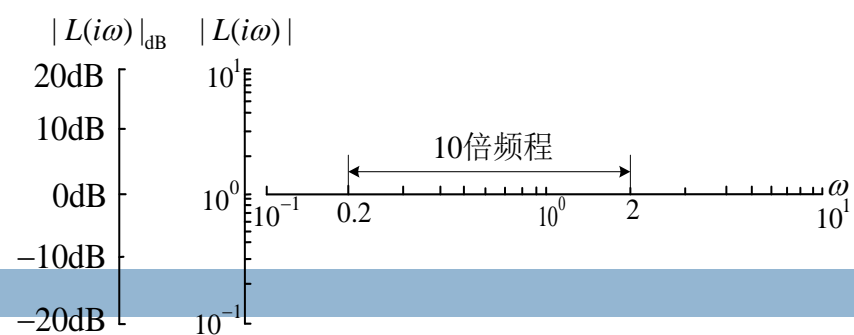
幅相频率特性曲线(Nyquist图)

- 频率特性是复变函数，函数值可以表示为复平面上的点。若令 $\omega = 0 \sim +\infty$ ，函数值在复平面上形成的轨迹称为幅相频率特性曲线。频率特性具有对称性，所以只画半支就可以得到另半支。



- 后面我们将回答如下问题
 - 如何绘制幅相频率特性曲线?
 - 幅相频率特性曲线可以得到什么信息?
 - 幅相频率特性曲线作用有哪些?
 - 如何应用幅相频率特性曲线?

对数频率特性曲线(Bode图)



□ 横轴采用对数分度(但标注频率本身), 实现展宽了频率范围, 加强了低频细节, 便于在较大频率范围内反映系统频率特性的变化。

□ 幅频特性的纵坐标采用的是单位为dB的线性分度。分贝表示有好处。

□ 分贝 (dB) 是表示功率放大倍数的单位。

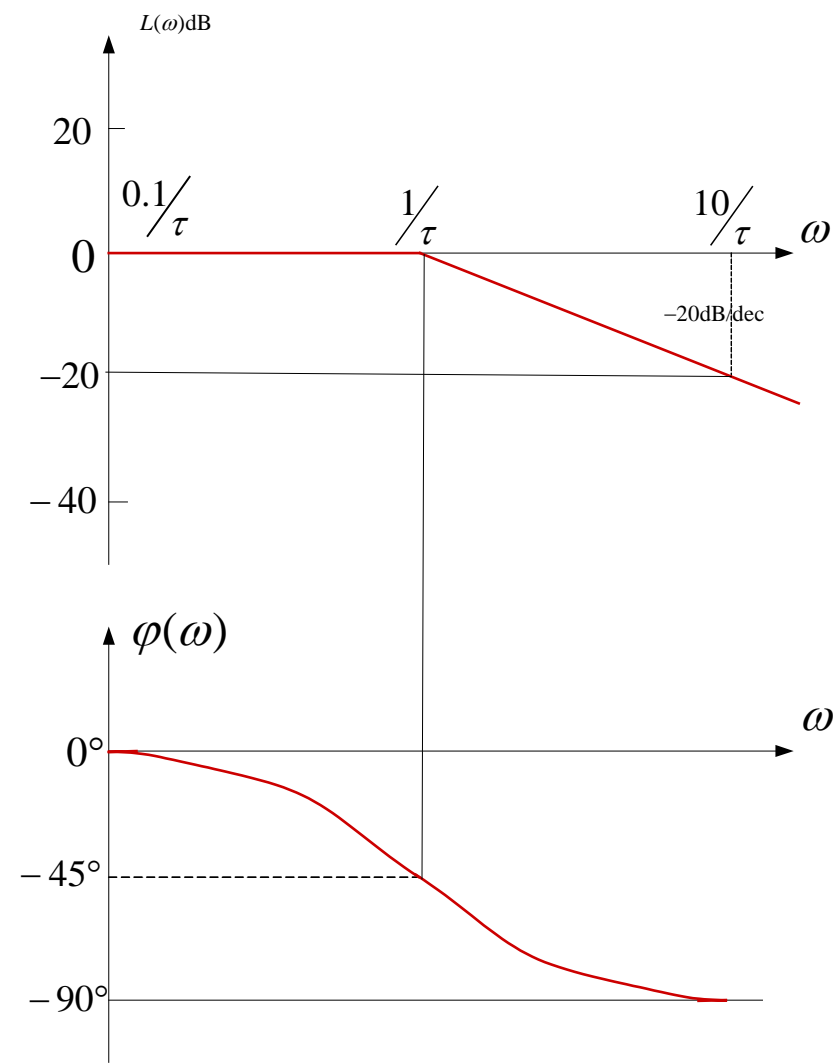
□ 如果一个放大器使信号的幅值放大A倍, 则其分贝数为 $20 \log_{10} A$ 。

□ -20dB 表示能使信号的幅值衰减10倍。

□ 0dB表示没有放大和衰减作用。

□ 串联放大器的总分贝数等于各放大器分贝数之和。

□ 相频特性纵坐标采用的是单位为度的线性分度。



对数幅相曲线(Nichols图)

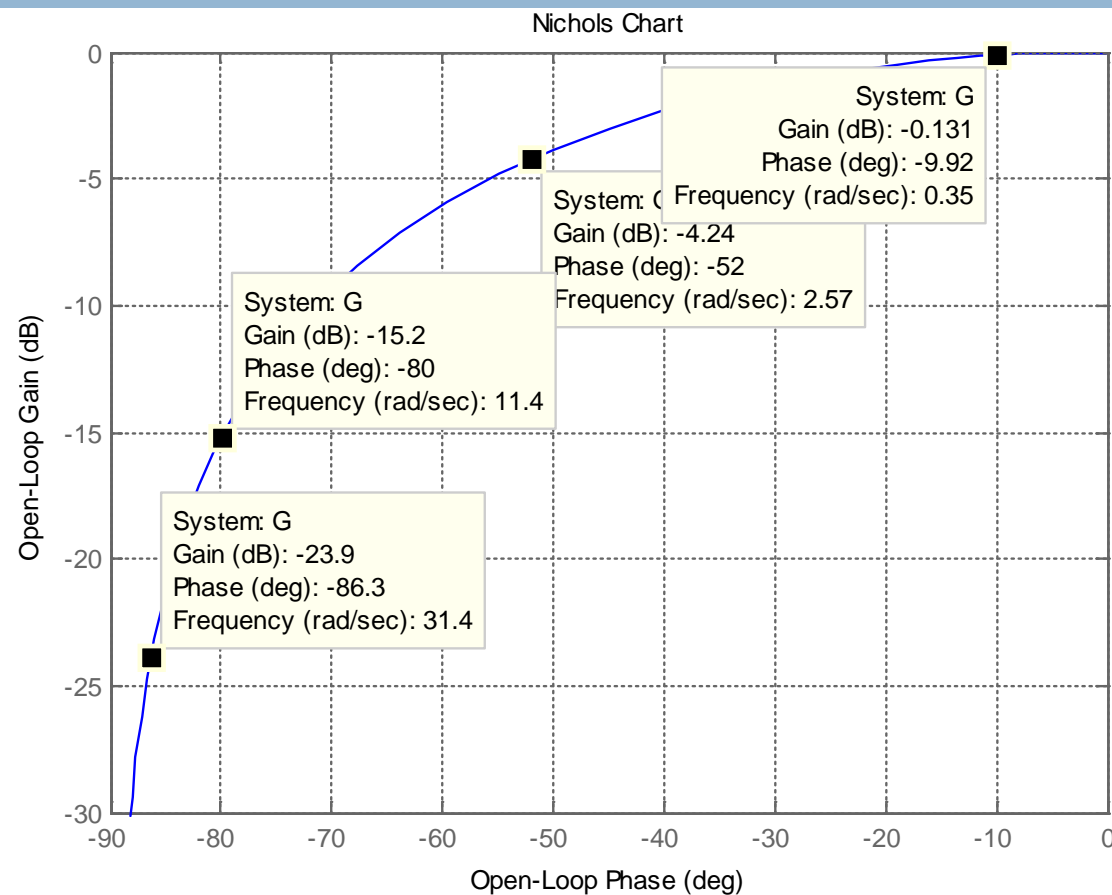
□ 将Bode图合二为一，横纵坐标均采用线性分度。频率值直接标注在图中。

□ 特点：

□ 系统增益的改变不影响相频特性，故增益改变时，对数幅相特性图只是简单地向上平移或向下平移，而曲线形状保持不变；

□ $G(i\omega)$ 和 $1/G(i\omega)$ 的对数幅相特性图相对原点中心对称，即幅值和相位均相差一个符号；

□ 利用对数相幅特性图，很容易由开环频率特性求闭环频率特性，可方便地用于确定闭环系统的稳定性及解决系统的综合校正问题。



□ Nichols图中不太易标注所有频率点，并不是太直观。

例：利用频响理念解决问题

□ 已知某系统结构图， $K>0$ ，求系统稳态误差。

□ 解：系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s+2}$

□ 闭环系统的误差传递函数为

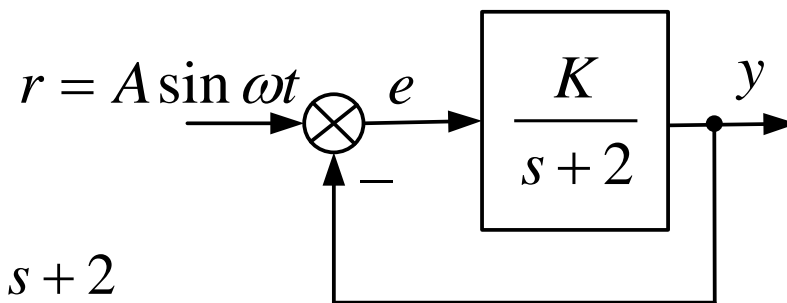
$$G_{\text{er}}(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+2}{s+2+K}$$

□ 其幅值与相位为

$$|G_{\text{er}}(s)| = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{(2+K)^2+\omega^2}} \quad \angle G_{\text{er}}(s) = \arctan 0.5\omega - \arctan \frac{\omega}{2+K}$$

□ 因输入为 $r(t) = A \sin \omega t$ ，系统的稳态误差为

$$e_{\text{ss}} = A |G_{\text{er}}(s)| \sin(\omega t + \angle G_{\text{er}}(s)) = A \sqrt{\frac{4+\omega^2}{(2+K)^2+\omega^2}} \sin(\omega t + \arctan 0.5\omega - \arctan \frac{\omega}{2+K})$$



这一讲就到这里！



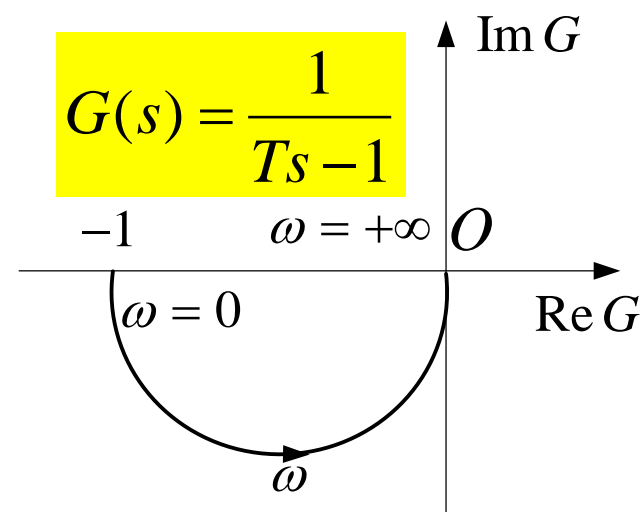
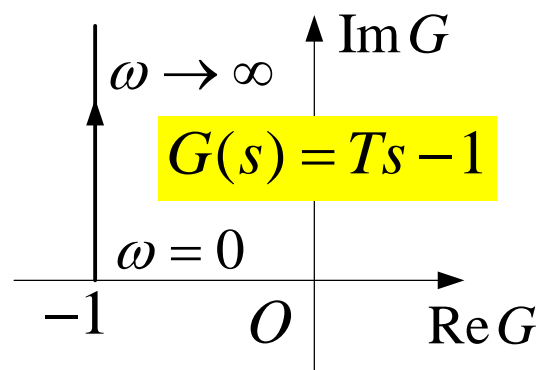
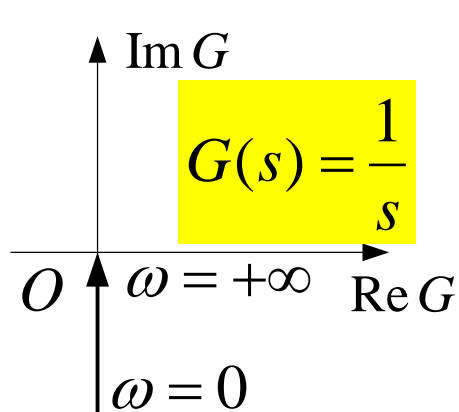
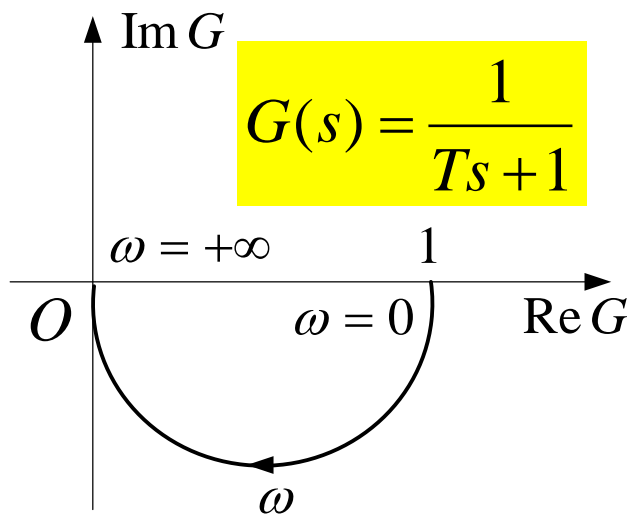
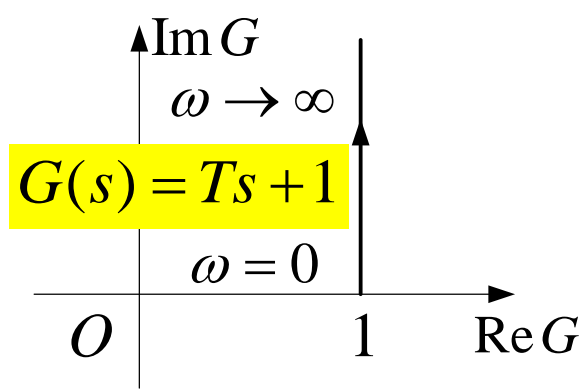
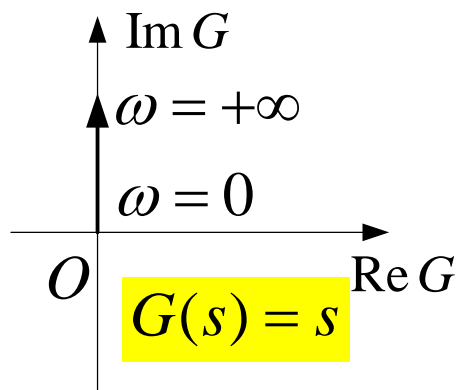
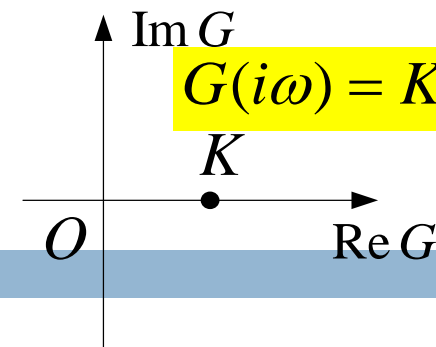
第二讲 典型环节的频率特性曲线

开环系统频率特性曲线是频域分析的基础。掌握典型环节的频率特性是绘制开环频率特性的基础。

频率特性曲线是在 $\omega = 0 \sim +\infty$ ，计算各频率点幅值 $|G(i\omega)|$ 与 $\arg G(i\omega)$ ，在 $G(i\omega)$ 平面上描点绘图得到的。

典型环节有比例、微分、积分、惯性、一阶微分、二阶振荡、二阶微分、滞后。

比例与一阶环节的频率特性曲线



□ 可以证明一阶真环节的频率特性曲线是圆。以惯性环节为例。

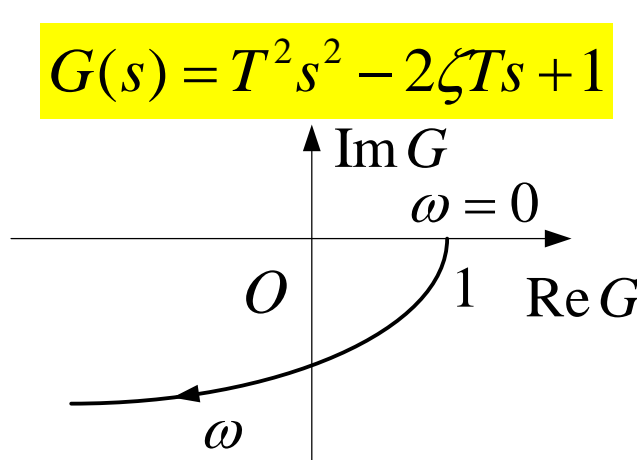
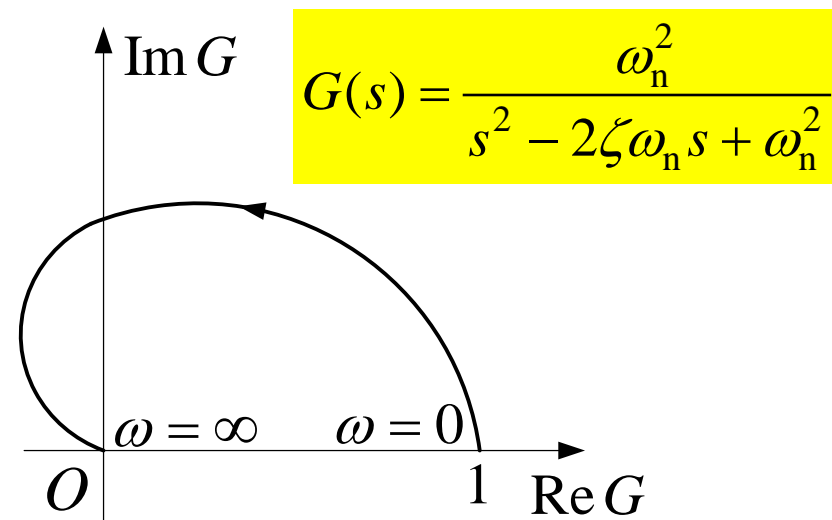
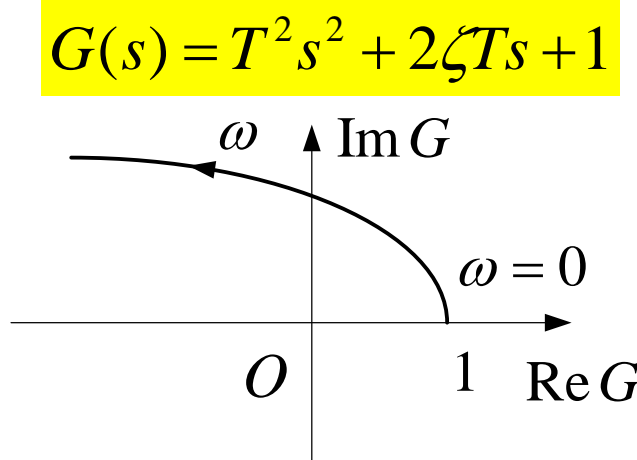
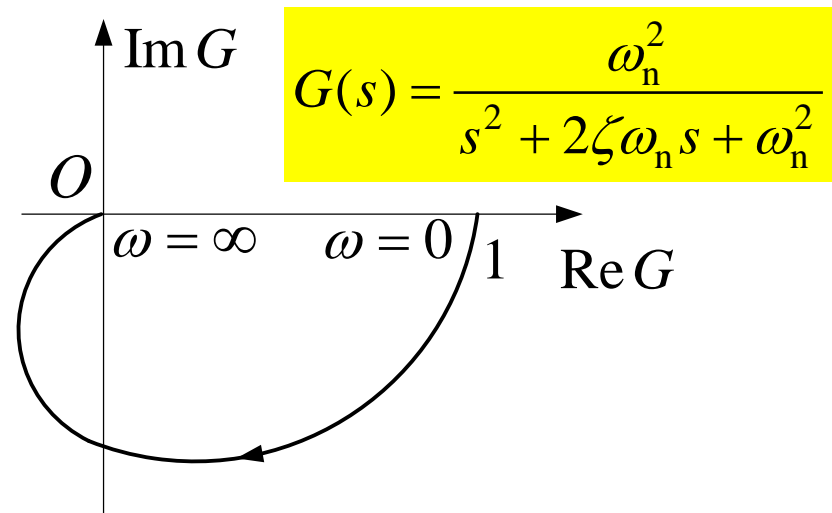
$$\left| \frac{1}{1 + iT\omega} \right| = \left| \frac{1 - iT\omega}{1 + T^2\omega^2} \right|$$

$$= |u + iv|$$

$$u = u^2 + v^2$$

$$(u - 0.5)^2 + v^2 = 0.5^2$$

二阶环节的频率特性曲线



□ 以二阶振荡环节为例。

$$G(i\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2}} \\ \angle G(i\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega < \omega_n \\ -180^\circ - \arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right.$$

! 从复数所在的象限及arctan主值范围上理解!

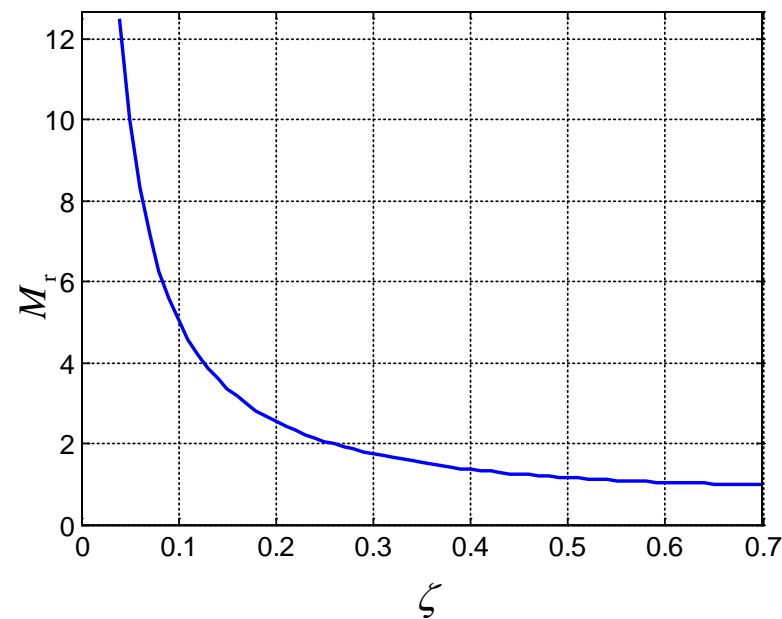
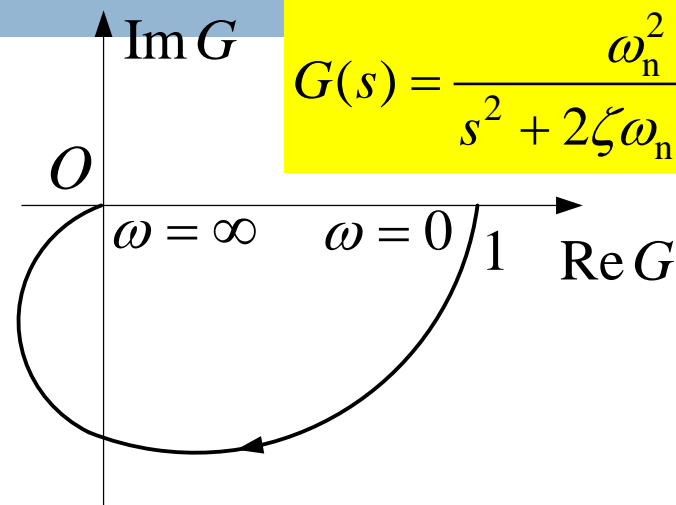
二阶振荡环节的谐振频率与峰值

- ζ 值较小时，幅值 $|G(i\omega)|$ 达到极大值时对应的幅值称为谐振峰值 M_r ，对应的频率称为谐振频率 ω_r 。

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2}}$$

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right\} = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \longrightarrow \quad M_r = |G(i\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad 0 < \zeta < 0.707$$



例：由系统频率特性确定传递函数

- 已知某系统频率特性曲线，试确定传递函数。
- 解 该系统没有积分环节，没有零点时为二阶系统。设传递函数为

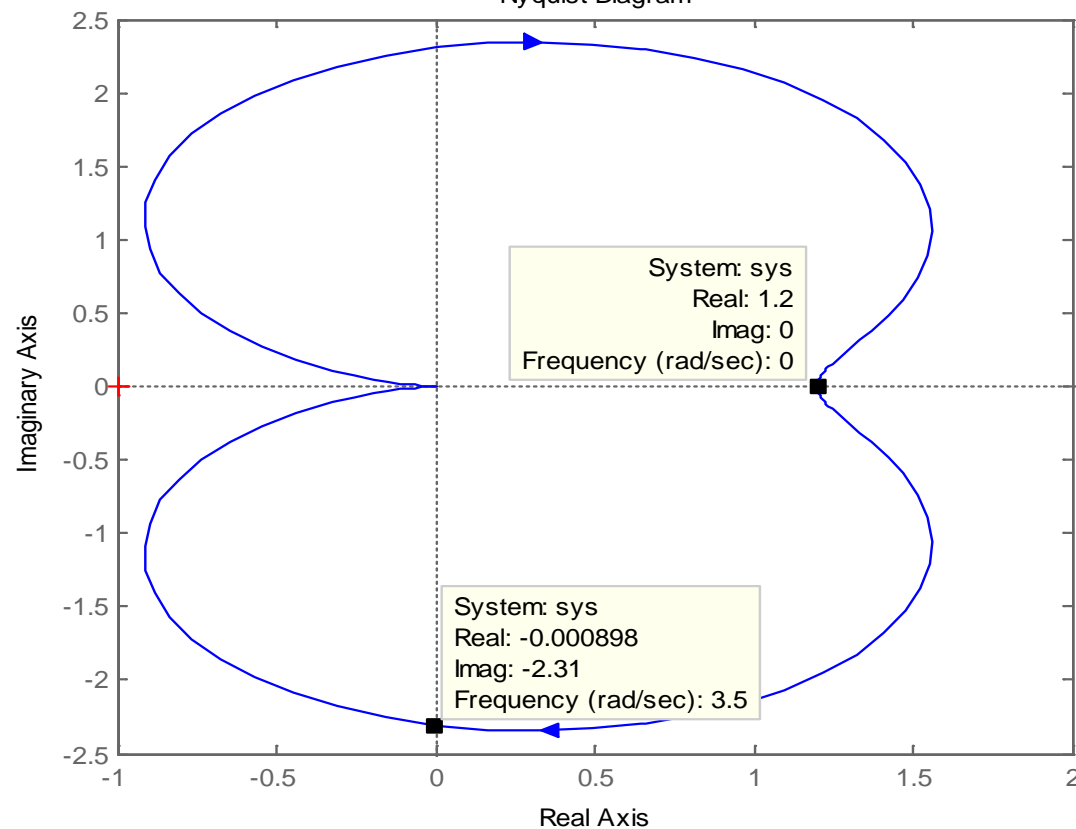
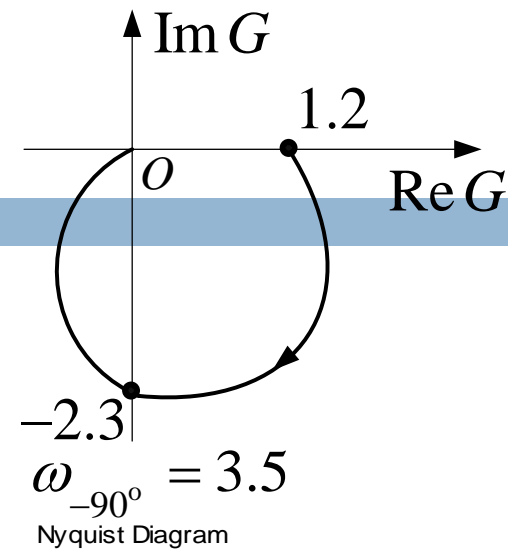
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- 令 $s = i\omega = 0$ ，得到 $K = 1.2$

- 令 $s = i\omega = i3.5$ ，得到

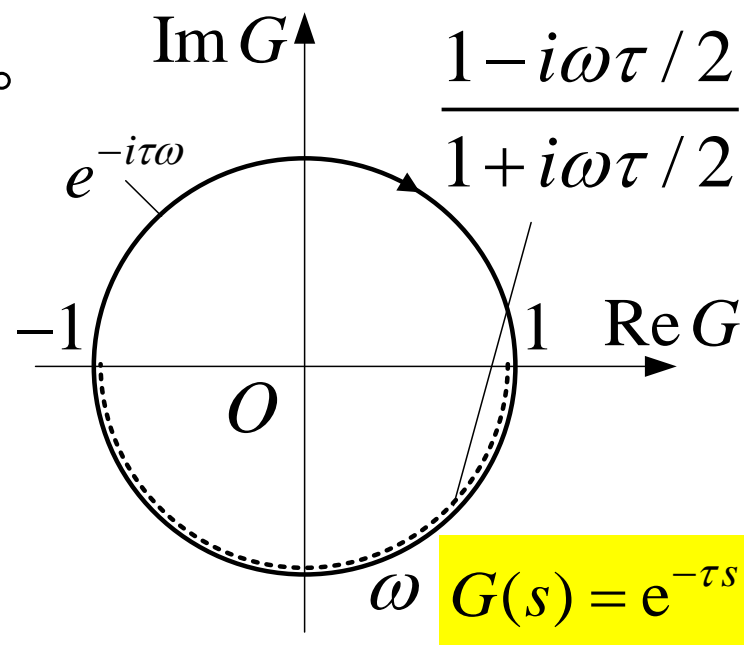
$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{1.2\omega_n^2}{(i3.5)^2 + 2\zeta\omega_n \cdot i3.5 + \omega_n^2} \\ &= \frac{1.2\omega_n^2}{(\omega_n^2 - 12.25) + i7\zeta\omega_n} = -i2.3 \end{aligned}$$

$$\omega_n = 3.5, \zeta = \frac{1.2 \times 3.5^2}{7 \times 3.5 \times 2.3} = 0.26$$



延时环节的频率特性曲线

- 频率特性：以原点为圆心的单位圆，随 ω 不增大，相角滞后量成正比变化，幅值不变
- 低频时，其近似表达式的频率特性是半圆。



这一讲就到这里！



第三讲 绘制幅相频率特性曲线一般方法

进行频域分析首先要绘制频率特性曲线。一个较复杂的传递函数包含有若干不同环节的串联。确定频率特性曲线要把握几个特征点与方向：

- 起点在哪里，走向是什么？
- 终点在哪里，以何种走向到达？
- 与实轴、虚轴的交点是什么？

一般线性系统的开环传递函数幅频与相频表达式

□ 将一般形式的开环传递函数转化成如下格式----尾1式

$$L(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} [(1 + \tau_i s)(s^2 / \omega_{n_i}^2 + 2\zeta_i s / \omega_{n_i} + 1)] \cdot \prod_{i=1}^{m_2} [(1 - \tau_i s)(s^2 / \omega_{n_i}^2 - 2\zeta_i s / \omega_{n_i} + 1)]}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} [(1 + T_j s)(s^2 / \omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j s / \omega_{n_j} + 1)] \cdot \prod_{j=1}^{n_2} [(1 - T_j s)(s^2 / \omega_{n_j}^2 - 2\zeta_j s / \omega_{n_j} + 1)]}$$

▣ 这里 $m_1 + m_2 = m$, $v + n_1 + n_2 = n$ 。注意这里的 n_1 、 m_1 是取小相位的阶次, n_2 、 m_2 为非最小相位的阶次, 一阶对阶次的贡献是1, 二阶对阶次的贡献是2。

□ 幅频---- $|L(i\omega)|$ 每个频率点对应一个值

□ 相频

$$\varphi(\omega) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-k)}) \cdot \pi + \sum_{i=1}^{m_1} \left(\arctan \tau_i \omega + \arctan \frac{2\zeta_i \omega / \omega_{n_i}}{1 - \omega^2 / \omega_{n_i}^2} \right) + \sum_{i=1}^{m_2} \left(\arctan(-\tau_i \omega) + \arctan \frac{-2\zeta_i \omega / \omega_{n_i}}{1 - \omega^2 / \omega_{n_i}^2} \right) \\ + \left(-\frac{\pi}{2} \right) v - \sum_{j=1}^{n_1} \left(\arctan T_j \omega + \arctan \frac{2\zeta_j \omega / \omega_{n_j}}{1 - \omega^2 / \omega_{n_j}^2} \right) - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\arctan(-T_j \omega) + \arctan \frac{-2\zeta_j \omega / \omega_{n_j}}{1 - \omega^2 / \omega_{n_j}^2} \right)$$

确定起点 ($\omega = 0^+$) -1

$$\nu = 0, \varphi(0^+) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-K)}) \cdot \pi + 0$$

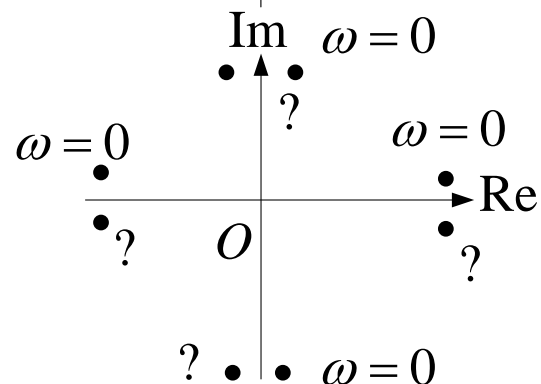
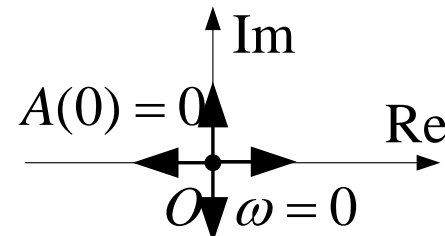
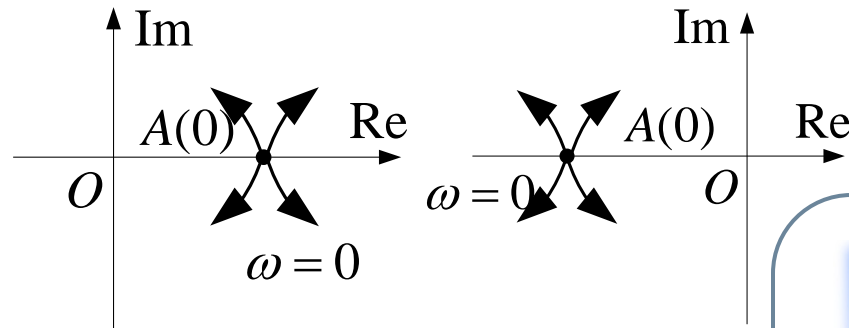
$$A(0^+) = |K|$$

$$\nu < 0, \varphi(0^+) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-K)}) \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\nu$$

$$A(0^+) = 0$$

$$\nu > 0, \varphi(0^+) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-K)}) \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\nu$$

$$A(0^+) = +\infty$$



敢问路在何方?



路: 利用 ε 法

确定起点 ($\omega = 0^+$) -2

□ 当 $K > 0$ 时, 取小正数 ε , 检验 $\varphi(\varepsilon)$

$$v = 0, \varphi(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{m_1} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{i=1}^{m_2} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{j=1}^{n_1} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right)$$

$\varphi(\varepsilon) < 0$ or $\varphi(\varepsilon) > 0$?

down or up ?

$$v < 0, \varphi(\varepsilon) \approx \left(\frac{\pi}{2} \right) |v| + \sum_{i=1}^{m_1} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{i=1}^{m_2} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{j=1}^{n_1} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right)$$

$\varphi(\varepsilon) < \left(\frac{\pi}{2} \right) |v|$ or $\varphi(\varepsilon) > \left(\frac{\pi}{2} \right) |v|$?

down or up or left or right according to $|v|$?

$$v > 0, \varphi(\varepsilon) \approx \left(-\frac{\pi}{2} \right) v + \sum_{i=1}^{m_1} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{i=1}^{m_2} \left(\tau_i \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_i}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_i}^2} \right) - \sum_{j=1}^{n_1} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} \left(T_j \varepsilon + \frac{2\zeta \varepsilon / \omega_{n_j}}{1 - \varepsilon^2 / \omega_{n_j}^2} \right)$$

$\varphi(\varepsilon) < \left(-\frac{\pi}{2} \right) v$ or $\varphi(\varepsilon) > \left(-\frac{\pi}{2} \right) v$?

which side according to v ?

确定起点 ($\omega = 0^+$) -3

□ 当 $K < 0$ 时, 取小正数 ε , 检验 $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = -\pi + \varphi(\varepsilon)$

$v = 0, \tilde{\varphi}(\varepsilon) < -\pi$ or $\tilde{\varphi}(\varepsilon) > -\pi$? *down or up* ?

$v < 0, \tilde{\varphi}(\varepsilon) < \left(\frac{\pi}{2}\right)|v| - \pi$ or $\tilde{\varphi}(\varepsilon) > \left(\frac{\pi}{2}\right)|v| - \pi$?

down or up or left or right according to $|v|$?

$v > 0, \tilde{\varphi}(\varepsilon) < \left(-\frac{\pi}{2}\right)v - \pi$ or $\tilde{\varphi}(\varepsilon) > \left(-\frac{\pi}{2}\right)v - \pi$?

which side according to v ?

确定终点 $\omega = +\infty$

□ 终点处的相位---终点一定在坐标轴上。

$$\varphi(\omega) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-k)}) \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)v + \left(-\frac{\pi}{2}\right)[(n_1 - m_1) - (n_2 - m_2)]$$

□ 最小相位系统有：

$$\varphi(\omega) = \text{int}(1 - 2^{\text{sign}(-k)}) \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(n - m)$$

▣ $n=m$ 时， 终点 $A(+\infty) = |K^*|, K^* \propto K$

▣ $n>m$ 时， 终点在原点 $A(+\infty) = 0$

与坐标轴的交点

- 将 $L(i\omega)$ 写成 $L(i\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$
- 令 $b(\omega) = 0$, 可解出频率特性曲线与实轴相交时的 ω 值(称此值为 **相角交越频率**), 代入 $L(i\omega)$ 得到与实轴的交点。
- 令 $a(\omega) = 0$, 可解出频率特性曲线与虚轴相交时的 ω 值, 代入 $L(i\omega)$ 得到与虚轴的交点。

旋转角度 ($\omega = 0 \sim +\infty$) 对频率特性曲线的影响

□ 最小相位的情况

- 位于分子的一、二阶环节，增大相角
 - $(Ts+1)$ 使曲线逆时针转 90° ($+90^\circ$)
 - $(T^2s+2\zeta Ts+1)$ 使曲线逆时针转 180° ($+180^\circ$)
- 位于分母的一、二阶环节，减小相角
 - $(Ts+1)$ 使曲线顺时针转 90° (-90°)
 - $(T^2s+2\zeta Ts+1)$ 使曲线顺时针转 180° (-180°)
- 对于一阶环节， $\omega = 1/T$ 时，相角为 45° 。
- 对于二阶环节， $\omega = 1/T$ 时，相角为 90° 。
- 这时的 ω 值称为该环节的**转折频率**。
- 转折频率越小的环节，越先产生转**折**作用。

□ 非最小相位情况

- 对起点的影响
 - 如果有奇数个右实轴形如 $(Ts-1)$ 的零极点(当令 $\omega = 0$ 时，提供了一个负值)，则频率特性曲线的起点旋转 180° 。
- 位于分子的一、二阶环节
 - $(Ts-1)$ 使曲线顺时针转 90° (-90°)
 - $(T^2s-2\zeta Ts+1)$ 使曲线顺时针转 180° (-180°)
- 位于分母的一、二阶环节
 - $(Ts-1)$ 使曲线逆时针转 90° ($+90^\circ$)
 - $(T^2s-2\zeta Ts+1)$ 使曲线逆时针转 180° ($+180^\circ$)

例1：手绘幅相频率特性曲线

□ 已知系统开环传递函数，手绘频率特性曲线。

$$L(s) = \frac{3s+1}{s^2(s+1)^2}$$

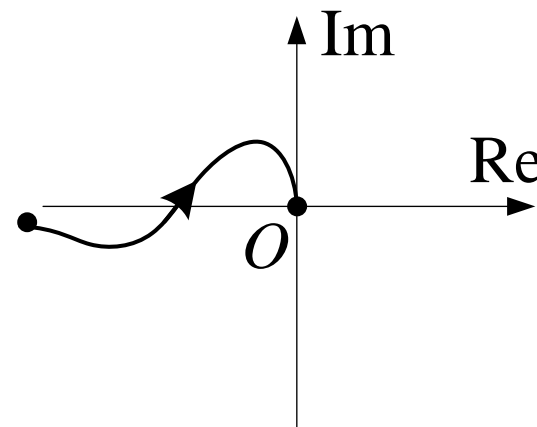
- (1) 有两个积分环节，因此起点的相位为 $-2 \times 90^\circ = -180^\circ$ ，而 $\omega = \varepsilon$ 时， $3-1-1=1>0$ ，起点在第三象限靠近负实轴
- (2) $n-m=3$ ，因此终点的相位为 $-3 \times 90^\circ = -270^\circ$ 。
- (3) 求与实轴的交点

$$L(i\omega) = \frac{1+i3\omega}{-\omega^2(1+i\omega)^2} = \frac{1+5\omega^2+i(\omega-3\omega^3)}{-\omega^2(1+\omega^2)^2}$$

$$=0$$

$\omega=0.577$ ，与实轴交于 -4.5

- (4) 绘图



例2：手绘幅相频率特性曲线

□ 已知系统开环传递函数，手绘出频率特性曲线

$$L(s) = \frac{k(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s^2(T_3s - 1)}$$

□ (1) 转化成尾1形式

$$L(s) = \frac{-k(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s^2(1 - T_3s)} = \frac{k_1(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s^2(1 - T_3s)}$$

$$k, T_1, T_2, T_3 > 0$$

□ (2) 有两个积分环节，且 $k_1 < 0$ ，说明起点在 0° 附近。

□ (3) 利用 ε 法知起点的相位在第一象限。

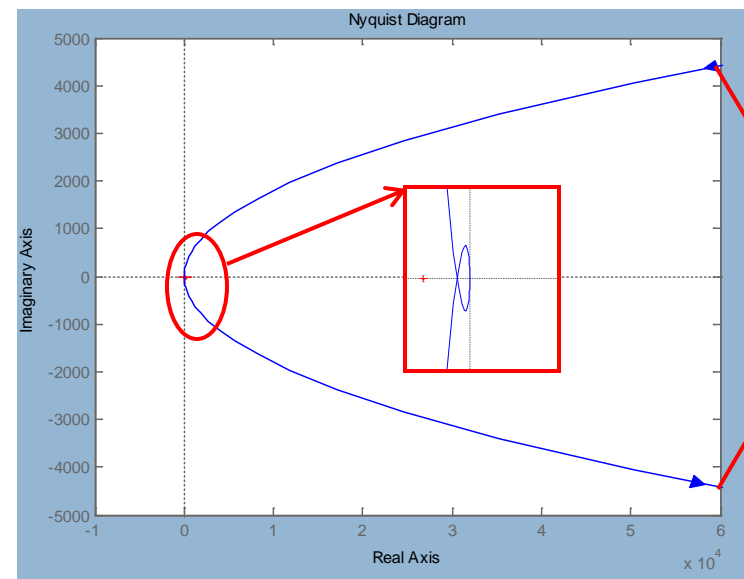
□ (3) 令 $\omega \rightarrow \infty$ ，则频率特性曲线终点在原点。

□ (4) 按分子分母一阶系统的形式，频率特性曲线要逆时针(正方向)旋转 270° 到达终点。

□ (5) 求与实轴和虚轴的交点，这与里参数未知，不出，但可以肯定与实轴和虚轴有交点。

□ (6) 绘图

- $k=1; T_1=7; T_2=0.1; T_3=11;$
- $L=k*tf(conv([T_1,1],[T_2,1]),[T_3 -1 \ 0 \ 0]);$
- `nyquist(L)`



例3：绘出频率特性曲线

□ 已知系统开环传递函数，绘出频率特性曲线。 $L(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$

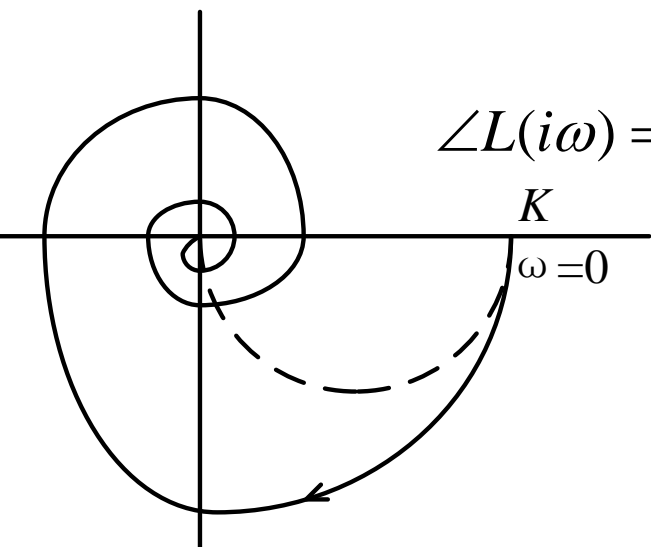
$$L(i\omega) = \frac{Ke^{-i\tau\omega}}{1 + iT\omega} = K \frac{\cos \omega\tau - \omega T \sin \omega\tau - i[\sin \omega\tau + \omega T \cos \omega\tau]}{1 + (T\omega)^2}$$

$\angle L(i\omega) = -\omega\tau - \arctan \omega T$ 要转多少圈？如何确定？

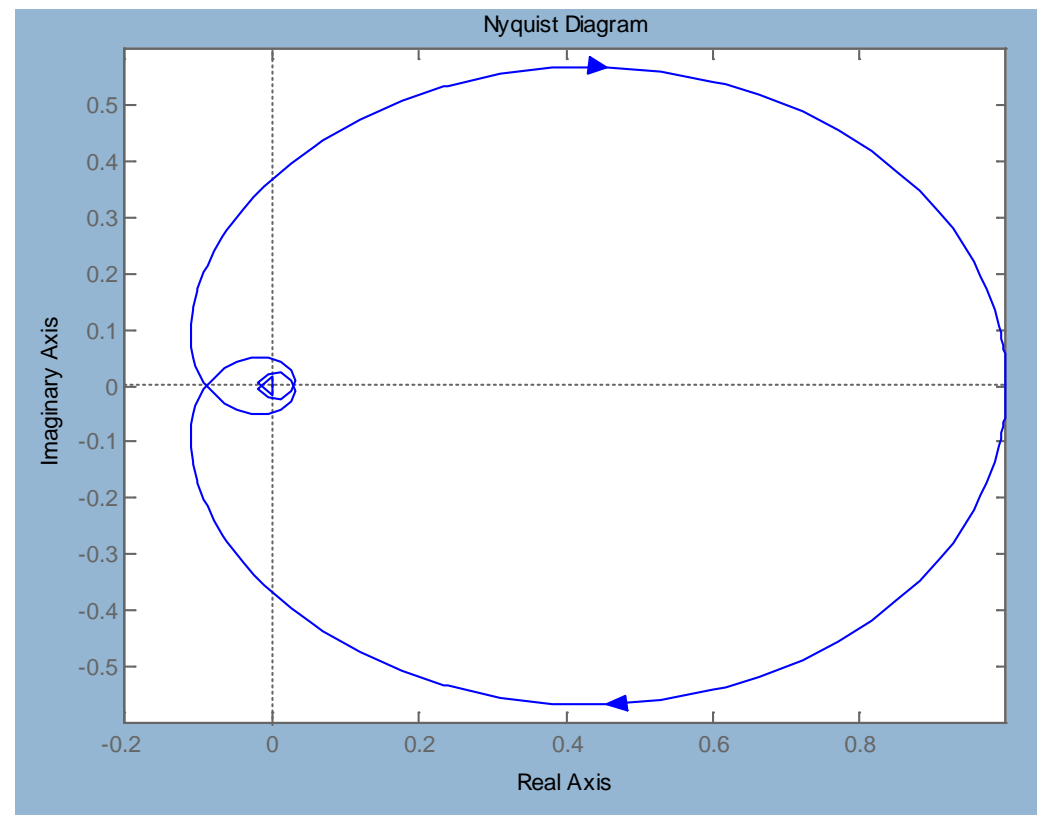
$$\sin \omega\tau + \omega T \cos \omega\tau = 0 \Rightarrow ?$$



$$\angle L(i\omega) = -\omega\tau - \arctan \omega T = -\pi \text{ or } 0 \Rightarrow ?$$



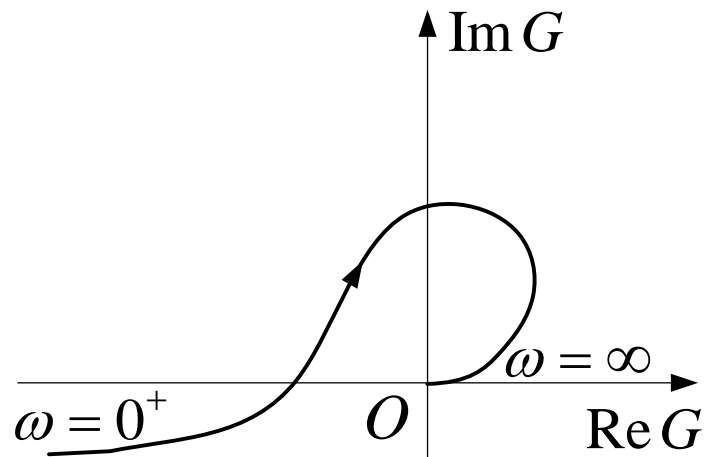
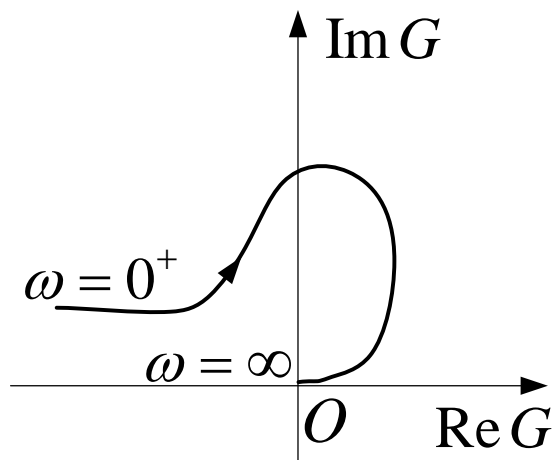
```
G=tf(1,[2 1])  
set(G,'iodelay',0.3)  
nyquist(G),axis([-0.2 1 -0.6 0.6])
```



课外练习

□ 设系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$ $K, T_1, T_2, T_3, T_4 > 0$

- (1) 若 $T_2 + T_3 + T_4 > T_1$, 概略绘制该系统的频率特性图。
- (2) 若 $T_2 + T_3 + T_4 < T_1$, 概略绘制该系统的频率特性图。



这一讲就到这里！

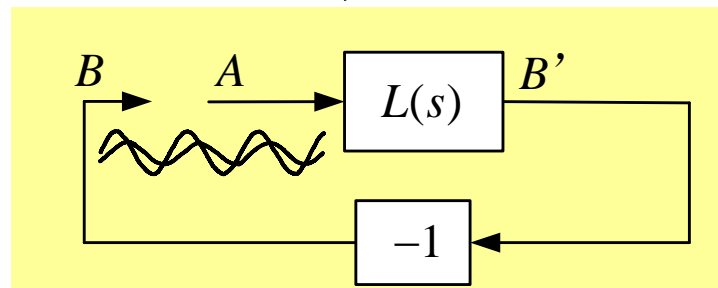
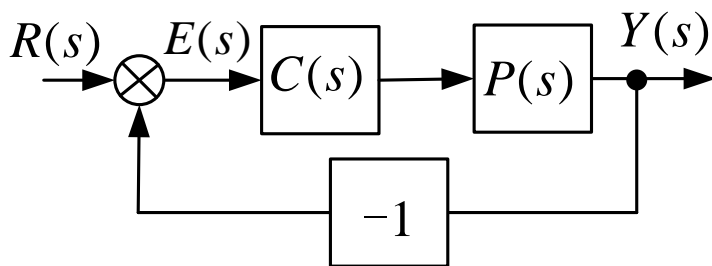


第四讲 闭环系统稳定性环路分析

对于高阶系统，在分析系统稳定性时，无论是通过解高阶代数方程，还是通过Routh代数判据，计算闭环系统极点是否都在 s 左半平面是一件困难的事情。并且这种计算难以告诉我们该如何修改控制器的结构和参数，使不稳定的系统变得稳定，或改善动态性能。

Nyquist环路分析的基本思想

- 每种不同频率正弦信号在线性系统中的传输，其输出是被不断放大，还是被不断衰减，还是产生自持振荡，完全是由频率特性决定。



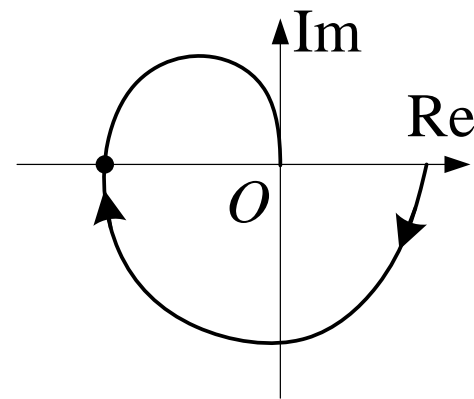
- 考察图示环路： $L(s)=P(s)C(s)$ ，假设其没有 s 右半平面极点；考察系统自身的稳定性，不考虑输入信号。
- 断开环路，从 A 点注入某频率的正弦信号，稳态时在 B 点也获得同频率的信号
- 特殊地，若在 A 点注入频率为 ω_0 的正弦信号，此时若 $L(i\omega_0)=-1$ （即模为1，相角为 180° ），稳态时在 B 点获得信号完全与 A 点一样，将 A 与 B 相接后，振荡得以维持，此时 $\omega_0=\omega_{180^\circ}$ 称为相角交越频率，频率特性图中 $(-1, i0)$ 称为临界点

简化的Nyquist判据

- 简化的Nyquist判据：对开环稳定的系统，
 - ▣ 如果 $|L(i\omega_{180})| > 1$ ，环路上 $\omega = \omega_{180}$ 的信号被放大，闭环系统不稳定；
 - ▣ 如果 $|L(i\omega_{180})| < 1$ ，环路上 $\omega = \omega_{180}$ 信号是衰减的，闭环系统稳定。
- 例：已知系统开环传递函数 $L(s) = K / (s+1)^3$ ，确定其闭环稳定时K的取值范围。(K取正值)
 - ▣ 解 令 $L(i\omega) = -1$ ，即：

$$L(i\omega) = \frac{K}{(1+i\omega)^3} = \frac{K}{(1-3\omega^2) + i(3\omega - \omega^3)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3}$$
$$L(i\omega) = -\frac{K}{8} = -1$$

K < 8时，闭环系统稳定。



注：可以利用Routh判据和根轨迹方法进行验证。

利用Routh判据和根轨迹验证一下 $L(s) = K / (s+1)^3$

□ 闭环系统特征多项式

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (1+K)$$

□ 列Routh表

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

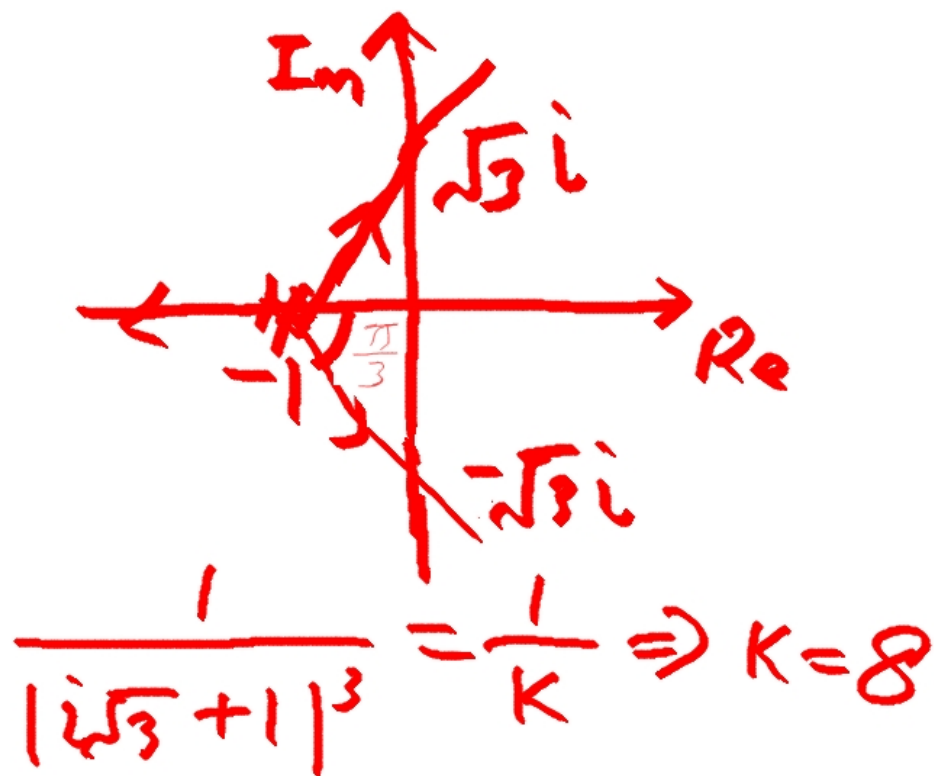
$$\begin{array}{ccc} s^2 & 3 & 1+K \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & \frac{8-K}{3} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} s^0 & 1+K \end{array}$$

$$\therefore K < 8$$

□ 画根轨迹



这一讲就到这里！



第五讲 稳定性与开环频域指标

控制系统是否稳定是指**绝对稳定**。而对于一个稳定的系统，还要考虑其稳定的程度，即**相对稳定性**。相对稳定与系统的动态性能指标有密切联系。在设计一个控制系统时，不仅要求它是绝对稳定的，而且还应保证其具有一定的稳定程度。只有这样，才能不致于因为系统的参数变化而导致性能变差甚至不稳定。用**稳定裕度**的概念表达相对稳定性。

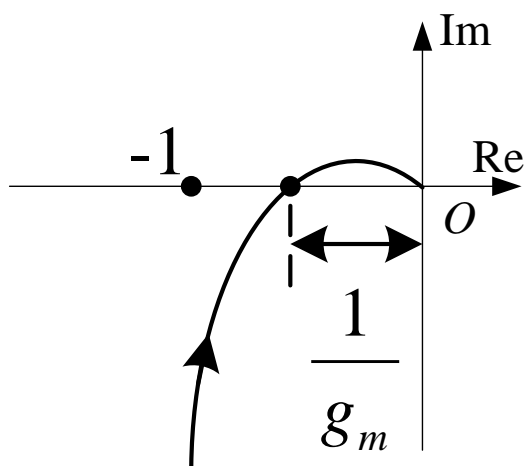
稳定程度的性能指标

- 裕度的表达要有基准。什么是基准？ $(L(s)+1)|_{i\omega} = 0 \Rightarrow (-1, i0)$
- Nyquist频率特性图上如何表示裕度与基准的关系？

增益裕度

$$g_m = \frac{1}{|L(i\omega_{180^\circ})|}$$

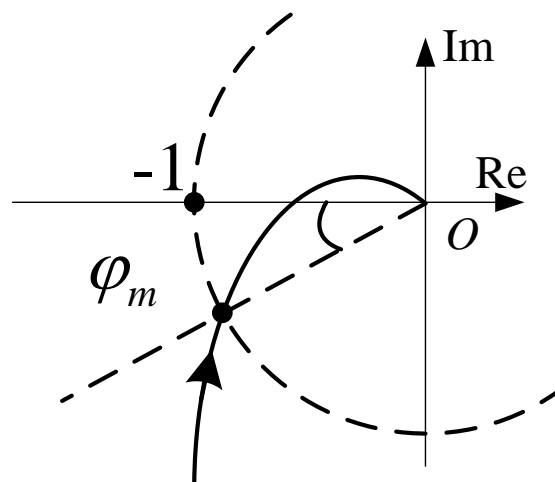
要求： $g_m \geq 2$



相角裕度

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(i\omega_c)$$

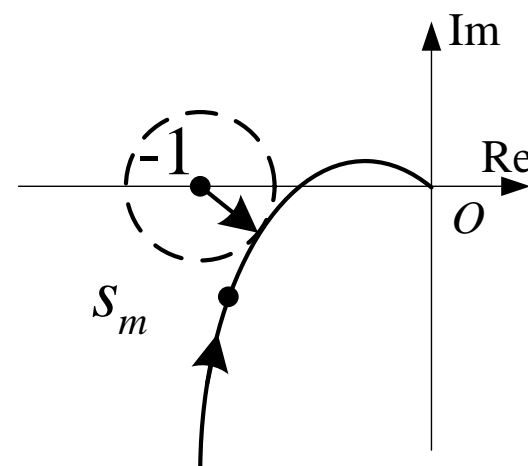
$\varphi_m = 30^\circ \sim 60^\circ$



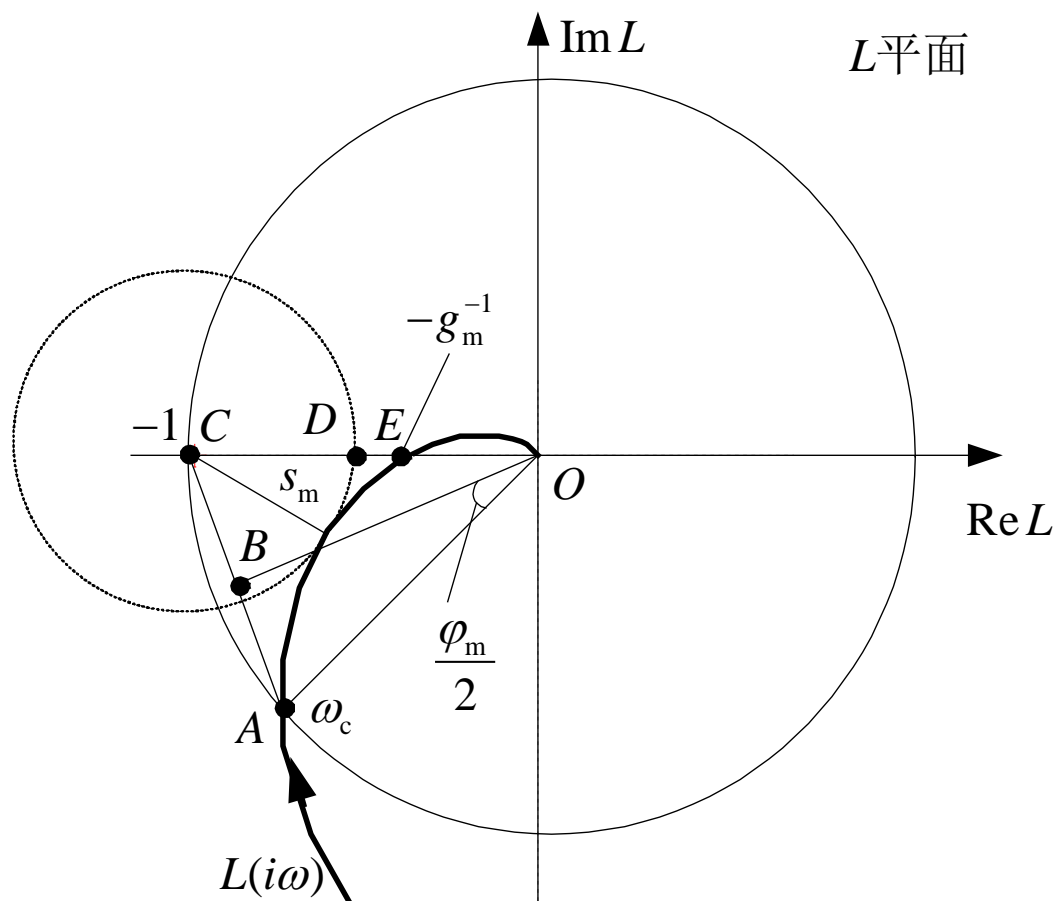
模裕度

$$s_m = \min |L(i\omega) - (-1)| = \frac{1}{\max |S(i\omega)|}$$

$s_m \geq 0.5$



模裕度与增益裕度以及相角裕度的关系



$$2 \sin(\varphi_m / 2) = |1 + L(i\omega_c)| = 1/|S(i\omega_c)| = AC = 2AB$$

$$OE = 1/g_m, OD = 1 - s_m$$



几何关系

$$g_m \geq \frac{1}{1 - s_m} \quad \varphi_m \geq 2 \arcsin \frac{s_m}{2}$$

□ 从这上面两式可知:

□ 由模裕度可以确定相角裕度和增益裕度的下限。

□ 但不能由 g_m 和 φ_m 求出 s_m 。

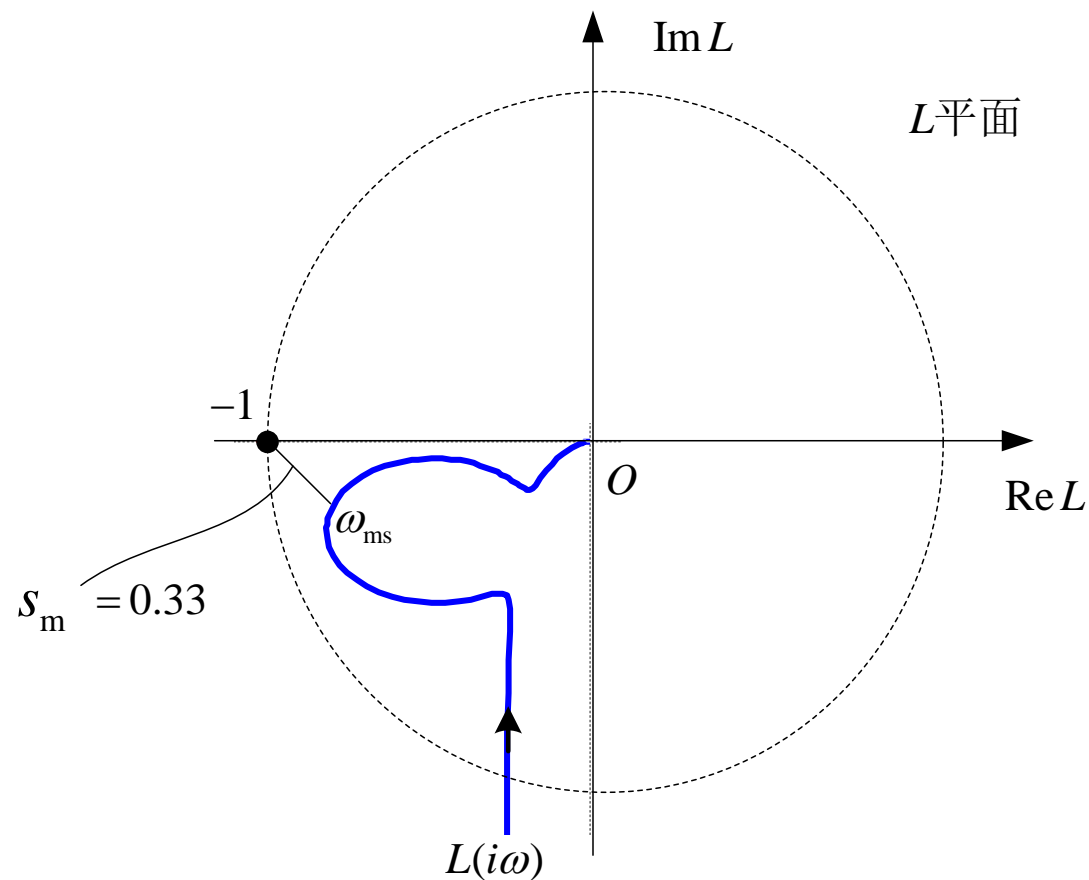
为什么要引入模裕度？——解决误判

□ 对于含有谐振的系统，有时增益裕度，相角裕度都很大，但系统的稳定鲁棒性较差。这种情况增益裕度，相角裕度并不能反映真实情况。

□ 如下传递函数

$$L(s) = \frac{s^2 + 0.12s + 1.1}{s(s + 2)(s^2 + 0.08s + 1)}$$

□ 含有阻尼系数分别为0.057和0.04的谐振环节，频率特性曲线如图所示。



$g_m = \infty$ $\varphi_m = 75.7^\circ$ $s_m = 0.33$ 小多了

课外练习

□ 已知单位反馈系统的开环传递函数如下，试求：

□ (1)使系统增益裕度为10的K值； $K=1$

□ (2)使系统相角裕度为 30° 的K值。 $K=3.85$

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s + 1)^2}$$

这一讲就到这里！



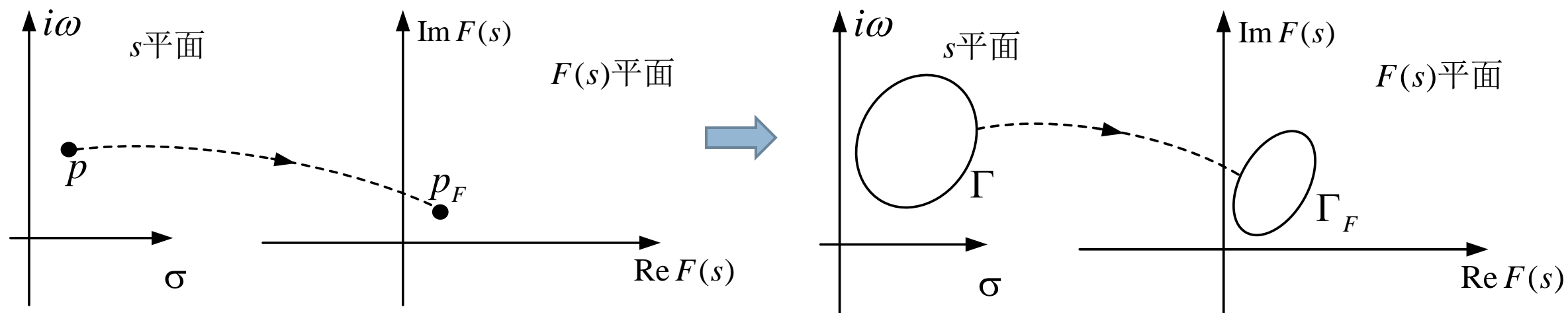
第六讲 Nyquist稳定性判据

1932年，Nyquist在研究电子反馈放大器的稳定性问题时，提出了开环频率特性确定稳定性的一般方法，称为**Nyquist稳定性判据**。它是频域法的基础。而判据的基础是**幅角原理**。

本节首先回顾一下幅角原理，再引入Nyquist稳定性判据。

Nyquist判据的理论基础---幅角原理-1

- s 复变函数 $F(s)$ 定义了 s 平面的点 p 到 $F(s)$ 平面的点 p_F 的映射关系。
- s 平面的曲线 Γ 映射到 $F(s)$ 平面的曲线 Γ_F 。



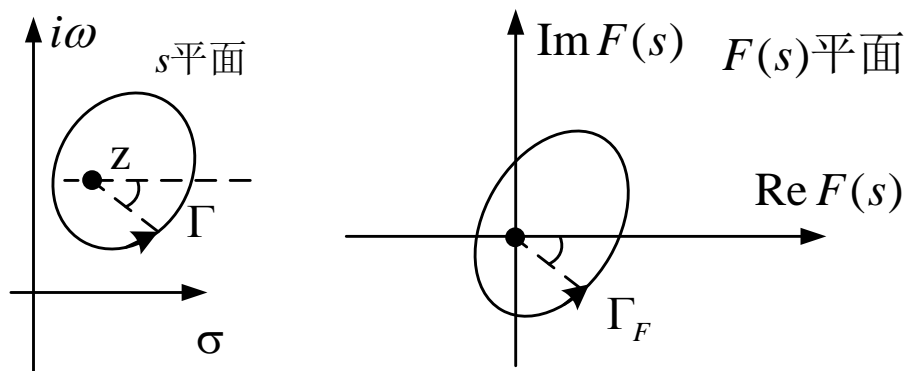
- 复变函数相关概念复习：解析函数及其充要条件、闭路积分、孤立奇点与级数展开、留数与留数定理、对数留数与计算

Nyquist判据的理论基础---幅角原理-2

□ 设 $F(s)$ 有一个零点 z , 即 $F(s)=(s-z)F^*(s)$ 。设封闭曲线 Γ 包围 z , 但其它零极点不在围线内。

▣ 让 s 沿着 Γ 逆时针旋转一圈, 结果 $(s-z)$ 的相角变化为 360° 。

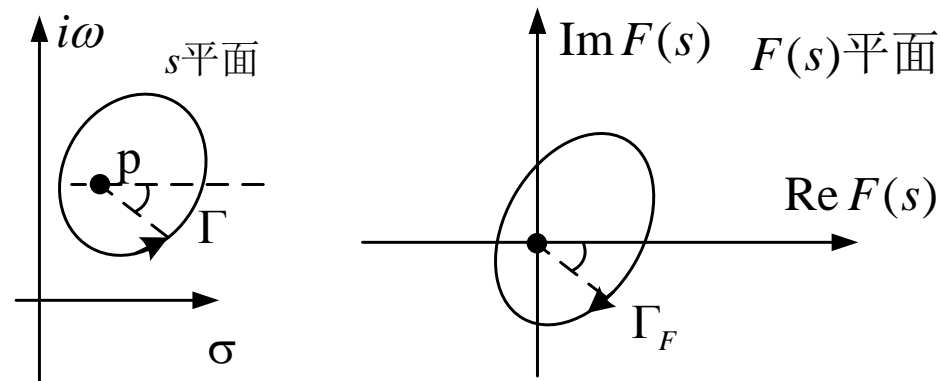
▣ 因此, $F(s)=(s-z)F^*(s)$ 的相角变化为 360° 。即 Γ_F 围绕原点**逆时针**旋转一圈。



□ 设 $F(s)$ 有一个极点 p , 即 $F(s)=F^*(s)/(s-p)$ 。设封闭曲线 Γ 包围 p , 但其它零极点不在围线内。

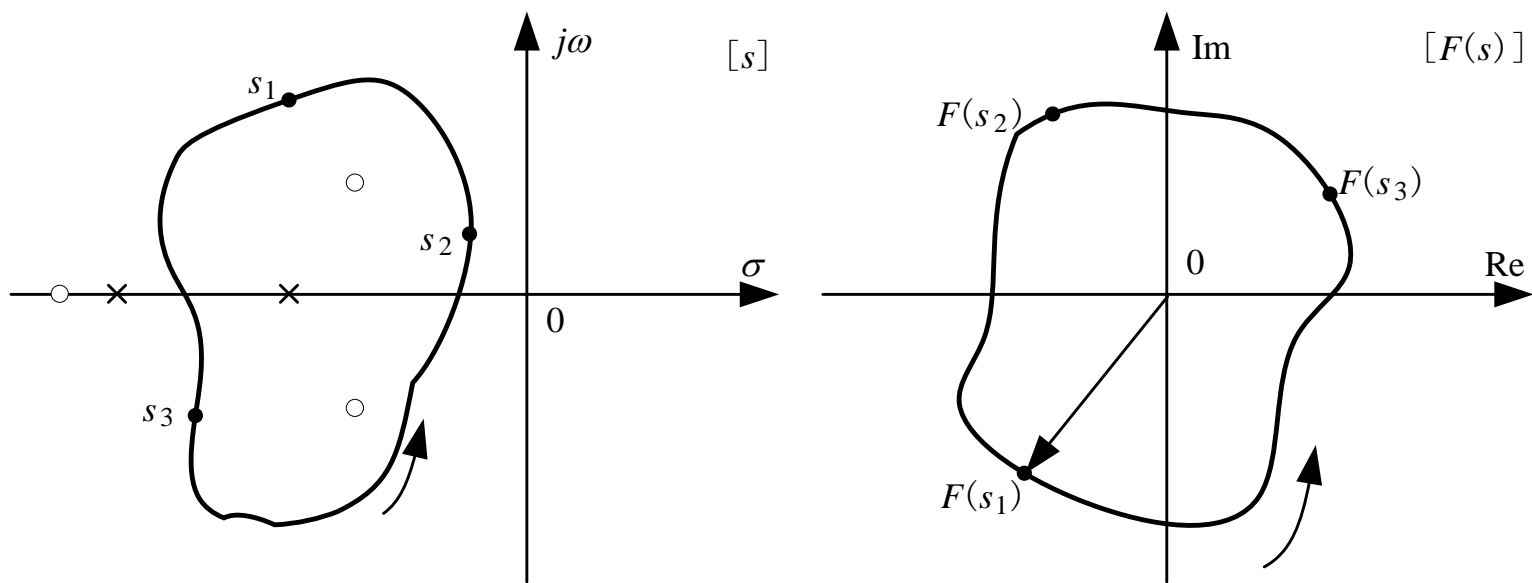
▣ 让 s 沿着 Γ 逆时针旋转一圈。结果 $(s-p)$ 的相角变化为 360° 。

▣ 因此, $F(s)=F^*(s)/(s-p)$ 的相角变化为 -360° 。即因此 Γ_F 围绕原点**顺时针**旋转一圈。



Nyquist判据的理论基础---幅角原理-3

- 由上述讨论，得：如果 Γ 包围了 $F(s)$ 的 N 个零点和 P 个极点，则 s 沿着 Γ 逆时针旋转一圈时， $F(s)$ 围绕原点逆时针旋转 $(N-P)$ 圈----幅角原理的直接描述。如：



平面上闭曲线逆时针包围2个零点和1个极点，所以逆时针绕原点1圈。

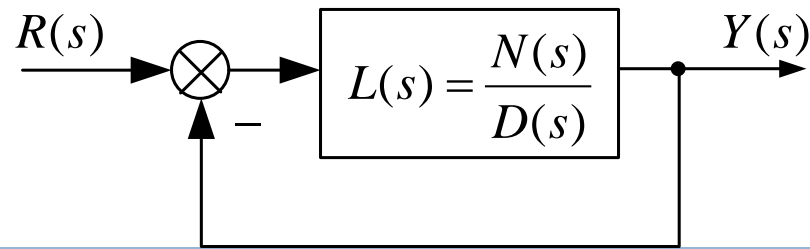
Nyquist判据的理论基础---幅角原理-4

- 幅角原理：如果复变函数 $F(s)$ 在 s 平面上闭域 D 内除有限极点(设为 P 个)外解析，在 D 内存在有限个零点(设为 N 个)， D 的边界不通过 $F(s)$ 任何奇点(其实可以通过有限个极点，需要特殊处理)和零点，则当 s 以逆时针方向（正方向）沿闭围线 Γ 移动一周时，在 $F(s)$ 平面上相对于闭围线的象 F_Γ 将以正方向围绕原点旋转，设围绕圈数为 w_n ，则 w_n 为（工程数学中已给出该原理的严格证明，这里要强调的是它的翻版就是Nyquist判据）

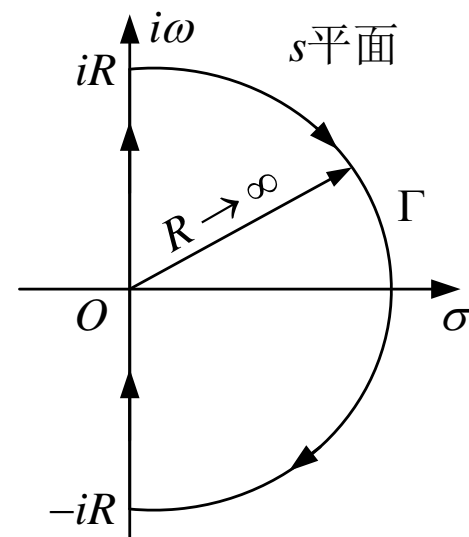
$$w_n = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{F'(s)}{F(s)} ds = N - P$$

想一想：若 s 以顺时针方向（反方向）沿闭围线 Γ 移动一周时，在平面上相对于闭围线的象 F_Γ 将以反方向围绕原点旋转 $N-P$ 圈。对吗？

Nyquist判据——零极点问题



- 考虑如图单位反馈控制系统。如果系统开环传递函数为 $L(s)$ ，则闭环传递函数为 $L(s) / [1+L(s)] = N(s) / [N(s)+D(s)]$ 。显然**闭环传递函数的零点与开环是一样的**。
- 考虑 $F(s)=1+L(s)$
 - ▣ **极点是开环传递函数的极点**
 - ▣ **零点是闭环传递函数的极点**
- 选择如图Nyquist路径为封闭围线 Γ (右半平面)。让 s 沿着 Γ **顺时针**旋转一圈。如果 $F(s)$ 有 N 个零点和 P 个极点在**右半复平面**，则根据幅角原理， s 沿着 Γ 顺时针旋转一圈时， $F(s)$ 围绕原点顺时针旋转 $(N-P)$ 圈。



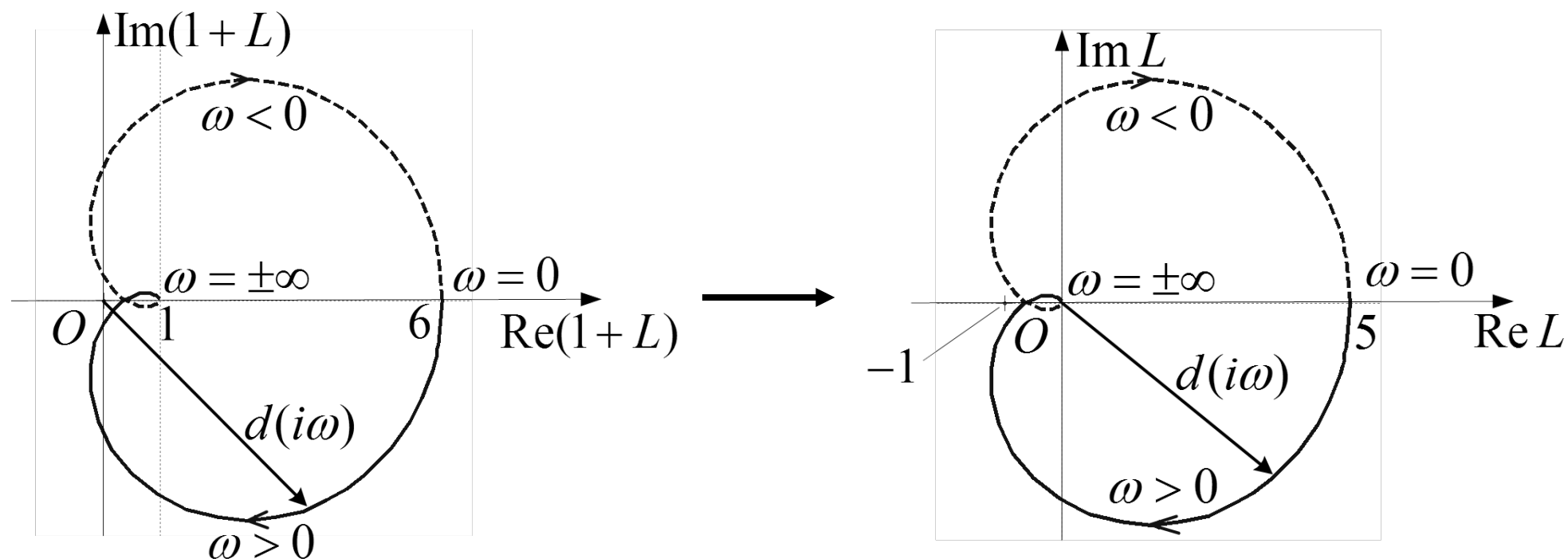
$$i0 \rightarrow iR$$

$$R \cdot e^{i\pi/2} \rightarrow R \cdot e^{-i\pi/2}$$

$$-iR \rightarrow i0$$

1+L到L的Nyquist幅相图

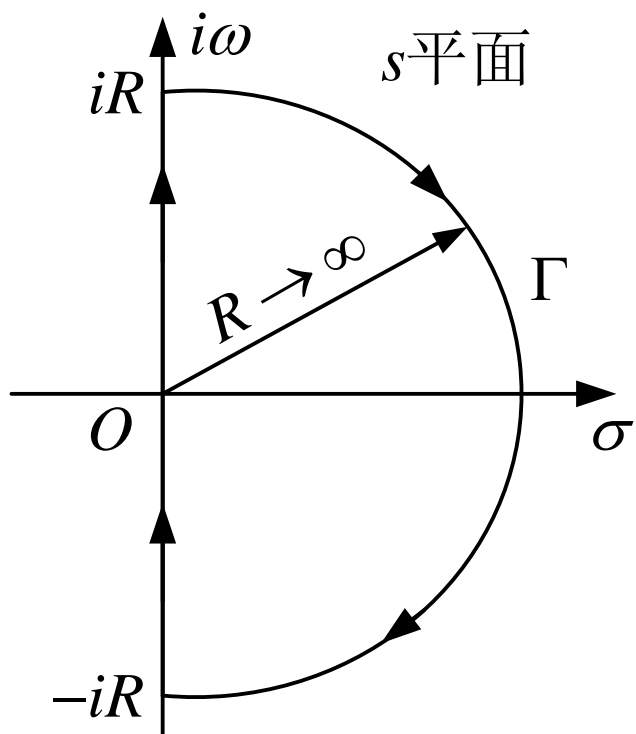
□ 以如下传函为例，画出幅相图 $L(s) = 5/(0.5s + 1)^3$



□ **1+L围绕原点等价于L(s)围绕(-1, i0)点。**

如何绘制Nyquist图？

- Nyquist图是让 s 沿着 Nyquist路径顺时针旋转一圈时， $L(s)$ 在复平面上形成的轨迹。



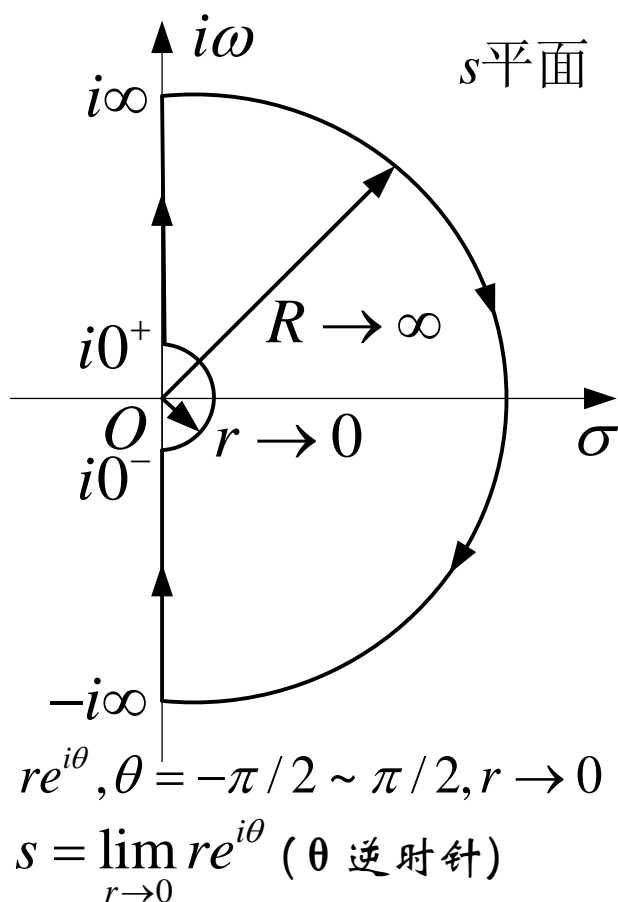
- ✓ $s=i0 \rightarrow iR$ 时， $L(s)$ 的轨迹就是频率特性曲线；
- ✓ s 绕右半圆时， $L(s)=0$ 或常值，这两种情况也会出现在另外两段，所以只用画图时考虑另外两端；
- ✓ $s=-iR \rightarrow i0$ 时， $L(s)$ 的轨迹与频率特性曲线关于实轴对称。
- 实际上就是画频率特性图，不过要补全从 $(\omega = -\infty \sim 0)$

Nyquist判据—闭环稳定与不稳定

- **判据：** 设系统的开环传递函数 $L(s)$ 在右半复平面的极点数 P ，
- (1) 若 s 沿Nyquist路径顺时针移动一周， $L(s)$ 的 Nyquist图 **顺时针** 包围临界点 $(-1, i0)$ 的圈数为 w_n ，则闭环系统在右半复平面的极点数 $N = w_n + P$ 。
- (2) 闭环系统稳定的充分必要条件是 $L(s)$ 的 Nyquist 图 **逆时针** 环绕临界点 $(-1, i0)$ 的圈数为 P 。
- **说明：**
 - ▣ 若 $L(s)$ 具有RHP极点，闭环系统稳定的条件是 $|L(i\omega_{180^\circ})| > 1$ ，即对于开环不稳定的系统，为使系统闭环稳定，在负实轴穿越频率处 ω_{180° 的开环幅频应增大，这一点在环路分析中是很难理解的。
 - ▣ 开环传递函数的Nyquist图是频率 ω 的复轨迹，在传递函数无法获得的情况下，可用实验方法求得。
 - ▣ 如果开环传递函数在虚轴上有极点(幅角定理要求Nyquist轨线不能经过的奇点)，需做特殊考虑。

开环传递函数在虚轴上有极点情况（设在原点）

- 对Nyquist路径略作修改，使其沿着半径为无穷小的右(视原点是稳定的)或左(视原点是不稳定的)半圆绕过原点处的极点



$$L(s) \Big|_{s=\lim_{r \rightarrow 0} re^{i\theta}} = \frac{K \prod_{k=1}^m (T_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)}$$

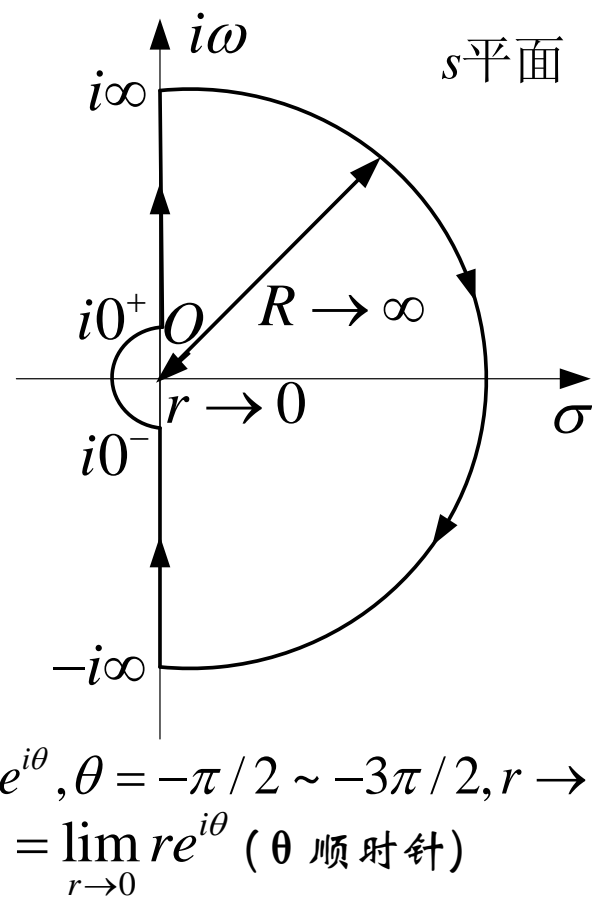
由上式知 L 平面上的映射曲线将从 $\arg(L(i0^-))$ 位置沿半径无穷大的圆弧按顺时针方向从 $v\pi/2$ 经 0 变化到 $-v\pi/2$ ，到达 $\arg(L(i0^+))$ 位置，相应的幅角变化量为：

$$\Delta_{R_1} \arg L(i\omega) = -v\pi$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r^v} e^{-iv\theta} = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} R_1 e^{-iv\theta}$$

由上式知 L 平面上的映射曲线将从 $\arg(L(i0^-))$ 位置沿半径无穷大的圆弧按逆时针方向从 $v\pi/2$ 经 $v\pi$ 变化到 $v3\pi/2$ ，到达 $\arg(L(i0^+))$ 位置，相应的幅角变化量为：

$$\Delta_{R_1} \arg L(i\omega) = v\pi$$



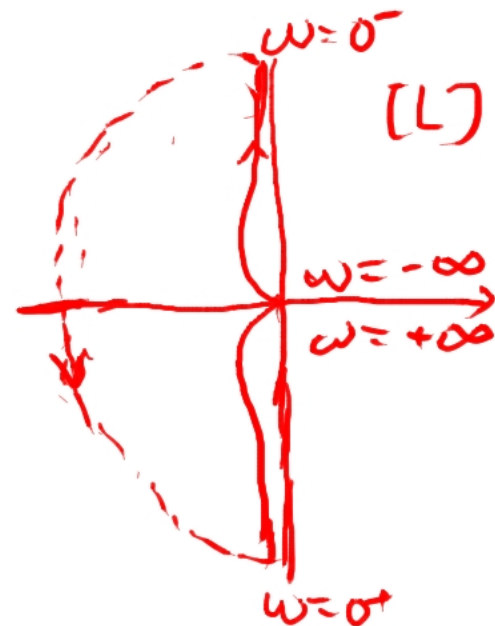
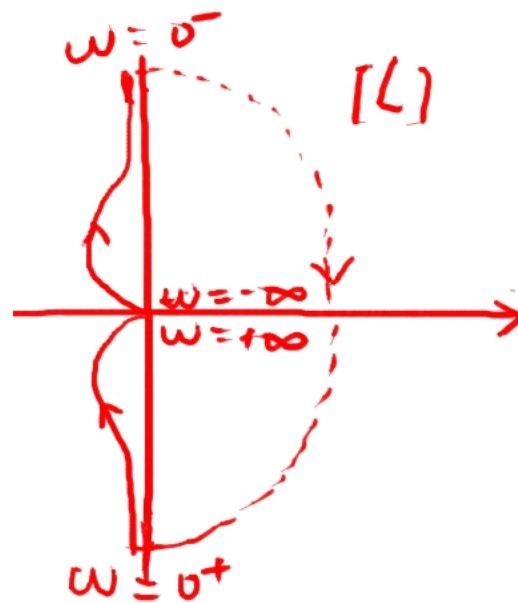
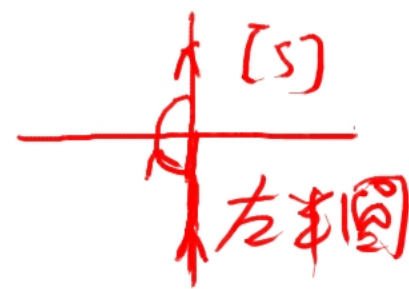
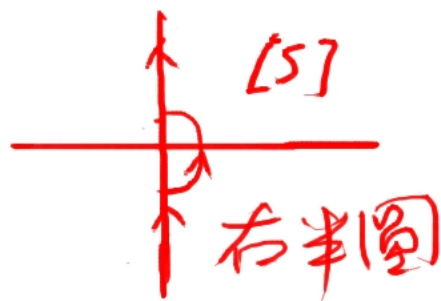
例：手绘Nyquist路径与Nyquist曲线

□ 最小相位 $L(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, K > 0, T > 0$

- 含右小半圆的Nyquist路径与曲线
- 含左小半圆的Nyquist路径与曲线

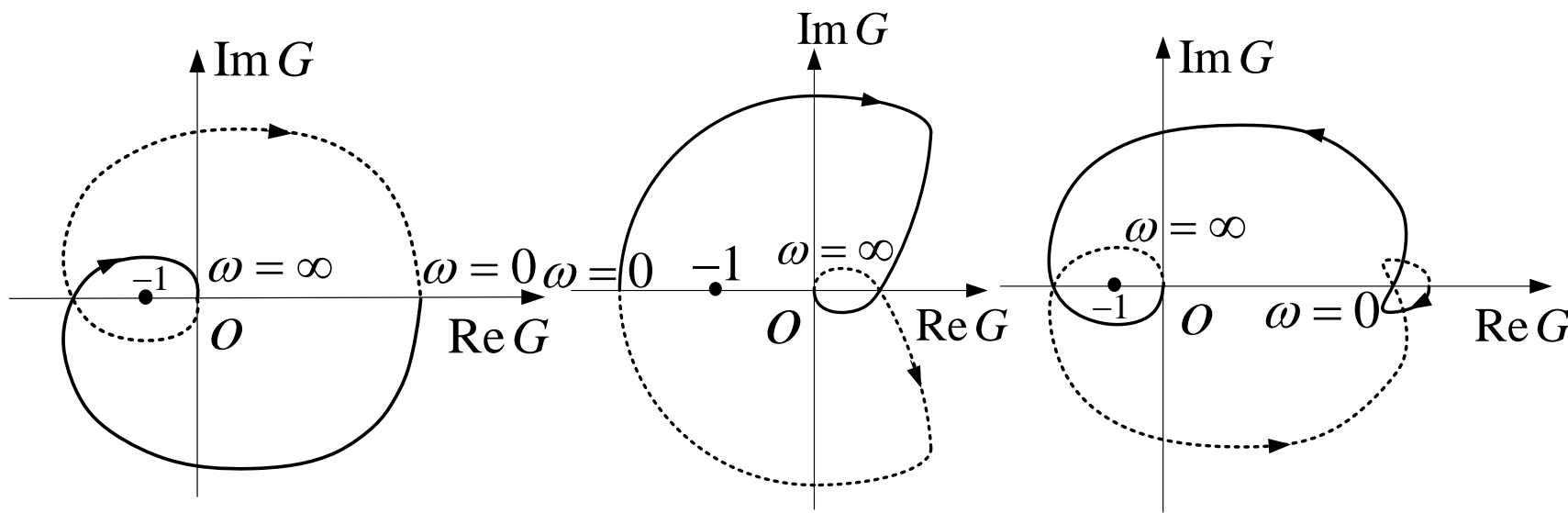
□ 总结：

- 路径的小半圆是逆时针，曲线的补圆线为顺时针
- 路径的小半圆是顺时针，曲线的补圆线为逆时针



例：用Nyquist稳定性判据

□ 下面是三个系统开环传函的Nyquist曲线，判定其闭环稳定性。



开环系统稳定

开环系统稳定

开环系统有2个RHP极点

(1) $P=0, 2$, 故 $N=P+w_n=2$, 闭环系统不稳定, 有2个RHP极点。

(2) $P=0, 1$, 故 $N=P+w_n=1$, 闭环系统不稳定, 有1个RHP极点。

(3) $P=2, -2$, 故 $N=P+w_n=0$, 闭环系统稳定。

这一讲就到这里！



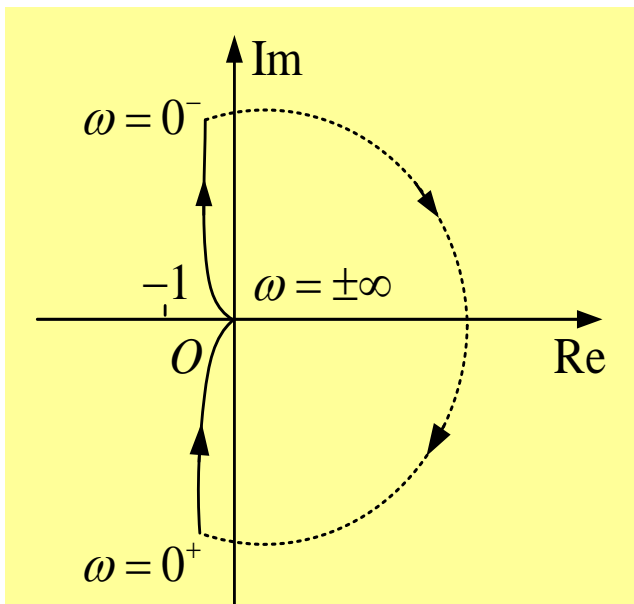
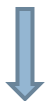
第七讲 Nyquist稳定性判据的应用

Nyquist稳定性判据可以由开环频率特性判定闭环系统稳定性，也可以从Nyquist曲线图中研判有没有使系统稳定的办法，若有，通过选择控制器，改善开环频率特性，进而提升闭环系统响应性能。

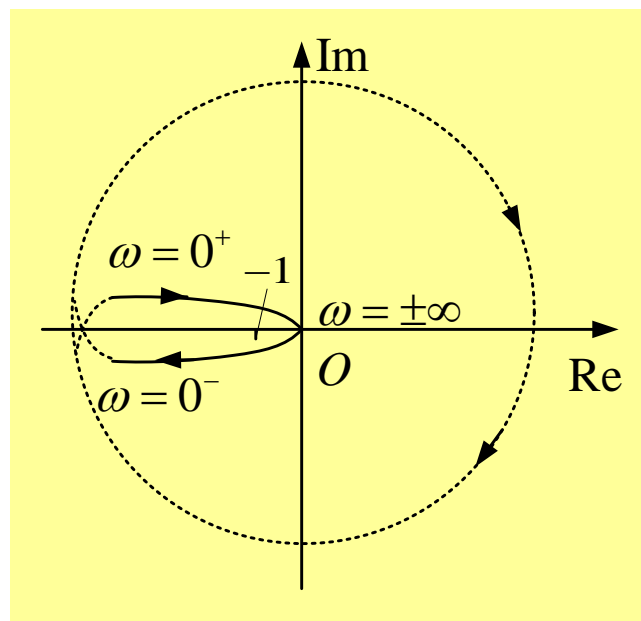
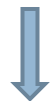
例题1：判定稳定性(默认含右小半圆Nyquist路径)

□ 已知两系统开环传递函数如下，分别判别对应闭环系统的稳定性。

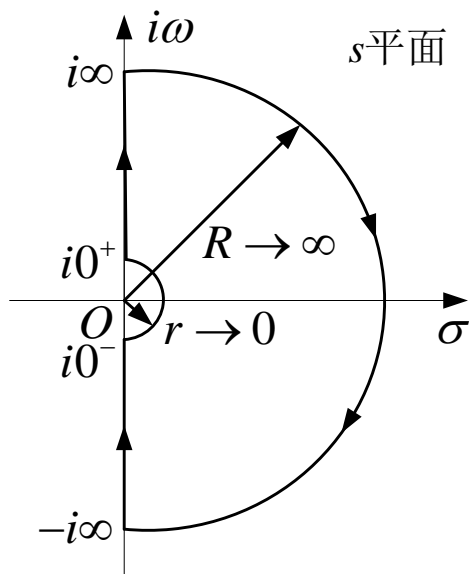
$$L(s) = \frac{K(s+1)^{10}}{s(2s+1)^{11}}$$



$$L(s) = \frac{K(s+1)^{10}}{s^2(2s+1)^{11}}$$



Nyquist路径



说明：

✓这两个系统均是高阶系统。很难由根轨迹或

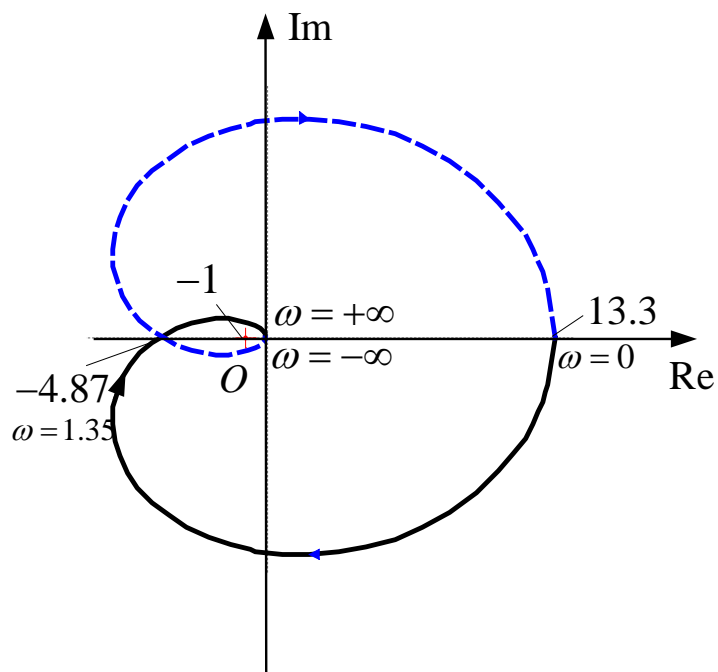
Routh判据判别高阶系统稳定性时，频率判别法却可以很容易地给出系统稳定判别，有助于我们研究高阶或非有理传递函数的系统。

✓开环含积分的Nyquist图画法要注意从 $\omega=0^-$ 变化到 $\omega=0^+$ 时无穷大圆弧走向及环绕临界点的方向。

例题2：开环稳定，闭环不稳定，改善定性说明

- 设系统开环传递函数如下，试用Nyquist判据判定 $K_1=10$ 时闭环系统的稳定性。 K_1 取何值是曲线恰好通过临界点 $(-1, j0)$? 可以通过增加开环零点(比例微分控制)或串接一个滞后校正环节 $(\tau s+1)/(Ts+1), T \gg \tau > 1$ 使闭环系统稳定?

$$L(s) = \frac{K_1(s+4)}{(s+1)(s+3)(s^2+s+1)}$$



- (1) $K_1=10$ 时按步骤画Nyquist曲线;
- (2) 判定稳定性: $N=P+w_n=0+2=2$;
- (3) 注意到的 K_1 变化并不影响相频特性, 只影响幅频特性且成正比例变化, 于是曲线恰好通过临界点时, $K_1=2.05$
$$\frac{K_1}{10} = \frac{1}{4.87} \Rightarrow K_1 = 2.05$$
- (4) 保持 K_1 不变, 增加开环零点可以使 $L(s)$ 的Nyquist曲线不穿越负实轴或在临界点右侧穿越负实轴, 可以增加相角裕度和增益裕度
- (5) 保持 K_1 不变, 也可以串接一个滞后校正环节, 使 ω_{180° 处的开环频率特性 $|L(i\omega_{180^\circ})| < 1$

例题3：开环不稳定，闭环稳定，控制受限

- 已知如下系统开环传递函数，试绘制Nyquist图并分析闭环系统的稳定性。

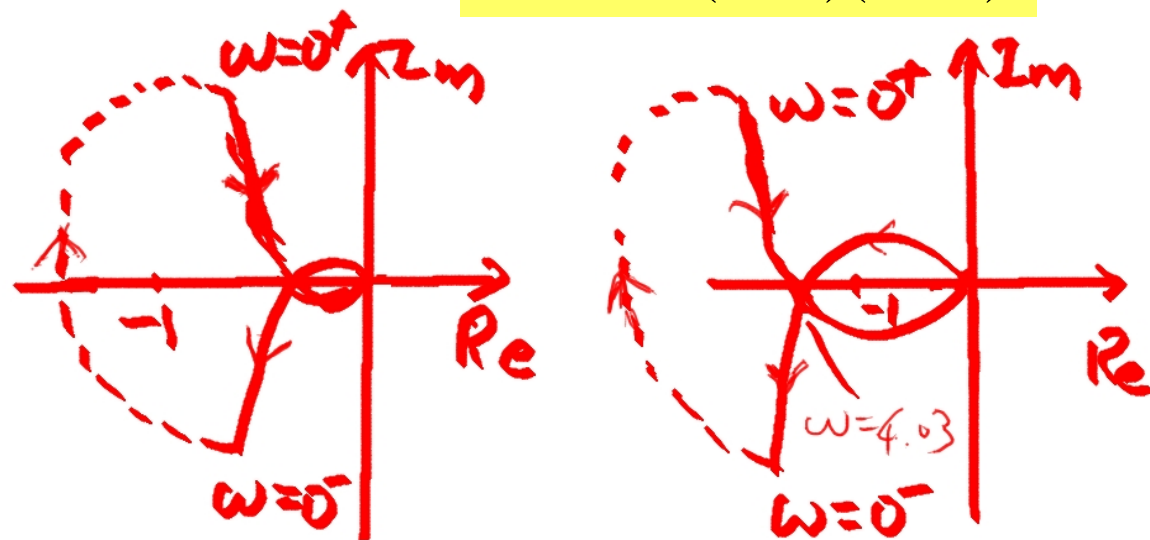
$$L(s) = \frac{K(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s-2)}$$

- (1) 先确定临界稳定时的 $K=2.6046$

- 方法：Routh判据、临界频率特性、根轨迹

- (2) 画出 $K < 2.6046$ 和 $K > 2.6046$ 的Nyquist图

- (3) 由Nyquist图判稳



- 结论：与没有RHP开环极点系统相比，含有RHP开环极点系统的闭环稳定条件显然不同，系统倾向于取高增益，这一点可能受控制装置的功率限制而不能得到满足。

例题4：开环带滞后的系统

□ 已知系统开环传递函数，求闭环稳定时的时滞时间常数取值范围。

增益与相角为： $|L(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$ $\varphi(\omega) = -\omega\tau - \arctan \omega$

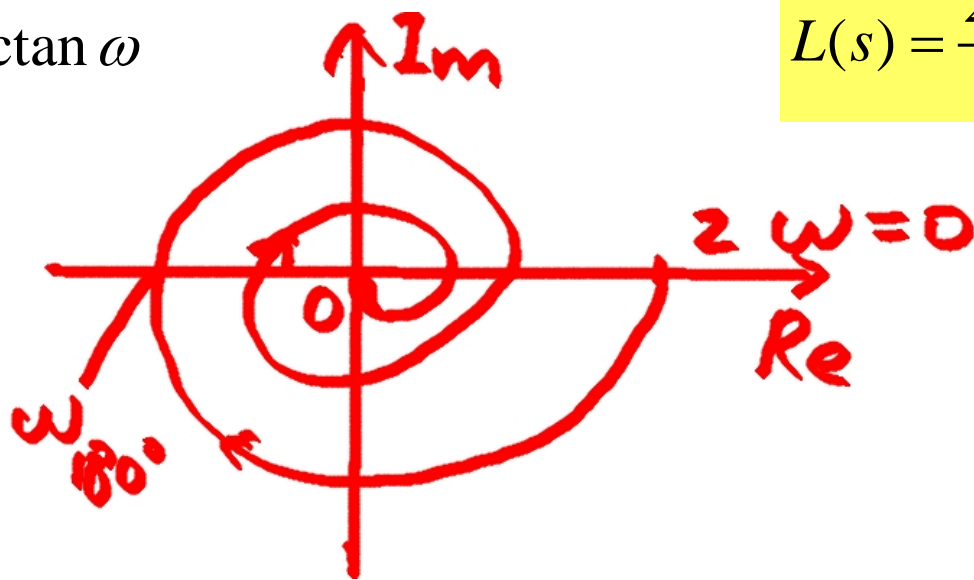
$$L(s) = \frac{2e^{-\tau s}}{s+1}$$

设系统的幅值交越频率为 ω_c ，相角交越频率为 ω_{180° ，使系统稳定，必有

$$|L(j\omega_c)| = 1 > |L(j\omega_{180^\circ})|$$

即 $\omega_c < \omega_{180^\circ}$ 。临界情况 $\omega_{180^\circ} = \omega_c$

$$\left. \begin{aligned} |L(j\omega_c)| = \frac{2}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{3} \\ \varphi(\omega_{180^\circ}) = -\omega_{180^\circ}\tau_c - \arctan \omega_{180^\circ} = -\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_c = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$



所以要使系统稳定，有

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{180^\circ}\tau - \arctan \omega_{180^\circ} = -\pi \\ \omega_c < \omega_{180^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau < \tau_c = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

这一讲就到这里！



第八讲 Doyle稳定鲁棒性

在实际工程应用中，为简化系统的分析和设计，常常忽略被控制对象的小时间常数环节(往往表现为高频寄生特性)，导致所使用期望标称模型与实际模型有偏差，所以研究模型扰动的稳定鲁棒性问题具有普遍意义。本讲利用Nyquist稳定性定理定量描述在过程模型存在扰动不确定性时，保证闭环系统稳定的条件。

定量描述模型扰动的稳定鲁棒性

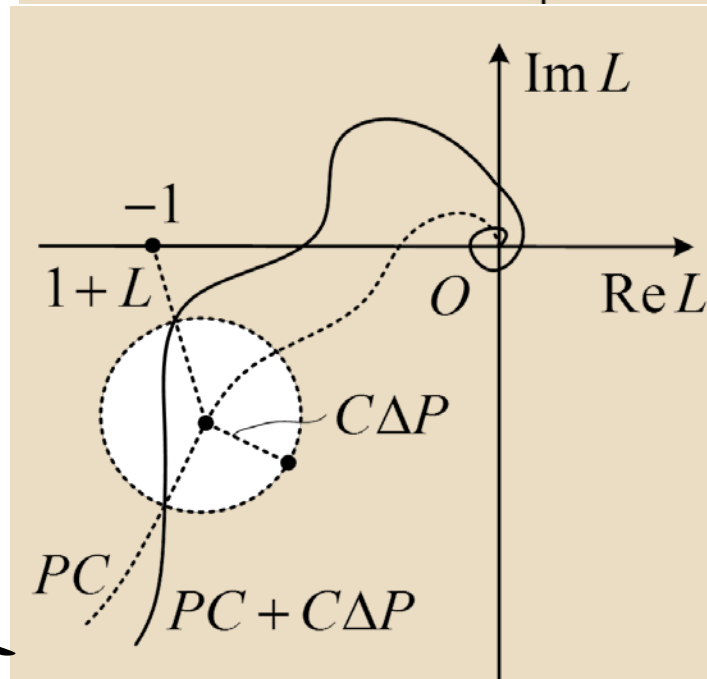
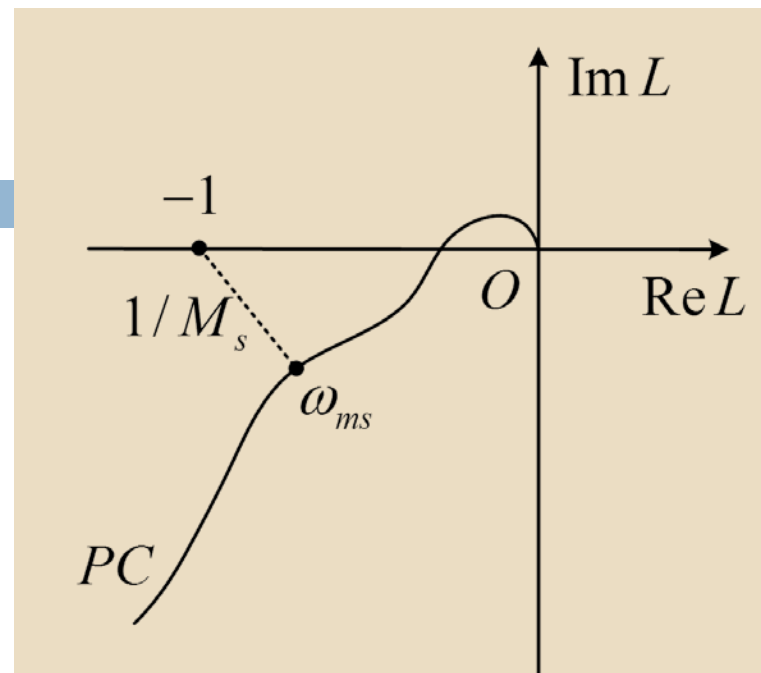
对象变化前与变化的Nyquist图

- 以Nyquist曲线离临界点(-1, i0)的距离确定模型扰动的边界，可用模裕度 $s_m = 1/M_s$ 表示
- 标称对象P与控制器C构成的反馈系统是稳定的，过程模型的有界摄动 ΔP ，其开环频率特性如图所示。只要过程变化不越过临界点-1，因为环绕临界点的圈数没变，所以系统保持闭环稳定。

$$|C\Delta P| < |1+L| = |1+PC| \Rightarrow |\Delta P| < \left| \frac{1+PC}{C} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\Delta P}{P} \right| < \left| \frac{1+PC}{PC} \right|$$

$$\left| \frac{\Delta P(i\omega)}{P(i\omega)} \right| < \left| \frac{1+P(i\omega)C(i\omega)}{P(i\omega)C(i\omega)} \right| = \left| \frac{1}{T(i\omega)} \right|, \omega \in \mathbf{R}$$

表明：余灵敏度函数幅值越小，所允许模型摄动越大



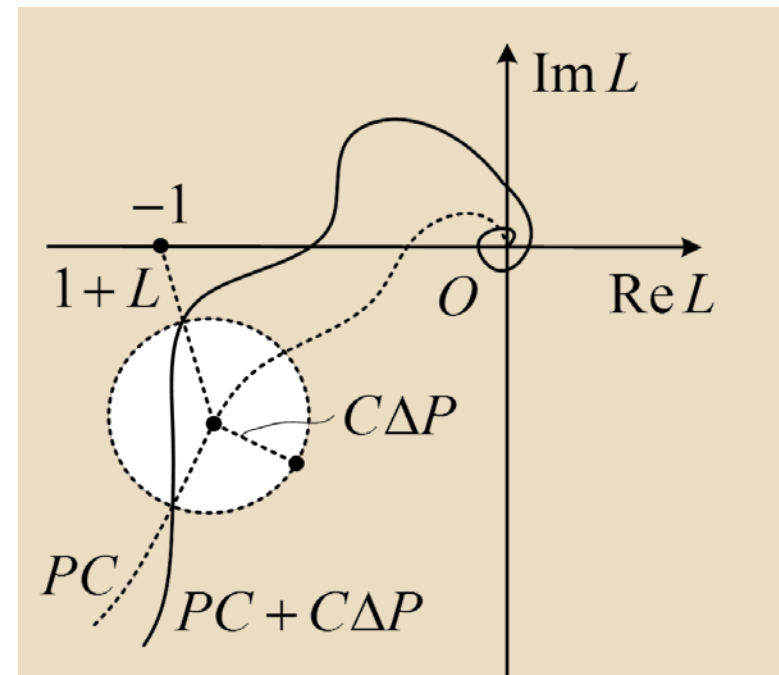
Doyle稳定鲁棒性判据

- 定理（Doyle稳定鲁棒性判据1979）：假定上页左图所示的闭环系统在过程为标称模型时是稳定的，模型摄动 ΔP 不改变开环系统的RHP极点数，若

$$\left| \frac{\Delta P(i\omega)}{P(i\omega)} \right| < \frac{1}{|T(i\omega)|}, \omega \in \mathbf{R}$$

P 和 T 为标称过程传递函数和标称余灵敏度函数，则当过程模型受扰为 $(P + \Delta P)$ 时闭环系统仍保持稳定。

说明：一般使用简单低阶模型近似复杂高阶系统模型，通过选择合适的控制器 C ，使相关频段上倒灵敏度函数的幅值远大于过程模型的相对变化，就可以保证系统具有所需的鲁棒性。



这一讲就到这里！



第九讲 典型环节Bode图

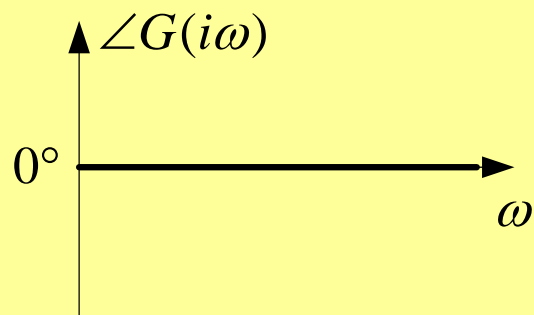
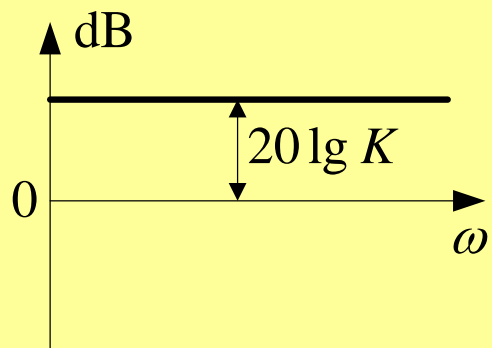
实际的物理系统都是因果系统，其开环频率特性都是低频段的幅值大，而高频段的幅值小，使用Nyquist图进行定量估算系统的性能不方便。Bode图可以弥补这一不便。本节给出典型环节的Bode图。

典型环节的Bode图-比例、微分、积分

$$G(s) = K$$

$$20\lg |G(i\omega)| = 20\lg K$$

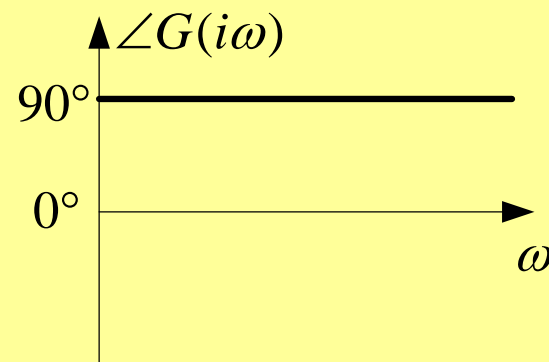
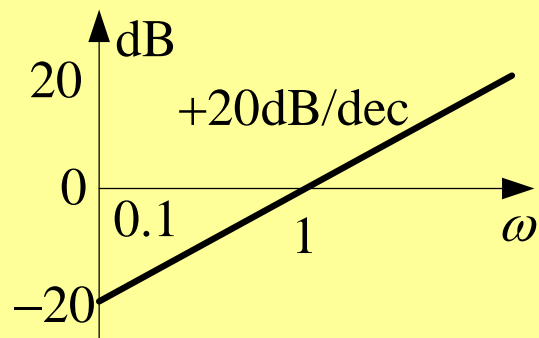
$$\angle G(i\omega) = 0^\circ$$



$$G(s) = s$$

$$20\lg |G(i\omega)| = 20\lg \omega$$

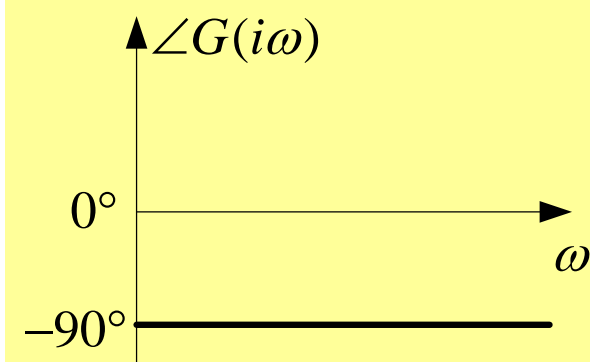
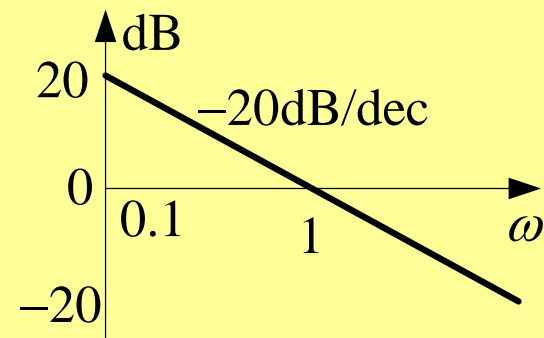
$$\angle G(i\omega) = 90^\circ$$



$$G(s) = 1/s$$

$$20\lg |G(i\omega)| = -20\lg \omega$$

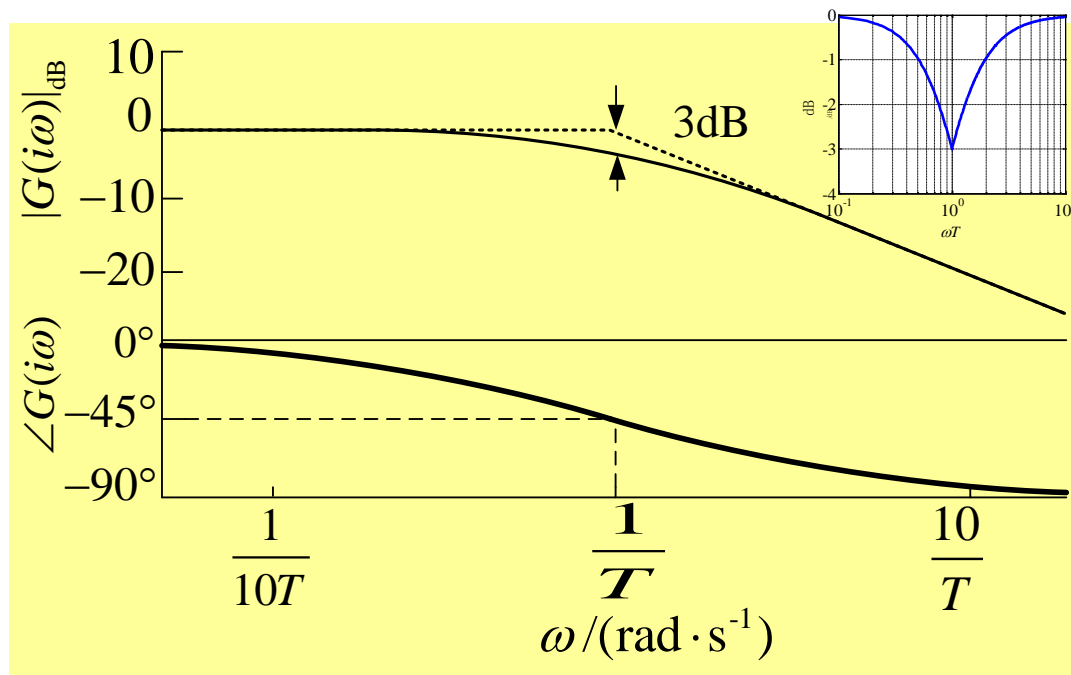
$$\angle G(i\omega) = -90^\circ$$



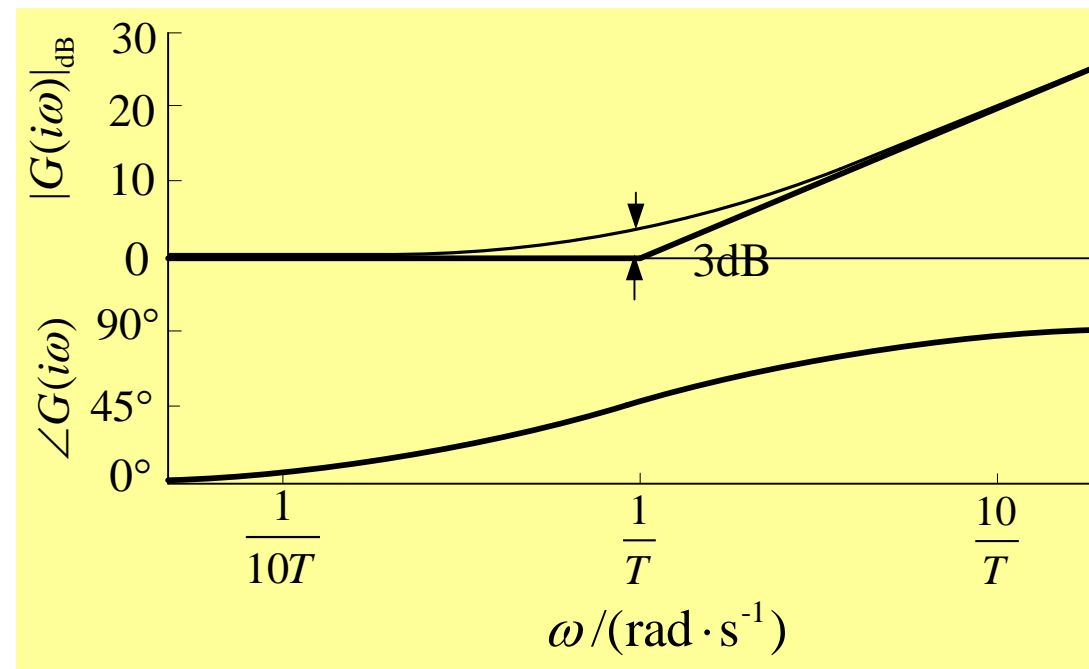
关于
0dB
线对
称；
关于
0°
线对
称

典型环节的Bode图-一阶惯性、一阶微分

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad 20\lg |G(i\omega)| = -10\lg[1 + (\omega T)^2] \\ \angle G(i\omega) = -\arctan \omega T$$



$$G(s) = Ts + 1 \quad 20\lg |G(i\omega)| = 10\lg[1 + (\omega T)^2] \\ \angle G(i\omega) = \arctan \omega T$$



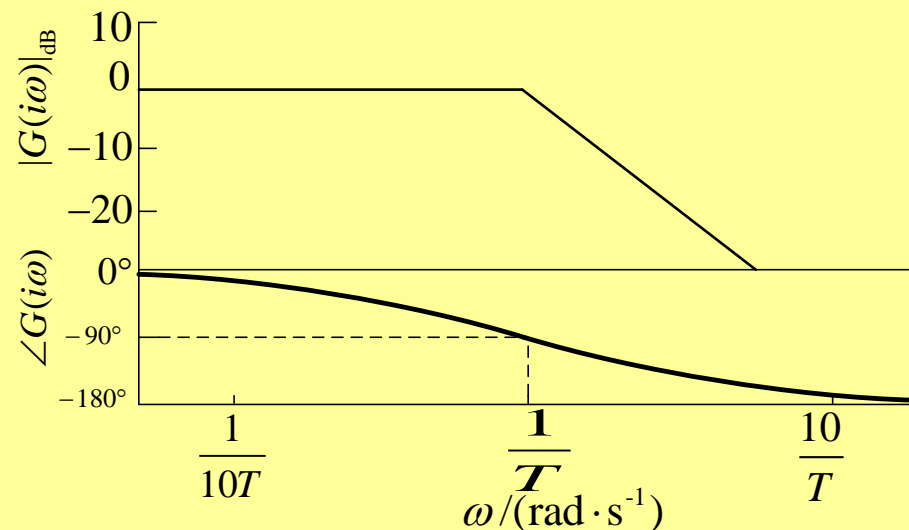
关于0dB线对称
关于0°线对称

典型环节的Bode图-二阶系统

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \quad 0 < \zeta < 1$$

$$20\lg |G(i\omega)| = -10\lg \left\{ \left[1 - (\omega / \omega_n)^2 \right]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2 \right\}$$

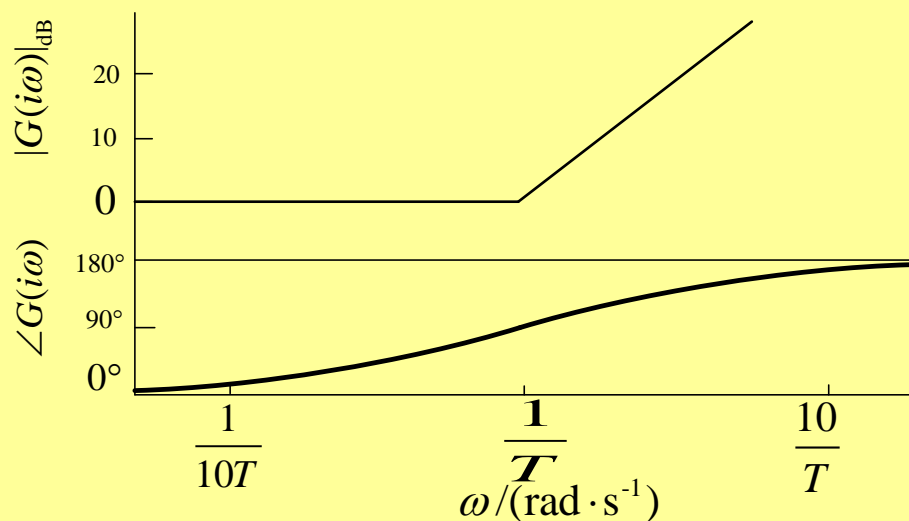
$$\angle G(i\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega < \omega_n \\ -180^\circ - \arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega > \omega_n \end{cases}$$



$$G(s) = (Ts)^2 + 2\zeta Ts + 1 = 1 - (\omega / \omega_n)^2 + i2\zeta\omega / \omega_n$$

$$20\lg |G(i\omega)| = 10\lg \left\{ \left[1 - (\omega / \omega_n)^2 \right]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2 \right\}$$

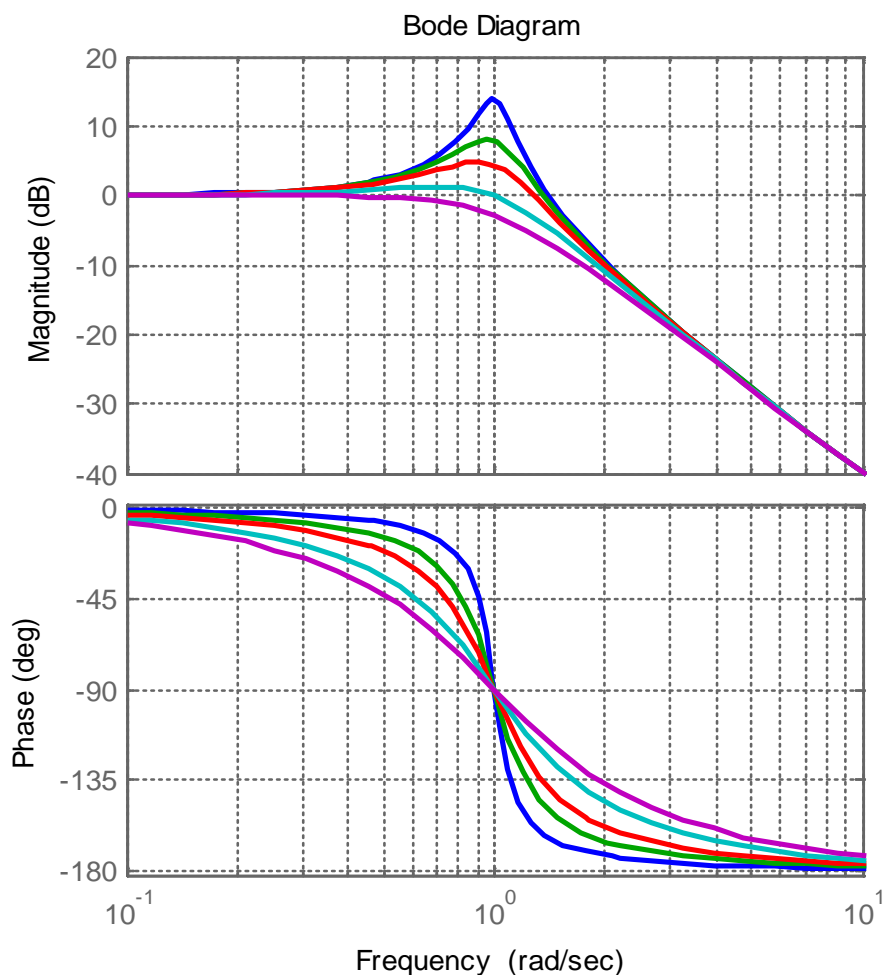
$$\angle G(i\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega < \omega_n \\ 180^\circ + \arctan \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}, & \omega > \omega_n \end{cases}$$



关于0°线对称

二阶振荡环节的谐振现象

□ ζ 取不同的值可以得到如下曲线:

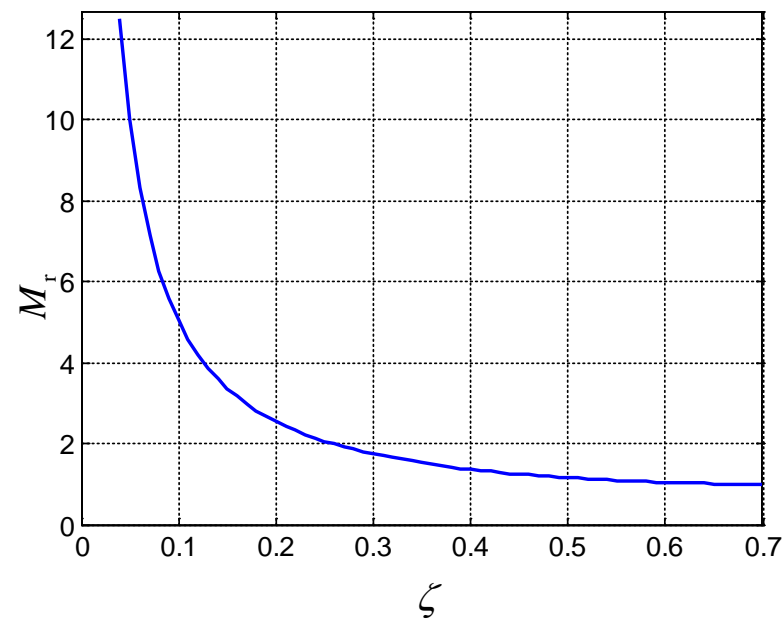


阻尼系数较小时，典型二阶系统的频率响应会出现谐振现象，**谐振频率和**谐振**峰值**为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$$



这一讲就到这里！



第十讲 绘制Bode图的一般方法与稳定性

复杂反馈系统的开环传递函数可以等效成若干个典型环节串联，只要能做出这些典型环节的幅频和相频曲线，将它们分别进行代数求和，就可以得到系统的开环Bode图。本节，采用渐近线描图法绘制近似开环系统的Bode图，由此可以快速估算闭环系统的稳定性能：绝对稳定性与相对稳定性。相对稳定性由稳定裕度表征，包括相角裕度、幅值裕度和模裕度。

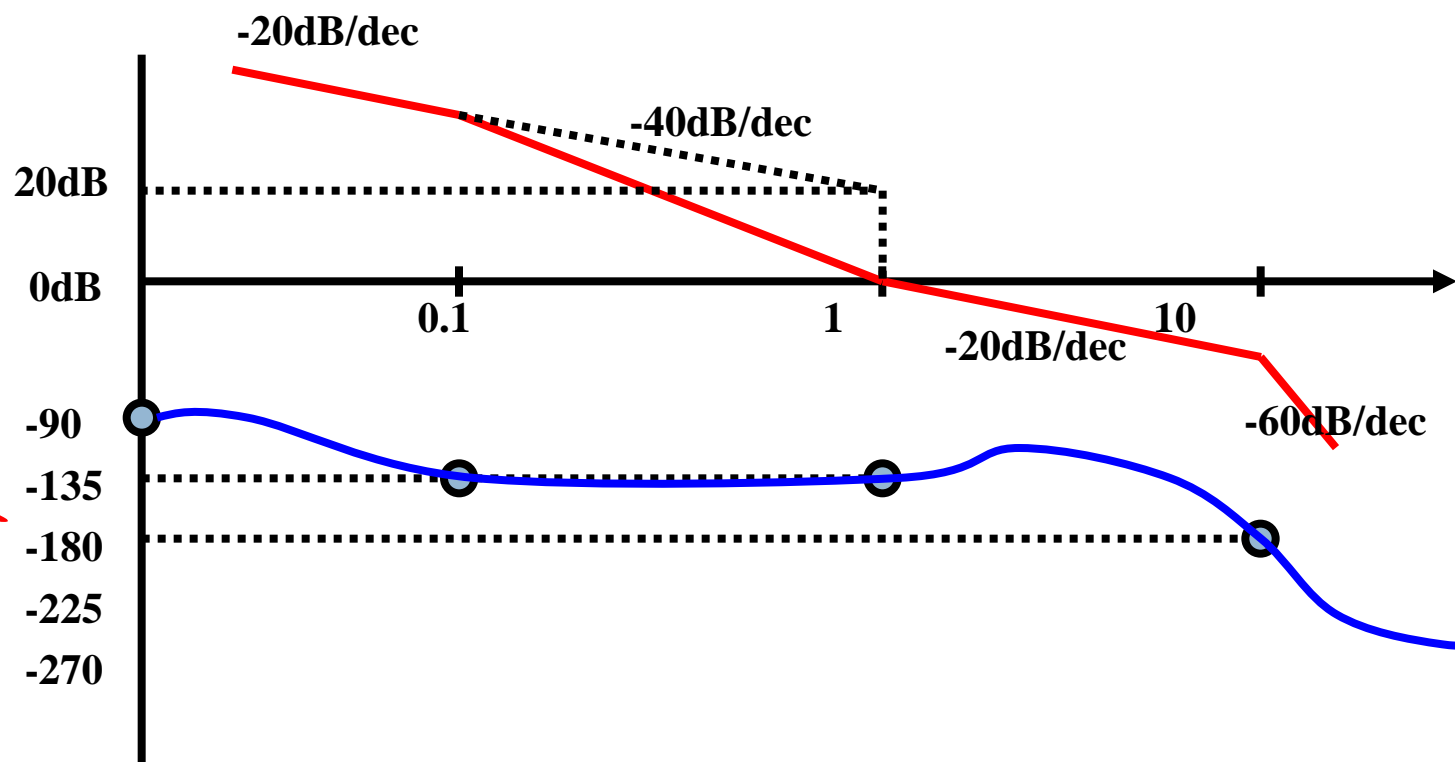
渐近线描图法

渐近线描图法步骤:

- (1) 将传递函数写成时间常数形式，确定增益 K 。将各典型环节的转折频率按由小到大的顺序标在频率轴上（横轴定位）。
- (2) 设传递函数有 ν 个积分环节，则幅频特性起始段斜率为 $-\nu \times 20\text{dB/dec}$ ，经过或指向点 $(1, 20\lg K)$ （纵轴定位）或 $(K^{1/\nu}, 0)$ 。
($20\lg(K/\omega^\nu)=0$)
- (3) 沿频率增大的方向 **每遇到一个转折频率** 就增或减一次斜率。
- (4) 大致确定每个转折频率上的相位，连接成为相频特性曲线。

$$L(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+0.1)(s^2+10s+100)}$$

$$\Rightarrow L(s) = \frac{10(s+1)}{s(10s+1)(0.1^2s^2+2\times0.5\times0.1s+1)}$$



Bode图与Nyquist图的对应关系

□ Bode图是直角坐标图，Nyquist图是极坐标图，它们的对应关系：

- 量值上有直接对应关系
- 稳定性能指标也有对应关系
- 考察剪切频率以内：

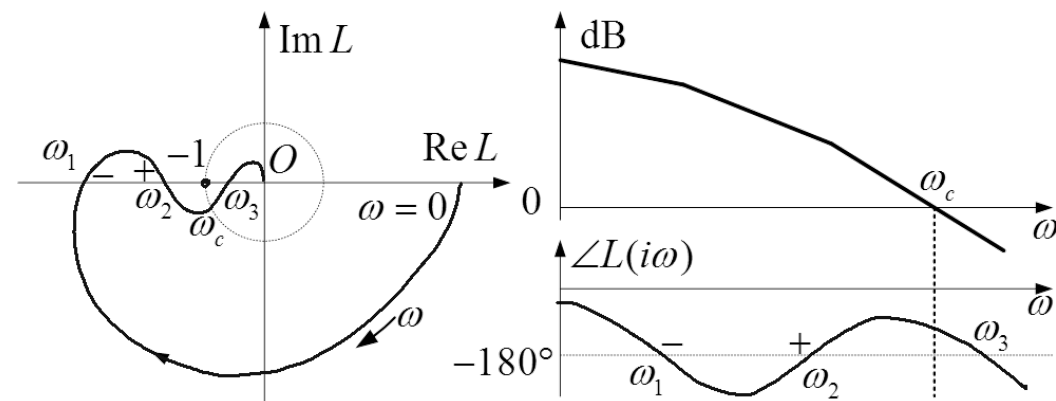
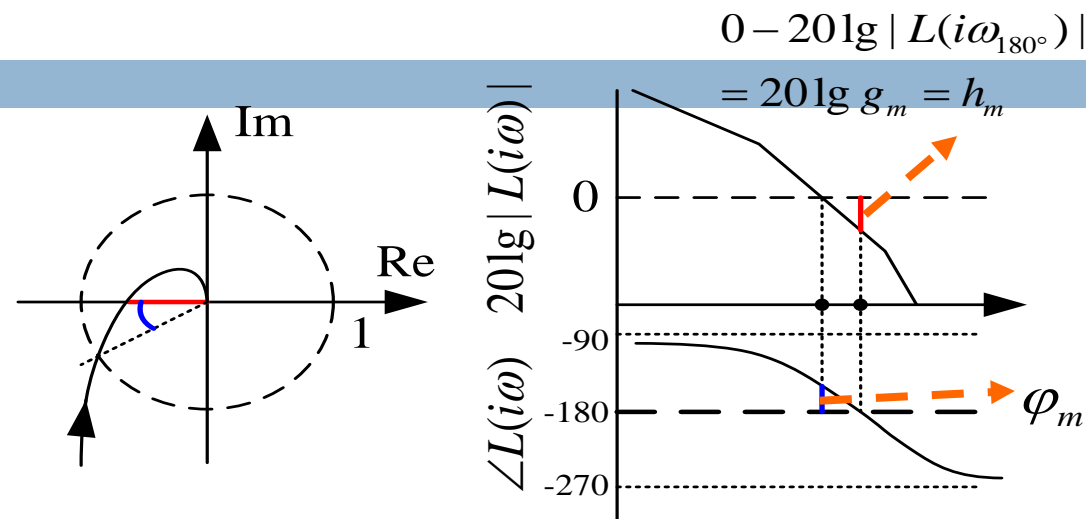
■ 逆时针包围 = 正穿越（相角增加）

■ N图：自下而上穿越负实轴。B图：自上而下穿越-180°线。

■ 顺时针包围 = 负穿越（相角减小）

■ N图：自上而下穿越负实轴。B图：自下而上穿越-180°线。

□ 顺时针包围 $(-1, i0)$ 的次数
= (负穿越次数 - 正穿越次数) $\times 2$



注：(1) 仅计算 $\omega < \omega_c$ 时的穿越次数。

(2) 规定由 -180° 开始的开环相频特性在 ω 由 0 变化到 $+\infty$ ，并当 $\omega \rightarrow \infty$ 时相角为 -90° 或 -270°，对 -180° 线的正穿越次数为 1/2 或负穿越次数为 -1/2。

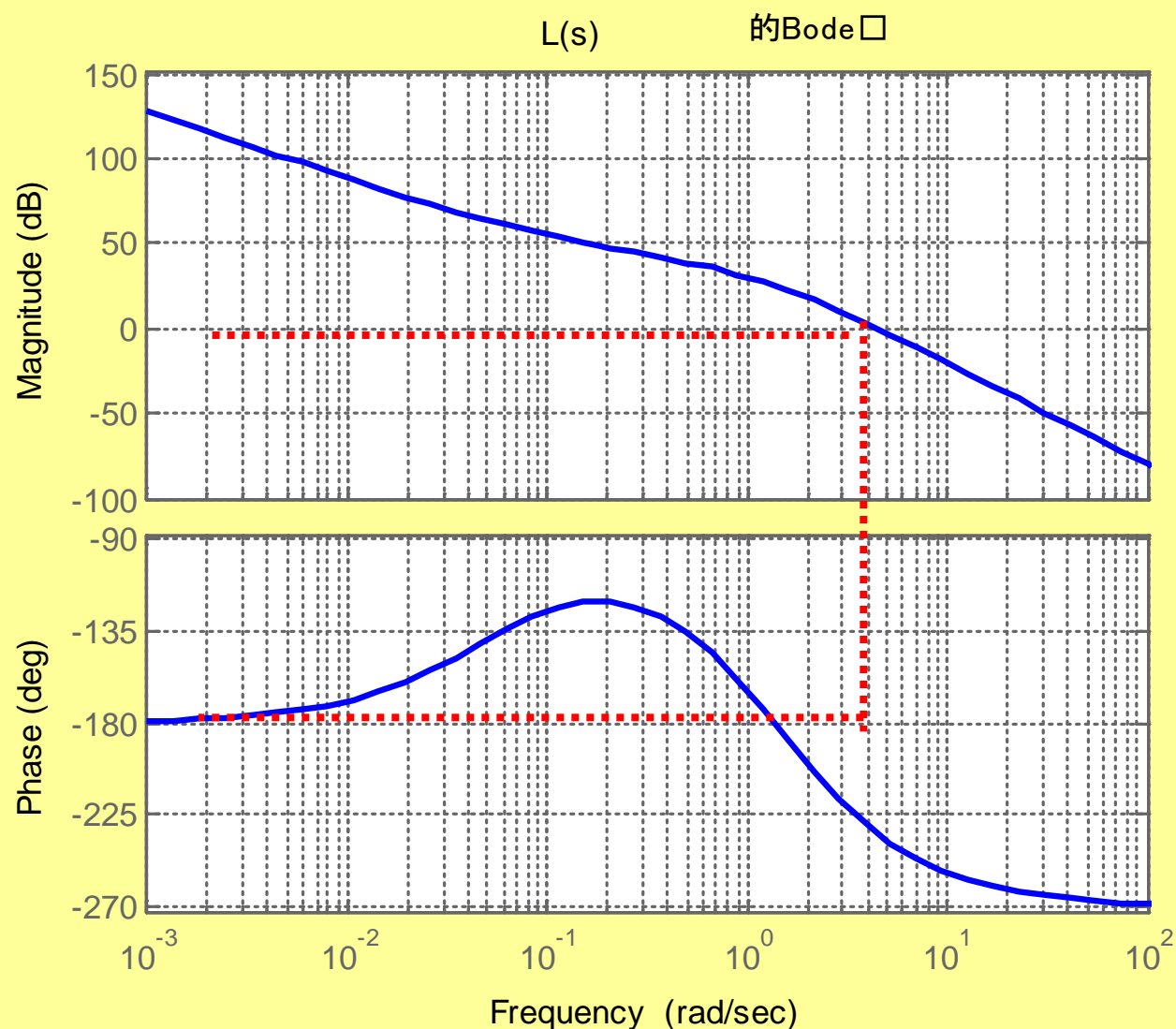
Bode图判稳

□ 判据：闭环系统的RHP极点数为 $N = P + 2(C^- - C^+)$

□ 例：已知开环传函数如下，判其闭环系统是否稳定。

$$L(s) = \frac{100(s + 0.05)}{s^2(s + 1)(s + 2)}$$

- $P = 0$
- $W_n = 2(1 - 0) = 2$
- $N = 2$
- 不稳定，且有2个RHP闭环极点



由Bode图计算稳定裕度

□ 相角裕度

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(i\omega_c)$$

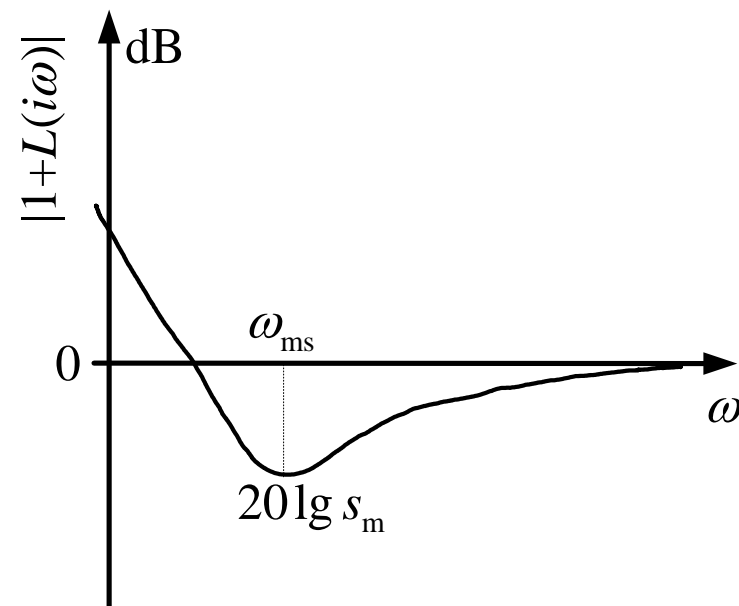
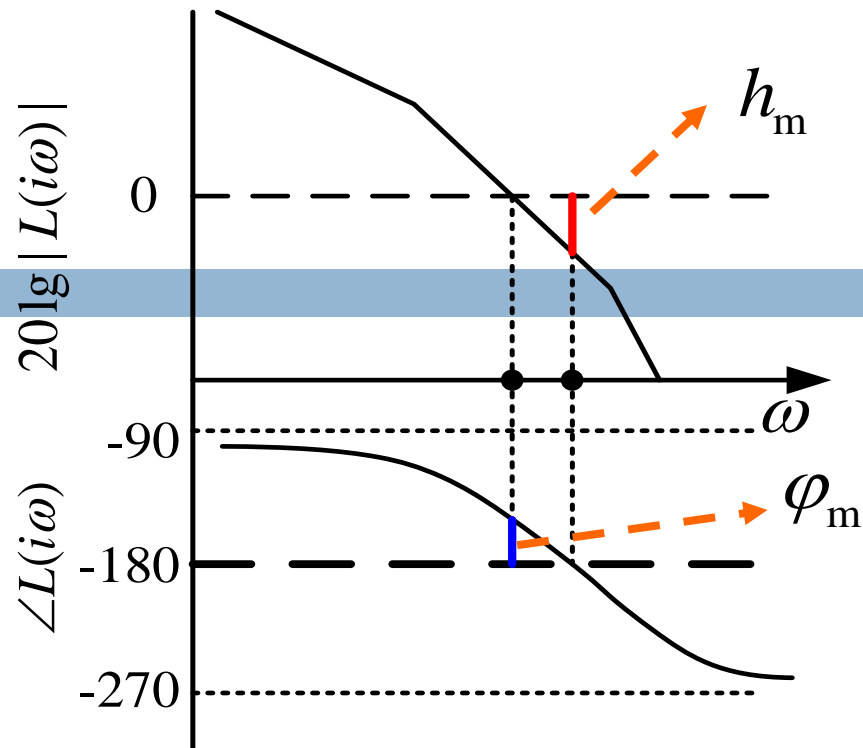
□ 幅值裕度

$$h_m = 20\lg g_m = 0 - 20\lg |L(i\omega_{180^\circ})|$$

对于闭环稳定的系统(其开环传递函数的形式如何), **相角裕度 φ_m 应是正值。**

□ 模裕度

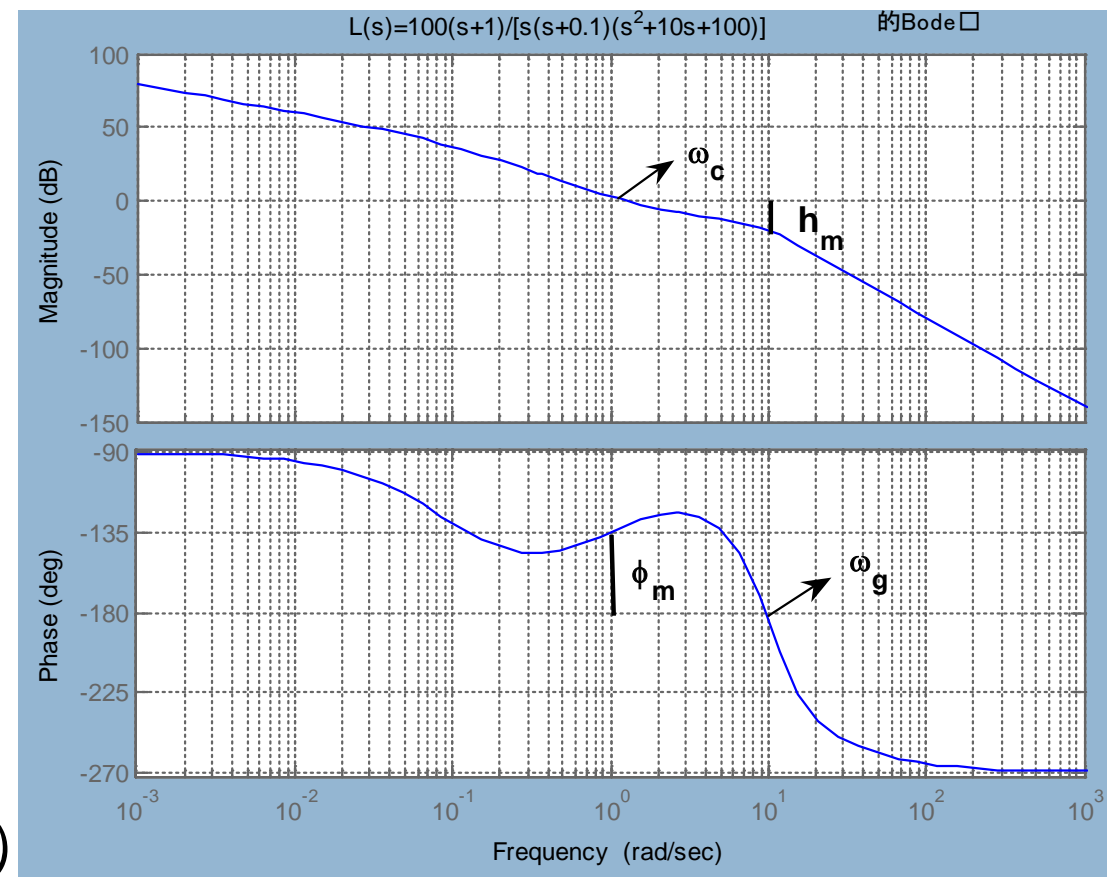
$$l_m = 20\lg s_m = 20\lg |1 + L(i\omega_{ms})|$$



MATLAB作开环系统的Bode图并计算裕度

$$L(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+0.1)(s^2+10s+100)}$$

- num=100*[1 1];
- den= conv([1 0.1 0], [1 10 100]) ;
- L=tf(num,den);
- bode (L); grid;
- title(' L(s) 的Bode图')
- [Gainm,Phim,Omegag,Omegac]=margin(L)



裕度的近似计算

□ 为方便快捷估算相对稳定性，引入近似计算的方法：

□ (1) 将传递函数 $L(s)$ 中各典型环节转折频率按照由小到大的顺序排列。

□ (2) 估计 ω_c 的范围，并根据估计值简化 $L(s)$ 的各典型环节：

■ 对于转折频率小于 ω_c 的环节，仅保留高次项。如 $Ts+1 \approx Ts$ ， $T^2s^2+2\zeta Ts+1 \approx T^2s^2$ 。

■ 对于转折频率大于 ω_c 的环节，仅保留常数项。如 $Ts+1 \approx 1$ ， $T^2s^2+2\zeta Ts+1 \approx 1$ 。

□ (3) 令简化的 $|L(i\omega_c)|=1$ ，求解 ω_c 。

□ (4) 若 ω_c 不在(2)估计的范围内，重复(2)。

□ (5) 计算 $\varphi_m = 180^\circ + \angle L(i\omega_c)$ 。

□ 注：近似计算的核心是求 ω_c ，实际上可以在近似Bode图中利用三角形相似定理求解交越频率 ω_c 。

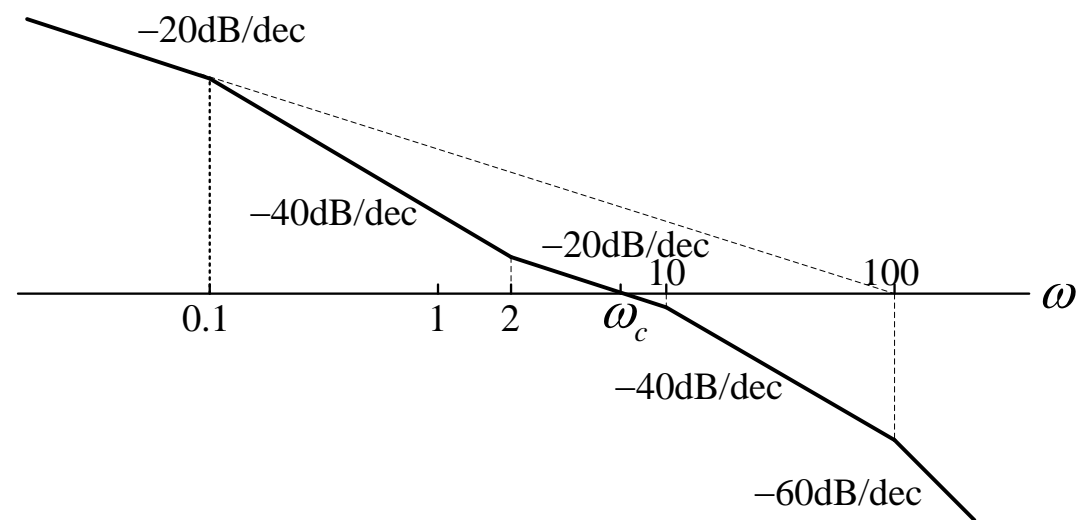
例：裕度的近似计算

- 已知开环传递函数，求系统裕度。

$$L(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

- (1) 时间常数按顺序为10, 0.5, 0.1, 0.01，相应的转折频率0.1, 2, 10, 100。
- (2) 设 $0.1 < \omega_c < 2$ ，近似的 $L(s) = 100/(s \cdot 10s)$
- (3) 令简化的 $|L(i\omega_c)| = 10/\omega^2 = 1$ ，得 $\omega_c = 3.2$ 。
- (4) ω_c 不在(2)估计的范围内，重复(2)。
- (2)' 设 $2 < \omega_c < 10$ ，近似的 $L(s) = 100 \cdot 0.5s/(s \cdot 10s)$
- (3)' 令简化的 $|L(i\omega_c)| = 5/\omega = 1$ ，得 $\omega_c = 5$ 。
- (5) $\varphi_m = 180^\circ + \angle L(i\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 50 + \arctan 2.5 - \arctan 0.5 - \arctan 0.05 = 40^\circ$

- 实际上可以在Bode中近似计算 ω_c 中----三角法



$$20 \lg \frac{100}{0.1} = 40 \lg \frac{2}{0.1} + 20 \lg \frac{\omega_c}{2} \Rightarrow \omega_c = 5$$

课外练习

- 由开环传函数画Bode图并分析稳定性，近似计算稳定裕度。能采用Routh判据或根轨迹方法判定稳定性吗？

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.001s+1)^{100}}$$

$$\omega_c = 1\text{rad/s},$$

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan 1 - 100 \arctan 0.001 = -140.7^\circ,$$

$$\varphi_m = 180 + \varphi(\omega_c) = 39.3^\circ$$

这一讲就到这里！



第十一讲 Bode幅相关系与最小相位系统

绘制相频特性曲线比较麻烦，能否由对数幅频特性完全表征系统的频率特性？

对于这个问题，Bode的研究发现，对于没有开环RHP零极点的系统(最小相位系统)，相频特性完全由幅频特性唯一确定。

另外，最小相位系统与非最小相位系统在稳定性方面，对裕度的要求也有一些不同之处。

Bode幅相关系

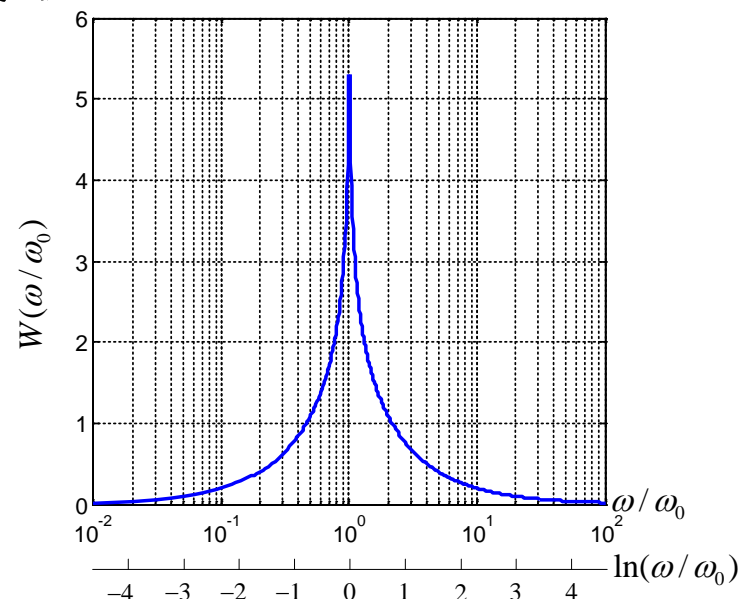
- Bode幅关系：对于开环没有RHP零极点的系统（最小相位系统），相角为对数幅频曲线的斜率的加权平均值。

$$\arg L(i\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d[\ln |L(i\omega)|]}{d[\ln \omega]} \ln \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right| d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d[\ln |L(i\omega)|]}{d[\ln \omega]} \ln \left| \frac{\omega / \omega_0 + 1}{\omega / \omega_0 - 1} \right| d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d[\ln |L(i\omega)|]}{d[\ln \omega]} W(\omega / \omega_0) d\omega$$

$$\int_0^\infty W(\omega / \omega_0) d\omega = \frac{\pi^2}{2}$$



若对数幅频曲线在点 ω_0 附近相当宽的频段内的斜率为常数，则

$$\arg L(i\omega) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d[\ln |L(i\omega)|]}{d[\ln \omega]} = \frac{\pi}{2} \frac{d[\lg |L(i\omega)|]}{d[\lg \omega]}$$

例子：比例情况
微分情况
积分情况

最小相位系统开环传函数的最小相位性直观示例

- 例子： $G(s) = e^{-\tau s} \rightarrow$ 相角？
- $G(s) = (1 - \tau s)/(1 + \tau s) \rightarrow$ 相角？
- $G(s) = (\tau s + 1)/(\tau s - 1) \rightarrow$ 相角？ 开环不稳定
- $G(s) = 1 \rightarrow$ 相角？
- 非最小相位系统指不满足最小相位系统定义的系统。
- 非最小相位存在于倒立摆、飞机、汽车系统中
- 纯滞后 $e^{-\tau s}$ 也是非最小相位，广泛存在于

哪一个相角最小？

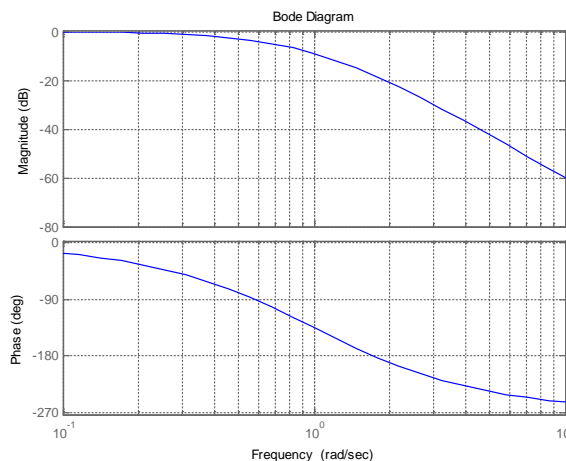
- **最小相位系统** 指没有开环RHP零、极点的系统。
 - 在具有相同幅频特性情况下，其相位滞后是最小的。

- 温度上升过程
- 网络数据传输
- 管道液位传送
- 管道气体传送
- 固体传送

稳定性并不依据 h_m 与 φ_m 的符号进行判定

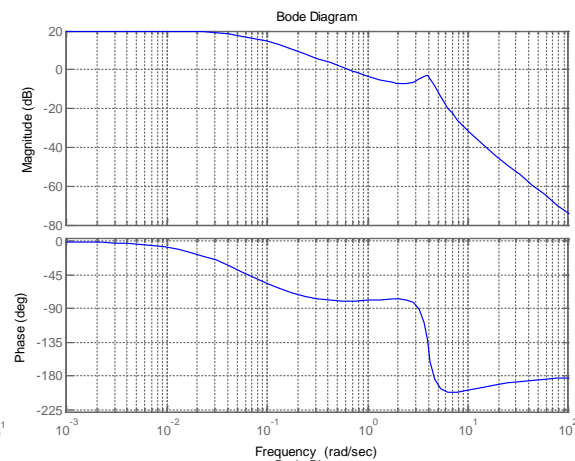
$$\frac{1}{(s+1)^3}$$

$h_m = 0, \varphi_m > 0$ **sta.**



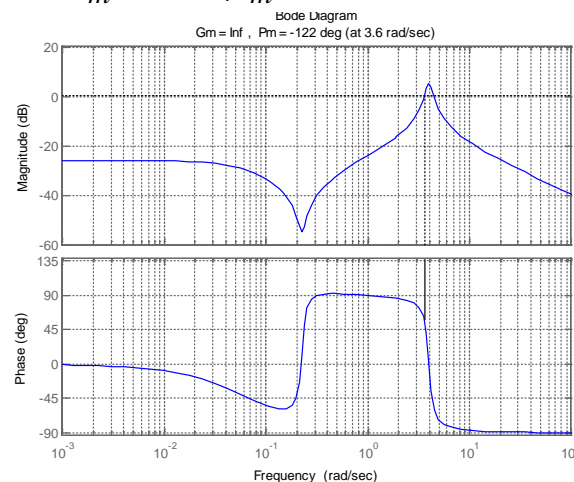
$$\frac{s+5}{0.5s^3 + 0.6s^2 + 8s + 0.5}$$

$h_m > 0, \varphi_m > 0$ **sta.**



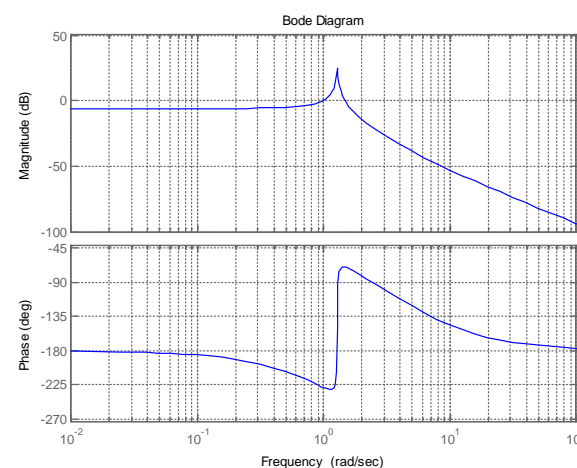
$$\frac{s^2 + 0.03s + 0.05}{s^3 + 0.6s^2 + 16s + 1}$$

$h_m > 0, \varphi_m < 0$ **sta.**



$$\frac{s-5}{5s^3 + 6s^2 + 8s + 10}$$

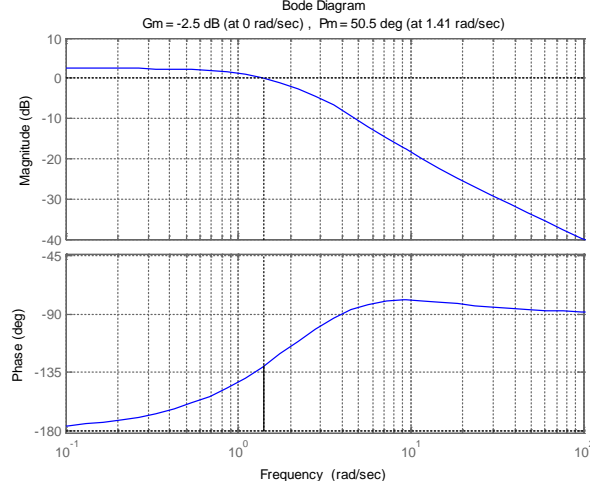
$h_m > 0, \varphi_m < 0$ **sta.**



$$\frac{s-8}{s^2 - 5s + 6}$$

$h_m < 0, \varphi_m > 0$

unsta.



对于最小相位系统和非最小相位系统，并不能依据 h_m 与 φ_m 的符号判定稳定性。

关于非最小相位与滞后 $e^{-\tau s}$ 的再解释

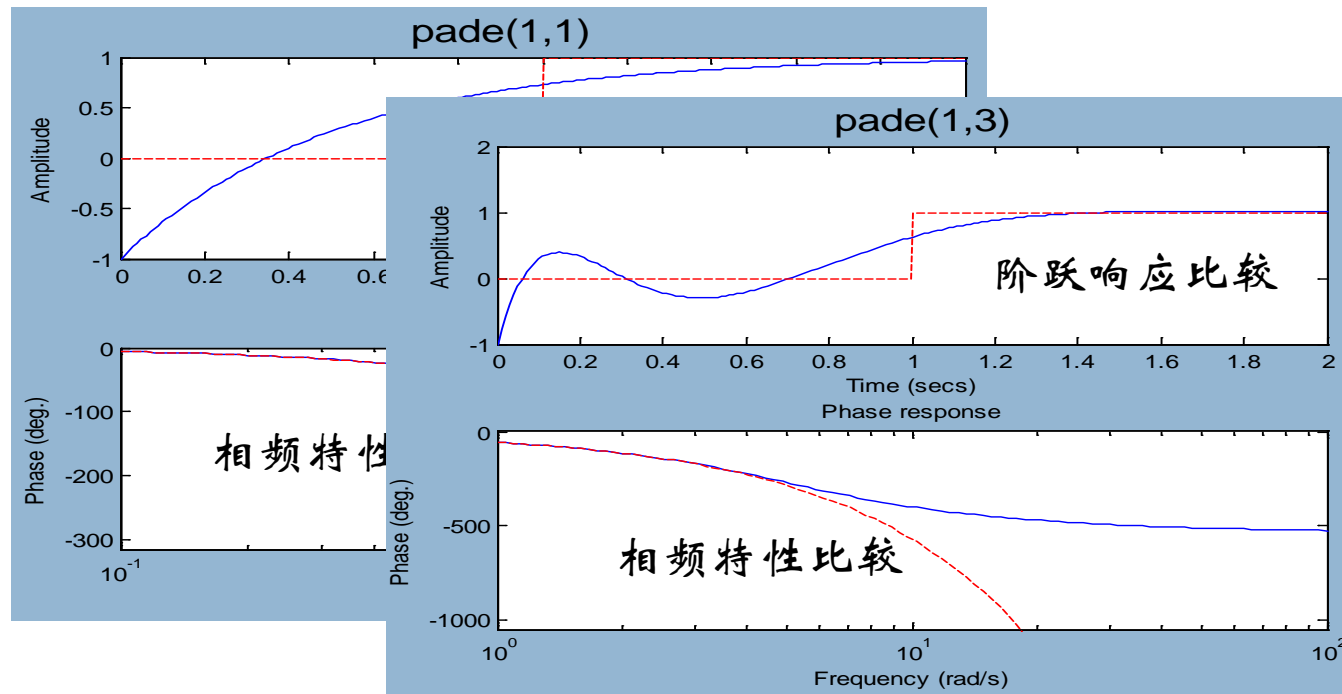
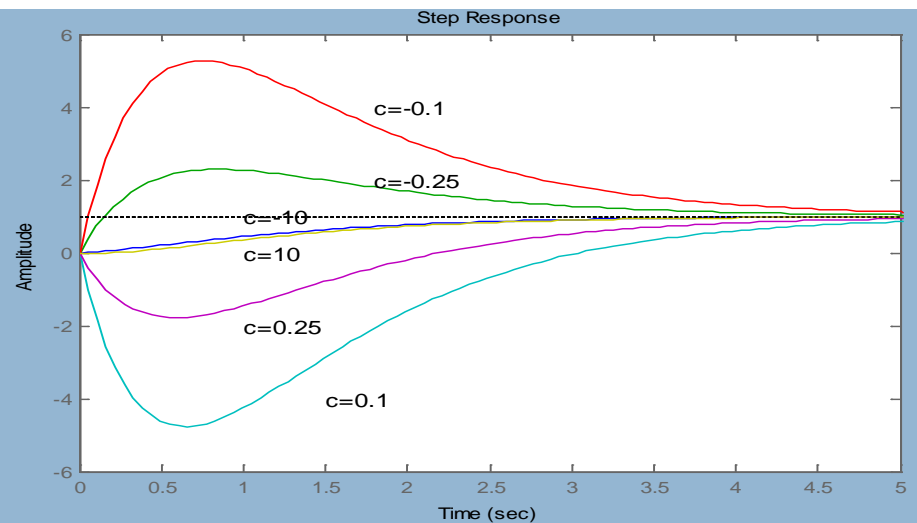
- 从滞后的近似可以看出滞后增加了RHP零点。

$$\text{Pade}(1,1) \quad e^{-\tau s} \approx \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s}$$

$$\text{Pade}(1,3) \quad e^{-\tau s} \approx \frac{-s^3 + 12s^2 - 60s + 120}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120}$$

- RHP零点对系统有滞后作用。对于稳定的非最小相位系统可能会出现欠调情况。

$$G(s) = \frac{-s + c}{c(s+1)(0.5s+1)}$$



滞后过程的特点

- 滞后过程的特点是：控制作用产生后，在滞后时间范围内，被控量完全没有响应，使得系统不能及时随被控制量进行调整以克服系统所受的扰动→较明显的超调量和需要较长的调节时间。
- 一般认为，纯滞后时间与过程的时间常数之比大于0.3s时，该过程是大滞后的。随此比值增加时，过程的相位滞后增加而使超调增大，在实际的生产过程中甚至会因为严重超调而出现聚爆、结焦等事故。
- 大滞后会降低整个控制系统的稳定性。
- 含有纯延迟的过程因较难控制的而一直备受关注，其难控制程度随着纯滞后时间与整个过程动态时间参数的比例增加而增加。

这一讲就到这里！

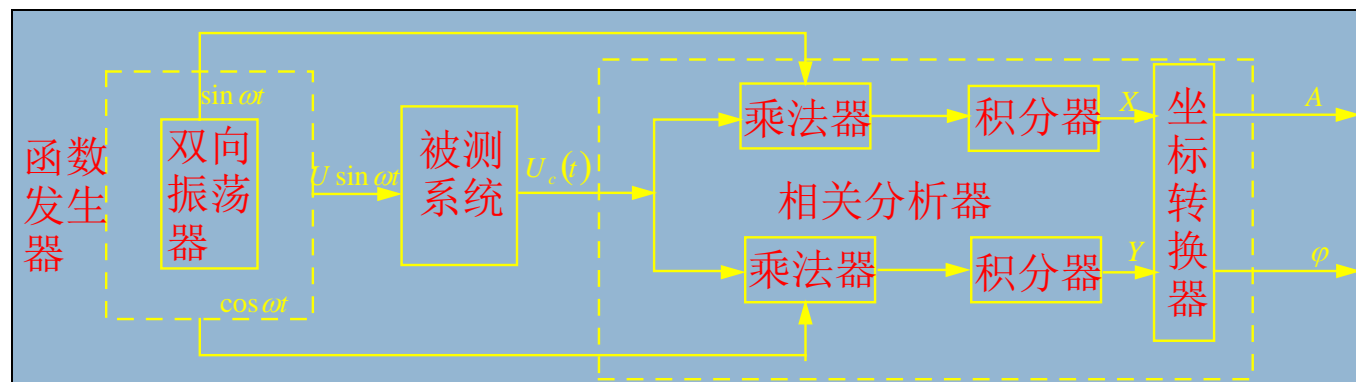


第十二讲 频率特性测试与辨识

频率响应实验是频域建模的物理基础。频率特性模型可以在不知道内部机理的情况下通过频率响应实验获得。

用正弦信号相关分析法测试频率特性

- 做频率响应实验时要求：必须采用规范的正弦波，即无谐波分量和畸变，频率范围一般为 $0.001\sim 1000\text{Hz}$ 。
 - ▣ 超低频信号（ 0.01Hz 以下）——用机械式正弦信号发生器
 - ▣ $0.01\sim 1000\text{Hz}$ ——用电子式信号发生器
- 相关分析法能从被测系统的输出信号中分检出正弦波的一次谐波，同时抑制直流分量、高次谐波和噪声。----测试计量及仪器学科



最小相位直接由幅频Bode图确定传递函数

例：测定某最小相位系统的频率特性曲线如下，确定其传递函数。

根据幅频特性曲线写出传递函数的数学模型（尾1标准型）；

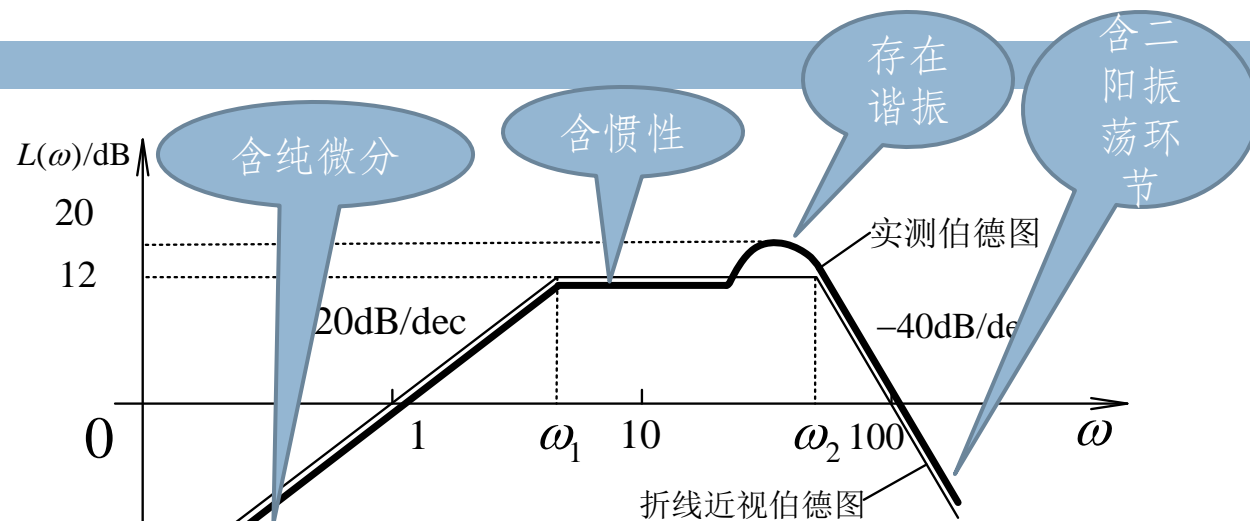
$$G(s) = \frac{Ks}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_2} + 1\right)}$$

低频段渐近线过点(1,0)，这可以求出K；

根据三角形法计算出转折频率；

根据谐振峰值求出振荡环节的阻尼比。

$$\left. \begin{aligned} 20\lg \frac{K}{\omega^v} &= 20\lg K - 20v\lg \omega \\ v &= -1, (1, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K = 1$$



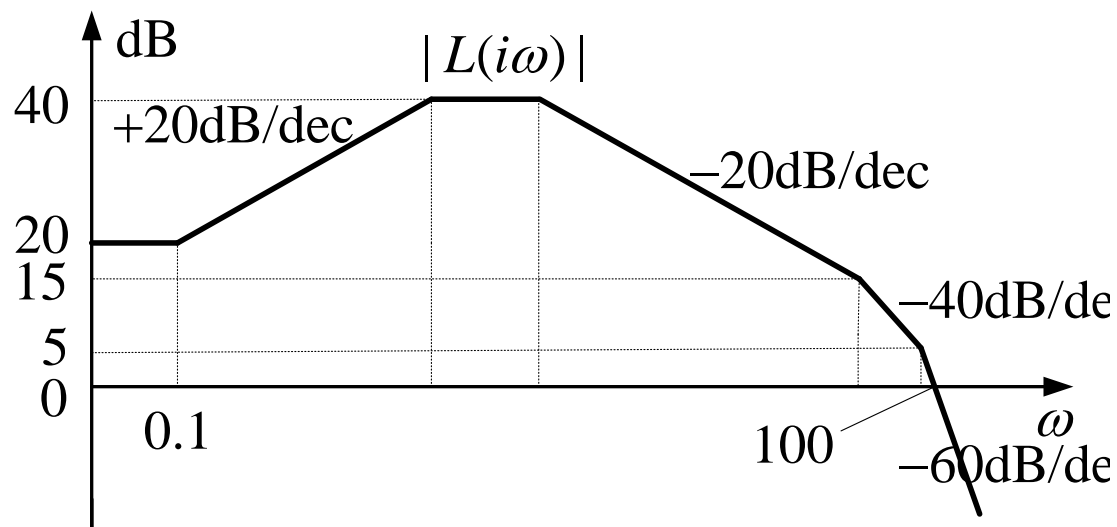
$$\frac{G(\omega_1) - G(1)}{\lg \omega_1 - \lg 1} = \frac{12}{\lg \omega_1} = 20 \Rightarrow \omega_1 = 3.98$$

$$\frac{G(100) - G(\omega_2)}{\lg 100 - \lg \omega_2} = \frac{-12}{\lg 100 - \lg \omega_2} = -40 \Rightarrow \omega_2 = 50.1$$

$$\left. \begin{aligned} 20\lg M_r &= 20 - 12 \\ 20\lg M_r &= 20\lg \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ 0 &< \zeta < 0.707 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \zeta = 0.2033$$

课外练习

- 已知某最小相位系统的开环对数幅频特性曲线如图所示，求传递函数，并画相频特性曲线，判稳定。



这一讲就到这里！



第十三讲 利用开环频率特性分析闭环系统性能

系统的开环频率特性中的频域指标对系统分析与设计有直接关系。开环频率特性中的低频段、中频段和高频段包含了闭环性能不同方面的信息，对它们的分析可以为有效的改善系统性能提供依据。

开环频率特性各段特征表征

□ 低频段----频率特性的起始部分

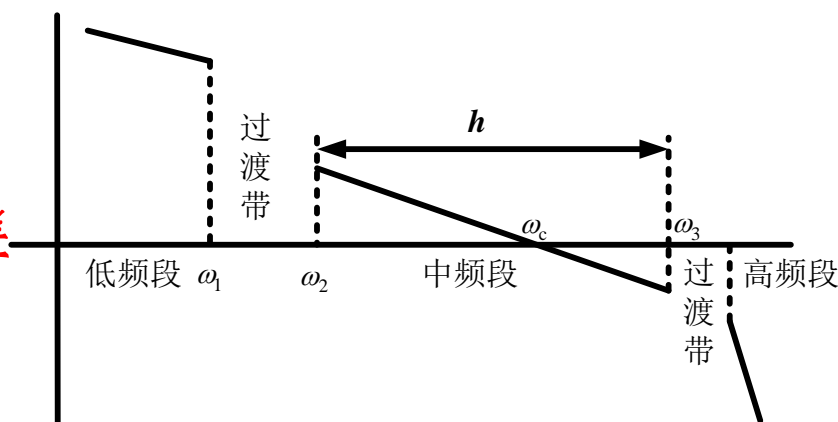
- 起始斜率取决于积分环节的数目---
- 起始高度取决于开环增益的大小
- 高的开环积分阶次和大的开环增益可以减小或消除误差
- 低频段反映了系统跟踪给定信号的稳态精度信息

□ 交越区(中频段)----交越频率 ω_c (穿越 0dB 线)附近的区域

- 交越区幅频特性的斜率对相角裕度 φ_m 影响很大。
- φ_m 与闭环系统的超调量密切相关。 φ_m 越大, 阻尼越大, 超调量越小。 φ_m 描述系统的平稳性。
- ω_c 和 φ_m 与闭环系统的调整时间密切相关。 ω_c 和 φ_m 越大, 调整时间越小。 ω_c 描述系统的快速性。

□ 高频段----远大于交越频率的频段

- 闭环幅频特性近似等于开环幅频特性
- 允许的过程模型相对变化值 $\gg 1$, 高频段对系统的动态响应影响不大
- 高频段的分贝值越低(要求高频段有滚降特性), 系统对高频噪声信号的衰减作用越大。
- 高频段决定闭环系统的抗高频干扰能力。



$$|T(i\omega)| = |L(i\omega)/(1+L(i\omega))| \approx |L(i\omega)| \ll 1$$

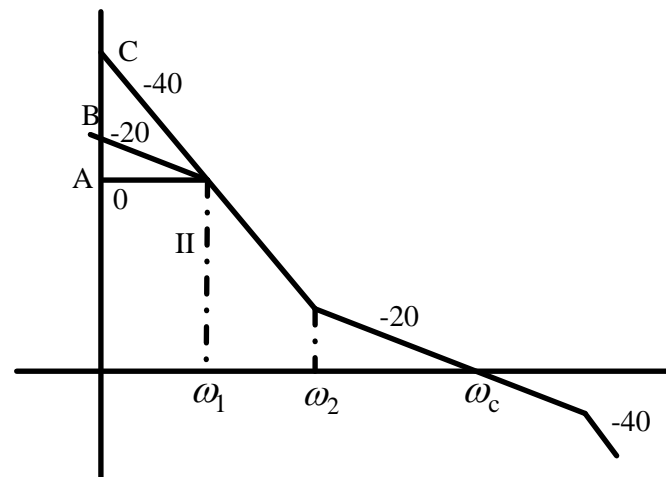
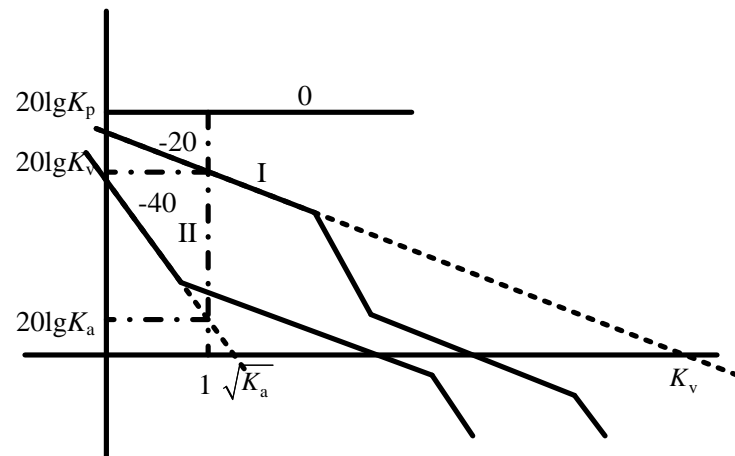
低频段与系统型别 和开环增益

- 首段的斜率为 $-20 \times v \text{ dB/dec}$ ---- 决定无差度
- 其首段或其延长线与 $\omega=1$ 交点所对应的分贝值一定为 $20\lg K$, 与 0dB 线交点为 $K = \omega_a^v \Rightarrow \omega_a = \sqrt[v]{K}$ 。
- 考察剪切频率以内的转折频率与剪切频率间的关系, 利用“三角”法计算

$$20\lg K_p = 40\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} + 20\lg \frac{\omega_c}{\omega_2} \Rightarrow K_p = \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \omega_c$$

$$20\lg K_v = 20\lg \omega_1 + 40\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} + 20\lg \frac{\omega_c}{\omega_2} \Rightarrow K_v = \frac{\omega_2}{\omega_1} \omega_c$$

$$20\lg K_a = 40\lg \omega_2 + 20\lg \frac{\omega_c}{\omega_2} \Rightarrow K_a = \omega_2 \omega_c$$



交越区及其要求-1

- 选择合适的 $\omega_c (\rightarrow \varphi_m)$ ，以**较低斜率穿过0dB线**，且具有一定的**中频段宽度**。系统就有足够的稳定裕度，同时满足响应时间要求，并具有较好的平稳性。

- 由Bode幅相关系式确定 φ_m 和交越区斜率

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &= 180^\circ + \angle L(i\omega_c) \\ \angle L(i\omega_c) &= \frac{d[\lg |L(i\omega)|]}{d[\lg \omega]} \times 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\varphi_m}{90^\circ} = 2 + \frac{d[\lg |L(i\omega)|]}{d[\lg \omega]}$$

$$\Rightarrow n_c = \left. \frac{d[\lg |L(i\omega)|]}{d[\lg \omega]} \right|_{\omega=\omega_c} = -2 + \frac{\varphi_m}{90}$$

取 $\varphi_m = 30^\circ \sim 60^\circ$ ，
实际穿越0dB线的斜率是**-33dB/dec~20dB/dec**

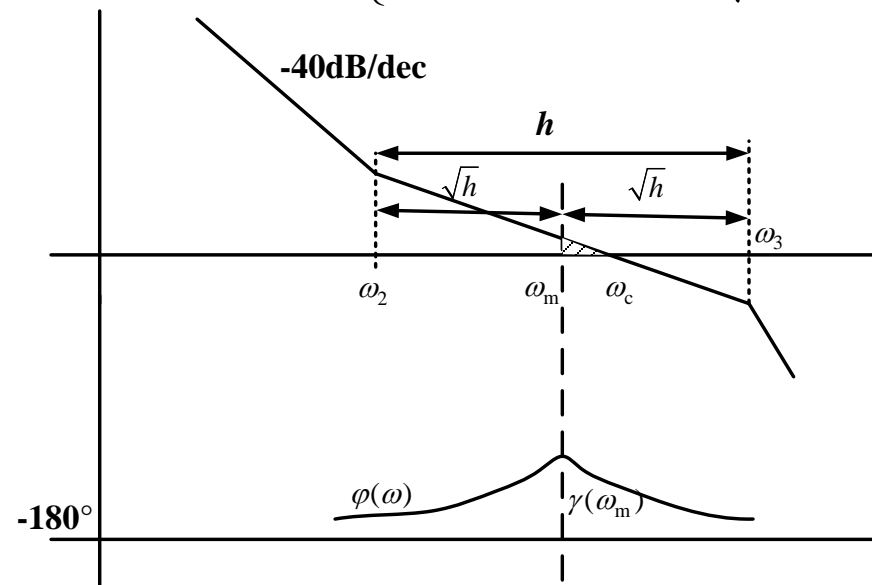
- 中频段的宽度

设高阶系统简化为 $L(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)} = \frac{K(hT_3s+1)}{s^2(T_3s+1)}$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \gamma(\omega) = -180^\circ + \arctan hT_3\omega - \arctan T_3\omega$$

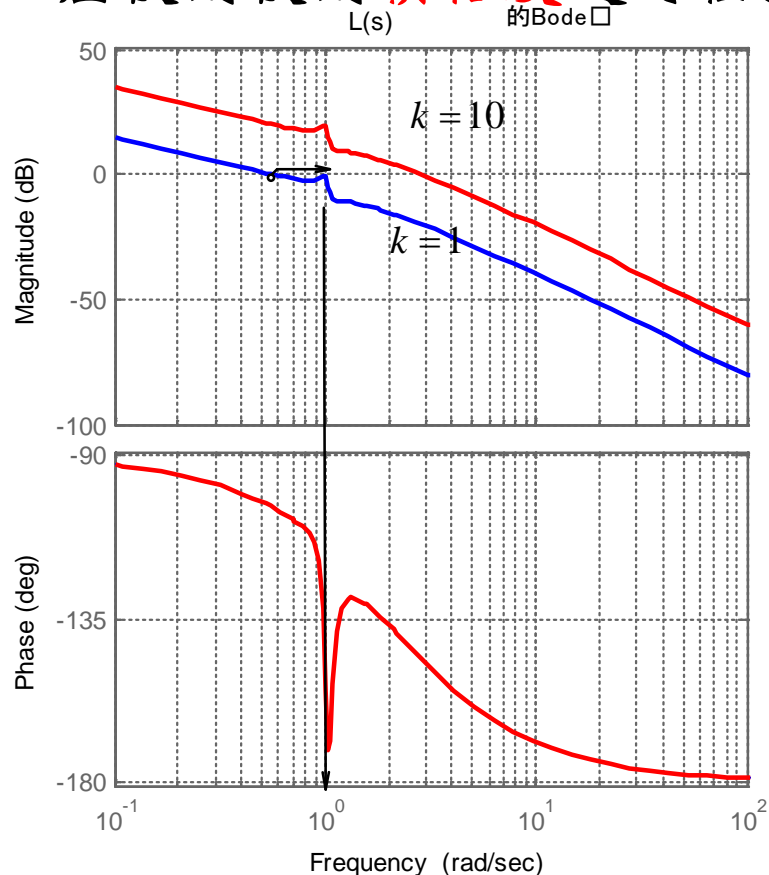
$$= -180^\circ + \arctan \frac{(h-1)T_3\omega}{1+hT_3^2\omega^2}$$

$$\left. \frac{d\gamma(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega_3}{\omega_m} = \sqrt{h} = \frac{\omega_m}{\omega_2} \\ \gamma(\omega_m) = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}} \end{cases}$$



交越区及其要求-2

- 为使系统具有较好的鲁棒性，应使振荡环节谐振频率处的幅值远离 0dB 线，否则在实际运行时可能出现不稳定。在存在谐振的情况，为避免出现误判，应使用使用模裕度进行检验。

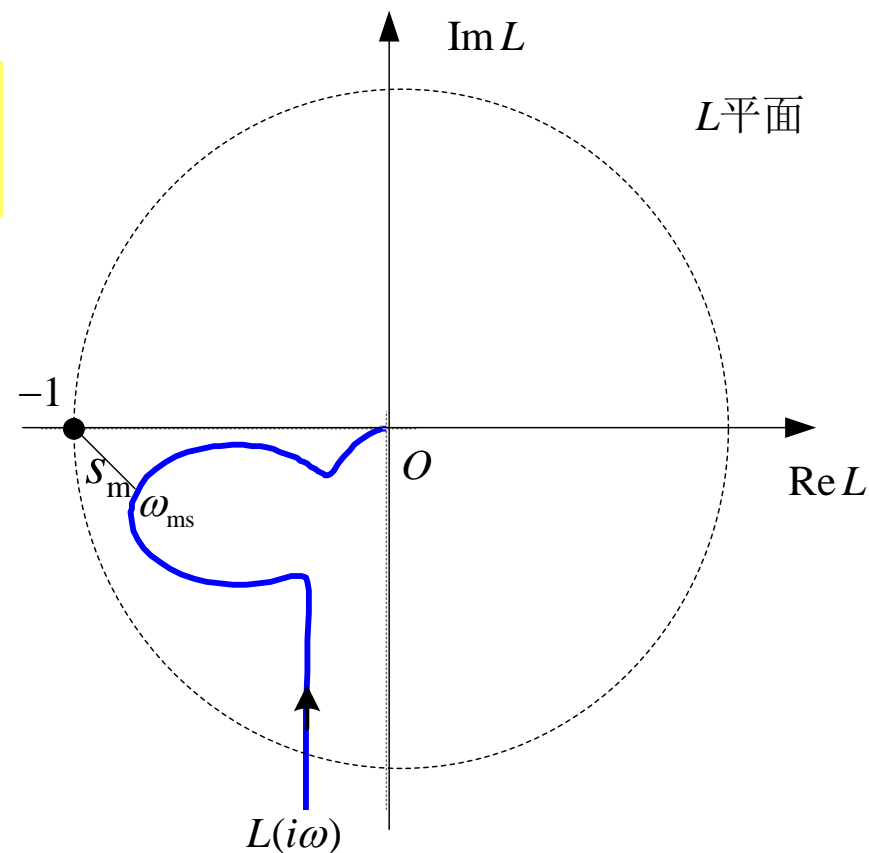


$$L(s) = \frac{k(s^2 + 0.12s + 1.1)}{s(s + 2)(s^2 + 0.08s + 1)}$$

$$g_m = \infty$$

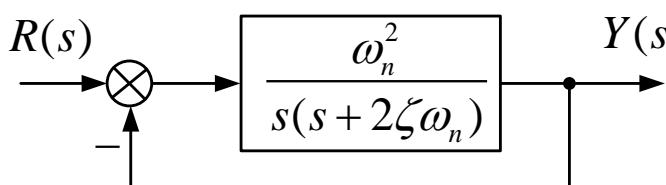
$$\varphi_m = 75.7^\circ$$

$$s_m = 0.33 \text{ 小多了}$$



频域指标与时域指标的关系

□ 欠阻尼二阶系统可以解析地求解频域指标与时域指标的关系


$$\sigma_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$
$$t_s = 3.5/\zeta\omega_n$$
$$\omega_c = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \omega_n$$
$$\varphi_m = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}$$
$$\angle L(i\omega_c) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$
$$\omega_c t_s = 7/\tan \varphi_m$$

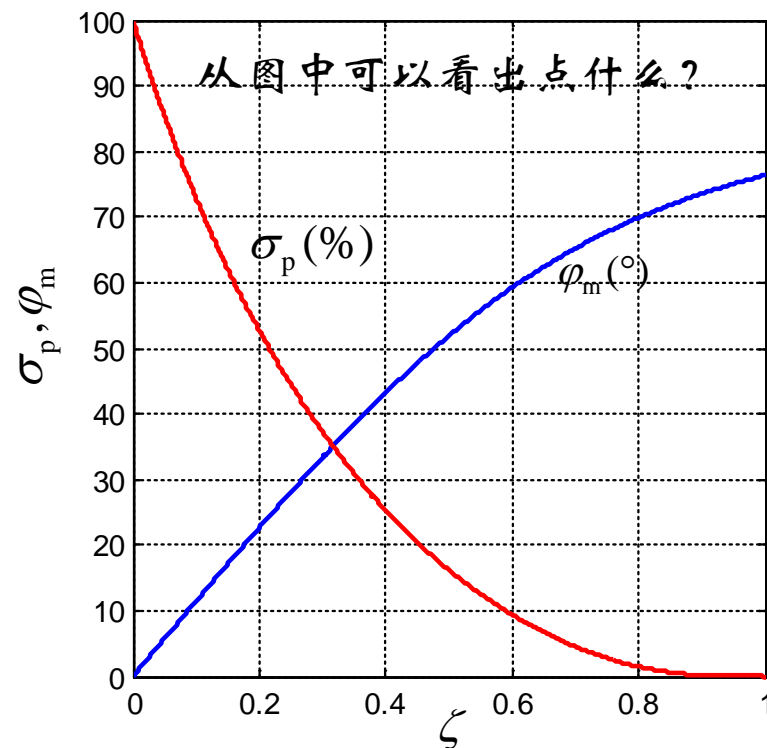
结论：调节时间与相角裕度和交越频率都有关。当确定 φ_m 时， ω_c 与 t_s 成反比。当 ω_c 确定时， t_s 也与 $\tan \varphi_m$ 成反比。换言之，若系统具有较大的 ω_c 和 φ_m ，则调节时间 t_s 必然较短。

□ 高阶系统又会怎样？

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4(1/\sin \varphi_m - 1), 35^\circ \leq \varphi_m \leq 90^\circ$$

$$t_s = k \cdot \pi / \omega_c$$

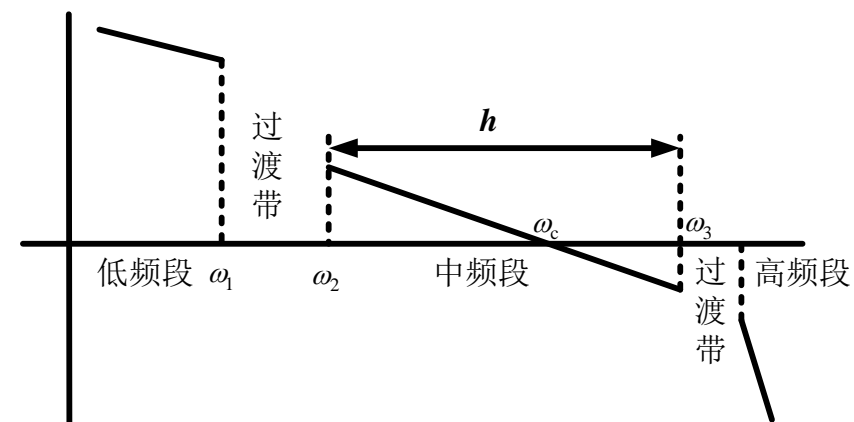
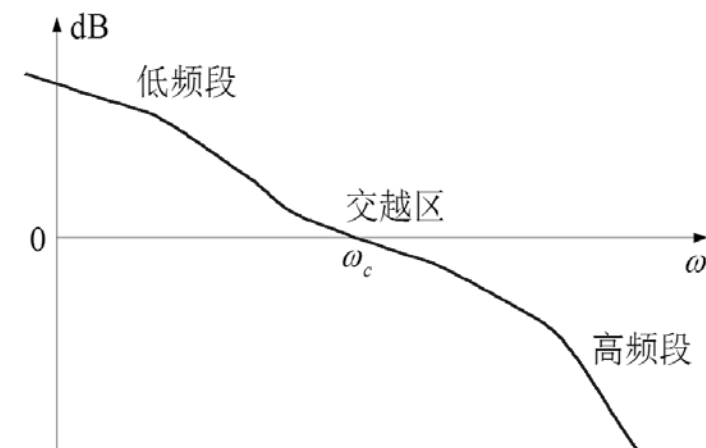
$$k = 2 + 1.5(1/\sin \varphi_m - 1) + 2.5(1/\sin \varphi_m - 1)^2, 35^\circ \leq \varphi_m \leq 90^\circ$$



注：太保守，可用于初步设计

希望的开环对数幅频特性应具有的性质（归纳）

- 如果要求具有一阶或二阶无差度，则 $20\lg|L(j\omega)|$ 的低频段应具有 -20dB/dec 或 -40dB/dec 的斜率。为保证系统的稳态精度，低频段应有较高的分贝数。
- $20\lg|L(j\omega)|$ （渐近线）应以 -20dB/dec 的斜率穿过零分贝线（对应交越频率），且具有一定的中频段宽度。这样，系统就有足够的稳定裕度，保证闭环系统具有较好的平稳性，为使系统具有较好的鲁棒性，应使谐振频率处的幅值远离 0dB 线。
- $20\lg|L(j\omega)|$ 应具有合适的交越频率，以满足闭环系统的合理的响应时间要求。
- $20\lg|L(j\omega)|$ 的高频段应有较陡的斜率和较低的分贝值，以增强系统的抗高频干扰和高频模型摄动的鲁棒性。



系统性能分析

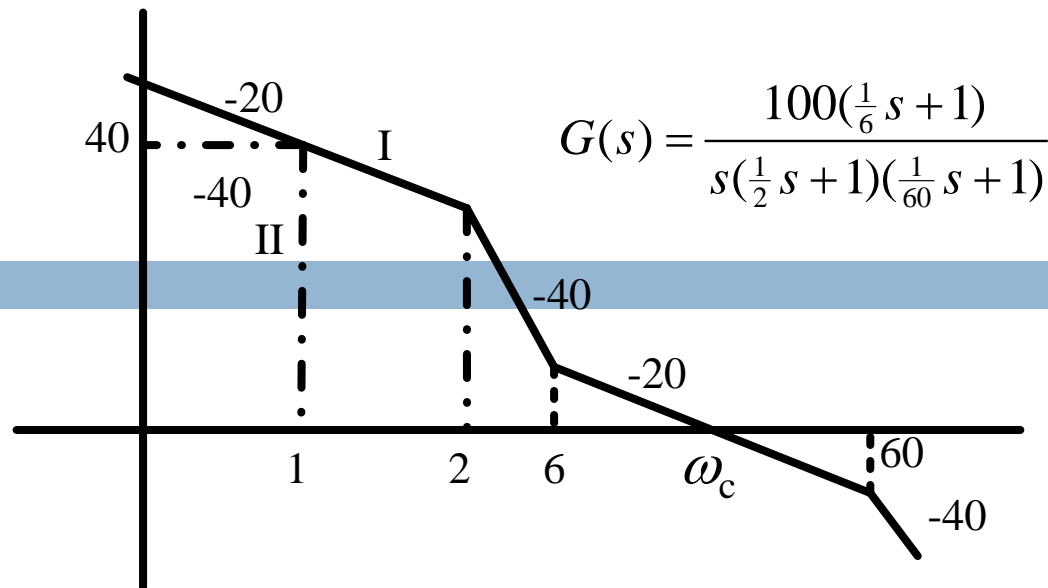
□ 系统性能分析一般步骤

- ① 获得系统开环传递函数。
- ② 判定系统稳定性。
- ③ 若系统稳定确定系统所适用的公式。
- ④ 由低频段确定系统稳态性能。
- ⑤ 由中频段确定动态性能。
- ⑥ 由高频段确定抗干扰能力。

□ 例：某单位负反馈系统(最小相位系统)
测得开环幅频特性图如图，试分析性能。

$$40 = 20\lg 100 = 20\lg 2 + 40\lg 3 + 20\lg(\omega_c/6) \Rightarrow \omega_c = 100/3$$

该系统是稳定的，且为I型系统，有 $K_v=100$ 。



该系统是具有主导极点的三阶系统，应用二阶近似公式，可得

$$\varphi_m = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 54.2^\circ$$

$$\zeta = \frac{\tan \varphi_m}{2\sqrt{\tan^2 \varphi_m + 1}} = 0.53$$

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} = 26.873$$

$$\sigma_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 14.7\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.211$$

这一讲就到这里！



第十四讲 闭环频域性能指标及其相关关系

闭环系统应该具备期望的频率特性，系统才能达到期望的运行性能。本讲在介绍闭环频域特性与特征量基础上，基于等M圆/线与等N圆/线讲解了图解确定闭环频率特性的方法。详细分析了闭环频域指标与开环指标（时域、频域）间的关系。同时还给出了MATLAB分析例子。本讲的内容略显复杂，需要同学们在课后深入思考，分析才能真正理解。

闭环频率特性及其应具备的特性

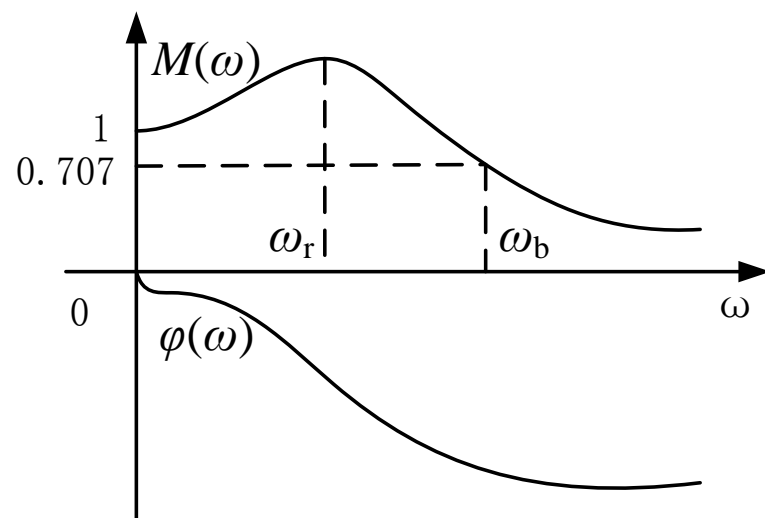
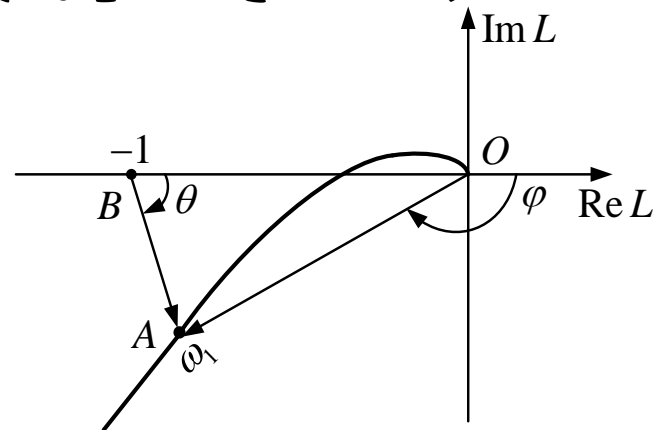
- 闭环系统的频率特性采用灵敏度函数和余灵敏度函数表示

$$L(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad S(i\omega) = \frac{1}{1+L(i\omega)} = |S(i\omega)|\angle S(i\omega)$$

$$T(i\omega) = \frac{L(i\omega)}{1+L(i\omega)} = |T(i\omega)|\angle T(i\omega) = M(\omega)e^{i\alpha(\omega)}$$

在频率特性图中这两个函数的几何表示为

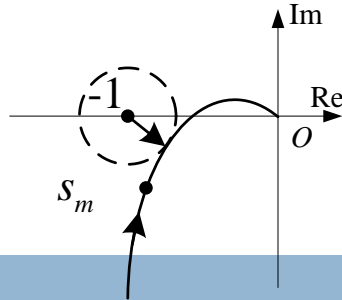
$$S(i\omega) = \frac{1}{\overline{BA}} \quad T(i\omega) = \frac{\overline{OA}}{\overline{BA}}$$



- 闭环频率特性一般应具备的特性(如图):

- ▣ (1) 呈现低通滤波特性
- ▣ (2) 闭环的频域性能指标应能反映控制系统跟踪参考输入信号和抑制干扰信号的能力

闭环频率几个特征量



□ 零频灵敏度函数幅值 $S(i0)$ 和 $T(i0)$

$S(i0)$ 越小, 负载扰动抑制能力越强、静态增益变化引起系统稳态性能变化越小, $T(i0)$ 越接近于1, 稳态精度越高。

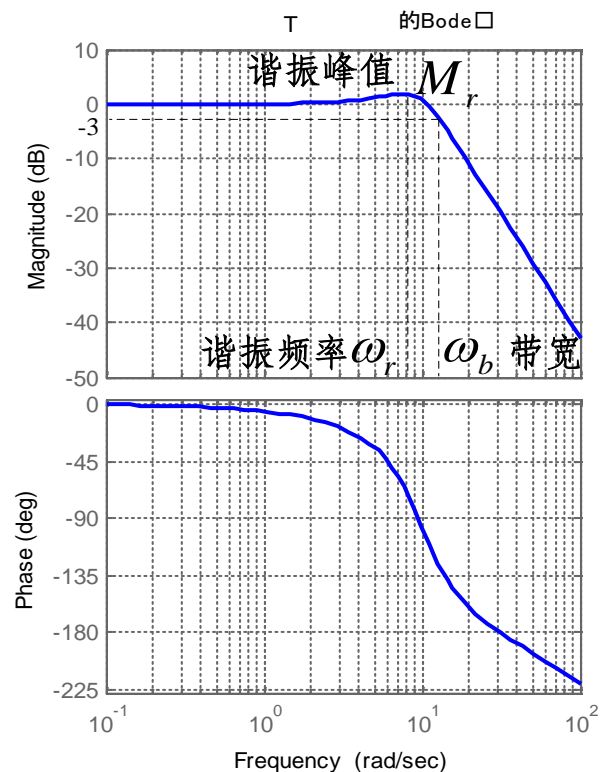
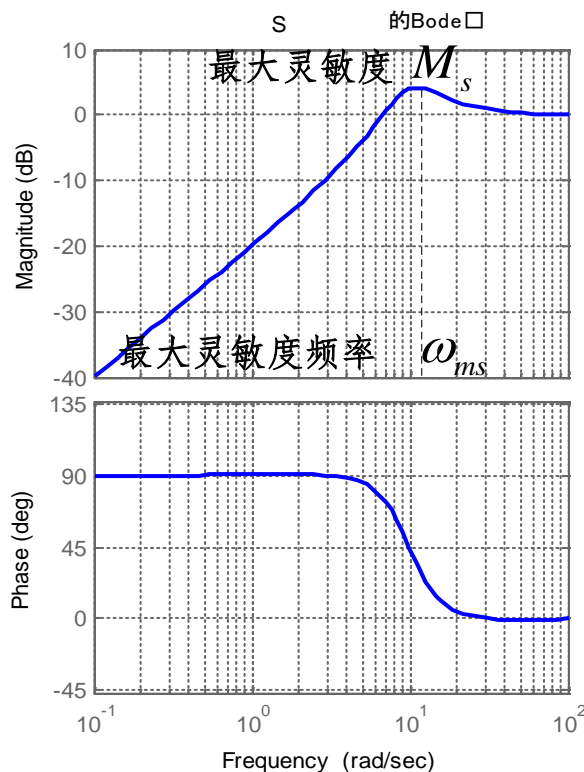
□ 最大(余)灵敏度 M_s (M_t)、谐振峰值 M_r

M_s 越大, 开环幅相图接越近临界点-1, 在 ω_{ms} 附近频段对扰动的放大作用越大, 且对模型摄动鲁棒性越差。

M_r 越大, 对频率为 ω_r 的输入响应强烈, 相对稳定性越差, 阶跃响应将有较大超调量。

□ 带宽与带宽影响

- 带宽定义: 余灵敏度函数幅频衰减到零频时的0.707倍时所对应的频率(截止频率) ω_b , 范围($0 \sim \omega_b$)称为带宽。
- 带宽引入实际上是为定量描述低通特性。



□ 带宽影响:

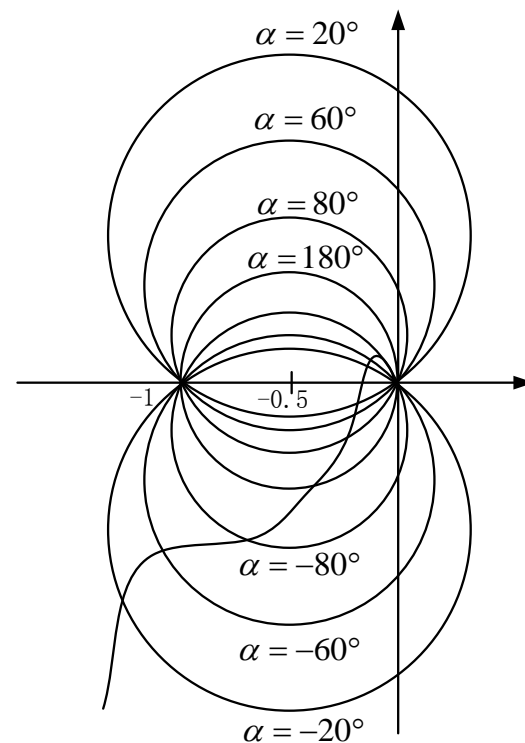
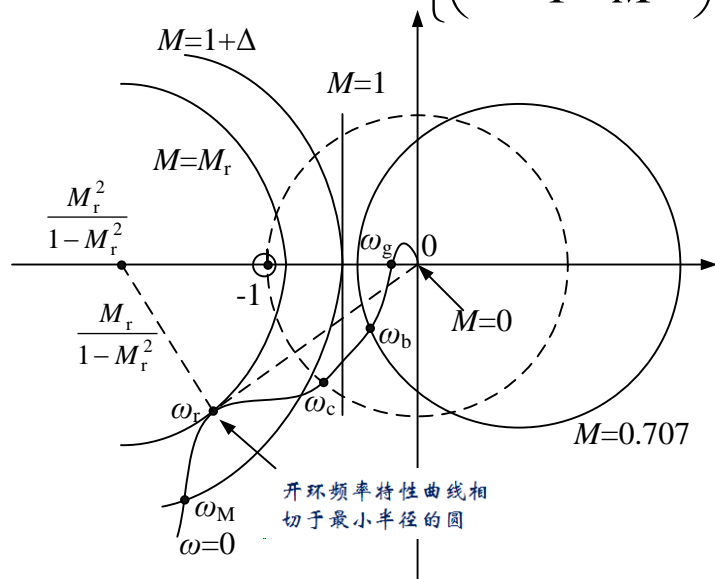
- 系统的反应速度: 越宽, 反应速度越快
- 重现输入信号的能力: 越宽, 再现能力较强
- 抑制高频噪声的能力: 越宽, 抑制能力越弱。

确定闭环频率特性的图解法-等M圆与等N圆-1

□ 基于Nyquist曲线图的等M圆与等N(α)圆

$$L(i\omega) = x + jy \Rightarrow M(\omega) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0, & M=1 \\ \left(x - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2, & M \neq 1 \end{cases}$$

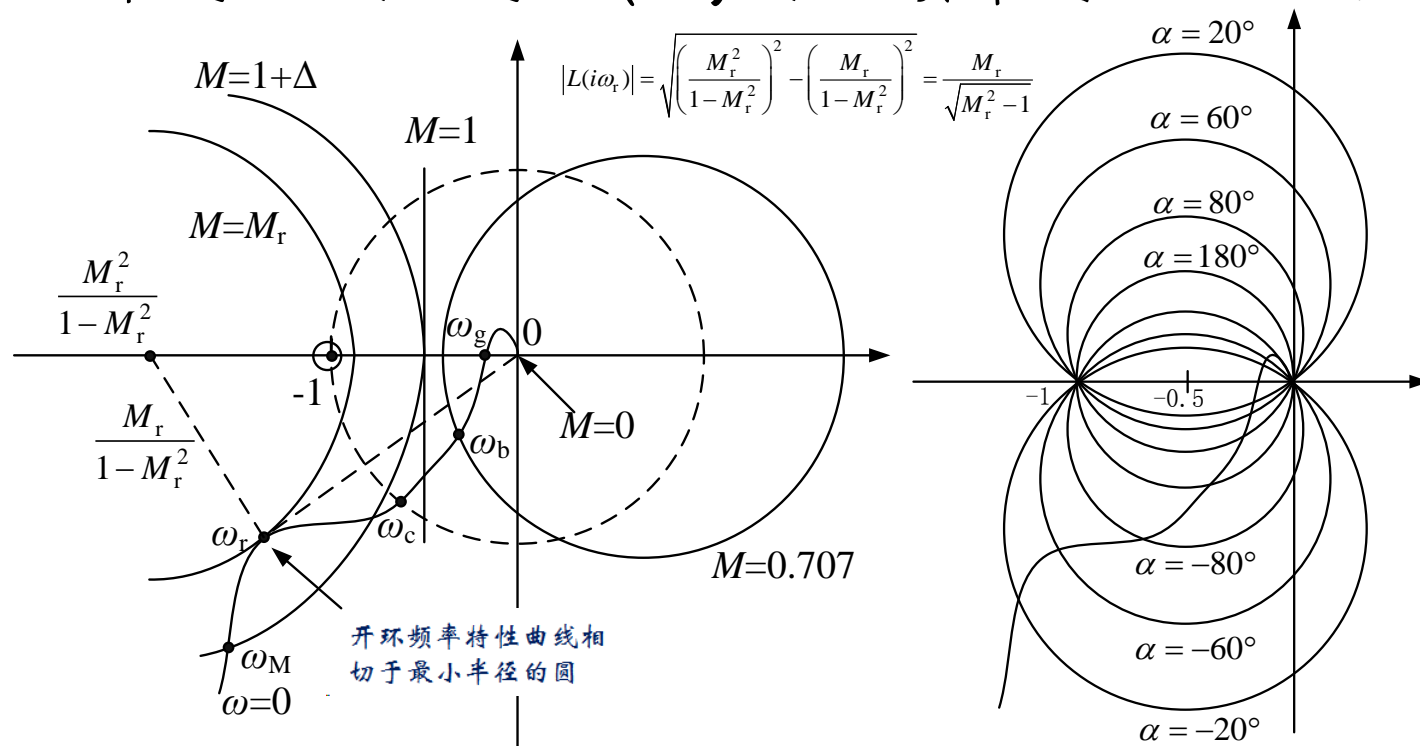


$$\alpha(\omega) = \angle \frac{x + iy}{1 + x + iy} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$$

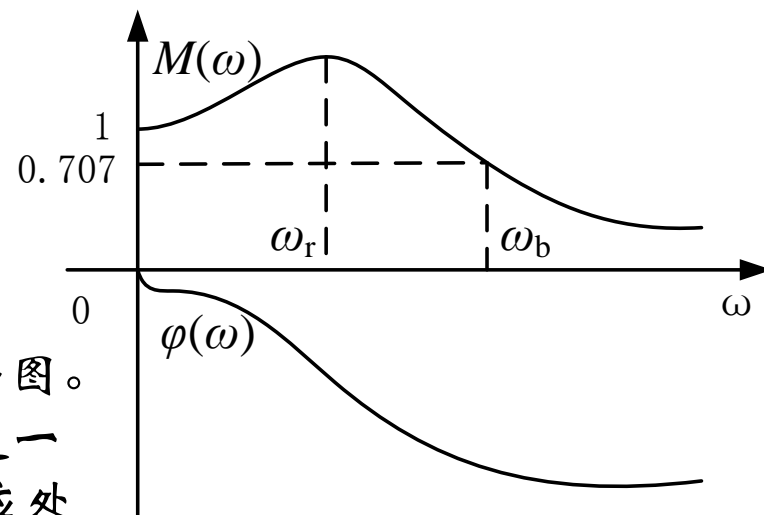
$$\triangleq \arctan N \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

确定闭环频率特性的图解法-等M圆与等N圆-2

□ 在等M圆与等N(α)圆上频率特征点的标注及其分析



利用等M圆和等N圆，据开环频率特性与它产出率交点就对应于该频率点的闭环频率响应幅值与相位，依次在闭环频率特性图中描点，绘制曲线。



几点结论:(1) 系统有谐振, 则谐振频率、剪切频率、带宽三者间关系如图。(2) 当 $|L(i\omega)| \gg 1$ 时, 则有 $|M(\omega)| \approx 1$ 。说明闭环处于复现带 $0 \sim \omega_M$, 这一频段正是低频。反之, $|M(\omega)| \approx |L(i\omega)|$, 闭环与开环特性相同, 对应处于高频段。

确定闭环频率特性的图解法-等M线与等N线

□ Nichols曲线图中的等M线与等N(α)线

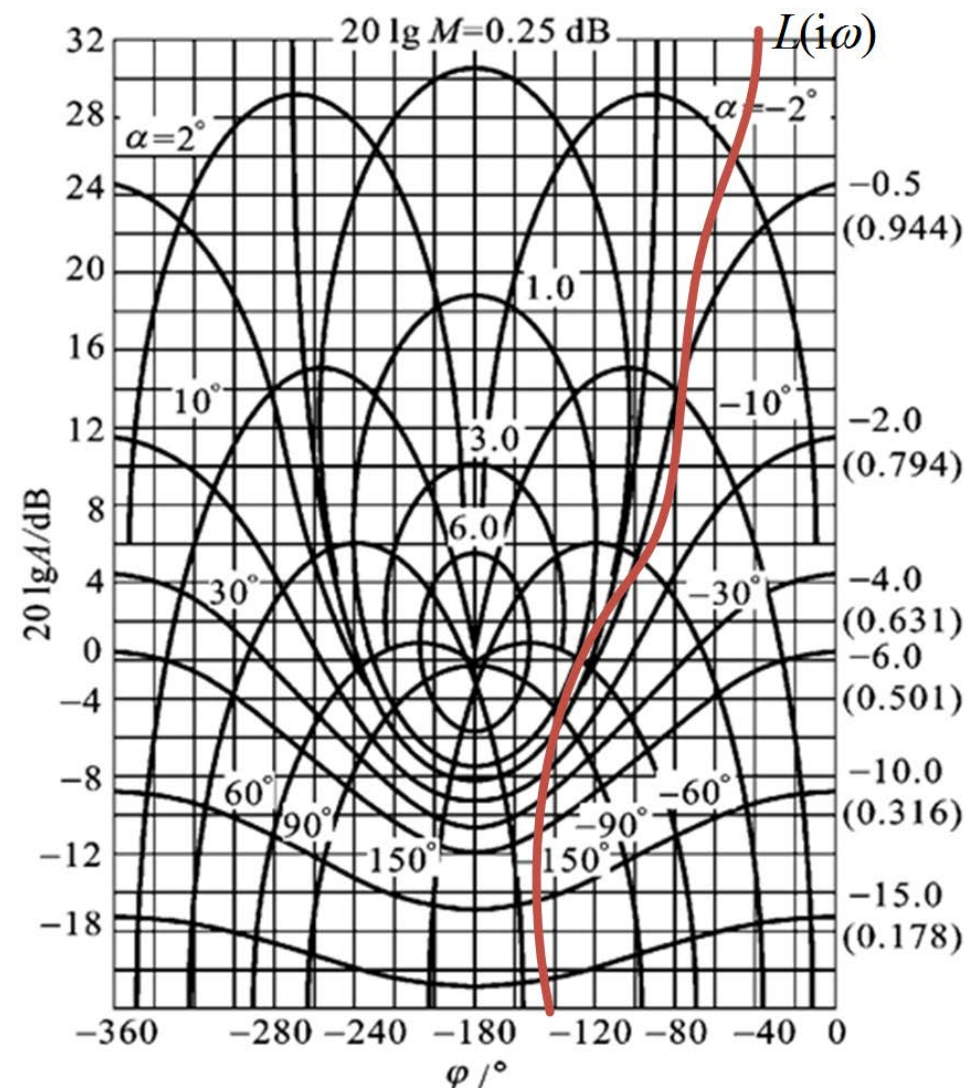
$$L(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad T(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{A(\omega)e^{j\phi(\omega)}}{1 + A(\omega)e^{j\phi(\omega)}}$$

$$20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{\sin[\phi(\omega) - \alpha(\omega)]}{\sin \alpha(\omega)} \quad \text{等N}(\alpha) \text{线}$$

关于-180° 对称

$$20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{\cos \phi(\omega) \pm \sqrt{\cos^2 \phi(\omega) + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1} \quad \text{等M线}$$

根据系统开环频率特性值，在 $20\lg A$ - ϕ 平面上作等M线与等N(α)线，由交点可以确定对应的闭环频率特性，由此作出闭环频率特性曲线，系统Nichols曲线与等M线相切点对应闭环谐振峰值。据带宽定义，可以确定 $M(0)$ 和由 $M=0.707M(0)$ 的等M线，进而确定系统带宽

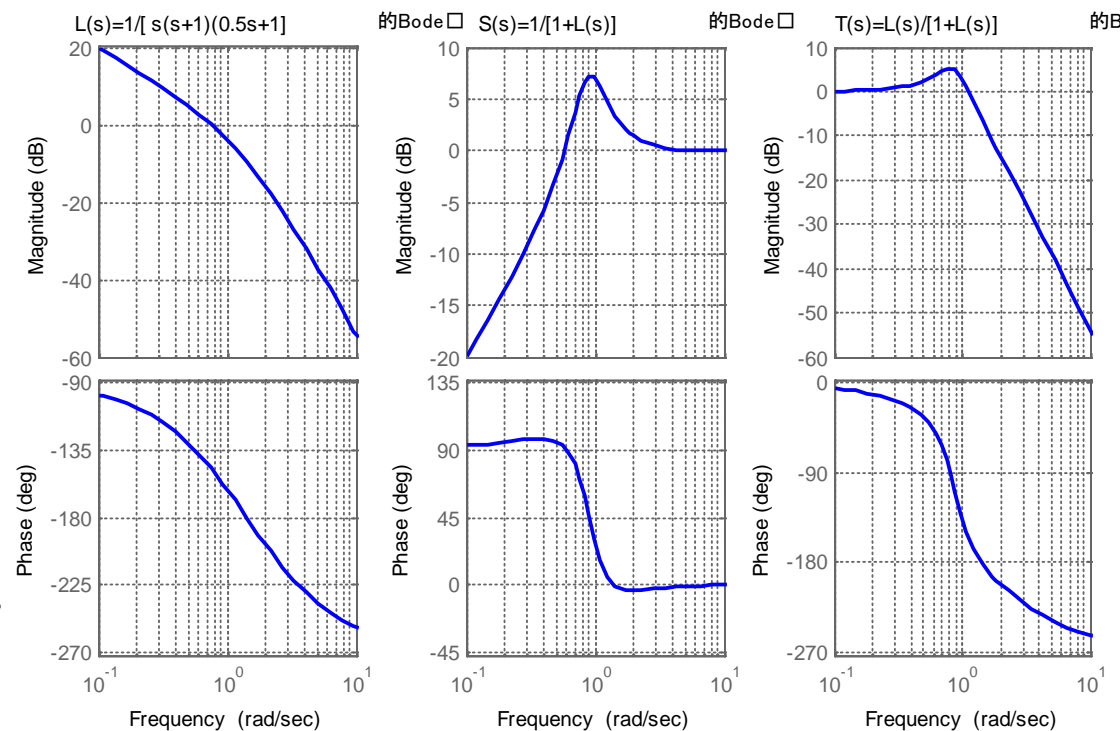


确定闭环频率特性的图解法

□ 利用MATLAB求闭环频率特性----以例子说明

□ 以开环传函子 $L(s) = 1/[s(s+1)(0.5s+1)]$ 为例使用MATLAB程序绘制 $L(i\omega)$ 、 $S(i\omega)$ 及 $T(i\omega)$ 。

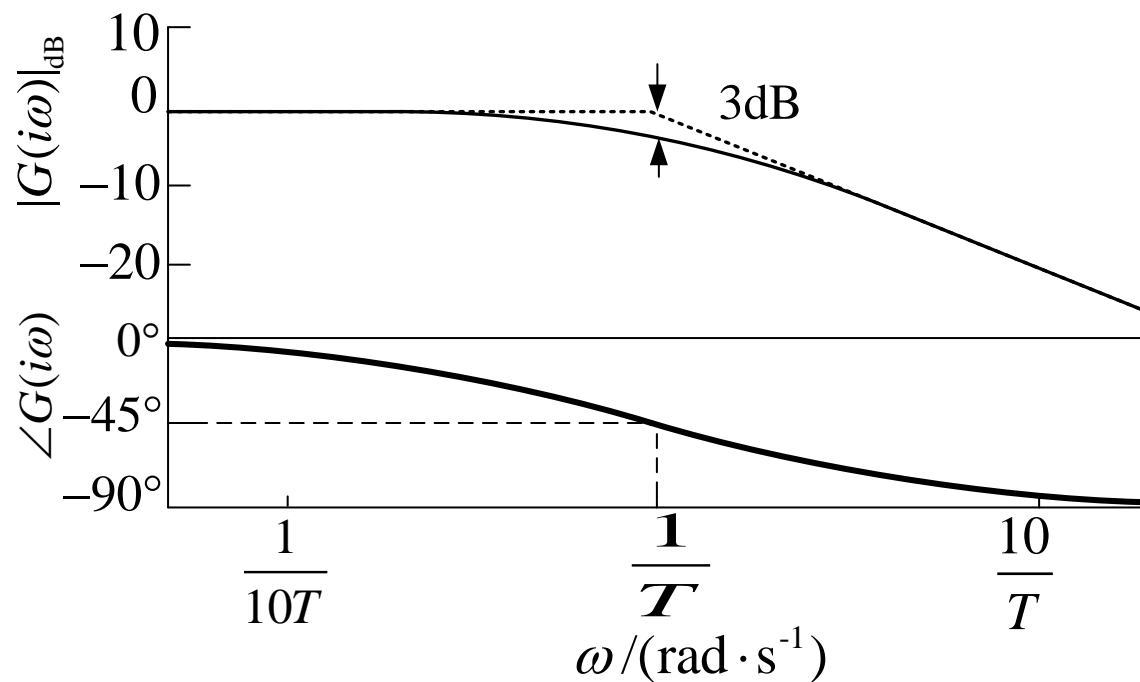
- `num=1; den=conv([1 1 0],[0.5 1]);`
`L=tf(num,den);`
- `subplot(1,3,1); bode(L);grid;`
- `title('L(s)=1/[s(s+1)(0.5s+1)]的Bode图')`
- `subplot(1,3,2); S=feedback(1,L,-1);bode(S);grid;`
- `title('S(s)=1/[1+L(s)]的Bode图')`
- `subplot(1,3,3); T=feedback(L,1,-1);bode(T);grid;`
- `title('T(s)=L(s)/[1+L(s)]的Bode图')`



□ 由图可读出: $M_s = 7.25\text{dB}$, $M_r = 5.27\text{dB}$, $\omega_r = 0.825\text{rad/s}$

典型一阶闭环频域指标

- 一阶系统闭环传递函数为 $T(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
 - ▣ 幅频特性随频率增大而减小，不存在谐振。
 - ▣ 令幅频特性为0.707便可得到 $\omega_b = 1/T$ 。在稳态误差取5%时， $t_s = 3T$ 。
 - ▣ 故调节时间与带宽成反比。



典型二阶闭环系统频域指标

□ 二阶系统闭环传递函数

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (0 < \zeta < 0.707)$$

$$\omega_{mt} = \begin{cases} \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \omega_r \\ 0 \end{cases} \quad M_t = \max_{\omega} |T(i\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = M_r & (0 < \zeta < 0.707) \\ 1 & (\zeta \geq 0.707) \end{cases}$$

$$\omega_{ms} = \frac{1 + \sqrt{8\zeta^2 + 1}}{2} \omega_n$$

$$M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)| = |S(i\omega_{ms})| = \sqrt{\frac{8\zeta^2 + 1 + (4\zeta^2 + 1)\sqrt{8\zeta^2 + 1}}{8\zeta^2 + 1 + (4\zeta^2 - 1)\sqrt{8\zeta^2 + 1}}}$$

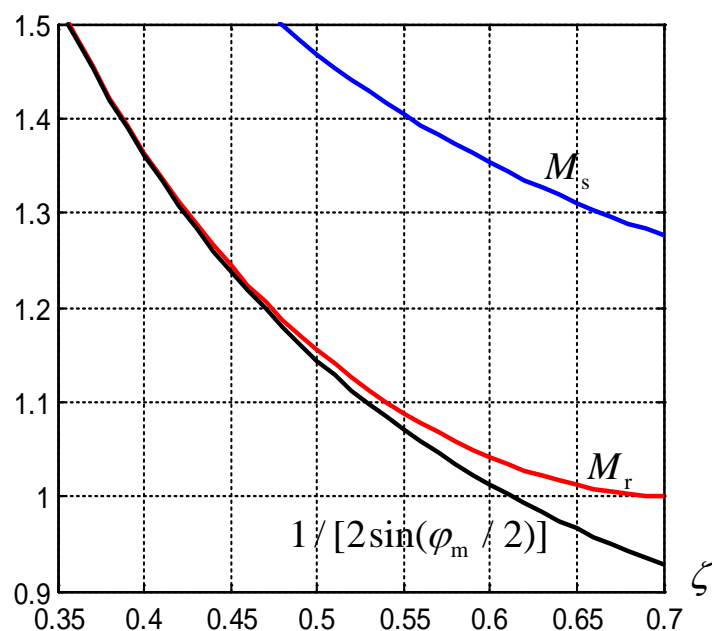
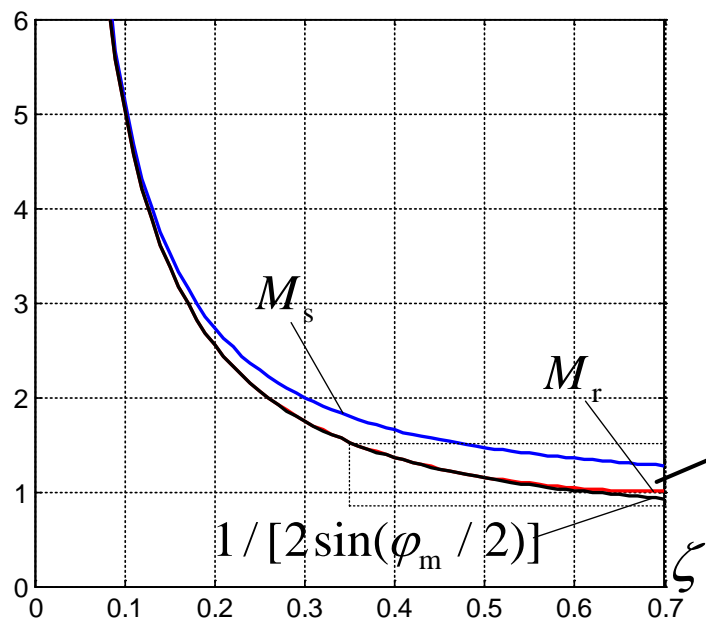
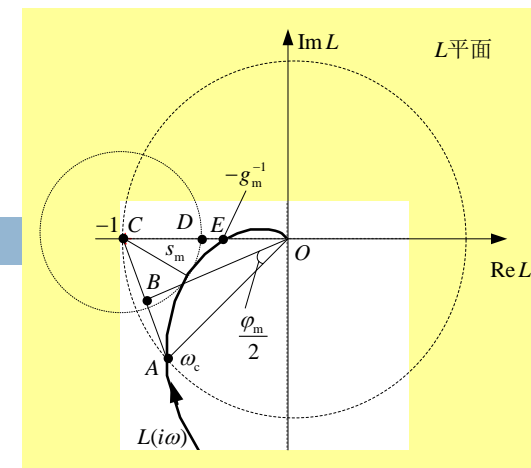
$$s_m = 1/M_s$$

几个关系-1

$$\varphi_m \geq 2 \arcsin \frac{s_m}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{\varphi_m}{2} \geq s_m = \frac{1}{M_s}$$

□ M_r 、 M_s 、 $1/2\sin(\phi_m/2)$ 间关系

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \sin(\varphi_m / 2)} \leq M_s$$



$$\frac{1}{2 \sin(\phi_m / 2)} \leq M_r \leq M_s$$

表明闭环频域指标严于开环频域。如何估算 M_r :

$$M_r \approx \frac{1}{2 \sin(\varphi_m / 2)} = |S(i\omega_c)|$$

□ 几个频率间的关系

$$0 < \zeta < 0.707$$

$$\omega_r = \omega_{mt} < \omega_c < \omega_n < \omega_{ms}$$

几个关系-2

□ ω_b 与 t_s 与 间的关系

$$M(\omega_b) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707M(0) = 0.707$$

$$\Rightarrow \omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$\Rightarrow \omega_b t_s = \frac{3.5}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$\omega_c \leq \omega_b \leq 2\omega_c$$

结论(填空): 对于给定的阻尼比, 调节时间与带宽成反比。频带宽度越宽, 则调节时间越短。对于给定的带宽, 阻尼比越大, 则调节时间越短。

关于二阶系统信号传输不失真时的最佳阻尼比

- 按信号传输不失真条件定义最佳阻尼比：给定此阻尼比后，二阶系统在一定误差范围内满足不失真条件，且工作频率范围最大。

$$|M(\omega) - 1| < \Delta(5\%, 2\%) \Rightarrow M(\omega) = M_r, |M_r - 1| < \Delta \Rightarrow \zeta's \text{ range} \Rightarrow \omega's \text{ range} : ?$$

- 5%: 阻尼比为0.5897, 最大工作频率范围 $0 \sim 0.8675 \omega_n$, 频率比 λ - 阻尼 ζ 关系表

ζ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.59	0.6	0.7	0.8	0.9
λ	0.22	0.23	0.24	0.27	0.32	0.87	0.84	0.59	0.39	0.29

- 2%: 阻尼比为0.63, 最大工作频率范围 $0 \sim 0.69 \omega_n$, 频率比 λ - 阻尼 ζ 关系表

ζ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.63	0.7	0.8	0.9
λ	0.142	0.15	0.16	0.17	0.20	0.27	0.69	0.47	0.26	0.18

- 当阻尼比大于0.707时，幅频特性曲线无相对谐振峰值，在其工作频率范围内幅频曲线平缓，但随阻尼比的增大，工作频率范围变窄。

(高阶)闭环谐振峰值与开环相角裕度间关系

□ 假设简化的高阶系统开环传函 $L(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)} = \frac{K(hT_3s+1)}{s^2(T_3s+1)}$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan hT_3\omega - \arctan T_3\omega = -180^\circ + \gamma(\omega)$$

$$L(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)(-\cos \gamma(\omega) - j \sin \gamma(\omega))$$

$$M(\omega) = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(A^{-1}(\omega) - \cos \gamma(\omega))^2 + \sin^2 \gamma(\omega)}}$$

$$A^{-1}(\omega) = \cos \gamma(\omega) \quad \downarrow \quad \cos \gamma(\omega_r) \approx \cos \gamma(\omega_c) = \cos \varphi_m$$

$$M_r = \frac{1}{|\sin \gamma(\omega_r)|} \approx \frac{1}{|\sin \varphi_m|}$$

(高阶)闭环频域指标和时域指标之间关系

- 对高阶系统，频域指标与时域指标的定性关系与二阶系统一致，即系统的超调量 σ_p 随 M_r 的增大而增大，系统的调节时间 t_s 亦随着 M_r 的增大而增大，但随着 ω_b 的增大而减小。
- 定量：闭环幅值特性与开环幅值、相角裕度间的关系

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(A^{-1}(\omega) - \cos \varphi_m)^2 + \sin^2 \varphi_m}}$$

$$\text{When } 35^\circ \leq \varphi_m \leq 90^\circ, M_r \approx \frac{1}{\sin \varphi_m} \text{ and } \sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$t_s = \frac{k\pi}{\omega_c}, k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

- 若高阶系统存在一对共轭复数主导极点，则可用二阶系统所建立的关系来近似表示。

(高阶)闭环谐振与开环中频段宽度、剪切频率间的关系

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma(\omega_r)}$$

$$|L(i\omega_r)| = \frac{M_r}{\sqrt{M_r^2 - 1}}$$

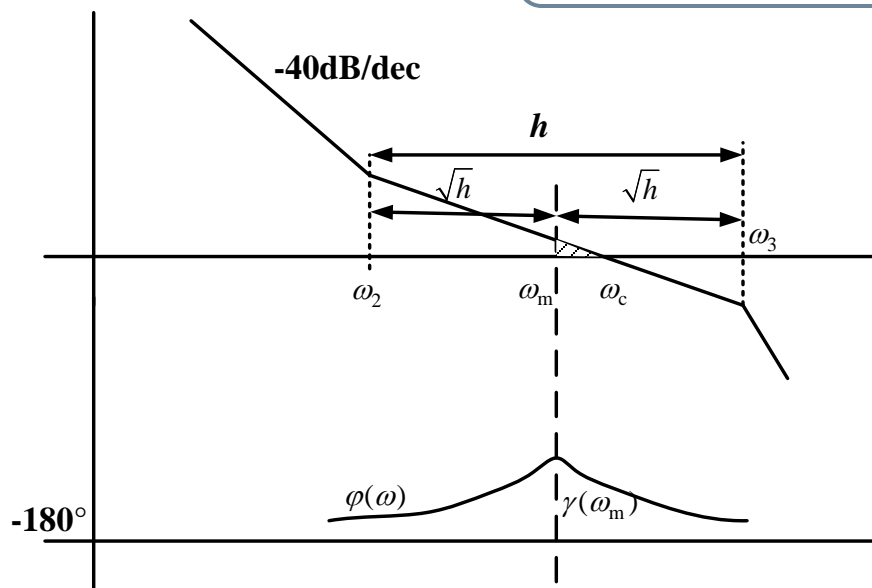
若通过平移（改变K值）将 $\gamma(\omega)$ 的极大值发生处 ω_m 与 ω_r 重合使 M_r 最小

$$|L(j\omega_m)| = |L(i\omega_r)| \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_m} = \frac{M_r}{\sqrt{M_r^2 - 1}}$$

$$\gamma(\omega_m) = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}} \Rightarrow \sin \gamma(\omega_m) = \frac{h-1}{h+1} \Rightarrow M_r = \frac{h+1}{h-1}, \quad h = \frac{M_r+1}{M_r-1}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_m} = \sqrt{h} = \frac{\omega_m}{\omega_2}$$

问题：h 的大小对 M_r 的影响？
故 h 取值在 4~12



中频段设计(ω_c 的位置)的重要公式!

$$\begin{cases} \frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{M_r + 1}{M_r} = \frac{2h}{h+1} \\ \frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{M_r - 1}{M_r} = \frac{2}{h+1} \end{cases}$$

例：MATLAB分析闭环系统例

$$L(s) = \frac{k(s^2 + 0.12s + 1.1)}{s(s + 2)(s^2 + 0.08s + 1)}$$

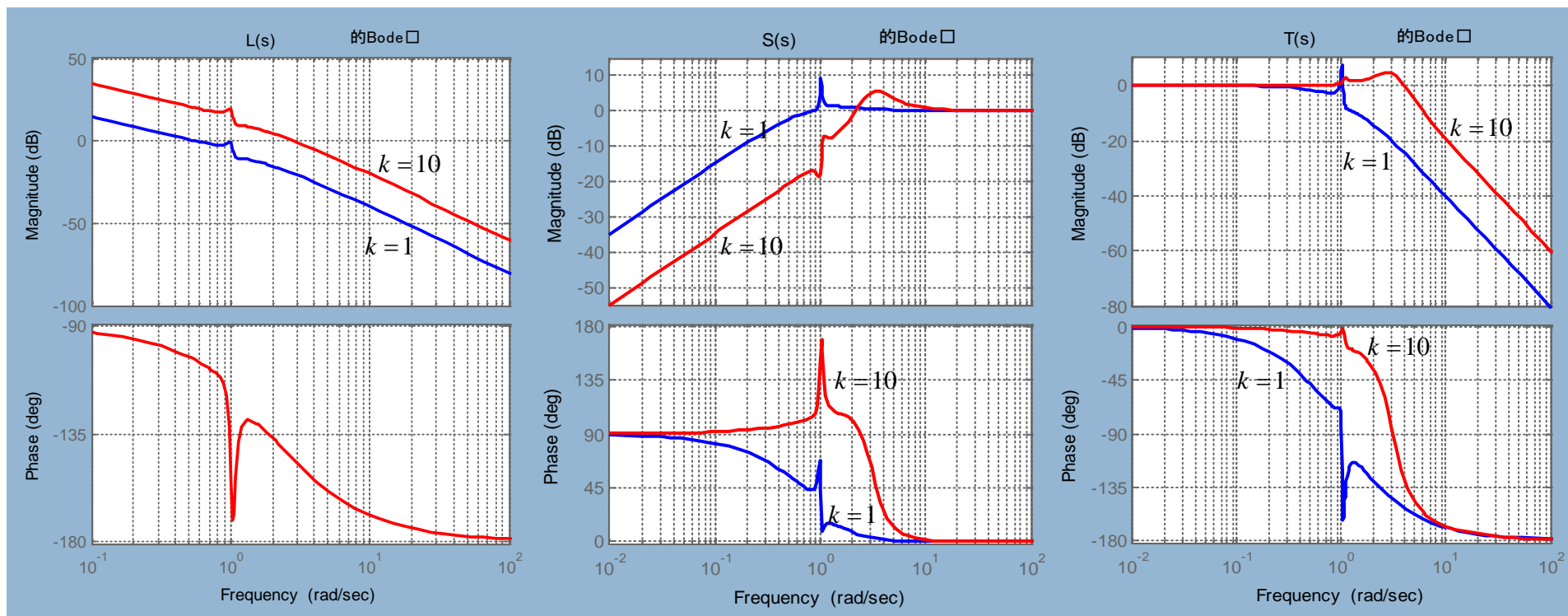
- 已知具有谐振环节的开环传递函数，通过前面的知识分析此系统的鲁棒稳定性。思考： k 的可能变化，对稳定性影响。用什么工具，计算什么？如何分析？特别要注意什么？

$K=1$

Gm1 = Inf
Pm1 = 75.6950
Wg1 = Inf
Wc1 = 0.5521
MsdB_S1 = 9.4970
MrdB_T1 = 7.3718

$K=10$

Gm2 = Inf
Pm2 = 34.1950
Wg2 = Inf
Wc2 = 2.8400
MsdB_S2 = 9.4970
MrdB_T2 = 4.6174



例： MATLAB分析闭环系统例续----源程序1

- %K=1
- num1=[1 0.12 1.1];
- den1=[1 2.08 1.16 2 0];
- L1=tf(num1,den1); % K=1时的传递函数
- [MAG1,PHASE1,W1]=bode(L1); % K=1时的Bode图
- [Gm1,Pm1,Wg1,Wc1]=margin(L1); % K=1时的交越频率和相角频率
- Gm1,Pm1,Wg1,Wc1
- S1=feedback(1,L1,-1);
- [MAG1_,PHASE1_,W1_]=bode(S1); %K=1时的灵敏度函数的Bode图、
- [ninf_S1,fpeak_S1]=norm(S1,inf); %无穷范数计算命令
- MsdB_S1=20*log10(ninf_S1) %取对数
- T1=feedback(L1,1,-1);
- [MAG1__,PHASE1__,W1__]=bode(T1); %K=1时的余灵敏度函数的Bode图
- [ninf_T1,fpeak_T1]=norm(T1,inf); %无穷范数计算命令
- MrdB_T1=20*log10(ninf_T1) %取对数

- %K=10
- num2=10*[1 0.12 1.1];
- den2=[1 2.08 1.16 2 0];
- L2=tf(num2,den2); % K=10时的传递函数
- [MAG2,PHASE2,W2]=bode(L2); %K=10时的Bode图
- [Gm2,Pm2,Wg2,Wc2]=margin(L2); % K=10时的交越频率和相角频率
- Gm2,Pm2,Wg2,Wc2
- S2=feedback(1,L2,-1);
- [MAG2_,PHASE2_,W2_]=bode(S2); %K=10时的灵敏度函数的Bode图、
- [ninf_S2,fpeak_S2]=norm(S1,inf); %无穷范数计算命令
- MsdB_S2=20*log10(ninf_S2) %取对数
- T2=feedback(L2,1,-1);
- [MAG2__,PHASE2__,W2__]=bode(T2); %K=10时的余灵敏度函数的Bode图
- [ninf_T2,fpeak_T2]=norm(T2,inf); %无穷范数计算命令
- MrdB_T2=20*log10(ninf_T2) %取对数

例： MATLAB分析闭环系统例续----源程序2

```
%取幅值(dB)
for i=1:length(MAG1(1,1,:))
    L1M(i)=20*log10(MAG1(1,1,i));
end
for i=1:length(MAG2(1,1,:))
    L2M(i)=20*log10(MAG2(1,1,i));
end

for i=1:length(MAG1__(1,1,:))
    S1M(i)=20*log10(MAG1__(1,1,i));
end
for i=1:length(MAG2__(1,1,:))
    S2M(i)=20*log10(MAG2__(1,1,i));
end

for i=1:length(MAG1__(1,1,:))
    T1M(i)=20*log10(MAG1__(1,1,i));
end
for i=1:length(MAG2__(1,1,:))
    T2M(i)=20*log10(MAG2__(1,1,i));
end

%取相位角
for i=1:length(PHASE1(1,1,:))
    L1P(i)=PHASE1(1,1,i);
end
for i=1:length(PHASE2(1,1,:))
    L2P(i)=PHASE2(1,1,i);
end

for i=1:length(PHASE1__(1,1,:))
    S1P(i)=PHASE1__(1,1,i);
end
for i=1:length(PHASE2__(1,1,:))
    S2P(i)=PHASE2__(1,1,i);
end

for i=1:length(PHASE1__(1,1,:))
    T1P(i)=PHASE1__(1,1,i);
end
for i=1:length(PHASE2__(1,1,:))
    T2P(i)=PHASE2__(1,1,i);
end

% 画图
subplot(2,3,1)
semilogx(W1,L1M,W2,L2M),grid on
subplot(2,3,2)
semilogx(W1_,S1M,W2_,S2M),grid on
subplot(2,3,3)
semilogx(W1__,T1M,W2__,T2M),grid on
subplot(2,3,4)
semilogx(W1,L1P,W2,L2P),grid on
subplot(2,3,5)
semilogx(W1_,S1P,W2_,S2P),grid on
subplot(2,3,6)
semilogx(W1__,T1P,W2__,T2P),grid on

figure
bode(L1),hold on
bode(L2)
grid on
```

这一讲就到这里！

