Algorísmica Avançada
Complexitat

Sergio Escalera

Complexitat

- Fins ara hem vist algorismes que es poden resoldre en temps polinòmic (n, n^2, n^3, etc)
- No obstant, hi ha problemes on no existeix encara cap algorisme polinòmic per resoldre'ls, i hem de fer servir solucions exponencials (que no són molt més útils que la cerca exhaustiva)

Complexitat

- Exemple

SATISFIABILITY

$$(x \vee y \vee z)\ (x \vee \overline{y})\ (y \vee \overline{z})\ (z \vee \overline{x})\ (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

conjunctive normal form (CNF)

- Podem veure que aquest exemple de SAT no té solució, però quan no és evident, necessitem testejar el conjunt exponencial de 2^n possibles solucions per a *n* variables.

Complexitat

- Exemple

  SATISFIABILITY

  $$(x \vee y \vee z)\ (x \vee \overline{y})\ (y \vee \overline{z})\ (z \vee \overline{x})\ (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

  conjunctive normal form (CNF)

- El problema s'ha estudiat durant més de 50 anys:
  - Si totes les clàusules contenen com a molt un literal positiu (Horn) existeix solució
  - Si totes les clàusules contenen 2 literals (2SAT) es pot resoldre per teoria de grafs per components connexos
  - **Si permetem que hi hagi 3 literals (3SAT) estem de nou en un problema difícil de solucionar**

Complexitat

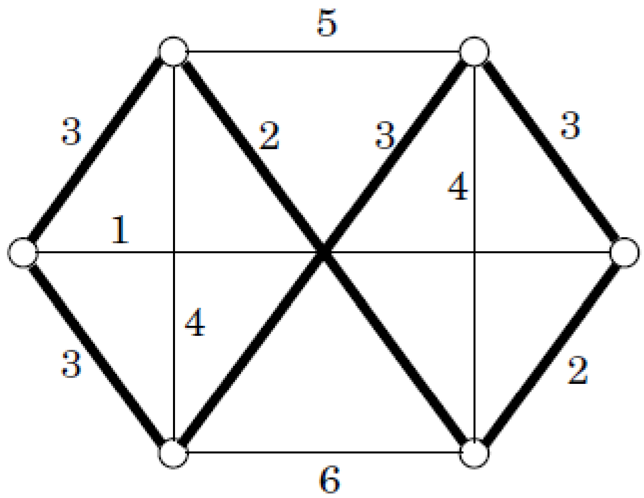
• **The traveling salesman problem (TSP)**

•Volem recórrer tots els vèrtex només un cop amb el mínim cost possible.

•És un problema de **cerca** i el podem resoldre en temps polinomial amb els algorismes dels capítols anterior.

•Però no sabem si el resultat és **òptim**!! Podem incloure restricció de que el camí sigui com a molt de cost ***b***

•Amb programació dinàmica es pot fer (també ho hem vist amb ramificació i poda), però així encara la complexitat és exponencial!



Complexitat

- Definicions $C(I, S)$
- Problema de cerca: Si I correspon a les dades de la instància del problema a solucionar i S és una possible solució, C retorna si es satisfà o no el problema de cerca en un temps lineal acotat a $|I|$
- El conjunt dels problemes de cerca s'anomena ***NP***
- El conjunt de tots els problemes de cerca que es poden resoldre en temps polinomial a $|I|$ s'anomena ***P***
- Un problema C és ***NP-complet*** si qualsevol altre problema de cerca es pot reduir a C en temps polinomial. (NP-complet són els problemes més difícils de resoldre de NP).

Complexitat

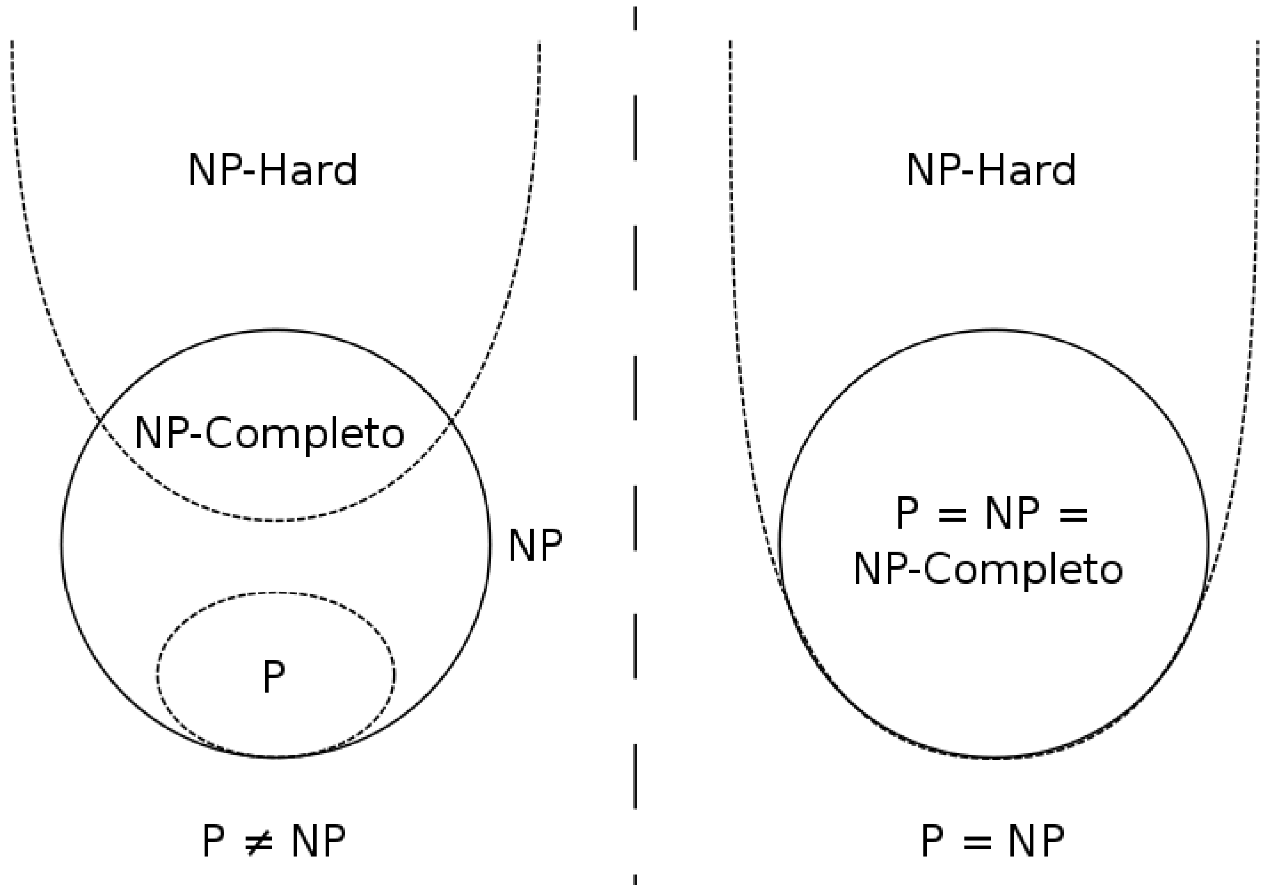
P ≠ NP?

- Es creu que sí…
- S’ha demostrar?
  - No!
- Per què?
  - Perquè la demostració també és NP ☺

Complexitat

- NP-Hard
  - → Són aquell tipus de problemes que es poden **reduir** als més complexes de NP (ex. SAT3) en temps polinòmic. Cobreixen els problemes de decisió, de cerca o optimització.
  - D'aquesta forma, si trobem una solució en temps polinòmic per SAT3 també trobem una solució polinòmica per a tot problema NP (i llavors P=NP).

Complexitat



Complexitat

- Al menys els algorismes NP tenen una solució, encara que la complexitat sigui exponencial.
- Existeixen problemes sense solució.

- Exemple:
  - Donada una funció polinomial de diferents variables

$$x^3yz + 2y^4z^2 - 7xy^5z = 6,$$

  - Hi ha valors enters per a *x*, *y*, *z* que la solucionen?

Complexitat

- Com treballem amb els problemes NP-complet?
  - En el món laboral molts dels problemes que sorgeixen no es cobreixen amb les solucions algorísmiques explicades en aquest curs
  - És més, encara que ho siguin és difícil veure l'equivalència, i requereix pràctica
  - Però quan podem veure que el problema és NP-complet, com el solucionem?

Complexitat

- Com treballem amb els problemes NP-hard?
  - Podem fer ús d'algorismes aproximats

→ Sabem que el resultat és pràcticament equivalent a l'òptim, i en el pitjor cas servirà per cobrir els nostres propòsits

→ També podem incloure heurístiques basant-nos en la nostra experiència que serviran per guiar la cerca i acostar l'espai de possibilitats

Complexitat

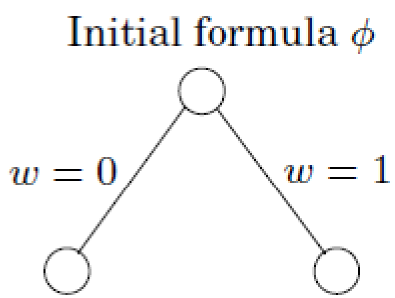
- Exemple: ramificació i poda (ja ho hem vist)
  - Fórmula booleana

$$\phi(w, x, y, z)$$

  - Clàusules

$$(w \vee x \vee y \vee z),\ (w \vee \overline{x}),\ (x \vee \overline{y}),\ (y \vee \overline{z}),\ (z \vee \overline{w}),\ (\overline{w} \vee \overline{z})$$

  - Fem un arbre de solucions parcials!

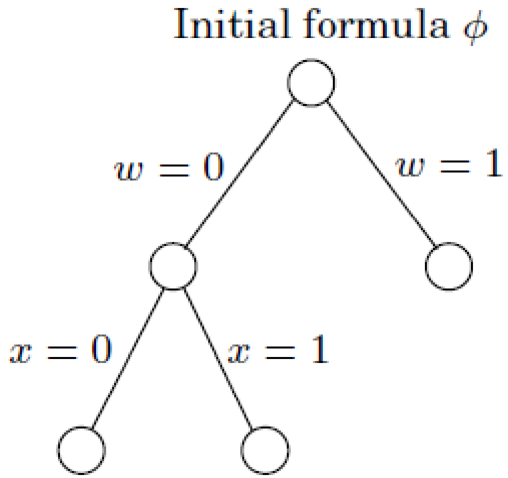


Complexitat

- Exemple: backtracking
  - Continuem ramificant
  - Ara podem podar per que no satisfem una clàusula:

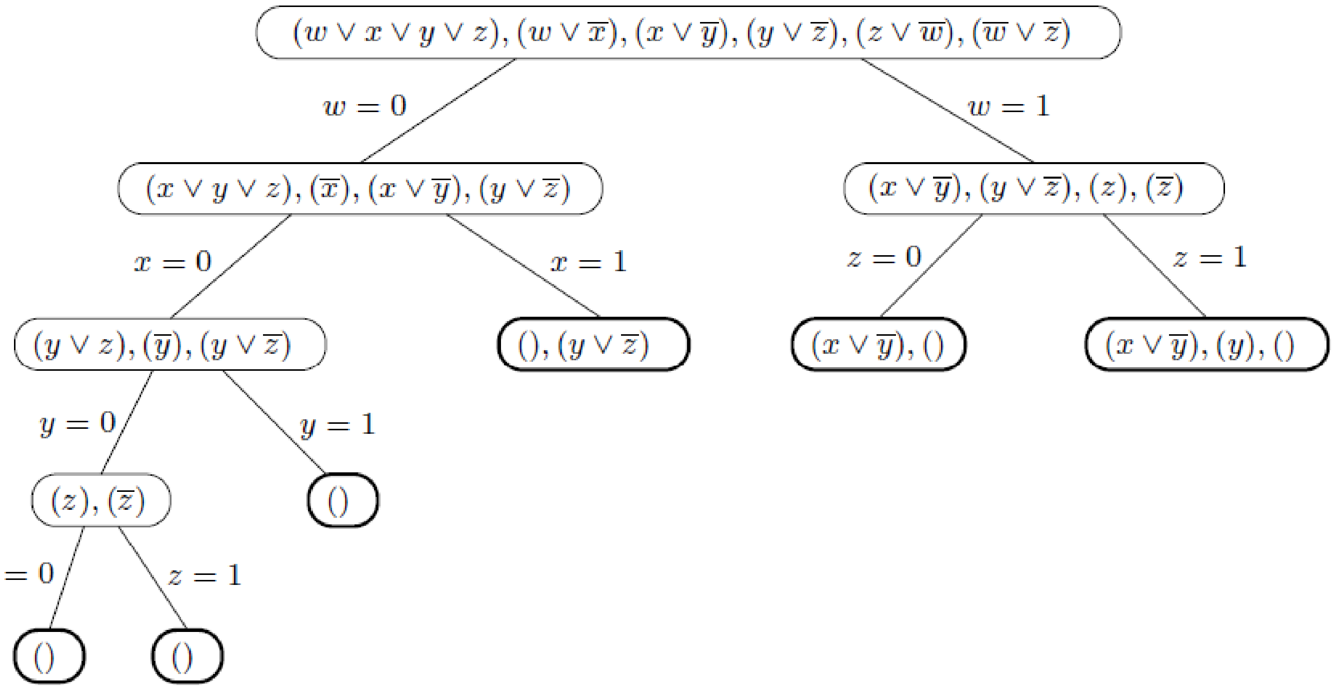
$$w = 0, x = 1 \qquad (w \vee \overline{x})$$

  - I retornem (backtracking) als altres 2 nodes actius



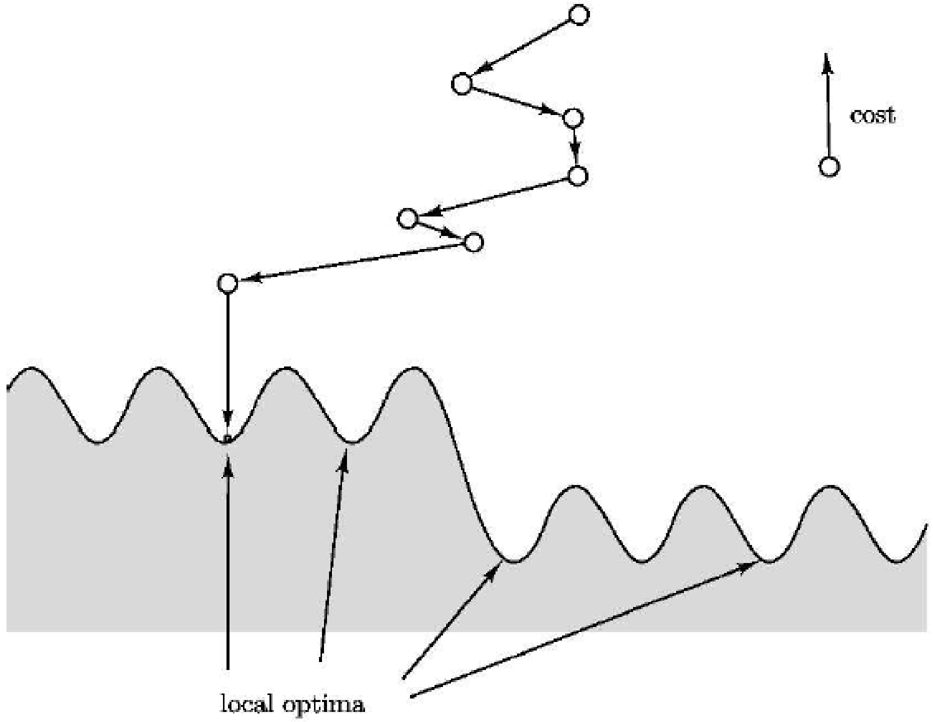
Complexitat

- Exemple: backtracking
  - Hem reduit considerablement el conjunt de possibilitats per arribar més ràpidament a una solució del problema



Complexitat

- Exemple d'execució d'una heurística per a cerca local per a trobar una solució aproximada



Complexitat

- El problema de les solucions locals:
  - → Amb alguns d'aquests algorismes podem arribar a solucions (mínims locals) que no són els òptims
  - → Una possible solució son les execucions aleatòries per corregir algunes solucions que arriben als mínims locals

Complexitat

- Exemple: simulating annealing
  - → El problema del exemple anterior es que ens podem moure constantment al voltant d'un mateix mínim local. Una possible solució es permetre en certs moments salts en la cerca suficientment grans

```
let s be any starting solution
repeat
   randomly choose a solution s' in the neighborhood of s
   if Δ = cost(s') − cost(s) is negative:
      replace s by s'
```

Complexitat

- Exemple: simulating annealing