



## 第六章 非线性控制系统初步

# 内容提要

- 第一讲 非线性现象普遍性与特性以及分析方法
- 第二讲 典型非线性特性及对控制系统的影响
- 第二讲 谐波线性化方法
- 第三讲 自振分析和计算及消除自振的方法
- 第四讲 相平面方法
- 第五讲 相平面方法分析非线性系统
- 第六讲 非线性环节的串并联及系统变换
- 第七讲 利用非线性特性进行控制系统设计

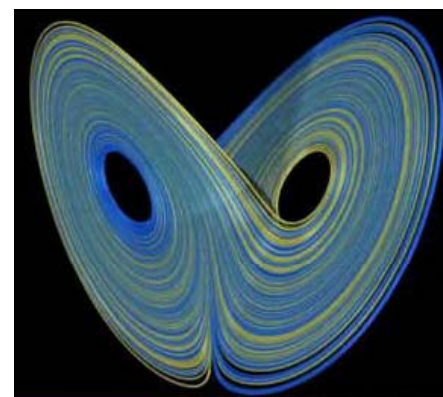
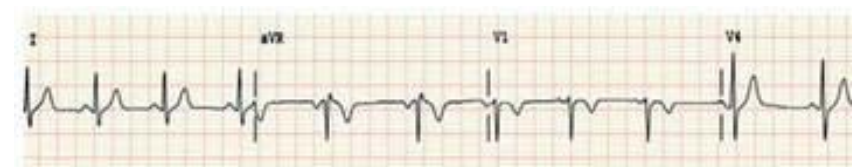
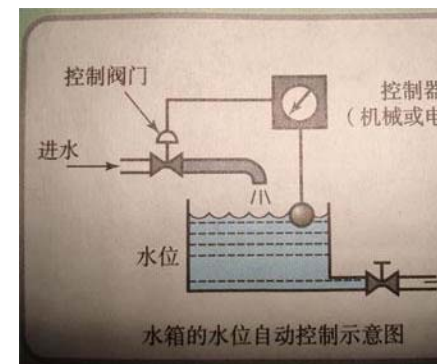
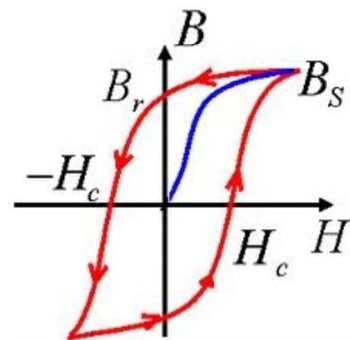
# 第一讲 非线性现象普遍性与特性以及分析方法

现实系统各物理量间的因果关系并不是完全线性的。我们往往在一定程度上采用线性微分方程逼近非线性系统只在平衡点附近可线性化时才适用，对于含有本质非线性环节的系统，这种小范围近似线性化方法显然是不适用的。另外，有时为了改善控制系统性能，还常引入非线性部件或非线性控制器。所以需要研究非线性系统的分析和设计方法。

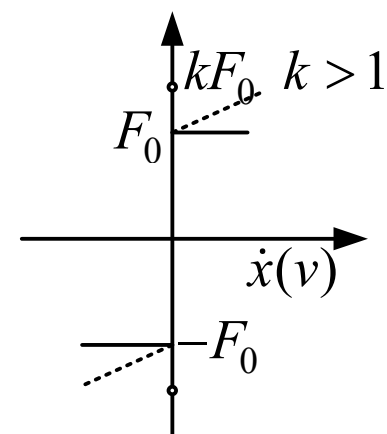
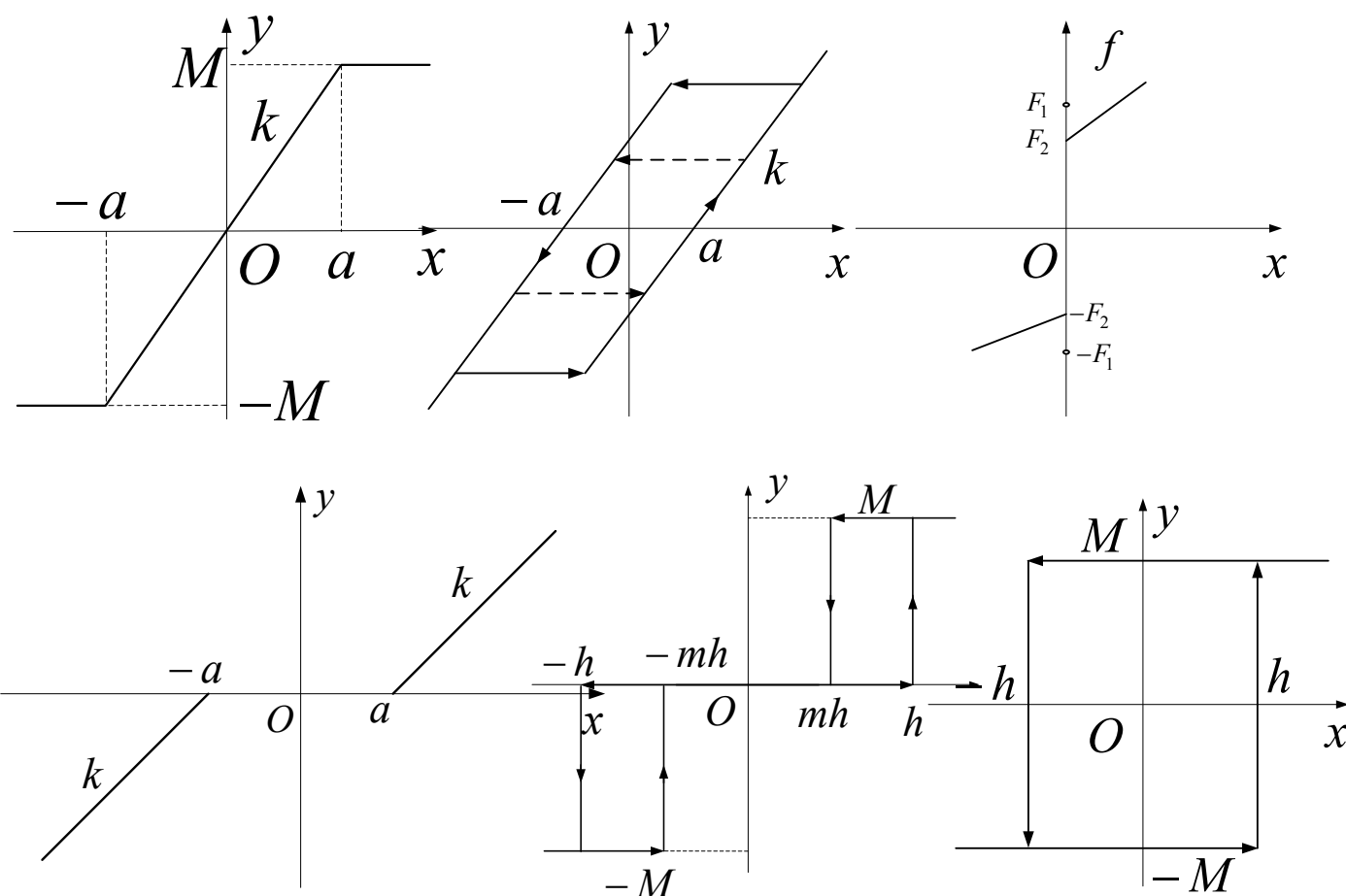
# 非线性现象



- 弹簧----变形产生非线性特性 非本质
- 电子器件：继电器、接触器、电力电子器件 本质
- 电动机：伺服电机、测速电机、电动阀等 本质
- 各种传动机构：齿轮传动中的齿隙、液压传动中的油隙、蜗轮轴系等 本质
- 铁磁元件：----磁滞效应 本质
- 通过节流阀的流量与液面高度的关系  $Q_o = k\sqrt{h}$  非本质
- VanderPol非线性方程 非本质
- 混沌现象----“蝴蝶效应” 非本质



# 典型本质非线性环节



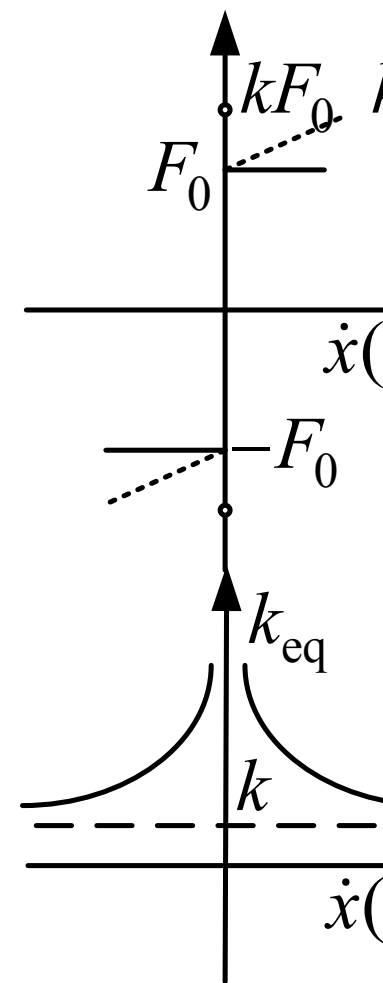
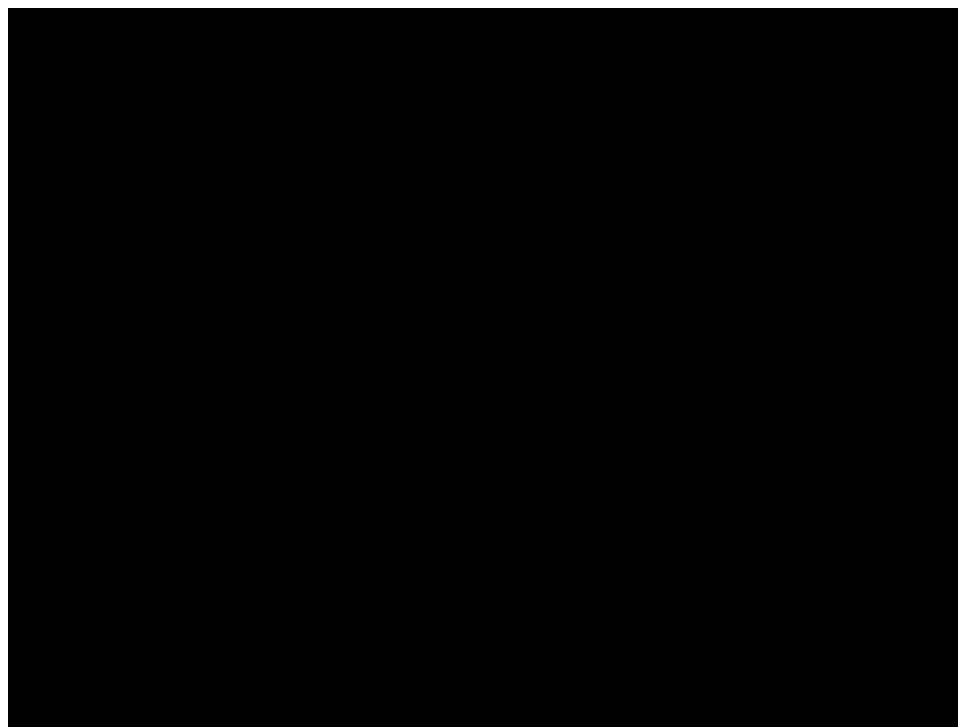
等效增益为变增益

$$x \rightarrow y, k_{\text{eq}} = y / x$$

注：这些非线性环节可以在MATLAB/Simulink环境下通过编程或使用组件建立

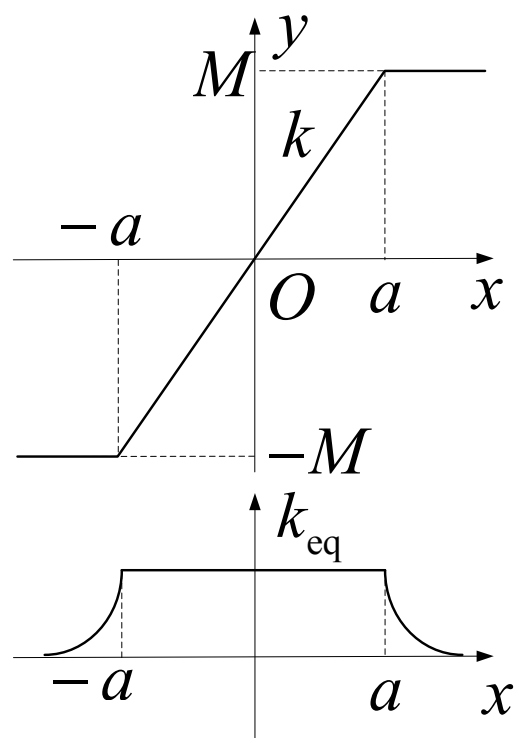
# 摩擦特性

- 常见于机械运动机构、随动系统中。
- 静摩擦  $kF_0$  是阻碍静止物体产生运动趋势的阻力，一旦物体开始运动，静摩擦即消失，代之以动摩擦(库仑摩擦)
- 动摩擦是物体运动时的摩擦，一般为常数  $F_0$ ，在运动过程中可能有黏性摩擦  $bv$ 。
- 一般在运动过程中的总摩擦为  $F_0 + bv$ 。



# 饱和特性

- 常见于放大器、执行机构（如电动阀）中。
- 使增益下降，促使系统稳定，降低超调量。
- 但比例增益减小又使稳态误差变大，控制精度下降。
- 人为加入可以对控制信号进行限幅，保证安全。
- 系统频响有高次谐波。

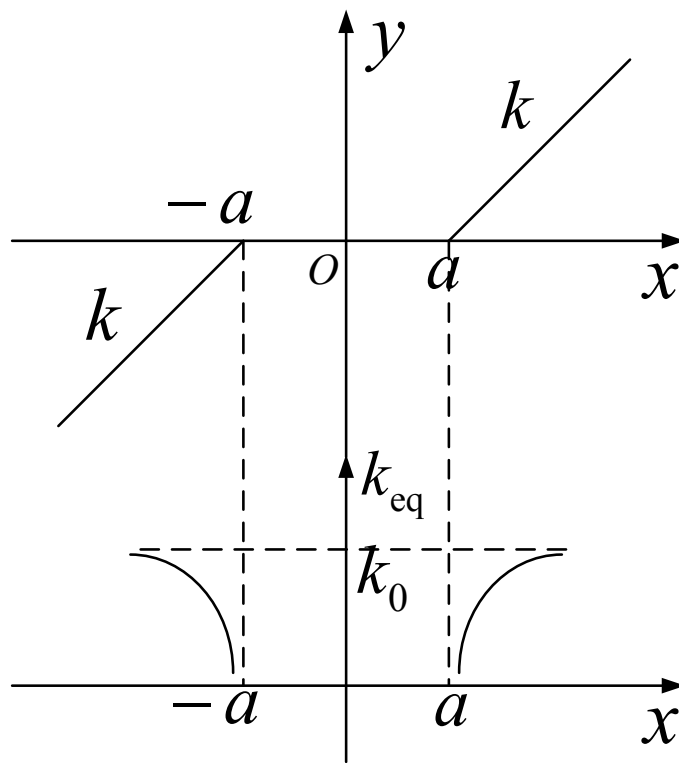


$$y = \begin{cases} -M, & x < -a \\ kx, & -a \leq x \leq a \\ M, & x > a \end{cases}$$

$$k_{eq} = \begin{cases} k_0 & |x| \leq a \\ \downarrow 0 & x > a \end{cases}$$

# 死区(不灵敏)特性

- 广泛存在于晶体管、电动阀、放大元件、伺服电机中。
- 信号太小使得元件进入死区时，系统实际处于开环状态，因此死区特性使得系统存在稳态误差，降低了控制精度
- 另一方面，死区的存在使系统振荡性变小，超调量减小。
- 系统频响有高次谐波。

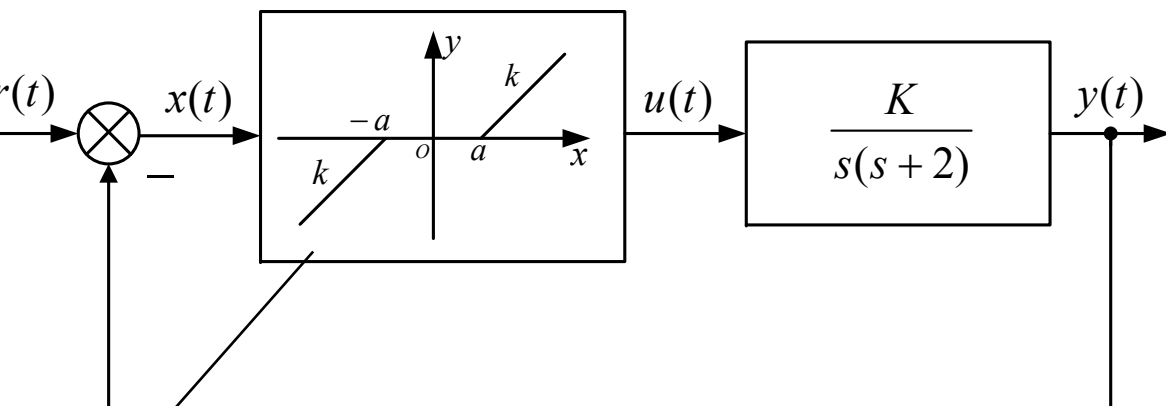


$$y = \begin{cases} k(x + a), & x < -a \\ 0, & |x| \leq a \\ k(x - a), & x > a \end{cases}$$

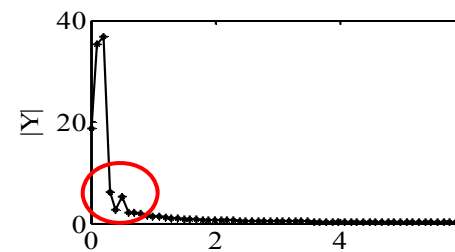
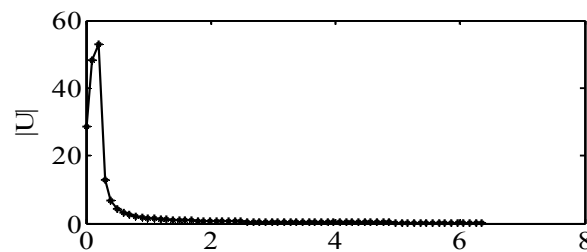
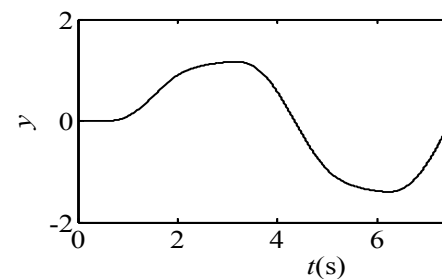
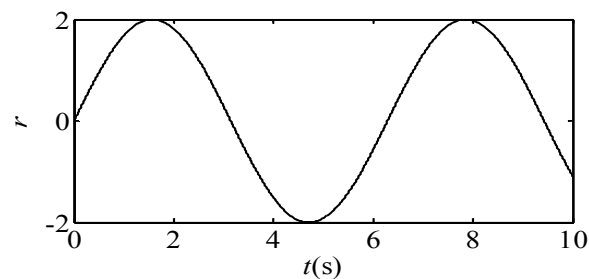
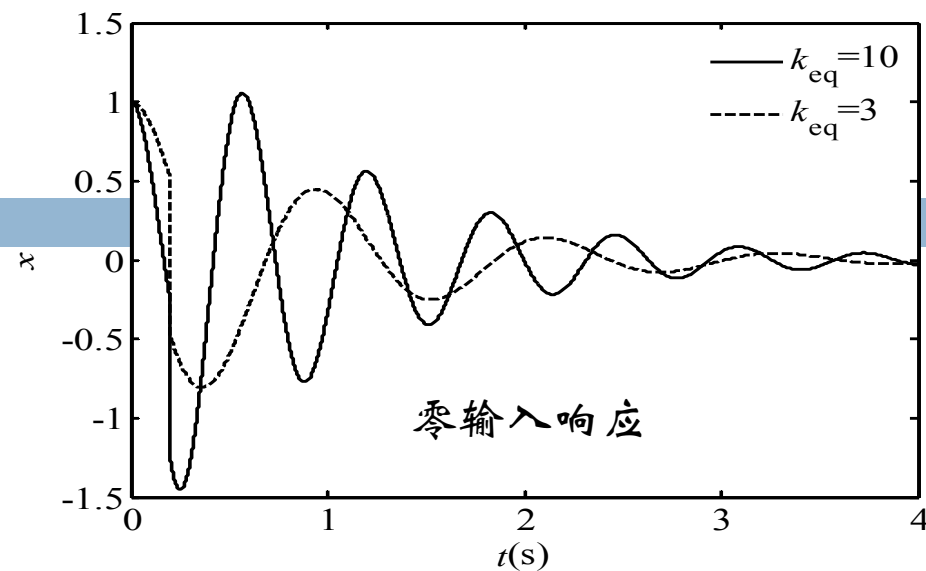
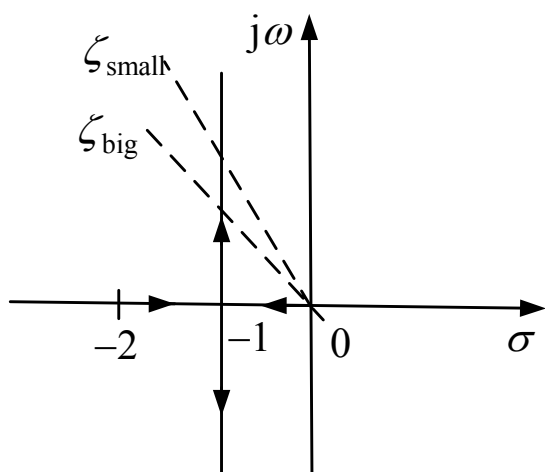
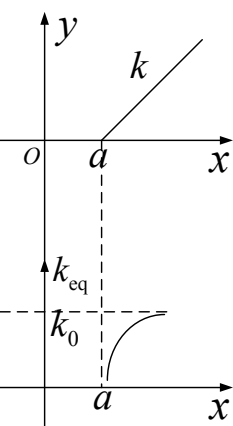
$$k_{eq} = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ f(|x|) \rightarrow k_0 & |x| > a \end{cases}$$



# 死区对系统的影响



$$L(s) = \frac{k_{eq} K}{s(s+2)} = \frac{K^*}{s(s+2)}$$



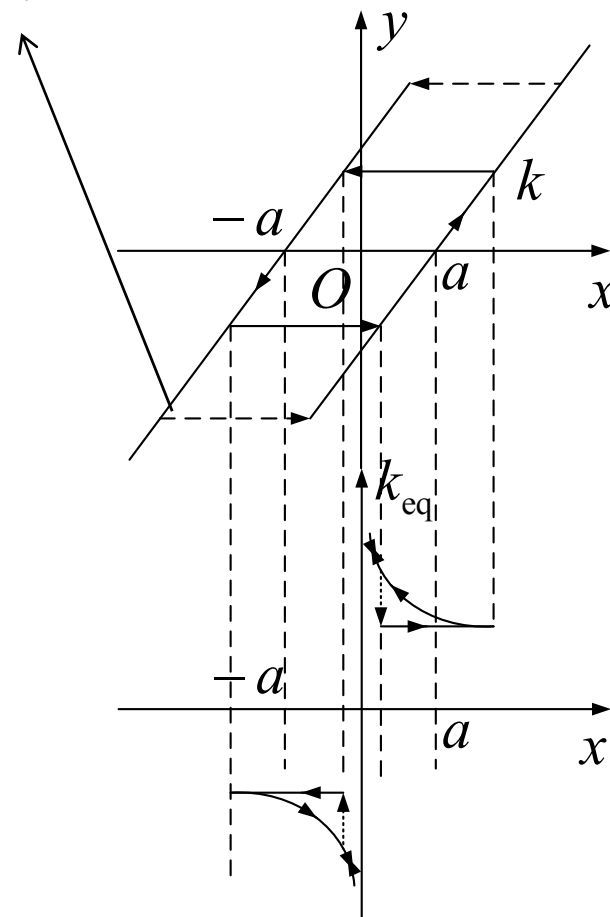
正弦输入信号的响应与响应的频谱

输出包含有与输入频率成整数倍的高次谐波

# 回环(磁滞)特性

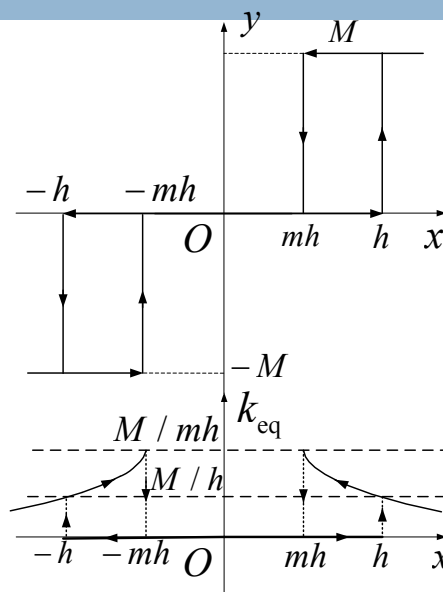
- 广泛存在于传动齿轮、蜗轮轴系、铁磁元件中。
- 当输入量的变化方向改变时，输出量保持不变，一直到输入量的变化超出一定数值（间隙）后，输出量才跟着变化。
- 间隙特性降低系统跟踪精度，严重影响系统性能，必须加以克服。
- 有相位滞后，削顶、波形失真，使得动态特性变差
- 系统频响有高次谐波。

$$y = \begin{cases} k(x - a \operatorname{sgn} \dot{x}) & \dot{y} \neq 0 \\ b \operatorname{sign} x & \dot{y} = 0 \end{cases}$$



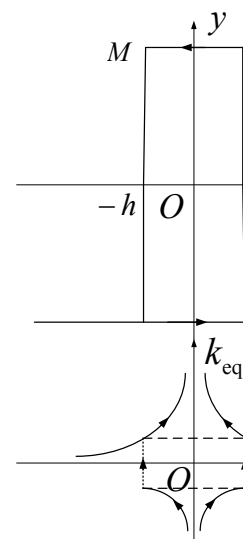
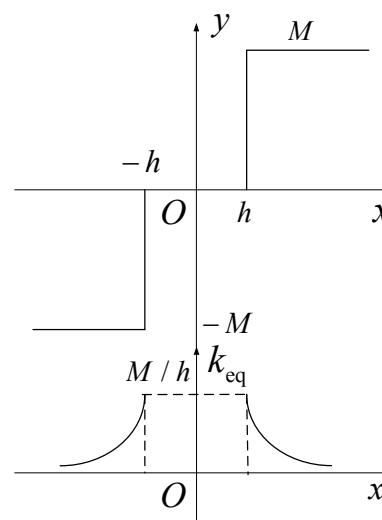
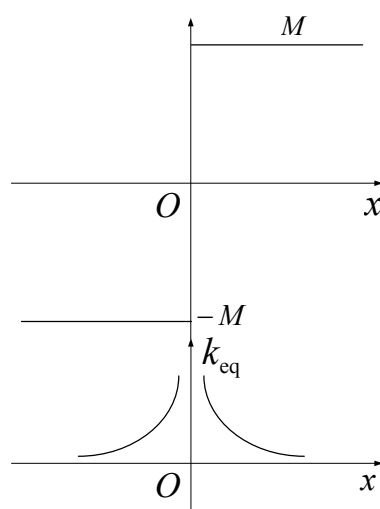
# 继电器特性

- 广泛存在于继电器、接触器、电力电子元件中。
- 实际继电器输入和输出之间的关系不完全是单值的。
- 由于继电器吸合与释放状态下磁路的磁阻不同，吸合与释放电流是不相同的。因此，继电器的特性有一个滞环。
- 继电器特性常常使系统产生振荡。
- 有若干种变形。 ➡

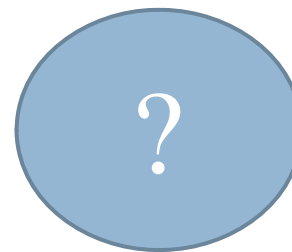
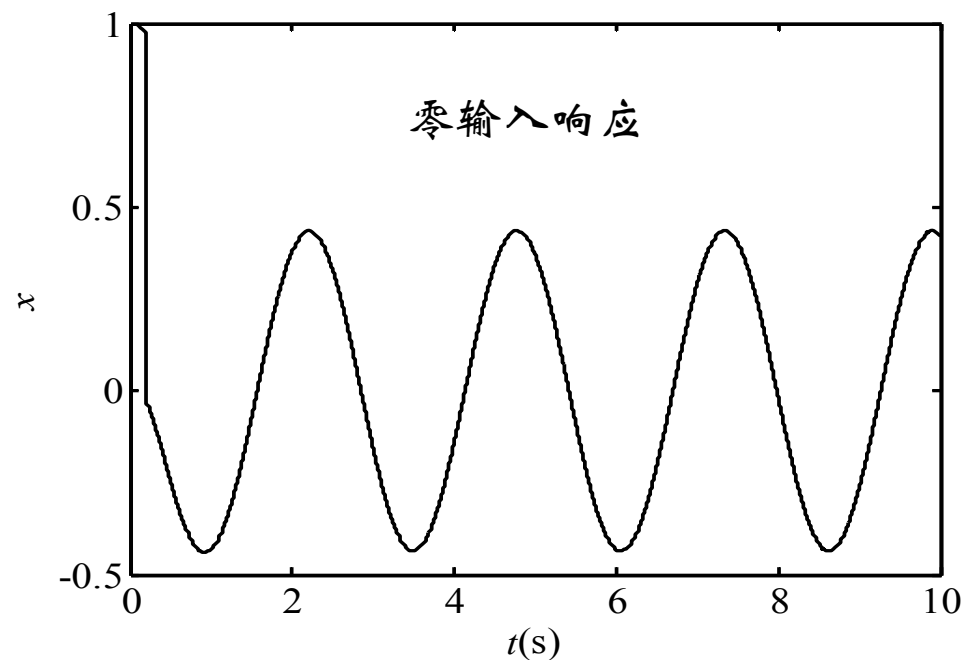
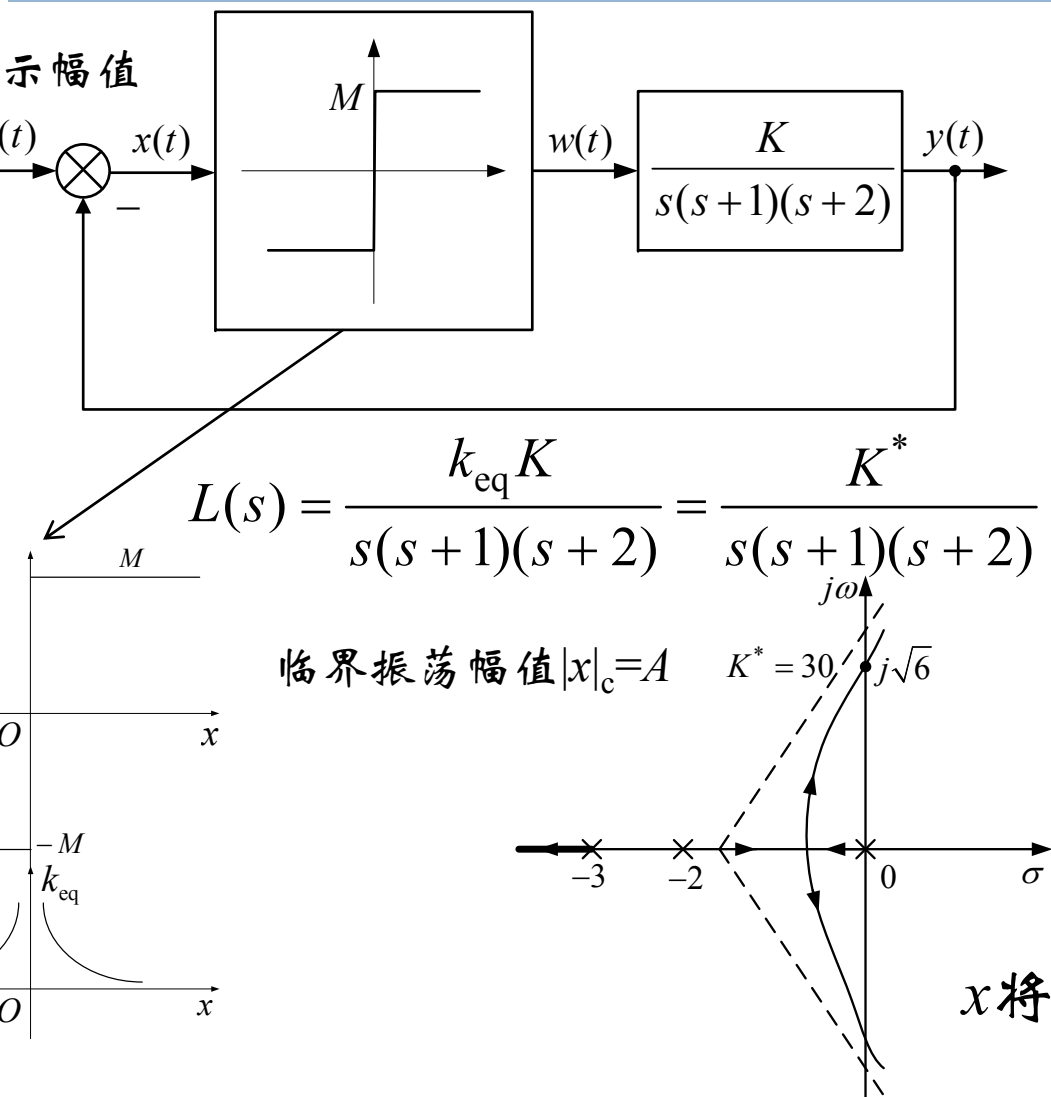


$$\dot{x} > 0, y = \begin{cases} -M, & x < -mh \\ 0, & -mh < x < h \\ M, & x > h \end{cases}$$

$$\dot{x} < 0, y = \begin{cases} -M, & x < -h \\ 0, & -h < x < mh \\ M, & x > mh \end{cases}$$



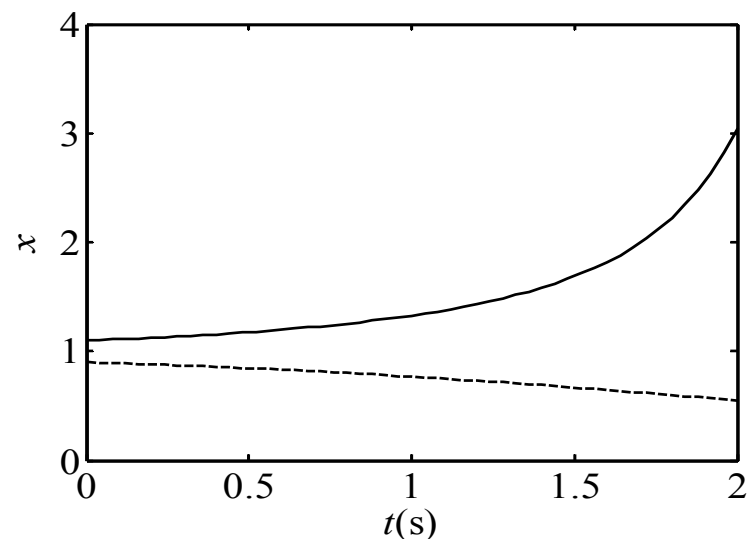
# 继电对系统的影响



$x$ 将保持稳定的等幅振荡或自激振荡，其频率为

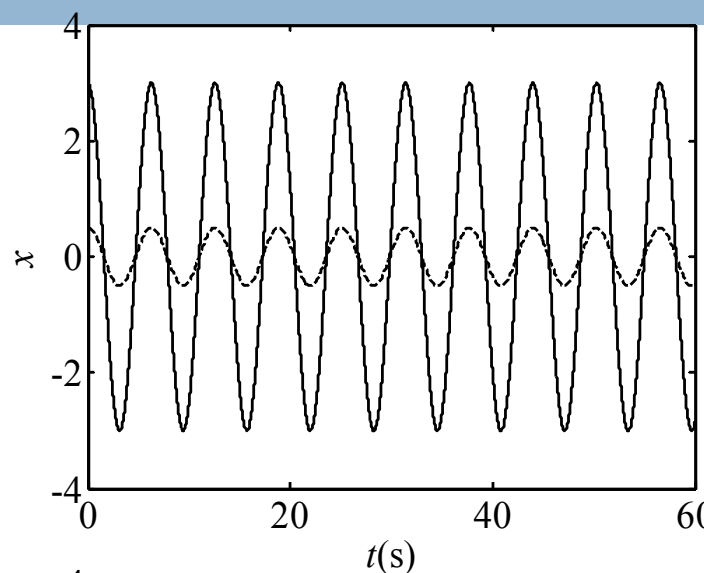
# 非本质非线性----稳定的复杂性

□ 考虑非线性系统  $\dot{x} = x^2 - x = x(x-1)$



非线性的平衡点稳定性不仅与系统结构和参数有关，而且与初始条件有关。

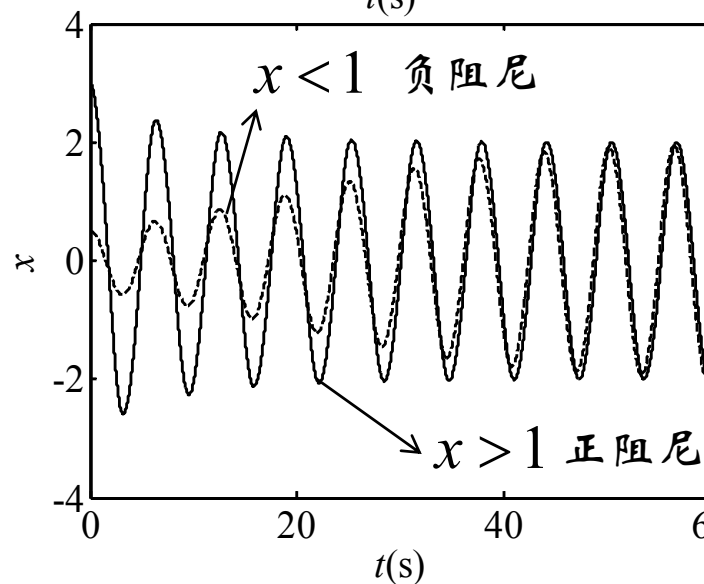
$\rho = 0$



□ Vanderpol方程  $\ddot{x} - 2\rho(1-x^2)\dot{x} + x = 0 (\rho > 0)$

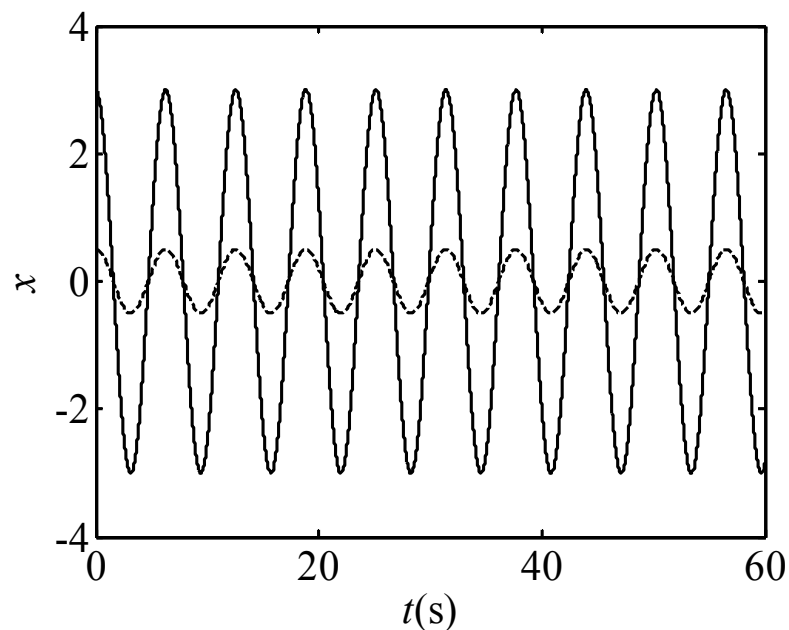
非线性系统可以产生自持振荡，而线性系统则不能产生自持振荡。

$\rho > 0$

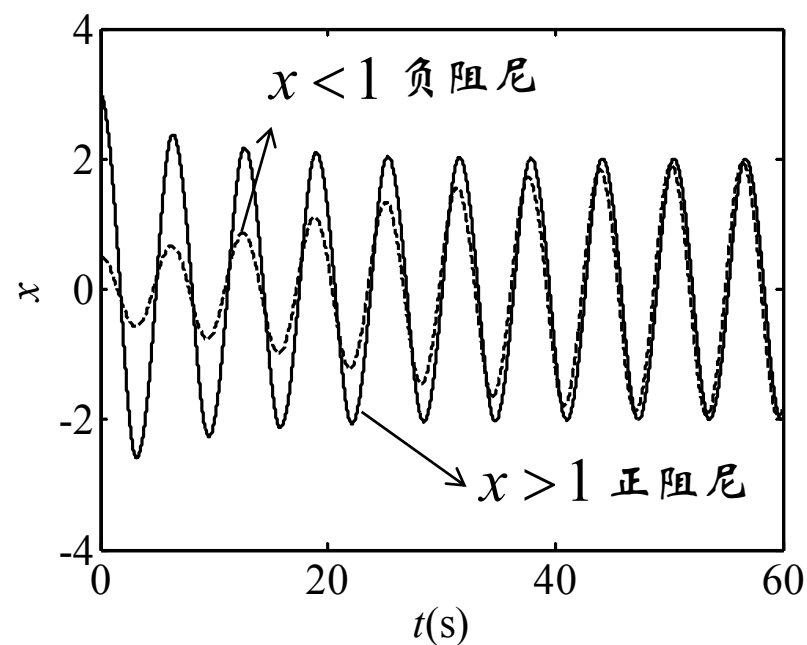


# 非本质非线性----稳定的复杂性

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$



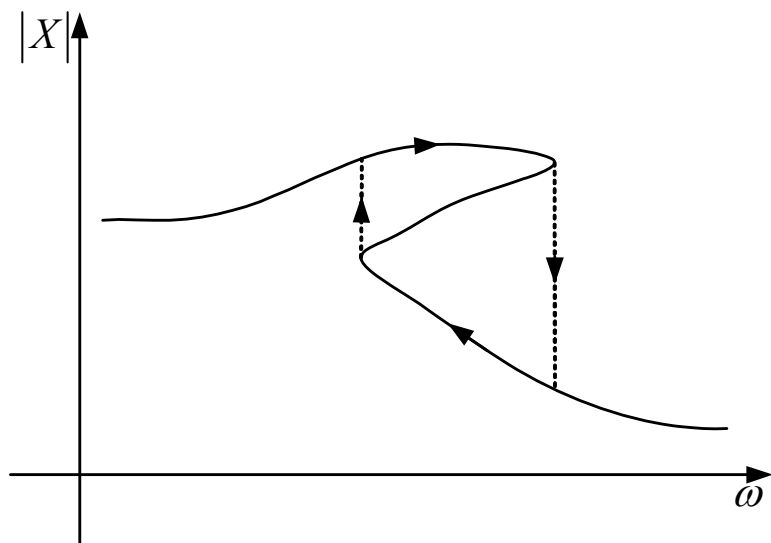
$$\ddot{x} - 2\rho(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 (\rho > 0)$$



非线性系统可以产生自持振荡，而线性系统则不能产生自持振荡。

# 非本质非线性-- Duffing方程

□ Duffing方程  $m\ddot{x} + f\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = p \cos \omega t$



➤当输入信号频率逐渐增加时，输出振幅也增加，但增加到一定值后，在某频率点出现**跳跃**，伴有振幅与相位的改变。当频率进一步增加时，输出振幅又缓慢变小。

➤换一个方向，频率逐渐减小，振幅逐渐增大，当频率减小到一定程度(与前面跳跃频率并不一定一致)，又出现**跳跃**，也伴有振幅与相位的改变，之后频率减小，振幅也随之减小。

➤图中的振幅曲线实际上是分段连续的，并且响应曲线的路径在频率增大和减小的两个方向是不同的。对应于**跳跃点间的频率**，振荡是不定的，稳定振荡可能是两者之一，即**多值响应**。

➤它可应用于研究**船的横摇运动、结构振动、化学键的破坏、横向波动方程的轴向张力扰动模型、转子轴承的动力学方程、尖锐碰摩转子的故障检测、微弱周期信号检测、电力系统、周期振荡分析、周期电路系统的模拟与控制等。**

# 非本质非线性--混沌现象 (Lorenz在20世纪60年代研究大气时发现)

- 混沌运动对于初始条件极端敏感，具有稠密轨道的拓扑特征及呈现多中“混乱无序却又颇有规则”的图案

$$\dot{x} = a(y - x)$$

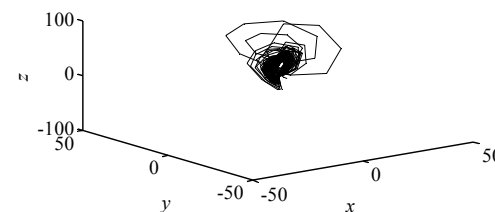
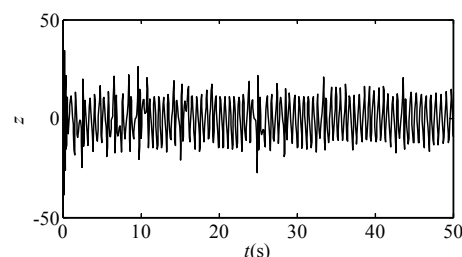
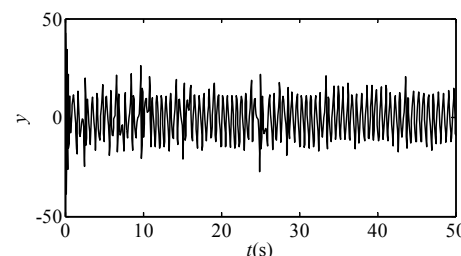
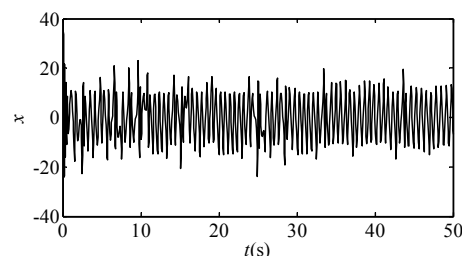
$$\dot{y} = (c - a)x - xz + cy$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$a = 35, b = 3, c = 28$$

## 特性：

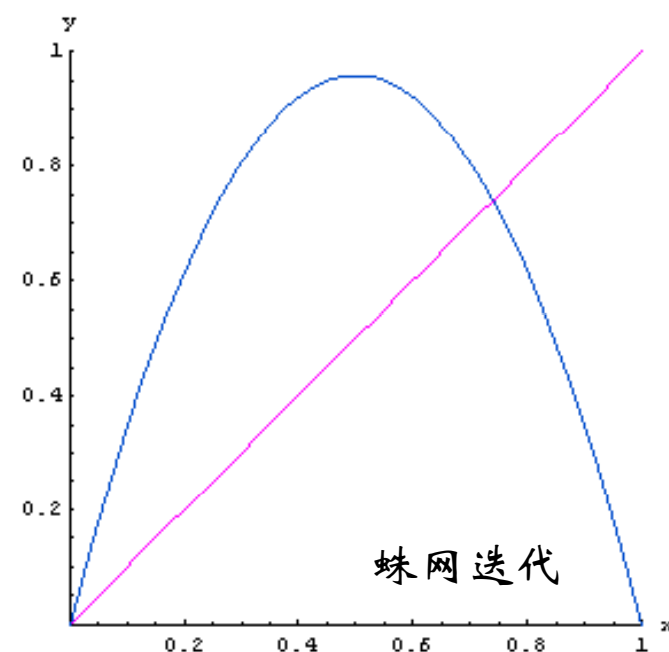
- 内禀随机性----初始条件高度敏感性的根源
- 有界性--内部不稳定，但有吸引域
- 遍历性--有限时间经过所有点
- 统计特性--Lyapunov指数一定大于零(对系统的运动轨线相互间以趋近或分离的整体效果进行定量刻画)





# 非线性的特性总结

- 叠加原理不能应用于非线性控制系统
- 稳定性问题比较复杂，系统的稳定性不仅取决于结构与参数，与外部作用和初始条件也可能有关系。
- 存在自激振荡：在没有外界输入作用时，非线性系统内产生的具有固定振幅和频率的稳定周期运动。
- 对正弦输入信号的响应发生畸变和失真。
- 可能出现混沌现象。



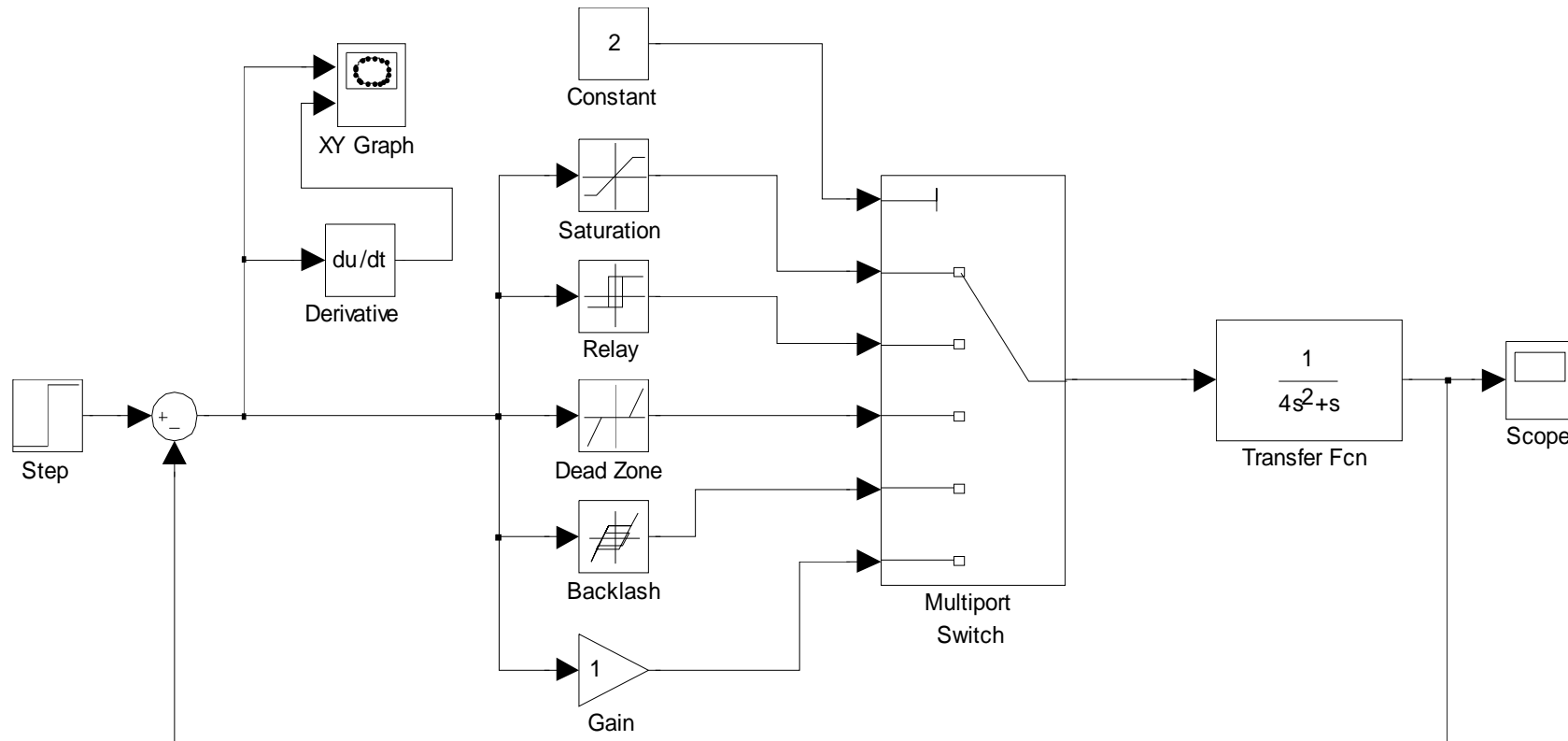
# 非线性系统的研究方法

- 相平面分析法（时域法）-- Poincare, 1885
- 描述函数法（频域法）-- Daniel P. J., 1940
- Lyapunov理论-- Lyapunov, 1892----可以用于设计控制器
- Popov超稳定理论-- Popov, 1964----可以用于设计控制器
- 反馈线性化方法
  - ▣ 对非线性系统进行**解耦控制**：微分几何法、逆系统方法，将系统通过反馈形成输入输出满足线性系统性质，而内部依然是非线性的。
- 数值分析方法
  - ▣ 借助于计算机进手段进行分析



# 课外练习

在MATLAB/Simulink建立仿真框图，分析各非线性环节对系统影响



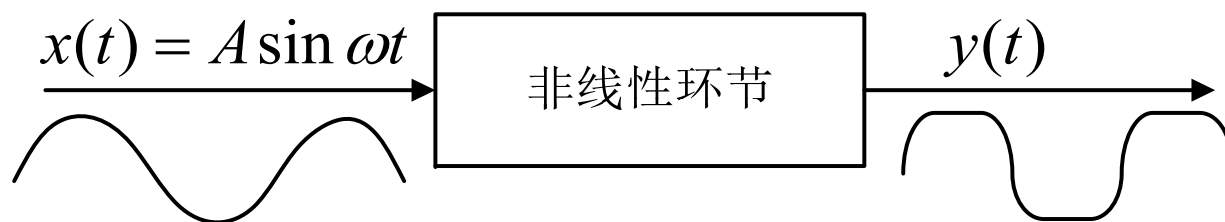
这一讲就到这里！



## 第二讲 谐波线性化(描述函数法)方法

描述函数法的基本思想是，当系统满足一定的条件下系统中的非线性环节在正弦信号作用下的稳态输出可以用一次谐波分量或基波来近似，由此便得到非线性环节的近似等效的频率特性，即描述函数，此时可用线性系统中的频率法对系统进行频域分析。该方法主要用于高阶非线性系统在无外作用下的稳定性与自激振荡问题。

# 描述函数的基本概念



## 问题

- (1) 输入正弦信号频率为  $\omega$ ，输出是什么样的信号？频率是多少？
- (2) 输出信号能否展成Fourier级数？基波分量起主导作用吗？为什么？
- (3) Fourier级数的基波频率是什么？其幅值和相角变化吗？

答案：非线性环节输出基波分量和正弦输入信号的频率相同，幅值和相角发生改变。类比线性系统频域分析方法，在非线性环节内部不含储能元件的情况下，描述函数是正弦输入信号的幅值的函数，即

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{i\varphi_1}$$

# 描述函数的计算

## 傅立叶级数的计算公式

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

若特性关于原点对称, 则有  $A_0 = 0$

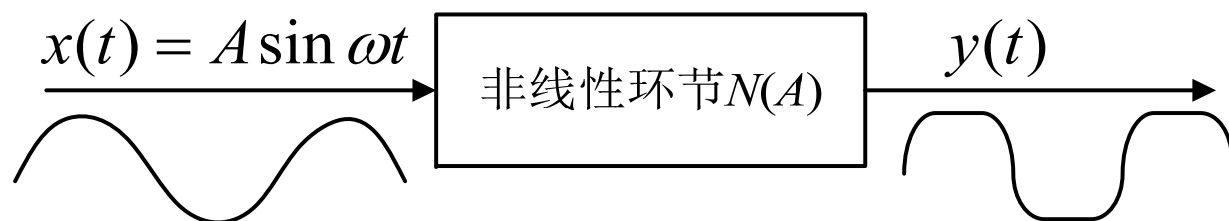
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) dt$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t dt$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

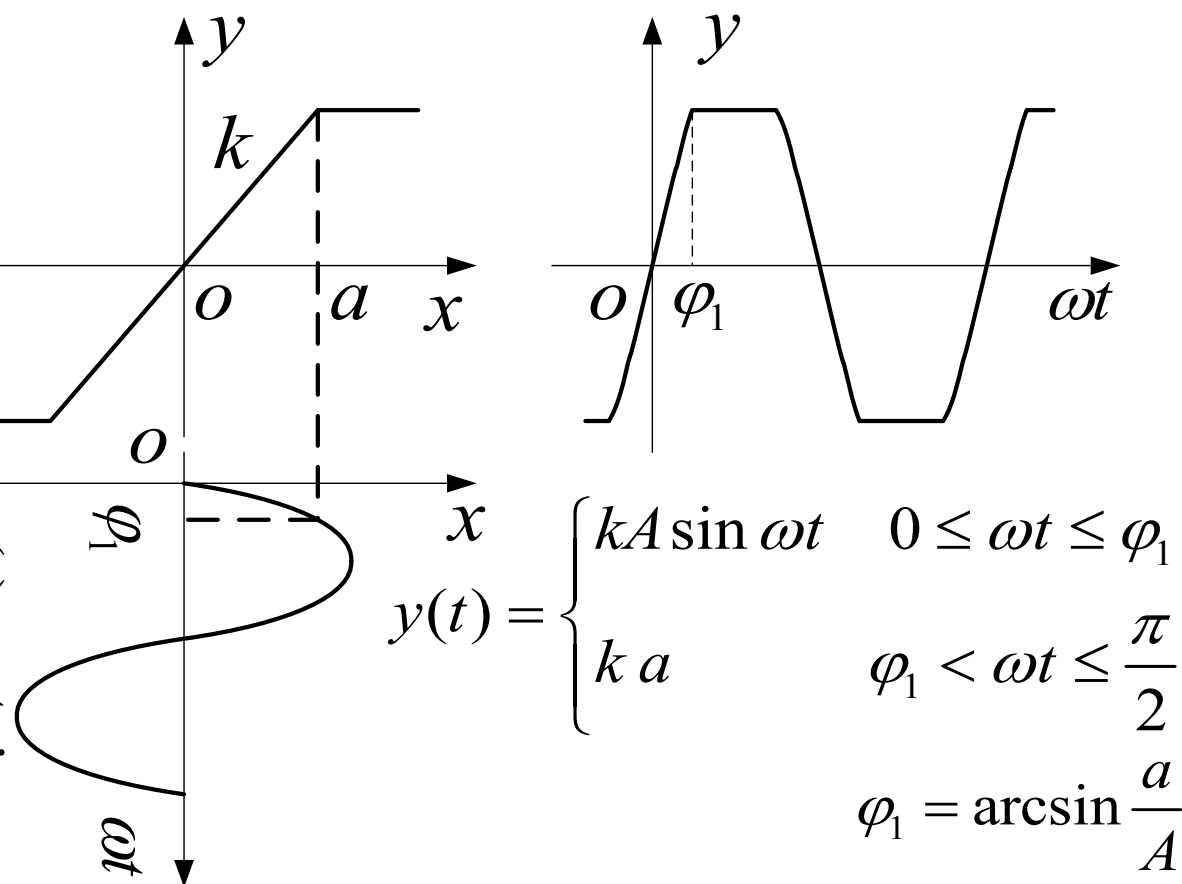


$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{i\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{i \arctan(A_1/B_1)} = \frac{B_1}{A} + i \frac{A_1}{A}$$

## 特点:

- $N(A)$  反映了输入正弦信号时输出幅值和相角的变化(与  $G(i\omega)$  一样)。
- $N(A)$  是输入正弦信号的幅值  $A$  的函数, 在非线性环节内部不包含储能元件的情况下, 与频率  $\omega$  无关。(与  $G(i\omega)$  不一样)

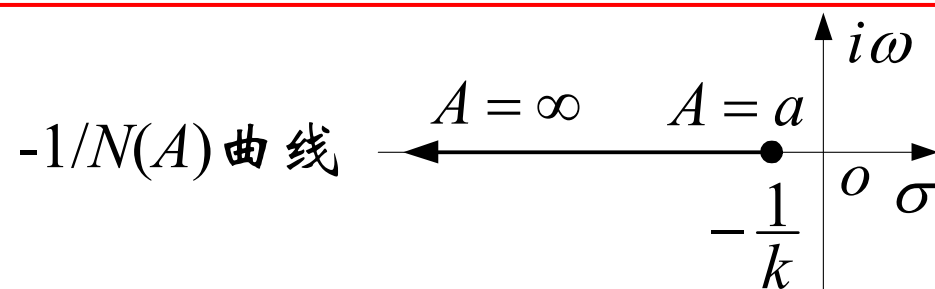
# 饱和特性的描述函数



特性表现为奇函数，所以  $A_1=0$

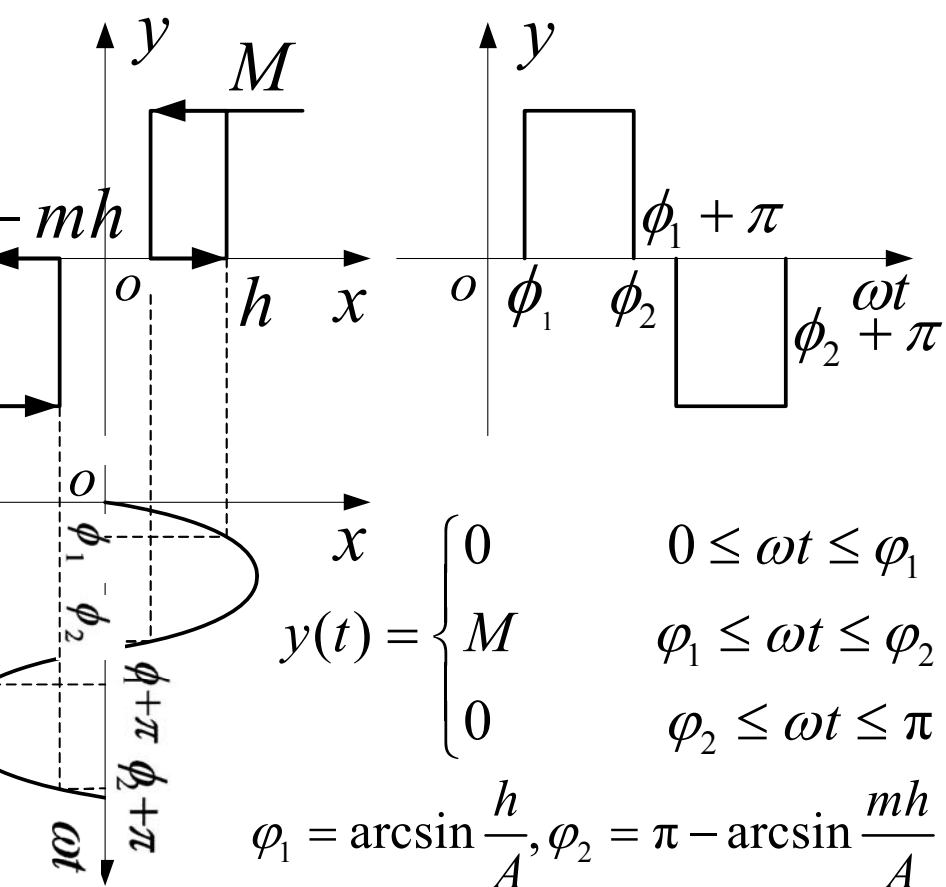
$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t \, d(\omega t) \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi_1} kA \sin^2 \omega t \, d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} ka \sin \omega t \, d(\omega t) \\
 &= \frac{2kA}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$





# 继电特性的描述函数



$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} M \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} M \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2Mh}{\pi A} (m-1) = \frac{2M}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right]$$

$$N(A) = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A}$$

$$= \frac{2M}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2Mh}{\pi A^2} (m-1)$$

# 继电特性的描述函数三种特殊情况

-1/N(A) 曲线

$$N(A) = \frac{2M}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right] + i \frac{2Mh}{\pi A^2} (m-1) \quad (A \geq h)$$

理想继电特性 (h=0)

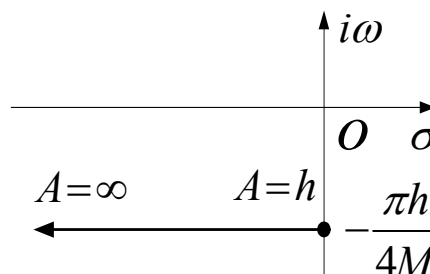
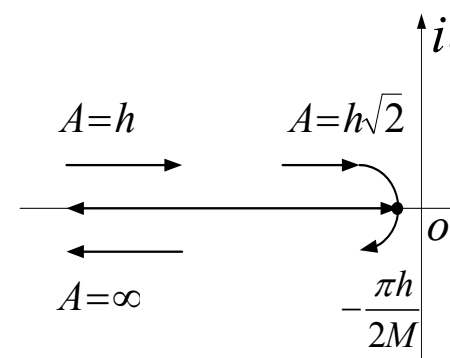
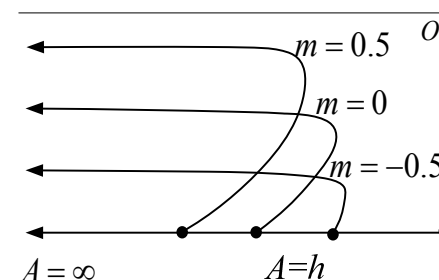
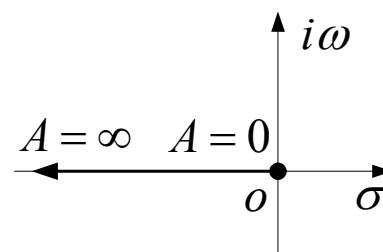
$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

三位置理想继电特性 (m=1)

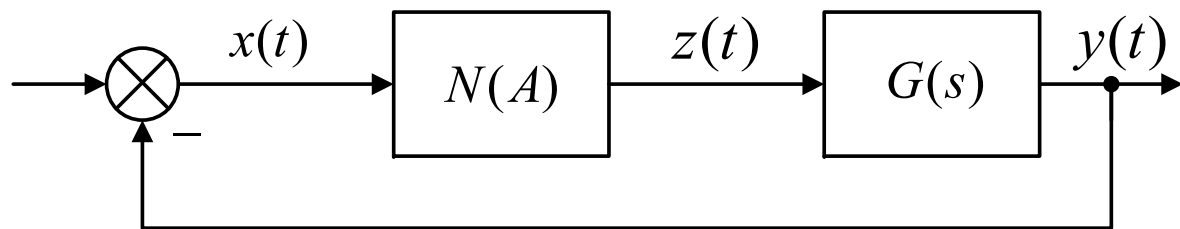
$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$$

具有滞环的两位置继电特性 (m=-1)

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - i \frac{4Mh}{\pi A^2}$$



# 运用描述函数法的基本条件与稳定性判定



## □ 基本条件

- (1) 非线性系统的结构图可以简化成如图所示的典型形式。
- (2) 非线性环节的**输入输出特性是奇对称的**，保证非线性特性在正弦信号作用下的输出不包含常值分量。
- (3) 线性部分具有较好的**低通滤波性能**。

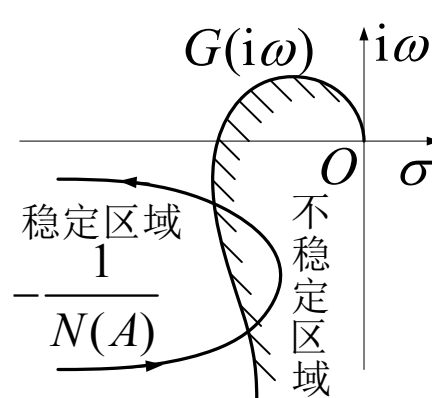
## □ 闭环系统近似频率特性为

$$\Phi(i\omega) = \frac{N(A)G(i\omega)}{1 + N(A)G(i\omega)}$$

□ 闭环系统的特征方程为

$$1 + N(A)G(i\omega) = 0 \Rightarrow G(i\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

□ 判据: 在复平面上分别画出  $1/N(A)$  和  $G(i\omega)$ , 据后者对前者的包围情况可判稳:



- (1) 若  $G(j\omega)$  曲线不包围  $-1/N(A)$  曲线, 则非线性系统稳定;
- (2) 若  $G(j\omega)$  曲线包围  $-1/N(A)$  曲线, 则非线性系统不稳定;

(3) 若  $G(j\omega)$  与  $-1/N(A)$  有交点, 对应非线性系统的等幅 (稳定/不稳定) **周期运动**。

这一讲就到这里！

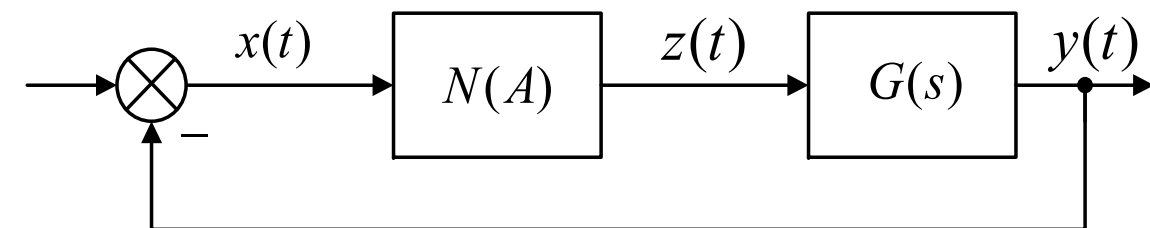


图图网: [tutu001.com](http://tutu001.com)

## 第三讲 自振分析和计算及消除自振的方法

若  $G(j\omega)$  与  $-1/N(A)$  有交点，对应非线性系统的等幅（稳定/不稳定）周期运动。如何判断那个交点是自振点，哪个又不是呢？又如何消除自振，使系统稳定呢？本讲讨论这些问题。

# 自振产生分析



$$x(t) = A \sin \omega t \quad z(t) = |N(A)| A \sin(\omega t + \angle N(A))$$

$$y(t) = |G(j\omega)N(A)| A \sin(\omega t + \angle N(A) + \angle G(j\omega))$$

根据系统存在自振荡的假设，无输入情况下有

$$-|G(j\omega)N(A)| A \sin(\omega t + \angle N(A) + \angle G(j\omega)) = A \sin \omega t$$

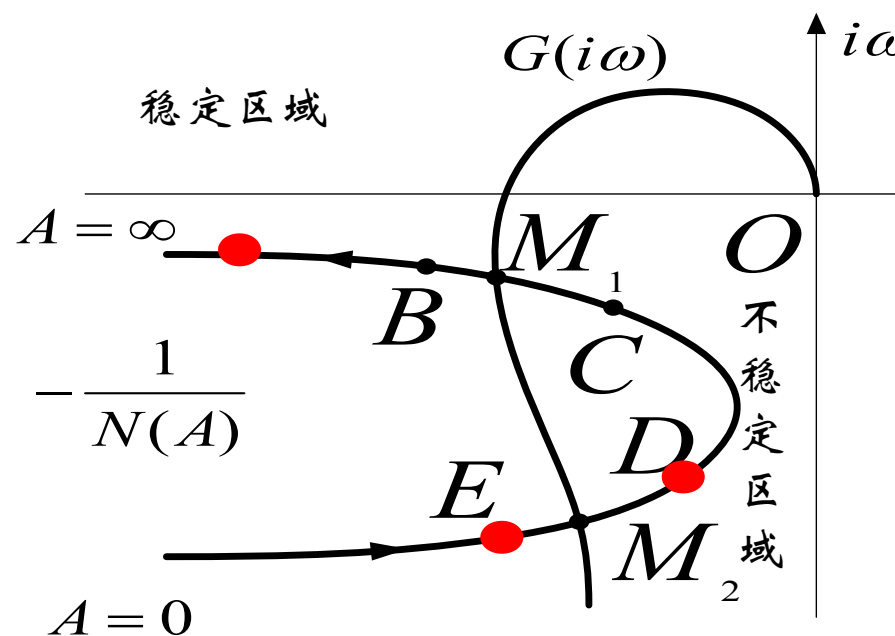
$$|G(j\omega)N(A)| = 1, \angle N(A) + \angle G(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow G(j\omega)N(A) = -1$$

有两个交点M1和M2，如图：

□说明系统中可能存在两个不同振幅和不同频率的周期运动。

□由稳定判据可分析M1是稳定的自振荡点，而M2点对应的周期运动是不稳定的。

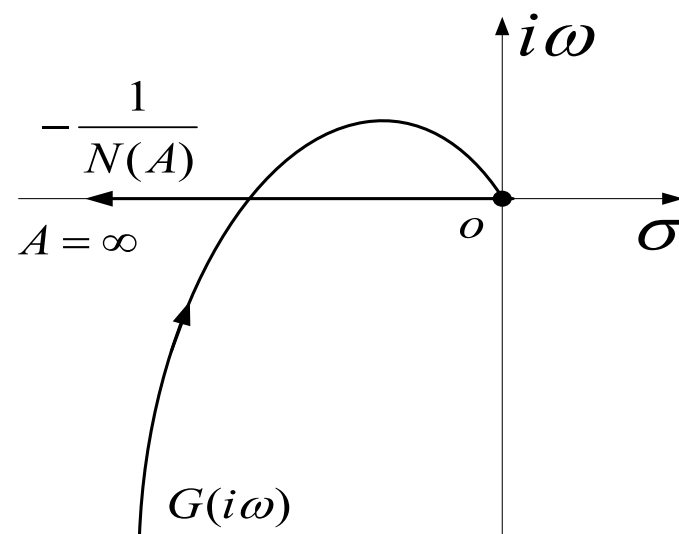
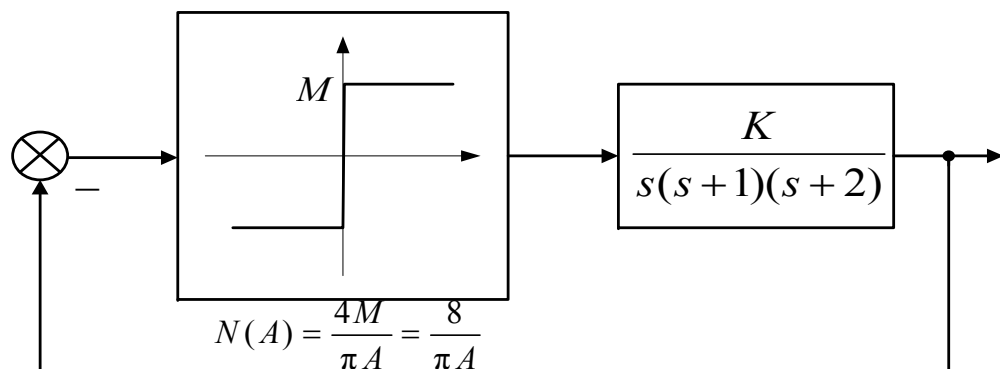
□不稳定的周期运动不可能被观察到。



规律：如果在交点处 $-1/N(A)$ 曲线振幅 $A$ 增大的方向由不稳定区域进稳定区域，则是系统的自振点；极限环是不稳定的。

# 自振参数的计算

- 如果存在自振点，必然对应系统的自振运动。自振的幅值和频率分别由两条曲线在自振点处的  $A$  和  $\omega$  决定，利用自振条件可以求出。
- 例：如图所示非线性系统， $M=2$ ， $K=6$ ，试分析系统的稳定性，如果系统存在自振，确定自振参数。

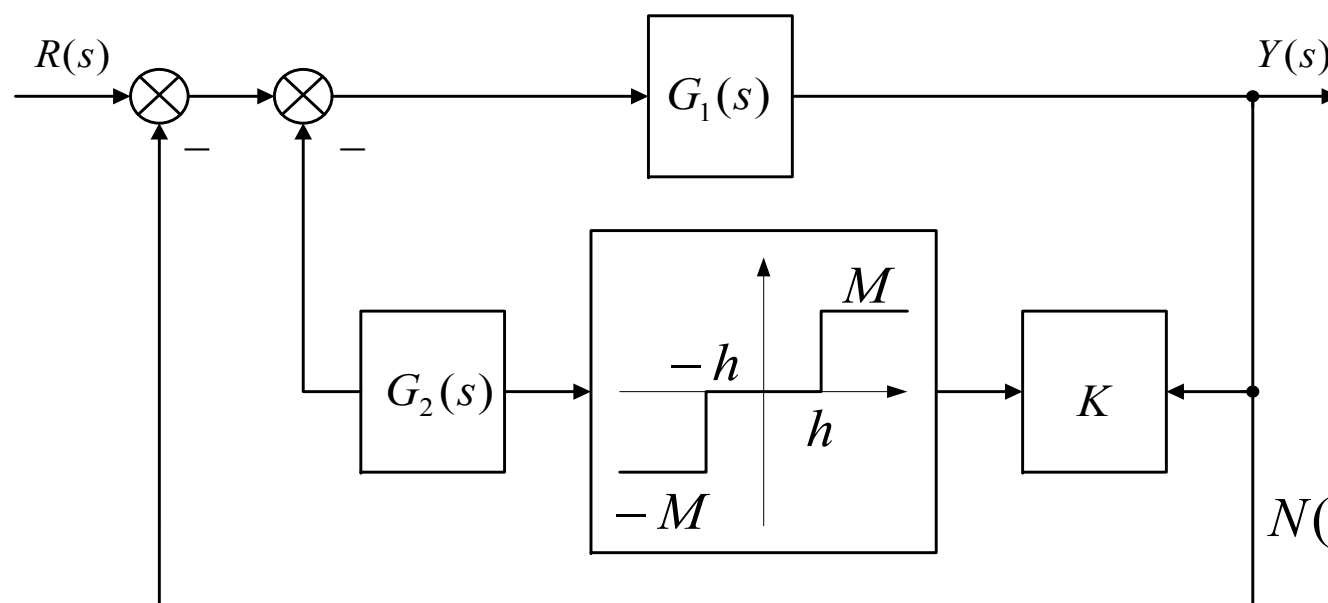


$$\boxed{N(A)G(i\omega) = -1} \Rightarrow \frac{8}{\pi A} \cdot \frac{6}{i\omega(1+i\omega)(2+i\omega)} = -1 \Rightarrow A = 2.55, \omega = \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

# 消除自振的方法

消除自振的方法其实就是改变 $N(A)$ 或 $G(s)$ 的参数，使两者在 $s$ 平面上无交点，且 $-1/N(A)$ 不能被 $G(j\omega)$ 包围。

例：



$$M = h = 1$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$K = 6$$

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) + KN(A)G_1(s)G_2(s)} \Rightarrow 1 + G_1(s) + KN(A)G_1(s)G_2(s)$$

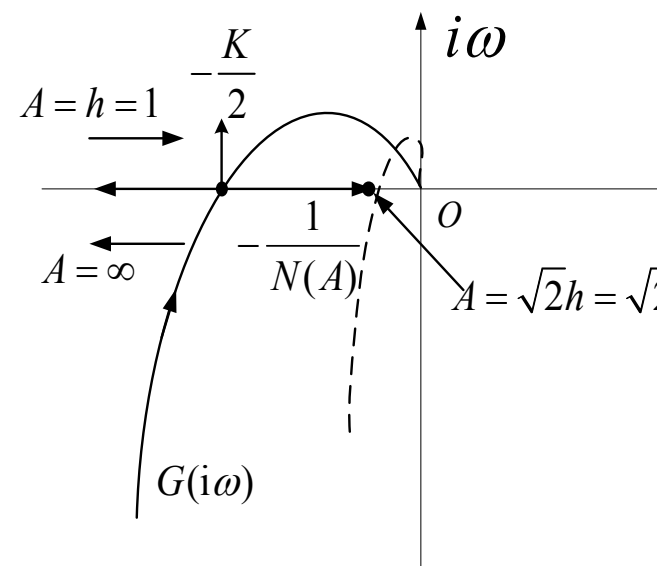


# 消除自振的方法

$$+G_1(s) + KN(A)G_1(s)G_2(s) = 0 \Rightarrow G(s) = \frac{KG_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)} = -\frac{1}{N(A)}$$

$$\left. \frac{6}{s(s^2 + 2s + 1)} \right|_{s=i\omega} = -\frac{1}{\frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2}} \quad A \geq h = 1$$

$$\frac{6}{-2\omega^2 + i\omega(1 - \omega^2)} = \frac{-1}{\frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 1 \\ A = 1.039 \quad \text{or} \quad 3.68 \end{cases}$$



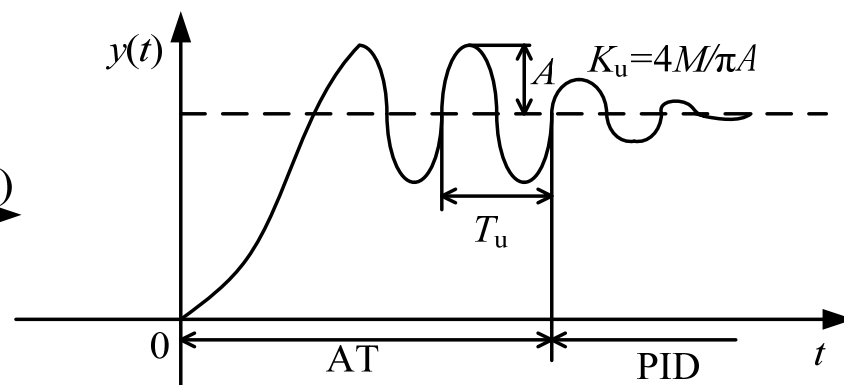
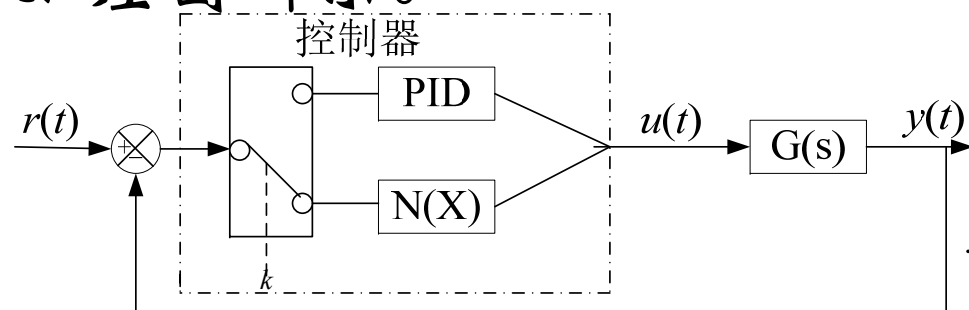
据  $-1/N(A)$  曲线的方向可以判定系统自振振幅为  $A=3.68$ ,  $\omega=1\text{rad/s}$ 。

在  $A=1.414$  时,  $-1/N(A)$  取最大值  $-\pi/2$ 。要消除自振, 就要使两曲线无交点, 如图线, 即

$$-K/2 > -\pi/2 \Leftrightarrow K < \pi$$

# 基于继电器特性的临界比例度PID参数自动整定方法

- 1984年Åström K J提出了一种基于继电器的PID参数自整定调节器，如左图所示。



通过振幅或频率检测是否形成了极限环：只要连幅或频率之差不是某一小正数时，认为极限环已形成

- 系统工作时，最初工作在继电控制方式，在形成稳定极限环后经过一个半周期后，便可计算振荡频率和振幅，如右图，按此利用临界比例度法在线整定PID参数

$$K_p = 0.6K_u, T_i = 0.5T_u, T_d = 0.125T_u$$

- 接着将控制器切换到PID控制器上，系统正常工作。

这一讲就到这里！

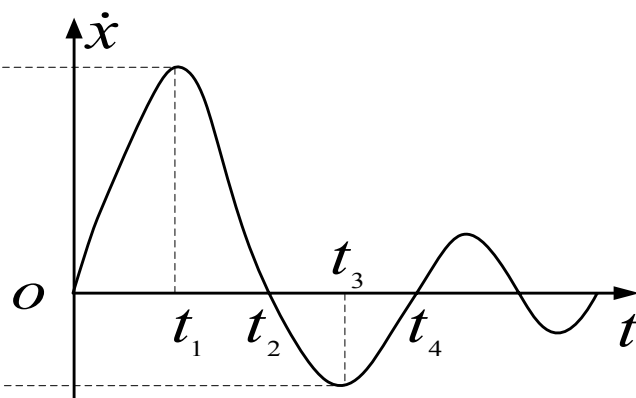
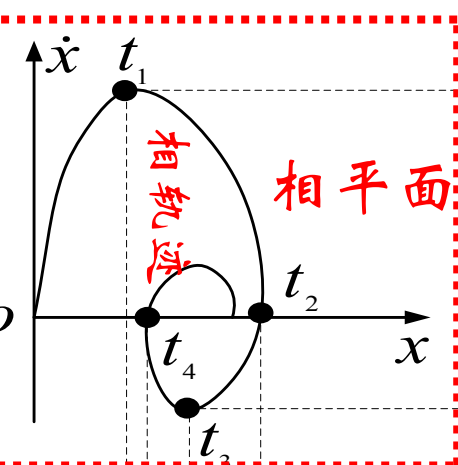


## 第四讲 相平面方法

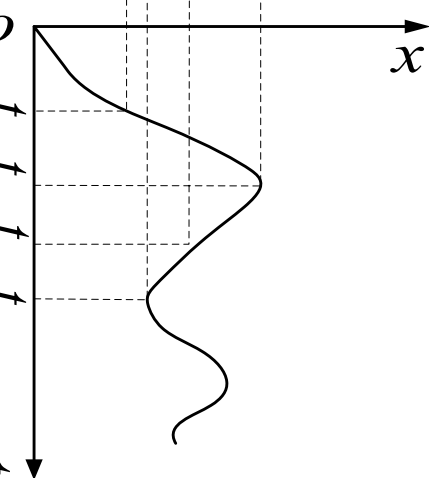
相平面方法能分析系统**稳定性和自振荡**，给出系统运动轨迹、稳态精度、动态特性，而且可以分析初值与参数对控制系统影响。此种方法适用于系统的线性部分(或在奇点附近可线性化的系统)是**一阶或二阶**的系统。使用相平面方法首先要绘制相平面图和相轨迹，其方法有**解析法、图解法(等倾线法和 $\delta$ 法)**、使用数值计算软件和实验法。基于相平面图和相轨迹，便可得以有意义的结论。

# 相平面和相轨迹

□ 考查二阶系统  $\ddot{x} + a_1(x, \dot{x})\dot{x} + a_0(x, \dot{x})x = 0 \Rightarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x})$



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}\end{aligned}$$



- **相平面** 是以系统响应  $x$  及其一阶导数构成的坐标平面。
- 当时间  $t$  变化时,  $x$  及其一阶导数对应的点在相平面上描出的轨迹称为 **相轨迹**。
- 不同初始条件下的相轨迹构成 **相轨迹簇**。
- 相平面和相轨迹簇构成 **相平面图**。相平面图清楚地表示了系统在各种初始条件下的运动过程。

# 相平面图的绘制-解析法

□ 解析法一般用于系统的微分方程比较简单或可以分段线性化的情况

□ 例：  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

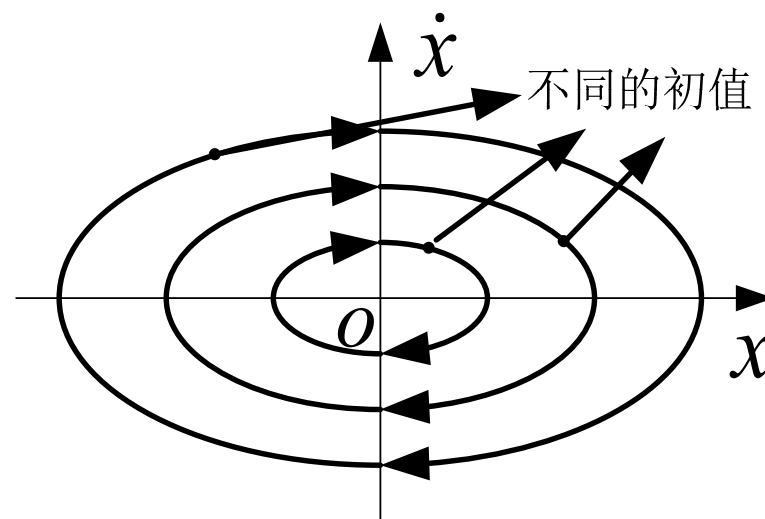
$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2}$$

$$\phi = \arctan(x_0 \omega / \dot{x}_0)$$

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = A^2$$

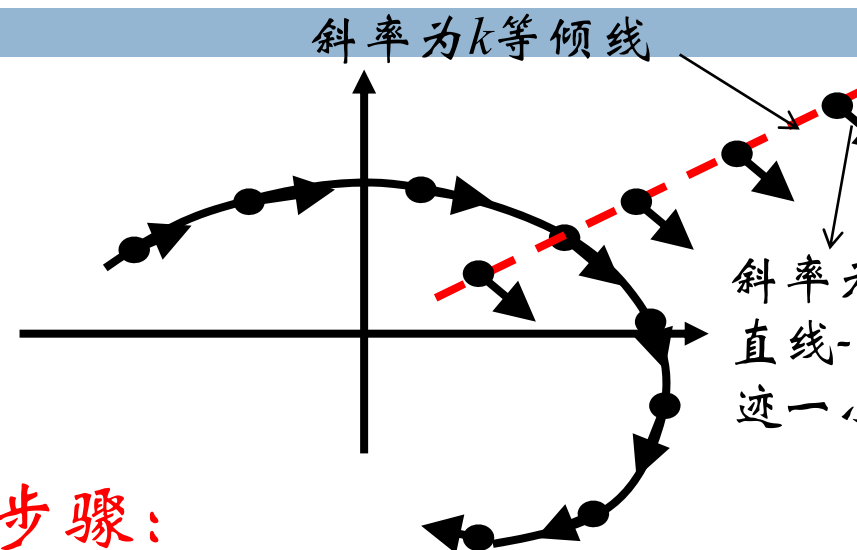


# 相平面图的绘制-图解法

△法则是根据各段起始点不断改变圆(圆心在横轴上移动)与半径, 取一小段弧作为相轨迹的一小段, 小圆弧末端为新圆心选择的依据, 依次类推。

等倾线法的基本思想是采用直线近似, 确定出相平面中任意一点相轨迹的斜率, 则该点附近的相轨迹便可作过该点相轨迹切线近似。

$$\frac{f(x_1, x_2)}{x_2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = \alpha \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = g(\alpha) = k$$



## □ 步骤:

- 给定一个k值, 对应一个α值。一般k值角度选取(如每隔5度计算一个), 同时画为 $k = \tan\theta$ 通过原点的直线作为等倾线。
- 在每条等倾线上各点处作斜率为α的短, 则构成相轨迹的切线方向场。
- 从初始条件出发, 近似地用直线段画出一条等倾线之间的相轨迹, 该直线的斜率条等倾线上小线段斜率的平均。依次画下

注: 也可以等间隔地选取α值, 反求k值, 画等

# 绘制相平面图的等倾线法之例

□ 例：设系统方程为  $\ddot{x} = -(x + \dot{x})$ ，  
绘制相平面图。

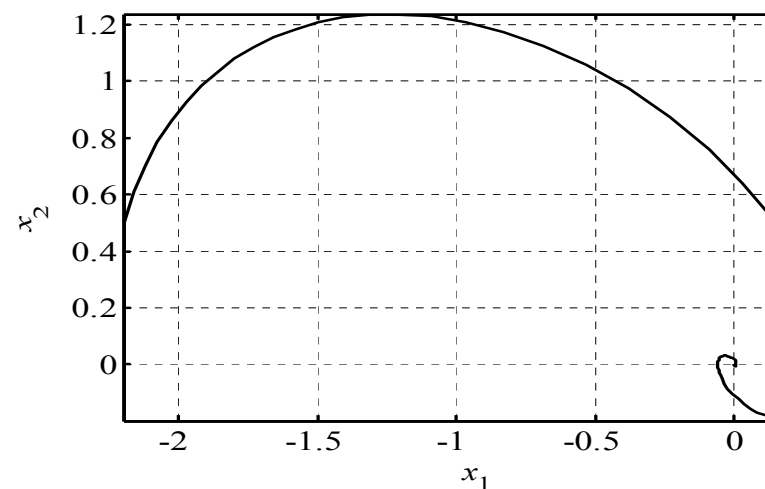
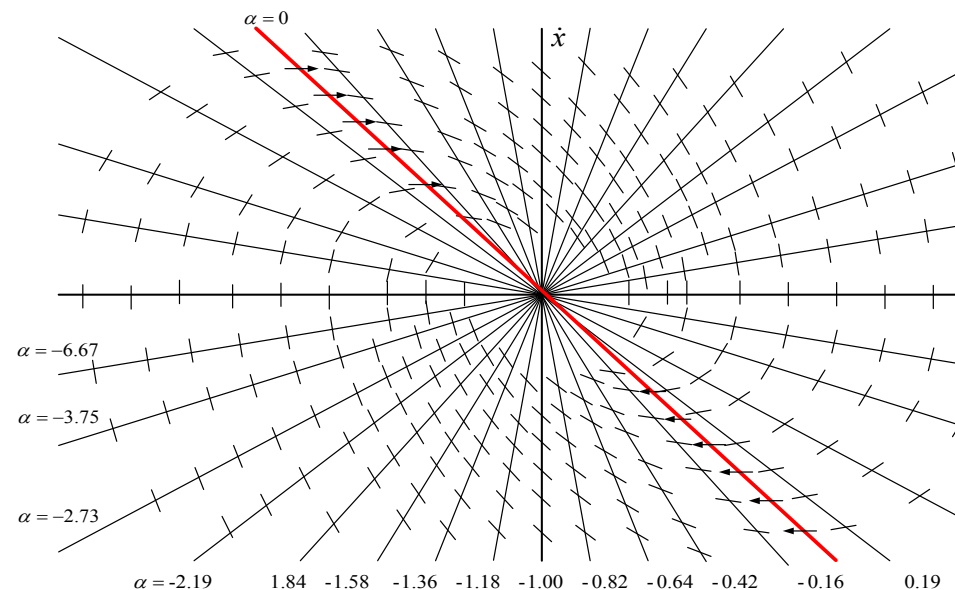
令 
$$\alpha = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = -\frac{x}{\dot{x}} - 1$$

等倾线方程为直线：
$$\dot{x} = \frac{-x}{1 + \alpha}$$

记等倾线与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ ，即  $\tan \theta = -\frac{1}{1 + \alpha}$

选取不同的  $\theta$  值可以得到对应的相轨迹斜率  $\alpha$ 。

初值是  $(-2.2, 0.5)$  时的相轨迹





# 相轨迹的性质-1

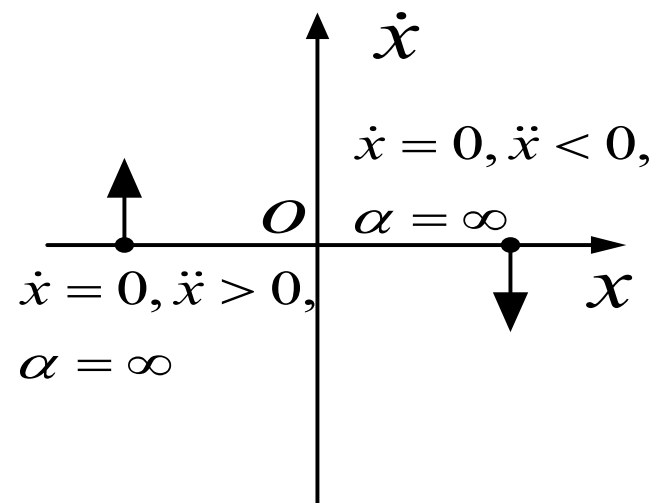
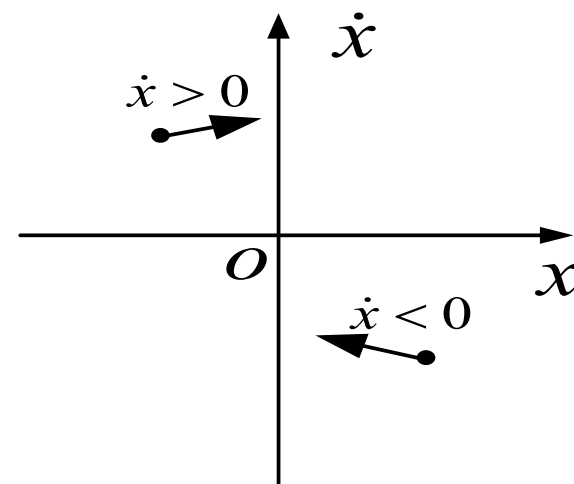
## 运动方向

- 上半平面中，相轨迹点沿着相轨迹向  $x$  轴正方向移动
- 下半相平面中，相轨迹点沿着相轨迹向  $x$  轴负方向移动

## 相轨迹切线斜率 $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$

- 相平面上任一点，只要不同时使分子分母为0，则  $\alpha$  是一个确定的值。
- 通过该点的相轨迹是唯一的，相轨迹不会在该点相交。

## 相轨迹穿越 $x$ 轴方向：垂直



# 相轨迹的性质-2

## □ 奇点(平衡点)

- 在相平面上同时满足  $\dot{x} = 0$  和  $f(x, \dot{x}) = 0$  的点处切线斜率  $\alpha$  不是一个确定的值，通过该点的相轨迹有一条以上。这点是相轨迹的交点，称为奇点。
- 奇点只分布在相平面的  $x$  轴上。
- 奇点求取：联立  $\dot{x} = 0$  和  $f(x, \dot{x}) = 0$

## □ 开关线(分界线)

- 不同特性的两部分相轨迹的分界线，称为“开关线”。
- 由开关线将相平面分成若干区域，某个区域的奇点位于本区域内，称该奇点对应于该区域是实奇点，否则，奇点对应于该区域是虚奇点。

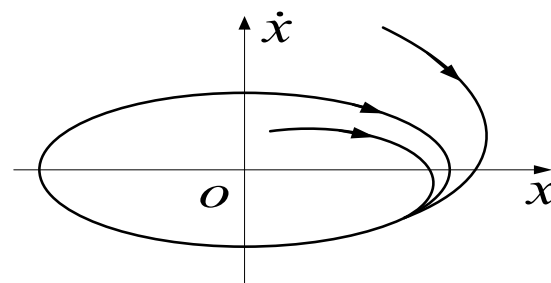
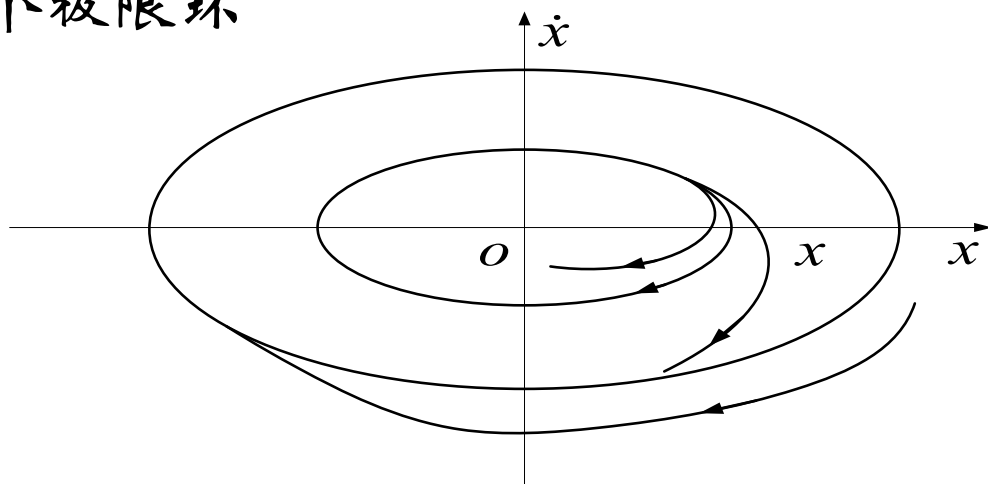
## □ 对称条件

- 如果  $f(x, \dot{x}) = f(x, -\dot{x})$  则称相轨迹对称于  $x$  轴
- 如果  $f(x, \dot{x}) = -f(-x, \dot{x})$  则称相轨迹对称于  $x'$  轴
- 如果  $f(-x, \dot{x}) = -f(x, -\dot{x})$  则称相轨迹对称于原点

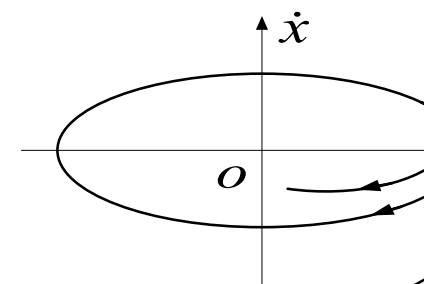
# 相轨迹的性质-3

## □ 极限环-孤立封闭的相轨迹

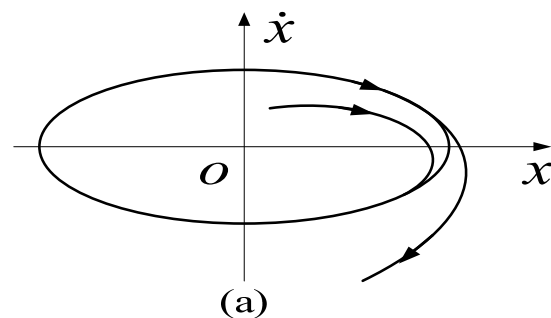
- 对应于系统的自激振荡，简称**自振**。
- 极限环是非线性系统的特有现象。
- 极限环有三种类型：稳定的极限环、不稳定的极限环和半稳定的极限环。➡
- 对于实际的非线性系统，可能存在着几个极限环



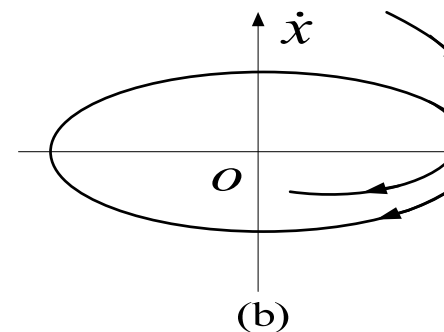
稳定极限环



不稳定极限环

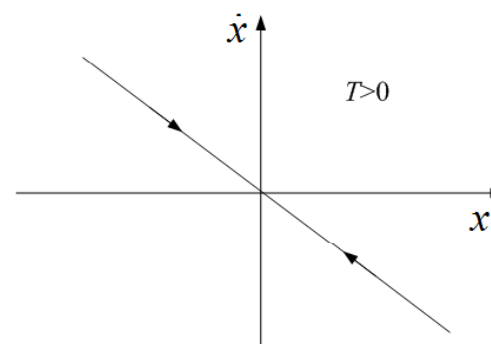
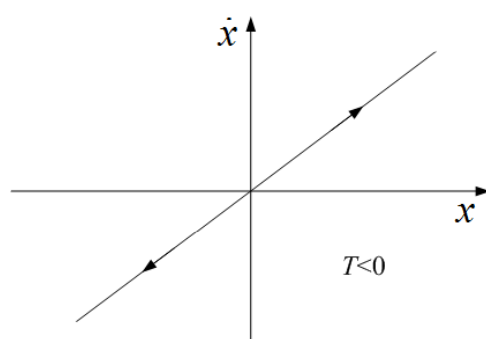


半稳定极限环



# 一阶、二阶线性系统的相轨迹

□ 一阶线性系统  $T\dot{x} + x = 0 \quad \dot{x} = -\frac{1}{T}x$



□ 二阶线性系统  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-\omega_n^2x - 2\zeta\omega_n\dot{x}}{\dot{x}} = \alpha$

▣ 奇点是(0,0)

▣ 特殊情况：等值线与相轨迹重合时的斜率

$$\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n + \alpha}x = kx \xrightarrow{k=\alpha} k = -\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n + \alpha} = \alpha \Rightarrow \alpha^2 + 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

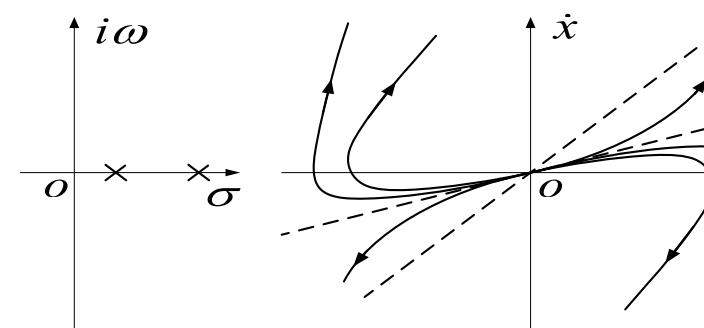
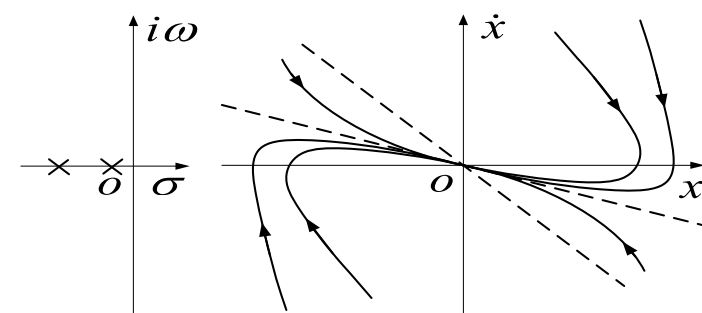
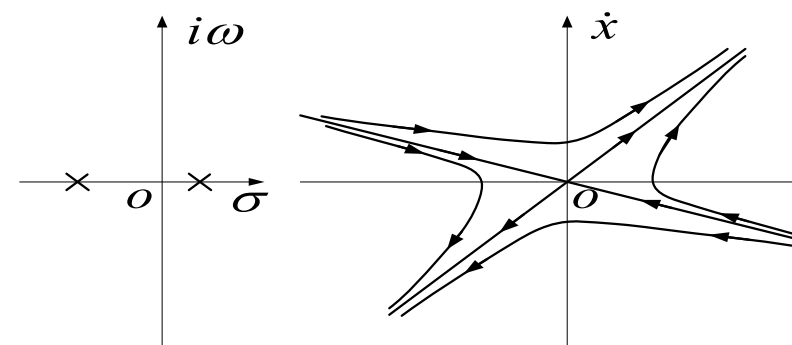
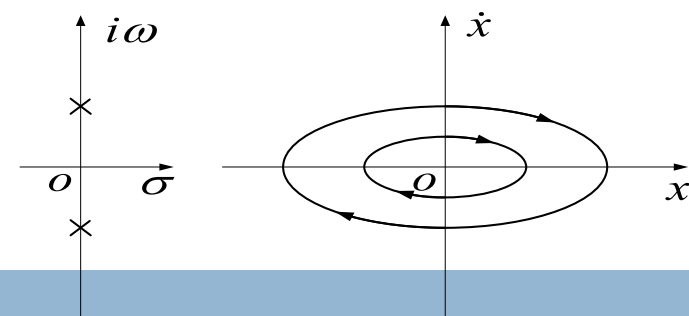
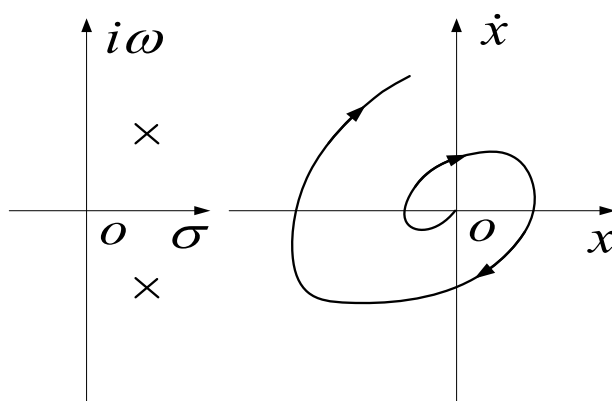
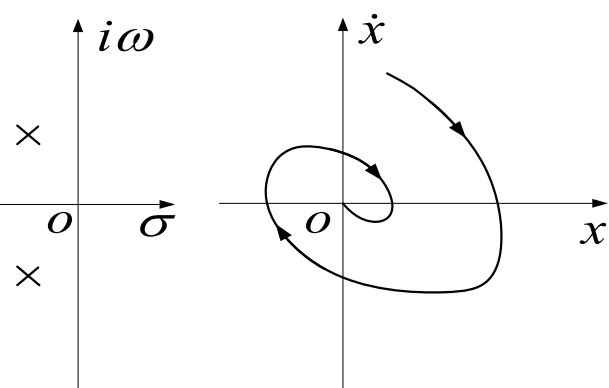
等值线与相轨迹重合时，其斜率为特

# 典型二阶线性系统的相轨迹

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

根据特征根划分二阶系统奇点的典型类型：

- ▣ **中心点(Centre)**：共轭纯虚根
- ▣ **鞍点(saddle)**----符号相反的实根
- ▣ **节点(nodal)**：同号实根(稳定/不稳定)
- ▣ **焦点(focus)**：共轭复根(稳定/不稳定)



# 二阶线性系统二种特殊情况的相轨迹

□ 形如方程  $\ddot{x} + k\dot{x} = u$  有一个特征根为0

▣ 在无外界激励时的相轨迹方程

$$\dot{x} = -kx + C \quad \text{一组斜率为}-k\text{直线簇}$$

▣ 在输入为  $u(t) = R \cdot 1(t)$ ，其相轨迹方程为

$$\dot{x} = R/(\alpha + k)$$

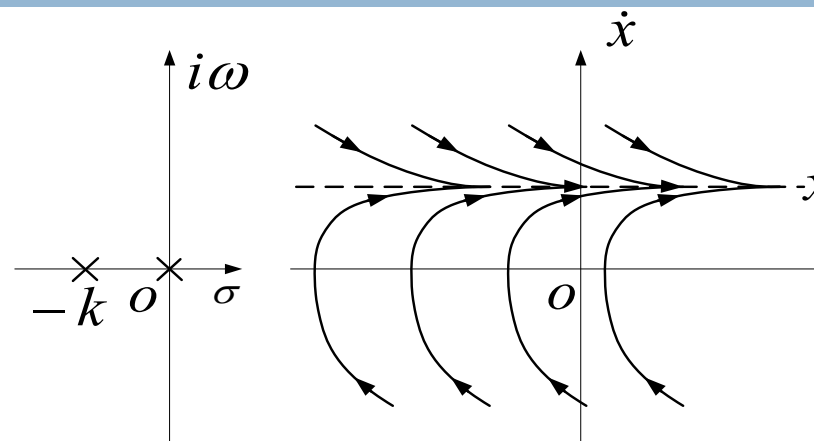
□ 形如方程  $\ddot{x} = u$  有两个特征根为0

▣ 在无外界激励时的相轨迹方程

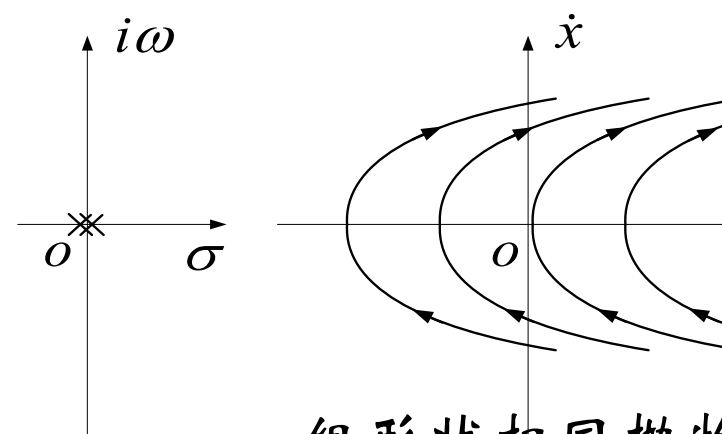
$$\dot{x} = C \quad \text{一组直线簇}$$

▣ 在输入为  $u(t) = R \cdot 1(t)$ ，其相轨迹方程为

$$\ddot{x} = R \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = R \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = R \frac{dt}{dx} = R \frac{1}{\dot{x}} \Rightarrow R dx = \dot{x} d\dot{x} \Rightarrow \dot{x}^2 = 2Rx + C$$



并不是平行于实轴的直



一组形状相同抛物

这一讲就到这里！



## 第五讲 相平面方法分析一般二阶系统

利用相平面方法分析一般二阶系统一般首先需要对非线性系统在平衡点(奇点)附近线性化，以确定奇点类型。然后根据具体情况分区画出相轨迹。根据相轨迹判定运动特性。



# 二阶非线性系统的线性化

□ 对如下的二阶非线性系统进行线性化

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_{1e}, x_{2e}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_{1e}, x_{2e}} (x_1 - x_{1e}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_{1e}, x_{2e}} (x_2 - x_{2e}) + \dots \\ &= f(x_{1e}, x_{2e}) + c(x_1 - x_{1e}) + d(x_2 - x_{2e}) + \dots \\ &= 0 + c(x_1 - x_{1e}) + d(x_2 - x_{2e}) + \dots \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2$$

$$\longrightarrow \ddot{x} - d\dot{x} - cx = 0$$

其特征根决定在奇点附近的运动状态，与二阶系统类似

□ 例：求下面方程的奇点并确定其奇点类型。

$$\ddot{x} - (1 + x + x^2)\dot{x} - 2x = 0$$

$$\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0 \quad \text{奇点}(0, 0)$$

$$\ddot{x} = (1 + x + x^2)\dot{x} + 2x = f(\dot{x}, x)$$

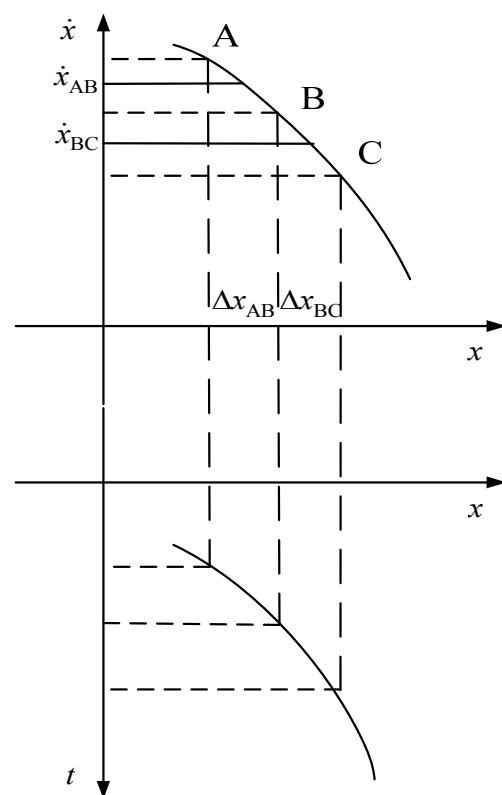
$$\begin{aligned} f(\dot{x}, x) &= f(0, 0) + \left. \frac{\partial f(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \dot{x}=0} \cdot \dot{x} \\ &\quad + \left. \frac{\partial f(\dot{x}, x)}{\partial x} \right|_{x=0, \dot{x}=0} \cdot x = \dot{x} + x \end{aligned}$$

$$s^2 - s - 2 = 0 \Rightarrow s_1 = 2, s_2 = -1$$

奇点为鞍点

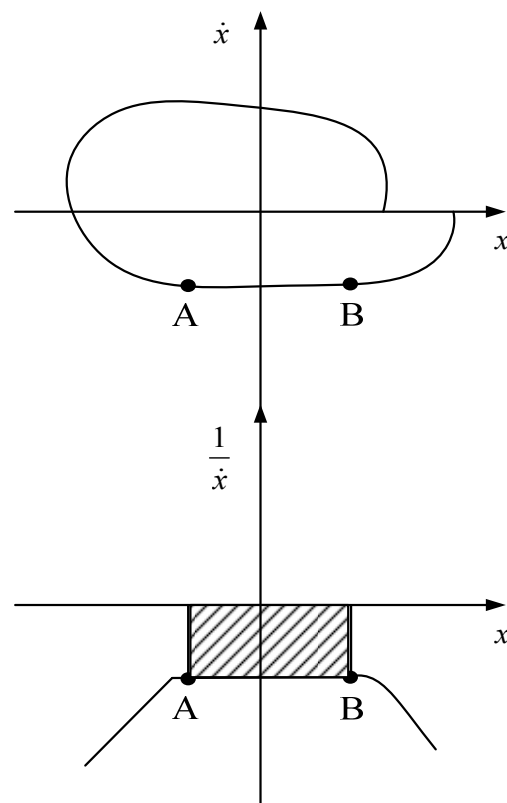
# 相平面图求时间解

## 增量法



$$\dot{x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_{AB}}{\dot{x}_{AB}}$$

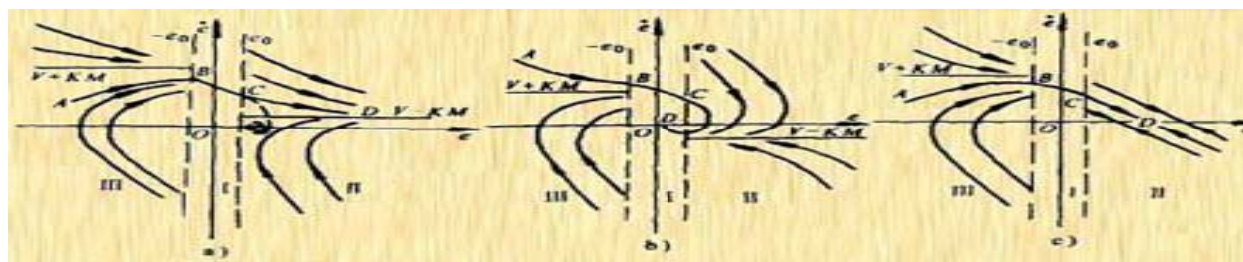
## 积分法



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\dot{x}} \Rightarrow t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{\dot{x}} dx$$

# 利用相平面法分析一般二阶系统的步骤

- 将非线性特性分段(近似)线性化, 并写出相应的数学表达式。
- 选择合适坐标, 并将相平面据非线性特性划分成若干个线性区域(各区域间由开关线分开)。无输入时一般选输出和其微分, 有输入时一般选误差和其微分。
- 据系统微分方程式和对应奇点的类型绘制各区域相轨迹, 或通过等倾线法绘制相轨迹。
- 将相邻区域的相轨迹在区域的边界上适当的连接起来, 据此可以判定其运动特性。



# 相平面分析例-1

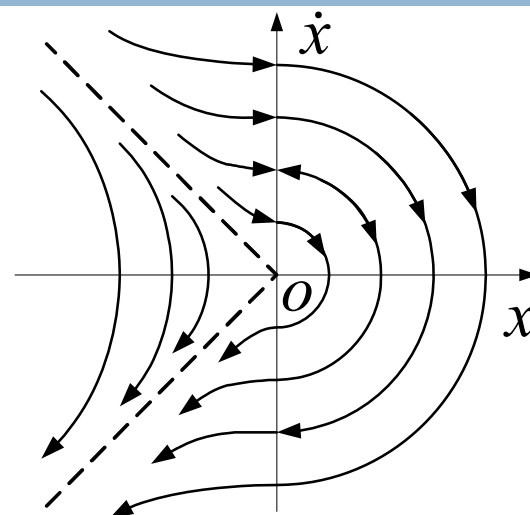
$\dot{x}$ 轴是开关线

例：画出相平面图的大致图形。 $\ddot{x} + |x| = 0$

系统方程可写为 
$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, & x > 0, \\ \ddot{x} - x = 0, & x < 0, \end{cases}$$

I：特征方程 $s^2+1=0$ ，奇点 $x=0$ 是中心点。

II：特征方程 $s^2-1=0$ ，奇点 $x=0$ 是鞍点。



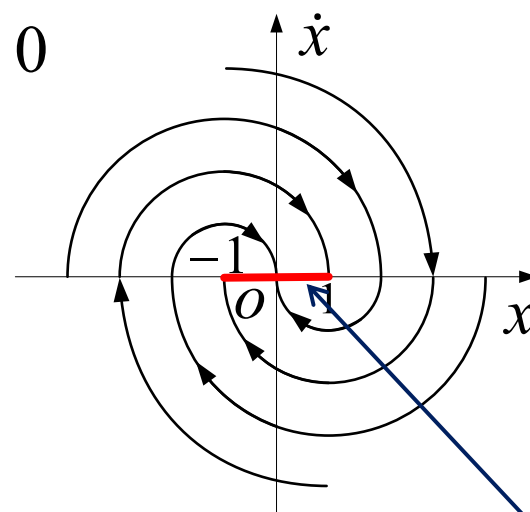
由图可见  
系统的自  
响应总是  
向 $x$ 轴负  
向发散，  
系统不稳定

例：画出相平面图的大致图形。 $\ddot{x} + x + \text{sgn } \dot{x} = 0$

系统方程可写为 
$$\begin{cases} \ddot{x} + x + 1 = 0, & \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x - 1 = 0, & \dot{x} < 0, \end{cases}$$

I：特征方程 $s^2+1=0$ ，奇点 $x=-1$ 是中心点。

II：特征方程 $s^2+1=0$ ，奇点 $x=1$ 是中心点。

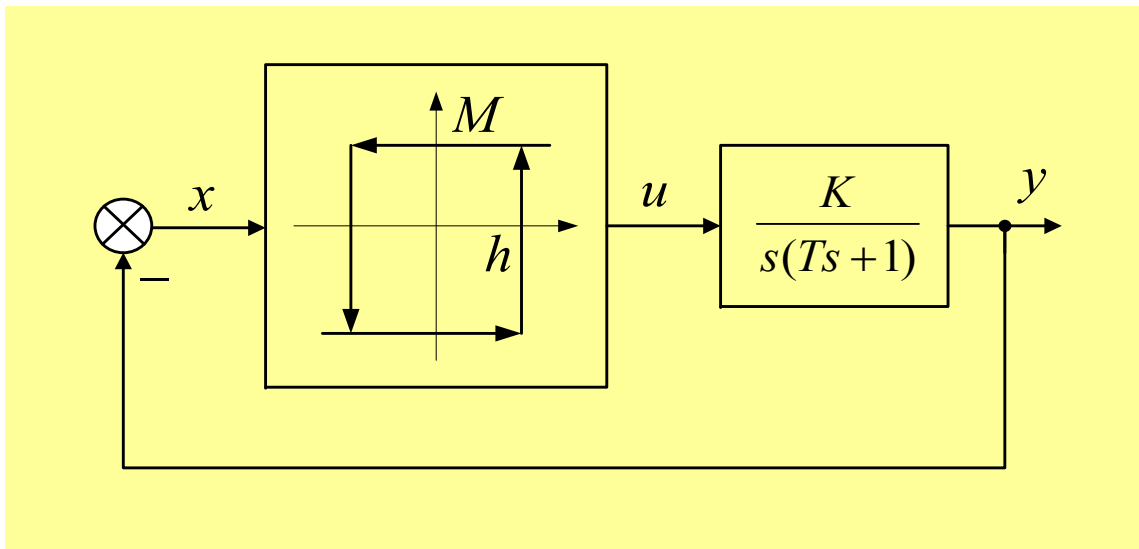


相轨迹运  
到 $[-1,1]$   
间的点后  
够保持不

$x$ 轴是开关线 奇线

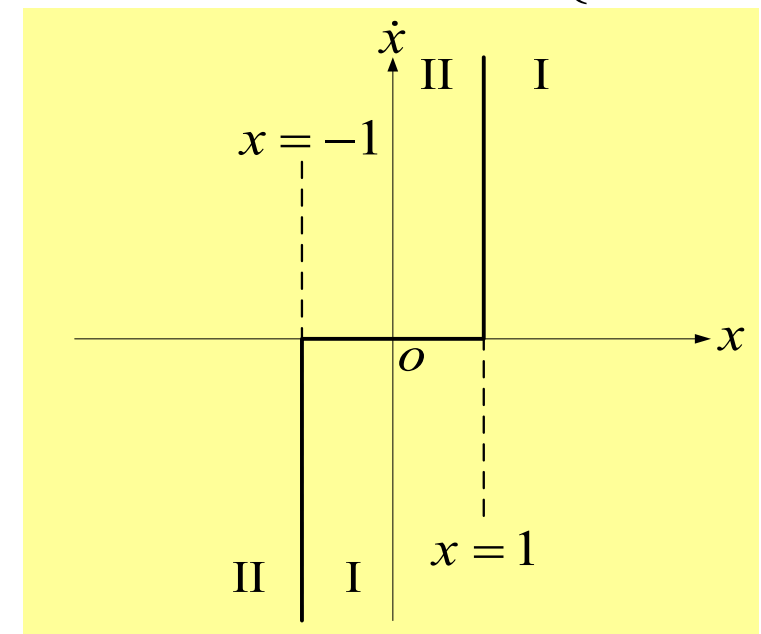
# 相平面分析例-2

例：如图系统， $x$ 为变量， $K=T=M=h=1$ 。作出系统的相平面图。



$$u = \begin{cases} M & \begin{cases} x > h, \dot{x} > 0 \\ x > -h, \dot{x} < 0 \end{cases} \\ -M & \begin{cases} x < -h, \dot{x} < 0 \\ x < h, \dot{x} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{K}{s(Ts+1)} \\ T\ddot{y} + \dot{y} &= Ku \\ \boxed{T\ddot{x} + \dot{x} &= -Ku} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I: } T\ddot{x} + \dot{x} &= -KM & \begin{cases} x > h, \dot{x} > 0 \\ x > -h, \dot{x} < 0 \end{cases} \\ \text{II: } T\ddot{x} + \dot{x} &= KM & \begin{cases} x < -h, \dot{x} < 0 \\ x < h, \dot{x} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



# 相平面分析例-2-采用等倾线法画图

$$\begin{aligned} \text{I: } T\ddot{x} + \dot{x} &= -KM & \begin{cases} x > h, \dot{x} > 0 \\ x > -h, \dot{x} < 0 \end{cases} \\ \text{II: } T\ddot{x} + \dot{x} &= KM & \begin{cases} x < -h, \dot{x} < 0 \\ x < h, \dot{x} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

令相轨迹切线斜率为  $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$

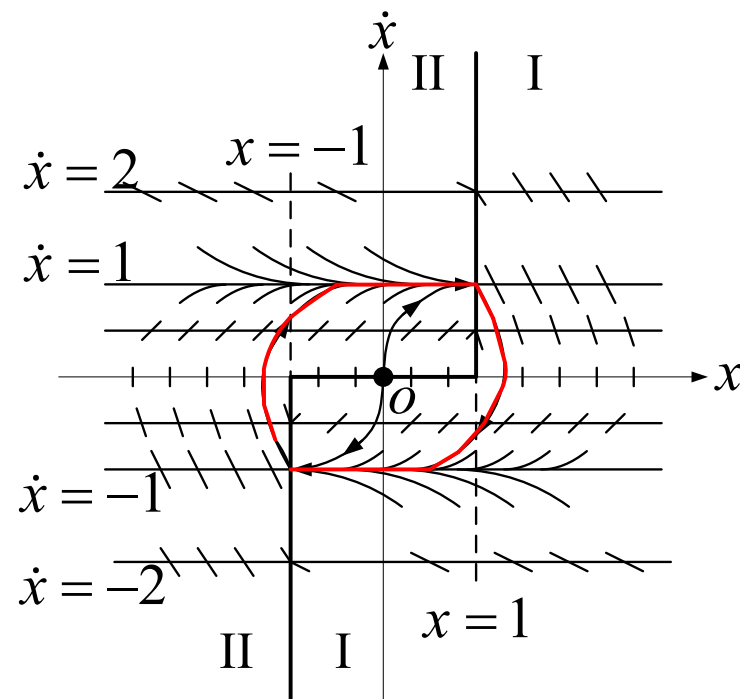
$$\text{I: } \alpha = \frac{(-KM - \dot{x})/T}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{-KM}{T\alpha + 1}$$

$$\text{II: } \alpha = \frac{(KM - \dot{x})/T}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{KM}{T\alpha + 1}$$

不同  $\dot{x}$  值对应的相轨迹切线斜率值

$\dot{x}$	2	1	0.5	-0.5	-1	-2
$\text{I: } \alpha = -\frac{1}{\dot{x}} - 1$	-1.5	-2	-3	1	0	-0.5
$\text{II: } \alpha = \frac{1}{\dot{x}} - 1$	-0.5	0	1	-3	-2	-1.5

绘制系统的相平面图



由图可见，不论初始条件怎样，系统由响应运动最终全部趋向于极限环，应系统的一种稳定的周期运动，即自

# 相平面分析例-2-利用二阶系统奇点的性质

$$\text{I: } T\ddot{x} + \dot{x} = -KM$$

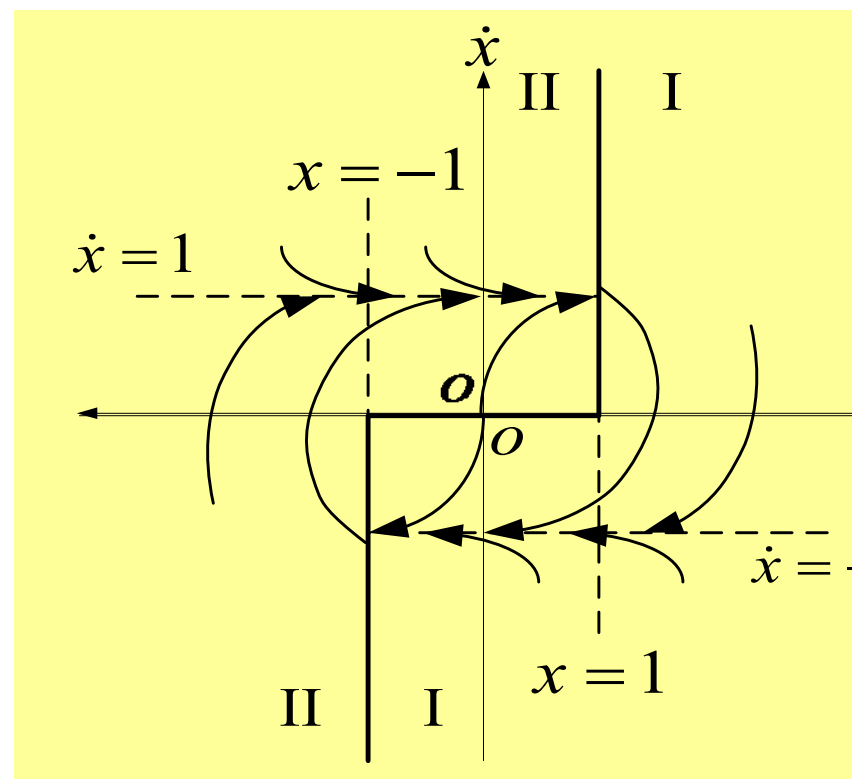
$$\text{II: } T\ddot{x} + \dot{x} = KM$$

$$\begin{cases} x > h, \dot{x} > 0 \\ x > -h, \dot{x} < 0 \\ x < -h, \dot{x} < 0 \\ x < h, \dot{x} > 0 \end{cases}$$

## □ 作变量替换

$$\dot{v} = \dot{x} + KM \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{v} - KM \\ \ddot{v} = \ddot{x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{特征方程 } Ts^2 + s = 0, \\ \text{特征根有一个为0,} \\ \text{奇点(0,0)是第} \\ \text{一种特殊情况。可以} \\ \text{近似画出I区的图。} \end{array}$$

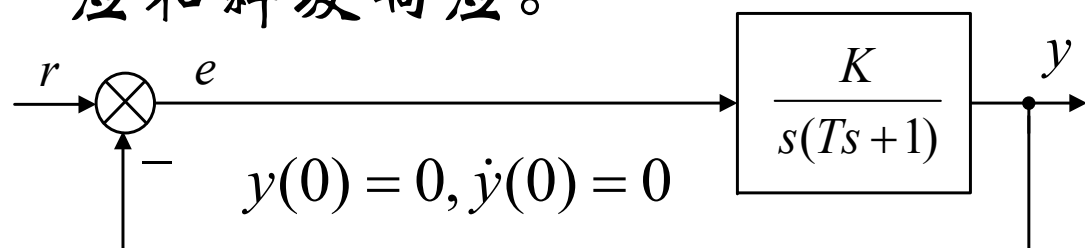
$$\dot{v} = \dot{x} - KM \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{v} + KM \\ \ddot{v} = \ddot{x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{特征方程 } Ts^2 + s = 0, \\ \text{特征根有一个为0,} \\ \text{奇点(0,0)是第} \\ \text{一种特殊情况。可以} \\ \text{近似画出II区的图。} \end{array}$$



由图可见，不论初始条件怎样，系统自由响应运动最终全部趋向于极限运动，对应系统的一种稳定的周期运动，即自振。

# 相平面分析例-3

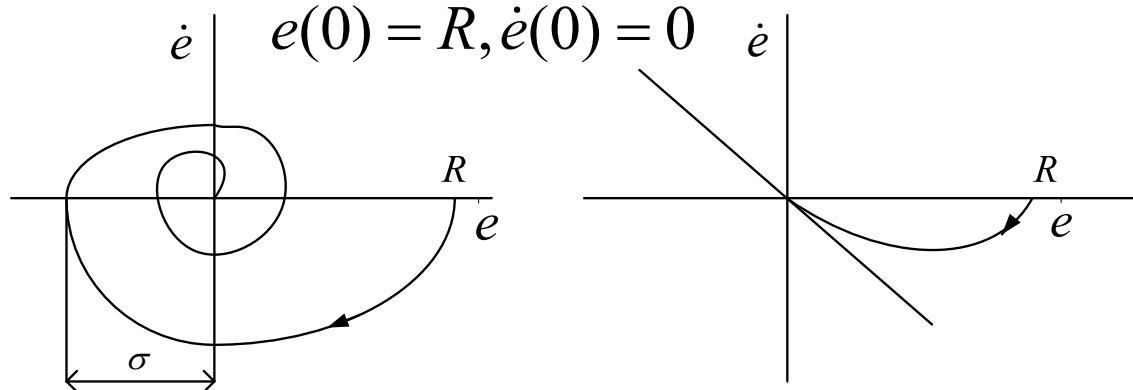
□ 例：典型二阶线性系统如下图所示，试用相平面法求系统的阶跃响应和斜坡响应。



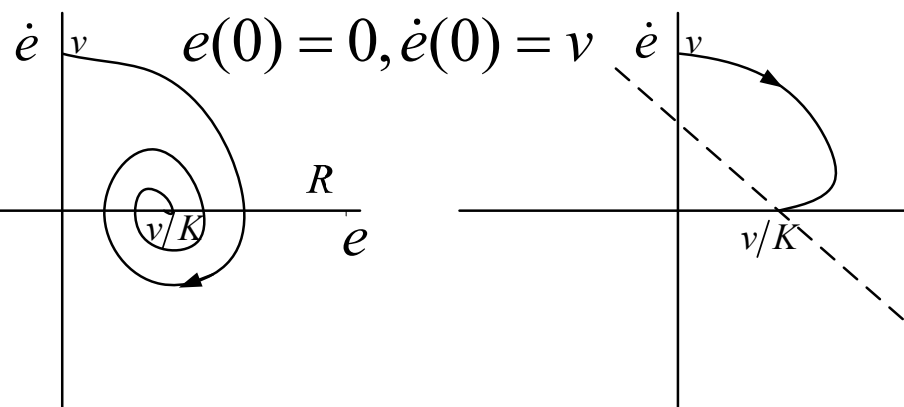
$$T\ddot{y} + \dot{y} = Ke \Rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = T\ddot{r} + \dot{r}$$

$r(t) = R \cdot 1(t) \quad T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0$  奇点为原点

$e(0) = R, \dot{e}(0) = 0$



$r(t) = vt \quad T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = v$  奇点为  $(v/K, 0)$



从图中可以看出系统的稳态误差为0。

从图中可以看出系统的稳态误差为



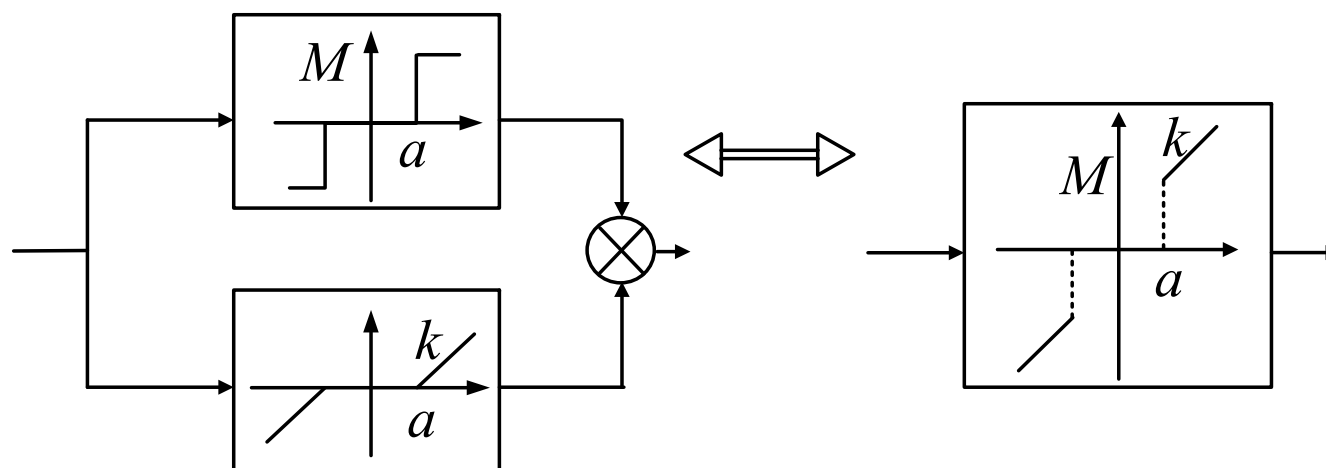
这一讲就到这里！



## 第六讲 非线性环节的串并联及系统变换

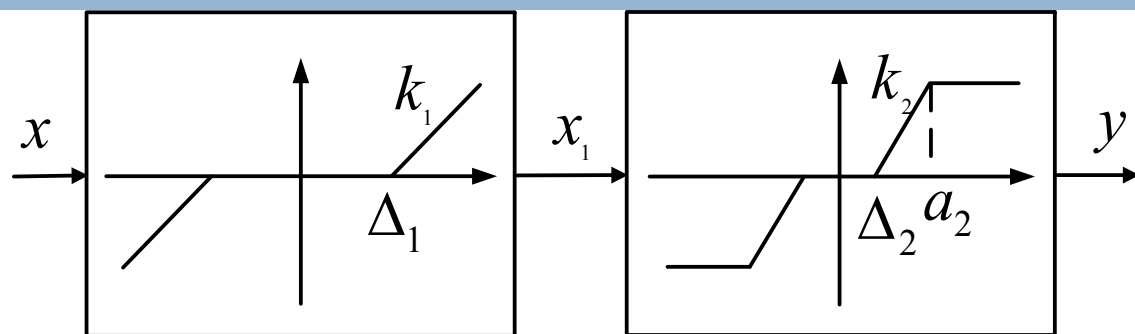
多个非线性环节的**串并联**可以构成新的不同的类型的非线性环节。本讲简单介绍一下。

# 非线性特性的并联



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \frac{2k}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right) \quad (A \geq a)$$

# 非线性特性的串联



$$k_1(\Delta - \Delta_1) = \Delta_2$$

$$\Rightarrow \Delta = \Delta_2 / k_1 + \Delta_1$$

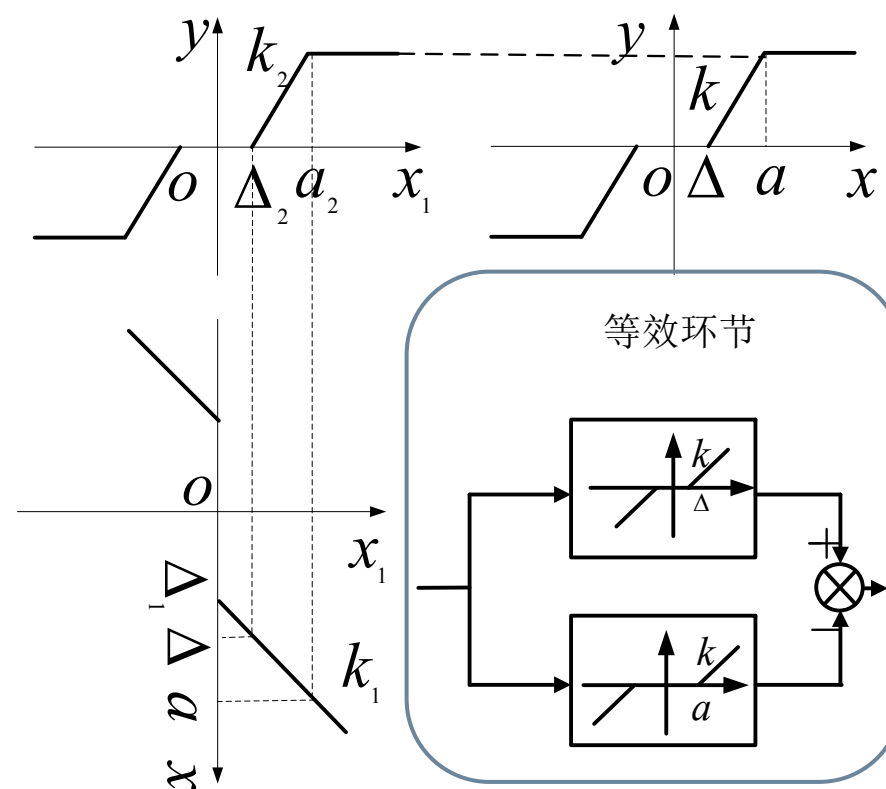
$$k_1(a - \Delta_1) = a_2$$

$$\Rightarrow a = a_2 / k_1 + \Delta_1$$

$$k(a - \Delta) = k_2(a_2 - \Delta_2)$$

$$\Rightarrow k = k_2(a_2 - \Delta_2) / (a - \Delta) = k_1 k_2$$

$$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta}{A} \right)^2} \right) - \frac{2k}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right) \quad (A \geq a)$$



这一讲就到这里！



## 第七讲 改善非线性系统性能与运用非线性特性

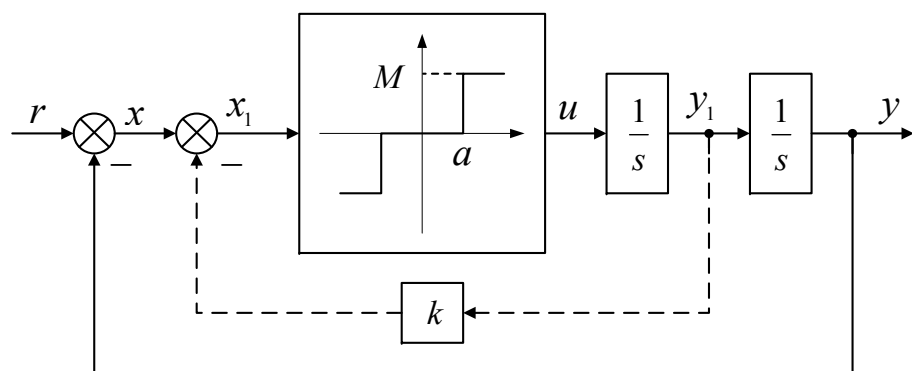
通常情况下，非线性环节往往会给系统带来不利影响，如使稳态误差增大或系统发生自振。所以要研究其性能改善的方法。同时有时也可以在控制系统中引入非线性环节，实现非线性控制律，以克服线性反馈中快速性和平稳性难以兼顾的困难。本讲以例子为纲阐述五个方面的内容：

- (1) 利用速度反馈消除二阶非线性系统的自振
- (2) 非线性速度反馈校正改善动态品质
- (3) 改造系统中的非线性特性
- (4) 前向通道加入非线性环节改善动态品质
- (5) 用非线性特性改善滞后(PI)校正

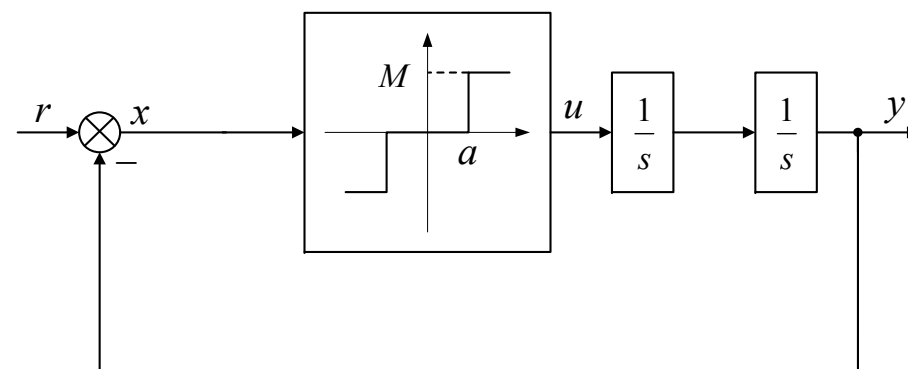
# 利用速度反馈消除二阶非线性系统的自振

□ 例：已知非线性系统结构如下图所示。分别画出  $k=0$  和  $k>0$  时  $x-x'$  的相轨迹图，并进行分析是否存在振荡，利用速度反馈能否消除自振

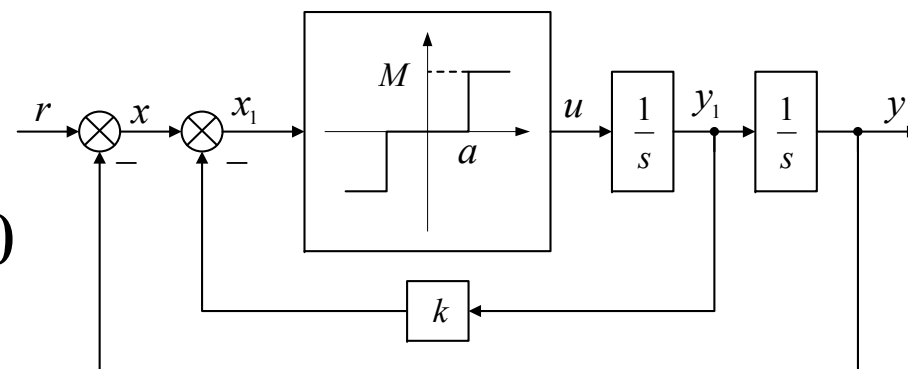
$$r(t) = R \cdot 1(t), R > a$$



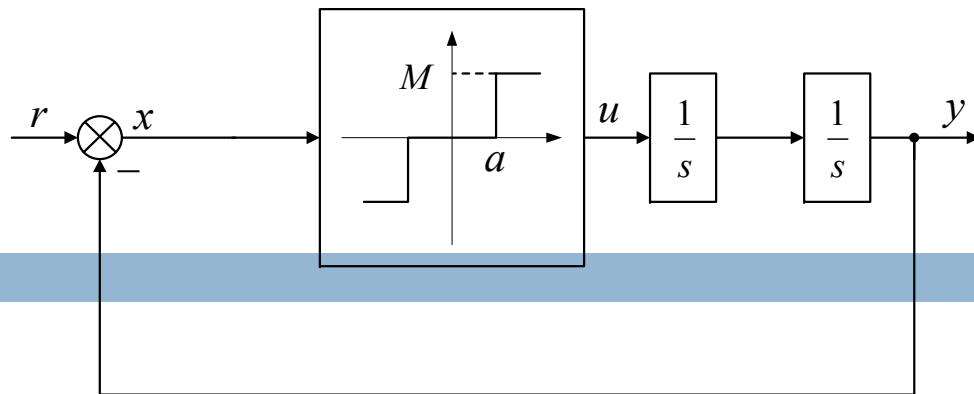
$k=0$



$k>0$



**$k=0$**

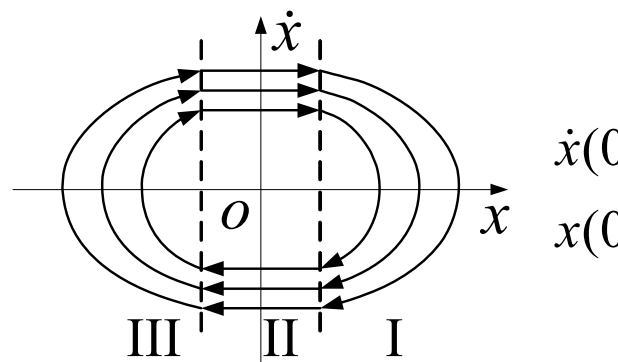


$$\ddot{y} = u = \begin{cases} -M, & x < -a \\ 0, & -a < x < a \\ M, & x > a \end{cases} \xrightarrow[r(t) = R \cdot 1(t)]{x = r - y,} \ddot{x} = \begin{cases} M, & \text{I: } x < -a \\ 0, & \text{II: } -a < x < a \\ -M, & \text{III: } x > a \end{cases} \quad \text{开关线方程 } x=a \text{ 和 } x=-a$$

I 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{M}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}^2 = 2Mx + c$  相轨迹为一簇抛物线

II 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{0}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = c$  相轨迹为一簇水平线

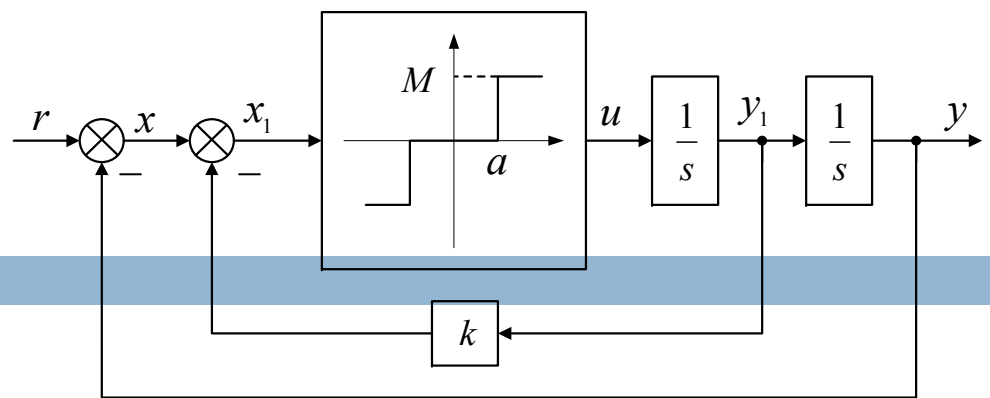
III 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{M}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}^2 = -2Mx + c$  相轨迹为一簇抛物线



故: 系统的自由响应运动是一个等幅振荡的过



$k > 0$

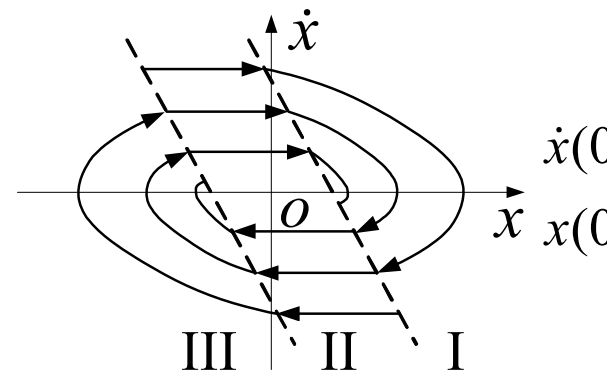


$$\ddot{y} = u = \begin{cases} -M, & x_1 < -a \\ 0, & -a < x_1 < a \\ M, & x_1 > a \end{cases} \xrightarrow[r(t) = R \cdot 1(t)]{x = r - y,} \ddot{x} = \begin{cases} M, & \text{I: } x_1 < -a \\ 0, & \text{II: } -a < x_1 < a \\ -M, & \text{III: } x_1 > a \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - ky_1 \\ y_1 &= \dot{y} \\ y &= r - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = x - k(r - x)' = x + k\dot{x}$$

开关线方程  $x + k\dot{x} = a$  和  $x + k\dot{x} = -a$

- I 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{M}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}^2 = 2Mx + c$  相轨迹为一簇抛物线
- II 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{0}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = c$  相轨迹为一簇水平线
- III 区:  $\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{M}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}^2 = -2Mx + c$  相轨迹为一簇抛物线



故：在继电控制系统中加入局部速度负反馈，可以改变开关线状态，使相轨迹提前转换，从而改善动态性能，系统振荡消除。

# 非线性速度反馈校正改善动态品质-1

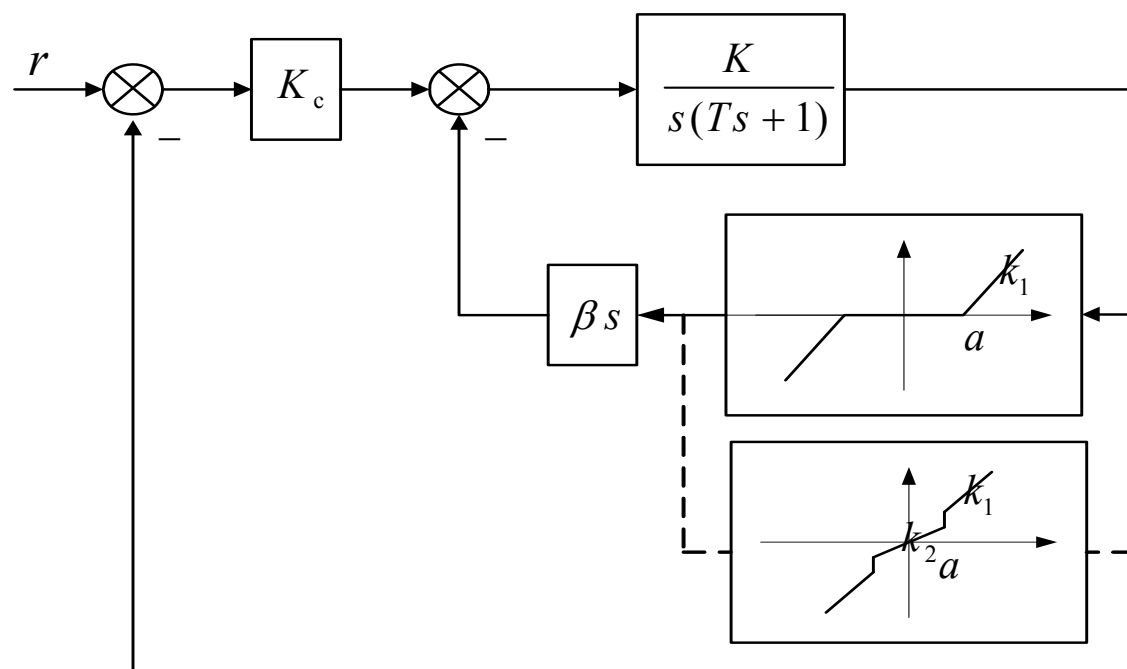
在线性系统中的速度反馈是一种常用的控制结构，可以增加系统阻尼，改善动态响应的平稳性。

但是这种结构在减小超调的同时，往往以降低了响应的速度。

利用变增益或死区非线性特性可以变速度反馈，如右图所示。

当系统输出小于 $a$ 时，没有速度反馈或反馈强度弱，系统处于弱阻尼状态，响应较快。

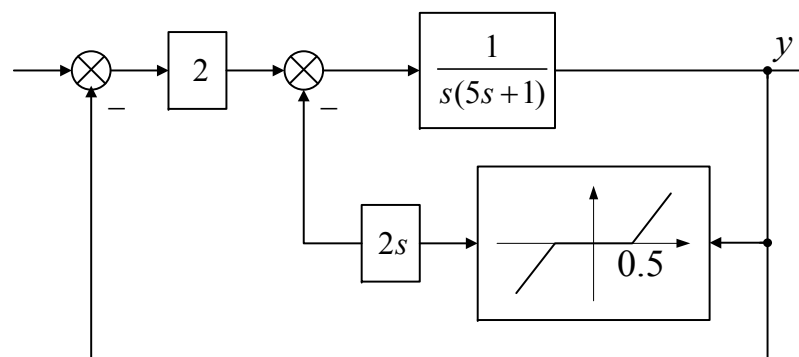
当系统输出增大超过 $a$ 时，速度反馈开始或增加作用，系统的阻尼增大，抑制了超调量，使输出平稳地跟踪输入指令。



# 非线性速度反馈校正改善动态品质-2

□ 例：如下图分别给出系统在无速度反馈、采用线性速度反馈和采用非线性速度反馈三种情况下的阶跃响应曲线。从图中可以反映出什么事实？请理论分析一下这一事实的正确性。

□ 反映出的事实：非线性速度反馈时，系统的动态过程既快又稳，具有良好的控制性能。



不存在局部速度反馈

$$G(s) = \frac{2}{5s^2 + s}$$

$$\Phi(s) = \frac{2}{5s^2 + (1+2)s + 2}$$

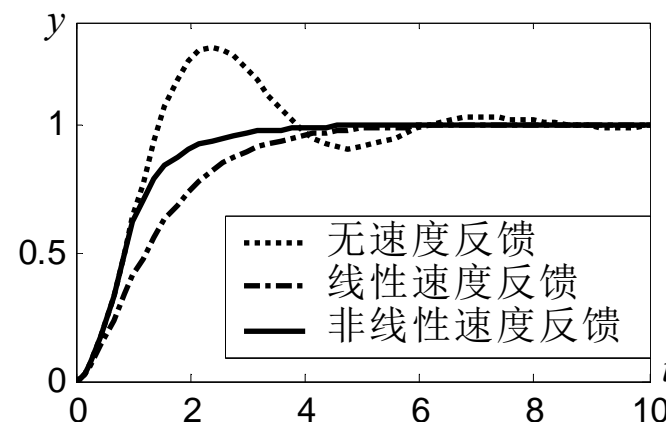
存在局部速度反馈

$$\tilde{G}(s) = \frac{2}{5s^2 + (1+2 \times 2)s}$$

$$\tilde{\Phi}(s) = \frac{2}{5s^2 + (1+2 \times 2)s + 2}$$

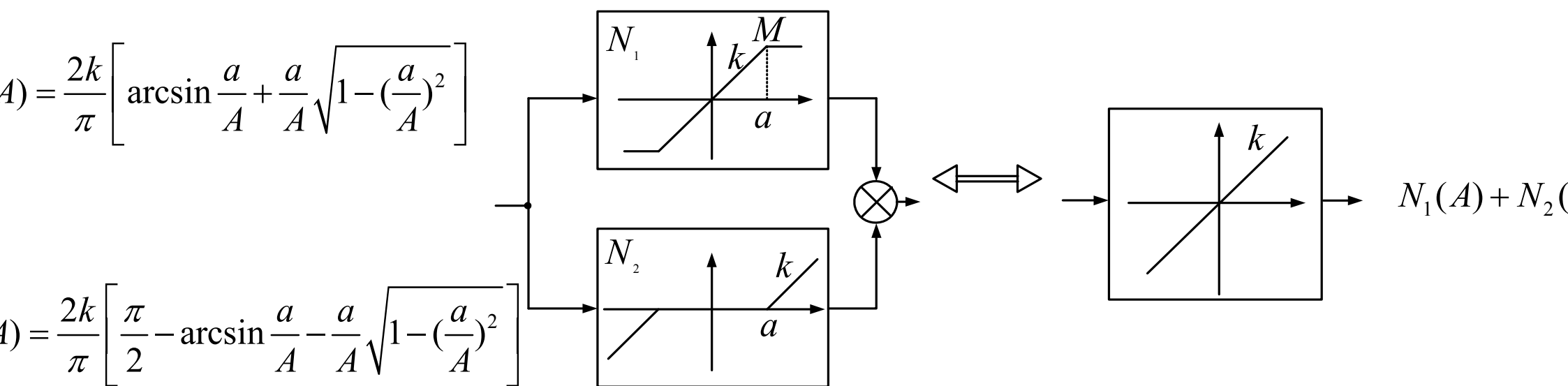
$$\omega_n = \sqrt{2/5}, \zeta = (1+2)/(10\sqrt{2/5}) \quad \tilde{\omega}_n = \sqrt{2/5}, \tilde{\zeta} = (1+2 \times 2)/(10\sqrt{2/5})$$

显然，局部速度反馈可以增加阻尼，并且作用在输出已大于0.5后，这样有利于减小超调量。



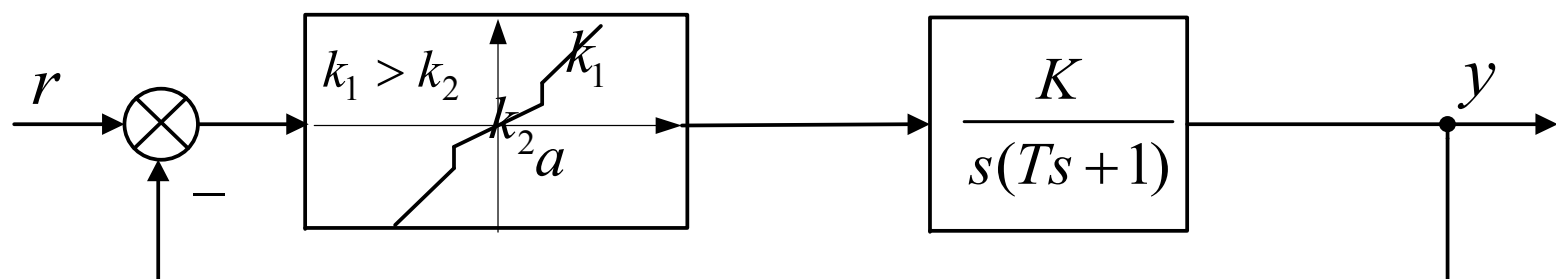
# 改造系统中的非线性特性

- 例：某系统中存在着死区特性(死区范围为 $-a \sim a$ )，导致反应不灵敏。该死区特性是独立可改选的，为将其改成线性特性，需要将死区部线性化，并且要与非死区斜率相同，只要并联一个饱和非线性特性可以得到线性特性，如图所示。



# 前向通道加入非线性环节改善动态品质

例：右下图所示的变增益非线性控制系统，分析变增益如何改善动态响应的平稳性。



当误差小于  $a$  时

$$G(s) = \frac{Kk_2}{Ts^2 + s} \quad \Phi(s) = \frac{Kk_2}{Ts^2 + s + Kk_2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = \sqrt{Kk_2/T}, \zeta = (1/T) / (2\sqrt{Kk_2})$$

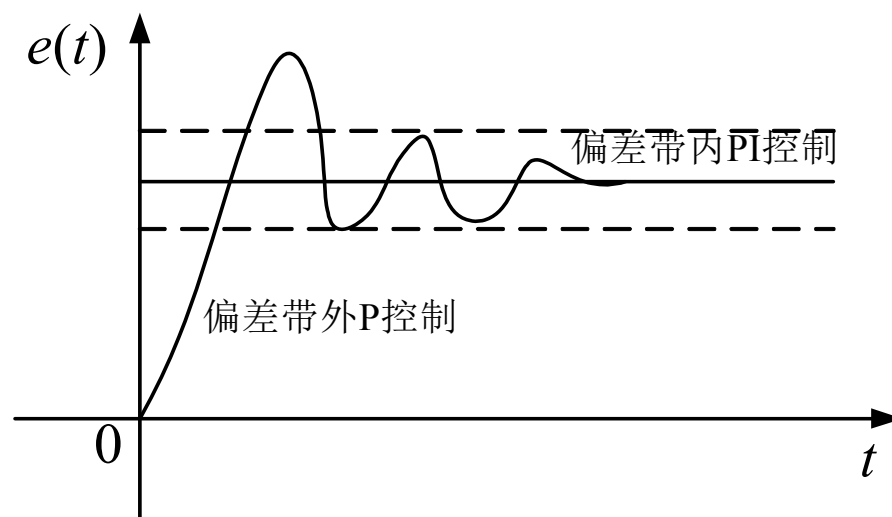
当误差大于  $a$  时

$$G(s) = \frac{Kk_1}{Ts^2 + s} \quad \Phi(s) = \frac{Kk_1}{Ts^2 + s + Kk_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n = \sqrt{Kk_1/T}, \zeta = (1/T) / (2\sqrt{Kk_1})$$

一般，刚开始系统误差比较大，此时阻尼较小，响应加快；当误差减小到一定程度后，阻尼增大，减小超调。显然改善动态响应的平稳性。

# 用非线性特性改善滞后(PI)校正

- 滞后(PI)校正能提高系统控制精度，但因减小系统的相角裕度，使系统动态品质变差。
- 非线性滞后控制:在偏差较大时，采用比例控制，有利于加快响应速度，而在偏差较小时采用滞后(PI)控制，这样有利用提高控制精度。



这一讲就到这里！

