



第七章 离散线性时不变系统的基本理论

内容提要

第一讲 离散控制系统概念与例子

第二讲 采样与保持

第三讲 数学模型与求解

第四讲 s 平面与 z 平面的映射关系

第五讲 动态性能分析

第六讲 稳定性分析

第七讲 稳态误差计算

第八讲 频域分析

第九讲 数字控制器脉冲传递函数
与设计方法概述

第十讲 连续域离散化设计

□ 第十一讲 数字PID及其变种

□ 第十二讲 PID控制器参数的整定

□ 第十三讲 具有Smith纯滞后补偿
PID控制

□ 第十四讲 解析设计方法-最小拍
计

□ 第十五讲 数字控制器的大林算

□ 第十六讲 基于 $W(W')$ 平面的
Bode图设计控制器

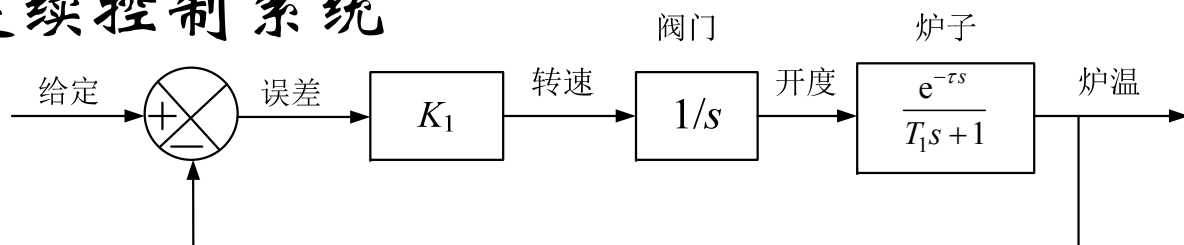
□ 第十七讲 基于 z 平面的根轨迹控
制器设计

第一讲 离散控制系统概念与例子

在两个引例基础上引入离散系统与离散控制系统的概念。
重点是掌握计算机控制系统相关的概念。

引例1：温度控制系统(具有大滞后和大惯性)

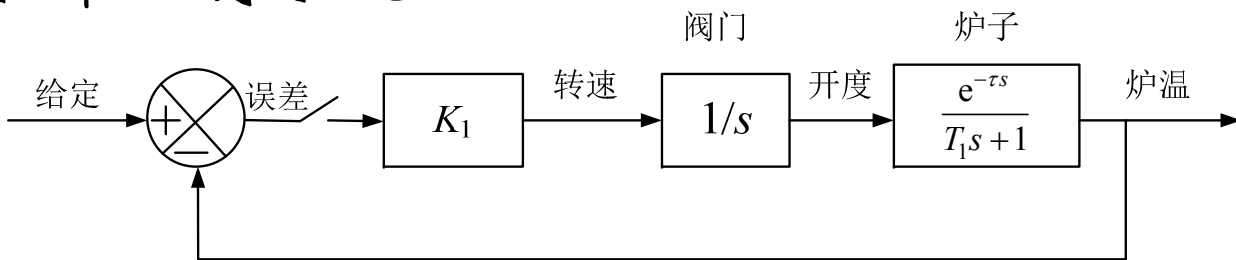
□ 连续控制系统



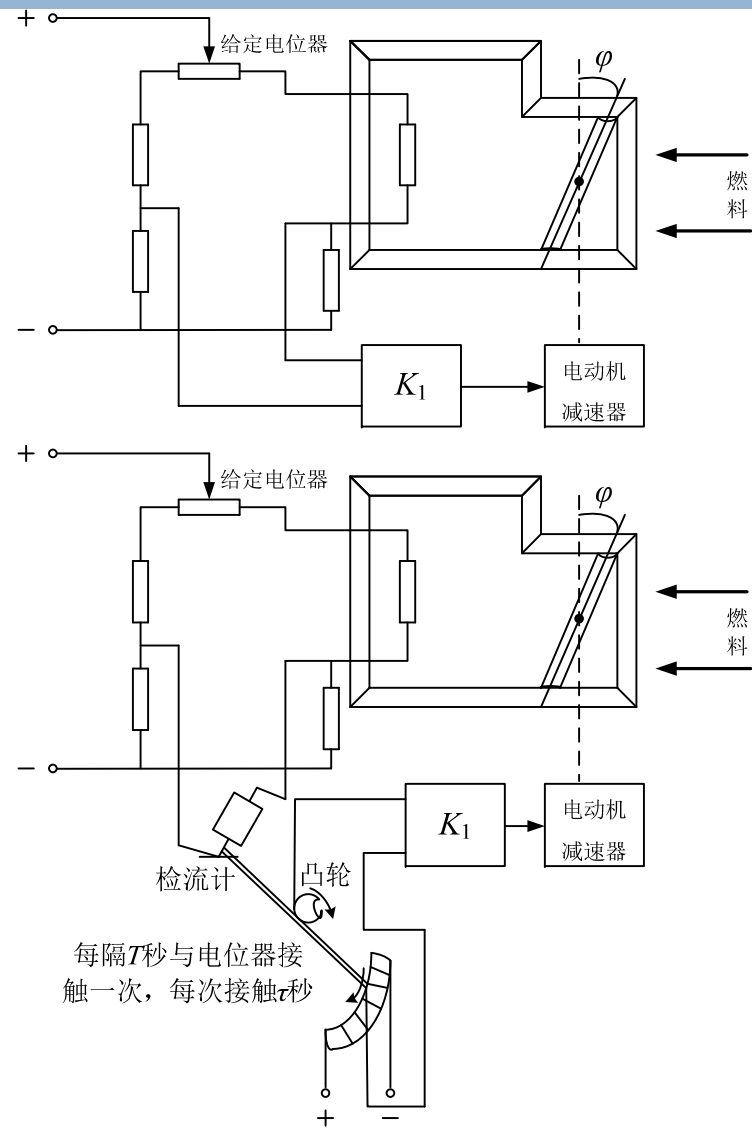
K较大，连续调节容易导致大幅振荡；

K较小，调节时时太长。

□ 采样控制系统



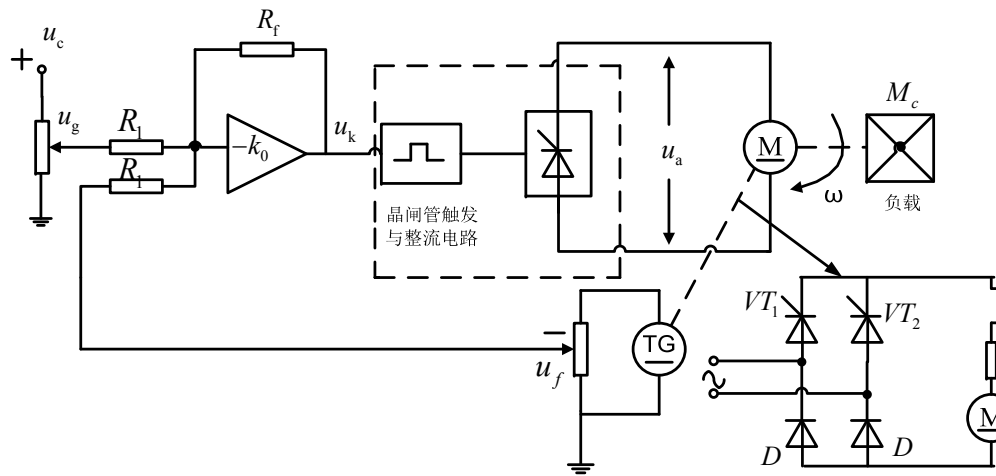
周期性的自动通断实现断续控制，保持炉温的基本不变，调节过程中超调现象减少。



引例2：直流电机伺服控制系统

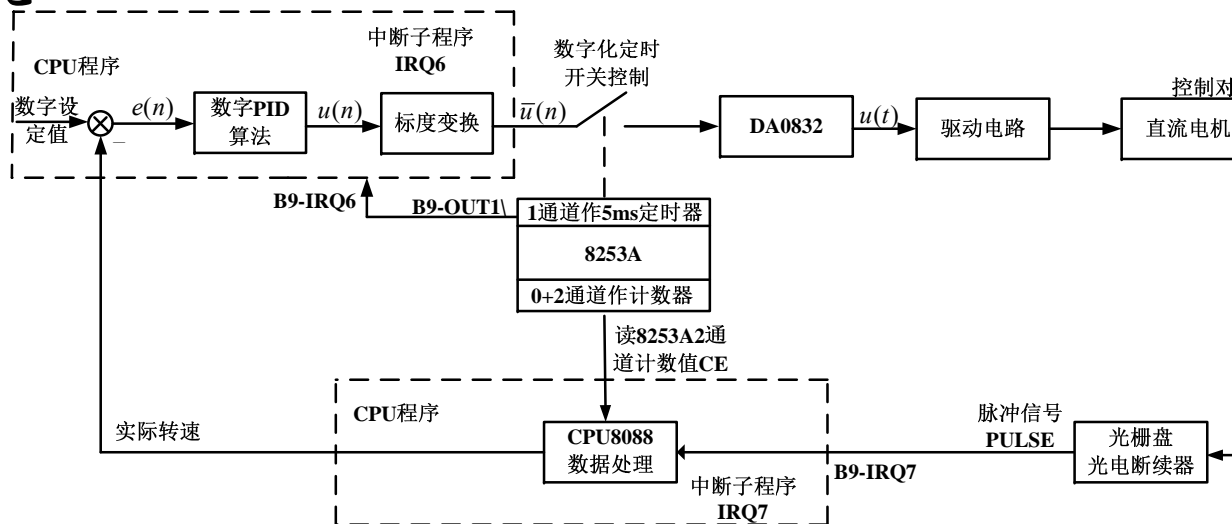
□ 连续控制系统

需要采用模拟电路或动力学机构实现连续调节



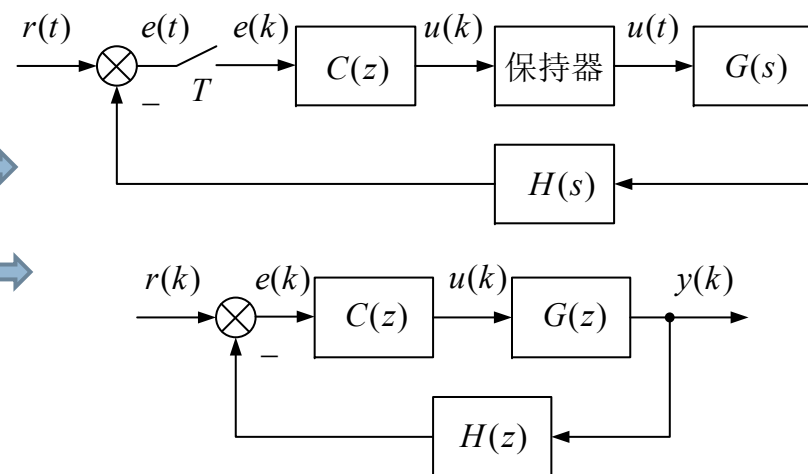
□ 含保持的离散(数字)控制系统

CPU 的加入使控制策略可方便更改，而不必改变硬件。采样周期越短，与连续系统越相近。

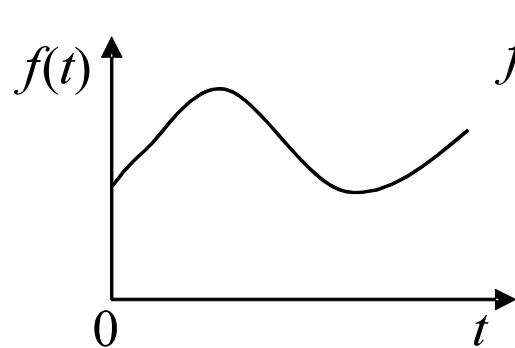
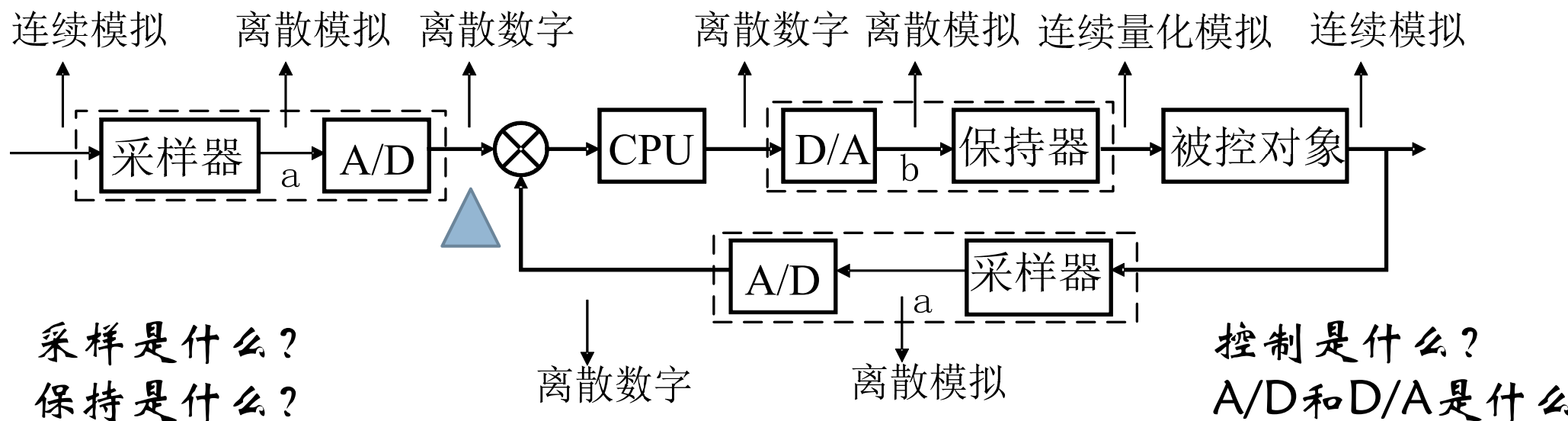
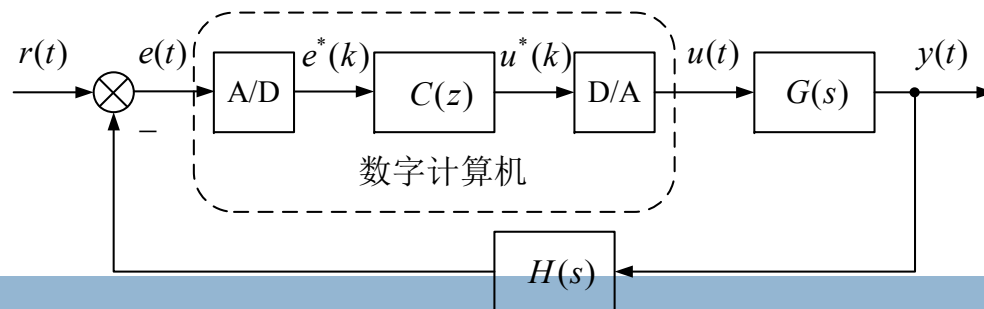


离散系统与离散控制系统概念

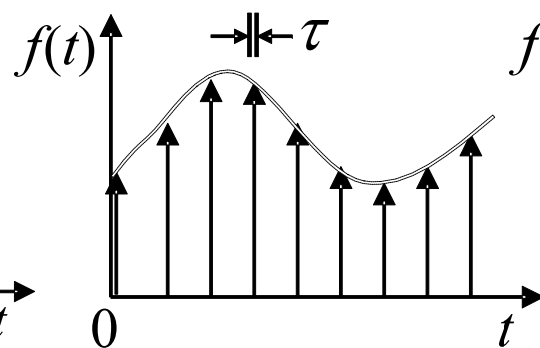
- 离散系统：当系统中只要有一处的信号是脉冲序列或数码时，即为离散系统，这些信号仅在离散时间点上有意义，在时间间隔内无意义。
 - 脉冲(采样)系统：离散信号是脉冲序列而不是数码的离散系统称为脉冲系统。脉冲序列在时间上是离散的，而在幅值上是任意的，表示强度。
 - 数字系统：离散信号是数码而不是脉冲序列的离散系统称为数字系统，数码在时间上是离散的，而在数值上采用整量化表示。特殊地，系统中所有的地方均是数码信号的系统称为全数字系统。
- 离散控制系统：离散系统中存在控制作用
- 采样控制系统
- 离散全数字控制系统
- 计算机数字控制系统



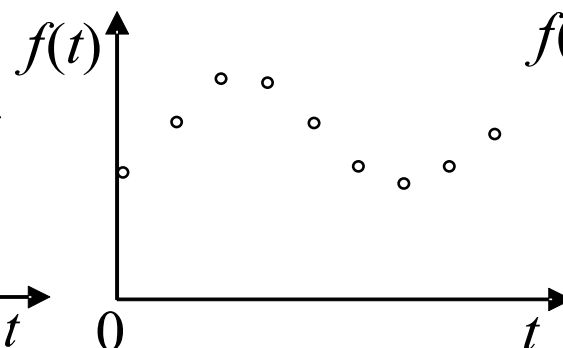
计算机数字控制系统



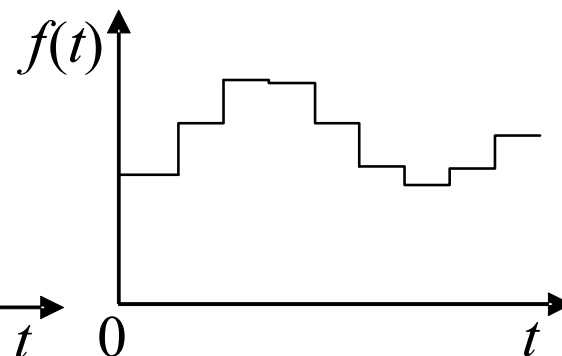
连续模拟信号



离散模拟信号



离散数字信号



连续时间量化模型信

这一讲就到这里！

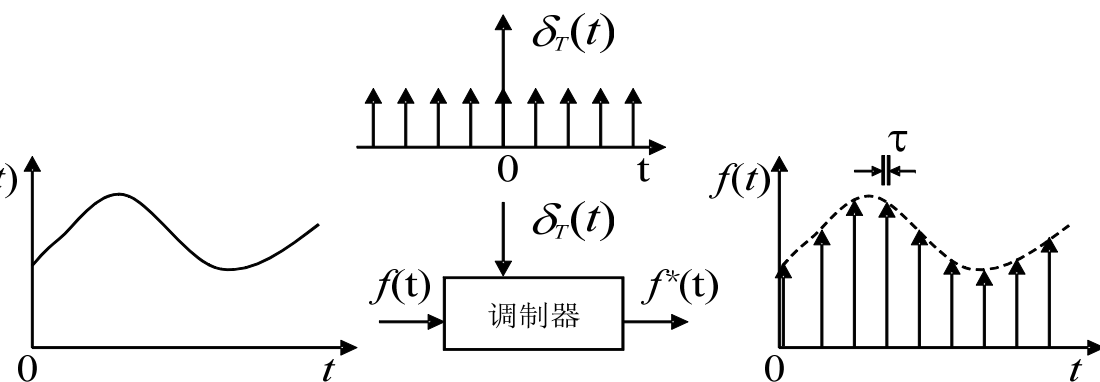
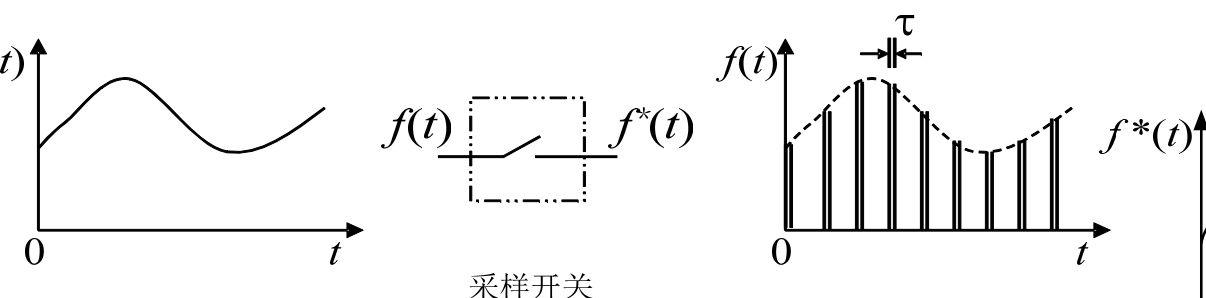


第二讲 采样与保持

计算机控制系统离不开采样与保持环节。本讲对理想采样与实际采样、理想保持与实际保持进行了分析，表明采用理想采样和保持器与采用实际采样与保持器得到的结果是一致的。之外，本讲也将介绍实际系统采样周期的选择问题。

连续信号与数字信号相互转换的问题

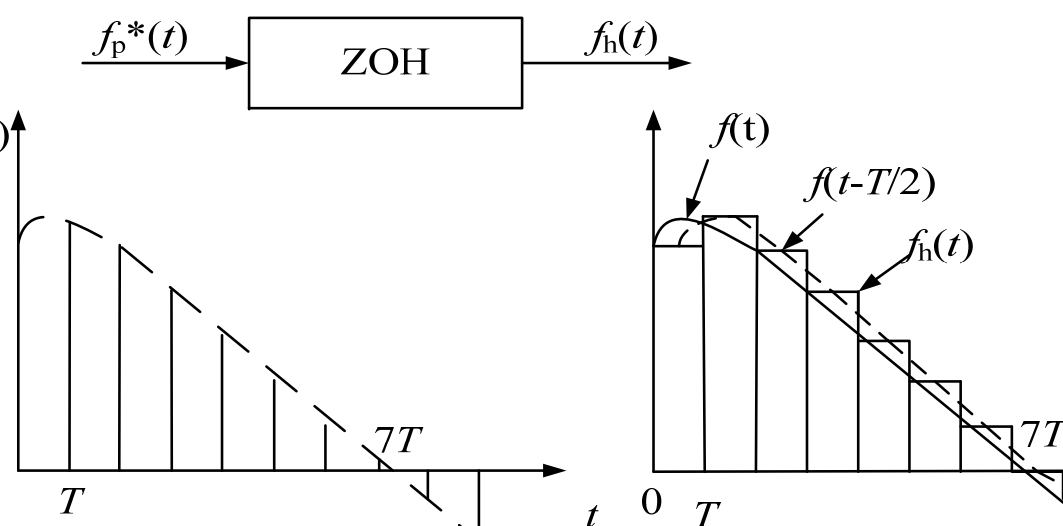
□ 连续信号如何离散化(数字化)?



脉冲信号充当载波
信号的幅度调制

$$f(k) = \begin{cases} f_i(t) & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$$

□ 如何将数字信号转换为连续信号



$$f_h(kT + t) = f(kT), 0 \leq t < T$$

□ 如何选择采样的周期 T ?

Shannon 采样定理 $\omega_s \geq 2\omega_f \Leftrightarrow T \leq$

采样器载波与输出

理想

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

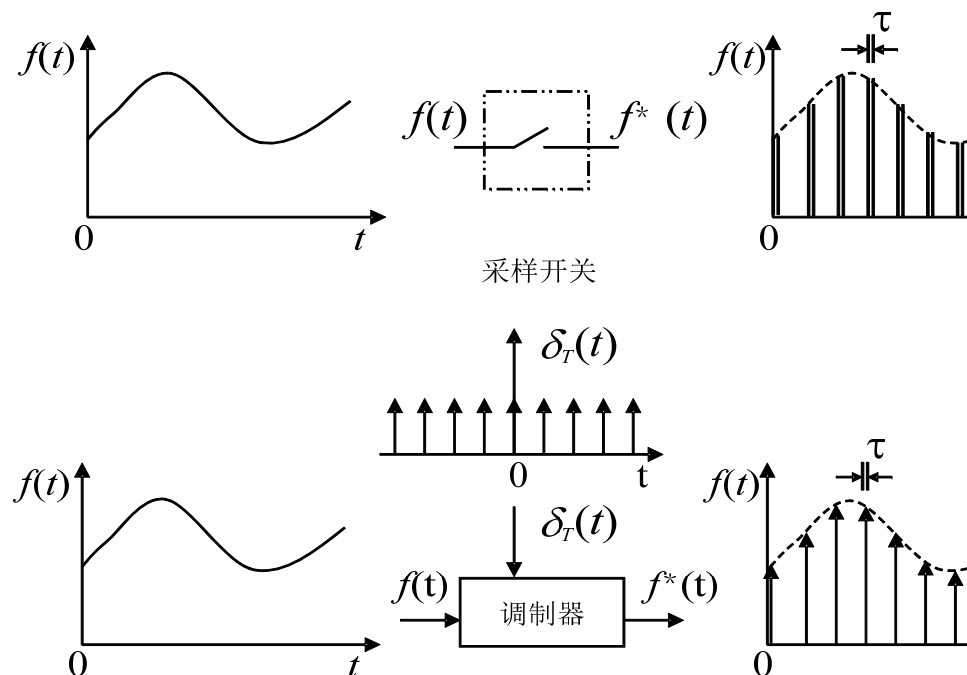
▣ 幅值为 ∞ ，强度为 $f(kT)$

实际

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1(t - kT) - 1(t - kT - \tau)]$$

$$f_p^*(t) = f(t)p_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)p(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau f(kT)\delta(t - kT)$$

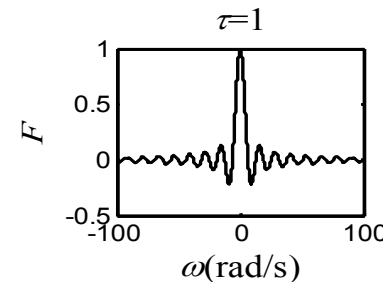
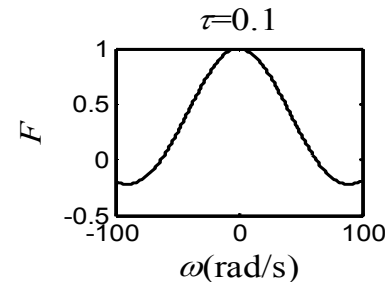
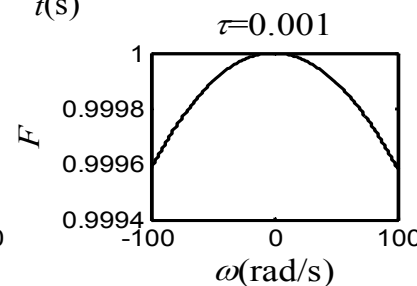
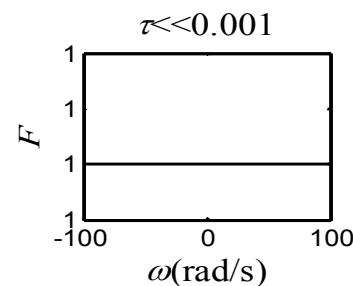
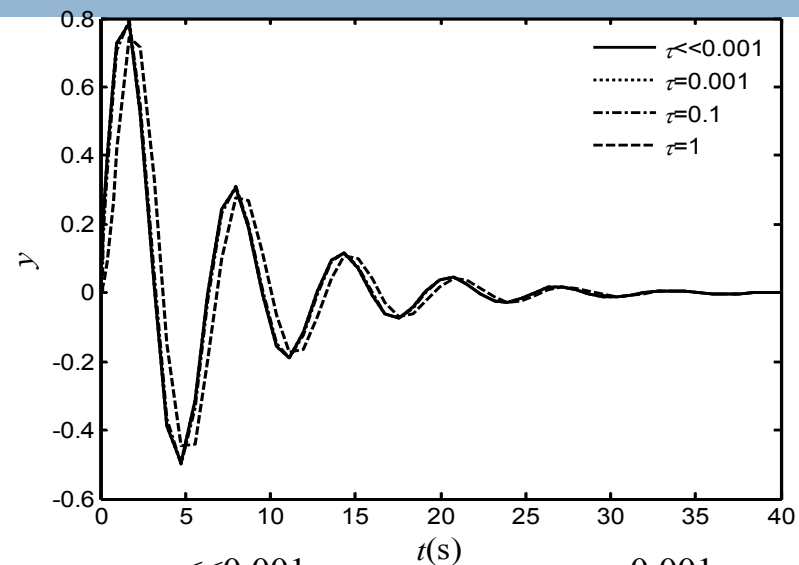
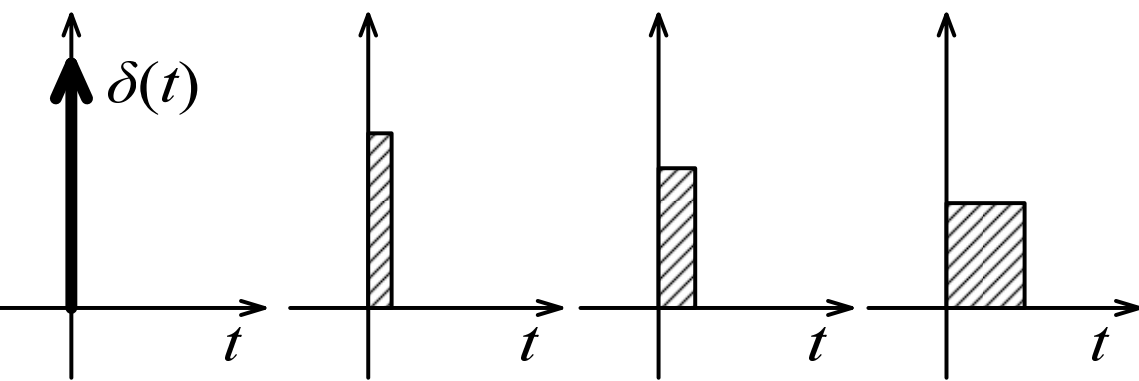
▣ 幅值为 $f(kT)$ ，强度为 $\tau f(kT)$



能量相同的脉冲信号近似等价性

$$G(s) = (s^2 + 0.3s + 1)^{-1}$$

$$u(t) = 1(t) - 1(t - \tau)$$



➤从**时域**角度上说就是指零初始条件下，系统在这些脉冲信号的作用下输出的响应几乎相同；

➤从**频谱**的角度上说就是指这些脉冲信号的频谱几乎相同，特别在低频段，且脉冲宽度越小，频谱越接近的。

采样信号的频域特性

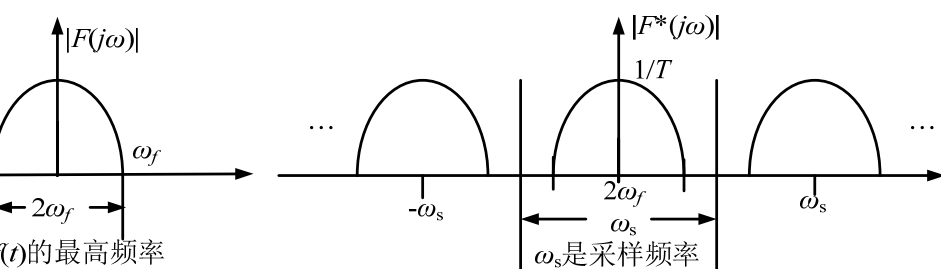
理想

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jn\omega_s t} \Rightarrow f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k f(t) e^{jn\omega_s t}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$f^*(t) = F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$= \frac{1}{T} (\cdots + F[j(\omega - \omega_s)] + F(j\omega) + F[j(\omega + \omega_s)] + \cdots)$$



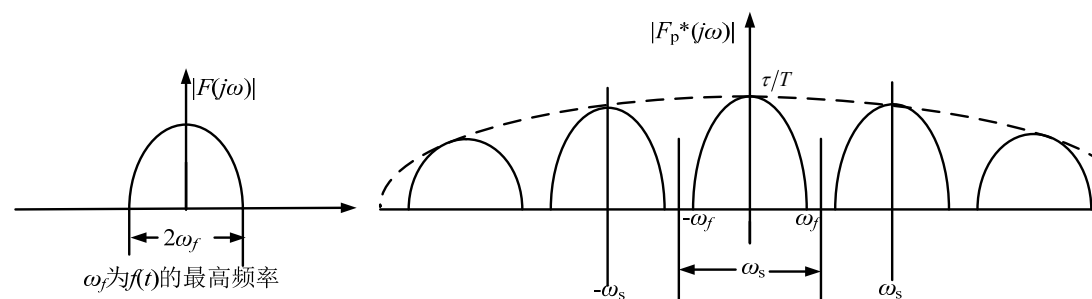
实际

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \Rightarrow f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(t) e^{jk\omega_s t},$$

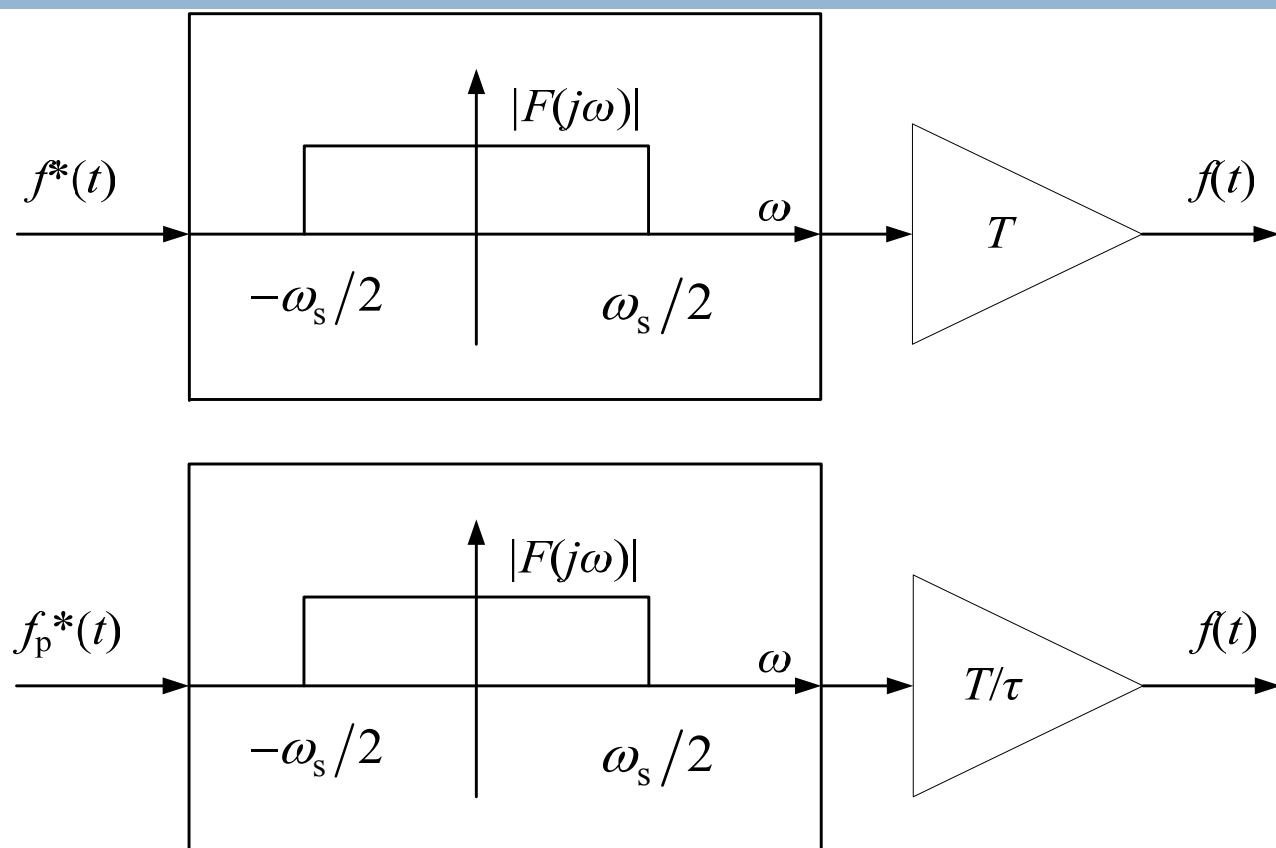
$$c_0 = \lim_{k \rightarrow 0} c_k = \tau/T, c_k = \frac{1}{T} \frac{\sin(k\omega_s \tau/2)}{k\omega_s \tau/2} e^{-j \frac{k\omega_s \tau}{2}}, k \neq 0$$

$$F(f_p^*(t)) = F_p^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k F[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$= \cdots + c_{-1} F[j(\omega - \omega_s)] + c_0 F(j\omega) + c_1 F[j(\omega + \omega_s)] + \cdots$$



理想采样与实际采样后信号的复原稍有不同



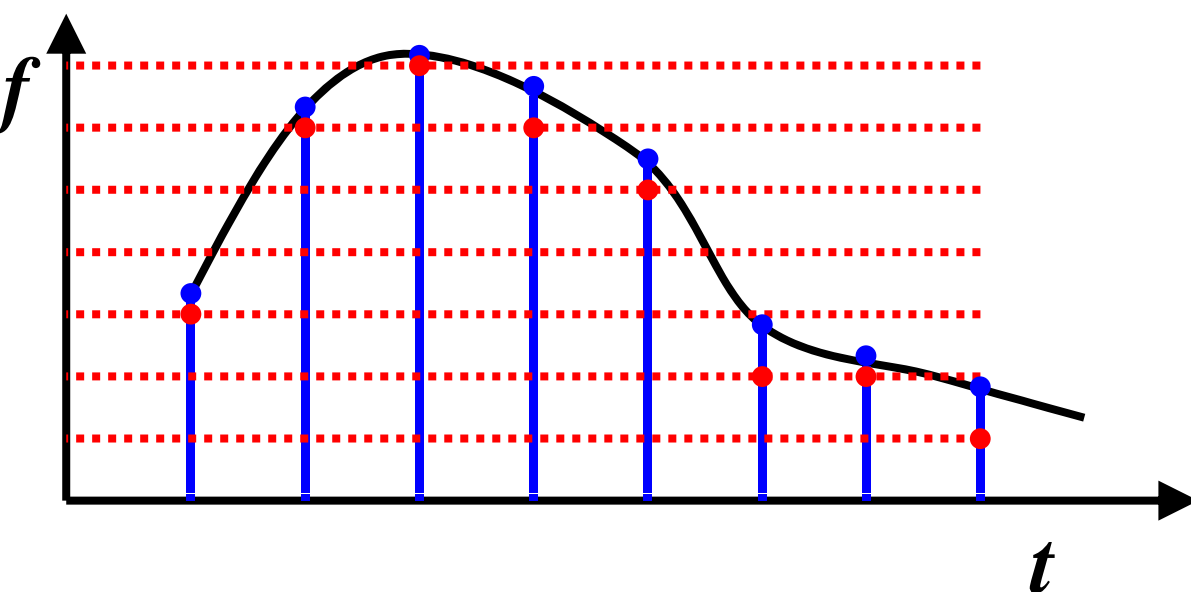
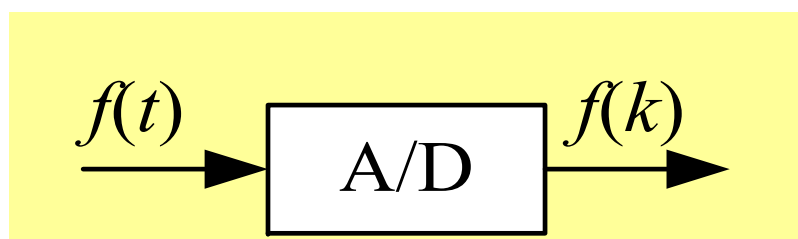
$$\text{所以 } f_p^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau f(kT) \delta(t - kT)$$

➤根据香农采样定理只有当 $\omega_s \geq$ 时才能筛选出基本频谱，且无任信息损失；否则，频谱将出现混无法还原信号。

➤但是理想低通滤波器是不存在这一点可以从两个方面加以解释一是时域角度，说明其不是一个因果系统；二是频域角度，不满足利-维纳准则。

➤因此，实际上只能构造低通滤波器去逼近理想低通特性，因此由样信号恢复原信号一定是不准确

从连续信号到数字信号----采样-量化



➤ 过程

- ✓ 采样与保持：使信号频率拓展。
- ✓ 量化与编码：使信号的误差增加

➤ 类型

- ✓ 并联比较型ADC----最快 AD9020
- ✓ 逐次逼近型ADC ADC0809
- ✓ 双积分型ADC----最慢 MCI4433

➤ 指标

- ✓ 转换精度（分辨率和转换误差）
- ✓ 转换时间

采样周期的选择

- 对于非周期信号必须选择合适的 ω_f 才能为选择 ω_s 提供最低要求。
 - ▣ 一般可按频谱幅值为最大值5%以下的允许误差选取 $\omega_s \geq 2\omega_f \Leftrightarrow T \leq \pi/\omega_f$
 - ▣ 也可以按控制系统带宽选择 $\omega_f = \omega_b$
- ω_s 选择要依其易实现性和抗干扰性综合考虑，方法有：
 - ▣ 被控变量随时间的变化率缓慢时按照工程经验选取
 - ▣ 按照闭环系统或开环系统频率特性选取： $\omega_s = (5 \sim 10)\omega_b$ $\omega_s = (5 \sim 10)\omega_c$
 - ▣ 按照开环传递函数选取：按照传递函数中的最小时间常数或最小自然振荡周期来选取采样周期 $T = \min \frac{1}{4}(T_1, T_2, \dots, T_{n_1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_2}, t_1, t_2, \dots, t_{n_2})$
 - ▣ 按照开环系统阶跃响应上升时间选取 $T = t_r/2 \sim 4$
 - ▣ 按照A/D转换量化单位和连续信号最大变化速度选取：
$$e_m = \max |f(t) - f_h(t)| \leq T \max |f'(t)| \leq q \Rightarrow T \leq \frac{q}{\max |f'(t)|}$$

被控变量	采样周期
流量	1
压力	1
液面	5
温度	10
成分	10

保持器 (ZOH) 的输入输出关系

理想

$$f^*(t) = \delta(t) \quad f_h(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

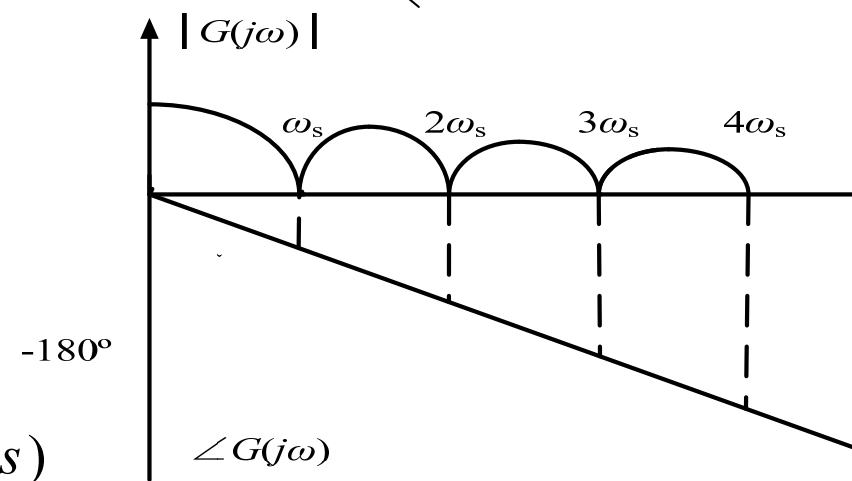
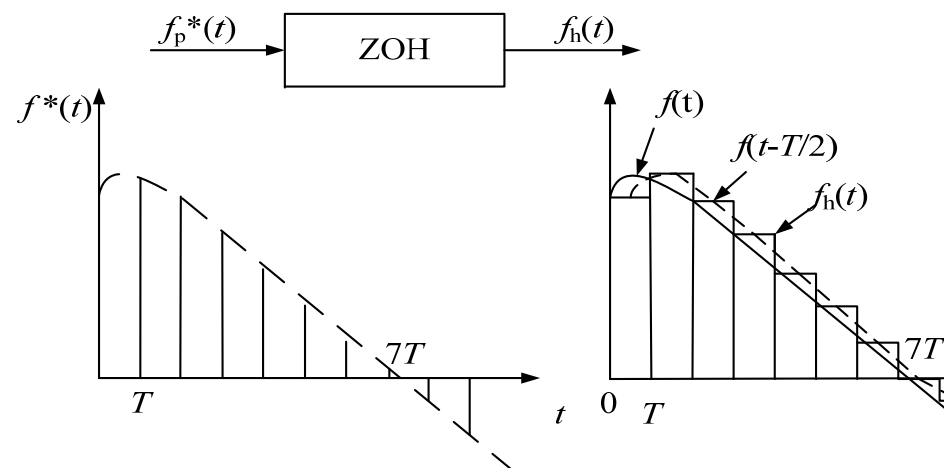
$$G_h(s) = \frac{L[f_h(t)]}{L[\delta(t)]} = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts})$$

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{j\omega T}}{j\omega} = T \left(\frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \right) e^{-j\omega T / 2}$$

实际

$$f_p^*(t) = 1(t) - 1(t - \tau) \quad f_{ph}(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

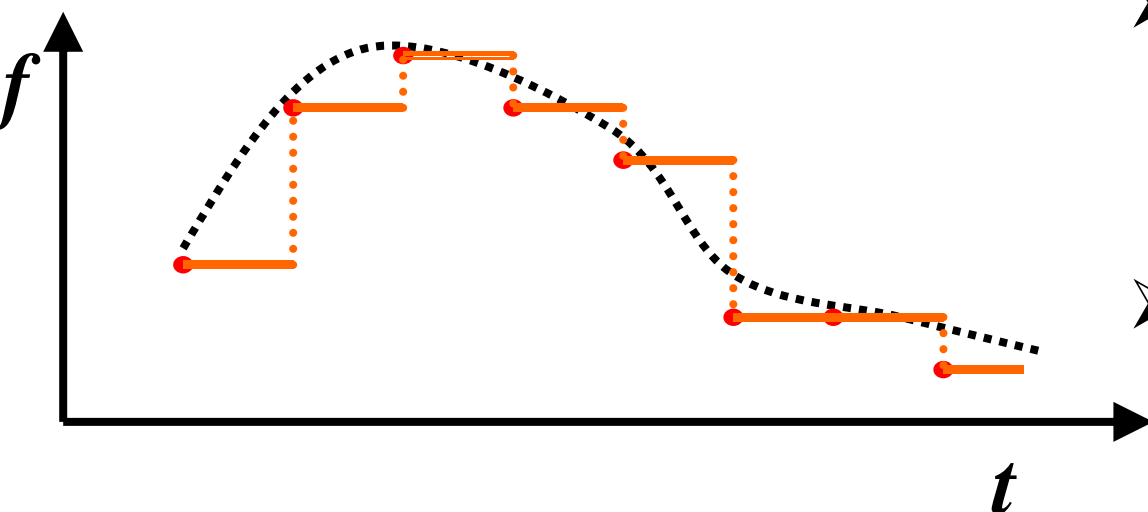
$$G_{ph}(s) = \frac{L[f_{ph}(t)]}{L[f_p^*(t)]} = \frac{1 - e^{-Ts}}{1 - e^{-\tau s}} \stackrel{\tau \ll T}{=} \frac{1 - e^{-Ts}}{\tau s} = \frac{1}{\tau} G_h(s)$$



零阶保持器具有低通特性和延时特性

延时环节

从数字信号到模拟信号



- 组成：由数字寄存器、模拟电子开关、位权网络、求和运算放大器和基准电压（或恒流源）组成。
- 实质：D/A转换相当于低通滤波器。一般含有保持器的作用。
- 类型
 - ✓ 权电阻网络DAC
 - ✓ R-2R倒T形电阻网络DAC DAC083
 - ✓ 单值电流型网络DAC
- 指标
 - ✓ 转换精度（分辨率和转换误差）
 - ✓ 转换速率

理想情况与实际情况分析的一致性

	采样	保持
理想	$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$	$G_h(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts})$
实际	$f_p^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau f(kT)\delta(t - kT)$	$G_{ph}(s) = \frac{1}{\tau s}(1 - e^{-Ts})$

- 可以看出：实际采样器多出来的部分在经保持器后被对消掉的，故用理想情况分析完全可以代替实际情况。但要满足信号的有限频带采样定理。
- 采用理想采样保持器是数学分析上的需要，因为实际采样信号是分段连续的断续信号，数学处理较困难。理想的采样信号它容易用Z变换和脉冲传递函数加以处理。

这一讲就到这里！



第三讲 数学模型与求解

离散系统的数学模型采用差分方程表示，若是离散线性定常系统还可利用离散脉冲传递函数描述。动态系统几乎所有的特性都包含在响应解中，故得到正确的解对了解系统特点很重要。

前向差分的概念

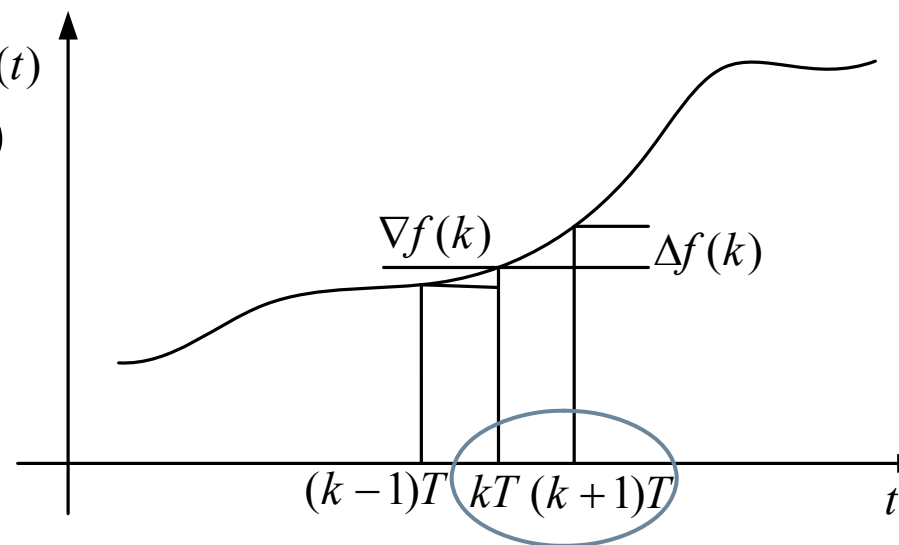
□ 一阶前向差分

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \quad f(k+1) = f(k) + \Delta f(k)$$

比较

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{df(\tau)}{d\tau} \right] d\tau$$



□ 高阶前向差分

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)$$

$$\Delta^3 f(k) = \Delta^2 f(k+1) - \Delta^2 f(k) = f(k+3) - 3f(k+2) + 3f(k+1) - f(k)$$

$$\Delta^n f(k) = f(k+n) - nf(k+n-1) + \dots + (-1)^{n-1} nf(k+1) + (-1)^n f(k)$$

n 阶前向差分
开式是前向的
采样值的线性
组合。

后向差分的概念

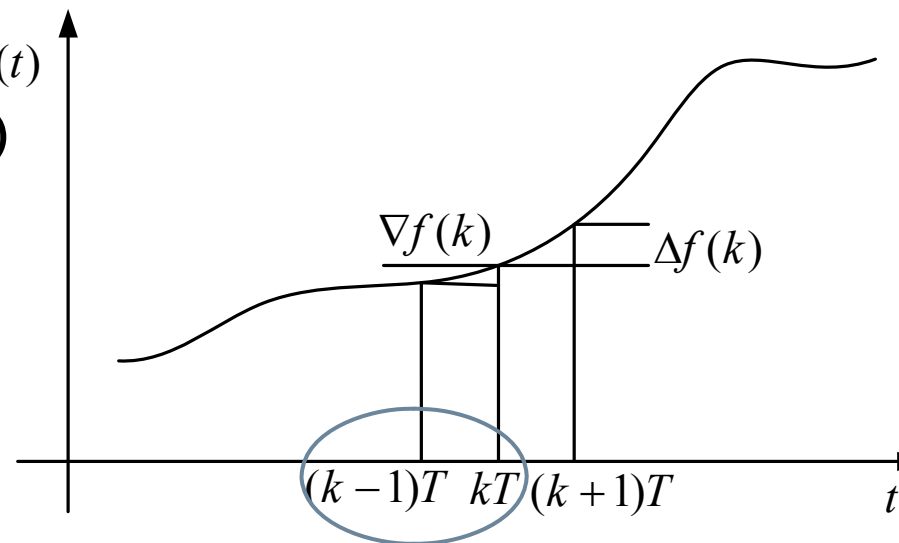
□ 一阶后向差分

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1) \quad f(k) = f(k-1) + \nabla f(k)$$

比较

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$f(t) = f(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^{ts} \left[\frac{df(\tau)}{d\tau} \right] d\tau$$



□ 高阶后向差分

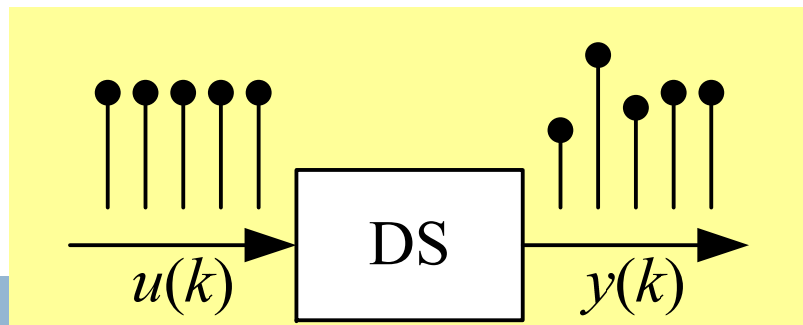
$$\nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

$$\Delta^3 f(k) = \Delta^2 f(k) - \Delta^2 f(k-1) = f(k) - 3f(k-1) + 3f(k-2) - f(k-3)$$

$$\nabla^n f(k) = \nabla^{n-1} f(k) - \nabla^{n-1} f(k-1)$$

n 阶后向差分
开式是后向的
采样值的线性
组合。

用差分方程描述离散系统



□ n 阶离散系统的动态方程为

$$y^{(n)}(t) = F[y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(n-1)}(t), \dots, \dot{u}(t)]$$

$$\Delta^n y(k) = F[\Delta^{n-1} y(k), \dots, \Delta y(k), y(k), \Delta^{n-1} u(k), \dots, \Delta u(k), u(k)]$$

对比
一下

$$\Rightarrow y(k+n) = F[y(k+n-1), \dots, y(k+1), y(k), u(k+n-1), \dots, u(k+1), u(k)]$$

$$\nabla^n y(k) = F[\nabla^{n-1} y(k), \dots, \nabla y(k), y(k), \nabla^{n-1} u(k), \dots, \nabla u(k), u(k)]$$

$$\Rightarrow y(k) = F[y(k-n), \dots, y(k-2), y(k-1), u(k-n+1), \dots, u(k-1), u(k)]$$

□ n 阶线性(满足叠加性)定常离散系统的输入与输出之间的关系

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \dots + b_0u(k)$$

或 前向形式多用于描述非零初始条件的离散系统

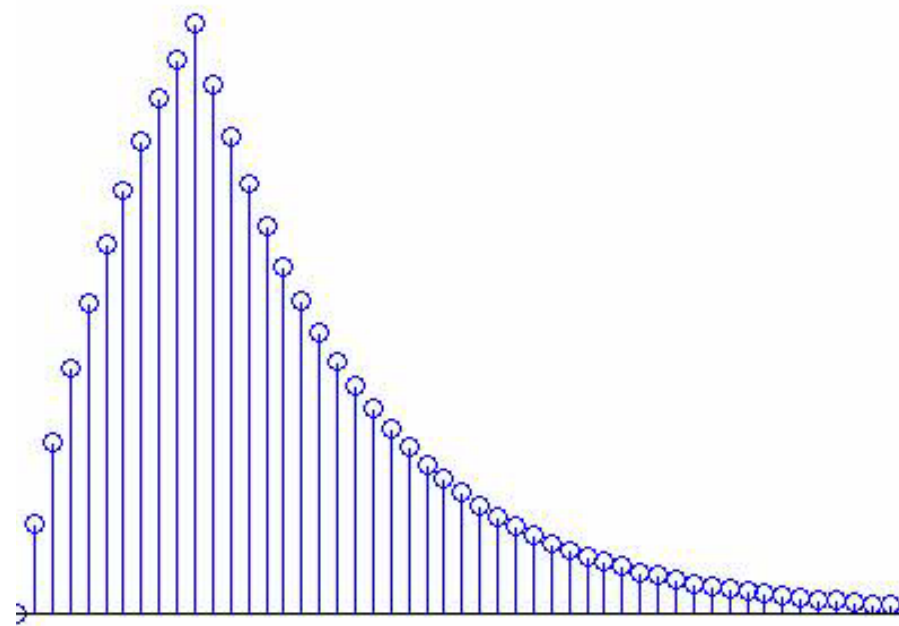
$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = b_mu(k) + b_{m-1}u(k-1) + \dots + b_0u(k-m)$$

后向形式多用于描述零初始条件的离散系统

差分方程的解法----以前向为例

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) = b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + b_0u(k)$$

- 对该差分方程的求解，就是在系统的输入、输出的初始条件和输入序列已知的条件下，求解方程描述的系统在任何时刻的输出序列值
- 解与连续系统一样分两部分：
 - ▣ 齐次解----自由响应
 - ▣ 非齐次特解----强迫响应
- 工程上常用的求解方法有
 - ▣ 迭代法----数值解
 - ▣ Z变换法----解析解
 - ▣ 解析法----特殊输入形式下的解析解



差分方程的解法-迭代法

□ 迭代法：依据给定的差分方程，按时间序列顺序递推求出响应

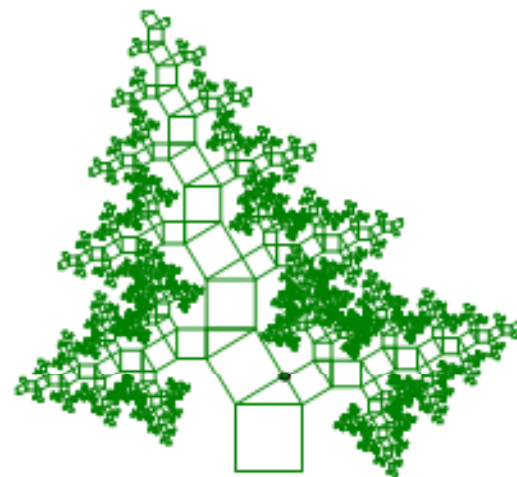
□ 例：已知差分方程和零初始条件，求响应。

$$y(k+1) = 3y(k) + 2u(k), y(0) = 4$$

$$y(k) = 3^k \cdot 4 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{k-i-1} \times 3u(i)$$

齐次解

特解



差分方程的解法- Z变换法

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) = b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + b_0u(k)$$

$$\begin{aligned}Z[f(k+i)] &= z^i[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1} - \cdots - f(i-1)z^{-(i-1)}] \\&= z^i F(z) - f(0)z^i - f(1)z^{i-1} - \cdots - f(i-1)z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^n Y(z) + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) + \cdots + a_0Y(z) - c_n z^n - c_{n-1}z^{n-1} - \cdots - c_1 z \\= b_m z^m U(z) + b_{m-1}z^{m-1}U(z) + \cdots + b_0U(z) - d_m z^m - d_{m-1}z^{m-1} - \cdots - d_1 z\end{aligned}$$

$$c_i = a_i y(0) + a_{i+1}y(1) + \cdots + a_n y(n-i), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$d_i = b_i u(0) + b_{i+1}u(1) + \cdots + b_m u(m-i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$Y(z) = \frac{(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0)U(z)}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} + \frac{c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z - d_m z^m - d_{m-1}z^{m-1} - \cdots - d_1 z}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$y(k) = Z^{-1}[Y(z)] = ?$$

长除法

部分分式展开法

留数法

差分方程的解法- Z变换法例

□例：已知零初始条件与输入解二阶差分方程。

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=u(k+1)-u(k), \quad u(k)=1, k \geq 0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=2$$

□解：对差分方程进行变换得到

$$[z^2Y(z) - y(0)z^2 - y(1)z] - 3[zY(z) - y(0)z] + 2Y(z) = [zU(z) - u(0)z] - U(z)$$

将初始条件和 $U(z)=z/(z-1)$ 代入得到

$$z^2Y(z) - 2z - 3zY(z) + 2Y(z) = zU(z) - z - U(z) = 0$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{2z}{z-2} - \frac{2z}{z-1} \qquad y(k) = 2^{k+1} - 2$$

差分方程的解法-解析法

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) = b_mu(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + b_0u(k)$$

□ 齐次方程的解:

- 特征方程式 $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

- n 个根全是单根 $y(k) = c_1r_1^k + c_2r_2^k + \cdots + c_nr_n^k$

- n 个根中既有单根, 也有重根情况(设 r_1^k 为三重根), 则解的形式为

$$y(k) = c_{10}r_1^k + c_{11}kr_1^k + c_{12}k^2r_1^k + c_2r_2^k + \cdots + c_nr_n^k \quad c_{i*} \text{在求出特解后由初始条件}$$

□ 非齐次方程的特解:

- 如输入函数代入方程右端出现 k^n 形式, 则特解的形式为 $d_nk^n + d_{n-1}k^{n-1} + \cdots$

- 如输入函数代入方程右端出现 γ^k 形式(γ 不是特征根), 则特解的形式为 d

d_i 在通过对比两端系数

差分方程的解法-解析法例

□ 例：求差分方程的解。

$$y(k) + 3y(k-1) = u(k) - u(k-1) \quad y(-1) = -1 \quad u(k) = k^2$$

□ 解：

齐次解

$$r + 3 = 0 \quad y(k) = c_1(-3)^k$$

特解

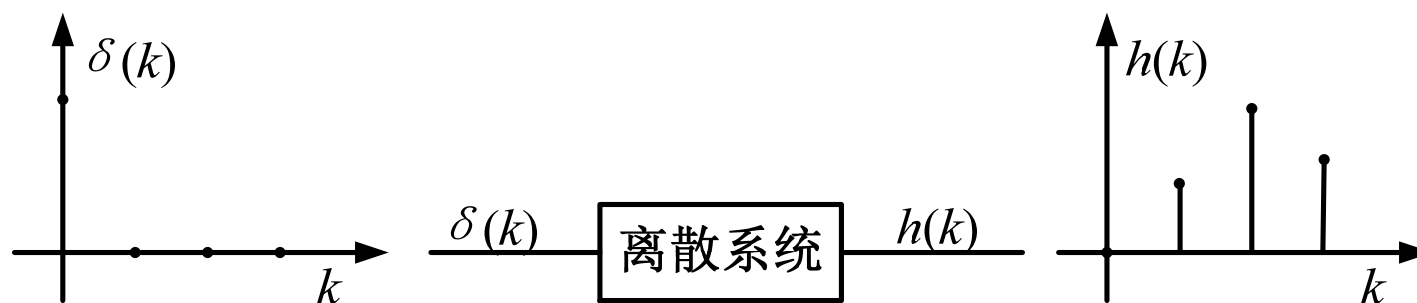
$$\text{右侧表达式 } k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1 \quad \longrightarrow \quad y(k) = d_1k + d_0$$

$$d_1k + d_0 + 3(d_1(k-1) + d_0) = k^2 - (k-1)^2 \quad \longrightarrow \quad d_0 = 0.125, d_1 = 0.5$$

全解

$$y(k) = c_1(-3)^k + 0.5k + 0.125 \quad \xrightarrow{y(-1) = -1} \quad c_1 = 15/8$$

脉冲响应与线性卷积



- 利用叠加性可以得到结论：当已知线性离散系统的单位冲激响应后对于任一给定的输入序列的系统响应为

$$y(k) = h(k) * u(k) = \sum_{j=0}^k h(j)u(k-j) = \sum_{j=0}^k h(k-j)u(j)$$

- 例：假设离散系统单位脉冲响应已知，求其单位阶跃响应。

$$h(k) = (-0.5)^k \quad y(k) = \sum_{j=0}^k h(j) = \sum_{j=0}^k (-0.5)^j$$

脉冲传递函数(Z传递函数)

- 在令初始条件为零时，由线性定常差分方程得到离散传递函数

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

传递函数仅取决于系统本身的特性
而与输入序列和初始条件无关

- 脉冲传递函数是连续系统的离散等效模型。
- 实际控制系统中，被控对象、执行器、传感器等环节都是连续系统，为了便于在离散域分析，要将它们转换为离散为Z域传递函数形式。
- 不同情况下求Z传递函数
 - 给定差分方程时
 - 通过Z变换求传递函数。
 - 给定单位冲激响应时
 - 对响应求Z变换得传递函数。
 - 给定连续系统的传递函数时
 - 反Laplace变换得 $g(t)$ ，对其按 T 采样，求 $g(k)$ 值，利用定义求Z变换得传递函数。
 - 或者利用部分分式法，采用已有简单公式求取传递函数。

离散等效脉冲传递函数

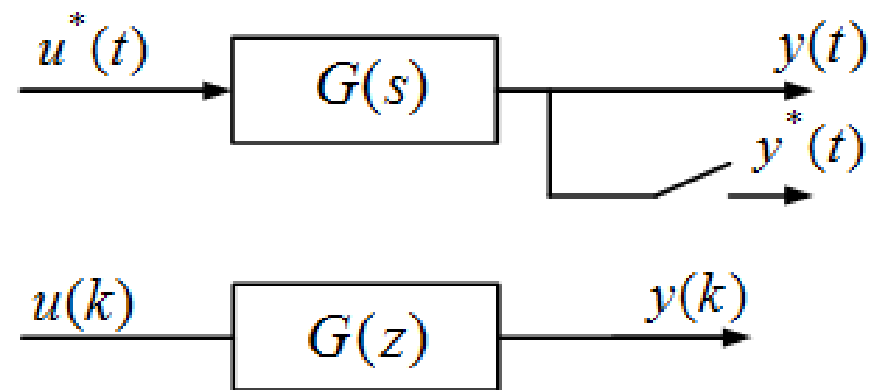
- 当连续系统的输入是脉冲序列（通常先经过一个保持器）且输出经过采样时，输入输出的关系可以等效为一个脉冲传递函数。

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= [U^*(s)G(s)]^* \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U^*(s + jk\omega_s) G(s + jk\omega_s) \\ &\quad \downarrow \text{采样信号的Laplace变换具有周期性} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U^*(s) G(s + jk\omega_s) \\ &= U^*(s) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\omega_s) = U^*(s) G^*(s) \end{aligned}$$

故：采样信号可以由星号运算中提出！

$$\text{于是 } Y(z) = U(z) \times G(z) \quad \longrightarrow \quad G(z) = \frac{Z[Y^*(s)]}{Z[R^*(s)]}$$

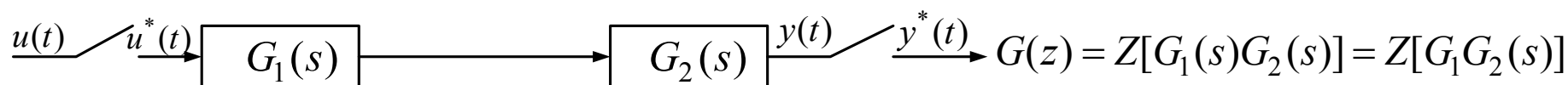
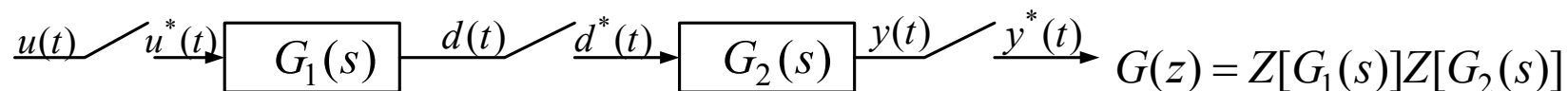
----脉冲传递函数



将连续系统转化为等效离散系统时，不包含输入端的采样开关，但包含输出端的采样开关

串联环节的脉冲传递函数

□ 不带零阶保持器两种串联方式

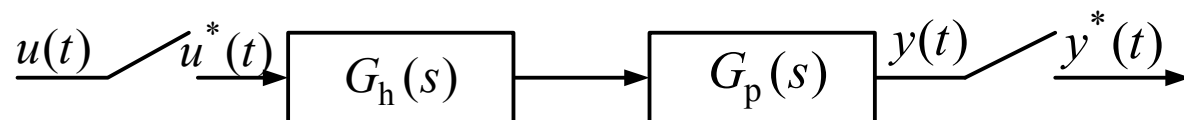


□ 例子: $G_1(s) = \frac{1}{s}, G_2(s) = \frac{1}{s+1}$

$$G(z) = Z\left(\frac{1}{s}\right)Z\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

□ 有零阶保持器

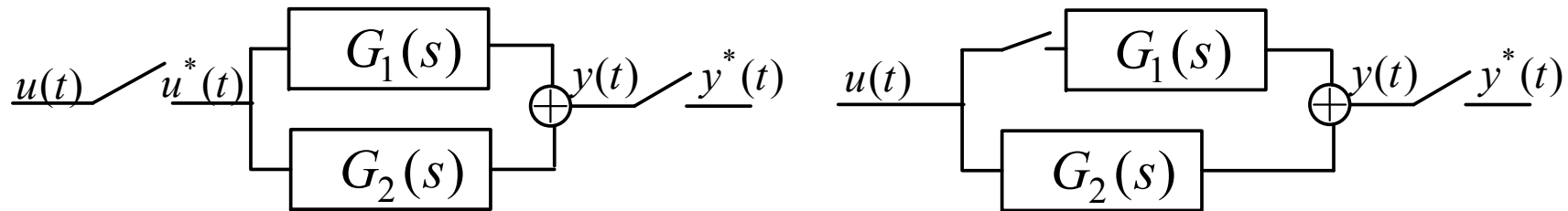
$$G(z) = Z\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = Z\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$



$$G_h(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-Ts}) \quad G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}G_p(s)\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{G_p(s)}{s}\right)$$

并联环节的脉冲传递函数

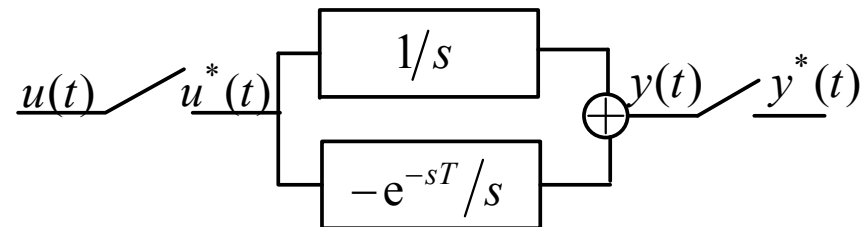
□ 两种并联的形式



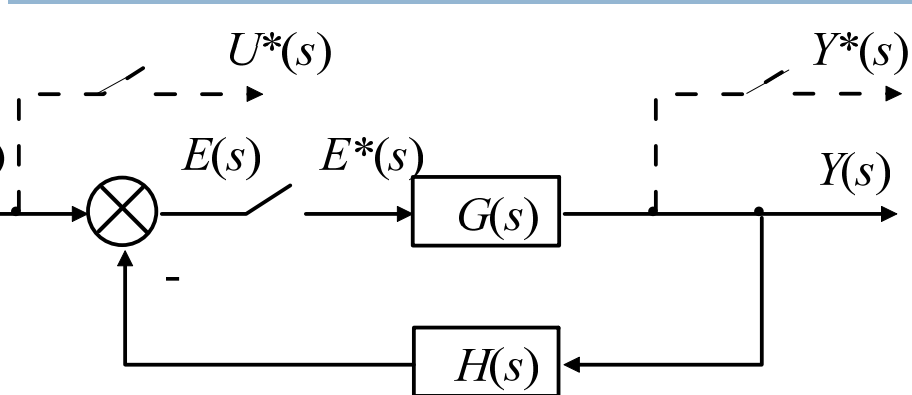
$$G(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

写不出等效传递函数

□ 例：将ZOH能等效为一个并联形式吗？



反馈连接的闭环脉冲传递函数



$$E(s) = U(s) - Y(s)H(s)$$

$$E^*(s) = U^*(s) - [Y(s)H(s)]^*$$

$$Y(s) = E^*(s)G(s)$$

$$E(z) = U(z) - Z[E^*(s)G(s)H(s)]^* = U(z) - E(z)Z[G(s)H(s)]$$

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + Z[G(s)H(s)]} = \frac{U(z)}{1 + GH(z)}$$

$$Y(z) = Z[Y^*(s)] = Z([E^*(s)G(s)]^*) = E(z)Z[G(s)] = \frac{U(z)G(z)}{1 + GH(z)}$$

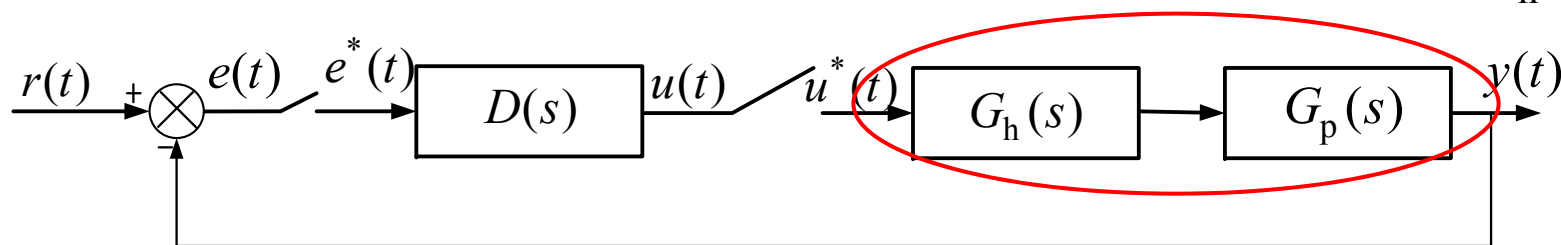
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

- 说明：
- 采样开关在不同位置时，闭环系统的脉冲传递函数有不同的形式。
- 但是，只要误差信号处有采样开关，输入采样信号便不存在，此时不求出闭环离散系统对于输入量的脉冲传递函数，只能求出输出采样信号的Z变换函数。

课外练习

□ 计算机控制系统的离散框图表述如下，试求该闭环系统的传递函数

$$G(s) = G_h(s)G_p(s)$$



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

这一讲就到这里！



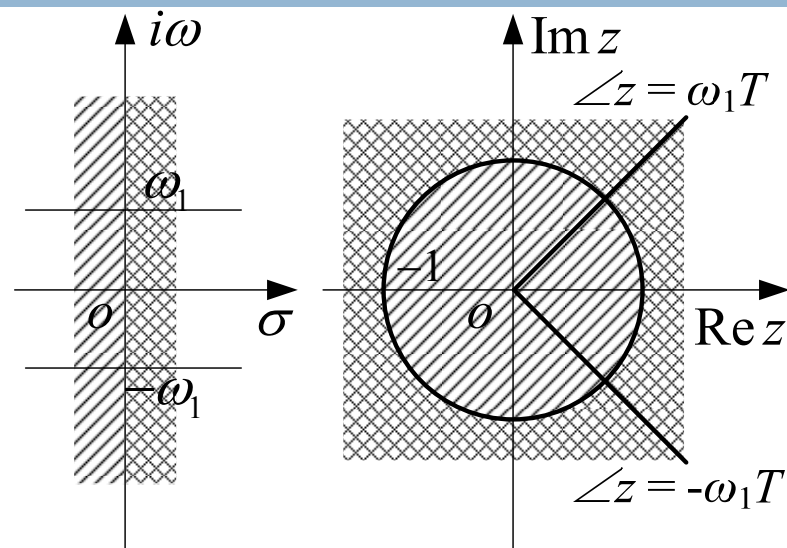
图图网: tutu001.com

第四讲 s 平面与 z 平面的映射关系

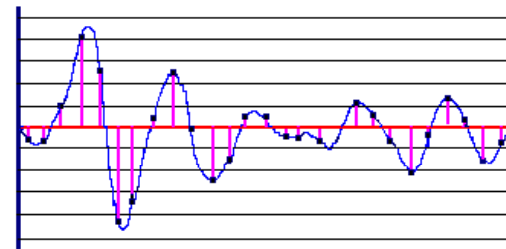
连续域到离散域之间有的很密切的联系，这种联系在两种平面上可以形象的展现出来。

由s平面到z平面的映射-1

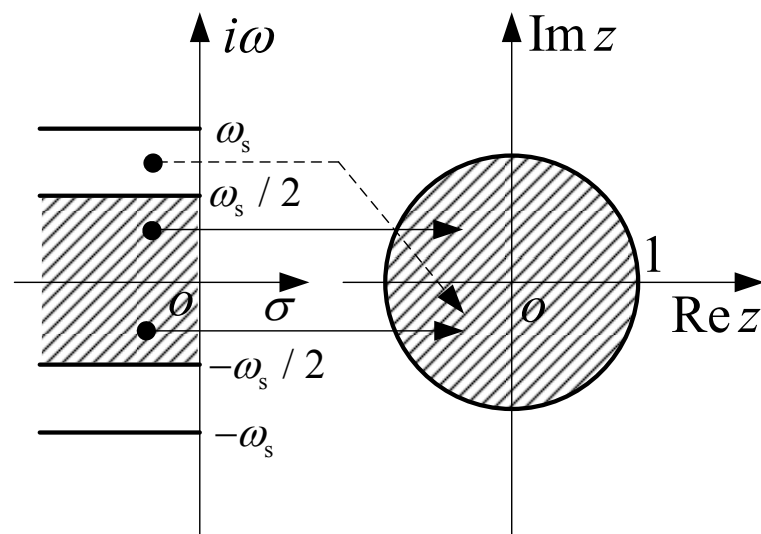
- z 变换是对采样信号的 Laplace 变换进行变量替换 $z = e^{sT}$ (周期是 T) 而得到的。
- 如果记 $s = \sigma + i\omega$, 则 $z = e^{\sigma T} e^{i\omega T}$, 即 $|z| = e^{\sigma T}$, $\angle z = \omega T$ 。可见s域与z域的映射关系可以分为z域幅值映射关系和z域相角映射关系。
- s域的实轴映射到z域的正实轴：在某特定采样周期下，在s平面的等 σ 线对应着z平面以原点为圆心，以 $e^{\sigma T}$ 为半径的圆；在s平面的等 ω 线对应着z平面中与实轴对称一对射线。
- s域的虚轴映射到z域的单位圆上：虚轴上 $\omega = 2k\pi/T$ 映射到 $z=1$ ；虚轴上 $\omega = (2k+1)\pi/T$ 映射到 $z=-1$ 。
- 左半s平面映射到z域的单位圆内，右半s平面映射到z域的单位圆外。



由s平面到z平面的映射-2



- 主频区：根据采样定理，采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 不能小于信号频率的2倍，因此s域映射到z域应该限制为 $(-\pi/T, \pi/T)$ 的一个条形范围，称其为主频区。



- 讨论离散控制系统一般要在满足采样定理的条件下，所以主频区是离散控制系统所关注的！
- 在分析离散系统动态响应性能求取、稳定性分析、稳态误差计算时，一定要关注采样周期选择，采样周期选择过大，采样间隔中隐藏着振荡，可能反映不出来，造成实际连续信号与采样值的规律不一致，得出的结果表明也不准确，甚至是错误的。这一点可以从对正弦信号和衰减振荡进行不合理采样加以说明。

由s平面到z平面的映射-3

□ 阻尼线的映射

$$s = \sigma + i\omega = -\zeta\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

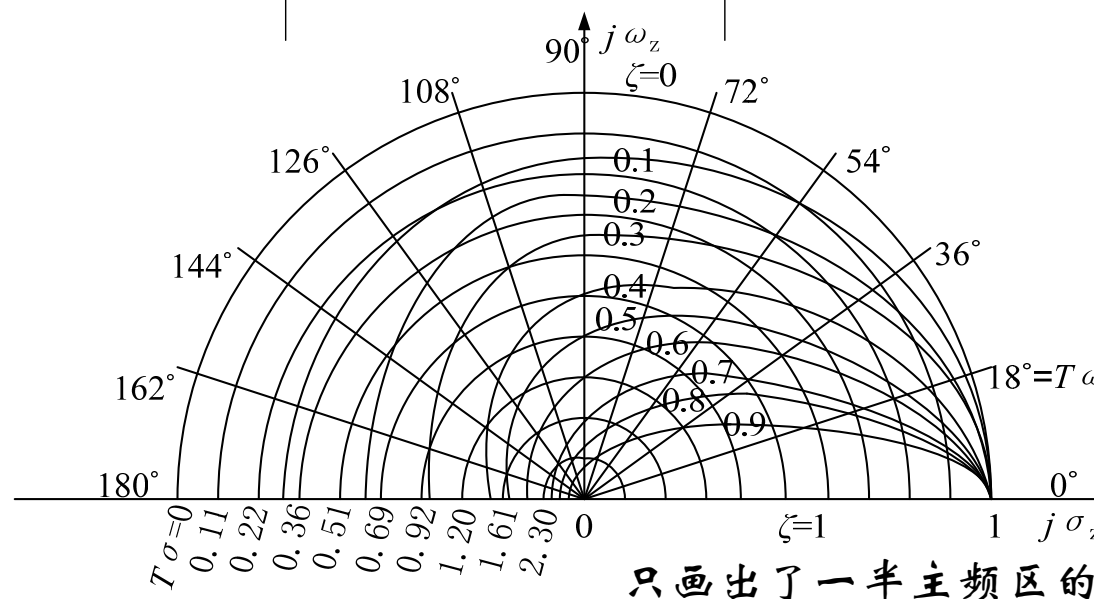
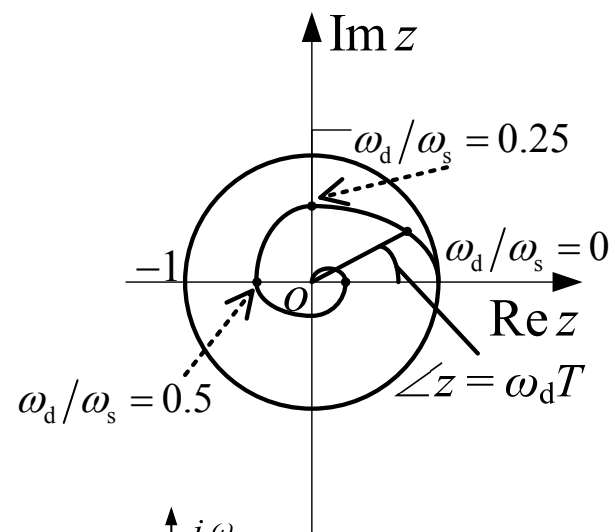
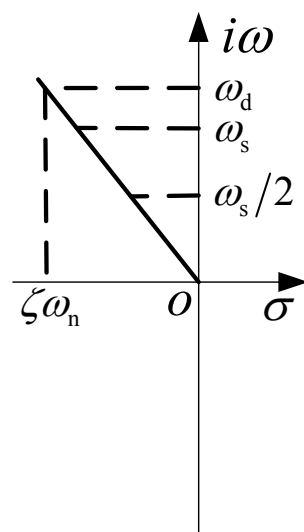
$$= -\zeta\omega_n + i\omega_d$$

等阻尼

$$z = e^{-\zeta\omega_n T} e^{i\omega_d T} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{\omega_s}} e^{i2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}}$$

取一系列 ζ 值，画出等阻尼比曲线图

- 当等阻尼线在s平面的第二、三象限时，螺旋线在单位圆内；
- 当等阻尼线在s平面的第一、四象限时，螺旋线在单位圆外；
- 当处于临界阻尼时，对数螺旋线变成 $z=0$ 到 $z=1$ 间的水平线。



这一讲就到这里！



第五讲 动态性能分析

离散系统的时域分析包括三项内容：**动态响应性能求取、稳定性分析、稳态误差计算**。据离散系统的特点，对这三项内容的讨论只限于在采样点的值。

本节先讨论动态响应性能求取问题。因为采样时刻的值在时间响应中均为已知，所以离散系统的动态性能定量计算可以直接由时间响应结果获得。另外，也可以通过分析零极点的位置关系而获得。

时间响应与性能指标计算

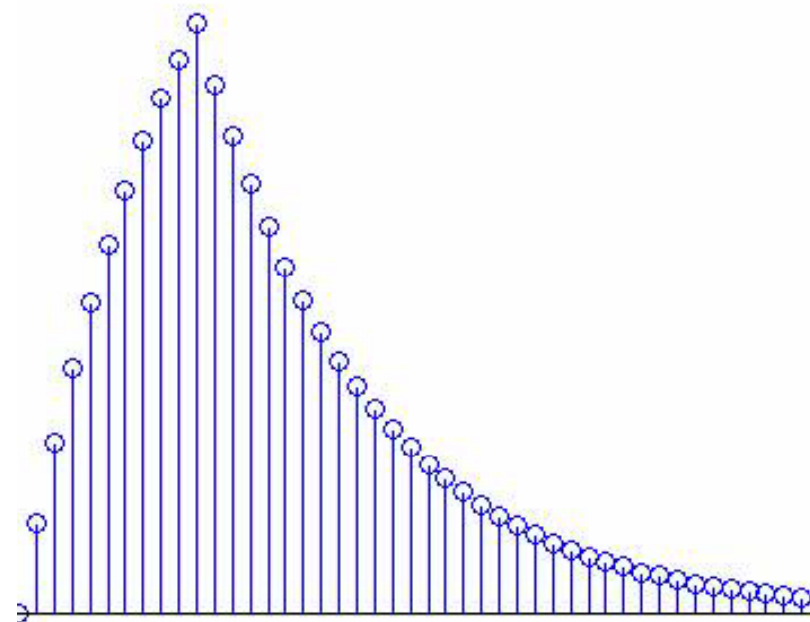
- 对于线性时不变离散系统，有了 $Y(z)$ 的表达式，通过求其 z 反变换，求出系统输出各采样时刻的值，由此评价系统的动态特性。
- 具体方法：开环传函 \rightarrow 闭环传函 \rightarrow 输出 z 域表达式 $Y(z) \rightarrow$ 反变换得 $y^*(t)$ 。由 $y^*(t)$ 给出各采样时刻的值，确定近似的

- ▣ 上升时间 t_r
- ▣ 峰值时间 t_p
- ▣ 调节时间 t_s
- ▣ 稳态值 $y(\infty)$

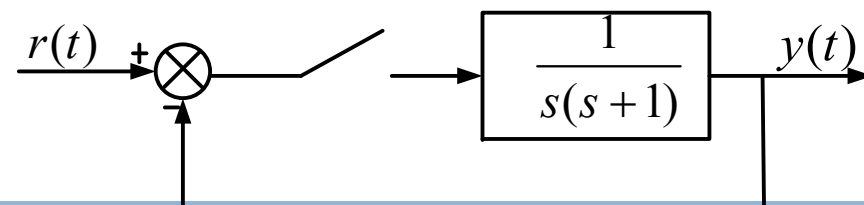
$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)Y(z)$$

- ▣ 超调量 σ_p

$$\sigma_p = \frac{y^*(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$



单位负反馈采样系统例子



□ 例：单位负反馈采样系统如下图，当采样周期为 $T=1s$ ，求输入为单位阶跃信号时的响应和动态性能指标。若去掉采样器后变成连续系统，比较它的动态指标与采样系统的动态指标，能说明什么？

$$G(z) = Z\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{z(1-0.368)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{0.632z}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.632z^2}{z^3 - 1.736z^2 + 1.104z - 0.368}$$

$$y(t) = 0.632\delta(t-T) + \underline{1.097\delta(t-2T)} + \underline{1.207\delta(t-3T)} + \underline{1.117\delta(t-4T)} + \underline{1.014\delta(t-5T)} \\ + 0.96\delta(t-6T) + 0.968\delta(t-7T) + 0.99\delta(t-8T) + \dots$$

$$t_r = 2s, t_p = 3s, t_s = 5s, y(\infty) = 1$$

$$\sigma_p = \frac{y^*(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = 20.7\%$$

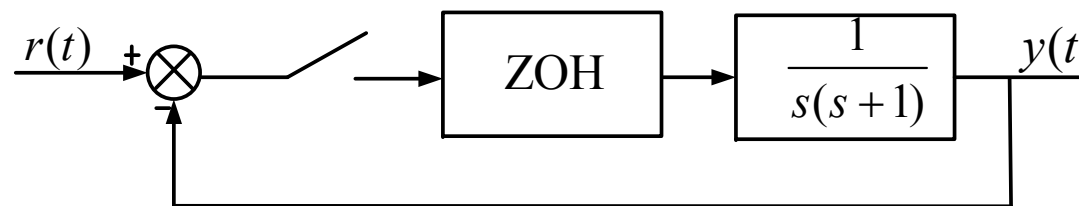
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$t_r = 2.42s, t_p = 3.6s, t_s = 5.3s, y(\infty) = 1$$

$$\sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

可见，增加采样器可使系统上升时间，调节时间、调节时间都有所减小，但使超调量增大，故采样造成的信息损失和脉冲冲击会降低系统的稳定性。

负反馈带保持器的例子



- 例：单位负反馈带ZOH的采样系统如下图，当采样周期为 $T=1s$ ，求输入为单位阶跃信号时的响应和动态性能指标。

$$G(z) = Z\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}\right) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.368z^2 + 0.264z}{z^3 - 2z^2 + 1.632z - 0.632}$$

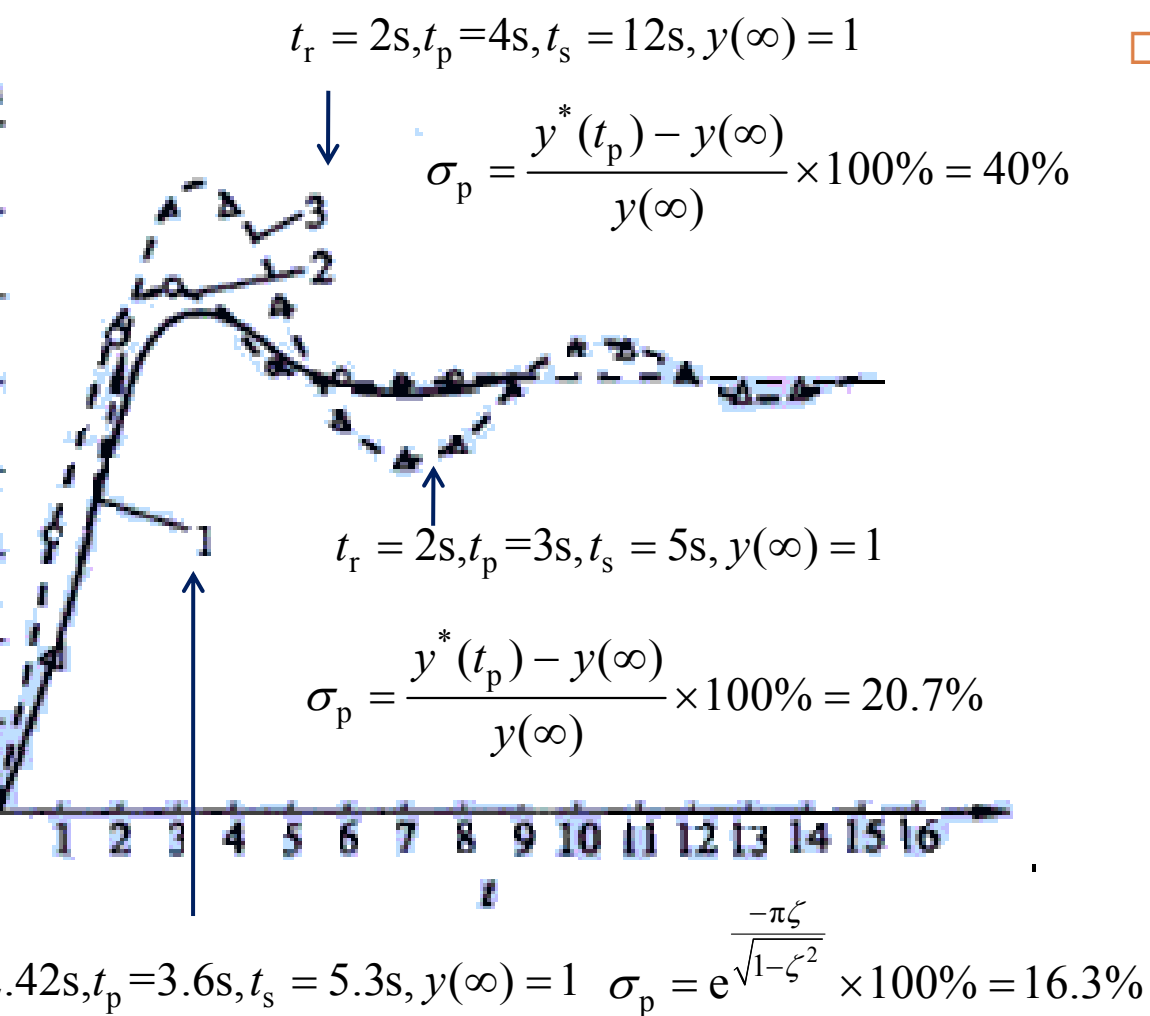
$$y^*(t) = 0.368\delta(t-T) + 1\delta(t-2T) + 1.4\delta(t-3T) + 1.4\delta(t-4T) + 1.147\delta(t-5T) \\ + 0.895\delta(t-6T) + 0.802\delta(t-7T) + 0.868\delta(t-8T) + 0.993\delta(t-9T) \\ + 1.077\delta(t-10T) + 1.081\delta(t-11T) + 1.032\delta(t-12T) + 0.981\delta(t-13T) + \dots$$

$$t_r = 2s, t_p = 4s, t_s = 12s, y(\infty) = 1 \quad \sigma_p = \frac{y^*(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = 40\%$$

注：通常在MATLAB/Simulink中直接用ZOH对连续系统进行离散化仿真可以了。

与上例比较：ZOH使系统的峰值时间，调节时间加长，超调量会增加，振荡次数也增加，这主要是因为ZOH的相角滞后作用，降低了系统的稳定性。

总结：连续与离散系统时域响应比较



□ 采样器和保持器对离散系统的动态性能影响：

□ 可使系统上升时间，峰值时间、调节时间都有所减小，但使超调量增大，故采样造成的信息损失和脉冲冲击会降低系统的稳定性。。但另一方面，具有大时滞的连续系统稳定性很差，误差的采样反而会提高系统的稳定程度。

□ ZOH使系统的峰值时间，调节时间加长，超调量会增加，振荡次数也增加，这主要是因为ZOH的相角滞后作用，降低了系统的稳定性。

闭环极点与动态响应间的关系

□ 线性离散系统的脉冲传函数，假设系统的 n 个闭环极点互不相同

$$\Phi(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = b_m \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

□ 在零初始条件下，单位阶跃响应为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{M(z)}{D(z)} \frac{z}{z-1} \quad \longrightarrow \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{c_0}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z-p_i} \quad c_0 = \frac{M(z)}{(z-1)D(z)} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{M(1)}{D(1)}$$



$$c_i = \frac{M(z)}{(z-1)D(z)} (z-p_i) \Big|_{z=p_i} = \frac{M(z)}{(z-1)D(z)} \Big|_{z=p_i}$$

其收敛性取决于极点与单位圆的关系！

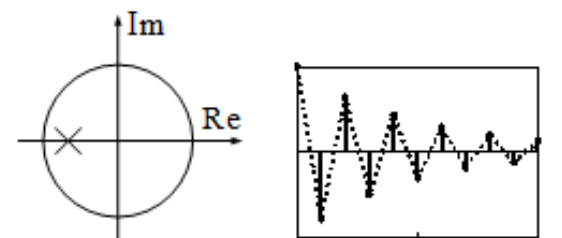
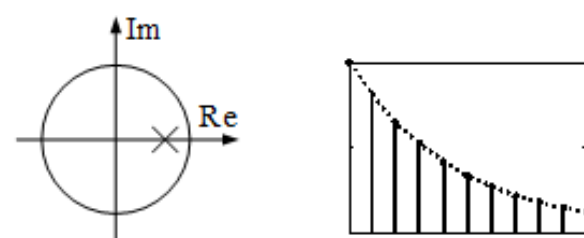
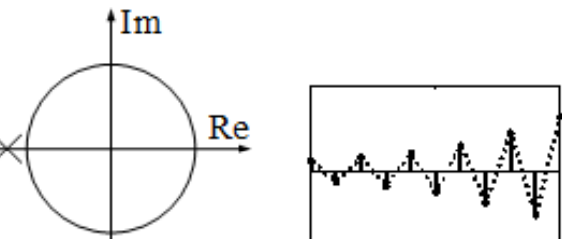
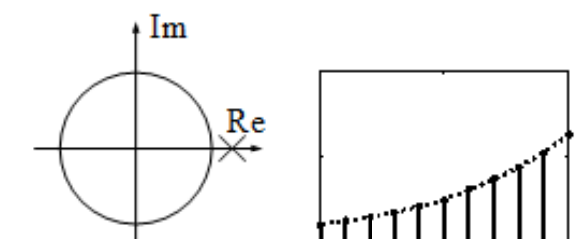
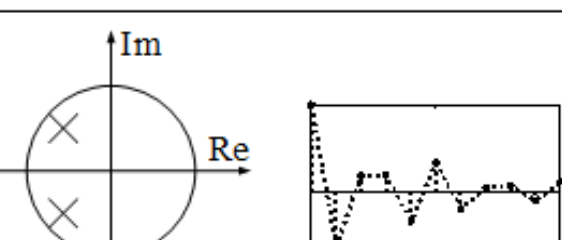
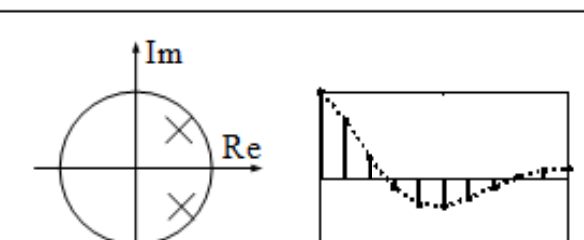
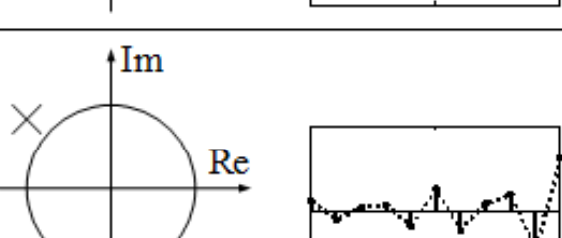
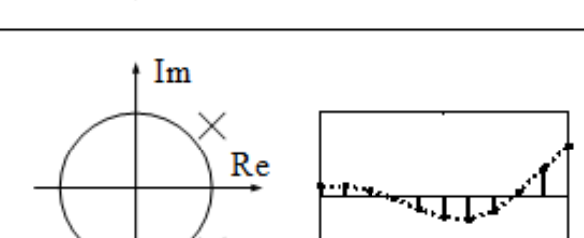
$$Y(z) = \frac{c_0 z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z-p_i}$$



$$y(k) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

闭环极点不同位置时的结论

$$s = \sigma + i\omega \rightarrow z = e^{\sigma T} e^{i\omega T}$$

闭环极点在左半平面	闭环极点在右半平面
	
	
	
	

- 闭环极点位于单位圆外时，系统输出的幅值不断增大；闭环极点位于单位圆内时，系统输出的幅值不断衰减；闭环极点越靠近原点，系统输出的幅值衰减速度越快。
- 闭环极点位于左半平面时，输出冲波动的幅值很大，动态过程质量较差；闭环极点位于负实轴上时，输出冲波动的幅值较小，动态过程质量最好；闭环极点位于正实轴上时，输出脉冲交替变号，动态过程质量最差。
- 闭环极点位于右半平面时，输出冲波动的幅值很大，动态过程质量较差；闭环极点位于正实轴上时，输出脉冲交替变号，动态过程质量最差；闭环极点位于负实轴上时，输出脉冲较平缓地振荡衰减或发散。
- 出现振荡时，最高振荡频率是由负实轴上的极点引起的。（思考：如何说明这一结论？）
- 因此，在进行离散系统极点配置时，应把闭环极点安置在平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

这一讲就到这里！



第六讲 稳定性分析

由系统的响应知，离散线性时不变系统稳定的充要条件是系统的闭环极点位于 z 平面的单位圆内。求特征根是直接的判稳方法，但对于高次代数方程，求根比较困难，下面给出3种代数判据：

- 基于双线性变换的Routh稳定性判据
- 基于特征多项式Jury判据
- 修正的Shur-Cohn判据

基于双线性变换的Routh稳定性判据

□ 线性双线性变换(属分式线性变换---一种保形映射)的变换

$$z = \frac{1+w}{1-w} \longrightarrow w = \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = x + iy, w = u + iv \longrightarrow u + iv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

- 当 $u=0$ 时, $x^2+y^2=1$, 表明 w 平面的虚轴对应于 z 平面的单位圆
- 当 $u<0$ 时, $x^2+y^2<1$, 表明左半 w 平面对应于 z 平面单位圆内的区域
- 当 $u>0$ 时, $x^2+y^2>1$, 表明右半 w 平面对应于 z 平面单位圆外的区域

双线性变换使 z 平面单位圆内的区域映射到 w 平面上的左半平面, 运用Routh判据就可以判断系统稳定性。

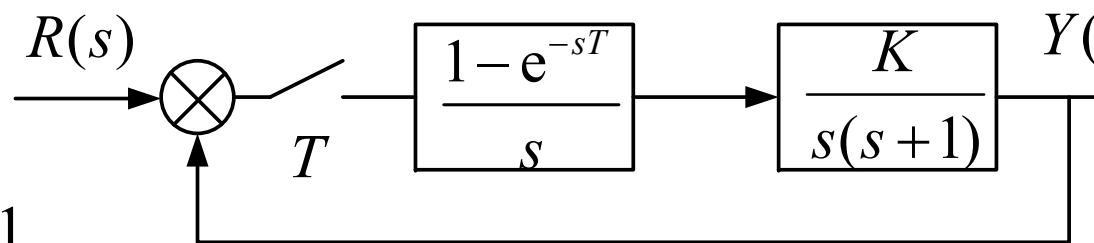
基于双线性变换的Routh稳定性判据例子

□ 例：已知系统的方块图，采样周期 $T=1s$ 。使系统稳定的放大系数 K 的取值范围是什么？

□ 先将开环系统变换为离散系统


$$\begin{aligned} G(z) &= K \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = K \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= K \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = K \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right] \\ &= K \left[\frac{1}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-0.368}\right] \quad (T=1, e^{-T}=0.368) \\ &= K \frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)} \end{aligned}$$

□ 闭环系统特征方程为 $(z-1)(z-0.368) + K(0.368z+0.264) = 0$



基于双线性变换的Routh稳定性判据例子续

□ 整理 $z^2 + (0.368K - 1.368)z + (1.368 + 0.264K) = 0$

□ 作双线性变换 $z = \frac{1+w}{1-w}$ 

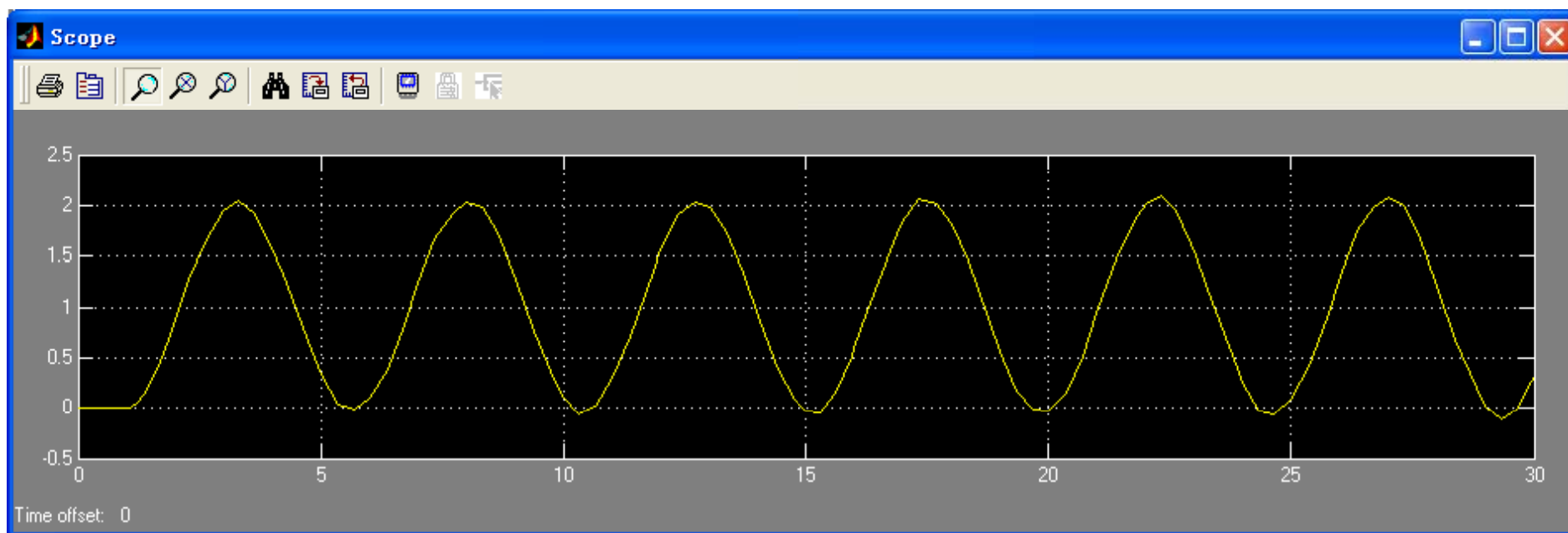
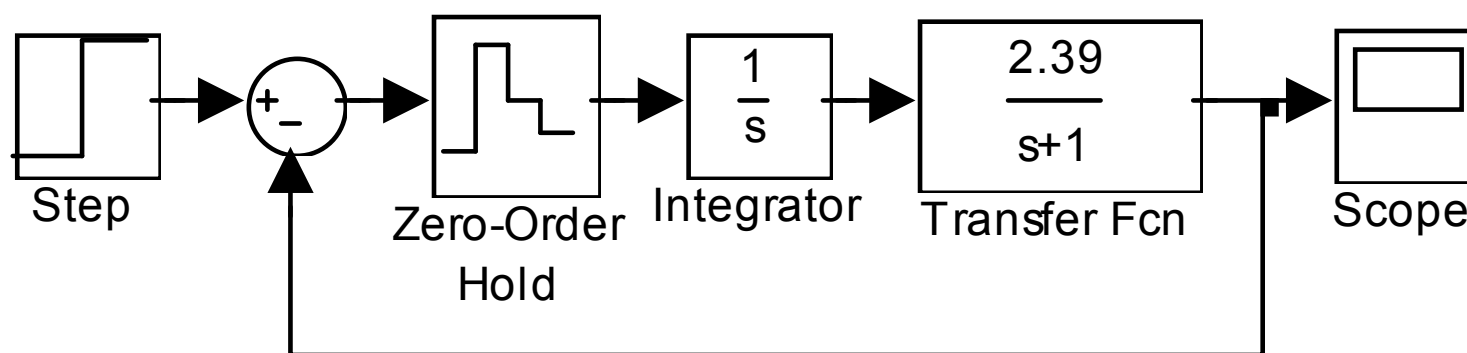
$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (0.368K - 1.368)\frac{1+w}{1-w} + (1.368 + 0.264K) = 0$$

$$(1 + 2w + w^2) + (0.368K - 1.368)(1 - w^2) + (1.368 + 0.264K)(1 - 2w + w^2) = 0$$

$$\underline{(3.736 - 0.104K)w^2} + \underline{(0.632 - 0.264K)2w} + \underline{(1 + 0.632K)} = 0$$

$$3.736 - 0.104K > 0, \quad 0.632 - 0.264K > 0 \quad \longrightarrow \quad K < 2.39$$

基于双线性变换的Routh稳定性判据例子仿真



基于特征多项式Jury判据

$$\Delta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

	z^0	z^1	z^2	z^3	...	z^{n-k}	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-k}	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_k	...	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	...	b_{n-k}	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...	b_{k-1}	...	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	c_3	...	c_{n-k}	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	...	c_{k-2}	...	c_0		
...			
$n-5$	l_0	l_1	l_2	l_3						
$n-4$	l_3	l_2	l_1	l_0						
$n-3$	q_0	q_1	q_2							

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

□ 稳定充要条件为同时满足下面3个条件

(1) $\Delta(1) = \Delta(z)|_{z=1} > 0$

(2) $(-1)^n \Delta(-1) = (-1)^n \Delta(z)|_{z=-1} > 0$
 $\Leftrightarrow \Delta(-1) \begin{cases} > 0, n \text{ is even} \\ < 0, n \text{ is odd} \end{cases}$

(3) $|a_0| < |a_n|, |b_0| > |b_{n-1}|,$
 $|c_0| > |c_{n-2}|, \dots,$
 $|l_0| > |l_3|, |q_0| > |q_2|$

修正的Shur-Cohn判据

$$\Delta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ B_k^H & A_k^H \end{pmatrix}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, B_k = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-k+1} \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+2} \\ 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+3} \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

- 按序计算 $\det \Gamma_k, k=1,2,\cdots,n$ 其符号负正变化的数目为稳定的根的数目
当系统稳定时，符号变号次数等于特征方程的阶数 (k 是奇数时，行列式为负； k 为偶数时，行列式为正)。-适用于复系数情况

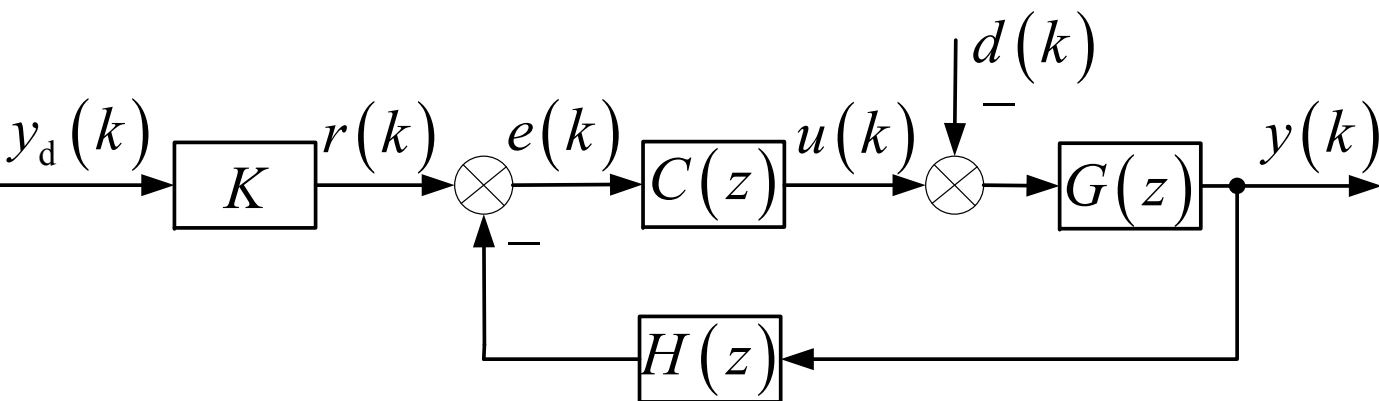
这一讲就到这里！



第七讲 稳态误差计算

控制器设计目标就是使输出能够跟随期望值。本讲讨论离散线性时不变系统的稳态误差计算问题。

稳态误差的计算



离散系统的误差定义为 $E(z) = R(z) - Y(z)H(z)$

输入和扰动到误差的传递函数分别为

$$G_{er}(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + L(z)} \quad G_{ed}(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = -\frac{G(z)H(z)}{1 + L(z)}$$

其中环路增益 $L(z) = C(z)G(z)H(z)$

□ 计算一般采用终值定理

$$e_{ssr} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot \frac{R(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)}$$

$$e_{ssd} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot \frac{-D(z)G(z)H(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)}$$

典型输入下的稳态误差与系统型别间关系-1

输入为单位阶跃信号 $R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} C(z)G(z)H(z) \quad e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

输入为单位斜坡信号 $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)C(z)G(z)H(z) \quad e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{T}{K_v}$$

输入为单位抛物线信号 $R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 C(z)G(z)H(z) \quad e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \cdot \frac{1}{[1 + C(z)G(z)H(z)]} = \frac{T^2}{K_a}$$

稳态误差可
与采样周期
有关(由输入
信号带来的)
而各种误差
数是由系统
身决定的。

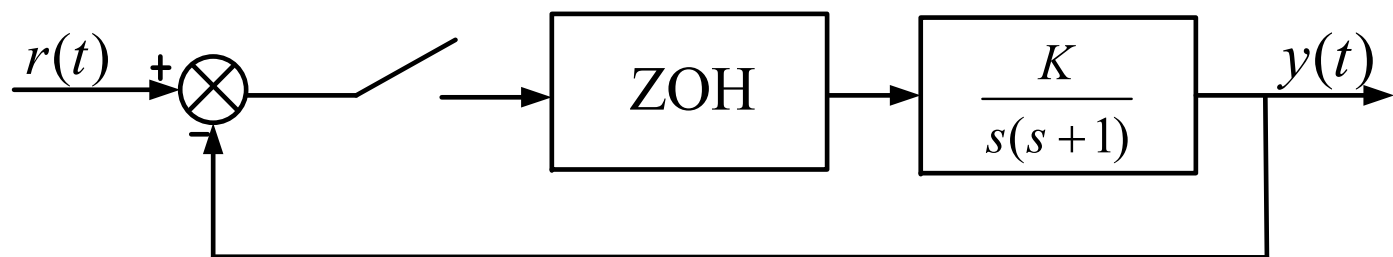
典型输入下的稳态误差与系统型别间关系-2

$$L(z) = C(z)G(z)H(z) = KF(z) / (z-1)^v$$

	单位阶跃输入	单位斜坡输入	单位抛物线输入
0型系统	$K_p = K$ $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$	$K_v = 0$ $e_{ss} = \infty$	$K_a = 0$ $e_{ss} = \infty$
I型系统	$K_p = \infty$ $e_{ss} = 0$	$K_v = K$ $e_{ss} = \frac{T}{K_v}$	$K_a = 0$ $e_{ss} = \infty$
II型系统	$K_p = \infty$ $e_{ss} = 0$	$K_v = \infty$ $e_{ss} = 0$	$K_a = K$ $e_{ss} = \frac{T^2}{K_a}$

稳态误差计算例

□ 例：单位负反馈带ZOH的采样系统如下图，当采样周期为 T ，计算稳态误差。



$$G(z) = Z\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}\right) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{K}{s^2(s+1)}\right)$$

$$= K \frac{z-1}{z} \left(\frac{-z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T}} \right)$$

$$= K \frac{(1 + T + e^{-T} - 2)z + (1 - (1 + T)e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = KT$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0$$

稳态误差

$$\begin{array}{l} 1(t) \text{ ---- } 0 \\ t \text{ ---- } 1/K \\ 0.5t^2 \text{ ---- } \infty \end{array}$$

对带有ZOH的采样反馈系统，离散系统的稳态误差与采样时间无关。

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

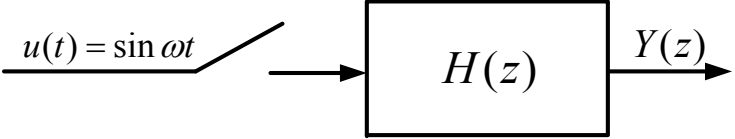
第八讲 频域分析


与连续线性时不变系统对应，对离散线性时不变系统也可以从频域角度进行分析。本讲简单介绍这一问题。

频率特性及求取

□ 系统在正弦信号下稳态响应定义为频率响应

□ 频率特性及求取


$$Y(z) = H(z)U(z) = H(z) \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$



$$Y(z) = \frac{Az}{z - e^{j\omega T}} + \frac{Bz}{z - e^{-j\omega T}} + [H(z)'s \text{ partial fraction expansion}]$$
$$A = H(z) \frac{\sin \omega T}{z - e^{-j\omega T}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{H(e^{j\omega T})}{2j}, B = H(z) \frac{\sin \omega T}{z - e^{j\omega T}} \Big|_{z=e^{-j\omega T}} = \frac{-H(e^{-j\omega T})}{2j}$$
$$H(e^{j\omega T}) = Me^{j\phi}, H(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\phi}$$
$$Y(z) = \frac{Me^{j\phi}}{2j} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{Me^{-j\phi}}{2j} \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} + [H(z)'s \text{ partial fraction expansion}]$$
$$y(k) = \frac{M}{2j} (e^{j(k\omega T + \phi)} - e^{-j(k\omega T + \phi)}) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0(\text{sta.})}}{[H(z)'s \text{ partial fraction expansion}]} = M \sin(k\omega T + \phi)$$

频率特性的极坐标表示与性质

极坐标表示

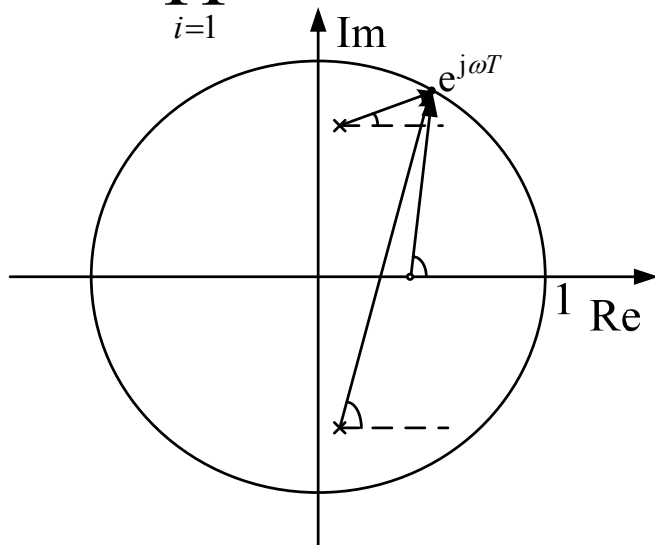
$$H(z) = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad z = e^{j\omega T} \quad H(z) = K \frac{\prod_{j=1}^m (e^{j\omega T} - z_j)}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega T} - p_i)}$$



$K > 0$

$$|H(e^{j\omega T})| = K \frac{\prod_{j=1}^m |e^{j\omega T} - z_j|}{\prod_{i=1}^n |e^{j\omega T} - p_i|}$$

$$\angle H(e^{j\omega T}) = \sum_{j=1}^m \angle(e^{j\omega T} - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(e^{j\omega T} - p_i)$$



性质

- $H(e^{j\omega T})$ 是周期为 $2\pi/T$ 的周期函数。
- 幅频特性 $|H(e^{j\omega T})|$ 是关于 ω 的偶函数。
- 相位特性 $\angle H(e^{j\omega T})$ 是关于 ω 的奇函数。
- 幅频特性 $|H(e^{j\omega T})|$ 下降到 $1/\sqrt{2}$ 倍所对应的频率范围叫系统的带宽。
- 系统的最高频率必须小于采样频率的一半，即 Nyquist 频率 π/T 。

这一讲就到这里！



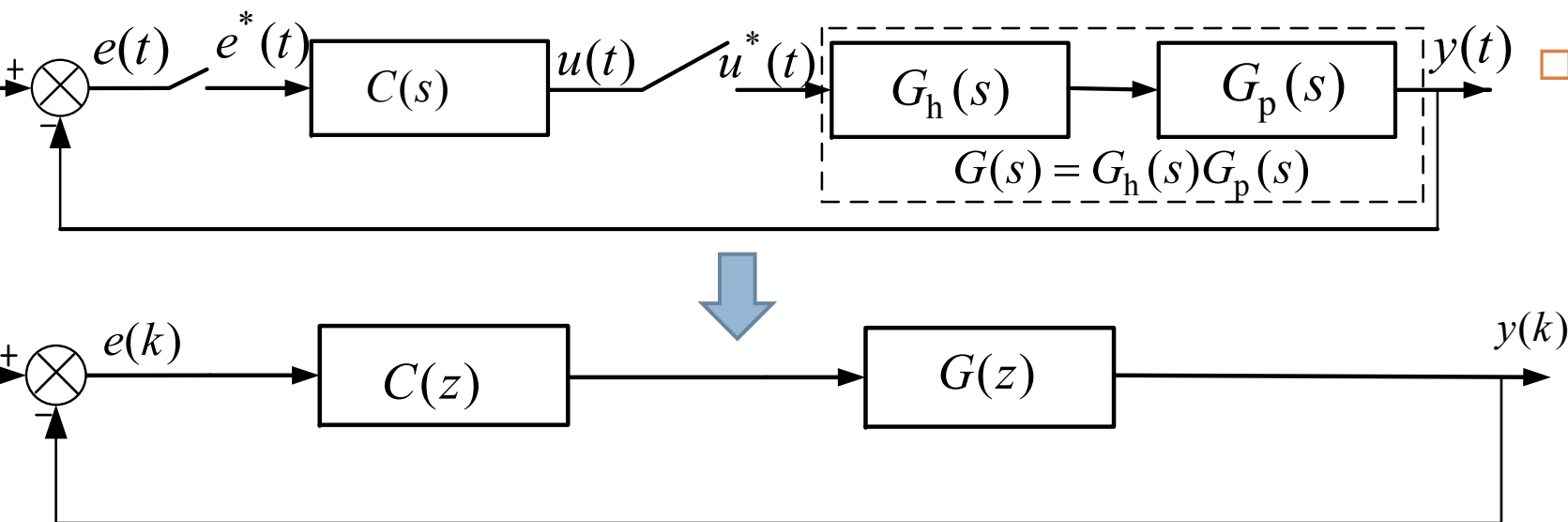
第九讲 数字控制器脉冲传递函数与设计方法概述

设计离散线性时不变系统的控制器，实际上是要得到数字控制器的脉冲传递函数，以方便编制数字控制器程序。

线性离散时不变系统的控制器设计方法有五种方法：

一是先设计连续域控制器，再对其离散化；二是解析设计方法(直接数字控制器设计)，其典型是最小拍设计、大林算法；三是基于 z 平面的根轨迹法；四是基于 $w(w')$ 平面的Bode图法。

数字控制器的脉冲传递函数



$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \Rightarrow C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))}$$

$$G_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = 1 - \Phi(z) \Rightarrow C(z) = \frac{1 - G_e(z)}{G(z)G_e(z)}$$

□ 要得到实际控制系统，需要满足两点约束：

- 是稳定的----极点位于单位圆内或极点在单位圆上
- 是可实现的----因果性：构成控制的信号均为当前或过去的数据项。

如何满足上述约束？这就是方法问题！

离散系统的控制器四种设计方法

□ 连续域离散化设计方法

- 连续控制系统已经存在，要改成计算机控制时，最直接的方法就是将原系统模拟控制器数学模型进行离散化，转化为可实现的算法，从而用计算机代替模拟控制器。先设计连续控制器(要将保持器考虑进去)，再对其进行离散化，进而编制程序实现。

□ 解析设计法

- 基本思想是先离散化广义对象(含保持器)，接着根据性能指标确定所需的闭环脉冲传递函数，然后依上页中 $C(z)$ 两式确定理论上的控制器。这种方法以最少拍系统设计最为典型，包含有纹波和无纹波两类。

□ 基于 z 平面的根轨迹法

- 类似于连续系统在 s 平面根轨迹方法，由根轨迹可以分析系统和设计控制器。

□ 基于 $w(w')$ 平面的Bode图法

- 通过双线性变换将离散的开环传递函数变换到 $w(w')$ 平面，利用连续域的Bode图分析系统和设计控制器

这一讲就到这里！

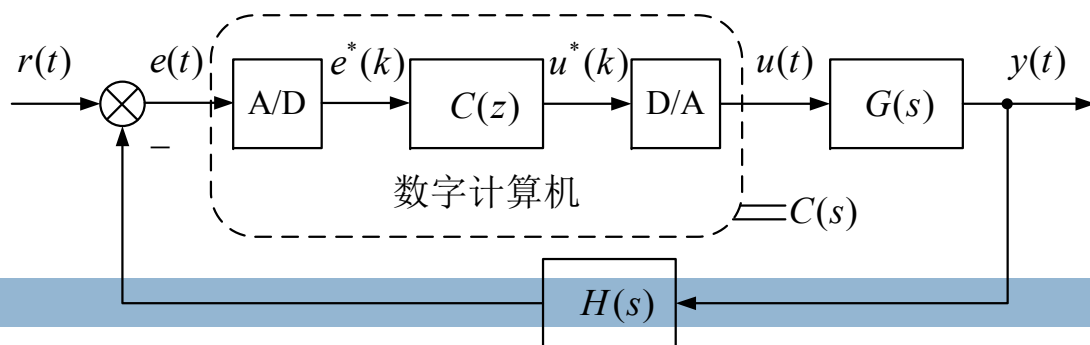


图图网: tutu001.com

第十讲 连续域离散化设计

连续控制系统已经存在，要改成计算机控制时，最直接的方法就是将原系统模拟控制器数学模型进行离散化，转化为可实现的算法，从而用计算机代替模拟控制器。先设计连续控制器(要将保持器考虑进去)，再对其进行离散化，进而编制程序实现。

基本原理



- 将典型的数字控制系统的离散部分等效于一个连续传递函数，其前提是两者的**频率特性一致**。

数字控制器频率特性 $C^*(j\omega) = C^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$

模拟控制器频率特性 $C(j\omega)$

数字控制器输出频谱

$$u(t) = e(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t - kT) \Rightarrow E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j\omega - jk\omega_s] \Rightarrow U^*(j\omega) = C^*(j\omega)E^*(j\omega)$$

ZOH后的模拟控制器输出频谱

$$U(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} C^*(j\omega)E^*(j\omega) = e^{-j\omega T} C^*(j\omega) \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j\omega - jk\omega_s] \approx e^{-j\omega T} C^*(j\omega) E(j\omega) = C(j\omega)U(j\omega)$$

采样周期足够小

数字控制器与模拟控制器间的频率特性关系 $C^*(j\omega) = C(j\omega)e^{j\omega T}$

模拟控制器输出

故，要使模拟控制器与数字控制器等效，数字控制器频率特性必须在模拟控制器频率特性的基础上补偿由于ZOH带来的相位滞后。

设计步骤与方法

连续域-离散化设计的基本步骤为

- 选择合适的采样频率。

- 确定数字控制器脉冲传递函数。考虑ZOH时间延迟效应和离散频谱与连续频谱相差倍数，用连续系统设计方法确定校正环节传递函数，然后采用合适的离散化方法。

- 验证指标。

离散化方法

- 一阶差分法

- 双线性变换法

- 冲激响应法

- 阶跃响应不变法

- 零极点匹配法



一阶差分法

□ 前向

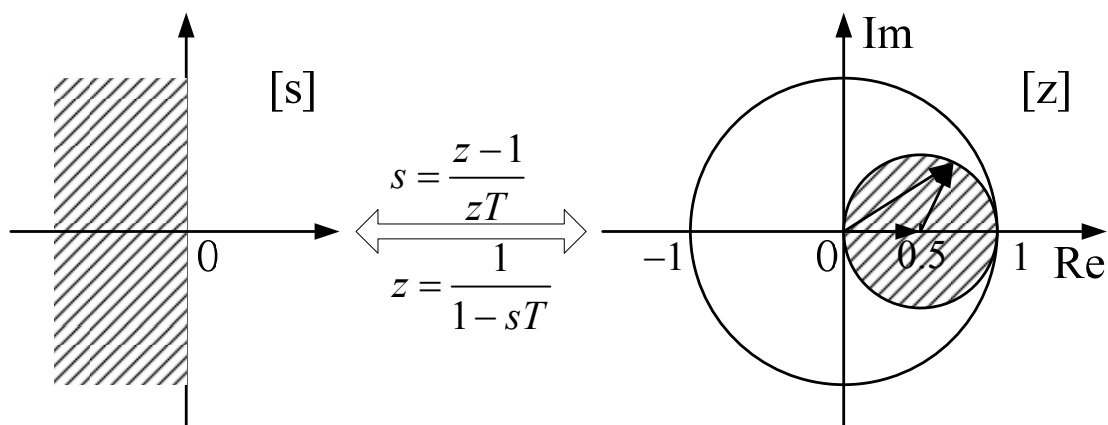
$$z = e^{sT} = 1 + Ts + \frac{1}{2!}T^2s^2 + \frac{1}{3!}T^3s^3 + \dots \Rightarrow s = \frac{z-1}{T}$$

前向差分离散化得到的控制器不能保证控制器本身的稳定性。

□ 后向

$$z^{-1} = e^{-sT} = 1 - Ts + \frac{1}{2!}T^2s^2 - \frac{1}{3!}T^3s^3 + \dots \Rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{zT}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1-sT} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{1+sT}{1-sT} \right) \Rightarrow z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1-T^2(\sigma^2 + \omega^2) + 2j\omega T}{(1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2} \quad \sigma = 0$$



$$\Rightarrow z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{j\omega_z}, \omega_z = \arctan \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2}$$

特点:

➤ S左半平面映射到z平面如图, 所以可以保证控制器的稳定性。

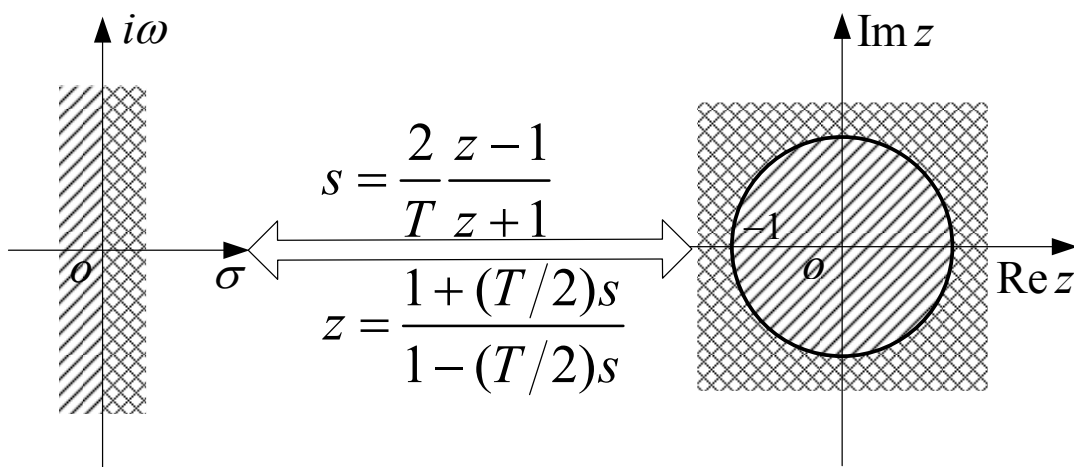
➤ 不会产生频率混叠, 但频率轴在z平面产生畸变。

➤ 一阶差分变换精度差, 它们的冲激响应差较大。

双线性变换法

- 双线性变换法(Tustin法)其实质是数值积分的梯形法(采样值当上底和下底, 采样周期当高), 也可以采用转换关系适当处理得到

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s}$$



特点:

- ✓ 映射关系与s平面与z平面的映射关系一致。
- ✓ 不会产生频率混叠现象, 但频率轴畸变。低频特性近似较好。
- ✓ 可以保持控制器的稳定性。
- ✓ 保持阶数不变, 且分子和分母阶次一样。
- ✓ 双线性变换具有串联性。
- ✓ 保持稳态增益不变。
- ✓ 不能保持冲激响应与频率响应。

一阶差分法与双线性变换法例子

- 例：设采样周期 $T=1$ ，将传递函数离散化为脉冲传递函数。

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.1 + j0.5)(s + 0.1 - j0.5)}$$

- 通过 $z=e^{sT}$ 将其转换成脉冲传递函数，得到两个极点为 $z_{1,2} = 0.9048 \angle \pm 0.5051$

- 采用前向差分法近似 $G_f(z) = \frac{1}{(z - 0.9 + j0.5)(z - 0.9 - j0.5)}$ $z_{1,2} = 1.029 \angle \pm 0.5051$

- 采用后向差分法近似 $G_b(z) = \frac{z^2/1.46}{z^2 - 1.5068z + 0.68493}$ $z_{1,2} = 0.8276 \angle \pm 0.4949$

- 采用双线性变换近似 $G_t(z) = \frac{(z+1)^2/4.66}{z^2 - 1.605z + 0.8283}$ $z_{1,2} = 0.9101 \angle \pm 0.5051$

冲激响应法与阶跃响应法

□ 冲激响应法是通过使连续控制器的冲激响应与离散控制器的冲激响应在采样点相等建立的，同时考虑补偿采样引起的 $1/T$ 因子，即 $C(z) = T \times Z(C(s))$

□ 阶跃响应不变法是使离散控制器的阶跃响应序列与连续控制器的阶跃响应在采样点的值相等，即

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)C(z) = Z\left(\frac{1}{s}C(s)\right)$$
$$\Rightarrow C(z) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s}C(s)\right) = Z\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}C(s)\right)$$

□ 特点

- 频率轴变换是线性的。
- 可以保持控制器的稳定性。
- Z 变换的映射关系是多值映射。当连续控制器不是有限带宽时，采样频率不够大时，会出现频率混叠现象。

□ 特点

- 可以保持控制器的稳定性。
- 仍有可能发生频率混叠。
- 频率轴变换是线性的。
- 能保持增益不变

冲激响应法与阶跃响应法例

□ 例：已知连续控制器的T.F.为 $C(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ，用冲激响应法和阶跃响应法将其离散成数字控制器。

□ 解：

□ 冲激响应法

$$C(z) = T \times Z(C(s)) = T \times Z\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) = T\left(\frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

□ 阶跃响应法

$$C(z) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s}C(s)\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{0.5}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^{-2T}}$$

零极点匹配法

- 用 $z=e^{sT}$ 将 $C(s)$ 在 s 平面的零极点一对一地全部映射到 z 平面，作为 $C(z)$ 的零极点。
- 考虑无穷远处零点的映射问题:将其近似映射到 z 平面的 $z=-1$ 的位置（这样做是合理的），即 $C(s)$ 有多少个无穷远处的零点，就在 $C(z)$ 的分子上补多少个 $(z+1)$ 的因子。
- 同时考虑增益匹配：在某一主频处与模拟控制器的增益一致
$$\text{LP: } C(z)\big|_{z=1} = C(s)\big|_{s=0} \Rightarrow K = ?; \quad \text{HP: } C(z)\big|_{z=-1} = C(s)\big|_{s=\infty} \Rightarrow K = ?$$
- 特点：
otherwise, after a special frequency is selected, K is solved.
 - ✓ 能保证 z 平面与 s 平面零极点位置的一一对应。
 - ✓ 可以保持控制器的稳定性。
 - ✓ 增益不能自动保证，需要补乘一个比例值。
 - ✓ 可以避免频率混叠现象。

零极点匹配法例子

□ 例：已知 $C(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ ，取采样时间为 T ，利用零极点匹配法将其离散化。

□ 解：三步

▣ 有限零极点映射(红色)

▣ 无穷远处零点的映射(蓝)

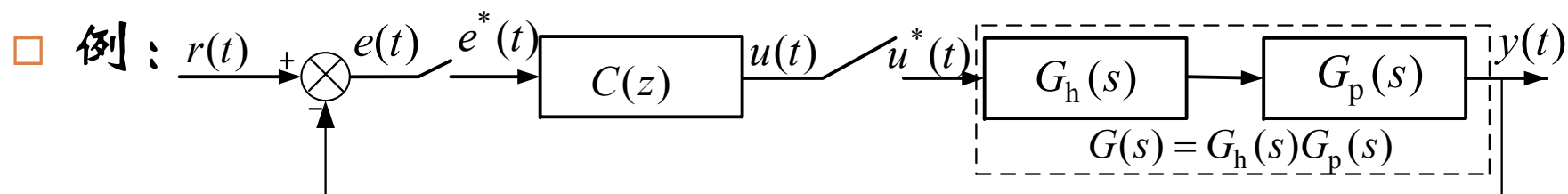
▣ 增益补偿(黄色)($C(s)$ 具有低通特性)

$$C(z) = \frac{(1 - e^{-3T})(1 - e^{-T})(z + 1)(z - e^{-2T})}{3(1 - e^{-2T})(z - e^{-3T})(z - e^{-T})}$$

连续域离散化方法设计例子

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_p(s) = \frac{K_d}{s(T_m s + 1)}$$



采样周期 $T=0.01s$

$$K_d = 20, T_m = 0.025s$$

□ 指标：开环增益 $K \geq 30$ ；剪切频率 $\omega_c \geq 15(1/s)$ ；相角裕度 $\varphi_m \geq 50^\circ$ 。
考虑频率特性一致性。

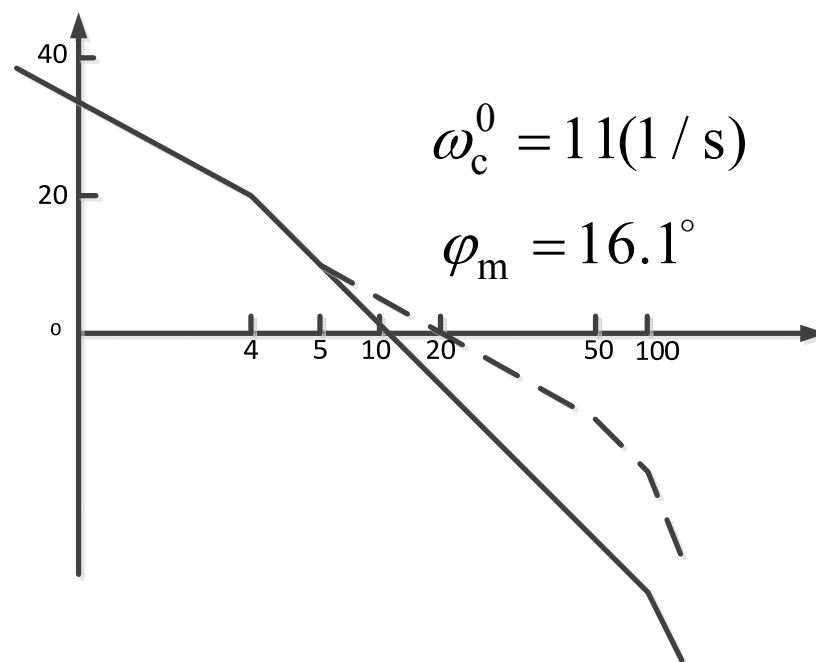
$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{e^{Ts} - 1}{se^{Ts}} \approx \frac{T}{1 + Ts}$$

考虑到离散信号的
频谱与连续信号频
谱相差倍 $1/T$

$$G'_h(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

开环增益为30 采样周期 $T=0.01s$

$$G(s) = G_p(s)G'_h(s) = \frac{30}{s(0.25s + 1)(0.01s + 1)}$$



设计例子续

$$G(s) = G_p(s)G_h'(s) = \frac{30}{s(0.25s + 1)(0.01s + 1)}$$

$$\varphi_m^* \geq 50^\circ > \varphi_m^0, \omega_c^* > 15 > \omega_c^0 \Rightarrow C(s) = \frac{a\tau s + 1}{\tau s + 1}$$

$$\varphi_m = \varphi_m^* - \varphi_m^0 + \delta = 56.4^\circ \Rightarrow a = \frac{1 + \sin \gamma_m}{1 - \sin \gamma_m} = 10.9704$$

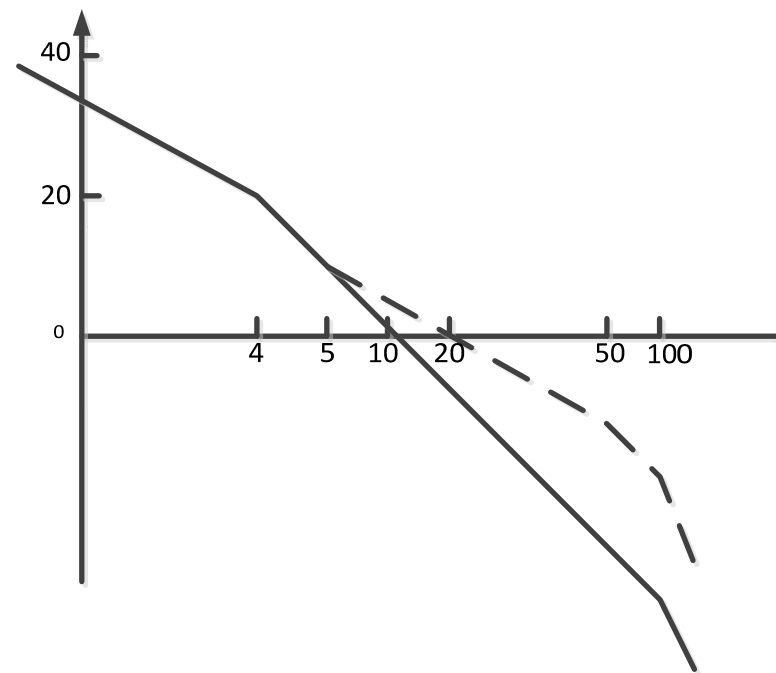
$$\varphi(s)|_{dB} = -10 \lg a = -10.40233 \Rightarrow \omega_c^* = 20 = \omega_m$$

$$C(s) = \frac{0.1656s + 1}{0.0151s + 1} \doteq \frac{0.2s + 1}{0.02s + 1} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = 0.0151$$

考虑静态增益的要求

$$C(s) = \frac{3}{2} \times \frac{0.2s + 1}{0.02s + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} \quad s = \frac{2}{T} \times \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$U(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{3}{2} \times \frac{(T + 2T_2)z + (T - 2T_2)}{(T + 2T_1)z + (T - 2T_1)} \Rightarrow u(k + 1) = 0.6u(k) + 1.5 \times 8.2e(k + 1) - 1.5 \times 7.$$



课外练习

- 对上面的例子在MATLAB/Simulink中仿真比较。

这一讲就到这里！

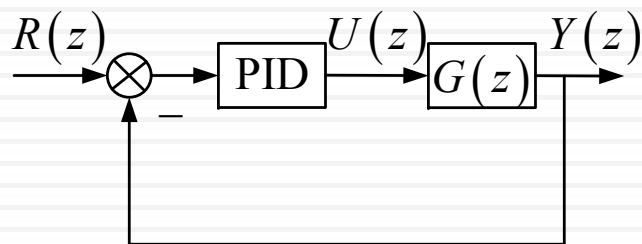


图图网: tutu001.com

第十一讲 数字PID及其变种

PID是工业上常用的一种控制方法，它不依赖于精确模型，使用起来比较方便。本讲介绍

➤ 常规数字PID



➤ 积分分离数字PID

➤ 不完全微分数字PID

➤ 变速积分数字PID

➤ Bang-Bang数字PID

常规数字PID-1

□ 积分和微分均采用后向差分

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \Rightarrow C(z) = K_p \left(1 + \frac{Tz}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{Tz} \right) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\Rightarrow U(z) = K_p E(z) + K_p \frac{T}{T_i} \frac{1}{(1-z^{-1})} E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1-z^{-1}) E(z)$$

$$\Rightarrow u(k) = K_p e(k) + K_p \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i) + K_p \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) = K_p e(k) + K_i \sum_{i=0}^k e(i) + K_d (e(k) - e(k-1))$$

绝对式

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla u(k) &= u(k) - u(k-1) = K_p (e(k) - e(k-1)) + K_p \frac{T}{T_i} e(k) + K_p \frac{T_d}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \\ &= (K_p + K_i + K_d) e(k) + (-K_p - 2K_d) e(k-1) + K_d e(k-2) \end{aligned}$$

增量式

常规数字PID-2

□ 积分采用前向差分，微分采用后向差分

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \Rightarrow C(z) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i (z-1)} + \frac{T_d (z-1)}{Tz} \right) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

可以利用连续域PII
置式，对其进行采
也可以证明C(z)。

$$\Rightarrow U(z) = K_p E(z) + K_p \frac{T}{T_i} \frac{1}{(z-1)} E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) E(z)$$

$$\Rightarrow zU(z) = K_p zE(z) + K_p \frac{T}{T_i} \frac{z}{(z-1)} E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) zE(z)$$

$$\Rightarrow u(k) = K_p e(k) + K_i \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + K_d (e(k) - e(k-1)) \quad \text{绝对式}$$

$$\Rightarrow \nabla u(k) = u(k) - u(k-1) = (K_p + K_d) e(k) + (-K_p + K_i - 2K_d) e(k-1) + K_d e(k-2) \quad \text{增量式}$$

常规数字PID-3

□ 积分采用双线性变换法，微分采用后向差分

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \Rightarrow C(z) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{Tz} \right) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\Rightarrow U(z) = K_p E(z) + K_p \frac{T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) E(z)$$

$$\Rightarrow (z-1)U(z) = K_p (z-1)E(z) + K_p \frac{T}{2T_i} (z+1)E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1})(z-1)E(z) \quad \text{绝对式}$$

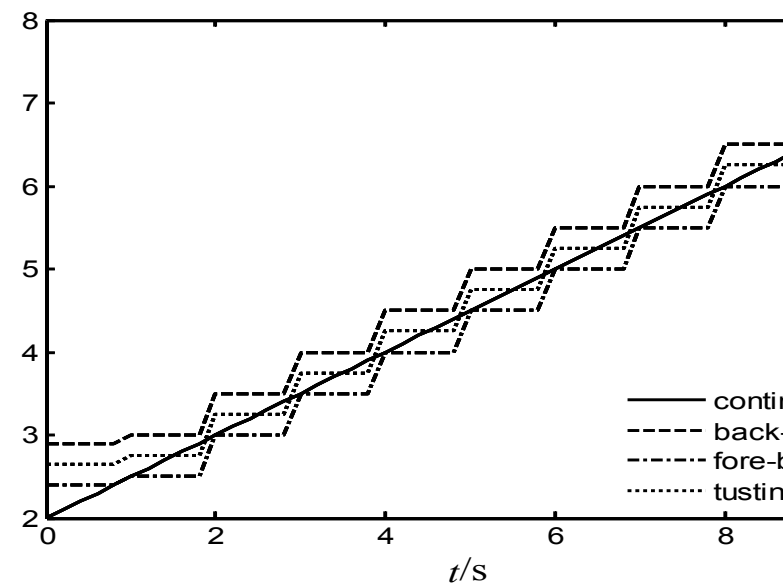
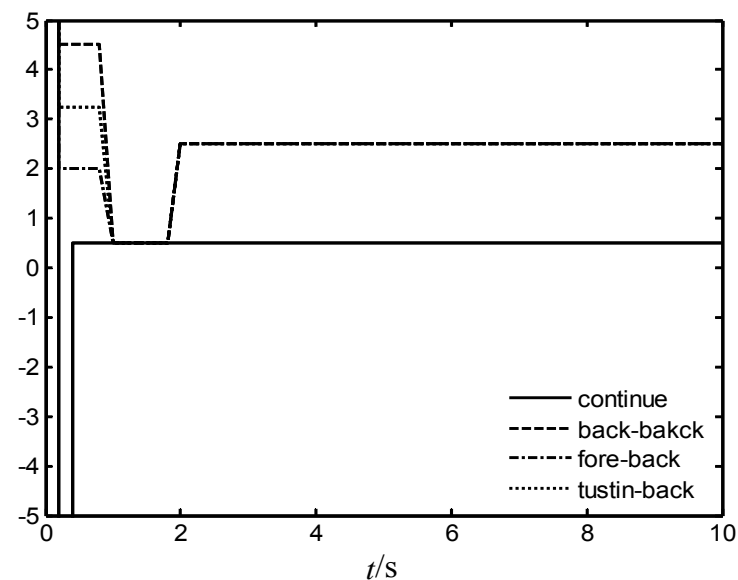
$$\Rightarrow \nabla u(k+1) = (K_p + K_p \frac{T}{2T_i} + K_p \frac{T_d}{T})e(k+1) + (-K_p + K_p \frac{T}{2T_i} - 2K_p \frac{T_d}{T})e(k) + K_p \frac{T_d}{T} e(k-1)$$

$$= (K_p + 0.5K_i + K_d)e(k+1) + (-K_p + 0.5K_i - 2K_d)e(k) + K_d e(k-1) \quad \text{增量式}$$

常规数字PID比较

□ PID连续控制器与上述三种离散控制器的冲激响应和阶跃响应图

$$K_p \left(1 + \frac{T_z}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{T_z} \right)$$
$$K_p \left(1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{T_z} \right)$$
$$K_p \left(1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{T_z} \right)$$



注意：增量式算法有利于改善积分饱和，手动自动切换冲击小，系统超调量减小，动态时间缩短，同时也方便编程。

四种常用的改进数字PID

积分分离数字PID

$$u(k) = K_p e(k) + K_i' \sum_{j=0}^k e(j) + K_d (e(k) - e(k-1)) \quad K_i' = \begin{cases} 0, & |e(k)| > E_0 \\ K_p \frac{T}{T_i}, & |e(k)| \leq E_0 \end{cases}$$

不完全微分数数字PID

$$u(k) = au(k-1) + (1-a)u'(k) \quad a = T_f / (T_f + T)$$

$$u'(k) = K_p \left(e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right)$$

变速积分数数字PID

$$u(k) = K_p e(k) + K_i \left[\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \gamma e(k) \right] + K_d (e(k) - e(k-1))$$

Bang-Bang数字PID

$$|e(k)| > Q \quad \text{BangBang Control}$$

$$|e(k)| \leq Q \quad \text{PID Control}$$

$$\gamma = f(e(k)) = \begin{cases} 1 & e(k) \leq b \\ (a - |e(k)| + b) / a & b < e(k) \leq a - b \\ 0 & e(k) > a + b \end{cases}$$

这一讲就到这里！



第十二讲 PID控制器参数的整定

数字PID参数主要有 T 、 K_p 、 T_i 、 T_d 。对这四个参数进行整定的方法有三种：

- 以临界比例度法为基础的扩充临界比例度法
- 扩充响应曲线法
- 优选与优化方法---0.618法、群体智能方法、遗传算法等

扩充临界比例度法

$$\nabla u(k) = K_p \left(\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e(k) - \left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right)e(k-1) + \frac{T_d}{T}e(k-2) \right)$$

- 选择足够短的采样周期 $T_{\min} < \tau/10$, τ 是对象的纯滞后时间
- 比例控制下, 临界比例增益 K_u (其倒数就是临界比例度), 临界振荡周期 T_u 。
- 选择控制度 $\kappa \triangleq \frac{\left[\min \int_0^\infty e^2(t) dt \right]_{\text{discrete}}}{\left[\min \int_0^\infty e^2(t) dt \right]_{\text{continue}}}$
- 根据选定的控制度, 查下表计算参数。

适用于一阶
纯滞后对象。

控制度	调节规律	T/T_u	K/K_u	T_i/T_u	T_d/T_u
1.05	PI	0.03	0.55	0.88	—
	PID	0.14	0.63	0.49	0.14
1.20	PI	0.05	0.49	0.91	—
	PID	0.043	0.47	0.47	0.16
1.50	PI	0.14	0.42	0.99	—
	PID	0.09	0.34	0.43	0.20
2.00	PI	0.22	0.36	1.05	—
	PID	0.16	0.27	0.40	0.22
模拟调节	PI	—	0.57	0.83	—
	PID	—	0.70	0.50	0.13

扩充响应曲线法

$$\nabla u(k) = K_p \left(\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e(k) - \left(1 + 2\frac{T_d}{T}\right)e(k-1) + \frac{T_d}{T}e(k-2) \right)$$

- 在已知飞升曲线可以求出等效纯滞 τ 后和等效时间常数 T_m ，按下表进行PID参数整定。

控制度	调节规律	T/τ	$K_p/(T_m/\tau)$	T_i/τ	T_d/τ
1.05	PI	0.10	0.84	3.40	—
	PID	0.05	1.15	2.00	0.45
1.20	PI	0.20	0.73	3.60	—
	PID	0.16	1.00	1.90	0.55
1.50	PI	0.50	0.68	3.90	—
	PID	0.34	0.85	1.62	0.65
2.00	PI	0.80	0.57	4.02	—
	PID	0.60	0.60	1.50	0.82
模拟调节器	PI	—	0.90	3.30	—
	PID	—	1.20	2.00	0.40

适用于一阶纯滞后对象。

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

第十三讲 具有Smith纯滞后补偿的PID控制

在工业生产过程中，大部分工艺过程的动态特性往往是既包含一部分纯滞后特性又包括一部分惯性特性，这种工艺过程就称为具有纯滞后的工艺过程。被控对象含有的纯滞后特性会使系统的稳定性下降，严重时系统可能失稳。这类系统往往采用常规PID达不到满意效果，需要另加补偿----Smith补偿是典型的一种。

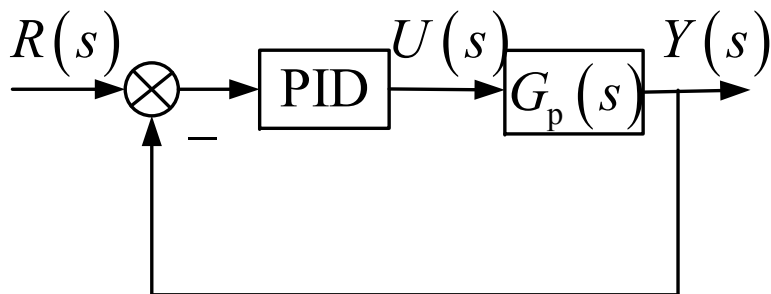
一阶大滞后系统与传统PID控制

- Smith滞后补偿适用于一阶大滞后系统，即若一个系统可等效为如下传递函数

$$G_p(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}, \tau / T \geq 0.5$$

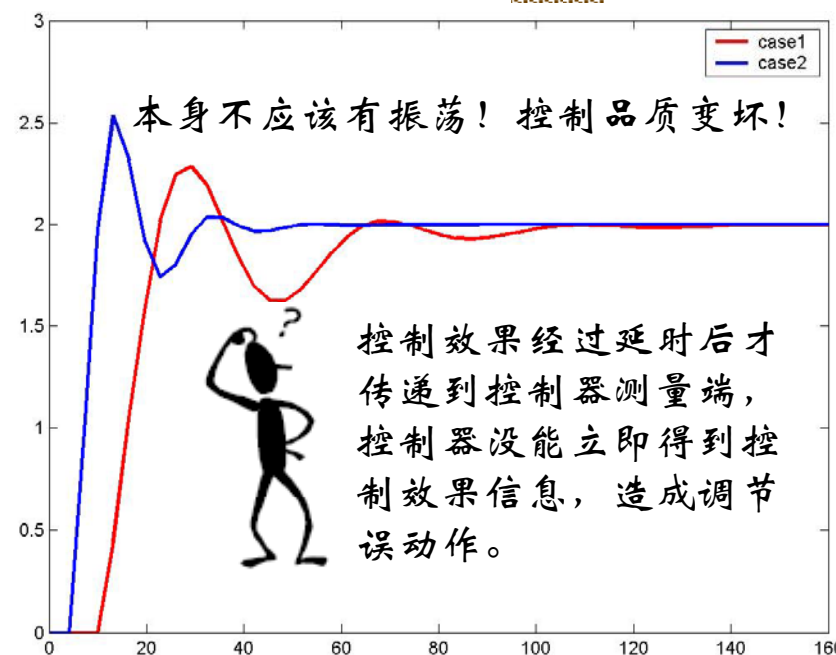
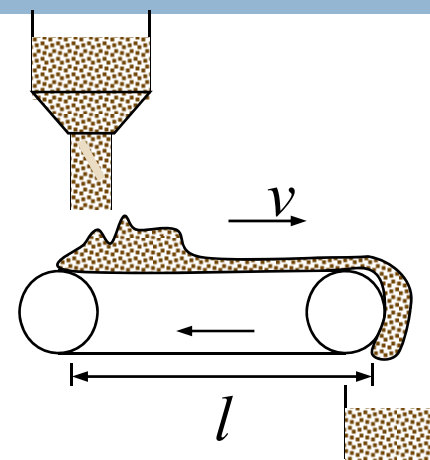
其中T是被控过程等效时间常数， τ 是纯滞后时间常数。

- 常规PID控制效果

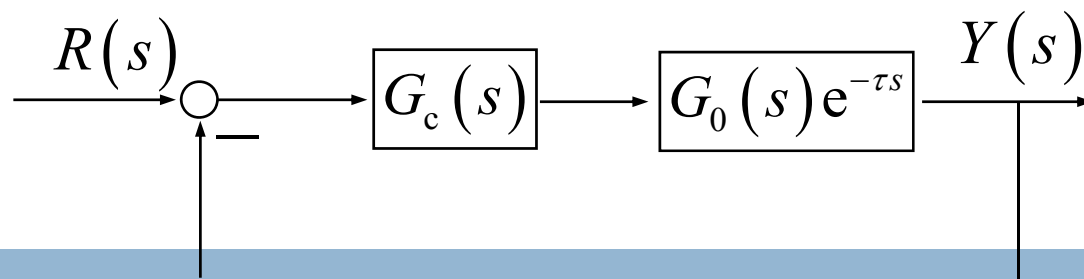


$$G_p(s) = \frac{1.0}{10s + 1} e^{-10s}$$

$$G_p(s) = \frac{1.0}{10s + 1} e^{-4s}$$



解决办法



- 克服办法：消除反馈信号的纯滞后。
- 串联方法：需要补偿环节有超前作用，物理上无法实现。

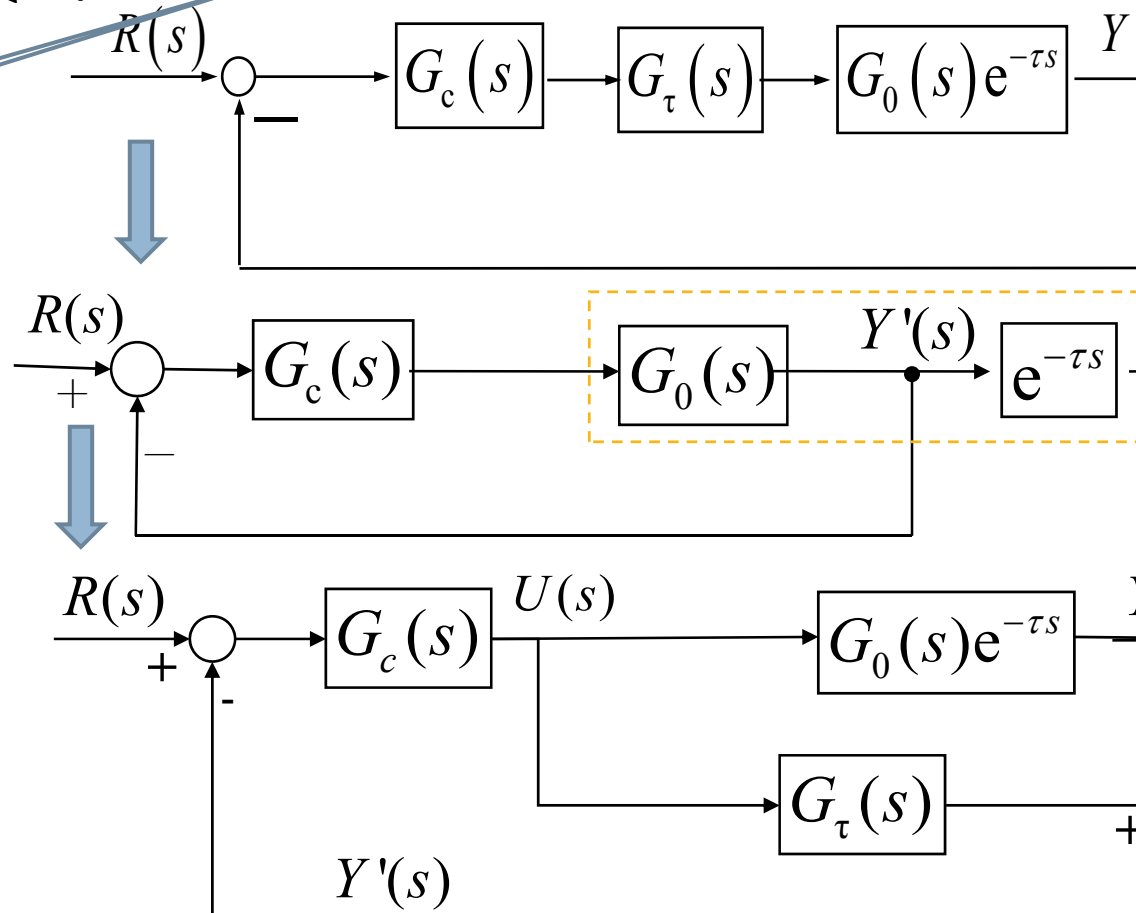
$$G_\tau(s)G_0(s)e^{-\tau s} = G_0(s)$$

$$G_\tau(s) = e^{\tau s}$$

- 并联方法

$$G_0(s)e^{-\tau s} + G_\tau(s) = G_0(s)$$

$$G_\tau(s) = G_0(s)(1 - e^{-\tau s})$$

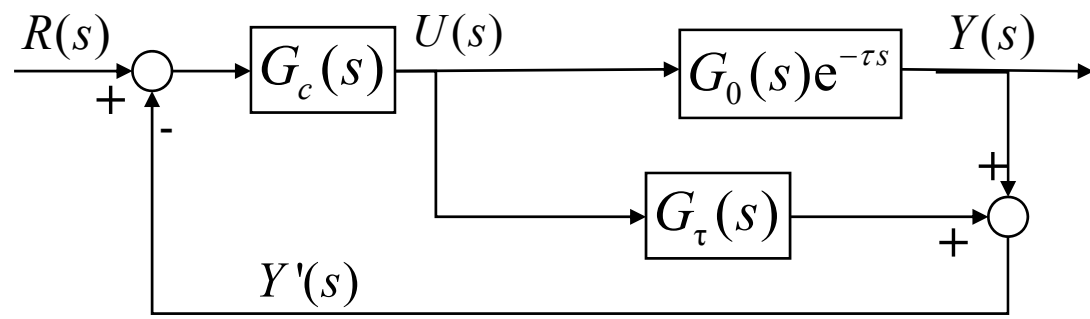


进一步整理

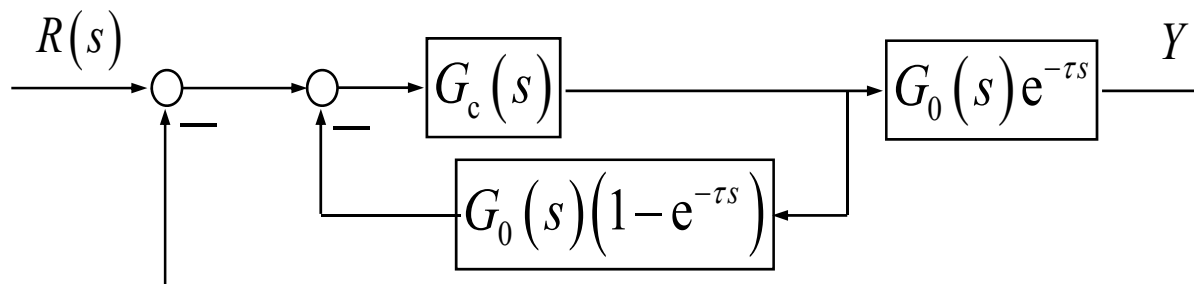
闭环传递函数

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_0(s)(1 - e^{-\tau s})} G_0(s)e^{-\tau s}}{1 + \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_0(s)(1 - e^{-\tau s})} G_0(s)e^{-\tau s}} \\ &= \frac{G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1 + G_c(s)G_0(s)}\end{aligned}$$

- 反馈信号的纯滞后被消除，控制器可以及时得到控制效果信息，及时地修正控制动作。
- 特征多项式不含有纯滞后环节，不影响稳定性。



$$G_\tau(s) = G_0(s)(1 - e^{-\tau s})$$



- 注意：需要精确知道受控过程数学模型，否则补偿效果不好。

具有Smith纯滞后补偿的PID控制的数字实现

□ 假设纯滞后时间是采样周期的N倍，则数字实现的步骤为

▣ 求考虑采样保持器的广义对象脉冲传递函数 $G_p(z) = G_0(z)z^{-N}$

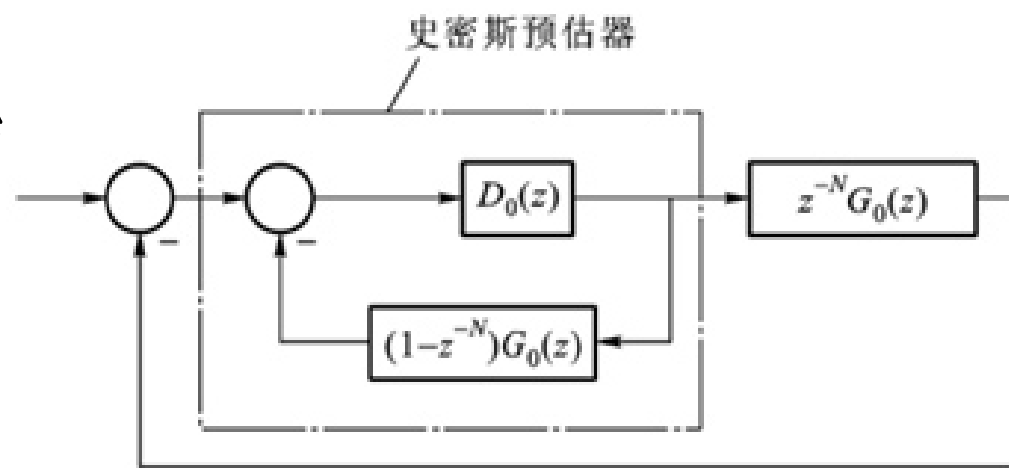
▣ 求不考虑纯滞后情况下的数字PID控制器设计，得到 $D_0(z)$

▣ 再据下式求具有Smith纯滞后补偿的控制器 $D(z) = \frac{D_0(z)}{1 + (1 - z^{-N})D_0(z)G_0(z)}$

▣ 在计算机实现时，可以采用下图结构实现

■ 控制器部分的反馈部分单独立运算后再计算 $D_0(z)$

■ 需要存放N个相关的历史数据，即开辟N个存储单元存放控制器反馈通道中 $G_0(z)$ 的输出



这一讲就到这里！



第十四讲 解析设计方法-最小拍设计

基本思想是先离散化广义对象(含保持器)，接着根据性能指标确定所需的闭环脉冲传递函数，然后依 $C(z)$ 两式理论上确定控制器。这种方法以最少拍系统设计最为典型，包含有纹波和无纹波两类。“最少拍”指过渡过程最少时间。

最小拍系统的概念

- 稳定度与 ∞ 稳定度：z平面上极点离原点越近，稳定度越高；全部极点均在原点-- ∞ 稳定度。 $|z| = e^{\sigma T}$
- 最小拍的时间最优概念：具有 ∞ 稳定度的离散系统，暂态过程在有限最少时间 nT 内结束。

$$\Phi(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n} = b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}$$
$$\Rightarrow h^*(t) = b_n \delta(t) + b_{n-1} \delta(t-T) + \cdots + b_0 \delta(t-nT) \quad \text{有限个脉冲}$$

- 例：求当输入为单位阶跃信号时，二阶采样系统(最小拍)的输出。

闭环脉冲传递函数为 $\Phi(z) = \frac{2z-1}{z^2}$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{2z-1}{z^2} \cdot \frac{z}{z-1} = 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$y^*(t) = 0 + 2\delta(t-T) + \delta(t-2T) + \delta(t-3T) + \cdots$$

最小拍设计的原则

□ 最小拍系统的性能指标

- ✓ 稳定
- ✓ 稳态误差为0，两种级别：采样点处；采样点间
- ✓ 系统以最小拍达到稳定

□ 系统性能对最小拍闭环脉冲传递函数的要求

- 稳定性对闭环传递函数的要求
- 准确性对闭环传递函数的要求
- 快速性对闭环传递函数的要求
- 物理可实现条件对闭环传递函数的要求
- 鲁棒性对闭环传递函数的要求



稳定性对系统的要求

- 为保证稳定性，要求闭环传递函数的极点全部位于单位圆内。

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

仅从该闭环传递函数考虑，如何使所有的极点在单位圆内？ $\rightarrow C(z)$ 应该如何选

设 $C(z)$ 在单位圆上或圆外有 q 个零点，有 p 个极点

$$C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))}$$

合适地选择 $\Phi(z)$
该如何选择？

$$\Phi(z) = F_1(z^{-1}) \prod_{i=1}^q (1 - \beta_i z^{-1})$$

$$1 - \Phi(z) = F_2(z^{-1}) \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i z^{-1})$$

若系统有二重根 α ，
其余极点各不相同

$$\Phi(z)|_{z=\alpha} = 1, \Phi'(z)|_{z=\alpha} = 0, \Phi(z)|_{z=\alpha_3} = 1, \Phi(z)|_{z=\alpha_4} = 1, \dots, \Phi(z)|_{z=\alpha_p} = 1$$

准确性对系统的要求

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

□ 准确性要求使系统稳态误差为0

$$G_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = 1 - \Phi(z)$$

$$r(t) = \frac{r_{m-1}}{(m-1)!} t^{m-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) G_e(z) R(z) \rightarrow 0$$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

有纹波系统 $G_e(z) = 1 - \Phi(z) = F_3(z^{-1})(1 - z^{-1})^m$

$$\Phi(z)|_{z=1} = 1, \Phi'(z)|_{z=1} = 0, \Phi''(z)|_{z=1} = 0, \Phi'''(z)|_{z=1} = 0, \dots, \Phi^{(m-1)}(z)|_{z=1} = 0$$

无纹波系统附加约束(设 $G(z)$ 有 r 个零点)----使控制器输出在有限拍内与输出同步达到稳定

$$G_u(z) = \frac{U(z)}{R(z)} = \frac{C(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z)} \Rightarrow \Phi(z) = F_4(z^{-1}) \prod_{i=1}^r (1 - \beta_i z^{-1})$$

注: $C(z)G(z)$ 中纯积分环节数大于等于输入信号的分母阶次

其他要求

快速性对系统的要求

- 在满足性能指标的情况下，系统应尽快达到稳定，这要求 $G_e(z) = 1 - \Phi(z)$ 的展开项数尽可能少，即要求 $\Phi(z)$ 的展开项尽可能少。

物理可实现条件对系统的要求

$$G(z) = k \frac{z^{-h}(1 + b_1 z^{-1} \cdots)}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots} = z^{-h}(g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots)$$

$$C(z) \text{ 的可实现性 } C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))} = \frac{z^h}{g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

$$\Phi(z) = z^{-h} F_5(z^{-1})$$

鲁棒性对系统的要求

$$S(z) = \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = G_e(z) = 1 - \Phi(z) \Rightarrow \Phi(z) \text{ 尽可能具有较大增益}$$

最小拍有纹波与无纹波系统设计

- 据典型输入信号的Z变换积分个数 m ;
- 计算广义被控对象,确定: 延迟拍数 h ;不稳定的极点个数 p ; 不稳定(或全部)的零点个数 $q(r)$;
- 确定期望的闭环脉冲传递函数

$$\begin{cases} \Phi(z) = z^{-h} \prod_{i=1}^{q(r)} (1 - \beta_i z^{-1}) (\varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \cdots + \varphi_{m+p-1} z^{-(m+p-1)}) \\ 1 - \Phi(z) = (1 - z^{-1})^m \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i z^{-1}) (1 + f_1 z^{-h} + \cdots + f_q z^{-(h+q(r)-1)}) \end{cases}$$

由可实现性要求+稳定性+准确性要求要求产生的协调项

不稳定极点各不相同, 求协调项系数

$$\Phi(z)|_{z=1} = 1, \Phi'(z)|_{z=1} = 0, \Phi''(z)|_{z=1} = 0, \Phi'''(z)|_{z=1} = 0, \dots, \Phi^{(m-1)}(z)|_{z=1} = 0$$

$$\Phi(z)|_{z=\alpha_1} = 1, \Phi(z)|_{z=\alpha_2} = 1, \Phi(z)|_{z=\alpha_3} = 1, \Phi(z)|_{z=\alpha_4} = 1, \dots, \Phi(z)|_{z=\alpha_p} = 1$$

$$\longrightarrow C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))}$$

控制系统的调节时间估计 $t_s \leq (h + p + q(r) + m)$

最小拍有纹波与无纹波系统改进设计

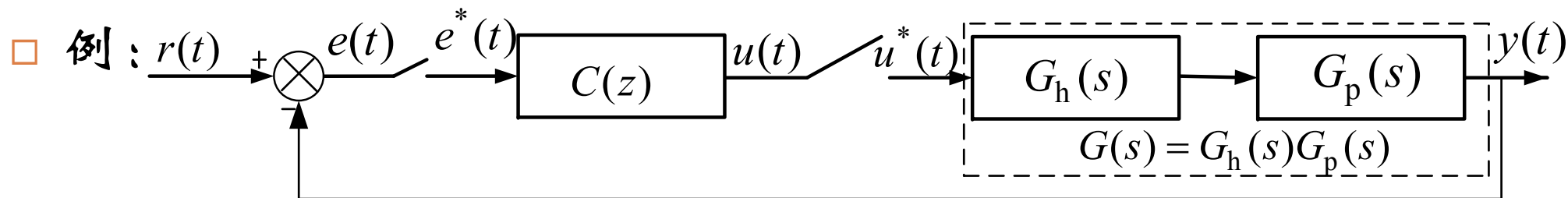
- 最小拍设计是针对某种典型输入的，其适应性差。
- 有效方法是在最小拍系统的闭环脉冲传递函数中增加阻尼因子(即一稳定极点)，同时保持静态增益。
- 为达到此目的，有两种策略：
 - ✓ 先用未改进的方法求出最小拍系统的 $\Phi(z)$ ，然后 $\tilde{\Phi}(z) = \frac{(1-d)\Phi(z)}{1-dz^{-1}}$
 - ✓ 直接令如下的联立方程求解

$$\tilde{\Phi}(z) = z^{-h} \prod_{i=1}^q (1 - \beta_i z^{-1}) (\varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \cdots + \varphi_{m+p-1} z^{-(m+p-1)}) \bigg/ (1 - dz^{-1})$$

$$1 - \tilde{\Phi}(z) = (1 - z^{-1})^m \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i z^{-1}) (1 + f_1 z^{-h} + \cdots + f_q z^{-(h+q-1)}) \bigg/ (1 - dz^{-1})$$

最小拍设计例子

$$G_p(s) = \frac{K_d}{s(T_m s + 1)} \quad K_d = 20, T_m = 0.25$$



- 已知输入为单位斜坡信号，采样周期为1s，分别将系统设计为有纹波最小拍系统和无纹波最小拍系统。如果要求无纹波最小拍系统对阶跃信号输入也具有适应性，如何解决？

$$G(z) = Z\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K_d}{s(T_m s + 1)}\right) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{10}{s^2(s + 1)}\right) = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$

$$h = 1; \alpha_1 = 1, p = 1; \beta_1 = -0.718, q = 0 \ (r = 1); m = 2$$

有纹波系统的设计

□ 有纹波系统的闭环脉冲传递函数为 $\Phi(z) = z^{-1}(\varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2})$

$$\Phi(z)|_{z=1} = 1, \Phi'(z)|_{z=1} = 0, \Phi(z)|_{z=\alpha_1=1} = 1$$



只有两个方程是相互独立的，
闭环脉冲传递函数协调项只
取两项， $\varphi_0 = 2, \varphi_1 = -1$

→ $\Phi(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$

→
$$C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))} = \frac{0.543(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.718z^{-1})}$$

控制系统的调节时间估计 $t_s \leq (h + p + q + m - 1)T = 3T$

无纹波系统的设计

□ 无纹波系统的闭环脉冲传递函数为 $\Phi(z) = z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})(\varphi_0 + \varphi_1z^{-1} + \varphi_2z^{-2})$

$$\Phi(z)|_{z=1} = 1, \Phi'(z)|_{z=1} = 0, \Phi(z)|_{z=\alpha_1=1} = 1$$



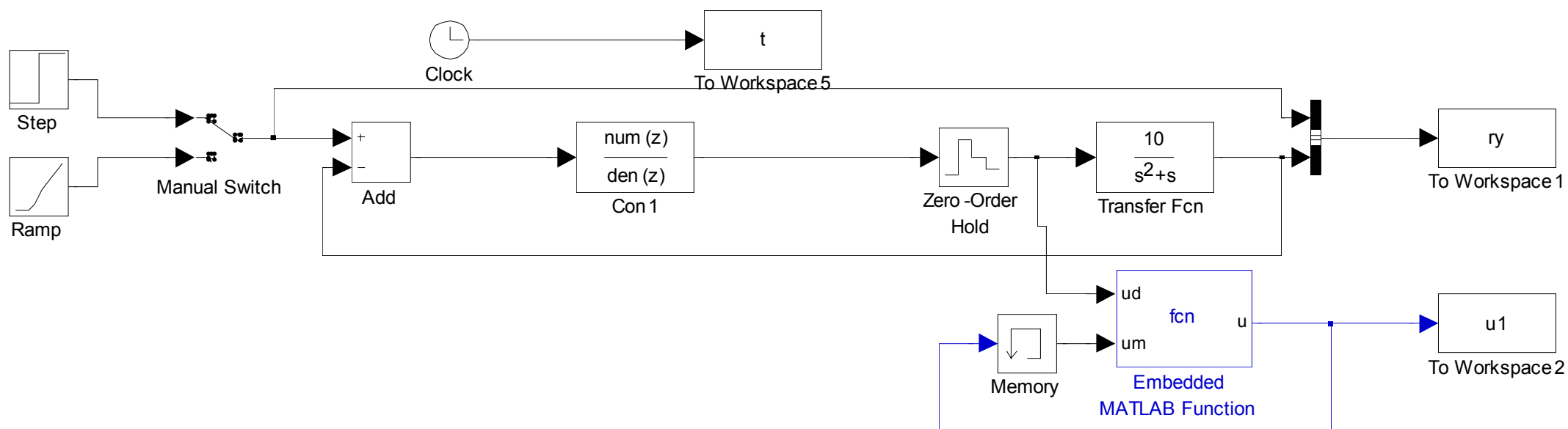
只有两个方程是相互独立的，
闭环脉冲传递函数协调项只
取两项， $\varphi_0 = 1.407, \varphi_1 = -0.826$

$$\Rightarrow \Phi(z) = z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})(1.407 - 0.826z^{-1})$$

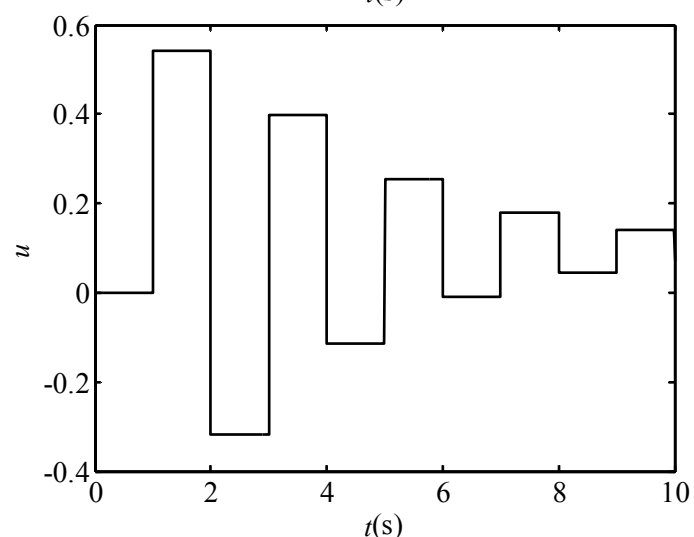
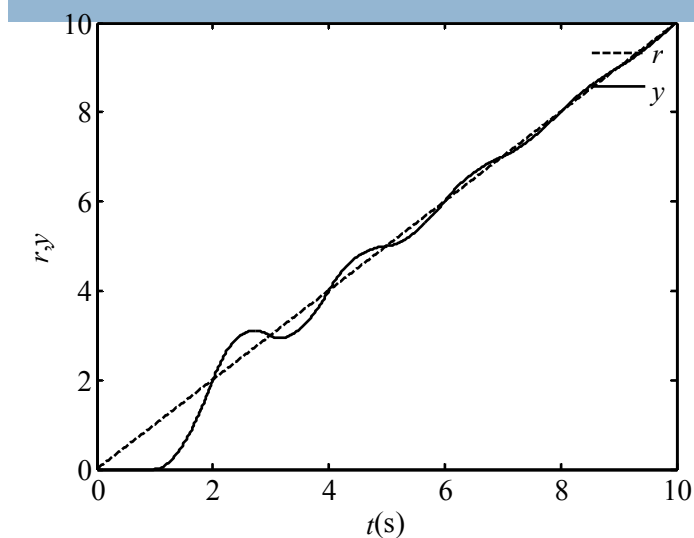
$$\Rightarrow C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))} = \frac{0.38(1 - 0.587z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.593z^{-1})}$$

控制系统的调节时间估计 $t_s \leq (h + p + r + m - 1)T = 4T$

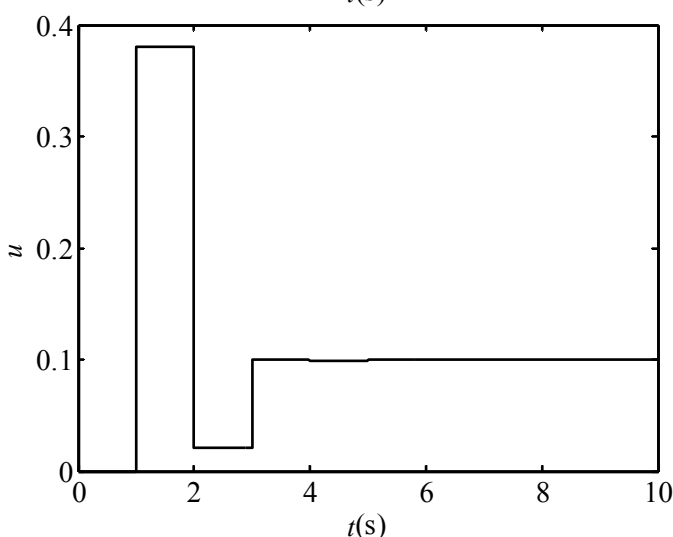
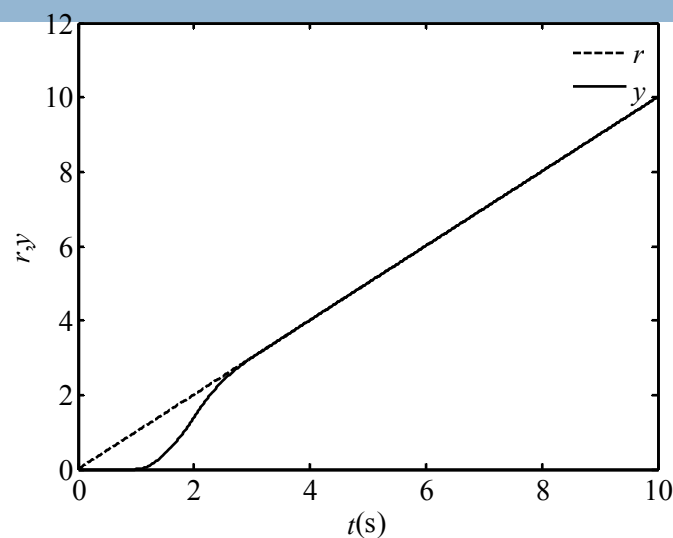
程序



设计结果——斜坡输入下的有/无纹波系统



有纹波系统

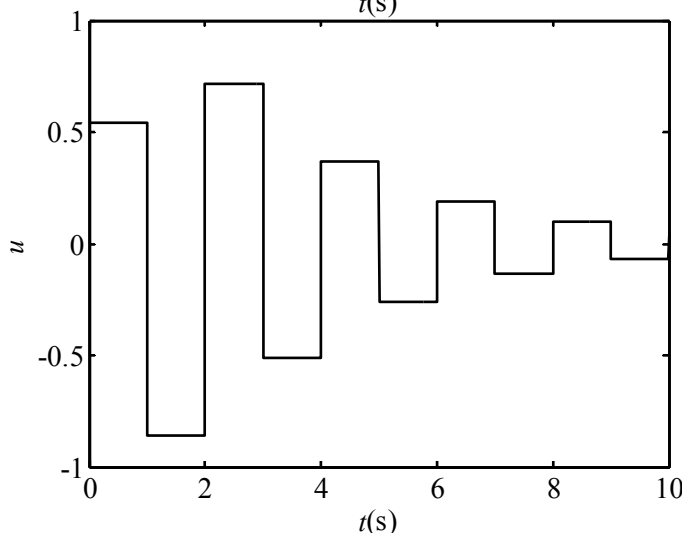
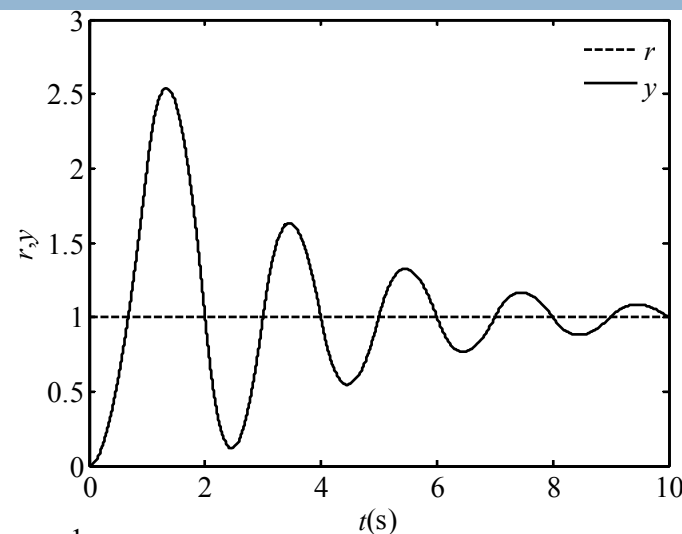


无纹波系统

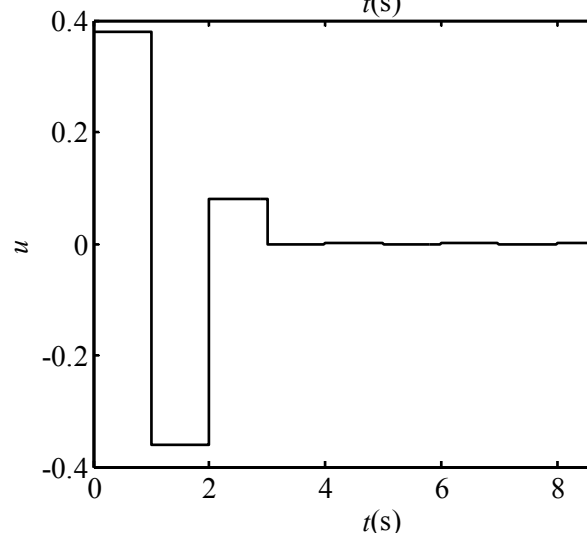
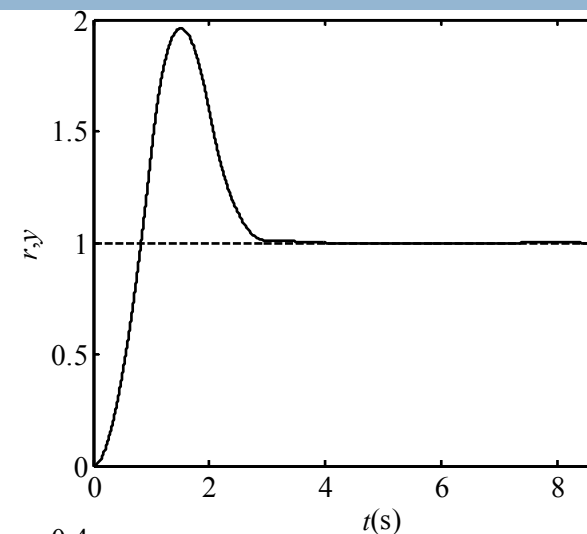
- 两者的调节时间分别为 $2T$ 和 $3T$ ，均小于计算时间。
- 有纹波系统在调节过程中在采样点上无纹波，而在采样点间有纹波的，其主要原因是控制器在调节过程中有纹波。
- 无纹波系统对于输出和控制在调节时间上，无论是采样点，还是在采样间隔间都是无纹波的。

设计结果——阶跃输入下的有/无纹波系统 $C(z)$ 不

- 虽然过渡过程时间不会改变
- 但其他性能指标则不能保证，像动态和稳态偏差，都可能达不到理想的效果
- 即最小拍系统对输入的适性差。
- 为此采用在闭环脉冲传递函数中增加阻尼项来增强适性。



有纹波系统



无纹波系统

课外练习

- 针对上例，在闭环脉冲传递函数中增加阻尼项来增强适应性，设计有纹波系统和无纹波系统，给出在 $d=0.02, 0.2, 0.7$ 三种情况下的仿真结果，并对图形比较说明。

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

第十五讲 数字控制器的大林算法

大林算法是一种直接数字控制器的设计方法。它适用于一阶滞后或二阶纯滞后环节，且要求被控对象有准确的数学模型。

大林算法针对的对象与设计目标

- 一阶滞后或二阶纯滞后系统

$$G_p(s) = \frac{K}{T_0s + 1} e^{-\tau s}, G_p(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}, T_2 >$$

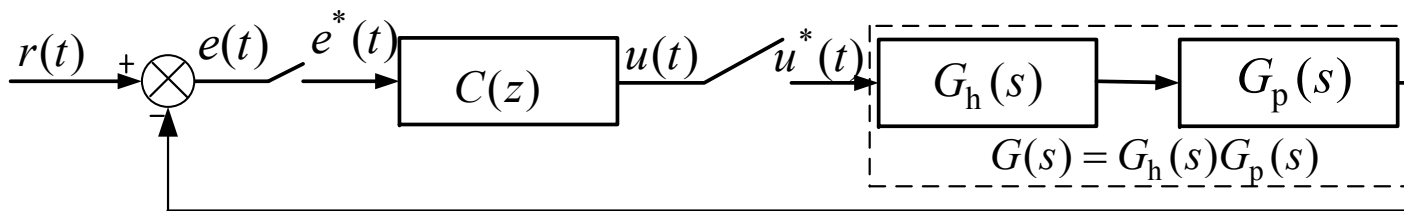
- 大林算法的目标是使整个系统的闭环传递函数相当于一个滞后环节和一个惯性环节的串联，即

$$\Phi(s) = \frac{1}{T_c s + 1} e^{-\tau_c s}, \tau_c = \tau = NT$$

- 对闭环传递函数进行离散化----采用阶跃响应不变法

$$\Phi(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{T_c s + 1} e^{-\tau_c s} \right] = \frac{(1 - e^{-T/T_c}) z^{-N-1}}{1 - e^{-T/T_c} z^{-1}}$$

大林数字控制器



大林数字控制器一般形式

$$\Phi(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \Rightarrow C(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)(1 - \Phi(z))} = \frac{1}{G(z)} \frac{(1 - e^{-T/T_c})z^{-N-1}}{1 - e^{-T/T_c}z^{-1} - (1 - e^{-T/T_c})z^{-N-1}}$$

对象为一阶纯滞后时

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s} \right] = Kz^{-N-1} \frac{1 - e^{-T/T_0}}{1 - e^{-T/T_0}z^{-1}}$$

对象为二阶纯滞后时

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s} \right] = Kz^{-N-1} \frac{(c_1 + c_2z^{-1})}{(1 - e^{-T/T_1}z^{-1})(1 - e^{-T/T_2}z^{-1})}$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{T_2 - T_1} (T_1 e^{-T/T_1} - T_2 e^{-T/T_2}), c_2 = e^{-T/T_1 - T/T_2} + \frac{1}{T_2 - T_1} (T_1 e^{-T/T_1} - T_2 e^{-T/T_2})$$

振铃现象与产生的原因

□ 什么是振铃现象？

- ▣ 控制器的输出以二分之一的采样频率大幅度衰减振荡，这种振荡对系统的输出几乎无任何影响，但却增加了执行机构的磨损。

□ 振铃产生的原因

$$Y(z) = G(z)U(z) = \Phi(z)R(z) \Rightarrow \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{U(z)}{R(z)} \triangleq K_{ur}(z) \Rightarrow U(z) = K_{ur}(z)R(z)$$

令闭环系统的输入为单位阶跃 $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ ，使 $U(z)$ 含有 $z=1$ 的极点，若 K_{ur} 在 $z=-1$ 附近有极点，此时数字控制器输出含有两种幅度相近的项，有时符号相反，有时符号相同，导致数字控制器输出大幅度振荡。极点越接近 $z=-1$ ，振铃现象越强。

讨论一阶、二阶系统是否存在振铃现象

□ 对一阶系统

$$K_{\text{ur}}(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{(1 - e^{-T/T_c})(1 - e^{-T/T_0} z^{-1})}{K(1 - e^{-T/T_0})(1 - e^{-T/T_c} z^{-1})}$$

其极点恒大于0，故不产生振铃现象。

□ 对二阶系统

$$K_{\text{ur}}(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{(1 - e^{-T/T_c})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}{Kc_1(1 - e^{-T/T_c} z^{-1})(1 + (c_2/c_1)z^{-1})}$$

两个极点一个大于0，而另一个 $z = -c_2/c_1$ 小于0，且

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) = -1$$

故可以引起振铃现象。

振铃现象消除

□ 第一种方法：降阶方法

- ▣ 将引起振铃现象的极点因子去掉，但要保持静态增益，所以只要令极点因子 $(c_1+c_2z^{-1})$ 中 $z=1$ 就可以了。
- ▣ 这种方法对稳态输出不影响，但对动态特性有影响。

□ 第二种方法：选择合适的采周期和系统的闭环时间常数，使数字控制器的输出不产生强烈的振铃现象。

$$c_1 = 1 + \frac{1}{T_2 - T_1} (T_1 e^{-T/T_1} - T_2 e^{-T/T_2})$$
$$c_2 = e^{-T/T_1 - T/T_2} + \frac{1}{T_2 - T_1} (T_1 e^{-T/T_1} - T_2 e^{-T/T_2}) \Rightarrow z = -\frac{c_2}{c_1}$$

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

第十六讲 基于 $W(W')$ 平面的Bode图设计控制

Bode图法引入到离散线性控制系统设计中，需要进行适当的处理。引入双线性变换可以实现从 Z 平面到 $W(W')$ 平面映射，便可采用Bode图法了。

两种平面的变换

□ Z-W: W平面与S平面有类似的关系

$$z = \frac{1+w}{1-w} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow w|_{j\omega_w} = \frac{z-1}{z+1} \Big|_{e^{j\omega_z T}} \Rightarrow \omega_w = \tan\left(\frac{\omega_z T}{2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{两个域的频率} \\ \text{成非线性关系} \end{array}$$

□ Z-W': 改善两个域的非线性关系, 变成近似线性关系

$$z = \frac{1+(T/2)w'}{1-(T/2)w'} \Leftrightarrow w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow w'|_{j\omega_{w'}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \Big|_{e^{j\omega_z T}} \Rightarrow \omega_{w'} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_z T}{2}\right)$$

□ 当采样频率很高时, 且 ω_z 很小时, 两种频率近似相等

□ W'平面的变换使离散系统在性能上更接近连续系统

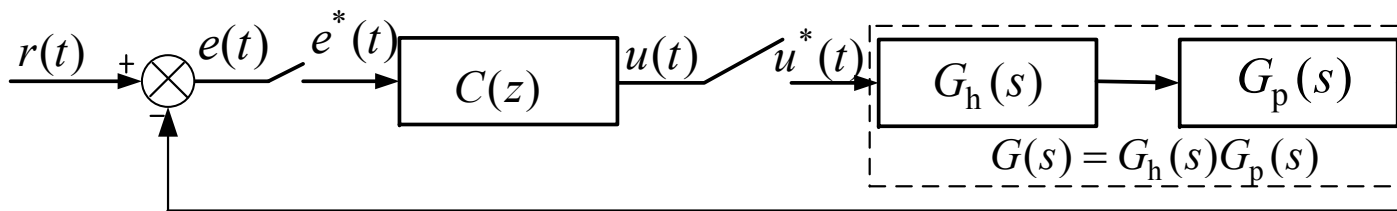
□ 正是由于引入W'平面的变换, 才为离散域控制器设计等效连续域控制器设计找到了一条频域设计途径。

W'平面的Bode图法设计

□ W'平面频域设计的步骤

- 对带ZOH的原连续对象求脉冲传递函数 $G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right]$
- 将 $G(z)$ 变换到W'平面 $G(w') = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + (T/2)w'}{1 - (T/2)w'}}$
- 选择采样周期：采样频率应是闭环系统带宽的10倍
- 根据稳态精度确定开环回路增益，画出广义对象的开环Bode图，分析其性能指标是否达到要求。若没达到，则需要引入进入控制器使系统幅[相]特性满足要求，设计方法与连续系统一样，根据实际情况，引入超前(PD)、滞后(PI)、滞后-超前(PID)校正 $C(w')$ 。
- 将 $C(w') \rightarrow C(z)$ ，即 $C(z) = C(w') \Big|_{w' = \frac{2z-1}{Tz+1}}$
- 验证，若符合要求，写出时域控制算法

设计例子



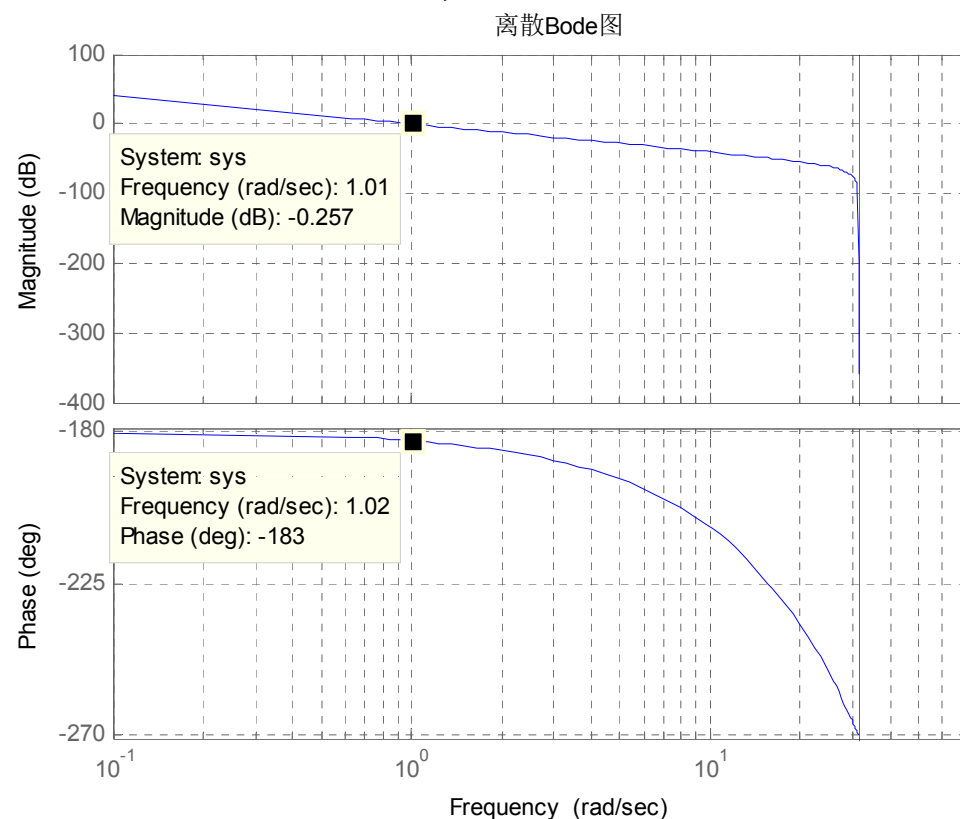
- 如图所示的控制系统，采样周期选择 $T=0.1\text{s}$ ，被控对象 $G_p(s)=1/s^2$ ，用 W' 平面上的频域设计方法设计控制器 $C(z)$ ，要求相位裕度大于等于 50° ，增益裕度大于 10dB ，并求出闭环系统的阶跃响应。

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s^2} \right] = \frac{0.005(z+1)}{(z-1)^2}$$

$$G(w') = \frac{0.005(z+1)}{(z-1)^2} \bigg|_{z=\frac{1+(T/2)w'}{1-(T/2)w'}} = \frac{1-0.05w'}{w'^2}$$

✓ 由于本题没有给出稳态精度要求，所以故只需画出原广义对象的Bode图

✓ 由图可见系统不稳定，且交越频率为1，相角裕度为 -3° 。故需要超前校正。



设计例子续

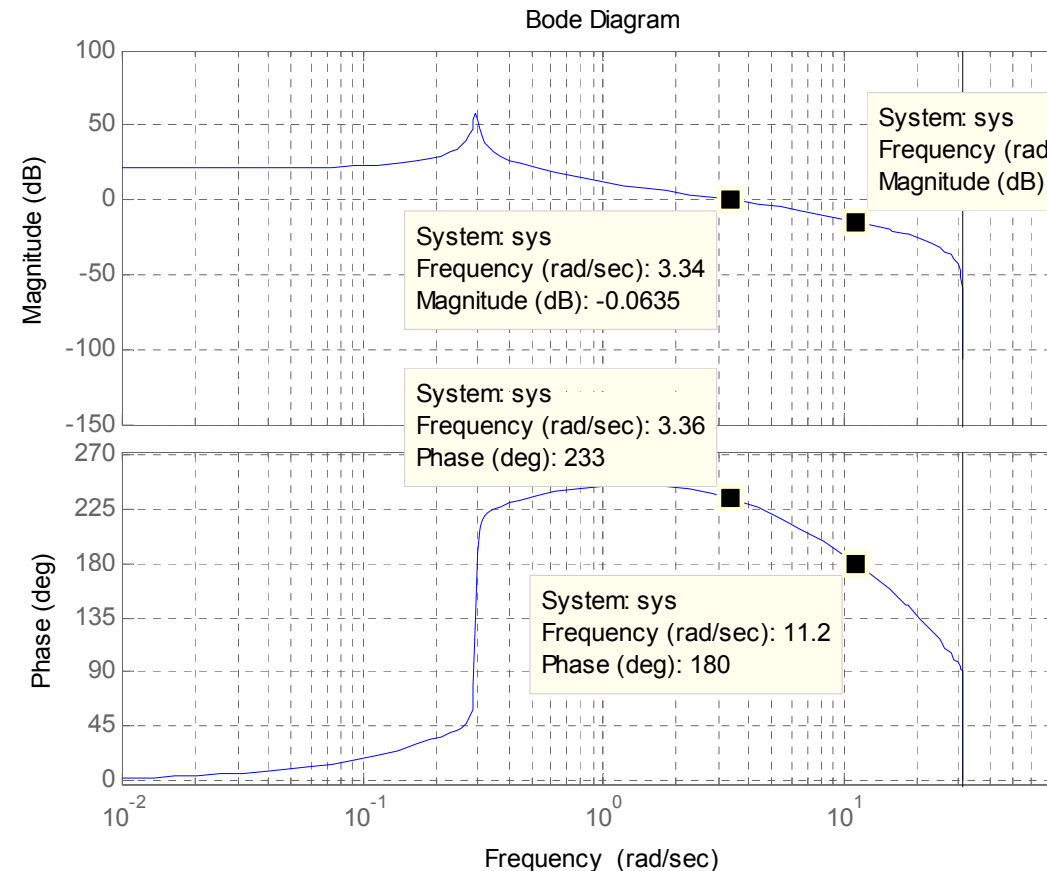
设计超前控制器

$$C(w') = \frac{29.1116 \times 0.1211w' + 1}{0.1211w' + 1}$$

$$C(z) = \frac{29.1116 \times 0.1211w' + 1}{0.1211w' + 1} \bigg|_{w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$
$$= 20.8998 \frac{z - 0.9720}{z - 0.4155}$$

验证

$$G(z)C(z) = 20.8998 \frac{z - 0.9720}{z - 0.4155} \frac{0.005(z + 1)}{(z - 1)^2} = \frac{0.1045z^2 + 0.002926z - 0.1016}{z^3 - 2.415z^2 + 1.831z - 0.4155}$$



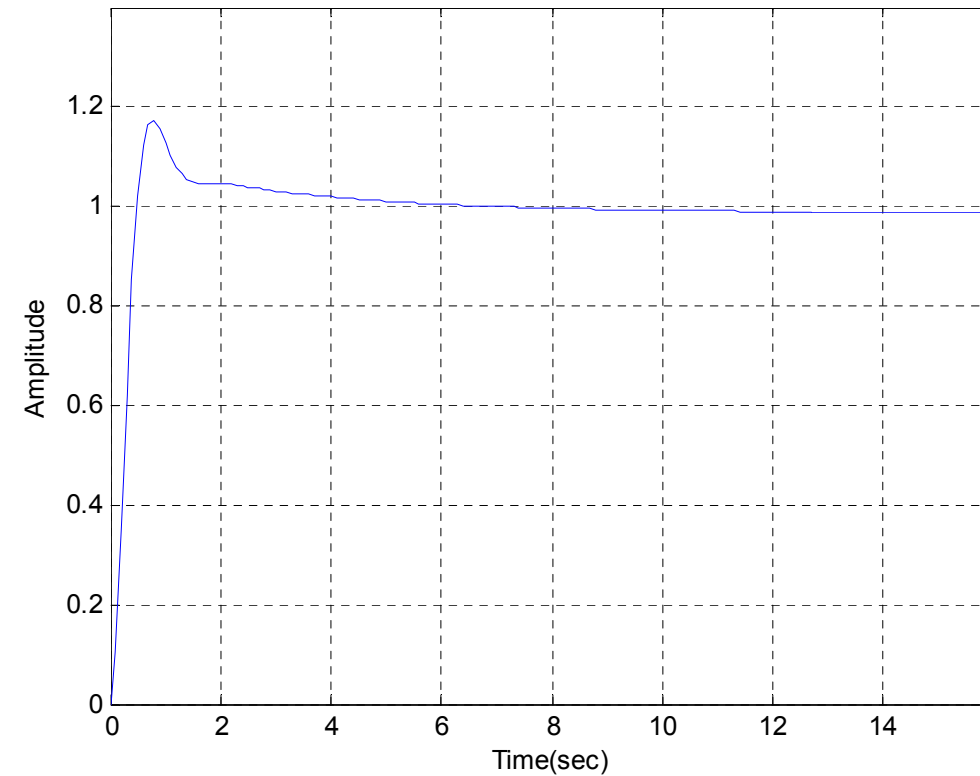
设计例子续

□ 控制器算法

$$C(z) = 20.8998 \frac{z - 0.9720}{z - 0.4155} = \frac{U(z)}{E(z)}$$
$$u(k) = 0.4155u(k-1) + 20.8998(e(k) - e(k-1))$$

□ 闭环系统的阶跃响应

$$\Phi(z) = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)} = \frac{0.1045z^2 + 0.002926z - 0.1016}{z^3 - 2.311z^2 + 1.834z - 0.5171}$$



这一讲就到这里！

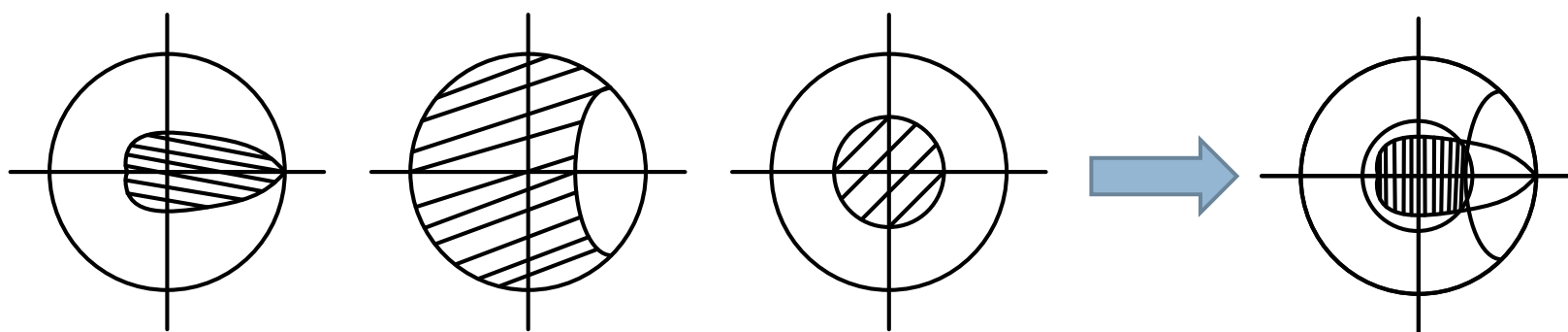


第十七讲 基于 z 平面的根轨迹控制器设计

根轨迹法引入到离散线性控制系统设计中，需要进行部分适当的处理，处理完后，便和连续情况完全类似。

根轨迹指标

- 连续控制系统的主导极点在S平面的位置和单位阶跃响应特性有密切关系，设二阶系统的传递函数为 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- 其指标有如下公式：
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \sigma_p(\%) = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\% \quad t_s = -\frac{\ln(0.05\sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$
- 由这些指标可以确定闭环主导极点 $s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$
- S平面极点与Z平面的极点有关系 $r = |z| = e^{-\zeta\omega_n T}, \theta = \angle z = T\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
- Z平面可以做出等阻尼比线、等固有频率线和等r幅值线



期望的位置在如右图所示阴影部分的公共区域。

绘制根轨迹的依据

□ 系统的闭环传递函数为 $\Phi(z) = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)}$

□ 闭环特征方程为

$$1 + G(z)C(z) = 0 \Rightarrow G(z)C(z) = \frac{K_1 \prod_{k=1}^m (z - z_k)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = -1$$

□ 幅值条件与相角条件

$$K_1 = \frac{\prod_{i=1}^m |z - p_i|}{\prod_{i=1}^n |z - z_i|}$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - p_i) = (2k + 1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2,$$

□ 绘制根轨迹与连续系统一样只依据相角方程就可以了，之后将满足相角方程的z值代入模值方程求出该点根轨迹 K_1 。

绘制180度根轨迹-1

$$\frac{\prod_{k=1}^m (z - z_k)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = -\frac{1}{K_1} = \frac{1}{|K_1|} e^{il\pi}$$

- 规则一：根轨迹有 **n** 条连续分支
- 规则二：根轨迹 **始于开环极点**，**止于开环零点**，有 **(n-m)** 条根轨迹终止于 **无穷远处**
- 规则三：根轨迹 **对称于实轴** (利用这一规则，可只求一半)
- 规则四：**实轴** 上的某一段，若其右边的开环零点和开环极点总数为 **奇数**，则该段实轴是根轨迹的一部分。
- 规则五：两支根轨迹在实轴或 **在平面上** 某处的交点 z_d

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{z_d - z_k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_d - p_j}$$

除了确定分离点外，还可确定分离角
 $(2h+1)\pi/l$ l 是分支数, $h=0,1,\dots$

- 规则六：根轨迹与单位圆的交点

绘制180度根轨迹-3

□ 规则七：趋向**无穷远处**的 $(n-m)$ 条根轨迹的

□ 渐近线与实轴的交角为 $\theta = l\pi/(n-m), l=1,3,5,\dots,$

□ 渐近线汇交于实轴上的坐标为
$$\sigma_1 = \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{k=1}^m z_k \right) / (n-m)$$

□ 规则八：根轨迹的出射角和入射角：

$$\theta_{p_l} = (2k\pi + \pi) + \sum_{k=1}^m \angle(p_l - z_k) - \sum_{j=1, j \neq l}^n \angle(p_l - p_j)$$

$$\theta_{z_l} = (2k\pi + \pi) + \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) - \sum_{j=1, j \neq l}^m \angle(z_l - z_j)$$

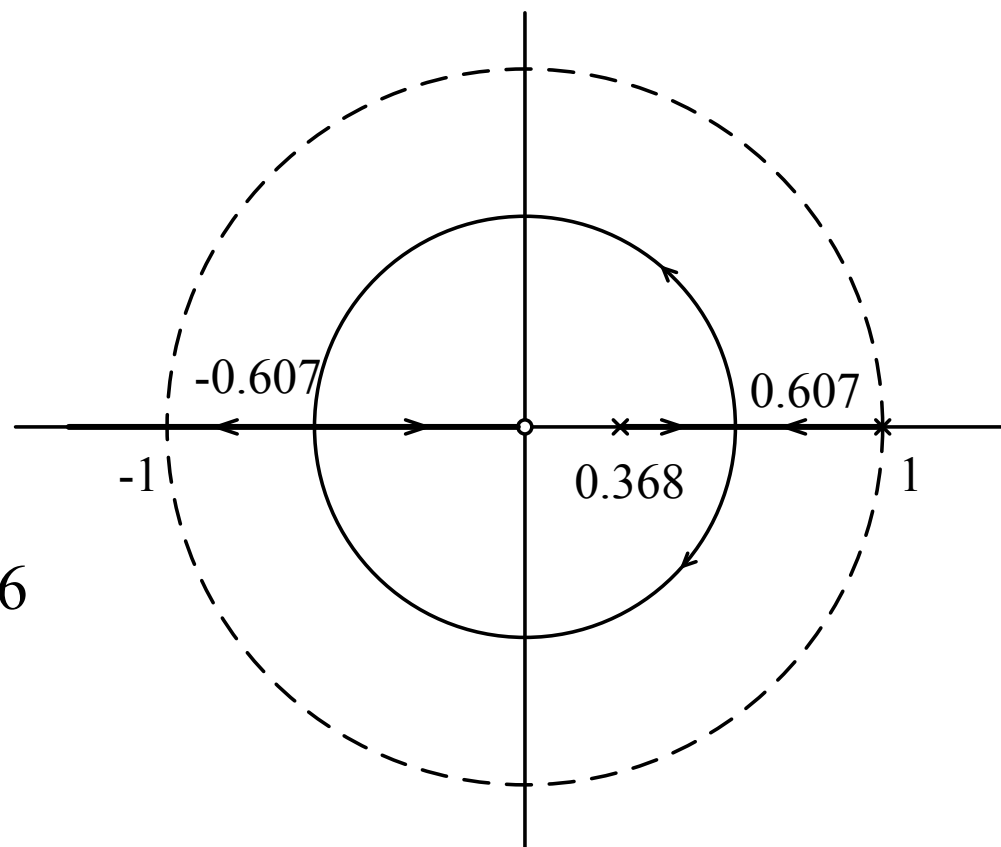
对应的共轭极点和零点取各对应角的相反数

绘制根轨迹的例子

- 已知某系统的开环传递函数为 $G(z) = \frac{K_1 z}{(z-1)(z-0.368)}$ ，绘制闭环系统的Z域根轨迹。

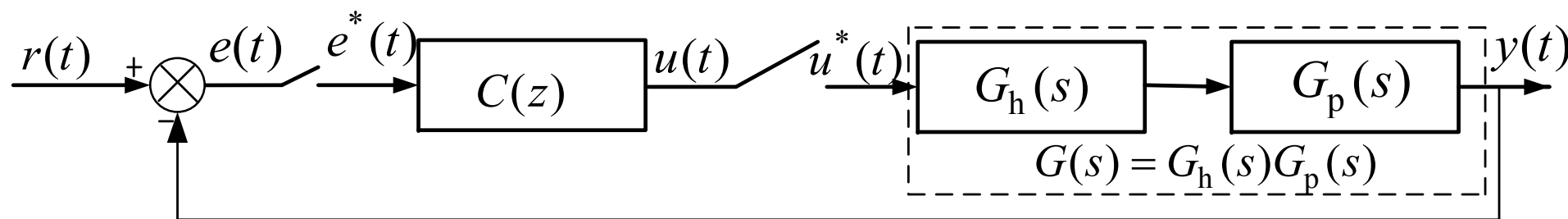
与单位圆的交点在-1,此时临界

$$K_1 = \left| \frac{(-1-1)(-1-0.368)}{-1} \right| = 2.736$$



根轨迹法设计-1

- 与S平面根轨迹方法相同，通过**试探的方法**增加额外的极点和零点，使闭环脉冲传递函数的主导极点位于Z平面的期望位置上。
- 例：数字控制系统如图所示， $G_h(s)$ 是零阶保持器， $G_p(s)=1/s(s+2)$ ，在Z平面采用根轨迹设计控制器，使闭环传递函数的主导极点的阻尼比 $\zeta=0.5$ ，调整时间 $t_s \leq 2.25s$ 。



有什么思路？

根轨迹法设计-2

□ 解：由题给定指标，主导极点的阻尼比 $\zeta=0.5$ ；据调节时间要求，取 $t_s=2s$ ，由2%的稳态误差要求， $t_s=4/\zeta\omega_n$ ，得 $\omega_n=4\text{rad/s}$ 。

原对象的交越频率为 0.5rad/s ，选取采样频率为其 20π 倍，即采样周期 $T=0.2s$ ，则有

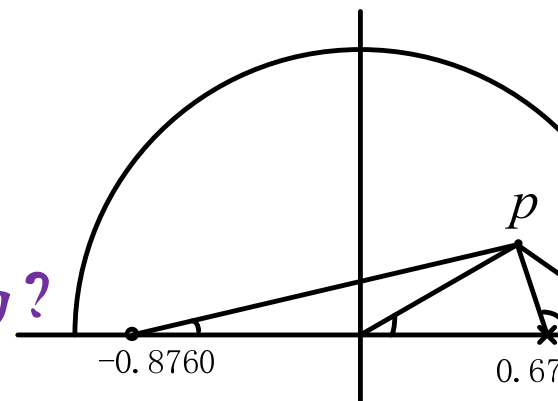
$$r=|p|=e^{-\zeta\omega_n T}=0.6703, \theta=\angle p=T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=0.6927\text{rad}=39.69^\circ$$

在Z平面上半面绘制该主导极点 $p=0.6703e^{j39.69^\circ}=0.5158+j0.4281$

含零阶保持器在内的广义被控对象的脉冲传递函数为

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right]=\frac{0.01758(z+0.8760)}{(z-1)(z-0.6703)}$$

在Z平面上标注开环零极点。 p 是根轨迹上的点吗？



根轨迹法设计-3

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right] = \frac{0.01758(z + 0.8760)}{(z - 1)(z - 0.6703)}$$

验证p是否是根轨迹上的点

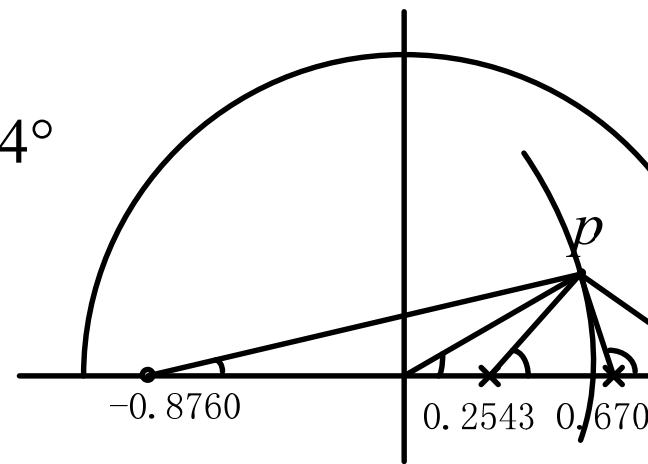
$$\begin{aligned} &= \angle(p - z_1) - \angle(p - p_1) - \angle(p - p_2) = 17.10^\circ - 138.52^\circ - 109.84^\circ \\ &= -231.26^\circ = -51.26^\circ - 180^\circ \end{aligned}$$

可见，p不是根轨迹上的点。若增加51.26°
的补偿，p就变成闭环系统的极点。

设补偿器的脉冲传递函数为 $C(z) = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}$
用补偿器的零点对消被控对象的极点0.6703，据
相角条件

$$\angle(p - z_1) - \angle(p - p_1) - \angle(p - \beta) = -180^\circ \Rightarrow \angle(p - \beta) = 58.58^\circ \quad \text{据幅值条件求k值}$$

$$\tan 58.58^\circ = \frac{0.4281}{0.5158 - \beta} \Rightarrow \beta = 0.2543$$

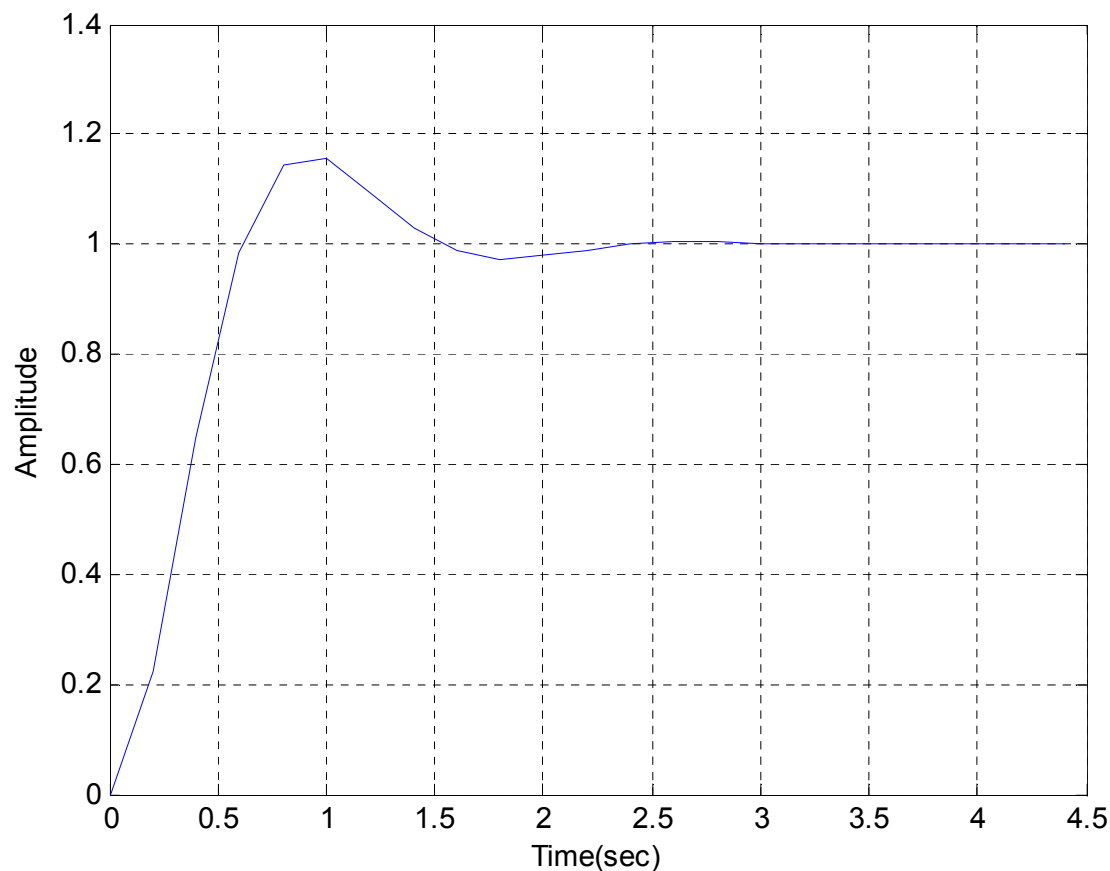


$$\Rightarrow C(z) = k \frac{z - 0.6703}{z - 0.2543}$$

$$|G(z)C(z)|_{z=p} = 1 \Rightarrow k =$$

根轨迹法设计-4

闭环系统的脉冲传递函数为 $\Phi(z) = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)} = \frac{0.2227z + 0.1951}{z^2 - 1.0316z + 0.4494}$
其阶跃响应为



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com