

Algorísmica Avançada

Algorismes enumeratius

Sergio Escalera

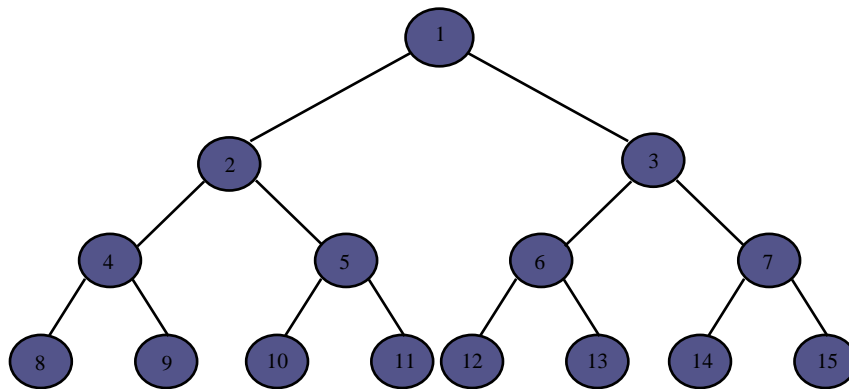
A series of horizontal lines of varying lengths and colors (teal, light blue, and white) extending from the right side of the slide.

Algorismes enumeratius

- Recorregut vs Cerca
- Backtracking
- Ramificació i poda

Cerca - exemple amb arbres

Arbres



Arbre binari

Conjunt de **nodes i arestes**, on el node superior es diu el **root** i els nodes externs es diuen **fulles**

En el cas dels **arbres binaris** cada node té com a **màxim 2 arestes sortints**

Un arbre binari, al **nivell i** té com a **màxim 2^i nodes** (suposant el root $i=0$)

Cerca - recorregut

Cóm podem recórrer un arbre binari?

Si denominem amb

- L: moviment a l'esquerra
- V: "visitar" el node
- R: moviment a la dreta

Tenim sis combinacions possibles de recorregut:

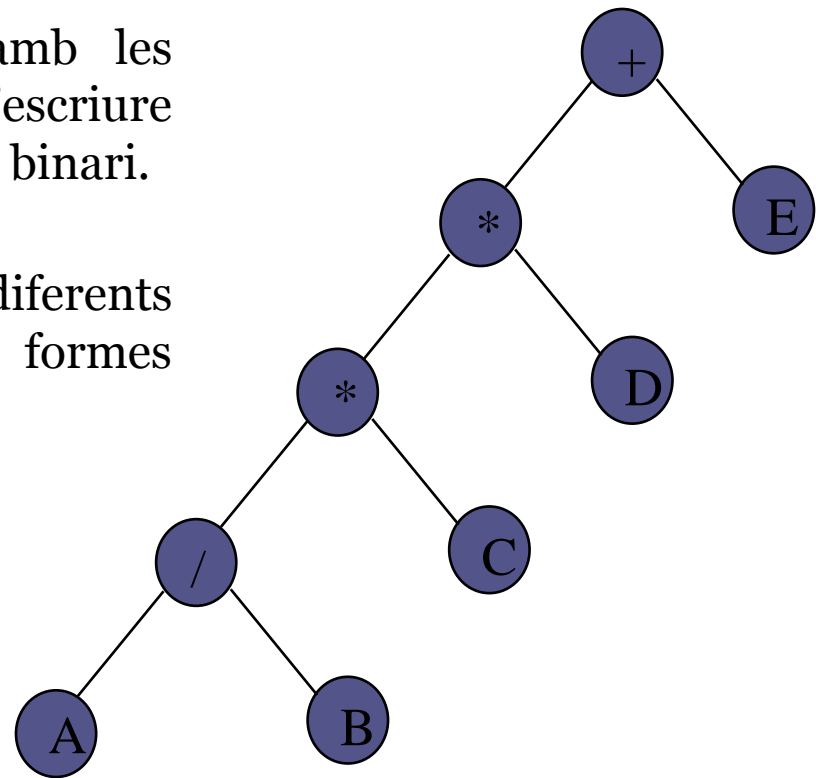
- LVR, LRV, VLR, VRL, RVL, RLV

Si optem per realitzar primer el moviment a l'esquerra, tenim les tres primeres possibilitats

- LVR denominarem inordre
- LRV denominarem postordre, i
- VLR denominarem preordre

Cerca - recorregut

- Els recorreguts es corresponen amb les formes infixa, postfixa i prefixa d'escriure una expressió aritmètica en un arbre binari.
- Donat l'arbre binari, els diferents recorreguts porten a les següents formes d'escriure l'expressió:
 - Inordre LVR : $A/B * C * D + E$
 - Preordre VLR : $+ ** / ABCDE$
 - Postordre LRV : $AB / C * D * E +$



Backtracking

- El backtracking introdueix uns “criteris” per reduir la complexitat de la cerca recursiva.
- Aplicacions:
 - → Comprovar si un problema té solució
 - → Buscar múltiples solucions o una de totes les possibles

Backtracking

- Els esquemes de backtracking que veurem són directament aplicables a qualsevol tipus de graf (en molts exemples suposarem que són arbres)

```

algoritmo backtracking(i)
{
  si ( $i = n$ ) {
     $X \leftarrow X^i$ 
  }
  sino {
    para  $v =$  cada valor posible de  $x_{i+1}$  {
       $x_{i+1} \leftarrow v$ 
      si (factible( $X^i \cup \{x_{i+1}\}$ )) {
         $X^{i+1} \leftarrow X^i \cup \{x_{i+1}\}$ 
        backtracking( $i + 1$ )
      }
    }
  }
}

```

Volem arribar a n
solucions del problema

Backtracking

- Una solució o totes?
 - → Una variable global serviria per finalitzar el programa quan trobem una solució.
 - → Si les volem totes hauríem d'imprimir els valors que va agafant X per no veure només l'últim

```

algoritmo backtracking(i)
{
  si ( $i = n$ ) {
     $X \leftarrow X^i$ 
  }
  sino {
    para  $v =$  cada valor posible de  $x_{i+1}$  {
       $x_{i+1} \leftarrow v$ 
      si (factible( $X^i \cup \{x_{i+1}\}$ )) {
         $X^{i+1} \leftarrow X^i \cup \{x_{i+1}\}$ 
        backtracking( $i + 1$ )
      }
    }
  }
}

```


Backtracking

- Reduïm camins

```
ruta_optima(i, j, ruta, ruta_optima)
{ Calcula la ruta óptima entre i y j y la concatena en la lista ruta_optima. }
  si  $i = j$  entonces
    medir_ruta(ruta)
    si es mejor que ruta_optima entonces  $ruta\_optima \leftarrow ruta$ 
  sino
    marcar  $i$  como visitado
     $\forall k: k$  no visitado,  $k$  adyacente a  $i$ :
      [ añadir  $k$  al final de ruta
        |  $ruta\_optima(k, j, ruta, ruta\_optima)$ 
        | quitar  $k$  del final de ruta
      ]
    marcar  $i$  como no visitado
  fin
```

Backtracking

- Exemple: veure la utilitat del backtracking
- Problema de les 8 reines:
 - Volem col·locar 8 reines en un tauler d'escacs de 8x8 sense que hi hagi amenaça.
 - Comencem per una solució exhaustiva

```
bool ocho_reinas()  
{  
    for (int i=1; i<=8; i++)  
        for (int j=1; j<=8; j++)  
            for (int k=1; k<=8; k++)  
                for (int l=1; l<=8; l++)  
                    for (int m=1; m<=8; m++)  
                        for (int n=1; n<=8; n++)  
                            for (int o=1; o<=8; o++)  
                                for (int p=1; p<=8; p++)  
                                    if (solucion(i,j,k,l,m,n,o,p) return true;  
    return false;  
}
```

Backtracking

- Reduïm la complexitat: incloure restriccions
 - → Les reines han d'estar a diferents files i diferents columnes
 - → No podem estar a la mateixa diagonal:
 - $T[i] + i == T[j] + j, (\searrow).$
 - $T[i] - i == T[j] - j, (\nearrow).$

```
class ocho_reinas {

    bool factible(unsigned int s){
        int T[8];
        int i = s;
        for (int j=0; j<8; j++) {
            T[j] = i % 10;
            i = i / 10;
            if (T[j] == 0 || T[j] == 9) return false;
            for (int k=0; k<j; k++)
                if (T[k] == T[j] ||
                    T[k]-k == T[j]-j ||
                    T[k]+k == T[j]+j) return false;
        }
        return true;
    }

public:
    bool encontrada;
    unsigned int z;
    ocho_reinas() {
        z=12345678;
        while (!factible(z++) && z<87654321);
        z--;
        encontrada = (z<87654321);
    }
};
```

Backtracking

```

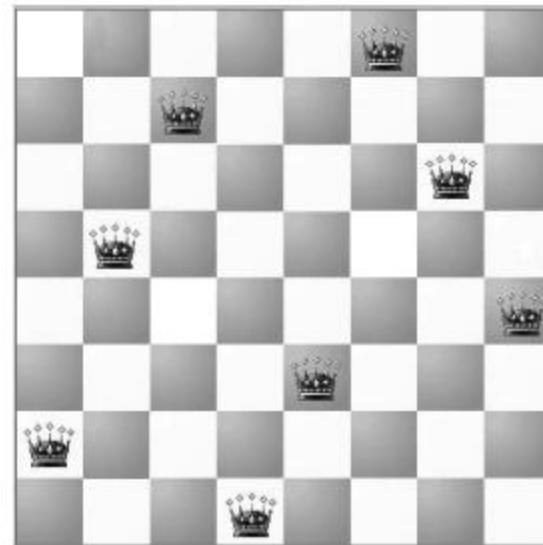
class ocho_reinas {

    bool factible(unsigned int s){
        int T[8];
        int i = s;
        for (int j=0; j<8; j++) {
            T[j] = i % 10;
            i = i / 10;
            if (T[j] == 0 || T[j] == 9) return false;
            for (int k=0; k<j; k++)
                if (T[k] == T[j] ||
                    T[k]-k == T[j]-j ||
                    T[k]+k == T[j]+j) return false;
        }
        return true;
    }

public:
    bool encontrada;
    unsigned int z;
    ocho_reinas() {
        z=12345678;
        while (!factible(z++) && z<87654321);
        z--;
        encontrada = (z<87654321);
    }
};

```

Hem reduït la complexitat,
però no suficient



25713864

Backtracking

- Generalització: problema de les n reines

```
extern void imprimir(vector<int> T, int ns);
```

```
clas n_reinas {
    int ns;

    bool factible(int i) {
        for (int j=0; j<i; j++)
            if (T[i]==T[j] || T[i]-i==T[j]-j || T[i]+i==T[j]+j) return false;
        return true;
    }

    void busca(int i) {
        if (i==n) {
            imprimir(T,++ns);
            return;
        }
        for (int j=0; j<n; ++j) {
            T[i] = j;
            if (factible(i)) busca(i+1);
        }
    }
}
```

```
public:
```

```
    vector<int> T;
```

```
    n_reinas(int n) {
```

```
        ns = 0;
```

```
        T.crea(n);
```

```
        busca(0);
```

```
    }
```

```
    ~n_reinas() { T.destruye(); }
```

```
    bool hay_solucion() { return (ns>0); }
```

```
};
```

Backtracking

Backtracking - optimització

```

algoritmo BackTracking(ent k:entero;
    entsal X:vector[1..n]de valor)
{Pre: X[1..k-1] es completable,
  cota(X,k-1)<CosteMejorSol}

para todo v en Ci hacer
    X[k]:=v;
    si (completable(X,k) ∧
        cota(X,k)<CosteMejorSol) entonces
        si Sol(X,k) entonces
            MejorSol:= X;
            CosteMejorSol:= Coste(X)
        fsi;
    si k<n entonces
        BackTracking(k+1,X)
    fsi;
fsi
fpara
  
```

Backtracking - iteratiu

```

algoritmo BackTracking()
variable P es pila de nodo;
CosteMejorSol:=∞
pvacia(P); apilar(P,<X,1>)
mientras ¬vacia(P) hacer
    <X,k>:=cima(P); desapilar(P);
    para todo v en Ci hacer
        X[k]:=v;
        si (completable(X,k) ∧
            cota(X,k)<CosteMejorSol) entonces
            si Sol(X,k) entonces
                MejorSol:= X;
                CosteMejorSol:= Coste(X)
            fsi;
            si k<n entonces
                apila(P,<X,k+1>)
            fsi;
        fpara
    fientras
devuelve (MejorSol, CosteMejorSol)
  
```

tipo nodo es tupla
 X: **vector**[1..n] de valor
 k: [1..n+1]
ftipo // X[1..k-1] es una
 asignación parcial

Ramificació i poda

- La ramificació i poda implementen l'algorisme de backtracking, però no a l'inversa
- L'objectiu de ramificació i poda consisteix en reduir l'espai de cerca, per això s'introdueixen **cotes**. Guardant informació sobre l'execució d'un algorisme podem fer ús d'aquestes cotes per **ramificar o podar**

Ramificació i poda

- Per a les cotes hem de guardar informació dels estats no explorats per retomar-les en el procés d'exploració
- Distingim 2 tipus de cotes: heurístiques i relaxacions:
 - → Heurístiques: reflexionem en el nostre problema
 - → Relaxacions: si hem de complir n variables, primer assegurem $k < n$ i després les restants

Ramificació i poda

- Exemple d'assignació de costos:
 - → Assignar un projecte a cada empresa minimitzant el cost total

| | A | B | C | D |
|---|----|----|----|----|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.

- → Inicialitzem una cota superior

$$a \rightarrow A, b \rightarrow B, c \rightarrow C, d \rightarrow D$$

$$z^* \leq 11 + 15 + 19 + 28 = 73$$

Ramificació i poda

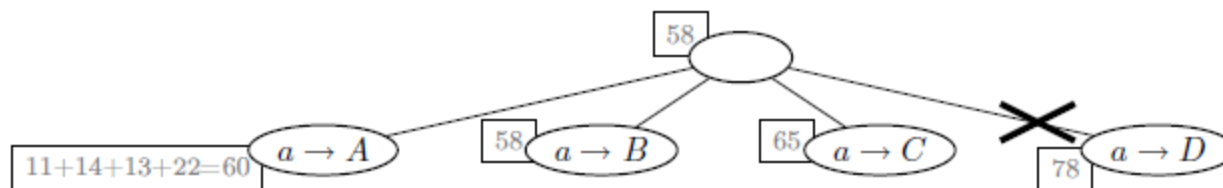
- Cota inferior: suma mínims de cada columna

$$z^* \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

| | A | B | C | D |
|---|----|----|----|----|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

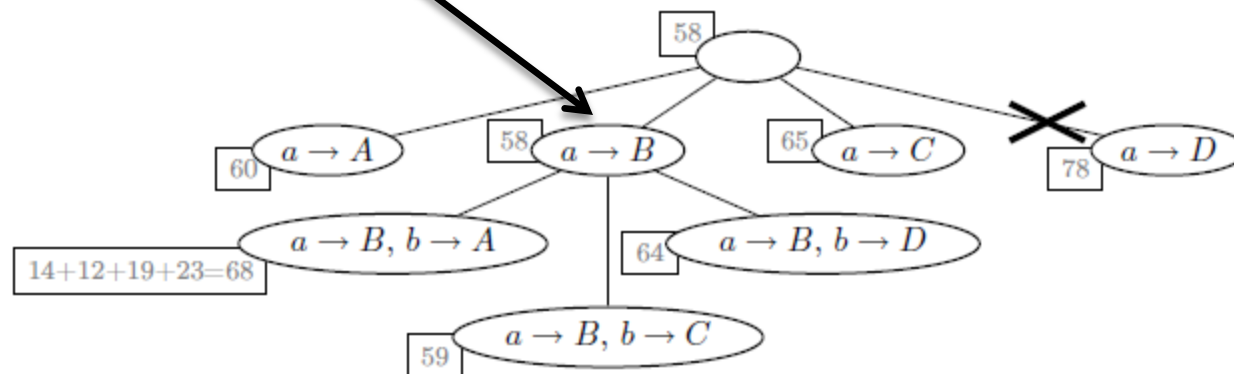
Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.

- Comencem la cerca: $58 \leq z^* \leq 73$.

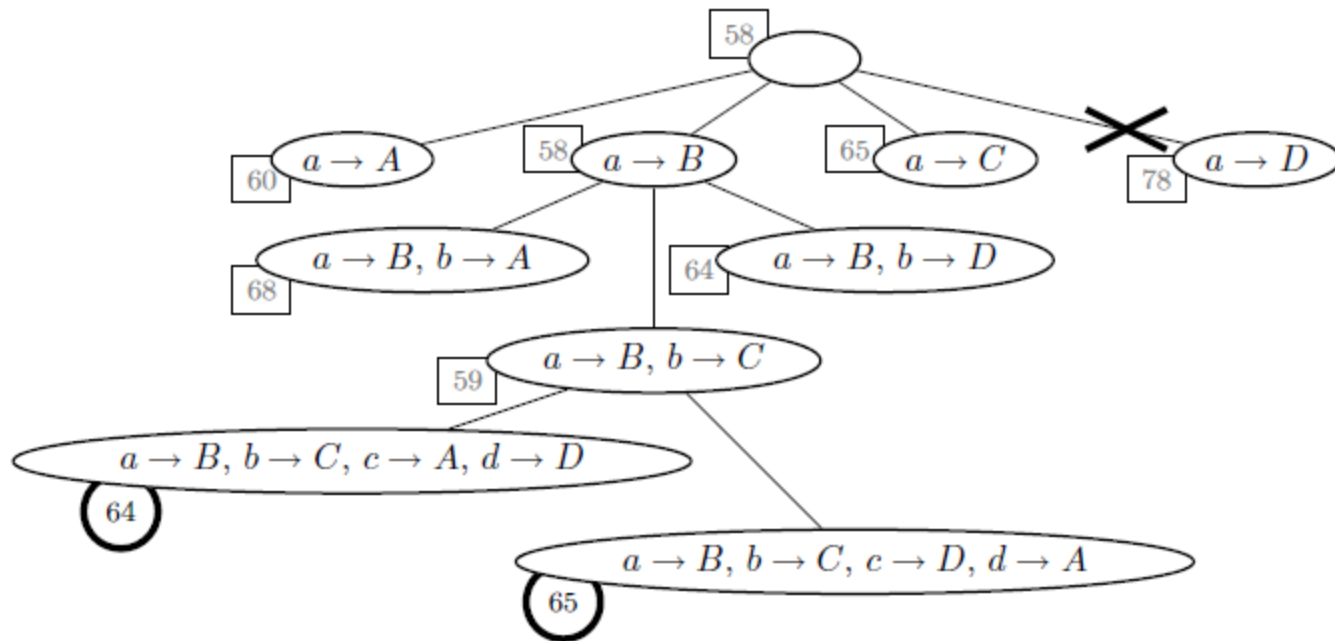


Ramificació i poda

- *Branching*: quina rama mereix la pena ser explorada?



Ramificació i poda

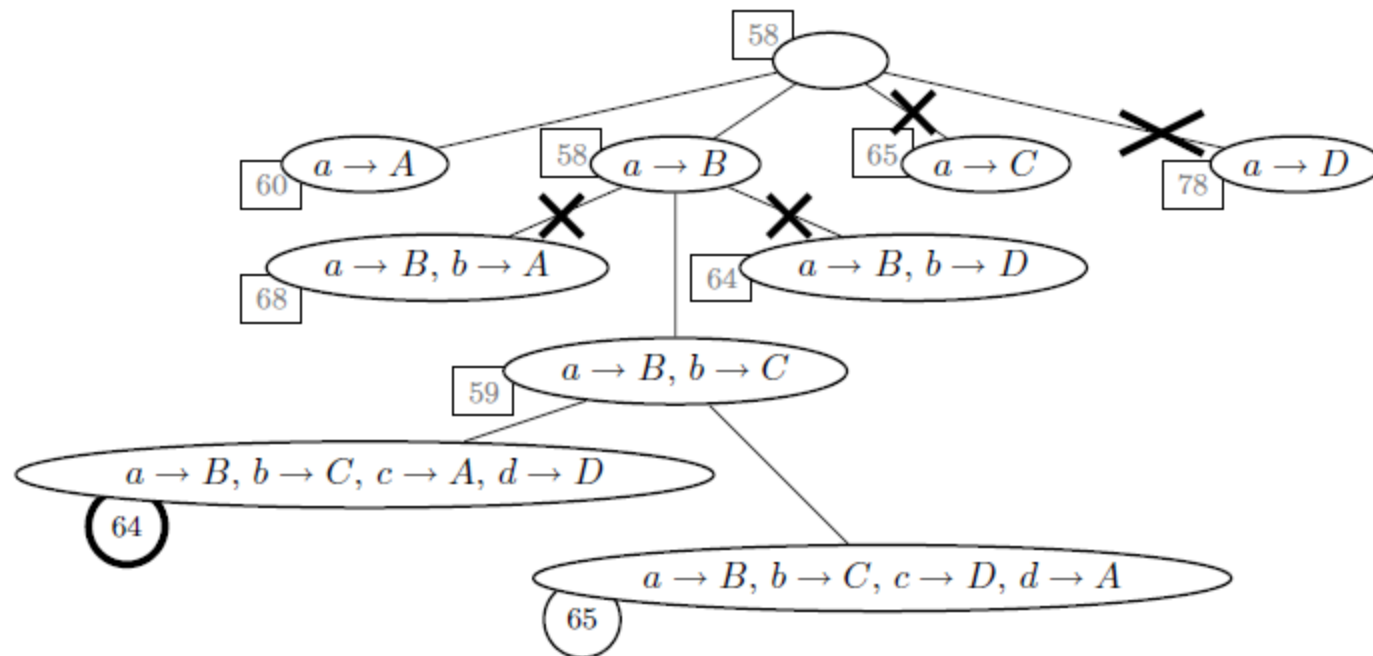


- Ja no és una cota, sinó un possible valor de la funció objectiu

$$58 \leq z^* \leq 64$$

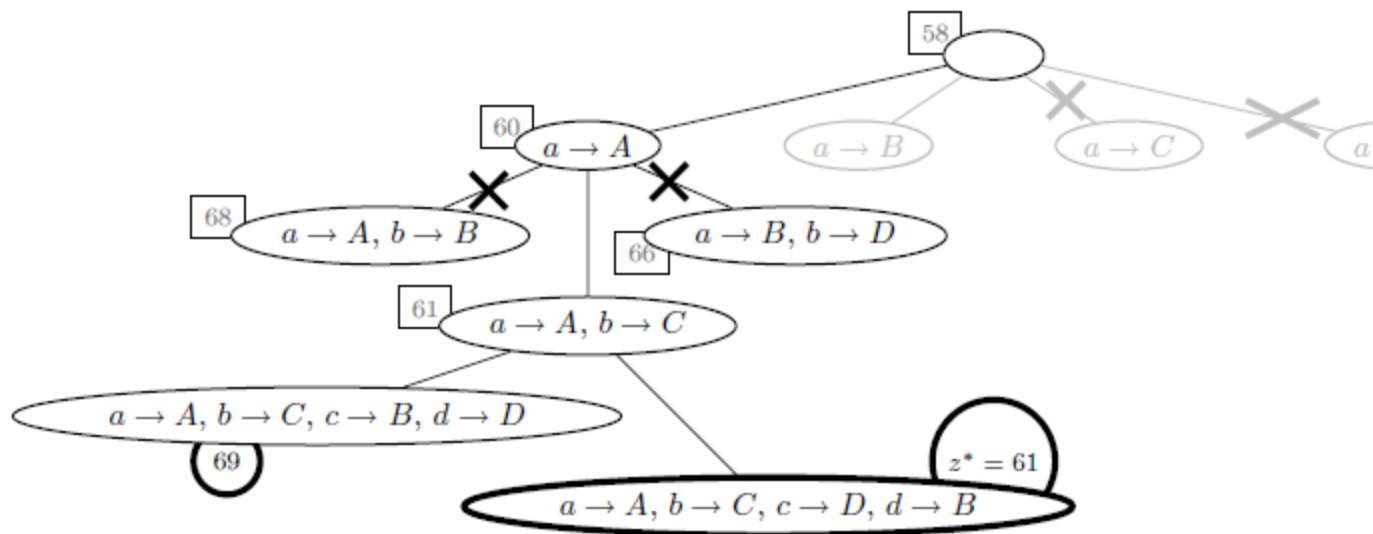
Ramificació i poda

$$58 \leq z^* \leq 64$$



Ramificació i poda

- Solució: 61



Ramificació i poda - Exercici

- Fes l'arbre de ramificació i poda de la següent taula (seguint el problema de l'exemple anterior). Numera els passos i actualitza els valors de les cotes.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|----|----|----|----|
| a | 1 | 13 | 3 | 18 | 2 |
| b | 3 | 5 | 9 | 20 | 6 |
| c | 5 | 10 | 2 | 17 | 5 |
| d | 7 | 2 | 10 | 21 | 10 |
| e | 9 | 10 | 15 | 16 | 4 |

Ramificació i poda - cua amb prioritats!

“Probabilitat”

algoritmo BranchAndBound()

variable C es cola_prioritaria de nodo;

CosteMejorSol := ∞

cvacia(C); encolar(C, <X, 1, pr(X, 1)>)

mientras \neg vacia(C) **hacer**

 <X, k> := primero(C); desencolar(C);

para todo v en C_i **hacer**

 X[k] := v;

si (completable(X, k) \wedge

 cota(X, k) < CosteMejorSol) **entonces**

si Sol(X, k) **entonces**

 MejorSol := X;

 CosteMejorSol := Coste(X)

fsi;

si k < n **entonces**

 encola(C, <X, k+1, pr(X, k+1)>)

fsi;

fsi

fpara

fmientras

devuelve (MejorSol, CosteMejorSol)

tipo nodo es tupla

X: **vector**[1..n] de valor

k: [1..n+1]

ftipo // X[1..k-1] es una asignación parcial

Ramificació i poda

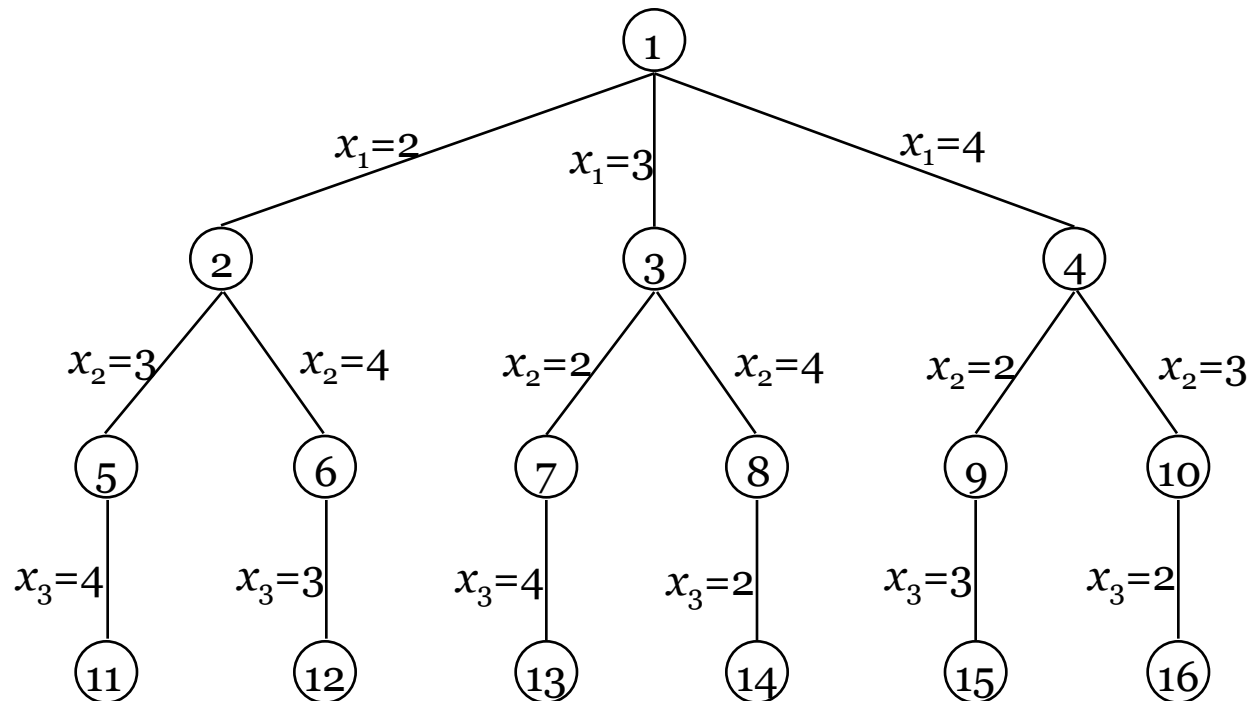
- La **clau**: funció de **prioritat i cota**
- Problema del viatjant de comerç
 - → Passar per tots els nodes minimitzant el cost de la ruta, passant només un cop per cada node i acabant en el node de sortida (circuit *hamiltonià*)

Ramificació i poda

- Formalització:
 - Sean $G=(V,A)$ un grafo orientado,
 $V=\{1,2,\dots,n\}$,
 $D[i,j]$ la longitud de $(i,j)\in A$,
 $D[i,j]=\infty$ si no existe el arco (i,j) .
 - El circuito buscado empieza en el vértice 1.
 - Candidatos:
 $E = \{ 1,X,1 \mid X \text{ es una permutación de } (2,3,\dots,n) \}$
 $|E| = (n-1)!$
 - Soluciones factibles:
 $E = \{ 1,X,1 \mid X = x_1,x_2,\dots,x_{n-1}, \text{ es una permutación de } (2,3,\dots,n) \text{ tal que } (i_j,i_{j+1})\in A, 0 < j < n, (1, x_1) \in A, (x_{n-1},1) \in A \}$
 - Funcion objetivo:
 $F(X)=D[1,x_1]+D[x_1, x_2] + D[x_2, x_3]+...+D[x_{n-2}, x_{n-1}]+D[x_n,1]$

Ramificació i poda

- Representació per $|V|=4$



Ramificació i poda

- Definición de una $cota(X,k)$ muy sencilla:
 - Suma de aristas ya escogidas
 - $cota(X,k) = D[1, X[1]] + \sum_{i=1..k-2} D[X[i], X[i+1]]$
- Ejemplo: (n=5)

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\
 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\
 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\
 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\
 16 & 4 & 7 & 16 & \infty
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Ramificació i poda

- Si se elige t como el mínimo de los elementos de la fila (columna) i -ésima y se resta t de todos los elementos de esa fila (columna), la fila resultante es **reducida**.
- La cantidad total L restada de filas y columnas es una cota inferior de la longitud de un hamiltoniano de longitud mínima

Reducción
de la matriz,
 $L = 25$.

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

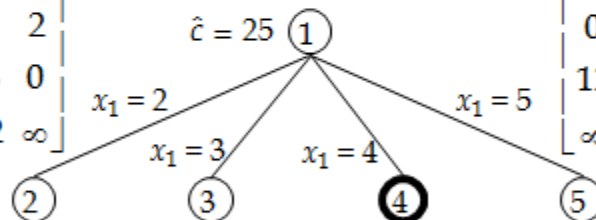
- Cálculo de la cota inferior para los nodos distintos de la raíz y de las hojas:
 - Sea A la matriz de distancias reducida para el nodo y .
 - Sea x un hijo de y que corresponda a incluir el arco (i,j) en el recorrido y que no sea hoja.
 - La matriz B reducida para x , y por tanto $cota(x)$, se calcula de la siguiente forma:
 1. Cambiar todos los elementos de la fila i y de la columna j de A por ∞ .
 - Esto evita el incluir más arcos que salgan de i o lleguen a j .
 2. Cambiar el elemento $(j,1)$ de A por ∞
 - Esto evita considerar el arco $(j,1)$.
 3. B es la matriz que se obtiene al reducir todas las filas y columnas de la matriz resultante (excepto aquéllas formadas sólo por “ ∞ ”).
 - Si r es el valor total restado en el paso (3): $cota(x) = cota(y) + D[i,j] + r$

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Grafo original.

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$
Matriz reducida, $L = 25$.

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$


$$\hat{c} = 25 + 10 = 35$$

$$\hat{c} = 25 + 17 + 11 = 53$$

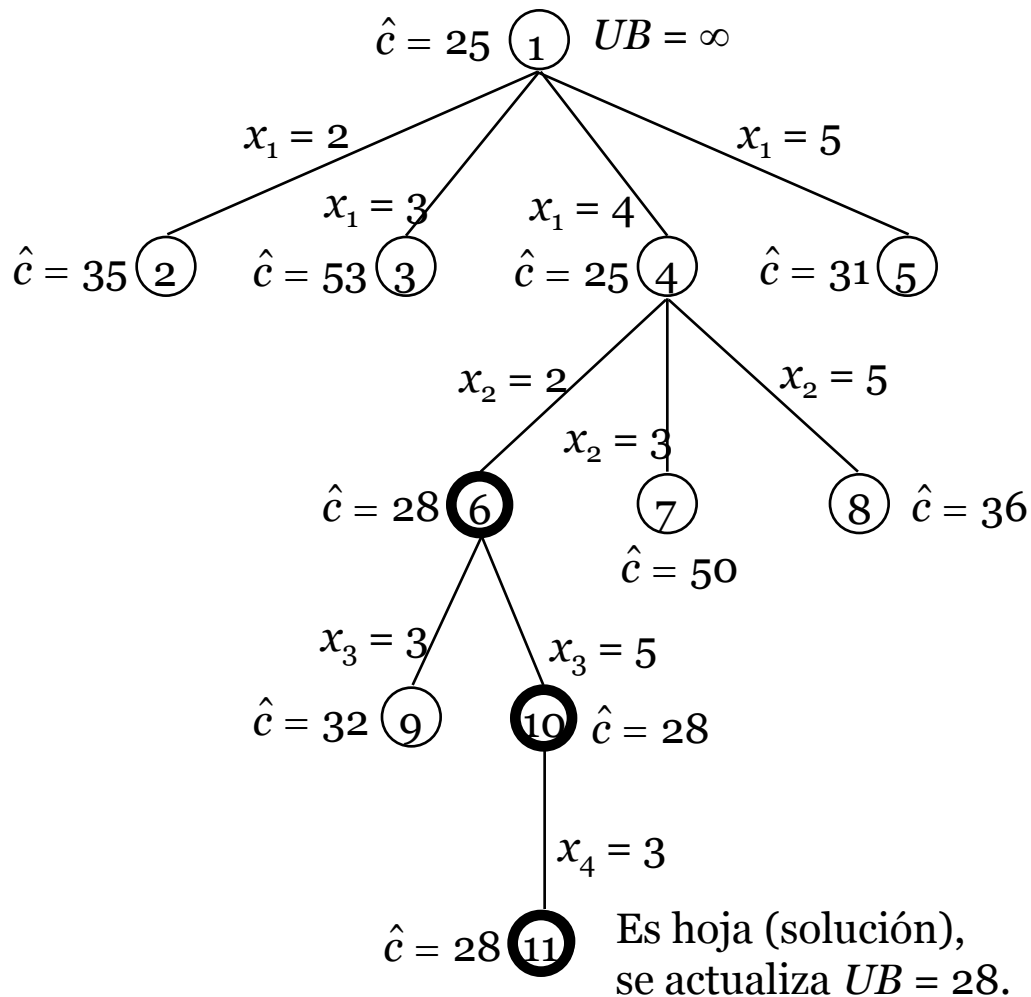
$$\hat{c} = 25$$

$$\hat{c} = 25 + 1 + 5 = 31$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda



El siguiente nodo en curso sería el 5, pero $cota(5) > UB$ luego el algoritmo termina y el hamiltoniano mínimo es 1,4,2,5,3,1.