

Programmation Lineaire

- Numero: 2
- Prof: Siarry Patrick
- Date: 30 Octobre 2017

Exemple de l'algo du Simplexe

Soit le probleme suivant:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$80x_1 + 95x_2 + 90x_3 \leq 90000$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$MAX f = g = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 \quad (1)$$

1^{er} Etape: Recherche du Sommet Initial

Il y a 2 cas:

- Le cas simple (cas standard)
- Non simple (on verra ca plus tard)

Test de decoupage (Test de l'origine)

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \implies \text{contraintes satisfaites ?}$$

Si **oui** cas simple. On demare l'algo a partir de l'origine.

2^{eme} Etape: Recherche du sommet optimal a partie du sommet origine

On introduit des **variables d'ecarts** en transformant les inegalites en egalite.

$$1. \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \text{ (On introduit } x_4)$$

$$2. \ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 + x_5 = 90000$$

$$3. \ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 100$$

On a donc introduit x_4, x_5, x_6

Sommet initial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Donc $x_4 = 1000, x_5 = 90000, x_6 = 100$

Une iteration du Simplexe \Leftrightarrow déplacement le long d'une partie du Simplexe \Leftrightarrow faire sortir une variable de la base et faire rentrer une variable dans la base.

Tableau initial:

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|----------|----|----|---|---|---|-------|
| 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1000 |
| 0 | 5 | 80 | 95 | 90 | 0 | 1 | 0 | 90000 |
| 0 | 6 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |

| C_j | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 |
|------------|----|---|---|---|---|---|
| Δ_j | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 |

$$z = 0$$

C_i est defini par:

$$z = \sum_i c_i x_i$$

Dans le demarage standard $\Delta_j = C_j$

L'algo est fini lorsque toutes les valeurs de $\Delta_j \leq 0$.

- Variable d'entree ? Celle associee au plus grand $\Delta_j > 0$. Ici x_1 .
- Variable de sortie ? Celle associee au plus petit rapport > 0 . Ici x_6 .

Notre pivot est donc en position (1, 6)

Nouvelle ligne du pivot

On divise tous les nombre par le pivot (qui vaut **1** ici).

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|----------|----|----|---|---|---|-----|
| 10 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |

Nouvelle ligne de la variable x_4

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|------|
| 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1000 |

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**. Le terme encadre est positionne sur la ligne courante et la colonne du pivot. Ici le terme encadre est 1.

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|-----|
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | -1 | 900 |

Nouvelle ligne de la variable x_5

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|----|----|----|---|---|---|-------|
| 0 | 5 | 80 | 95 | 90 | 0 | 1 | 0 | 90000 |

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**.

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|---|-----|-----|---|---|-----|------|
| 0 | 5 | 0 | 175 | 170 | 0 | 1 | -80 | 8200 |

Nouvelle ligne de la variable Δ_j

| | | | | | | | |
|------------|----|---|---|---|---|---|---|
| Δ_j | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|------------|----|---|---|---|---|---|---|

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**. Le dernier facteur est additionne.

| | | | | | | | |
|------------|---|----|----|---|---|----|------|
| Δ_j | 0 | 18 | 17 | 0 | 0 | 10 | 1000 |
|------------|---|----|----|---|---|----|------|

Nouveau sommet: Obtenu a l'issue de la 1^{er} iteration

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|---|-----|-----|---|---|-----|-------|
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | -1 | 900 |
| 0 | 5 | 0 | 175 | 170 | 0 | 1 | -80 | 82000 |
| 10 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |

| | | | | | | | |
|------------|----|----|----|---|---|-----|------|
| C_j | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| Δ_j | 0 | 18 | 17 | 0 | 0 | -10 | 1000 |

$$z = 1000$$

On doit se poser 2 questions:

- Est ce qu'on a un meilleur sommet ?
 - Si non, alors on a fail...
- Est ce qu'on a le meilleur sommet ?
 - Oui si les valeurs $\Delta_j \leq 0$

Ici on a un meilleur sommet ($z = 1000$), mais non avons pas le meilleur sommet (il y a deux Δ_j positif).

On continue. Le nouveau sommet obtenu a l'issue de la 2^{eme} iteration. La ligne pivot est choisi par la ligne Δ_j , on prend la valeur max. Ici la variable numero 2.

| C_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|-------|---|---|---|----|-------|---|------|------|
| 8 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0.5 | 0 | -0.5 | 450 |
| 0 | 5 | 0 | 0 | -5 | -81.5 | 1 | 7.5 | 3250 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 | 550 |

| | | | | | | | |
|------------|----|---|----|----|---|----|------|
| C_j | 10 | 8 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| Δ_j | 0 | 0 | -1 | -9 | 0 | -1 | 9100 |

Ici on a fini car toutes les valeurs de $\Delta_j \leq 0$.

Les valeurs des variables sont:

- $x_1 = 550$
- $x_2 = 450$
- $x_3 = 3250$

Les variables x_4, x_5, x_6 sont des variables intermediaires. Elle permettent de resoudre le probleme mais ne font pas parti du probleme.

Et $z = 9100$.

Demarage du Simplexe

1. Le Cas simple. Test de l'origine positif On fait le *demarage standard* a partir de l'Origine.
2. Le Cas non standard. Test de l'origine negatif.

Exemple de demarage

(PL):

$$x_1 \leq 40 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 70 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 \geq 20 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6)$$

$$MAX z = 2x_1 + 3x_2 \quad (7)$$

Test de l'origine $x_1 = x_2 = 0$

Contraintes respectes ? → **NON**. Le test (5) n'est pas respecte.

On va tester de resoudre le sous probleme de PL en supprimant la contrainte genante.

(PL'):

$$x_1 \leq 40 \quad (8)$$

$$x_2 \leq 70 \quad (9)$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (10)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (11)$$

$$MAX z = 2x_1 + 3x_2 \quad (12)$$

On doit ensuite resoudre (PL') en utilisant le Simplexe.

Il y a deux cas:

- L'optimum du PL' respecte la contrainte genante $x_1 + x_2 \geq 20$.
- PL' ne respecte pas la contrainte genante.

Du coup la methode peut ne pas fonctionner. Typiquement cette methode n'est tente que si le nombre de contraintes genantes est de 1 ou 2.

Une deuxième solution est de forcer le le demarage du Simplexe a partir de l'origine. (qui est pourtant en dehors du domaine acceptable.

Une troisieme solution est trouver le probleme **DUAL** a partir du probleme **PRIMAL**. Et la solution du probleme dual est aussi la solution du primal.