Introduction

Il y a deux domaines:

- Temporel: On observe les signaux.
- Fréquentiel: On traite les signaux.

Il nous faut donc un outil pour passer de l'un à l'autre.

Les outils sont différent en fonction des signaux. (Ex: continus..)

Nous allons étudier *la transformé de Laplace*.

Rappels

Résolution d'une équation différentielle linéaire et à coefficients constants

Exemple:

$$y''(t) + [y'(t)]^2 - 6y(t) = 12t + 20 \tag{1}$$

- inconnue: $y(t)$
- Equa diff du 2eme ordre

Méthode classique (2 étapes)

Premiere étape

ESSM (Equation Sans Second Membre)

On cherche la solution générale de:

$$y''(t) + [y'(t)]^2 - 6y(t) = 0 \tag{2}$$

On cherche la solution sous la forme:

$y(t) = e^{rt}$ On cherche r

$y'(t) = r.e^{rt}$
$y''(t) = r^2 e^{rt}$
$(r^2 + r - 6)e^{rt} = 0$

$r^2 + r - 6 = 0$ équation caractéristique.

$\Delta = 1 + 24 = 25$ Donc $r_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2$
$r_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$

Solution générale de l'ESSM:

$$y(t) = A.e^{2t} + B.e^{-3t} \tag{3}$$

Seconde étape

EASM éq avec second membre. On cherche une solution particulière.

$$y''(t) + u'(t) - 6y(t) = 12t + 20 \tag{4}$$

On peut trouver une solution particuliere de la meme forme que le second membre.

$y(t) = at + b$ On cherche a et b.

$y''(t) = 0$
$y'(t) = a$
$a - 6at - 6b = 12t + 20$
$\left\{\begin{matrix} a - 6b = 20 \\ -6a = 12 \implies a = -2 \end{matrix}\right\} \implies 6b = a - 20 = -22$
$b = -11/3$

- Solution générale de l'EASM =
- Solution générale de l'EASM +
- Solution particulière de l'EASM

$$y(t) = -2t - 11/3 + A.e^{2t} + B.e^{-3t} \tag{5}$$

A et B dépendent des 2 conditions initiales.

Produit de convolution

Soit $x(t)$ et $y(t)$

$$x)t_{\times}y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).y(t-\tau).d\tau \tag{6}$$

Proprétés:

- commutativité: $x(t) \times y(t) = y(t) \times x(t)$
- associativité: $x(t) \times [y(t) \times z(t)] = [x(t) \times y(t)] \times z(t)$

- distributivité / addition: $x(t) \times [y(t) + z(t)] = [x(t) \times y(t)] + [x(t) \times z(t)]$
- existe-t-il une "unité de convolution"?

$x(t) \times u(t) = x(t)$

Existe t il u(t) unité de convolution:

$$x(t) \times u(t) = u(t) \times x(t) = x(t), \forall x(t) \quad (7)$$

Si oui c'est le PIC de DIRAC (théoréme de distribution.

Transformation de Laplace

C'est une fonction complexe d'une variable complexe $p = \sigma + jw$

- w est la pulsation
- $w = 2\pi f$ ou f est la fréquence

$f(t) \implies F(p)$

$$F(p) \equiv \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt \quad (8)$$

Définition

Existence ? $F(p)$ existe pour tous les signaux f(t) que l'on peut rencontrer.

On suppose généralement que f(t) est *CAUSAL*.

Propriétés:

1. Linéaire: $L[\lambda.f(t) + \mu.g(t)] = \lambda.F(p) + \mu.G(p)$
2. Retard: $G(t) = f(t - \tau)$ Il y a un retard de τ

$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p}.F(p)$

3. Convolution: (compliqué dans l'espace temporel)

$L[x(t) * y(t)] = X(p).Y(p)$

Donc le produit de convolution est équivalent au produit ordinaire.

4. Dérivation / Intégration:

$L[\frac{df(t)}{dt}] = p.F(p) - f(t = 0)$

On fait souvent l'hypothése que les conditions initiales sont nulles $f(t = 0) = 0$

Il est donc trés facile de dériver dans l'espaec p.

- Dérivé 3 fois $\iff p^3.F(p)$
- Intégration dans l'espace t $\iff$ diviser par p dans l'espace p.

5. Th des valeurs INITIALE / Th de la valeur finale

Théoreme de la valeur initiale.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} [p.F(p)] \tag{9}$$

Théoreme de la valeur finale.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} [p.F(p)] \tag{10}$$

Tableau des transformées de laplace é;émentaires.

t	p
S(t)	1
$u(t)$ Déclaration unitaire	$\frac{1}{p}$
$t.u(t)$ rample unitaire	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$