Algebre Lineaire

- Numero: 1
- Prof: Regragui Mohamed
- Date: 6 Octobre 2017

Programme

- Algebre Lineaire
  - Reduction des matrices carrees
    - Rappels des notations
    - Trigonalisation
    - Normes matricielles
    - Diagonalisation
  - Resolution numerique des systemes lineaire (`Ax=b`)
    - Methodes directes
      - Algo de *Gauss*
      - Algo de *Cholesky*
    - Methodes iteratives (`A=M-N`, Pour des systemes tres grand)
      - Algo de Jocohi
      - Algo de Gauss Seidel
      - Algo de relaxation successive

Application (Systemes differentiels)

$\frac{dX}{dt} = AX$

Besoin de diagonaliser A.

Reduction des matrices carrees

Rappels des notations

Soit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices a `m` lignes et `n` colonnes a coefficients dans $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrees.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

La **transposee** de A: $A = (a_{ji})$ (On inverse les coordonnees).

La matrice **adjointe** de A: $A^* = {}^t\bar{A}$

C'est la matrice **transposee** de la matrice **conjuguee** de M. M qui est a coefficients **complexes**.

On note donc $(a^*_{ij}) = \bar{a}_{ji}$

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

C'est une forme bilineaire symetrique definie positive ($(X, Y) \geq 0$).

$X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, le **produit scalaire** Formule:

$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \times x_i$

Produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$.

$X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, le **produit scalaire**

Formule: $(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} y^*_i \times x_i$

(Rappel y^*_i est l'adjoint)

C'est une forme **sesquilineaire**.

$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
$(ax, y) = a(x, z)$

Si $a \in \mathbb{C}$: $(x, ay) = (au)^*.x = \sum_{i=1}^{n} a^* \times y^*_i \times x_i = \ldots$

Formule: $(A.B)^T = B^T.A^T$ Formule: $(A.B)^* = B^*.A^*$

Definitions

Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$ **Matrice orthogonale** ssi:

$Q^T.Q = I$, I est la matrice **identite**.

- Rq: Une matrice orthogonale conserve la norme: Si on prend un vecteur de Q alors

$$\|Qx\| = \|x\|$$
$$\implies \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ **hermitienne** ssi $A* = A$ dans les Reel cela signifie **symetrique**

- Exemple: Soit $u \in \mathbb{C}^n$ (non nul et unitaire), $unitaire \iff \|u\| = 1$ et on pose $H = I_n - 2uu*$ H est une matrice **hermitienne** et unitaire (matrice d'Hauseholder)

Theoreme (Schur)

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exists u$ unitaire tq
$u * Au = T$ (matrice triangulaire superieur)

Les elements diagonaux de T sont les **valeurs propres** de la matrice (λ_i). Chaque **valeur propre** a un **vecteur propre** associe.

$A.v_i = \lambda_i.v_i$

L'ensemble des valeurs propre de A est le **spectre** de A.

- Def: le **rayon spectral** de A est le max de (λ_i).

Ex1:

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q})$

Montrer que A est **hermitienne** $\iff$ $\exists$ u unitaire tq $u * Au = D =$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
Supposons A hermitienne $A^* = A$
$A \in M_n(\mathbb{C}), \exists u \in M_n(\mathbb{C})$ (unitaire)

$u * Au = T$ (T triangulaire superieur)

$t_i i = \lambda_i$ ($lambda_i$ appartien au spectre de A)

$T^* = (u * Au)* = u * A * (u*)* = u * Au = TT^* = T$ (T^* est triangulaire inferieur)

Donc T est **diagonale**. Et les valeurs propres sont reel. On peut demontrer la reciproque.