Algorísmica Avançada
Programació dinàmica

Sergio Escalera

Programació dinàmica

- La programació dinàmica ens permet resoldre una gran quantitat de problemes (més dels que hem vist fins ara)
- Això, com veurem, té un cost en la complexitat

Teorema de Optimalidad de Mitten

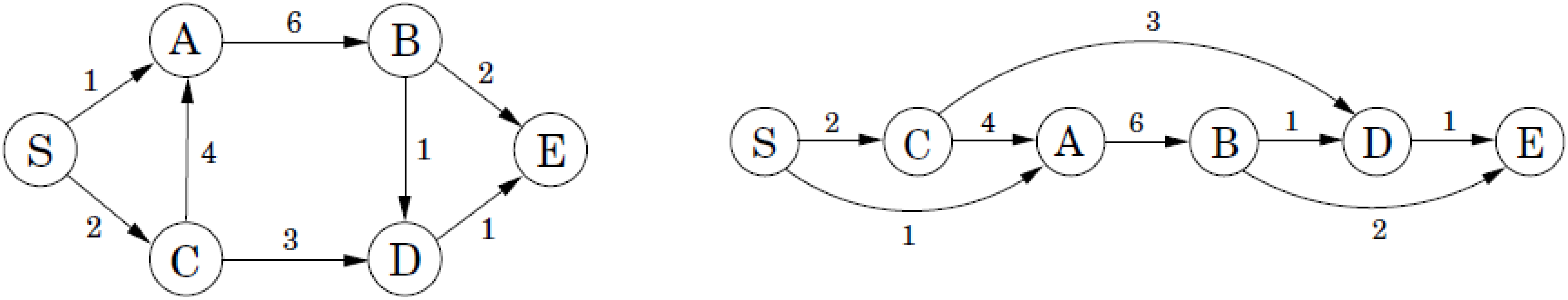
El objetivo básico en la programación dinámica consiste en 'descomponer" un problema de optimización en k variables a una serie de problemas con menor número de variables más fáciles de resolver.

La solución óptima obtenida se ajusta al **principio de optimalidad** establecido por R. Bellman en 1957.

> Una política óptima tiene la propiedad de que, cualquiera que sea el estado inicial y las decisiones iniciales, las restantes decisiones deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión

Programació dinàmica

- Relació amb la linearització de grafs



  - Distància més curta a D:

$$\texttt{dist}(D) = \min\{\texttt{dist}(B) + 1, \texttt{dist}(C) + 3\}$$

Programació dinàmica

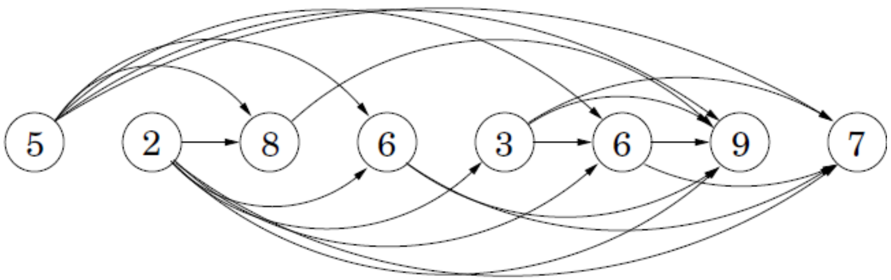
- Podem calcular la distància a tots els nodes en un pas:

```
initialize all dist(·) values to ∞
dist(s) = 0
for each v ∈ V\{s}, in linearized order:
    dist(v) = min_{(u,v)∈E}{dist(u) + l(u,v)}
```

- Solucionem un conjunt de subproblemes fins que arribem a una solució final: tècnica molt general!!
- **Tenim una funció sobre els nodes anteriors per actualitzar una resposta al node actual:**
  - → Aquesta funció podria ser qualsevol! (i.e. Màxim en lloc de mínim)

Programació dinàmica

- Per obtenir una representació de programació dinàmica, suposem que el graf disposa de totes les connexions entre un node i els seus predecessors:



- Exemple: trobar el camí de longitud màxima

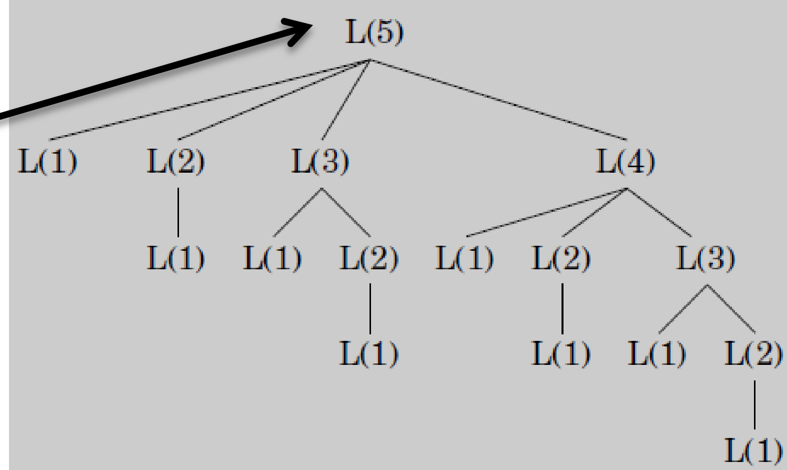
for $j = 1, 2, \ldots, n$:
$\quad L(j) = 1 + \max\{L(i) : (i,j) \in E\}$
return $\max_j L(j)$

Programació dinàmica

- Complexitat: llista adjacència (en temps lineal)
  - Càlcul de relacions entre els subproblemes: **O(n²)**
  - Simple i eficient

$$L(j) = 1 + \max\{L(1), L(2), \ldots, L(j-1)\}.$$

recursion for $L(5)$



En aquest cas la recursivitat no seria eficient: exponencial, es recalculen solucions prèviament estimades (en enumeratius: ramificació i poda ho solucionarem).

Programació dinàmica

- Aplicació: distància d'edició

SNOWY SUNNY

S	–	N	O	W	Y
S	U	N	N	–	Y

Cost: 3

–	S	N	O	W	–	Y
S	U	N	–	–	N	Y

Cost: 5

- Tenim inserció, eliminació i substitució
- Hi ha moltes combinacions!!!
- Donem una solució amb programació dinàmica

Programació dinàmica

- Taula de subproblemes

$$
\begin{array}{l}
\texttt{for } i = 0, 1, 2, \ldots, m\texttt{:} \\
\quad E(i,0) = i \\
\texttt{for } j = 1, 2, \ldots, n\texttt{:} \\
\quad E(0,j) = j \\
\texttt{for } i = 1, 2, \ldots, m\texttt{:} \\
\quad \texttt{for } j = 1, 2, \ldots, n\texttt{:} \\
\quad\quad E(i,j) = \min\{E(i-1,j)+1, E(i,j-1)+1, E(i-1,j-1)+\texttt{diff}(i,j)\} \\
\texttt{return } E(m,n)
\end{array}
$$

Depenen de l'objectiu del problema

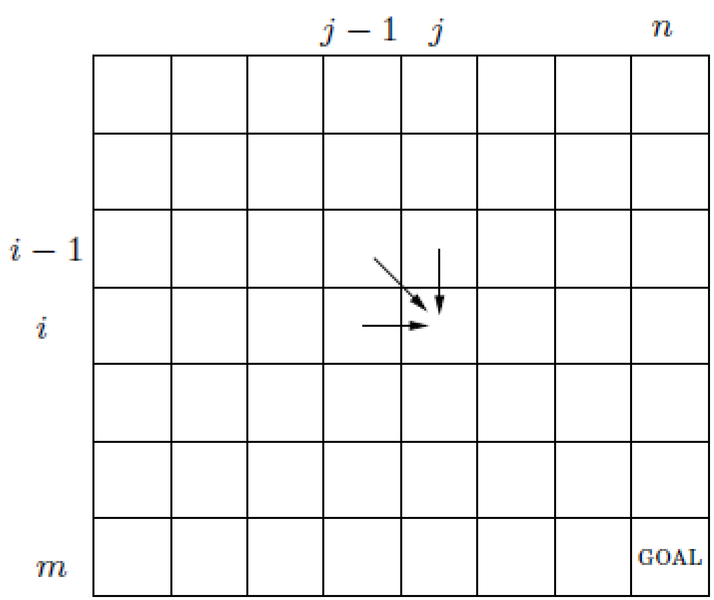
E	X	P	O	N	E	N	–	T	I	A	L
–	–	P	O	L	Y	N	O	M	I	A	L

$O(mn)$

Programació dinàmica

- Taula de subproblemes

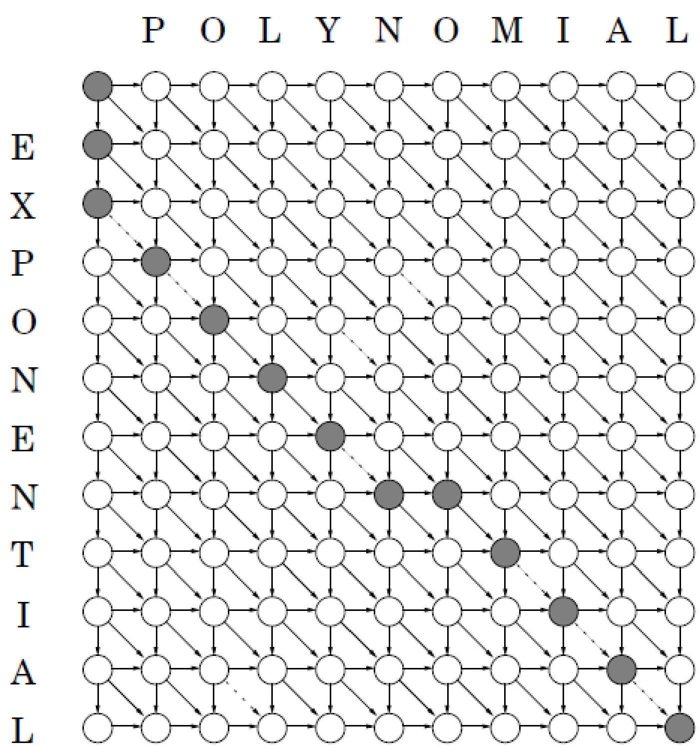
$$E(i,j) = \min\{E(i-1,j)+1, E(i,j-1)+1, E(i-1,j-1)+\texttt{diff}(i,j)\}$$



		P	O	L	Y	N	O	M	I	A	L
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	3	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10
O	4	3	2	3	4	5	5	6	7	8	9
N	5	4	3	3	4	4	5	6	7	8	9
E	6	5	4	4	4	5	5	6	7	8	9
N	7	6	5	5	5	4	5	6	7	8	9
T	8	7	6	6	6	5	5	6	7	8	9
I	9	8	7	7	7	6	6	6	6	7	8
A	10	9	8	8	8	7	7	7	7	6	7
L	11	10	9	8	9	8	8	8	8	7	6

Programació dinàmica

- Taula de subproblemes



E	X	P	O	N	E	N	—	T	I	A	L
—	—	P	O	L	Y	N	O	M	I	A	L

Hi han diferents camins amb el mateix cost associat

Els camins varien segons fixem costos diferents a diferents operacions de inserció, eliminació i substitució

Programació dinàmica

- Exercici

$$
\begin{array}{l}
\texttt{for } i = 0, 1, 2, \ldots, m\texttt{:} \\
\quad E(i, 0) = 2i \\
\texttt{for } j = 1, 2, \ldots, n\texttt{:} \\
\quad E(0, j) = j \\
\texttt{for } i = 1, 2, \ldots, m\texttt{:} \\
\quad \texttt{for } j = 1, 2, \ldots, n\texttt{:} \\
\quad\quad E(i, j) = \min\{E(i-1, j) + 2, E(i, j-1) + 1, E(i-1, j-1) + \texttt{diff}(i, j)\} \\
\texttt{return } E(m, n)
\end{array}
$$

Associar la paraula ALGORISMICA amb la paraula AVANÇADA fent ús d'aquesta inicialització i funció de programació dinàmica

Programació dinàmica

- Exercici

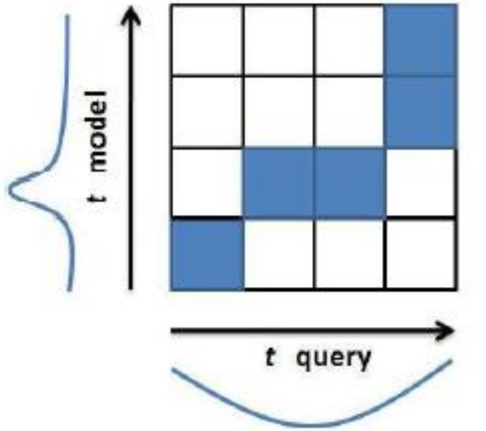
		A	L	G	O	R	I	S	M	I	C	A
	0	1										
A	2	0										
V												
A												
N												
Ç												
A												
D												
A												

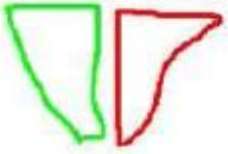
Programació dinàmica

- Dynamic Time Warping
  - El temps és dinàmic per definició
  - Es poden definir subproblemes temporals per resoldre problemes temporals més grans
    - → Un altre cop tenim la programació dinàmica!!
- Veiem el problema de reconeixement de gestos i accions

Programació dinàmica

- Valors espai-temporals de la matriu de programació dinàmica





Programació dinàmica

- DTW (Wikipedia) → ja ho hem vist abans no?

```
int DTWDistance(char s[1..n], char t[1..m]) {
    declare int DTW[0..n, 0..m]
    declare int i, j, cost

    for i := 1 to m
        DTW[0, i] := infinity
    for i := 1 to n
        DTW[i, 0] := infinity
    DTW[0, 0] := 0

    for i := 1 to n
        for j := 1 to m
            cost:= d(s[i], t[j])
            DTW[i, j] := cost + minimum(DTW[i-1, j  ],    // insertion
                                        DTW[i  , j-1],    // deletion
                                        DTW[i-1, j-1])    // match

    return DTW[n, m]
}
```

Programació dinàmica

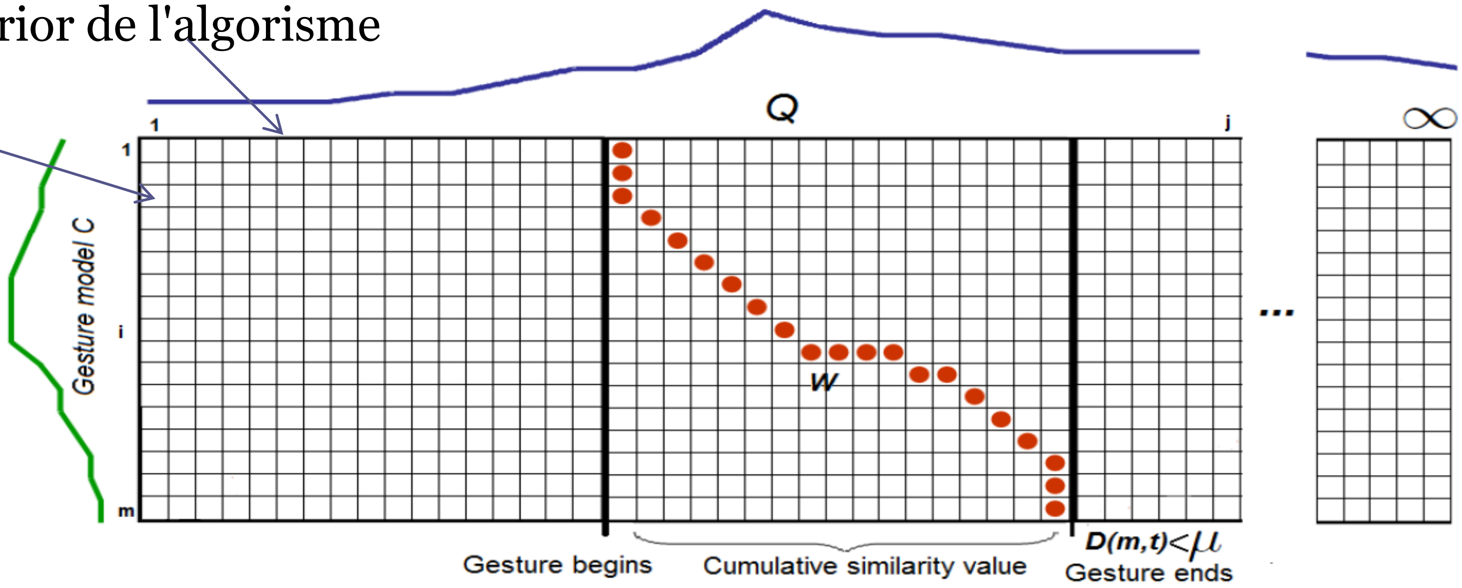
- Resultat – seqüència discreta, trajectòries 2D

Programació dinàmica

- DTW Detecció de patrons en seqüències més llargues

Inicialitzem la primera fila a 0! Únic canvi respecte la versió anterior de l'algorisme

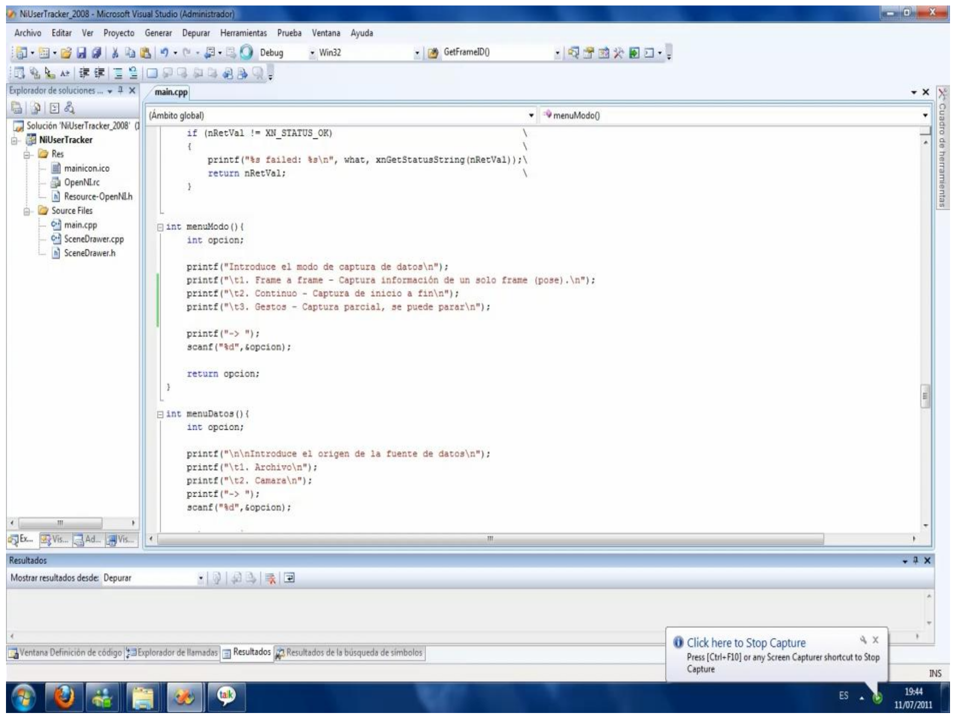
Inf



A cada nou instant de temps tenim diferents hipòtesis: possibilitat de néixer primera posició d'un patró temporal (cost mínim amunt) o que estiguem a mig d'un patró (la distància mínima ve propagada de posicions anteriors)

Programació dinàmica

- Resultat – seqüència infinita, trajectòries 3D



Programació dinàmica

- Exercicis
- Tenim una trajectòria definida per vectors binaris amb múltiples candidats:

1 1 1 0 0 1   0 1

0 0 1

1 1 1

Volem fer la correspondència amb el patró

1 1 1 1 0 0 0 1 fent servir DTW i distància de Hamming (número de bits diferents)

$$\gamma(i,j,k) = d(i,j,k) + \min\{\gamma((i-1,j-1),(i-1,j),(i,j-1) \times \{1,..,K\})\}$$

→ Fes la taula de programació dinàmica i mostra el cost i el "working path"

$$\gamma(i,j,k) = d(i,j,k)+\min\{\gamma((i-1,j-1),(i-1,j),(i,j-1)\times\{1,..,K\})\}$$

Programació dinàmica

1 1 1 00 1 0 1

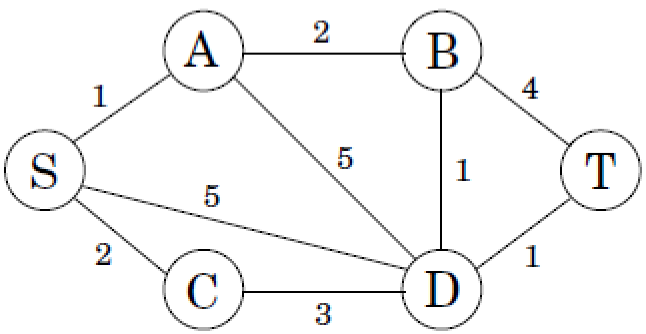
0 0 1

1 1 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
1	2									
1	3									
1	4									
0	5									
0	6									
0	7									
1	8									

Programació dinàmica

- Camins curts: compliquem el problema!
- Volem camí de cost reduït però passant per poques arestes → Dijkstra no guarda aquesta informació!



$i \leq k$, $\mathtt{dist}(v,i)$ Distància del camí més curt de s a v que pasa per i nodes

$$\mathtt{dist}(v,i) = \min_{(u,v)\in E}\{\mathtt{dist}(u,i-1) + \ell(u,v)\}$$

Programació dinàmica

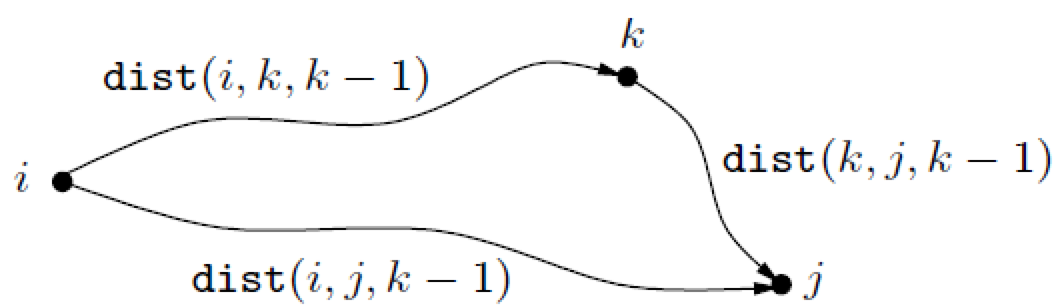
- I com podem guardar la informació dels camins mínims entre totes les parelles possibles de nodes?
- Si fem ús dels algorismes dels temes anteriors per totes les possibles parelles tenim una complexitat $O(|V|^2|E|)$
- Normalment |E|>>|V|
- Si guardem informació de subproblemes podem aconseguir una complexitat $O(|V|^3)$

Programació dinàmica

- Floyd-Warshall
  - Fem ús d'una matriu tridimensional, on

$$\texttt{dist}(i,j,k) \quad \{1,2,\ldots,k\}$$

és la distància del camí més curt entre *i* i *j* tenint en compte només els nodes 1,...*k*



$$\texttt{dist}(i,k,k-1)+\texttt{dist}(k,j,k-1) \; < \; \texttt{dist}(i,j,k-1),$$

Programació dinàmica

- Floyd-Warshall

```
for i = 1 to n:
    for j = 1 to n:
        dist(i, j, 0) = ∞
for all (i, j) ∈ E:
    dist(i, j, 0) = ℓ(i, j)
for k = 1 to n:
    for i = 1 to n:
        for j = 1 to n:
            dist(i, j, k) = min{dist(i, k, k − 1) + dist(k, j, k − 1),  dist(i, j, k − 1)}
```