Algorísmica Avançada
Algorismes sobre grafs III

Sergio Escalera

Flujo Máximo

- Imaginemos algún flujo que va desde un sitio ***s***, donde es producido, hasta un sitio ***t*** donde es consumido a la misma tasa de producción.
- Intuitivamente, el flujo en cualquier punto de la red es la tasa a la que se mueve el material.
- Usos: modelado de flujo en tuberías, líneas de ensamblado, corrientes eléctricas, información en redes de comunicación, optimización sobre datos matriciales, etc.
- Intuitivamente modelable con grafos.

Flujo Máximo

- Cada arco dirigido puede ser visto como un conducto por donde pasa el material, según las siguientes restricciones:
  - Cada conducto tiene una capacidad máxima finita (**>=0**).
  - Se cumple la conservación de flujo. $\boldsymbol{\Sigma f_{input} = \Sigma f_{output}}$ (por nodo).

Problema del Flujo Máximo:

¿Cuál es la mayor tasa a la que se puede llevar material sin violar ninguna restricción?

Redes de Flujo

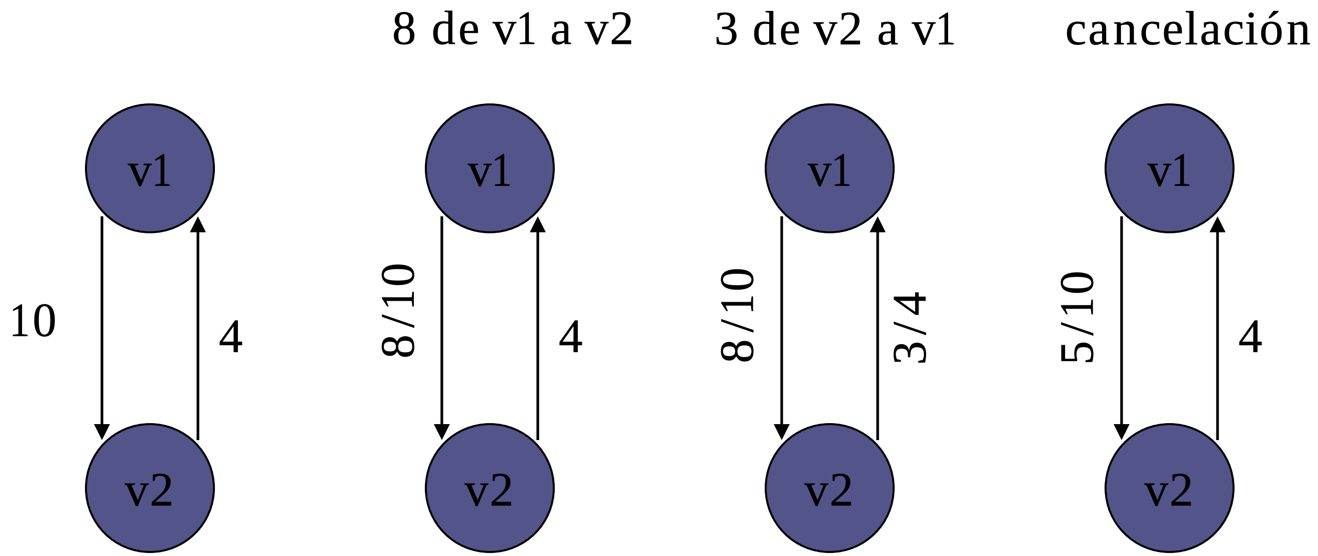
- Una red de flujo $G=(V,E)$ es un grafo dirigido tal que cada arco $(u,v) \in E$ posee una capacidad $c(u,v) \geq 0$. Si $(u,v) \notin E$, $c(u,v)=0$.
  - Se distinguen 2 vértices, el fuente "***s***" y el destino "***t***". Cada vértice $\boldsymbol{v \in V}$ está en algún ***s~>v~>t***.
  - El grafo es conexo $\Rightarrow |\boldsymbol{E}| \geq |\boldsymbol{V}|\boldsymbol{-1}$

    → *Sino algunos elementos no participarán en el transporte del flujo de **s** a **t***
- El flujo está dado por una función con imagen en los reales. $f: VxV \rightarrow R$ que satisface:
  - Restricción de capacidad: $\forall u,v \in V,\ f(u,v) \leq c(u,v)$.

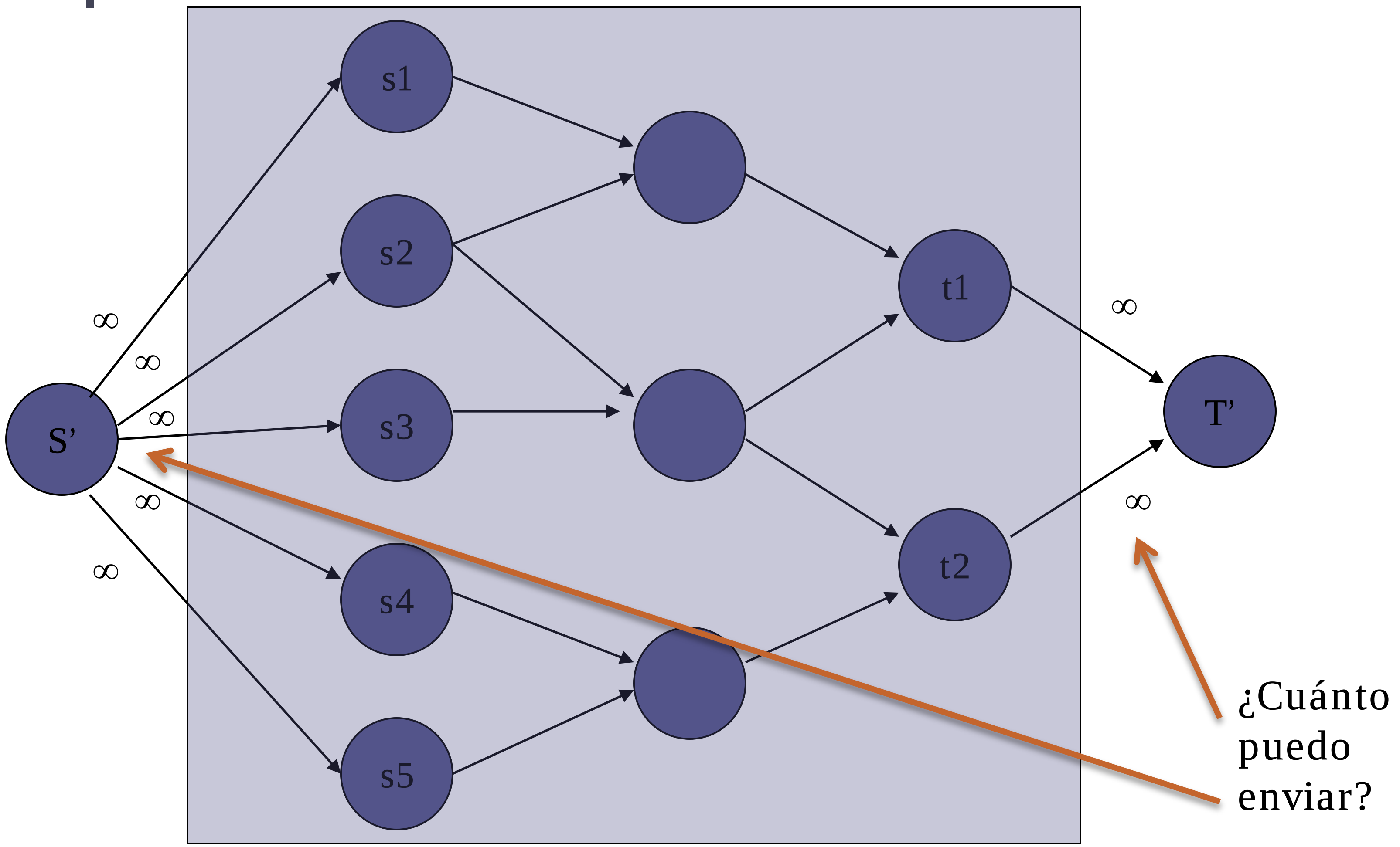
    → *El flujo máximo que puede pasar por una conexión está limitado por la capacidad de la conexión*
  - Simetría distorsionada: $\forall u,v \in V,\ f(u,v)=-f(v,u)$.

    → *El flujo es direccional*

Relación entre 2 nodos



Redes de múltiples entradas y múltiples salidas



Método Ford-Fulkerson

- El método iterativo depende de tres ideas importantes:
  - **Red residual**
  - **Aumento de camino**
  - **Cortes**

Para ello usaremos el teorema:

max-flow/min-cut que caracteriza el flujo máximo en términos de cortes de la red de flujo.

Teorema max-flow min-cut

Teorema: El máximo valor de entre todos los flujos que llegan a ***t*** en una red es igual a la *capacidad mínima* de entre todos los cortes que dividen la red.

Prueba: Es suficiente con mostrar un flujo y un corte tal que sean iguales en valor. Luego, el flujo ha de ser máximo pues no puede rebasar la capacidad del corte y el corte ha de ser mínimo porque ninguna otra capacidad puede ser menor que el valor actual del flujo.

Objetivo: Saturar la red para satisfacer el teorema!!!

Iteración

- **En cada iteración se va consiguiendo un valor de flujo que aumenta el camino, es decir, podemos aumentar el flujo en un camino de *s* a *t*. Este proceso se repite hasta que no haya más posibilidad de aumentar.**

FORD-FULKERSON-METHOD(*G*,*s*,*t*)
1 Inicializar el flujo de toda conexión a 0
2 Mientras exista un camino de acceso por flujo ***p*** de ***s*** a ***t*** (*path*)
3 Aumentar el flujo f encontrado a través de todo el camino ***p***
4 *return f*.

Red Residual

La red residual consiste en arcos que admiten más flujo. Dada una red de flujo $G=(V,E)$ con fuente ***s*** y destino ***t***. Sea f el flujo en G, y considere un par de vértices $u,v \in V$, la cantidad de flujo adicional que se puede verter sobre u,v es la **capacidad residual**.

$c_f(u,v) = c(u,v) – f(u,v)$

Ejemplo:

$c(u,v)=16$, $f(u,v)=10 \Rightarrow c_f(u,v)=6$

Capacidad residual conexión (u,v) en paso 1

Capacidad residual conexión (u,v) en paso 2

Aumento de Caminos

Dada una red de flujo $G=(V,E)$, un camino aumentado p es un camino simple de s a t en la red residual G_f. Este camino sólo admite flujo positivo.

La cantidad máxima de flujo que puede llevarse por los arcos en un aumento de p se denomina **capacidad residual** de p, y está dado por:

$c_f(p) = \min \{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$

Corte de la red de flujo

- El método aumenta repetidamente el flujo a través de los caminos de aumento *p* hasta alcanzar el máximo.

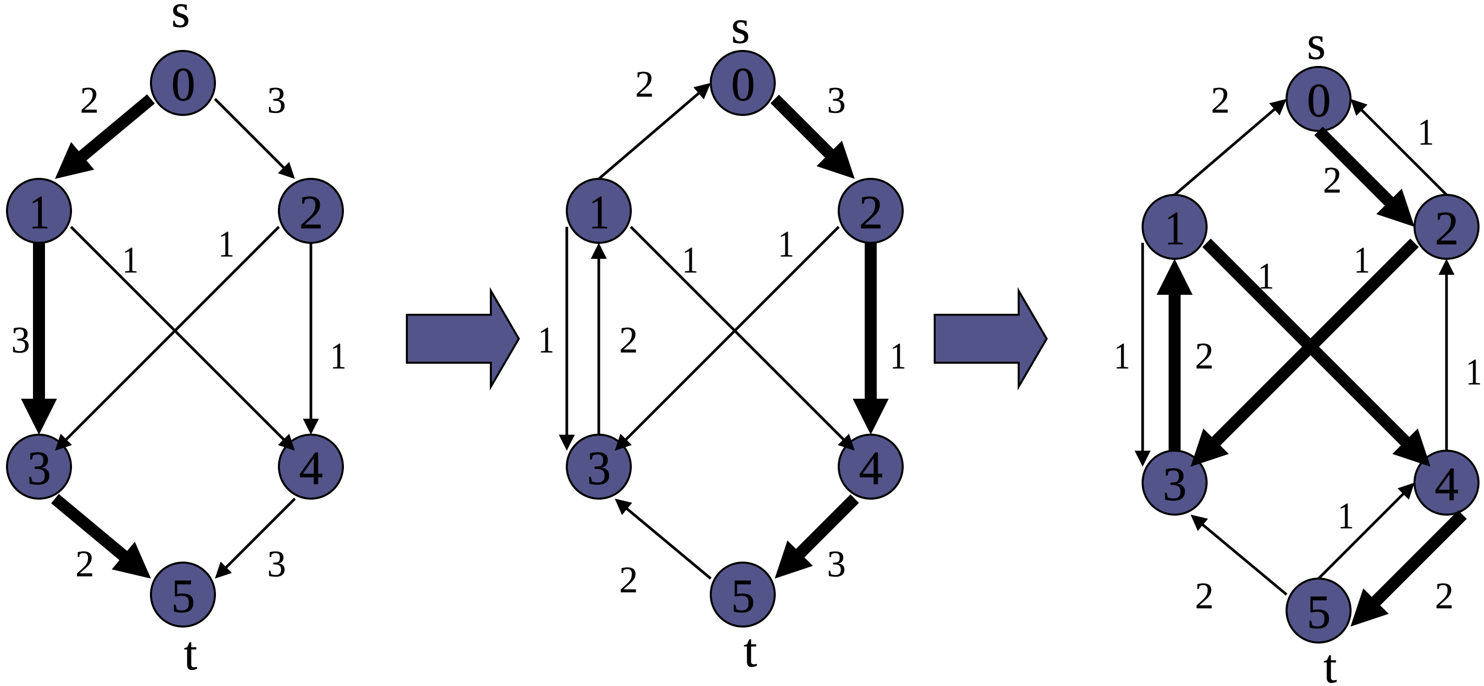
- Un corte (S,T) de la red de flujo $G=(V,E)$ es una partición de V en S y $T=V-S$ tal que $s \in S$ y $t \in T$. Si f es el flujo, entonces **el flujo de red a través del corte (S,T) se define $f(S,T)$. La capacidad del corte (S,T) es $C(S,T)$.**

Algoritmo de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G,s,t)

for cada arista (u,v) $\in$ E[G]
do f[u,v]$\leftarrow$0 , c_f(u,v)=c(u,v)
f[v,u]$\leftarrow$0 , c_f(v,u)=c(v,u)
while existe camino *p* de *s* a *t* en la red residual G_f
do $c_f(p)$=min {c_f(u,v) : (u,v)$\in p$}
for cada arista (u,v) en *p*
do f[u,v] $\leftarrow$ f[u,v] + c_f(p)
f[v,u] $\leftarrow$ -f[u,v]
c_f(u,v)=c_f(u,v)-c_f(p)
c_f(v,u)=c_f(v,u)+c_f(p)

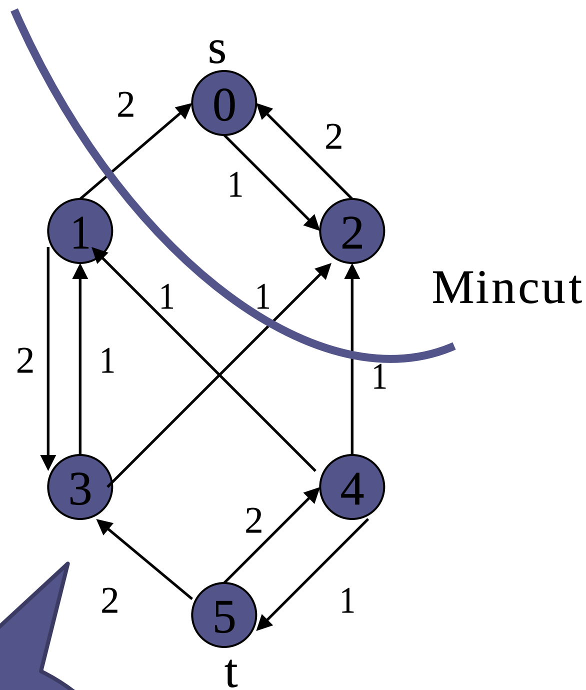
Ejemplo



Cmin = 2 Cmin = 1 Cmin = 1

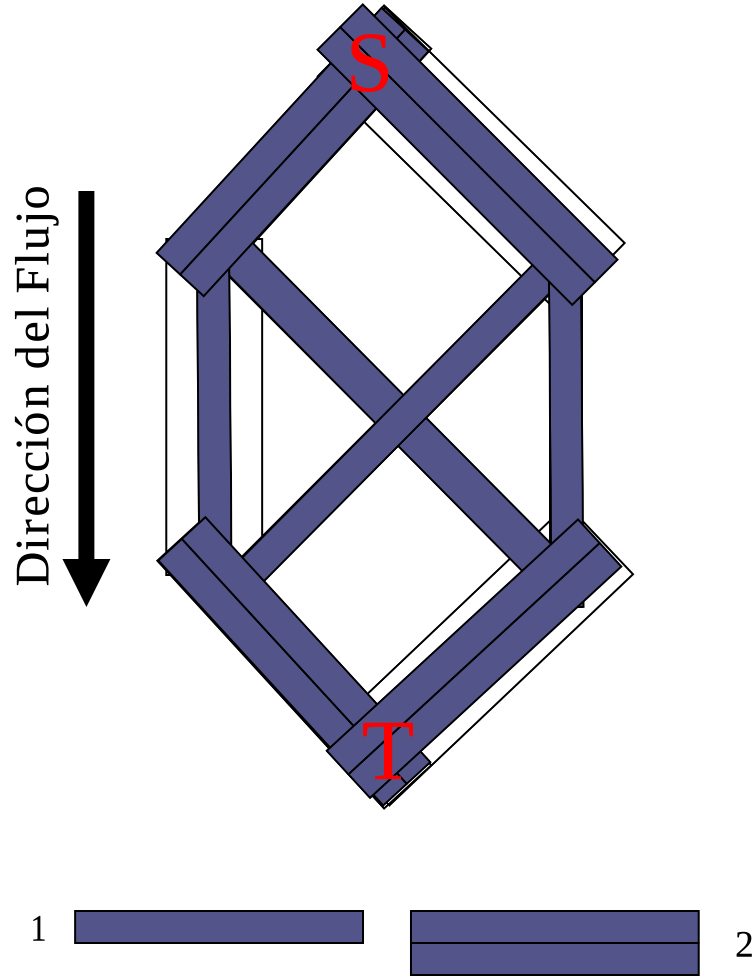
p.e. usando BFS

Ejemplo



Maxflow
es 2+2=4

Flujo Máximo



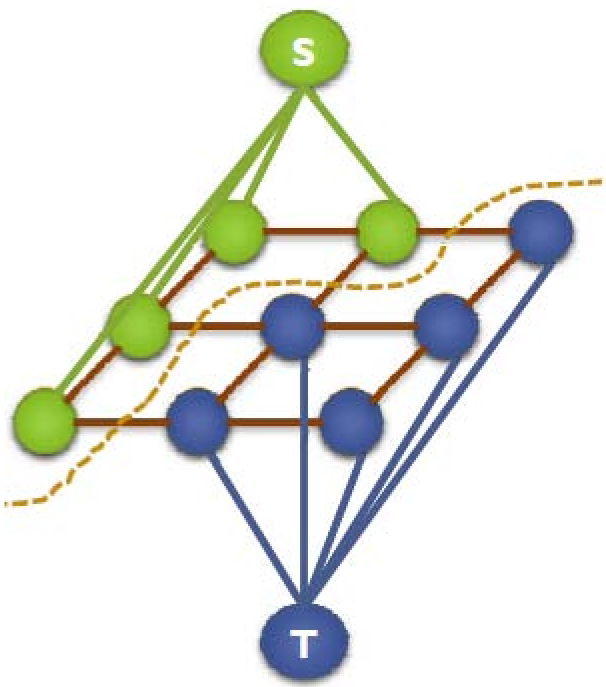
Aplicaciones

- Segmentación de imágenes – Dijkstra

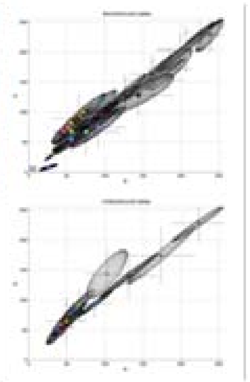
Las regiones homogéneas del grafo-matriz son las primeras visitadas en el recorrido con Dijkstra

Aplicaciones

- Segmentación de imágenes – Ford-Fullkerson

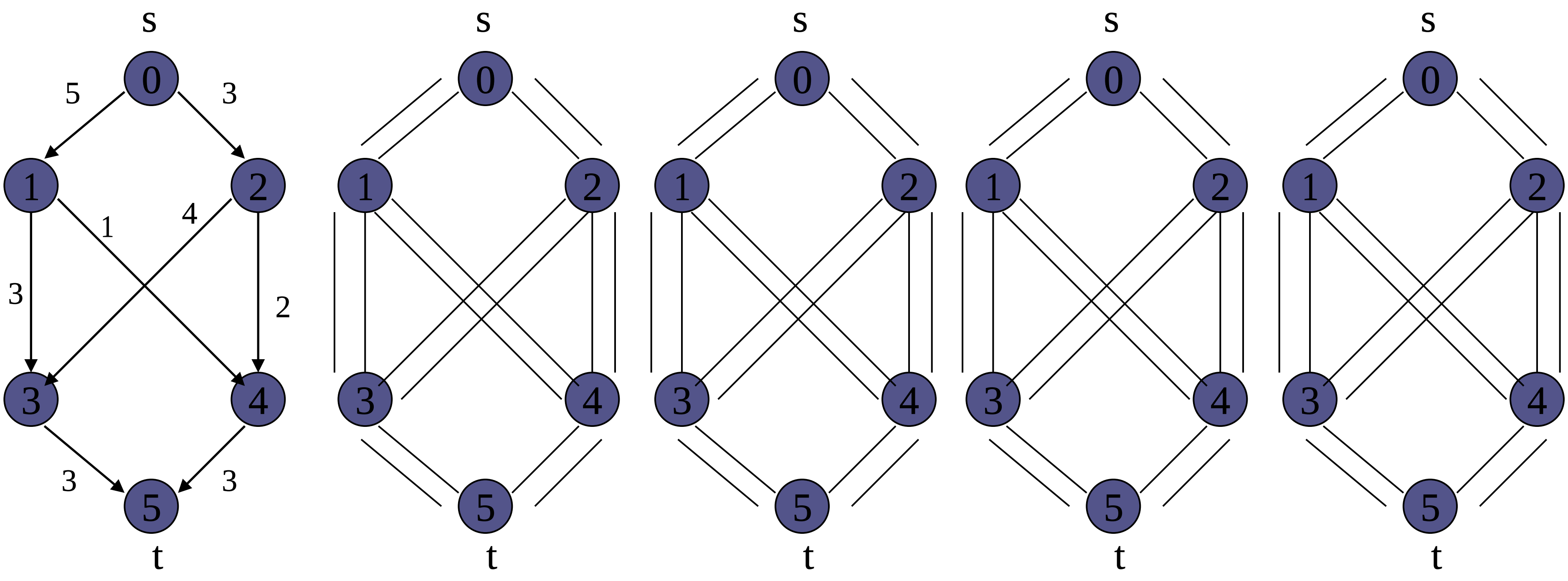


"Graph Cut"
-Imagen como un grafo
-Los costes son probabilidades de pertenecer a uno de dos posibles grupos
-La saturación define la segmentación aplicando Ford-Fulkerson



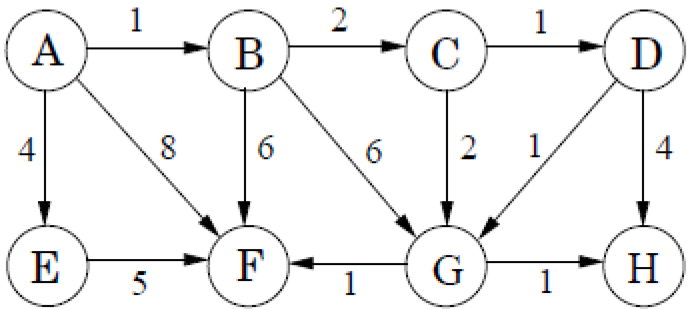
Algorismes sobre grafs

- Exercici
- Aplica Ford-Fullkerson



Algorismes sobre grafs

- Exercici
- Començant a A: dibuixa la taula de distàncies immediates a tots els nodes a cada iteració.
- Mostra l'arbre de camins mínims



Algorismes sobre grafs

- Exercici: el mateix amb Bellman-Ford