Algebre Lineaire

- Numero: 4
- Prof: Regragui Mohamed
- Date: 03 Novembre 2017

Exercice 5

Montrer que $\|A\|_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}$

$\|A\|_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}$

$\|A\|_1 = \underset{X\neq \bar{0}}{Sup}\left(\frac{\|A_X\|_1}{\|X\|_1}\right)$

$\forall A \in Mn(\mathbb{C})$

$\|A_X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(A_X)_i| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||X_j| \leq \sum_{j=1}^{n}\left(|X_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}\right)$

$\|A_X\| \leq \left(\underset{i\leq j\leq n}{max} \sum_{a_{ij}}^{n} |a_i j|\right) \sum_{j=1}^{n} |K_j|$

$\|A_X\|_1 \leq \left(\underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\|X\|_1$

Donc:

$\|A_x\|_1 \leq \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} = M$

$\forall X \neq \bar{0}$

$f(x) = \frac{\|A_X\|_1}{\|X\|_1} \leq M$

$\exists X_0 \in \mathbb{C}^n, \|K_0\|_1 = 1/f(M_0) = M$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}/M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

Soit $X_0 \in \mathbb{C}^n/X_{0j} = 0 \forall j \neq j, 1$ otherwise

$f(X_0) = \|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{0j}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = M$

Donc $\underset{X\neq \bar{0}}{Sup}(\frac{\|A_X\|_1}{\|X\|_1} = M \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \underset{j}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -3 & i & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

$$\|A\|_1 = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $j = 1$ (1^er^ colonne): $|-3| + |1| + |1| = 5$
- $j = 2$ (2^eme^ colonne): $|i| + |0| + |1| = 2$
- $j = 3$ (3^eme^ colonne): $|-5| + |3| + |-i| = 9$

Donc $\|A\|_1 = 9(k = 3)$

2^eme^ partie

$$\|A\|_\infty = \underset{X\neq\bar{0}}{Sup}\left(\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}\right)$$

$$\|AX\|_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max}|(A_X)_i| = \underset{1\leq i\leq n}{max}|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j| \leq \underset{1\leq i\leq j}{max}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||X_j|\right) \leq \|X\|_\infty \underset{i}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Soit $l \in \{1, \dots, n\} / M = \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|$

$$\|A_X\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max}|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j|$$

$\exists X_0 \in \mathbb{C}^n, \|X_0\|_\infty = 1 / f(X_0) = \|AX_0\|_\infty = M$

$X_{0j} = 1 si a_{ij} = 0, \frac{\|a_{lj}\|}{\|X\|} si a_{ij} \neq 0$

$\forall i \neq l$

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{0j}| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||X_{0j}| \leq 1 \leq \underset{i}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = M$$

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{lj}X_{0j}| = \sum_{j=1}^{n}\frac{|a_{lj}|^2}{|a_{lj}|} = \sum_{j=1}^{n}|a_{lj}| = M$$

$\|AX_0\|_\infty = M$

$$\|A\|_\infty = M = \underset{i}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Exemple (avec la matrice precedente)

- $i = 1$ (1^er^ ligne) $|-3| + |i| + |-5| = 9$

- $i = 2$ (2^eme^ ligne) $|1| + |0| + |3| = 4$
- $i = 3$ (3^eme^ ligne) $|1| + |1| + |-i| = 3$

Donc $\|A\|_\infty = 9$ et $l = 1$

Exerice 6

Soit $A \in Mn(\mathbb{C}) verifiant \|A\| < 1$ $\left(\|A\| = \underset{X \neq 0}{Sup} \frac{\|A_X\|}{\|X\|}\right)$

1. Montrer que $\varrho(A) < 1$
2. Mpntrer que $I + A$ est inversible
3. Montrer que $\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$

Rappel:

> $\varrho(A) = max(\lambda), \lambda \in Sp(A)$ (Rayon spectral de A)

Petit 1

$\forall \lambda \in Sp(A)$: Spectre de A $\exists X \neq \bar{0} / AX = \lambda X$

$\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|$

$\implies |\lambda| \|X\| \leq \|A\| \|X\|$
$|\lambda| \leq \|A\| \forall \lambda \in Sp(A)$
$\implies \varrho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{max} |\lambda| \leq \|A\| < 1 \implies \varrho(A) < 1$

Petit 2

On va faire un raisonnement par l'absurde.

Supposons que $I + A$ est non inversible.

Rappel: (B non inversible)

- $det(B) = 0$
- $I_B(\lambda) = det(B - \lambda I)$
- $I_B(0) = det(B) = 0$

$I + A$ non inversible $\iff det(I + A) = 0 \iff 0 \in Sp(I + A)$

$0 \in Sp(I + A) : \exists X \neq \bar{0} / (I + A)X = \bar{0} (\lambda = 0) \implies AX = -X \implies -1 \in Sp(A)$

Or $\varrho(A) = max |\lambda| < 1$ Ce qui est absurde.

Donc $I + A$ est inversible.

Petit 3

$(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}\frac{(I+A-A)}{I}$
$(I+A)^{-1} = I-(I+A)^{-1}A$
$\|(I+A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|(I+A)^{-1}A\|$
$\|(I+A)^{-1}\| \leq 1 + \|(I+A)^{-1}\|\|A\|$
$\|(I+A)^{-1}\|(1-\|A\|) \leq 1$
$\implies \|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

Rq:

> On a toujorus $\varrho(A) \leq \|A\|, \forall \|A\| = \underset{X\neq \bar{0}}{Sup}\left(\frac{\|AX\|}{\|X\|}\right)$