Programmation Lineaire

- Numero: 2
- Prof: Siarry Patrick
- Date: 30 Octobre 2017

Exemple de l'algo du Simplexe

Soit le probleme suivant:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$
$80x_1 + 95x_2 + 90x_3 \leq 90000$
$x_1 - x_2 - x_3 \leq 100$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$MAX f = g = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 \quad (1)$$

1^er Etape: Recherche du Sommet Initial

Il y a 2 cas:

- Le cas simple (cas standard)
- Non simple (on verra ca plus tard)

Test de decoupage (Test de l'origine)

$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \implies$ contraintes satisfaites ?

Si **oui** cas simple. On demare l'algo a partir de l'origine.

2^eme Etape: Recherche du sommet optimal a partie du sommet origine

On introduit des **variables d'ecarts** en transformant les inegalites en egalite.

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$ (On introduit x_4)
2. $80x_1 + 95x_2 + 90x_3 + x_5 = 90000$
3. $x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 100$

On a donc introduit x_4, x_5, x_6

Sommet initial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Donc $x_4 = 1000, x_5 = 90000, x_6 = 100$

Une iteration du Simplexe $\iff$ deplacement le long d'une partie du Simplexe $\iff$ faire sortir une variable de la base et faire rentrer une variable dans la base.

Tableau initial:

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	1	1	1	1	0	0	1000
0	5	80	95	90	0	1	0	90000
0	6	**1**	-1	-1	0	0	1	100

C_j	10	8	7	0	0	0	
Δ_j	10	8	7	0	0	0	0

$z = 0$

C_i est defini par:

$z = \sum_i c_i x_i$

Dans le demarage standard $\Delta_j = C_i$

L'algo est fini lorsque toutes les valeurs de $\Delta_j \leq 0$.

- Variable d'entree ? Celle associee au plus grand $\Delta_j > 0$. Ici x_1.
- Variable de sortie ? Celle associee au plus petit rapport > 0. Ici x_6.

Notre pivot est donc en position $(1, 6)$

Nouvelle ligne du pivot

On divise tous les nombre par le pivot (qui vaut **1** ici).

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
10	1	**1**	-1	-1	0	0	1	100

Nouvelle ligne de la variable x_4

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	1	1	1	1	1	0	1000

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**. Le terme encadre est positionne sur la ligne courante et la colonne du pivot. Ici le terme encadre est 1.

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	0	2	2	1	1	-1	900

Nouvelle ligne de la variable x_5

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	5	80	95	90	0	1	0	90000

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**.

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	5	0	175	170	0	1	-80	8200

Nouvelle ligne de la variable Δ_j

Δ_j	10	8	7	0	0	0	0

On soustrait cette ligne par la ligne du pivot et on multiplie par le **terme encadre**. Le dernier facteur est additionne.

Δ_j	0	18	17	0	0	10	1000

Nouveau sommet: Obtenu a l'issue de la 1er iteration

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
0	4	0	2	2	1	0	-1	900
0	5	0	175	170	0	1	-80	82000
10	1	1	-1	-1	0	0	1	100

C_j	10	8	7	0	0	0	
Δ_j	0	18	17	0	0	-10	1000

$z = 1000$

On doit se poser 2 questions:

- Est ce qu'on a un meilleur sommer ?
  - Si non, alors on a fail…
- Est ce qu'on a le meilleur sommet ?
  - Oui si les valeurs $\Delta_j \leq 0$

Ici on a un meilleur sommet ($z = 1000$), mais non avons pas le meilleur sommet (il y a deux Δ_j positif).

On continue. Le nouveau sommet obtenu a l'issue de la 2eme iteration. La ligne pivot est choisi par la ligne Δ_j, on prend la valeur max. Ici la variable numero 2.

C_i	i	1	2	3	4	5	6	
8	2	0	1	1	0.5	0	-0.5	450
0	5	0	0	-5	-81.5	1	7.5	3250
10	1	1	0	0	0.5	0	0.5	550

C_j	10	8	7	0	0	0	
Δ_j	0	0	-1	-9	0	-1	9100

Ici on a fini car toutes les valeurs de $\Delta_j \leq 0$.

Les valeurs des variables sont:

- $x_1 = 550$
- $x_2 = 450$
- $x_3 = 3250$

Les variables x_4, x_5, x_6 sont des variables intermediaires. Elle permettent de resoudre le probleme mais ne font pas parti du probleme.

Et $z = 9100$.

Demarage du Simplexe

1. Le Cas simple. Test de l'origine positif On fait le *demarage standard* a partir de l'Origine.
2. Le Cas non standard. Test de l'origine negatif.

Exemple de demarage

(PL):

$$x_1 \leq 40 \tag{2}$$

$$x_2 \leq 70 \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 \geq 20 \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

$$MAX z = 2x_1 + 3x_2 \tag{7}$$

Test de l'origine $x_1 = x_2 = 0$

Contraintes respectes ? $\rightarrow$ **NON**. Le test (5) n'est pas respecte.

On va tester de resoudre le sous probleme de PL en supprimant la contrainte genante.

(PL'):

$$x_1 \leq 40 \tag{8}$$

$$x_2 \leq 70 \tag{9}$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{10}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{11}$$

$$MAX z = 2x_1 + 3x_2 \tag{12}$$

On doit ensuite resoudre (PL') en utilisant le Simplexe.

Il y a deux cas:

- L'optimum du PL' respecte la contrainte genante $x_1 + x_2 \geq 20$.
- PL' ne respecte pas la contrainte genante.

Du coup la methode peut ne pas fonctionner. Typiquement cette methode n'est tente que si le nombre de contraintes genantes est de 1 ou 2.

Une deuxieme solution est de forcer le le demarage du Simplexe a partir de l'origine. (qui est pourtant en dehors du domaine acceptable.

Une troisieme solution est trouver le probleme **DUAL** a partir du probleme **PRIMAL**. Et la solution du probleme dual est aussi la solution du primal.