第一类分析与计算题：

1-1、根据机理建立系统模型并进行分析、设计(46 分)

如图，RLC 电路(为计算方便，取 R=1.5Ω，C=1F，L=0.5H)，u 是输入电源电压，u_c 是 C 两端电压，i 是流经 L 的电流。以 u 为输入，u_c 为输出。完成以下工作：

(1)建立状态变量表达的状态空间模型。(5 分)

(2)画出模拟结构图。(3 分)

(3)写出系统的传递函数。(3 分)

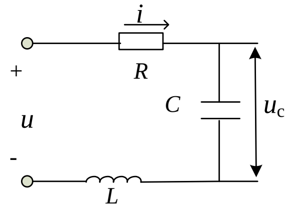
(4)引入变换阵，将建立的状态空间模型转化成能最简耦合形。(5 分)

(5)设输入为单位阶跃信号，求系统的状态响应与输出响应。(7 分)

(6)求平衡点，并利用 Lyapunov 第二法判定其稳定性。(7 分)

(7) 判定系统的能控性，若能控，利用状态反馈，将系统的极点配置到-2 和-3。(8 分)

(8) 判定系统的能观性，若能观，设计全维观测器，观测器的极点为-6 和-8。(8 分)



解：(1)根据 VAR 和 KVL 可以建立模型：

$$C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}=i(\mathrm{VAR})\ (1\ 分)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_\mathrm{C}=u(\mathrm{KVL})\ (1\ 分)$$

选择 $x_1=u_\mathrm{C},x_2=i$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1/L\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

(2 分)

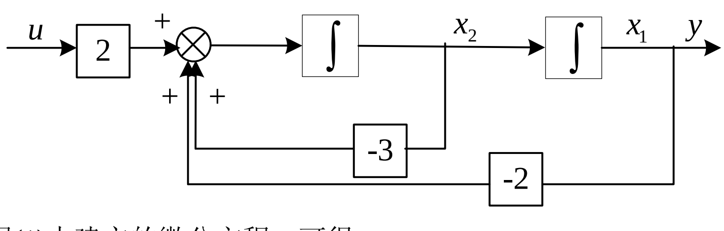
代入 R=1.5Ω，C=1F，L=0.5H，得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

(1 分)

(2) 画出模拟结构图为



(3 分)

(3)第一种方法，根据(1)中建立的微分方程，可得

$$\ddot{u}_\mathrm{C}+\frac{R}{L}\dot{u}_\mathrm{C}+\frac{1}{LC}u_\mathrm{C}=\frac{1}{LC}u$$

拉氏变换，并代入 R=1Ω，C=1F，L=1H，得到

$$G(s)=\frac{u_\mathrm{C}(s)}{u(s)}=\frac{1/LC}{s^2+(R/L)s+1/LC}=\frac{2}{s^2+3s+2}\ (3\ 分)$$

第二种方法：由(1)中建立的状态空间模型，得

$$G(s)=\boldsymbol{c}(s\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{2}{s^2+3s+2}\ (3\text{ 分})$$

(4)定出系统特征值和特征向量。系统的特征值为

$$\lambda_1=-1\quad \lambda_2=-2\ (1\text{ 分})$$

可定出一组特征向量为

$$\upsilon_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \upsilon_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}(1\text{ 分})$$

构造变换阵并求逆

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\upsilon_1 & \upsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\ (1\text{ 分})$$

计算变换后系数矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}(2\text{ 分})$$

最简耦合形

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

(5)先求$\boldsymbol{\Phi}(t)$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}(3\text{ 分})$$

设初始条件为零，初始时刻$t_0=0$，输入为单位阶跃信号时，则系统的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}2e^{-(t-\tau)}-2e^{-2(t-\tau)}\\-2e^{-(t-\tau)}+4e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}d\tau$$

$$=\begin{pmatrix}(2e^{-t}-e^{-2t})x_1(0)+(e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)\\(-2e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(-e^{-t}+2e^{-2t})x_2(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-2e^{-t}+e^{-2t}\\2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}\quad(2\text{ 分})$$

初始条件为零，即$\boldsymbol{x}(0)=0$，则系统的状态响应仅取决于控制作用的激励部分，即

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2e^{-t}+e^{-2t}\\2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}(2\text{ 分})$$

系统的输出响应为 $y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2e^{-t}+e^{-2t}\\2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}=1-2e^{-t}+e^{-2t}$ (2 分)

(6)齐次方程为：$\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-2x_1-3x_2$。易知，原点$x_e=0$是系统唯一的平衡状态(1 分)，选取标准二次型函数为李亚普诺夫函数，即

$$V(x)=2{x_1}^2+{x_2}^2>0\ (1\text{ 分})$$

则有

$$\dot{V}(x)=4x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-6{x_2}^2\ (1\text{ 分})$$

当$x_1=0$，$x_2=0$，$\dot{V}(x)=0$；当$x_1\neq 0$，$x_2=0$，$\dot{V}(x)=0$，因此$\dot{V}(x)$为半负定，同时$\dot{V}(x)$在状轨线上不总为 0(2 分)。根据 Lyapunov 判据，可知该系统在李亚普诺夫意义下是稳定的(1 分)。又因为$x_1\neq 0$，$x_2=0$，$\dot{V}(x)$恒

为零，且$\|x\|\to\infty$时，有$V(x)\to\infty$，故系统在原点大范围渐进稳定。(1 分)

(7)①用约旦标准形来判别能控性

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

所以系统能控。(2 分)

②用判别矩阵来判别能控性

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Ab}=\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix},\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=2$$

所以系统能控。(2 分)

系统能控，所以可以通过状态反馈任意配置极点。加入状态反馈阵$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_0 & k_1\end{bmatrix}$，闭环系统特征多项式为

$$f(\lambda)=\det\left[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK})\right]=\lambda^2+(3-2k_1)\lambda+2-2k_0\ (2\text{ 分})$$

根据给定的极点值，得到期望特征多项式

$$f^*(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^2+5\lambda+6\ (2\text{ 分})$$

比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$各项对应系数，可解得k_0=-2，$k_1=-1$。(2 分)

(8) ①用约旦标准形来判别能观性

$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$，对应输出矩阵没有全零列，所以系统能观。(2 分)

②用判别矩阵来判别能观性。

$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{cA}=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=2$ 所以系统能观。(2 分)

系统能控，所以可以构造观测器。

引入反馈阵$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}$，得到观测器特征多项式

$$f(\lambda)=\det\left[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Gc})\right]=\lambda^2+(g_1+3)\lambda+2+3g_1+g_2\ (2\text{ 分})$$

根据期望极点得到期望特征式

$$f^*(\lambda)=(\lambda+6)(\lambda+8)=\lambda^2+14\lambda+48\ (1\text{ 分})$$

比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$得g_1=11，g_2=13。(2 分)

观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Gc})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{G}y\\ &=\begin{pmatrix}-11 & 1\\ -15 & -3\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}11\\ 13\end{pmatrix}y\end{aligned}\ (1\text{ 分})$$

1-2、根据机理建立系统模型并进行分析、设计(46 分)

如下图所示的 RLC 网络(为计算方便，取 R=1/3Ω，C=1F，L=0.5H)。选$x_1=u_C$和$x_2=i_L$为两个状态变量，分别选 u 和u_R为输入和输出变量。完成以下工作：

(1)建立状态变量表达的状态空间模型。(5 分)

(2)画出模拟结构图。(3 分)

(3)写出系统的传递函数。(3 分)

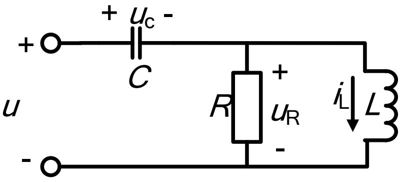
(4)引入变换阵，将建立的状态空间模型转化成能最简耦合形。(5 分)

(5)设输入为单位阶跃信号，求系统的状态响应与输出响应。(7 分)

(6)求平衡点，并利用 Lyapunov 第二法判定其稳定性。(7 分)

(7) 判定系统的能控性，若能控，利用状态反馈，将系统的极点配置到-2 和-3。(8 分)

(8) 判定系统的能观性，若能观，设计全维观测器，观测器的极点为-6 和-8。(8 分)



解：解：（1）

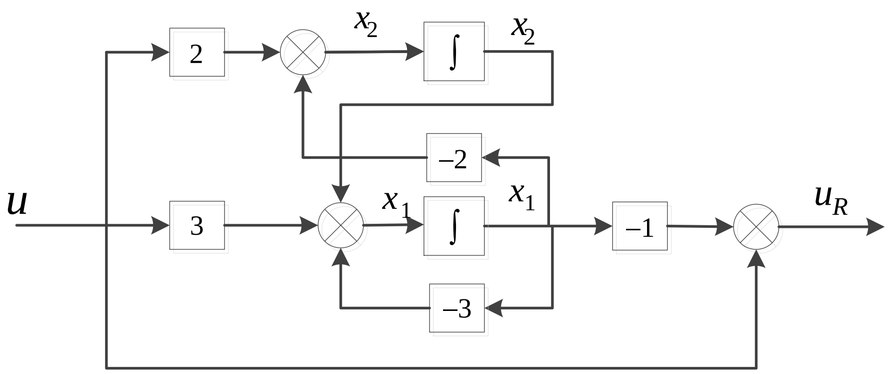
$$\begin{aligned} C\dot{x}_1 &= (u-x_1)/R + x_2 \\ L\dot{x}_2 &= u - x_1 \\ u_R &= u - x_1 \end{aligned}$$ ，即 $$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/RC & 1/C\\ -1/L & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/RC\\ 1/L\end{pmatrix}u,\quad u_R = \begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + u$$

代入数据可得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}u$$

$$u_R = \begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + u$$

（2）



（3）$G(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \dfrac{-3s-2}{s^2+3s+2}$

（4）定出系统特征值和特征向量。系统的特征值为

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$$

可定出一组特征向量为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad ,\quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}$$

最简耦合形为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

（5）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{bu}\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{2\tau} & 0\\ 0 & e^{\tau}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\&=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t}\\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & -e^{-2t}+2e^{-t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{2t}-2\\ 1-e^{t}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t}\\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & -e^{-2t}+2e^{-t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)+\begin{bmatrix}1-2e^{-2t}+e^{-t}\\ 2e^{-t}-2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

初始条件为零，即 $\boldsymbol{x}(0)=0$，则系统的状态响应仅取决于控制作用的激励部分，即

$$y(t)=\boldsymbol{cx}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2e^{-2t}+e^{-t}\\ 2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}=1-2e^{-2t}+e^{-t}$$

（6）其次方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-2x_1\end{aligned}$$

显然远点为系统的唯一平衡点。选李雅普诺夫函数：

$$V(\boldsymbol{x})=2{x_1}^2+{x_2}^2>0$$

则有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=4x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-12{x_1}^2\le 0$ 且不恒等于零，故平衡状态是渐近稳定的。又 $\|x\|\to\infty$ 时，$V(\boldsymbol{x})\to\infty$，故系统是大范围渐近稳定的。

（7）因为 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}, \boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}-7\\ -6\end{bmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & -7\\ 2 & -6\end{bmatrix}, \operatorname{rank}(\boldsymbol{M})=2$，故系统可控。

$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$，取其第二行，${\boldsymbol{M}_2}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}{\boldsymbol{M}_2}^{\mathrm{T}}\\ {\boldsymbol{M}_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}$ 的特征式为 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^2+3s+2$

期望特征多项式为 $(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$

求 $\bar{\boldsymbol{k}}$，$\bar{\boldsymbol{k}}=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$

（8）$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{cA}=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}, \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}, \operatorname{rank}(\boldsymbol{N})=2$，故系统能观。

引入反馈阵 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$，得到观测器特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Gc}\right)\right|=\begin{vmatrix} \lambda+3-g_1 & -1 \\ 2-g_2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\left(3-g_1\right)\lambda+2-g_2=0$$

要求观测器特征方程为

$$\lambda^2+14\lambda+48=0$$

所以，$g_1=-11,\ \ g_2=-46$

因此观测器方程为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Gc}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{G}y\\ &=\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}u+\begin{pmatrix} -11 \\ -46 \end{pmatrix}y\end{aligned}$$

第二类分析与计算题：

2-1、系统的结构特性分析与可综合性分析(18 分)

已知线性定常系统：$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}u,\quad y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

(1) 分析判别其能控性和能观性。(4 分)

(2) 若系统不能控按能控性分解；若系统不能观，按能观性分解。并在表达式中画线标注。(5 分)

(3) 写出该系统的对偶系统，该对偶系统的能控性与能观性如何？(3 分)

(4) 分析该系统能否采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5) 分析该系统是否可以设计观测器。(3 分)

解：(1) 可以采用两种方法判定稳定性

第一种方法据 Jordan 形判据直接判定：显然 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是 Jordan 块形式，系统有两个特征值-1 和-2，根据 Jordan 标准型系统的能控性和能观性判别准则：

i.由于与-1 特征值对应的 Jordan 块最后一行相对应，$\boldsymbol{B}$ 矩阵中的行不为 0，所以给定的线性系统是能控的。(2 分)

ii.而由于与-2 特征值对应的 Jordan 块第一列相对应，$\boldsymbol{C}$ 矩阵中的列为 0，所以给定的线性系统是不能观的。(2 分)

所以该系统能控不能观。

第二种方法据矩阵秩判据：

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_\mathrm{c})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}=3,\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_\mathrm{o})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=2$$ 所以该系统能控不能观。(4 分)

(2)按能观性进行分解

引入变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}$，构造变换阵：

$$\boldsymbol{R}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-2\\1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\ \text{(2 分)}$$

由此，得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}=\left(\begin{array}{cc:c}0&1&0\\-2&-3&0\\\hdashline 2&1&-1\end{array}\right),\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix},\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\end{array}\right)\ \text{(3 分)}$$

给定系统分解为二维能观子系统和一维不能观子系统，在表达式中划线。**(1 分)**

(3)该系统的对偶系统为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ (2 分)。由对偶原理，知对偶系统是不能控能观的。(1 分)

(4) 该系统是完全能控的，因此能采用状态反馈来实现闭环系统极点的任意配置，所以一定能采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5)由于该系统不可观的部分是渐近稳定的，所以该系统的观测器是存在的。(3 分)

2-2、系统的结构特性分析与可综合性分析(18 分)

已知线性定常系统：$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}u,\quad y=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

(1) 判别其能控性和能观性。(4 分)

(2) 若系统不能控按能控性分解；若系统不能观，按能观性分解。并在表达式中画线标注。(5 分)

(3) 写出该系统的对偶系统，该对偶系统的能控性与能观性如何？(3 分)

(4) 分析该系统能否采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5) 分析该系统是否可以设计观测器。(3 分)

解：(1)据矩阵秩判据：

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{pmatrix}=2,\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}=3$$

所以该系统不能控能观。(4 分)

(2)系统按能控性分解

引入变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{x}}$，构造变换阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\text{(2 分)}$$

由此，得

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}=\left(\begin{array}{cc:c}0&-1&-1\\1&-2&-2\\\hdashline 0&0&-1\end{array}\right),\quad \hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hdashline 0\end{array}\right),\quad \hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}\text{(2 分)}$$

给定系统分解为二维能控子系统和一维不能控子系统，在表达式中划线。**(1 分)**

(3)该系统的对偶系统为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ (2 分)。由对偶原理，知对偶系统是能控不能观的。(1 分)

(4) 该系统是不完全能控的，但由于该系统的特征值均是-1，故不能控的部分是渐近稳定的。
因此能采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)
(5)由于该系统是可观的，所以其观测器一定存在。(3 分)

2-3、系统的结构特性分析与可综合性分析(18 分)

已知线性定常系统：$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}u,\quad y=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

(1) 判别其能控性和能观性。(4 分)

(2) 若系统不能控按能控性分解；若系统不能观，按能观性分解。并在表达式中画线标注。(5 分)

(3) 写出该系统的对偶系统，该对偶系统的能控性与能观性如何？(3 分)

(4) 分析该系统能否采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5) 分析该系统是否可以设计观测器。(3 分)

解(1)判别方法 1：显然 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是 Jordan 块形式，系统有两个特征值-2 和 3，根据 Jordan 标准型系统的能控性和能观性判别准则：

i.由于与-2 特征值对应的 Jordan 块最后一行相对应，$\boldsymbol{B}$ 矩阵中的行不为 0，所以给定的线性系统是能控的。(2 分)

ii.而由于与-2 特征值对应的 Jordan 块第一列相对应，$\boldsymbol{C}$ 矩阵中的列为 0，所以给定的线性系统是不能观的。(2 分)

判别方法 2：利用能控和能观矩阵秩判所据：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & -4 & 8\\ 4 & 12 & 36\end{pmatrix}=3,\operatorname{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 3\\ 0 & 8 & 9\end{pmatrix}=2$$

所以该系统能控不能观。(4 分)
(2)按能观性分解
引入变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}$，构造变换阵：

$$\boldsymbol{R}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0.3 & -0.1 & 0\\ 0.4 & 0.2 & 0\end{pmatrix}\ (2\text{ 分})$$

由此，得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{AR}=\left(\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ \hdashline 0.3 & -0.1 & -2\end{array}\right),\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{CR}=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\end{array}\right)(2\text{ 分})$$

给定系统分解为二维能观子系统和一维不能观子系统，在表达式中划线。(1 分)

(3) 该系统的对偶系统为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ (2 分)。由对偶原理，知对偶系统是不能控能观的。(1 分)

(4)该系统是完全能控的，因此能采用状态反馈来实现闭环系统极点的任意配置，所以一定能采用状态反馈

实现系统镇定。(3 分)
(5)由于该系统不可观的部分是渐近稳定的，所以该系统的观测器是存在的。(3 分)

2-4、系统的结构特性分析与可综合性分析(18 分)

已知线性定常系统：$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}u,\quad y=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

(1) 判别其能控性和能观性。(4 分)

(2) 若系统不能控按能控性分解；若系统不能观，按能观性分解。并在表达式中画线标注。(5 分)

(3) 写出该系统的对偶系统，该对偶系统的能控性与能观性如何？(3 分)

(4) 分析该系统能否采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5) 分析该系统是否可以设计观测器。(3 分)

解：(1)判别方法 1：显然 $\boldsymbol{A}$ 矩阵是 Jordan 块形式，系统有两个特征值-2 和 3，根据 Jordan 标准型系统的能控性和能观性判别准则：

i.由于与-2 特征值对应的 Jordan 块最后一行相对应，$\boldsymbol{B}$ 矩阵中的行为 0，所以给定的线性系统是不能控的。(2 分)

ii.而由于与-2 特征值对应的 Jordan 块第一列相对应，$\boldsymbol{C}$ 矩阵中的列不为 0，所以给定的线性系统是能观的。(2 分)

判别方法 2：利用能控和能观矩阵秩判所据：

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&0&0\\4&12&36\end{pmatrix}=2,\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&3\\4&-4&9\end{pmatrix}=3$$

所以给定线性系统不能控能观。(4 分)

(2)按能控性分解

引入变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}$，构造变换阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\4&12&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{-1}=\begin{pmatrix}0.6&0&0.1\\-0.2&0&0.05\\0&1&0\end{pmatrix}\ (2\text{ 分})$$

由此，得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{AR}=\left(\begin{array}{cc:c}0&6&0.6\\1&1&-0.2\\\hdashline 0&0&-2\end{array}\right),\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hdashline 0\end{array}\right),\quad \bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{CR}=\begin{pmatrix}5&10&0\end{pmatrix}\ (2\text{ 分})$$

给定系统分解为二维能控子系统和一维不能控子系统，在表达式中划线。(1 分)

(3) 该系统的对偶系统为 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ (2 分)。由对偶原理，知对偶系统是能控不能观的。(1 分)

(4)该系统是完全能控的，因此能采用状态反馈来实现闭环系统极点的任意配置，所以一定能采用状态反馈实现系统镇定。(3 分)

(5)由于该系统不可观的部分是渐近稳定的，所以该系统的观测器是存在的。(3 分)

第三类分析与计算题：

3-1、判别稳定性并分析稳定域(9 分)

已知非线性系统状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_1^2 x_2)$$

(1)平衡点的含义是什么？如何确定该系统的平衡点？并求出平衡点。(3 分)

(2)用李雅普诺夫第二法分析平衡点的稳定性，并给出是否大范围稳定的结论。(6 分)

解：(1) 平衡点指静态工作点，它是随着时间的变化保持不变的点(1 分)。依此令

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -(x_1 + x_1^2 x_2) = 0 \end{cases} \text{(1 分)}$$

解得，原点是唯一的平衡点。(1 分)

(2)初选 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定的，(1 分)则有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_1^2 x_2^2$ 是半负定的。(1 分)由于 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 沿系统的任意非零解不恒为 0(1 分)，因此 $V(\boldsymbol{x})$ 是李雅普诺夫函数，即系统是渐近稳定的。(1 分)而且当 $\|x\| \to \infty$ 时，有 $V(x) \to \infty$，所以系统在坐标原点处为大范围渐近稳定。(2 分)

3-2、判别稳定性并分析稳定域(9 分)

已知系统状态空间表达式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

(1) 平衡点的含义是什么？如何确定该系统的平衡点？并求出平衡点。(3 分)

(2) 用李雅普诺夫第二法判定平衡点的稳定性，并给出是否大范围稳定的结论。(6 分)

解：(1) 平衡点指静态工作点，它是随着时间的变化保持不变的点(1 分)。依此令

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ (1 分)}$$

解得，原点是唯一的平衡点。(1 分)

(2) 取 $\boldsymbol{Q} = \mathbf{I}$，令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$，李雅普诺夫方程为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} = -\boldsymbol{Q}$。(1 分)比较矩阵元素得：

$$\begin{cases} 4a + 4b = 1 \\ a + 5b + 2c = 0 \\ 2b + 6c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 17/40 \\ b = -7/40 \\ c = 9/40 \end{cases} \text{(3 分)}$$

由于 $\Delta_1 = 17/40 > 0, \Delta_2 = 104/1600 > 0$，根据希尔维斯特判据知 $\boldsymbol{P}$ 正定，该系统在平衡点处是渐近稳定的(1 分)。又由于系统是线性系统，渐近稳定等价于大范围渐近稳定。(1 分)

3-3、判别稳定性并分析稳定域(9 分)

已知系统状态空间表达式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

(1) 平衡点的含义是什么？如何确定该系统的平衡点？并求出平衡点。(3 分)

(2) 用李雅普诺夫第二法判定平衡点的稳定性，并给出是否大范围稳定的结论。(6 分)

解：(1)平衡点指静态工作点，它是随着时间的变化保持不变的点(1 分)。依此令

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (1\text{ 分})$$

解得，原点是唯一的平衡点。(1 分)

(2)取 $\boldsymbol{Q}=\mathbf{I}$，令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$，李雅普诺夫方程为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}=-\boldsymbol{Q}$ 。(1 分)比较矩阵元素得：

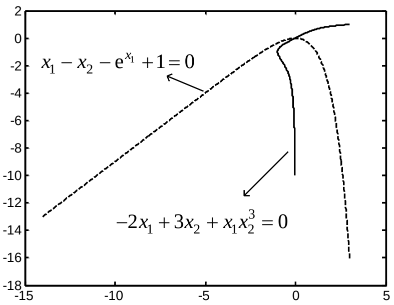
$$\begin{cases} 2a-10b+1=0 \\ a-2b-5c=0 \\ 2b-6c+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=9/2 \\ b=1 \\ c=1/2 \end{cases} \quad (3\text{ 分})$$

由于 $\Delta_1 = 9/2 > 0$，$\Delta_2 = 5/4 > 0$，根据希尔维斯特判据知 $\boldsymbol{P}$ 正定，该系统在平衡点处是渐近稳定的(1 分)。又由于系统是线性系统，渐近稳定等价于大范围渐近稳定。(1 分)

3-4、判别稳定性并分析稳定域(9 分)

针对下面非线性系统：

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + x_1x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - \mathrm{e}^{x_1} + 1$$



(1)依题及图，分析系统有唯一的平衡点 $x_1 = x_2 = 0$ 。(3 分)

(2)利用 Jacobian 矩阵法判定稳定性，并说明是否为大范围稳定。(6 分)

解：(1) 平衡点指静态工作点，它是随着时间的变化保持不变的点(1 分)。依此令

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_1x_2^3 = 0 \\ x_1 - x_2 - \mathrm{e}^{x_1} + 1 = 0 \end{cases} \quad (1\text{ 分})$$

由图知，原点是唯一的平衡点。(1 分)

(2)计算 Jacobian 矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1-5x_2^4 \end{pmatrix} \quad (1\text{ 分})$$

取 $\boldsymbol{P}$=$\mathbf{I}$，得

$$-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}^T + \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1-5x_2^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1-5x_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2-10x_2^4 \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) == \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2+10x_2^4 \end{pmatrix} (1\text{ 分})$$

由于 $\Delta_1 = 4 > 0$，$\Delta_2 = 4 + 40x_2^4 > 0$，根据希尔维斯特判据知 $\boldsymbol{Q}$ 正定(1 分)。因此，系统是渐近稳定的。(1 分)。其 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = (-2x_1 + 3x_2 + x_1 x_2^3)^2 + (x_1 - x_2 - \mathrm{e}^{x_1} + 1)^2 \ (1\text{ 分})$$

而且经分析(取各种情况的 $\|x\| \to \infty$ 的情况，写出相应分析过程)当 $\|x\| \to \infty$ 时，有 $V(x) \to \infty$，所以系统在坐标原点处为大范围渐近稳定。(2 分)

3-5、判别稳定性并分析稳定域(9 分)

针对下面非线性系统：

$$\dot{x}_1 = x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + x_1$$

(1)分析系统有唯一的平衡点 $x_1 = x_2 = 0$。(3 分)

(2)求系统渐近稳定的稳定域，并在直角坐标系中画出。(6 分)

解：(1)平衡点指静态工作点，它是随着时间的变化保持不变的点(1 分)。依此令

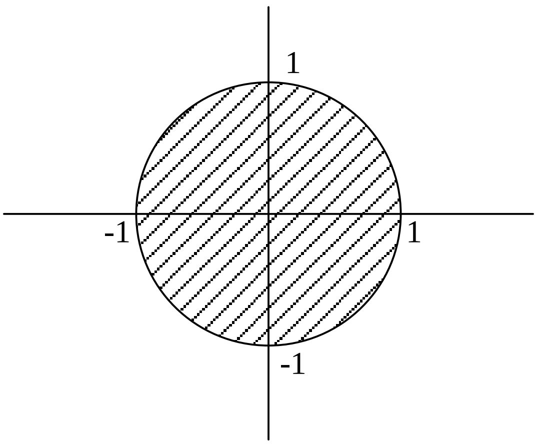
$$\begin{cases} x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) - x_2 = 0 \\ x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + x_1 = 0 \end{cases} \quad (1\text{ 分})$$

经分析，解得，原点是唯一的平衡点。(1 分)

(2)初选 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，(1 分)对其求导，得

$$\dot{V} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) (2\text{ 分})$$

系统渐近稳定，必有 $\dot{V} < 0$ ，这等价于 $x_1^2 + x_2^2 < 1$，(2 分)所以系统的稳定域在单位圆内，如下图所示(1 分)。



第四类分析与计算题：

4-1、模型分析与求解(10 分)

已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$
$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1)利用基本解理论，分别求两个基本解，并分别对应的计算状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$，你发现的什么？(6 分)

(2)当$x(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},u=t,t\ge 0$时，系统的输出$y(t)$。(4 分)

解：(1)考虑零输入时的状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=0\\ \dot{x}_2&=tx_1\end{aligned}\ (1\text{ 分})$$

采用分离变量法求解，得

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1(t_0)\\ x_2=0.5t^2x_1(t_0)-0.5t_0^2x_1(t_0)+x_2(t_0)\end{cases}(1\text{ 分})$$

取两组不同的初值$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，可以得到两个线性无关解组成基本解阵

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}_1(t) & \boldsymbol{\psi}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0^2\end{pmatrix}(1\text{ 分})$$

由状态转移矩阵的定义，得$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0^2 & 1\end{pmatrix}(1\text{ 分})$

再取两组不同的初值$\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，又可以得两个线性无关解组成基本解阵

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1(t) & \bar{\boldsymbol{\psi}}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.5t^2-0.5t_0^2+1 & t^2-t_0^2+1\end{pmatrix}(1\text{ 分})$$

由状态转移矩阵的定义，得$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\bar{\boldsymbol{\Psi}}(t)\bar{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(t_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0^2 & 1\end{pmatrix}$。这说明状态转移矩阵与基本解阵的选取无关，它是唯一的。(1 分)

(2)依线性连续系统的响应表达式与输出表达式，得

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Bigg|_{t_0=0}+\int_0^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5\tau^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\tau d\tau=\begin{pmatrix}1\\ t^2+0.5\end{pmatrix}(4\text{ 分})$$
$$y=1$$

4-2、模型变换与求解(10 分)

已知定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t),t\ge 0$$

(1)引入非奇异变换，将其变换成 Jordan 形。(5 分)

(2)当$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},u(t)=1(t)$时，求状态响应。(5 分)

解：(1)系统的特征值为-1，其代数重数为 2，几何重数为 1。

(2)

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \qquad 0.5\times 4=2分$$

$$x(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,x(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(\mathrm{t-s})}bu(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} \qquad 1\times 2=2分$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1分$$

4-3、模型变换与求解(12 分)

已知如下线性连续定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1)引入非奇异变换，将其变换成 Jordan 形。(5 分)

(2) 设初始状态 $x(0)=\left[1\,1\right]^T$，求单位阶跃状态响应和输出响应。(7 分)

解：(1) $|\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)$，特征根 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$

设 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}$，则

$\begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1 \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2 \end{cases}$，得到 $\begin{cases} \alpha_0=1 \\ \alpha_1=e^t-1 \end{cases}$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+(\mathrm{e}^t-1)\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2(\mathrm{e}^t-1) \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

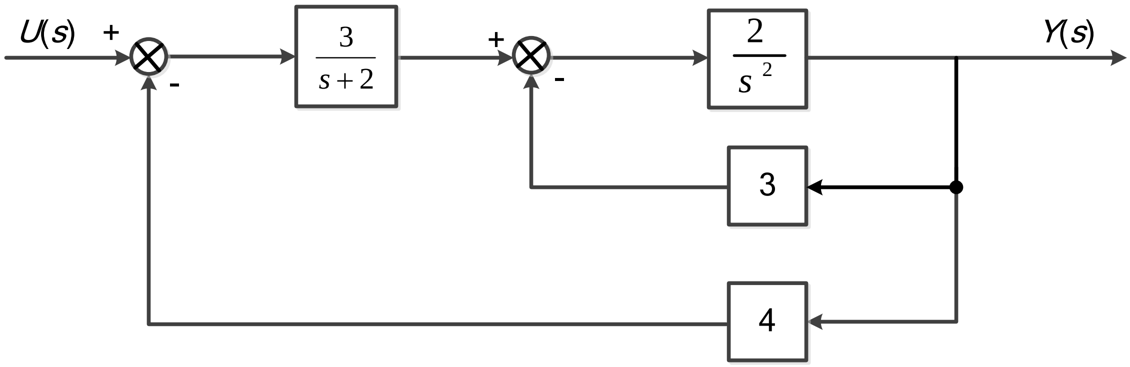
$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^t-1 \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^t-1+t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

(3) $y(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^t-1+t \\ 3\mathrm{e}^t \end{bmatrix}$

4-4、模型变换与求解(10 分)

已知某系统的系统框图如图所示，输入为 u，输出为 y。

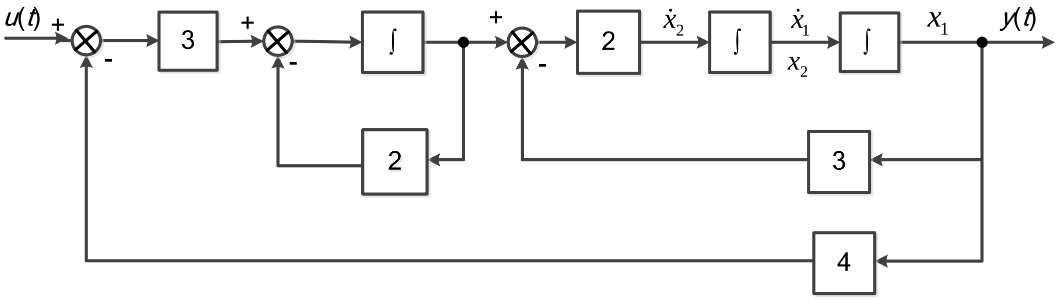


(1)

(1) 画出该系统的模拟结构图，并写出该系统的状态空间表达式。(5 分)

(2) 计算状态转移矩阵。(5 分)

解：(1) 系统模拟结构图为(3 分)

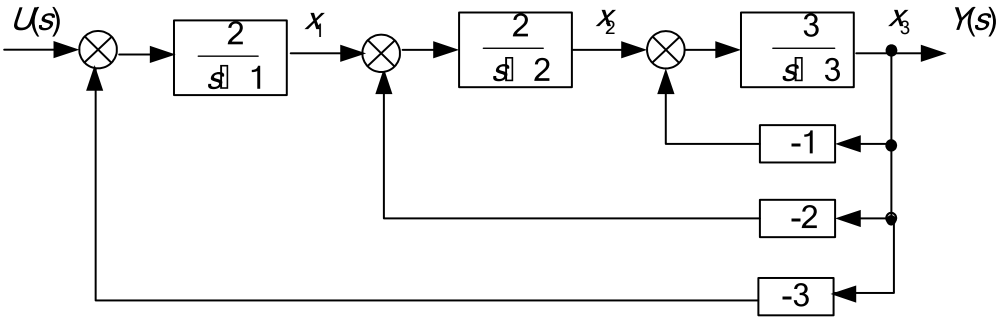


$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -6 & 0 & 2\\ -12 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x \quad (2\ 分)$$

(2)

4-5、模型变换与求解(10 分)

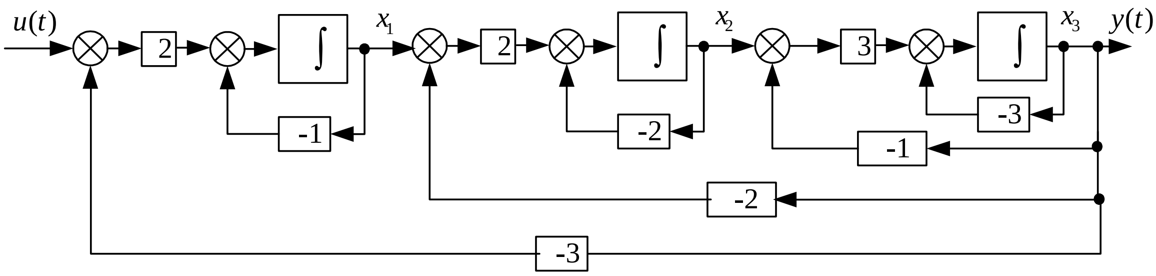
已知系统结构如图示。



(1) 画出该系统的模拟结构图，并写出该系统的状态空间表达式。(5 分)

(2) 计算状态转移矩阵。(5 分)

解：(1) 系统模拟结构图为(3 分)

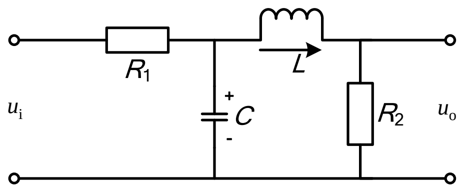


$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -6\\ 2 & -2 & -4\\ 0 & 3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u,\ y=[0\quad 0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\text{(2 分)}$$

(2)

4-6、建模、变换与求解(14 分)

已知电路如图所示。记电容上的电压 u_C 为 x_1，电感上的电流 i_L 为 x_2， $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$。选 u_i 和 u_o 为输入和输出变量。



(1)建立系统的状态空间表达式。(6 分)

(3)设系统参数为 $R_1=1\text{k}\Omega$， $R_2=2\text{k}\Omega$， $C=1\mu\text{F}$， $L=0.5\text{mH}$，初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T$，求系统的单位阶跃状态响应与系统输出响应。(8 分)

解：(1)列出电路方程

$$\frac{u_i-u_C}{R_1}=C\frac{du_C}{dt}+i_L \qquad \frac{du_C}{dt}=-\frac{u_C}{R_1C}-\frac{i_L}{C}+\frac{u_i}{R_1C}$$

$$u_C=L\frac{di_L}{dt}+R_2i_L \quad \text{，整理得到} \frac{di_L}{dt}=\frac{u_C}{L}-\frac{R_2}{L}i_L \qquad \text{(3 分)}$$

$$u_o=R_2i_L \qquad u_o=0\cdot u_C+R_2i_L$$

写成状态空间表达式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C} & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1C}\\ 0\end{bmatrix}u_i \text{(3 分)}$$

$$u_o=\begin{bmatrix}0 & R_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(2)给定如题参数情况下，状态方程写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u_i$$

$$u_o=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

求该系统的特征值，由

$$|\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1\\ -2 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+4)+2=\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+3)(\lambda+2)=0$$

得系统的特征值为－2,－3。(2 分)

用 Cayley-Hamilton 定理，设 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}$ 。于是

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1\\ \mathrm{e}^{-3t}=\alpha_0-3\alpha_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}\\ \alpha_1=\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}\end{cases}\quad (2\text{ 分})。$$

因此状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t})\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}(1\text{ 分})$$

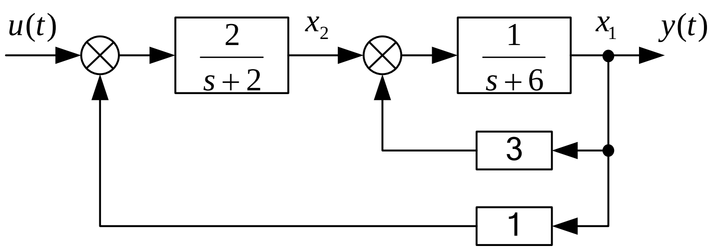
系统的单位阶跃状态响应与系统输出响应分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\tau)\boldsymbol{B}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\
&=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\
&=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-2\tau}-\mathrm{e}^{-3\tau}\\ 2\mathrm{e}^{-2\tau}-2\mathrm{e}^{-3\tau}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-2\tau}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\tau}\\ -\mathrm{e}^{-2\tau}+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3\tau}\end{bmatrix}_0^t \qquad (2\text{ 分})\\
&=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\dfrac{2}{3}\\ -\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\dfrac{1}{3}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{16}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\frac{2}{3}\ (1\text{ 分})$$

4-7、模型变换与求解(13 分)

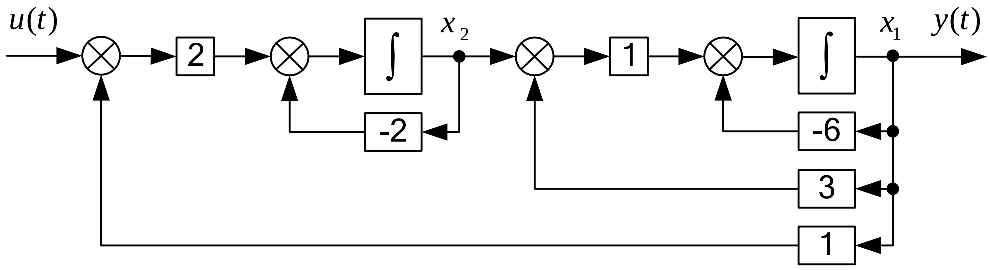
1、已知系统结构如下图，



(1)防画出相应的模拟结构图，记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，建立系统的状态空间表达式。(5 分)

(2)设系统初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，如果输入为单位阶跃信号,，求系统单位阶跃信号的状态响应和输出响应。(8 分)

解：(1)模拟结构图(3 分)



$$\dot{x}_1=(-6+3)x_1+x_2$$
$$\dot{x}_2=2(x_1+u)-2x_2$$

写成矩阵的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\ (2\text{ 分})$$

(2) 求该系统的特征值，由

$$|\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda+2)-2=\lambda^2+5\lambda+4=(\lambda+1)(\lambda+4)=0$$

得系统的特征值为－1,－4。(2 分)

用 Cayley-Hamilton 定理，设 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}$。于是

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}=\alpha_0-\alpha_1\\ \mathrm{e}^{-4t}=\alpha_0-4\alpha_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\\ \alpha_1=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\end{cases}$$

因此状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t})\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}==\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}(2\text{ 分})$$

系统的单位阶跃状态响应与系统输出响应分别为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\tau)\boldsymbol{B}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau} & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ 2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\\ \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4\tau}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ 2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\tau}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\\ -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\tau}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4\tau}\end{bmatrix}_0^t$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{1}{2}$$

4-8、模型变换与求解(12 分)

已知线性定常连续系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$$

(1)引入非奇异变换阵，将该系统转换成 Jordan 标准型。 (5 分)

(2) 设 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，求系统在单位阶跃输入 $u(t)=1(t)$ 下的状态响应。(7 分)

解：(1) $sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$,

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}\end{bmatrix}，\text{(3 分)}$$

$$\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & e^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}。\text{(2 分)}$$

$$(2)\ \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}，\text{(2 分)}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t}\text{-}\tau)\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau&=\int_0^t\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} & \mathrm{e}^{-(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\\ 2e^{-2(t-\tau)}-2e^{-(t-\tau)} & 2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}d\tau\\ &=\int_0^t\begin{bmatrix}4\mathrm{e}^{\tau-t}-2\mathrm{e}^{2\tau-2t}\\ 4\mathrm{e}^{2\tau-2t}-4\mathrm{e}^{\tau-t}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}3-4\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}\\ -2+4\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}\quad\text{(3 分)}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Phi}(\tau)\boldsymbol{B}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}3-3\mathrm{e}^{-t}\\ -2+3\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\quad\text{(2 分)。}$$

第五类分析与计算题

5-1、系统分析与综合（18 分）

分析给定系统的可综合性，并按要求进行设计

设有二阶系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u,\quad y=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 该系统能实现状态反馈和全维观测器极点的任意配置吗？(4 分)

(2) 设计状态反馈增益阵 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$，使得状态反馈闭环系统的极点配置为 $-3,-2$ 。(5 分)

(3) 设计实现上述反馈的全维观测器的反馈阵 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g_1 & g_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，使观测器的极点为 $-5,-3$ 。(5 分)

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成几维？用语言阐述降维观测器的方法？(4 分)

解：(1) $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q}_{c}=2$ ，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q}_{o}=2$ 。系统能控能观，能实现状态反馈和全维观测器的任意极点配置。(3 分)

(2) 闭环特征多项式：

$\left|\lambda\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bk})\right|=\begin{vmatrix}\lambda-k_1+1 & -1-k_2\\ -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+(4-k_1)\lambda+(1-3k_1-2k_2)$，希望的闭环特征多项式为：

$f(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda+2)=\lambda^2+5\lambda+6$，对比系数得到 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}$。

(3) 闭环特征多项式：

$|\lambda\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{gc})|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & g_1-1\\ -2 & \lambda+3+g_2\end{vmatrix}=\lambda^2+(4+g_2)\lambda+(1+2g_1+g_2)$ ，希望的闭环特征多项式为：

$f(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda+3)=\lambda^2+8\lambda+15$，对比系数得到 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix}^T$。

(4) 该系统是能观的，输出的维数为 1 维，则有一个状态分量可以由 y 直接获得，剩余的 1 个状态变量只需用 1 维的降维观测器进行重构即可。(2 分)降维观测器的方法：

5-2、系统分析与综合（18 分）

设二阶系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

(1) 该系统能实现状态反馈和全维观测器极点的任意配置吗？(4 分)

(2)设计状态反馈的反馈阵 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$，使闭环系统的极点为-2，-3。(5 分)

(3)设计全维状态观测器的反馈阵 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g_1 & g_2\end{bmatrix}^T$，使观测器的极点为-10，-10。(5 分)

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成几维？用语言阐述降维观测器的方法？(4 分)

解：(1) $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}=\begin{pmatrix}0 & -9\\ 3 & 3\end{pmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q}_{c}=2$。$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q}_{o}=2$。系统能控能观，能够任意配置状态反馈和全维状态观测器的极点。(各 2 分)

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1-3k_1 & 1-3k_2\end{pmatrix}$ **(1 分)**，闭环特征多项式：

$$|s\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})|=\begin{vmatrix}s & 3\\ -1+3k_1 & s-1+3k_2\end{vmatrix}=s^2+(3k_2-1)s+3(3k_1-1)\text{，}\textbf{(2 分)}$$

希望闭环特征多项式为：$f(s)=(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$，

对比两者系数得到 k_1=1，k_2=2，即 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$。**(2 分)**

(3) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{gc}=\begin{pmatrix}-g_1 & -3-g_1\\ 1-g_2 & 1-g_2\end{pmatrix}$ **(1 分)**，观测器特征多项式：

$$|sI-(A-gc)|=\begin{vmatrix} s+g_1 & 3+g_1 \\ -1+g_2 & s-1+g_2 \end{vmatrix}=s^2+(g_1+g_2-1)s+(g_1-3g_2+3)$$，**(2 分)**

希望的观测器特征多项式为：$f(s)=(s+10)(s+10)=s^2+20s+100$，

对比系数得到 g_1=40，g_2=-19，即 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}40 & -19\end{bmatrix}^T$。**(2 分)**

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成 1 维。降维观测器的方法：

5-3、系统分析与综合（18 分）

设有二阶系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -2 \\ 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 该系统能实现状态反馈和全维观测器极点的任意配置吗？(4 分)

(2)设计状态反馈的反馈阵 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$，使闭环系统的极点为-2，-3。(6 分)

(3)设计全维状态观测器的反馈阵 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g_1 & g_2\end{bmatrix}^T$，使观测器的极点为-10，-10。(5 分)

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成几维？用语言阐述降维观测器的方法？(4 分)

解：

(1) $\boldsymbol{Q}_\text{c}=\begin{bmatrix}1 & -2 \\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\text{Rank}\boldsymbol{Q_c}=2$。$\boldsymbol{Q}_\text{o}=\begin{bmatrix}0 & 2 \\ 4 & 2\end{bmatrix}$，$\text{Rank}\boldsymbol{Q_o}=2$。系统能控能观，能够任意配置状态反馈和全维状态观测器的极点。**(各 2 分)**

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk}=\begin{bmatrix}-k_1 & -2-k_2 \\ 2-k_1 & 1-k_2\end{bmatrix}$，闭环特征多项式：

$$|s\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})|=\begin{vmatrix} s+k_1 & 2+k_2 \\ -2+k_1 & s-1+k_2 \end{vmatrix}=s^2+(k_1+k_2-1)s+(-3k_1+2k_2+4)$$，**(4 分)**

希望的闭环特征多项式为：$f(s)=(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$，对比系数得到 k_1=4，k_2=2，即 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}$。**(2 分)**

(3) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{gc}=\begin{bmatrix}0 & -2-2g_1 \\ 2 & 1-2g_2\end{bmatrix}$，观测器特征多项式：$|s\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{gc})|=\begin{vmatrix} s & 2+2g_1 \\ -2 & s-1+2g_2 \end{vmatrix}=s^2+(2g_2-1)s+(4g_1+4)$，**(3 分)**

希望的观测器特征多项式为：$f(s)=(s+10)(s+10)=s^2+20s+100$，对比系数得到 g_1=24，g_2=10.5，即 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}24 & 10.5\end{bmatrix}^T$。**(2 分)**

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成 1 维。降维观测器的方法：

5-4、系统分析与综合（18 分）

设有二阶系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 该系统能实现状态反馈和全维观测器极点的任意配置吗？(4 分)

(2) 设计状态反馈的反馈阵 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$，使闭环系统的极点为 $-3,-3$。(5 分)

(3) 设计全维观测器的反馈阵 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g_1 & g_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，使观测器的极点为 $-5,-10$。(5 分)

(4) 若设计实现上述反馈的降维观测器，降维观测器可以设计成几维？用语言阐述降维观测器的方法？(4 分)

解：(1) $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q_c}=2$。$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，$\mathrm{Rank}\boldsymbol{Q_o}=2$。系统能控能观，能进行状态反馈和全维观测器的任意极点配置。(3 分)

(2)闭环特征多项式：

$$\left|\lambda\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bk})\right|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ -k_1 & \lambda+1-k_2\end{vmatrix}=\lambda^2+(3-k_2)\lambda+(2-k_1-2k_2)$$

，(3 分)希望的闭环特征多项式为：

$f(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda+3)=\lambda^2+6\lambda+9$，(1 分)对比系数得到 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}-1 & -3\end{bmatrix}$。(1 分)

(3)闭环特征多项式：

$|\lambda\mathbf{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{gc})|=\begin{vmatrix}\lambda+2+g_1 & -1\\ g_2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+(3+g_1)\lambda+(2+g_1+g_2)$，(3 分)希望的闭环特征多项式为：

$f(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda+10)=\lambda^2+15\lambda+50$，(1 分)对比系数得到 $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}12 & 36\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。(1 分)

(4)1 维。(2 分) 降维观测器的方法：

5-5、系统分析与综合（10 分）

设一阶离散系统：

$$x(k+1)=x(k)+u(k),\qquad x(0)=x_0$$
$$\min J=\sum_{k=0}^{1}[x^2(k)+ru^2(k)]$$

(1)这是几段最优决策问题。(2 分)

(2)求最优控制 $u^*(k)$ 及最优轨线 $x^*(k)$。(8 分)

解：(1)这是 2 段最优决策问题。(2 分)

(2)第一步求 $u^*(1)$ (3 分)

$$u^*(1)=0$$
$$J_1^*[x(1)]=x^2(1)$$

第二步求 $u^*(0)$ (3 分)

$$u^*(0) = -\frac{1}{r+1}x_0$$

最后求最优轨线　(2 分)

$$u^*(0) = -\frac{1}{r+1}x_0\,,\quad u^*(1) = 0$$

$$x^*(0) = x_0\,,\quad x^*(1) = \frac{r}{r+1}x_0\,,\quad x^*(2) = \frac{r}{r+1}x_0$$

5-6、系统分析与综合（10 分）

设一阶离散系统：

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\qquad x(0) = x_0$$

$$\min J = \frac{1}{2}[x(2)]^2 + \sum_{k=0}^{1}[x^2(k) + u^2(k)]$$

(1)这是几段最优决策问题。(2 分)

(2)求最优控制 $u^*(k)$ 及最优轨线 $x^*(k)$ 。(8 分)

解：(1)这是 2 段最优决策问题。(2 分)

(2)第一步求 $u^*(1)$　(3 分)

$$u^*(1) = -\frac{1}{3}x(1)$$

$$J_1^*[x(1)] = \frac{4}{3}x^2(1)$$

第二步求 $u^*(0)$　(3 分)

$$u^*(0) = -\frac{4}{7}x_0$$

最后求最优轨线　(2 分)

$$u^*(0) = -\frac{4}{7}x_0\,,\quad u^*(1) = -\frac{1}{7}x_0$$

$$x^*(0) = x_0\,,\quad x^*(1) = \frac{3}{7}x_0\,,\quad x^*(2) = \frac{2}{7}x_0$$

第六类分析与计算题

6-1、（研）已知系统的状态空间表达式如下

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,\qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in [0,\infty)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

完成如下问题：

(1)试根据 Lyapunov 第二法判定该系统的稳定性。

(2)设计基于全维观测器的状态反馈系统，已知观测器期望极点为(-3,-3+2j,-3-2j)；状态反馈的期望极点为(-1,-1+j,-1-j)。要求观测器与控制器的增益矩阵取得较小一些。

(3)对该系统采用输入变换和状态反馈实现动态解耦，得到积分解耦系统。

(4)设计最优控制器使指标 $J=\int_0^{\infty}(x^TQx+u^TRu)dt$ 最小，其中 $Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 。

解：(1)容易知， $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 是给定系统唯一的平衡状态，取候选的李亚普诺夫函数 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 为状态 X 的二次型函数： $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$ ，可知 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ 正定且 $\mathrm{V}(0)=0$ 。则：

$$\dot{\mathrm{V}}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathrm{V}(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2 & 2x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5x_1+x_2-x_3\\-x_1+0x_2+x_3\\x_1-x_2+0x_3\end{bmatrix}$$

$$=2x_1(-0.5x_1+x_2-x_3)+2x_2(-x_1+x_3)+2x_3(x_1-x_2)=-\mathrm{x}_1^2$$

显然易得， $\dot{\mathrm{V}}(\boldsymbol{x})$ 为负定， $\dot{\mathrm{V}}(0)=0$ 。

又因为，当 $\|X\|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\to\infty$ 时，有 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x})=\|X\|^2=({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\to\infty$

则由李亚普诺夫主稳定性定理知，系统原点平衡状态为大范围渐进稳定。

(2).由已知题意可得，原系统及其对偶系统的系统矩阵、输入/输出矩阵对应分别为： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.5&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ ，

$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$； $\bar{\mathrm{A}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-0.5&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix},\bar{\mathrm{B}}=\mathrm{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$。二输入二输出即 p=2.

原系统(A,B,C)的能控性和能观性判别矩阵分别为：

$$\mathrm{Q_c}=\begin{bmatrix}\mathrm{B}\vdots\mathrm{AB}\vdots\mathrm{A^2B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&-1&0.5&1.5\\1&0&0&1&-2&1\\0&1&-1&0&1&-2\end{bmatrix},$$

$\mathrm{Q_o}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}\\\mathrm{CA}\\\mathrm{CA^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\\0.5&0&-1\\1.5&-2&1\\-1.25&1.5&-0.5\end{bmatrix}$,因为 $\mathrm{rank}(\mathrm{Q_c})=3$, $\mathrm{rank}(\mathrm{Q_o})=3$,故原系统是完全能控能观测的，且有对偶原理其对偶系统也是完全能控能观测的。

首先求状态反馈系统：按行向搜索方案找出能控性判别矩阵 Qc 的 3 个线性无关列组成预备性变换阵 p^{-1} ，并求出其逆

$b_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, Ab_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}; p^{-1}=\begin{bmatrix}b_1 & Ab_1 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}, p=\left(p^{-1}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 将 P 分为 2 个块阵，第 1 块阵的行数为 2，第 2 块阵的行数为 1.取出 P 中的第 2 行 e_{12}^T 和第 3 行 e_{21}^T 组成变换矩阵 s^{-1}，并求其逆 s，$s^{-1}=\begin{bmatrix}e_{12}^T\\e_{12}^TA\\e_{21}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}, s=(s^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$。则原系统的隆伯格能空规范性系数矩阵为：

$$\hat{A}=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-7/2&1/2&2\\3/2&0&-1\end{bmatrix},$$

$$\hat{B}=S^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

将状态反馈矩阵期望特征值组按隆伯格能控规范形 $\hat{A}$ 的对角块阵个数 2 和维数 3 分组计算每组期望特征多项式，可将 $\left\{\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \lambda_3^*\right\}$ 分为两组：$\alpha_1^*(s)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)=(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2,$
$\alpha_2^*(s)=s-\lambda_3^*=s+1.$

则由此可对隆伯格能控规范形 $\left\{\hat{A},\hat{B}\right\}$ 选取 2×3 的状态反馈矩阵 $\bar{K}$ 为：

$$\bar{K}=\begin{bmatrix}2-\frac{7}{2} & 2+\frac{1}{2} & 2\text{-}(\text{-}1)(1\text{-}1)\\0&0&1\text{-}1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$ 则所求的系统状态反馈矩阵为：

$$K=\bar{K}S^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

求解全维状态观测器：根据对偶原理，按行向搜索方案找出原系统的对偶系统（$\bar{A}$，$\bar{B}$）能控性判别阵即

$$\begin{bmatrix}\bar{B}\vdots\bar{A}\bar{B}\vdots\bar{A}^2\bar{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}^T=$$

$$Q_o^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\\0.5&0&-1\\1.5&-2&1\\-1.25&1.5&-0.5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&1&-1&0.5&1.5&-1.25\\1&0&0&0&-2&1.5\\0&1&1&-1&1&-0.5\end{bmatrix}$$

的 3 个线性无关列

$\mathrm{b}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathrm{A}}\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; 组成预备性变换矩阵 p'^{-1}，并求出其逆 $\mathrm{p}'=(\mathrm{p}'^{-1})^{-1}$，

$\mathrm{p}'^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1' & \bar{\mathrm{A}}\mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{p}'=(\mathrm{p}'^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 将 p' 分为 2 块阵，第 1 块阵行数为 2，第 2 块阵行数为 1，进而取其第 2 行和第 3 行组成变换矩阵 s'^{-1}，并求出其逆 $s' = (\mathrm{s}'^{-1})^{-1}$，

$$s'^{-1} = \begin{bmatrix} e_{12}'^{\mathrm{T}} \\ e_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ e_{21}'^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, s' = (\mathrm{s}'^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则原系统的对偶系统的隆伯格能控规范形系数矩阵为：

$$\hat{\bar{\mathrm{A}}}=\mathrm{S}'^{-1}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{S}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{47}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

。

$$\hat{\bar{\mathrm{B}}} = \mathrm{S}'^{-1}\bar{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将全维观测器期望闭环特征值组按龙伯格能控规范形 $\hat{\bar{\mathrm{A}}}$ 的对角块阵个数 2 和维数 3 可把期望特征值 $\left\{\lambda_1'^*，\lambda_2'^*，\lambda_3'^*\right\}$ 多项式分为两组，对应的特征多项式组为：

$$\alpha_1'^*(s) = (s-\lambda_1'^*)(s-\lambda_2'^*) = (s+1-\frac{7}{4}j)(s+1+\frac{7}{4}j) = s^2+2s+\frac{65}{16},$$

$$\alpha_2'^*(s) = s-\lambda_3'^* = s+3$$

则由此可选取 2×3 的隆伯格能控规范形状态反馈矩阵 $\bar{\mathrm{K}}'$

$\bar{\mathrm{K}}'=\begin{bmatrix} \frac{65}{16}-\frac{47}{16} & 2-\frac{1}{4} & \frac{3}{16}-(-\frac{3}{4})\bullet(3-\frac{1}{4}) \\ 0 & 0 & 3-\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$，则状态反馈矩阵 K' 为：

$$K'=\bar{K}'S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{9}{8} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4}\\ 0 & 0 & \frac{11}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{7}{4} & \frac{13}{16}\\ \frac{11}{8} & 0 & \frac{11}{8}\end{bmatrix}，则 L=K'^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{11}{8}\\ \frac{7}{4} & 0\\ \frac{13}{16} & \frac{11}{8}\end{bmatrix}$$

$$A-LC=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{11}{8}\\ \frac{7}{4} & 0\\ \frac{13}{16} & \frac{11}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{15}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{19}{8}\\ -1 & -\frac{7}{4} & 1\\ -\frac{3}{8} & -\frac{29}{16} & -\frac{11}{8}\end{bmatrix}$$

故所求的综合全维观测器为：$\dot{\hat{x}}=(A-LC)x+Bu+Ly.$

(3).由题意知，该系统为双输入双输出连续时间线性时不变受控系统，进而依据结构特性指数{d1,d2}和结构特性向量{E1,E2}的基于状态空间描述的定义可知:

$$c_1'B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},c_2'B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$,由此可知，d1=0,d2=0;

$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$.将 E1，E2 组成判别矩阵 E，$E=\begin{bmatrix}E1\\ E2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，显而易见 E 是非奇异的，进而可得出已知的受控系统可实现动态解耦。从而可导出积分型动态解耦系统：

$E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}c_1'A\\ c_2'A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}$，基于此，可取预输入变换矩阵 $\hat{L}$ 与预状态反馈矩阵 $\hat{K}$ 为：

$$\hat{L}=E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \hat{K}=E^{-1}F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix};$$

导出的积分型动态解耦系统的系数矩阵为：

$$\hat{A}=A-BE^{-1}F=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=BE^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \hat{C}=C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(4).由已知受控系统可知，受控系统是完全能控能观的，而且有：$R=R^{\mathrm{T}}\rangle 0,\ Q=Q^{\mathrm{T}}\rangle 0$，则由无限时间时不变 LQ 问题的最优解及矩阵里卡提方程解阵的特性可得，矩阵里卡提代数方程：$PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P=0$，解阵 P 为 n×n 正定矩阵，当且仅当：$u^*(t)=-K^*x^*(t),K^*=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 时，

最优轨线：$\dot{x}^*(t)=Ax^*(t)+Bu^*(t),x^*(0)=x_0$；最优性能值：$J^*=J(u^*(\bullet)),\forall x_0\neq 0$。

解 Riccati 代数方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P=0$ 得: $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,最优状态反馈

$K^*(t)=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

6-2、（研）给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}u,$$
$$y=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}x$$

(1) 试判定该系统的稳定性。若渐进稳定，求衰减系数，并求这个系统从封闭曲线 $V(t)=150$ 边界上的一点到封闭曲线 $V(x)=0.05$ 内一点响应时间的一个上界。

(2)设计基于全维观测器的状态反馈系统，已知观测器期望极点为(-3,-2+j,-2-j)；状态反馈的期望极点为(-1,-1+j,-1-j)。要求观测器与控制器的增益矩阵取得较小一些。

(3)简要叙述可以设计几维的降维状态观测器并写出其设计过程。（不用写出具体计算过程，不要用公式表达）

解：（1）①判定该系统的稳定性设 $Q=I$,并且按下式求解 P ,由公式 $A^TP+PA=-Q$

可知，

$$\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

求解结果

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

由此可知 P 是正定的，因而系统是大范围渐进稳定。

于是可得李亚普诺夫及其导数分别为

$V=x^TPx=\frac{3}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{2}x_2x_3-\frac{1}{2}x_1x_3+\frac{5}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2$

则：

$\dot{V}=-x^Tx=-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$

②衰减系数

由V和$\dot{V}$，可以求得η的值为

$$\eta=\frac{-\dot{V}}{V}=\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{\frac{3}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{2}x_2x_3-\frac{1}{2}x_1x_3+\frac{5}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2}$$

η的最小值可由QP^{-1}的最小特征值求得。由于我们所设的$Q=I$，因此可得

$$\left|QP^{-1}-\lambda I\right|=\left|P^{-1}-\lambda I\right|=0$$

由此可得$\lambda_1=0.6667,\lambda_2=1.3333,\lambda_3=2$

③由$V(x,t)\le V(x_0,t_0)\ell^{\eta_{\min}(t-t_0)}$得$-\frac{1}{\eta_{\min}}\ln\left[\frac{V(x,t)}{V(x_0,t_0)}\right]\ge t-t_0$，将$\eta_{\min}=0.6667$，$V(x,t)=0.05$和$V(x_0,t_0)=150$代入方程，可得

$$-\frac{1}{\eta_{\min}}\ln\left[\frac{V(x,t)}{V(x_0,t_0)}\right]\ge t-t_0\Rightarrow 12\ge t-t_0$$

从曲线$V(x_0,t_0)=150$上出发的任意轨迹，进入被曲线$V(x,t)=0.05$所包围的区域内，所需要的时间不超过12的单位时间。

（2）①控制器的设计

能控判别矩阵

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & \times & \times & \times\\ 1 & 0 & -1 & \times & \times & \times\\ 1 & 1 & 0 & \times & \times & \times\end{bmatrix}$$

取三个线性无关列：

$$b_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},Ab_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

不妨令

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}b_1 & Ab_1 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求得：$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$所以变换矩阵$S^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$S=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\widehat{A}_c=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \widehat{B}_c=S^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \widehat{C}_c=CS=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

所以系统的龙伯格能控规范型状态空间：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-2&-1\\2&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u，\quad y=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}x$$

考虑到 $\widehat{A}_c=\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-2&-1\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{A}_{11}&\widehat{A}_{12}\\\widehat{A}_{21}&\widehat{A}_{22}\end{bmatrix}$ 即 $\widehat{A}_{11}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-2\end{bmatrix}$，$\widehat{A}_{12}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，$\widehat{A}_{21}=\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}$，$\widehat{A}_{22}=0$。

相应地将期望闭环特征值分为两组 $\left\{\lambda_2^*=-1+j,\lambda_3^*=-1-j\right\}$ 和 $\left\{\lambda_1^*=-1\right\}$，并分别定出其特征多项式为

$\alpha_1^*(s)=(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$，$\alpha_2^*(s)=s+1$ 基于此，可导出状态反馈矩阵

$$\begin{aligned}\bar{K}&=\begin{bmatrix}\alpha_{10}^*-\alpha_{10}&\alpha_{11}^*-\alpha_{11}&\beta_{13}-\gamma(\alpha_{20}^*-\alpha_{20})\\0&0&\alpha_{20}^*-\alpha_{20}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2-3&2-2&-1-0\\0&0&1-0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此可得对原系统确定实现制定闭环特征值配置的状态反馈矩阵

$$K=\bar{K}S^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

②状态观测器的设计

对偶关系矩阵

$$\breve{A}_0=A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\breve{B}_0=C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

能控判别矩阵

$$\begin{aligned}\breve{Q}_c&=\begin{bmatrix}\breve{B}_0&\breve{A}_0\breve{B}_0&\breve{A}_0^2\breve{B}_0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&-2&\times&\times&\times\\-1&1&0&\times&\times&\times\\1&1&0&\times&\times&\times\end{bmatrix}\end{aligned}$$

三个线性无关的列

$$b_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \breve{A}_0 b_1=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

组成预变换矩阵

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}b_1 & \breve{A}_0 b_1 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} \therefore P=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 0.5\\-0.5 & -0.25 & 0.25\\0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

导出变换矩阵 $S^{-1}=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.25 & 0.25\\0.25 & 0.75 & 0\\0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix} \therefore S=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 1.5\\1 & 2 & -0.5\\-1 & -2 & 2.5\end{bmatrix}$

从而，可以定出系统状态方程的龙伯格能控规范形为

$$\widehat{A}_0=S^{-1}\breve{A}_0 S=\begin{bmatrix}-2.5 & -2 & 0.25\\2.5 & 1 & 0.25\\1 & 0 & -0.5\end{bmatrix}$$

$\widehat{B}_0=S^{-1}\breve{B}_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\-0.5 & 0.75\\0 & 1\end{bmatrix}$ 考虑到 $\widehat{A}_0=\begin{bmatrix}-2.5 & -2 & 0.25\\2.5 & 1 & 0.25\\1 & 0 & -0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12}\\\widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22}\end{bmatrix}$ 即 $\widehat{A}_{11}=\begin{bmatrix}-2.5 & -2\\2.5 & 1\end{bmatrix}$,

$\widehat{A}_{12}=\begin{bmatrix}0.25\\0.25\end{bmatrix}$，$\widehat{A}_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$，$\widehat{A}_{22}=-0.5$

相应地将期望闭环特征值分为两组 $\left\{\lambda_2^*=-1+1.75j, \lambda_3^*=-1-1.75j\right\}$ 和 $\left\{\lambda_1^*=-3\right\}$，分别定出其特征多项式为

$\alpha_1^*(s)=(s+1-1.75j)(s+1+1.75j)=s^2+2s+4.0625$，$\alpha_2^*(s)=s+3$ 基于此，可导出状态反馈矩阵

$$\begin{aligned}\bar{K}&=\begin{bmatrix}\alpha_{10}^*-\alpha_{10} & \alpha_{11}^*-\alpha_{11} & \beta_{13}-\gamma(\alpha_{20}^*-\alpha_{20})\\0 & 0 & \alpha_{20}^*-\alpha_{20}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4.0625+2.5 & 2+1 & 0.25-0.75(3-0.5)\\0 & 0 & 3-0.5\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}6.525 & 3 & -1.625\\0 & 0 & 2.5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此可得对原系统确定实现制定闭环特征值配置的状态反馈矩阵

$$K=\bar{K}S^{-1}=\begin{bmatrix}6.525 & 3 & -1.625\\0 & 0 & 2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5 & -0.25 & 0.25\\0.25 & 0.75 & 0\\0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.5125 & -0.1938 & 0.8188\\0 & 1.25 & 1.25\end{bmatrix}$$

那么 $L = K^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2.5125 & 0 \\ -0.1938 & 1.25 \\ 0.8188 & 1.25 \end{bmatrix}$

(3) 由题意知，该系统为双输入双输出连续时间线性时不变受控系统，进而依据结构特性指数 $\{d_1 \quad , \quad d_2\}$ 和结构特征向量 $\{E_1 \quad , \quad E_2\}$ 的基于状态空间描述的定义可知：

$$c_1B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}，\ c_2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix};$$

由此可知，$d_1 = d_2 = 0$；

$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$，将 E_1， E_2 组成判别矩阵 E，则 $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。

显而易见，E 是非奇异的，进而可得出已知的受控系统可实现动态解耦。从而可以实现动态解耦；

$$E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}，\quad F = \begin{bmatrix} c_1A \\ c_2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

于是，解耦系统的系数矩阵为：

$$\dot{x} = \left(A - BE^{-1}F\right)x + BE^{-1}v$$

其中，

$$\tilde{A} = A - BE^{-1}F = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = BE^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 降维观测器的计算过程

答：①可以设计一维的降维观测器，对于 n 维连续时间线性时不变观测系统，先检验系统是否能观，若能观，则存在状态观测器。

②构造变换阵作线性变换，对给定任取,使 P 非奇异,计算出 P^{-1}，使得 $\bar{x} = Px$.将矩阵分块化，使得 $\overline{x_1} = y$。

③在利用输出 y 的基础上，再对分状态 $\overline{x_2}$ 构造全维状态观测器。得到状态观测器及分状态 $\overline{x_2}$ 的重构状态

$\overline{x_2}$，引入反馈阵$\bar{L}$并计算期望特征多项式，且反馈阵$\bar{L}$要满足系数的期望极点配置。

④确定系统状态x重构状态x，由分状态的重构状态$\overline{x_1}$和$\overline{x_2}$可以得到重构状态$\bar{x}$，再由$\bar{x}=Px$，导出系统状态x重构状态x。从而可以得到重构状态x的状态观测器。

6-3、（研）给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}x$$

（1）验证能控性、能观性，并设计全维观测器，使极点为$(-4,-5)$。

（2）判断系统是否稳定？若渐近稳定，求衰减系数，并求这个系统从封闭曲线$V(t)=150$边界上的一点到封闭曲线$V(x)=0.05$内一点响应时间的一个上界。

（3）令$x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，求$y(t)$的单位阶跃响应，$u(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$；（提示：先求状态转移矩阵$e^{At}$）

（4）求状态反馈系数使状态反馈的期望极点为(-1+j,-1-j)。

（5）简要叙述可以设计几维的降维状态观测器并写出其设计过程。（不用写出具体计算过程，不要用公式表达）

解：（1）$rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=2$，可控，

$$rank\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}=2$$,可观；

设计全维状态观测器

设$L=\begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}^T$,的观测器系统矩阵

$$A-LC=\begin{bmatrix}-1-l_1 & -2l_1\\ -l_2 & -2-2l_2\end{bmatrix}$$

其特征多项式为$\alpha(s)=\det\begin{bmatrix}s+1+l_1 & 2l_1\\ l_2 & s+2+2l_2\end{bmatrix}=s^2+s(3+l_1+2l_2)+2l_2$

由题，期望的特征多项式为$\alpha^*(s)=s^2+9s+20$。

比较解得：$l_1=-14$，$l_2=10$，因此$L=\begin{bmatrix}-14 & 10\end{bmatrix}^T$。

于是，系统的全维状态观测器为

$$\dot{x}=(A-LC)x+Bu+Ly$$
$$=\begin{pmatrix}13 & -28\\ -10 & -22\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}-14\\ 10\end{pmatrix}y$$

（2）设 $Q=I$，并且按下式求解 P

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

求解结果为

$$\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

于是可得李雅普诺夫函数及其导数分别为

$$V=x^TPx=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2 \quad , \quad \dot{V}=-x^Tx=-\left(x_1^2+x_2^2\right)$$

基此，可以求得的 η 值为

$$\eta=-\frac{\dot{V}}{V}=\frac{4(x_1^2+x_2^2)}{2x_1^2+x_2^2}$$

η 的最小值可由 QP^{-1} 的最小特征值求得。由于我们所设的 Q=I，因此可得

$$\left|QP^{-1}-\lambda I\right|=\left|P^{-1}-\lambda I\right|=0$$

由此得 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$。故 $\eta_{\min}=\lambda_1=2$。

由 $V(x,t)\le V(x_0,t_0)e^{-\eta_{\min}(t-t_0)}$ 得 $-\frac{1}{\eta_{\min}}\ln\left[\frac{V(x,t)}{V(x_0,t_0)}\right]\ge t-t_0$，将 $\eta_{\min}=2$、$V(x,t)=0.05$，$V(x_0,t_0)=150$ 代入方程，可得

$$-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{0.05}{150}\right]\ge t-t_0 \Rightarrow 4.003\ge t-t_0$$

从曲线 $V(x_0,t_0)=150$ 上出发的任意轨迹，进入被曲线 $V(x,t)=0.05$ 所包围的区域内，所需要的时间不超过 4.003 个单位时间（注意，这个时间间隔与所选的 P 和 Q 矩阵有关。若选取合适的 P 和 Q，则还可得到比 4.003 单位时间小的数作为 $t-t_0$ 的上界）。

（3）先求 e^{At}

由于 A 为对角阵，易知 $\mathrm{e}^{At}=diag[\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{-2t}]=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{At}x(0)+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bud\tau \\
&= \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & \\ & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t+\tau} & \\ & e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}ud\tau \\
&= e^{-t}x_{10}+e^{-2t}x_{20}+\left(2-e^{-t}-e^{-2t}\right)u
\end{aligned}
$$

由 3 得：$y=e^{t}\cdot 0+e^{2t}\cdot 0+\left(2-e^{-t}-e^{-2t}\right)u(0)=\begin{cases}2-e^{-t}-e^{-2t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

（4）能控判别矩阵

$$
\begin{aligned}
Q_c &= \begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

取三个线性无关列：

$$b_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, Ab_1=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$$

不妨令

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

求得：$P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$所以变换矩阵$S^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$S=\begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\ -1/3 & -1/3\end{bmatrix}$

$\widehat{A}_c=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}-4/3 & -1/3\\ -2/3 & -5/3\end{bmatrix}$，$\widehat{B}_c=S^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$，$\widehat{C}_c=CS=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}$

所以系统的龙伯格能控规范型状态空间：

$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}x$

考虑到$\widehat{A}_c=\begin{bmatrix}-4/3 & -1/3\\ -2/3 & -5/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{A}_{11}\end{bmatrix}$

相应地根据期望闭环特征值定出其特征多项式为

$$\alpha_1^*(s)=(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$$

基于此，可导出状态反馈矩阵

$$\bar{K}=\begin{bmatrix}\alpha_{10}^{*}-\alpha_{10} & \alpha_{11}^{*}-\alpha_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-2/3 & 2-5/3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4/3 & 1/3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可得对原系统确定实现制定闭环特征值配置的状态反馈矩阵

$$K=\bar{K}S^{-1}=\begin{bmatrix}4/3 & 1/3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

（5）设计降维观测器

答：①可以设计一维的降维观测器，对于 n 维连续时间线性时不变观测系统，先检验系统是否能观，若能观，则存在状态观测器。

②构造变换阵作线性变换，对给定任取,使 P 非奇异,计算出 P^{-1}，使得 $\overline{x}=Px$.将矩阵分块化，使得 $\overline{x_1}=y$。因为系统的输出矢量 y 一般是能够测量的，因此，可以利用系统的输出矢量 y 来直接产生部分状态变量，从而降低观测器的维数。

③在利用输出 y 的基础上，再对分状态 $\overline{x_2}$ 构造全维状态观测器。得到状态观测器及分状态 $\overline{x_2}$ 的重构状态 $\overline{x_2}$，引入反馈阵 $\overline{L}$ 并计算期望特征多项式，且反馈阵 $\overline{L}$ 要满足系数的期望极点配置。

④确定系统状态 x 重构状态 x，由分状态的重构状态 $\overline{x_1}$ 和 $\overline{x_2}$ 可以得到重构状态 $\overline{x}$，再由 $\overline{x}=Px$，导出系统状态 x 重构状态 x。从而可以得到重构状态 x 的状态观测器。

6-4、（研）给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}x$$

（1）能否通过状态反馈设计将系统特征值配置到平面任意位置？
（2）控规范分解求上述方程的不可简约形式？
（3）求方程的传递函数；
（4）验证系统是否渐近稳定、BIBO 稳定、李氏稳定；
（5）可能通过状态反馈将不可简约方程特征值配置到-2，-3？若能，确定 K，若不能，请说明理由；
（6）能否为系统不可简约方程设计全阶状态观测器，使其特征值为-4，-5；

解:（1）判断能控性: 能控矩阵 $Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 16\\ 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, rank(Q)=2.$ 系统不完全可控，不能任意配置极点。

（2）按可控规范型分解

取M的前两列，并加 1 与其线性无关列构成$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求得$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

进行变换$\bar{A}=PAP^{-1}\begin{bmatrix}0 & 8 & \frac{2}{3}\\1 & 2 & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\bar{B}=PB=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\bar{c}=cP^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\end{bmatrix}$

所以系统不可简约实现为$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 8\\1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}x\end{cases}$

（3）$G(s)=c(sI-A)^{-1}B=\dfrac{2(s-1)(s+1)}{(s-4)(s+2)(s+1)}=\dfrac{2(s-1)}{(s-4)(s+2)}$

（4）$\det(sI-A)=(s-4)(s+2)(s+1)$，系统有一极点 4，位于复平面的右部，故不是渐近稳定。

$G(s)=c(sI-A)^{-1}B=\dfrac{2(s-1)}{(s-4)(s+2)}$，极点为 4，-2，存在位于右半平面的极点，故系统不是 BIBO 稳定，系统发散，不是李氏稳定。

（5）可以。令$k=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}^T,A+Bk=\begin{bmatrix}k_1 & 8+k_2\\1 & 2\end{bmatrix}$

则特征方程$f(s)=\det\left[sI-(A+Bk)\right]=s^2-(k_1+2)s+2k_1-8-k_2$

期望特征方程$f^*(s)=(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$

比较上两式求得：$k=\begin{bmatrix}-7\\-28\end{bmatrix}^T$

（6）可以。设$L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}$，则$A-LC=\begin{bmatrix}-2l_1 & 8-2l_1\\1-2l_2 & 2-2l_2\end{bmatrix}$

特征方程$f(s)=s^2+(2l_2-2+2l_1)s+16l_2-2l_1-8$

期望特征方程$f^*(s)=(s+4)(s+5)=s^2+9s+20$

比较得：$L=\begin{bmatrix}\dfrac{10}{3}\\ \dfrac{13}{6}\end{bmatrix}$

则：$A-LC=\begin{bmatrix}-\dfrac{20}{3} & \dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{10}{3} & -\dfrac{7}{3}\end{bmatrix}$

观测器方程为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\dfrac{20}{3} & \dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{10}{3} & -\dfrac{7}{3}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}\dfrac{10}{3}\\ \dfrac{13}{6}\end{bmatrix}y$