Logique

- Numero 3
- Prof: Hémon Sébastien
- Date: 08/11/2017

Rappel

$\varphi \equiv \Psi$ Veut dire semantiquement equivalentes.
Elles ont donc les memes tables de verites.

Loi De Morgan

- $A \implies B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A\ land \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A\ lor \neg B$

Loi de Pierce

On se donne:

- $P \implies (Q \implies P)$
- $(P \implies Q) \implies P$

P	Q	$\mathbf{P \implies Q}$	$\mathbf{(P \implies Q) \implies P}$	$\mathbf{Q \implies Q}$	$\mathbf{P \implies (Q \implies P)}$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

On remarque:

1. $\implies$ n’est pas associative
2. $P \implies (Q \implies P)$ est une tautologie

Cette tautologie s’appelle Loi de Pierce

Proprietes:

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

Proposition:

$\varphi \equiv \Psi$ si est seulement si $\varphi \iff \Psi$ tautologie.

⚠ Ne se generalise pas pour toutes les logiques.

La logique d’ordre 0 est **complete** du a cette propriete de completude.

Definition d’une relation d’ordre generale

Relation binaire

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire, c’est a dire definie de sorte que pour tout couple (x, y) d’objets (d’un certain type):

$x\mathcal{R}y$ est verifie ou invalide.

Donnons les paradigmes de $\mathcal{R}$.

- Proposition par formule logique:
  - $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\varphi(x, y)$ est verifer avec φ formule logique.

Ex1: (Type Integer) $x\mathcal{R}y$ lorsque $\exists n$ integer $x = y + n$
Ex2: (Sur les complexes $\mathbb{C}$ $x\mathcal{R}w$ lorsque $|z| = \frac{1}{1+w^2}$
$\wedge w \neq 0 \wedge w^2 \neq -1$

- Definition ensembliste

- Definition par fonction booleene:
  - $\mathcal{R}$ peut etre vue a l'aide d'une application 1_R a valeur des $0, 1$ a deux variables $1_R : (x, y) \to 1$ si $x\mathcal{R}y$ verifie 0 sinon
- Definition par graphe. On assimile $\mathcal{R}$ a un graphe G tel que s_1, s_2 forment une arrete lorsque $s_1\mathcal{R}s_2$.

Relation d'equivalence

Les **relations d'equivalences** sont des relations binaires particulieres.

1. Reflexivite: $\forall x : \mathcal{T}\mathcal{R}x$ (Dans le domaine $\mathcal{T}$ considere)
2. Symetrique: $\forall x : \mathcal{T}\forall y : \mathcal{T}\ x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$
3. Transitivite: $\forall x : \mathcal{T}\forall y : \mathcal{T}\forall z : \mathcal{T}$ $(x\mathcal{R}y \land y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

Ex: L'egalite est une equivalence naturelle.

Ex: Construire des congreuences. $a \equiv b[n]$ signifie $b - a$ multiple de n. ou encore a et b ont meme reste dans la division euclidienne par n. Ecrivons $a \equiv_n b$ dans ce cas $\equiv_n$ est une relation d'equivalence sur $\mathbb{Z}$

Peut on etre logique (sans raisonner comme les autres)

La logique est a la fois mathematique informatique et phylosophique.

`1 + 1 = 2` Logique ?

> Non c'est arithmetique.

Il y a donc un probleme semantique (syntaxe).

Regles deductives:

- Modus ponens $A \land (A \implies B)$ donc B

- Modus tolens
- Syllogisme
- Sophisme (A pour but de convaincre les gens, peut importe si c’est vrai ou faux)

A donc $A \vee B$ Ceci est une bonne deduction (on appelle ca un affaiblissement)

Dans le langage lorsqu’une personne dis A puis B alors on l’interprete comme $A \wedge B$. C’est un sequent primitif. C’est une deduction (On reli les formules entre elles).