2018 ～ 2019 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷) (闭卷)

院(系)____________专业班级______________学号________________姓名_____________

考试日期：2018 年 12 月 2 日　　　　　　　　　　　　　　考试时间：8:30 ~ 11:00

一、单项选择题 (*每题 2 分，共 24 分*).

1. 复数 $3-2i$的主辐角为：(　　)

A．$-\arctan\frac{3}{2}+\pi$，　　B．$-\arctan\frac{2}{3}+\pi$，　　C．$-\arctan\frac{2}{3}$，　　D．$-\arctan\frac{3}{2}$.

2. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$的值为：(　　)

A．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　B．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　C．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　D．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 在复平面上，下列哪个方程不能表示以z_0为圆心，以$r(>0)$为半径的圆周？(　　)

A．$|z-z_0|=r$，　　B．$|z|^2-z_0\bar{z}-\overline{z_0}z+|z_0|^2-r^2=0$，

C．$(z-z_0)^2=r^2$，　　D．$z=z_0+re^{-i\theta}(0\le\theta\le2\pi)$.

4. 若复变函数$f(z)=v+ui$在区域 D 内解析，则在区域 D 内下列说法一定正确的是：(　　)

A. u是v的共轭调和函数，　　B. v是u的共轭调和函数,

C.$-u$是v的共轭调和函数，　　D. u是$-v$的共轭调和函数.

5. 若曲线 C 为 $z=t-t^2i, 0\le t\le1$，则积分$\int_C (z-1)dz$的值为：(　　)

A．1，　　B．-1，　　C．$1+i$，　　D．$1-i$.

6. 积分$\oint_{|z|=1}\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right)dz$的值为：(　　)

A．$2\pi i$，　　B．$4\pi i$，　　C．0，　　D．$-2\pi i$.

7. 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-1)^n$ 在点$z=3$收敛，则该级数一定收敛的点为：(　)

A．$-2+\sqrt{3}i$，　　B．$2+\sqrt{3}i$，　　C．$-1+\sqrt{3}i$，　　D．$1+\sqrt{3}i$.

8. 函数$f(z)=\frac{1}{z}+1+2z$ 在无穷远点的留数为：(　　)

A．-1，　　B．1，　　C．-2，　　D．2.

9. $z=0$是函数 $f(z)=\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的 (　　).

A．可去奇点，　　B．本性奇点，　　C．极点，　　D．非孤立奇点.

10. 级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$的收敛环域为：(　　)

A．$\frac{1}{2}<|z|<3$，　　B．$2<|z|<3$，　　C．$\frac{1}{3}<|z|<2$，　　D．$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$.

11. 函数$F(\omega)=e^{\omega j}$的 Fourier 逆变换$f(t)$为：(　　)

A .$2\pi\delta(t-1)$，　B．$2\pi\delta(t+1)$，　C．$\delta(t-1)$，　D．$\delta(t+1)$.

12. 函数$f(t)=(t-1)\,(sint\,)\delta(t-2)$的 Fourier 变换$F(\omega)$为：(　　).

A． $e^{-2\omega j}\sin 2$，　B .0，　C .$e^{2\omega j}\sin 2$，　D．$\sin 2$.

二、(*12 分*) 已知$u(x,y)=2(x-1)y$，验证$u(x,y)$为调和函数，并求二元函数$v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，且满足$f(2)=-i$.

三、(*12 分*) 将函数$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}$在点$z_0=3$展开为 Laurent 级数。

四、计算下列积分(**每题 5 分，共 10 分**).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}}\,dz$.　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}\,dz$.

五、计算下列积分(**每题 5 分，共 10 分**).

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\sqrt{2}x}{x^4+1}\,dx$.　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5}\,dz$.

六、(*6 分*) 求区域$D=\{z=x+yi:\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$在映射$w=\sqrt{\frac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$下的像.（**答题过程需用图形表示**）

七、(*10 分*) 求一共形映射$w=f(z)$，将z平面上的区域$D=\{z:\ |z|<1,\ |z+\sqrt{3}|<2\}$映射到$w$平面的上半平面.（**答题过程需用图形表示**）

八、(*10 分*) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$x''(t)+x(t)=-3\cos 2t,\quad x(0)=1,\ ,x'(0)=1.$$

九、(*6 分*) 设函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内满足条件：(1). 除一阶极点z_0外处处解析，(2). 只有一个一阶零点z_1，且$|z_1-z_0|<r<R$. 证明：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=z_1-z_0$.

附：选择题答案：**C B C A B C ； D A D B D A。**