Espace probabilisable

Une experice est qualifiée d'aléatoire si on ne peut prévoir par avance son résultat et si répétée dans des conditions identiques elle peut donner lieu à des résultats $\neq$.

On représente le résulat d'une experiece par une un élément $w \in \Omega$ Ω s'appelle l'univers.

$\Omega = \{$ tous les resultats possible $\}$.

Exemple:

On lance 2 dès. Cette experience assicie l'univers $\Omega = \{(i, j)\} 1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$.

On peut changer l'univers, si on s'interresse à la somme des pts matqués.

$\Omega = \{i + j\}$ avec $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$ = $\{2, 3, \ldots, 12\}$

Soit φ l'ensemble des événements.

$\forall A \in \varphi$, on note $\bar{A} = C_{\Omega}^{A}$ le contraire de A.

φ est défini par 3 axiomes:

- $\forall A \in \varphi$ alors $\bar{A} \in \varphi$
- Pour tout ensemble fini ou denombrable d'éveénements $A_i \in \varphi \cup A_i \in \varphi$.
- $\Omega \in \varphi$

Rappel:

I est dénombrable ssi $\exists$
φ application bijective
$\varphi : I \to \mathbb{N}$ ou $F \subset \mathbb{N}$

C'est une algébre de Boole ou Tribu.

Rq: $\emptyset \in \varphi$ et $\cap A_i \in \varphi$ ($\bar{\Omega} \in \varphi \implies \emptyset \in \varphi$).

Def:

On appelle espace probabilisable le couple (Ω, φ) ou:

- Ω est l'univers
- φ Tribu

Espace probabilisé

AXIOME DE Kolmogorov

Def: On appelle probabilité ou (loi de probabilité) une application:

$P : \varphi \to [0,1]$
$A \to P(A)$

Vérifiant:

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall$ ensemble fini ou dénombrable d'événements incompatibles: A_1, A_2, A_i $(A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j)$

$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Propriétés élémentaires

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Loi conditionelles

Def:

> On appelle loi de probabilité conditionelle de A sachant B. Noté: $\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ avec } P(B) \neq 0}$

Def: A et B sont independant ssi:

$\boxed{P(A/B) = P(A)} \iff \boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

Formules de BAYES

1. $\boxed{P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}}$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$

Soit (B_i) un systeme complet: $\begin{cases} B_i \cap B_j = \emptyset i \neq j (B_i) \text{partition de } \Omega \\ P(B_i/A) = \dfrac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A)} \end{cases}$

2. $\boxed{P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum P(A/B_i)P(B_i)}}$