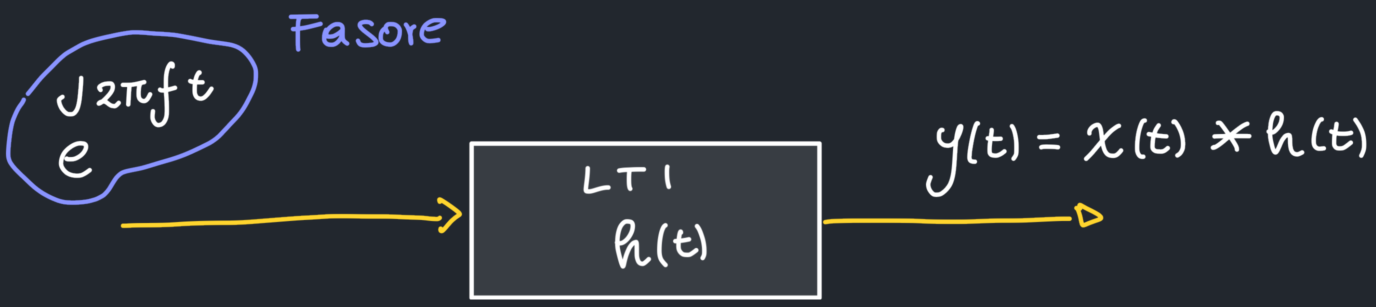
Indice

Risposta in Frequenza di un sistema LTI

Se poniamo come ingresso un segnale **fasoriale** (fasore), possiamo dimostrare che in uscita avremo la **risposta in frequenza H(e^{jw})** che non dipende dal tempo, moltiplicato per il fasore iniziale:

Risposta in frequenza a tempo continuo

I Sistemi - frequenza - T. Continuo



Scrivendo il tutto in formule otteniamo:

$$\Rightarrow y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)} \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{j2\pi f t} \, e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau$$

Ci accorgiamo che il fasore in frequenza non dipende dal tempo e possiamo quindi portarlo fuori:

$$= e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau$$

Fasore in ingresso

$H(f) \rightarrow$ Risposta in frequenza del sistema

Battezziamo quindi l'integrale come "**risposta in frequenza**" del sistema:

$$y(t) = e^{j2\pi f t} \cdot H(t)$$

$\downarrow$

INTEGRIAMO

$\downarrow$

f complesso

Se scriviamo il segnale di output come numero complesso (quale esso è!) con modulo e fase otteniamo:

$$\Rightarrow |H(f)| \cdot e^{j2\pi f t + \angle H(f)}$$

il Fasore in OUT è un fasore con fase ed Ampiezza diverse.

$$H(f) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$$

Risposta in frequenza a tempo Discreto

La stessa cosa può essere applicata a tempo discreto:

I Sistemi - Frequenza - T. Discreto

$$e^{j2\pi \nu n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

freq. Discreta : ν ("Ni")

Ci scriviamo quindi y(n) come convoluzione tra input e risposta impulsiva:

$$y(n) = h(n) * e^{j2\pi\nu n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{j2\pi\nu(n-k)}$$

$$= e^{j2\pi\nu n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-j2\pi\nu k}$$

RISPOSTA DISCRETA IN FREQUENZA

$H(\nu)$

Anche in questo caso battezziamo la sommatoria come **Risposta in frequenza** ed otteniamo:

Risp. in freq T. Discreto

$$\Rightarrow e^{j2\pi\nu n} \cdot H(\nu)$$

$$H(\nu) = \left.\frac{y(n)}{x(n)}\right|_{x(n)=e^{j2\pi\nu n}}$$

Esempi di applicazione

Esempio 1: trovare la risposta impulsiva avendo solo l'output

ESEMPIO 1) T. Disc.

$$\overbrace{y(n) = x(n-1)}^{\text{Ritardo Elem.}} \quad , \quad h(n) = ?$$

Se ci troviamo un problema che ci chiede di trovare la risposta impulsiva avendo a disposizione solo l'output, possiamo risolverlo nel seguente modo:

La prima cosa da fare è **sollecitare il sistema con un fasore** (in questo caso a tempo discreto):

Ans. Dobbiamo sollecitare il sys con un fasore del tipo: $x(n)\ e^{j2\pi\nu n}$

$$\rightarrow y(n) = e^{j2\pi\nu(n-1)} = \underbrace{e^{j2\pi\nu}}_{\substack{\text{Fasore iniziale} \\ x(n)}} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi\nu}}_{H(\nu)} \Rightarrow \underbrace{y(n)}_{x(n-1)} = \underbrace{x(n)}_{e^{j2\pi\nu n}} \cdot H(\nu)$$

Dividiamo l'esponenziale e riconosciamo il fasore con cui abbiamo sollecitato il sistema (in ingresso), di conseguenza lo rinominiamo x(n).

Riconosciamo anche la risposta in frequenza del sistema, di conseguenza la rinominiamo H(ni).

A questo punto rinominiamo l'uscita y(n) come ci era stata presentata inizialmente, ovvero come ritardo di 1 del segnale in ingresso (y(n) = x(n-1)); isoliamo H(ni) ed otteniamo:

$$\Rightarrow H(\nu) = \frac{x(n-1)}{e^{j2\pi\nu n}} = \frac{e^{j2\pi\nu(n-1)}}{e^{j2\pi\nu n}}$$

proof

A questo punto separiamo l'esponenziale e semplifichiamo; otteniamo finalmente:

$$= \frac{\cancel{e^{j2\pi\nu n}} \cdot e^{-j2\pi\nu}}{\cancel{e^{j2\pi\nu n}}} \Rightarrow H(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$$

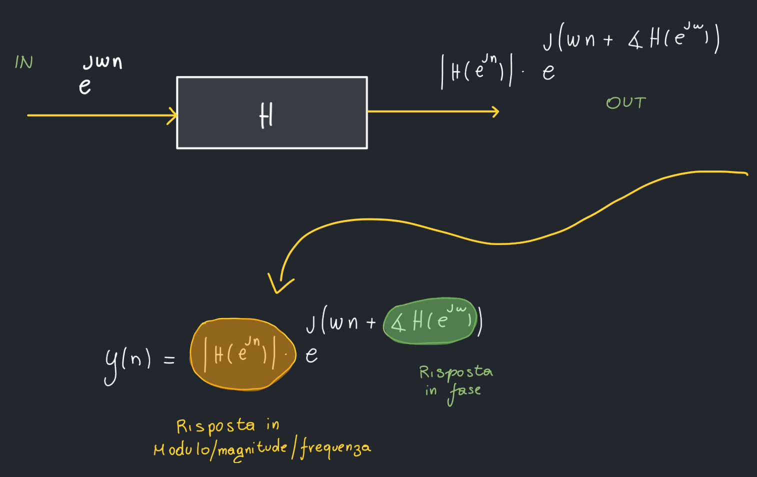
La risposta in frequenza del sistema è proprio un fasore in frequenza.

Differenza tra input ed output

La differenza tra il segnale in input (fasore) ed il segnale in output (y(-)) sono principalmente due:

- Il segnale in output **ha ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza**
- il segnale in output avrà una **fase modificata**, pari proprio alla **fase della risposta in frequenza**.

Tiriamo le Somme:



Quali sono le diff tra i segnali in input e quelli in output?

- Il segnale in OUT ha ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza
- Il segnale in out, che aveva fase iniziale e^{jwn}, ha la fase modificata in $\angle H(e^{jw})$

Capiamo quindi che **possiamo prevedere l'output** se conosciamo la risposta in frequenza H(-)!

Se poniamo in input una sinusoide complessa (**fasore**), questa in output **verrà amplificata** (moltiplicata per la risposta in frequenza) oltre ad essere **shiftata o sfasata** in base alla **risposta in fase**.

Relazione tra uscita e risposta impulsiva

Proviamo a scriverci la risposta come convoluzione tra risposta impulsiva ed ingresso:

$$\underbrace{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)}$$

Sappiamo che y(·) è dato dalla convoluzione tra in e h(·)

Abbiamo poi detto di porre in input un fasore, quindi sostituiamo $e^{j\omega n}$ al segnale di ingresso x(n):

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{jw(n-k)}$$

Sostituiamo in input la sin. complessa (fasore)

Moltiplichiamo l'argomento dell'esponenziale e successivamente lo scriviamo come moltiplicazione di due exp:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{jwn} \cdot e^{-jwk}$$

Costante rispetto a k

Dividiamo l'esponenziale

Siccome una parte dell'exp è costante, possiamo portarla fuori:

$$\to y(n) = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} = e^{jwn} \cdot H(e^{jw})$$

Segnale ziale compl.

un valore costante rispetto al tempo
$\to$ non dipende da n

Battezziamo la costante rispetto al tempo $H(e^{jw})$

Possiamo "battezzare" la sommatoria $H(e^{j\omega})$, che non è altro che la **trasformata di fourier a tempo discreto**, quindi:

$$h(n) \xleftrightarrow{DT\ FT} H(e^{jw})$$

Se conosco una delle due $h(\cdot)$ o $H(\cdot)$ posso determinare l'altra tramite la Trasf. di F. a Tempo discreto

Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è uno strumento matematico che usiamo per analizzare i segnali nel **dominio della frequenza**.

La trasformata è nota anche come "Rappresentazione nel dominio della frequenza" del segnale originale.

Overview

Per quali tipi di segnali è possibile calcolare la trasformata?

- Segnali di energia
- Segnali di potenza
  - Per ottenere la trasformata di questi segnali **dobbiamo usare le proprietà** perchè la formula della trasformata è applicabile solo a **segnali assolutamente integrabili**, ovvero per un segnale il quale integrale può essere calcolato per tutti i valori del tempo.
- Segnali correlati ad impulsi
  - Questi ultimi non sono ne segnali di energia ne segnali di potenza; c'è infatti un'eccezione per questo tipo di segnali.

Rappresentazione della trasformata di Fourier

Rappresentazione

$$x(t) \rightleftharpoons \underset{\uparrow \, Hz}{X(f)} \quad \text{oppure} \quad \underset{\uparrow \, rad/s}{X(wj)}$$

La trasformata di Fourier è un **numero complesso**, avrà quindi **un modulo (magnitute)** ed un **angolo o fase**:

$$X(jw) = X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Modulo}} \; \underbrace{\angle X(f)}_{\text{Fase}}$$

Formule per la trasformata a tempo continuo

Tempo ➔ Frequenza

La prima formula (**Trasformata di Fourier**) è usata per trasformare il segnale dal dominio del tempo al dominio della frequenza:

$$x(t) \longrightarrow X(f)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

Frequenza ➔ Tempo

Questa formula (**Trasformata inversa di Fourier**) è usata per tornare al dominio del tempo dal dominio della frequenza:

$$X(f) \longrightarrow x(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

Formule per la trasformata a tempo discreto

Tempo → Frequenza

Equazione di Analisi

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} \qquad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n}$$

Frequenza → Tempo

Equazione di Sintesi:

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \cdot e^{j\theta n}\, d\theta$$

"Nu"

Periodico

Lo spettro è periodico, di conseguenza ci basta integrare solo da -1/2 a +1/2

Modi di rappresentare la trasformata

Possiamo rappresentare la trasformata in diversi modi:

Rappresentazione

$$x(t) \rightleftharpoons X(f) \quad \text{oppure} \quad X(wj)$$

Hz rad/s

Un altro modo è quello di usare la **notazione in modulo e fase**:

$$X(j\omega) = X(f) = |X(f)| \angle X(f)$$

Modulo

Fase

Condizioni di esistenza della Trasformata Di Fourier

1. Il segnale deve avere un **numero finito di massimi e minimi** in un **intervallo finito qualsiasi**.
   "intervallo finito" ➔ La FT esiste anche per segnali non periodici, e quindi il "periodo di tempo" in questo caso non è definito.

2. Il segnale deve avere un numero finito di **discontinuità** in un qualsiasi intervallo finito.

3. Il segnale deve essere **assolutamente integrabile**, ovvero:

   Abs. Finite : $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt = n < \infty$$

   Se L'integrale del modulo del segnale ci restituisce un valore n diverso da infinito, allora il segnale è assolutamente integrabile.

   1. I **Segnali di energia** sono assolutamente integrabili (ad esempio la finestra .
   2. Gli **impulse related signals** sono assolutamente integrabili (segnali associati o generati da impulsi).
   3. I **Segnali di potenza** non sono assolutamente integrabili (ad esempio il gradino u(t) è un segnale di potenza).
   4. **I segnali nè di potenza nè di energia non sono assolutamente integrabili.**

Legami ingresso uscita nel dominio della frequenza

Come nella lezione precedente abbiamo visto che l'uscita di un sistema LTI può essere scritta come convoluzione tra ingresso e risposta impulsiva, anche nel dominio possiamo fare qualcosa di simile:

Legami I/O nel dominio della frequenza

Tempo Continuo:

Scriviamo $x(t)$ con l'eq. di sintesi come una sovrapposizione di fasori:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

Al singolo ingresso elementare $\underbrace{e^{j2\pi f t}}_{X(f)} \longrightarrow H(f) \cdot e^{j2\pi f t}$

quindi per la linearità: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$

→ Applico l'eq di sintesi ad $y(t)$ → $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$ → $\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)}$

Invece della convoluzione (Tempo) adesso abbiamo un prodotto

Per quanto riguarda il tempo discreto, possiamo scrivere le seguenti uguaglianze:

Tempo Discreto:

$$Y(\cdot) = H(\cdot) \cdot X(\cdot) \Rightarrow \underbrace{|Y(\cdot)|}_{\text{modulo}} = |H(\cdot)| \cdot |X(\cdot)| \Rightarrow \underbrace{\angle Y(\cdot)}_{\text{Fase}} = \angle H(\cdot) + \angle X(\cdot)$$

Ovvero:

- Il modulo dell'uscita è uguale al modulo dello spettro in entrata **moltiplicato** per il modulo della risposta impulsiva
- La fase dell'uscita è uguale alla fase dello spettro in entrata **addizionata** per lo spettro della risposta impulsiva

La trasformata del gradino unitario

Perche' $u(t)$ non ha una trasformata

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left(e^{0} - e^{-j2\pi f \infty}\right)$$

$\Rightarrow$ Indefinito $\Rightarrow \mathcal{F}(u(t)) =$ INDEF.

Possiamo però ottenere la trasformata se ricaviamo il segnale gradino unitario a partire da una delta:

Ricavare $u(t)$ da una Delta (impulso)

$$u(t) \overset{F.T.}{\rightleftharpoons} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$