UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta dell'21 aprile 2022
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1
Il tempo di vita di due colture batteriche risulta modellabile come una variabile aleatoria esponenziale con media 180 minuti, per la coltura nella provetta A alla temperatura di 35 gradi Celsius e 120 minuti per la coltura nella provetta B alla temperatura di 40 gradi Celsius;
Dopo 150 minuti si preleva a caso una delle due colture e si osserva che si è estinta. Calcolare la probabilità che la coltura provenga dalla provetta A;

EX. 2
Sia $x(t)$ il treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \text{rep}_{1/50}\Pi\left(100t\right) \ .$$

Calcolarne la trasformata di Fourier. Il segnale $x(t)$ viene successivamente filtrato con un filtro passa-basso ideale avente frequenza di taglio pari a 60 Hz. Calcolare l'espressione nel dominio del tempo del segnale in uscita al filtro.

EX. 3
Dato il segnale a tempo discreto $x(n) = R_3(n) - 0.5R_3(n-1) + 0.5R_3(n+1)$, si calcoli
1. la trasformata di Fourier di $x(n)$;
2. la densità spettrale di energia $S_x(\nu)$;

EX. 1

Il tempo di vita di due colture batteriche risulta modellabile come una variabile aleatoria esponenziale con media 180 minuti, per la coltura nella provetta A alla temperatura di 35 gradi Celsius e 120 minuti per la coltura nella provetta B alla temperatura di 40 gradi Celsius;

Dopo 150 minuti si preleva a caso una delle due colture e si osserva che si è estinta. Calcolare la probabilità che la coltura provenga dalla provetta A;

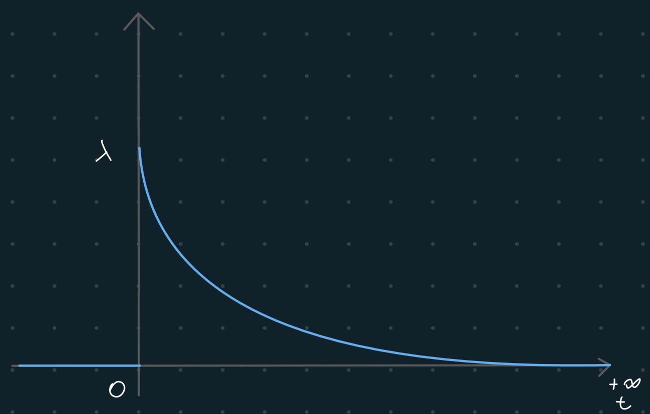
$A \sim \mathcal{E}_x(\lambda)$ $\quad E[A] = \frac{1}{\lambda} = 180 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{18}$ $\quad$ a $35°C$

$B \sim \mathcal{E}_x(\lambda)$ $\quad E[B] = \frac{1}{\lambda} = 120 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{120}$ $\quad$ a $40°C$

Dopo 150 minuti si peleva a caso una delle due colture e si oss. che e' estinta ;

E= ("La coltura si e' estinta dopo 150' ") $\rightarrow$ $P(E) = ?$

Q: "La coltura che si e' estinta proviene da A" = $P(A/E)$ Q



$$F_A(x) = \left[1 - e^{-\lambda x}\right] u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{180}}$$

$$F_B(x) = 1 - e^{-\frac{x}{120}}$$

- Cosa devo trovare ?

Ans: "La prob CHE SIA A dato il fatto che e' accaduto E"

$$P(A/E) = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E)}$$

BAYES $\quad P(E/A) \rightarrow ?$ $\quad P(A) \rightarrow \frac{1}{2}$ $\quad P(E) \rightarrow ?$

- $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Per trovare P(E) usiamo la legge delle prob Totale

$\rightarrow P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B)$ $\quad$ $P(A) \rightarrow \frac{1}{2}$, $P(B) \rightarrow \frac{1}{2}$

Per trovare P(E/A) usiamo la CDF di A :

- $F_A(150) = 1 - e^{-\frac{150}{180}} = 0.56 \simeq 56\%$

Per trovare P(E/B) usiamo la CDF di B :

- $F_B(150) = 1 - e^{-\frac{150}{120}} = 0.71 \simeq 71\%$

$\rightarrow$ Mettiamo tutto insieme : $P(E) = \frac{0.56}{2} + \frac{0.71}{2} = 0.635$ P(E)

Siamo pronti per trovare $P(A/E) \Rightarrow P(E/A) \cdot \frac{P(A)}{P(E)} = 0.56 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{0.635} \simeq 0.44 \rightarrow 44\%$

EX. 2

Sia $x(t)$ il treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \text{rep}_{1/50}\Pi\,(100t)\ .$$

Calcolarne la trasformata di Fourier. Il segnale $x(t)$ viene successivamente filtrato con un filtro passa-basso ideale avente frequenza di taglio pari a 60 Hz. Calcolare l'espressione nel dominio del tempo del segnale in uscita al filtro.

Dato $x(t) = \text{rep}_{\frac{1}{50}}\left[\Pi(100 \cdot t)\right]$

Q_1: $X(t) = ?$

Sappiamo che $A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{Sinc}(fT)$, inoltre $x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$

Sfruttando il fatto che: $\text{rep}_T[x(t)] \rightleftharpoons X_\delta(f)$

$$\Rightarrow \Pi(100\,t) \rightleftharpoons \frac{1}{100}\,\text{sinc}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Sappiamo che $\text{rep}_T[x(t)] \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot\delta\left(f-\frac{K}{T}\right)$; $X(f) \to X\left(\frac{K}{T}\right)$

$$\Rightarrow \text{rep}_{\frac{1}{50}}\left[\Pi(100t)\right] \rightleftharpoons \cancel{50}\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\cancel{100}_{\,2}}\,\text{sinc}\left[\frac{1}{\cancel{100}_{\,2}}\cdot\frac{K}{\cancel{\frac{1}{50}}}\right]\cdot\delta(f-50K)$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\text{sinc}\left(\frac{K}{2}\right)\cdot\delta(f-50K)$$

Ans Q_1 18'

Q_2: $x(t)$ viene filtrato con un filtro passa-basso ideale avente $f_c = 60\,\text{Hz}$.
calcolare $y(t)$

- Filtro passa Basso ideale $H(f) = \Pi\left(\frac{f}{120}\right)$ ha Banda pari a $60\,\text{Hz} \Rightarrow 2B = 120$

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) \Rightarrow \quad Y(f) = \left[\frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\text{Sinc}\left(\frac{K}{2}\right)\cdot\delta(f-50K)\right]\cdot\Pi\left(\frac{f}{120}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{Sinc}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\delta(f+50) + \text{Sinc}(0)\,\delta(f) + \text{Sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\delta(f-50)\right]$$

$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(f)) \Rightarrow$ Sappiamo che $X_\delta(f) \rightleftharpoons \text{rep}_T[x(t)]$, $A\cdot\delta(f) \rightleftharpoons A$, $\delta(f+T_0) \rightleftharpoons \delta(f)\cdot e^{-j2\pi t T_0}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(Y(f)) = \frac{1}{2}\text{Sinc}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\delta(t)\cdot e^{j2\pi t 50} + \frac{1}{2}\underbrace{\text{Sinc}(0)}_{1}\cdot 1 + \frac{1}{2}\text{Sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\delta(t)\cdot e^{-j2\pi t 50}$$

$=$ Sinc(t) e' reale $\Rightarrow$ Pari $\Rightarrow \text{Sinc}\left(-\frac{1}{2}\right) = \text{Sinc}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\text{Sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[e^{j2\pi t 50} + e^{-j2\pi t 50}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\text{Sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\cancel{2}\cos(2\pi t 50) + \frac{1}{2}$$

$$= \text{Sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cos(2\pi t 50) + \frac{1}{2}$$

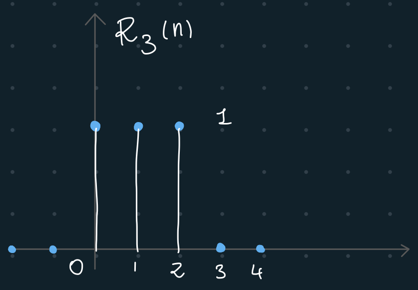
Ans $y(t)$

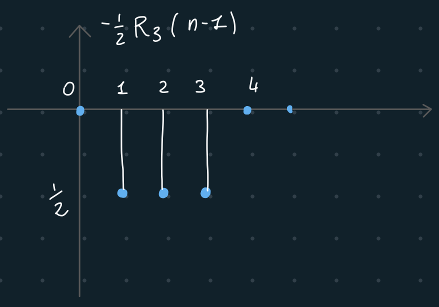
EX. 3

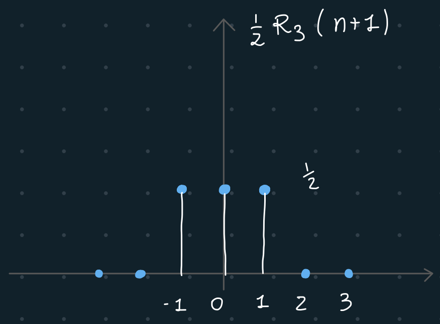
Dato il segnale a tempo discreto $x(n) = R_3(n) - 0.5R_3(n-1) + 0.5R_3(n+1)$, si calcoli

1. la trasformata di Fourier di $x(n)$;
2. la densità spettrale di energia $S_x(\nu)$;

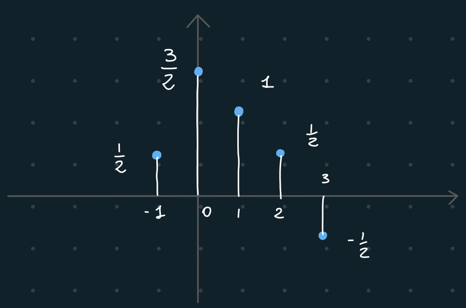
$$x(n) = R_3(n) - \frac{1}{2}R_3(n-1) + \frac{1}{2}R_3(n+1)$$







Q_1: $\mathcal{F}(x(n)) = ?$



- Ricordiamo le proprietà: $\delta(n) \rightleftharpoons 1$

  $x(n-1) \rightleftharpoons X(\nu) \cdot e^{-j2\pi\nu}$

Inoltre $R_N(n) \rightleftharpoons \dfrac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j(N-1)\pi\nu}$

$$x(n) = -\frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{3}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) - \frac{1}{2}\delta(n-3)$$

- $R_3(n) \rightleftharpoons \dfrac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j2\pi\nu}$

- $\frac{1}{2}R_3(n-1) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j2\pi\nu} \cdot e^{-j2\pi\nu} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j4\pi\nu}$

- $\frac{1}{2}R_3(n+1) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot \left[\cancel{e^{-j2\pi\nu}} \cdot \cancel{e^{j2\pi\nu}}\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x(n)) = \frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{2}\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2}\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

$$= \frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \left[e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2} \right] \quad X(\nu)$$

Q_2: $S_x(\nu) = ?$

Per definizione sappiamo che $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$

$\Rightarrow$ $S_x(\nu)$ non e' altro che lo spettro del segnale $x(n)$ al quadrato:

$S_x(\nu) = |X(\nu)|^2$ $\rightarrow$ Il modulo quadro di un segnale si calcola moltiplicando il segnale per il suo coniugato

$\rightarrow |X(\nu)|^2 = X(\nu) \cdot X^*(\nu)$

Nel nostro caso: $\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(3\pi)}\left[e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi\nu} + \frac{1}{2}\right] \cdot \overbrace{\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(3\pi)}\left[e^{+j2\pi\nu} - \frac{1}{2}e^{+j4\pi\nu} + \frac{1}{2}\right]}^{X^*(\nu)}$

$$= \left(\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(3\pi)}\right)^2 \left[\underbrace{1} \cancel{- \frac{1}{2}e^{j2\pi\nu}} \cancel{+ \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}} \cancel{- \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}} + \underbrace{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}e^{-j4\pi\nu} \cancel{+ \frac{1}{2}e^{j2\pi\nu}} - \frac{1}{4}e^{j4\pi\nu} + \underbrace{\frac{1}{4}}\right]$$

$e^{-j4\pi\nu} + e^{j4\pi\nu} = 2\cos(4\pi\nu)$

$$= \left(\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(3\pi)}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{-j4\pi\nu} + e^{j4\pi\nu}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\sin(3\pi\nu)}{\sin(3\pi)}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi\nu)\right]$$