Algebre Lineaire

- Numero: 2
- Prof: Regragui Mohamed
- Date: 13 Octobre 2017

Rappel

A est definie positive $\iff (Ax, x) > 0, \forall x \neq 0$

Rq: A hermitienne $\iff$ A est Diagonalisable $\exists U unitaire$

$U * AU = D \iff AU = UD \iff AU_j = \lambda_j U_j, \forall j = 1 \dots n$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A \in Mu(\mathbb{C})$ definie positive $\iff$ ses valeurs propres: $\lambda_i > 0 | \forall i = 1 \dots n$

$A* = A(hermitienne)$

Supposons A definie positive: $(Ax, x) > 0 \forall x \neq 0$

D'apres l'ex1, $\exists U unitaire / U * AU = D, \forall i \in \mathbb{R}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(U1, \dots, Un)$ est une base orthonormes de vecteur propres.

$(Ax, x) > 0$, En particulier $X = U_j$

$\forall x \neq 0, 0 < (AU_j, U_j) = (\lambda_j U_j, U_j) = \lambda_j (U_j, U_j) = \lambda_j \|U_j\|^2 = \lambda_j \implies \lambda_j > 0, \forall j$

Reciproque

Supposons $\lambda_j > 0, \forall j = 1 \dots n$

Montrons que $(Ax, x) > 0 \forall x \neq 0$

$q(x) = (Ax, x)$ forme quadratique associee a A

$\forall x \neq 0, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i, \alpha_i \in \mathbb{C}$

$q(x) = (Ax, x) = (A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j)$

$q(x) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j)$

$q(x) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i U_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \bar{\alpha_j} (U_i, U_j)$

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \bar{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\alpha_i|^2 > 0$ (Car $\alpha_i > 0$ et $X \neq 0$)

Rq: Si $A \in Mn(\mathbb{R}$ **symetrique** a valeurs propres reelles).

$A > 0 \iff \lambda_i > 0, \forall i$

$\lambda_i \in Sp(A)$ Spectre de A

Exercice 3

Soit $A \in Mn(\mathbb{C})$ une matrice normale: $AA* = A * A$ (Elle commute avec ca matrice adjointe)

Montrer qu'il existe une matrice unitaire $U / U * AU = D$ (Avec D matrice diagonale)

D'apres le th de Schur: $\exists$ une matrice unitaire U telle que:

$$U * AU = T = \begin{pmatrix} ? & ... & ? \\ 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

$TT* = U * A, UU * A * U = U * AA * U$

$T * .T = U * A * UU * AU = U * A * AU = U * AA * U = TT*$

Donc T est normale

$TT* = T * T \implies (TT*)_i j = (T * T)_i j \implies \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \bar{t}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_{ki} t_{kj}$

Si $i = j$ alors:

$\sum_{k=i}^{n} |t_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{i} |t_{ki}|^2$

- $i = 1$ (1er ligne)

  $|t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + ... + |t_{1n}|^2 = |t_{11}|^2$

$\implies |t_{12}|^2 + ... + |t_{1n}|^2 = 0$

- $i = 2$ (2^eme ligne)

$$|t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + ... + |t_{2n}|^2 = |t_{12}|^2 + |t_{12}|^2$$
$$\implies |t_{23}|^2 + ... + |t_{2n}|^2 = 0$$
$$\implies t_{23} = t_{24} = ... = t_{24} = 0$$

On peut continuer, on va donc faire un raisonnement par recurence.

Par recurence, supposons que pour $1 \leq l \leq i, t_{lj} = 0, \forall j \geq l + 1$

Montrons que cette propriete est vraie pour la ligne $i + 1$.

si $i = j$
$$\sum_{k=i}^{n}$$
$$t_{1i+1} = t_{1i+1} = ... = t_{ii+1} = 0$$
Hyp de recurence $\implies |t_{i+1i+2}|^2 + ... + |t_{i+n}|^2 = 0 \implies t_{i+1j} = 0$
$\forall j/geqi + 2$

Donc $T = D \begin{pmatrix} ? & 0 & ... & 0 \\ 0 & ? & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ? \end{pmatrix}$