Analyse matricelle de Gauss

$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \; \forall i = k+1 \dots n$

Soit $G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g_{nk} & 1 \end{pmatrix}$

$G^{(k)}.\tilde{A}^{(k)} = \tilde{A}^{(k+1)}$

$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)}.G^{(n-2)}.\tilde{A}^{(n-2)}$

Remarque:

$$detA = det(L.U)detA = detU = \pi_{k=1}^{n} a_{kk}^{(n)} \tag{1}$$

Gauss est bien meilleur que la methode de **Cramer**

Algo de CHOLESKY

Thm: Une matrice $A \in \mathcal{M}n(\mathbb{R})$ est symetrique definie positivement si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inferieure inversible telle que $A = L^t L$

A est S.D.P

${}^tA = A$
$(Ax, x) =^t xAx > 0$ (x est un vectuer)

$Ax = b$
$L^t Lx = b \implies \begin{cases} Ly = b \\ {}^tLx = y \end{cases}$

Construction de L

$L = (lij = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{1n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$
$A = L^t L$
$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}$ avec $j \leq i$

$a_{11} = l_{11}^2 \implies l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
$a_{i1} = l_{i1} l_{11} \implies l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$

Par recurrence supponsons connues les $(k-1)$ premieres colonnes de L.

$a_{kk} \sum_{j=1}^{k} l_{kj}^2 = l_{kk}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2$

$$\boxed{l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}}$$

$a_{ik} = \sum_{i=1}^{k} l_{ij} l_{kl}$

$a_{ik} = l_{ik} l_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}$

$$\boxed{l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}}}$$

Complexite

$$\boxed{T_{CH} = \frac{2n^3 + 15n^2 + n}{6}}$$