Raccolta di esercizi

Esercizio sul calcolo della media di due variabili aleatorie

In questo caso viene usato il calcolo di una variabile di tipo Mixture in modo da calcolare la media di due variabili aleatorie.

Caratterizzazione congiunta di due variabili aleatorie

Dobbiamo fare un passo indietro: **consideriamo la CDF congiunta di X e Y:**

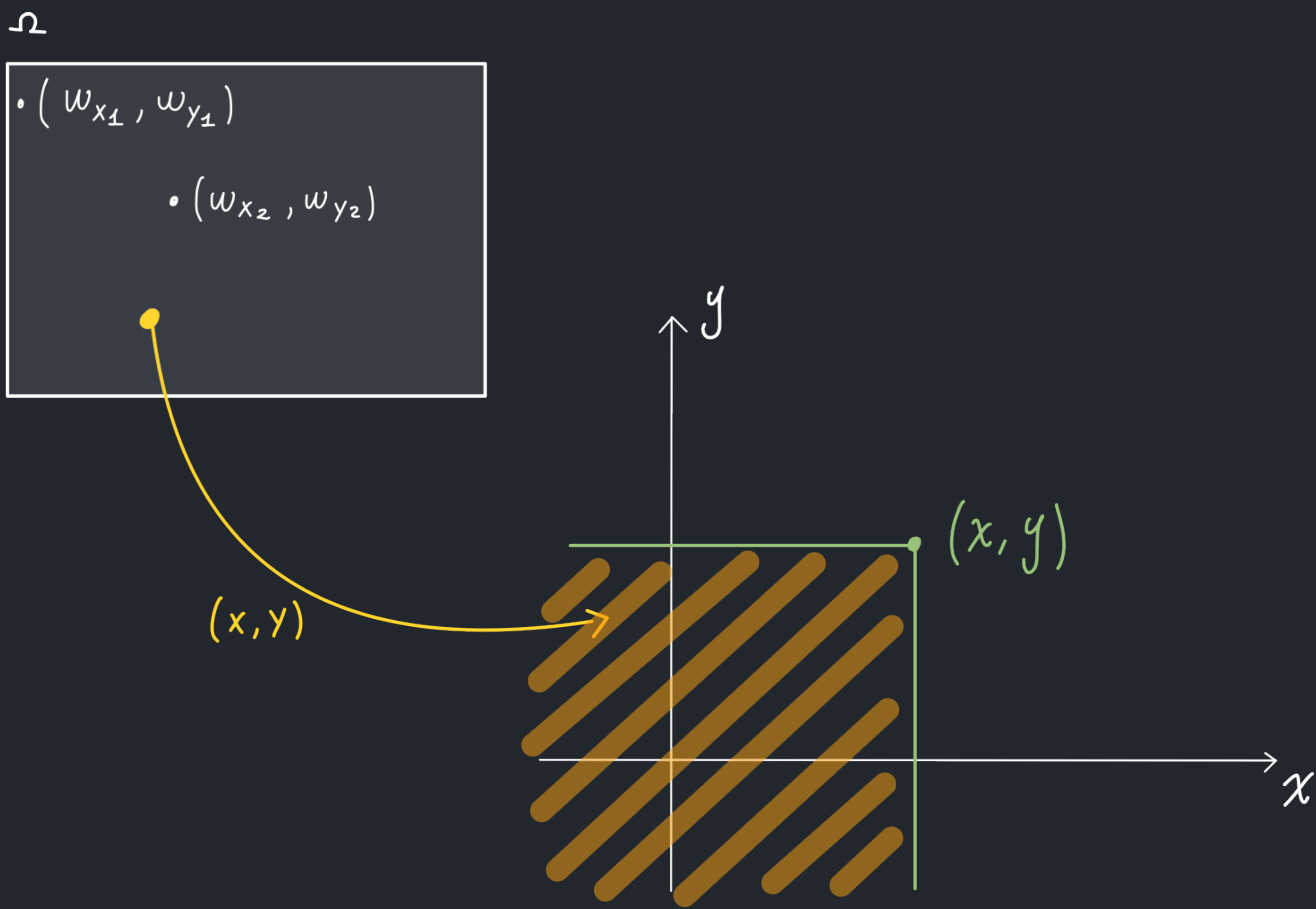
Pensiamo al caso in cui vogliamo valutare la probabilità che l'altezza sia minore di 160cm ed il peso sia minore di 70kg; quindi cosa stiamo valutando?

Ω

- $(\omega_{x_1}, \omega_{y_1})$
- $(\omega_{x_2}, \omega_{y_2})$

> Possiamo considerare un qualsiasi esperimento aleatorio che prenda in considerazione **due aspetti diversi** dello stesso esperimento (ie: altezza e peso)

Attraverso una caratterizzazione congiunta (sia X che Y), dove "arriviamo"?



Non avremo più uno spazio **unidimensionale**, ma ne avremo uno **bidimensionale**, ovvero un asse x ed uno y; data la coppia (x,y) stiamo valutando la probabilità relativa al rettangolo, che corrisponde proprio a:

CDF congiunta di X e Y

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$

> La probabilità che X sia minore di x **contemporaneamente** alla probabilità che Y sia minore di y.

Ricordandoci della definizione di **eventi indipendenti** (visti nella lezione) possiamo scrivere la probabilità come:

CDF congiunta di X e Y

$$\underbrace{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\}) \cdot P(\{Y \leq y\})}_{X,Y \text{ Indipendenti}}$$

Marginali: $F_X(x)$, $F_Y(y)$

Non è però detto che l'uguaglianza si verifichi: basti pensare proprio all'esempio di altezza e peso, queste due **non sono indipendenti!**.

Dobbiamo quindi andare a definire le **CDF congiunte** delle nostre variabili aleatorie:

CDF congiunta

Definiamo la CDF congiunta proprio come una Funzione delle variabili (x,y) definita non più in R ma in R^2, la funzione:

CDF CONGIUNTA

$$F_{XY} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y < y\})$$

PDF e PMF congiunte

CDF CONGIUNTA

$$F_{XY} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to F_{XY}(x,y) = P(\{X \le x\} \cap \{Y < y\})$$

PDF e PMF congiunte

Se X e Y sono v.a. <u>discrete</u>, si definisce

$$\underbrace{P_{XY}}_{\text{PMF}} : (x,y) \in \underbrace{\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y}_{\text{Prodotto cartesiano tra gli Alfabeti}} \to P_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Se X e Y sono v.a. <u>continue</u>, si definisce

$$f_{XY} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f_{XY}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}}_{\text{Derivata II Parziale}} \underbrace{F_{XY}(x,y)}_{\text{Della CDF congiunta}}$$

> Ricordiamo che la PMF è una probabilità menter la PDF non lo è;
>
> Inoltre anche le CDF, PMF e PDF <u>congiunte</u> godono delle proprietà viste con le CDF, PMF e PDF.

Distribuzioni Condizionate ad un EVENTO B

Si definisce CDF condizionata a B:

CDF condizionata a B

$$F_X(x \mid B) = P(\{X \le x\} / \underbrace{B}_{\text{Dato l'evento B}}) = \underbrace{\frac{P(\{X \le x\} \cap B)}{P(B)}}_{\text{CDF Condizionata}}$$

PMF condizionata

PMF condizionata

$$P_X(x \mid B) = P(\{X = x\} / B) = \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)}$$ PMF Condizionata

PDF condizionata

PDF condizionata $\rightarrow$ Se X è continua

$$f_X(x \mid B) = \frac{d}{dx} F_X(x / B)$$ PDF Condizionata

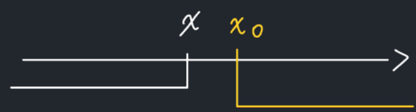
Esempio - Radar ad impulsi

UN ESEMPIO: Radar ad Impulsi

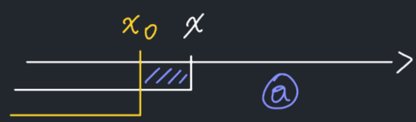
In un sistema radar gli impulsi riflessi hanno un' AMPIEZZA $\underline{R}$.
Sullo schermo vengono visualizzati solo gli impulsi tale che $r_{Impulso} \geq x_0$

CDF e PDF visualizzati sullo schermo = ?

$$F_R(x / \{R > x_0\}) = \frac{P(\{R \leq x\} \cap \{R > x_0\})}{P(\{R > x_0\})} \quad (a)$$



No Intersezione



Intersezione

$\Rightarrow$ Per assicurarci che ci sia intersezione Non Nulla $\rightarrow$ $u(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & \text{Altro} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere (a) come:

$$= \frac{P(\{R \leq x\} \cap \{R > x_0\})}{P(\{R > x_0\})} = \frac{P(\underline{\{R \leq x\}}) - P(\underline{\{R \leq x_0\}})}{1 - P(\underline{\{R \leq x_0\}})}$$

Sono tutti espressi in CDF

$$= \frac{F_R(x) - F_R(x_0)}{1 - F_R(x_0)} \cdot u(x - x_0) \quad (b)$$

$u(x-x_0) \rightarrow$ gradino che serve ad assicurarsi di avere Intersezione non nulla

CDF della prob di visualizzare l'impulso a schermo

Modelliamo R su una distribuzione di Raylegh

$\rightarrow$ $R \sim Ray(\sigma^2)$ $\quad F_R(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x)$

= Sostituiamo $F_R(x)$ nella (b)

$$= \frac{\left(\cancel{1} - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) - \left(\cancel{1} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\right)}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\right)} \cdot u(x - x_0)$$

$$= \frac{-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}}{-e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}} = \underbrace{e^{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} \left(-e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\right.}_{1} \left.+ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x - x_0)$$

CDF

- Calcolare la PDF

$$f_R(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x - x_0) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}$$

PDF

Distribuzioni Condizionate ad una VARIABILE ALEATORIA Y

PMF

PMF

X e Y v.a. DISCRETE

$$\to \underset{\text{PMF}}{P_{X|Y}}(x|y) = P_X(x \mid \{Y = y\}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} \quad \text{con } P_Y \neq 0$$

$$= \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

$P_{XY}(x,y)$ ← PMF Congiunta

$P_Y(y)$ ← PMF Marginale di y

PDF

PDF

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

← PDF Congiunta

← PDF Marginale di y

Leggi della probabilità per la PDF

Leggi della probabilita' per la PDF

$$f_{xy}(x,y) = \boxed{f_y(y)\cdot f_{x/y}(x/y) = f_x(x)\cdot f_y(y/x)}$$ ← Analogo della legge della prob. composta

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_x(x)}{f_y(y)}\cdot f_{xy}(y/x)$$ ← Analogo della Legge di BAYES

Inoltre: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx$ (congiunta) $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y)\cdot f_{x/y}(x/y)\,dx = f_y(y)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x/y}(x/y)\,dx}_{1}$

$f_{xy}(x/y) = f_y(x)\cdot f_{x/y}(x/y)$

perche' e' una PDF

P: NORMALIZZAZIONE → $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{PDF} = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx = f_y(y)$$

Se integro la congiunta rispetto ad una delle 2 variabili → ottengo la marginale rispetto all'altra

> IMMAGINE Da correggere!! Per la versione corretta guardare il file `2-10 - Distribuzioni Condizionate e Congiunte.pdf` situato nella cartella `Appunti`

Variabili Aleatorie Statisticamente Indipendenti

Per variabili aleatorie discrete

Se abbiamo $\underbrace{X \text{ e } Y}_{\text{V. A. Discrete}}$ Indipendenti, allora: $\boxed{F_{XY} = (x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)}$

Per variabili aleatorie continue

Se abbiamo $\underbrace{X \text{ e } Y}_{\text{V. A. continue}}$ Indipendenti, allora: $\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$

PDF generalizzata per v.a. statisticamente indipendenti

Possiamo generalizzare il concetto:

n V. A. Indipendenti $\rightarrow$ $\boxed{f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)}$

Caratterizzazione congiunta sintetica - Momenti Congiunti di ordine k

È definita allo stesso modo dei momenti di v.a. singole:

$$\underbrace{E\left[X^{\overbrace{m}^{k}} \cdot Y^{r}\right]}_{} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot y^r \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy & \text{V. Continue} \\ \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{X}_X} \sum_{y \in \mathcal{X}_Y} x^m \cdot y^r \cdot F_{XY}(x,y) & \text{V. Discrete} \end{cases}$$

Nel caso delle V.A. Singole ci interessavano solo alcuni dei momenti, come media, varianza, ecc.

Nel caso delle V.A. CONGIUNTE La definizione dei momenti di ordine k racchiude TUTTI I MOMENTI

Il vantaggio dei momenti congiunti di ordine k è che essi contengono "tutti i momenti", anche di variabili singole:

- $m = 0 \quad , \quad r = 1$

  $\rightarrow \mathbb{E}[x^0 \cdot y^1] = \mathbb{E}[y] = \mu_y$ Media di y

- $m = 1 \quad , \quad r = 0$

  $\rightarrow \mathbb{E}[x^1 \cdot y^0] = \mathbb{E}[x] = \mu_x$ Media d x

- $m = 2 , \quad r = 0$

  $\rightarrow \mathbb{E}[x^2 \cdot y^0] = \mathbb{E}[x^2] = \overline{x}^2$ Valore quadratico Medio

Se poniamo m = 1 ed r = 1 otteniamo la Correlazione di x ed y

Correlazione di (x,y) - Media di (x,y)

- $m = 1 \quad , \quad r = 1$

  $\rightarrow \mathbb{E}[x \cdot y] =$
  - Media di x e y
  - Correlazione $(x, y) = r_{xy}$

Momenti Centrali Congiunti

MOMENTI CENTRALI

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^m \cdot (Y-\mu_y)^r\right]$$

Anche in questo caso il momento centrale congiunto di ordine k racchiude "tutti i momenti", compresa la varianza, che è proprio un **momento centrale di ordine 2**.

Se poniamo m = 2 ed r = 0 otteniamo proprio la varianza:

→ Come prima, racchiude tutti i momenti:

- $m = 2, \; r = 0$

  → $\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2 \cdot (Y-\mu_y)^0\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] = \sigma^2$ Varianza

- ...

Covarianza

Se poniamo m = 1 ed r = 1 otteniamo la covarianza:

- $m = 1 \; , \; r = 1$

  → $\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = C_{xy} = \mathrm{cov}(X,Y)$

  Covarianza

La covarianza è una misura che ci dice **come due variabili cambiano insieme, in altre parole, ci dice se c'è una relazione lineare tra due variabili.**

A seconda del valore della covarianza abbiamo:

- $C_{XY} > 0$: **le due variabili x ed y aumentano e diminuiscono insieme**
- $C_{XY} < 0$: **quando una variabile aumenta, l'altra diminuisce e viceversa**
- $C_{XY} = 0$: **non c'è correlazione tra le due variabili**

Quando la covarianza è zero, vuol dire che non c'è correlazione tra le due variabili, si dicono quindi **incorrelate**.

Esprimere la Correlazione tramite la Covarianza

Possiamo esprimere la correlazione tramite la Covarianza andando ad **esplicitare la media** (facciamo i calcoli e sostituiamo quà e là):

Esplicitiamo la media

$$= \mathbb{E}[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = \mathbb{E}[xy - \mu_x y - \mu_y x + \mu_x \mu_y] =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[xy]}_{r_{xy}} - \mu_x \underbrace{\mathbb{E}[y]}_{\mu_y} - \mu_y \underbrace{\mathbb{E}[x]}_{\mu_x} + \mu_x \cdot \mu_y = r_{xy} - 2\mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y = r_{xy} - \mu_x\mu_y$$

$$\rightarrow \underbrace{r_{xy}}_{\text{Correlazione}} = \underbrace{C_{xy}}_{\text{Covarianza}} + \underbrace{\mu_x\mu_y}_{\text{Prodotto delle Medie}}$$

Cosa succede quando due variabili sono incorrelate?

→ Cosa succede se le V.A. sono incorrelate? → $C_{xy} = 0$

$$\rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[xy]}_{r_{xy}} = \mathbb{E}[x] \cdot \mathbb{E}[y] = \mu_x \mu_y$$

Quando due variabili sono incorrelate ed andiamo a calcolarne la media (Correlazione) otteniamo il prodotto delle medie delle due variabili.

Variabili Gaussiane Congiunte

V. A. Congiuntamente Gaussiane

Essendo congiunta, avremo una PDF BIDIMENZIONALE (funzione a due variabili)

$$X_1 = a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \mu_1$$

$$X_2 = a_{21} \underbrace{X_{01}}_{\text{gaussiana Standard}} + a_{22} X_{02} + \mu_2$$

Inoltre $X_{01} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_{02} \sim \mathcal{N}(0,1)$ Sono Indipendenti

Calcoliamo i momenti congiunti (media)

- $E[X_1] = E[a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \mu_1] = a_{11} \underbrace{E[X_{01}]}_{0} + a_{12} \underbrace{E[X_{02}]}_{0} + \mu_1 = \mu_1$
- $E[X_2] = \mu_2$

(Covarianza)

$$= E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = r_{xy} = E[(a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \cancel{\mu_1} - \cancel{\mu_1})(a_{21} X_{01} + a_{22} X_{02} + \cancel{\mu_2} - \cancel{\mu_2})]$$

$$= E[a_{11} a_{21} X_{01}^2 + a_{12} a_{21} X_{02} X_{01} + a_{11} a_{22} X_{01} X_{02} + a_{12} a_{22} X_{02}^2]$$

$$= a_{11} a_{21} \underbrace{\cancel{E[X_{01}^2]}}_{\overline{X_{01}^2} \to 1} + \cancel{a_{12} a_{21}} \underbrace{\cancel{E[X_{01} \cdot X_{02}]}}_{\underbrace{E[X_{01}] \cdot E[X_{02}]}_{0}} + \cancel{a_{11} a_{22}} \underbrace{\cancel{E[X_{01} X_{02}]}}_{0} + a_{12} a_{22} \underbrace{\cancel{E[X_{02}^2]}}_{1 \leftarrow \overline{X_{02}^2}}$$

$$= a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}$$