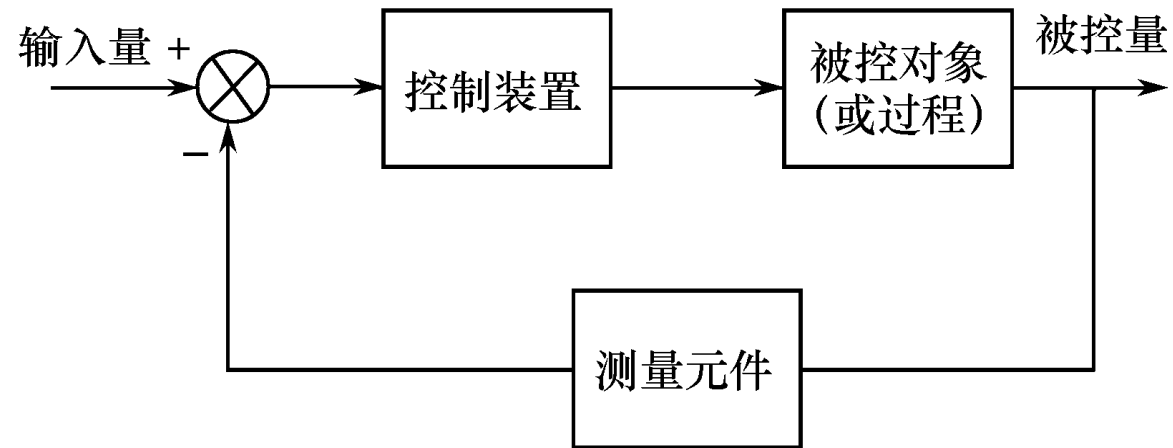


第三章 直流-直流变换电路的动态模型与控制

- ◆ 开关周期平均与小信号线性化动态模型
- ◆ 统一电路模型
- ◆ 调制器的模型
- ◆ 闭环控制与稳定性

课程教材：徐德鸿、马皓、汪樾生主编 电力电子技术

3.1 开关周期平均与小信号线性化动态模型



反馈控制系统

- ◆ 什么是动态模型？
- ◆ 为什么要讨论动态模型？
- ◆ 如何建立动态模型？

什么是动态模型？

◆ 静态特性和模型

- 输入输出电压增益

$$\frac{V}{V_g} = D$$

- 功率器件的电压，电流应力
- 输出电压纹波
- 输入电流纹波
- 变换效率
- 功率密度

@假定D, Vg等恒定, 而且达到稳态

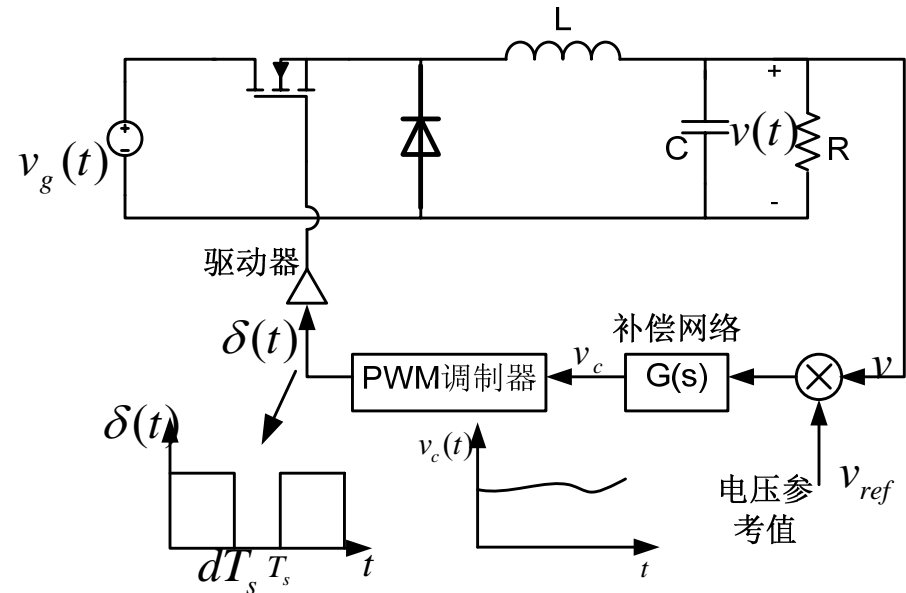
◆ 动态模型

$$\frac{dx}{dt} = f(v_g, d, t)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\frac{v(s)}{d(s)} = ?$$

$$\frac{v(s)}{v_g(s)} = ?$$

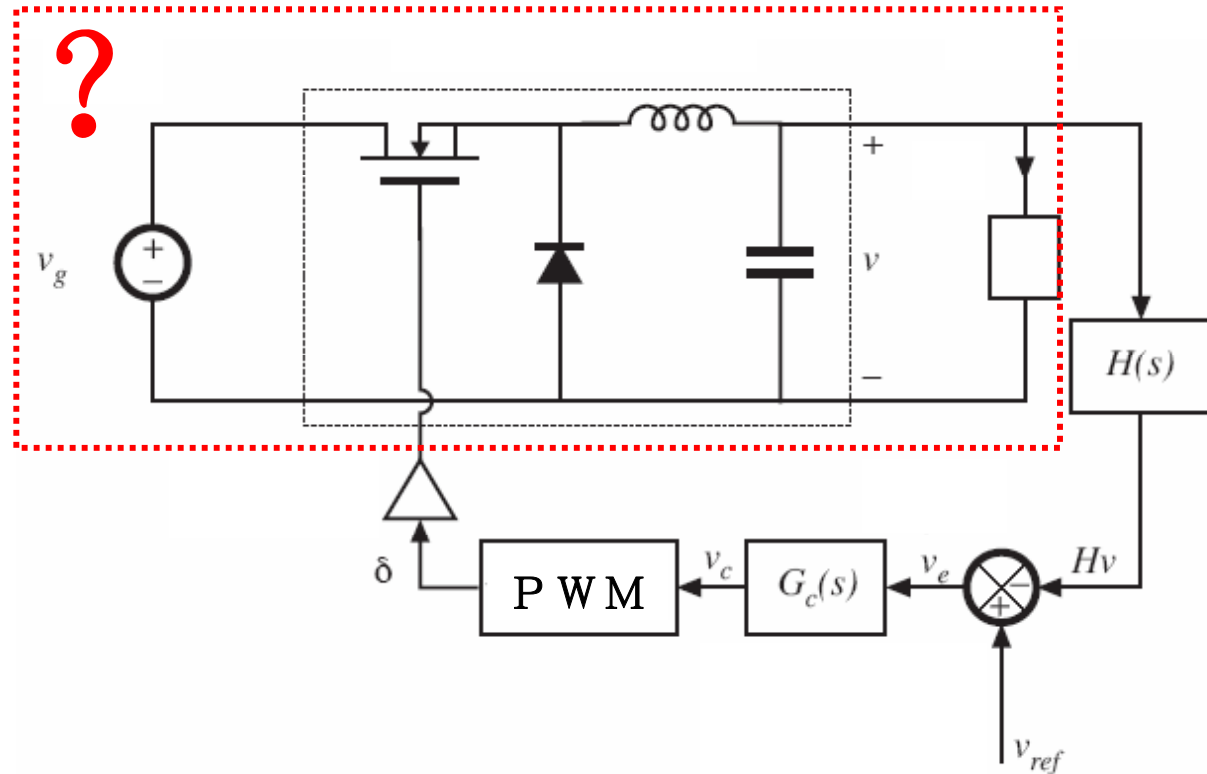


为什么要讨论动态模型？

- ◆ 设计控制系统
- ◆ 系统静态特性、动态性能分析 ➡ **需要 动态模型**
- ◆ 仿真

$$\frac{v(s)}{d(s)} = ?$$

$$\frac{v(s)}{v_g(s)} = ?$$



电力电子装置的技术指标（DC/DC变换器为例）

- ◆ **静态指标**：输出电压的精度、纹波、变换效率、功率密度
- ◆ **动态指标**：电源调整率、负载调整率、动态性能、并联模块的不均流度



功率变换电路设计：

电路拓扑

磁设计

功率元件驱动

热设计

系统控制的设计：

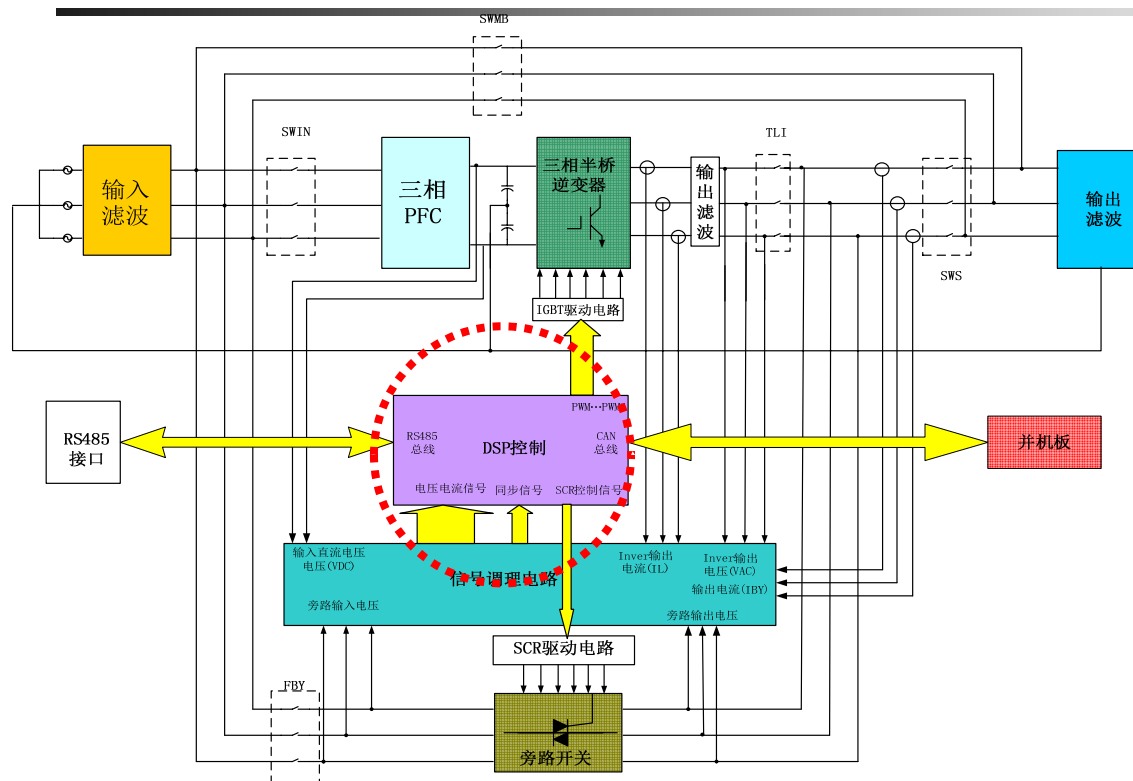
控制环路方案

控制参数设计



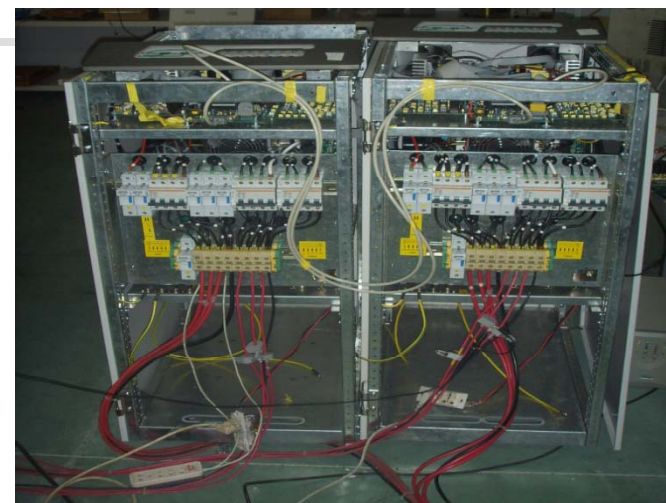
功率变换电路设计与系统控制的设计就如汽车的左、右轮

控制环节的地位？



不停电电源UPS

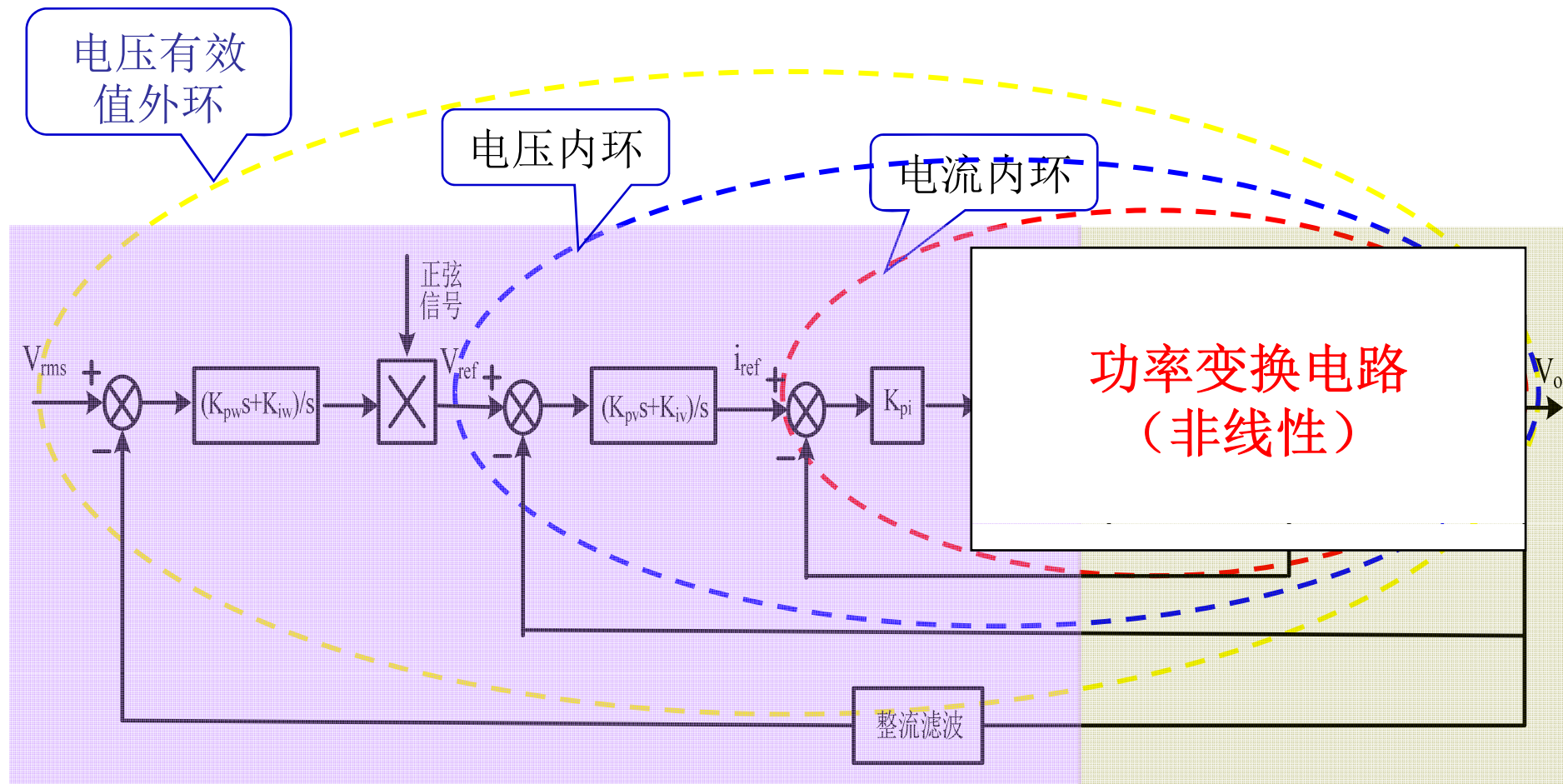
由于控制环节简单或个头小，虚拟化（数字化），它的作用容易被忽视！



DSP chip

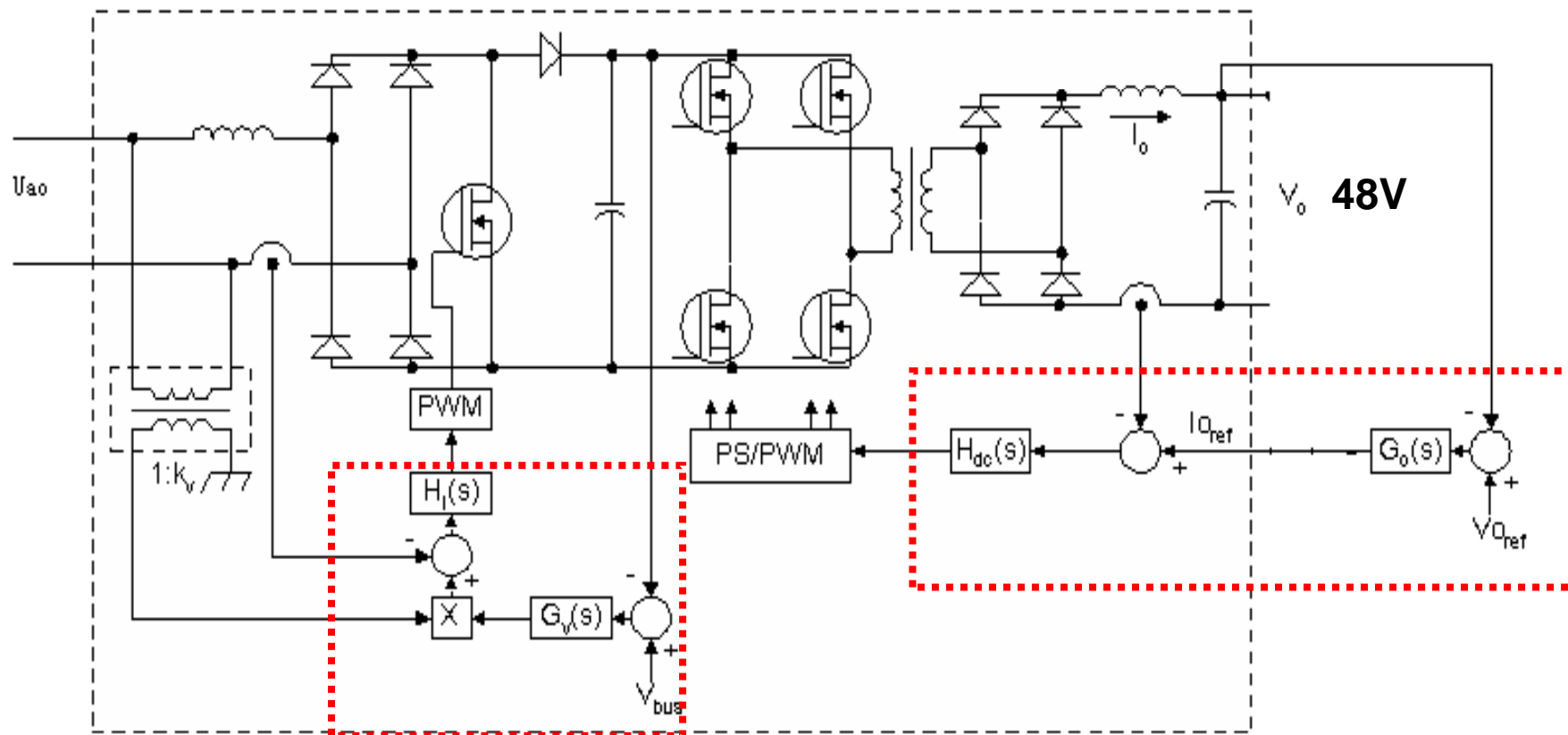
不要被现象所迷惑！

U P S (uninterrupted power supply)中 逆变系统控制框图



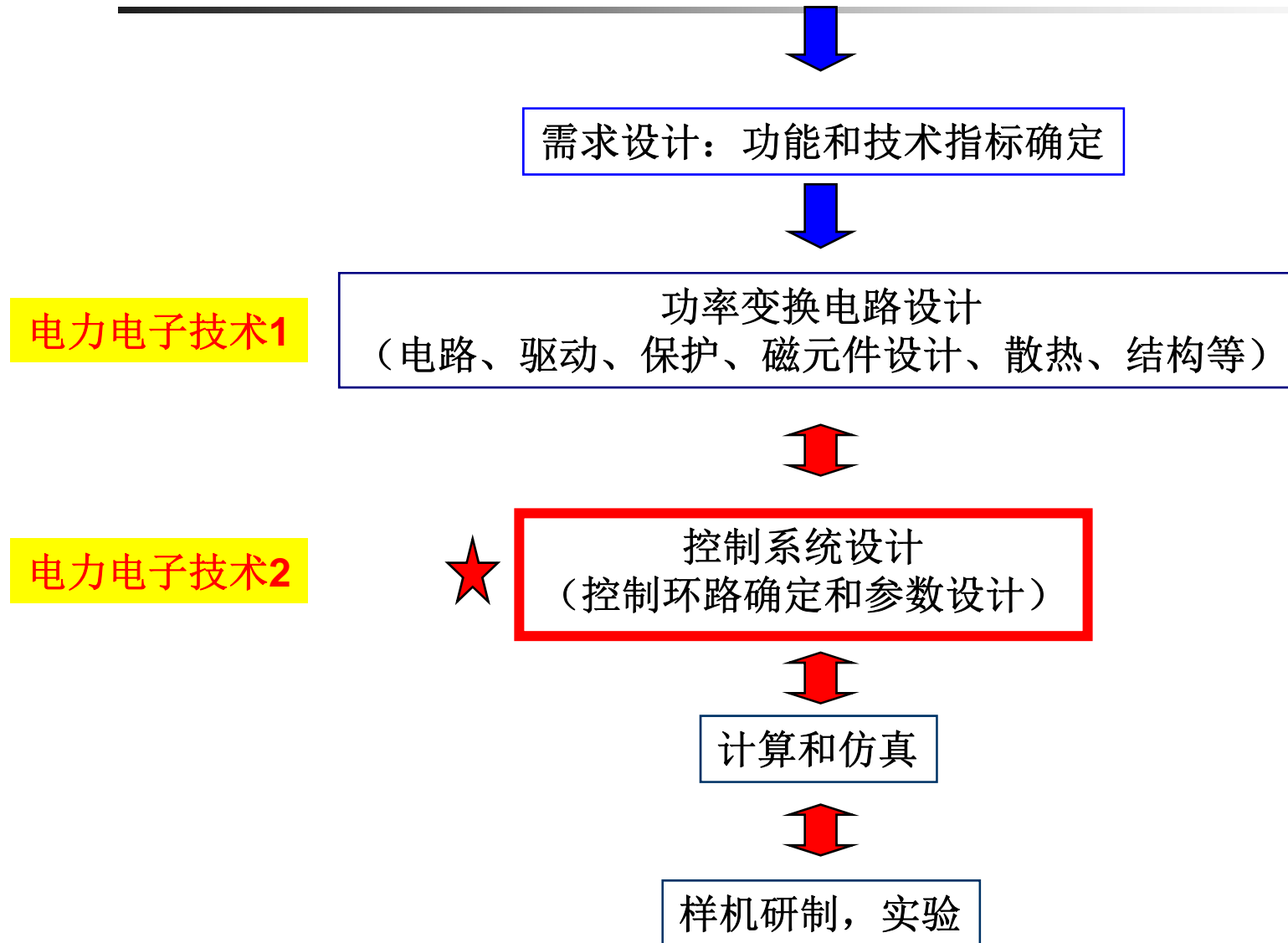
功率变换电路（非线性）的动态模型？
如何设计反馈控制器（调节器）？

通讯基础电源的系统

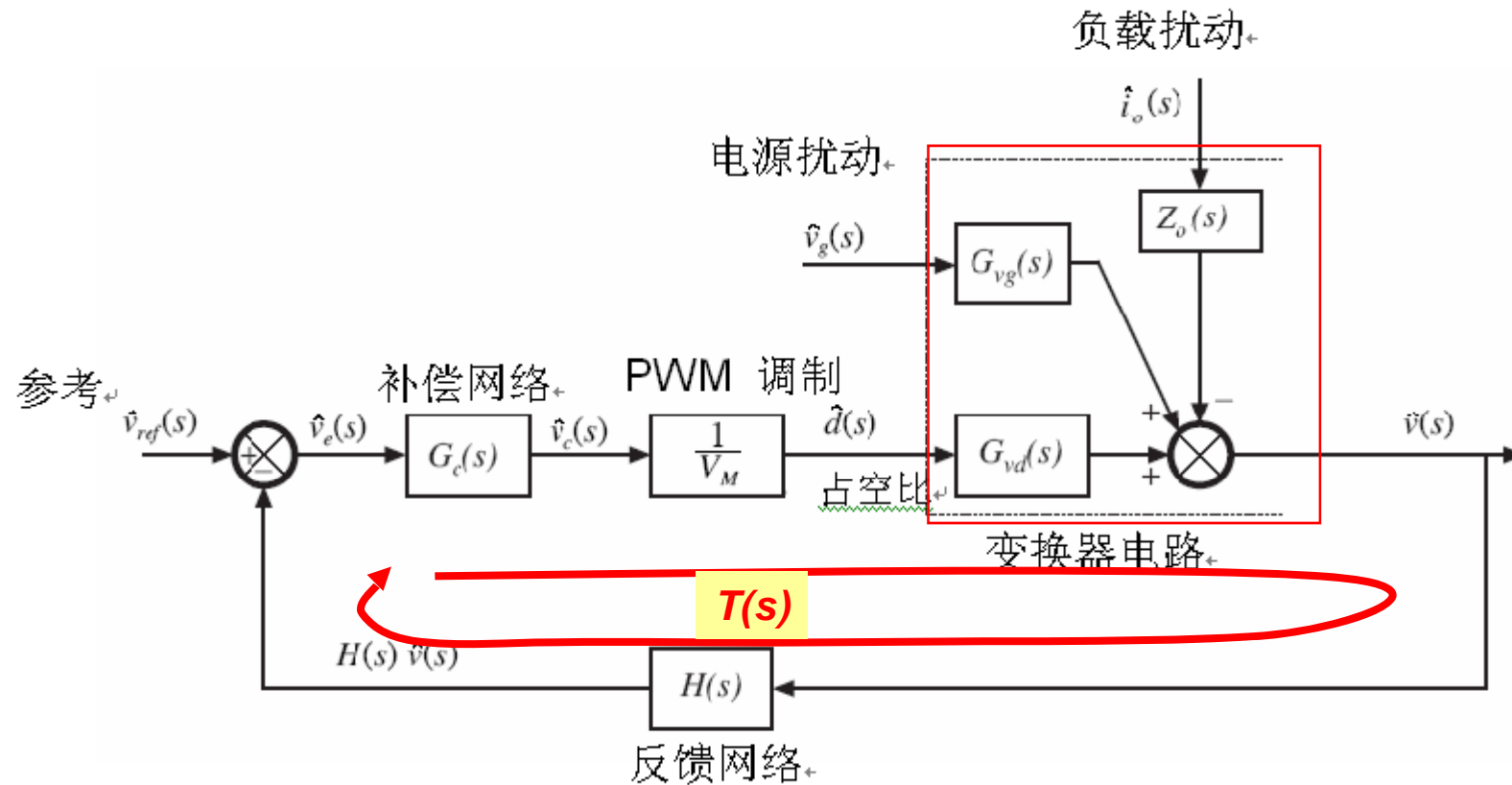


如何设计反馈控制器（调节器）？

电力电子装置开发主要流程



Buck DC/DC变换器系统的线性化模型



Buck DC/DC变换器电路的线性化模型可以表示为传递函数

$$\hat{v}(s) = G_{vd}(s)\hat{d}(s) + G_{vg}(s)\hat{v}_g(s) + Z_o(s)\hat{i}_o(s)$$

引入反馈前、后的性能比较

开环控制

电压反馈控制

$$\hat{v}(s) = G_{vd}(s)\hat{d}(s) + G_{vg}(s)\hat{v}_g(s) + Z_o(s)\hat{i}_o(s) \quad \hat{v}(s) = \hat{v}_{ref} \frac{1}{H} \frac{T}{1+T} + \hat{v}_g \frac{G_{vg}}{1+T} + \hat{i}_o \frac{Z_o}{1+T}$$

T为回路增益, $T = H(s)G_c(s)G_{vd}(s)/V_M$

输入电源扰动对输出电压的影响

$$G_{vg}(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_g(s)} \Big|_{\hat{d}(s)=0, \hat{i}_o(s)=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_g(s)} \Big|_{\hat{d}(s)=0, \hat{i}_o(s)=0} = \frac{G_{vg}(s)}{1+T}$$

输出负荷扰动对输出的影响

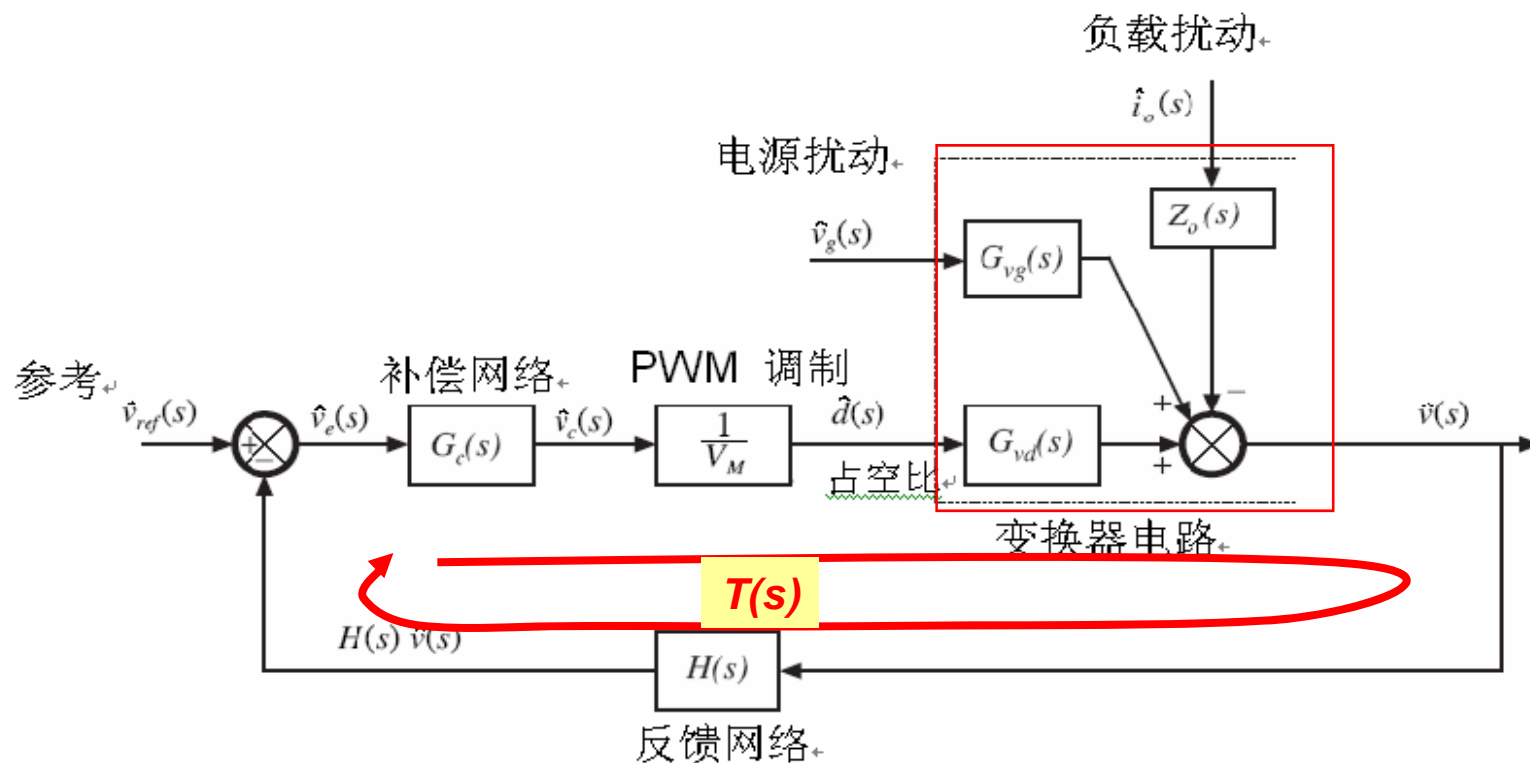
$$Z_o(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}_o(s)} \Big|_{\hat{v}_g(s)=0, \hat{d}(s)=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}_o(s)} \Big|_{\hat{v}_g(s)=0, \hat{d}(s)=0} = \frac{Z_o(s)}{1+T}$$

输出电压的误差

$$G_{vd}(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \Big|_{\hat{v}_g(s)=0, \hat{i}_o(s)=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_{ref}(s)} \Big|_{\hat{v}_g(s)=0, \hat{i}_o(s)=0} = \frac{1}{H} \frac{T}{1+T}$$

引入反馈控制的独特优势

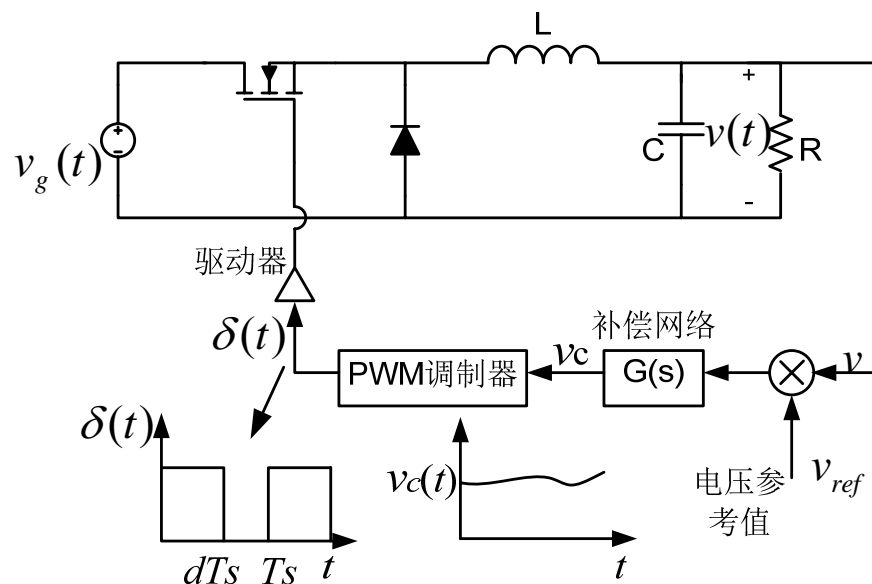
- ◆ 抑制输入电压扰动对输出电压的影响
- ◆ 抑制负荷扰动对输出电压的影响
- ◆ 提高输出的精度，而且使输出的精度不受电力电子系统中参数的漂移和变化的影响



如何建立动态模型？

- ◆ **动态模型概念（ Modeling ）**
 - 用数学的方法描述功率变换器的动态过程的行为
 - 在动态模型过程中进行简化的意义
 - 抓住主要矛盾，忽略次要因数，获得简洁的公式
 - 简化模型能够直观地反映变换器的动态特性与电路元件参数之间的关系，便于实施控制系统的工程设计。

DC/DC变换器(稳态)

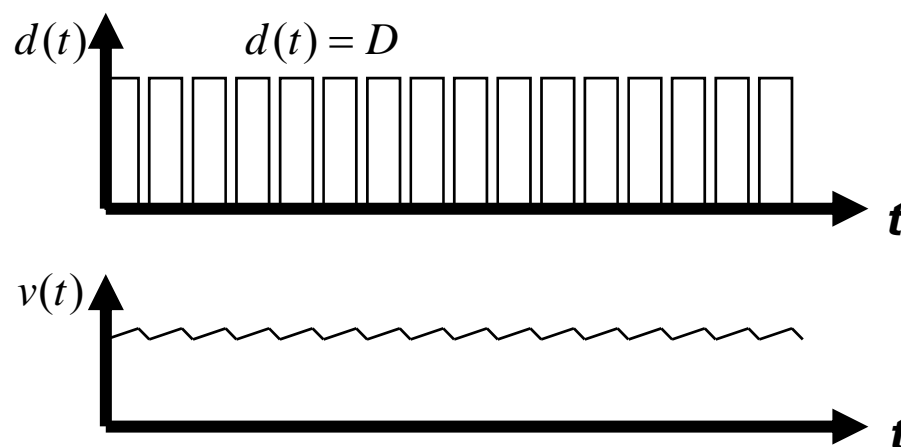


◆ 占空比

$$d(t) = D = \text{const}$$

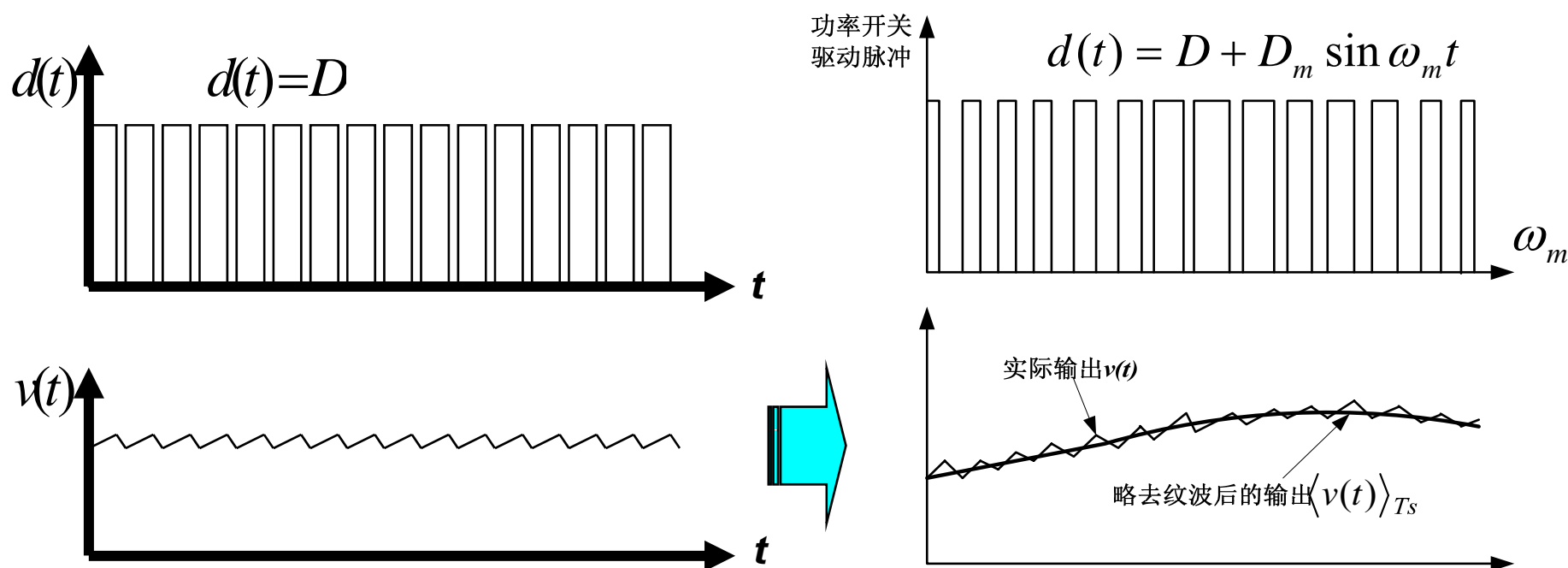
◆ Switch frequency

$$\omega_s = 2\pi f_s$$

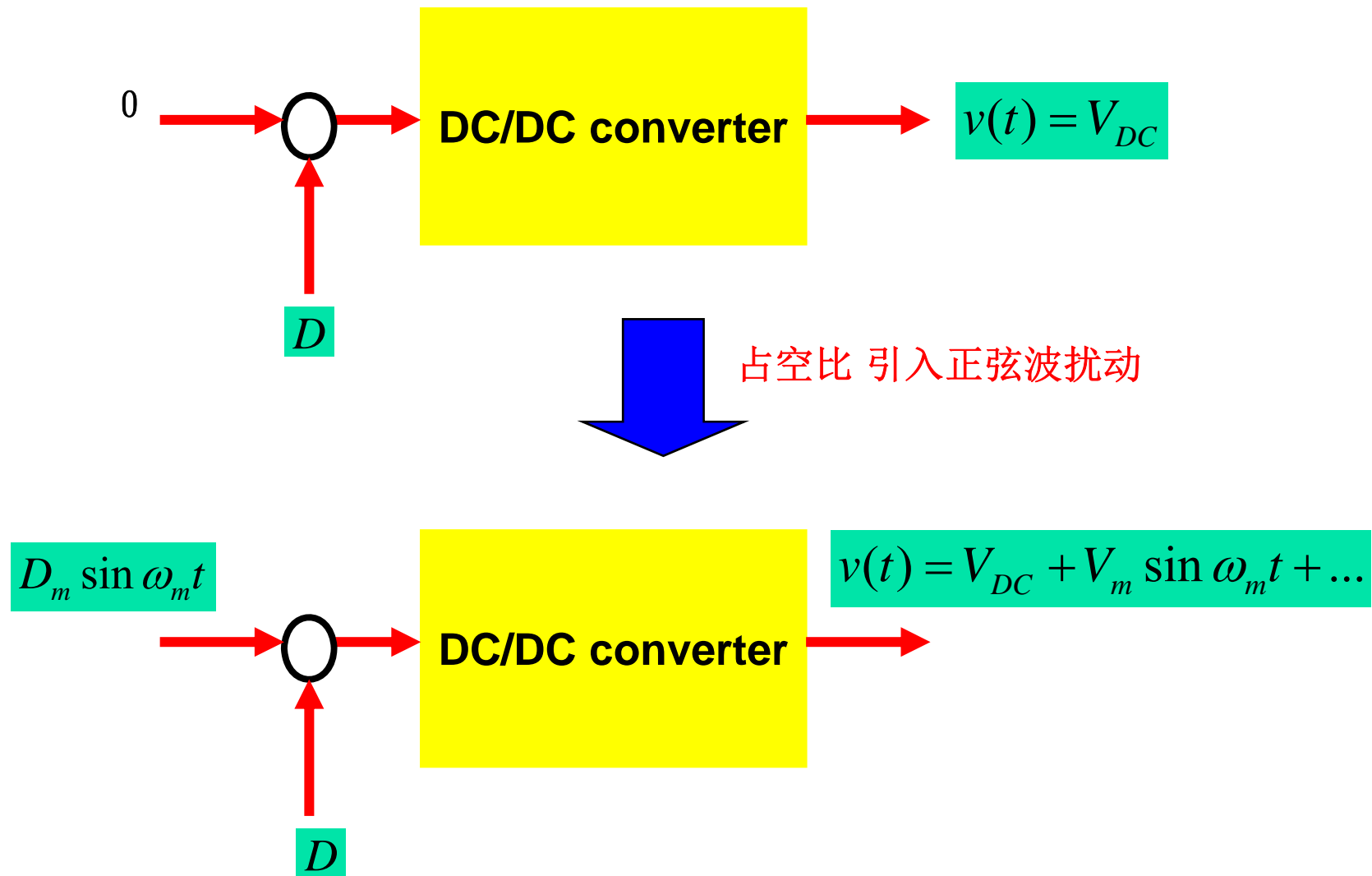


DC/DC变换器(动态)

- ◆ 引入扰动 $d(t) = D + D_m \sin \omega_m t$
- ◆ $|D_m| \ll D$, frequency ω_m is much smaller than the converter switching frequency $\omega_m = 2\pi f_s$

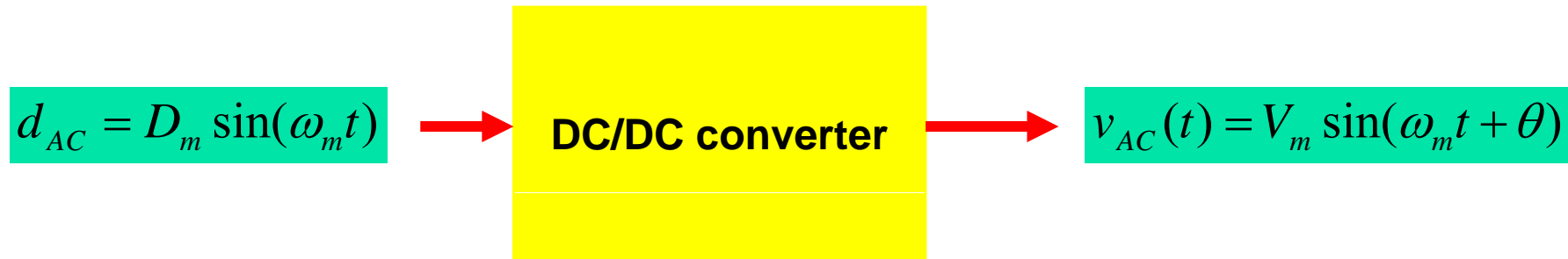


稳态输入输出关系



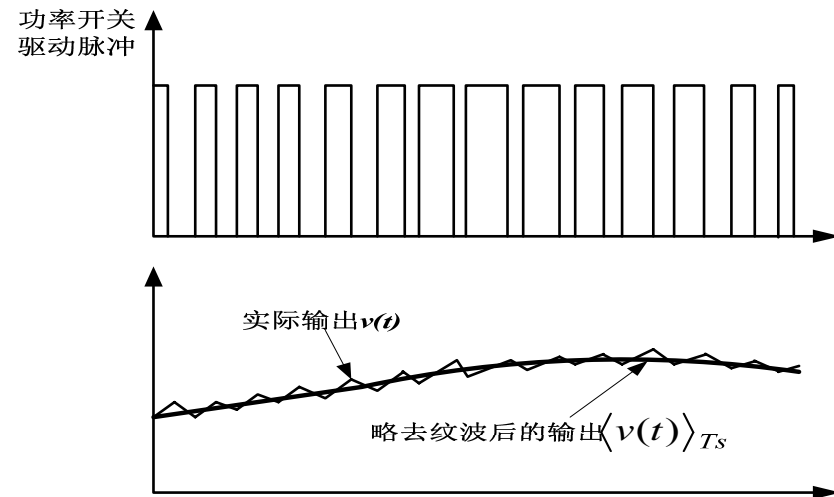
仅考虑扰动分量的稳态输入输出关系

- ◆ 对小信号交流扰动，电路具有线性系统的性质
- ◆ 在某个稳态工作点附近来看，具有线性系统的特性，可以用线性系统描述



$input : \omega_m \Rightarrow output : \omega_m$

$$V_m \propto D_m$$



变换器建模的思路

- ◆ 反映占空比的**低频**变化对变换器中电压、电流的影响
- ◆ 忽略开关纹波
- ◆ 忽略开关频率谐波分量和边频带

相对论，参照物：开关频率

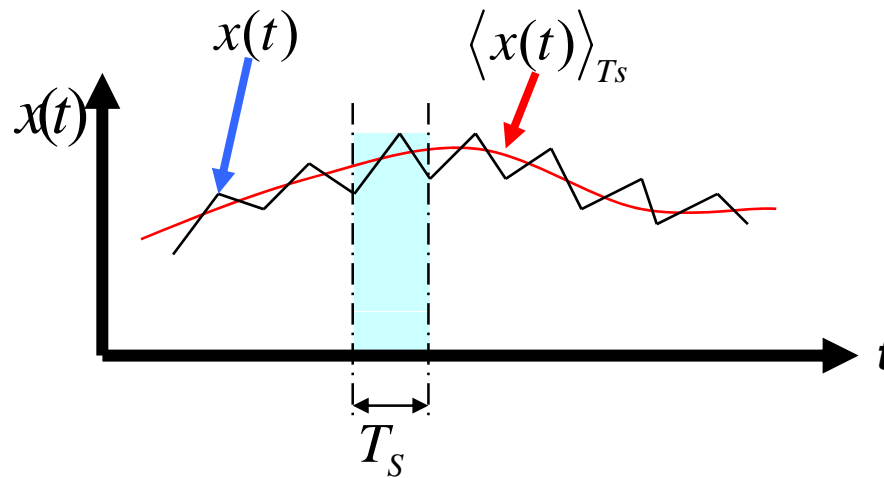
- ◆ **Approach:**
 - Remove switching harmonics by averaging all waveforms over one
 - switching period

开关周期平均算子 (Averaging over switching cycle)

- ◆ Average over one switching period to remove switching ripple
- ◆ 另一种定义

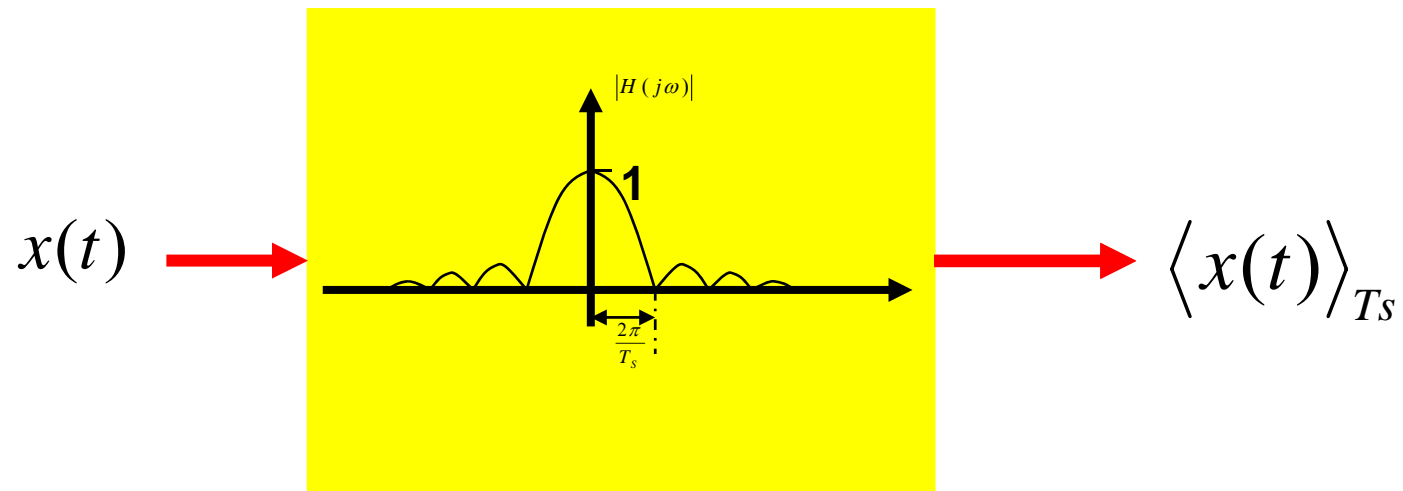
$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t x(\tau) d\tau$$

$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} x(\tau) d\tau$$



开关周期平均算子的作用

$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t x(\tau) d\tau$$



- $h(t)$ 是一个低通滤波器
- 作用开关周期平均算子等于对信号进行低通滤波
- 带宽小于 f_s , 对开关纹波等有抑制作用

线性电路作用 “开关周期平均算子” 的不变性

$$L \frac{d \langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle v_L(t) \rangle_{T_s}$$
$$C \frac{d \langle v_C(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle i_C(t) \rangle_{T_s}$$

欧姆定律也成立

KVL,KCL定律成立

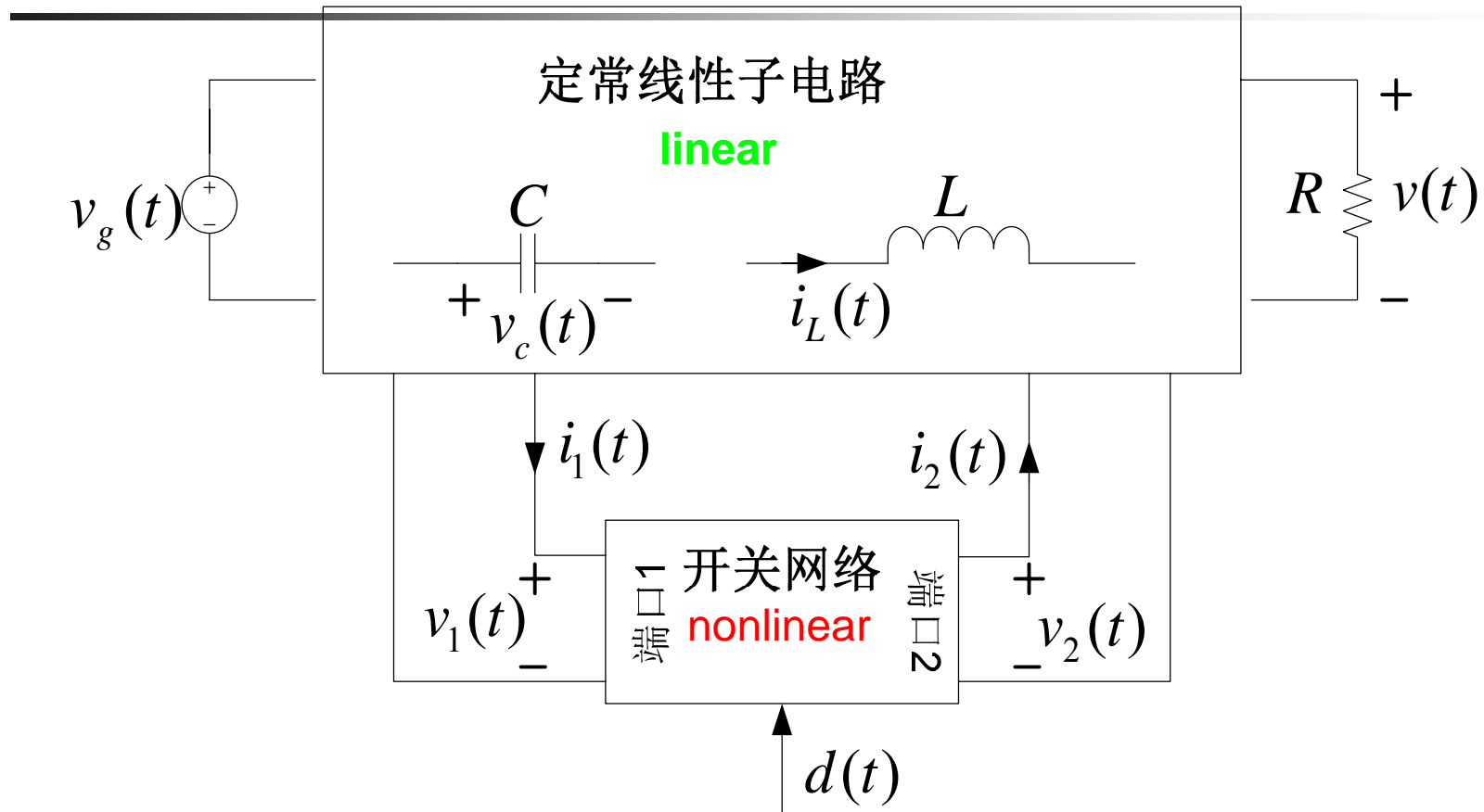


线性方程中变量作用开关周期平均算子后原方程仍成立



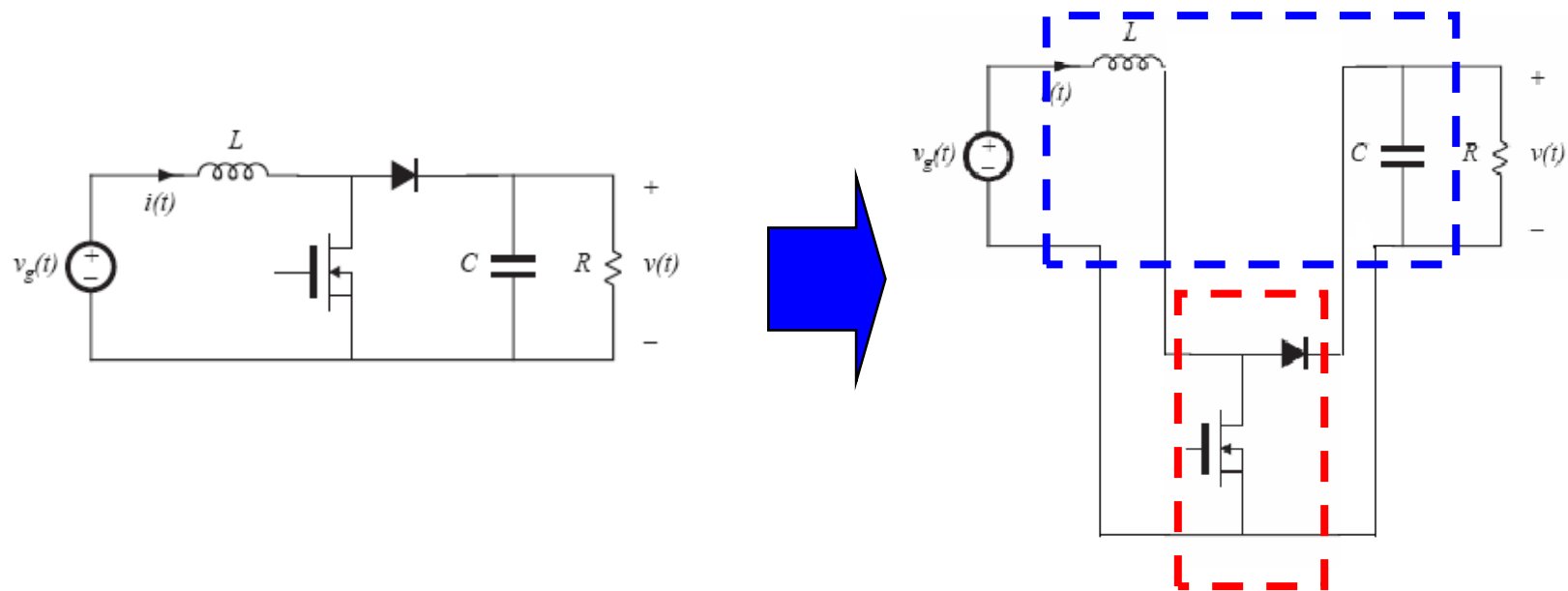
线性电路作用开关周期平均算子后电路拓扑和元件值不变

D C/D C 变换电路分割成子电路

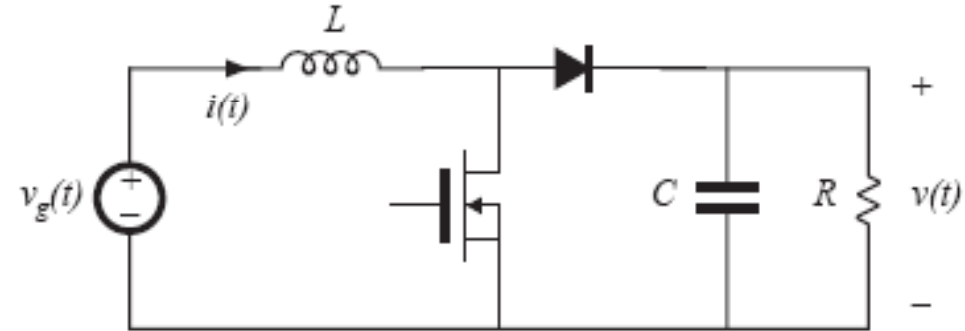
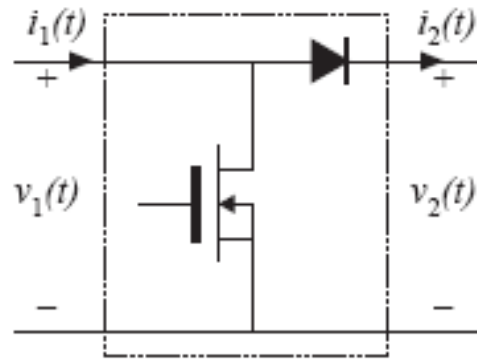


- 分割成线性子电路与非线性子电路两个部分
- 非线性子电路: 两端口开关网络
- 如何处理非线性子电路?

Boost 变换器分割成子电路



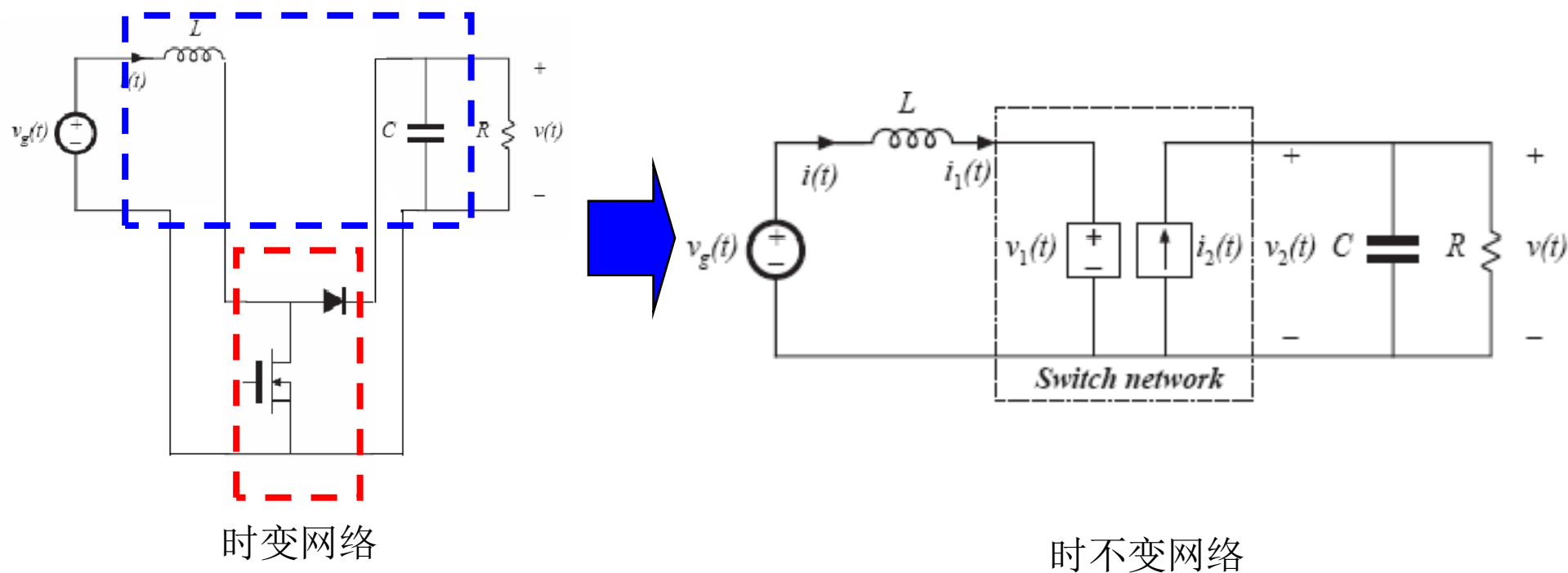
Boost converter



- 二端口网络有 4 个端口变量
- 选择其中的两个作为独立变量（自变量），其他两个变量作为非独立变量（因变量）
- 选择状态变量作为独立变量

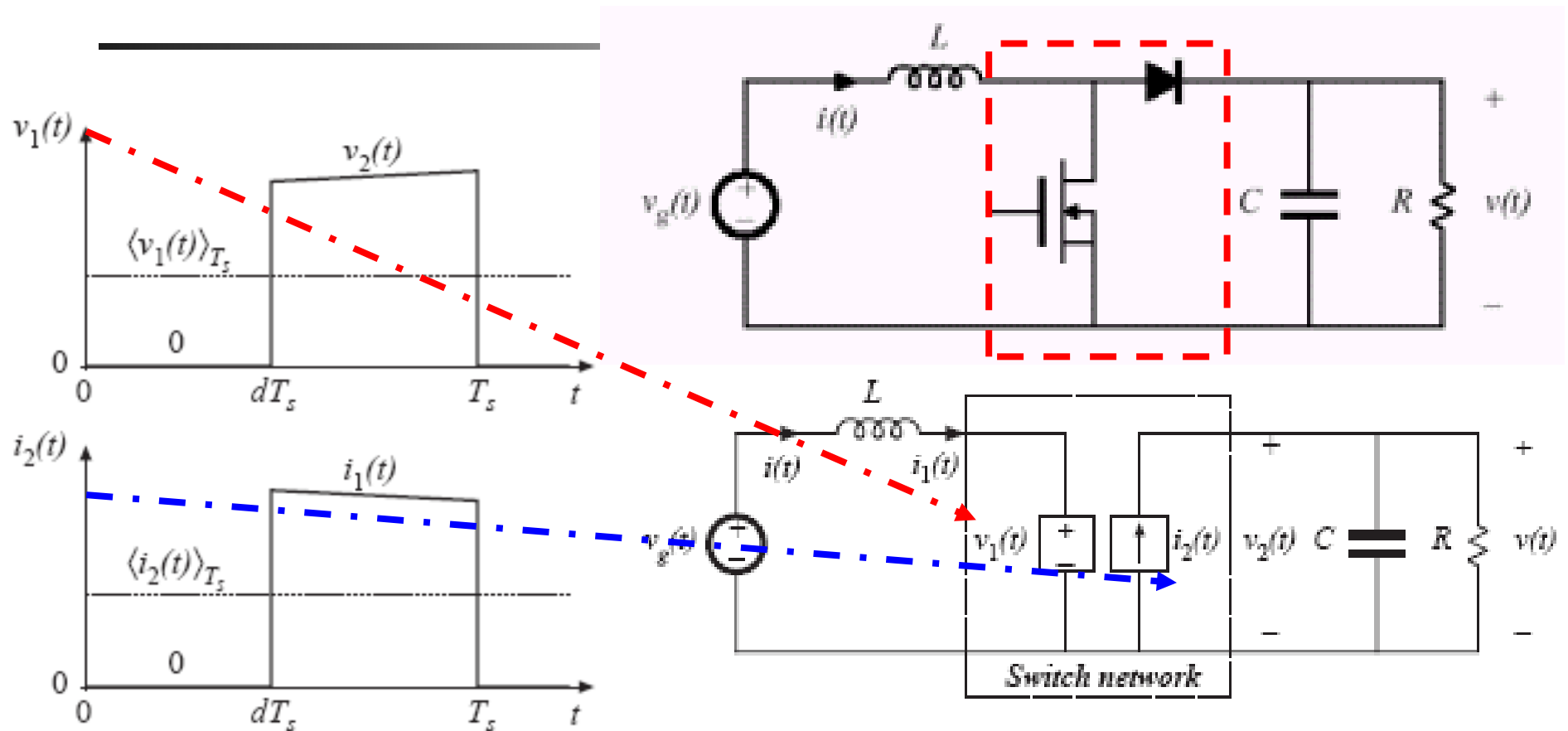
$i_1(t)$ 为电感电流，作为独立变量
 $v_2(t)$ 为电容电压，作为独立变量
 $v_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 作为非独立变量

时不变网络



- 用受控源两端口网络替代开关网络子电路
- 受控源对应非独立变量
- 电路成为时不变网络

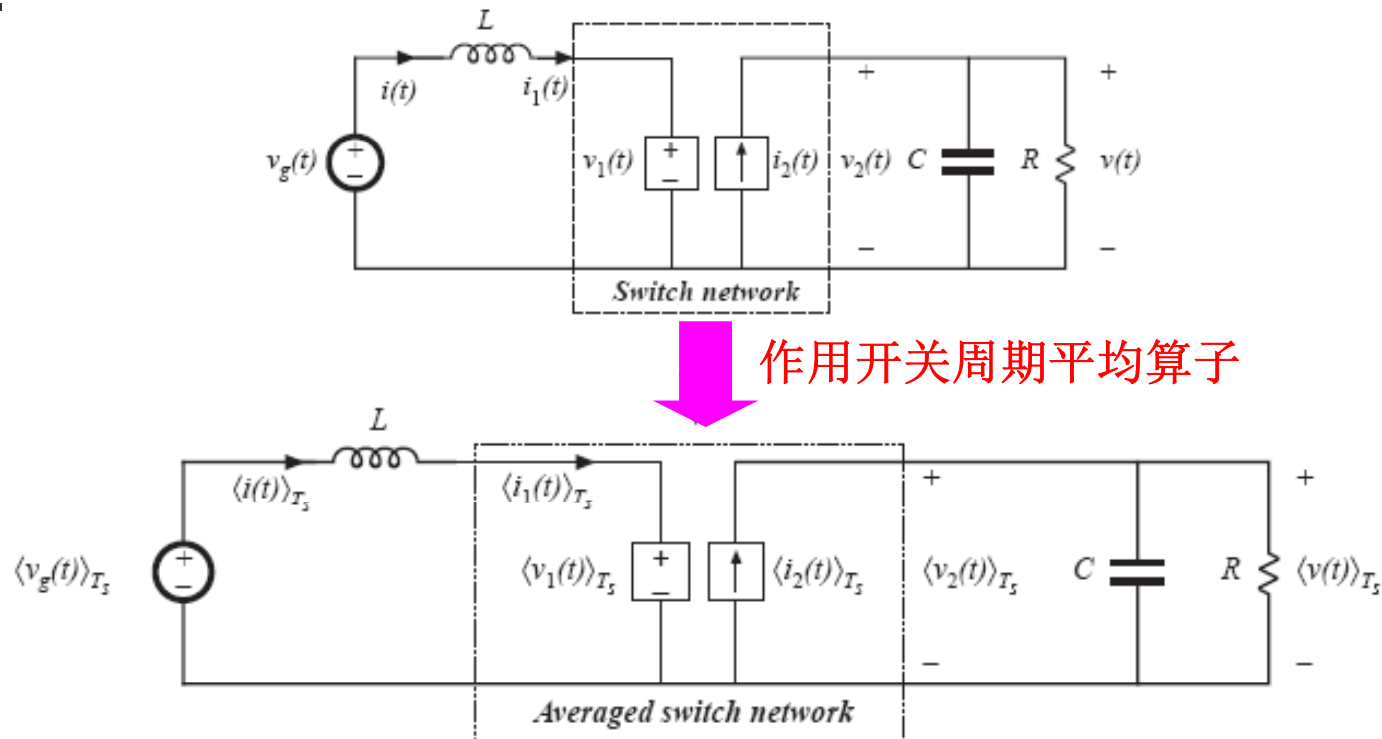
时不变网络受控电源的定义



- The waveforms of the dependent sources are identical to the actual terminal waveforms of the switch network.
- The dependent source network is equivalent to switch network

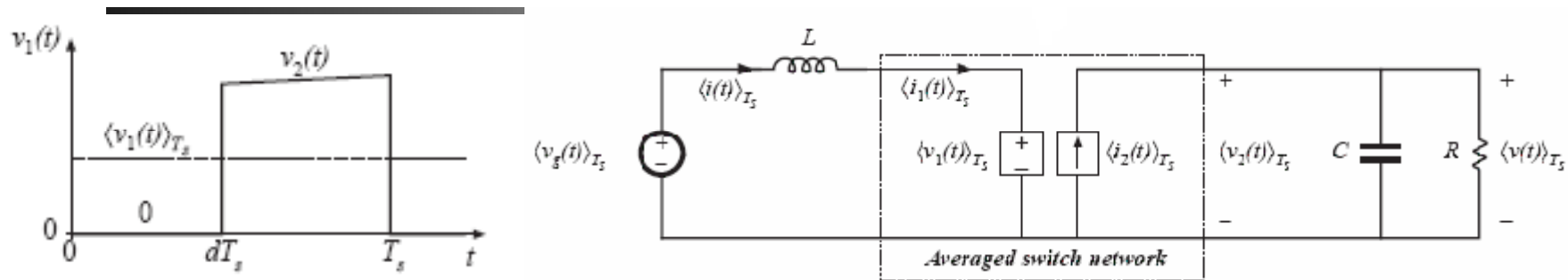
@假定电感电流连续方式

对电路作用开关周期平均演算



- Averaging over the switching period T_s 不会显著改变系统动态性能，保留了低频分量，但能够滤除开关纹波等高频分量
- 实际只需对受控源进行开关周期平均演算
- 电路时间常数比开关周期要大得多，保留低频特性

对受控源进行开关周期平均演算



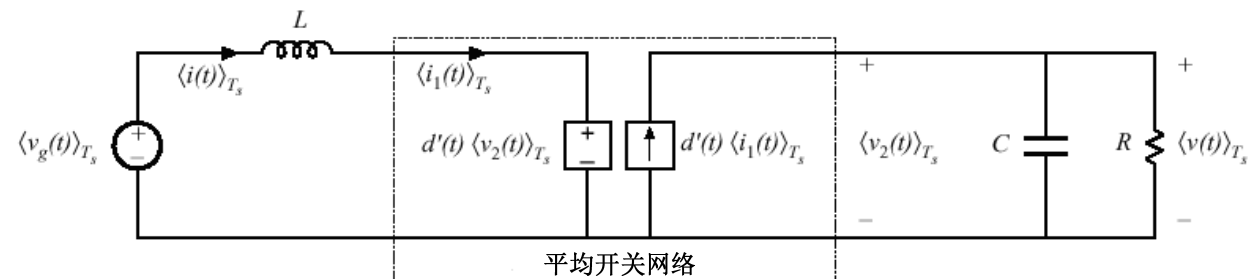
受控电压源 $v_1(t)$ 的开关周期平均值为

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t v_1(\tau) d\tau = \frac{1}{T_s} \int_{t-(1-d)T_s}^t v_2(\tau) d\tau \approx d'(t) \langle v_2(t) \rangle_{T_s}$$

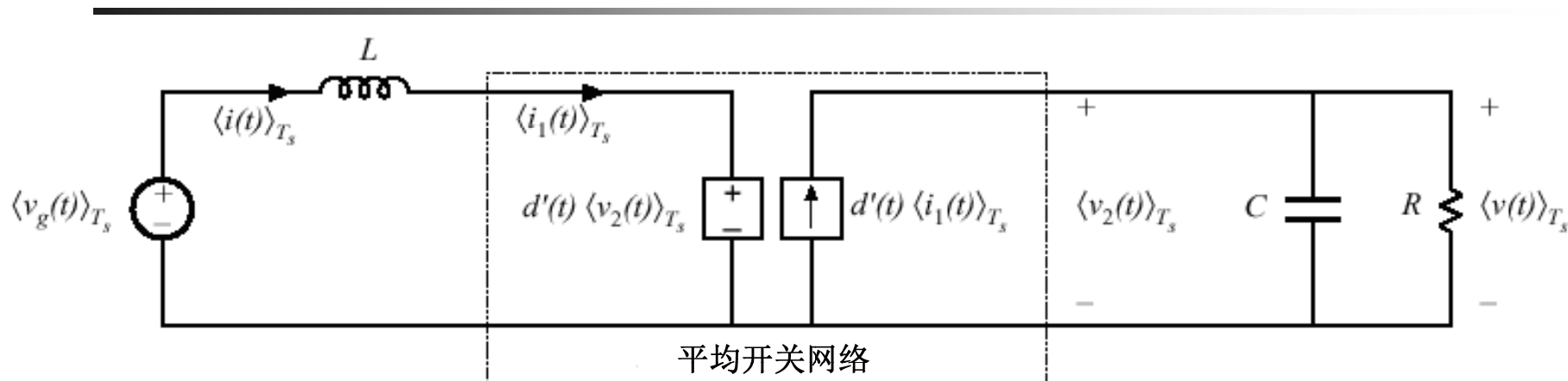
受控电流源 $i_2(t)$ 的开关周期平均值为

$$d' = 1 - d$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} \approx d'(t) \langle i_1(t) \rangle_{T_s}$$



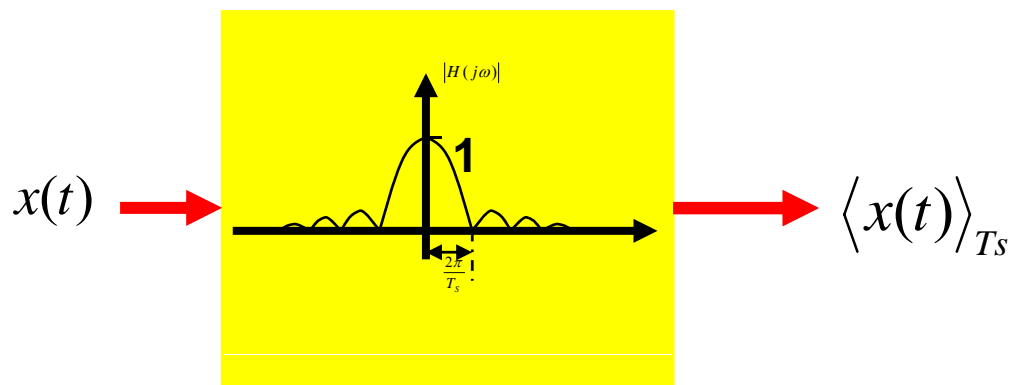
开关周期平均模型



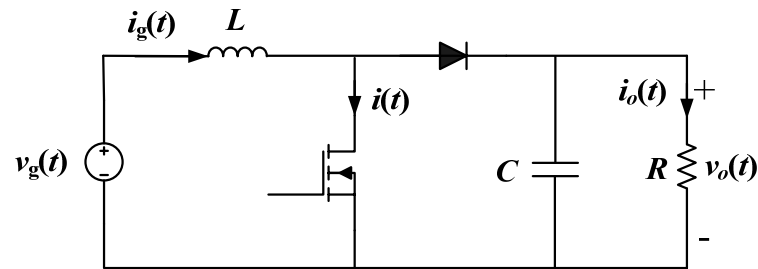
- Describe low-frequency dynamics of the converter
- Ignore the switching ripple
- Ignore complicated switching harmonics and sidebands

Low frequency!

- 时不变电路
- 连续波形，忽略了开关纹波
- 大信号模型
- 非线性



Boost变换器大信号模型

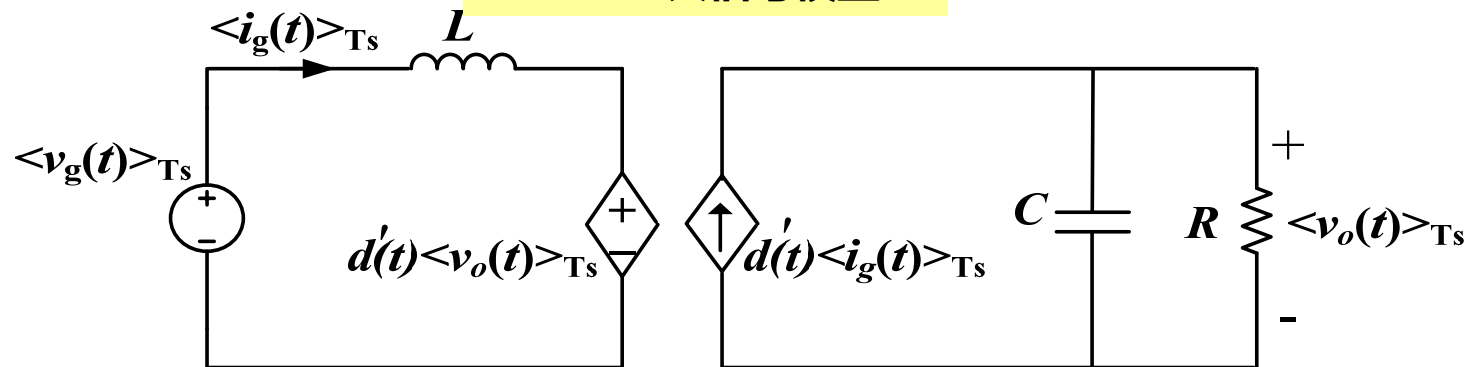


电路参数：

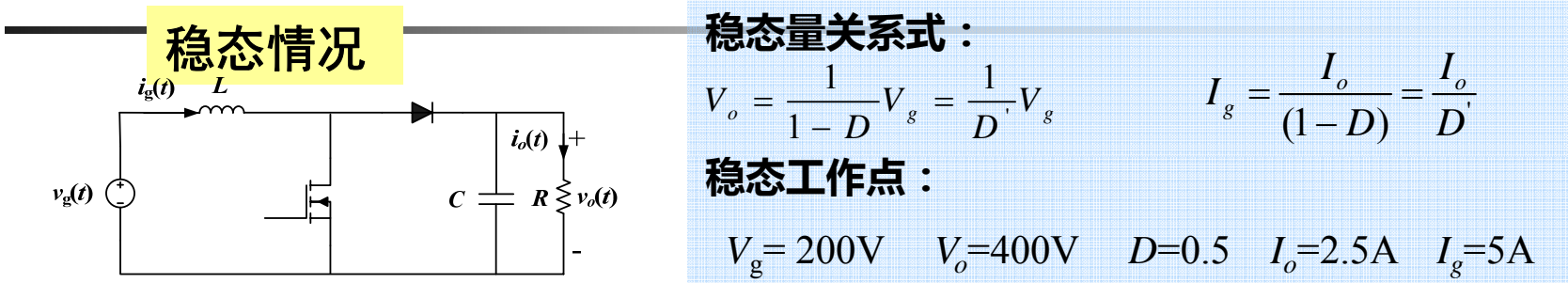
开关频率 $f_s = 100\text{kHz}$ $L = 0.15\text{mH}$ $C = 3.5\mu\text{F}$

$V_g = 200\text{V}$ $V_o = 400\text{V}$ $P_o = 1\text{kW}$ $I_o = 2.5\text{A}$

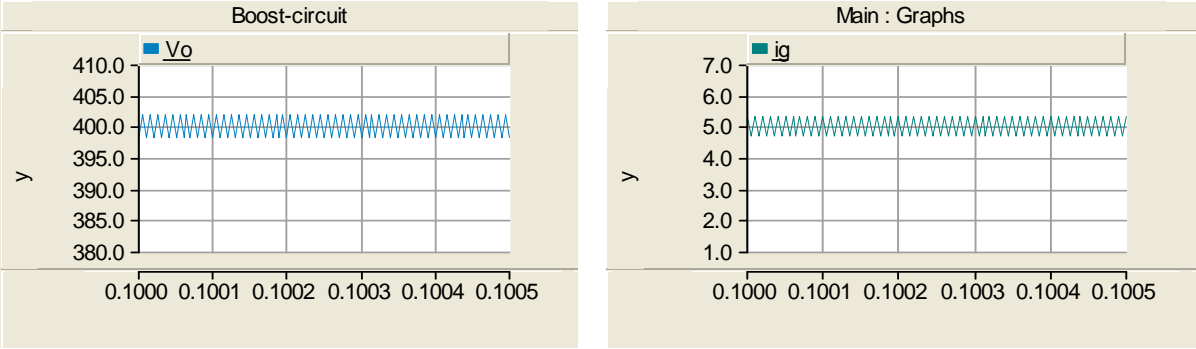
Boost 大信号模型



大信号模型vs. 开关器件电路模型

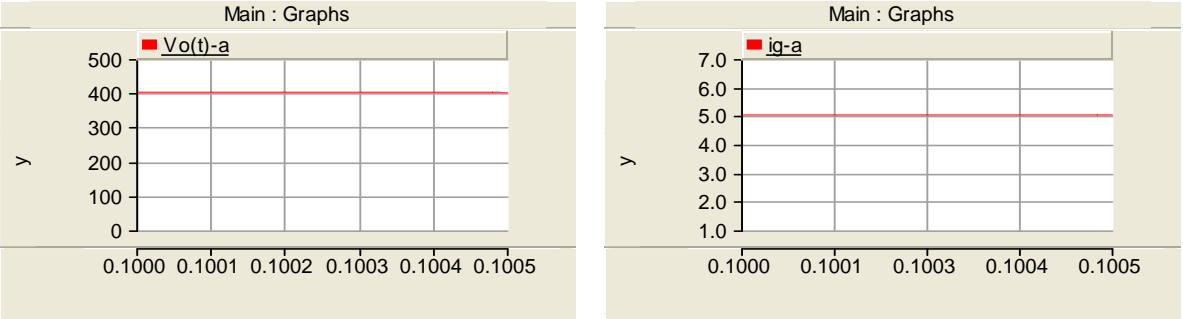


开关器件仿真波形



开关器件电路仿真电压电流波形都包含开关纹波。

大信号模型仿真波形



大信号模型通过开关周期平均运算忽略了开关频率谐波及其边带

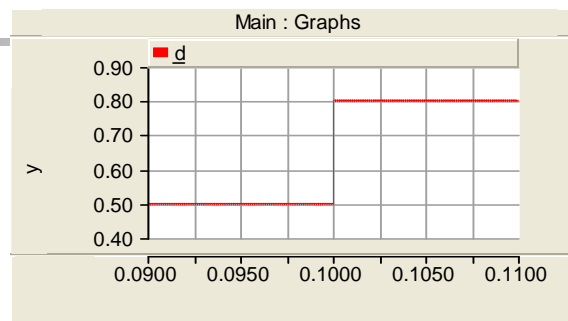
大信号模型vs. 开关器件电路模型

占空比上升

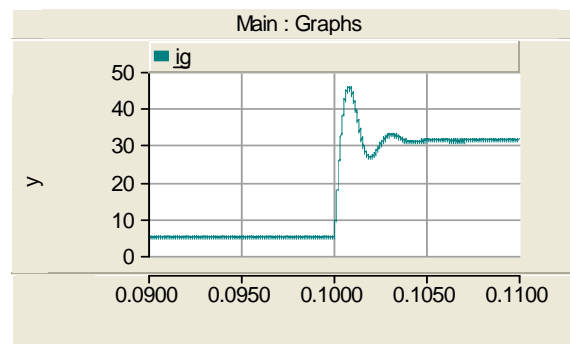
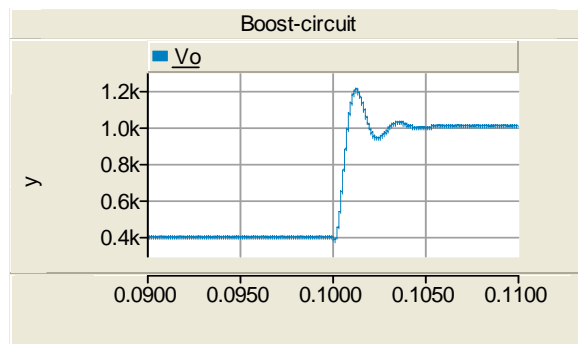
Case 1 : $t=0.1s$ $d=0.5 \rightarrow 0.8$ 阶跃过程

0.1s后逐渐过度到 $d=0.8$ 的稳态工作点:

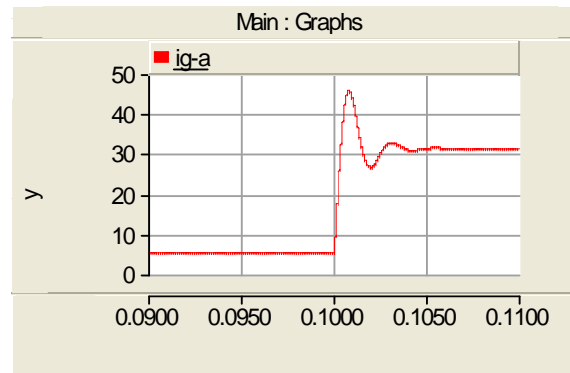
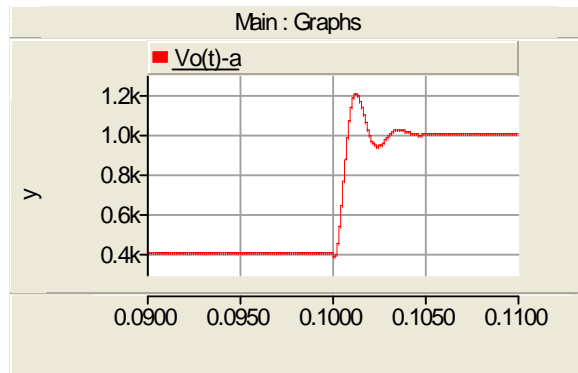
$$V_o=1000V, \quad I_g=31.25A.$$



开关
器件
仿真
波形



大信
号模
型仿
真波
形



忽略开关纹波,大信号模型的暂态过程与开关器件模型一致

大信号模型vs. 开关器件电路模型

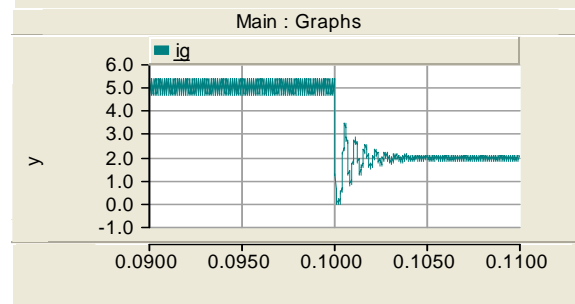
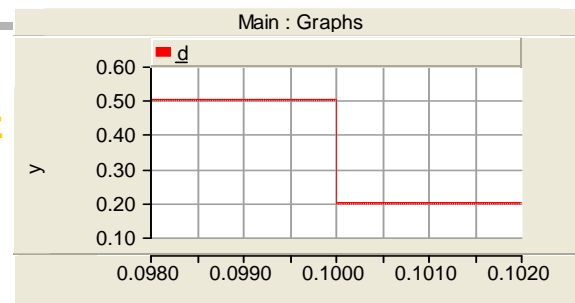
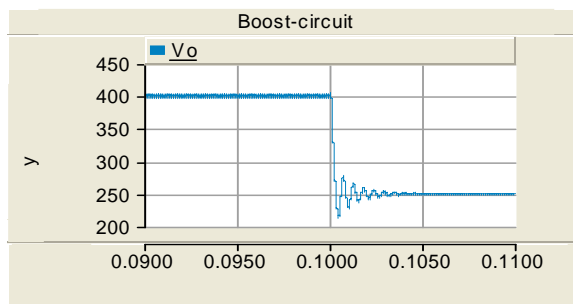
占空比下降

Case 2 : $t=0.1s$ $d=0.5 \rightarrow 0.2$ 阶跃过程

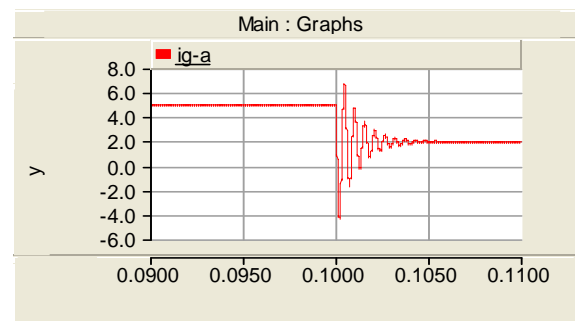
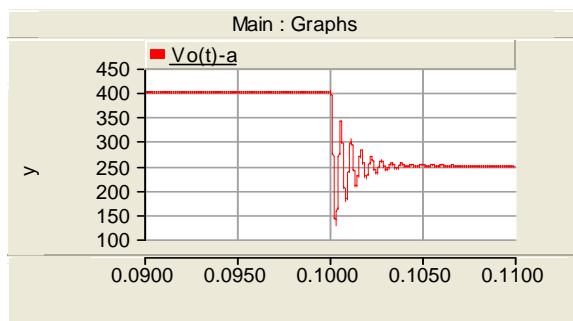
0.1s后逐渐过度到 $d=0.1$ 的稳态工作点:

$$V_o=250V, \quad I_g=1.95A.$$

开关
器件
仿真
波形



大信
号模
型仿
真波
形



器件模型中二极管的反向截止使 $i_g(t)$ 不可能小于零，大信号模型中没有对其做出限制，暂态过程出现差异。

大信号模型vs. 开关器件电路模型

输入电压上升

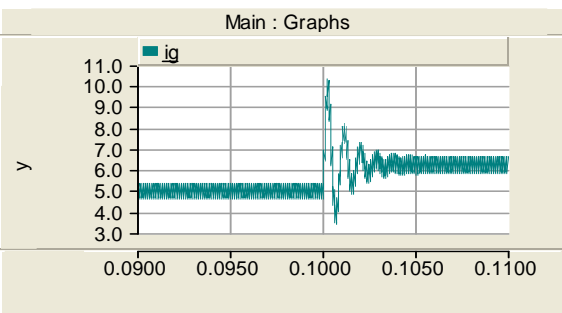
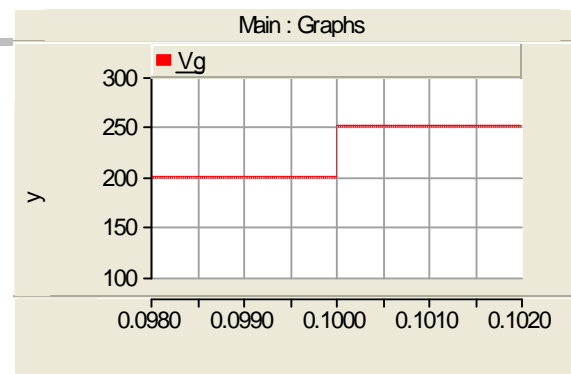
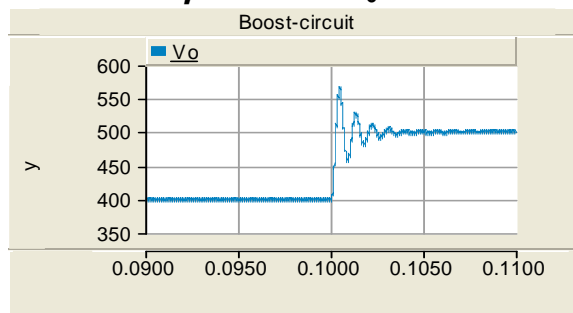
Case 3 : $d=0.5$

$t=0.1s$ $v_g=200V \rightarrow 250V$ 阶跃过程

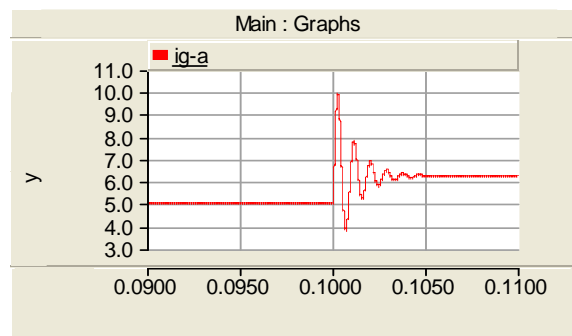
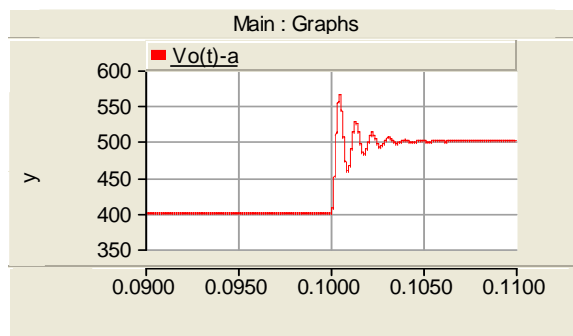
0.1s后逐渐过度到 $v_g=250V$ 的稳态工作点:

$V=500V, I=6.25A$

开关
器件
仿真
波形



平均
模型
仿真
波形



忽略开关纹波,大信号模型的暂态过程与开关器件模型一致

大信号模型vs. 开关器件电路模型

输入电压下降

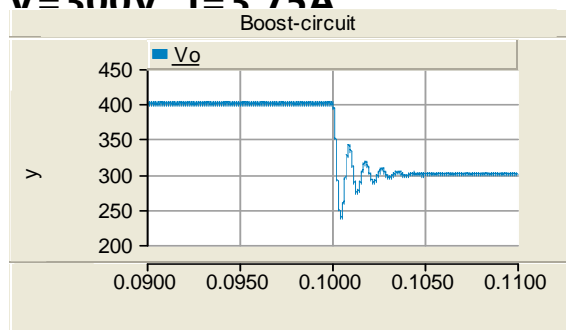
Case 4 : $d=0.5$

$t=0.1s$ $v_g=200V \rightarrow 150V$ 阶跃过程

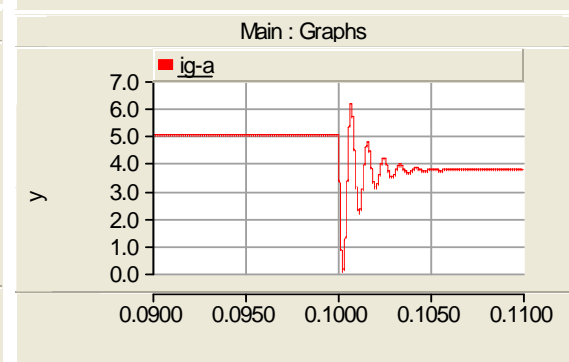
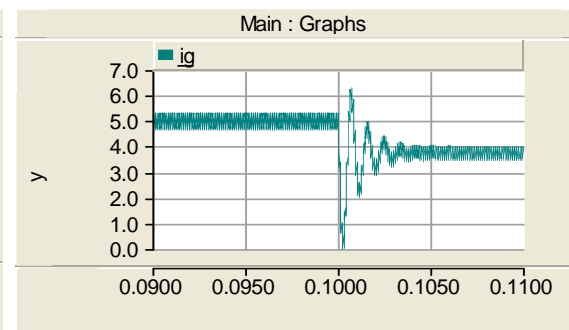
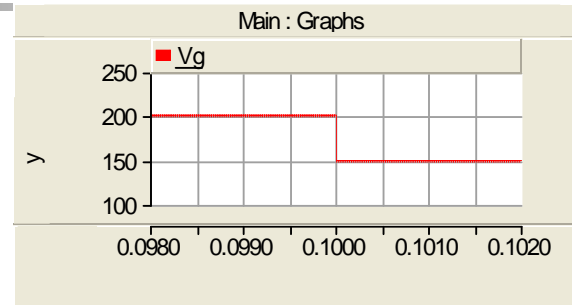
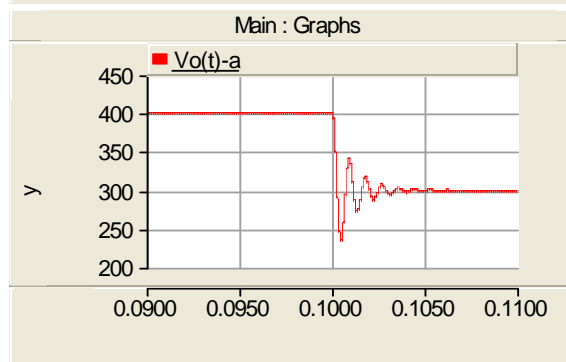
0.1s后逐渐过度到 $v_g=150V$ 的稳态工作点:

$V=300V$ $I=3.75A$

开关
器件
仿真
波形

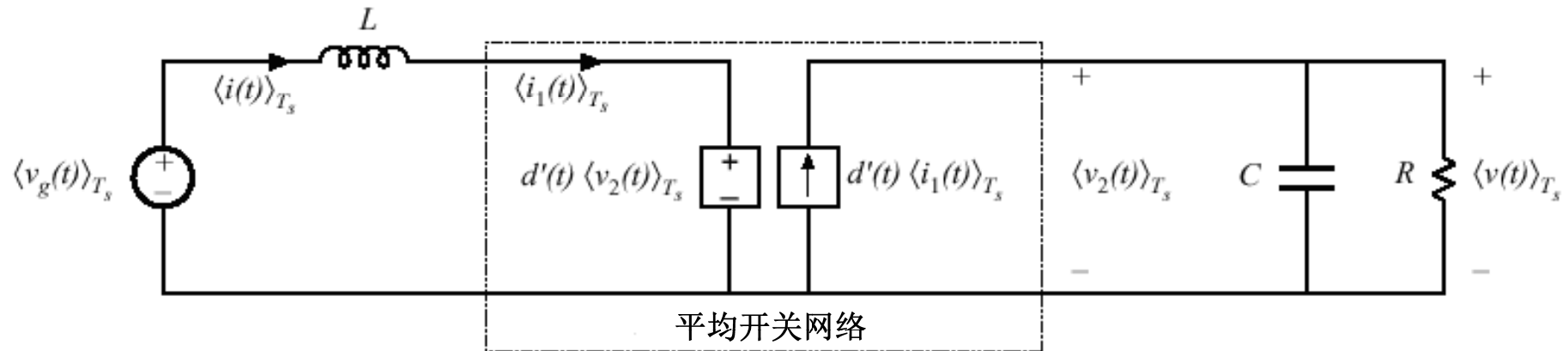


平均
模型
仿真
波形



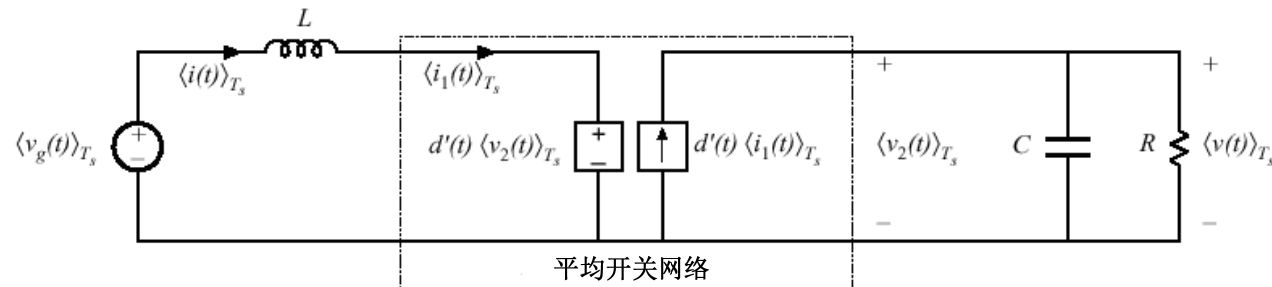
忽略开关纹波,大信号模型的暂态过程与开关器件模型一致

开关周期平均模型



•非线性

稳态工作点



If the converter is driven with some steady-state, or quiescent inputs

$$d(t) = D$$

$$\langle v_g(t) \rangle_{T_s} = V_g$$

After transients have subsided, the inductor current, capacitor voltage, and input current

$$\langle i(t) \rangle_{T_s}, \langle v(t) \rangle_{T_s}, \langle i_g(t) \rangle_{T_s}$$

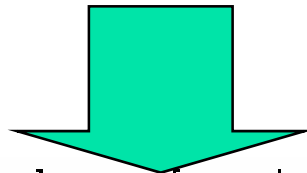
reach the quiescent values I , V , and I_g ,

引入扰动

Introduce the perturbation to input voltage and duty cycle

$$\langle v_g(t) \rangle_{T_s} = V_g + \hat{v}_g(t)$$

$$d(t) = D + \hat{d}(t)$$

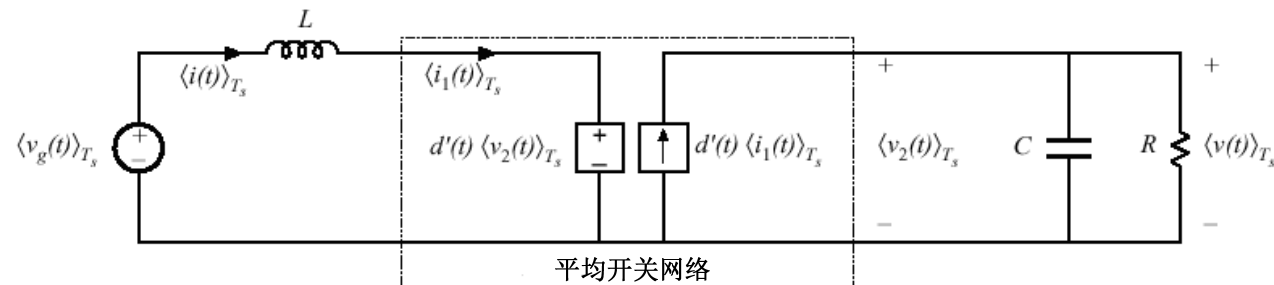


$$\langle i(t) \rangle_{T_s} = \langle i_1(t) \rangle_{T_s} = I + \hat{i}(t)$$

$$\langle v(t) \rangle_{T_s} = \langle v_2(t) \rangle_{T_s} = V + \hat{v}(t)$$

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = V_1 + \hat{v}_1(t)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = I_2 + \hat{i}_2(t)$$



直流工作点附近小信号扰动

$$\langle v_g(t) \rangle_{T_s} = V_g + \hat{v}_g(t)$$

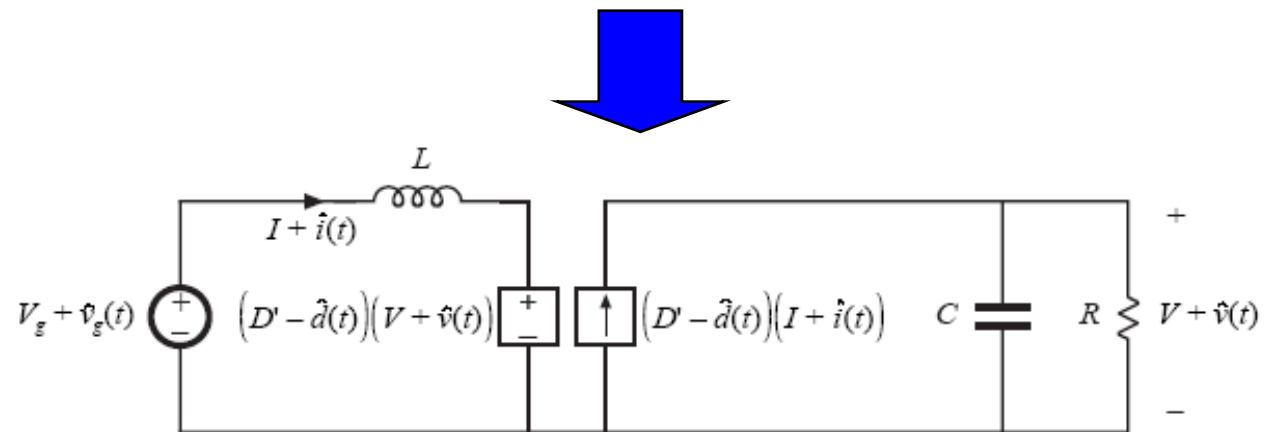
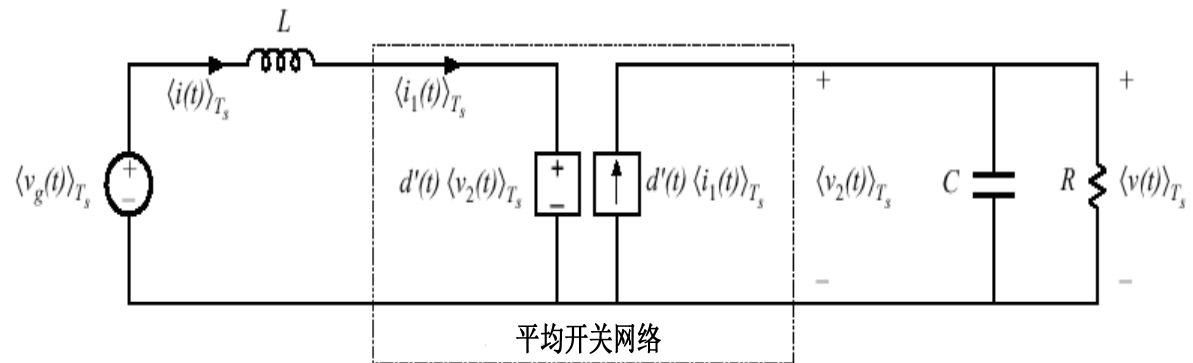
$$d(t) = D + \hat{d}(t) \Rightarrow d'(t) = 1 - d(t) = 1 - [D + \hat{d}(t)] = 1 - D - \hat{d}(t) = D' - \hat{d}(t)$$

$$\langle i(t) \rangle_{T_s} = \langle i_1(t) \rangle_{T_s} = I + \hat{i}(t)$$

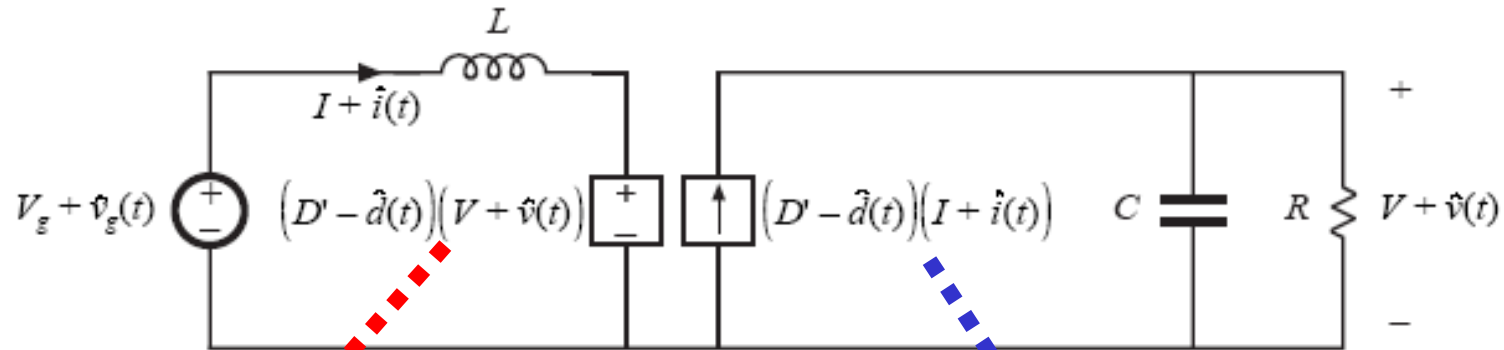
$$\langle v(t) \rangle_{T_s} = \langle v_2(t) \rangle_{T_s} = V + \hat{v}(t)$$

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = V_1 + \hat{v}_1(t)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = I_2 + \hat{i}_2(t)$$

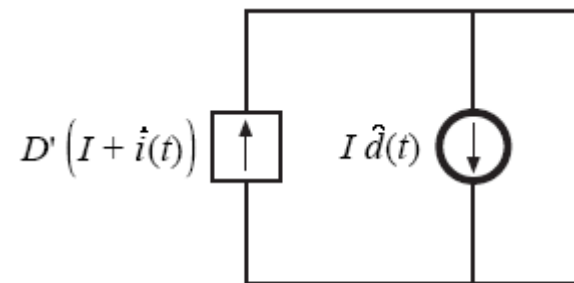
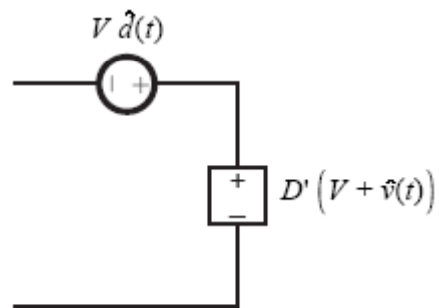


受控源的线性化

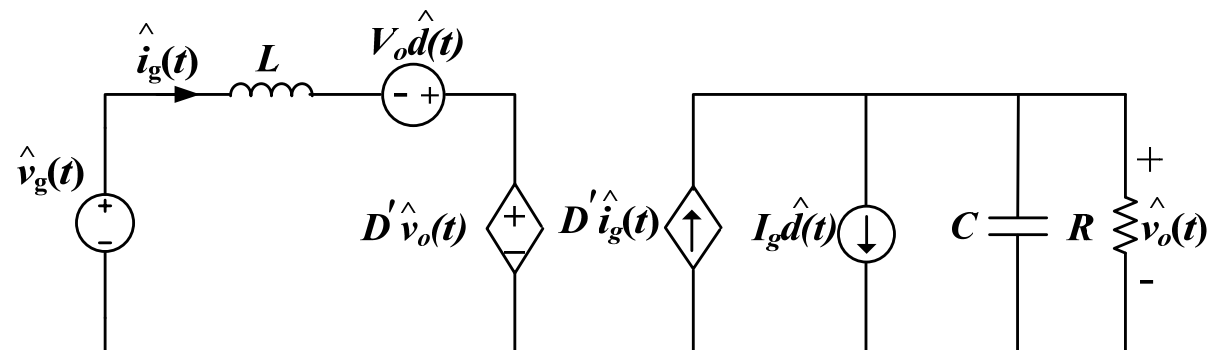
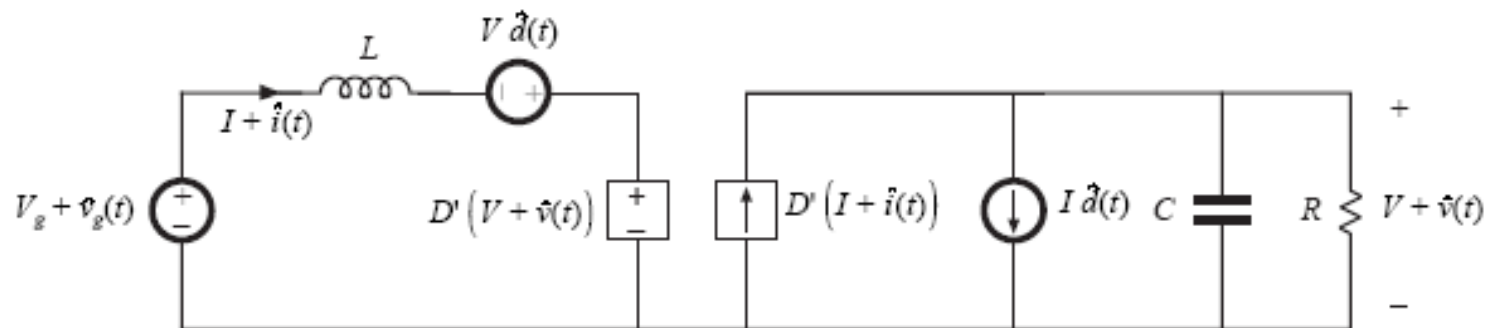


$$(D' - \hat{d}(t))(V + \hat{v}(t)) = D'(V + \hat{v}(t)) - \underline{V\hat{d}(t)} - \hat{v}(t)\hat{d}(t)$$

$$(D' - \hat{d}(t))(I + \hat{i}(t)) = D'(I + \hat{i}(t)) - \underline{I\hat{d}(t)} - \hat{i}(t)\hat{d}(t)$$

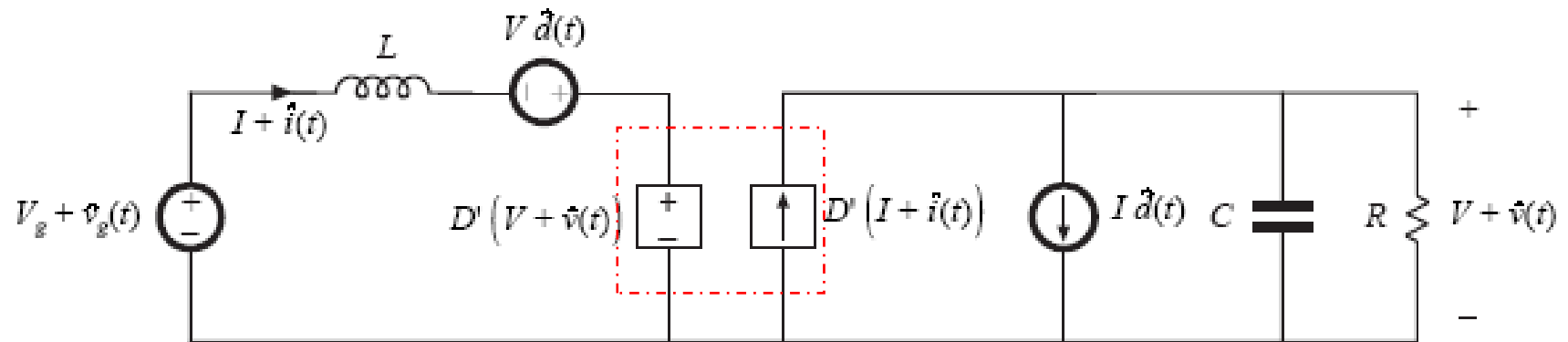


线性化模型

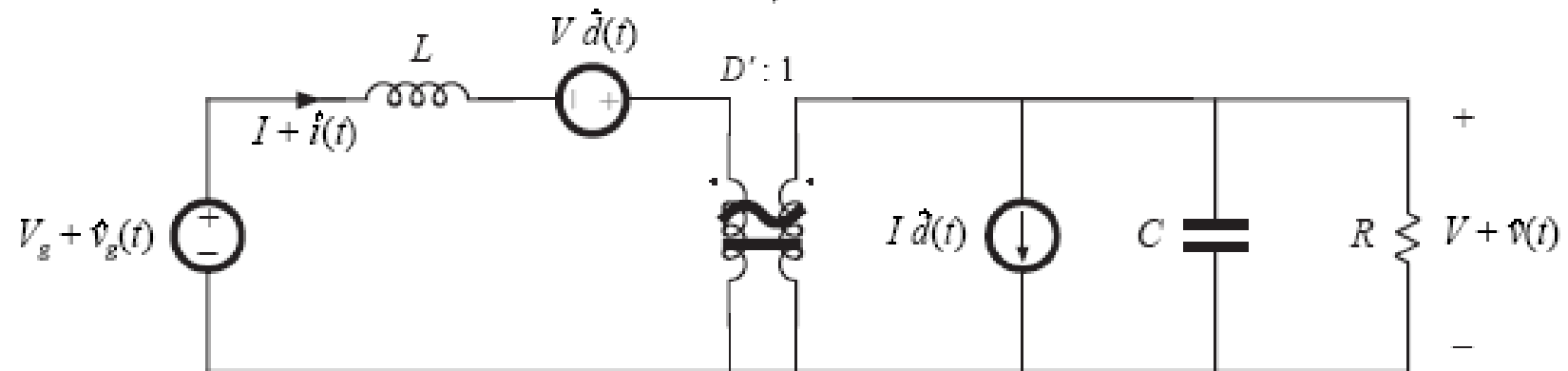


Boost变换器小信号模型

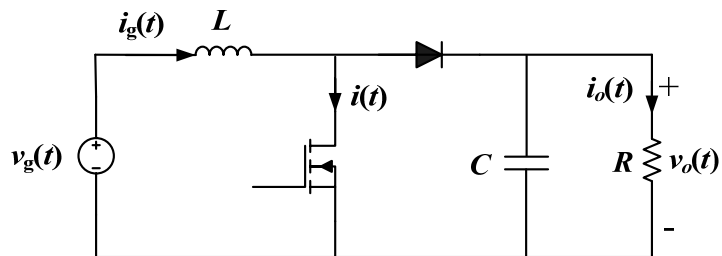
线性化模型



理想直流变压器



Boost变换电路稳态工作点



电路参数：

开关频率 $f_s = 100\text{kHz}$

$L = 0.15\text{mH}$ $C = 3.5\mu\text{F}$ $R = 160\Omega$

$V_g = 200\text{V}$ $V_o = 400\text{V}$ $P_o = 1\text{kW}$

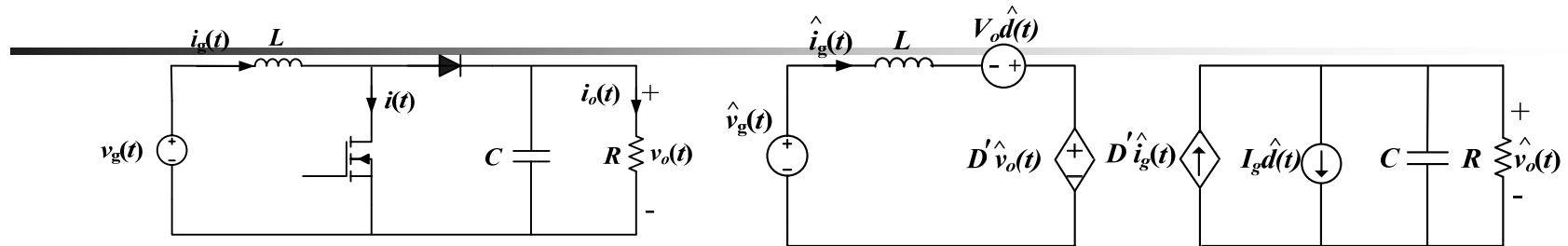
稳态量关系式：

$$V_o = \frac{1}{1-D} V_g = \frac{1}{D'} V_g \quad I_g = \frac{I_o}{(1-D)} = \frac{I_o}{D'}$$

稳态工作点：

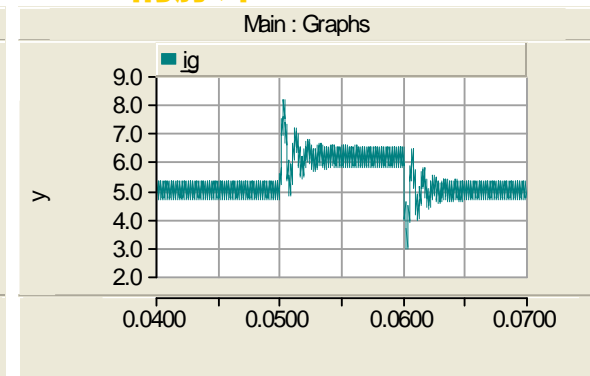
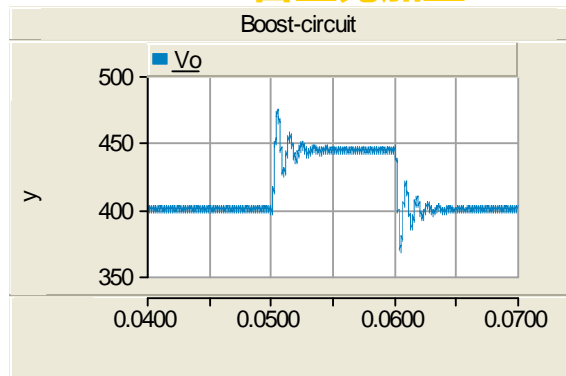
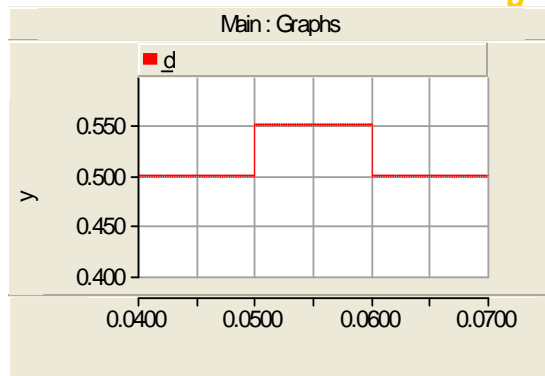
$$D = 0.5 \quad V_g = 200\text{V} \quad V = 400\text{V} \quad I_g = 5\text{A} \quad I_o = 2.5\text{A}$$

小信号模型vs. 开关器件电路模型

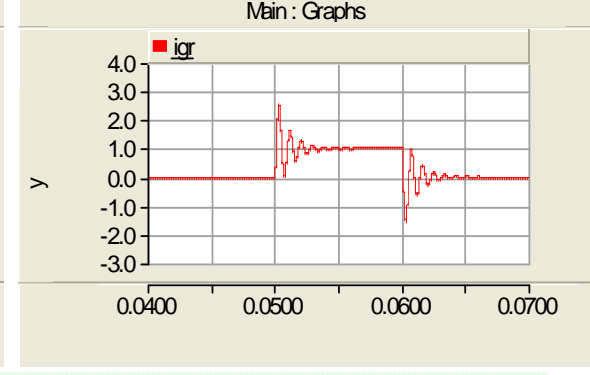
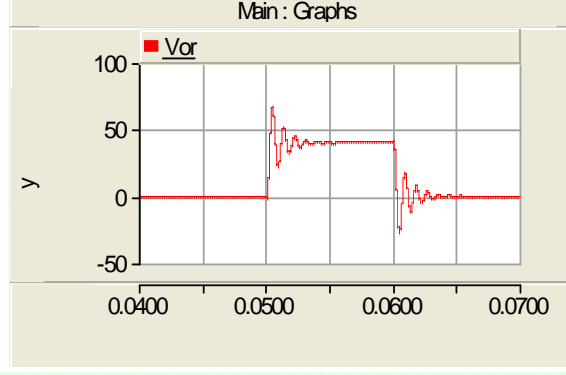
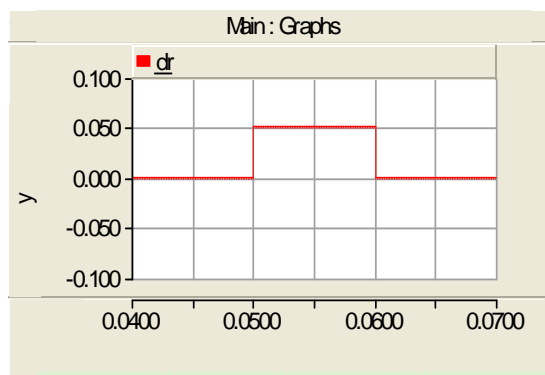


Case 5 : $v_o=200$ $t=0.05s$ 占空比加正10% 100ms的脉冲

开关
器件
模型



小信
号模
型

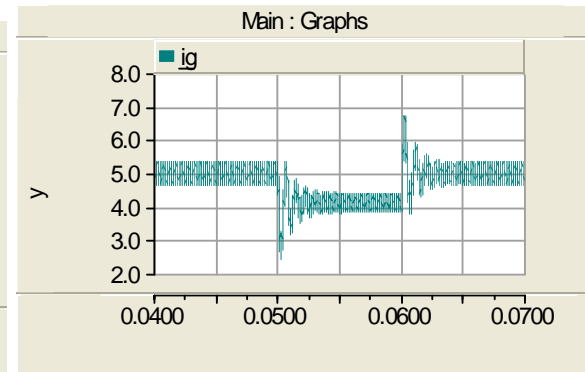
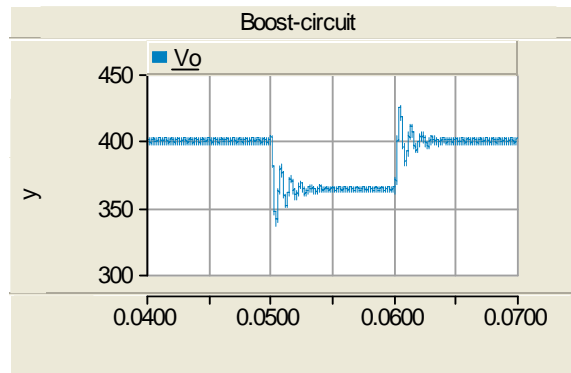
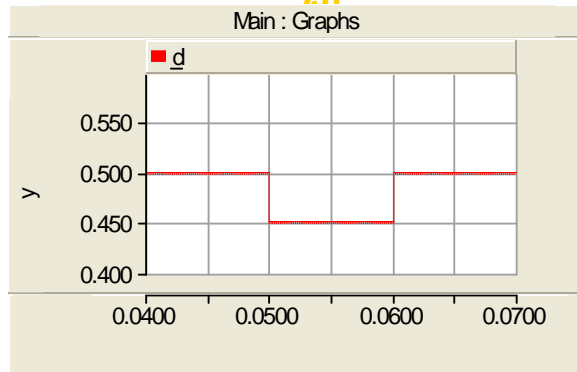


小信号模型仅保留了电路中电量的扰动成分，不包含稳态成分和开关纹波。

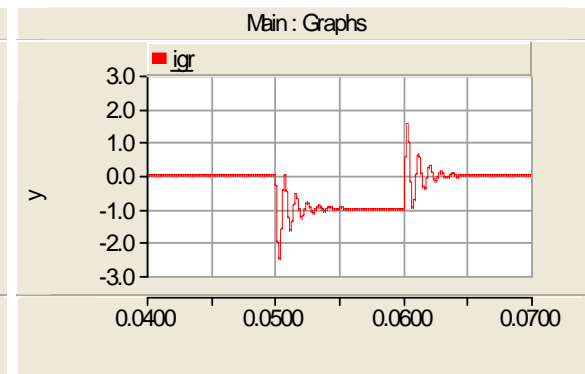
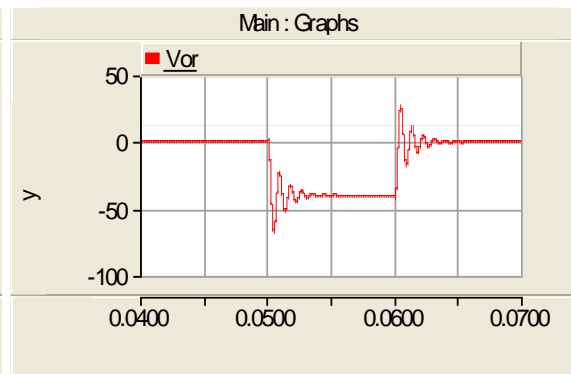
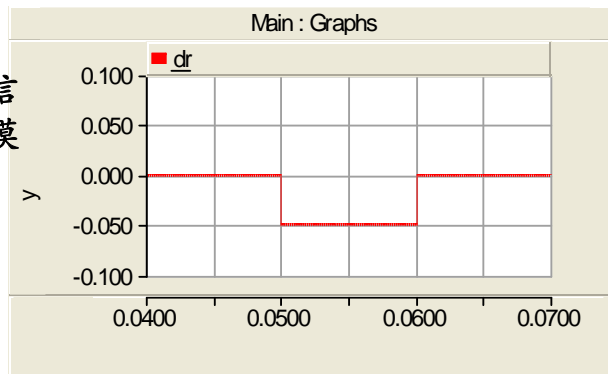
小信号模型vs. 开关器件电路模型

Case 6 : $v_g=200$ $t=0.05s$ 占空比加正10% 100ms的脉冲扰动

开关
器件
模型



小信
号模
型

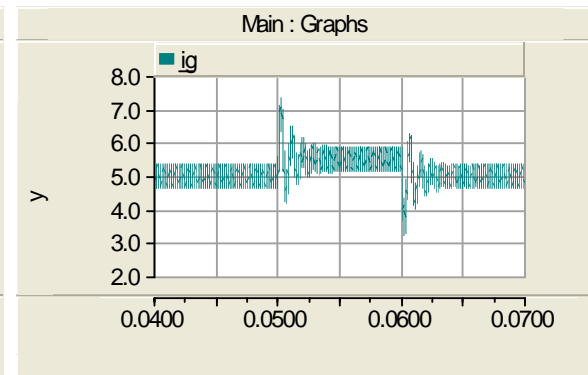
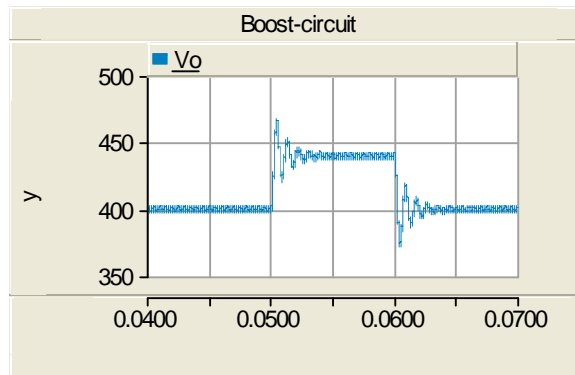
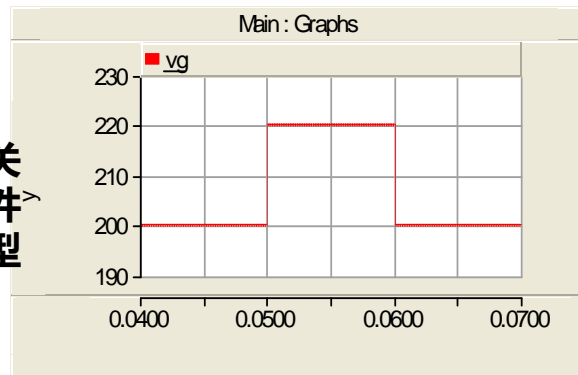


小信号模型仅保留了电路中电量的扰动成分，不包含稳态成分和开关纹波。

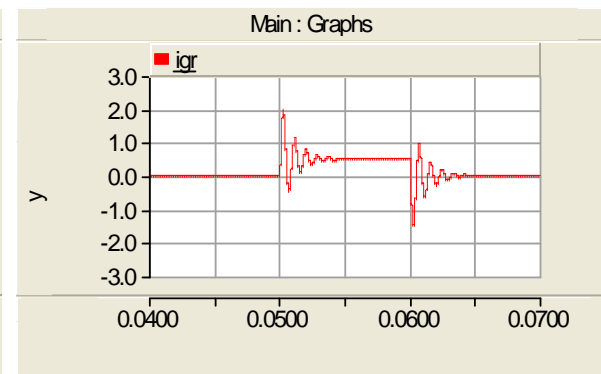
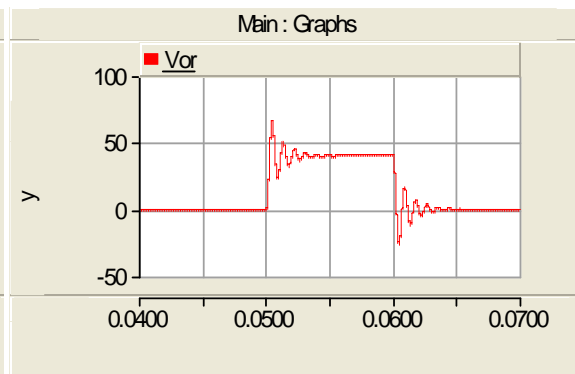
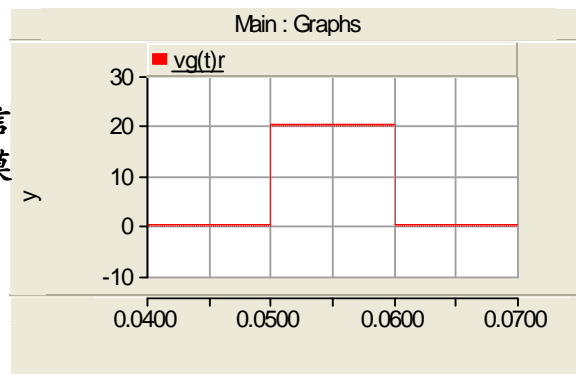
小信号模型vs. 开关器件电路模型

Case 8 : $v_g=200$ $t=0.05s$ 输入电压施加正10% 100ms的脉冲扰动

开关
器件
模型



小信
号模
型

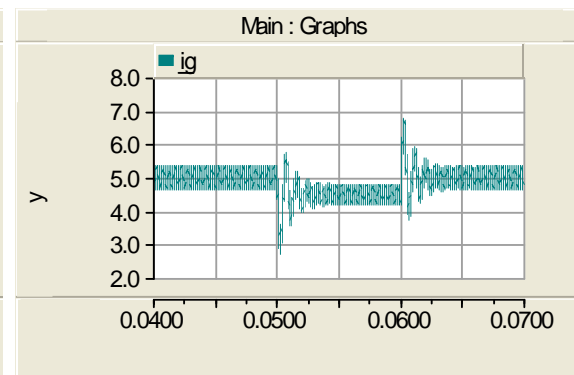
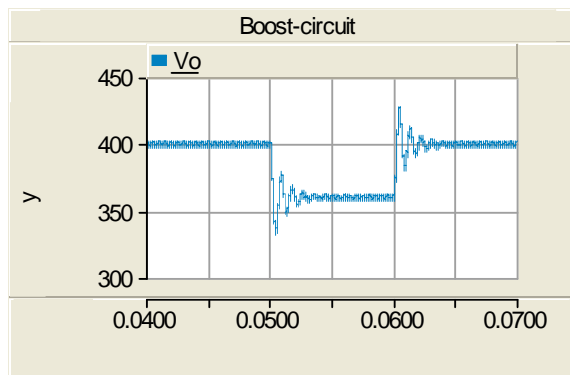
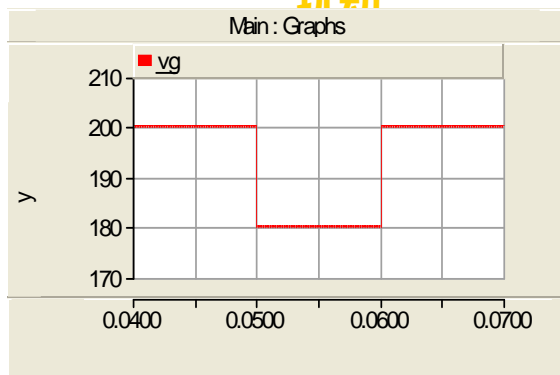


小信号模型仅保留了电路中电量的扰动成分，不包含稳态成分和开关纹波。

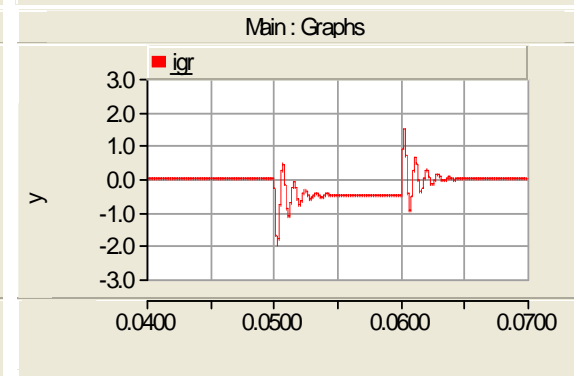
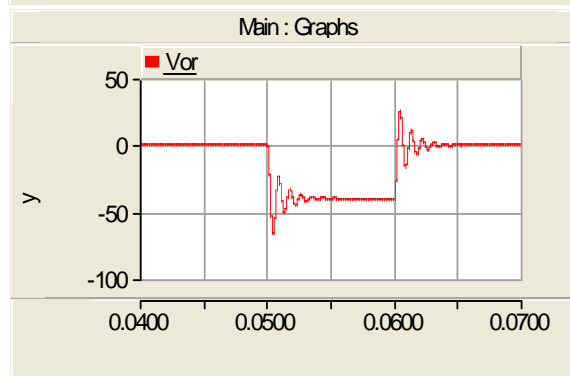
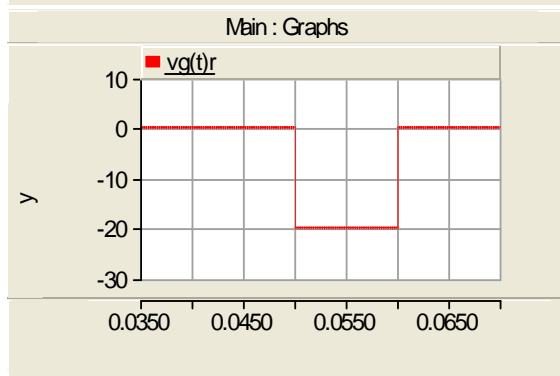
小信号模型vs. 开关器件电路模型

Case 8 : $v_g=200$ $t=0.05s$ 输入电压施加负10% 100ms的脉冲
扰动

开关
器件
模型



小信
号模
型

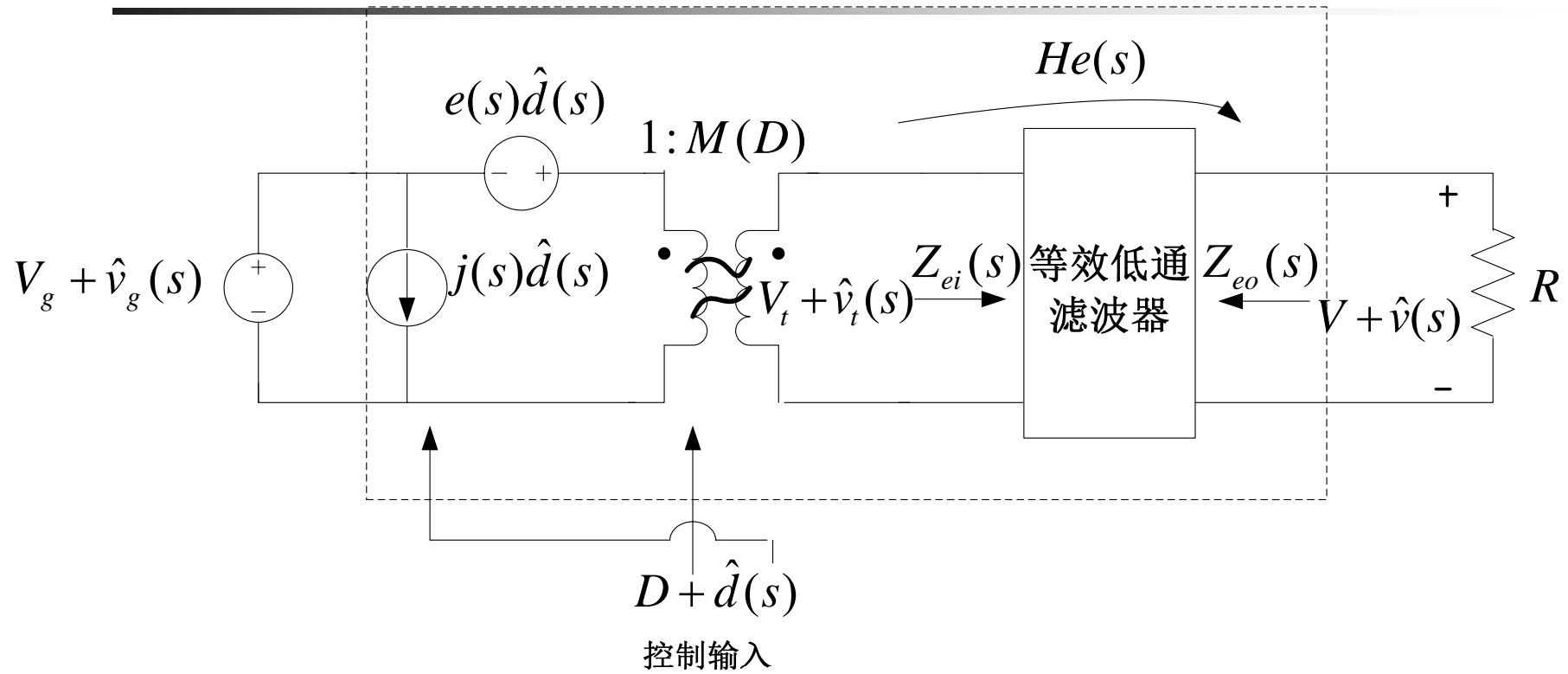


小信号模型仅保留了电路中电量的扰动成分，不包含稳态成分和开关纹波。

3.2 统一电路模型

- ◆ **PWM CCM dc-dc 变换器具有如下功能：**
 - 电压、电流转换
 - 低通滤波
 - 通过占空比扰动控制输出
- ◆ **统一电路模型的意义**
 - 用一种统一的模型表示
 - 只需代入参数，即可得到动态模型，方便使用

统一电路模型



$$H_e(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_t(s)} = \frac{R // (1 / sCe)}{sLe + R // (1 / sCe)}$$

统一电路模型参数

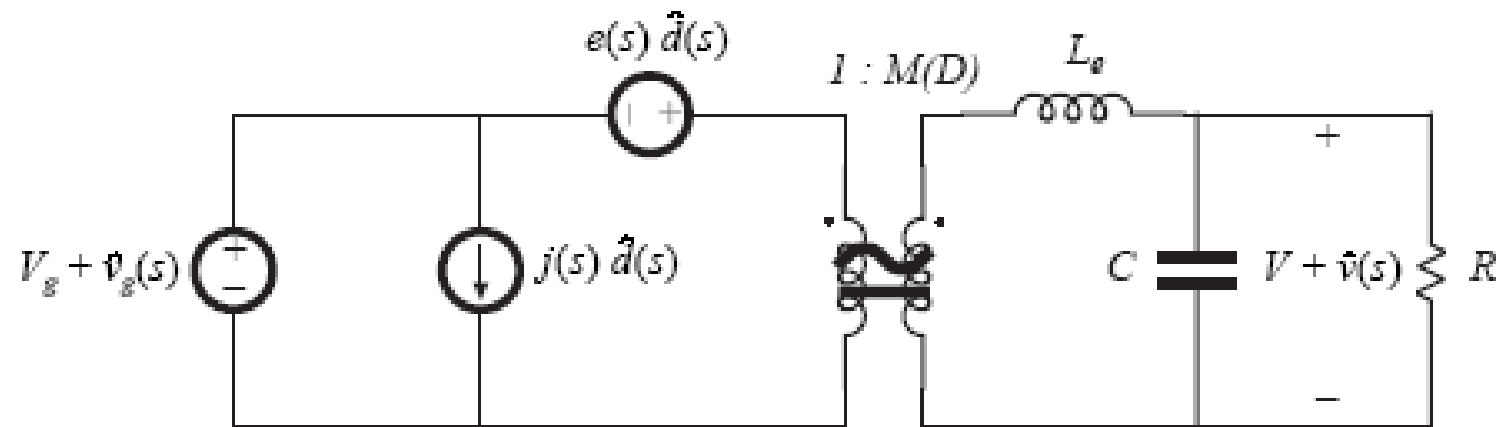
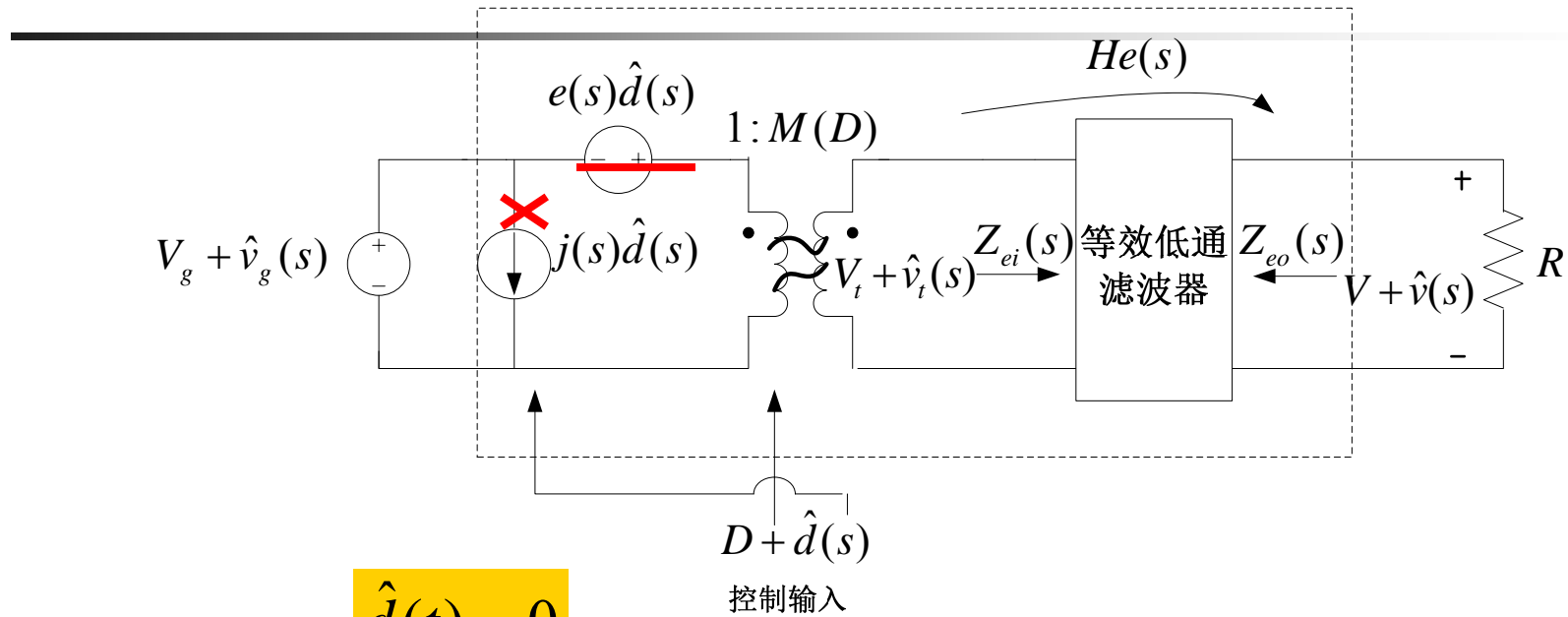


Table 7.1. Canonical model parameters for the ideal buck, boost, and buck-boost converters

Converter	$M(D)$	L_e	$e(s)$	$j(s)$
Buck	D	L	$\frac{V}{D^2}$	$\frac{V}{R}$
Boost	$\frac{1}{D'}$	$\frac{L}{D'^2}$	$V \left(1 - \frac{sL}{D'^2 R} \right)$	$\frac{V}{D'^2 R}$
Buck-boost	$-\frac{D}{D'}$	$\frac{L}{D'^2}$	$-\frac{V}{D^2} \left(1 - \frac{sDL}{D'^2 R} \right)$	$-\frac{V}{D'^2 R}$

输入到输出的传递函数



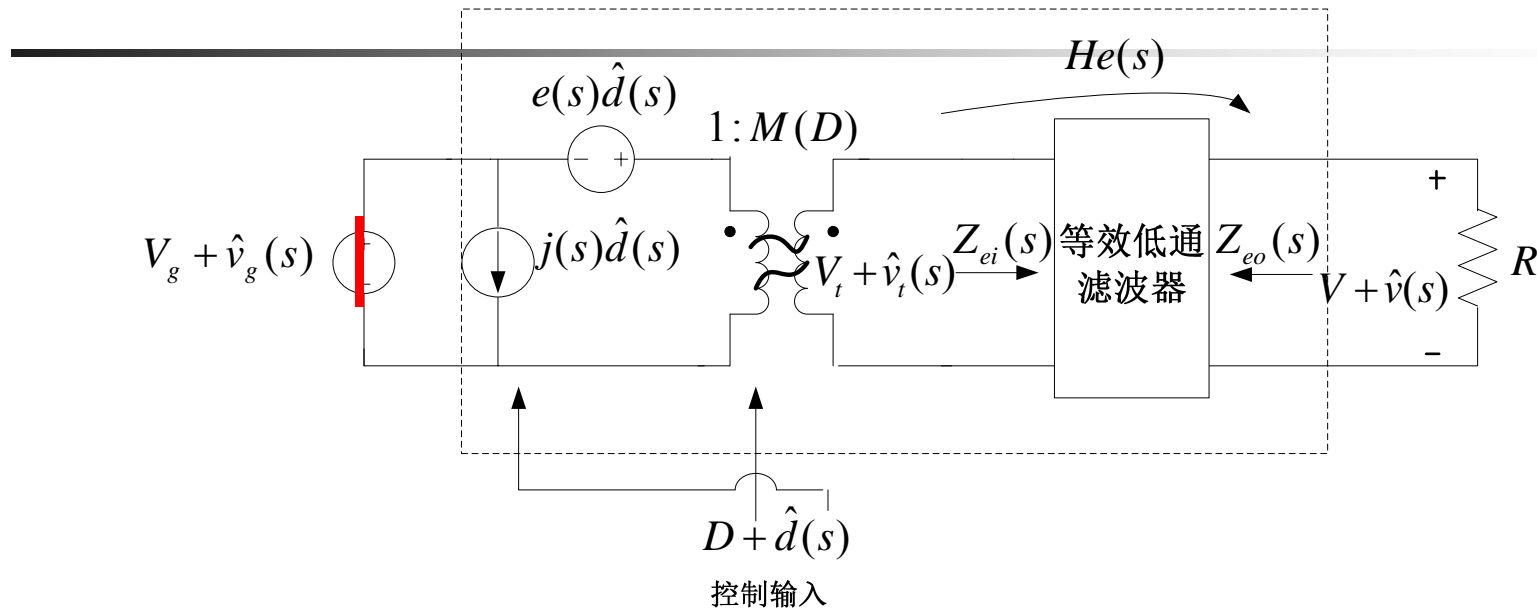
$$\hat{d}(t) = 0$$

$$\hat{v}_t(s) = M(D)\hat{v}_g(s)$$

$$\hat{v}(s) = \hat{v}_t(s)H_e(s) = M(D)H_e(s)\hat{v}_g(s)$$

$$G_{vg}(s)\Big|_{\hat{d}(s)=0} = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_g(s)} = M(D)H_e(s)$$

占空比控制到输出的传递函数



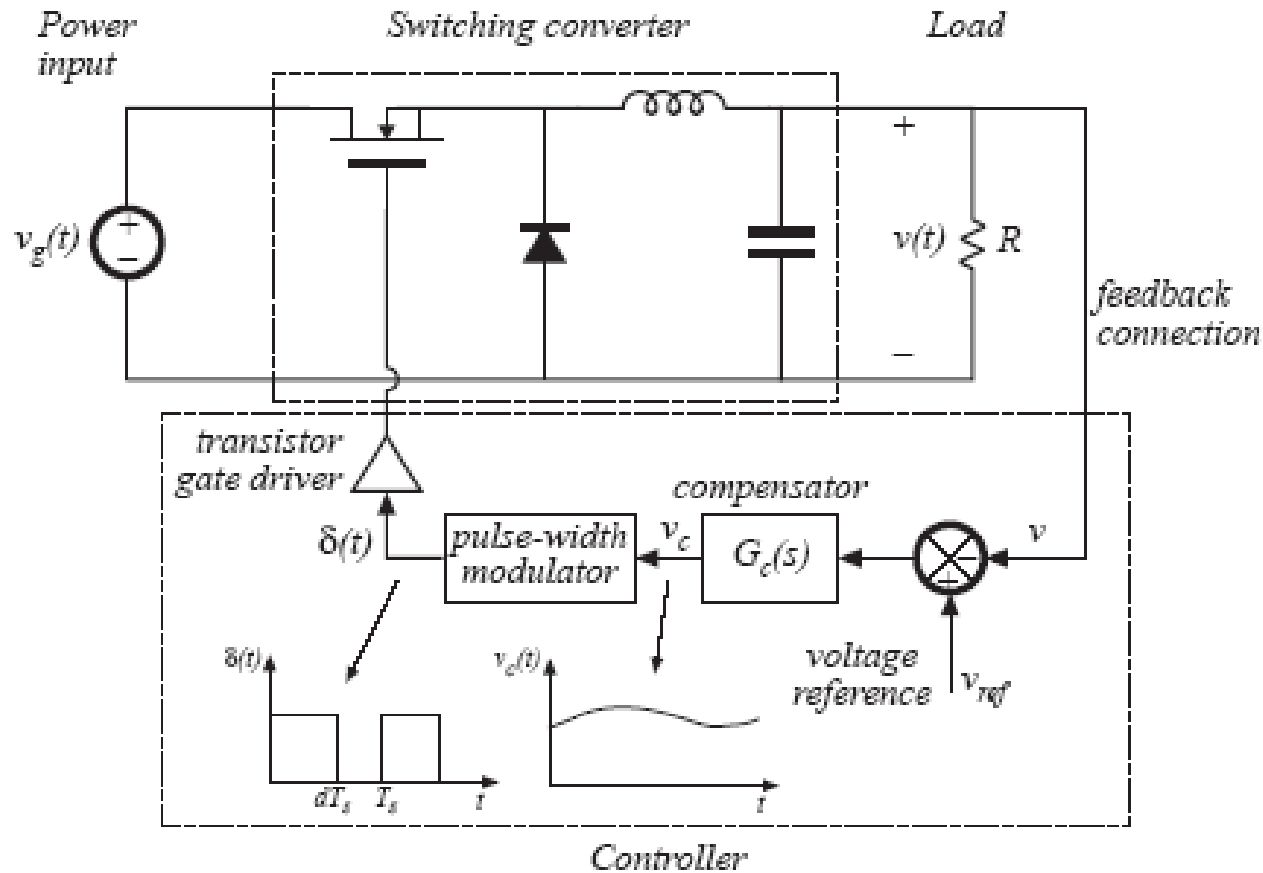
$$\hat{v}_g(t) = 0$$

$$\hat{v}_t(s) = M(D)e(s)\hat{d}(s)$$

$$\hat{v}(s) = \hat{v}_t(s)H_e(s) = M(D)e(s)\hat{d}(s)H_e(s)$$

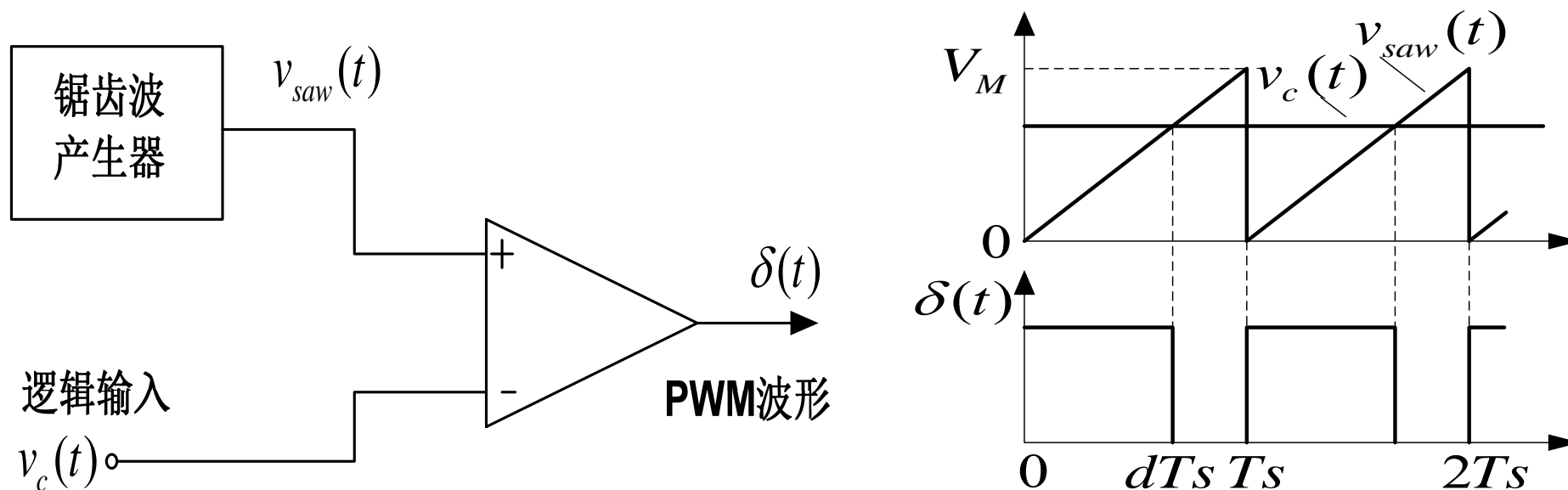
$$G_{vd}(s)\Big|_{v_g(s)=0} = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} = e(s)M(D)H_e(s)$$

3.3 PWM调制器的模型



Pulse-width modulator converts voltage signal $v_c(t)$ into duty cycle signal $d(t)$.
What is the relation between $v_c(t)$ and $d(t)$?

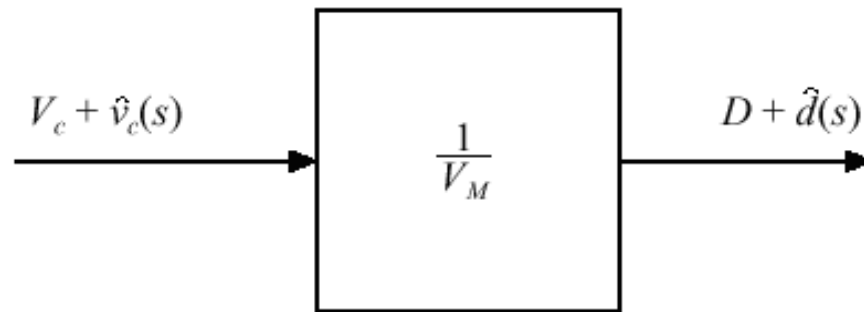
PWM调制器原理



$$\langle \delta(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{T_s} \left[\int_t^{t+dT_s} 1 d\tau + \int_{t+dT_s}^{t+T_s} 0 d\tau \right] = d$$

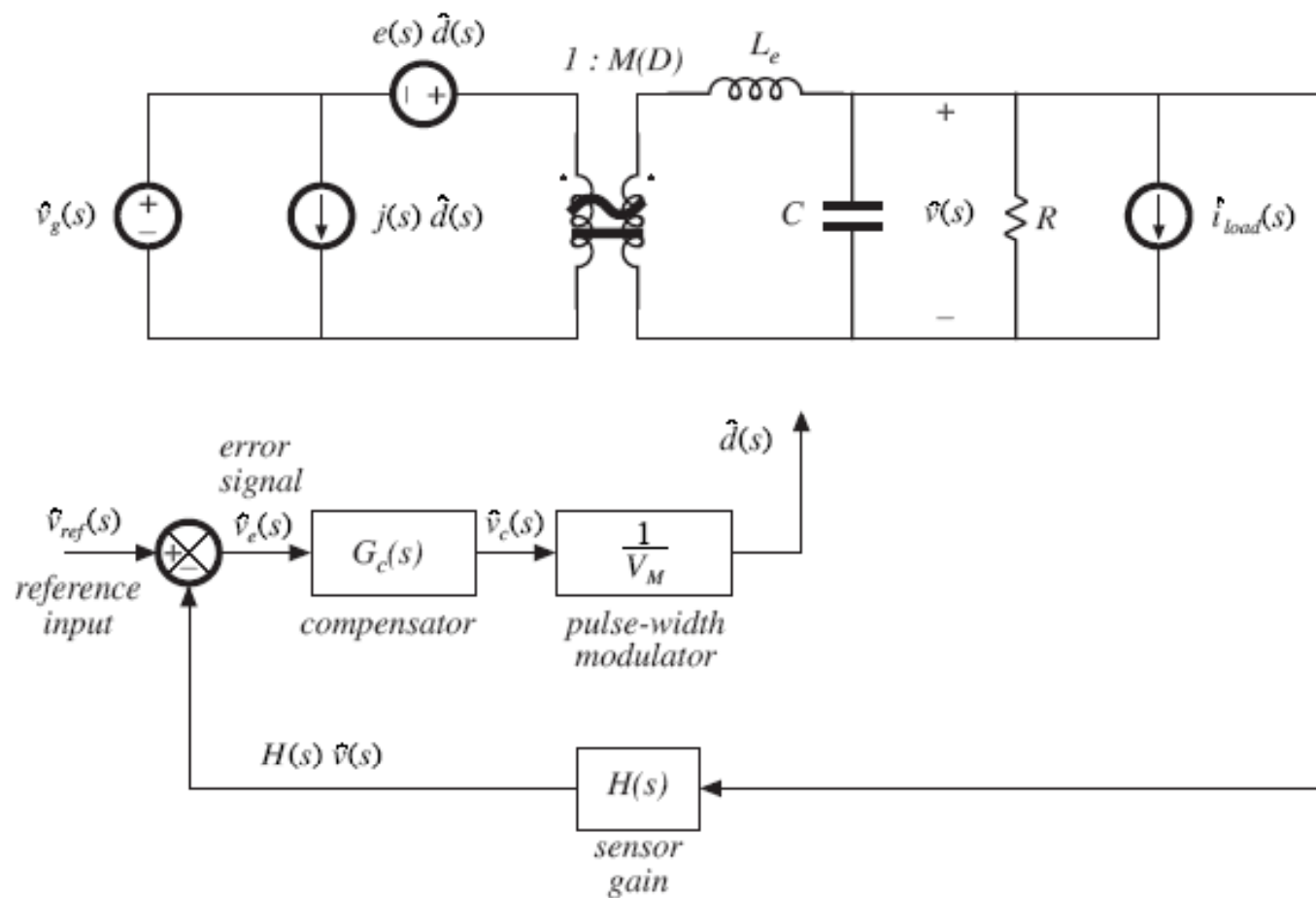
$$d(t) = \frac{\langle v_c(t) \rangle_{T_s}}{V_M}$$

调制器线性化模型



$$G_m(s) = \frac{1}{V_M}$$

DC/DC 变换系统动态模型



小结

- ◆ 变换器建模的思路 (Remove switching harmonics by averaging all waveforms over one switching period)
 - 抓住主要矛盾，忽略次要因数，获得简洁的公式
 - 反映占空比的低频变化对变换器中电压、电流的影响。
 - 忽略开关纹波，忽略开关频率谐波分量和边频带
- ◆ 虽然DC / DC变换器为非线性系统，但是通过扰动和线性化，可以获得小信号交流方程。
- ◆ 平均开关网络法的实质是用等效受控源替代开关网络，然后再应用扰动和线性化处理，获得小信号交流模型电路。
- ◆ 统一电路模型适合于基本DC / DC变换器。通过查表，代入统一电路模型，即可得到小信号交流模型电路。
- ◆ PWM调制器可以近似为线性函数，即占空比为输入控制量的线性函数。

3.4 DC/DC 变换器反馈控制设计

1、频率特性的概念

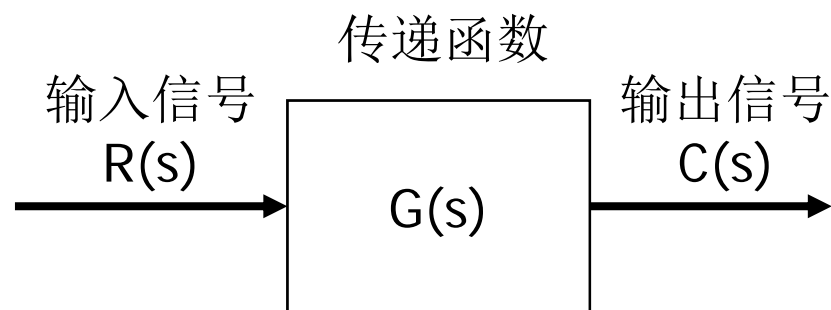
- ◆ 一般DC/DC变换器要加上**负反馈**构成**闭环系统**以提高**输出精度**和**动态特性**。
- ◆ 为满足DC/DC变换器系统的静态和动态指标的要求，一般需要设计良好的**补偿网络**。
- ◆ 补偿网络的设计可以采用**时域法**或**频域法**。
- ◆ 在频域法中，可以根据**波特图**设计出满意的补偿器。
- ◆ 波特图可通过前面介绍的建模方法理论推导得到系统传递函数，再得到**幅频特性**和**相频特性**。

(1) 系统传递函数的一般形式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

◆ 式中

- $R(s)$ 为系统的输入
- $C(s)$ 为系统的输出
- 比值 $C(s)/R(s)$ 表示系统输出信号的拉普拉斯变换对输入信号的拉普拉斯变换之比



(2) 系统频率特性 (Frequency characteristics)

◆ 将系统传递函数G(s)分解因子

$$G(s) = \frac{K'(s - Z_1)(s - Z_2) \cdots (s - Z_m)}{s^i (s - P_1)(s - P_2) \cdots (s - P_n)}$$
$$= \frac{K(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_m s)}{s^i (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_n s)}$$

- 式中, Z_1, Z_2, \dots, Z_m 为系统的**零点**; P_1, P_2, \dots, P_n 为系统的**极点**。 $1/T_1, 1/T_2, \dots, 1/T_m$ 称为**零点的转折频率**; $1/T_a, 1/T_b, \dots, 1/T_n$ 称为**极点的转折频率**。

◆ 系统频率特性为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega) \cdots (1 + T_m j\omega)}{s^i (1 + T_a j\omega)(1 + T_b j\omega) \cdots (1 + T_n j\omega)}$$

- 式中幅频特性为 $|G(j\omega)|$, 相频特性为 $\angle G(j\omega)$

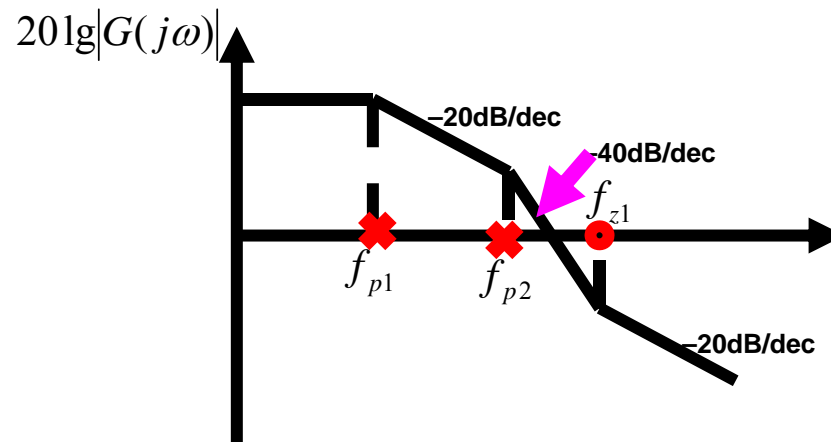
(3) 波特图 (Bode plots)

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)\cdots(1+T_mj\omega)}{S^i(1+T_a j\omega)(1+T_b j\omega)\cdots(1+T_n j\omega)}$$

- ◆ 波特图包含两幅图
 - 幅频图 (Amplitude plot) : 幅值 $20\lg |G(j\omega)|$ (以dB为单位) 与 $\log\omega$ 或 $\log f$ 的关系图形
 - 相频图 (Angle plot) : 相位 $\angle G(j\omega)$ (以 “°” 为单位) 与 $\log\omega$ 或 $\log f$ 的关系图形
- ◆ 在波特图法中, 由于幅值用分贝(dB)表示, 因此, 在传递函数中乘与除因子取对数后变成加与减
(**Multiplying factors become addition operation in amplitude Bode plot**)
- ◆ 相位也是传递函数中乘与除因子的相位加与减而求得。

(4) 波特图法

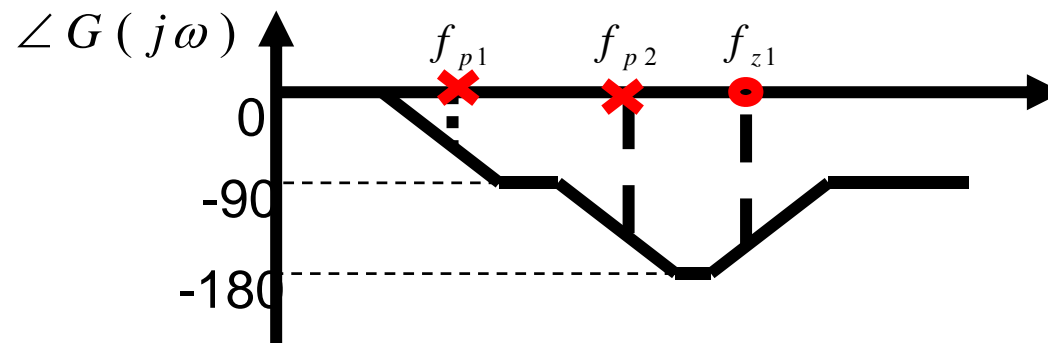
- ◆ **幅频图**用幅频特性的渐近线近似的折线图表示
(Amplitude plot is a Folding line graph)
 - 每遇到一个极点，幅频特性折线图的斜率就向下增加转折-20dB / dec；
 - 遇到零点，幅频特性曲线的斜率是向上增加转折20dB / dec。



- Meet a pole, Fold down with a rate of -20dB/dec
- Meet a zero, Fold up with a rate of +20dB/dec

◆ 相频图

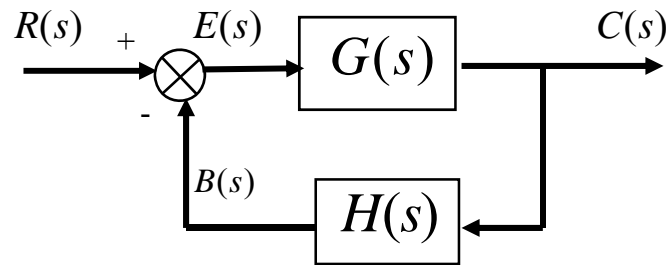
- 每遇到一个极点，设极点频率为 f_p ，在频率 $f_p/10$ 与 $10f_p$ 之间相频图会产生 -90° 的相位落后
- 对于零点，设零点频率为 f_z ，在频率 $f_z/10$ 与 $10f_z$ 之间相频图会产生 90° 的相位超前。



- If meet a pole , increase phase delay 90 degree occurring between $f_p/10$ and $10f_p$
- If meet a zero ,lead phase angle with 90 degree occurring between $f_z/10$ and $10f_z$

2、闭环系统的稳定性(Stability of closed loop)

- ◆ 闭环传递函数 (Closed loop transfer function)



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- ◆ 闭环系统的特征方程 (Characteristic equation)

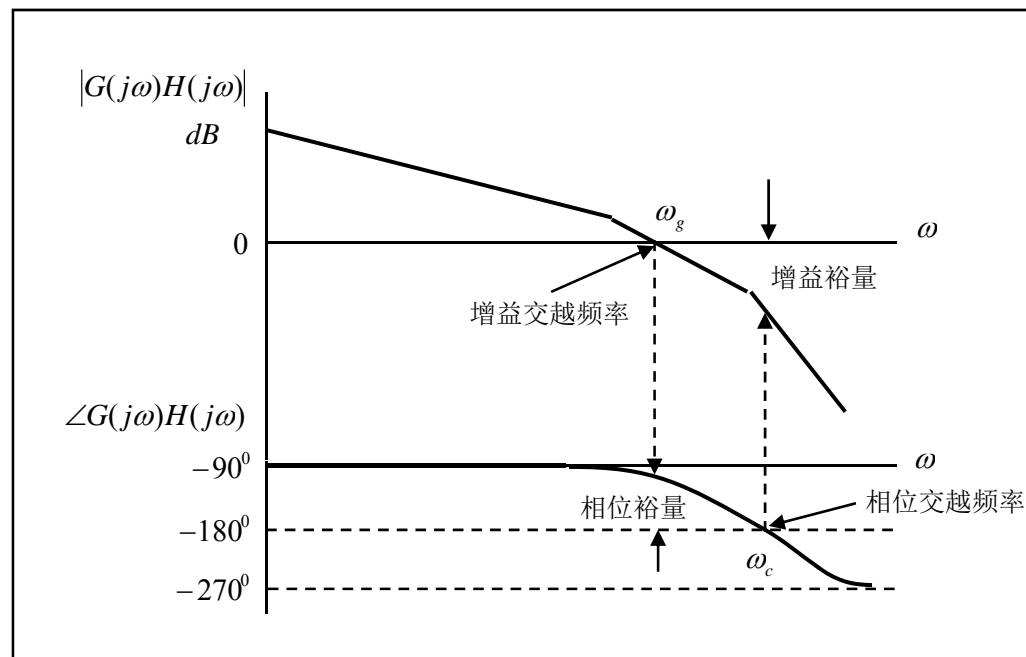
$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

roots of $F(s)$: **If all roots are in the left half plane, stable**
If a root in the right half plane, unstable.

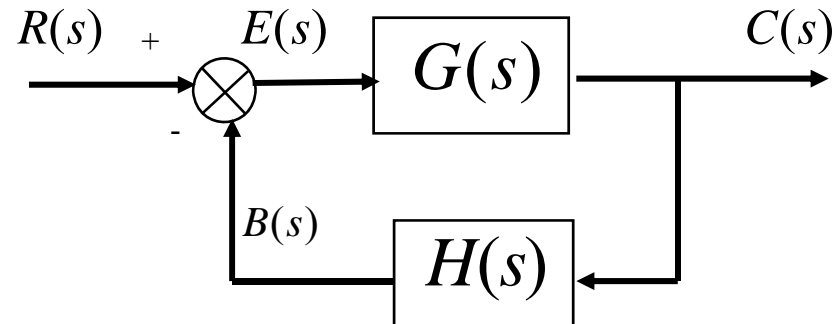
波特图 (Bode graph)

- ◆ $G(s)H(s)$ contains all the information about the roots of $F(s)$, therefore we can know the stability of the closed loop system by studying $G(s)H(s)$. Bode plot is used to analysis the stability of the system.

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$



Oscillation condition



- ◆ **Oscillation condition**

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \geq 1 \quad \text{and} \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = \pm 180^\circ$$

- ◆ **To Break the oscillation condition, it is required**

$$|G(j\omega)H(j\omega)| < 1 \quad \text{when} \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = \pm 180^\circ$$

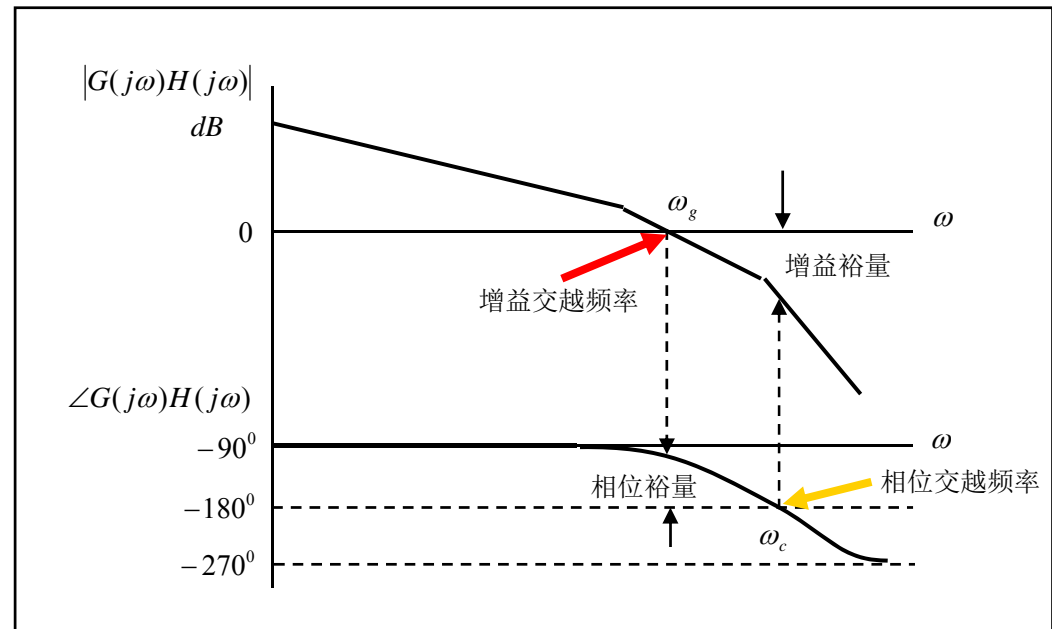
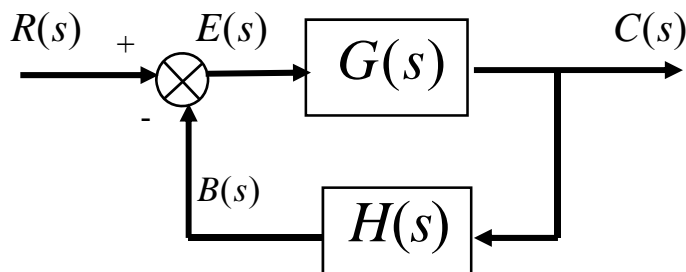
$$|\angle G(j\omega)H(j\omega)| < 180^\circ \quad \text{when} \quad |G(j\omega)H(j\omega)| = 1$$

相对稳定性 (Relative stability)

- phase margin (相位裕度) : PM
- gain margin (增益裕度) : GM
- 回路增益函数的相位为 -180° 时的频率称为**相位交越频率** $\omega_c = 2\pi f_c$

$$\text{增益裕量}(G.M.) = 20\log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|} \quad (\text{dB})$$

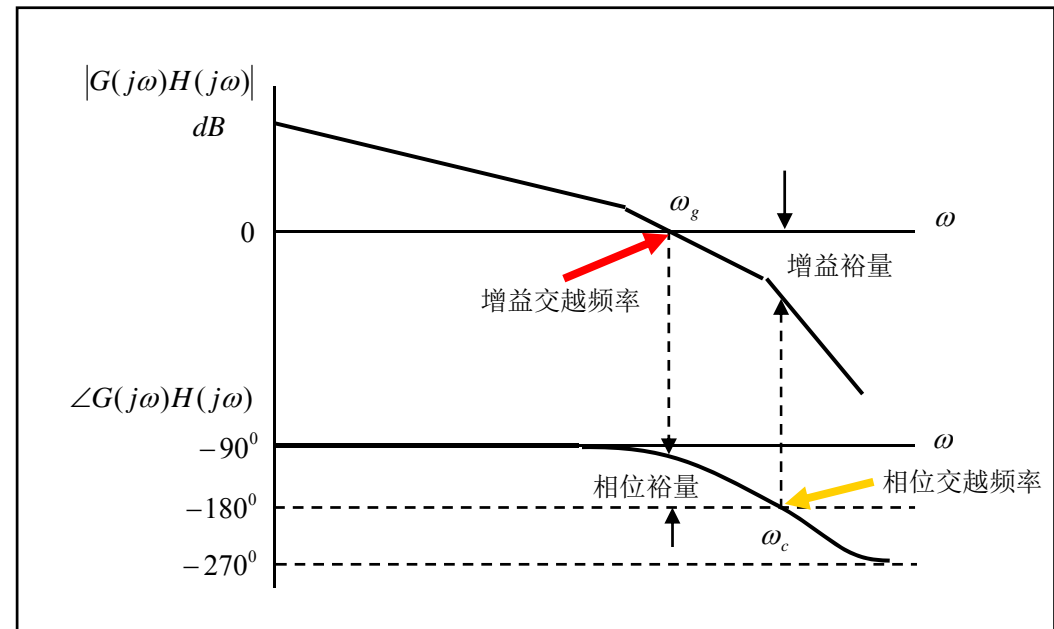
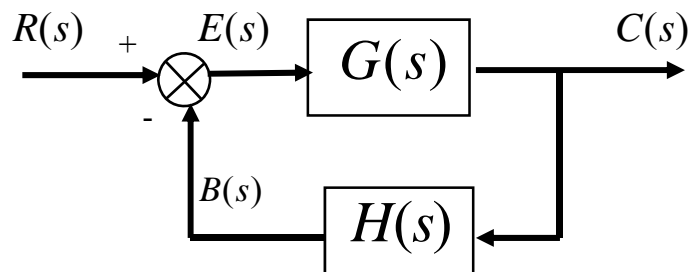
- **增益裕度**是指当回路增益函数的相位为 -180° 时，回路增益函数所能容许增加的回路增益



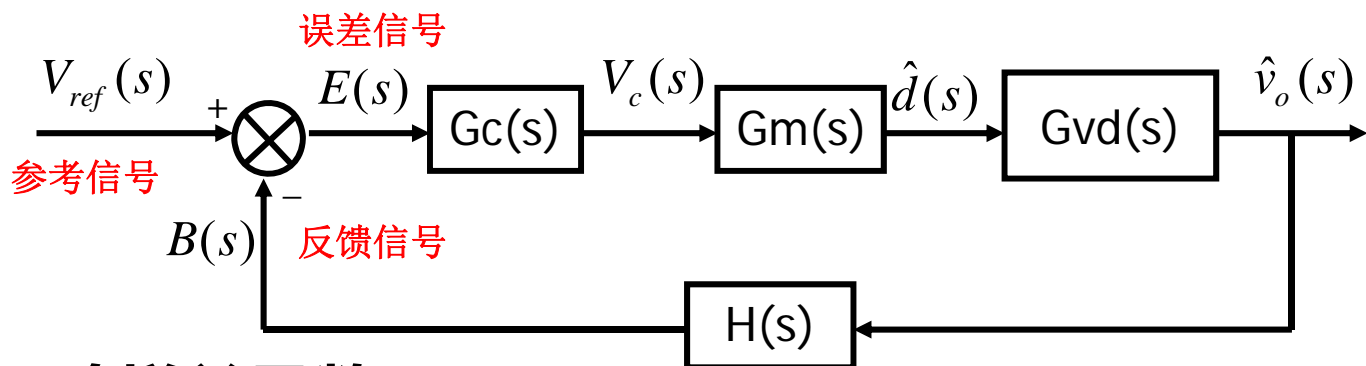
◆ 相位裕度

- 当闭环系统达到不稳定之前，其回路内所能容许增加的相位。
当回路增益函数的幅值为零分贝（单位增益）时，回路增益函数的相移与 -180° 之差。

$$\begin{aligned}\text{相位裕量}(P.M.) &= \angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) - (-180^\circ) \\ &= 180^\circ + \angle G(j\omega_g)H(j\omega_g)\end{aligned}$$



3、Buck变换器闭环控制与稳定性



◆ 回路增益函数

$$G(s)H(s) = G_c(s)G_m(s)G_{vd}(s)H(s) = G_c(s)G_o(s)$$

原始回路增益函数

◆ 占空比至输出的传递函数

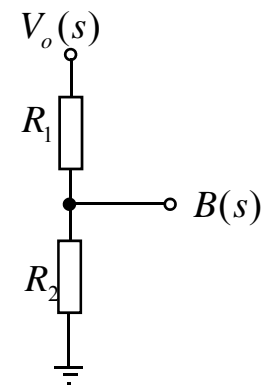
$$G_{vd}(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{d}(s)} = \left(\frac{V_o}{D} \right) \left[\frac{1}{1 + SL/R + S^2 LC} \right]$$

◆ PWM调制器的传递函数

$$G_m(s) = \frac{\hat{d}(s)}{\hat{V}_c(s)} = \frac{1}{V_m}$$

◆ 反馈分压网络传递函数

$$H(s) = \frac{B(s)}{V(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



- ◆ **Buck变换器系统原始回路增益函数Go(s)**

$$G_o(s) = G_m(s)G_{vd}(s)H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{V_o}{DV_M} \right) \left[\frac{1}{1 + SL/R + S^2 LC} \right]$$

- ◆ **Go(s)是一个二阶系统，有两个极点**
- ◆ **幅频图在低频段为水平线，幅值为**

$$20\lg\left\{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{V_o}{DV_M} \right)\right\}$$

- ◆ **高频段以-40dB/dec斜率下降，转折点由LC滤波器的谐振频率决定。**

◆ 设Buck变换器系统的参数为

- 输入电压 $V_g=48V$
- 输出电压 $V_o=12V$, 输出负载 $R=0.6\Omega$
- 输出滤波电感值 $L=60\mu H$, 电容值 $C=4000\mu F$
- 开关频率 $f_s=40kHz$, 即开关周期 $T=25\mu s$
- PWM调制器中锯齿波幅值 $V_M=2.5V$
- 反馈分压网络传递函数 $H(s)=0.5$

◆ 求出工作占空比

◆ 求Buck变换器原始回路增益函数

$$G_o(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{V_o}{DV_M} \right) \left[\frac{1}{1 + SL/R + S^2 LC} \right]$$

- ◆ 占空比： $D=V_o/V_g=12/48=0.25$
- ◆ Buck变换器占空比至输出的传递函数

$$G_{vd}(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{d}(s)} = \left(\frac{V_o}{D} \right) \left[\frac{1}{1 + SL/R + S^2 LC} \right] = \frac{12}{0.25} \frac{1}{1 + 1 \times 10^{-4} S + 2.4 \times 10^{-7} S^2}$$

- ◆ 原始回路增益函数

$$G_o(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{V_o}{DV_M} \right) \left[\frac{1}{1 + SL/R + S^2 LC} \right]$$

$$= 0.5 \times \frac{12}{0.25 \times 2.5} \times \frac{1}{1 + 1 \times 10^{-4} S + 2.4 \times 10^{-7} S^2} = \frac{9.6}{1 + 1 \times 10^{-4} S + 2.4 \times 10^{-7} S^2}$$

- ◆ 幅频图低频段为幅值约为20dB水平线，高频段为斜率-40dB/dec穿越0dB线的折线。
- ◆ 幅频图的转折频率为：

$$f_{P1,P2} \cong \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 325\text{Hz}$$

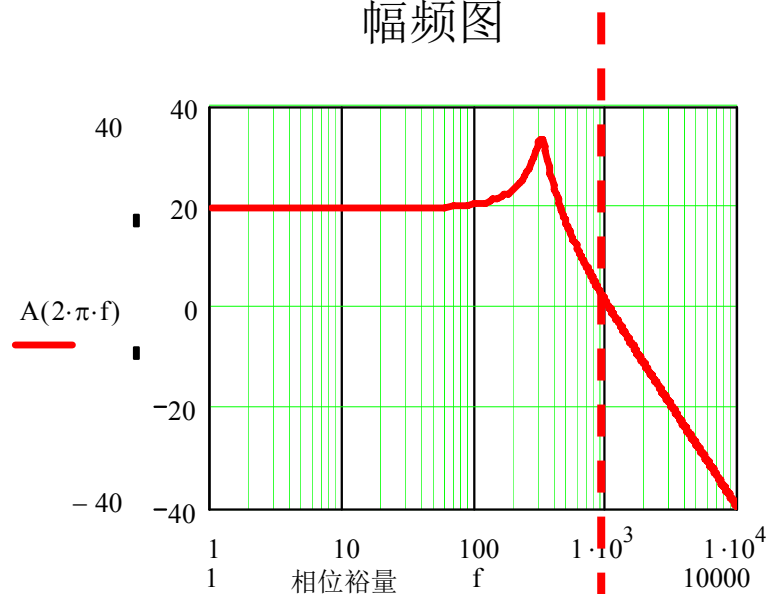
增益交越频率

$$\omega_g = 2\pi f_g$$

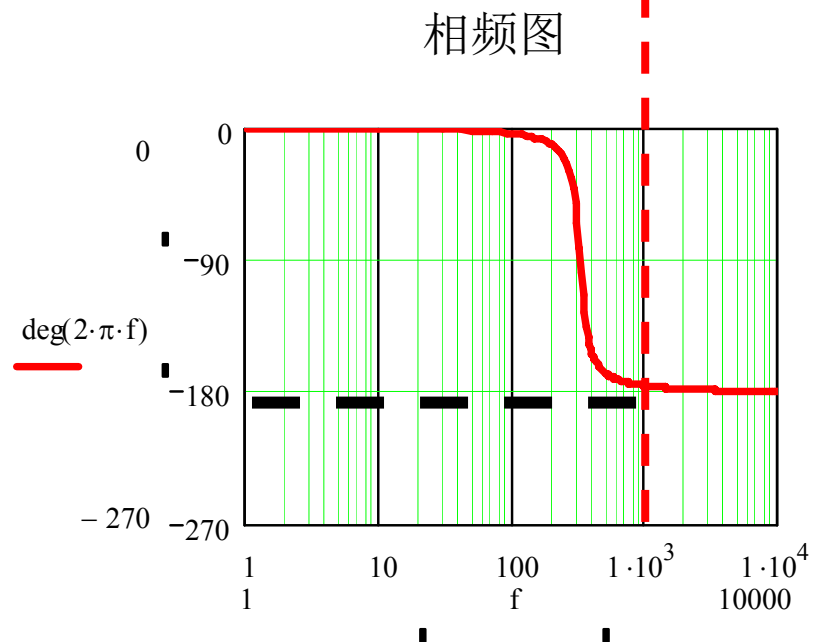
$$f_g \approx 1kHz$$

$$PM \approx 4^\circ$$

幅频图



相频图



- ◆ **一般原始回路增益函数不能满足系统静态和动态特性的要求，需要加入补偿网路。**
- ◆ **补偿网路只是系统中极小的一部分，但是，对系统静态和动态特性而言却是非常重要部份，它会影响到系统的输出精度、电压调整率、频带宽度以及暂态响应。**
- ◆ **原始回路增益函数频率特性的相位裕量太小。虽然系统是稳定的，但存在较大的输出超越量和较长的调节时间。**

通常选择相位裕量在 45° - 60° ，增益裕量在10dB左右



需要加入补偿网路 $G_c(s)$

采用运算放大器的有源超前—滞后补偿网络

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{V_c(s)}{E(s)} = \frac{V_c(s)}{V_{\text{ref}}(s) - V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC_2} + R_2}{R_3 + \left(\frac{1}{sC_1} // R_1 \right)} \\ &= \frac{(1 + sC_2 R_2)(1 + sC_1 R_1)}{(sC_2 R_1)(1 + sC_1 R_3)} \end{aligned}$$

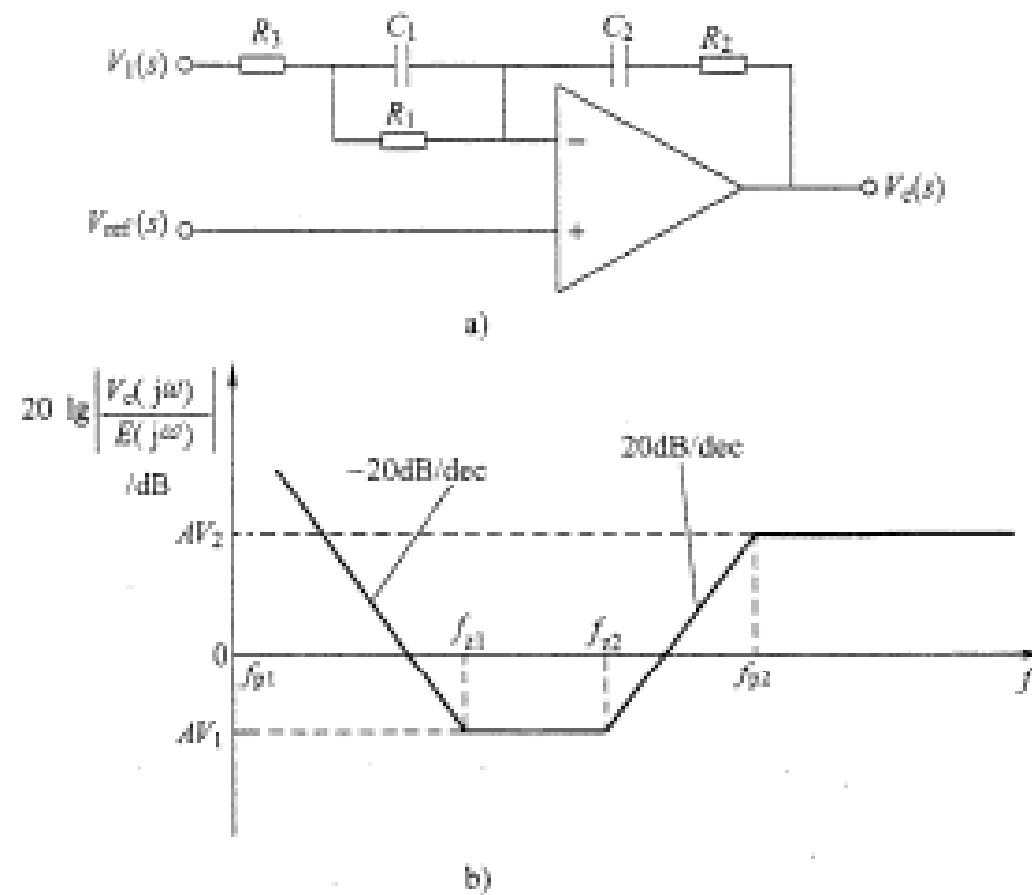


图 4-9 有源超前-滞后补偿网络一

a) 有源超前滞后补偿网络一电路图 b) 幅频图

◆ 例题4—1 Buck变换器工作在CCM方式，如图4—11所示。电路参数：输入电压 $V_g=48V$ ，输出电压 $V=12V$ ，滤波电感 $L=0.1mH$ ，滤波电容 $C=500\mu F$ ，负载电阻 $R=1\Omega$ ，反馈电阻 $R_x=100k\Omega$ ， $R_y=100k\Omega$ 。开关频率 $f_s=100Hz$ 。PWM 调制器锯齿波幅度 $V_m=2.5V$ ，参考电压 $V_{ref}=6V$ 。下面给出补偿网络设计的主要步骤。

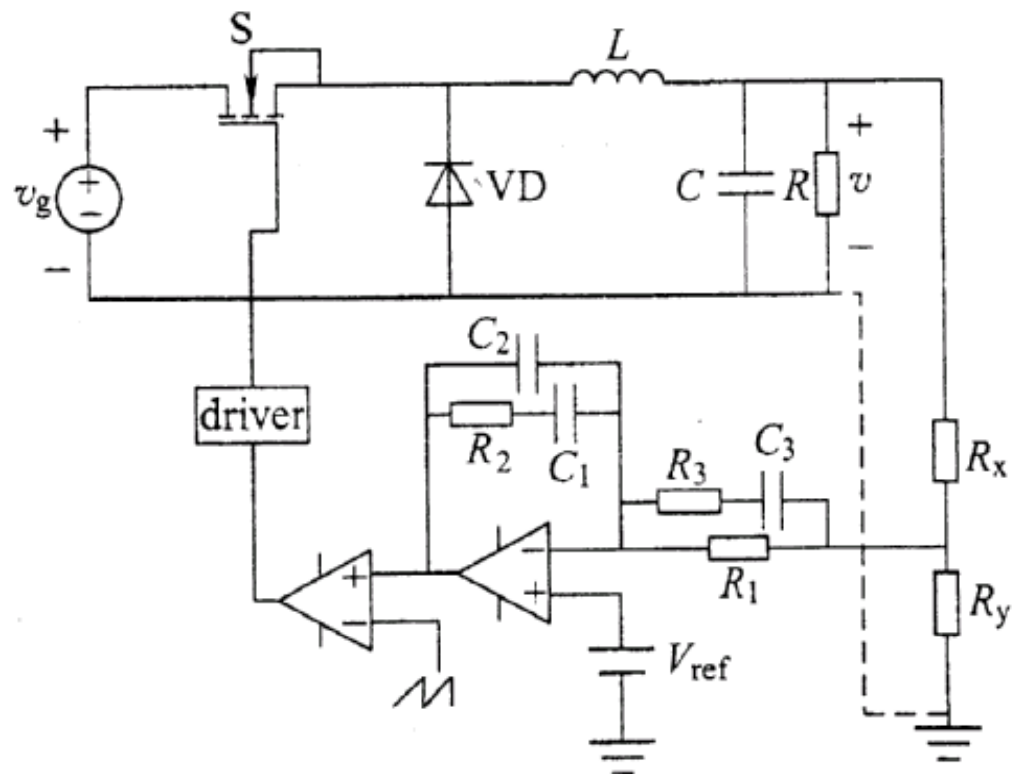


图 4-11 Buck 变换器系统

◆ 解 Buck 变换器占空比至输出的传递函数 $G_{vd}(s)$

$$G_{vd}(s) = \frac{\hat{V}_o(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{V_o}{D} \frac{1}{1 + s \frac{L}{R} + s^2 LC} = \frac{V_g}{1 + s \frac{L}{R} + s^2 LC}$$

◆ 原如

$$G_o(s) = H(s) G_m(s) G_{vd}(s) = \frac{R_y}{R_x + R_y} \frac{1}{V_m} \frac{V_g}{1 + s \frac{L}{R} + s^2 LC}$$

$$= \frac{100}{100 + 100} \times \frac{1}{2.5} \times \frac{48}{1 + \frac{0.1 \times 10^{-3}}{1} s + 0.1 \times 10^{-3} \times 500 \times 10^{-6} s^2}$$

◆ $G_o(s)$ 的
的转折频率

$$= \frac{9.6}{1 + 10^{-4} s + 5 \times 10^{-8} s^2}$$

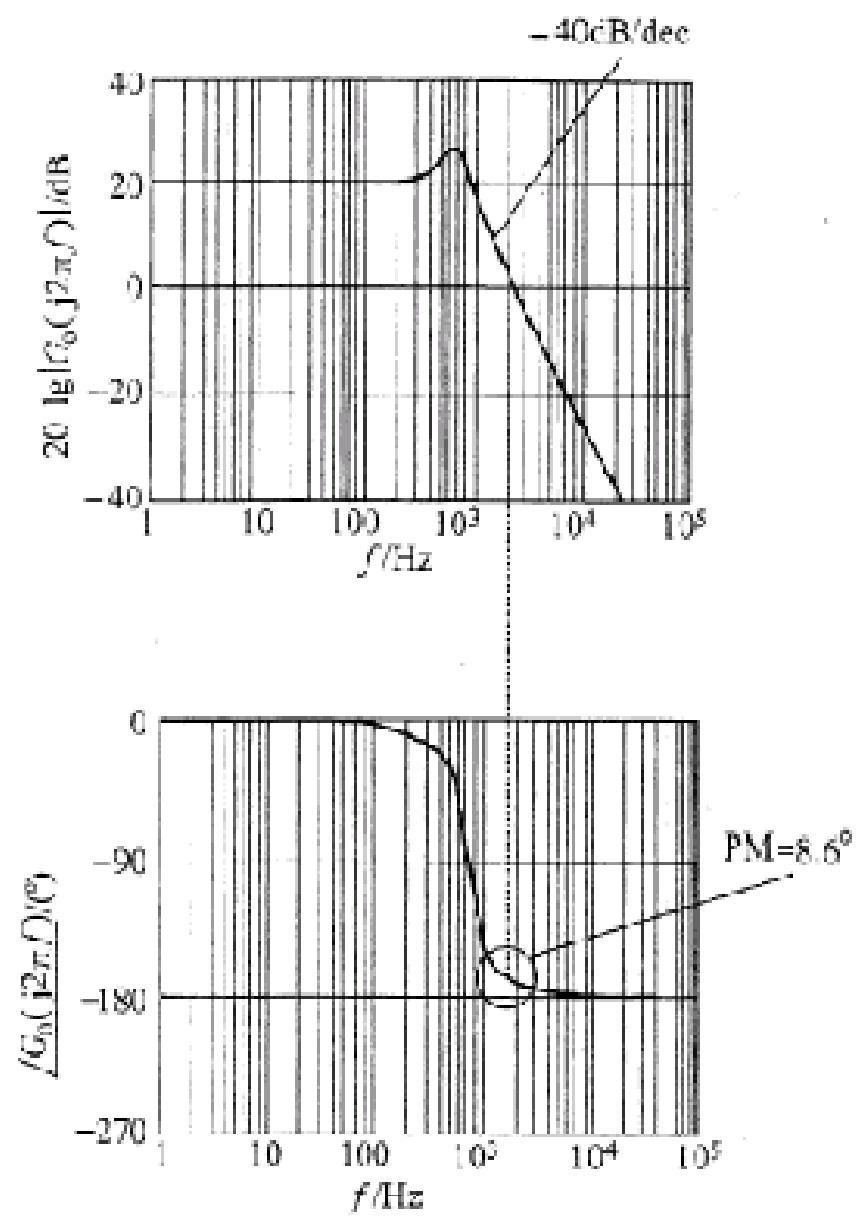
$$f_{p1,p2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 712\text{Hz}$$

◆ 作出波特图幅频特性如图4—12所示。在低频时 $G_0(s)$ 增益为19.6dB，在频率为712Hz时会有转折发生，其斜率为-40dB/dec。原始回路增益函数 $G_0(s)$ 在2300Hz穿越0dB线，相位裕量仅为8.6°

设加入补偿网络 $G_c(s)$ 后，回路函数 $G(s)H(s)=G_c(s)G_0(s)$ 的增益交越频率 f_g 等于1/5的开关频率 f_s ，于是增益交越频率

$$f_g = \frac{1}{5} f_s = \frac{1}{5} \times 100\text{kHz} = 20\text{kHz}$$

如果加入补偿网络后回路增益函数以 -20dB/dec斜率处通过0dB线，则变换器系统将具有较好的相位裕量。为了得到-20dB/dec的斜率，补充网络 $G_c(s)$ 在穿越频率点必须提供+20dB/dec的斜率。



- ◆ 补偿网络 $G_c(s)$ 两个零点频率设计为原始回路函数 $G_0(s)$ 两个相近的极点频率的 $1/2$ ，即

- ◆ 由于 $G_0(s)$ 没有零点， $f_{z1} = f_{z2} = \frac{1}{2} f_{p1, p2} = 356\text{Hz}$
 $f_{p2}=f_{p3}=f_s$ ，以减小输出高频开关纹波。
 原始回路函数 $G_0(s)$ 在 f_g 的增益为

补偿网络 $G_c(s)$ 在增益交越频率 f_g 的增益为

$$|G_0(j2\pi f_g)| = \left| \frac{9.6}{1 + 10^{-4} \times j2\pi f_g + 5 \times 10^{-8} \times (j2\pi f_g)^2} \right| = 0.012$$

这样，补偿

$$|G_c(j2\pi f_g)| = \frac{1}{|G_0(j2\pi f_g)|} = 82$$

- ◆ 求在零点 f_{z1} 与 f_{z2} 之增益为

$$AV_1 = \frac{f_{z2}}{f_g} |G_c(j2\pi f_g)| = \frac{356}{20 \times 10^3} \times 82 = 1.46$$

- ◆ 极点 f_{p2} 的增益则为

- ◆ 于是可以 $AV_2 = \frac{f_{p2}}{f_g} |G_c(j2\pi f_g)| = \frac{100 \times 10^3}{20 \times 10^3} \times 82 = 410$ 示

- ◆ 最后可求出补偿网络的电阻值与电容值。首先，假设 $R_2 = 10\text{k}\Omega$ ，可以求得其他元件的参数

$$R_3 = \frac{R_2}{AV_2} = \frac{10}{410}\text{k}\Omega \approx 24\Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi f_{z1} R_2} = 0.045\mu\text{F}$$

$$C_3 = \frac{1}{2\pi f_{p2} R_3} = 0.065\mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi f_{p3} R_2} = 159\text{pF}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi C_3 f_{z1}} = 6.8\text{k}\Omega$$

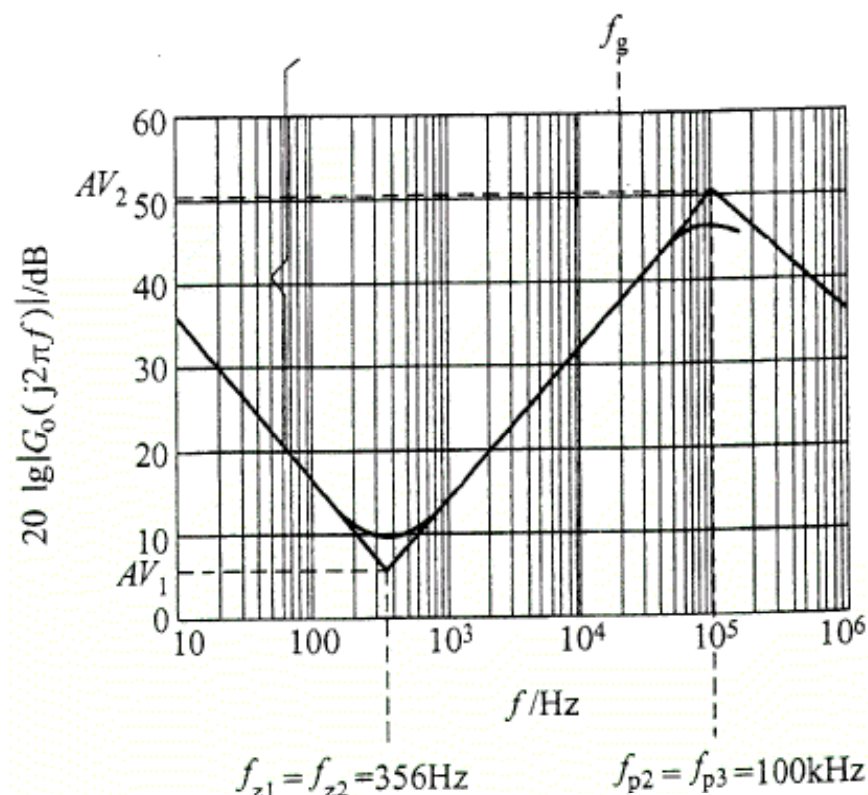
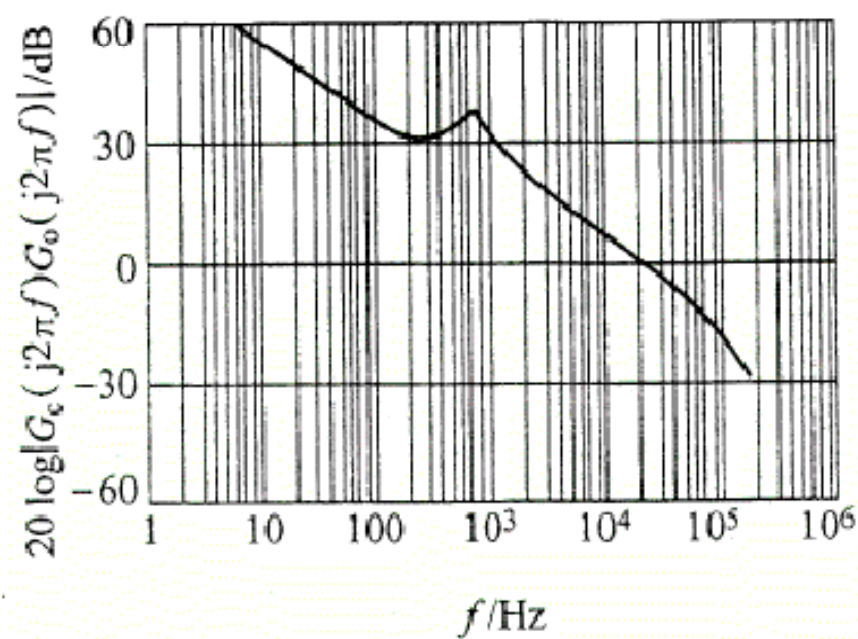
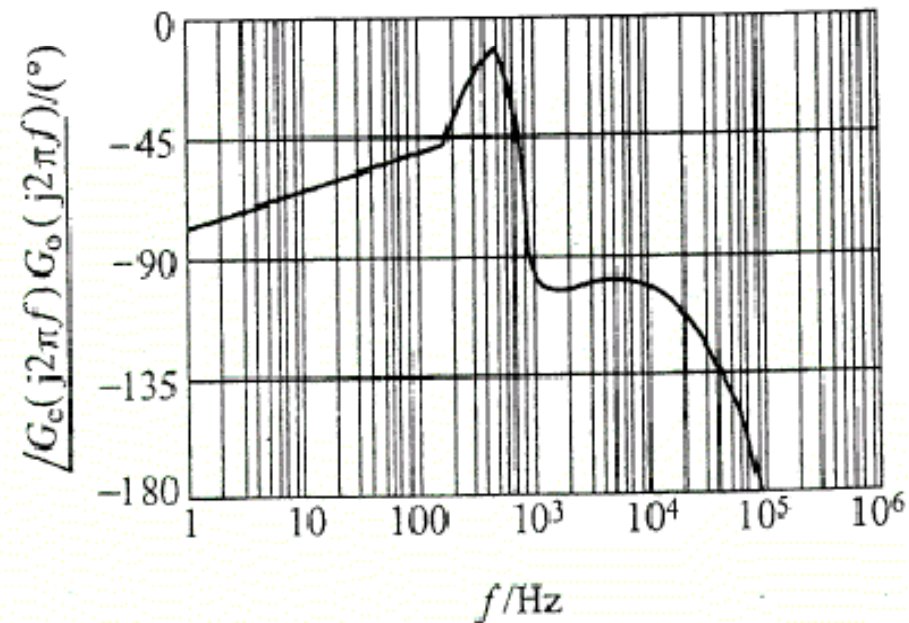


图 4-13 补偿网络 $G_c(s)$ 的频率特性

-
- ◆ 补偿网络的幅频特性和原始回路函数幅频特性相加，得到补充后回路函数幅频特性如图4—14a所示，相频特性如图4—14b所示。由图可得知，幅频特性在20kHz处以-20dB/dec斜率通过0dB线，相位裕量 $PM=66^\circ$



a)



b)

图 4-14 补偿后回路函数 $G(s)H(s) = G_c(s)G_o(s)$ 的频率特性

a) 幅频特性 b) 相频特性

总结

- ◆ 开关周期平均概念
- ◆ 基于开关网络划分的开关平均电路模型
- ◆ 小信号交流等效电路
- ◆ 统一模型
- ◆ PWM模型
- ◆ 系统稳定性的概念