



### 第三章 CLTI系统的时域分析

# 内容提要

- 第一讲 CLTIS的响应
- 第二讲 稳定性概念与条件
- 第三讲 CLTIS稳定性R-H判据
- 第四讲 系统性能指标相关概念
- 第五讲 一阶系统响应与性能指标
- 第六讲 标准二阶系统响应与性能指标
- 第七讲 具有零点的典型二阶系统分析
- 第八讲 二阶系统性能的改善
- 第九讲 高阶系统时域分析
- 第十讲 稳态性能指标
- 第十一讲 减小/消除稳态误差措施
- 第十二讲 常根轨迹及其绘制
- 第十三讲 参数根轨迹与绘制
- 第十四讲 开环零、极点分布对根轨迹的影响与闭环系统性能
- 第十五讲 系统时域分析综合例题

# 第一讲 CLTIS的响应

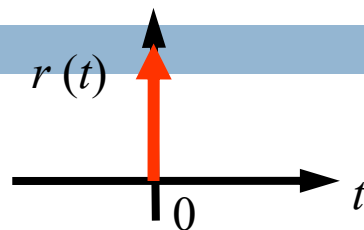
求解系统响应是系统时域分析的一般手段，由时间响应可以对**稳定性、暂态特性与稳态特性**进行评价。系统的响应不仅取决于**系统本身的结构和参数**，还与系统的**初始状态和输入信号**形式有关。为了便于分析和设计，常采用一些典型的输入信号：冲激、阶跃、斜坡(速度)、抛物线(加速度)、正弦。

# 典型输入信号

□ 冲激

$$r(t) = R\delta(t)$$

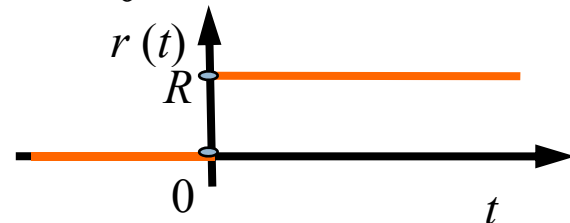
$$R(s) = R$$



□ 阶跃

$$r(t) = \begin{cases} R & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

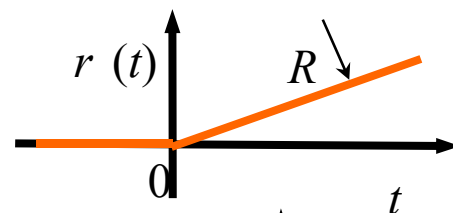
$$R(s) = \frac{R}{s}$$



□ 斜坡

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{R}{s^2}$$

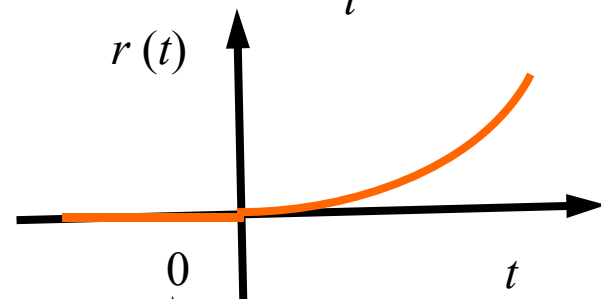


□ ----速度

□ 抛物线

$$r(t) = \begin{cases} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{R}{s^3}$$

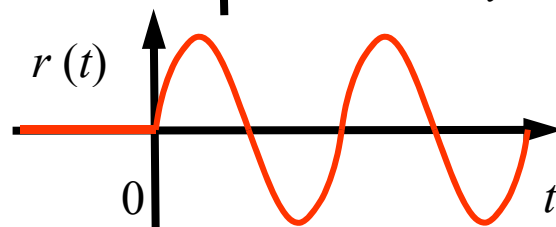


□ ----加速度

□ 正弦信号

$$r(t) = R\sin(\omega t)$$

$$R(s) = \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2}$$



# 典型输入信号的选择

- 在实际应用中究竟使用哪一种信号，要取决于系统的工作状态以及系统的类型。
  - 对于一些定值控制系统，例如恒温、恒压、恒速，考虑最不利的扰动影响，用阶跃信号作为输入。
  - 如果研究系统对输入信号的跟踪情况，如天线控制系统、卫星跟踪系统或导弹导航，可以使用斜坡信号、加速度信号或方波信号作为输入。
  - 如果要测试控制系统频率特性，则用正弦信号。

# 时域响应-CLTIS微分方程解与运动模态

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t)$$

□ 特征方程  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

□ 微分方程的通解 =

□ 齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解

□ 齐次方程的通解

□ 无重根  $y_1(t) = k_1e^{\lambda_1t} + k_2e^{\lambda_2t} + \dots + k_ne^{\lambda_nt}$

□ 有重根 模态中还有  $t^l e^{\lambda_it}$

□ 共轭复根 模态中还有  $e^{\sigma t \pm j\omega t}$

□ 非齐次微分方程的特解----与输入信号有关

□ 若  $u(t) = at^2 + bt + c + de^{\alpha t}$  , 且 $\alpha$ 不是特征方程的单实根时,  
其特解形式为  $y_2(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0 + d_0e^{\alpha t}$

# 时域响应-理解微分方程解的两部分

- 在特征值均小于0且  $\alpha < 0$  的情况下，响应中只剩下

$$y(t) = \underbrace{(k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t})}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{d_0 e^{\alpha t} + c_2 t^2 + c_1 t + c_0}_{\text{稳态响应}}$$

- 系统响应 = 暂态响应 + 稳态响应

- 暂态响应是系统响应随时间逐渐(振荡)衰减部分，其形式取决于系统自身特性与激励信号。注意：由自身特性得到的暂态部分系数的取值与激励信号和初始条件无关。

- 稳态响应是输入信号直接作用的部分结果。

- 系统响应有暂态响应（过渡过程）的原因

- 动态系统中总是存在惯性（如机械惯性、电磁惯性等）致使运动需要的能量不能跃变，所以实际系统总是有暂态过程。

# 由拉普拉斯变换得到CLTIS解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t)$$

□ 通过Laplace变换的微分性质

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \underbrace{s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}_{N(s)} = s^n F(s) - \underline{N(s)}$$

□ 可以方便地将线性微分方程转化成代数方程求解

$$Y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} R(s) + \frac{N_{y0}(s) - N_{u0}(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

□ 再反变换  $G(s)$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} R(s)\right] + L^{-1}\left[\frac{N_{y0}(s) - N_{r0}(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}\right]$$

系统响应 =	零状态响应	零输入响应
	稳态响应	暂态响应



# 用反Laplace变换求CLTIS响应方法

## □ 留数法

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-p_1)^k (s-p_2) \cdots (s-p_m)}$$

$$L^{-1}[F(s)] = \sum_{\text{极点}} r_i = \sum_{\text{极点}} (F(s)e^{st})'s \text{ residue}$$

$$r_i = \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left( (s-p_i)^k F(s)e^{st} \right) \right) \Big|_{s=p_i}$$

## □ 部分分式法

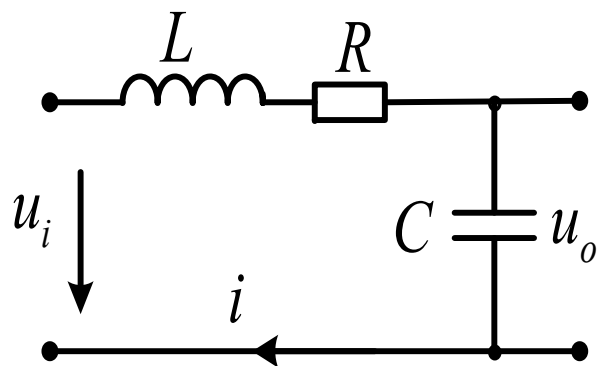
$$F(s) = \frac{K_{1k}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{1(k-1)}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{11}}{(s-p_1)} + \sum_{i=2 \cdots m} \frac{K_2}{(s-p_2)}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(k-i)!} \frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} \left( (s-p_1)^k F(s) \right) \Big|_{s=p_1} ; K_j = (s-p_j) F(s) \Big|_{s=p_j}, j = 2 \cdots m$$

$$f(t) = K_{1k} t^{k-1} e^{p_1 t} + K_{1(k-1)} t^{k-2} e^{p_1 t} + \cdots + K_{11} t^0 e^{p_1 t} + \sum_{j=2, \cdots, m} K_j e^{p_j t}$$

# 例：RLC串联电路的响应

不可思议！



$$L=1\text{H}, C=1\text{F}, R=1\Omega$$

$$u_o(0)=0.1\text{V}, i(0)=0.1\text{A}$$

$$a. u_i(t)=1\text{V} \quad b. u_i(t)=0\text{V}$$

求：电路突然接通时，电容电压变化规律。

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

- 方法：
- 1、直接据微分方程解理论求解
  - 2、利用Laplace变换方法

## 例：RLC串联电路的响应----解答

$$\frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$u_i=1\text{V}$ :

$$u_o(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1} \right]$$

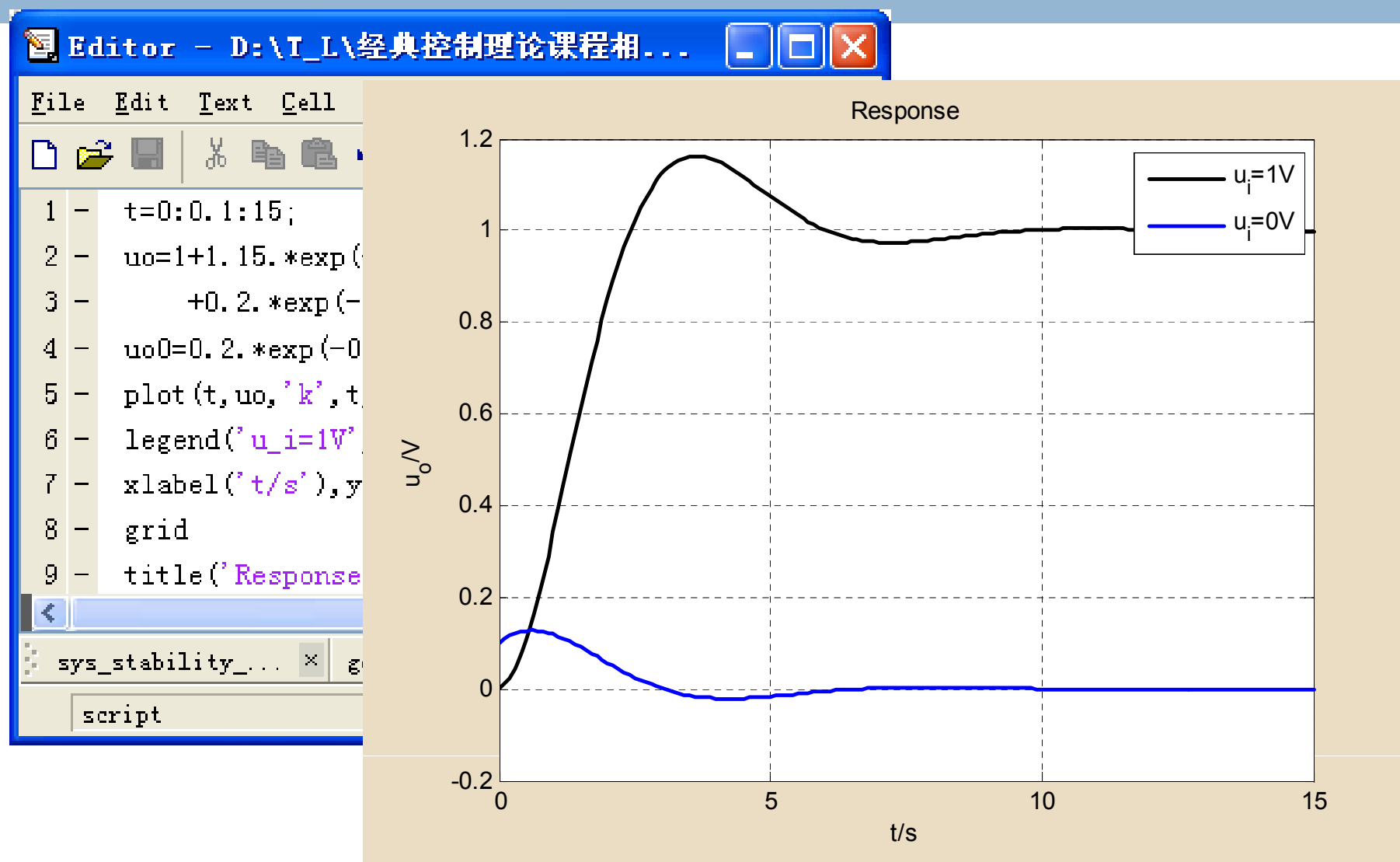
$$= 1 + 1.15e^{-0.5t} \sin(0.866t - 120^\circ) + 0.2e^{-0.5t} \sin(0.866t + 30^\circ)$$

$u_i=0\text{V}$ :

$$u_o(t) = L^{-1} \left[ \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1} \right] = 0.2e^{-0.5t} \sin(0.866t + 30^\circ)$$

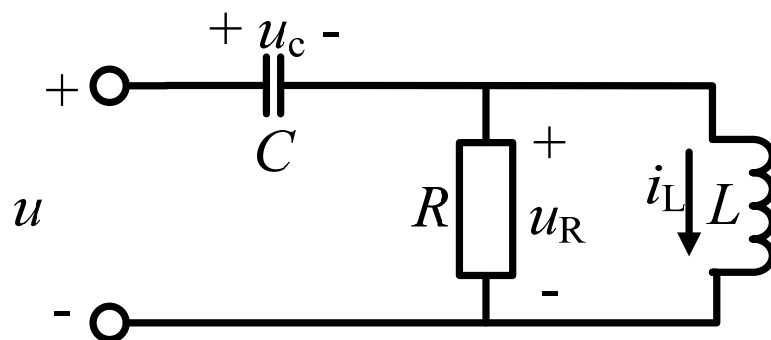


# 例：RLC串联电路的响应----仿真



# 课外练习

- 如下图所示的RLC网络(为计算方便, 取 $R=1/3\Omega$ ,  $C=1F$ ,  $L=0.5H$ ), 分别选 $u$ 和  $u_R$ 为输入和输出变量,  $u_c(0)=0.1V, i_L(0)=0.1A$ , 当输入为 $1V$ 时, 求输出响应。



这一讲就到这里！



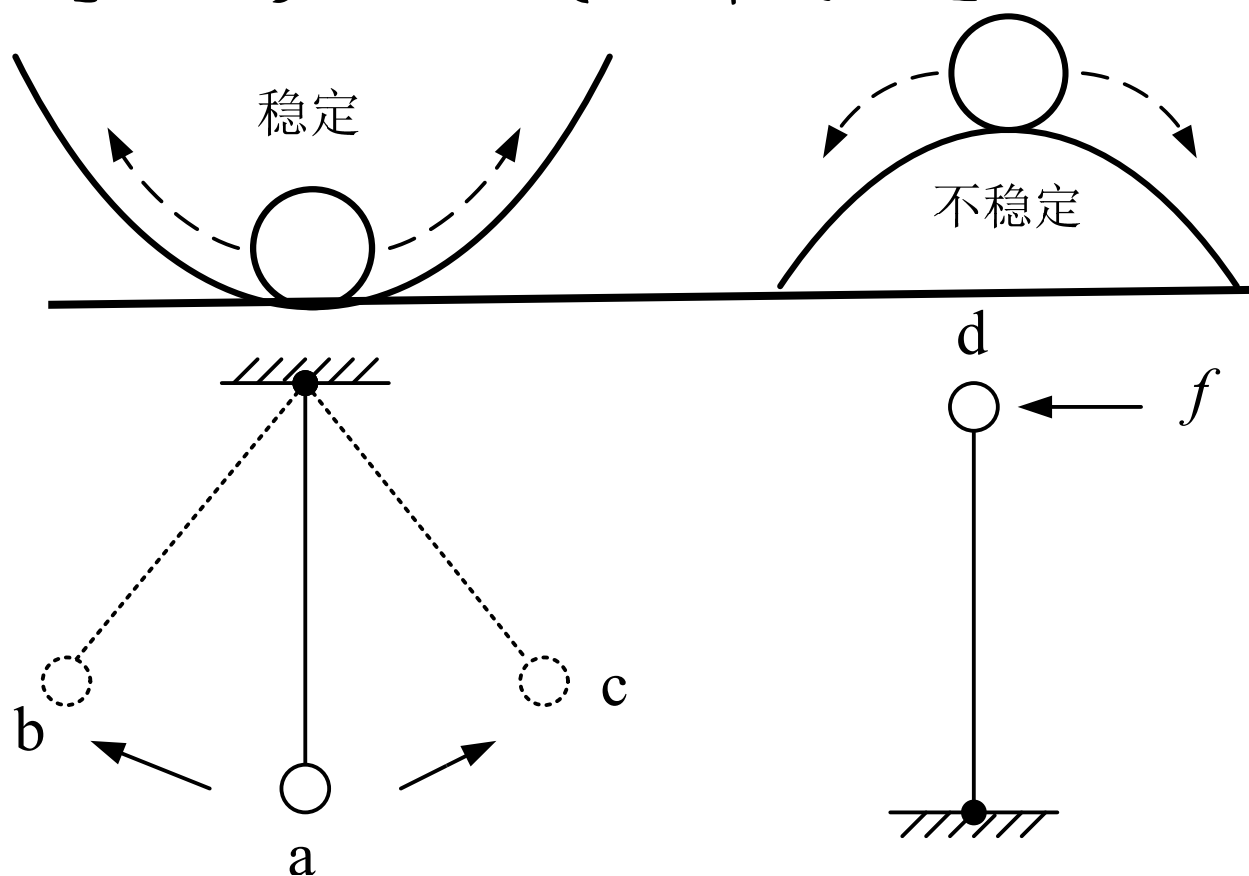
图图网: [tutu001.com](http://tutu001.com)

## 第二讲 稳定性概念与条件

稳定性是一个控制系统**最基本**的要求。控制系统在实际运行过程中，总会受到外界和内部一些因素的干扰，例如，负载和电源的波动、系统参数的变化、环境条件的改变等。稳定性问题研究的是系统运行于某一平衡状态下，受到干扰后离开了原来的平衡状态，在干扰作用消失后，系统能够**回到原来的平衡状态**的能力。

# 直观地理解稳定性

- 系统处于某一平衡状态，若此系统在干扰的作用下离开了原来的平衡状态，那么干扰作用消失后，系统是否能够回到原来的平衡状态？

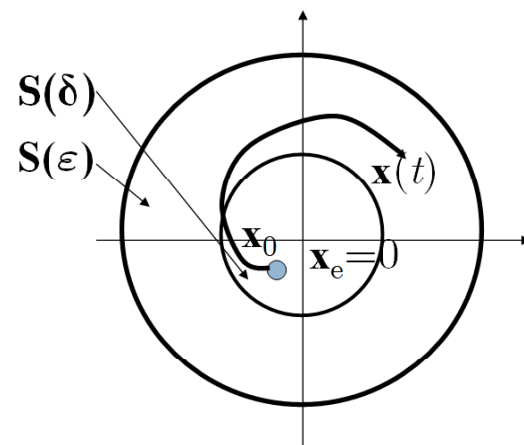




# Lyapunov稳定性---能量观点

- 1892年Lyapunov从能量观点分析稳定性。一个系统在外界干扰的作用下离开了原来的平衡状态，当干扰作用消失后，
  - 如果系统的储能既不增加，也不消耗，则这个平衡状态就是李亚普若夫意义下的稳定。
  - 如果系统储存的能量随时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，则这个平衡状态是渐近稳定的。
  - 如果系统不断地从内部吸收能量，储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的。

# Lyapunov稳定性——定义



□ 针对一般的动态系统

$$\dot{x} = f(x, t)$$

□ 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , 使得当  $\|x(t_0)\| \leq \delta(t_0, \varepsilon)$  时成立

$$\|x(t_0) - 0\|$$

$$\|x(t, t_0, x_0) - 0\| \leq \varepsilon$$

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

□ 则称系统关于平衡状态 (或原点)  $x=0$  是稳定的(Lyapunov意义下)。

□ 若上述定义中的  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , 即  $\delta$  与  $t_0$  无关(关于  $t_0$  一致), 则称所定义的稳定为一致稳定。

# BIBO稳定

- BIBO稳定(初始条件为0)：如果一个系统在一个有界输入或扰动作用下其响应也是有限的，称系统BIBO稳定。

- 对于线性定常系统而言，BIBO稳定满足什么条件？

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|d\tau \leq M \int_0^t |g(\tau)|d\tau$$

要求 $y(t)$ 有界 $\rightarrow$ 要求 $g(t)$ 收敛。

- 传递函数是冲激响应的Laplace变换，于是

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \Rightarrow |G(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)| \cdot |e^{-st}|dt = \int_0^\infty |g(t)| \cdot |e^{-\sigma t}|dt$$

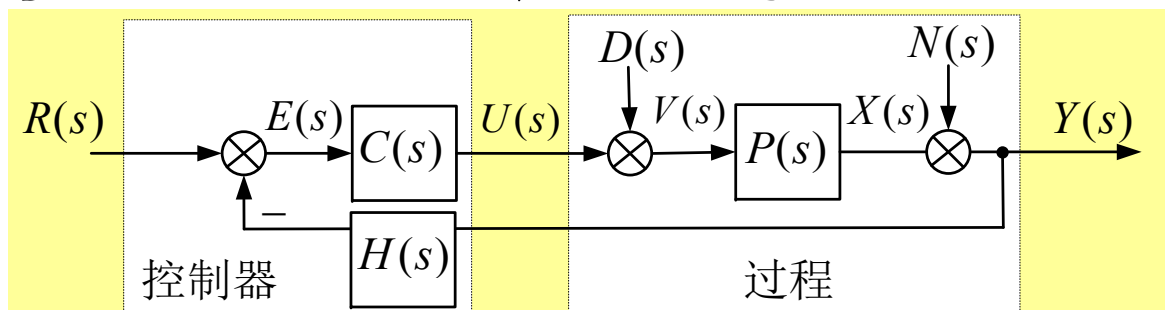
$$\xrightarrow{\sigma \geq 0} \|G(s)\|_{s=\sigma+i\omega} \rightarrow \infty \leq \int_0^\infty |g(t)| \cdot |e^{-\sigma t}|dt \leq \int_0^\infty |g(t)|dt$$

无界，与BIBO稳定条件矛盾。

- 结论：CLTIS-BIBOS  $\Leftrightarrow \sigma < 0$

# CLTIS的零输入稳定与渐近稳定

- **零输入稳定(渐近稳定)**: 当 $t$ 渐趋无穷时, 由初始条件产生的响应渐趋于0, 称该系统为零输入稳定的。



$$Y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)P(s)} R(s) + \frac{P(s)}{1 + H(s)C(s)P(s)} D(s) + \frac{1}{1 + H(s)C(s)P(s)} N(s) + \frac{N_{y0}(s) - N_{r0}(s) - N_{d0}(s) - N_{n0}(s)}{1 + H(s)C(s)P(s)}$$

反变换

$$y(t) = \sum_{j=1}^q k_j e^{s_j t} + \sum_{i=1}^{(n-q)/2} k_i e^{\sigma_i t} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

- **结论(充分必要条件)**: 对all  $s_j$ ,  $\text{Re}(s_j) < 0$ 时, CLTIS渐近稳定;  $\text{Re}(s_j) > 0$  || 有重虚根时, CLTIS不稳定; 仅存在单重虚根, 其他  $\text{Re}(s_j) < 0$ 时, CLTIS临稳定界。

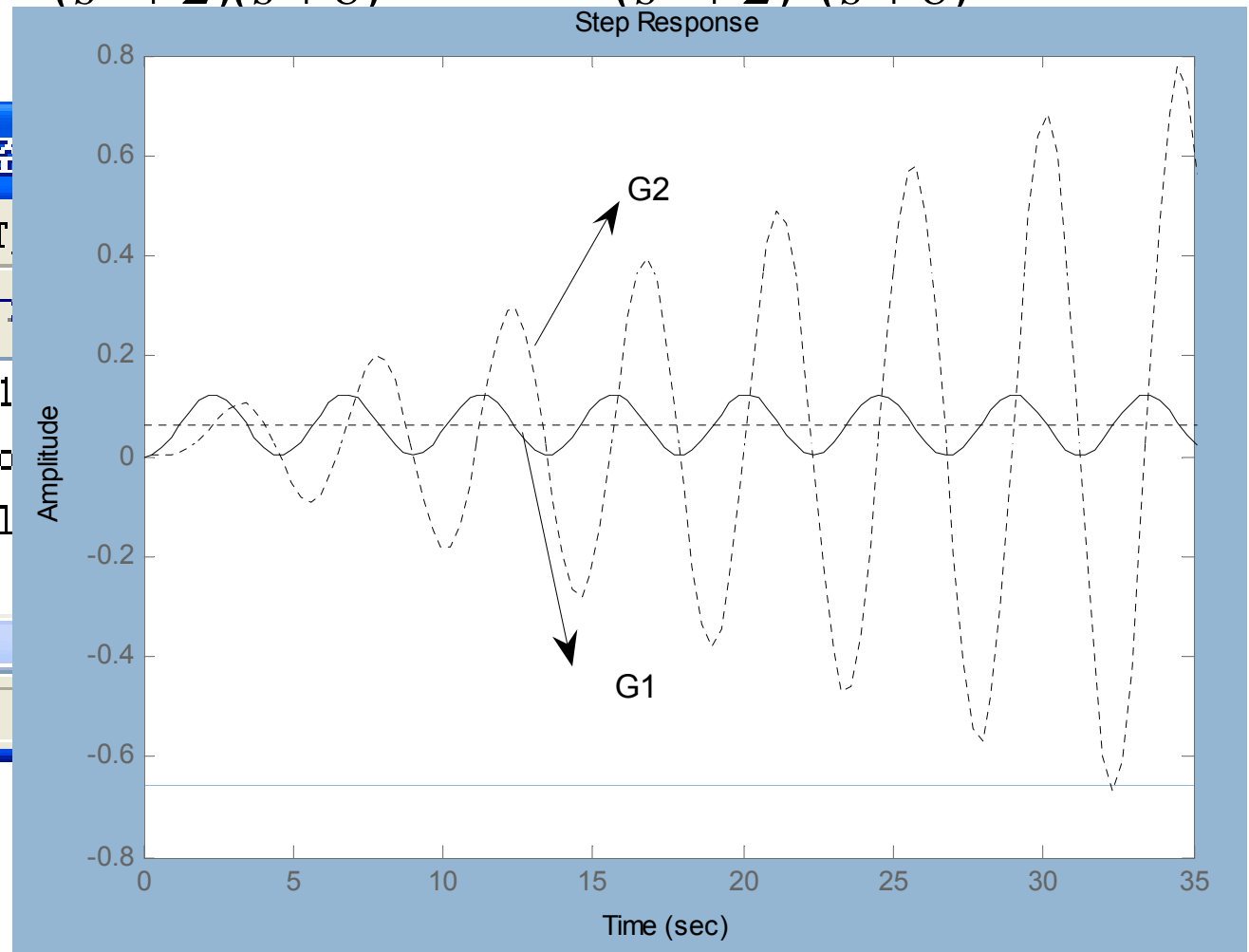
# 稳定性进一步说明

- 对于LTIS, BIBO、渐近稳定均要求所有的特征值均位于复平面左边。
- LTIS的稳定性取决于系统的固有性质, 而与外界条件无关, 稳定性取决于特征值。
- LS的稳定性还有一个局部特性, 这一特性只在时变线性系统和非线性系统中有所体现, 而在时不变线性系统中是全局的。
- 非线性系统的稳定相当复杂, 可能与初值和外加激励有关, 也可能出现稳定的自激励振荡现象。
- 可线性化的非线性系统可以利用Lyapunov第一法进行判定, 但也有判定不了的情况。

# 验证稳定性例1

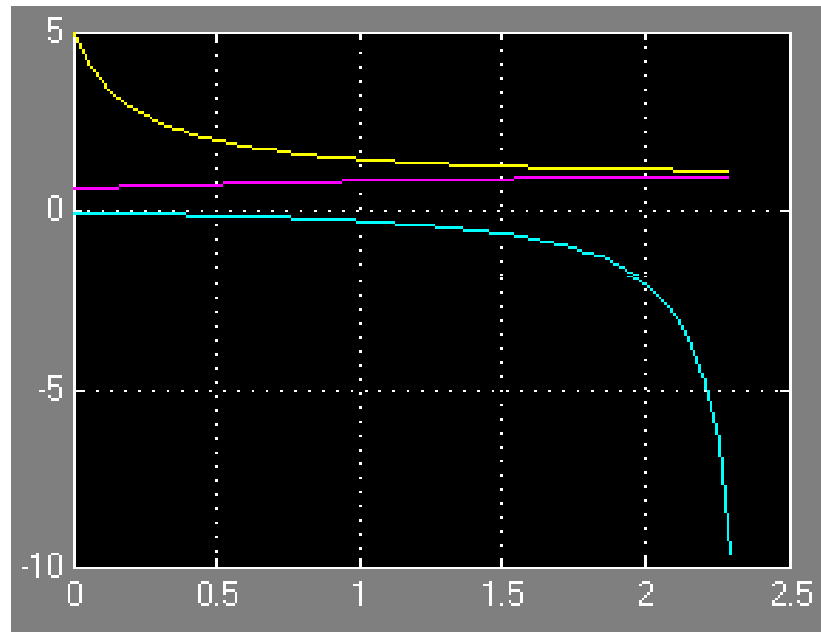
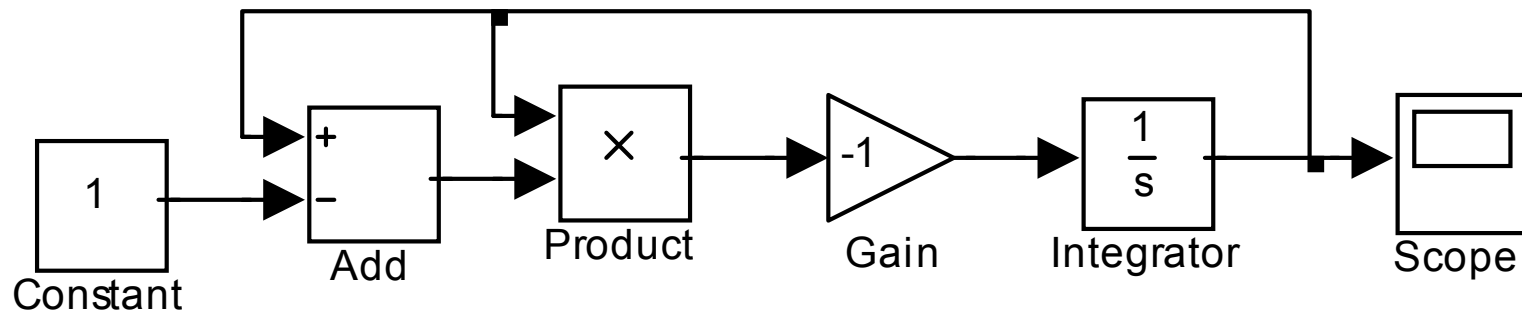
$$G_1(s) = \frac{1}{(s^2 + 2)(s + 8)}, G_2(s) = \frac{1}{(s^2 + 2)^2(s + 8)}$$

```
Editor - D:\I_L\经
File Edit Text Cell T
[Icons]
1 - G1=tf([1],conv([1
2 - G2=tf([1],conv(co
3 - step(G1,'k-'),hol
4 - step(G2,'k:')
script
```



## 验证稳定性例2

$$\frac{dy}{dt} + y(y-1) = 0, y(0) = C \quad C = 5, 0.6, -0.1$$



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com



## 第三讲 CLTIS稳定性R-H判据

当特征方程为高次方程时，难于手算获得其根，导致不能通过特征根判定稳定性。其实，判定稳定性只要知道有没有右半平面的根，即特征根的实部是否大于0。Routh-Hurwitz各自发展了代数判据，通过列表法或矩阵法得出在右半平面的根的个数。

# 引例

- 如果特征多项式如下，你能手动解它吗？

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$$

- 用MATLAB函数roots
  - 2.9323
  - 0.0222 + 0.7142i
  - 0.0222 - 0.7142i
  - 0.4453

- 说明还可以采用因式分解的方法求解，但因式分解也不是很容易。更高阶的方程更困难了！
- 为此，必须寻找一种**间接的方法**，即不需求解高次方程也能判别方程的特征根是否全部在复平面的左半平面的方法。Routh表法就是其中一种。

# CLTIS稳定的必要条件

## □ CLTIS的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0$$

## □ CLTIS稳定，即特征根的实部均为负数，则容易证明各系数的符号都相同(假设均为正数)。但这还不够判定稳定性。

## □ 例子：系数同号，但不稳定

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$$

**-2.9323**

**0.0222 + 0.7142i**

**0.0222 - 0.7142i**

**-0.4453**

# Routh判据

- Routh判据的第一步是列出Routh表，其两行是特征方程的系数，后面根据规则计算：

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	...		
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	...		
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	...	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	...	...	...		
...	...	...	...	...	...		
$s^0$	$h_1$					$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$

- 表中第一列系数符号改变的次数， $b_1$ 就是特征方程的根位于  $s$  平面右半平面的个数
- 稳定充要条件：表中第一列系数值均大于零。

# Routh判据之例

□ 设系统的特征方程如下，用Routh判据判别系统的稳定性。

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

解：列出Routh表如下：

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	0
$s^2$	$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$	5	0
$s^1$	$\frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} = -6$	0	
$s^0$	5		

显然，该系统是不稳定的，且有2个根在复平面右半平面。

# Routh判据两种特殊情况

- 某行第一列的系数为零，其余各项中某些项不等于零
  - ▣ 可以用一个很小的正数 $\varepsilon$ 来代替零值项，然后按通常的方法计算劳斯表中其余各项。
- 某行所有系数均为零
  - ▣ 如果出现这种情况，则表明在 $s$ 平面中有**对称于原点的实根**，或**共轭虚根**存在。可用下述方法处理：
    - a. 取元素**全为零的前一行**，以其系数组成辅助方程，式中的 $s$ 均为偶次。（ $\because$ 根是对称出现的）
    - b. 求辅助方程对 $s$ 的导数，以其系数代替全为零值行。
    - c. 继续求下面各行的系数，并判断稳定性。
    - d. 解辅助方程，得对称根。可用长除法求剩余的根。

# Routh判据第一种特殊情况例

□ 设系统的特征方程如下，用Routh判据判别系统的稳定性。

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$s^4 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$s^3 \quad 2 \quad 2 \quad 0$$

$$s^2 \quad \varepsilon \quad 1 \quad 0$$

$$s^1 \quad 2 - \frac{2}{\varepsilon} \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

✓ 考察第一列各项系数。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， $2 - 2/\varepsilon$ 是一个很大的负数，因此第一列各项数值的符号改变了两次。

✓ 按劳斯判据，该系统有两个极点具有正实部，系统是不稳定的。

# Routh判据第二种特殊情况例

□ 设系统的特征方程如下，用Routh判据判别系统的稳定性。

$$s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 8s^3 + 10s^2 + 4s + 4 = 0$$

$$s^6 \quad 1 \quad 6 \quad 10 \quad 4$$

$$s^5 \quad 2 \quad 8 \quad 4$$

$$s^4 \quad 2 \quad 8 \quad 4$$

$$s^3 \quad 0 \quad 0$$

$$s^3 \quad 8 \quad 16$$

$$s^2 \quad 4 \quad 4$$

$$s^1 \quad 8$$

$$s^0 \quad 4$$

✓ 将 $s^4$ 行的各项组成辅助方程并对右侧求导

$$F(s) = 2s^4 + 8s^2 + 4 = 0$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = 8s^3 + 16s$$

✓ 将辅助方程求导后的系数作为 $s^3$ 行的元素，并往下计算各行。

✓ 也可以求出其根：

✓ 由辅助方程得到4根

✓ 再通过待定参数因式展开对照系数方式求另外两个根



# 例：利用Routh判据确定参数范围

□ 设某单位反馈系统开环传递函数如下。试确定使闭环系统稳定的 $K$ 值和 $T$ 值。

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

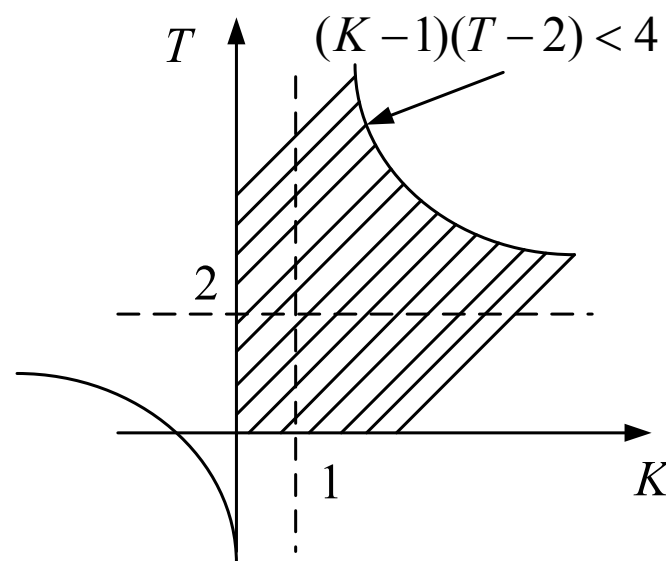
解：写出系统闭环特征方程如下：

$$2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

列出Routh表

$s^3$	$2T$	$1+K$
$s^2$	$2+T$	$K$
$s^1$	$\frac{2+2K+T-KT}{2+T}$	
$s^0$	$K$	

$$\text{即：} KT - T - 2K + 2 < 4 \Leftrightarrow (K-1)(T-2) < 4$$



所以有  $T > 0$ ,  $K > 0$ , 以及

$$2 + 2K + T - KT > 0$$

# 课外练习

- 利用Routh判据确定参数：单位反馈系统的开环传递函数如下，试确定使系统稳定的参数 $K$ 和 $T$ 的范围，并在平面坐标系中画出稳定区域。

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

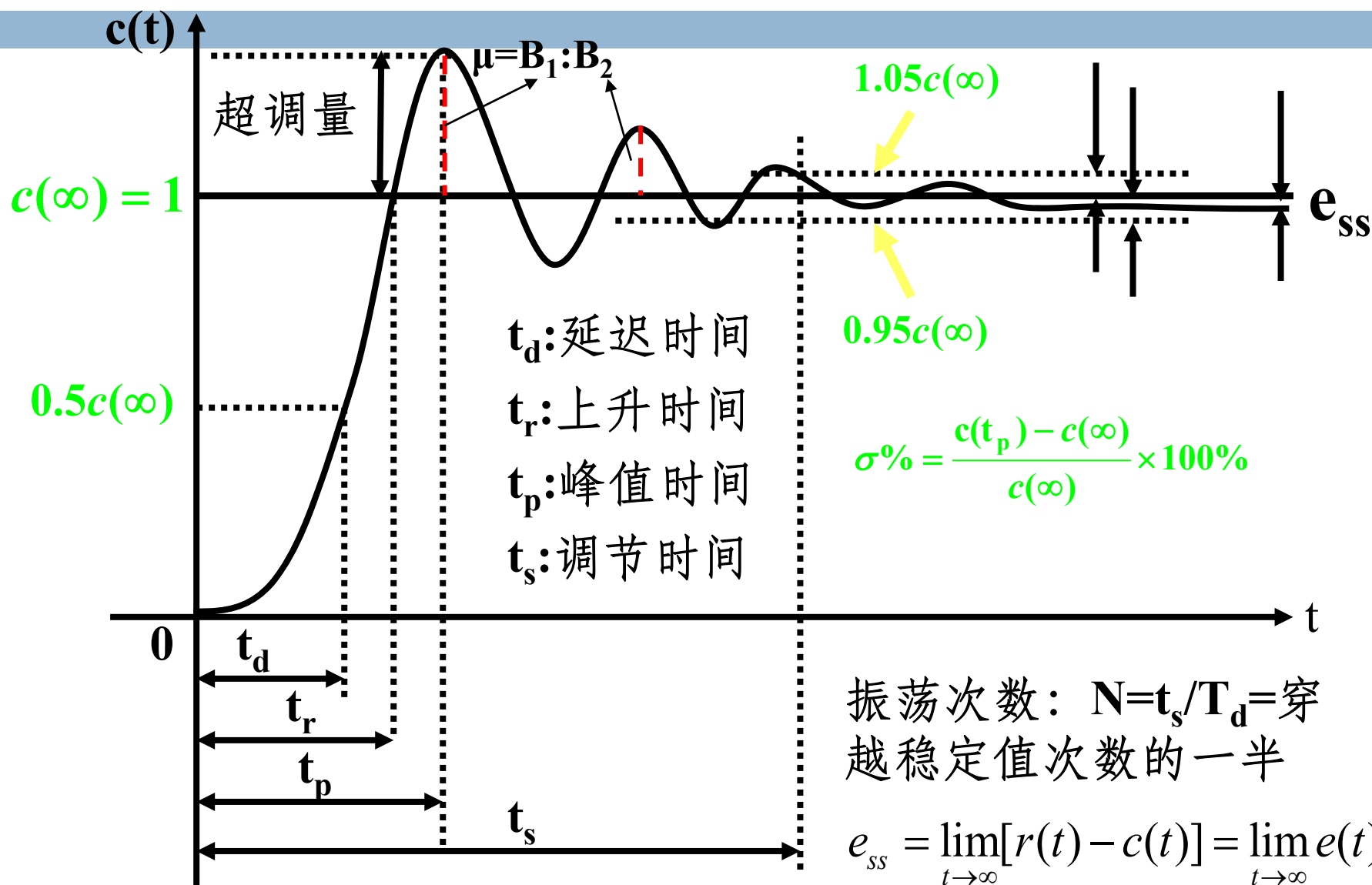
## 第四讲 系统性能指标相关概念

控制系统的性能指标：**稳**(稳定性与平稳性)、**快**、**准**、鲁棒(不灵敏)、资源/能源利用“少省”。这些要求可能是相互冲突的。对于不同的系统，应有不同的指标要求。对于**调节系统**，**强调抗干扰的能力**，对输出平稳性和准确性要求较高，而对快速响应要求不高；对于**跟踪系统**，**强调响应速度**，对快速性要求很高(机动性好)，而对平稳性的要求较低。无论是哪类系统，均可以用**暂态性能指标**和**稳态性能指标**评价。

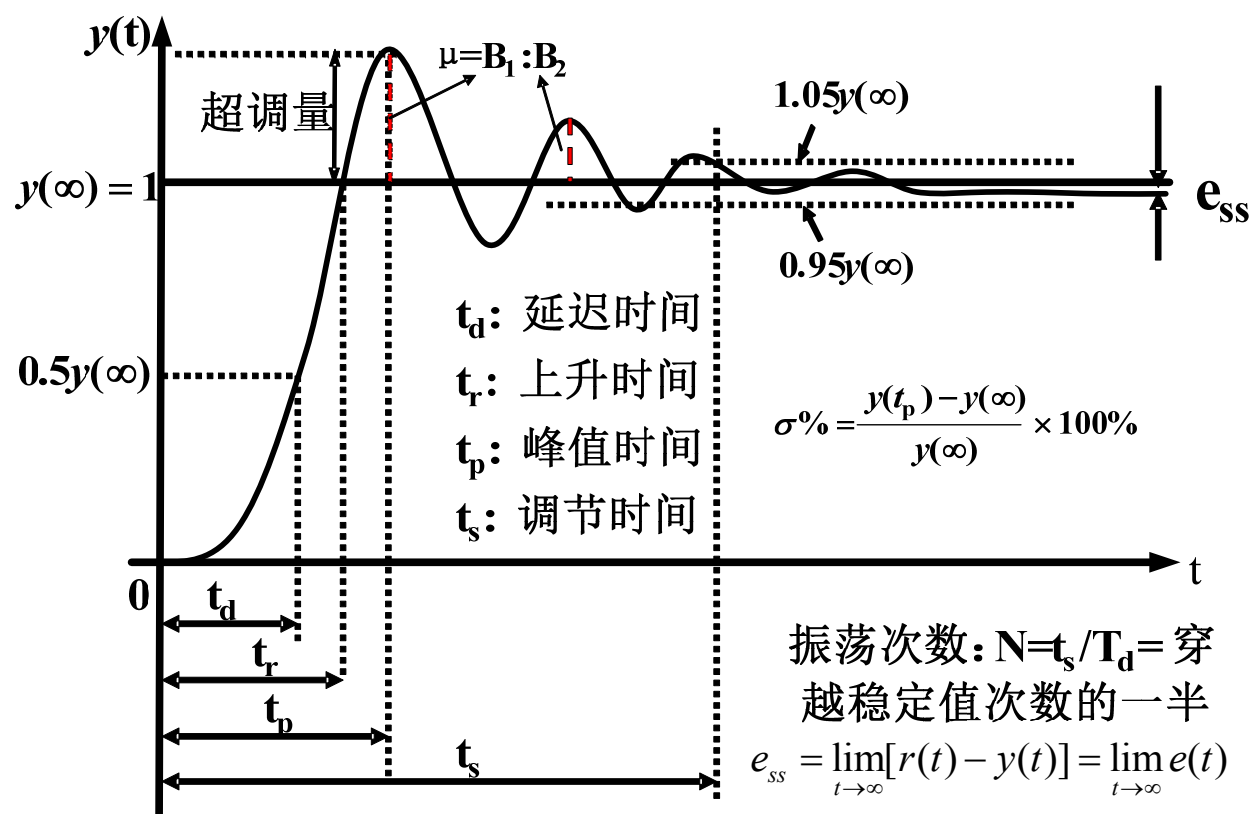
# 系统响应性能的定量描述

- 暂态性能指标描述暂态过程的快速性和平稳性。通常用系统的单位阶跃响应的参数表征系统的暂态性能，并且假设系统的初始状态为零。
  - 峰值时间  $t_p$  (peak time) - 反映快速性
  - 最大超调量  $\sigma_p(\%)$  (maximum overshoot) - 反映平稳性
  - 上升时间  $t_r$  (rise time) - 反映快速性
  - 调整时间  $t_s$  (settling time) - 反映快速性
  - 延迟时间  $t_d$  (delay time) - 不是纯滞后
  - 振荡次数  $N$
  - 衰减比  $\mu$
- 稳态性能指标描述稳态输出的准确性，常用稳态误差  $e_{ss}$  描述

# 系统响应性能的定量指标图解



# 系统响应性能的定量指标总结



- $t_r$ 、 $t_p$ 描述系统起始段的快慢
- $\sigma(\%)$ 、 $\mu$ 反映暂态过程振荡的剧烈程度
- $t_s$ 表示系统过渡过程的持续时间，总体上反映系统的快速性
- $e_{ss}$ 反映系统复现输入信号的最终精度
- 一般以  $\sigma(\%)$ 、 $t_s$ 、 $e_{ss}$ 评价响应的稳、快、准

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com



## 第五讲 一阶系统响应与性能指标

以一阶微分方程为运动方程的控制系统，称为一阶系统。如 RC 电路、恒温箱、液位调节系统、虽然存在非线性，但在工作点附近可以被线性化，得到近似一阶系统模型。不过，机电系统中很少出现一阶系统。

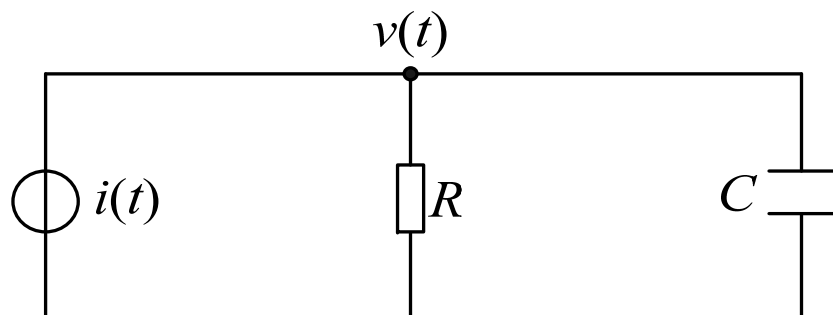
# 一阶系统

## □ 一阶系统的传递函数

$$G(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{Ts + 1}$$

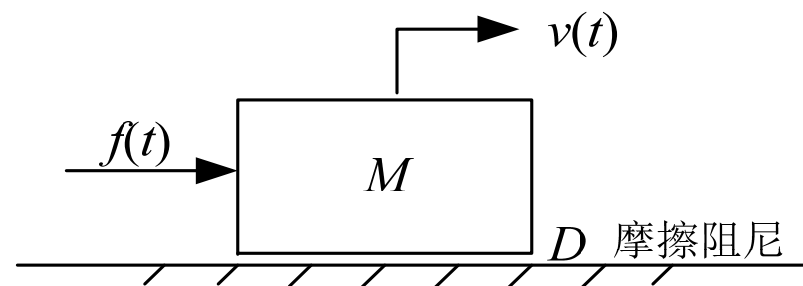
□  $\tau = 0$  时称为惯性环节。典型的一阶系统不仅  $\tau = 0$ ，还有  $k = 1$ 。

## □ 典型两类一阶惯性系统



$$\lambda = -1/RC, b = 1/C$$

$$\dot{v}(t) = \lambda v(t) + bu(t)$$



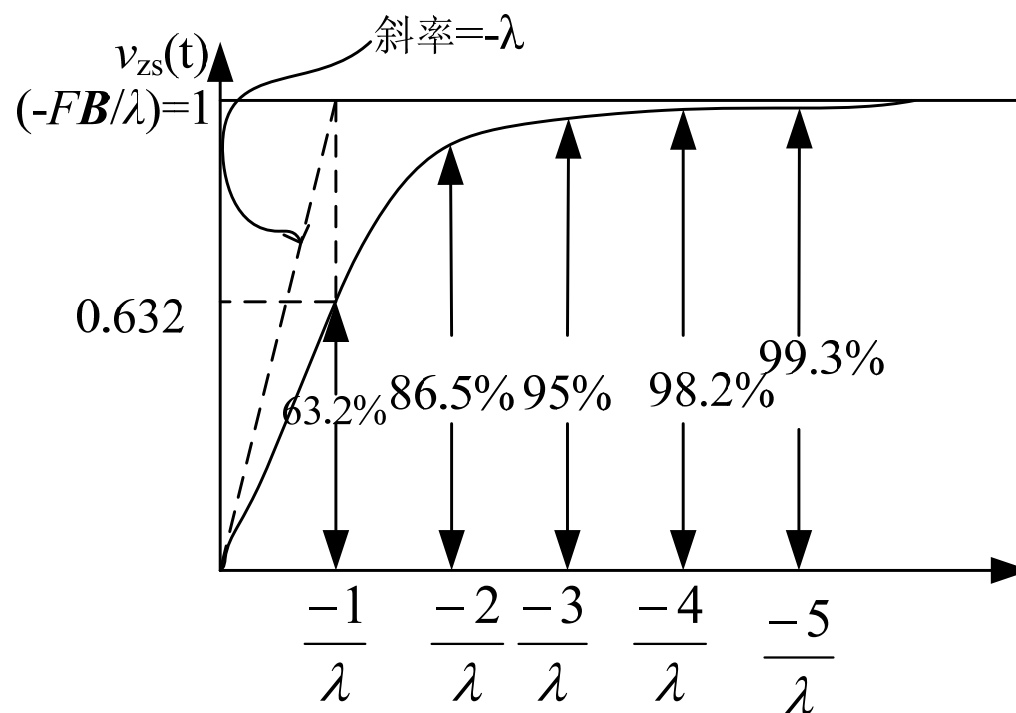
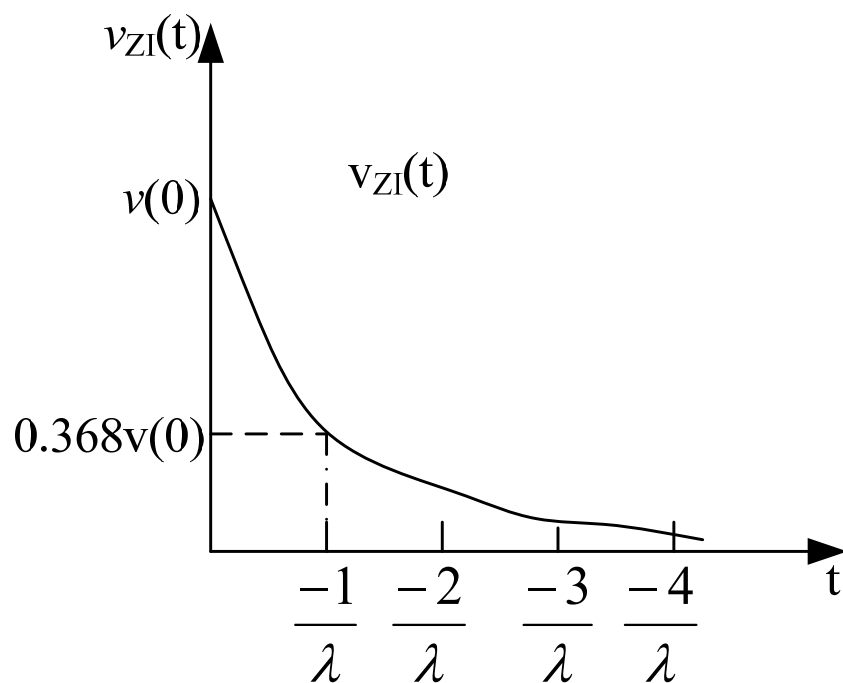
$$\lambda = -D/M, b = 1/M$$

# 典型两类一阶惯性系统的响应

$$\dot{v}(t) = \lambda v(t) + bu(t)$$

$$u(t) = F \cdot 1(t)$$

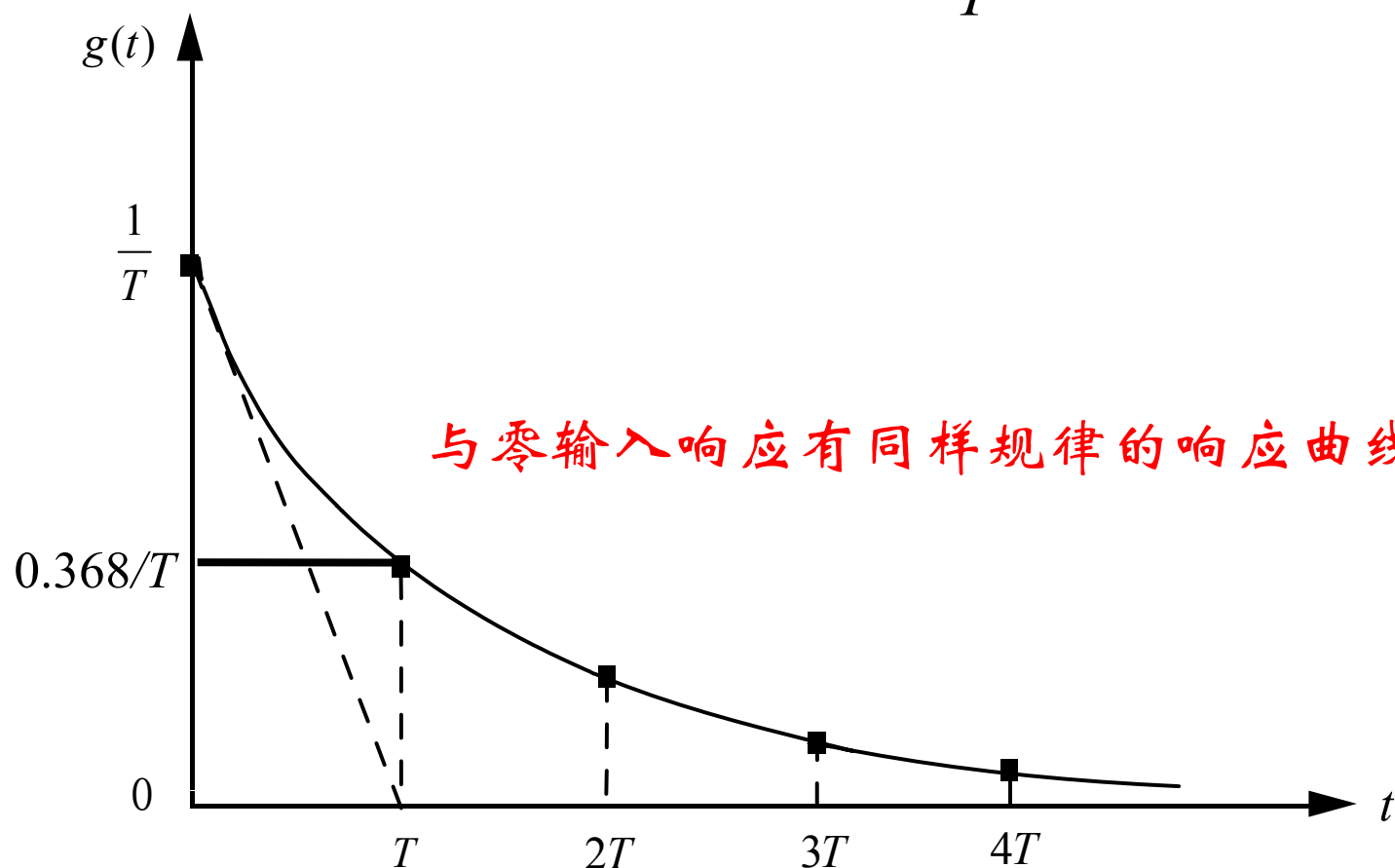
$$v(t) = e^{\lambda t} v(0) + (-FB/\lambda)(1 - e^{\lambda t}) = v_{ZI}(t) + v_{ZS}(t)$$



# 典型的一阶系统冲激响应

□ 当输入是冲激函数 $\delta(t)$ 时,

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \rightarrow 0 \quad t_s = (3 \sim 4)T$$

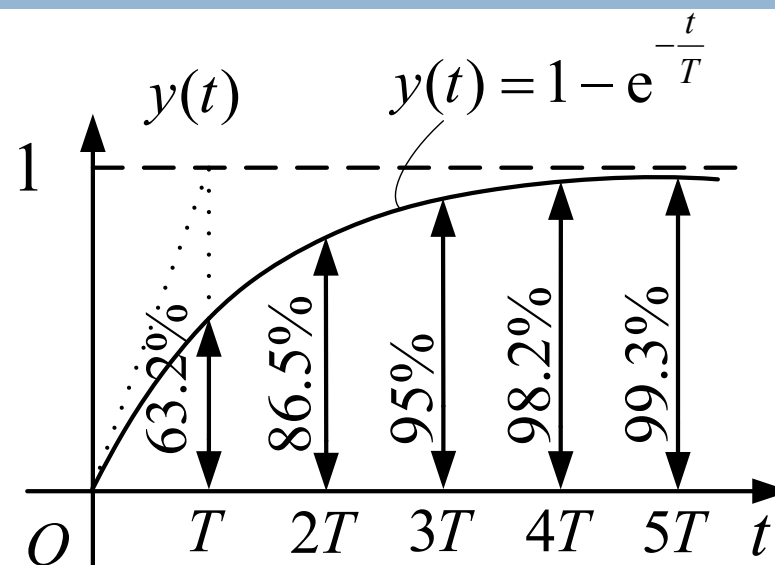


# 典型的一阶系统单位阶跃响应

- 输入为单位阶跃信号时，输出为

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

- 响应特性



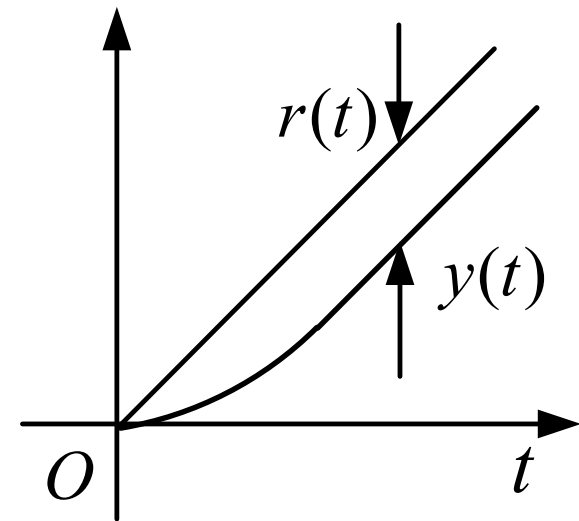
- 1. 以指数规律上升，初始斜率为  $1/T$ 。
- 2.  $t = 3T$  时输出上升到稳态值的 5% 范围内； $t = 4T$  时输出上升到稳态值的 2% 范围内。
- 3. 没有超调，没有稳态误差。
- 4. 响应求导就是冲激响应

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

# 典型的一阶系统单位斜坡响应

- 输入为单位斜坡信号  $r(t) = t$  时，  
输出为

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T}$$



- 响应特性

- ▣ 输入为单位斜坡信号时，稳态误差为  $T$ 。
- ▣ 响应求导就是阶跃响应

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

# 典型的一阶系统抛物线响应

□ 输入为单位斜坡信号  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$  时，输出为

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$$

□ 响应特性

▣ 误差  $e(t) = r(t) - y(t) = Tt - T^2(1 - e^{-t/T})$

▣ 一阶系统不能跟踪抛物线信号

▣ 对抛物线响应求导是斜坡响应

$$\frac{dy(t)}{dt} = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$$

# 一阶系统响应总结

$$\Delta. \because \delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \frac{d^2}{dt^2} t \cdot 1(t) = \frac{d^3}{dt^3} \frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$$

$$\therefore y_{\text{impulse}}(t) = \frac{d}{dt} y_{\text{step}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} y_{\text{rate}}(t) = \frac{d^3}{dt^3} y_{\text{acceleration}}(t)$$

- 上述关系是线性定常系统的一个重要特征，适用于任何阶线性系统，但不适用于非线性系统。





# 一阶系统的时域工程辨识

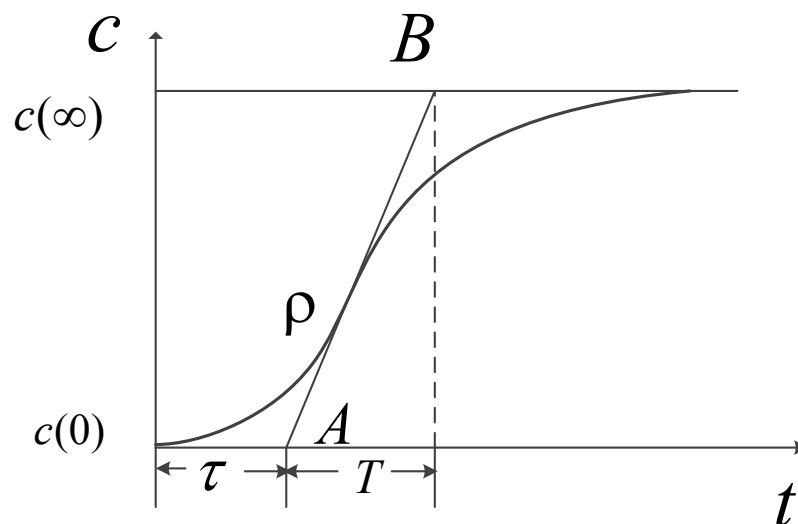
□ 一阶带滞后数学模型是典型工业过程

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

□ 将测定的阶跃响应曲线转化为传递函数数学模型，即是求K、T、 $\tau$ 。有两种方法

▣ 飞升曲线近似法

▣ 飞升曲线二两点法



# 飞升曲线近似法

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

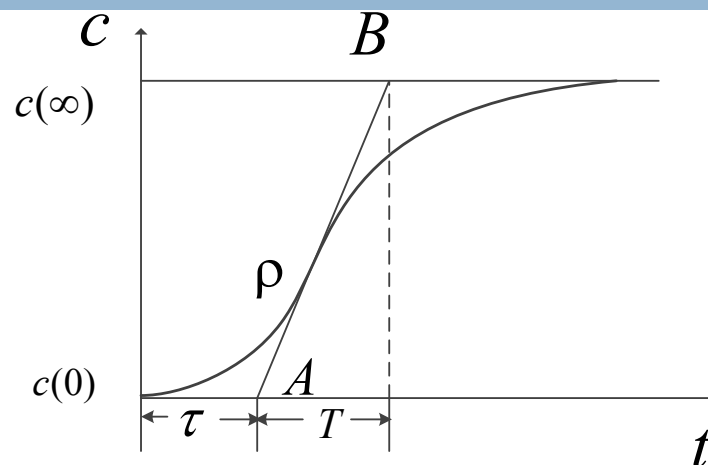
□  $K$  的确定

$$K = \frac{c(\infty) - c(0)}{\Delta u}$$

□ 传递函数中的  $T$  与  $\tau$  的确定:

作飞升曲线拐点的切线  $AB$  交于时间轴和  $c(\infty)$ ，由此确定  $\tau$  和  $T$

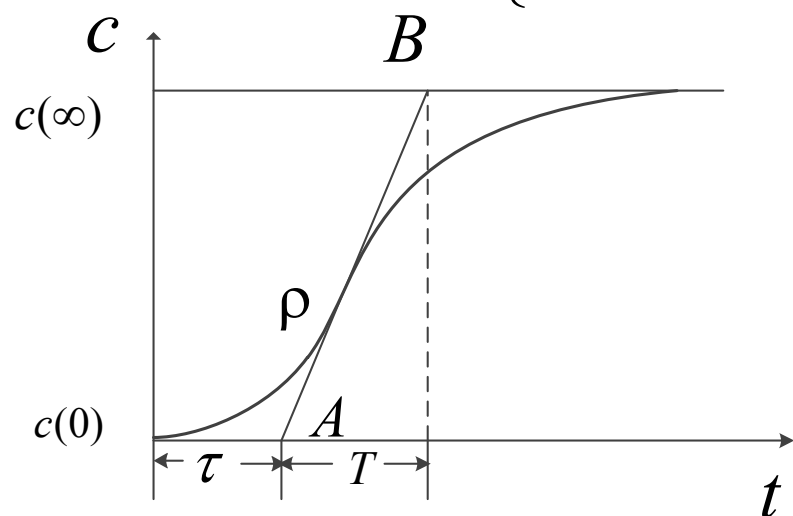
□ 切线选取随意带有误差，拟合精度低，在工业中广泛应用。



# 飞升曲线两点法

□ 将阶跃响应  $c(t)$  转换为无量纲形式

$$c^*(t) = \frac{c(t)}{c(\infty)} = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1 - \exp(-\frac{t-\tau}{T}), & t \geq \tau \end{cases}$$



$$\begin{cases} c^*(t_1) = 1 - \exp(-\frac{t_1 - \tau}{T}) \\ c^*(t_2) = 1 - \exp(-\frac{t_2 - \tau}{T}) \end{cases}$$

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - c^*(t_1)] - \ln[1 - c^*(t_2)]}$$
$$\tau = \frac{t_2 \ln[1 - c^*(t_1)] - t_1 \ln[1 - c^*(t_2)]}{\ln[1 - c^*(t_1)] - \ln[1 - c^*(t_2)]}$$

$$c^*(t_1) = 0.39, c^*(t_2) = 0.63 \Rightarrow \begin{cases} T = 2(t_2 - t_1) \\ \tau = 2t_1 - t_2 \end{cases}$$

这一讲就到这里！



图图网: [tutu001.com](http://tutu001.com)

## 第六讲 标准二阶系统响应与性能指标

以二阶微分方程为运动方程的控制系统，称为二阶系统。二阶系统是一类比较典型的系统，很多系统都可以表示一个二阶系统。一般的机电系统同时具有机械和电气两方面的惯性，所以都是二阶或更高阶的系统。在分析和设计系统时，经常用二阶系统作为基准。对实际中更常见高阶的系统往往可以通过降阶近似为二阶系统。

# 典型的二阶系统

牢记典型二阶系统的相关公式!

- 典型的二阶系统具有的传递函数和结构图 自然振荡角频率

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$T = 1/\omega_n$  称为系统的 时间常数

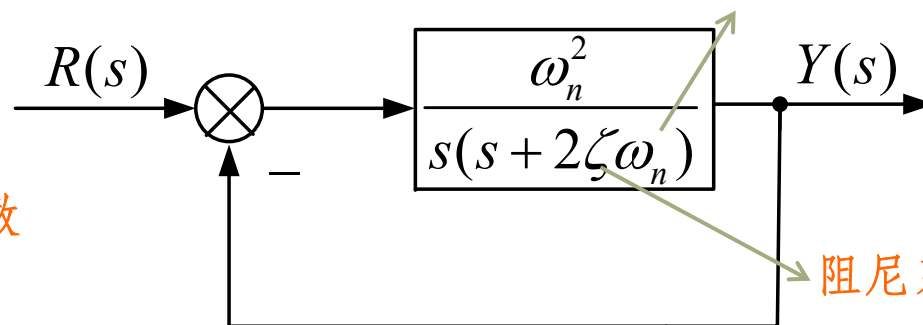
- 特点

- ▣ 负反馈闭环结构
- ▣ 开环带有积分
- ▣ 没有零点

- 特征方程与根

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$



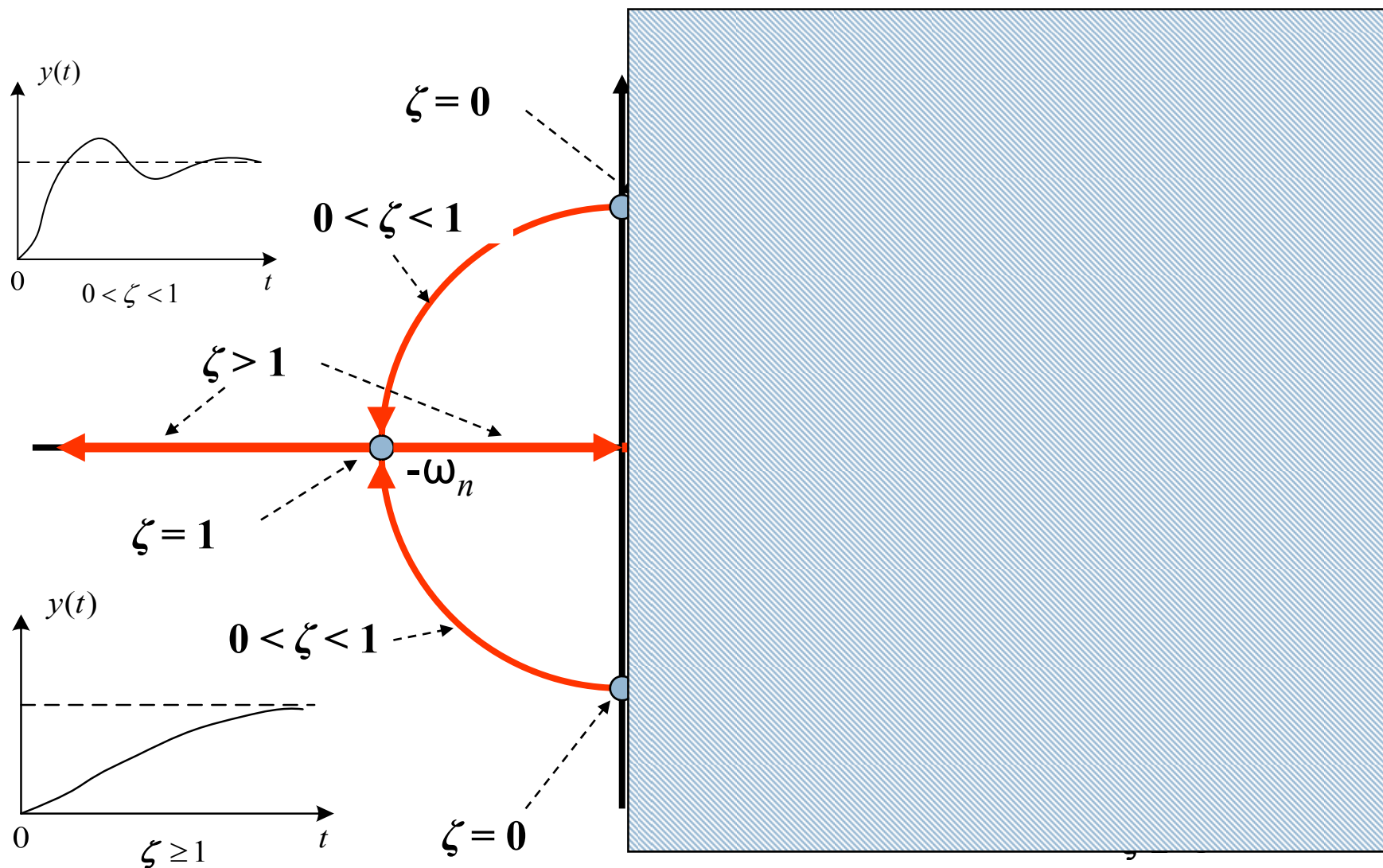
- 特征根非重根时，系统的 阶跃响应 为

$$y(t) = 1 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- ✓ 特征根在复平面上的位置，对系统的响应有很大的影响。
- ✓ 阻尼系数  $\zeta$  的取值决定了特征根在复平面上的位置。

# 阻尼比变化导致特征根与阶跃响应变化

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$



# 实际中的 $\zeta \geq 0$ 的四种情况

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$\zeta = 0$        $s_1, s_2 = \pm i\omega_n$       undamped (无阻尼)  
└→ 系统单位阶跃响应的稳态响应是在1上下振动的正弦。

└→ 系统单位阶跃响应的稳态值为1，稳态误差为0  
 $0 < \zeta < 1$        $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$       underdamped (欠阻尼)

$\zeta = 1$        $s_1, s_2 = -\omega_n$       critical damped (临界阻尼)

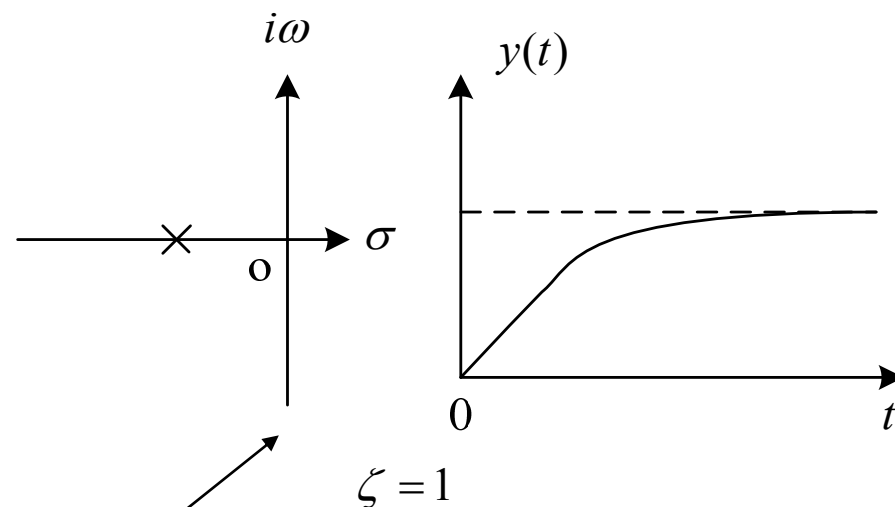
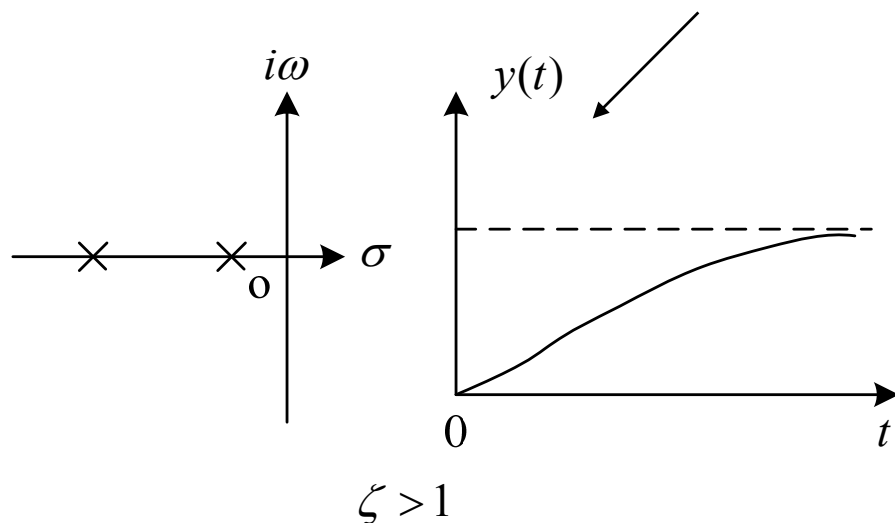
$\zeta > 1$        $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$       overdamped (过阻尼)



# 过阻尼与临界阻尼系统的阶跃响应

- 过阻尼系统和临界阻尼系统的单位阶跃响应是无振荡的单调上升曲线。超调量为 0；阻尼系数越大，调整时间越长。

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{s_1 t} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{s_2 t} \quad t_s \approx (3 \sim 4) \frac{1}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}$$



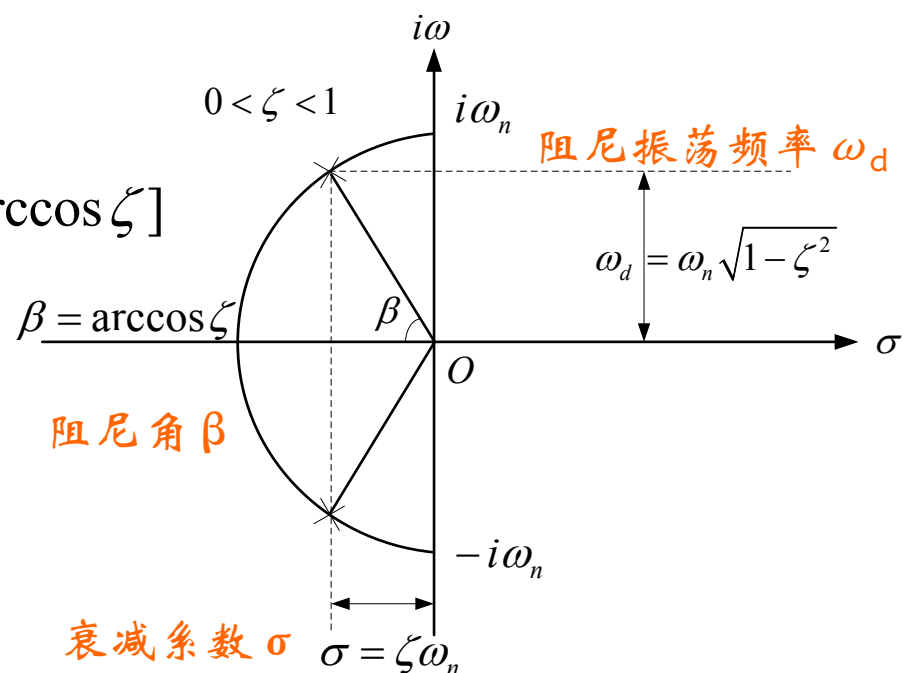
$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), t \geq 0 \quad t_s \approx 4.7 / \omega_n$$

# 欠阻尼系统的阶跃响应

- 欠阻尼系统具有灵活的暂态性能，而且多数机电控制系统都与欠阻尼二阶系统的性能相似，因此欠阻尼系统在实际中应用最广泛。
- 欠阻尼系统的极点和单位阶跃响应分别为：

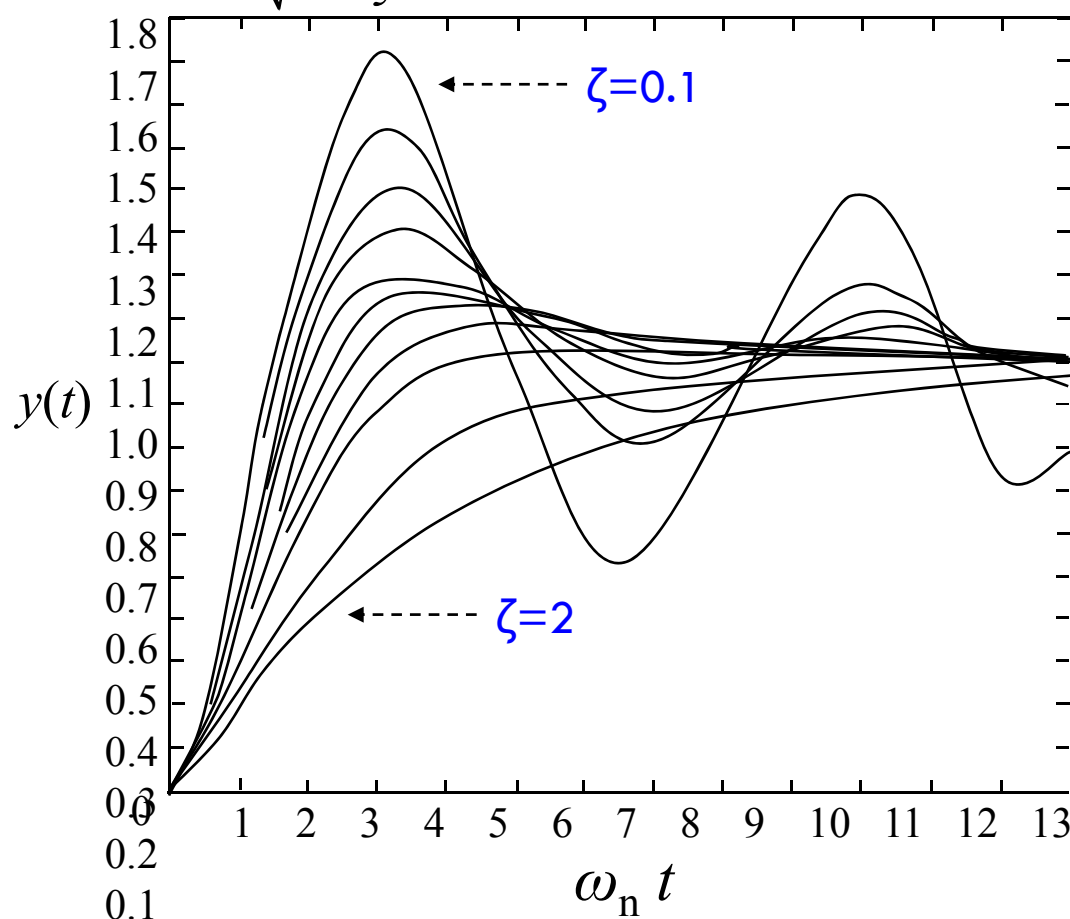
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm i\omega_d$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \arccos\zeta] \\ &= 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_d t + \beta] \end{aligned}$$



# 欠阻尼系统的阶跃响应特点

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta] = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_d t + \beta]$$



- 欠阻尼系统的单位阶跃响应是幅度按指数规律衰减的振荡过程。
- 阻尼系数越小，超调量越大。

# 欠阻尼系统的阶跃响应指标计算-1

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta] = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_d t + \beta]$$

- 将  $y(t)$  对时间取导数并令其等于0，可以得到峰值

时间：  $\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sigma \sin(\omega_d t + \beta) - \omega_d \cos(\omega_d t + \beta)] = 0$

→  $t = \frac{k\pi}{\omega_d}, k = 1, 2, \dots$  第1个峰值时间 →  $t_p = \pi / \omega_d$

可见：  $\begin{cases} \zeta \text{一定时}, \omega_n \uparrow \rightarrow t_p \downarrow \\ \omega_n \text{一定时}, \zeta \uparrow \rightarrow t_p \uparrow \end{cases}$

- 代入响应表达式得峰值

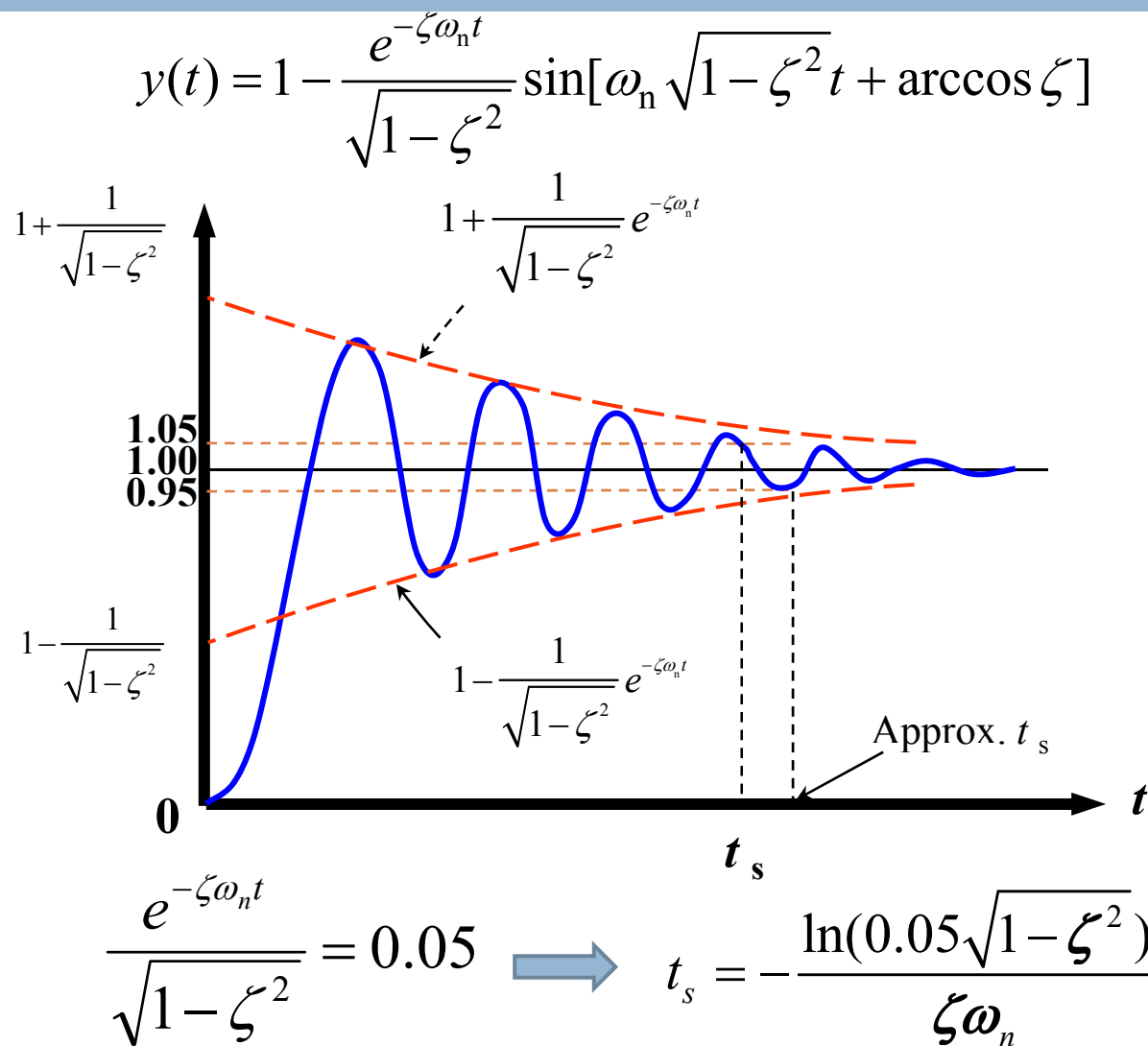
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_d t + \beta] = 1 + e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

- 于是超调量为

$$\sigma_p(\%) = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

超调量仅与阻尼系数有关，与自然频率无关。

# 欠阻尼系统的阶跃响应指标计算-2



- 在各类指标中**调节时间**的计算最困难。
- 工程上通常用响应曲线的包络线（上包络线或者下包络线）来进行估计，所得的结果略为保守。

# 由要求调整时间最短求阻尼比



- 目前的教材中讨论了两种方法
  - ▣ i. 由 **包络线求法** 得到的阻尼比在5%和2%要求下分别为0.8895、0.9096。
  - ▣ ii. 由 **最大超调量** 要求达到5%和2%的求法得到的阻尼比分别为0.6901、0.7797。
- 可以看出后者才是要求调整时间最短时的最佳阻尼比，所以用包络线法计算的结果在精确度要求较高时是不科学的。
- 根据对误差的要求基本可以确定 **调整时间最短要求下最佳阻尼比** 应在0.6~0.8之间，通常取 **0.707**。

# 欠阻尼系统的阶跃响应指标计算-3

## □ 上升时间

$$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 1$$

$$\therefore t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \begin{cases} \zeta \text{一定时}, \omega_n \uparrow \rightarrow t_r \downarrow \\ \omega_n \text{一定时}, \zeta \downarrow \rightarrow t_r \downarrow \end{cases}$$

## □ 振荡次数

$$N = \frac{t_s}{T_d} = \frac{t_s \omega_d}{2\pi} \approx \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \\ \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \end{cases}$$

工程上,  $N=1.5\sim 2$ 次, 此时认为控制系统有较好性能。

## □ 衰减比

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{-\frac{3\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}} = \frac{e^{\frac{3\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$

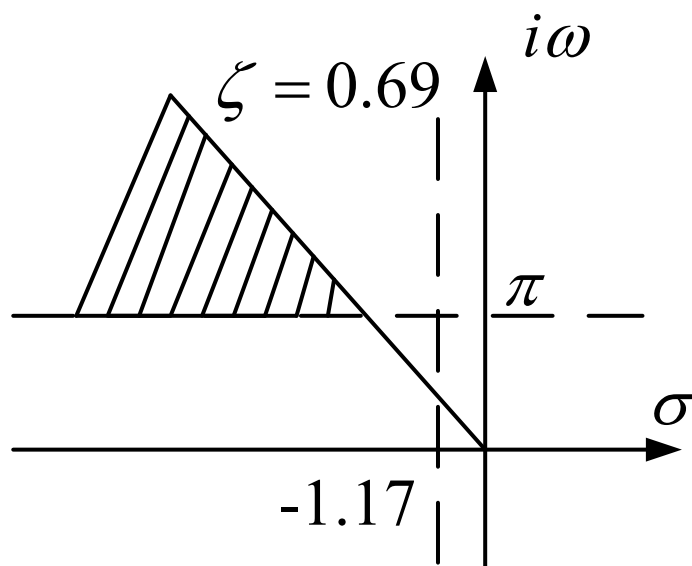
## □ 衰减率

$$\eta = \frac{B_1 - B_2}{B_1} = \frac{e^{\frac{3\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$

工程中也常设计控制系统的衰减比为4:1, 即衰减率为75%。

## 例：求极点区域

- 给定典型二阶系统的设计指标：超调量  $\sigma\% \leq 5\%$ ，调节时间  $t_p \leq 1s$ ，峰值时间  $t_s \leq 3s$ ，试确定系统极点配置的区域，以获得预期的响应特性。



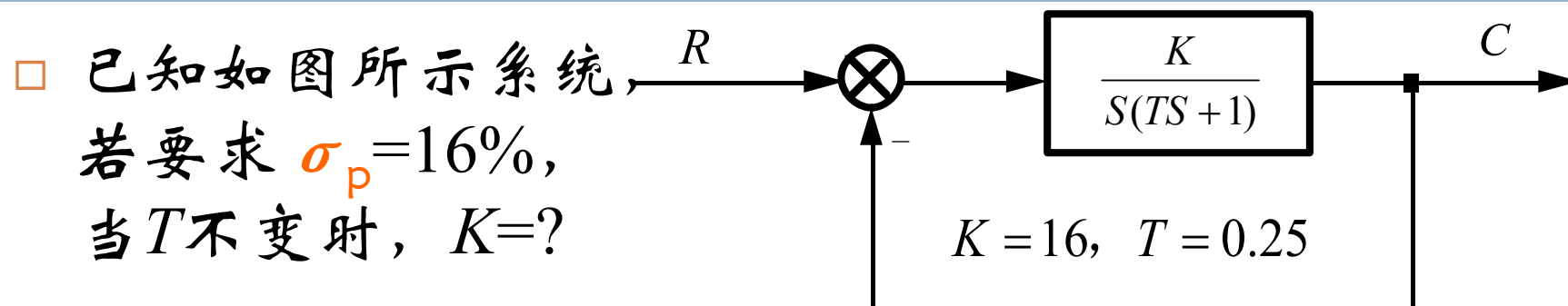
$$\sigma\% \leq 5\% \rightarrow \zeta$$

$$t_p \leq 1s \rightarrow \omega_d$$

$$t_s \leq 3s \rightarrow \zeta\omega_n$$



# 例：求满足要求的系统参数



$$\text{为使 } \sigma\% = 16\%, \text{ 则 } -\zeta\pi = \sqrt{1-\zeta^2} \ln 0.16 = -1.83\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\therefore \zeta^2\pi^2 = (1-\zeta^2) \times 1.83^2 = 3.35 - 3.35\zeta^2$$

$$\therefore \zeta^2(\pi^2 + 3.35) = 3.35, \text{ 故 } \zeta = \sqrt{\frac{3.35}{\pi^2 + 3.35}} \approx 0.5$$

当  $T$  不变时：

$$\therefore \frac{1}{T} = 2\zeta\omega_n \quad \therefore \omega_n = \frac{1}{2\zeta T} = \frac{1}{2 \times 0.5 \times 0.25} = 4 \left( \frac{1}{s} \right)$$

则  $K = \omega_n^2 T = 4^2 \times 0.25 = 4$  即  $K$  从 16  $\downarrow$  到 4 (将使  $e_{ss} \uparrow$ )

# 欠阻尼系统阶跃响应归纳

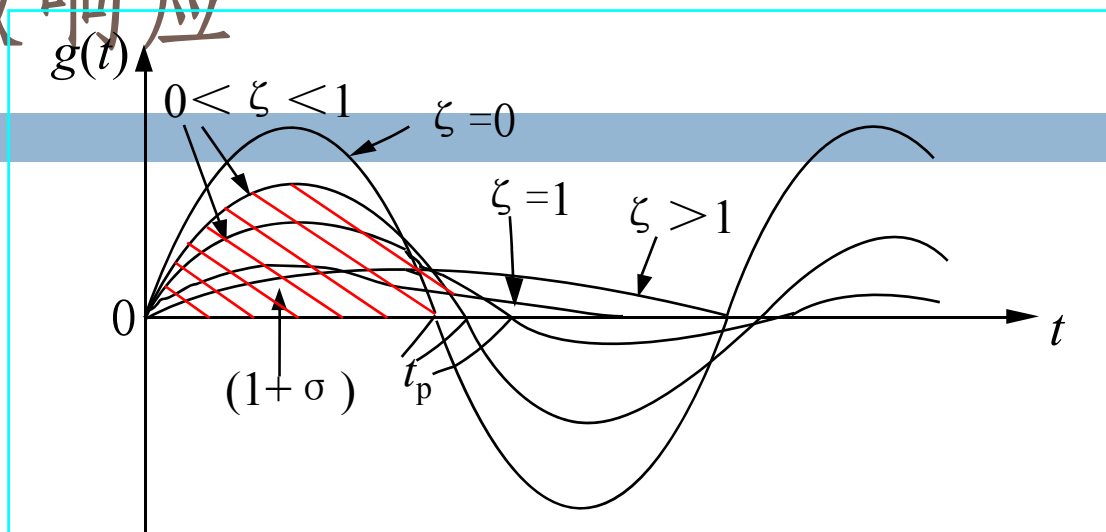
- 提高 $\omega_n$ 可减小上升时间、峰值时间、调整时间。
- $\zeta$ 越小，超调量越大，平稳性越差。 $\zeta$ 过小时，调整时间长。
- $\zeta$ 越大，系统响应迟钝，调整时间长，快速性差。
- $\zeta=0.707$ 时，调整时间短，快速性还好，而超调量 $<5\%$ ，平稳性也好。
- 一般选取 $\sigma=25\%\sim 1.5\%$ 确定 $\zeta=0.4\sim 0.8$

典型二阶欠阻尼系统很重要！

# 典型的二阶系统冲激响应

$$\because g(t) = \frac{d}{dt} y_{\text{step}}(t)$$

$$\therefore \begin{cases} \zeta = 0: g(t) = \omega_n \sin \omega_n t \\ \zeta = 1: g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \\ \zeta > 1: g(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} [e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}] \\ 0 < \zeta < 1: g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \end{cases}$$



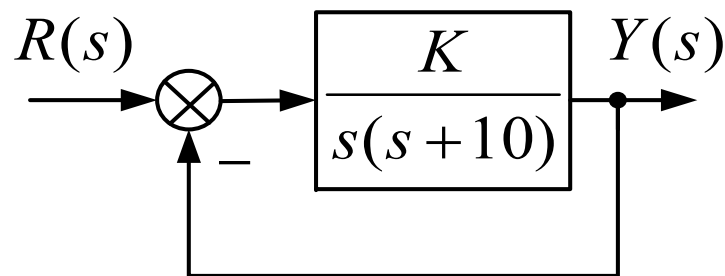
可见：(1)  $\zeta \geq 1$  时， $g(t)$  不改变符号[为何？]

(2)  $0 < \zeta < 1$  时， $g(t)$  与横轴第一次交点为  $t_p$

$$y_{\text{step}}(t) = \int_0^t g(t) dt \Rightarrow \int_0^{t_p} g(t) dt = y_{\text{step}}(t_p) = y_{\text{step max}} = 1 + \sigma$$

# 课外练习

- 对典型二阶系统，求当输入为速度和加速度信号时，零初始条件下输出响应表达式。
- 已知单位反馈系统结构图如图所示。求
  - ▣ (1)  $K=50$ 时系统单位阶跃响应的超调量；(4.3%)
  - ▣ (2)  $K$ 取何值才能使系统单位阶跃响应的超调量为 10%。(  $K=71.6$  )



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

## 第七讲 具有零点的典型二阶系统分析

在典型二阶系统基础上引入零点形成的传递函数也代表着一类闭环系统，本讲研究这类系统的响应特性。

# 具有零点的典型二阶系统与响应

- 在典型二阶系统基础上增加零点  $z = -1/\tau$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- 欠阻尼系统的阶跃响应分析

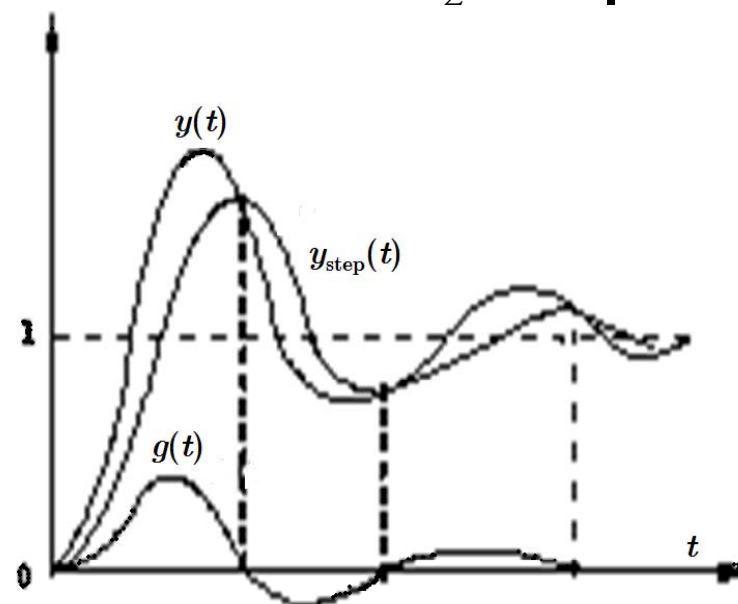
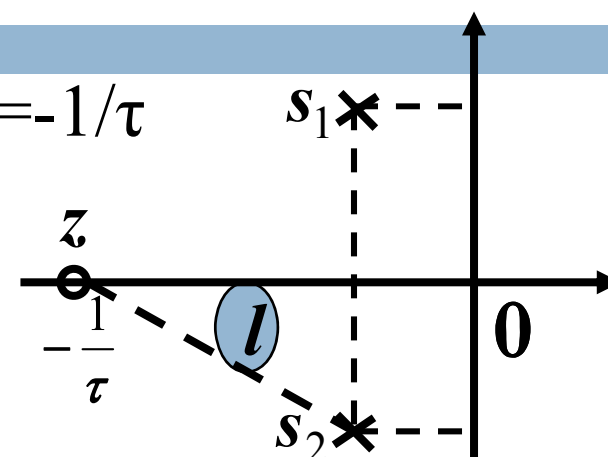
$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

拉氏逆变换

$$\downarrow = Y_{\text{step}}(s) + Y_2(s) = Y_{\text{step}}(s) + \tau s \cdot Y_{\text{step}}(s)$$

$$y(t) = y_{\text{step}}(t) + y_2(t) = y_{\text{step}}(t) + \tau \frac{dy_{\text{step}}(t)}{dt}$$

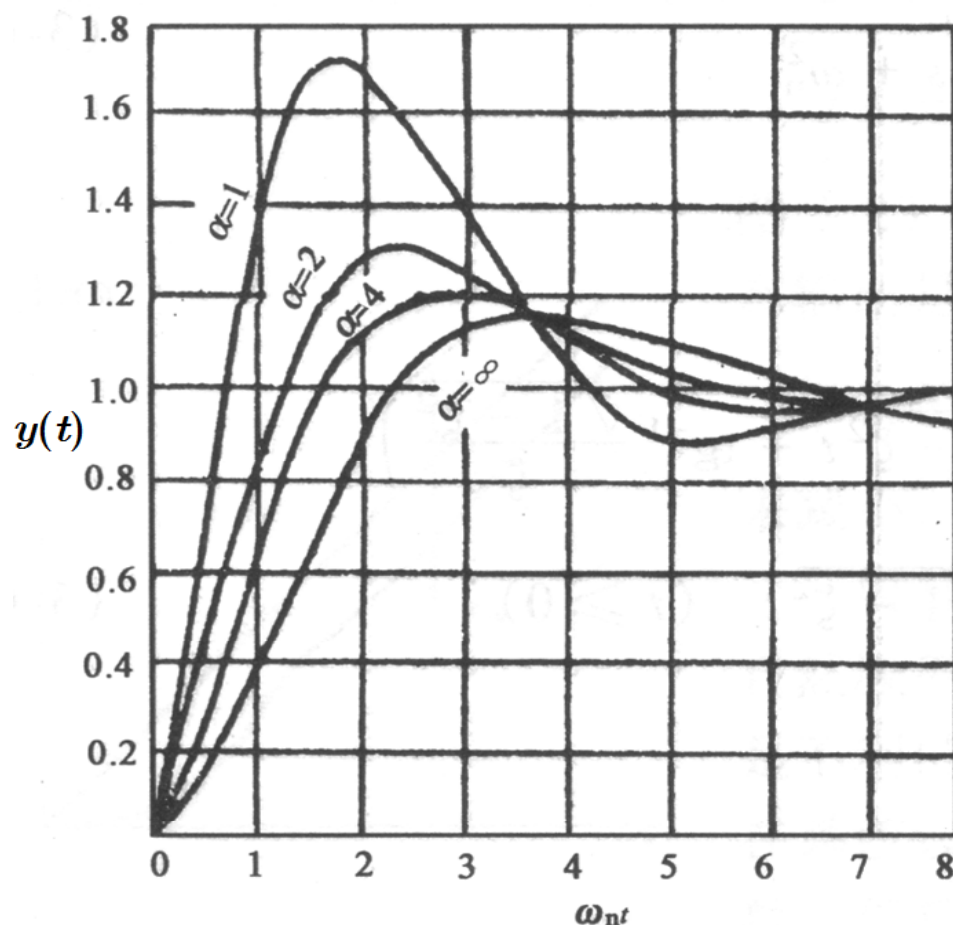
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \beta) + \frac{\tau t}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



可见， $y(t)$  比  $y_{\text{step}}(t)$  响应快，且超调量要大。

# 零点对响应影响的定量计算

□ 定量计算：引入一个定量描述零点作用的参量 $\alpha$



$$\alpha = \frac{|z|}{\sigma} = \frac{|z|}{\zeta \omega_n} = \frac{1}{\tau \zeta \omega_n}$$

$$y(t) = y_{\text{step}}(t)$$

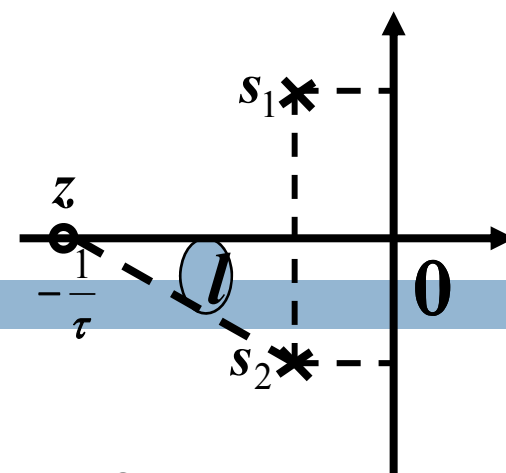
$$+ \frac{\omega_n}{\alpha \zeta \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha = \infty \text{ 时, 为典型二阶系统响应} \\ \alpha \downarrow \rightarrow \sigma \uparrow \rightarrow t_r \& t_p \downarrow \end{array} \right.$$

**$\alpha$ 值越小对系统响应影响越大!**

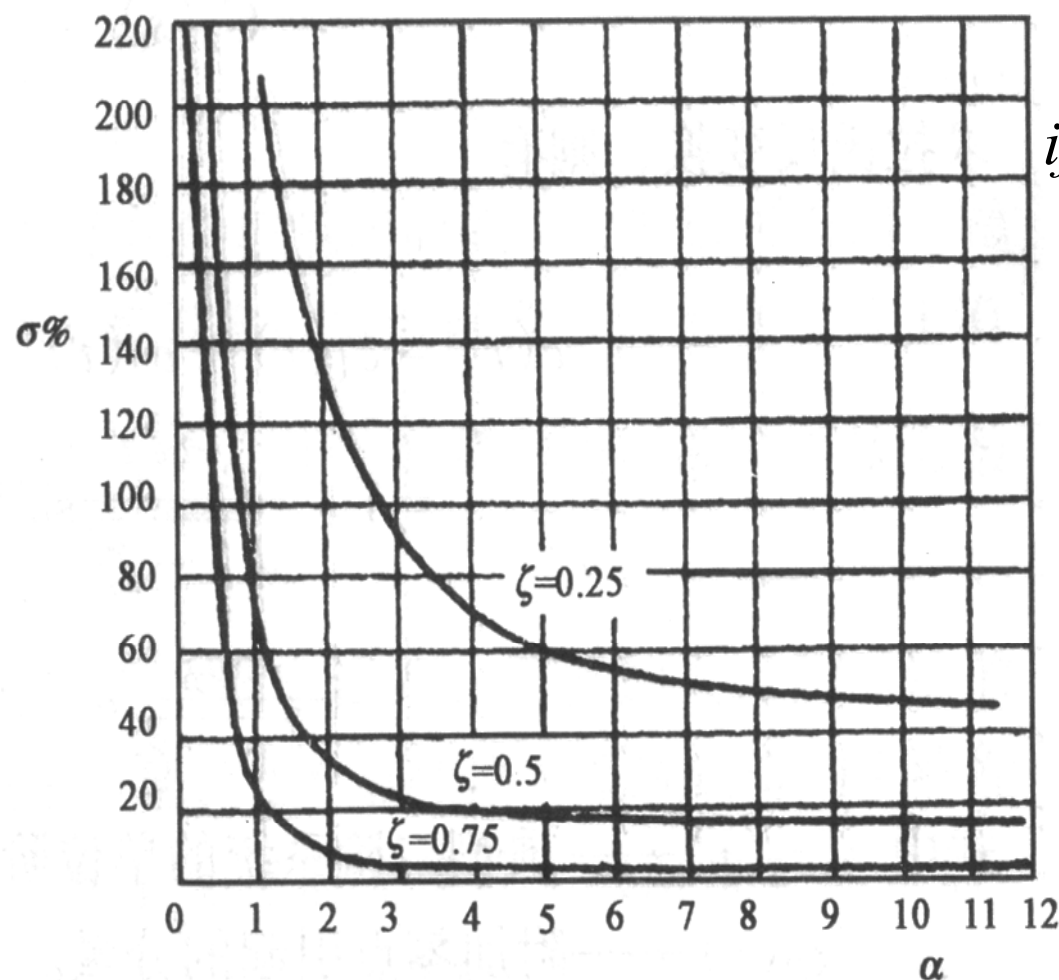


# 零点对响应指标计算



## □ 超调量 $\sigma$

由如图  $\alpha$ 、 $\sigma$ 、 $\zeta$  三者间的关系



$$\text{if } \begin{cases} \zeta = 0.25, & \alpha \geq 8 \\ \zeta = 0.5, & \alpha \geq 4 \\ \zeta = 0.75, & \alpha \geq 2.5 \end{cases}$$

Then 可以忽略零点对  $\sigma$  的影响，用典型的二阶系统超调量公式计算。

## □ 调节时间 $t_s$

$$t_s \approx \frac{1}{\zeta \omega_n} (3 \sim 4 + \ln \frac{l}{|z|})$$

$l$  是零点离共轭极点的距离

这一讲就到这里！

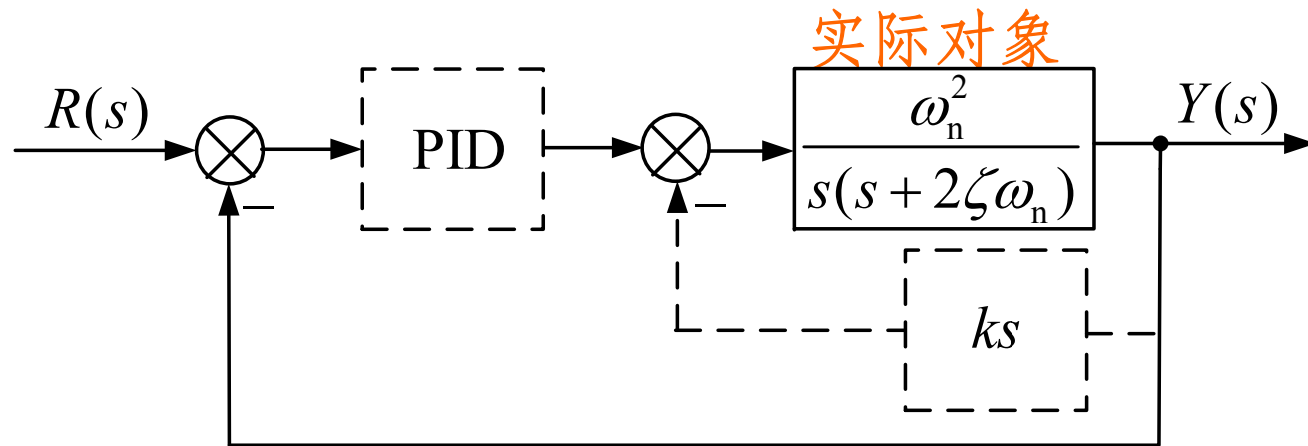


图图网: tutu001.com

## 第八讲 二阶系统性能的改善

典型二阶系统开环环节实际是很多对象的模型，其标称参数是不可改变的。为了改善对象的响应特性，需要在前向通道或反馈通道加入控制器，增加系统的可调参量。本讲通过在前向通道中引入PID，在反馈通道中引入微分(速度反馈)改善系统性能。

# 讨论的对象与控制器的位置



## □ PID串联校正

- P----比例控制

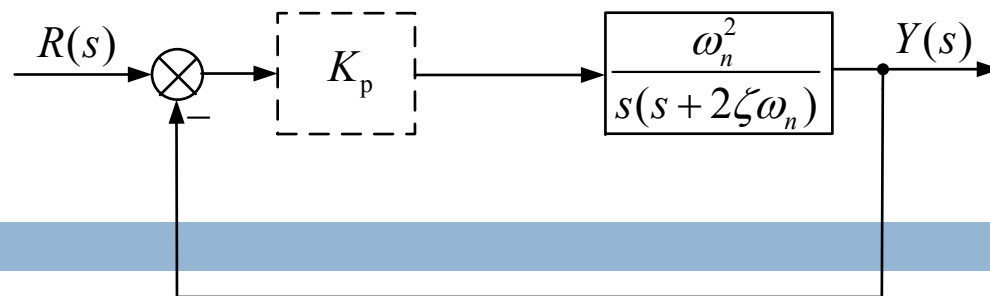
- PD----比例微分控制----超前

- PI----比例积分控制----滞后

- PID----比例积分微分控制----滞后超前

## □ 速度反馈校正

# P改善性能



加入P后，闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + K_p \omega_n^2} = \frac{\omega_{np}^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_{np} s + \omega_{np}^2}$$

变与不变：

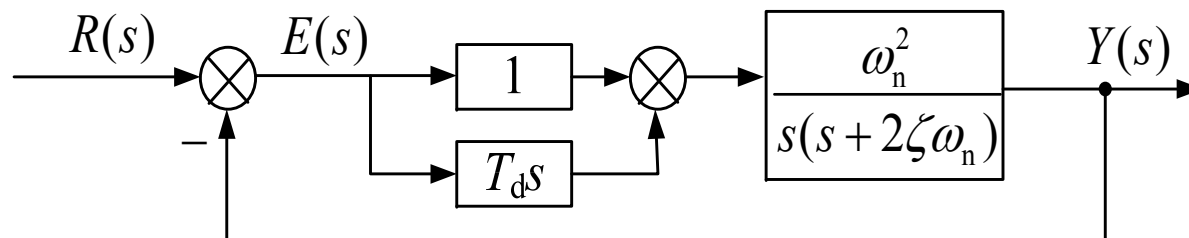
$$s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm i \sqrt{K_p} \omega_n \sqrt{1 - (\zeta / \sqrt{K_p})^2}$$

- 特征根的实部相较于二阶典型系统未变化
- 闭环位置增益(1)未变；开环速度增益依 $K_p$ 变化
- 固有频率随 $K_p$ 取值大小而顺势变化
- 阻尼系数随 $K_p$ 取值大小而反势变化
- 调节时间基本不变

$$\omega_{np} = \sqrt{K_p} \omega_n$$
$$\zeta_p = \zeta / \sqrt{K_p}$$

$K_p$ 增大，固有频率增大，阻尼减小、响应快； $K_p$ 减小，固有频率减小，阻尼增大，响应慢。但调节时间基本不变。仅 $K_p$ 控制效果并不明显。

# PD改善性能-1



□ 加入PD后，闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 T_d s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 (T_d s + 1)}{s^2 + 2\zeta_d \omega_n s + \omega_n^2}$$

□ 变与不变：

▣ 闭环位置增益(1)未变

▣ 开环速度增益未变  $K = \frac{\omega_n}{2\zeta}$

□ 自然频率未变

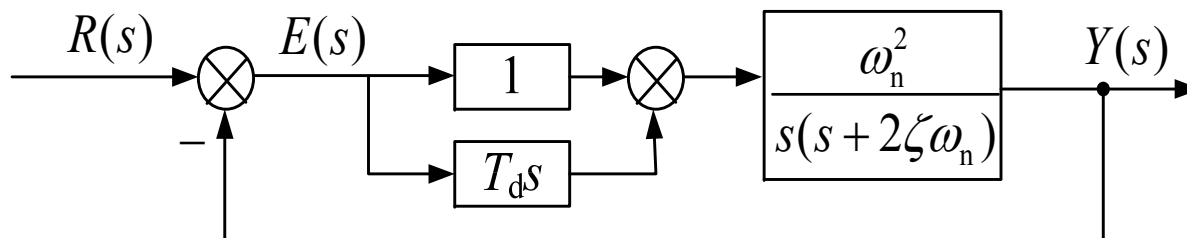
□ 阻尼系数变大，响应变缓

$$\zeta_d = \zeta + \frac{T_d \omega_n}{2}$$

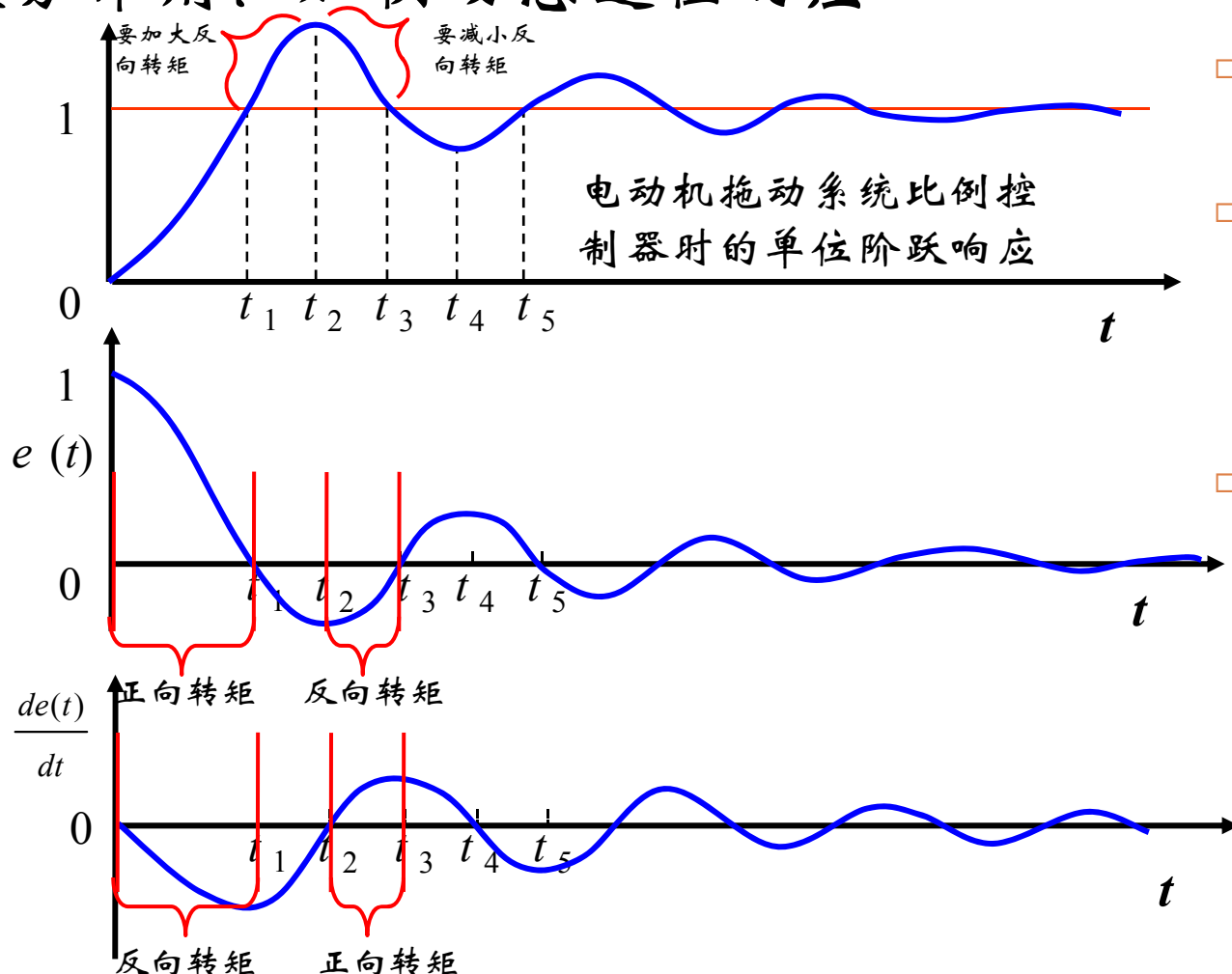
□ 系统的阶跃响应增加了一项冲激响应，幅度为  $T_d$  倍

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_d \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2 \cdot T_d s}{s^2 + 2\zeta_d \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

# PD改善性能-2

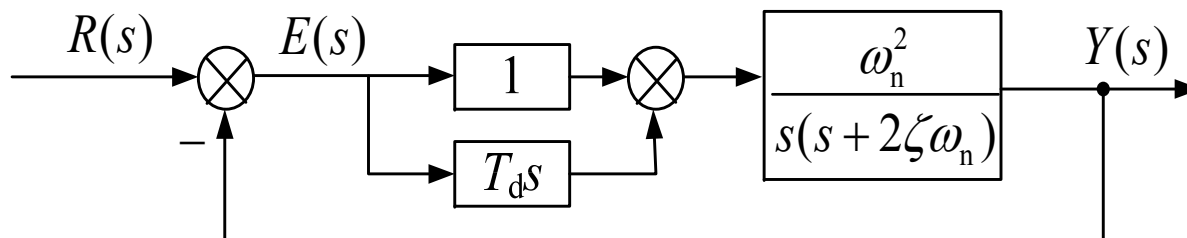


## 微分作用：加快动态过程响应



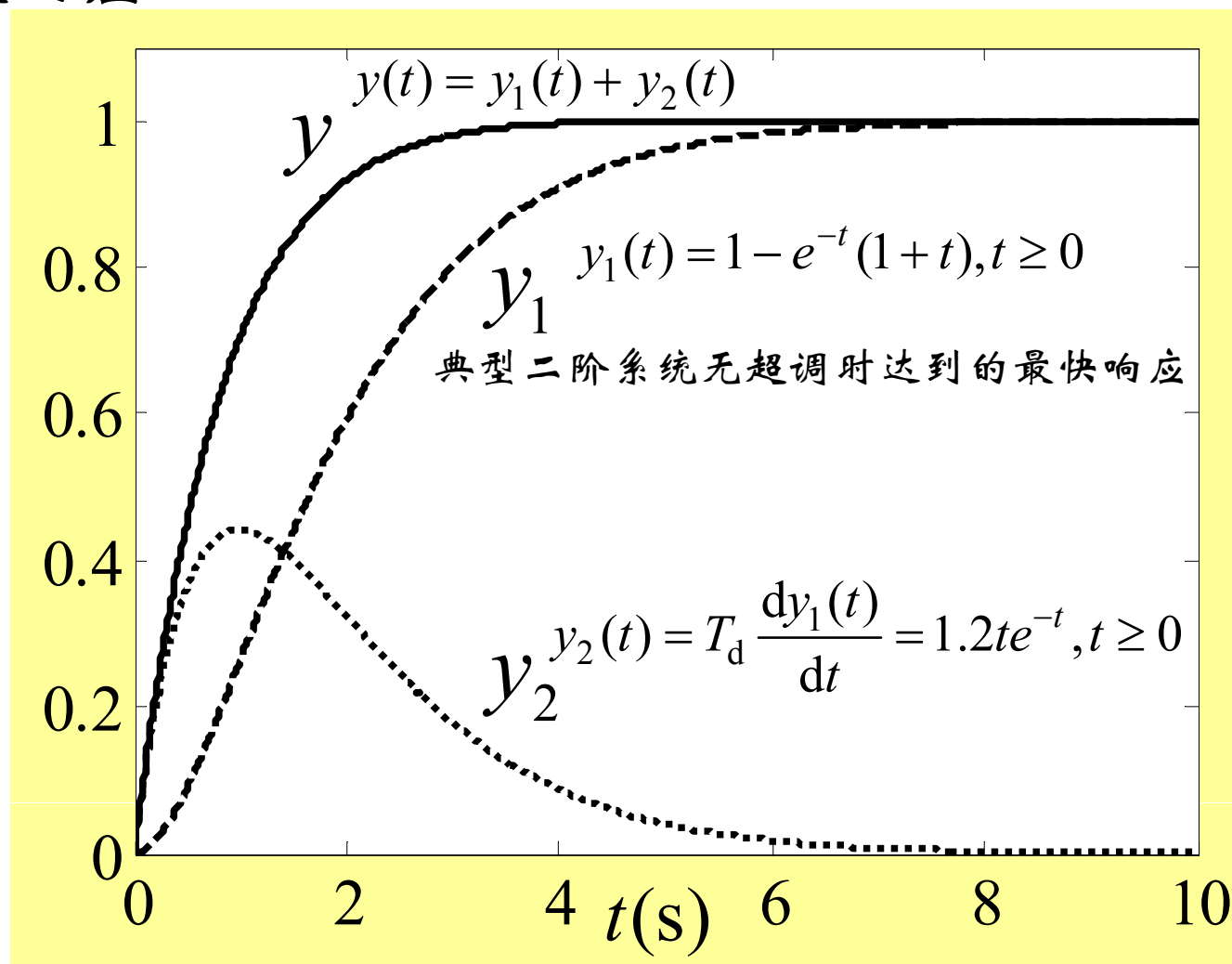
- 图 (a) 中引起超调量过大的原因在于在  $(0, t_1)$  施加了过大的修正转矩。
- 纯比例控制时，在区间  $(t_1, t_3)$  误差信号是负的，相应的电动机转矩也是负的。该反向转矩试图使电动机的转速下降，但是引起了区间  $(t_3, t_5)$  的反向超调。
- 如果我们考虑误差微分的作用则刚好可以克服以上的问题。在  $(0, t_1)$  区间适当减小正向转矩，在  $(t_1, t_2)$  区间加大反向转矩，使得正向超调减小。在  $(t_2, t_3)$  区间增加正向转矩，在  $(t_3, t_4)$  区间减小反向转矩使得反向超调减小。

# PD改善性能-3



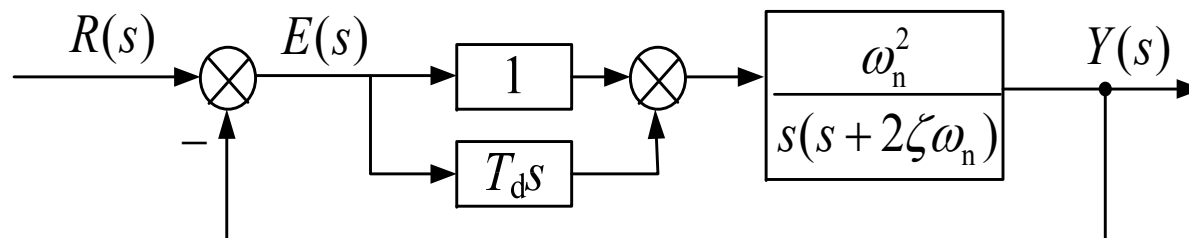
## □ 单位阶跃响应

$$\begin{aligned}\zeta &= 0.4 \\ \omega_n &= 1 \\ \zeta_d &= 1 \\ T_d &= 1.2\end{aligned}$$





# PD改善性能-4



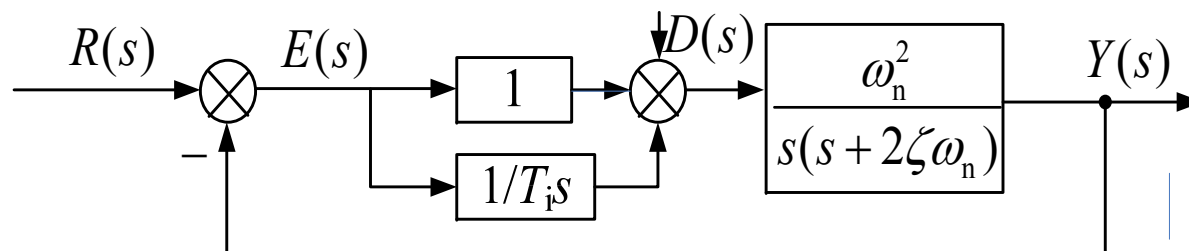
## □ 定性结论

- 增加系统阻尼比，不影响系统自然频率，从而抑制振荡，使超调减弱，改善系统平稳性。可通过适当选择微分时间常数 $T_d$ ，改变阻尼的大小 $\zeta_d$ 。

$\therefore$  有  $\left\{ \begin{array}{l} \text{增加零点} \rightarrow \sigma\% \uparrow \\ \zeta \uparrow \longrightarrow \sigma\% \downarrow \end{array} \right\}$  调整的合适 可以使 $\sigma\% \downarrow$ 。

- 零点的出现，将会加快系统响应速度，使上升时间缩短，峰值提前。因此适当选择微分时间常数，使系统具有过阻尼，则响应将在不出现超调的条件下，显著提高快速性。
- 对象的速度增益 $K = \omega_n / 2\zeta$ ，若添加 $K_p$ 的比例环节，适当取值，可以使系统在斜坡输入时的稳态误差减小，单位阶跃输入时有满意的暂态性能(快速反应，小的超调)。不能消除斜坡输入的误差。
- 微分对高频噪声有放大作用，输入噪声较大时，不宜采用。

# PI改善性能-1



- 加入PI后，闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (T_i s + 1)}{T_i s^3 + 2T_i \zeta \omega_n s^2 + T_i \omega_n^2 s + \omega_n^2}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\omega_n^2 T_i s}{T_i s^3 + 2T_i \zeta \omega_n s^2 + T_i \omega_n^2 s + \omega_n^2}$$

- 变与不变：

- 闭环位置增益(1)未变

- 开环加速度增益  $K = \frac{\omega_n}{2\zeta}$

- 系统的阶次变大了，不恰当的参数可能其特征根出现在右半平面

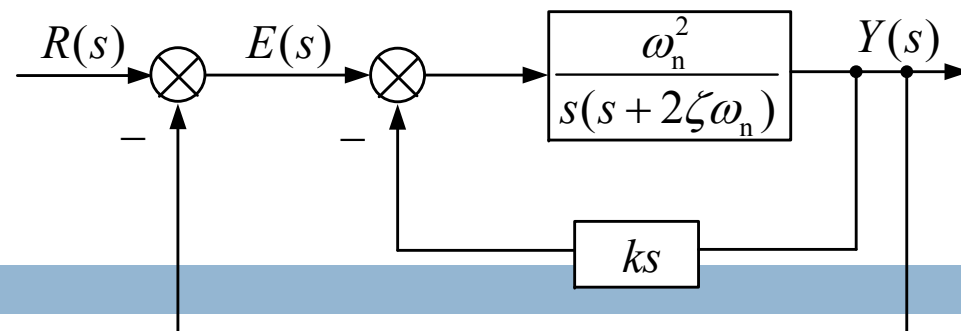
- 扰动通道位置增益为0

# PI改善性能-3

## □ 定性结论

- 控制器加了积分，响应会滞后一些
- 说明若系统稳定，可以抑制扰动---消除恒值扰动引起的误差
- 若对象中没有积分情况下，也可消除恒值给定误差，做到无静差输出。
- 在设计时合适的选择相关参数，找一对**主导极点**，第三个极点离这一对主导极点实部**5倍**以上，一般可以满足设计要求。

# 微分反馈改善性能



- 加入微分反馈后，闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

- 变与不变

- 闭环位置增益(1)未变

- 开环速度增益减小  $K = \frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n + k\omega_n^2}$

- 自然频率未变

- 阻尼系数变大  $\zeta_{df} = \zeta + \frac{1}{2}k\omega_n$

- 定性结论

- ▣ 不影响系统自然频率，但使系统阻尼比增加，超调减小。
- ▣ 降低系统开环增益，会加大系统在斜坡输入时的稳态误差。
- ▣ 不形成闭环零点，因此 $k=T_d$ 时，其输出平稳性优于比例-微分控制。

# 课外练习

- 在MATLAB中通过数值计算验证PI、微分反馈控制效果
- 在MATLAB中将PID结合起来，再与微分反馈结合起来比较控制效果

这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

## 第九讲 高阶系统时域分析

实际系统可能是高阶系统，对这类系统的分析与二阶系统类似，也是要考查各运动模态在响应中的贡献，同时在响应中一些定性规律对系统的认识至关重要。根据模态的贡献情况对模型进行简化(降阶)以方便控制器设计。

# 高阶系统时域响应

## □ 阶跃响应表达式(不考虑重根情况)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{1}{s} = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \frac{1}{s} = \frac{N(0)}{D(0)} \cdot \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{N(s)}{s D'(s)} \bigg|_{s=p_j} \frac{1}{s - p_j}$$

$$Y(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

$$y(t) = \underbrace{A_0}_{\text{比例响应}} + \sum_{j=1}^q \underbrace{A_j e^{-p_j t}}_{\text{一阶惯性响应形式}} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_{nk}}{\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t$$

比例响应

一阶惯性  
响应形式

二阶振荡  
响应形式

输入引起的  
稳态分量

传递函数极点相关的暂态分量



# 高阶系统时域响应说明-1

$$y(t) = A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_{nk}}{\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t$$

## □ 说明几点

- 系统模态的形式由闭环极点的性质所决定，若闭环极点位于s平面的左半部分，则系统的暂态响应呈收敛性，系统必稳定。而系统调整时间的长短与闭环极点负实部绝对值的大小有关。在稳定的情况下，如果闭环极点远离虚轴，则相应的模态就衰减得快，系统的调整时间也就较短。而闭环零点决定系统模态的权值。
- 如果闭环传递函数中有一极点 $-p_k$ 远离坐标原点，所对应的瞬态分量不仅持续时间很短，而且其相应的幅值亦较小，因而由它产生的瞬态分量可略去不计。----降阶的依据

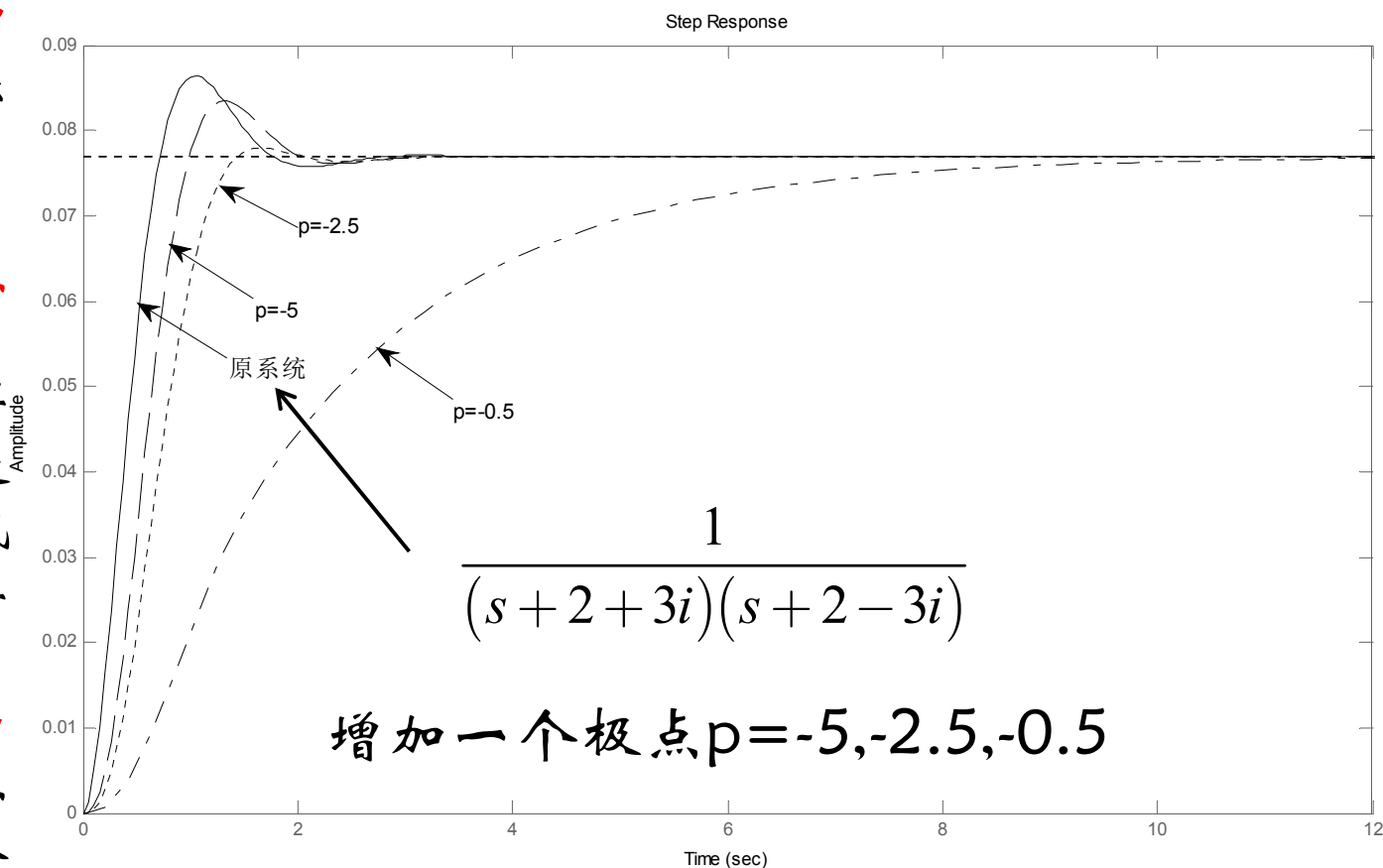
# 高阶系统时域响应说明-2

- 如果系统中有一个(极点或一对)复数极点距虚轴最近, 且附近没有闭环零点, 其他闭环极点与虚轴的距离都比该极点与虚轴距离大5倍以上, 称其为系统的**主导极点**(起主导作用)。响应时间主要取决于主导极点。若存在超调量, 它也取决于主导极点**衰减指数** $\sigma/\omega_d = \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ 。
- 如果闭环传递函数中某一个极点 $-p_k$ 与某一个零点 $-z_r$ 相等, 则极点 $-p_k$ 对应模态幅值为0。----**偶极子**的概念。
- 如果系统中存在距离非常接近的闭环极点和零点, 其相互距离比其本身的模小一个数量级以上, 则把这一对闭环零、极点称为**近似偶极子**。一般情况下, 近似偶极子对系统暂态响应的影响可以忽略。但如果**近似偶极子位置接近坐标原点**, 其影响往往应考虑(导致静态增益的变化)。但它们**并不会影响主导极点的地位**。

# 高阶系统时域响应说明-3

## □ 存在主导极点情况下，附加极点大小对系统的影响

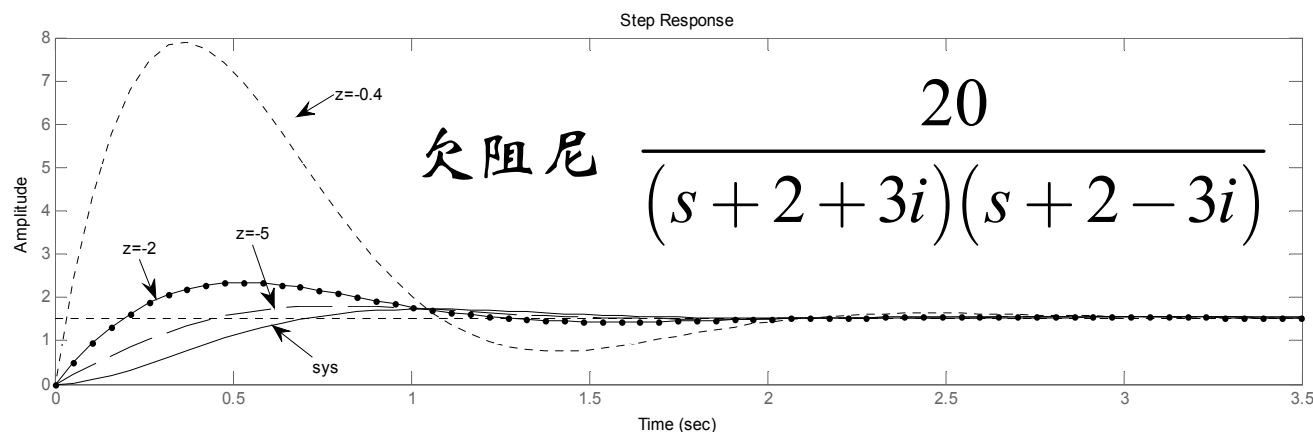
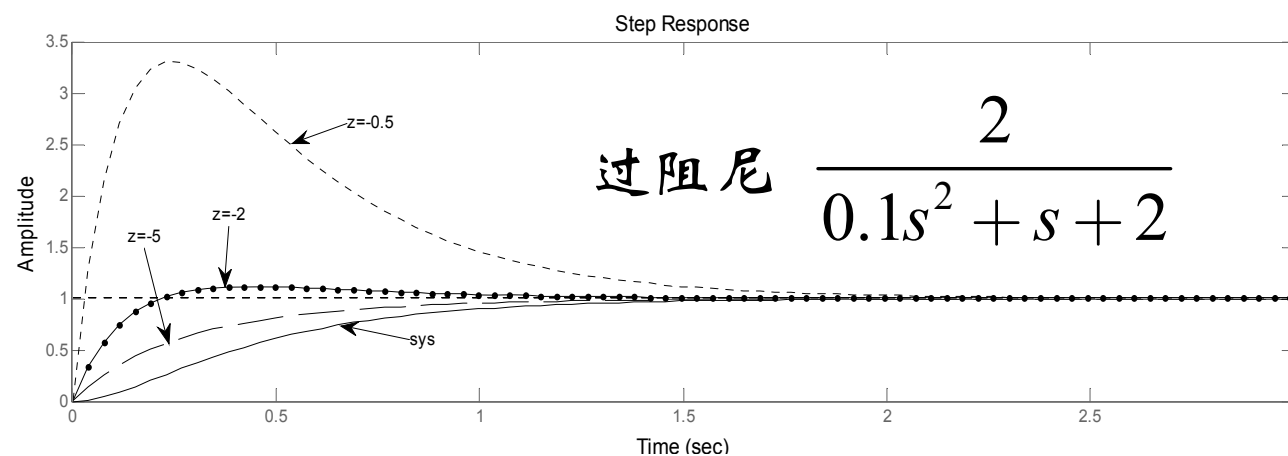
其他极点的存在**会增大系统阻尼**，使响应速度减慢(峰值时间迟后)，超调量减少，调节时间减小；**极点离虚轴越近，阻尼越大**，超调量越小。事实上，将原系统传递函数附加的极点写成时间常数形式，将其看成一个**惯性环节**，**时间常数越大，相当于增加了阻尼**，极点离虚轴越近，从而从物理上得到解释。



# 高阶系统时域响应说明-4

## 存在主导极点情况下,附加零点大小对系统的影响

其他零点的存在  
减小系统的阻尼,  
使响应速度加快  
(峰值时间提前),  
超调量增加, 调  
节时间也增加;  
零点离虚轴越近,  
阻尼越小, 超调  
量越大。即使是  
过阻尼的系统,  
加入零点后, 也  
可能有超调。

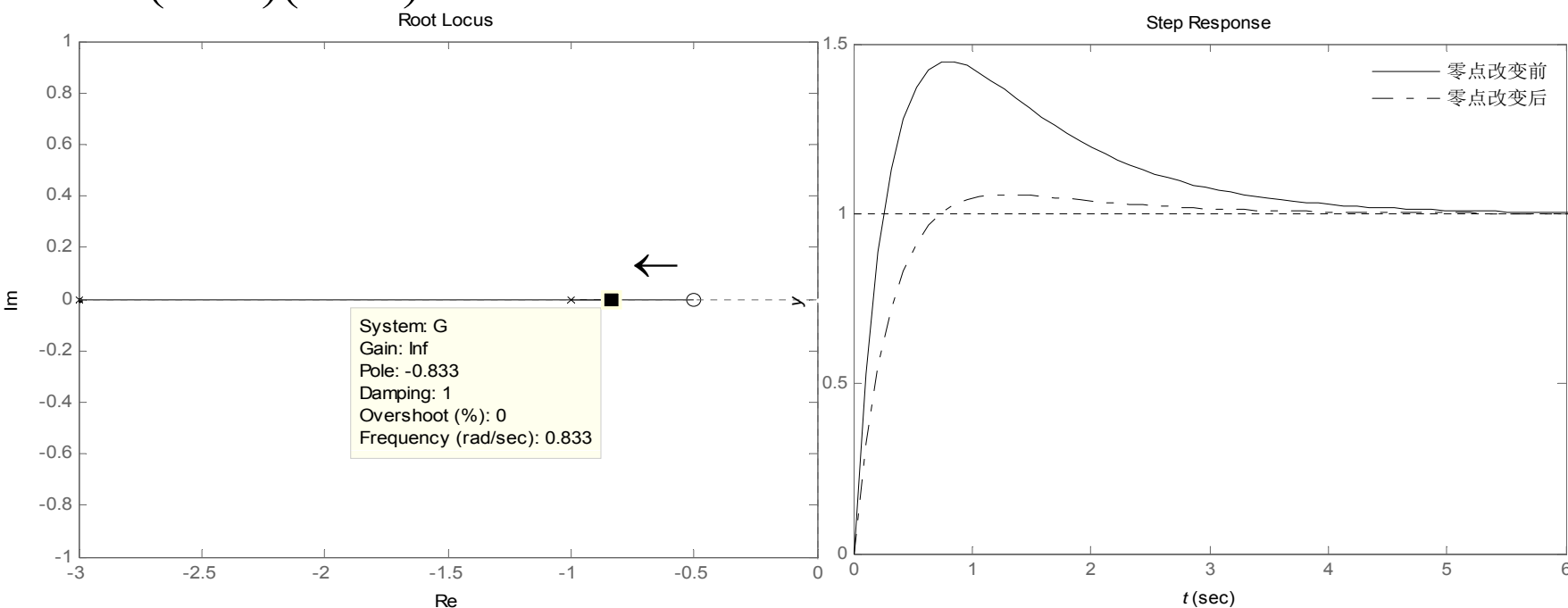


# 高阶系统时域响应说明-5

## □ 零点与极点相对位置对响应的影响

$$\frac{3(2s+1)}{(s+1)(s+3)} \quad y(t) = L^{-1} \left( \frac{3(2s+1)}{(s+1)(s+3)} \frac{1}{s} \right) = 1 + 1.5e^{-t} - 2.5e^{-3t}$$

$$\frac{3(1.2s+1)}{(s+1)(s+3)} \quad y(t) = L^{-1} \left( \frac{3(1.2s+1)}{(s+1)(s+3)} \frac{1}{s} \right) = 1 + 0.3e^{-t} - 2.5e^{-3t}$$



结论：系统的零影响各模态在响应中所占的比重。对各极点，距离点远一些的极点模态所占比重较高。离零点很近的极点对响应贡献比重被大大削弱。极点的情况产生极点零点相消，极点响应的贡献将变为0，对应的模态被隐掉。

# 高阶系统简化的考虑

- 对模型进行降阶---小参量的处理
- 小参量一般指在系统中相对于数值较大的时间常数而言的小时间常数。---对应极点远离坐标原点
- 处理方法：忽略或变通处理，使模型降阶成易于用线性系统理论处理。比如：

□ 一般对如下传递函数采用的近似如下：（注意：可近似处理的条件是系统中一定还存在着一个相对较大的时间常数，同时还必须考虑系统的开环增益。）

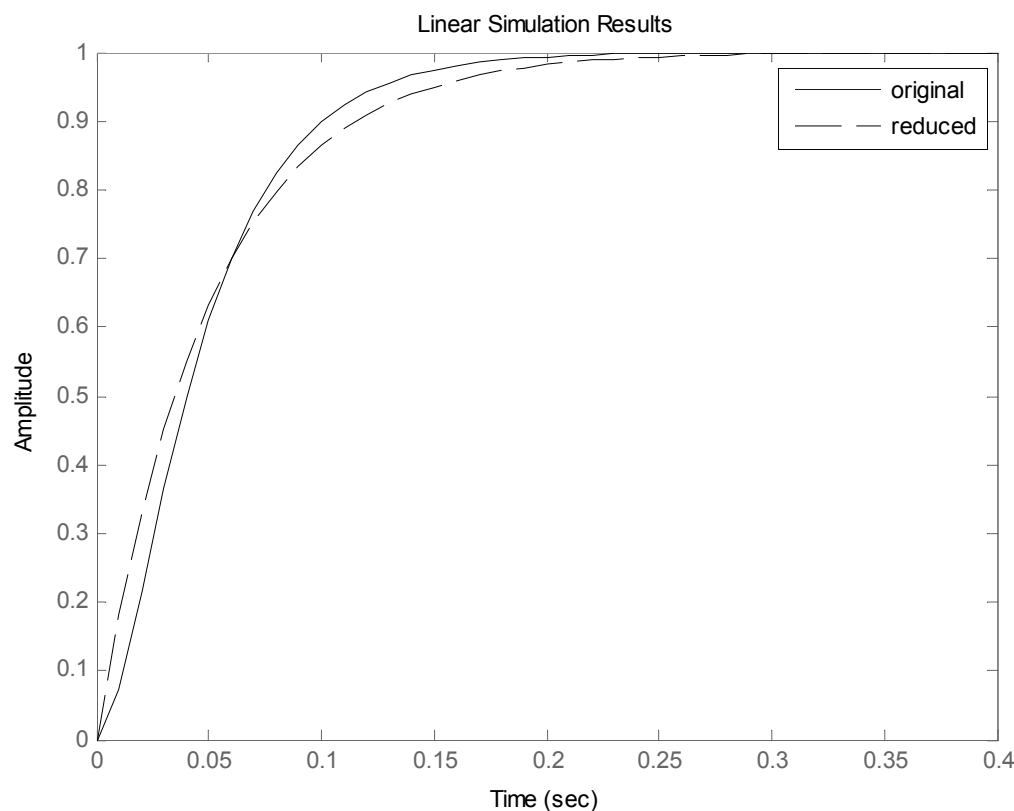
$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{\tau s + 1}, \frac{e^{-\tau_1 s}}{\tau_2 s + 1} \approx \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)s + 1}, \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_n s + 1)} \approx \frac{1}{(\sum_{i=1}^n \tau_i)s + 1}$$

- 但有前提条件：
  - 开环系统可以只考虑系统的时间常数的数值相对大小
  - 闭环系统则还要考虑开环放大系数
- 一个例子说明此问题---功率直流他励电动机在开环中与闭环中相同的简化方式，不同的结果

# 高阶系统模型的简化-开环情形\*

## □ 功率直流他励电动机降阶

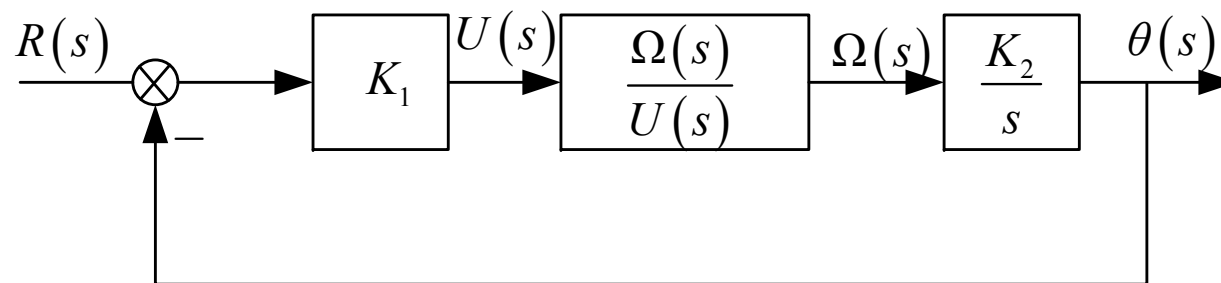
$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\tau_e \tau_m s^2 + \tau_m s + 1} \xrightarrow{\tau_m=0.05s, \tau_e=0.01s} \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\tau_m s + 1}$$



两者之间只是在响应起始部分差别大一些。所以若不过分追求响应的全过程准确度，可以忽略小时间常数。

# 高阶系统模型的简化-闭环情形

- 伺服系统：将此小功率电动用于伺服(输出角位移)。



$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{k_e s (\tau_m \tau_e s^2 + \tau_m s + 1)} \quad \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2}{\tau_m \tau_e s^3 + \tau_m s^2 + s + K_1 K_2 / k_e}$$

用Routh判据求此系统的临界开环增益得  $K_1 K_2 / k_e \leq 1 / \tau_e$

故临界开环增益为100。若大于此值，系统将不稳定。

- 假若如开环系统一样处理，将 $\tau_e$ 忽略，则有

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 / k_e}{s (\tau_m s + 1) + K_1 K_2 / k_e}$$

伺服系统总是稳定的，  
而与上面结论矛盾



# 例：存在主导极点的系统简化

- 某系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{1.05}{(s + 2.34)(s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58)}$$

- 因实极点距虚轴的距离比复极点大5倍之多，可以认为共轭复极点是**主导极点**。
- 在**保持传递函数静态增益前后一致**下，忽略非主导极点可近似为

$$G(s) = \frac{1.05}{2.34(s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58)}$$

- 于是，高阶系统就可近似为二阶系统来分析，相应地其暂态响应性能指标就可以按二阶系统估计。

这一讲就到这里！



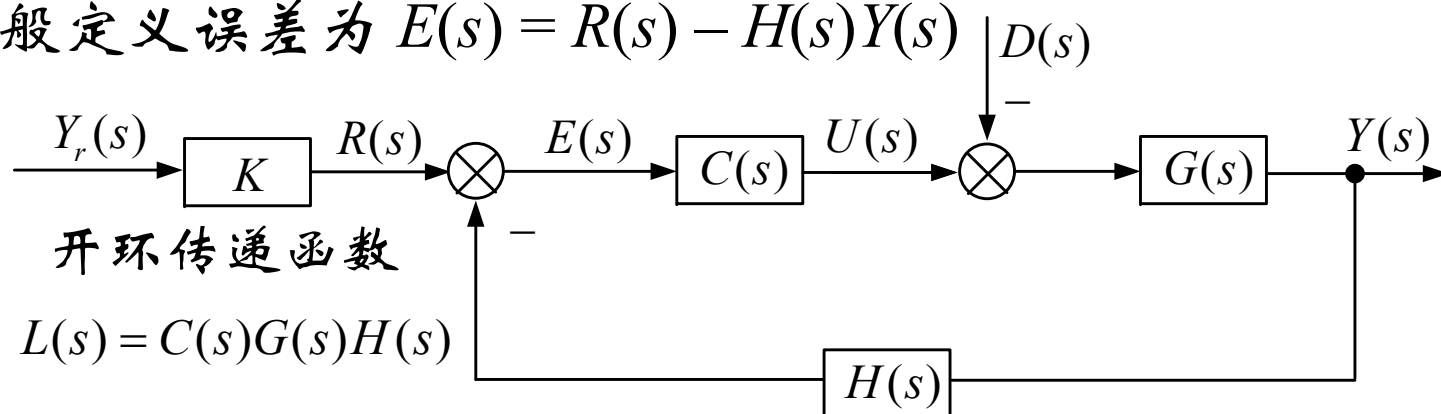
图图网: tutu001.com

## 第十讲 稳态性能指标

由于存在惯性，**稳定的**系统在外作用下要经历一段暂态过程后就会进入**稳态**。控制系统的稳态精度用稳态误差衡量，是重要的技术指标。**稳态误差必须在允许范围之内**，控制系统才有使用价值。在控制理论中，稳态误差是指由于系统结构造成的稳态响应的期望值与实际值之差，而**不考虑元件因素**造成的误差。

# 稳态误差的定义

- 一般定义误差为  $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$



- 由于输入包括期望值和扰动，稳态误差可以分为给定稳态误差和扰动稳态误差两部分。

$$G_{\text{er}}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}$$

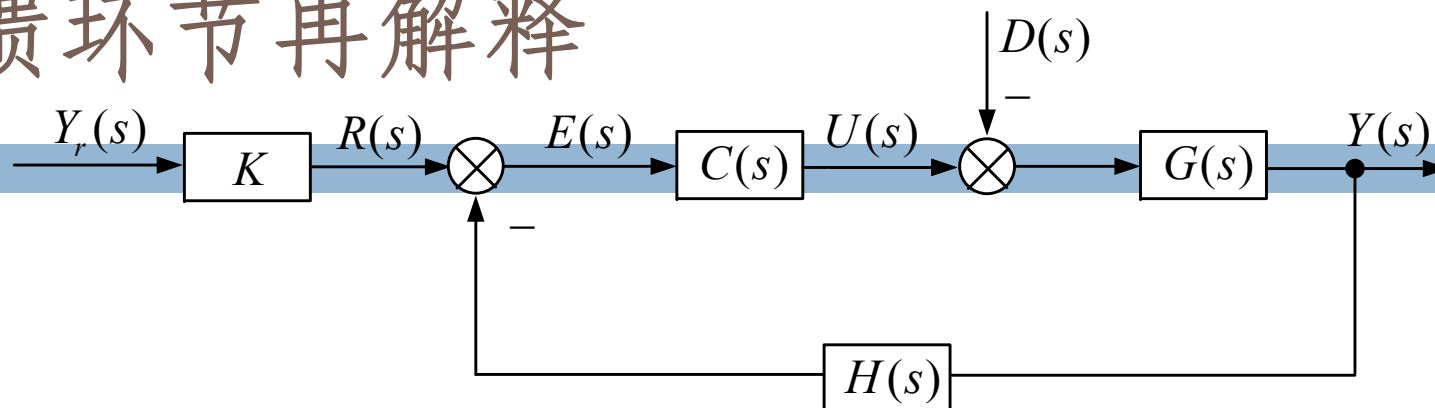
$$G_{\text{ed}}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + L(s)}$$

- 总的稳态误差为  $e = e_{ss} + e_{sd}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\text{er}}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + L(s)}$$

$$e_{sd} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\text{ed}}(s) D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s G(s) H(s) D(s)}{1 + L(s)}$$

# 关于反馈环节再解释



- 反馈的作用：在控制过程中对输出不断测量，并与给定进行比较，利用放大或缩小后的偏差产生控制作用，以减小或消除误差。----**依偏差调整**
- 经过反馈稳定的系统通常具有克服一定范围内变化的系统参数与外界扰动的作用。----**鲁棒性**
- 为了将输出量噪声抑制到输入端可接受水平，则需在反馈中加入一定带宽的**滤波器**，然后再反馈或进行标度变换。
- 系统型别依开环传递函数中含有的积分个数定义，型别越高控制难度越高。

$$L(s) = C(s)G(s)H(s) = \frac{K \prod_{k=1}^m (\tau_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)} \quad \nu = 0, 1, 2$$

# 给定稳态误差\*

□ 开环传递函数

$$L(s) = \frac{K}{s^\nu} F(s) \quad F(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (\tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)}$$

□ 在没有扰动时，利用终值定理得误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + L(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + KF(s)/s^\nu} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu+1} R(s)}{s^\nu + KF(s)} = \begin{cases} \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [s^{\nu+1} R(s)]}{K}, & \nu \geq 1 \\ \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [sR(s)]}{1 + K}, & \nu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 可见，系统的稳态误差取决于系统型别、开环增益 $K$ 、输入信号。

# 终值定理成立的条件

□ 条件： $sE(s)$ 的收敛域包含 $s$ 平面的整个右半平面，即 $sE(s)$ 的极点除坐标原点外均位于 $s$ 平面的左半平面。若不满足这个条件表明 $e(t)$ 是不收敛的。

□ 例子：开环传递函数是 $L(s) = \frac{1}{Ts}$ ，输入是 $r(t) = \sin \omega t$

$$sE(s) = \frac{Ts^2}{1+Ts} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{不符合条件!}$$

实际上：

$$e(t) = \underbrace{-\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} e^{-t/T}}_{\rightarrow 0} + \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} \cos \omega t + \frac{(\omega T)^2}{1 + (\omega T)^2} \sin \omega t$$

# 输入为单位阶跃信号时给定稳态误差

## □ 输入为单位阶跃信号时

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)}$$

### ▣ 对于 0 型系统

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K}$$

### ▣ 对于 I 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + KF(s)} = 0$$

### ▣ 对于 II 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2 + KF(s)} = 0$$

- 结论：要减小/消除稳态误差，应增加开环系统型别或增加开环增益，但会降低系统的稳定性。



# 输入为单位斜坡信号时给定稳态误差

## □ 输入为单位斜坡信号时

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s[1 + L(s)]}$$

### ▣ 对于 0 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s[1 + L(s)]} = \infty$$

### ▣ 对于 I 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + KF(s)} = \frac{1}{K}$$

### ▣ 对于 II 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + KF(s)} = 0$$

- 结论：要减小/消除稳态误差，应增加开环系统型别或增加开环增益，但会降低系统的稳定性。

# 输入为单位抛物线信号时给定稳态误差

## □ 输入为单位抛物线信号时

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 [1 + L(s)]}$$

### ▣ 对于 0 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 [1 + L(s)]} = \infty$$

### ▣ 对于 I 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + sKF(s)} = \infty$$

### ▣ 对于 II 型系统

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + KF(s)} = \frac{1}{K}$$

- 结论：要减小/消除稳态误差，应增加开环系统型别或增加开环增益，但会降低系统的稳定性。

# 扰动稳态误差

□ 设

$$C(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)}, \quad G(s) = \frac{B_o(s)}{A_o(s)}, \quad H(s) = \frac{B_h(s)}{A_h(s)},$$

□ 且没有  $s=0$  的零点, 即

$$B_c(0) = b_c \neq 0, \quad B_o(0) = b_o \neq 0, \quad B_h(0) = b_h \neq 0$$

□ 则输入为0时, 扰动造成的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{sd} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sD(s)G(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sD(s)A_c(s)B_o(s)B_h(s)}{A_c(s)A_o(s)A_h(s) + B_c(s)B_o(s)B_h(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[sD(s)A_c(s)]b_ob_h}{A_c(s)A_o(s)A_h(s) + b_cb_ob_h} \end{aligned}$$

含有s因子的数量—  
控制器的型别

□ 可见: 扰动稳态误差是否为0取决于  $\lim_{s \rightarrow 0} [sD(s)A_c(s)]$

# 扰动稳态误差为0对控制器的要求

$$e_{sd} = \lim_{s \rightarrow 0} [sD(s)A_c(s)] \frac{b_o b_h}{A_c(s)A_o(s)A_h(s) + b_c b_o b_h}$$

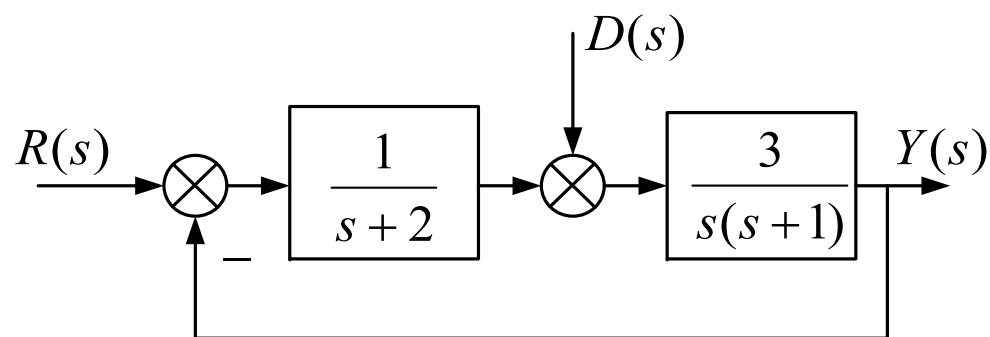
- (1) 如果扰动为**单位阶跃信号**，则  $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)A_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} A_c(s)$
- 此时，控制器中含积分环节，则必有  $e_{sd} = 0$
- (2) 如果扰动为**单位斜坡信号**，则  $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)A_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} A_c(s)/s$
- 此时，控制器中含两个以上积分环节，则必有  $e_{sd} = 0$
- (3) 如果扰动为**单位加速度信号**，则  $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)A_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} A_c(s)/s^2$
- 此时，控制器中含三个以上积分环节，则必有  $e_{sd} = 0$
- 结论：可见，必须**在控制器中设置若干积分环节**才可能消除扰动稳态误差。

# 例：求系统扰动稳态误差并比较

- a. 设单位反馈系统中控制器和被控对象的传递函数分别为  $10/(s+1), 1/s$
- b. 设单位反馈系统中控制器和被控对象的传递函数分别为  $10/s, 1/(s+1)$
- 两种情况下开环传函一样  $L(s) = 10/(s^2 + s)$
- 但误差传递函数不一样  $G_{ed}^a(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 10}$   $G_{ed}^b(s) = \frac{s}{s^2 + s + 10}$
- 扰动  $n(t)$  是单位阶跃函数时  $e_{sd}^a = 0.1$   $e_{sd}^b = 0$
- 扰动  $n(t)$  是单位斜坡函数时  $e_{sd}^a = \infty$   $e_{sd}^b = 0.1$
- 结论：要使系统在承受斜坡形式扰动时的稳态误差为常量，**控制器中必须有一个串联积分**，仅在被控对象中有串联积分环节达不到目的。

# 课外练习

- 已知如图系统的输入和扰动均为 $1(t)$ 。求
- (1) 系统输出的稳态误差。
- (2) 调整哪个环节可以使稳态误差为零？如何调整？（提示：在扰动之前串一个积分和比例积分试试）



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

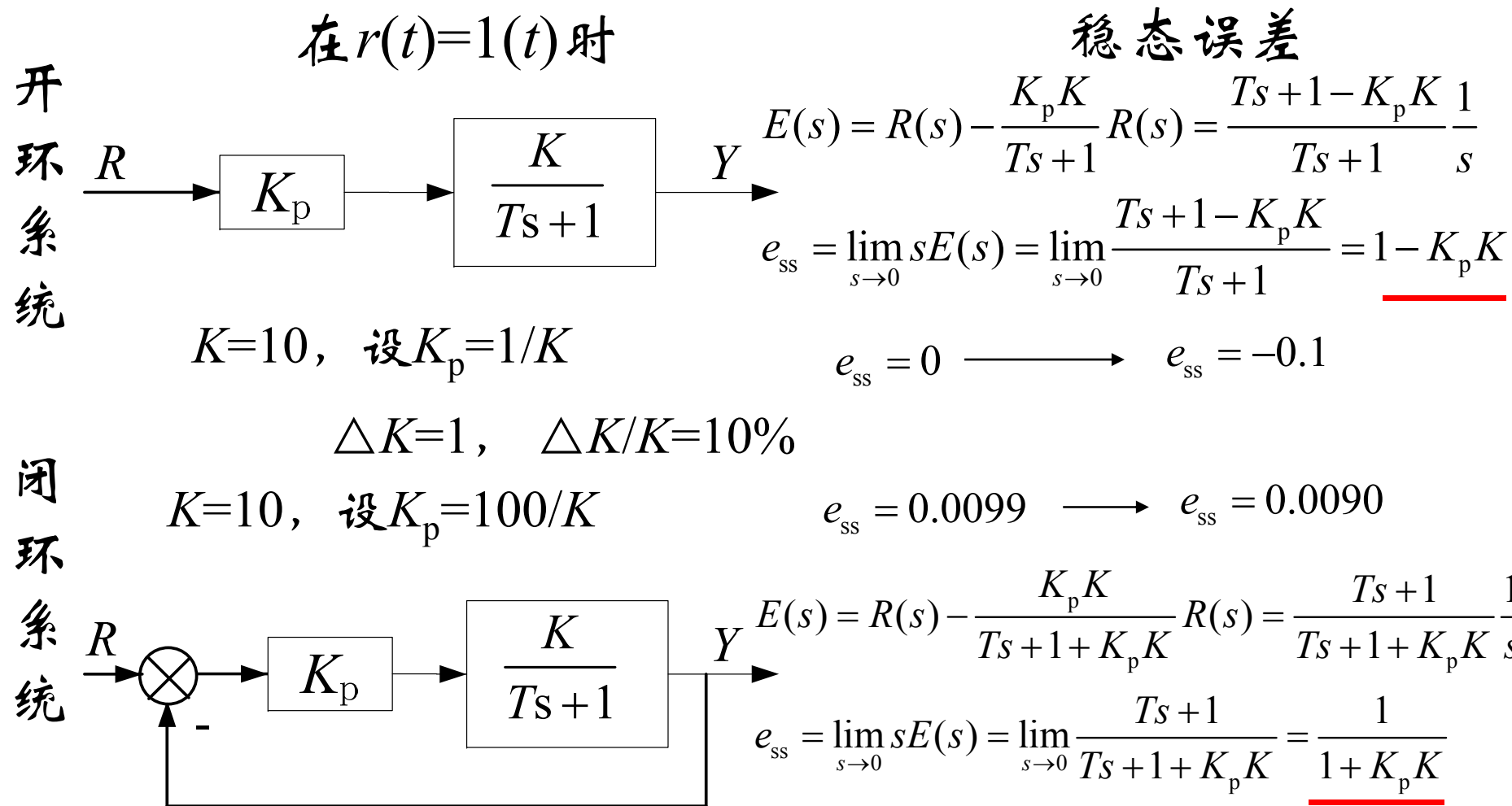
## 第十一讲 减小/消除稳态误差措施

总是希望控制系统的稳态精度越高，这样生产的产品质量越好，或达到目的效果越好。实际构造控制时，为减小或消除稳态误差可以采用

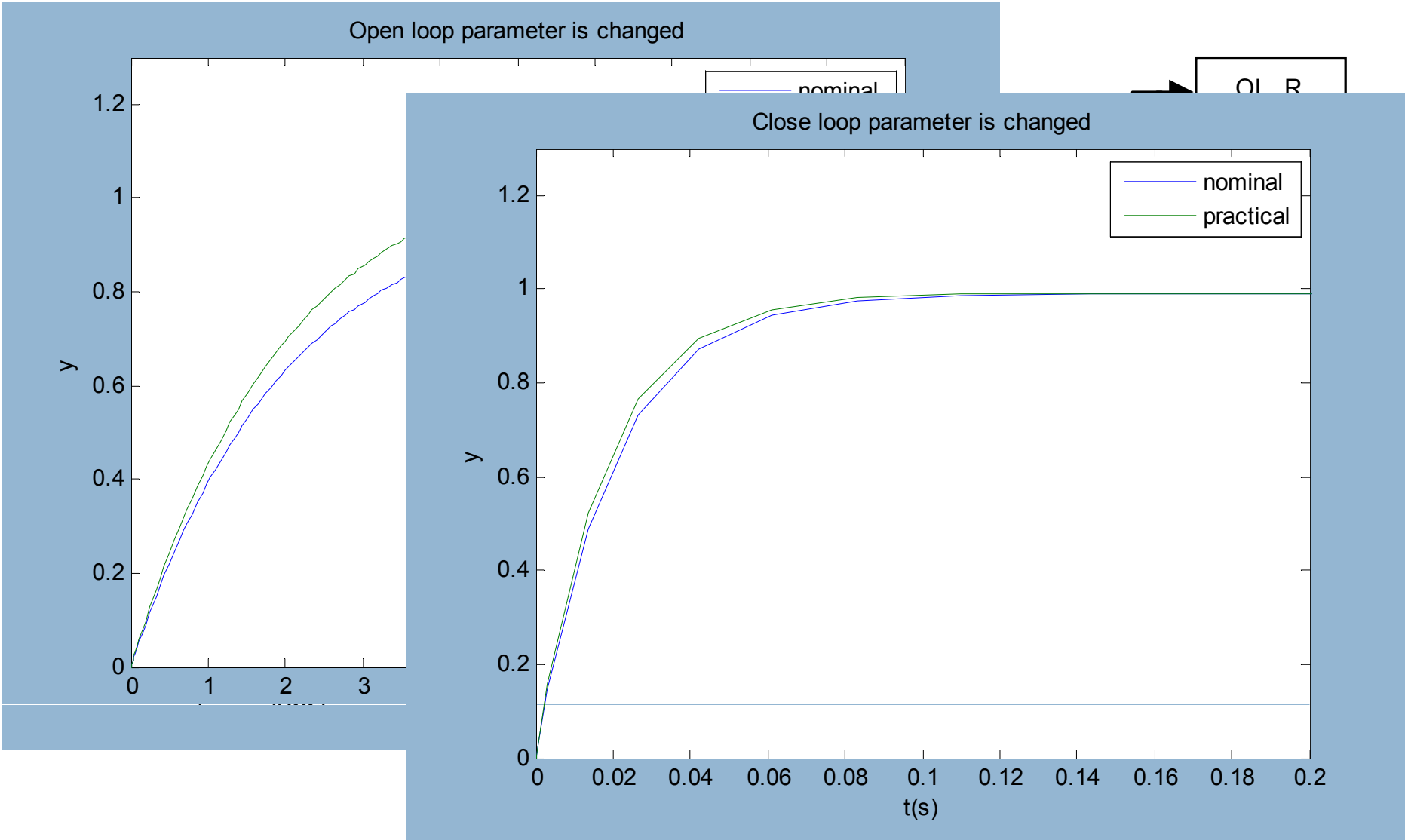
- ✓ 闭环控制代替开环控制；
- ✓ 增大控制器开环增益，但要注意稳定性；
- ✓ 控制器设置积分环节，但不能太多；
- ✓ 采用串联控制抑制内回路扰动；
- ✓ 采用复合控制。



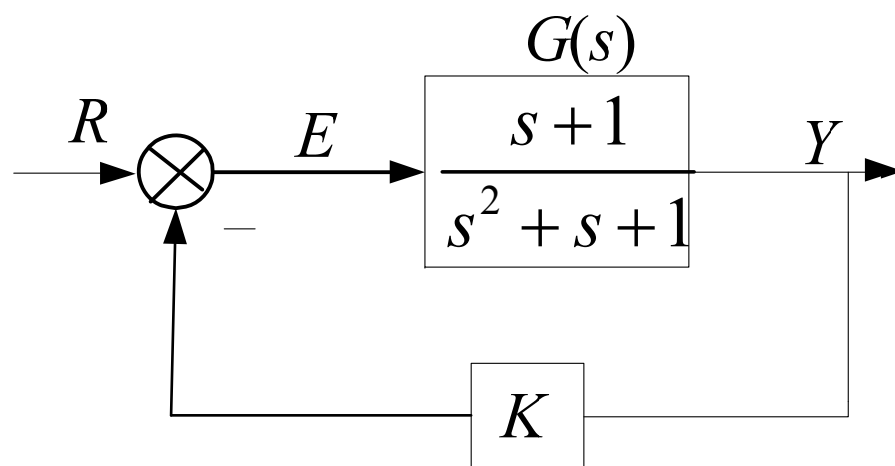
# 闭环控制优于开环控制(对象参数有变)



# MATLAB数值结果



# 增大控制器开环增益，但要注意稳定性



输入端定义的稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + (K+1)s + 1 + K}$$

$$e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{K}$$

输出端定义的稳态误差

$$K=0.1 \text{ 时} \quad e_{ss} = \frac{1}{1+K} = \frac{10}{11}$$

$$K=1 \text{ 时} \quad e_{ss} = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{2}$$

$$K=100 \text{ 时} \quad e_{ss} \approx 0$$

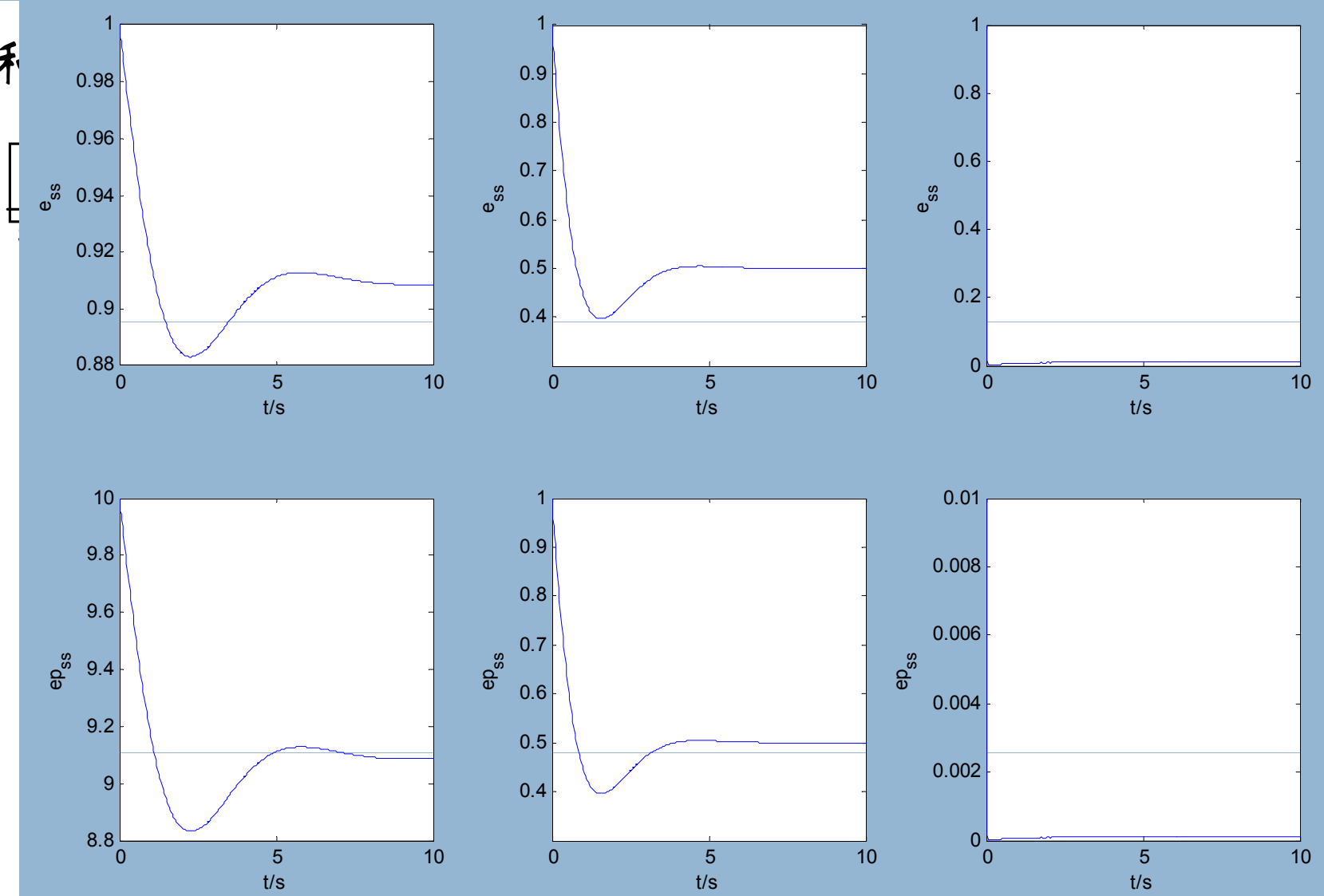
$$e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{0.1} = \frac{100}{11}$$

$$e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{1} = \frac{1}{2}$$

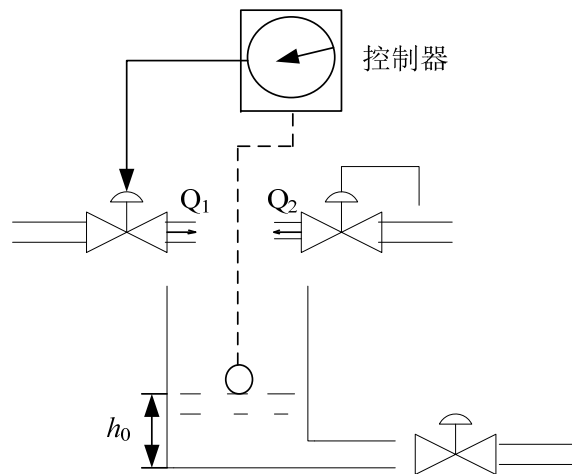
$$e'_{ss} \approx 0$$

# MATLAB数值结果

□  $K=0.1, 1$  和

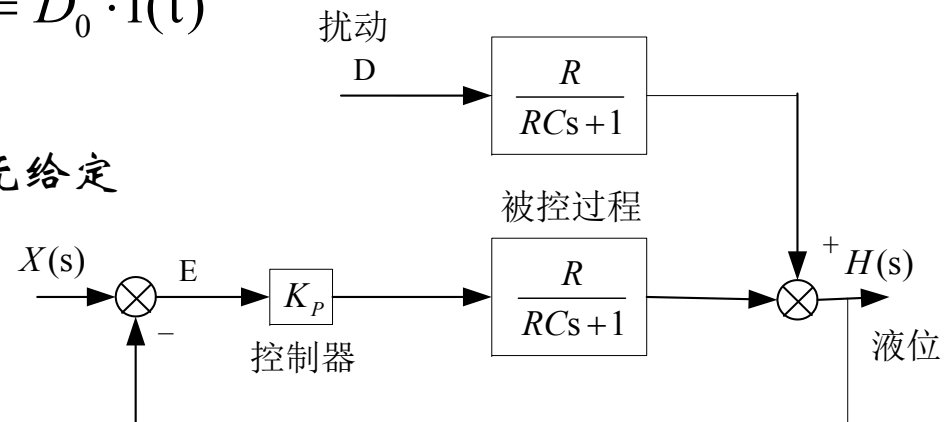


# 控制器设置积分环节，但不能太多



$$d(t) = D_0 \cdot 1(t)$$

考虑无给定



R是液阻、C是液槽横截面积

不加积分 稳定

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + K_p R + 1} D(s)$$

$$e(\infty) = -\frac{RD_0}{1 + K_p R}$$

加一个积分 稳定

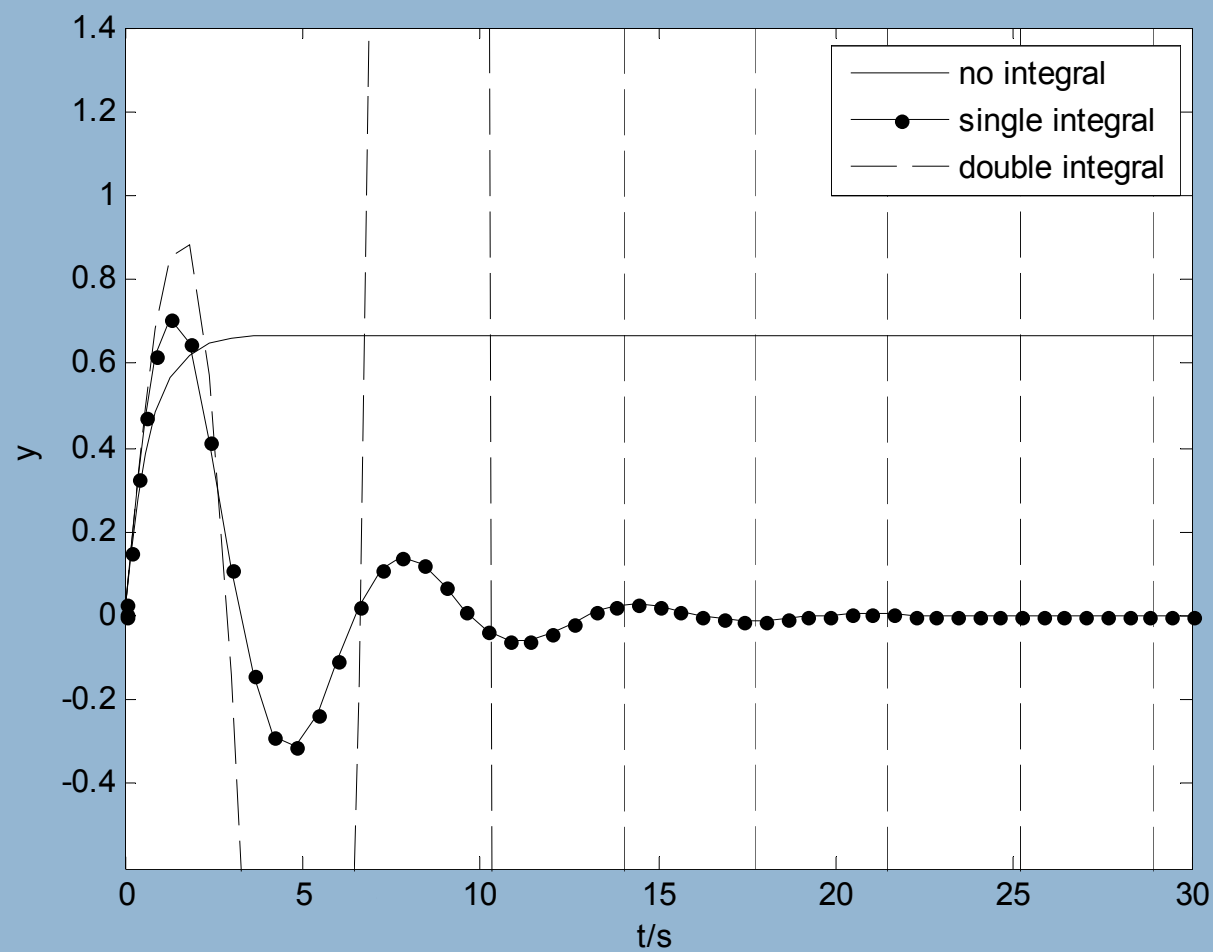
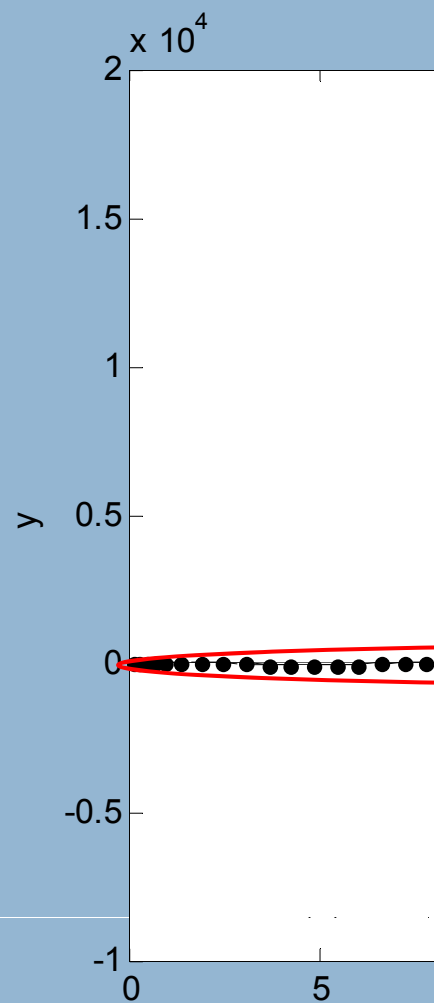
$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + K_p R} D(s)$$

$$e(\infty) = 0$$

加二个积分 不稳定

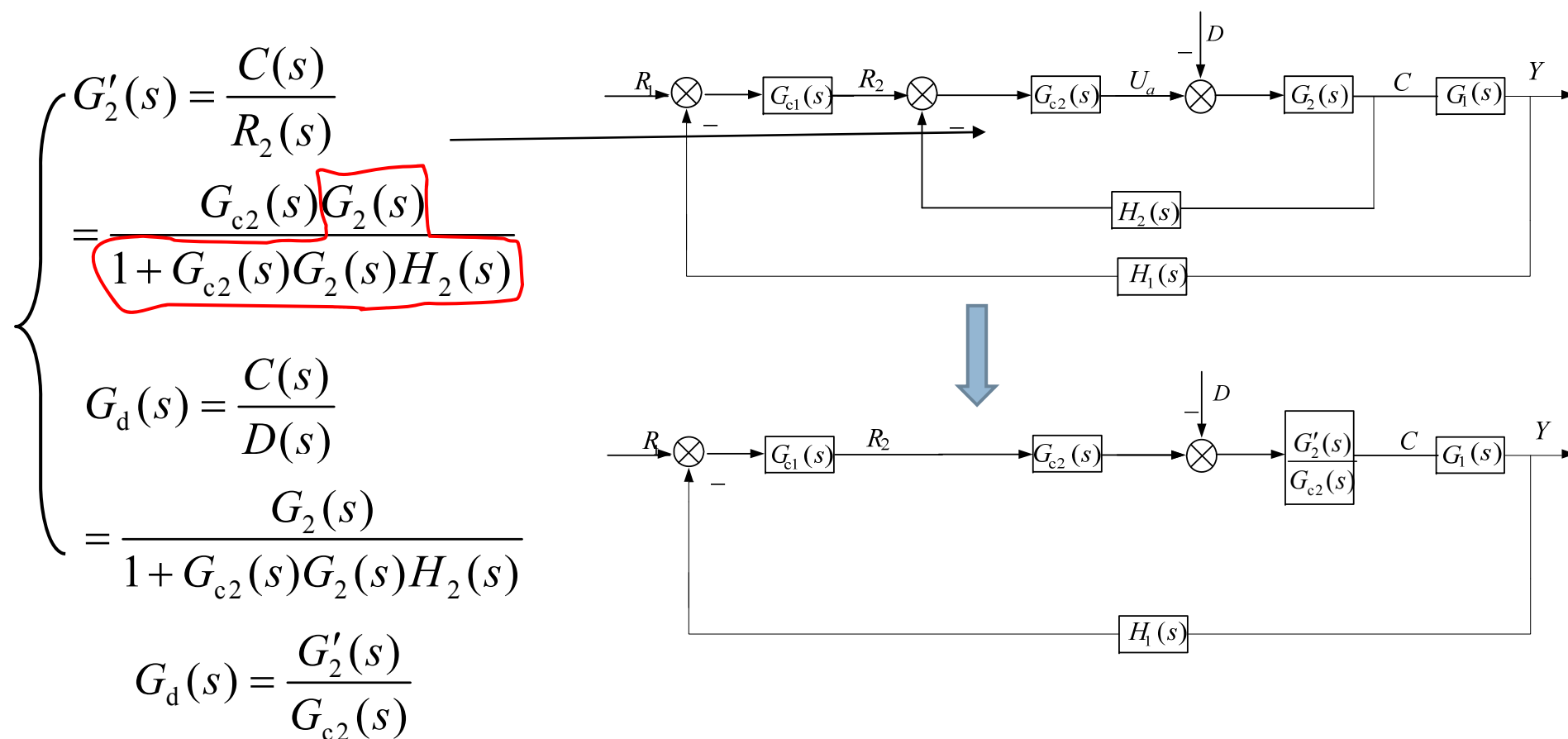
$$\longleftarrow RCs^3 + s^2 + K_p R = 0$$

# MATLAB数值结果

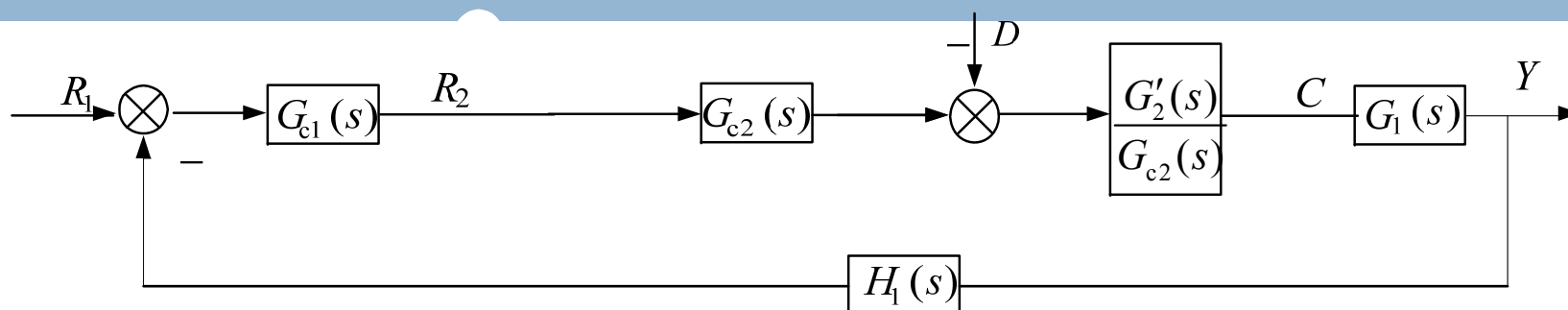


# 采用串联控制抑制内回路扰动-1

- 某串级直流电机控制系统方框图如图,  $G_{c1}(s)$   $G_{c2}(s)$  分别是主、副调控器,  $G_1(s)$   $G_2(s)$  为电机传递函数



# 采用串联控制抑制内回路扰动-2



□ 给定与扰动输入到输出的传递函数

$$\frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)}{1 + G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)H_1(s)} \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{(G'_2(s)/G_{c2}(s))G_1(s)}{1 + G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)H_1(s)}$$

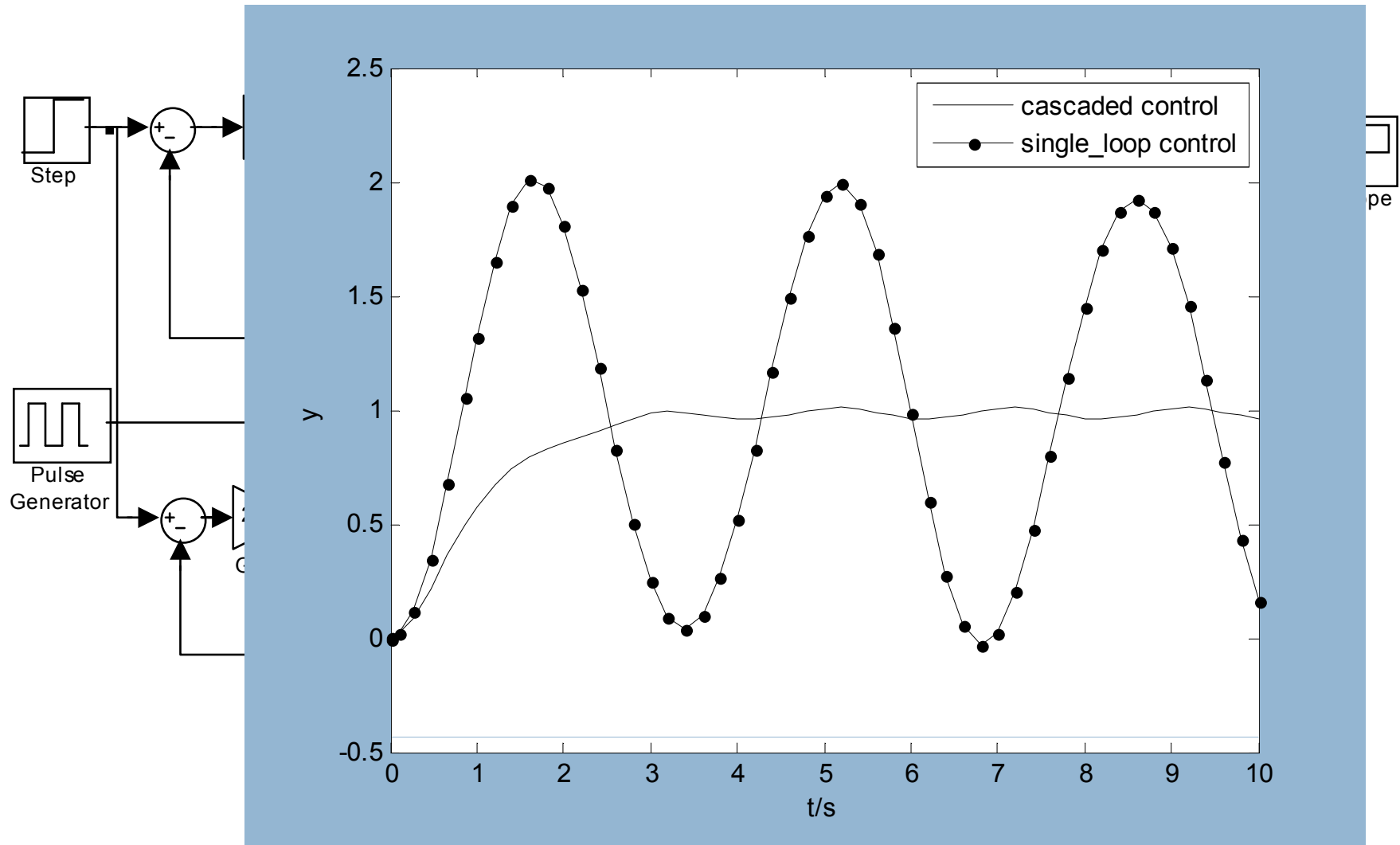
□ 抑制扰动的能力可表示为  $\frac{Y(s)/R_1(s)}{Y(s)/D(s)} = G_{c1}(s)G_{c2}(s)$

□ 主副均采用比例调节，则  $= K_{p1} \cdot K_{p2}$

□ 结论：主副总增益越大，则串级控制的抗干扰能力越强。一般  $K_{p2} > 1$ ，所以  $K_{p1} \cdot K_{p2} > K_{p1}$

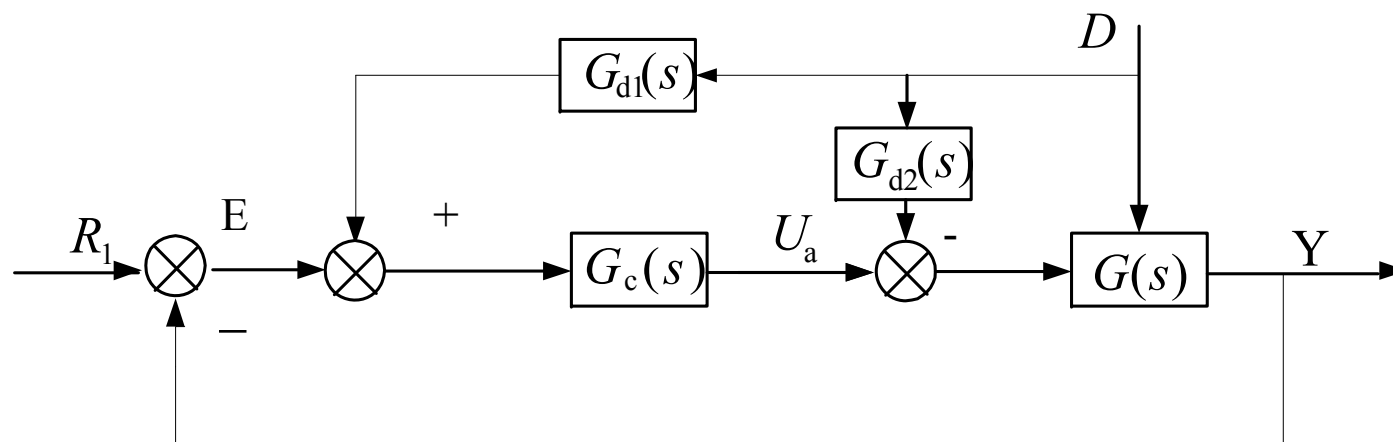


# MATLAB数值结果



# 采用复合控制

## □ 带扰动补偿的复合控制系统

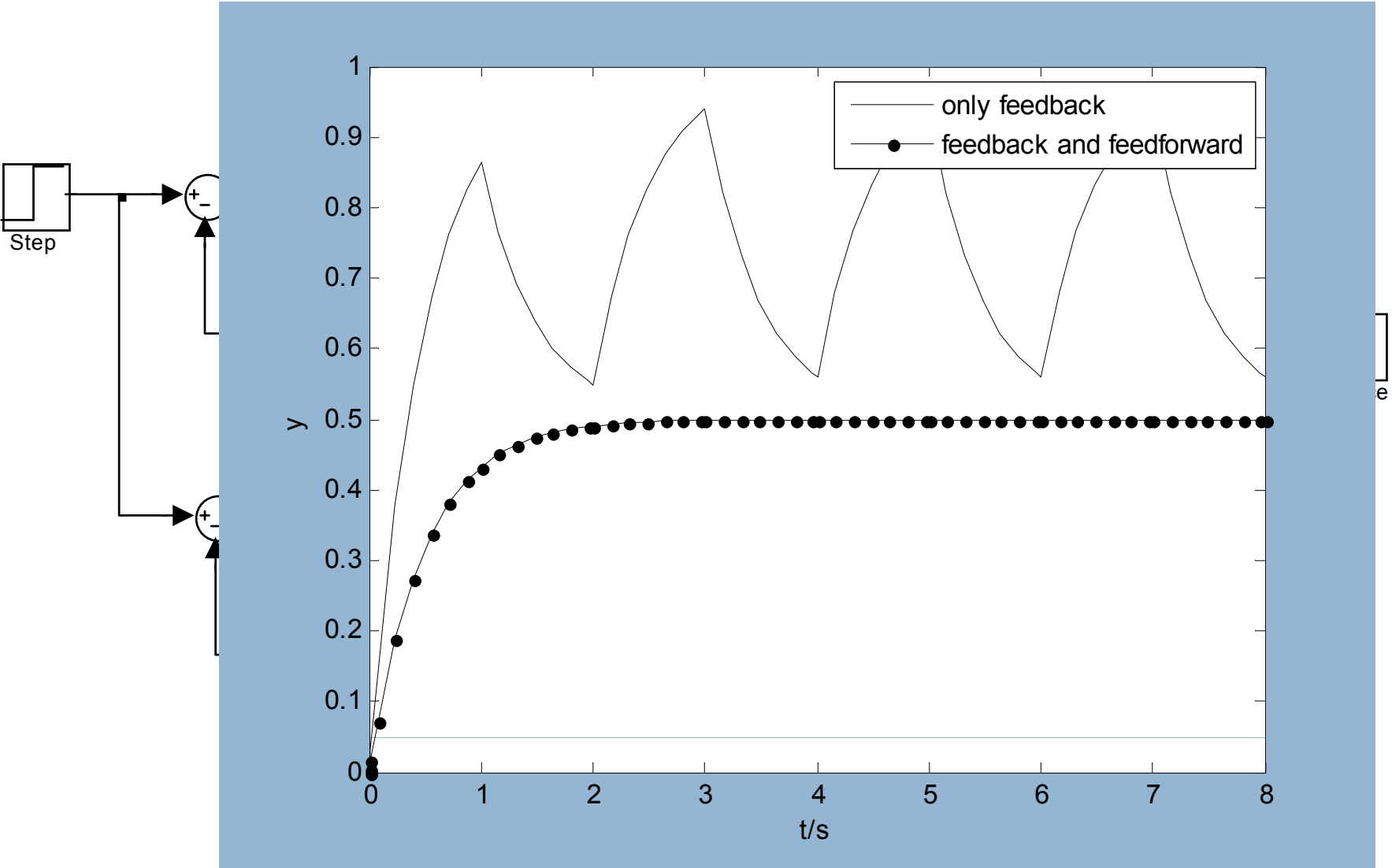


## □ 扰动作用下的输出为

$$Y(s) = \frac{G(s)(-G_{d2}(s) + G_c(s)G_{d1}(s))}{1 + G_c(s)G(s)} D(s)$$

- 误差为  $E(s) = -Y(s)$ , 如果选择  $G_{d1}(s) = G_{d2}(s)/G_c(s)$ , 可使  $Y(s) = 0$ , 实现了对扰误差的全补偿

# MATLAB数值结果



这一讲就到这里！

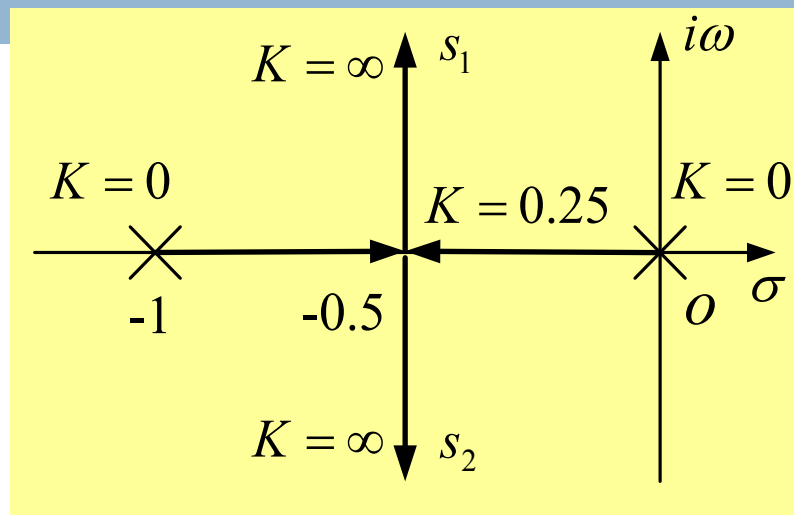
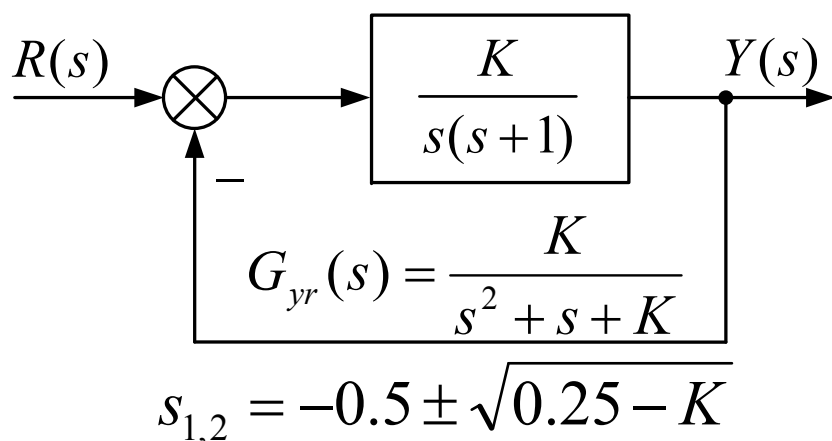


图图网: tutu001.com

## 第十二讲 常根轨迹及其绘制

实际控制系统的性能取决于系统闭环传递函数的零、极点。**根轨迹法**是根据**开环传递函数的零、极点**求解**闭环传递函数极点**的一种图解方法。它的理论依据是：**零极点平衡性**。

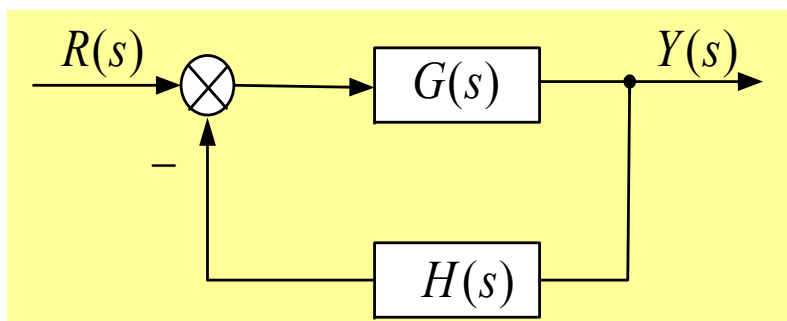
# 引例：求如下系统的闭环传递函数极点



- $K$ 接近0时,  $s_1=0$ ,  $s_2=-1$ , 即开环极点。
- 随着 $K$ 的增大,  $s_1$ 减小,  $s_2$ 增大。
- 当 $K$ 增大到0.25时,  $s_1=s_2=-0.5$ 。
- 随着 $K$ 增大,  $s_1$ 和 $s_2$ 变为共轭虚根, 并且实部保持为 $-0.5$ 。
- 结论: 随 $K$ 的变化, 闭环系统的根也跟着变

# 什么是根轨迹

- **根轨迹**是当开环系统某一参数（一般是根轨迹增益 $K_1$ ）从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程的根在 $s$ 平面上移动的轨迹。



根轨迹增益  $\leftarrow K_1$

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K_1 \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

- **根轨迹方程**反映了闭环零、极点与开环零、极点之间的关系。
- 对于给定的 $K$ 值，由根轨迹图可以大略估计闭环系统极点的位置，从而分析闭环系统的性能。

# 根轨迹方程

□ 闭环特征方程为  $1+L(s)=0$ ，即：

$$\frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{K_1} = \frac{1}{|K_1|} e^{il\pi}$$

✓  $K_1 > 0$  是  $180^\circ$  根轨迹， $l$  是奇数  
✓  $K_1 < 0$  是  $0^\circ$  根轨迹， $l$  是偶数

□ 上式可以用幅值条件和相角条件来表示：

$$\frac{\prod_{k=1}^m |(s - z_k)|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j)|} = \left| \frac{1}{K_1} \right|$$

计算根轨迹上的点所对应的  $K_1$  值

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = l\pi$$

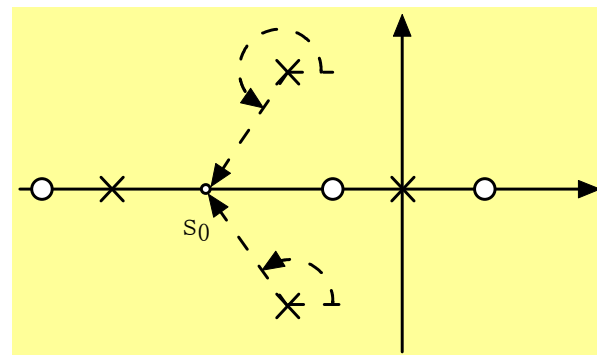
确定  $s$  平面上一点是否在根轨迹上



# 绘制180度根轨迹-1

$$\frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{K_1} = \frac{1}{|K_1|} e^{il\pi}$$

- 规则一：根轨迹有**n**条连续分支
- 规则二：根轨迹**始于开环极点**，**止于开环零点**，有**(n-m)**条根轨迹终止于**无穷远处**
- 规则三：根轨迹**对称于实轴**（利用这一规则，可只求一半）
- 规则四：**实轴**上的某一段，  
若其右边的开环零点和开环极点总数为**奇数**，则该段实轴是根轨迹的一部分。为什么？



# 绘制180度根轨迹-2

- 规则五：两支根轨迹在实轴或在平面上某处的交点 $s_d$ 为交点是闭环特征方程的重根，即有

$$1 + L(s) = (s - s_d)^2 l(s) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(1 + L(s))}{ds} \Big|_{s_d} &= \frac{dL(s)}{ds} \Big|_{s_d} \\ &= [2(s - s_d)l(s) + (s - s_d)^2 l'(s)] \Big|_{s_d} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \frac{N'(s_d)}{N(s_d)} = \frac{M'(s_d)}{M(s_d)} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_d - p_j} \end{aligned}$$
$$L(s) = \frac{K_1 \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K_1 \frac{M(s)}{N(s)}$$

将得到的根代入 $1 + L(s) = 0$   
能够使 $K_1 > 0$ 便是分离点。

除了确定分离点外，还可确定分离角  $(2h+1)\pi/l$

$l$ 是分支数,  $h=0, 1, \dots, l-1$

# 绘制180度根轨迹-3

## □ 规则六：根轨迹与虚轴的交点

▣ 可将  $s=i\omega$  代入特征方程求出---直接法

▣ 利用Routh判据求出

## □ 规则七：趋向无穷远处的 $(n-m)$ 条根轨迹的

□ 渐近线与实轴的交角为

$$\theta = l\pi/(n-m), l=1,3,5,\dots,$$

□ 渐近线汇交于实轴上的坐标为

$$\sigma_1 = \left( \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{k=1}^m z_k \right) / (n-m)$$

## □ 规则八：根轨迹的出射角和入射角：

$$\theta_{p_l} = (2k\pi + \pi) + \sum_{k=1}^m \angle(p_l - z_k) - \sum_{j=1, j \neq l}^n \angle(p_l - p_j)$$

$$\theta_{z_l} = (2k\pi + \pi) + \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) - \sum_{j=1, j \neq l}^m \angle(z_l - z_j)$$

对应的共轭极点  
和零点取各对应  
角的相反数

# 180度根轨迹性质-1

□ 当系统开环传递函数 $L(s)$ 的分子、分母阶次差大于等于2时，系统闭环极点之和等于系统开环极点之和且为常数。为何？

▣ 开环特征多项式与极点 $p_j$

$$\alpha(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s^1 + a_0 = \prod_{j=1}^n (s - p_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^n p_j = -a_{n-1}$$


▣ 闭环特征多项式与极点 $\lambda_j$

$$\alpha_1(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a'_{n-2}s^{n-1} + \cdots + a'_1s^1 + a'_0 = \prod_{j=1}^n (s - \lambda_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j = -a'_{n-1}$$

▣ 对应于根轨迹表达的含义： $n-m \geq 2$ 时，根轨迹向左向右移动的总和为0。

□ 闭环特征多项式的常数项性质

$$\alpha_1(s) = K_1 \prod_{k=1}^m (s - z_k) + \prod_{j=1}^n (s - p_j) = s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + a'_{n-2}s^{n-1} + \cdots + a'_1s^1 + a'_0 = \prod_{j=1}^n (s - \lambda_j)$$


$$\alpha_1(0) = K_1 \prod_{k=1}^m (-z_k) + \prod_{j=1}^n (-p_j) = a'_0 = \prod_{j=1}^n (-\lambda_j)$$

# 根灵敏度

- 参数从标称值发生变化时，根轨迹的位置对参数变化的灵敏度。在量值上可以用隐式函数求导方式得到：

$$\frac{ds}{dK} = -\frac{F_K(s, K)}{F_s(s, K)} \quad F(s, K) \text{ 是特征多项式}$$

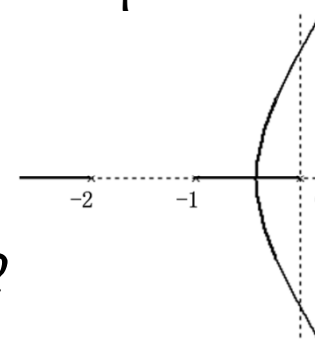
灵敏度越大，特征根随K的变化越大

- 例如：若系统闭环特征方程为  $s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$ ，则根轨迹灵敏度

$$\frac{ds}{dK_1} = -\frac{1}{3s^2 + 6s + 2}$$

解释一下何意？

灵敏度最高在哪里？



- 从特征根的灵敏度角度分析，在设计控制系统时，**不但要选择期望的特征根，而且也应该考虑选择对增益不灵敏的特征根**，对增益变化灵敏的特征根有可能导致系统不稳定

# 例：绘制系统根轨迹-1

□ 系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$$

解：

- (1) 有 3 条根轨迹分支。起点为极点 0, -1, -2, 终点为无穷远处。
- (2) 实轴上的根轨迹为  $(-\infty, -2]$ ,  $[-1, 0]$ 。
- (3) 根轨迹的交点满足以下方程

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0 \quad 3s^2 + 6s + 2 = 0 \quad s_{1,2} = -1 \pm 0.58$$

由于交点在  $[-1, 0]$ ，因此  $s_d = -0.42$ 。

## 例：绘制系统根轨迹-2

□ 系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$$

解：系统闭环特征方程为  $s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$

(4) 与虚轴的交点。方法1：直接法

令  $s = i\omega$ ，则  $-i\omega^3 - 3\omega^2 + i2\omega + K_1 = 0$

令实部虚部分别为0，得到

$$\begin{cases} K_1 - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K_1 = 6 \end{cases}$$

与虚轴的交点为  $\pm i\sqrt{2}$

临界增益为6

方法2：用Routh稳定判据

列出 Routh表，临界稳定状态时  $K_1 = 6$ 。辅助方程

$$F(s) = 3s^2 + K_1 \Big|_{K_1=6} = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 3 & K_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & (6 - K_1)/3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & K_1 & \end{array}$$

# 例：绘制系统根轨迹-3

□ 系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$$

解：(5) 根轨迹的渐近线与实轴的

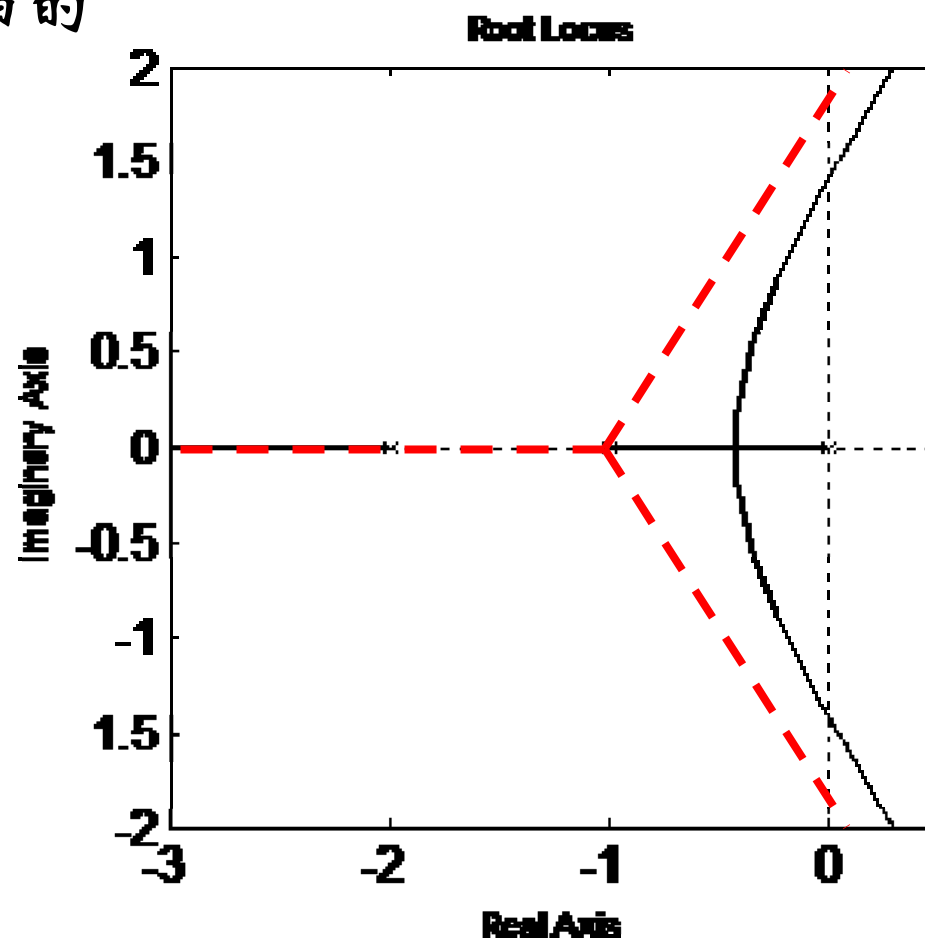
交点为

$$\sigma_1 = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

交角为

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

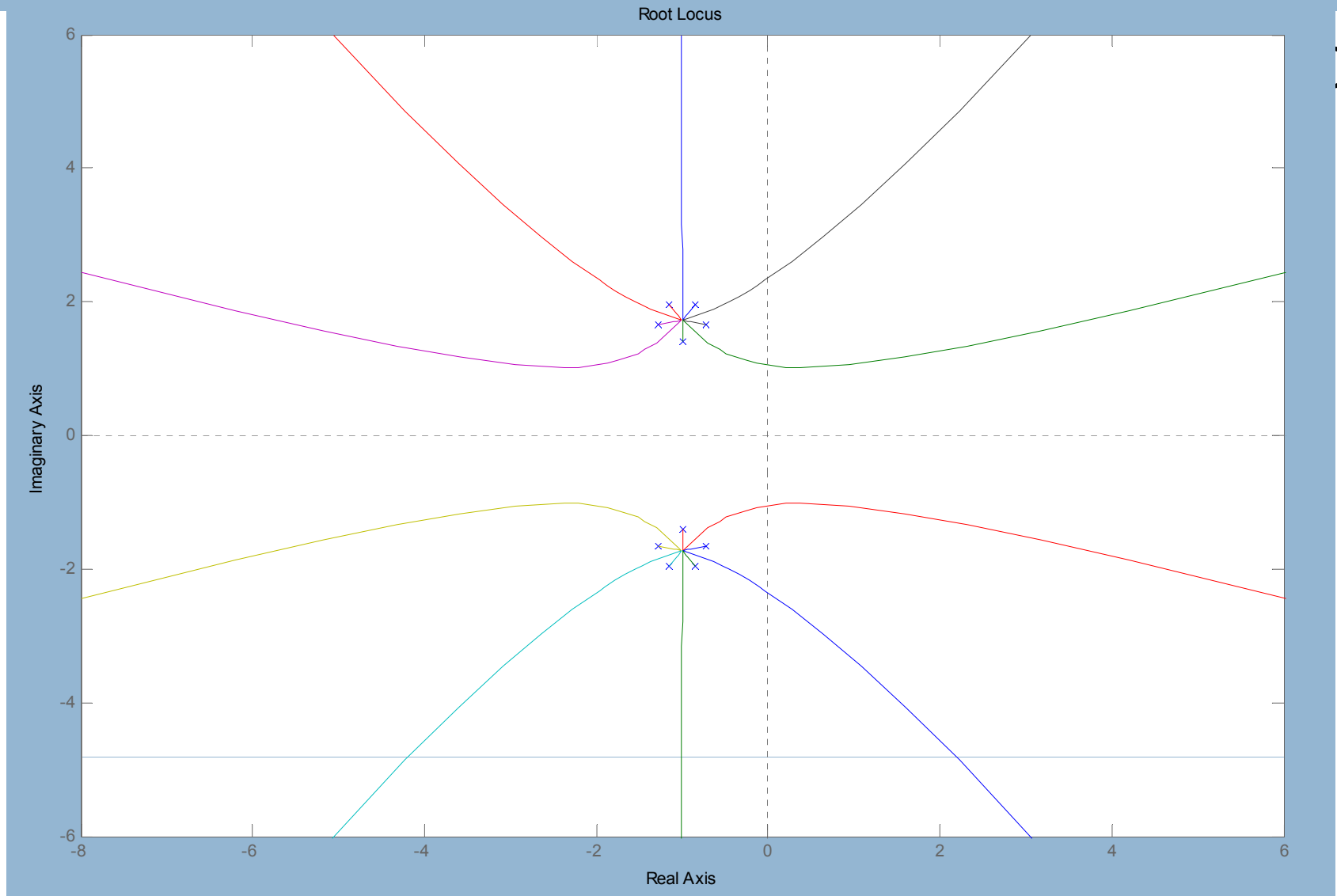
**注意：**针对具体的问题，并不是所有的规则都要用上，再如画开环传递函数是  $G(s)=1/s$  的闭环系统根轨迹，就是负实轴，只用一条规则。





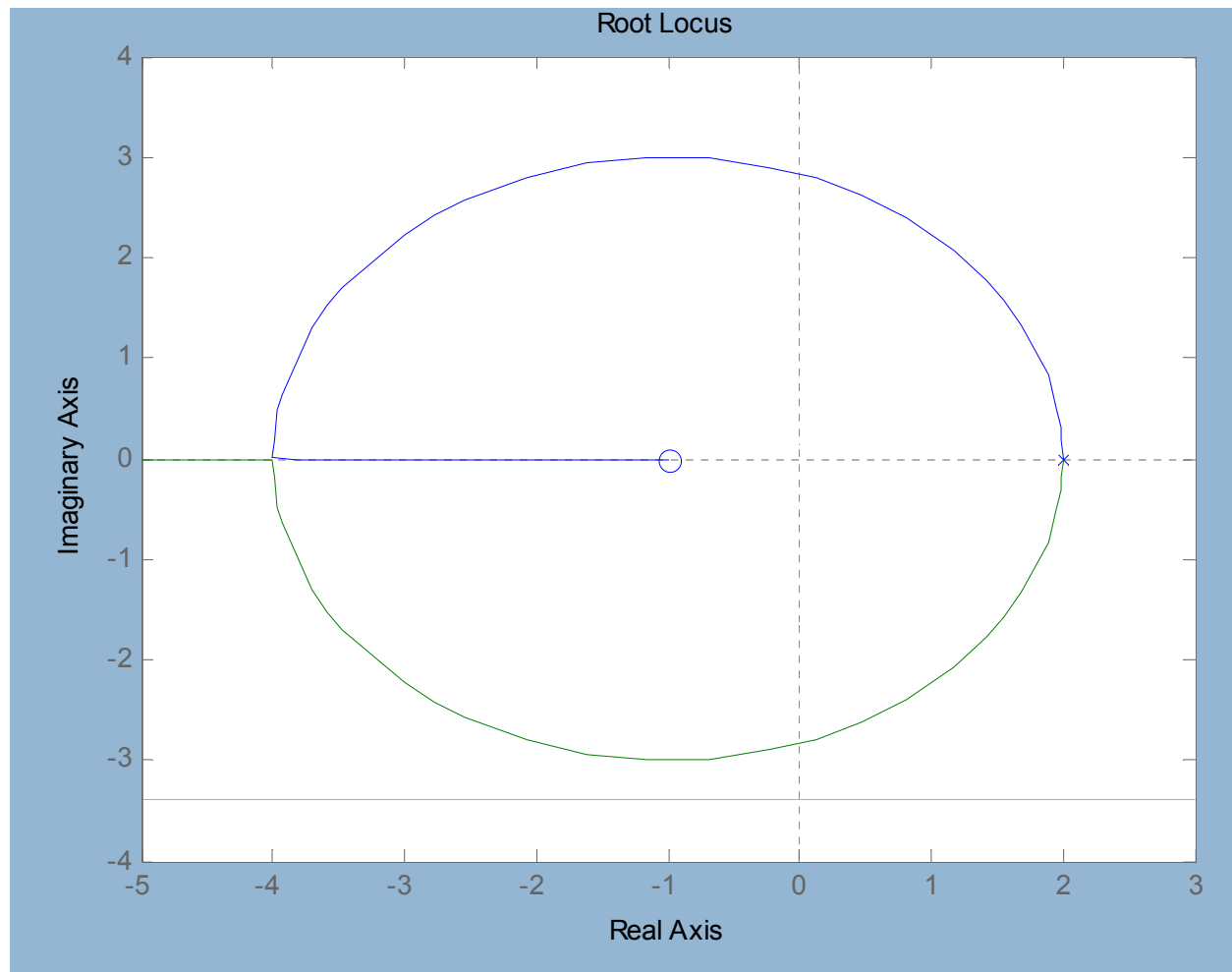
例：分离点没在坐标轴上的情况

```
g=tf([1],[1  
3840  
rlocus(g)
```



# 课外练习

□ 开环传递函数为  $K(s+1)/(s-2)^2$  的闭环系统根轨迹。



这一讲就到这里！



## 第十三讲 参数根轨迹与绘制

开环传递函数中除根轨迹增益以外的其他参数的变化也影响闭环极点位置。

# 参数根轨迹与绘制

- 除根轨迹增益 $K_1$ 以外的其它参量从零变化到无穷大时绘制的根轨迹，称为**参数根轨迹**。
- 绘制参数根轨迹的方法是将系统闭环特征方程转换为常规根轨迹方程的形式
  - ▣ 假设研究的参数是 $b$ ，由开环传递函数写出闭环特征方程，解出参数 $b$ ，进一步将其转换成如下形式

$$1 + \frac{b \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0 \Rightarrow \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{b}$$

# 例：绘制参数根轨迹

- 反馈系统开环传递函数如下，试概略绘制 $b$ 从0变化到 $+\infty$ 时的根轨迹。

$$L(s) = \frac{s+b}{s^2(s+1)}$$

- 解：由闭环特征方程解 $b$

$$s^3 + 2s^2 + s + b = 0 \Rightarrow b = -(s^3 + 2s^2 + s) \Rightarrow \frac{b}{(s^3 + 2s^2 + s)} = -1$$

- 构造等效开环传递函数

$$W(s) = \frac{b}{(s^3 + 2s^2 + s)}$$

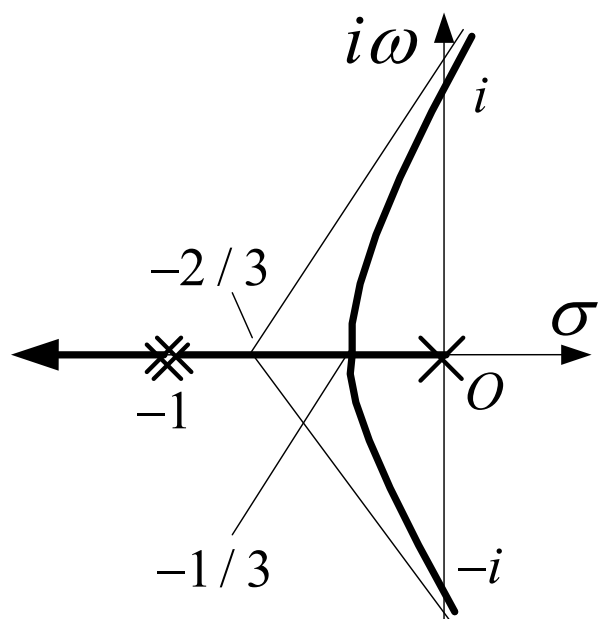
- 绘制常根轨迹

- (1) 系统有3条根轨迹，始于3个开环极点：0, -1, -1，它们均趋于无穷远处。
- (2) 实轴上的根轨迹： $[-\infty, -1]$ ,  $[-1, 0]$ 。
- (3) 解方程  $1/s + 1/(s+1) + 1/(s+1) = 0$ ，得到根轨迹的交点  $s_d = -1/3$ 。  
由幅值条件得到对应的  $b = 4/27$ 。
- (4) 与虚轴交点。令  $s = i\omega$ ，代入系统闭环特征方程求解，  
$$-i\omega^3 + 2\omega^2 + i\omega + b = 0 \Rightarrow \omega = \pm 1, b = 2$$

# 例：绘制参数根轨迹-续

□ (5) 渐近线:

$$\sigma = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}, \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$



讨论:

(1) 当  $0 < b \leq 4/27$  时, 闭环极点落在实轴上, 系统阶跃响应为单调过程。

(2) 当  $4/27 < b \leq 2$  时, 一对复数闭环极点逐渐向虚轴靠近, 系统阶跃响应为振荡收敛过程。

(3) 当  $b > 2$  时, 有闭环极点落在右半s平面, 系统不稳定, 阶跃响应振荡发散。

# 课外练习

□ 已知开环传递函数绘制参数根轨迹。

$$G(s) = \frac{as + 25}{s(s + 4)}$$



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com

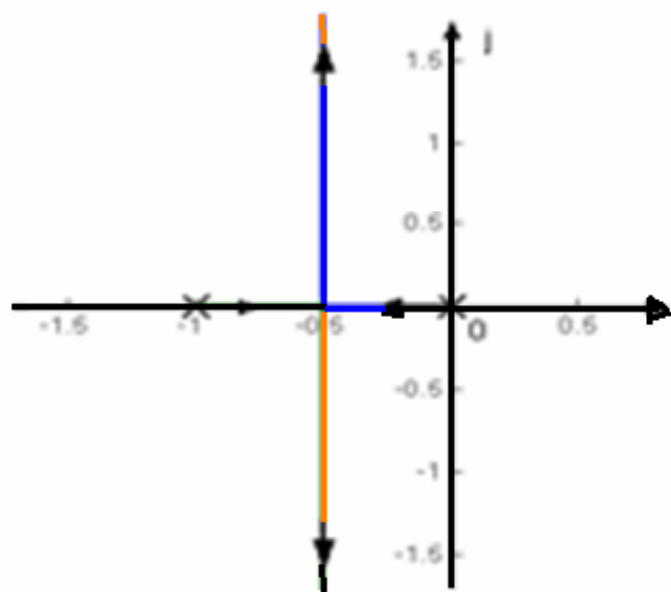
## 第十四讲 开环零、极点分布对根轨迹的影响与闭环系统性能

闭环的极点决定着系统的稳定性，零点对各运动模态的权值有影响。在开环系统中附加极点和零点后，系统的响应如何变化呢？本讲从以下几个方面论述：

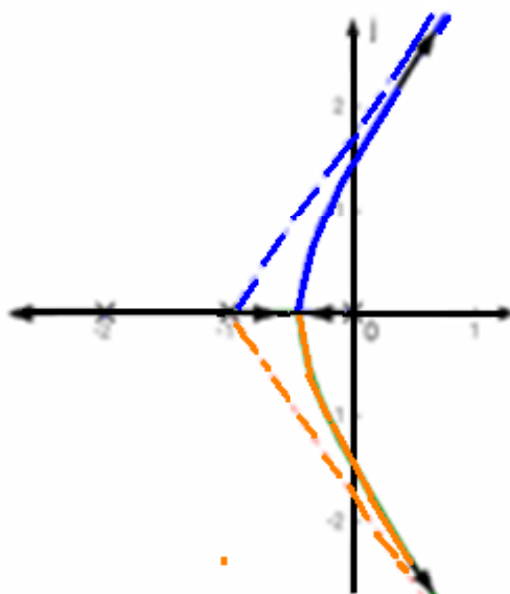
- 附加开环极点对根轨迹的影响
- 附加开环零点对根轨迹的影响
- 附加开环偶极子对根轨迹的影响
- 开环零极点相消时根轨迹分析需注意的问题

# 附加开环极点对根轨迹的影响

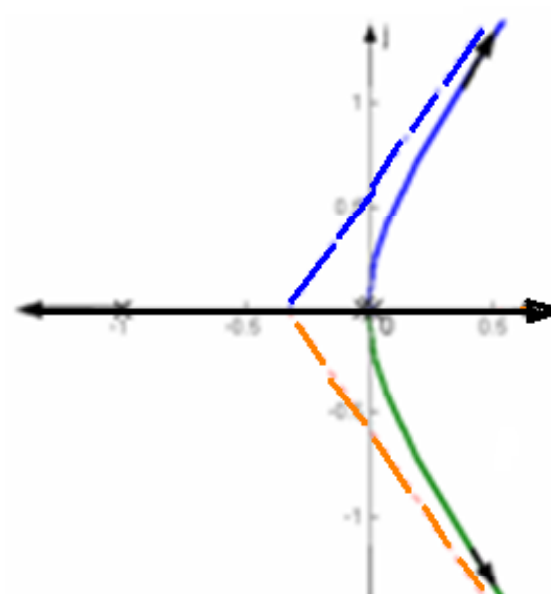
$$G_1(s) = \frac{K^*}{s(s+1)}$$



$$G_2(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$



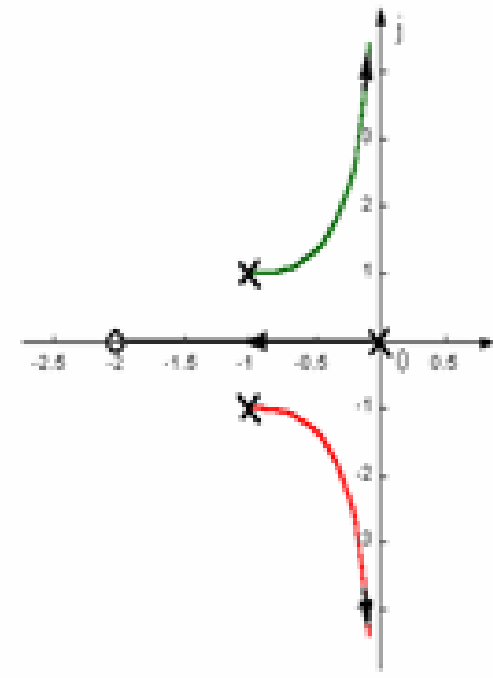
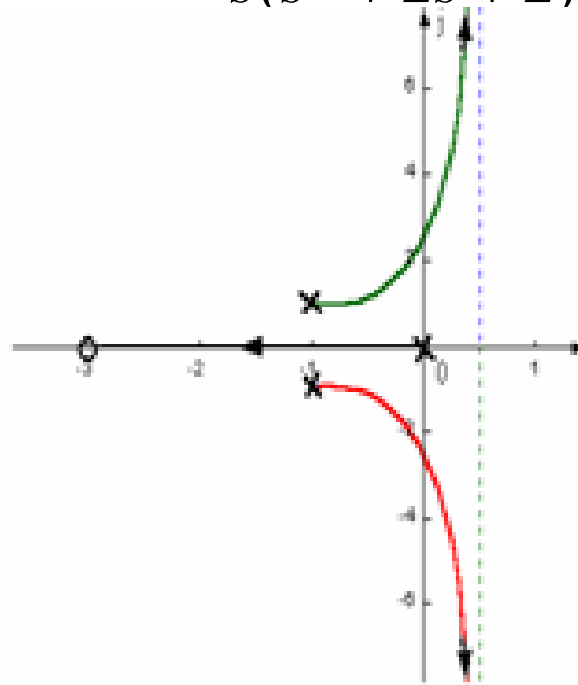
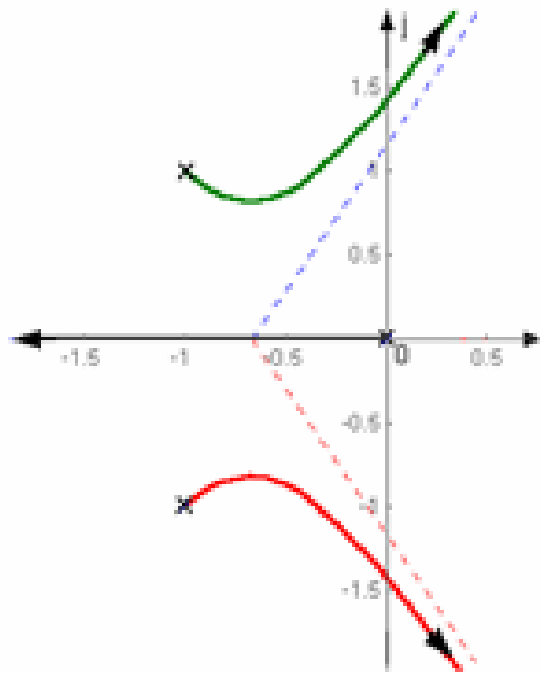
$$G_3(s) = \frac{K^*}{s^2(s+1)}$$



- 附加开环极点改变了实轴上根轨迹。开环极点的引入使根轨迹向实轴负方向移动→对系统的稳定性不利，系统的快速性变差，加入的极点越靠近原点，这种作用越强。

# 附加开环零点对根轨迹的影响

$$G_1(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad G_2(s) = \frac{K^*(s + 3)}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad G_3(s) = \frac{K^*(s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



- 开环零点的引入使根轨迹向左移动，对系统的稳定性有利，零点靠近原点，这种作用越强。若增加的开环零点和某个极点重合或距离很近时，构成偶极子，则二者作用相互抵消。→可以通过加入开环零点的方法，抵消有损于系统性能的极点。

# 附加开环偶极子对闭环根轨迹的影响

- 由于开环偶极子中的零点 $z_c$ 与极点 $p_c$ 重合或相近，所以对 $s$ 平面上某点提供的幅值与幅角相等或相近，即

$$\angle(s - z_c) = \angle(s - p_c) \quad |s - z_c| = |s - p_c|$$

- $$K_c = \lim_{s \rightarrow 0} s^v G(s) H(s) \frac{(s - z_c)}{(s - p_c)} = \lim_{s \rightarrow 0} s^v \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^v \prod_{j=v+1}^n (s - p_j)} \frac{(s - z_c)}{(s - p_c)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=v+1}^n (-p_j)} \frac{(-z_c)}{(-p_c)}$$

- 开环偶极子不影响远处根轨迹形状以及相应点处的根增益，但可能影响根轨迹上各点开环比例系数(从上面的关系可以看出)，由此，原点附近的开环偶极子将影响系统的稳态误差，可以选择 $z_c/p_c > 5$ 以上，改善稳态性能。

# 出现开环零极点相消时的根轨迹分析需注意的问题

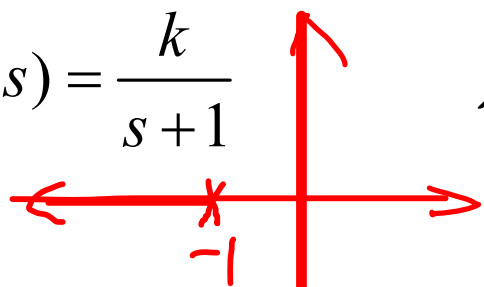
- 分析两个闭环系统例子，一个H(s)在前向通道中，一个在反馈通道中。

$$G(s) = \frac{k}{s-1}, H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

- 两者的开环传递函数经约分后相同，进行根轨迹分析，结论？

$$L_1(s) = \frac{k}{s+1}$$

在K>0时均是稳定的



问题在哪里？

- 求闭环传递函数，结论？

$$\Phi_1(s) = \frac{k(s-1)}{(s-1)(s+1+k)}, \Phi_2(s) = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+1+k)}$$

几点结论：

- 开环传递函数存在一对相等的开环极点时，在s平面可能存在点状根轨迹，不应对消掉。若是点状根轨迹，始终存在一个不随参数变化而变化的极点。若不是可以对消掉。
- 存在着前向通道的极点与反馈通道点相消的情况，则闭环系统不存在的零点，但极点是存在的
- 存在着前向通道零点与反馈通过极消的情况，则闭环系统中不存在相极点，但零点是存在的
- 闭环零、极点对消时闭环传递函数是完全描述系统，系统外部稳定性部稳定性可能是不一致的。



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com



## 第十五讲 系统时域分析综合例题

本章针对时域分析方法，本章从时域运动的求解方法，稳态性能及其判据，暂稳态性能指标与计算，一阶系统的参数阶跃响应和性能，二阶系统的特征根分布、参数和性能的关系以及改善，减小稳态误差的方法，根轨迹绘制与分析，零极点分布对系统性能的影响等方面进行了详细讲解。

为巩固时域分析方法，本讲讲解几个典型的时域分析综合例题，以引导大家系统地思考和解决问题。



# 例1：确定单位负反馈系统参数与指标

- 已知单位负反馈系统的开环传递函数如下，试用根轨迹法确定系统在稳定欠阻尼状态下的开环增益K的范围，并计算阻尼比 $\zeta=0.5$ 的K值以及相应的闭环极点，估算此时系统的动态性能指标。求在单位斜坡信号作用下的稳态误差。

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

- 由题分析思考以下问题：
- (1) 基本分析工具是什么？
  - 根轨迹

- (2) 高阶系统欠阻尼状态与根轨迹上应关系是什么？
  - 存在共轭极点
- (3) 如何计算闭环极点？
  - 计及极点多项式，对照系数
- (4) 指标评估的方法是否满足借用二阶系统指标计算的条件？
  - 主导极点存在性
- (5) 稳态误差与什么有关？
  - 开环增益、输入信号、积分个数

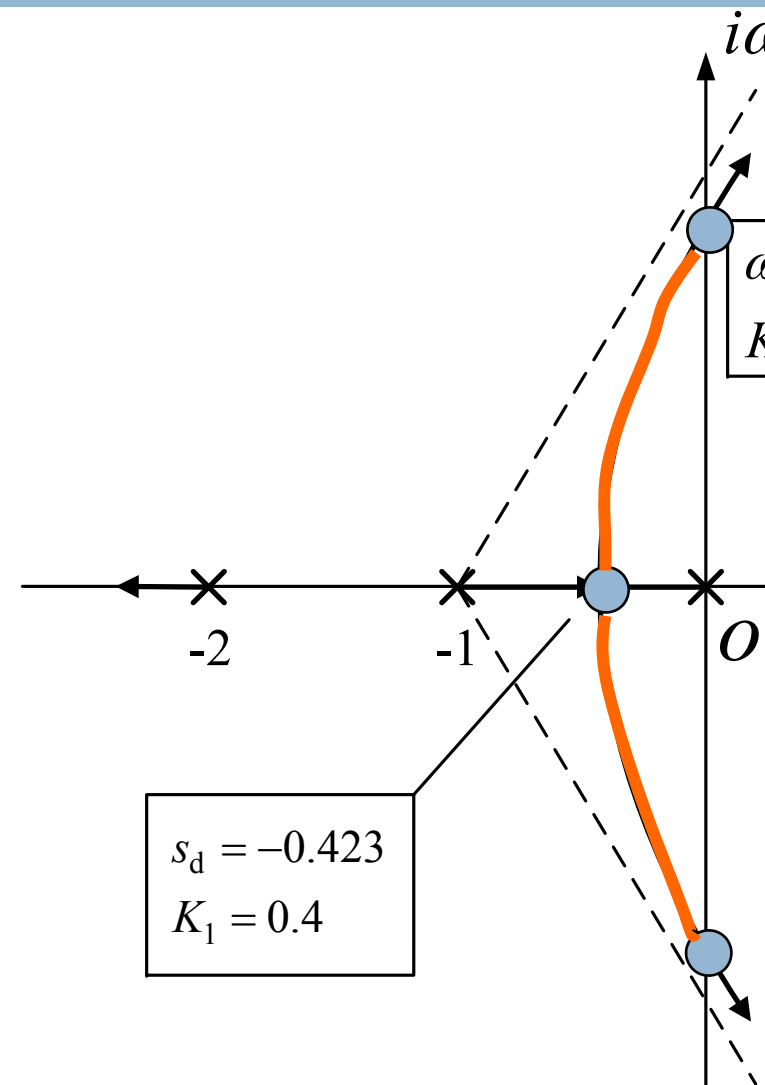
THINK

# 例1 解答-1

- (1) 先画出系统的根轨迹
- 原传函是不根轨迹形式，变换一下

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}, K_1 = 2K$$

- a. 系统有3条根轨迹分支，均趋于无穷远处。
- b. 实轴上的根轨迹为： $[-\infty, -2]$ ， $[-1, 0]$ 。
- c. 根轨迹的交点满足  $1/s + 1/(s+1) + 1/(s+2) = 0$ ，即  $3s^2 + 6s + 2 = 0$ ，解得  $s_d = -0.42$ 。代入根轨迹幅值条件  $|L(s)| = 1$  得到  $K_1 = 0.4 \rightarrow K = 0.2$ 。
- d. 由  $1 + L(i\omega) = 0$  得到根轨迹与虚轴的交点为  $s = 1.4i$ ，相应的  $K_1 = 6 \rightarrow K = 3$ 。
- e. 根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为  $\sigma = -1$ ， $\theta = \pi/3, \pi, -\pi/3$ 。



# 例1解答-2

□ (2) 确定稳定欠阻尼状态下的根轨迹增益的范围

□  $0.4 < K_1 < 6 \rightarrow 0.2 < K < 3$

□ (3) 计算特定阻尼比下的开环增益和闭环极点

□  $\zeta = 0.5$ ,  $\arccos \zeta = 60^\circ$ , 两个共轭极点为

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0.5 \omega_n \pm j 0.866 \omega_n$$

□ 再令第三个极点为  $\lambda_3$ 。

□ 再计及闭环特征方程式

$$\alpha(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + \boxed{(\omega_n - \lambda_3)}s^2 + \boxed{(\omega_n^2 - \lambda_3 \omega_n)}s - \boxed{\lambda_3 \omega_n^2} = s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

□ 对照系数得

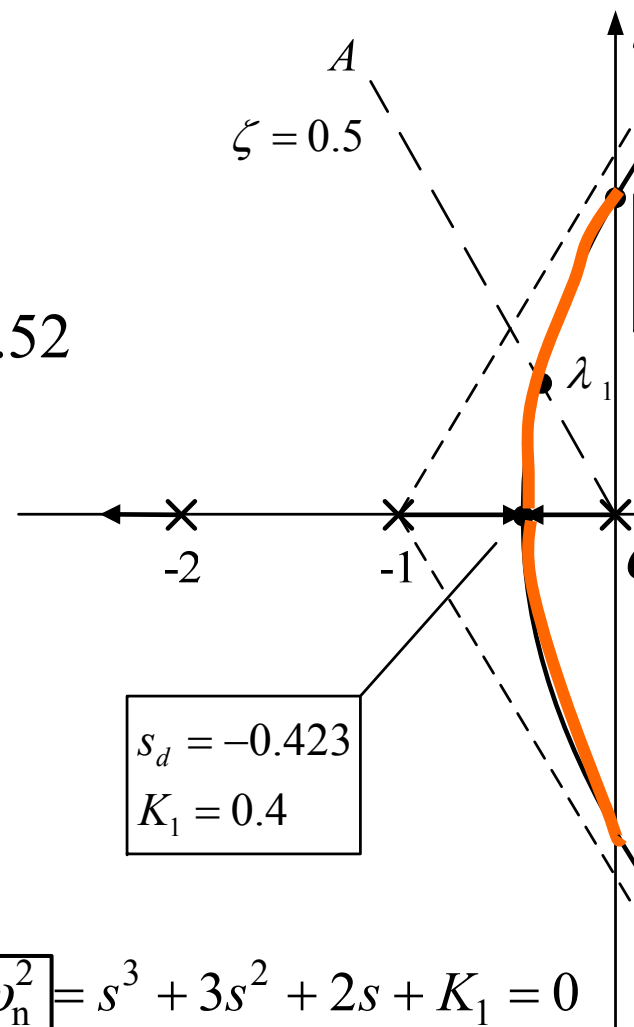
$$K_1 = 1.04 \rightarrow K = 0.52$$

$$\omega_n = 2/3$$

$$\lambda_3 = -2.33$$

$$\lambda_1 = -0.33 + j0.58$$

$$\lambda_2 = -0.33 - j0.58$$



# 例1 解答-3

## □ (4) 评估性能指标

- 由三个极点 $\lambda_{1,2} = -0.33 \pm j0.58, \lambda_3 = -2.33$ , 知 $\lambda_{1,2}$ 极可以看成主导极点, 原系统闭环增益为1, 因此降阶的二阶系统闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi_2(s) &= \frac{0.33^2 + 0.58^2}{(s + 0.33 - j0.58)(s + 0.33 + j0.58)} \\ &= \frac{0.667^2}{s^2 + 0.667s + 0.667^2}\end{aligned}$$

- 利用二阶系统性能计算方法估算

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{0.5 \times 0.667} = 10.5(s)$$

$$\sigma = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-0.5 \times 3.14/\sqrt{1-0.5^2}} = 16.3\%$$

## □ (5) 计算稳态误差

- 原系统为 I 型系统, 系统的静态速度误差系数计算为

$$\begin{aligned}K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{K_1}{2} = 0.525\end{aligned}$$

- 系统在单位斜坡信号作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1.905$$

## 例2：通过偶极子提高静态特性

- 设单位反馈系统的开环传函如下，求闭环系统具有阻尼比0.5的**主导极点的具体位置**，并求相应的速度误差系数 $K_v$ ，欲使 $K_v=12$ ，且系统的动态特性基本保持不变，应该怎么办？

$$G(s) = \frac{800k}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

- 由题分析思考以下问题：
- (1) 基本工具是什么？
  - **根轨迹**

- (2) 画根轨迹过程中代数方程次数较高，分离点如何求？

- **利用近似方法**

- (3) 如何计算闭环极点、根轨迹增益

- **计及极点多项式，对照系数**

- (4) 如何在保证动态特征基本不变情况下提高静态增益？

- **在开环传函中引入近似偶极子**

THINK

# 例2解答-1

(1) 先画出系统的根轨迹

$$-10 > d_2 > -20$$

$$\frac{1}{d_2 + 20} + \frac{1}{d_2 + 10} + \frac{1}{d_2 + 4} + \frac{1}{d_2}$$

$$\approx \frac{1}{d_2 + 20} + \frac{1}{d_2 + 10} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2} =$$

$$d_2 \approx -16.7$$

原传函是根轨迹形式，令  $K_1 = 800k$

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

▣ a. 系统有4条轨迹分支，均趋于无穷远处。

▣ b. 实轴上轨迹为：[-20,-10]，[-4,0]

▣ c. 根轨迹分离点采用近似法

$$> d_1 > -4 \quad \frac{1}{d_1 + 20} + \frac{1}{d_1 + 10} + \frac{1}{d_1 + 4} + \frac{1}{d_1}$$

$$\approx \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{d_1 + 4} + \frac{1}{d_1} = 0$$

$$d_1 \approx -1.7$$

▣ d. 由  $1+L(i\omega)=1$  得到根轨迹与虚轴的交点为  $s=4.85i$ ，相应的  $k=6975.78 \rightarrow k=8.72$ 。

▣ e. 根轨迹的渐近线与实轴交点夹角分别为  $\sigma=-8.5$ ， $\theta=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ 。

# 例2解答-2

□ (2) 确定稳定欠阻尼状态下极点

□ 等阻尼线  $\zeta=0.5$ ,  $\arccos\zeta=60^\circ$ ,  
交根轨迹于两个共轭极点为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.5\omega_n \pm j0.866\omega_n$$

▣ 再令第三个极点为  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$ 。

▣ 再计及闭环特征方程式

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) \\ &= s^4 + 34s^3 + 320s^2 + 800s + K_1 = 0\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = -1.2754 \pm j2.2118$$

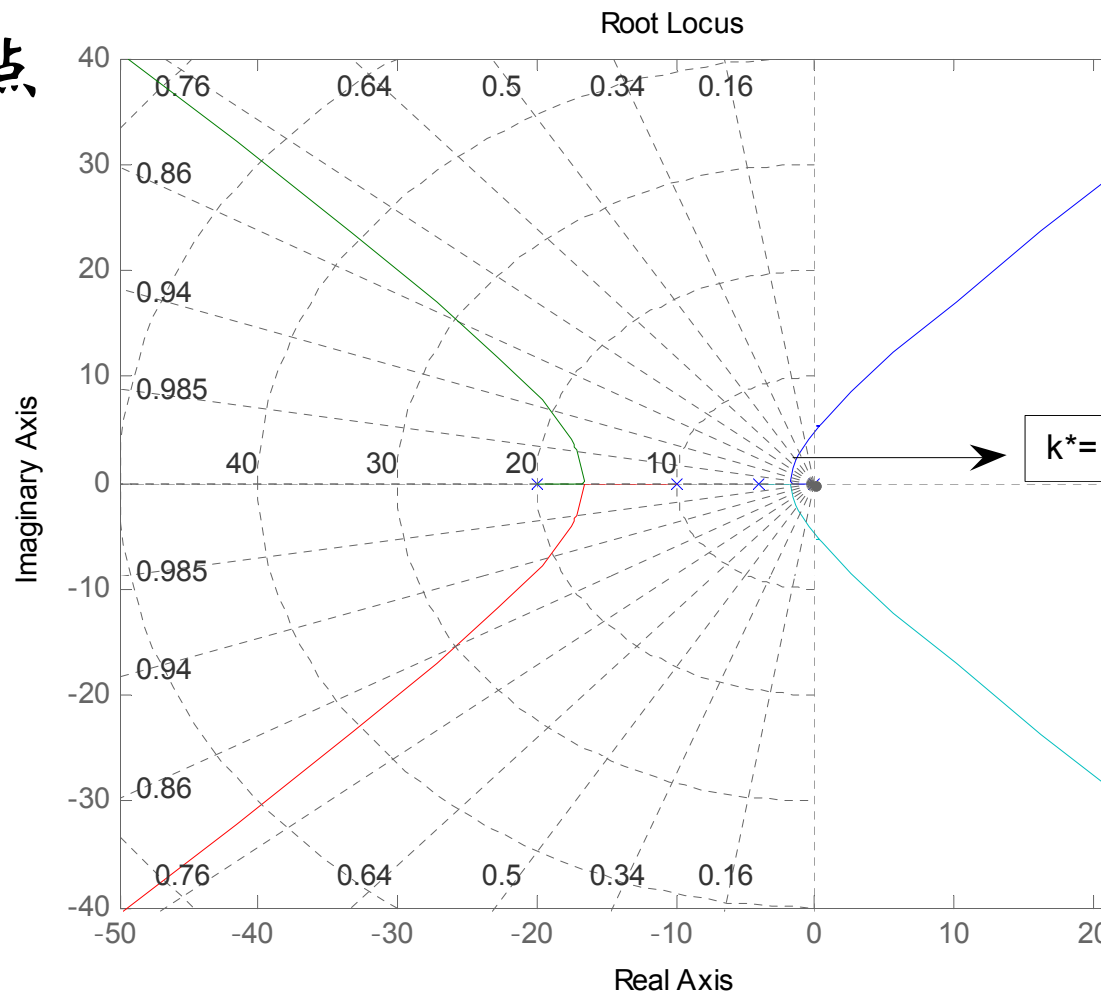
$$\lambda_3 = -11.9828, \lambda_4 = -19.4665$$

$$\omega_n = 2.5$$

$$K_1 = 1520.6$$

$$K_v = \frac{1520.6}{800} = 1.9 = k \longrightarrow K_v = 12$$

开环增益增加这么多，怎么办？



# 例2解答-3

□ (3) 引入开环偶极子改变开环增益系数

$$\frac{K_{\text{vnew}}}{K_{\text{vold}}} = \frac{12}{1.9} = 6.3158 \quad p_c = -0.07, z_c = -0.4421$$

$$G(s) = \frac{800k(s - z_c)}{s(s + 4)(s + 10)(s + 20)(s - p_c)}$$

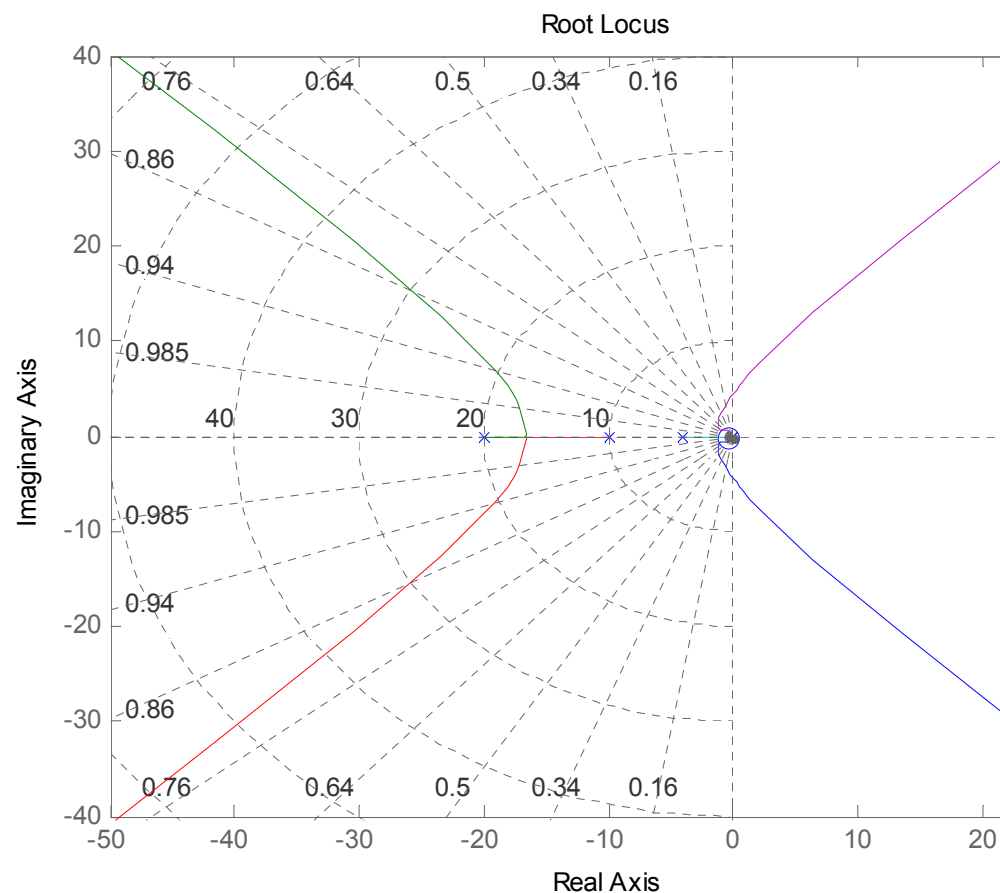
□ (4) 重绘根轨迹图，验证

点  
48  
3  
36  
545 + 2.0278i  
545 - 2.0278i

闭环偶极子  
↔ -0.4421

主导极点

✓开环偶极子对远离原点的根轨迹影响小。  
✓闭环偶极子对闭环系统动态特性的影响不大。  
✓加入开环偶极子后，闭环系统静态特性有了大幅度提高。但动态特性并没有大的改变。





# 例3：比较根轨迹，说明命题正确性

- 三个系统的开环传递函数分别为如下，试分别绘制三个系统的根轨迹，并分析三者根轨迹之间的联系与区别。说明“合理选择校正装置参数，设置相应开环零、极点位置，可以改善系统动态性能”命题的可信性。

控制器

$$G_1(s) = G(s)H_1(s) = \frac{K^*}{s(s+1)}$$

控制器

$$G_2(s) = G(s)H_2(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

控制器

$$G_3(s) = G(s)H_3(s) = \frac{K^*(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

- 由题分析思考以下问题：

- (1) 基本工具是什么？

根轨迹

- (2) 如何从根轨迹图中看到变化

看移动的方向

- (3) 这种变化与零极点间的互动系是什么？

零、极点位置博弈

THINK

# 例3解答

$$G_1(s) = \frac{K^*}{s(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$G_3(s) = \frac{K^*(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

- 1) 先画出三个系统的根轨迹
- 2) 从图中可以看出：相对于  $G_1$ ， $G_2$  移了， $G_3$  右移了

3) 而反观对应的传函：

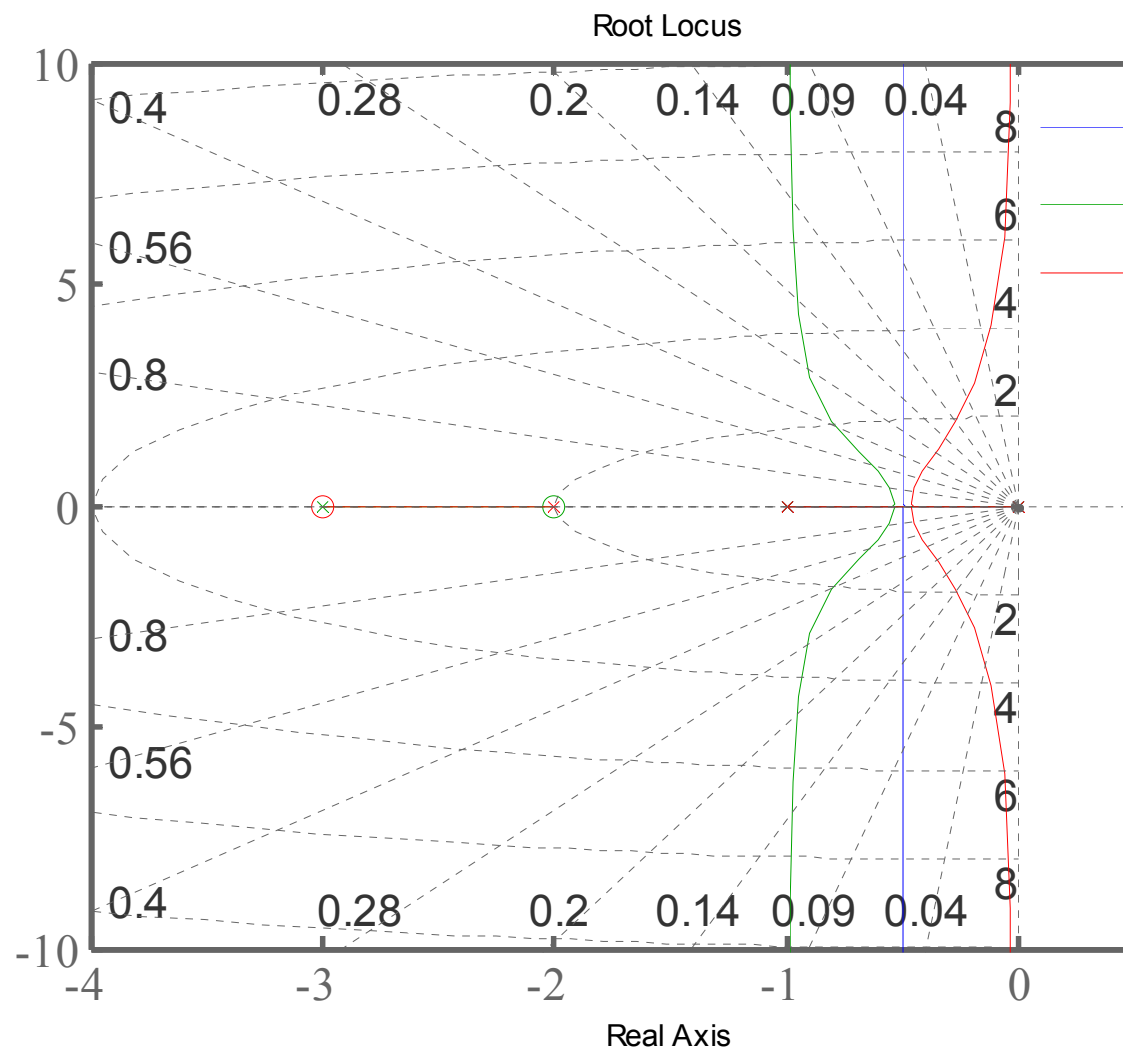
$G_2$  增加的零点比极点更靠近虚轴  $\rightarrow$  零点起主导作用  $\rightarrow$  左移  $\rightarrow$  有利于稳定性

$$|z_c| < |p_c| \Rightarrow \angle(s - z_c) > \angle(s - p_c) \text{ lead}$$

$G_3$  增加的极点比零点更靠近虚轴  $\rightarrow$  极点起主导作用  $\rightarrow$  右移  $\rightarrow$  不利于稳定性

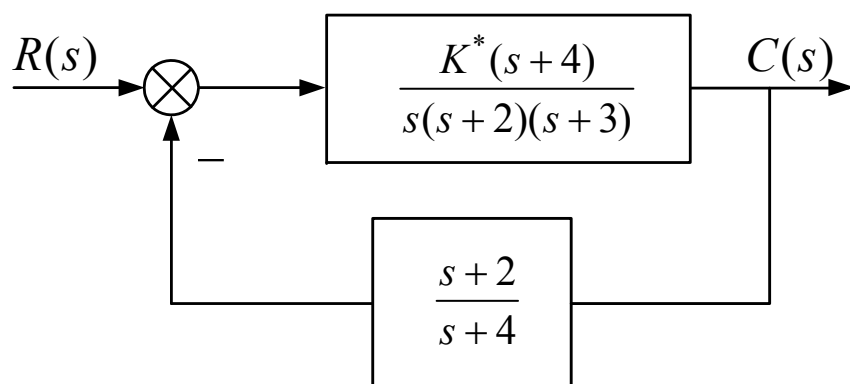
$$|z_c| > |p_c| \Rightarrow \angle(s - z_c) < \angle(s - p_c) \text{ lag}$$

$H(s)$  看成控制器，合理选择其参数，置相应开环零、极点位置，可以改善系统动态性能



## 例4：存在零极对消情况下的计算问题

- 控制系统结构图如下所示，试绘制系统根轨迹，并确定 $\zeta=0.5$ 时系统的开环增益 $K$ 值及对应的闭环传递函数。



- 由题分析思考以下问题：
- (1) 基本工具是什么？
  - 根轨迹

- (2) 存在着前向通道的极点与反馈通道的零点相消的情况说明？
  - 闭环系统不存在相消的零点但极点是存在的
- (3) 存在着前向通道零点与反馈通道极点相消的情况说明什么？
  - 闭环系统中不存在相消的极点但零点是存在的
- (4) 极点已知时如何计算根轨迹增益？
  - 利用幅值条件

THINK

# 例4解答-1

(1) 注意到开环传递函数有零极点相消的情况，所以在写开环传递函数时不应约掉，即

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)} \cdot \frac{s+2}{s+4}$$

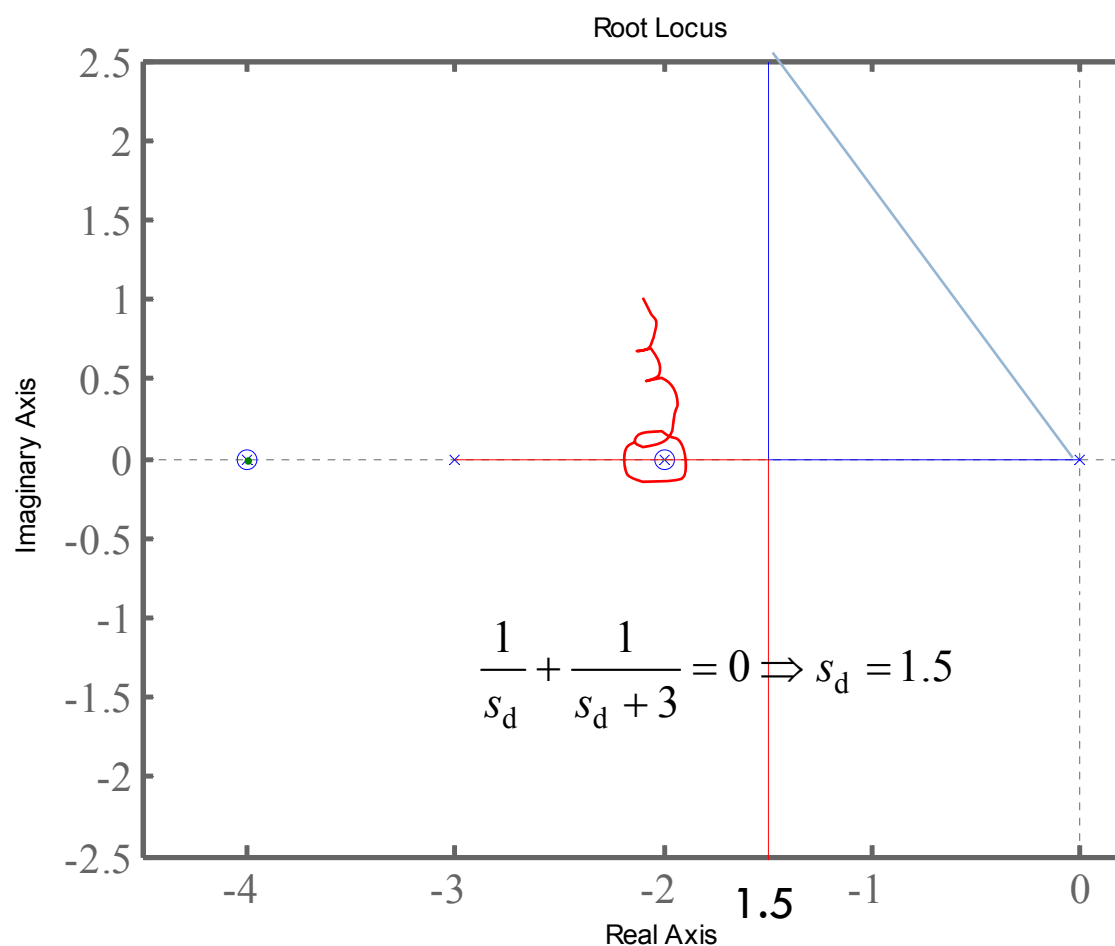
(2) 画根轨迹

注意：-4是点状根轨迹，而-2不是，可以将非点状根轨迹约掉画根轨迹；点状根轨迹画根轨迹时可以不考虑，但在考查稳定性时要考虑  $L(s) = \frac{K^*}{s(s+3)}$

(3) 求 $\zeta=0.5$ 下的根轨迹增益与开环静态增益

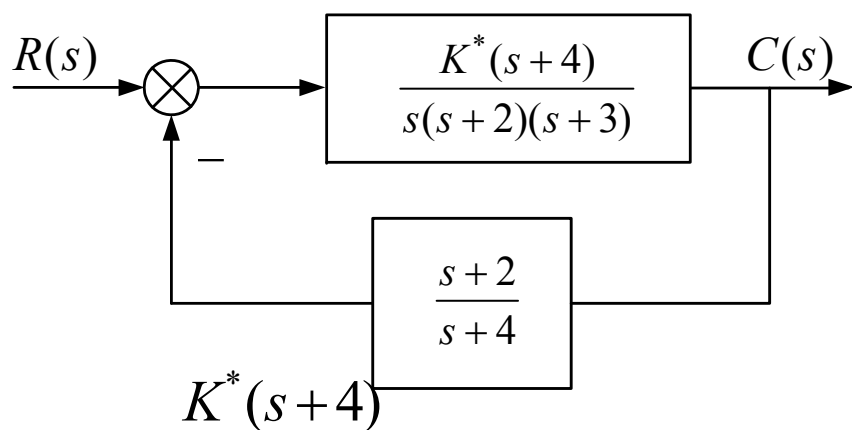
$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{3}{2} \tan 60^\circ = -\frac{3}{2} \pm j\frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$K^* = \left| -\frac{3}{2} + j\frac{3}{2} \sqrt{3} \right| \cdot \left| -\frac{3}{2} + j\frac{3}{2} \sqrt{3} + 3 \right| = 9 \Rightarrow K = \frac{K^*}{3}$$



# 例4解答-2

## □ (4) 求闭传递函数



$$\Phi(s) = \frac{\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}}{1 + \frac{K^*(s+4)}{s(s+3)(s+4)}} = \frac{K^*(s+4)^2}{(s^2 + 3s + K^*)(s+2)(s+4)}$$

-4级点稳定，且有一对偶极子，  
不会影响输入输出，约掉



$$\Phi(s) = \frac{K^*(s+4)^2}{(s^2 + 3s + K^*)(s+2)(s+4)} = \frac{9(s+4)}{(s^2 + 3s + 9)(s+2)}$$

## □ 总结一下：

- 存在零极点情况下根轨迹应该考虑些什么？
- 存在零极点情况下闭环传递函数应该考虑些什么？

□ 总之，不要轻易约分。

# 例5：求系统的响应与稳态误差并改善

- 设单位负反馈系统的开环传函如下，当输入为下式 $r(t)$ 时，求(1)系统的零初始条件下的响应 $y(t)$ ；(2)给定稳态误差终值 $e_{ss}$ ；(3)如何消除此稳态误差？给出方法与结果

$$G(s) = \frac{1.2}{s(0.2s+1)} \quad r(t) = A_0 \times 1(t) + A_1 t + \frac{1}{2} A_2 t^2$$

$A_0, A_1, A_2$  are non-zero constants

- 由题分析思考以下问题：
- (1)求响应的基本工具是什么？
  - Laplace逆变换
- (2)该题目求响应的一般手段是什么？
  - 计算 $Y(s)=G(s)R(s)$  Laplace逆变换

- (3)有没有其它手段？
  - 线性叠加性----分别输入求得响应相加
  - 线性系统输入递阶微分(积分)与递阶微分(积分)
- (4)稳态误差如何求？
  - 由误差响应求极限
  - 利用终值定理-根据静态(位置、速度、加速度)增益
- (5)如何消除稳态误差？
  - 根据输入信号的不同，选择引入合适积分个数
  - 增大开环增益

THINK

# 例5解答-1

## □ 闭环传函

$$\Phi(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6} = \frac{6}{(s+2)(s+3)} = 6 \left( \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right)$$

## □ (1) 求响应

### □ 冲激响应

$$g(t) = 6(e^{-2t} - e^{-3t})$$

### □ 阶跃响应

$$y_1(t) = 3(1 - e^{-2t}) - 2(1 - e^{-3t}) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

### □ 速度响应

$$y_2(t) = t - \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}) + \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}) = t - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

### □ 加速度响应

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{3}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{2}{9}(1 - e^{-3t}) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{19}{36} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{2}{9}e^{-3t}$$

## □ 求当输入为题中所给输入输出

$$r(t) = A_0 \times 1(t) + A_1 t + \frac{1}{2} A_2 t^2$$

$$y(t) = A_0(1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t})$$

$$+ A_1 \left( t - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \right)$$

$$+ A_2 \left( \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{19}{36} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{2}{9}e^{-3t} \right)$$

$$= (A_0 - \frac{5}{6}A_1 + \frac{19}{36}A_2) \times 1(t) + (A_1 - \frac{5}{6}A_2)t + \frac{1}{2}A_2 t^2$$

$$+ (-3A_0 + \frac{3}{2}A_1 - \frac{3}{4}A_2)e^{-2t} + (2A_0 - \frac{2}{3}A_1 + \frac{2}{9}A_2)e^{-3t}$$

# 例5解答-2

## □ (2) 稳态误差

□ 由于是I型系统，所以

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1.2$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

$$e_{ss} = \frac{A_0}{1 + K_p} + \frac{A_1}{K_v} + \frac{A_2}{K_a} = \frac{A_0}{1 + \infty} + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_2}{0} = \infty$$

## □ (3) 消除稳态误差

□ 由于系统中的输入加速度信号，所以需要开环传递函数含有3个积分，而原开环传递函数已有一个积分，现在只需在前向通道中引入两个积分，更可将稳态误差消除。

$$G(s) = \frac{1.2}{s(0.2s + 1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$



这一讲就到这里！



图图网: tutu001.com