考试题型

一、选择题（12 个单选题）

二、计算题

- 构造解析函数
- 将函数展开为 Laurent 级数
- 利用留数计算闭路积分
- 计算定积分
- 求象区域
- 构造保形映射
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

三、证明题

复变函数与积分变换试题(2019)

一、单项选择题（每题 2 分，共 24 分）.

1. $(1+i)^i$ =(　　)　（下列 k 均为任意整数）

A. $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln 2}$，　B. $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\ln 2}$，　C. $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$，　D. $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$。

2. $z=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi-i\cos\frac{2}{3}\pi\right)$的指数表示为(　　)

A. $2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$，　B. $2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$，　C. $2e^{\frac{2}{3}\pi i}$，　D. $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$。

3. 下列命题中正确的是（　　）

A. 如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 解析。

B. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

C. 如果 z_0 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点。

D. 如果 $f(z)$ 在点 z_0 解析，那么 $f'(z)$ 在点 z_0 也解析。

4. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中错误的是(　　)

A. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$，　　B. $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$，

C. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$，　　D. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

5. 设 $f(z)$ 在闭路 C 上及其内部解析，z_0 在 C 的内部，则 $\oint_c \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$（　　）

A. $f'(z_0)\oint_c \dfrac{1}{(z-z_0)^2}dz$，　　B. $\oint_c \dfrac{f'(z)}{z-z_0}dz$，

C. $\dfrac{f'(z_0)}{2!}\oint_c \dfrac{1}{z-z_0}dz$，　　D. $\oint_c \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$。

6. 设 C 为正向圆周：$|z|=r>1$，则 $\oint_c \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz=$(　　)

A. $\dfrac{\pi^4 i}{6}$，　　B. $\dfrac{\pi^4 i}{3}$，　　C. $-3\pi^2 i$，　　D. 0 。

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是（　　）

A. 1，　　B. $+\infty$，　　C. $\dfrac{1}{e}$，　　D. e。

8. 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}\cdot\ln\left(1+i+z^2\right)$ 在点 $z=0$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　)

A．2，　　B．$\sqrt{2}$，　　C．$\sqrt[4]{2}$，　　D．以上都不对。

9. 如果 $z=a$ 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的本性奇点和 n 阶极点，那么 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的(　　)

A．可去奇点，　　B．本性奇点，　　C．n 阶极点，　　D．非孤立奇点。

10. 映射 $w=e^{iz^2}$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为(　　)

A． 1，　　B． 2，　　C．$\dfrac{1}{e}$，　　D．e。

11. 设 $f(t)=\sin t\cos t$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F\left(f(t)\right)$ 为(　　)

A．$\dfrac{j}{4}\left[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)\right]$，　　B．$\dfrac{j}{4}\left[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)\right]$，

C．$\dfrac{j\pi}{2}\left[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)\right]$，　　D．$\dfrac{j\pi}{2}\left[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)\right]$。

12. 函数 $F(\omega)=1+\delta(\omega+a)$　$(a\in\mathbf{R})$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)=F^{-1}\left(F(\omega)\right)$ 为(　　)

A．$\delta(t)+e^{-jta}$，　　B．$\delta(t)+e^{jta}$，

C．$\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{-jta}$，　　D．$\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{jta}$　。

二、(12分) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为复平面上的解析函数，且满足

$$u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)，求函数 f(z)。$$

三、(12分) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1） $0<|z+1|<2$；（2） $2<|z-1|<+\infty$。

四、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(1-z)^2}dz$，　　2. $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$。

五、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$，　　2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$。

六、(6 分) 求区域 $D=\left\{z:|z|>1,0<\arg z<\frac{5}{4}\pi\right\}$ 在映射 $w=\dfrac{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^{2}}\right)^{2}+1}{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^{2}}\right)^{2}-1}$ 下的像。**(答题过程需用图形表示)**

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 z 平面上的区域 $D=\{z:|z-i|>1,\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ 映射到 w 平面的上半平面。**(答题过程需用图形表示)**

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t，且 x(0)=1，x'(0)=0。$$

九、(6 分) 证明：若函数 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 内解析，且满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=a$，则对于任何正数 $r>1$，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}f(z)dz=a$，其中 C_r 为正向圆周：$|z|=r$。

复变函数与积分变换试题(2019)解答

一、单项选择题（每题 2 分，共 24 分）.

1. $(1+i)^i$ =(C) （下列 k 均为任意整数）

A. $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln 2}$，　B. $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\ln 2}$，　C. $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$，　D. $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$。

2. $z=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi - i\cos\frac{2}{3}\pi\right)$的指数表示为(D)

A. $2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$，　B. $2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$，　C. $2e^{\frac{2}{3}\pi i}$，　D. $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$。

3. 下列命题中正确的是（ D ）

A. 如果 $f'(z_0)$存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 解析。

B. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

C. 如果 z_0 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点。

D. 如果 $f(z)$ 在点 z_0 解析，那么 $f'(z)$ 在点 z_0 也解析。

4. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中错误的是(C)

A. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，　　B. $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，

C. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$，　　D. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$。

5. 设 $f(z)$ 在闭路 C 上及其内部解析，z_0 在 C 的内部，则 $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$ (B)

A. $f'(z_0)\oint_c \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$，　　B. $\oint_c \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$，

C. $\frac{f'(z_0)}{2!}\oint_c \frac{1}{z-z_0}dz$，　　D. $\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$。

6. 设 C 为正向圆周：$|z|=r>1$，则 $\oint_c \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz=$ (B)

A. $\frac{\pi^4 i}{6}$，　　B. $\frac{\pi^4 i}{3}$，　　C. $-3\pi^2 i$，　　D. 0 。

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是 (D)

A. 1，　　B. $+\infty$，　　C. $\frac{1}{e}$，　　D. e。

8. 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}\cdot\ln(1+i+z^2)$ 在点 $z=0$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(**C**)

A．2， B．$\sqrt{2}$， C．$\sqrt[4]{2}$， D．以上都不对。

9. 如果 $z=a$ 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的本性奇点和 n 阶极点，那么 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的 (**B**)

A．可去奇点， B．本性奇点， C．n 阶极点， D．非孤立奇点。

10. 映射 $w=e^{iz^2}$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为（ **B** ）

A． 1， B． 2， C．$\frac{1}{e}$， D．e。

11. 设 $f(t)=\sin t\cos t$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(f(t))$ 为(**D**)

A．$\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$， B．$\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$，

C．$\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$， D．$\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$。

12. 函数 $F(\omega)=1+\delta(\omega+a)$ $(a\in\mathbf{R})$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)=F^{-1}(F(\omega))$ 为(**C**)

A．$\delta(t)+e^{-jta}$， B．$\delta(t)+e^{jta}$，

C．$\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{-jta}$， D．$\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{jta}$ 。

二、(12 分) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为复平面上的解析函数，且满足

$$u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)$$，求函数 $f(z)$。

二、解答

$\because f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析 $\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ --2 分

$\because u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)$

两边对 x 取偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}(\cos x-\sin x)$ (1)--1 分

两边对 y 取偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-y}(\cos x+\sin x)$ (2)--1 分

由(1)、(2)及 C-R 方程得: $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}\sin x\quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^{-y}\cos x$ --2 分

$\therefore v(x,y)=\int e^{-y}\sin x dx+\varphi(y)=-e^{-y}\cos x+\varphi(y)$ --2 分

$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-y}\cos x+\varphi'(y)\ \therefore \varphi'(y)=0\ \ \varphi(y)=C$

$v(x,y)=-e^{-y}\cos x+C$ --2 分

$u(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)+v(x,y)=e^{-y}\sin x+C$ --1 分

$\therefore f(z)=e^{-y}\sin x+C+i(-e^{-y}\cos x+C)$

三、(12分) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1） $0<|z+1|<2$；（2） $2<|z-1|<+\infty$。

三、解答：$0<|z+1|<2$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{-1}{z+1}\cdot\left(\frac{1}{z-1}\right)'$$

$$=\frac{-1}{z+1}\cdot-\left(\frac{1}{2-(z+1)}\right)' \qquad --3\text{ 分}$$

$$=\frac{-1}{z+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}\right)' \qquad --1\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n\right)' \qquad --1\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot n(z+1)^{n-1} \qquad --1\text{ 分}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot n(z+1)^{n-2} \qquad --1\text{ 分}$$

三、(12分) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1） $0<|z+1|<2$；（2） $2<|z-1|<+\infty$。

$2<|z-1|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2+z-1} \qquad --1\text{分}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}\right) \qquad --1\text{分}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n \qquad --1\text{分}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+3} \qquad --1\text{分}$$

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}}dz$， 2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^{3}}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$。

四、解答:

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}},0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}},1\right)\right]$ --2 分

$z=0$ 为$\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}}$的简单极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}},0\right)=\frac{e^{z}}{(1-z)^{2}}\Big|_{z=0}=1$ --1 分

$z=1$ 为$\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}}$的二阶极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}},1\right)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^{z}}{z}\right)'=0$ --1 分

$\oint_{|z|=2}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{2}}dz=2\pi i[1+0]=2\pi i$ --1 分

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz$ ， 2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ 。

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0\right)\right]$ --1 分

$z=-1$ 为函数的一阶极点 $z=0$ 为函数的本性奇点

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)=z^3e^{\frac{1}{z}}|_{z=-1}=-e^{-1}$ --1 分

考虑 $\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<1$ 内的 Laurent 展开

$$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}=z^3(1-z+z^2-z^3+z^4\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots)$$

$$\therefore Res\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0\right)=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

从而 $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i(-e^{-1}+e^{-1}-\frac{1}{3})=-\frac{2\pi i}{3}$ --3 分

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz$ ， 2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ 。

另外也可以考虑在∞的留数

$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\left[\mathrm{Res}(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},\infty)\right]$ --1

分

$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$在 $1<|z|<\infty$内的 Laurent 展开为

$$z^3\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots\right)$$

$$=(z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots)$$

--2 分

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},\infty\right)=\frac{1}{3}$ --1 分

$\therefore\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2\pi i}{3}$ --1 分

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)}$，　　　　2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$。

五、

(1) 解答 1:

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{11}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},z_k\right)=-2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)$$

z_k为函数在$|z|=2$内的奇点　　　　--2 分

在 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<\infty$内$(R>2)$

$$\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z^{10}}}\right)=\frac{1}{z^{13}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z^{10}}\right)^n$$　　--2 分

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)=0$$

所以原积分等于 0

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)}$，　　2. $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$。

五、

(1) 解答 1:

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{11}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},z_k\right) = -2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)$$

z_k为函数在$|z|=2$ 内的奇点　　--2 分

在 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<\infty$内($R>2$)

$$\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z^{10}}}\right)=\frac{1}{z^{13}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z^{10}}\right)^n$$ --2 分

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)=0$$

所以原积分等于 0

解答 2:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{1}{\zeta^{10}-2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{\zeta^2}\right),0\right)=\mathrm{Res}\left(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}},0\right)$$ --3 分

由于$\zeta=0$ 为函数$-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}}$的可去奇点 $\therefore \mathrm{Res}\left(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}},0\right)=0$　　--2 分

所以原积分等于 0

五、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\oint_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)}$，　　2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$。

(2)解答:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\right)dx$$ --2 分

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx$ $R(z)=\frac{z}{z^2+1}$ 则 $z=i$ 为 $R(z)$在上半平面内的奇点，且为一阶极点 --1 分

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(R(z)e^{iz},i)$$

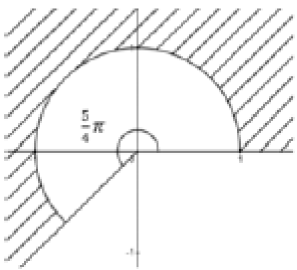
$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2}=\pi e^{-1}i$$ ——1 分

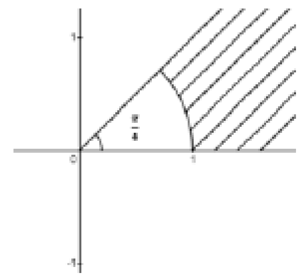
所以原积分$=\frac{1}{2}\pi e^{-1}$ --1 分

六、(6 分) 求区域 $D=\left\{z:|z|>1,0<\arg z<\frac{5}{4}\pi\right\}$ 在映射 $w=\dfrac{\left(\dfrac{1}{(\sqrt[5]{z})^2}\right)^2+1}{\left(\dfrac{1}{(\sqrt[5]{z})^2}\right)^2-1}$ 下的像。（答题过程需用图形表示）

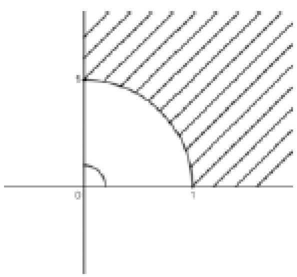
六、解答



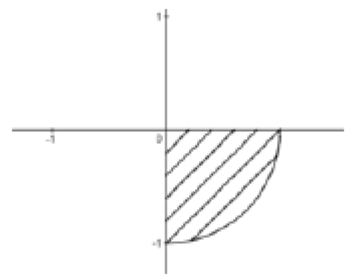
$z_1=\sqrt[5]{z}$
(1 分)



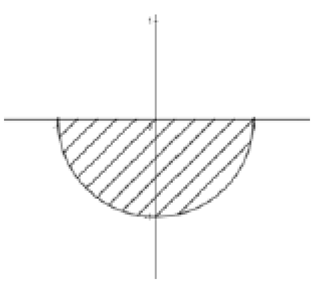
$z_2=z_1^2$
(1 分)



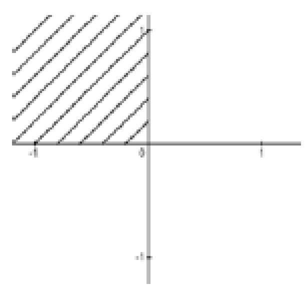
$z_3=\dfrac{1}{z_2}$
(1 分)



$z_4=z_3^2$
(1 分)



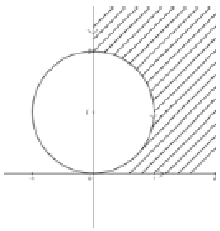
$w=\dfrac{z_3-1}{z_3+1}$
(2 分)



七、(10 分) 求一共形映射$w=f(z)$，将 z 平面上的区域 $D=\{z:|z-i|>1,\mathrm{Re}\,z>0,\mathrm{Im}\,z>0\}$

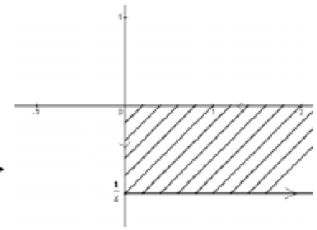
映射到 w 平面的上半平面。（答题过程需用图形表示）

七、解答 1:



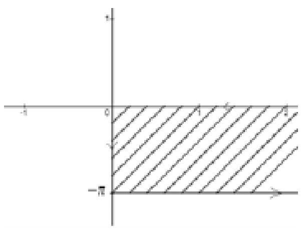
$z_1=\dfrac{1}{z}$

(1 分)



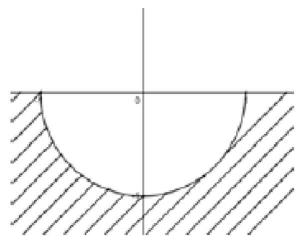
$z_2=2\pi z_1$

(1 分)



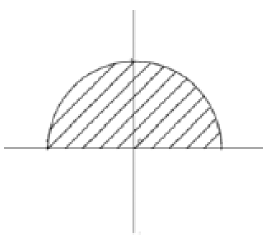
$z_3=e^{z_2}$

(1 分)



$z_4=\dfrac{1}{z_3}$

(1 分)

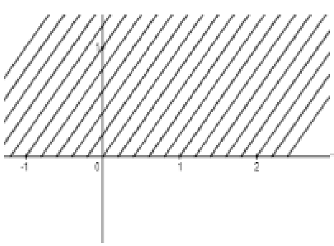


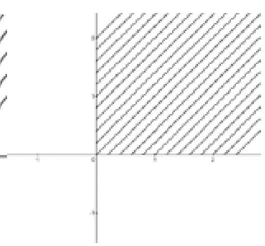
$z_5=-\dfrac{z_4-1}{z_4+1}$

(1 分)

$w=z_5^2$

(1 分)





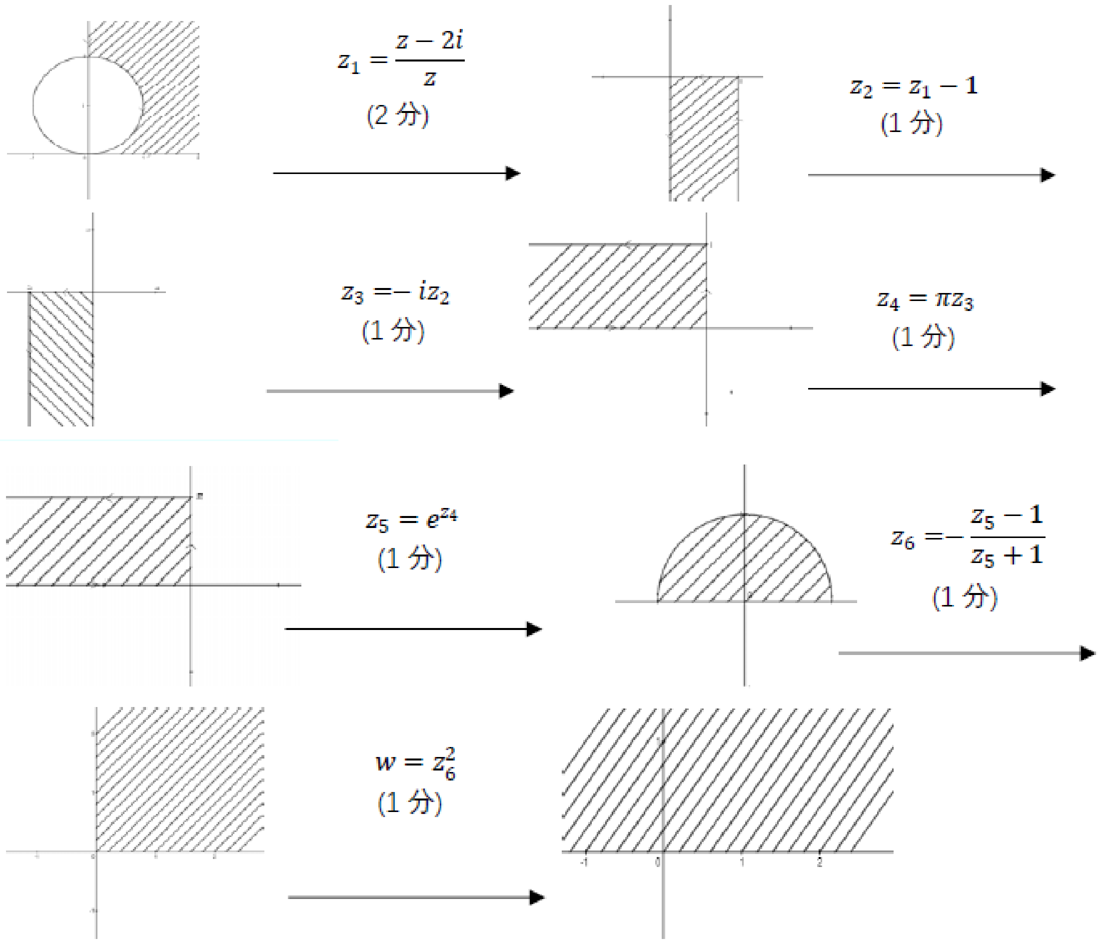
(1 分)

$$\therefore w=-\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{z}}+1}{e^{-\frac{2\pi}{z}}-1}\right)^2$$

七、(10 分) 求一共形映射$w=f(z)$，将z平面上的区域$D=\{z:|z-i|>1,\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$

映射到w平面的上半平面。（答题过程需用图形表示）

解答 2:



$\therefore w=-\left(\dfrac{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}+1}{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}-1}\right)^2$ （1 分）

八、(10分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t，且 x(0)=1，\ x'(0)=0。$$

八、解答:

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t \quad x(0)=1 \ x'(0)=0$$

两边取 Laplace 变换得

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2(sx(s)-x(0))+2x(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s^2} \qquad \text{--3 分}$$

代入初值得

$$(s^2-2s+2)x(s)=\frac{2(s-1)}{s^2}+s-2 \qquad \text{--1 分}$$

$$x(s)=\frac{2(s-1)}{s^2(s^2-2s+2)}+\frac{s-2}{s^2-2s+2} \qquad \text{--1 分}$$

$$=\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s^2}+\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s^2} \qquad \text{--2 分}$$

两边取 Laplace 逆变换得

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}(x(s))$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad \text{--1 分}$$

$$=e^t\cos t-t \qquad \text{--2 分}$$

九、(6分) 证明：若函数 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 内解析，且满足 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=a$，则对于任何正数

$r>1$，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz=a$，其中 C_r 为正向圆周：$|z|=r$。

九、解答：

$\because \lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=a$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists R>0$ 当 $|z|>R$ 时，$|zf(z)-a|<\varepsilon$ --1 分

对任何 $R'>R$，由 Cauchy 基本定理

$r>1$，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R'}} f(z)dz$ --1 分

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R'}} f(z)dz-a\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R'}}\frac{zf(z)-a}{z}dz\right| \quad --1 分$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_{R'}}\frac{|zf(z)-a|}{|z|}|dz| \quad --1 分$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{R'}\cdot 2\pi R'=\varepsilon \quad --1 分$$

由 ε 得任意性，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz=a$ --1 分

祝同学们取得优异成绩！