

Algebre Lineaire

- Numero: 1
- Prof: Regragui Mohamed
- Date: 6 Octobre 2017

Programme

- Algebre Lineaire
 - Reduction des matrices carrees
 - * Rappels des notations
 - * Trigonalisation
 - * Normes matricielles
 - * Diagonalisation
 - Resolution numerique des systemes lineaire ($Ax=b$)
 - * Methodes directes
 - Algo de *Gauss*
 - Algo de *Cholesky*
 - * Methodes iteratives ($A=M-N$, Pour des systemes tres grand)
 - Algo de Jacobi
 - Algo de Gauss Seidel
 - Algo de relaxation successive

Application (Systemes differentiels)

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Besoin de diagonaliser A.

Reduction des matrices carrees

Rappels des notations

Soit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices a m lignes et n colonnes a coefficients dans $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Si $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrees.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

La **transposée** de A: $A = (a_{ji})$ (On inverse les coordonnees).

La matrice **adjointe** de A: $A^* = {}^t\bar{A}$

C'est la matrice **transposée** de la matrice **conjuguee** de M. M qui est a coefficients **complexes**.

On note donc $(a_{ij}^*) = \bar{a}_{ji}$

Produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

C'est une forme bilineaire symetrique definie positive $((X, Y) \geq 0)$.

$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)$, le **produit scalaire** Formule:

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n y_i \times x_i$$

Produit scalaire dans \mathbb{C}^n .

$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)$, le **produit scalaire**

$$\text{Formule: } (X, Y) = \sum_{i=1}^n y_i^* \times x_i$$

(Rappel y_i^* est l'adjoint)

C'est une forme **sesquilineaire**.

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$(ax, y) = a(x, y)$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{C} : (x, ay) = (au)^* \cdot x = \sum_{i=1}^n a^* \times y_i^* \times x_i = \dots$$

$$\text{Formule: } (A.B)^T = B^T.A^T \quad \text{Formule: } (A.B)^* = B^*.A^*$$

Definitions

Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$ **Matrice orthogonale** ssi:

$Q^T.Q = I$, I est la matrice **identite**.

- Rq: Une matrice orthogonale conserve la norme: Si on prend un vecteur de Q alors

$$\begin{aligned} \|Qx\| &= \|x\| \\ \Rightarrow \|x\| &= \sqrt{(x, x)} \end{aligned}$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ **hermitienne** ssi $A^* = A$ dans les Reel cela signifie **symetrique**

- Exemple: Soit $u \in \mathbb{C}^n$ (non nul et unitaire), $unitaire \iff \|u\| = 1$ et on pose $H = I_n - 2uu^*$
H est une matrice **hermitienne** et unitaire (matrice d'Hauseholder)

Theoreme (Schur)

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exists u$ unitaire tq

$u^* A u = T$ (matrice triangulaire superieur)

Les elements diagonaux de T sont les **valeurs propres** de la matrice (λ_i) . Chaque **valeur propre** a un **vecteur propre** associe.

$$A.v_i = \lambda_i.v_i$$

L'ensemble des valeurs propre de A est le **spectre** de A.

- Def: le **rayon spectral** de A est le max de (λ_i) .

Ex1:

Soit $A \in M_n(\mathbb{Q})$

Montrer que A est **hermitienne** $\iff \exists u$ unitaire tq $u^* A u = D =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Supposons A hermitienne $A^* = A$

$A \in M_n(\mathbb{C}), \exists u \in M_n(\mathbb{C})$ (unitaire)

$u^* A u = T$ (T triangulaire superieur)

$t_{ii} = \lambda_i$ (λ_i appartient au spectre de A)

$T^* = (u^* A u)^* = u^* A^* (u^*)^* = u^* A u = T T^* = T$ (T^* est triangulaire inferieur)

Donc T est **diagonale**. Et les valeurs propres sont reel. On peut demontrer la reciproque.