Esame 04-06-2020 ES 1

$X \sim \mathcal{N}(6, (\tfrac{1}{2})^2)$

Q_1: $P(\{5.1 \leq X \leq 6.9m\})$ Per prima cosa dobbiamo ricordare la definizione di CDF

→ La CDF di una V.A. ci permette di calcolare la prob. che la V.A. X sia minore di un dato valore x, ovvero $CDF_X = P(\{X \leq x\})$

Nel nostro caso la CDF va benissimo va benissimo per risolvere la domanda; definiamo la CDF di una gaussiana NON standard:

$F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ La CDF ci trova $P(\{X \leq x\})$ ma a noi serve $P(\{x_1 \leq X \leq x_2\})$

Come facciamo?

$$P(\{x_1 \leq X \leq x_2\})$$

$P(\{X \geq x_1\})$
Ovvero proprio la Q-function

$P(\{X \leq x_2\})$
→ $CDF_X(x_2)$ → $1 - Q\left(\frac{x_2-\mu_x}{\sigma_x}\right)$

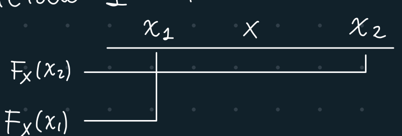
Mettiamo insieme il tutto:

$$P(\{x_1 \leq X \leq x_2\}) = \left[P(\{X \leq x_2\}) - P(\{X \geq x_1\})\right] = \left[\cancel{1} - Q\left(\frac{x_2-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right] - \left[\cancel{1} - Q\left(\frac{x_1-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]$$

$$= Q\left(\frac{x_1-\mu_x}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-\mu_x}{\sigma_x}\right) = Q(-1.8) - Q(1.8) = 1 - Q(1.8) - Q(1.8)$$

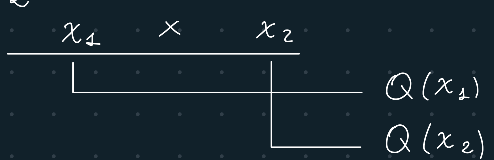
$$= 0.9282 \simeq 93\%$$

Metodo 1 ↑



$P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Metodo 2



⇒ $P(\{x_1 < X < x_2\}) = Q_x(x_1) - Q_x(x_2)$

→ Il primo metodo sfocia nel secondo quando si semplificano gli "1".

Q_2: Su 5 osservazioni indip. in 3 casi si misuri un livello compreso tra 5.1 e 6.9

→ Abbiamo già calcolato $P(\{5.1 < X < 6.9\}) = 0.92 = p_1$

Per trovare Q_2 dobbiamo calcolare la PMF Binomiale

$Y \sim B(n,p) \Rightarrow p_Y(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ Nel nostro caso $n = 5$ osservazioni

$k \in \mathcal{A}_Y = \{0,1,2,3,4\}$ ← ovvero le osservazioni

p sarà la probabilità p_1 e sapendo che $q = 1-p \Rightarrow q = 1-p_1$

A questo punto ci manca da capire k a cosa è uguale... "3 casi si misuri"...
$\Rightarrow k = 3$

$$\Rightarrow P_2 = \binom{5}{3} \cdot p_1^3 \cdot (1-p_1)^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot (0.9282)^3 \cdot (1-.9282)^2 = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2!}}$$

$$= 10 \cdot 0.77 \cdot 0.064 \cong 0.462$$

Q_3: Somma di due misure indip. sia > 10 m

Chiamiamo ogni misura effettuata come X_n dove n è l'indice della misura; avremo quindi X_1 e X_2;

$X_{1,2} \sim \mathcal{N}(6, \frac{1}{4})$ La somma dei risultati è data da $Z = X_1 + X_2$

→ Dalla Teoria sappiamo che una combinazione lineare di una gaussiana è sempre una gaussiana.

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ Calcoliamo la media e varianza di Z

$$\mu_Z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] \underset{\text{Per la linearità della media}}{=} \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 6 + 6 = 12$$

Siccome X_1 ed X_2 sono indipendenti, allora $\sigma_Z^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$

$$\Rightarrow \sigma_Z^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(12, \tfrac{1}{2})$$

Q_1 ci chiedeva $P(\{Z > 10\}) \Rightarrow$ in formule → $Q_Z\left(\frac{10-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)$

$$\Rightarrow \text{Ans} = Q_Z\left(\frac{10-12}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = Q(-2.828) = 1 - Q(2.828) = 1 - 0.0024 = 0.99 \sim 99\%$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$