Algebre Lineaire

- Numero: 3
- Prof: Regragui Mohamed
- Date: 20 Octobre 2017

Execice 4

$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |X_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall X \in \mathbb{C}^n$

Montrer que $\lim_{X\to\infty} \|X\|_p = max|X_i|$

$\|X\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |X_i|^p$

Soit j $\in \{1, 2, \ldots, n\}/|X_j| = max|X_i|, i \leq i \leq n$

$|X_j|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i|^p \leq n|X_j|^p$

Majoration:

$|X_j|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i|^p \leq n|X_J|^p$

$\implies |X_j| \leq \left(\sum i = 1^n |X_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} |X_j| \underset{p\to+\infty}{\to} |X_J|$

D'apres le theoreme des gendarmes:

$\lim p \to +\infty \left(\sum i = 1^n |X_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |X_j| = \underset{1\leq i\leq n}{max} |X_i| \implies \lim p \to +\infty \|X\|_p = max|X_i|$

Notation:

$$\|X\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max} |C_i| \tag{1}$$

Normes vectorielles et matricielles

Norme vectorielle:

> Une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ont une application de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ verifiant les proprietes:

1. $\|X\| \geq 0$ et si $\|X\| = 0 \iff X = \overrightarrow{O}$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, \forall X \in \mathbb{C}^n \|\lambda X\| = \|\lambda\|\|X\|$ (demi lineaire)
3. $\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^n)^2, \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Exemple a completer.. :/

Norme matricielle:

> C'est une application $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ verifiant:

1. $\|A\| \geq 0, si \|A\| = 0 \iff A = 0$ matricielle
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in M_n(\mathbb{C}) \|\lambda A\| = \|\lambda\|\|A\|$
3. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

Exemples:

$\|A\|_2 = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2})$

$\|A\|_1 = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1})$

$\|A\|_\infty = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty})$

$\|A\| = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|AX\|}{\|X\|})$

Norme sup:

> C'est le plus petit des majorants.

Rq: Si $A = I$

$\|I\| = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|I_X\|}{\|X\|}) = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|X\|}{\|X\|}) = 1$

On n'a pas toujours $\|I\| = 1$

Contre exemple: $\|A\|_S = (\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$ Norme de Schur

$\|I\|_S = \underset{\forall n \geq 2}{\sqrt{n}} \neq 1$

Definition:

> Une **norme matricielle** et une **norme vectorielle** sont compatibles ssi $\|AX\| \leq \|A\|.\|X\|$

Exemple: Normes subordonnees $\|A\| = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup}(\frac{\|AX\|}{X})$

Proposition:

> $\forall A \in N_n(\mathbb{C})$
> $\|A\|_2 = \sqrt{\varphi(A^*A)}$

Rq: A^*A est une matrice **hermitienne** et semi-definie positive

$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

Semi-definie positive $\iff$ $(A^*AX, X) \geq 0 \forall X \in \mathbb{C}^n$

En effet: $(A^*AX, X) = (AX, (A^*)^*X) = (AX, AX) = \|AX\|^2 \geq 0$

A^*A est demi-definie ≥ 0
Ses valeurs propres sont ≥ 0

Soient σ_i^2 les valeurs propres de A^*A
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots geq \sigma_n^2 \geq 0$
A^*A est diagonalisable $\exists$ une base orthonormee de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$

$A^*AV_i = \sigma_i^2 V_i, \forall i = 1 \dots n$

Demonstration de la proposition:

$\|A\|_2 = \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup} \left(\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2\|}\right)$
$\|AX\|_2^2 = (AX, AX) = (A^*AX, X) = \Big(A^*A \sum i = 1^n (\alpha_i v_i), \sum j = 1^n (\alpha_j v_j)\Big)$
$= \Big(\sum_{i=1}^n (\alpha_i A^*Av_i), \sum_{j=1}^n (\alpha_j v_j)\Big)$

$\|AX\|_2^2 = \Big(\sum i = 1^n \alpha_i \sigma_i^2 v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\Big) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \sigma_i^2 \leq \sigma_i^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sigma_i^2 \|X\|_2^2$

$\forall X \neq \overrightarrow{0} . \frac{\|AX\|_2^2}{\|X\|_2^2} \leq \sigma_i^2 = \varphi(A^*A) \implies \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} \leq \sqrt{\varphi(A^*A)}, \forall X \neq \overrightarrow{0}$

$\|A\|_2 \underset{X \neq \overrightarrow{0}}{Sup} \left(\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}\right)$

$\exists ? X_0 \in \mathbb{C}^n, \|X_0\|_2 = 1 / f(X_0) = M = \sqrt{\varphi(A^*A)}$
$\|AX\|_2^2 = (AX, AX) = (A^*AX, X)$

Si $X = V_1, \|Av_1\|_2^2 = (A^*Av_1, v_1) = (\sigma_i^2, v_1, v_i) =$
$\sigma_i^2(v_1, v_i) = i\sigma_i^2 = f(A^*A) = M^2$

Conclusion: $\|A\|_2 = \sqrt{\varphi(A^*A)}$

Rq: Si A est hermitienne: $A^* = A$

$\|A\|_2 = \sqrt{\varphi(A^2)} = \sqrt{\varphi^2(A)} = \varphi(A)$

Exercice5 (A preparer pour le prochain cours)

Demontrer que $\|A\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}$ et $\|A\|_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} i & i+1 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_1$