UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 19 Luglio 2021
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1

Un giocatore lancia un dado per due volte senza rivelare i risultati. Viene chiamato un concorrente a cui il si rivela che la somma dei risultati dei due lanci è maggiore di 7. Calcolare:
1. la probabilità che il concorrente risponda correttamente rispondendo che il risultato del primo lancio è maggiore di 3;
2. Il valore del risultato del primo lancio che massimizza la probabilità di vincere del concorrente.

EX. 2 Si consideri il segnale periodico

$$\widetilde{x}(t) = \text{rep}_4[x(t)]$$

il cui segnale generatore è $x(t) = \Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)$.
1. Rappresentare graficamente i segnali $x(t)$ e $\widetilde{x}(t)$.
2. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale periodico $\widetilde{x}(t)$.

EX. 3 Si calcoli la mutua correlazione tra i segnali

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \tag{1}$$

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \tag{2}$$

EX. 1

Un giocatore lancia un dado per due volte senza rivelare i risultati. Viene chiamato un concorrente a cui il si rivela che la somma dei risultati dei due lanci è maggiore di 7. Calcolare:

1. la probabilità che il concorrente risponda correttamente rispondendo che il risultato del primo lancio è maggiore di 3;
2. Il valore del risultato del primo lancio che massimizza la probabilità di vincere del concorrente.

$D_1 + D_2 > 7$

Lancio 1

lancio 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$A = \{$"La somma è > 7"$\}$

Casi totali: $6^2 = 36$, casi fav: 15

$\Rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \sim 41\%$

Q_1: "Il primo lancio è maggiore di 3" $\Rightarrow P(D_1 > 3)$

Se esce almeno 4 dal primo lancio abbiamo:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	$\cancel{8}$	9	10	11
6	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	10	11	12

$D_1 > 3 \rightarrow 12$ possibilità di fare più di 7

$D_1 < 3 \rightarrow 3$ possibilità di fare più di 7

$\rightarrow$ Chiedere di trovare la prob che il primo lancio sia >3 significa

"Dato che è uscito Almeno 8 da $D_1 + D_2$" $(P(A))$ qual è la prob che $D_1 > 3$? B

$\rightarrow P(B/A) = \frac{P(A/B)\,P(B)}{P(A)}$

$P(B) = \overbrace{\boxed{1, 2, 3}}^{3}, \overbrace{\boxed{4, 5, 6}}^{3} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A/B) =$ "Esce almeno 8 dato che è uscito $D_1 > 3$"

I casi totali sono 3 (colonne) $\cdot$ 6 (Righe) $= 18$

	4	5	6
1	5	6	7
2	6	7	8
3	7	8	9
4	8	9	10
5	9	10	11
6	10	11	12

Mentre i casi positivi sono $5+4+3 = 12$

$\Rightarrow P(A/B) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Tornando alla Q_1: $P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5} = 80\%$ Q_1

18'

Q_2: Il valore del primo lancio che massimizza le prob di vincita del concorrente

vincita del concorrente $\to$ E' data dal fatto che $[D_1 > 3] == \text{TRUE}$

"che massimizza" $\to$ 1°) D_1 DEVE > 3 2°) Valore di D_1 / $P(D>3) = MAX$

Vediamo i casi:

$D_1 = 4 \Rightarrow |8, 9, 10| = 3 \Rightarrow \frac{3}{18} \sim 16\%$

$D_1 = 5 \Rightarrow |8, 9, 10, 11| = 4 \Rightarrow 4/18 \sim 22\%$

$D_1 = 6 \Rightarrow |8, 9, 10, 11, 12| = 5 \Rightarrow 5/18 \sim 28\%$

Guardando i casi possibili è evidente che maggiore è il primo lancio più è alta la prob che esca una somma di $D_1 + D_2 > 7$!

$\Rightarrow$ Q_2: 5 è il valore che massimizza le prob di vincita del concorrente

Time Q_2: $\sim 8'$

Time 26' TOT

EX. 2 Si consideri il segnale periodico

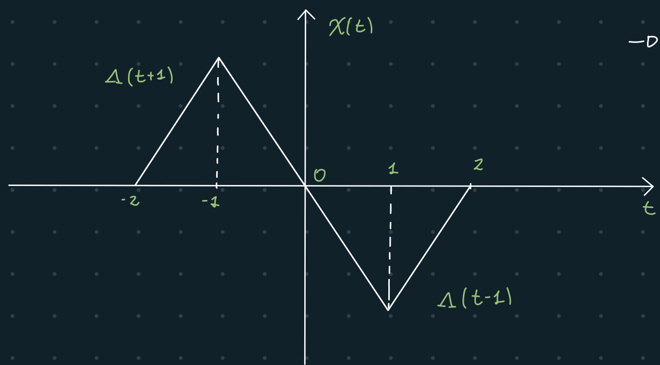
$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_4[x(t)]$$

il cui segnale generatore è $x(t) = \Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)$.

1. Rappresentare graficamente i segnali $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$.
2. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale periodico $\tilde{x}(t)$.

$\tilde{x}(t) = rep_4[x(t)]$ e $x(t) = \Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)$ Rappresentare i segnali $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$

Q_1 A: $x(t)$



Siccome $\tilde{x}(t) = rep_4[x(t)]$

$\rightarrow rep_T[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\ \delta(t - kT)$ (T ↑ 4)

$\Rightarrow rep_4[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-4k)$

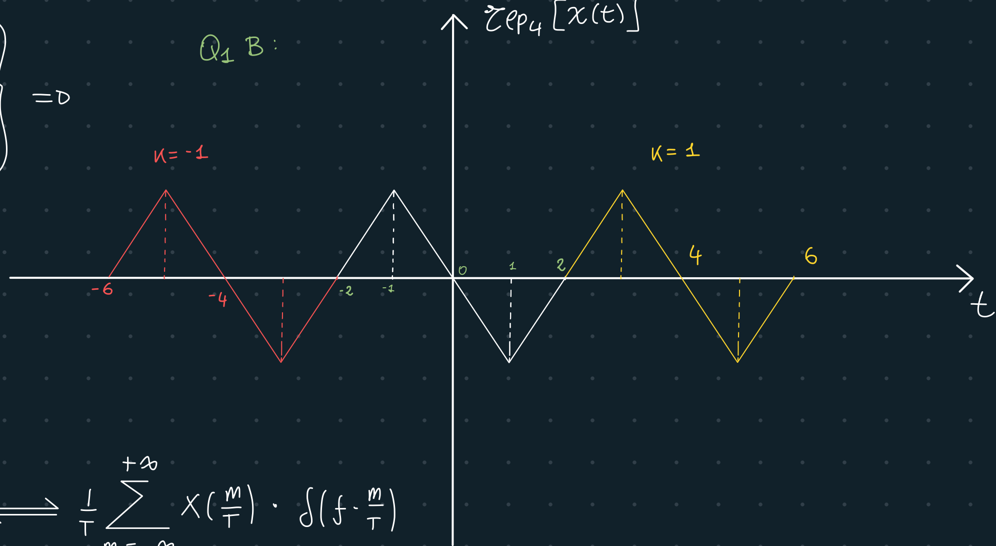
Quindi se il periodo è $4k$, vuol dire che

$k=0 \rightarrow rep_4[x(t)] = x(t)$

$k=1 \rightarrow rep_4[x(t)] = x(t-4)$

$k=-1 \rightarrow rep_4[x(t)] = x(t+4)$ $\Rightarrow$

Q_1 B:



Q_1 Time: 12'

Q_2: $\mathcal{F}(\tilde{x}(t))$

$\rightarrow$ Sappiamo che $rep_T[x(t)] \Longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(\frac{m}{T}) \cdot \delta(f - \frac{m}{T})$

$\Rightarrow \mathcal{F}(x(t)) = \text{Sinc}^2(f)\, e^{j2\pi f} - \text{Sinc}^2(f)\, e^{-j2\pi f} = \text{Sinc}^2(f)\left[e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right] = \cancel{\cos(w)} + i\sin(w) - \cancel{\cos(w)} + i\sin w$

$= 2i\sin(\omega)$

$\rightarrow 2j\,\text{Sinc}^2(f) \cdot \sin(\omega)$

osserviamo che il segnale è COMPLESSO, infatti notiamo che la replicazione di $x(t)$ è DISPARI (non simmetrica ad y)

$\Rightarrow rep_4[x(t)] \Longleftrightarrow \frac{2j}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}^2\left(\frac{m}{4}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$

campionamento in freq.

Q_2: 8'

TOT ~ 20'

EX. 3 Si calcoli la mutua correlazione tra i segnali

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

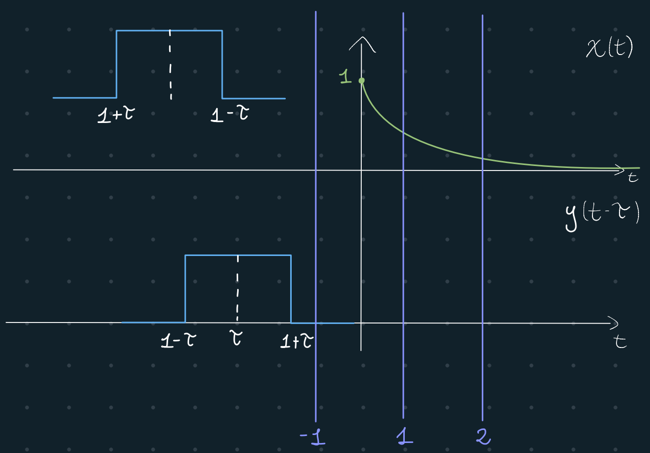
$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$

$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$

$\mathrm{Corr}(x,y) = C_{xy} = \langle x(t), y(t) \rangle = r_{xy}(\tau)$

$$\Rightarrow C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} \cdot u(t) \cdot \Pi\left(\frac{t-\tau}{2}\right) dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\, \Pi\left(\frac{t-\tau}{2}\right) dt$$



Caso 1: $\tau < -1 \Rightarrow r_{xy} = 0$

Caso 2: $\tau = 0 \Rightarrow \int_0^1 e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2} - e^{0}\right]$

Caso 3: $\tau < 1 \rightarrow -1 < \tau < 1$

$$\Rightarrow \int_0^{1+\tau} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-2(1+\tau)}$$

Caso 4 $\quad \tau > 1 \Rightarrow \int_{1-\tau}^{1+\tau} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2(1+\tau)} - e^{-2(1-\tau)}\right]$

$$\Rightarrow r_{xy} = \begin{cases} 0 & \tau < -1 \\ -\frac{1}{2} e^{-2(1+\tau)} & -1 \leq \tau < 1 \\ -\frac{1}{2}\left[e^{-2(1+\tau)} - e^{-2(1-\tau)}\right] & \text{per } \tau \geq 1 \end{cases}$$

Con caso particolare $\tau = 0 \rightarrow r_{xy}(0) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2}\right] \sim 0.43\,\mathrm{J}$

Mutua energia

Time 15 min