

Analyse matricelle de Gauss

$$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \forall i = k+1 \dots n$$

$$\text{Soit } G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g_{nk} & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{(k)} \cdot \tilde{A}^{(k)} = \tilde{A}^{(k+1)}$$

$$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)} \cdot G^{(n-2)} \cdot \tilde{A}^{(n-2)}$$

Remarque:

$$\det A = \det(L \cdot U) \det A = \det U = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(n)} \quad (1)$$

Gauss est bien meilleur que la methode de **Cramer**

Algo de CHOLESKY

Thm: Une matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est symetrique definie positivement si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inferieure inversible telle que $A = L^t L$

A est S.D.P

$${}^t A = A$$

$$(Ax, x) = {}^t x A x > 0 \text{ (x est un vecteur)}$$

$$Ax = b$$

$$L^t Lx = b \implies \begin{cases} Ly = b \\ {}^t Lx = y \end{cases}$$

Construction de L

$$L = (l_{ij}) = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{1n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})$$

$$A = L^t L$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk} \text{ avec } j \leq i$$

$$a_{11} = l_{11}^2 \implies l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{i1} = l_{i1} l_{11} \implies l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

Par recurrence supposons connues les $(k-1)$ premieres colonnes de L.

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^k l_{kj}^2 = l_{kk}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^k l_{ij} l_{kj}$$

$$a_{ik} = l_{ik} l_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}}$$

Complexite

$$T_{CH} = \frac{2n^3 + 15n^2 + n}{6}$$