Resolution numerique de systemes lineaures

On considere le systeme lineaire:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff A_x = b \tag{1}$$

$A = (a_{ij})$ et $b = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- X_{ii} inconnues
- A est inversible

$X = A^{-1}b$ solution de (1)

A est une matrice triangulaire superieur

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ddots \\ \qquad\qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1}x_n = b_{n-1} \end{cases}$$

Algorithme de resolution:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{cases} x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ij}} \\ i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases} \tag{2}$$

Cas general

A est quelconque (non triangulaire).

On cherche une matrice M inversible telle que MA soit triangulaire superieur.

On resout donc:

$MAx = Mb$

Methodes directes

Algo de Gauss

La methode de Gauss transforme le systeme (1) $Ax = b$ en un systeme triangulaire equivalent a l'aide d'un algo equivalent.

$A^{(1)} = A$, $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}$
$b^{(1)} = (b_i^{(1)})$

Eventuellement apres permutation de lignes ou de colonnes de $A^{(1)}$. On peut supposer que $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (1^er^ pivot).

Pour $i = 2, \dots, n$ multipliant la 1^ere^ equation du systeme $A^{(1)}x = b^{(1)}$ par:

$g_{i1} = \frac{g_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ et retranchons l'equation obtenue de la i^eme^ ligne.

$L_i \to L_i - g_{i1}L_1, i \geq 2$

On obtient un systeme $A^{(2)}x = b^{(2)}$
$A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)}), b^{(2)} = (b_i^{(2)})$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} & j = 1 \dots n \\ a_{i1}^{(2)} = 0 & i = 2 \dots n \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{1j}^{(1)} & i = 2 \dots n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} & j = 2 \dots n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - g_{i1}b_i^{(1)} & i = 2 \dots n \end{cases}$$

- $\tilde{A}^{(1)} = (A^{(1)}|b^{(1)})$ $b_i^{(1)} = a_{in+1}^{(1)}$

- $\tilde{A}^{(2)} = (A^{(2)}|b^{(2)})$ $b_i^{(2)} = a_{in+1}^{(2)}$

Plus generalement, la methode de Gauss consiste a construire une suite de systemes $A^{(k)}x = b^{(k)}$

$\tilde{A}^{(k)} = (A^{(k)}|b^{(k)})$

On suppose que le k^ieme^ pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\tilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Pour $i = k+1 \dots m$

On multiplie la k^eme^ ligne par $g_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ puis on retranche le resultat de la i^eme^ ligne.

La nouvelle matrice $\tilde{A}^{(k+1)}$ est:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} a_{ij}^{(k)} & i = 1 \dots k \\ a_{ij}^{(k+1)} a_{ij}^{(k)} - g_{ik} a_{kj}^{(k)} & i = 1 \dots k/j = k+1 \dots m+1 \end{cases}$$

Les quatre coefficients sont nuls a la n^eme^ etape, $A^{(m)}$ est triangulaire.