Problemes d'Enrutament

Primera pràctica d'Algorísmia Avançada

- grafs -

Grau en Enginyeria Informàtica
Tardor 2013
Universitat de Barcelona

1 Problemes d'enrutament per arestes

Ara ja no tant, però fa temps, hi havia en les seccions de passatemps dels diaris un joc, que probablement de tant fàcil com era, hagi desaparegut. Es tracta de dibuixar una forma sense aixecar el llapis del paper ni passar dues vegades per la mateixa línia.

Un exemple clàssic en el qual no hi ha cap solució factible és el clique d'ordre quatre que es mostra en la Figura 1. Un clique és un graf complet, i s'indiquen amb el símbol $\mathbb{K}^n$ sent n el nombre de nodes, o sigui l'ordre del graf.

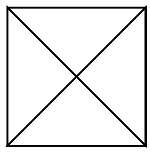


Figure 1: *Clique d'ordre 4,* $\mathbb{K}^4$.

Proveu-ho de la manera que volgueu, que no és possible dibuixar aquesta forma sense aixecar el llapis del paper, ni repassar cap línia. En canvi, afegint les dues arestes superiors, tal com es mostra a la Figura 2, la solució no és difícil de trobar.

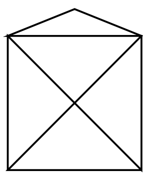


Figure 2: *Problema factible.*

Sembla ser que aquest problema, el de fer una figura sense aixecar el llapis del paper i sense passar dos cops per sobre la mateixa línia, va ser documentat per primer cop l'any 1736. S'ha fet conegut amb el títol dels set ponts de Köningsberg.

Qui va introduir el problema en el bagatge científic va ser Leonhard Euler. És important, perquè a partir d'aquest teorema s'origina tota la teoria de problemes d'enrutament en grafs. I de fet, actualment, la definició de graf eulerià es precisament aquesta, que es pugui recórrer completament sense repetir arestes.

Per entendre el que diu el teorema, cal saber què el *grau* d'un node en un graf és el nombre d'arestes que incideixen en el node, i s'indica amb la delta minúscula, $\delta(v)$. I també es diu que un node és *parell*, o *senar*, si el seu grau és parell, o senar.

El teorema d'Euler diu que tots els grafs del món tenen un nombre parell (incluint el zero) de nodes senars. Més rigorosament, el teorema diu que la suma de tots els graus de tots els nodes és dos cops el nombre d'arestes. En notació formal, donat el graf $G(V, E)$,

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

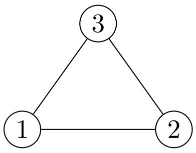
Aquest teorema, portat al problema actual, ens indica que en definitiva, és fàcil adonar-se'n de que per poder dibuixar una figura d'un sol traç, cal que el nombre de nodes senars sigui zero, o dos. Si és zero el traç pot començar i acabar en qualsevol node. Si és dos, el traç ha de començar en un i acabar en l'altre.

2 Enunciat

Fer un algorisme que ens mostri la seqüencia de nodes que representen el dibuix està fora de l'abast d'aquest exercici. Aquí només se us demana que donat un graf, si conté un cicle eulerià que recobreixi tots els nodes començant per 1, imprimeixi la seqüencia. I si no, que ens indiqui que per recorrer tots els nodes del graf cal repassar alguna aresta. Atenció, busquem un cicle que comenci en el node 1, no un recobriment qualsevol dels nodes.

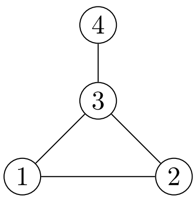
entrades i sortides

Seguidament es mostren tres exemples. A la primera columna hi ha el graf, a la segona el contingut del fitxer de text que el representa, i en la tercera, la sortida que hauria de donar l'exercici.

1.


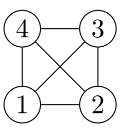
```
1 2 3
2 3
```

[1,2,3,1]

2.


```
1 2 3
2 3
3 4
```

```
cal repassar arestes.
```

3.


```
1 2 3 4
2 3 4
3 4
```

[1,2,3,4,1]