UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 22 luglio 2019
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).

EX. 1 Il numero di clienti che si presentano in un giorno a due ristoranti ha una distribuzione gaussiana. Il primo ristorante ha un numero medio di 80 clienti con una deviazione standard di 20 clienti; il secondo ristorante ha un numero medio di 60 clienti con una deviazione standard di 10 clienti. Calcolare:
1. la probabilità che il primo ristorante abbia più di 100 clienti in un giorno.
2. la probabilità che il primo ristorante abbia più clienti del secondo ristorante in un giorno;
3. la probabilità che in 10 giorni il primo ristorante abbia complessivamente più clienti del secondo ristorante.

EX. 2 Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(n) = y(n-2) - 0.5y(n-1) + 0.25x(n)$$

dove $x(n) = 0.5^n u(n)$. Calcolare la densità spettrale di energia di $y(n)$.

EX. 3 Si consideri il segnale

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t+1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Rappresentare il grafico del segnale $x(t)$ e calcolare lo spettro del segnale campionato, assumendo una frequenza di campionamento $f_c = 10$ Hz.

EX. 1 Il numero di clienti che si presentano in un giorno a due ristoranti ha una distribuzione gaussiana. Il primo ristorante ha un numero medio di 80 clienti con una deviazione standard di 20 clienti; il secondo ristorante ha un numero medio di 60 clienti con una deviazione standard di 10 clienti. Calcolare:

1. la probabilità che il primo ristorante abbia più di 100 clienti in un giorno.
2. la probabilità che il primo ristorante abbia più clienti del secondo ristorante in un giorno;
3. la probabilità che in 10 giorni il primo ristorante abbia complessivamente più clienti del secondo ristorante.

$R_1 \sim \mathcal{N}(80, \sqrt{20}) \qquad R_2 \sim \mathcal{N}(60, \sqrt{10})$

Q_1: $P(\{R_1 \geq 100\}) \Rightarrow Q_{R_1}\left(\frac{x-\mu_{R_1}}{\sigma_{R_1}}\right) = Q_{R_1}\left(\frac{100-80}{20}\right) = 0.158 \sim 15\%$

Q_2: $P(\{R_1 > R_2\})$ creiamo la var $Z = R_1 - R_2 \Rightarrow P(\{R_1 > R_2\}) \rightarrow R_1 - R_2 > 0$

$\Rightarrow P(\{Z > 0\})$ Media di Z: $E[Z] = E[R_1 - R_2] = \mu_{R_1} - \mu_{R_2} = 20 \; \mu_Z$

$\sigma_Z = E[(Z-\mu_Z)^2] = \overline{Z}^2 + \mu_Z^2 - 2\mu_Z^2 = \overline{Z}^2 - \mu_Z^2$

$\overline{Z}^2 = E[Z^2] = E[(R_1 - R_2)^2] = \overline{R}_1^2 + \overline{R}_2^2 - 2 R_1 R_2$

$\overline{R}_1^2 = \sigma_{R_1}^2 + \mu_{R_1}^2 = 6400 + 20 = 6420$

$E[R_1 R_2] \rightarrow$ indip. $\rightarrow \mu_{R_1}\mu_{R_2} = 4800$

$\overline{R}_2^2 = 3600 + 10 = 3610$

$\overline{Z}^2 = 6420 + 3610 - 2 \cdot 4800 = 430$

$\Rightarrow \sigma_Z^2 = 430 - 20^2 = 30 \; \sigma_Z^2$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(20, 30) \Rightarrow P(\{Z > 0\}) = 0.747 \sim 75\%$ Ans

Q_3: P che in 10 gg $R_1 > R_2 \Rightarrow$ Abbiamo gia' calcolato $P(\{Z>0\}) \rightarrow$ ovvero $P(\{R_1 > R_2\})$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10} Z$ Variabile Aleatoria

$\Rightarrow \mu_{S_n} = E[Z] = 20$

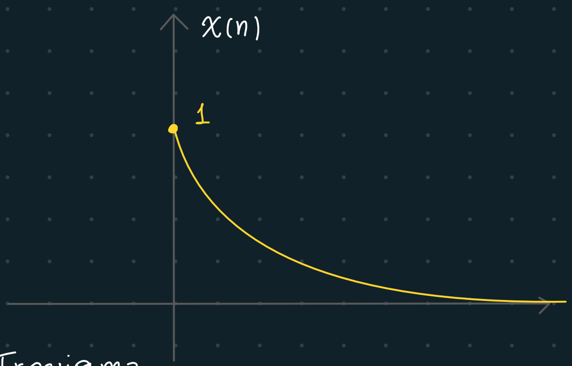
$\sigma_{S_n} = E[(S_n - \mu_{S_n})^2] = \overline{S}_n^2 - \mu_{S_n}^2 =$

EX. 2 Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(n) = y(n-2) - 0.5y(n-1) + 0.25x(n)$$

dove $x(n) = 0.5^n u(n)$. Calcolare la densità spettrale di energia di $y(n)$.

$$y(n) = y(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) \qquad \text{dove} \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$



Q: $S_y(\nu) = ?$

Dobbiamo sicuramente trasformare $y(n)$:

$$Y(\nu) = Y(\nu)e^{-j4\pi f} - \frac{1}{2}Y(\nu)e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}X(\nu)$$

Troviamo

$$Y(\nu) = Y(\nu)\left[e^{-j4\pi\nu} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}\right] + \frac{1}{2}X(\nu) \Rightarrow Y(\nu) - Y(\nu)\left[e^{-j4\pi\nu} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}\right] = \frac{1}{2}X(\nu)$$

$$\Rightarrow Y(\nu)\left[1 - e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}\right] = \frac{1}{2}X(\nu) \Rightarrow Y(\nu) = \frac{\frac{1}{2}X(\nu)}{1 - e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}}$$

Ci manca $X(\nu) \Rightarrow X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j2\pi\nu n}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}}_{-1<b<1}\Big)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}}$$

$$\Rightarrow Y(\nu) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}}}{1 - e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}} = \frac{\frac{1}{2 - e^{-j2\pi\nu}}}{\frac{3}{2} + e^{-j6\pi\nu}} = \frac{\frac{1}{2 - e^{-j2\pi\nu}}}{\frac{3 + 2e^{-j6\pi\nu}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 - e^{-j2\pi\nu}} \cdot \frac{2}{3 + 2e^{-j6\pi\nu}} = \frac{2}{6 + 4e^{-j6\pi\nu} - 3e^{-j2\pi\nu} - 2e^{-j8\pi\nu}} \quad Y(\nu)$$

$$S_Y(\nu) = |Y(\nu)|^2 = Y(\nu) \cdot Y^*(\nu) = \frac{2}{6 + 4e^{-j6\pi\nu} - 3e^{-j2\pi\nu} - 2e^{-j8\pi\nu}} \cdot \frac{2}{6 + 4e^{j6\pi\nu} - 3e^{j2\pi\nu} - 2e^{j8\pi\nu}}$$

$$= \frac{4}{36 + 24e^{j6\pi\nu} - 18e^{j2\pi\nu} - 12e^{j8\pi\nu} + 36e^{-j6\pi\nu} + 16 - 12e^{-j4\pi\nu} - 8e^{j2\pi\nu} - 18e^{-j2\pi\nu} - 12e^{j4\pi\nu} + 9 + 6e^{j6\pi\nu} - 12e^{-j8\pi\nu} - 8e^{-j2\pi\nu} - 6e^{-j6\pi\nu} + 24}$$

$$= \frac{4}{65 + 30e^{j6\pi v} - 26e^{j2\pi v} + 30e^{-j6\pi v} - 12e^{j8\pi v} - 12e^{-j4\pi v} - 12e^{j4\pi v} - 12e^{-j8\pi v} - 26e^{j2\pi v}}$$

$$= \frac{4}{65 + 60\cos(6\pi v) - 52\cos(2\pi v) - 24\cos(8\pi v) - 24\cos(4\pi v)}$$

$S_Y(v)$

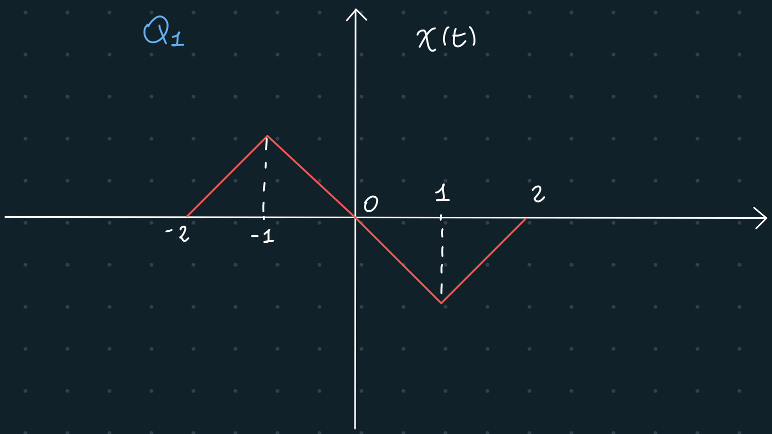
Time $\sim 30'$

EX. 3 Si consideri il segnale

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t+1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Rappresentare il grafico del segnale $x(t)$ e calcolare lo spettro del segnale campionato, assumendo una frequenza di campionamento $f_c = 10$ Hz.

Q_1



Q_2: Campionare il segnale e calcolare lo spettro

$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f}$

$\Rightarrow T = \frac{1}{10}$

$$\tilde{x}_S(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \left[\Lambda\left(\frac{t+1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right)\right] \cdot \delta\left(t - \frac{K}{10}\right)$$

- $\Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right) \rightleftharpoons 2\,\mathrm{Sinc}(2f) \cdot e^{-j2\pi f}$
- $\Lambda\left(\frac{t+1}{2}\right) \rightleftharpoons 2\,\mathrm{Sinc}(2f)\, e^{j2\pi f}$

$$e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} = \cancel{\cos(\omega)} + i\,\cancel{\sin(\omega)} - \cancel{\cos(\omega)} - i\,\cancel{\sin(\omega)}$$

$$\Rightarrow 10\,\mathrm{Hz} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\,\mathrm{Sinc}(2f) \cdot \left[e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right] \cdot \delta\left(f - \frac{K}{T}\right) = 0\ ??$$

$10K$

$$= 10\,\mathrm{Hz} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\,\mathrm{Sinc}(2f - 10K)\, e^{j2\pi(f-10K)} - 2\,\mathrm{Sinc}(2f-10K)\, e^{-j2\pi(f-10K)}$$

Time 16'

$$2\,\mathrm{Sin}(2f)\, e^{j2\pi f} - 2\,\mathrm{Sinc}(2f)\, e^{-j2\pi f}$$

$$\hookrightarrow \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} \cdot e^{j2\pi f} - \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f}\, e^{-j2\pi f}$$

$$\left|e^{j2\pi f}\right| = \sqrt{\cos^2(2\pi f) + (i\sin(2\pi f))^2} = \sqrt{\cos^2(2\pi f) - \sin(2\pi f)}$$