第一次作业：

2-4.

解：a. (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)

b. 满足A[1] > A[2] > …… > A[n]的数组即 < n, n-1, …, 2, 1 > 具有
多逆序对，有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个

C. 逆序对越多，则插入排序要做的比较越多，运行时间越长。

d. 利用分治法，伪代码如下：

证明？ -5

```
COUNT-INVERSIONS(A, p, r)
    inversions = 0
    if p<r
        q = ⌊(p+r)/2⌋
    inversions = inversions + COUNT-INVERSIONS(A, p, q).
    inversions = inversions + COUNT-INVERSIONS(A, q+1, r)
    inversions = inversions + MERGE-INVERSIONS(A, p, q, r)
```

```
MEGRE-INVERSIONS(A, p, q, r)
  n1 = q-p+1
  n2 = r-q
  let L[1, ……, n1+1] and R[1, ……, n2+1] be new arrays
  for i=1 to n1
     L[i] = A[p+i-1]
  for j=1 to n2
     R[j] = A[q+j]
  L[n1+1] = ∞
```

$R[n_2+1]=\infty$

$i=1$

$j=1$

inversions $=0$

counted $=$ FALSE

对L[ ]和R[ ]均进行归并排序

for $k=p$ to r

if counted $==$ FALSE and $R[j]<L[i]$

inversions $=$ inversions $+n_1-i+1$

counted $=$ TRUE

if $L[i]\le R[j]$

$A[k]=L[i]$

$i=i+1$

else $A[k]=R[j]$

$j=j+1$

counted $=$ FALSE

return inversions

4.1-5.

解：从第一个正数起，记当前和、最大子数组和

①按数组顺序更新当前和为加上下一个元素，并以"打擂"方式更新最大子数组和

②若当前和大于0便产生第一个正数，重复执行①过程

③若当前和小于等于0，则当前和无用，开始寻找第一个正数并在找到后重新计算当前和，再执行②过程.

以此类推，直至遍历到最后一个元素，即可得出最大子数组. 时间复杂度为$O(n$

4.3-2.

解：取 $c>0$，使 $T(n)\le c\lg n$

则 $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \le c\lg\frac{n}{2}$

$\therefore T(n) \le c\lg\frac{n}{2}+1$

$= c\lg n - c\lg 2 + 1$

$\le c\lg n$

其中，只要 $c\ge 1$，最后一步都会成立

$\therefore T(n)\le c\lg n$　　$T(n)\le c\lg(n-2)$

$T(1)=c\lg 1$

$\therefore T(n)=O(\lg n)$　　-5

4.3-9.

解：令 $m=\lg n \Rightarrow n=2^m$

$T(2^m)=3T(2^{\frac{m}{2}})+m$

记 $T(2^m)=F(m)$

$\therefore$ 有 $F(m)=3F(\frac{m}{2})+m$

猜测 $F(m)=O(m\lg m)$

对 $c>0$ 有 $F(m)\le cm\lg m$　　$F(m)\le cm^{\lg 3}+dm$

$F(m)\le 3[c\cdot\frac{m}{2}\lg(\frac{m}{2})]+m$

$\le \frac{3}{2}c\lg\frac{m}{2}+m$

$=\frac{3}{2}cm\lg m-\frac{3}{2}cm\lg 2+m$　　-5

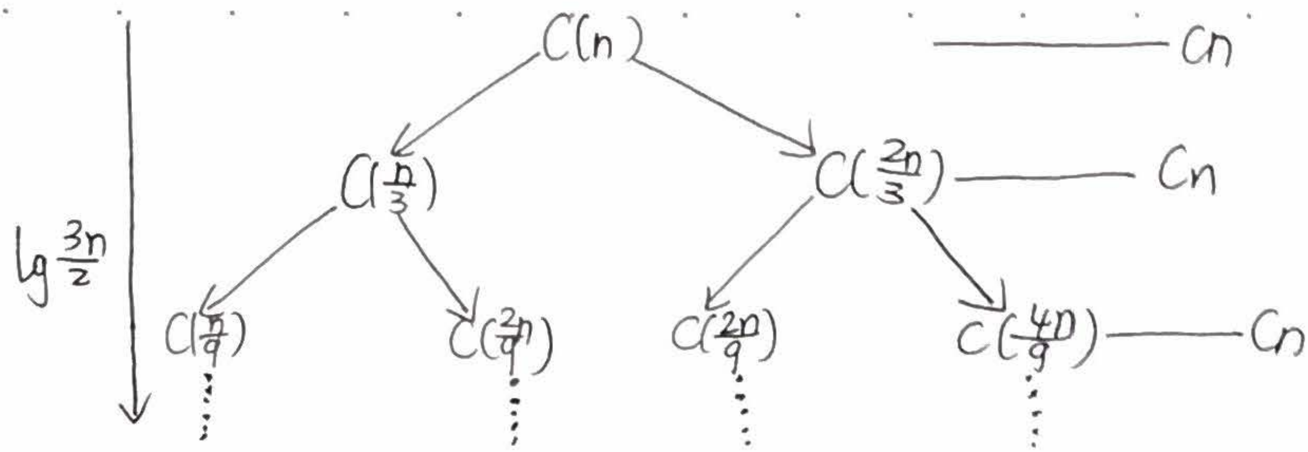
$=km\lg m\ (k=\frac{3}{2}c)$

$\therefore$ 有 $T(n)=O(\lg n\lg n)$

若此式成立，c应该严格等于 $\frac{3}{2}$，c是后边是分治法分解问题和合并问题的时间代价，严格"c=$\frac{3}{2}$"并不现实。

4.4-6.

解：递归树如下所示：



从根结点到叶子结点的最长路径为 $n\to\frac{2}{3}n\to(\frac{2}{3})^2n\to\dots\to 1$

当 $k=\log_{\frac{3}{2}}n$，即树的最长路径长度时 $(\frac{2}{3})^k n=1$

当 $k=\log_3 n$，即树的最短路径长度时 $(\frac{1}{3})^k n=1$

∵每层开销均为 cn

∴解为 $cn\log_3 n=\Omega(n\log n)$

4.5-1.

解：a、该递归式与 $T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$ 相比（主方法）

有 $a=2$，$b=4$

∵ $\log_4 2=\frac{1}{2}$　　∴ $n^{\log_b a}=\sqrt{n}$

又∵ $f(n)=1=O(n^{\log_b a-k})$ 且 $k=\frac{1}{2}$

∴ $n^{\log_b a}>f(n)$

$T(n)=\Theta(\sqrt{n})$

b、该递归式与 $T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$ 相比

其中 $a=2$，$b=4$

∵ $\log_b a=\log_4 2=\frac{1}{2}$

∴ $n^{\log_b a}=\sqrt{n}$

又∵ $f(n)=\sqrt{n}=n^{\log_b a}$

∴ $T(n)=\Theta(\sqrt{n}\lg n)$

c、该递归式与 $T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$ 相比.

其中 $a=2$，$b=4$

$\log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\therefore n^{\log_b a} = \sqrt{n}$

又 $\because f(n) = n = \Omega(n^{\log_b a + k})$ 其中 $k=\frac{1}{2}$

$\therefore n^{\log_b a} < f(n)$

$\therefore T(n) = \Theta(n)$

d. 将该递归式与 $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ 比较

其中 $a=2$，$b=4$

$n^{\log_b a} = \sqrt{n}$

又 $\because f(n) = n^2 = \Omega(n^{\log_b a + k})$ 其中 $k=\frac{3}{2}$

$\therefore n^{\log_b a} < f(n)$

$\therefore T(n) = \Theta(n^2)$

4.5-4.

解：不满足主定理中的任意一种情况

$T(n) = \lg n T(1) + n^2 \lg n + n^2 \lg \frac{n}{2} + \ldots + n^2 \lg \frac{n}{2^{\lg n}}$

$= n^2 \lg_2 \lg n$

$\therefore T(n) = n^2 \lg n$

$\therefore$ 该递归式的渐近上界为 $\theta(n^{2+\varepsilon})$ $\varepsilon \approx 0.2$

猜 $T(n) \le cn^2 \lg^2 n$

-5

80

第二次作业：

15.1-3：

解：将问题更改为每做一次切割要付出固定成本 C．那当钢条长度为0和不做切割时不用付出成本 C。

故对于 r_n $(n\geq 1)$，用更短的钢条的最优切割收益描述它变为：

$$r_n = \max(p_n, r_1 + r_{n-1} - C, r_2 + r_{n-2} - C, \dots, r_{n-1} + r_1 - C)$$

故用带备忘的自顶向下法实现为：

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
    let r[0...n] be a new array
    for i=0 to n
     r[i]=-∞
    return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
    if r[n]≥0
        return r[n]
    if n==0
        q=0
    else  q=-∞
      for i=1 to n-1   //为n时无切割成本
         q=max(q, p[i]+MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n-i, r
    q=max(q-C, p[n])
    r[n]=q
    return q
```

-5

最后结果和无切割成本的p(n)做比较

15.2-1：

解：由题意得：

矩阵	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
规模	5×10	10×3	3×12	12×5	5×50	50×6

由MATRIX-CHAIN-ORDER得到m、s表如下：

m：

	1	2	3	4	5	6
6	m[1,2]+m[3,6]+5×3×6	m[2,2]+m[3,6]+10×3×6	m[3,4]+m[5,6]+3×5×6	m[5,6]+12×5×6	5×50×6	0
5	m[1,4]+m[5,5]+5×5×50	m[2,2]+m[3,5]+10×3×50	m[3,4]+3×5×50	12×5×50	0	
4	m[1,2]+m[3,4]+5×3×5	m[3,4]+10×3×5	3×12×5	0		
3	m[1,2]+5×3×12	10×3×12	0			
2	5×10×3	0				
1	0					

s：

	1	2	3	4	5
6	2	2	4	4	5
5	4	2	4	4	
4	2	2	3		
3	2	2			
2	1				

∴由上得 $s[1,6] \to ((A_1A_2)(A_3A_4A_5A_6))$

$s[1,2] \to (A_1A_2)$

$s[3,6] \to (A_3A_4)(A_5A_6)$

故最终其最优括号化方案为 $(A_1A_2)((A_3A_4)(A_5A_6))$

且 $m[1,6]=m[1,2]+m[3,6]+5\times3\times6$

$=150+(m[3,4]+m[5,6]+3\times5\times6)+90$

$=150+(180+1500+90)+90$

$=2010$

★15.2-5：

解：观察MATRIX-CHAIN-ORDER的伪代码，可得知3层循环，最里层循环调用m[i,j]的次数固定为2次，故：

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} R(i,j) = \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{n-l+1}\sum_{k=i}^{i+l-2} 2 \quad ★$$

$$= \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{n-l+1} 2(l-1)$$

$$= \sum_{l=2}^{n} 2(l-1)(n-l+1)$$

设 $t=l-1$，则原式 $= \sum_{t=1}^{n-1} 2t(n-t)$

$$= 2\sum_{t=1}^{n-1}(nt-t^2)$$

$$= 2\sum_{t=1}^{n-1} nt - 2\sum_{t=1}^{n-1} t^2$$

$$= \cancel{2}n\frac{(1+n-1)(n-1)}{\cancel{2}} - \cancel{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{\cancel{6}\,3}$$

$$= n^2(n-1) - \frac{(n-1)(2n^2-n)}{3}$$

$$= \frac{n^3-n}{3}$$

故得证.

(方法二)：由书P214页m表可知只有计算 $m[1\ldots i-1, j]$ 和 $m[i, j+1\ldots n]$ 时才会访问 $m[i,j]$，即共计 $i-1+n-j$ 次。

即：$R(i,j) = i-1+n-j$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} R(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(i-1+n-j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1+n$$

15.3-6：

解： ①当交易佣金为0，即不需要支付佣金时：

假设从货币1到货币k，要取得最优兑换序列，所做的最后一次兑换是从货币i兑换到了货币k。那么从货币1到货币i必然是其区间的最优兑换序列。如果不是，那么我们可以找到一个从货币1到货币i的兑换策略其收益大于原从货币1到货币k的兑换序列，我们用新找到的从1到i的兑换策略替换原来1到i的序列，从而使得原从1到k的问题得到更大的收益，这与最初的解是原问题最优解的前提相矛盾。因此，不可能存在更优的解。原问题的子问题的解应是其自身的最优解，故该问题具有最优子结构性。

②当交易需要支付佣金，k次交易需支付c_k佣金，c_k为任意值时：

$$D_m = \max\{(D_i - c_i) r_{i,j}\}$$
$$= \max\{D_i r_{i,j} - c_i r_{i,j}\}$$

两个子问题相关，具有相同变量$r_{i,j}$，且个原问题的一个子问题的解会影响另一个子问题的解，不具备最优子结构性。

如：用数据

$r_{i,j}$	1	2	3	4
1	1	2	$\frac{5}{2}$	6
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	3
3	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	1	3
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Let $c_1=2$ and $c_2=c_3=3$

此时从货币1到货币4的最优兑换序列为：$1\to2\to3\to4$，

收益为：$2\times\frac{3}{2}\times3 - c_3 = 9-3=6$

而从货币1到货币3的最优兑换序列为：$1\to3$，

收益为：$\frac{5}{2} - c_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ 并不是 $1\to2\to3$：$2\times\frac{3}{2} - c_2 = 3-3=0$

即：从$1\to4$的最优并不含从$1\to3$的最优.

故该问题不具有最优子结构性。

15.4-1:

解：

i	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_j		0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	↑0	↖1	←1	↖1	↖1	←1	↖1	↖1	←1
2	0	0	↖1	↑1	↖2	←2	←2	↖2	←2	←2	↖2
3	0	0	↖1	↑1	↖2	↑2	↑2	↖3	←3	←3	↖3
4	1	0	↑1	↖2	↑2	↖3	↖3	↑3	↖4	↖4	←4
5	0	0	↖1	↑2	↖3	↑3	↑3	↖4	↑4	↖4	↖5
6	1	0	↑1	↖2	↑3	↖4	↖4	↑4	↖5	↖5	↑5
7	0	0	↖1	↑2	↖3	↑4	↑4	↖5	↑5	↑5	↖6
8	1	0	↑1	↖2	↑3	↖4	↖5	↑5	↖6	↖6	↑6

故按行主次序，得到 LCS 一个为：

⟨1, 0, 0, 1, 1, 0⟩

15.5-2.

解：由算法OPTIMAL-BST(p, q, n)的伪代码得出了关键字的e、w、root表分别如下：

e:

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8
7	3.12	2.61	2.13	1.55	1.20	0.78	0.34	0.05
6	2.44	1.96	1.48	1.01	0.72	0.32	0.05	
5	1.83	1.41	1.04	0.57	0.30	0.05		
4	1.34	0.93	0.57	0.24	0.05			
3	1.02	0.68	0.32	0.06				
2	0.62	0.30	0.06					
1	0.28	0.06						
0	0.06							

计算时 倒数第一行：$e[1,0] = q_0$

$e[2,1] = q_1$

$e[3,2] = q_2$

……

倒数第二行：$e[1,1] = e[1,0] + e[2,1] + w[1,$

$e[2,2] = e[2,1] + e[3,2] + w[2,$

……

倒数第三行：$e[1,2] = \min\begin{cases} e[1,0]+e[2,2]+w[1, \\ e[1,1]+e[3,2]+w[1, \end{cases}$

……

倒数第四行：$e[1,3] = \min\begin{cases} e[1,0]+e[2,3]+w[1,3 \\ e[1,1]+e[3,3]+w[1,3 \\ e[1,2]+e[\end{cases}$

基

w:

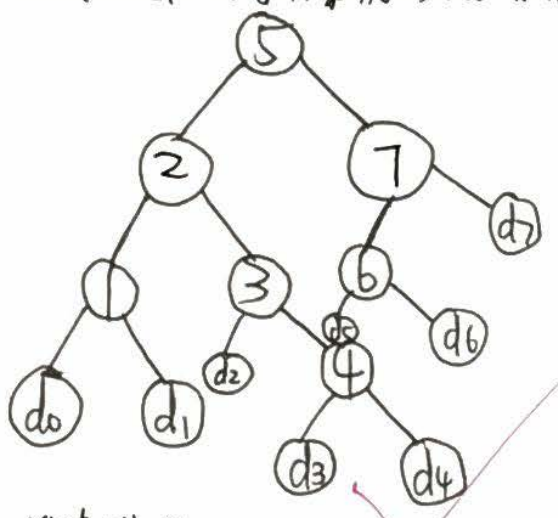
	i=1	2	3	4	5	6	7	8
7	1.00	0.90	0.78	0.64	0.56	0.41	0.24	0.05
6	0.81	0.71	0.59	0.45	0.37	0.22	0.05	
5	0.64	0.54	0.42	0.28	0.20	0.05		
4	0.49	0.39	0.27	0.13	0.05			
3	0.42	0.32	0.20	0.06				
2	0.28	0.18	0.06					
1	0.16	0.06						
0	0.06							

计算时 $w[i, j] = w[i, j-1] + p_j + q_j$

root:

	i=1	2	3	4	5	6	7
7	5	5	5	6	6	7	7
6	3	5	5	5	6	6	
5	3	3	4	5	5		
4	2	3	3	4			
3	2	3	3				
2	2	2					
1	1						

故综上计算和画表可得其最优二叉搜索树为：



搜索代价 $e[1, 7] = 3.12$

15-9.

解：设m[i,j]为每次从i到j拆分花费的代价。用s[i,j]保存i→j中最优拆分点，L[n]表示有n个字符的字符串，以L作为算法输入参数：

则有：

$$m[i,j]=\begin{cases}0 & i=j\\ \min\limits_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+\underbrace{\min\{L[j]-L[k]+1,\ L[k]-L[i]+1\}}_{\text{为此次拆分花费的代价}}\} & i<j\end{cases}$$

每次划分可以选择拷贝右边的还是左边的.

算法伪代码如下：

```
MIN-Time(L)
  t=L.length-1
  let m[1...t, 1...t] and s[1...n-1, 2...n] be new tables
      (m: 记录拆分代价)  (s: 记录最优拆分点)
  for i=1 to t
      m[i,j]=0
  for l=2 to t
      for i=1 to t-l+1
          j=i+l-1
          m[i,j]=∞
          for k=i to j-1
              q=m[i,k]+m[k+1,j]+min{L[j]-L[k], L[k]-L[i]}+1
              if q<m[i,j]
                  m[i,j]=q
                  s[i,j]=k
  return m and s
```

构造生成最优解，上述S为全局变量：

```
PRINT(S,1,m)
  if i==j return;
  else print('%d', s[i,j]), PRINT(S,i,s[i,j]); PRINT(S, s[i,j]+1, j)
```

15-11.

解：依然运用自底向上算法，设r[n]保存每个子问题的最小化成本，即每个子问题的最优解。设P为需要付出的额外代价，即：如果有设备未售出而剩余，则P为库存成本，否则，P为额外劳动的雇佣成本.

```
MIN-COST(D, P)
  Let r[0...n] be a new array
    r[0]=0
    for j=1 to n
      q=+∞
      for i=1 to j
        q=min{q, p[i]+r[j-i]}
      r[j]=q
  return r[n].
```

时间复杂度说明?

16.1-4

解：修正算法：用这种算法的时间是将活动按时间来进行排序的时间将所有的活动按开始时间和结束时间排序，按照活动开始时间进行遍历，把每个活动分配到那个时刻空闲的教室。同时维护两个列表：在时刻t空闲的教室列表free和已经安排了活动i的教室列表busy（活动：开始$s_i \le t$，结束$f_i > t$）。当t是某个活动的开始时刻时，把该活动分配到一个空闲教室，然后把该教室从free列表中移到busy列表。

当t是某个活动的结束时刻时，把该活动分配的教室，从busy列表中移到free列表中。
为了避免使用不必要的教室，在分配教室时，总是分配已经办过活动的教室，如果[redacted]没有，再启用新教室
这就保证了使用尽可能少的教室。

16.2-6

解：分数背包问题 $O(n)$

改进的算法中不需对重量进行排序，因为如果n种物品重量和不大于W，无需知道它们之间的顺序。

运行时间：$T(n)=T(\frac{n}{2})+cn$ 同时 $T(1)=d$

时间复杂度为 $O(n)$

$O(n)$ 算法：　$avg_i=\frac{v_i}{w_i}$

选择一个物品作为主元，对所有物品进行Paitition操作。

将avg分为三个集合 $G=\{a_i: avg_i>m\}$ $Q=\{a_i: avg_i=m\}$ $P=\{a_i: avg_i<m\}$ 分别对G、Q、P中元素重量求和，得 S_G, S_Q, S_P

①若 $W<S_G$，则令物品集合为 $O=G$，对集合O递归进行上述操作

②若 $S_G\le W\le S_G+S_Q$，则G中集合元素全部放入包中，然后对Q重复①②

③若 $W>S_G+S_Q$，则将G、Q中元素全部放入包中，令物品集合 $O=P$，总重 $W=W-S_G-S_Q$，递归进行上述过程.

16.2-7

解：由题意可知，特定排序不会影响结果，假设A中元素按照升序排列。

接下来证明当B也按照升序排列时，回报最大化。

用反证法，假设不成立，存在 $i<j$ 使 $a_i<a_j$ 且 $b_i>b_j$.

考虑指数 b_i，b_j 对结果的影响，对于 $a_i^{b_i} a_j^{b_j}$，若交换 b_i 和 b_j 的顺序，则得到 $a_i^{b_j} a_j^{b_i}$

$$\because \frac{a_i^{b_j} a_j^{b_i}}{a_i^{b_i} a_j^{b_j}} = \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^{b_i - b_j} > 1$$

$$\therefore a_i^{b_j} a_j^{b_i} > a_i^{b_i} a_j^{b_j}$$

∴ 在B的这种排序下，回报不能最大化

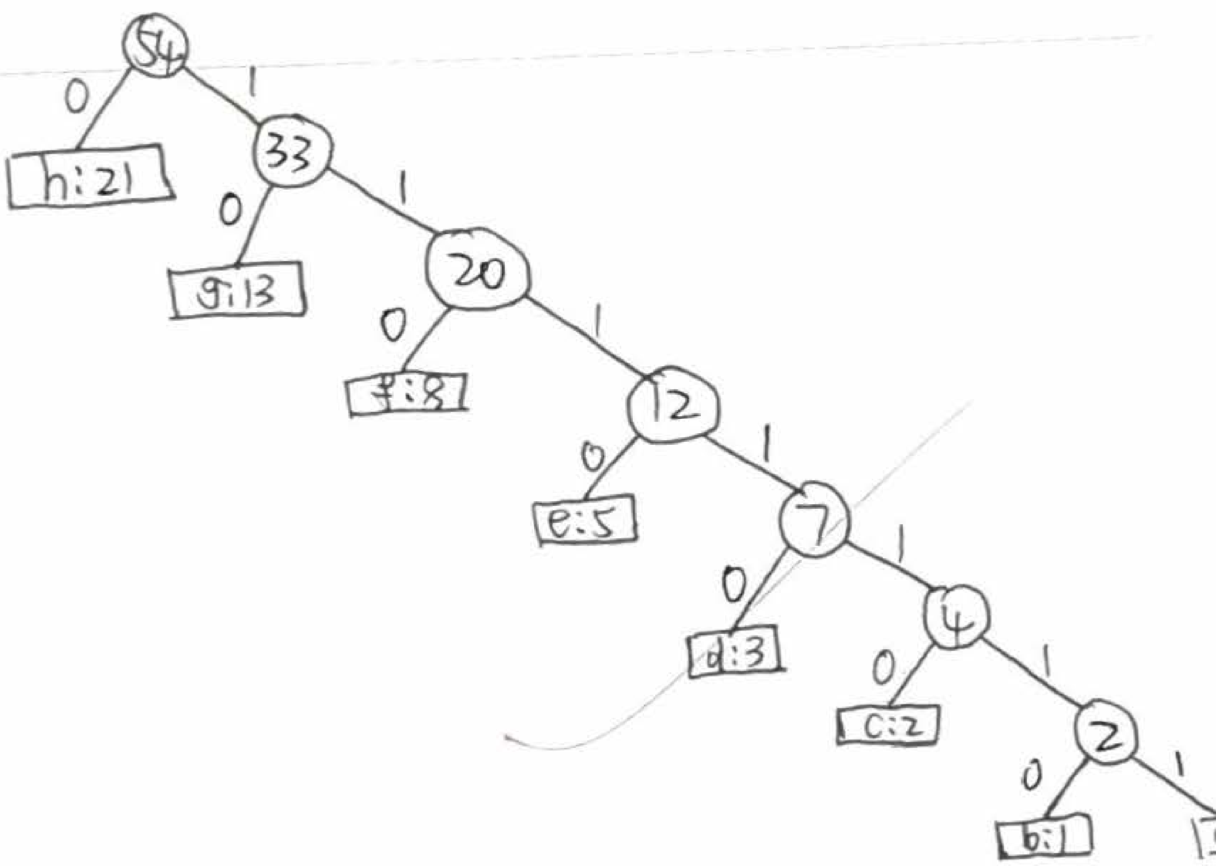
算法：将A升序排序且B升序排序时回报最大化

排序的时间复杂度为 $O(n\lg n)$

16.3-3

解：

a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	2	3	5	8	13	21



赫夫曼编码为：h:0 g:10 f:110 e:1110 d:11110 c:111110 b:1111110 a:1111111

推广：假设有n个字符，则第i个字符编码为：

$$\begin{cases} 若 i=1，有 n-1 位的"1" \\ 若 i>1，前 (n-i) 位是"1"，最后一位为"0" \end{cases}$$

16-1.

解：a) 总是给能给的最高面额的硬币

然后重复这个过程直到剩余找零的总量降到 0

b) 最理想方案 $(x_0, x_1, \dots x_k)$，x_i 表示硬币的面值 c^i 的数量

首先规定对于每个 $i<k$ 有 $x_i<c$

假设我们有 $x_i \geq c$，就能让 x_i 减 c 同时 x_{i+1} 加 1

这样做使硬币总数减 1 同时总金额没有变化

因此最初的解决办法不是最理想的

这种硬币的分配方案和使用贪心算法每次尽可能取最高面值

的硬币相同。这是因为总值 V，$x_k = \lfloor Vc^{-k} \rfloor$ 并且对于 $i<k$，有

$x_i \lfloor (V \bmod c^{i+1}) c^{-i} \rfloor$。

这是唯一一种满足性质（除了最大面值的硬币没有其他的 $\geq c$）

因为硬币总量是 $V \bmod c^k$ 的 c 基础代表

c) 硬币面额为 $\{1, 3, 4\}$，找零 6

贪心算法算出方案 $\{1, 1, 4\}$，而最佳方案为 $\{3, 3\}$

d) 算法 MAKE-CHANGE(S, V) 是一个动态规划解法

第一个 for 循环运行 n 次，内层 for 循环运行 k 次，之后当循环

最多运行 n 次时，总运行时间为 $O(nk)$

MAKE-CHANGE(S, V)

let numcoins and coin be empty arrays of length V and any any attempt to access them at indices in the range -max(S), -1 should return ∞

```
for i from 1 to V do
    bestcoin = nil
    bestnum = ∞
    for c in S do
        if numcoins[i-c] + 1 < bestnum then
            bestnum = numcoins[i-c]
            bestcoin = c
        end if
    end for
    numcoins[i] = bestnum
    coin[i] = bestcoin
endfor
let change be an empty set
iter = V
while iter > 0 do
    add coin[iter] to change
    iter = iter - coin[iter]
endwhile
return change
```

25

设计证明题：

22.2-7

解：给每个结点增加一个属性，定为好人或坏人

链表中的结点的属性必与该链表头结点属性相反，按照这个规则去遍历链表，第一个链表表头结点属性设为好人。若在遍历过程中，发现新定义的属性和先前定义的属性有冲突，则不可以划分，否则可以划分，并且属性为好人和坏人的结点就是相应的划分。

由于使用BFS算法，所以复杂度为O(n+r)

24.1-3

解：若经过一轮松弛操作后，各点记录均无变化，则表明到达最后状态，可在松弛分支语句中加入对标志位的修改，若未修改，则表明无变化。

代码如下：

```
BELLMAN-FORD-UP(G, w, s)
INITIALIEE-SINGLE-SOURCE(G, s)
   flag=1
while(flag){    flag=0
   for each edge(u, v)∈G, E
      RELAX(u, v, w)
   for each edge(u, v)∈G, E
      if(v.d > u.d + w(u, v)){
            flag =1
            return FALSE
   return TRUE
```

24-3.

解：由$R[i_1, i_2] \cdot R[i_2, i_3] \cdot \ldots \cdot R[i_{k-1}, i_k]$

$= \lg R[i_1, i_2] + \lg R[i_2, i_3] + \ldots + \lg R[i_{k-1}, i_k]$

则不等式可转化为：

$(-\lg R[i_1, i_2]) + \ldots + (-\lg R[i_k, i_1]) < 0$

由可令n种货币为n个结点，$-\lg R[i_1, i_2]$为货币C_1到C_2的边权重。

则问题转化为寻找图中负环路问题。

a. 可对Floyd-Warshall算法改进实现。

当运行Floyd-Warshall算法时，检测到有：$D^{(k)}[i, i] < 0$ 则提出算法.

Floyd-Warshall运行时间为$O(n^3)$，则运行时间为$O(n^3)$

b. 由Floyd-Warshall的前驱矩阵可找出路径，运行时间为$O(n^2)$

25-1.

解：a、若插入边(x, y)则有如下更新

```
Update(t, u, v)
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      t_ij^(k+1) = t_ij^(k) ∨ (t_ia^(k) ∧ t_bj^(k))
  return T^(n)
```

运行时间为$O(n^2)$

b、可给出一个链式：

$1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n$

则在布尔矩阵中有$O(n^2)$个0，此时给出边$(n, 1)$，则需把$O(n^2)$个0更新为1.

c. 对于每个顶点我们都有一棵树，树中的顶点能够有路径通往树

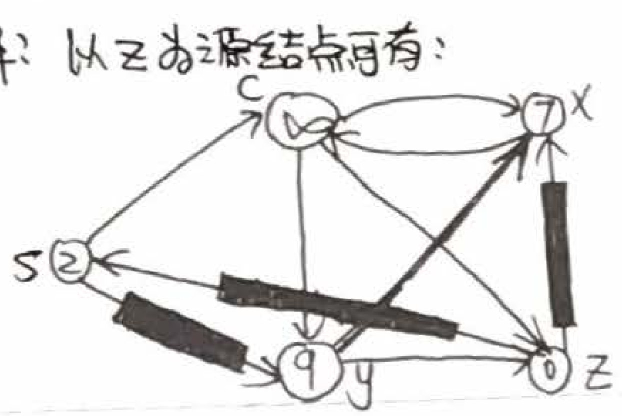
中的每个顶点，以及第一棵树包含能够从该顶点出发到达的顶点，第二棵树即可每一步的传递闭包，这样每插入一条边(u,v)，首先关注u的后继，把v加入后继中，如果在这一过程中不插入边，就可以在这棵树中停止搜索，对v的祖先进行同样操作。

最坏情况时间复杂度证明

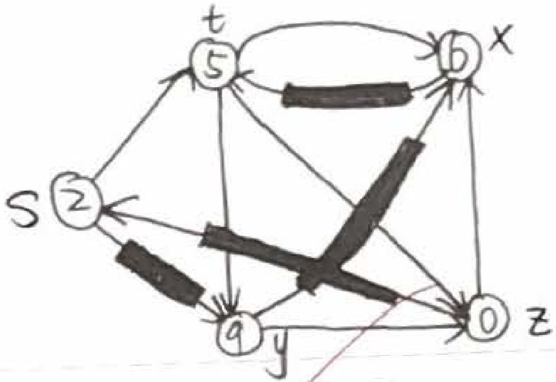
计算题：

24.1-1

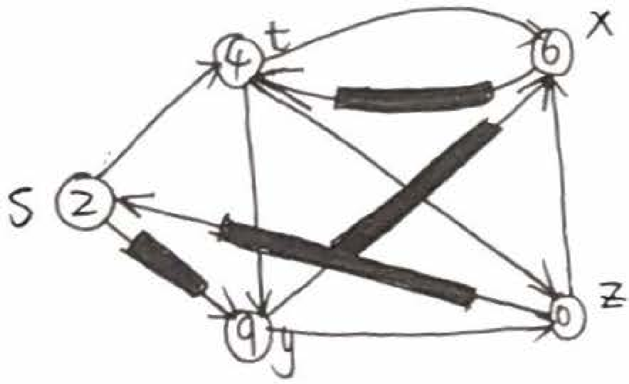
解：以z为源结点可有：



①



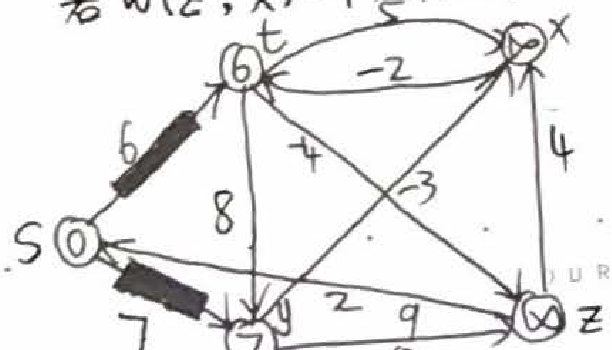
②

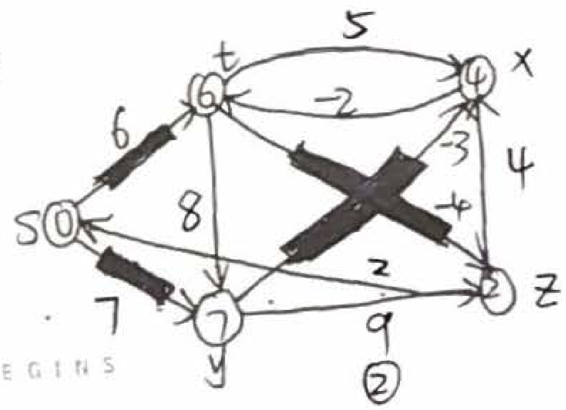


③

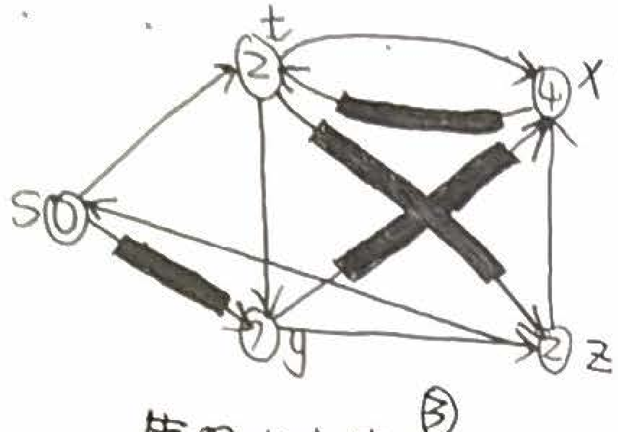
第④⑤次均与第③次结果相同。

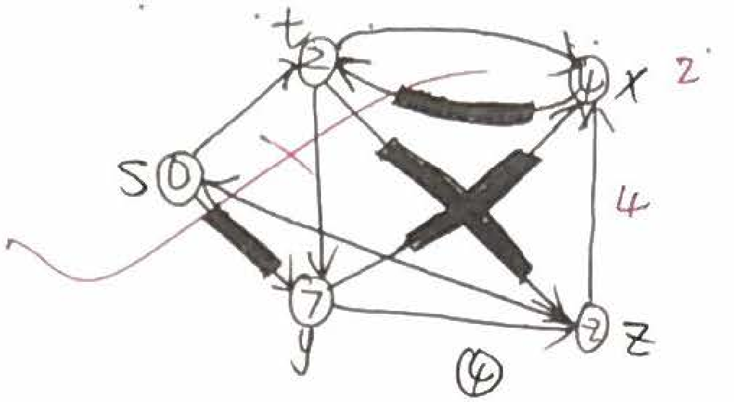
若w(z，x)=4，以s作源结点，有：





②





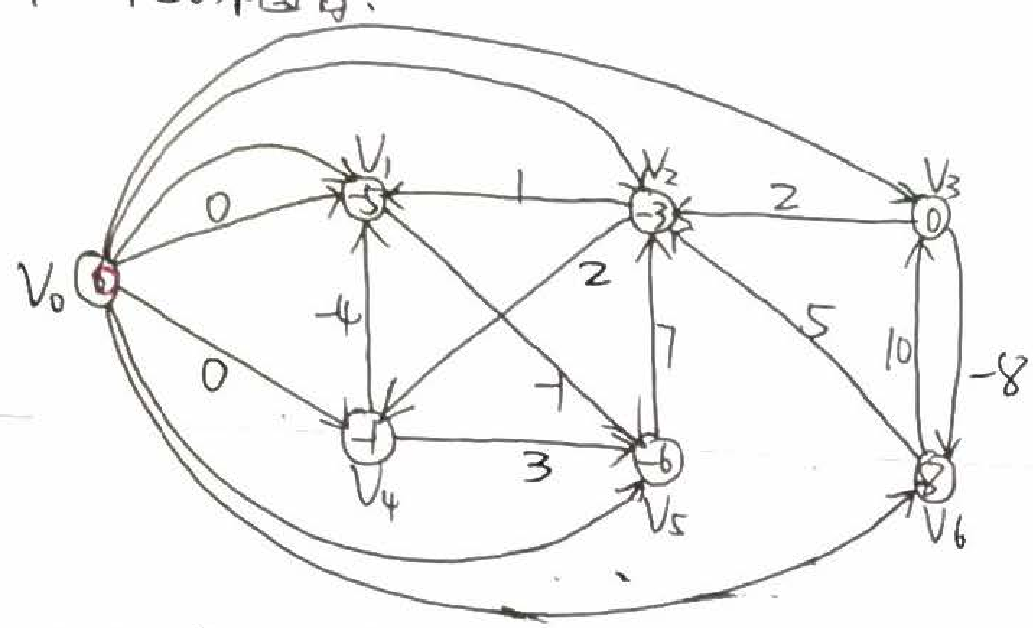
第⑤次与第④次相同.

24.4-1

解：作约束图有：

没有输出正确值　存在权重为负值的环路.

t ← x
↘ z ↗



运行Bellman Ford算法 可有：$X_1=-5$　$X_2=-3$　$X_3=0$　$X_4=-1$　$X_5=-6$　$X_6=-8$

25.2-1

解：

$$D^{(0)}=\begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & -8 \\ -4 & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{vmatrix} \qquad D^{(1)}=\begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & -8 \\ -4 & \infty & \infty & 0 & -5 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{vmatrix}$$

$$D^{(2)}=\begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 0 & \infty \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 & -8 \\ -4 & \infty & \infty & 0 & -5 & \infty \\ 8 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 6 & 5 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} \qquad D^{(3)}=\begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 0 & \infty \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 & -8 \\ -4 & \infty & \infty & 0 & -5 & \infty \\ 8 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 6 & 5 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ -2 & 0 & \infty & 2 & 0 & \infty \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ -4 & \infty & \infty & 0 & -5 & \infty \\ 5 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & \infty & 8 & -1 & \infty \\ -2 & 0 & \infty & 2 & -3 & \infty \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & [illegible] \\ -4 & 2 & \infty & 0 & -5 & \infty \\ 5 & 7 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

思考题：

25.2-6

解：若存在负权值的环路，则在最后通过Floyd-Warshall算法迭代生成的矩阵中，对角线上的值存在负值.