



第二章动态系统模型

内容提要

- 第一讲 线性系统的时域模型
- 第二讲 非线性系统与其线性化
- 第三讲 CLTI系统I/O模型与响应
- 第四讲 CLTI系统(复)频域模型
- 第五讲 CLTI系统传递函数
- 第六讲 典型环节与负载效应
- 第七讲 结构图与简化
- 第八讲 信号流图与传递函数求取
- 第九讲 闭环系统的特性与灵敏度

第一讲 线性系统的时域模型

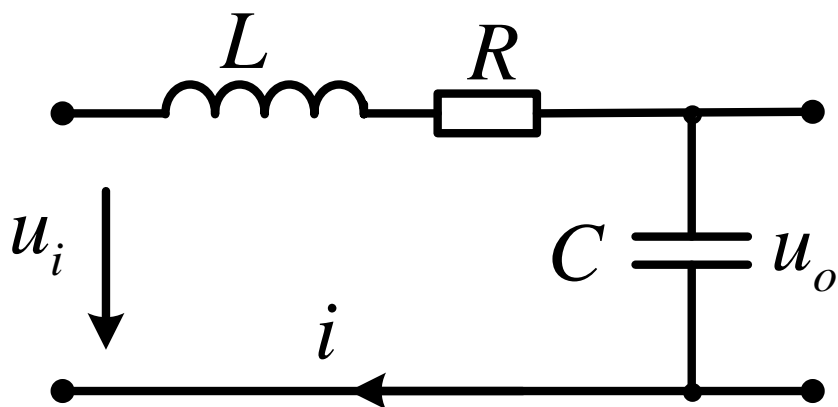
线性系统是某些实际系统的理想化，其理论是目前研究最为成熟的。典型的单元系统：RLC网络、SMD网络、机电结合的系统。

线性系统的本质

- 输入与输出满足叠加性的系统称线性系统。
 - ▣ 叠加性原理: $T(n\alpha_1 + m\alpha_2) = nT(\alpha_1) + mT(\alpha_2)$, 其中 $n, m \in \mathbb{P}$, $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$
 - ▣ 静态与动态----模型中是否有不为0的微分, 系统中有动态意味存在储能元件。
 - ▣ 对于动态系统, α 一般是时间的函数
 - ▣ 注意是输入与输出间满足的关系, 而不是时间与输出间的关系。
 - ▣ 重点研究变量之间的关系表现为常微分方程(ODE)(组)的LTI系统----集总参数系统。

例：R-L-C无源网络

- 写出输入电压与输出电压之间的微分方程。

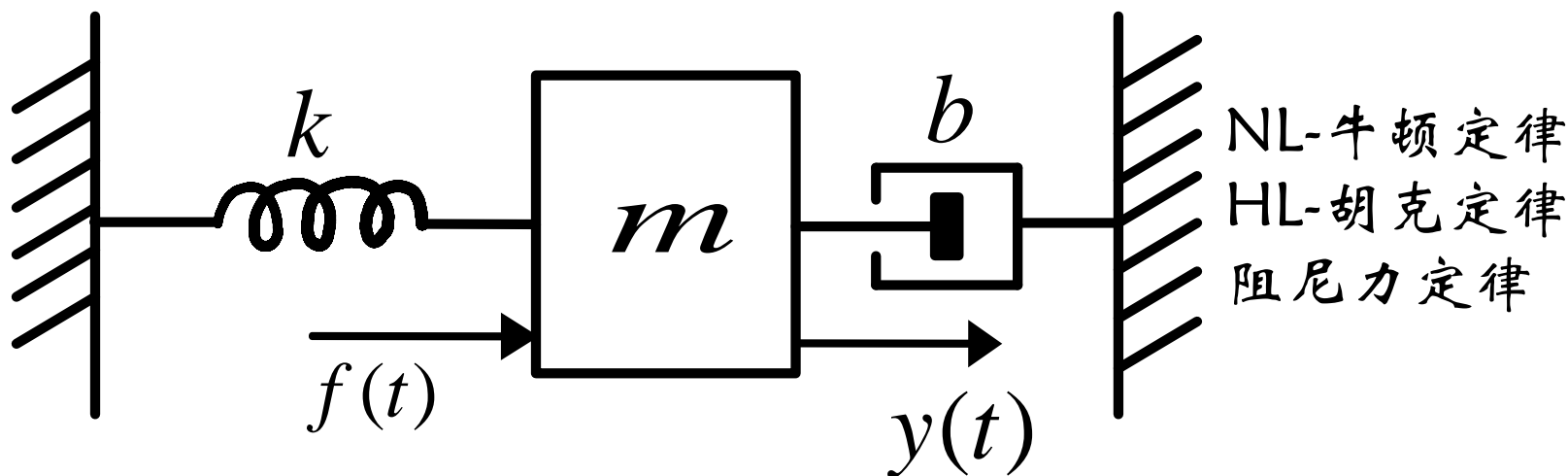


VAR-伏安关系
KL-基尔霍夫定律

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

例：S-M-D系统

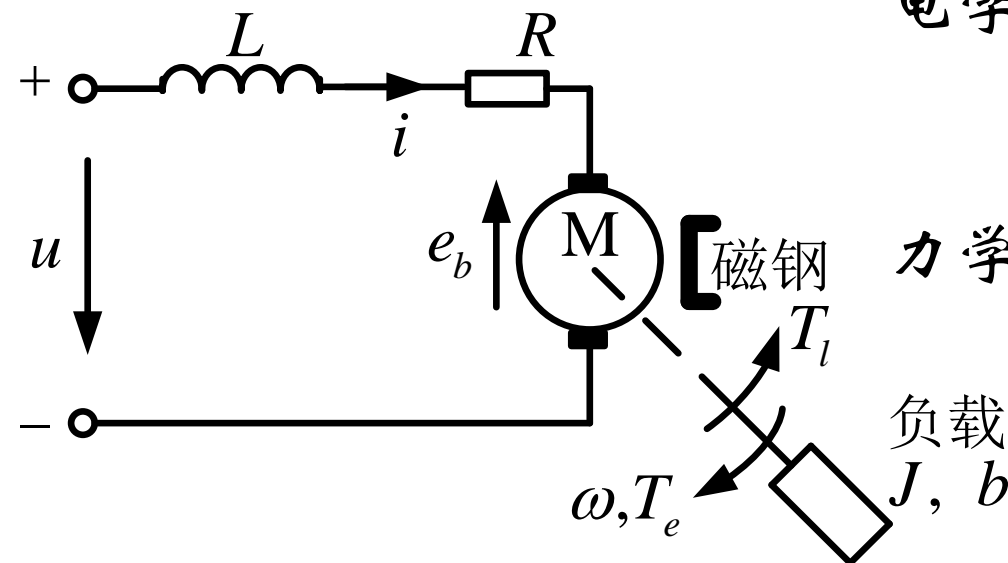
- 写出以外力 f 为输入，以位移 y 为输出的系统微分方程。



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

例：E-M-S

□ 永磁直流电动机驱动系统



电学方程
$$L \frac{di}{dt} + Ri + e_b = u$$

力学方程
$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = k_t i - T_l$$

忽略小项

$$\tau_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_a u - k_c T_l$$

！此系统经常用于理论分析，
并得到一些重要结果。

$$\tau_m \frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_a u(t) - k_c T_l$$

常微分方程表达的线性系统总结

- 在以上三个完全不同的例子中，系统输入和输出之间的微分方程可以变换为**标准二阶线性微分方程**：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = u(t)$$

很多系统可以降阶成二阶系统进行分析和设计

- 一般，n 阶线性系统微分方程模型的一般形式如下：

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ & = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{aligned}$$

这一讲就到这里！



图图网 : tutu001.com

第二讲 非线性系统与其线性化

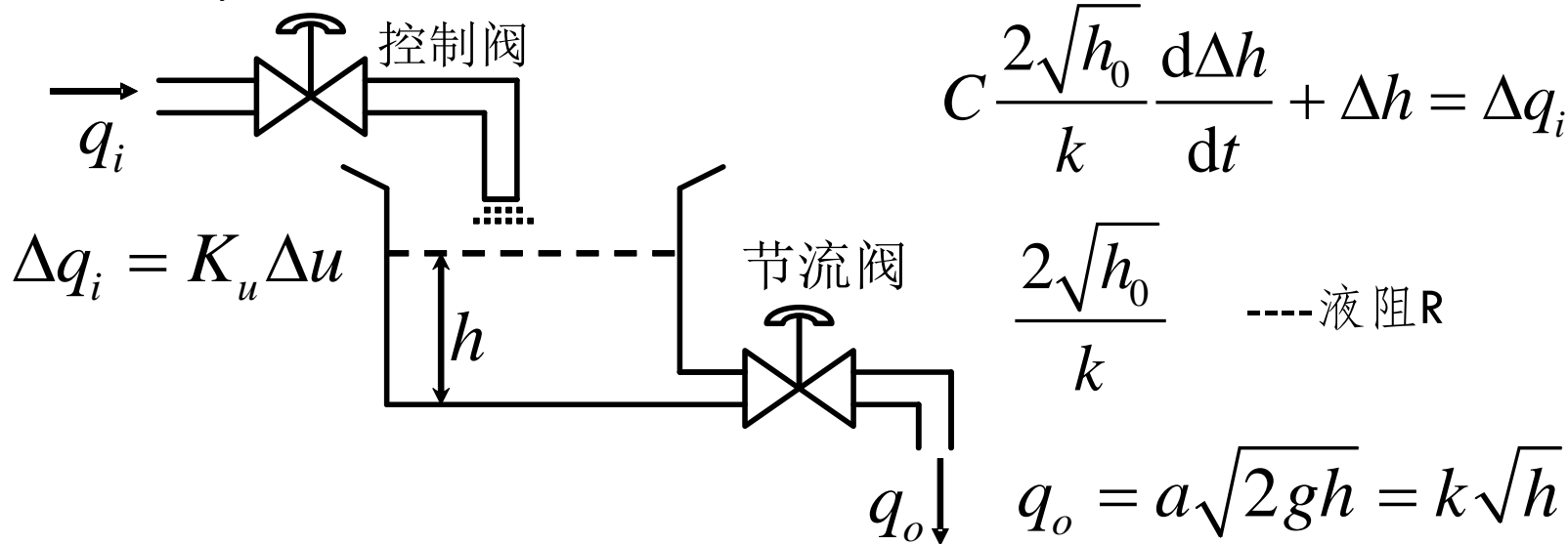
非线性系统存在是具有普遍性的，而线性系统能表征很多种系统在工作点附近的运行特性。非线性系统的线性化有近似线性化和反馈线性化进行研究。前者在平衡点附近将其线性化为线性系统，后者则是利用反馈将其精确性化。本讲关注近似线性化。

关于非线性与近似线性化

- 任何一个元件系统总存在一定程度的非线性。实际动态系统的数学模型都是**非线性**的。
- 但是非线性微分方程没有通用的求解方法。因此在研究系统时总是力图将非线性问题在合理、可能的条件下**简化为线性问题**处理。
- 虽然这种方法是近似的，但它便于分析计算，在许多工作范围内能反映系统的特性，在工程实际中具有重要的意义。

例：单容水槽液位系统

- 考虑控制阀到水槽距离可忽略与不能忽略情况下的单容水槽液位



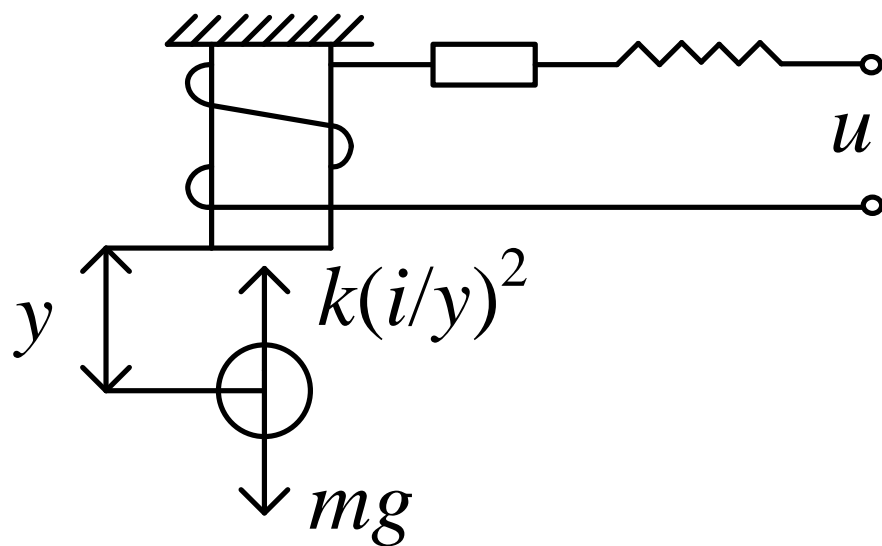
$$\frac{dh}{dt} + \frac{k}{C} \sqrt{h} = \frac{1}{C} q_i \xrightarrow{\text{两边进行Taylor展开}} \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h = \frac{1}{C} \Delta q_i$$

$$\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h = \frac{1}{C} \Delta q_i(t - \tau)$$

若控制阀到水槽距离不可忽略呢？

例：磁浮系统

□ 磁浮球系统通过改变 u 控制球的位置



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - k \left(\frac{i}{y} \right)^2$$

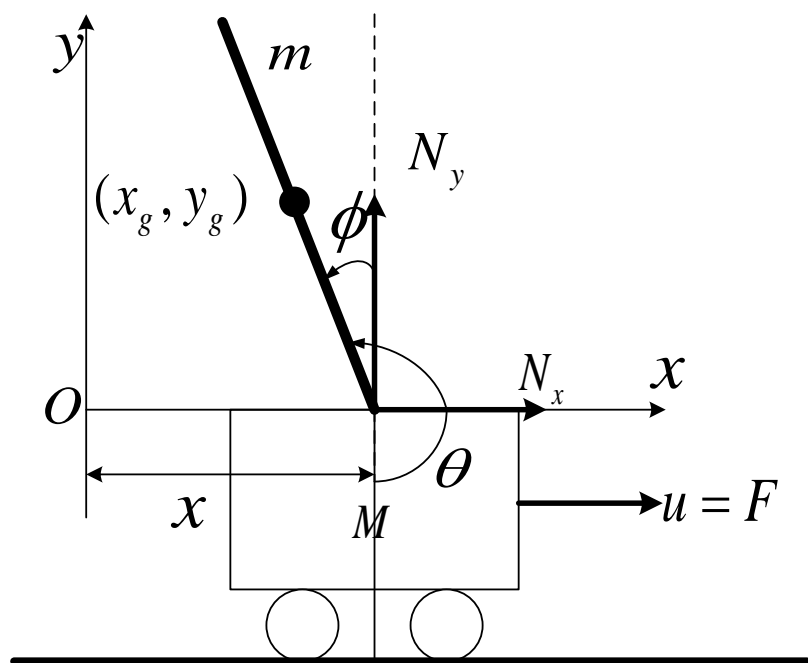
$$s.t. \quad mg = k \left(\frac{i_0}{y_0} \right)^2$$

$$m \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} = -\frac{2Ki_0^2}{x_0^2} \Delta i(t) + \frac{2Ki_0^2}{x_0^3} \Delta y(t)$$

$$L \frac{d\Delta i(t)}{dt} + R\Delta i(t) = \Delta u$$

例：倒立摆系统

- 倒立摆系统，杆长 $2l$ ，摆杆与小车的摩擦系数为 b_1 ，小车与轨道的摩擦系数为 b_2 。



$$(M + m)\ddot{x} + b_2\dot{x} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi = F$$

$$(J + ml^2)\ddot{\phi} + b_1\dot{\phi} - ml\ddot{x} \cos \phi - mgl \sin \phi = 0$$

在工作点附近线性化并忽略摩擦

$$\ddot{x} = \frac{(J + ml^2)u + m^2l^2g\phi - (J + ml^2)b_2\dot{x} - mlb_1\dot{\phi}}{J(M + m) + Mml^2}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(M + m)mgl\phi + mlu - mlb_2\dot{x} - (M + m)b_1\dot{\phi}}{J(M + m) + Mml^2}$$

总结微分方程的线性化过程

设有非线性微分方程 $F(y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y, u^m, u^{(m-1)}, \dots, u) = 0$

设 $u = u_0, y = y_0$ 是系统的平衡点

所以 $F(0, 0, \dots, y_0, 0, 0, \dots, u_0) = 0$

将非线性微分方程在 (u_0, y_0) 邻域线性化

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta F}{\delta y^{(n)}} \right|_0 \partial y^{(n)} + \left. \frac{\delta F}{\delta y^{(n-1)}} \right|_0 \partial y^{(n-1)} + \dots + \left. \frac{dF}{dy} \right|_0 \partial y \\ & + \left. \frac{dF}{du^{(m)}} \right|_0 \partial u^{(m)} + \left. \frac{dF}{du^{(m-1)}} \right|_0 \partial u^{(m-1)} + \dots + \left. \frac{dF}{du} \right|_0 \partial u = 0 \end{aligned}$$



微分方程可线性化的说明

- 线性化的实质是采用线性一次函数替代原非本质非线性函数。
- 可线性化的条件(三条):
 - ▣ 系统正常工作状态至少有一个稳定工作点。
 - ▣ 在运行过程中偏量满足小偏差。
 - ▣ 只含非本质非线性函数，要求函数单值、连续、光滑。
- 平衡点附近的线性化是局部的。

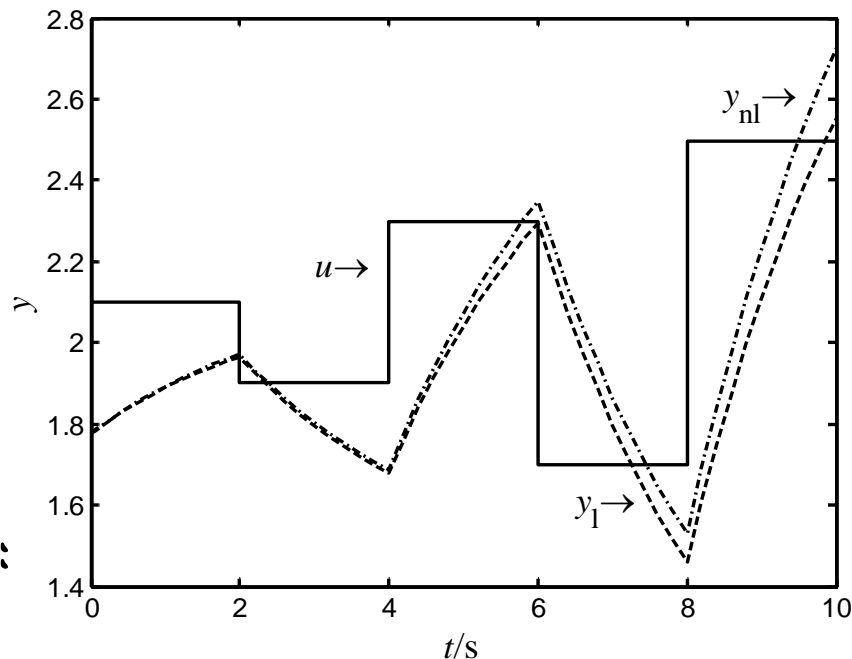
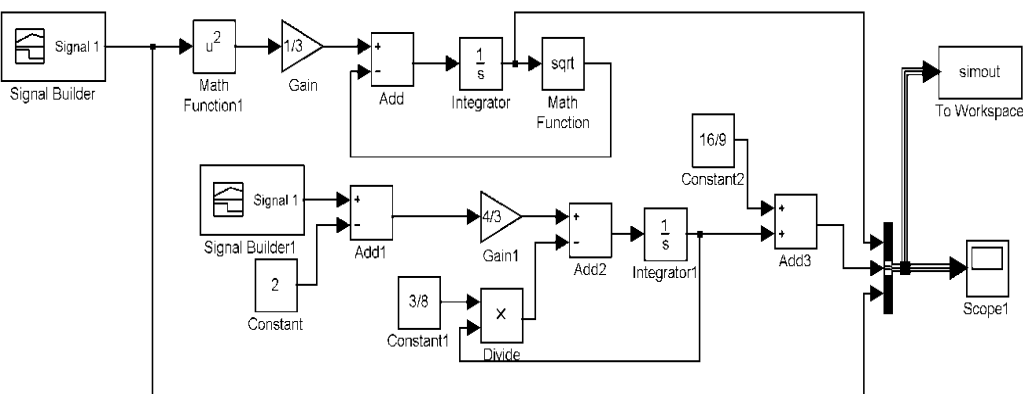
线性化后响应差别

- 考虑如下的非线性系统，输入 $u_Q=2$ 是控制平衡点，试对系统进行线性化。

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{x(t)} + \frac{u^2(t)}{3}, y(t) = x(t)$$

$$u_Q = 2 \Rightarrow x_Q = 16/9$$

$$\frac{d\delta_x}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{x_Q}}\delta_x + \frac{2u_Q}{3}\delta_u = -\frac{3}{8}\delta_x + \frac{4}{3}\delta_u$$



线性化误差取决于远离工作点的程度：
越远，误差越大。

这一讲就到这里！



图图网 : tutu001.com

第三讲 CLTI系统I/O模型与响应

对于一个线性系统，如果构成系统的部件很多，建立微分方程模型的过程就显得非常繁杂，有时甚至不可能。此时可以通过输入与输出建立模型，特别是**输入是冲激信号情况下的模型**具有重要意义。

时不变线性系统I/O模型三点

□ 时不变 (Time Invariant)

- ▣ 系统与时间原点的平移无关 → 系统参数是定常的。

□ 线性叠加性 (Linear Superposition)

- ▣ 若 (u_1, y_1) 和 (u_2, y_2) 是系统I/O对, a 和 b 为实数, 则 $(au_1 + bu_2, ay_1 + by_2)$ 也是系统I/O对。

□ 因果性 (Causality)

- ▣ 系统在 t_0 时刻的输出只与 $t \leq t_0$ 时刻的输入有关, 即系统的输出是延迟于输入的。

时不变线性系统响应的卷积模型

- 系统在 t 时刻的加权输出表为

$$y(t) = \sum_{k=1}^n u(\tau_k) g(t - \tau_k)$$

- “加密” τ , 得

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- 考虑到 $\tau > t$ 时, 输入并未产生作用, 故

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (*)$$

- 取 $u(t) = \delta(t)$, 则 $y(t) = g(t)$ 是冲激响应, 系统零初始条件下在任意信号 $u(t)$ 下的输出便可由(*)直接卷积计算。



卷积计算响应例

- 某线性时不变系统零初始条件下的冲激响应为 $g(t) = e^{-2t}$ ，求系统输入为 $u(t) = t + 1$ 时的响应。



□ 解：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-2\tau} (t - \tau + 1) d\tau \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} (1 + e^{-2t}) \end{aligned}$$

冲激响应反映了
系统的I/O关系！



这一讲就到这里！



第四讲 CLTI系统(复)频域模型

作为系统时域的ODE模型，对于高阶数系统的研究很不方便，而I/O卷积模型也不方便使用。利用Fourier积分变换与Laplace积分变换可以将分析运算转化成代数运算，方便了系统分析。

CLTI系统的频域模型

- 能量有限输入信号的傅立叶反变换

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} [U(i\omega)\Delta\omega] \cdot e^{i\omega t}$$

- 当输入为 $u_d(t) = e^{i\omega t}$, 输出为

系统脉冲响应

$$y_d(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = e^{i\omega t} \left[\int_0^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = e^{i\omega t} G(i\omega)$$

- 于是, 根据叠加原理, 当输入为 $u(t)$ 时, 输出为

$$y(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} [U(i\omega)\Delta\omega] \cdot e^{i\omega t} \cdot G(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(i\omega) G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$U(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \quad G(i\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad Y(i\omega) = U(i\omega) \cdot G(i\omega)$$

- 频域模型是通过系统对不同频率正弦信号的响应, 得到系统对任意信号的响应。

CLTI系统的复频域模型

- 傅立叶变换在收敛性必须满足Dirichlet条件→限制了一些增长性函数变换的存在，拉普拉斯变换拓展了可变换函数的范围。
- 由频域到复频域

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} [f(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$
$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$
$$\xrightarrow{ds=d\sigma+jd\omega, \sigma \text{ 是选定常量}} f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = L^{-1}(F(s))$$

- Laplace变换建立了时域与复频域的联系，衰减因子的引入是关键问题。从物理上看，s不仅能给出重复频率还可以表示振荡幅度的衰减速率。

CLTI的卷积算子与复频域关系

- 卷积与Laplace变换间的关系

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- LTI系统的卷积算子及其复频率表示式是联系时域分析与频域分析的纽带，由此，时域法与频域法得到统一。
- $G(s)$ 称为输入到输出的传递函数，表征了不同频率的变增益特性。
- 传递函数可以直接由定常线性微分方程两边取Laplace变换得到。

这一讲就到这里！



图图网 : tutu001.com

第五讲 CLTI系统传递函数

CLTIS传递函数表征了系统的输入输出关系，它可以**直接由定常线性微分方程两边取Laplace变换得到**，它表征了**不同频率的变增益特性**。传递函数中蕴含着系统的**响应特性与稳定性**。

CLTIS的传递函数

□ CLTIS微分方程为

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{aligned}$$

□ 在零初始条件下对其作拉普拉斯变换得到

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$



$$Y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s)$$

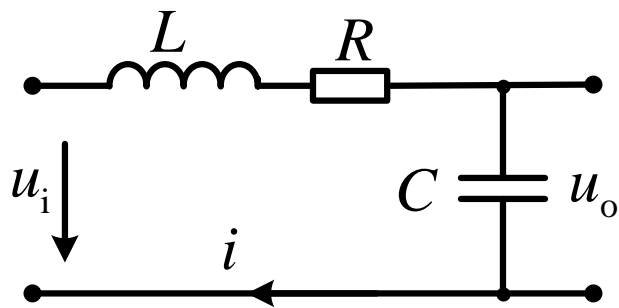
$$Y(s) = \quad \downarrow \quad G(s) \quad \cdot U(s)$$

Transfer function

求传递函数例1、2

传递函数是类似的，表明这两个系统有相同的特性，但参数是不一样的。

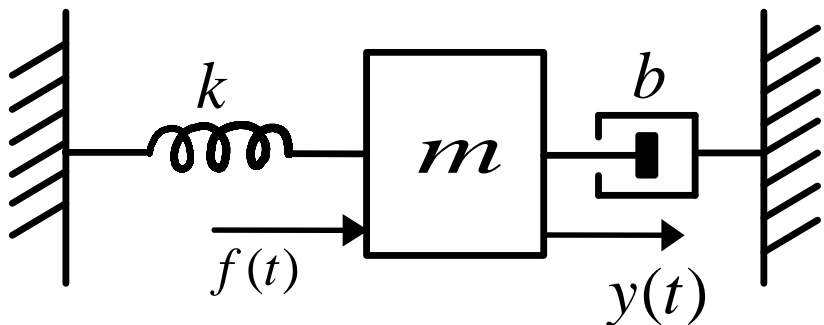
- 1、输入电压与输出电压之间的传递函数。



$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 2、以外力 f 为输入，以位移 y 为输出的传递函数。

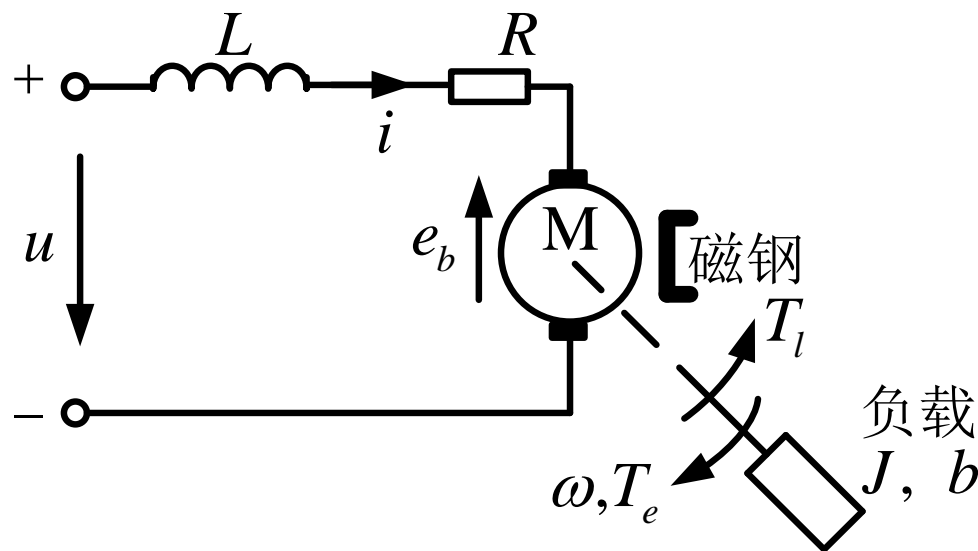


$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

求传递函数例3

□ 3、永磁直流电动机驱动系统



说明同一个系统，
不同的输入对输出其传递函数是
不一样的。

$$\tau_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_a u - k_c T_l$$

$$\tau_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_a u(t) - k_c T_l$$

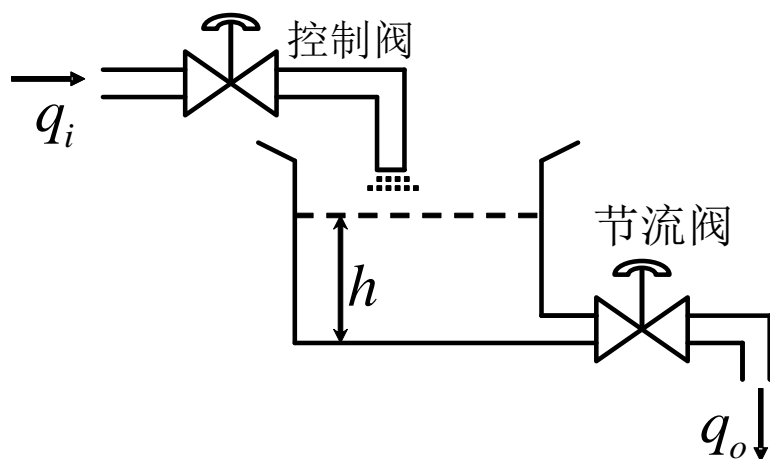


$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_a}{\tau_m s^2 + s}$$

$$\frac{\Theta(s)}{T_l(s)} = \frac{-k_c}{\tau_m s^2 + s}$$

求传递函数例4

□ 4、写出考虑延迟的单容水槽传递函数



$$\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{k}{A} \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h = \frac{1}{A} \Delta q_i(t - \tau)$$

$$G(s) = \frac{1}{(As + k/2\sqrt{h_0})} e^{-\tau s}$$

典型的惯性环节

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)} e^{-\tau s}$$

加热炉也是这种形式!

传递函数说明

- 是复变量 s 的有理分式, $n \geq m$ (因果)。
- 取决于系统 **结构** 和 **参数**, 与 **输入信号** 和 **初始条件** 无关。
- 其Laplace反变换就是系统的 **冲激响应**。
- 与描述它的常微分方程有直接的一一对应关系。
- 只适用于LTI系统(包括离散情况)。
- 分母多项式=0 \rightarrow **零点**; 分母多项式=0称为特征方程 \rightarrow **极点**
- 不反映内部的任何信息, 可用方框图表示。
- 与微分方程有相通性, $s=d/dt$

□ 标准式

零极点式 $G(s) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$

静态增益

时间常数式

$G(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)}$

位置增益

速度增益

加速度增益

传递函数与微分方程转换与分析例

□ 已知系统的传递函数为 $G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)(s^2+s+1)}$

(1) 求系统的微分方程；

(2) 求传递函数的零极点标准式和时间常数标准式。

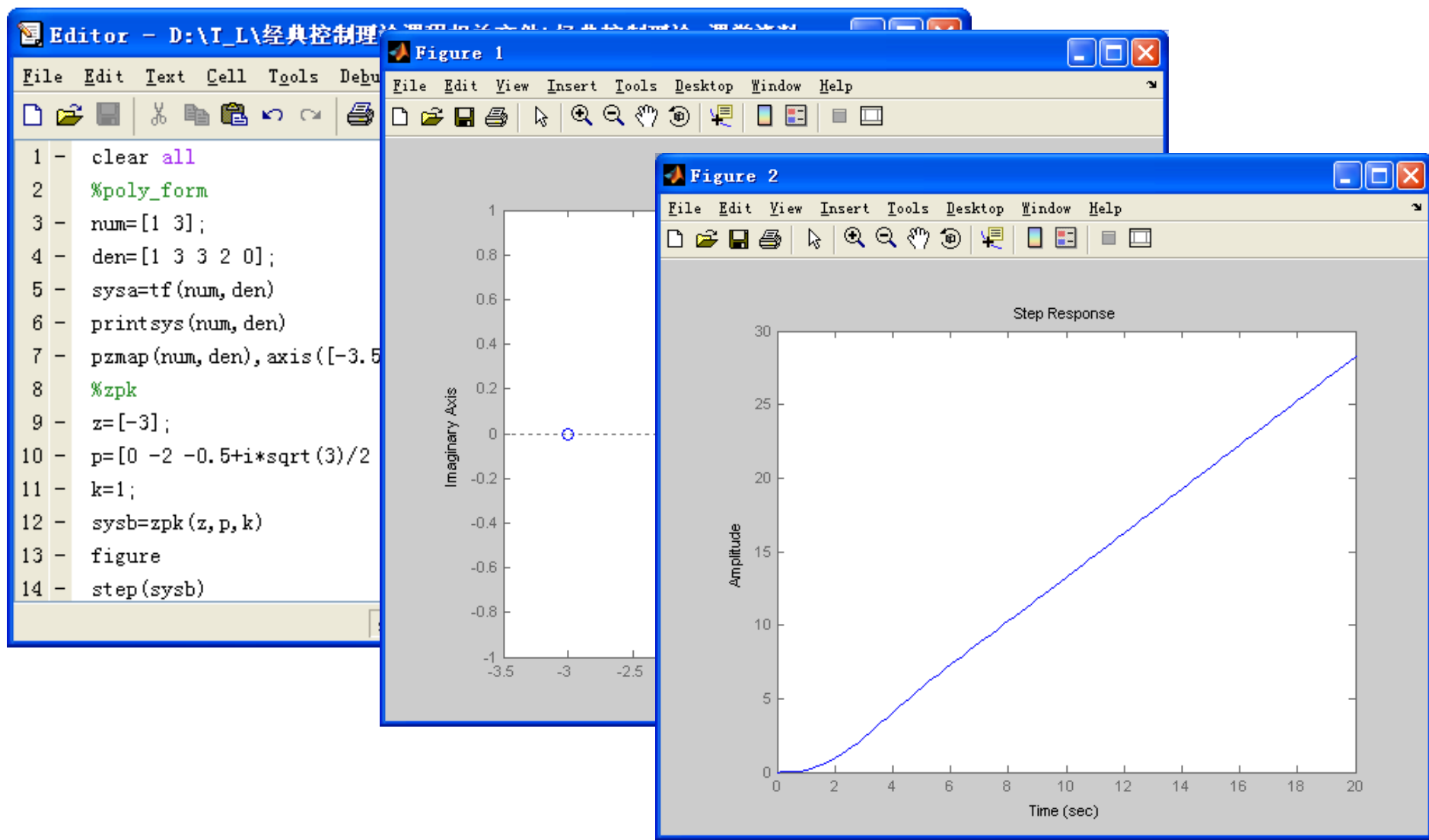
(3) 求静态增益 K 是什么？

(4) 在 MATLAB 中绘制零极点图与阶跃响应图。

$$G(s) = \frac{s+3}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s} \Rightarrow \ddot{y} + 3\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = \dot{u} + 3u$$

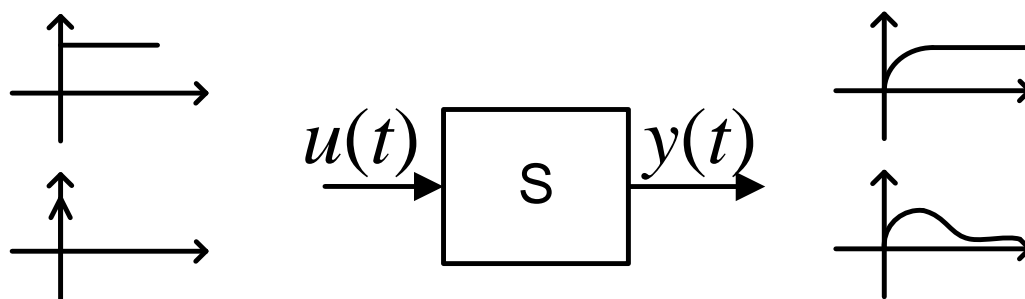
$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)(s+0.5+i\frac{\sqrt{3}}{2})(s+0.5-i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}K} \frac{(\frac{1}{3}s+1)}{s(\frac{1}{2}s+1)(s^2+s+1)}$$

传递函数与微分方程转换与分析例续

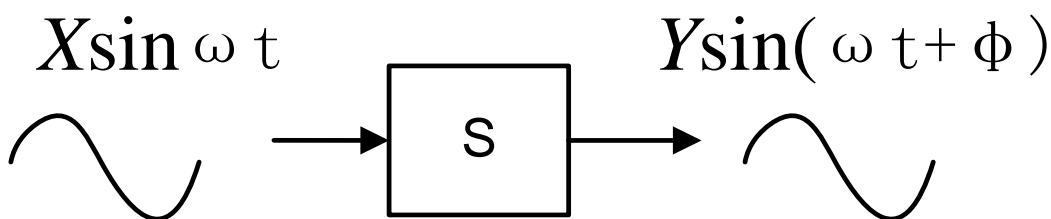


CLTIS的模型辨识

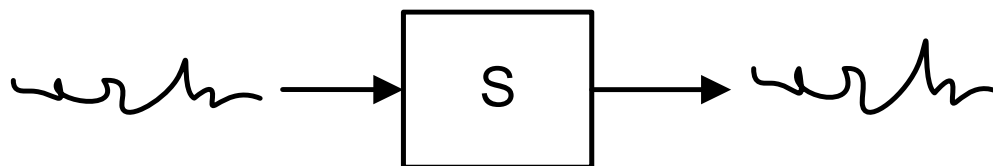
□ 时域测定法



□ 频域测定法



□ 统计相关测定法



课外练习

- 求静态增益与ZPK表达式以及微分方程

$$G(s) = \frac{2s^2 + 14s + 12}{s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 18s}$$

这一讲就到这里！



图图网 : tutu001.com

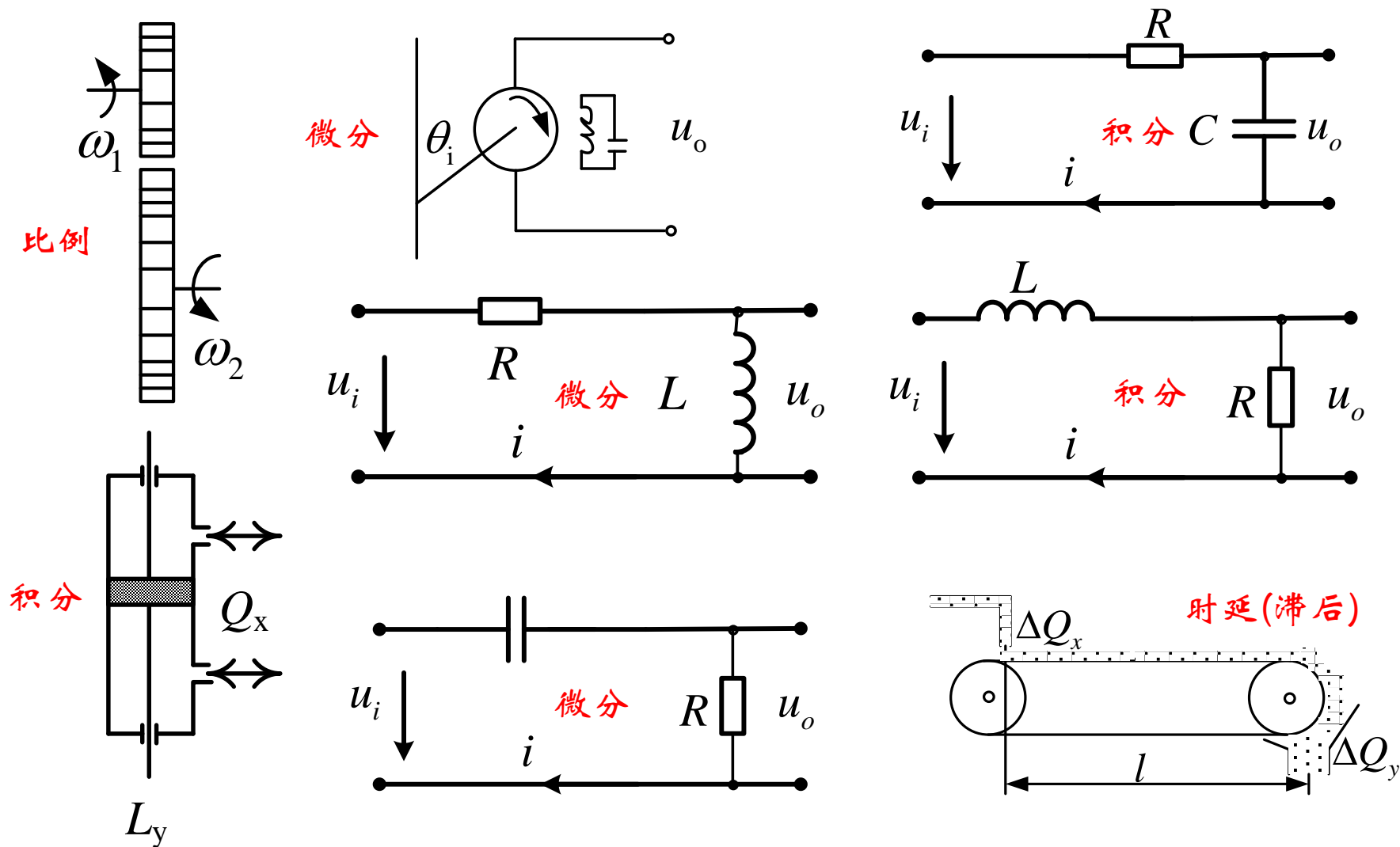
第六讲 典型环节与负载效应

典型环节包括比例、微分、积分、惯性、振荡、时延等环节。环节的输出信号可能与所带负载相关，此时便产生了负载效应。从控制理论的观点看，无负载效应的环节才是一个理想环节。

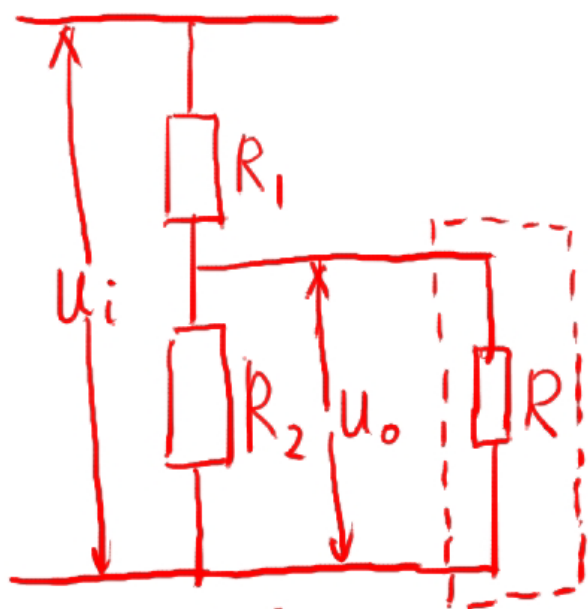
典型环节

典型环节	时间函数模型	传递函数
比例环节	$y = ku$	k
微分环节	$y = \frac{du}{dt}$	s
积分环节	$y = \int_0^t u(\tau) d\tau$	$1/s$
惯性环节	$T \frac{dy}{dt} + y = u$	$\frac{1}{Ts + 1}$
振荡环节	$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u \quad 0 \leq \zeta \leq 1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
时延环节	$y = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$

思考：下面各系统是什么环节？



环节的负载效应--从无源到有源



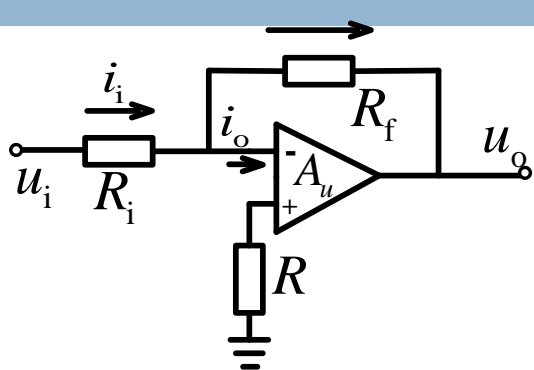
$$G_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R}}$$

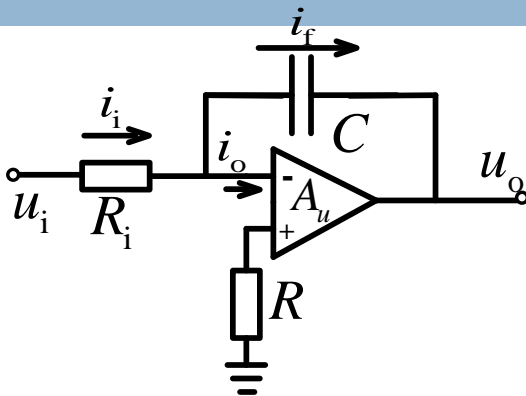
$R \rightarrow \infty \quad G_2 = G_1$

- 如果环节的输出信号仅取决于输入信号及环节本身的结构与参数，而与环节的外接负载无关，则称为无负载效应的环节，反之，称为**有负载效应的环节**。
- 从控制理论的观点看，无负载效应的环节才是一个理想环节。
- 如何消除这种负载效应？加隔离放大器。

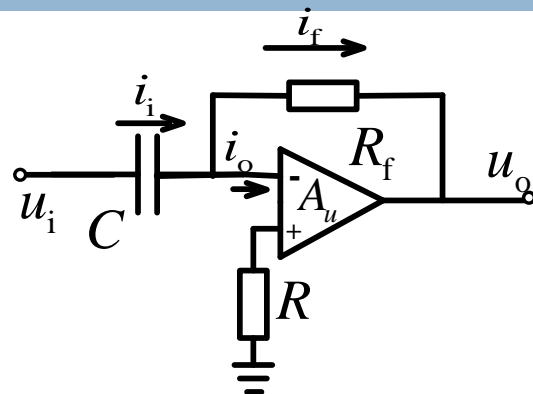
由有源放大器构成的环节——消除负载效应



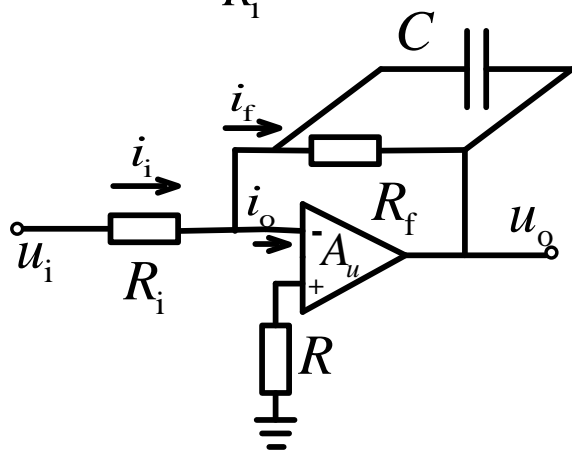
$$u_o = -\frac{R_f}{R_i} u_i$$



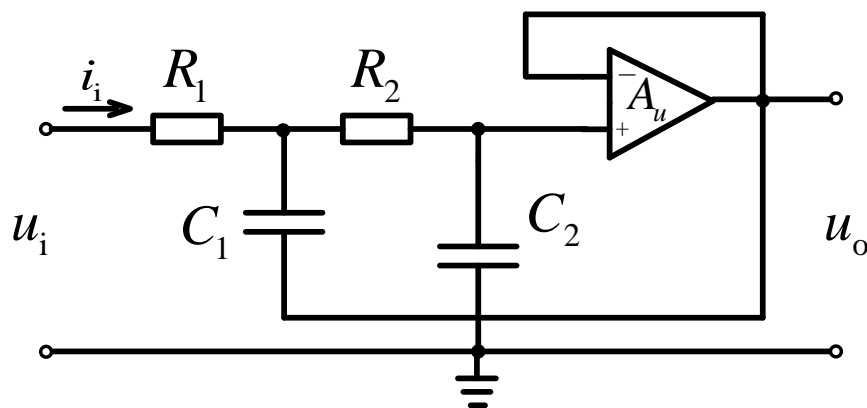
$$G(s) = -\frac{1}{R_i C s}$$



$$G(s) = -R_f C s$$

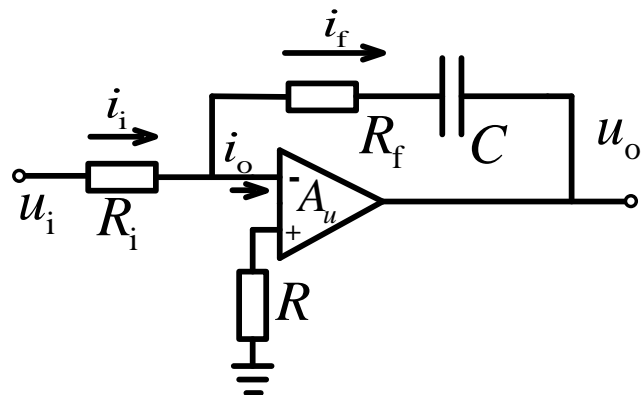


$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

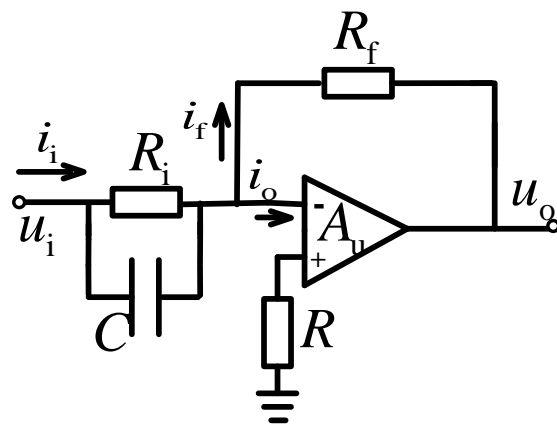


$$G(s) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_2 + \tau_{12}) s + 1}$$

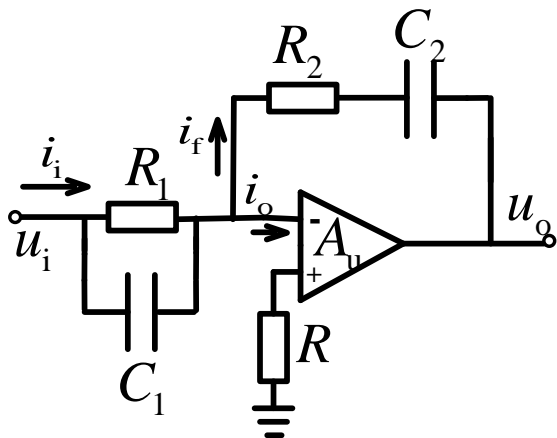
有源放大器构成PID控制器



$$G(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$$



$$G(s) = K(1 + T_d s)$$



$$G(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

这一讲就到这里！

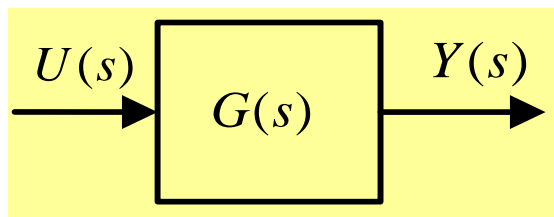


第七讲 结构图与简化

结构图可以很形象地表示部分与整体的关系，并建立部分与部分间的约束。通过对结构图的简化，达到对模型的简化与整理，容易得到系统的输入输出传递函数。

结构图与系统互联

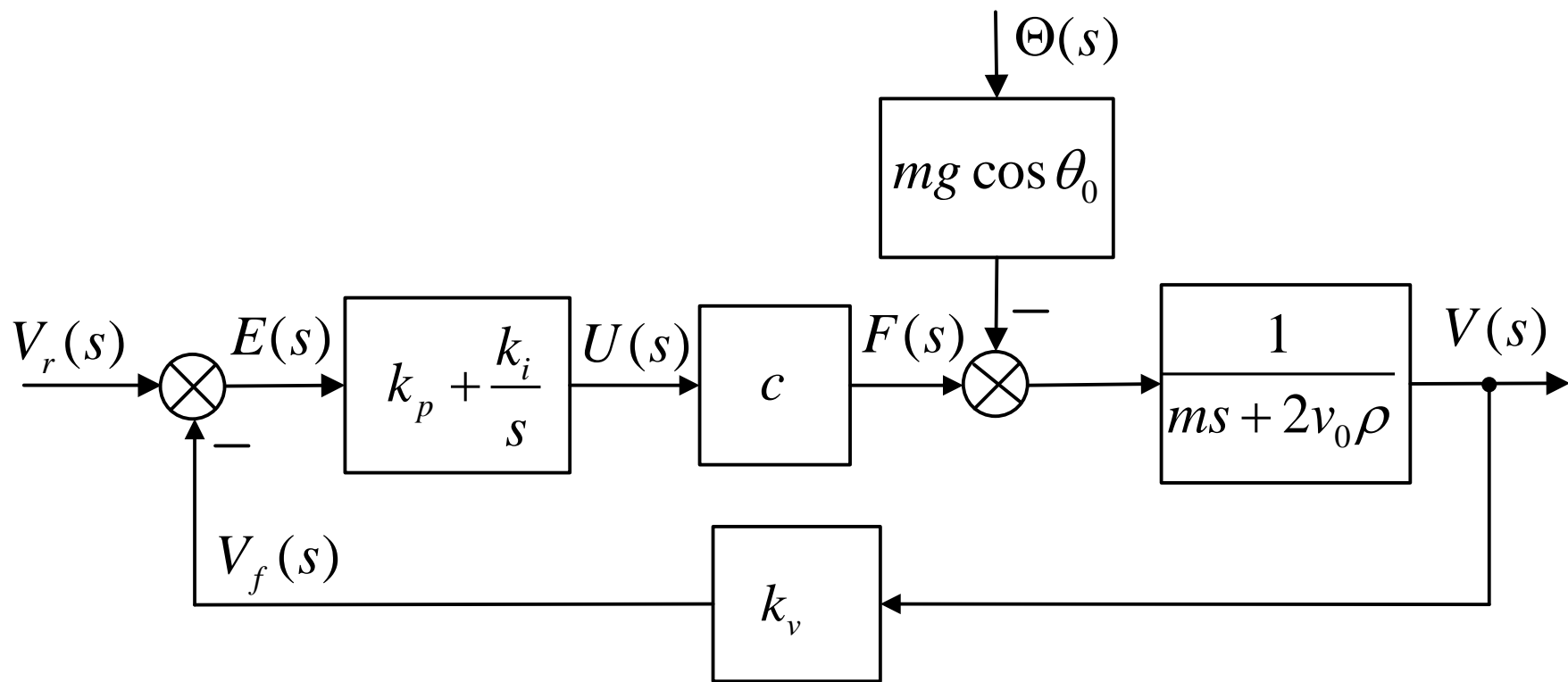
- 复杂系统通常是由若干简单子系统构成。
- 在进行系统分析时，常需要按系统功能将系统分解为简单子系统。在进行系统设计时，通常需要将已经设计好的子系统联结起来。
- 结构图是图形化的数学模型，是研究系统互联的有力工具。
- 结构图的两端分别是输入和输出信号的拉普拉斯变换，方框中是系统的传递函数。



- 结构图(方框图)建模工具MATLAB/Simulink。

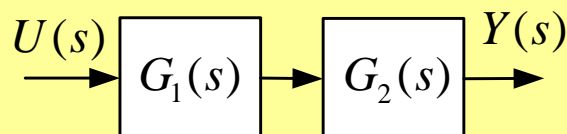
结构图及系统互联之例

□ 汽车定速巡航控制系统的结构图

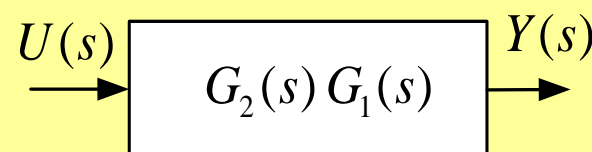


结构图互联形式(观察特点)

□ 串联

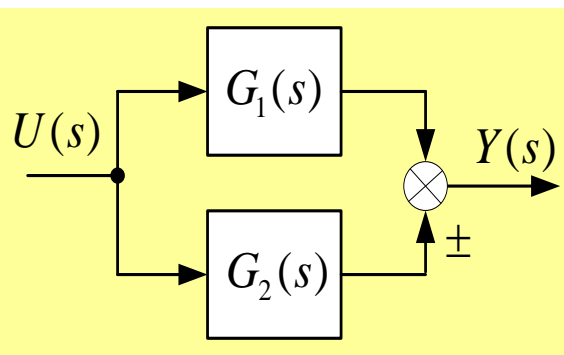


`[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)`

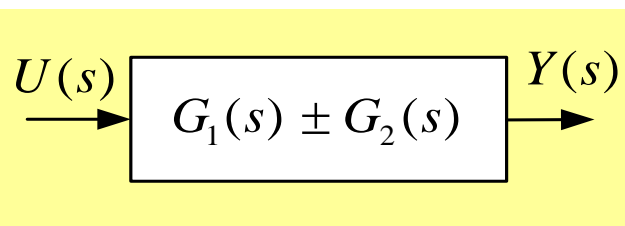


$$G = G_1 \cdot G_2$$

□ 并联

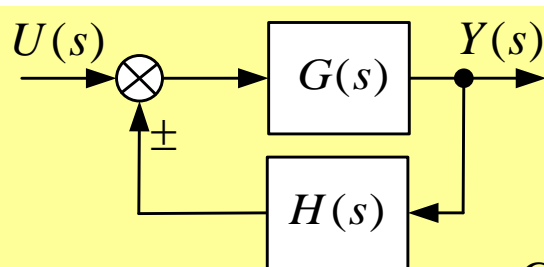


`[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)`

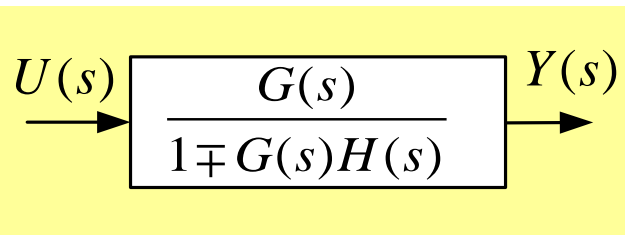


$$G = G_1 \pm G_2$$

□ 反馈



`G=feedback(G1,G1,sign)`



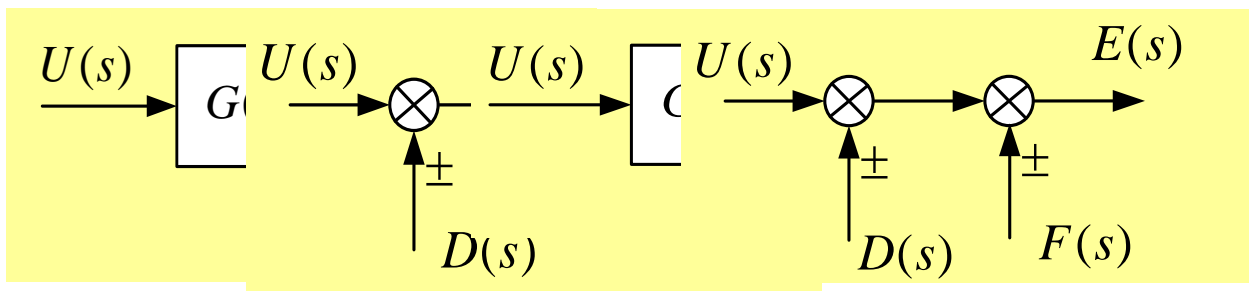
`[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den1,sign)`

所有的结构图均由上述三种基本形式构成。

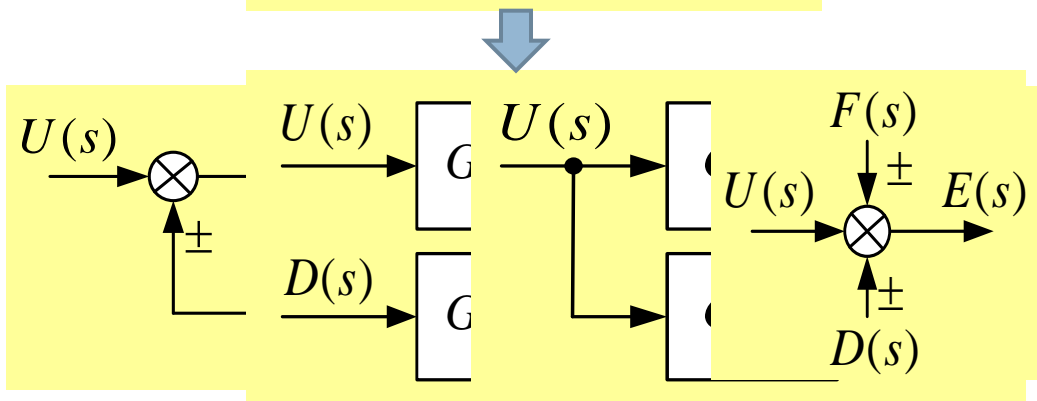
结构图等效变换

- 结构图可按照一定的规则进行等效变换，从而将复杂的结构变换为简单的结构。但是必须注意，这种变换是传递函数意义上的等效。

- ## 综合点前移



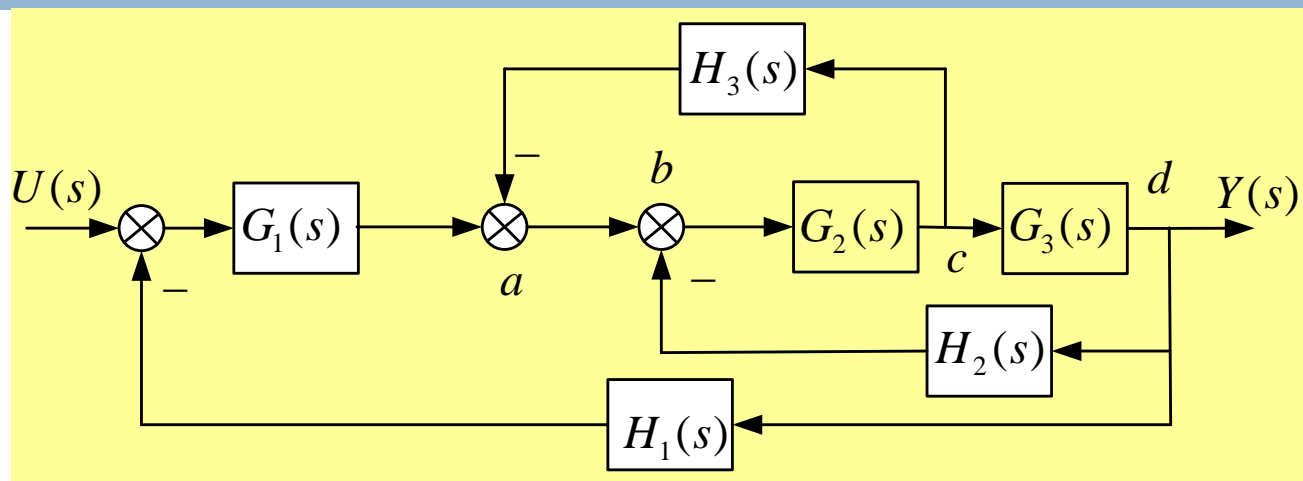
- ## □ 綜合点后移



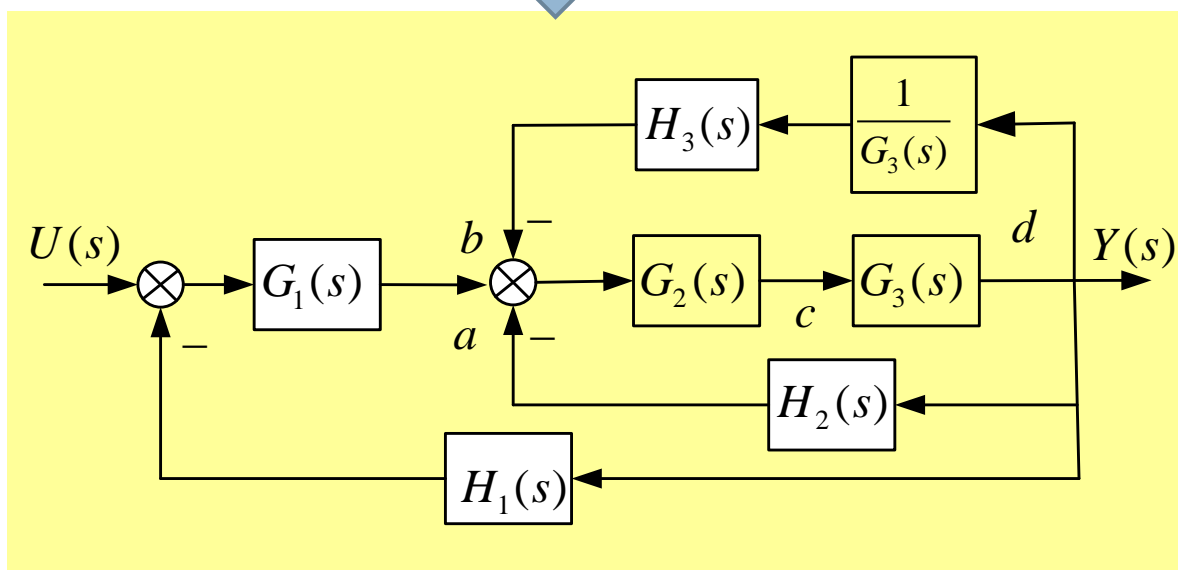
- ## □ 引出点前移

- ## □ 綜合点合并

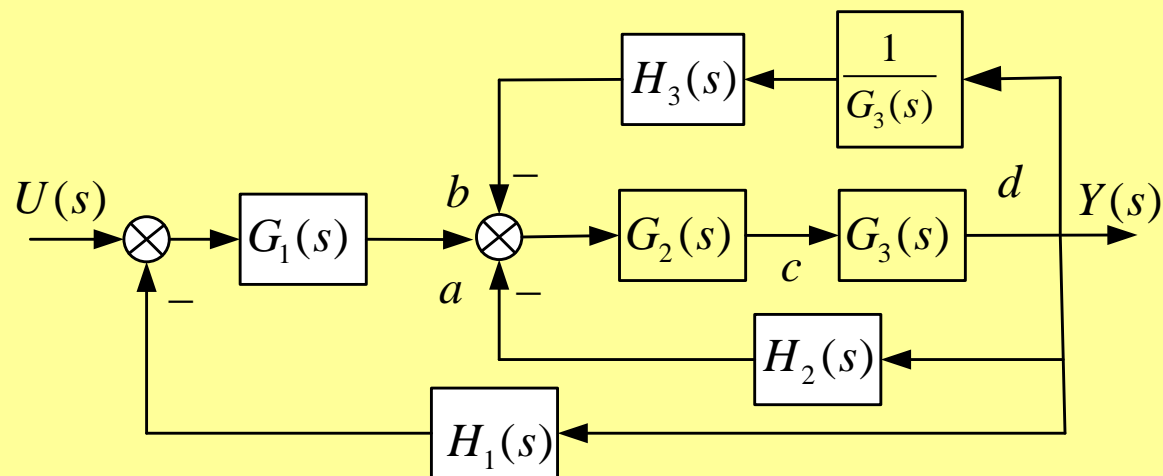
结构图的等效变换求传递函数例-1



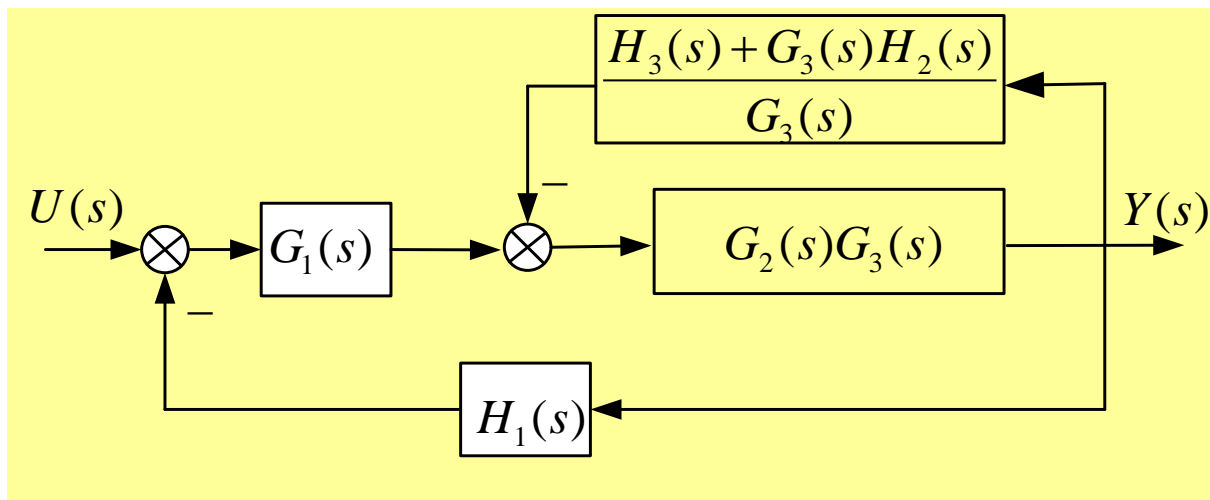
引出点 c 后移至 d , 综合点 a 与 b 合并



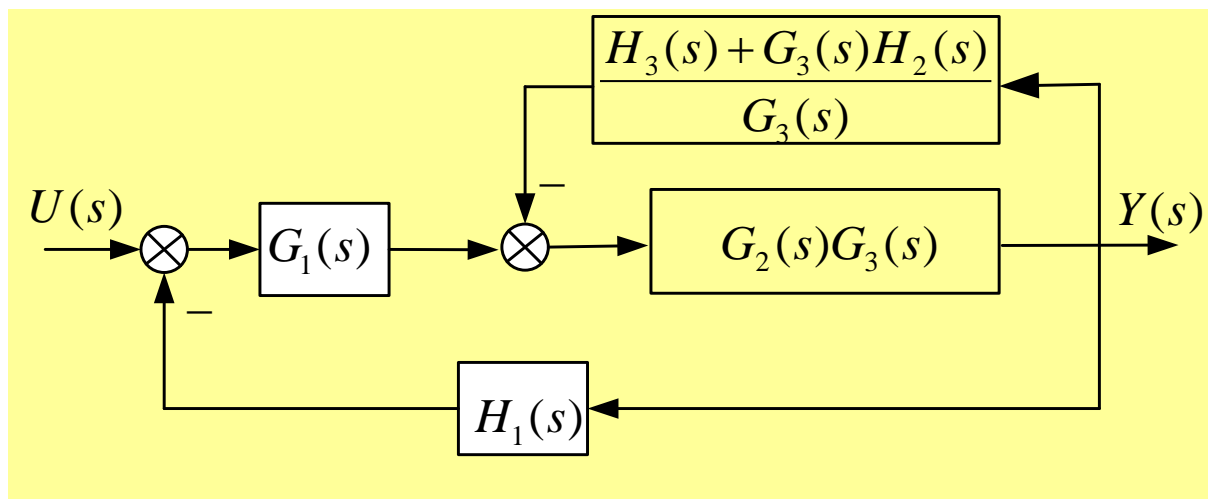
结构图的等效变换求传递函数例-2



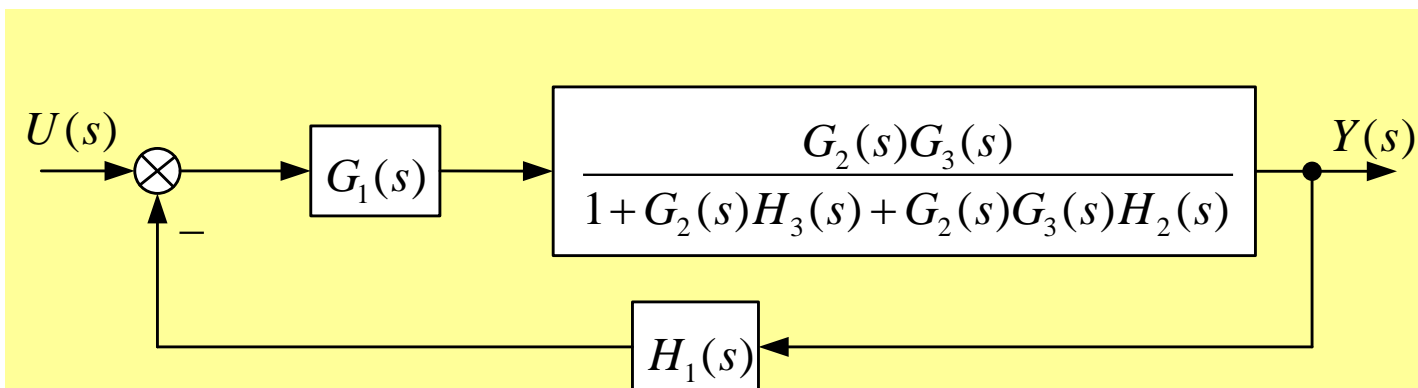
合并串联和并联项



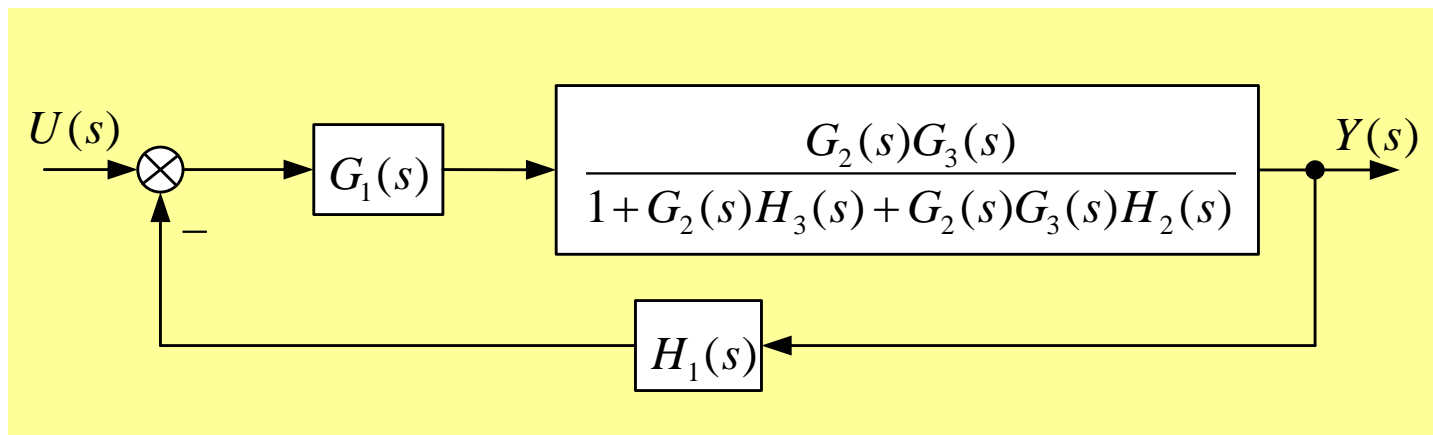
结构图的等效变换求传递函数例-3



合并反馈回路



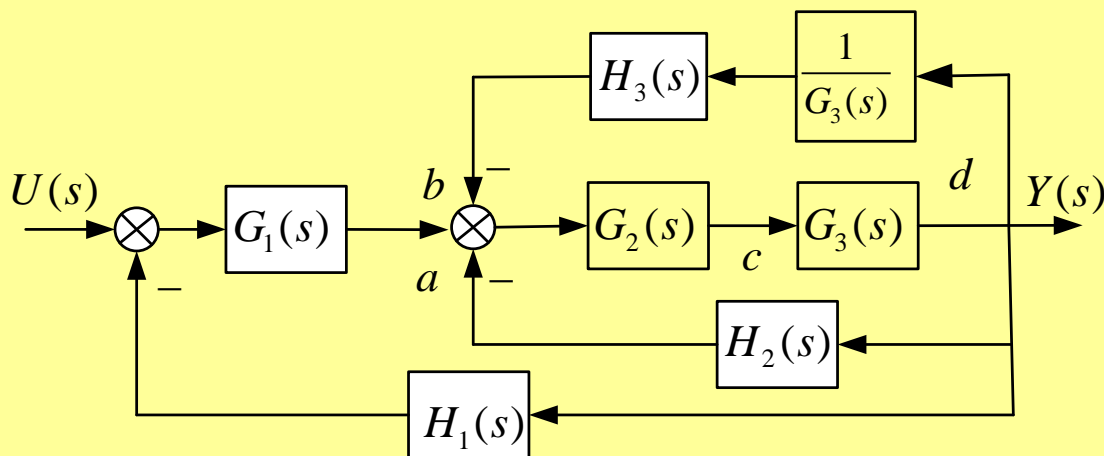
结构图的等效变换求传递函数例-4



系统的闭环传递函数

$$G_{yu}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)}$$

用MATLAB处理互联问题



总的传递函数 = $\frac{\text{前向通道传递函数}}{1 \mp \text{开环传递函数}}$

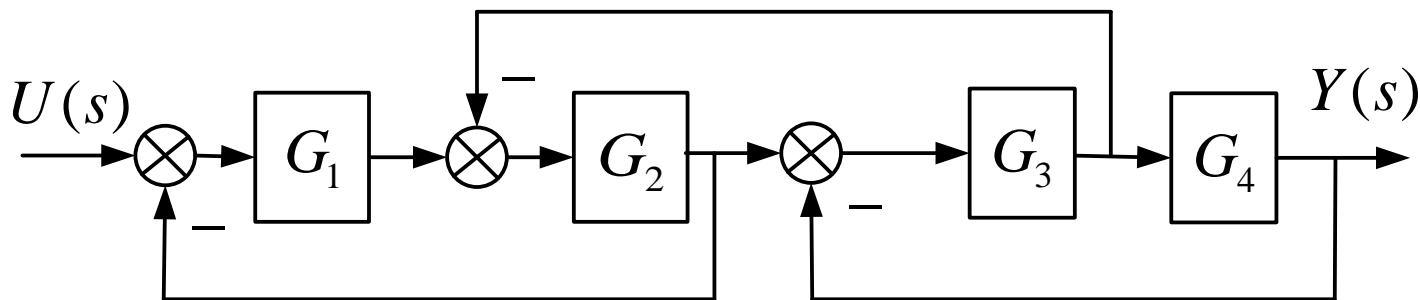
闭环系统的零点由前向通道传递函数零点和反馈通道的极点两部分构成。

```
Editor - D:\Pr...
File Edit Text Cell >> > > X
Base >>
1 - G1=tf([],[]);
2 - G2=tf([],[]);
3 - G3=tf([],[]);
4 - H1=tf([],[]);
5 - H2=tf([],[]);
6 - H3=tf([],[]);
7 - H4=tf([],[]);
8 - H5=tf([],[]);
9 - U=H3*(1/G3);
10 - M=G3*G2;
11 - D=H2+U;
12 - Z=feedback(M,D,-1);
13 - E=Z*G1;
14 - T=feedback(E,H1,-1);

tf_zpk_pzmap.m x series_parallel
Ln 15 Col 1 OVR
```


课外练习

□ 利用等效变换化简化



答案：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

这一讲就到这里！

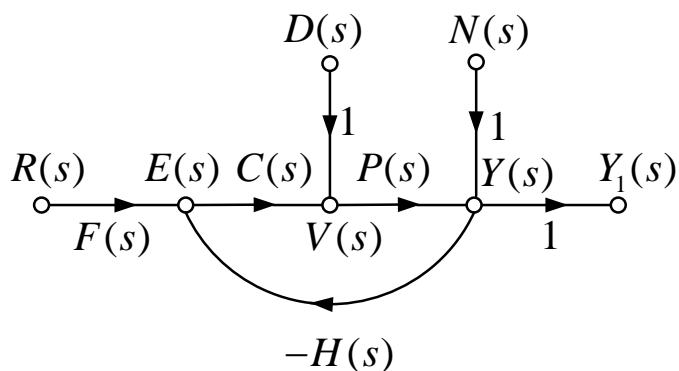


第八讲 信号流图与传递函数求取

对关联比较复杂的互联系统，结构图化简较为琐碎甚至难以完成，信号流图法求取传递函数是规则的数学方法。

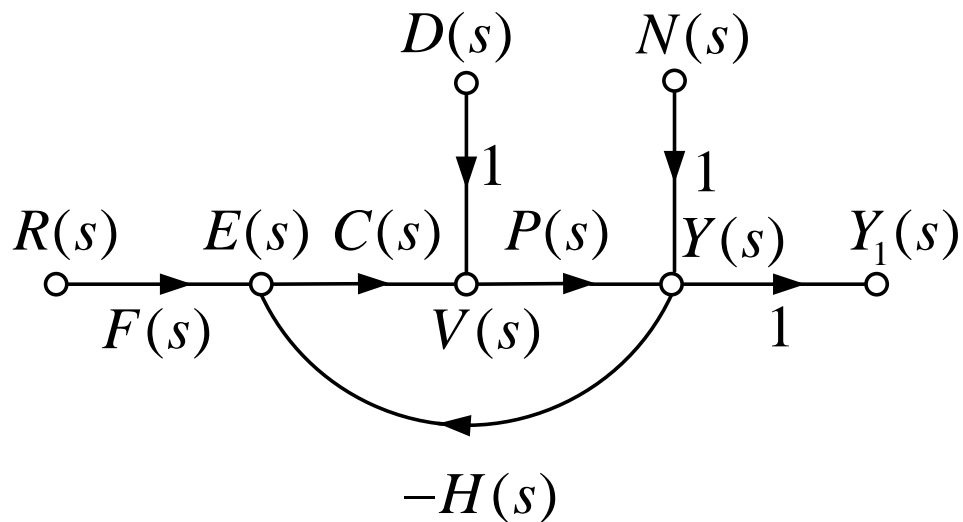
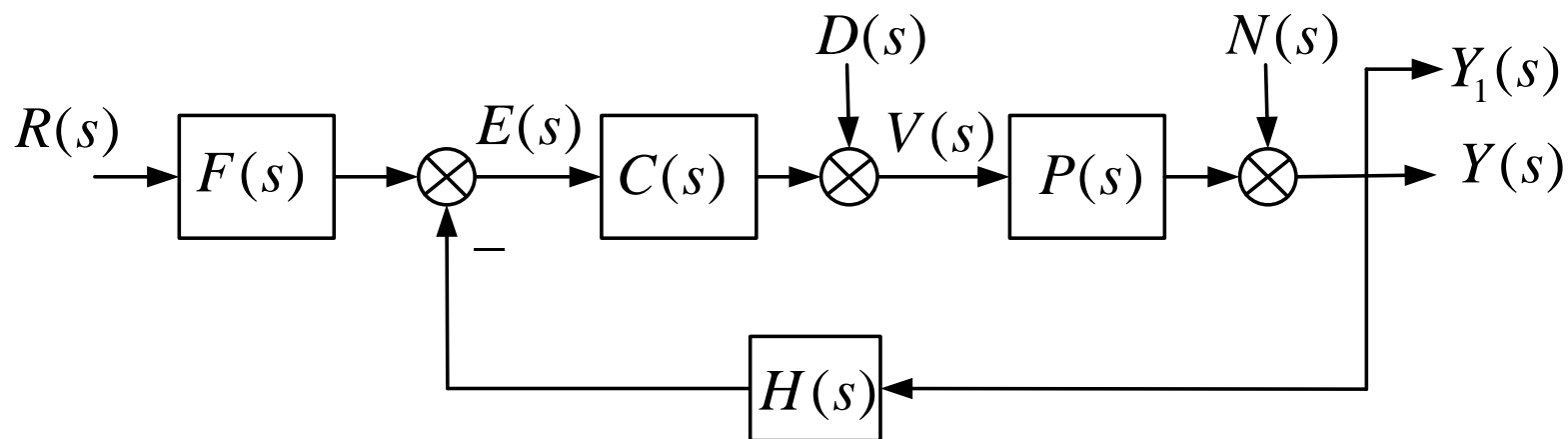
信号流的相关术语与画法

- 节点：源节点、输出(汇)节点、混合(综合)节点
- 支路与支路增益
- 通路：开通道与回路
- 前向通路与其增益
- 回路与其增益
- 不接触回路：没有任何共同节点的回路



- 节点代表变量，支路代表环节。在混合节点处，输出支路的信号等于各输入支路信号的叠加。
- 信号只能沿着支路的箭头方向传输。
- 由方框图到信号流图，有些中间变量可以不表示出来，但位于综合点前有引出的变量必须表示出来，用单位增益支路将它们分开。
- c. 输入端后若是混合节点，需增加单位传输支路将源节点表示出来。
- d. 输出端前若是混合节点，需增加单位传输的支路把混合节点化为汇节点。

由结构图得到信号流图例



信号流图的性质

- 信号流图实际上表示了一个线性代数方程。
- 对同一个系统，信号流图的形式不是唯一的。
- 信号流图的简化从下面四个方面进行：
 - ▣ a. 串联支路的总传输等于各支路传输之乘积。
 - ▣ b. 并联支路的总传输等于各支路传输之和。
 - ▣ c. 混合节点可以通过移动支路的方法消去。
 - ▣ d. 回环可以根据反馈联接的规则化为等效支路。

Mason公式

- Mason公式依据图是信号流图，在计及信号流图的画法约定情况下，信号流图与结构图一一对应。
- 找出信号流图中的回路与互不接触的回图以及前向通路后，便可以利用Mason公式求传递函数

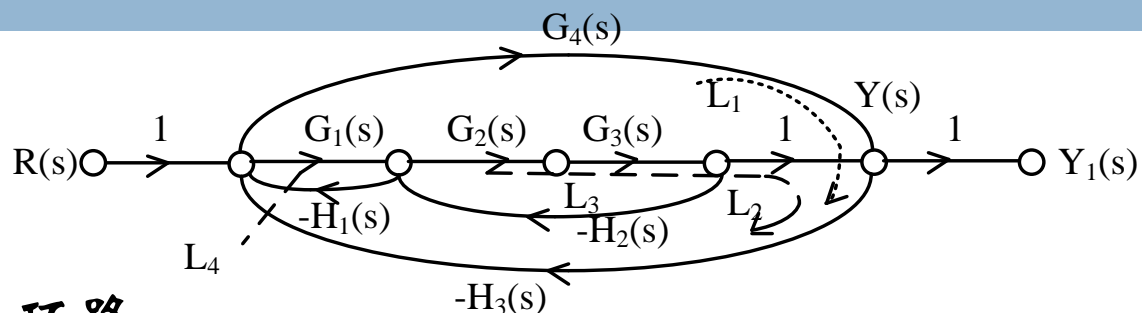
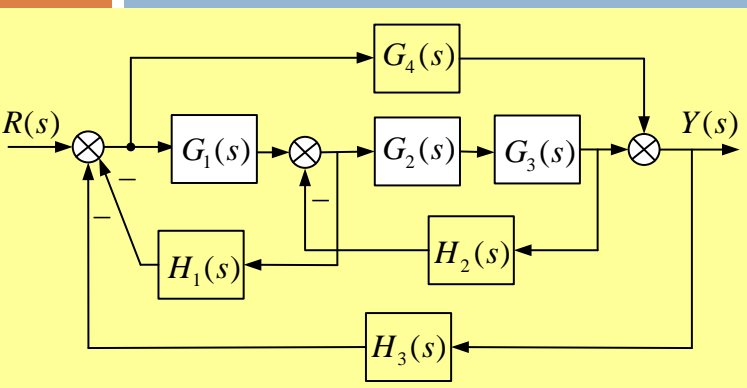
$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^l F_k \Delta_k}{\Delta}$$

Δ 是信号流图的特征行列式

l 表示前向通路的个数； F_k 表示第 k 条前向通路的增益； Δ_k 是除于与第 k 条通路相接触的回路外，余下的特征行列式

- 对MIMO情况，Mason公式可以求出任一对输入输出间的T.F.

通过Mason公式求传递函数例



环路:

$$-G_4(s)H_3(s), -G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_3(s), \\ -G_1(s)H_1(s), -G_2(s)G_3(s)H_2(s)$$

有1组互不接触环路: $-G_4(s)H_3(s), -G_2(s)G_3(s)H_2(s)$

系统特征式: $\Delta = 1 + G_4(s)H_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_3(s) + G_1(s)H_1(s) \\ + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_2(s)H_3(s)$

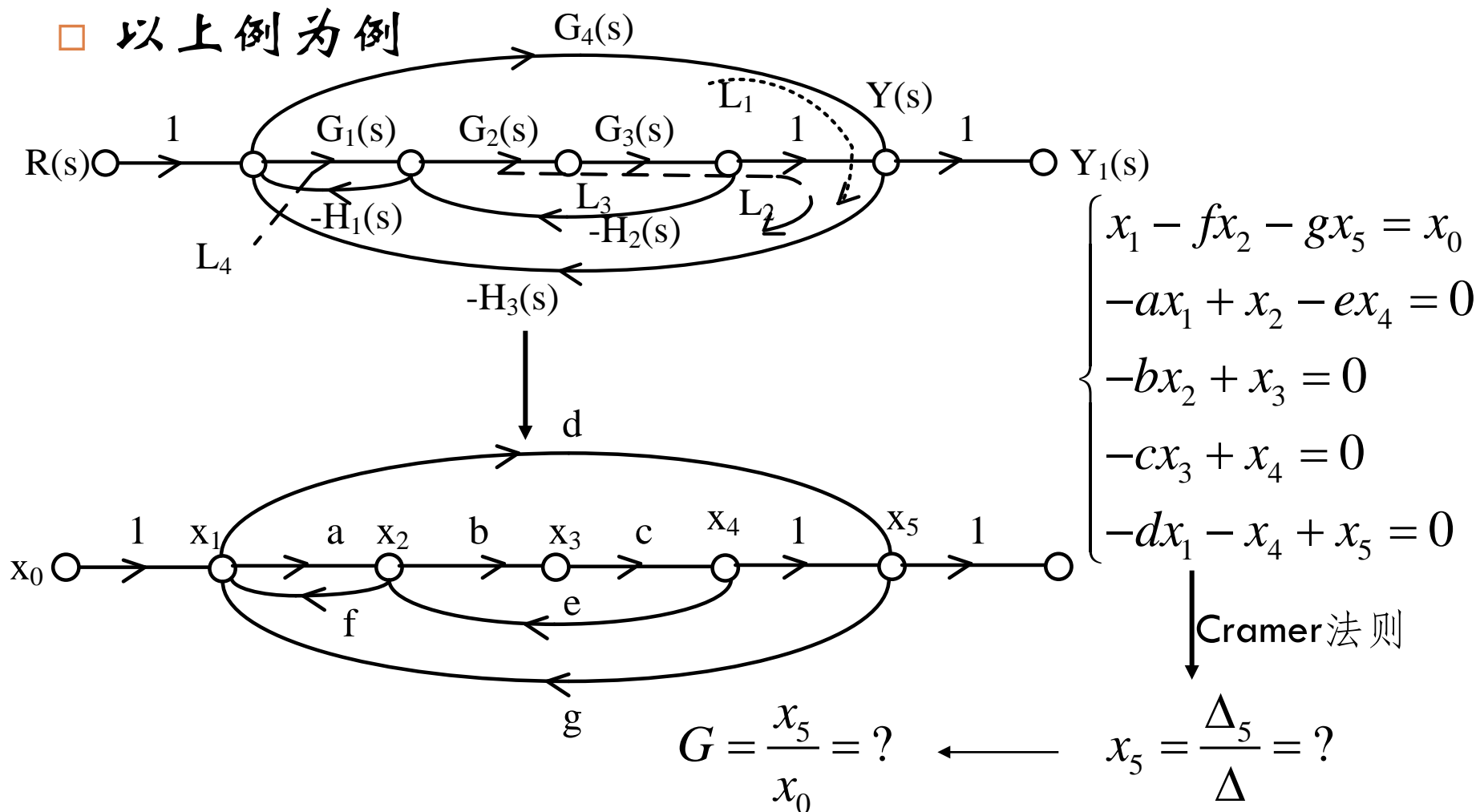
前向通路: $F_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$ $F_2 = G_4(s)$

余子式: $\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = 1 + G_2(s)G_3(s)H_2(s)$

传递函数: $\frac{Y}{R} = \frac{F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4(1 + G_2G_3H_2)}{1 + G_4H_3 + G_1G_2G_3H_3 + G_2G_3H_2 + G_1H_1 + G_2G_3G_4H_2H_3}$

Mason公式数学依据

□ 以上例为例

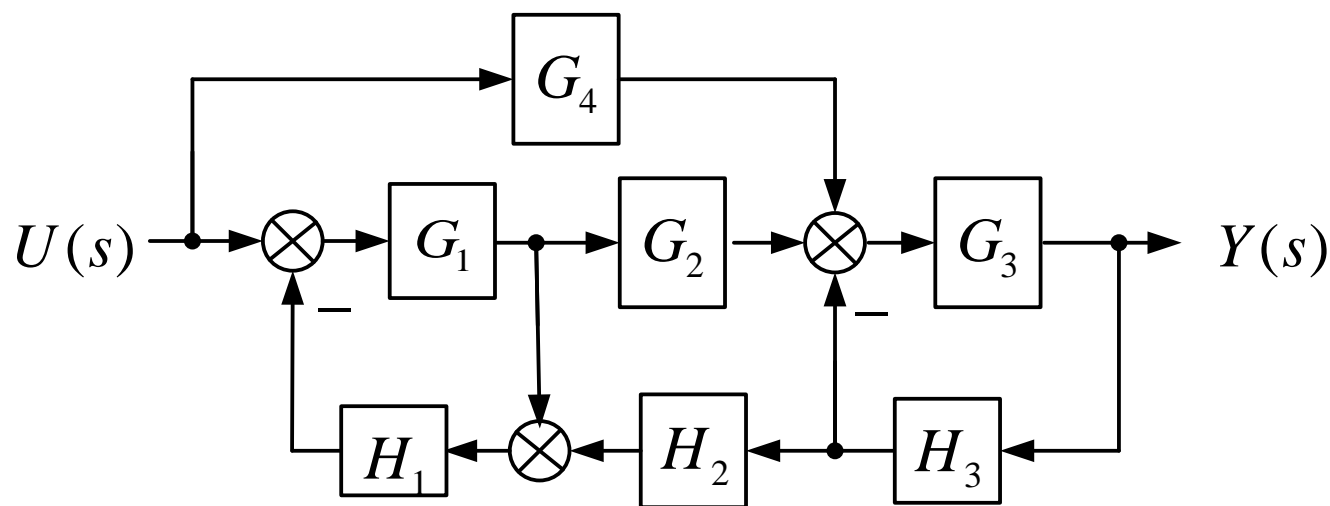


Mason公式数学依据总结

- 以中间节点为参数(不包括输入节点和输出节点)列写线性方程组
- 求解些方程组便可求出输出节点(Cramer法则)
- 再用输出节点/输入节点得传递函数
- Mason公式是按Cramer定理理解线性方程组所得到的解，然后按拓扑表示的结果

课外练习

□ 利用信号流图与Mason公式求传递函数。



答案:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 (1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3 + G_1 H_1 G_3 H_3}$$

这一讲就到这里！



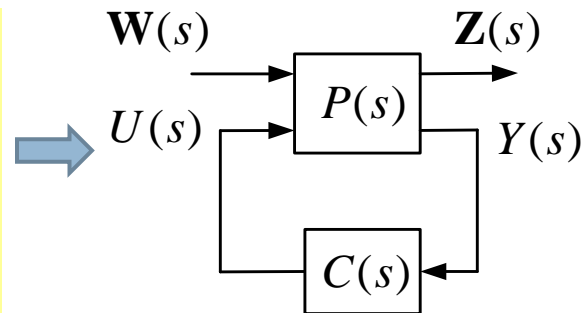
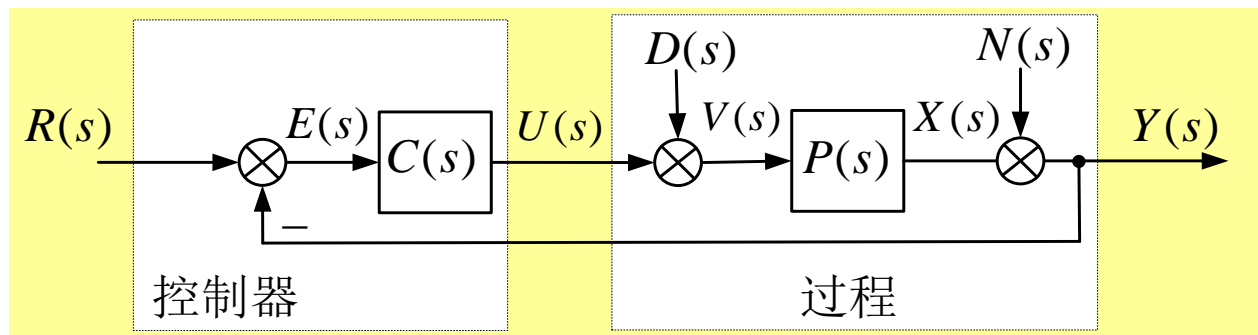
第九讲 闭环系统的特性与灵敏度

实际工作的闭环系统一般有三种类型输入：指令、扰动和噪声。闭环系统的特性取决于各输入到输出的传递关系。我们的希望是输出跟踪指令信号，扰动和噪声对输出的影响尽量小。

被控对象的参数发生变化对系统的影响如何？即灵敏度问题。对于一般的控制系统，我们希望系统对参数的变化灵敏度要低，不要因为一些变化影响系统的正常运行。

反馈控制系统的抽象模型

- 任何系统都存在不确定性和噪声。在考虑这两项因素时，系统结构图不能简化为一个传递函数的形式。
- 为了抑制不确定性和噪声，系统必须采用闭环反馈结构。以单位负反馈为例。



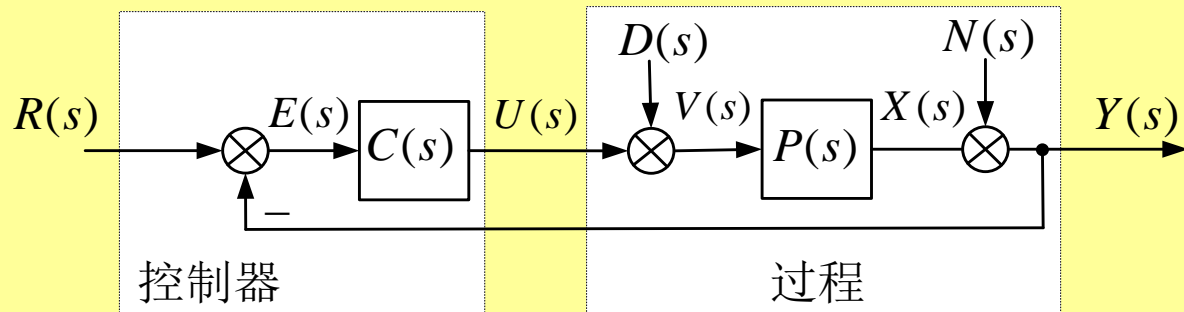
□ 输入信号：

- 指令输入 R
- 负载扰动 D
- 测量噪声 N

● 输出信号：

- 量测输出 Y
- 控制器输出 U
- 误差信号 E

闭环传递函



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{U(s)}{N(s)} = \frac{-C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \quad \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-1}{1 + C(s)P(s)}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} PC & P & 1 \\ C & -PC & -C \\ 1 & -P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D \\ N \end{bmatrix}$$

- 如果九个闭环传递函数均存在，则称系统是良定的。
- 任意一个输入到任意一个输出的传递函数分母都是 Δ ，称为系统的特征多项式。它是由系统结构决定的。

闭环传递函数分析

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{1+PC} \begin{bmatrix} PC & P & 1 \\ C & -PC & -C \\ 1 & -P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D \\ N \end{bmatrix}$$

- 我们希望输出跟踪指令，并不受扰动和噪声的影响，从传递函数的分析，会得到什么？

- 增大开环传递函数增益

- 不过：

- 片面而简单地增大 $|L(s)|$ 会影响系统的稳定性。
- 利用不合适方式增大 $|L(s)|$ 会降低系统的性能。
- 大的系统增益在实际运行中不易实行，且会增加能耗，而且容易引发干扰和故障。

- 正是这些原因，在利用经典控制理论设计反馈控制系统时只是在某段频域增减开环增益。

灵敏度函数概念

□ 模型误差对控制系统的影响 → 灵敏度函数。

□ 灵敏度函数 S :

$$S = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{dT}{dP} \frac{P}{T}$$

对象变化的较大，闭环传递函数变化较小，灵敏度函数越小，系统性能变化越小。

□ 确定 S 表达式

$$T = \frac{CP}{1+CP} \rightarrow \frac{dT}{dP} = \frac{C(1+CP) - CP \cdot C}{(1+CP)^2} = \frac{C}{(1+CP)^2}$$

$$\rightarrow S = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{C}{(1+CP)^2} \cdot \frac{1+CP}{CP} \cdot P = \frac{1}{1+CP}$$

□ T 与 S 的关系:

$$T + S = 1$$

↓
余灵敏度函数

分析开环与闭环对扰动的抑制

- 对于开环系统， $T=CP$ ，由于 C 是确定的，因此

$$S = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{CdP}{dP} \frac{P}{CP} = 1 \quad \text{模型的误差100\%影响系统传递函数。}$$

- 对于闭环系统，设计合适的 C 使 CP 很大时， $S \rightarrow 0$ ，模型摄动不影响闭环系统的性能----鲁棒

$$S = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{1}{1+CP} \quad \text{降低灵敏度，唯一可更改的是} C。$$

- 在无指令信号时，当然希望也没输出，但实际情况是

- 开环：输出为 $Y_{ol}(s) = PD + N$

- 闭环：输出为 $Y_{cl}(s) = \frac{1}{1+L}(PD + N) = \frac{1}{1+L}Y_{ol}(s) = SY_{ol}(s)$

若 S 很小，闭环输出自然也很小，所以就扰动抑制和噪声滤除而言，闭环系统远远优于开环系统。

参数误差的灵敏度定义----具体的

- 进一步，假设控制系统中的参数 λ 有误差，则定义其参数灵敏度函数

$$S_{\lambda} = \frac{dT/T}{d\lambda/\lambda} = \frac{dT}{d\lambda} \frac{\lambda}{T}$$

- 例：已知负反馈闭环控制系统的前向通道传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s+\lambda}$ ，反馈通道传递函数为1，求开环传递函数和闭环传递函数分别对 λ 与 K 的灵敏度。

- 对 λ :
$$S_o = \frac{\lambda}{s+\lambda}, S_c = \frac{\lambda}{s+\lambda+K}$$

- 对 K :
$$S_o = 1, S_c = \frac{s+\lambda}{s+\lambda+K}$$

闭环系统对参数的灵敏度总是等于其相应的开环系统的灵敏度除以 $1+L(s)$ 。

这一讲就到这里！

