Couplage (matching)

Présentation de problèmes

Probleme 1 : Affectation de taches

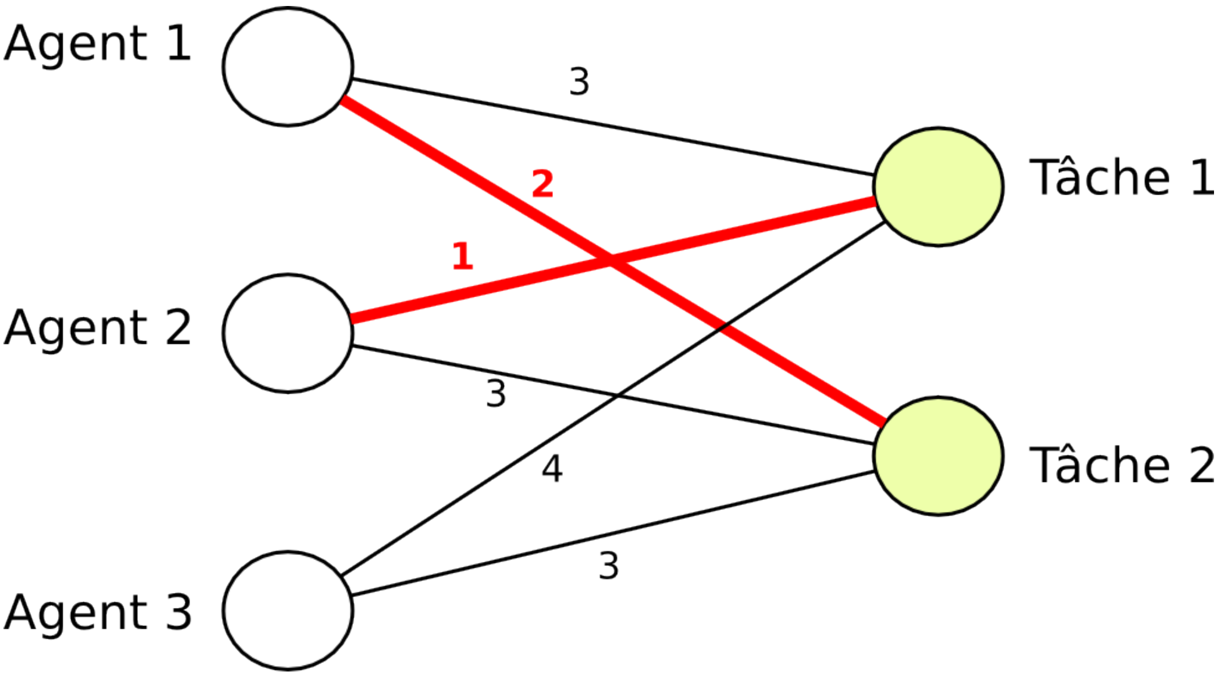

Figure 1: Matching problem

Probleme 2 : Armée multinationale

- Soldats parlent au moins 1 langue.
- Il faut 2 soldats qui parlent la même langue pour conduire un tank.
- Maximiser le nombre de tanks

Probleme 3 : Greffes d'organes

Receveur	A	D
Donneur	B	C

On a les compatibilités suivantes:

- $D \rightarrow$ A
- $B \rightarrow$ C

Definitions

> Dans un graphe $G = (V, E)$, un couplage $M \subset E$ est un ensemble d'arrêtes tel que M ne contient pas 2 arrêtes voisines.

> M est **maximal** s'il existe pas de couplage M qui contient (seulement M)

> M est **maximum** s'il n'existe pas de couplage M' tel que $|M'| > |M|$

> **Maximum** -> **Maximal**

> Un couplage est **parfait** si les extrémitées des arrètes de M couvrent l'ensemble du graphe V. Ce qui implique $|M| = \frac{|v|}{2}$. Pas de couplage parfait si $|M|$ est impair;

- Voici des couplages **maximum** :

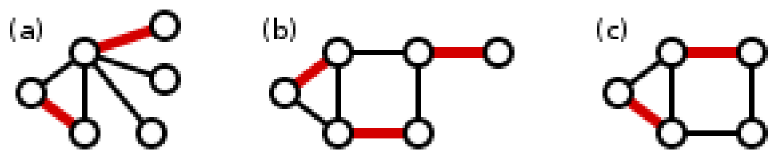

Figure 2: Exemple couplage maximum

- Voici des couplages **maximal** :

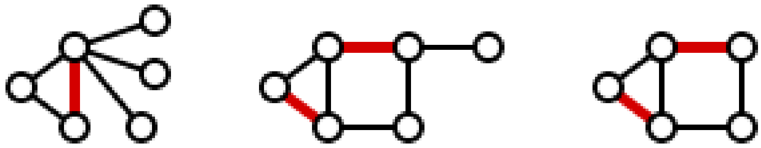

Figure 3: Exemple couplage maximal

Pour un couplage M, $|M| \leq \lfloor \frac{lvl}{2} \rfloor$

Constructions

Comment construire un couplage maximal ?

- Selection une arrète dans le graphe, la sauvegarder, puis supprimer toutes les autres arrètes partant des sommet de la première.
- Répéter la première action tant que des arrètes existent.

Comment construire un couplage maximum ?

- Trouver un chemin améliorant P
- calculer $M' \leftarrow M \bigoplus P$ (arrêtes de M ou P mais pas dans les 2)
- On obtient $|M'| = |M| + 1$
- Répétez jusqu'à l'absence de chemin améliorant.

Définition

> Un chemin améliorant est un chemin reliant 2 chemin libres en alternant arrêtes de $E \ M$ et arrêtes de M.

Théorème

Soit $G = (V, E)$ et M un couplage alors il existe un chemin améliorant **ssi** M n'est pas maximum.

($\implies$) soit P un chemin améliorant alors $M' = M \bigoplus P$ possède une arrête de plus que $M \rightarrow M$ pas maximum.

($\Longleftarrow$) on suppose M non maximum soit M' un couplage maximum ($|M'| > |M|$).

Considérons le graphe $G' = (V, M \bigoplus M')$:

1. G' possède plus d'arrêtes de M' que de M.
2. Chaque sommet de G' touche au plus une arrête de M
3. Chaque sommet de G' touche au plus une arrête de M'
4. Dans les composants G' qui ne sont pas des sommets isolés il existe nécessairement (à cause de 1) un composant avec plus dárrête de M'. Ce composant est un chemin améliorant.

Contruire un couplage maximum

```
M = set()
while chemin in P:                          O(|V|/2)
   M = s.symmetric_difference(t)
return M
```

Complexité global: $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Algo d'Edmonds

Il permet de trouver un chemin améliorant.

```
Entrées : G = (V, E) -> graph / M -> couplage
Sortie : P dans E chemin améliorant, Null si pas de chemin
Retirer les étiquettes [R, C, P] de tous les sommets
Marquer toutes les arrêtes comme non visitées
Répéter au choix:
(A) Trouver un sommet libre v dans V, lui donner l'étiquette [v, B, v]
(B) Trouver une arrête non-visité (v, w) dans E telle que v est étiquetté par [r, B, p]
     * marquer (v,w) comme visité
     * si w est non étiquetté et libre alors : // On a un chemin améliorant
       p <- chemin de r a w
       break
     * si w est non étiqueté et il existe x tq (w, x) dans M
       étiqueter w par [r, J, v]
       etiqueter x par [r, B, w]
     * si w a pour étiquette [s, B, q] avec s <> r
       P <- chemin de r a v + (v, w) + le chemin de w a s
       break
     * si w a pour étiquette [s, B, q] avec s = r
       // On a détecter un cycle de taille impaire
       on remplace tous les sommets de ce cycle par un nouveau sommet
       on étiquette x par [r, B, p] avec p' le parent de la racine du cycle
       on empile x et le cycle associé sur une pile
     * si w a pour étiquette [s, J, q] ne rien faire

Si ni (A) ni (B) n'est possible
  return NULL
En sortie de boucle par break
```

```
P est un chemin qui peut contenir des bourgeons, depiler les
    bourgeons en
ajoutant les chemin de taille paire approprié dans le chemin amé
    liorant.
return P
```