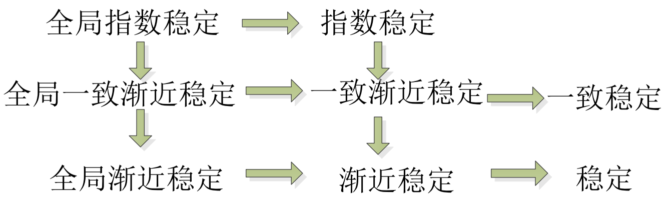
1. 论述 Lyapunov 稳定性的物理意义，并说明全局指数稳定、指数稳定、全局一致渐近稳定、全局渐近稳定、一致渐近稳定、渐近稳定、一致稳定、稳定间的关系。

   答：李雅普诺夫渐近稳定性定理的物理意义：针对一个动态系统和确定的平衡状态，通过分析该系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。具体地说，就是构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟能量函数，沿系统的运动轨迹，通过该能量函数关于时间导数的取值来判断系统能量在运动过程中是否减少，若该导数值都是小于零的，则表明系统能量随着时间的增长是减少的，直至消耗殆尽，表明在系统运动上，就是系统运动逐步趋向平缓，直至在平衡状态处稳定下来，这就是李雅普诺夫意义下的稳定性。

   全局指数稳定、指数稳定、全局一致渐近稳定、全局渐近稳定、一致渐近稳定、渐近稳定、一致稳定、稳定间的关系可用下图表示。



2. 论述线性变换在系统分析中的作用。

   答：线性变化的作用是选取一组基，使变换后的系统数学描述在该组基下具有较简洁的形式，一定程度上消除系统变量间的耦合关系。

3. 阐述镇定问题、极点配置问题、解耦控制问题、跟踪问题的提法。

   答：以渐进稳定作为性能指标称相应的综合问题为镇定问题；以一组期望闭环系统特征值作为性能指标的综合问题称为极点配置问题；使一个 m 输入的 m 输出系统化为 m 个单输入单输出系统的综合问题称为解耦问题；使系统的输出 y 在存在外界干扰的条件下无静差地跟踪参考信号 y0，称相应的问题为跟踪问题。

4. 阐述对于线性时不变系统内部稳定与外部稳定的关系。

   答：对连续时不变系统，若系统为内部稳定，则系统必为 BIBO 稳定；若系统为 BIBO 稳定即外部稳定不能保证系统内部稳定即渐进稳定；若系统完全能控且完全能观，则系统外部稳定等价于系统内部稳定。结合经典控制理论与现代控制理论，写下你对控制的理解。

5. 论证 $\sum = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ 是线性系统。

   解：将微分方程部分写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

   等式两边同时左乘

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}(\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

   即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)\right] = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

   对上式在 $[t_0,\ t_1]$ 间进行积分，有

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)\big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}\tau$$

   整理后得

$$\boldsymbol{x}(t)=C\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

于是代数等式部分有

$$y(t)=C\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau+Du(t)=L(u)$$

用叠加定理验证可知，仅当 $x_0=0$ 时，此系统是线性系统。

当初时条件不为 0 时，系统可以转化为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{x}_0\delta(t), \boldsymbol{x}(0)=0\\ &=\boldsymbol{Ax}(t)+(\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{x}_0)\begin{pmatrix}u(\mathrm{t})\\ \delta(t)\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{Ax}(t)+\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{u}}(t)\end{aligned}$$

所以，可以把其当成线性系统对待。

6. 证明：等价的状态空间模型具有相同的能控性。

证明:对状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+Bu\\ y &= Cx+Du\end{aligned}$$

它的等价空间模型具有形式

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y &= \bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{aligned}$$

其中

$$\bar{A}=TAT^{-1},\bar{B}=TB,\bar{C}=CT^{-1},\bar{D}=D$$

T 是任意的非奇异变换矩阵。利用以上的关系式，等价状态空间模型的能控性矩阵是

$$\Gamma_c[A,B]$$

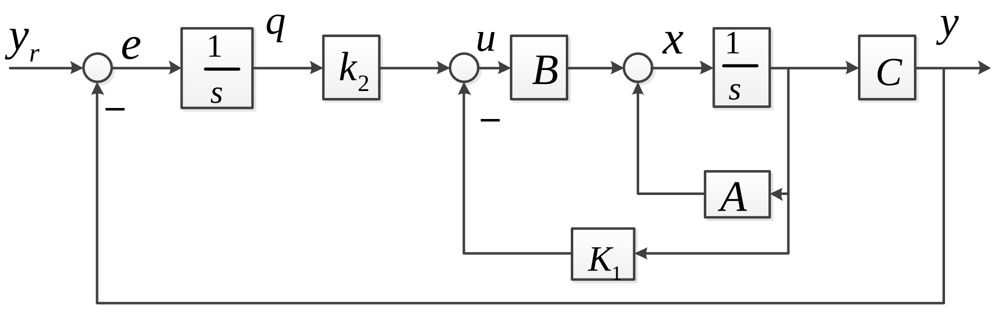
由于矩阵 T 是非奇异的，故矩阵 $\Gamma_c[\bar{A},\bar{B}]$ 和 $\Gamma_c[A,B]$ 具有相同的秩，从而等价的状态空间模型具有相同的能控性。

7. 在极点配置是控制系统设计中的一种有效方法，请问这种方法能改善控制系统的哪些性能？对系统性能是否也可能产生不利影响？如何解决？

答：极点配置可以改善系统的动态性能，如调节时间、峰值时间、振荡幅度。

极点配置也有一些负面的影响，特别的，可能使得一个开环无静差的系统通过极点配置后，其闭环系统产生稳态误差，从而使得系统的稳态性能变差。

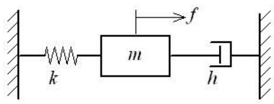
改善的方法：针对阶跃输入的系统，通过引进一个积分器来消除跟踪误差，其结构图如下。



对构建增广系统，可以再通过极点配置方法来设计增广系统的状态反馈控制器，从而使得闭环系统不仅保持期望的动态性能，而且避免了稳态误差的出现。

(研)

8. 考虑如图的质量弹簧系统。其中，m 为运动物体的质量，k 为弹簧的弹性系数，h 为阻尼器的阻尼系数，f 为系统所受外力。取物体位移为状态变量 x_1，速度为状态变量 x_2，并取位移为系统输出 y，外力为系统输入 u，试建立系统的状态空间表达式。



解： $f = m$ ……………………1 分

令位移变量为 x_1，速度变量为 x_2，外力为输入 u，有

$$u - kx_1 - kx_2 = m\dot{x}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .2 \text{ 分}$$

于是有

$$\dot{x}_1 = x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \text{ 分}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{h}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .2 \text{ 分}$$

再令位移为系统的输出 y，有 $y = x_1$

写成状态空间表达式，即矩阵形式，有

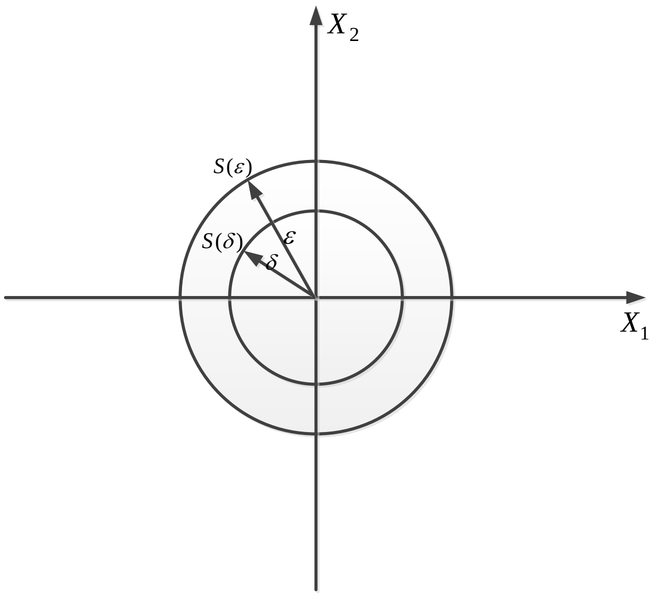
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u \ldots\ldots\ldots 2 \text{ 分}$$

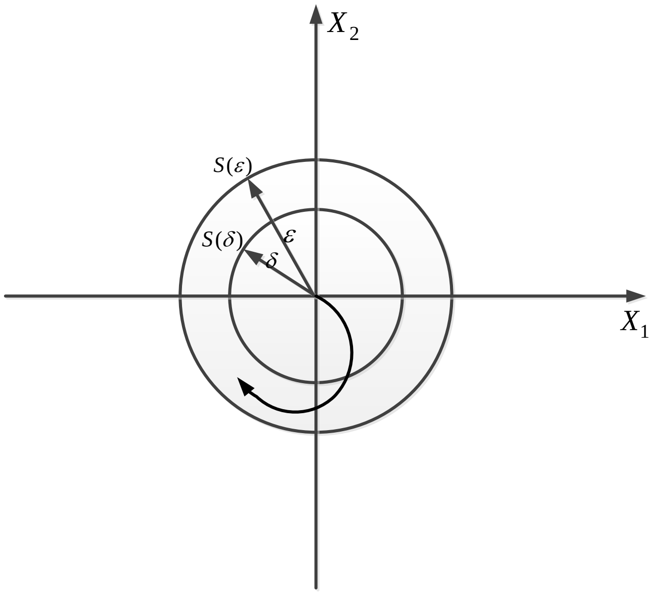
$S(\varepsilon)S(\delta)$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .2 \text{ 分}$$

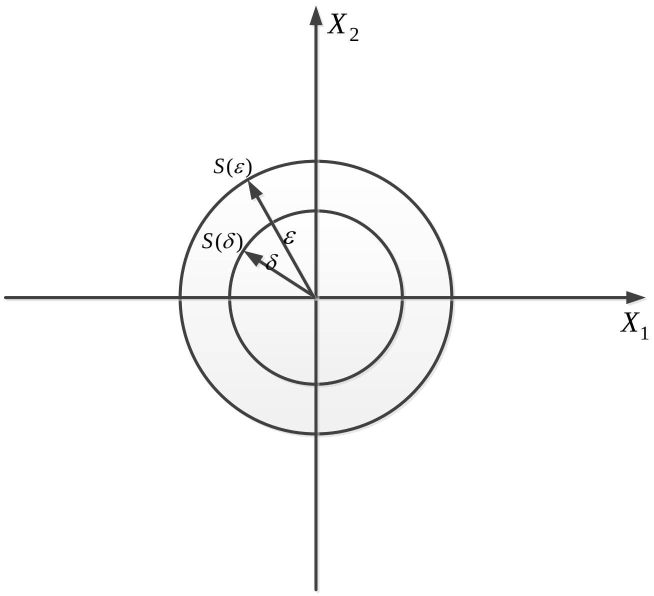
9. Lyapunov 稳定性分析

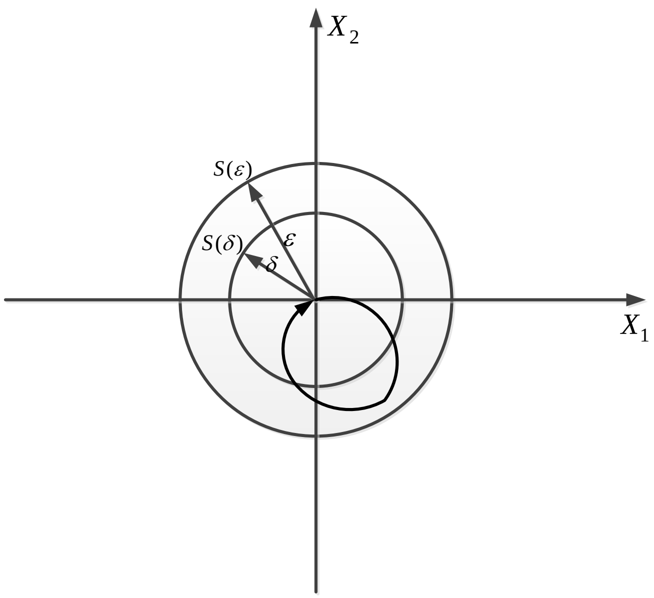
1) 绘出二维平面上李氏稳定平衡状态的轨迹图



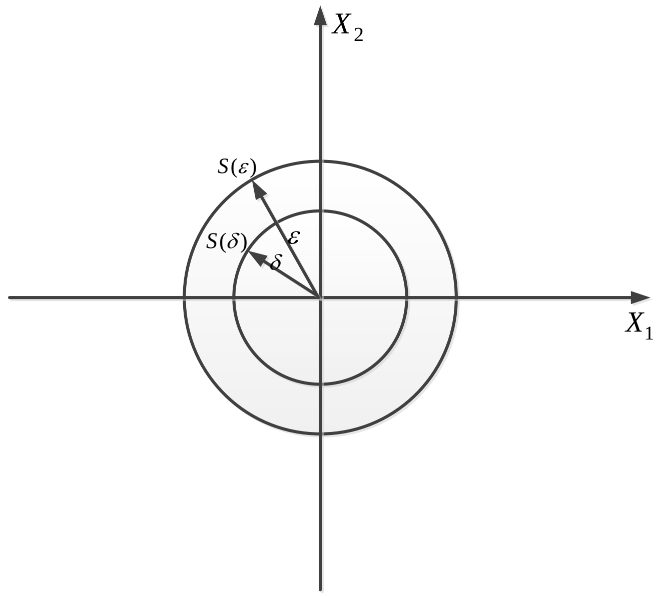


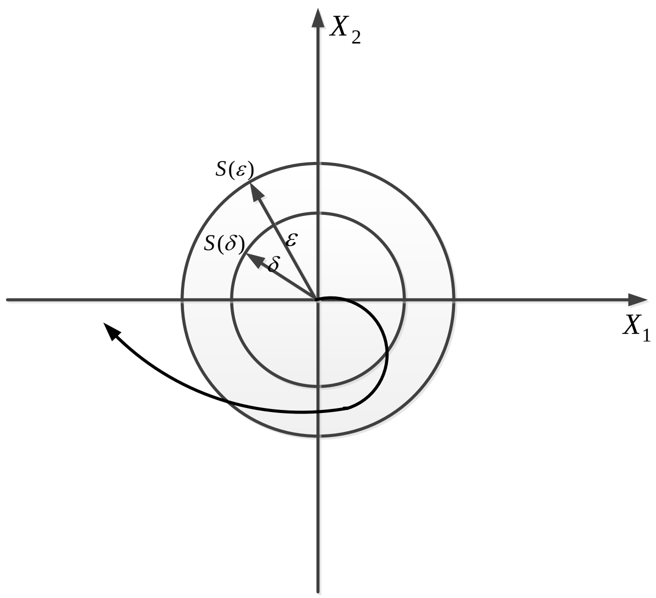
2)　绘出二维平面上李氏渐近稳定平衡状态的轨迹图





3) 绘出二维平面上李氏不稳定平衡状态的轨迹图





10. 给定线性定常系统 $\begin{array}{l}\dot{x}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)\\ y(t)=\boldsymbol{C}x(t)\end{array}$ 证明：对 $\forall x_0 \in R^n$ 以及常数 τ 和 t_0，状态 x_0 在 t_0 时刻能控当且仅当状态 $e^{A\tau}x_0$ 在 t_0 时刻能控。

证明：系统状态 $\boldsymbol{x}_0$ 在 t_0 时刻能控，所以必存在 $t_\mathrm{f} > t_0$ 有

$$\boldsymbol{x}_0=-\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)d\xi$$

即存在 $\boldsymbol{u}(t)$ 可以使 $\boldsymbol{x}_0$ 转移到 0 状态。而对于线性定常系统，能控性是一个全局的的概念，由于状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性，所以对初始状态的非奇异变换 $\boldsymbol{x}_{0\_}=e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{x}_0$ 仍然是系统状态空间中的点，当初始时刻 t_0 的状态为 $\boldsymbol{x}_{0\_}$， 也必然有存在 $t_\mathrm{f}' > t_0$ 和容许控制 $\boldsymbol{w}(t)$ 使下式成立

$$\boldsymbol{x}_{0\_}=-\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}'} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}(\xi)d\xi$$

所以对状态 $\boldsymbol{x}_0$ 在 t_0 时刻能控当且仅当状态 $e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{x}_0$ 在 t_0 时刻能控。

11. 给定线性定常系统$W(s)$的最小实现为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O})$，其初始条件令为$x(0)=x_0$，证明：

（1）在输入 $u(t)=u_0e^{\lambda t}$ 下系统的状态的 Laplace 变换可以表示为 $\boldsymbol{X}(s)=(sI-\boldsymbol{A})^{-1}(x_0-(\lambda I-\boldsymbol{A})^{-1})+(\lambda I-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}u_0/(s-z_0)$。

（2）设输入$u(t)=u_0e^{\lambda t}$使得系统在初始值下有$Y(t)\equiv 0$，则 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ 的充要条件是原系统的零点在左半平面上，这里$x_0\neq 0$。

证明：(1)由于定常线性系统$\boldsymbol{W}(s)$的最小实现为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},0)$，并计及$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_0\mathrm{e}^{\lambda t}$，依状态方程解理论，有 $\boldsymbol{X}(s)=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0/(s-\lambda)$ (1)

再依教材中式(3-17)已推导出的等式

$$(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(s-\lambda)^{-1}=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(s-\lambda)^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(\frac{\lambda}{s-\lambda}\mathbf{I}-(s-\lambda)^{-1}\boldsymbol{A}\right)(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(-\mathbf{I}+\frac{s}{s-\lambda}\mathbf{I}-(s-\lambda)^{-1}\boldsymbol{A}\right)(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(-\mathbf{I}+(s-\lambda)^{-1}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\right)(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$=-(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}+(s-\lambda)^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}+(s-\lambda)^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(s-\lambda)^{-1}=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}+(s-\lambda)^{-1}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，将其代入(1)式作同类项合并便得

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{x}_0-(\lambda\mathbf{I}-A)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0)+(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0/(s-\lambda) \qquad (2)$$

(2) 将(2)式代入输出方程，得

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{x}_0-(\lambda\mathbf{I}-A)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0)+\boldsymbol{C}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0/(s-\lambda) \qquad (3)$$

按题意要求$\boldsymbol{Y}(t)\equiv 0$，即$\boldsymbol{x}_0-(\lambda\mathbf{I}-A)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0\equiv\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{C}(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{0}$，由此知$\lambda$为系统的零点，且

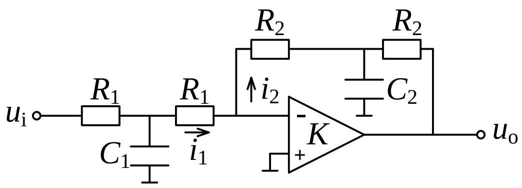
$$\boldsymbol{X}(s)=(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0/(s-\lambda)$$

对其反 Laplace 变换，得

$$\boldsymbol{x}(t)=(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{L}[\boldsymbol{u}_0/(s-\lambda)]=(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0\mathrm{e}^{\lambda t}$$

显然，$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$的充要条件是原系统的零点在左平面上。

12. .已知有源电路网络如下图，求传递函数与状态空间模型。



解：令$x_1=u_{c1},x_2=u_{c2},y=u_\mathrm{o}$

$$\begin{cases}\dfrac{u_\mathrm{i}-x_1}{R_1}=C_1\dot{x}_1+\dfrac{x_1}{R_1}\\ \dfrac{x_2}{R_2}=-\dfrac{x_1}{R_1}\\ -\dfrac{x_2}{R_2}=C_2\dot{x}_2+\dfrac{x_2-u_\mathrm{o}}{R_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{R_1C_1} & 0\\ \dfrac{2R_2}{R_1{}^2C_1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{R_2}{R_1}\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}\dfrac{2R_2{}^2C_2}{R_1^2C_1} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\dfrac{R_2{}^2C_2}{R_1}u\end{matrix}\Rightarrow W(s)=-\frac{\dfrac{R_2^2C_2}{R_1^2C_1}s+\dfrac{2R_2}{R_1^2C_1}}{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}$$

13. 对 SISO 系统，从传递函数是否出现零极点对消现象出发，说明单位正、负反馈系统的控制性与能观性与开环系统的能控性和能观性是一致的。

答：对SISO系统，单位反馈并不会改变零点，也就是不会产生零极点对消现象，故单位反馈系统的能控性与能观性与开环系统的能控性和能观性是一致的。

14. 建立工程系统模型的途径有哪些？系统建模需遵循的建模原则是什么？

答：建立工程系统模型的途径有机理建模和系统辨识。系统建模需遵循的建模原则是建模必须在模型的简练性和分析结果的准确性间作出适当的折衷。

15. 在实际系统中，或多或少含有非线性特性，但许多系统在某些工作范围内可以合理地用线性模型来代替。近似线性化方法可以建立该邻域外内的线性模，非线性系统可进行线性化的条件是什么。

答：（1）系统的正常工作状态至少有一个稳定工作点。

（2）在运行过程中偏量满足小偏差。

（3）只含非本质非线性函数，要求函数单值、连续、光滑。

16. 对于连续线性系统和离散线性系统，说明它们的能控性和能达性是否等价？

答：对于连续时不变线性系统，由于状态转移矩阵的可逆性，能控性与能达性是等价的。

对于离散时不变线性系统和离散时变线性系统，只有在系统矩阵是非奇异的情况下，能控性与能达性才是等价的。而对于连续时变线性系统，能控性与能达性一般是不等价的。

17. 什么是线性系统的 BIBO 稳定性？该定义中为什么要强调初始条件为零？

答：在初始条件为零的情况下，如果对任意一个有界输入，对应的输出均为有界的。这种外部稳定性基于系统的输入输出描述，属于有界输入有界输出稳定性，简称 BIBO 稳定性。因为只有在初始条件为零的情况下，系统的输入和输出描述才是唯一的，这样才有意义。

18. 什么是鲁棒性？鲁棒性分为稳定鲁棒性和性能鲁棒性，他们分别指的哪方面？

答：鲁棒性是指控制系统抵御外部干扰、抑制噪声影响和克服系统参数摄动、结构摄动影响的能力，也是实际控制系统应该具备的性能。

稳定鲁棒性是指一个控制系统当其模型参数发生大幅度变化或其结构发生变化时能否仍保持渐近稳定。而性能鲁棒性是指控制系统在模型扰动下，系统的品质指标能否仍保持在某个许可的范围内。

19. 动态系统按系统机制来分分成哪两种系统？请列举出另外四种分类方法。

答：动态系统按系统机制来分：连续变量动态系统，离散事件动态系统。

还有分类方法为：按系统特性来分，按系统参数分布性来分，按系统作用时间来分，按参数随时间的变化性来分。

20. 代数等价系统的定义是什么？代数等价系统的基本特征是什么？

答：代数等价系统：称具有相同输入、输出的两个同阶线性时不变系统为代数等价系统，当且仅当它们的系统矩阵间满足坐标变换中给出的关系。

代数等价系统的基本特征是具有相同的代数结构特征如特征多项式、特征值（极点）、以及随后的稳定、能控能观性，所有代数等价系统均具有等同的输入输出特性。

21. 对于采样器、保持器可以用理想情况代替实际情况的条件是什么?

答：1 连续信号是低频的，且最大频率为 ω_f ，即 $\omega>\omega_f$ 时，信号的频谱为 0；

2 实际采样脉宽 $\tau \ll T$，且 $\omega_s > 2\omega_f$；

3 实际采样器后需串联放大器环节 $1/\tau$ 或置 ZOH。

22. 请简述对于连续系统能控性和能观性的定义，并说明什么是一致能控，什么是一致能观？

答：对 t_0 时刻的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，若存在一个无约束的容许控制 $\boldsymbol{u}$，能在任意时间使系统由 $\boldsymbol{x}_0$ 转移到一个终端 $\boldsymbol{x}(t_f)$，通常将终端状态指定为零状态 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，则称系统在 t_0 时刻是完全能控的。如果能控性不依赖于时刻 t_0，则称系统是一致能控的。

根据在 $[t_0, t_f]$ 的观测值 $y(t)$，能唯一地确定系统在 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，则称系统在 $[t_0, t_f]$ 上是完全能观的。如果能观性不依赖于时刻 t_0，则称系统是一致能观的。

23. 系统综合问题主要针对被控对象有哪两方面？时域指标和频域指标包含有什么？

答：性能指标和控制输入两方面；时域指标由系统单位阶跃响应所定义，有稳态误差、超调量、上升时间、峰值时间、调节时间、衰减比、阻尼振荡频率、震荡次数等；频域指标一般有谐振峰值、谐振频率和截止频率。