Relazione di Parseval

Densità spettrale di energia e di Potenza

Lez 30

Relazione di Parseval

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) \, dt \quad \longrightarrow \quad \text{I.F.T.} \quad x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df}_{\mathcal{F}^*(x(t))}$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t} \, df$$

Sostituiamo $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t} \, df \right] dt$

Possiamo scambiare l'ordine degli elementi da integrare perchè $x(t)$ è di energia

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt \right]}_{X(f)}^{\text{F.T}} df$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot X(f)}_{|X(f)|^2} \, df$$

Morale della favola:

$$\boxed{\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df}$$

L'energia è la stessa sia nel campo del tempo che nella freq

$\Rightarrow$ È possibile vedere l'energia direttamente sullo spettro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Possiamo definire una banda in termini energetici

Per le sequenze

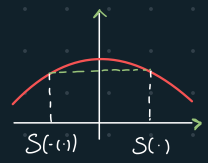
$$\mathcal{E}_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

Lo spettro è periodico e CONTINUO

Densita' Spettrale di Energia

$$S_x(\cdot) = |X(\cdot)|^2$$

Energy
Spectral
Density



Proprieta' Della densita' Spettrale

1) Per $x(\cdot)$ REALI S_x e' Pari $\Rightarrow$ $S_x(-(\cdot)) = S_x(\cdot)$

2) S_x e' Invariante Temporalmente

   └▸ La prop della F.T. sulla inv. Temp. ci dice : $x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0}$

   Il modulo non varia — aggiungiamo solo uno sfasamento

3) Per sistemi LTI

$$Y(\cdot) = H(\,) \cdot X(\cdot) \rightleftharpoons y(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot)$$

$$\underbrace{|Y(\cdot)|^2}_{S_y(\cdot)} = \underbrace{|H(\cdot)|^2}_{\text{Funzione di trasferimento di Energia}} \cdot \underbrace{|X(\cdot)|^2}_{S_x(\cdot)}$$

Banda

Per i Segnali di Energia, la BANDA viene definita nel seguente modo:

"La banda é un INTERVALLO DI FREQUENZE in cui e' contenuta una certa percentuale di Energia."

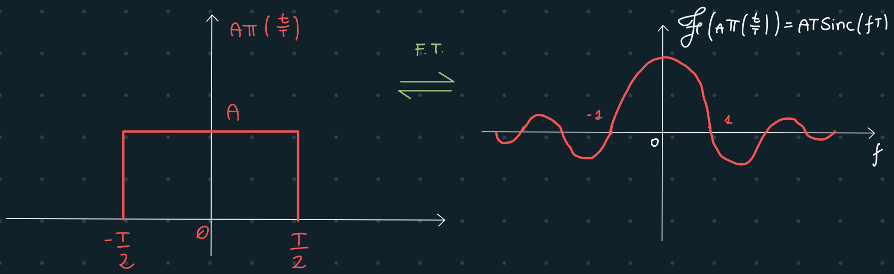
Per i segnali REALI, siccome S_x e' PARI, possiamo considerare anche solo la banda "MONOLATERA", mentre per s. complessi la Banda deve essere definita in modo Bilatero.

Per i sistemi la banda e' definita a seconda della funzione di trasferimento $|H(\cdot)|^2$

Esempio : Impulso Rettangolare

Definiamo una banda e vediamo quale percentuale di Energia si conserva

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{Sinc}(fT)$$



1) Densità Spettrale di $x(t)$ $\Rightarrow S_x(f) = |X(f)|^2 = |AT\,\text{Sinc}(fT)|^2 =$

IMPORTANTE ! All'esame è importante fare TUTTI i calcoli, anche se in questo caso il segnale è reale $\Rightarrow |x|^2 = x^2$

$\Rightarrow S_x(f) = AT\,\text{Sinc}(fT) \cdot [AT\,\text{Sinc}(fT)]^*$

$a + ib = a[\cos(b) + i\sin(b)] = a \cdot e^{ib}$ — Il complx coniugato ha parte reale uguale e parte imm opposta

$\Rightarrow AT\,\text{Sinc}(fT) \xrightarrow{\text{cmpx}} AT\,\text{Sinc}(fT) \cdot [\underbrace{\cos(0)}_{1} + i\underbrace{\sin(0)}_{0}] = \underline{AT\,\text{Sinc}(fT)}$ — Il complx coniug. di un n. R. è il n. R.

$\rightarrow$ continuiamo $\rightarrow$ $S_x(f) = A^2T^2\,\text{Sinc}^2(fT)$ $\rightarrow$ ci ricordiamo che $\mathcal{E}\left[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = A^2T$

$\rightarrow$ Sostituiamo $\rightarrow$ $S_x(f) = \mathcal{E}_x \cdot T\,\text{Sinc}^2(fT)$

2) A noi interessa (per il concetto di banda) andare a definire La frazione di Energia rispetto all'Energia totale.

$\mathcal{E}$ in un intervallo

Frazione $\rightarrow$ $\dfrac{\mathcal{E}_x(K)}{\mathcal{E}_x}$ $\leftarrow$ Totale

$\rightarrow$ $\mathcal{E}_x(K)$ è l'integrale in un certo range di frequenze

Ci interessa sapere cosa succede all'Energia in intervalli

$$\rightarrow \mathcal{E}_x(K) = \int_{-\frac{K}{T}}^{\frac{K}{T}} S_x(f)\,df$$

Calcoliamo $\dfrac{\mathcal{E}_x(K)}{\mathcal{E}_x}$

$$\rightarrow \frac{\int_{-\frac{K}{T}}^{\frac{K}{T}} \overset{\text{const}}{\mathcal{E}_x}\,T\,\text{sinc}^2(fT)\,df}{\mathcal{E}_x} = \frac{\cancel{\mathcal{E}_x}\int_{-\frac{K}{T}}^{\frac{K}{T}} T\,\text{Sinc}^2(fT)\,df}{\cancel{\mathcal{E}_x}} = T\int_{-\frac{K}{T}}^{\frac{K}{T}} \text{Sinc}^2(fT)\,df$$

$-\frac{K}{T} < f < \frac{K}{T}$

Scegliamo gli estremi $\frac{K}{T}$ e $-\frac{K}{T}$ perché ci "fanno comodo" — $\frac{K}{T}$ sono gli zeri della sinc!

A che serve ?

$\rightarrow$ Per rispondere alla domanda : "vediamo quanti lobbi servono per arrivare al 90% di Energia"

$\rightarrow$ continuiamo il calcolo dell'integrale

pongo $\lambda = fT \Rightarrow \cancel{T} df = \frac{d\lambda}{T}$, $f = \frac{K}{T} \rightarrow \lambda = K$; $f = -\frac{K}{T} \rightarrow \lambda = -K$

$$\Rightarrow \cancel{T} \int_{-K}^{K} \mathrm{Sinc}^2(\lambda) \frac{1}{\cancel{T}} \, d\lambda = \int_{-K}^{+K} \mathrm{Sinc}^2(\lambda) \, d\lambda = 2 \cdot \int_{0}^{K} \mathrm{Sinc}^2(\lambda) \, d\lambda$$

Procediamo per via Numerica
(con matlab)

- $K = 1 \rightarrow 2\int_0^1 \mathrm{Sinc}^2(\lambda)\, d\lambda = 0.928 \rightarrow \sim 93\%$ $B = \frac{1}{T}$ il 93% di $\mathcal{E}$ si conserva con una banda monolatera di $1/T$
- $K = 2 \rightarrow 2\int_0^2 \mathrm{Sinc}^2(\lambda)\, d\lambda \cong 95\%$ $B = \frac{2}{T}$
- $K = 10 \rightarrow 2\int_0^{10} \mathrm{Sinc}^2(\lambda)\, d\lambda = 99\%$ $B = \frac{10}{T}$

Esempio: Impulso Esponenziale Monolatero

$$x(t) = A \cdot e^{-2\pi \frac{t}{T}} \cdot u(t)$$

Q: Calcolare la banda corrispondente al 95% dell' $\mathcal{E}$ ToT.

$$X(f) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi \frac{t}{T}} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = A\int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi\frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = A\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{2\pi t}{T} + j2\pi f t\right)}\, dt$$

$$= A\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{2\pi t + Tj2\pi f t}{T}\right)}\, dt = A\int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(\frac{2\pi + jT2\pi f}{T}\right)}\, dt = \frac{AT}{2\pi + jT2\pi f}\, e^{-t\left(\frac{2\pi + jT2\pi f}{T}\right)}\Bigg|_{0 \to 1}^{+\infty \to 0}$$

$$= \frac{AT}{2\pi + j2\pi f T}$$

Recap FT. di un Segnale exp mono L.

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot e^{-4\pi\frac{t}{T}} \cdot u(t)\, dt = A^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(\frac{4\pi}{T}\right)}\, dt = \frac{A^2}{\frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-t\left(\frac{4\pi}{T}\right)}\Bigg|_{0 \to 1}^{+\infty \to 0}$$

$$= \frac{A^2 T}{4\pi} \qquad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x$$

Recap calcolo Energia del Segnale exp monolatero

1) $$S_x = |X(t)|^2 = \frac{A^2T^2}{|2\pi + j2\pi f T|^2} = \frac{A^2T^2}{(2\pi + j2\pi fT)(2\pi - j2\pi fT)} = \frac{A^2T^2}{(2\pi)^2 + (2\pi f T)^2} \quad S_x$$

$(2\pi)^2$ x x $-(j2\pi fT)^2$

$j^2 = -1 \to (2\pi f T)^2$

$$= \frac{A^2T^2}{4\pi^2 + (2\pi f T)^2} = \frac{A^2 T^2}{(4\pi)\pi + (2\pi f T)^2} = \frac{A^2 T}{4\pi} \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (fT)^2}$$

$\mathcal{E}_x$

mettiamo in evidnz. 4π al denom

$$\frac{A^2T^2}{4\pi^2 + 4\pi^2 (fT)^2} = \frac{A^2T}{4\pi} \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{4\pi^2}} + \frac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{4\pi^2}}(fT)^2} = \frac{A^2T}{4\pi} \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(fT)^2}$$

2) $$\frac{\mathcal{E}_x(B)}{\mathcal{E}_x}$$ ← calcoliamo lui

$$\to \mathcal{E}_x(B) = \int_{-B}^{+B} S_x(f)\, df = \frac{A^2T}{4\pi} \cdot \frac{T}{\pi} \int_{-B}^{+B} \frac{1}{1+(fT)^2}\, df$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{atan}(t)$$

Sostituisco $fT = \lambda \to dfT = d\lambda \to df = \frac{1}{T} d\lambda$

Estremi $f = -B \to -BT = \lambda \qquad f = B \to \lambda = BT$

$$\to \frac{A^2T}{4\pi} \cdot \frac{\cancel{T}}{\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{T}} \int_{-BT}^{BT} \frac{1}{1+\lambda^2}\, d\lambda = \frac{A^2 T}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{atan}(\lambda)\Big|_{-BT}^{BT}$$

$\operatorname{atan}(-BT) = -\operatorname{atan}(BT)$

$\operatorname{atan}(BT) + \operatorname{atan}(BT)$

$\Rightarrow 2\operatorname{atan}(BT)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_x(B) = \frac{A^2T}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 2\operatorname{atan}(BT)$$

3)

$$\frac{\mathcal{E}_x(B)}{\mathcal{E}_x} = \frac{\dfrac{\cancel{A^2}\,\cancel{T}}{\cancel{4}\,2\;\pi^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{2}\,\mathrm{atan}(BT)}{\dfrac{\cancel{A^2}\,\cancel{T}}{\cancel{4}\,2\;\cancel{\pi}}} = \frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{atan}(BT) \qquad 95\% = 0.95$$

$\rightarrow$ Calcoliamo $\rightarrow$ $\frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{atan}(BT) = 0.95 \rightarrow \mathrm{atan}(BT) = 0.95\cdot\frac{\pi}{2}$

$$\tan(\mathrm{atan}(x)) = x \Rightarrow BT = \tan\left(\frac{0.95\cdot\pi}{2}\right) \Rightarrow B = \frac{1}{T}\tan\left(\frac{0.95\cdot\pi}{2}\right)$$

Input

$\tan\left(\frac{\pi\times 0.95}{2}\right)$

Result

12.7062...

$\Rightarrow B = \frac{12.7}{T}$ Ans

Densita' Spettrale di Potenza

P ower
S pectral
D ensity

Equivalenza di Parseval: $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ da $-\infty$ a $+\infty$

Def di potenza: $P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$ da $-T$ a $+T$

→ Un escamotage:

$$x_T(t) = x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \rightleftharpoons X_T(f)$$

Calcoliamo la potenza: $P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt \rightleftharpoons P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df$

→ Portiamo dentro il lim: $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2}_{PSD} df$

La densita' Spettrale di Potenza e' quel valore che integrato da $-\infty$ a $+\infty$ ci da' la Potenza.

$$\Rightarrow S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$$

Per Sequenze:

$$S_x(\nu) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2N+1} |X_N(\nu)|^2$$

Spettro della seq $x(n)$ finestrata → $x_N(n) = x(n) \cdot R_{2N+1}(n+N)$

Traslata per centrarla in 0

Densita' Spettrali Mutue

Possiamo considerare il contributo di $\mathcal{E}_x$ o P_x MUTUO, ovvero da due o piu' segnali.

$$\mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t)^* dt \underset{\text{Parseval}}{\rightleftharpoons} \mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y(f)^* df \qquad \text{Segnali}$$

$$\mathcal{E}_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t)^* \rightleftharpoons \mathcal{E}_{xy} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot Y(f)^* df \qquad \text{Sequenze}$$

$$S_{xy}(\,) = \underbrace{X(\cdot) \cdot Y(\cdot)^*}_{\text{L'ordine e' importante!}}$$

Densita' spettrale mutua per segnali di Energia

Potenza mutua : $P_{xy} = \langle x(t)\, y(t)^* \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot y^*(t)\, dt$ Non e' da $-\infty$ $+\infty$

→ Finestriamo → $x_T(t) = x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$

$y_T(t) = y(t)\ \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$

$$\Rightarrow P_{x_T y_T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) \cdot y_T(t)^* dt \Longleftrightarrow P_{X_T Y_T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot Y_T(f)^* df$$

$$\Rightarrow S_{xy}(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} X_T(f) \cdot Y_T(f)^* \qquad \text{PSD per } \underline{\text{Segnali}} \text{ di Potenza}$$

P_{xy} dove $x = x(n)$, $y = y(n)$ → $P_{xy} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{K=-N}^{+N} x(n) \cdot y(n)^*$

$$\Rightarrow S_{xy}(\nu) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot X_N(\nu) \cdot Y_N(\nu)^* \qquad \text{PSD per } \underline{\text{sequenze}} \text{ di Potenza}$$

Relazione tra mutua correlazione ed ESD mutua

(ESD: Energy Spectral Density)

Siano $x(\cdot)$ ed $y(\cdot)$ due segnali di Energia

$$\tau_{xy}(\cdot) = \langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = x(\cdot) * y(-(\cdot))^* \rightleftharpoons X(\cdot)\cdot Y(\cdot)^*$$

Correlazione — Densita' spettrale mutua $S_{xy}(\cdot)$

Ad una riflessione ed un coniugato corrisp un coniugato

$$x(-(t)) \rightleftharpoons X(t)^*$$
$$x(-(t))^* \rightleftharpoons [X(t)^*]^* = X(t)^*$$

Tempo — Frequenza

$\Rightarrow$ Correlazione $\tau_{xy}(\cdot) \rightleftharpoons$ Densita' spettrale mutua $S_{xy}(\cdot)$

Inoltre $x(\cdot) = y(\cdot) \Rightarrow \tau_x$ Autocorrelazione (Tempo) $\xrightleftharpoons{F.T.}$ Densita' spettrale di energia (frequenza) $S_x(\cdot)$

Relazione tra mutua correlazione ed PSD mutua

(PSD: Power Spectral Density)

$\to$ **Teorema di Wiener - Kintchine**

Dati due segnali di potenza $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$

La densita' spettrale mutua $S_{xy}(\cdot)$ e' la F.T. della loro funzione di mutua correlazione

$$\tau_{xy}(\cdot) \rightleftharpoons S_{xy}(\cdot)$$

$$X_T(f)\cdot Y_T^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t_1)\,\Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right)}_{X_T(f)} \cdot e^{-j2\pi f t_1}\, dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{y^*(t_2)\,\Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right)}_{Y_T^*(f)} \cdot e^{+j2\pi f t_2}\, dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right) x(t_1)\cdot y(t_2)\, e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

Cambi di variabili doppio

$\to t = t_1$ e $\tau = t_1 - t_2 \Rightarrow t_2 = t_1 - \tau \underset{t=t_1}{\Rightarrow} t_2 = t - \tau$

$$dt_1\, dt_2 = dt\, d\tau$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right) x(t)\cdot y^*(t-\tau)\, e^{-j2\pi f(\cancel{t} - \cancel{t} + \tau)}\, dt\, d\tau$$

$\Rightarrow$ Divido per $2T$ e passiamo al limite per $T \to \infty$: $\lim_{T\to\infty}$

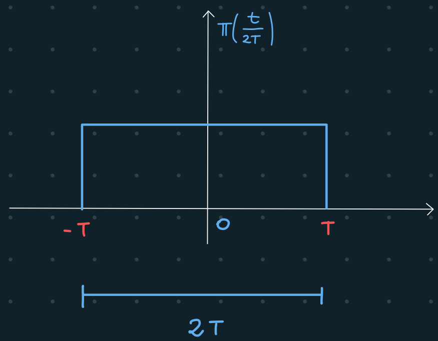
ottenia mo: $X_T(f)\cdot Y_T(f)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right)\cdot x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$

Se $\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\cdot\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{2T-|\tau|}\right)$

Visto che $\lim_{T\to+\infty} 2T-|\tau| \simeq 2T \Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\cdot x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt$

Sfruttando lo stesso concetto de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ per } t\geq 0}}{u(t)}\,dt \to \int_{0}^{+\infty} x(t)\,dt$$



→ Possiamo scrivere

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\cdot x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt = \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt}_{r_{xy}(\tau)}$$

Correlazione tra x e y

Riprendendo anche l'altro integrale:

$$X_T(f)\cdot Y_T(f)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xy}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

S_{xy} per segnali di potenza

Inoltre se x ed y sono incoerenti ($r_{xy}(\tau)=0\ \forall\tau$) allora anche S_{xy} sarà zero!

$$\underset{\text{Tempo}}{r_{xy}(\cdot)} \overset{F.T.}{\rightleftharpoons} \underset{\text{frequenza}}{S_{xy}(\cdot)}$$