

Couplage (matching)

Présentation de problèmes

Probleme 1 : Affectation de taches

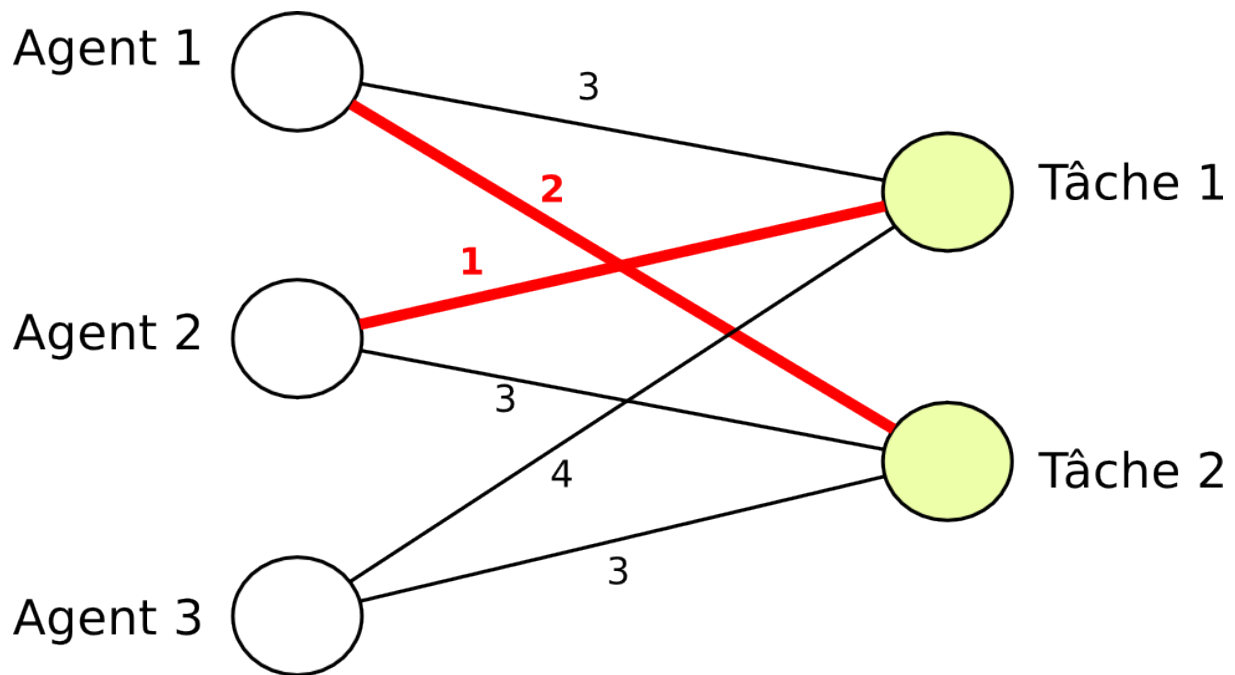


Figure 1: Matching problem

Probleme 2 : Armée multinationale

- Soldats parlent au moins 1 langue.
- Il faut 2 soldats qui parlent la même langue pour conduire un tank.
- Maximiser le nombre de tanks

Probleme 3 : Greffes d'organes

Receveur	A	D
Donneur	B	C

On a les compatibilités suivantes:

- $D \rightarrow A$
- $B \rightarrow C$

Definitions

Dans un graphe $G = (V, E)$, un couplage $M \subset E$ est un ensemble d'arrêtes tel que M ne contient pas 2 arrêtes voisines.

M est **maximal** s'il existe pas de couplage M qui contient (seulement M)

M est **maximum** s'il n'existe pas de couplage M' tel que $|M'| > |M|$

Maximum -> Maximal

Un couplage est **parfait** si les extrémités des arrêtes de M couvrent l'ensemble du graphe V . Ce qui implique $|M| = \frac{|V|}{2}$. Pas de couplage parfait si $|M|$ est impair;

- Voici des couplages **maximum** :

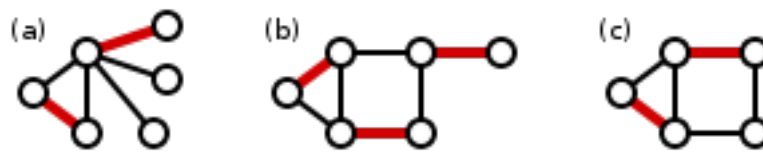


Figure 2: Exemple couplage maximum

- Voici des couplages **maximal** :

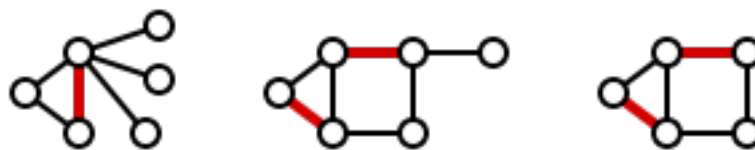


Figure 3: Exemple couplage maximal

Pour un couplage M , $|M| \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$

Constructions

Comment construire un couplage maximal ?

- Sélection une arête dans le graphe, la sauvegarder, puis supprimer toutes les autres arêtes partant du sommet de la première.
- Répéter la première action tant que des arêtes existent.

Comment construire un couplage maximum ?

- Trouver un chemin améliorant P
- calculer $M' \leftarrow M \oplus P$ (arêtes de M ou P mais pas dans les 2)
- On obtient $|M'| = |M| + 1$
- Répétez jusqu'à l'absence de chemin améliorant.

Définition

Un chemin améliorant est un chemin reliant 2 chemins libres en alternant arêtes de $E \setminus M$ et arêtes de M .

Théorème

Soit $G = (V, E)$ et M un couplage alors il existe un chemin améliorant **ssi** M n'est pas maximum.

(\Rightarrow) soit P un chemin améliorant alors $M' = M \oplus P$ possède une arête de plus que $M \rightarrow M$ pas maximum.

(\Leftarrow) on suppose M non maximum soit M' un couplage maximum ($|M'| > |M|$).

Considérons le graphe $G' = (V, M \oplus M')$:

1. G' possède plus d'arêtes de M' que de M .
2. Chaque sommet de G' touche au plus une arête de M
3. Chaque sommet de G' touche au plus une arête de M'
4. Dans les composants G' qui ne sont pas des sommets isolés il existe nécessairement (à cause de 1) un composant avec plus d'arêtes de M' . Ce composant est un chemin améliorant.

Construire un couplage maximum

```

1 M = set()
2 while chemin in P:                                O(|V|/2)
3     M = s.symmetric_difference(t)
4 return M

```

Complexité global: $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Algo d'Edmonds

Il permet de trouver un chemin améliorant.

```

1 Entrées : G = (V, E) -> graph / M -> couplage
2 Sortie : P dans E chemin améliorant, Null si pas de chemin
3 Retirer les étiquettes [R, C, P] de tous les sommets
4 Marquer toutes les arrêtes comme non visitées
5 Répéter au choix:
6 (A) Trouver un sommet libre v dans V, lui donner l'étiquette [v, B, v]
7 (B) Trouver une arrête non-visitée (v, w) dans E telle que v est é
    tiquetté par [r, B, p]
8     * marquer (v,w) comme visité
9     * si w est non étiquetté et libre alors : // On a un chemin amé
    liorant
10    p <- chemin de r a w
11    break
12    * si w est non étiqueté et il existe x tq (w, x) dans M
13    étiqueter w par [r, J, v]
14    etiqueter x par [r, B, w]
15    * si w a pour étiquette [s, B, q] avec s <> r
16    P <- chemin de r a v + (v, w) + le chemin de w a s
17    break
18    * si w a pour étiquette [s, B, q] avec s = r
19    // On a détecter un cycle de taille impaire
20    on remplace tous les sommets de ce cycle par un nouveau sommet
21    on étiquette x par [r, B, p] avec p' le parent de la racine du
    cycle
22    on empile x et le cycle associé sur une pile
23    * si w a pour étiquette [s, J, q] ne rien faire
24
25 Si ni (A) ni (B) n'est possible
26 return NULL
27 En sortie de boucle par break

```

```
28   P est un chemin qui peut contenir des bourgeons, depiler les  
    bourgeons en  
29   ajoutant les chemin de taille paire approprié dans le chemin amé  
    liorant.  
30   return P
```