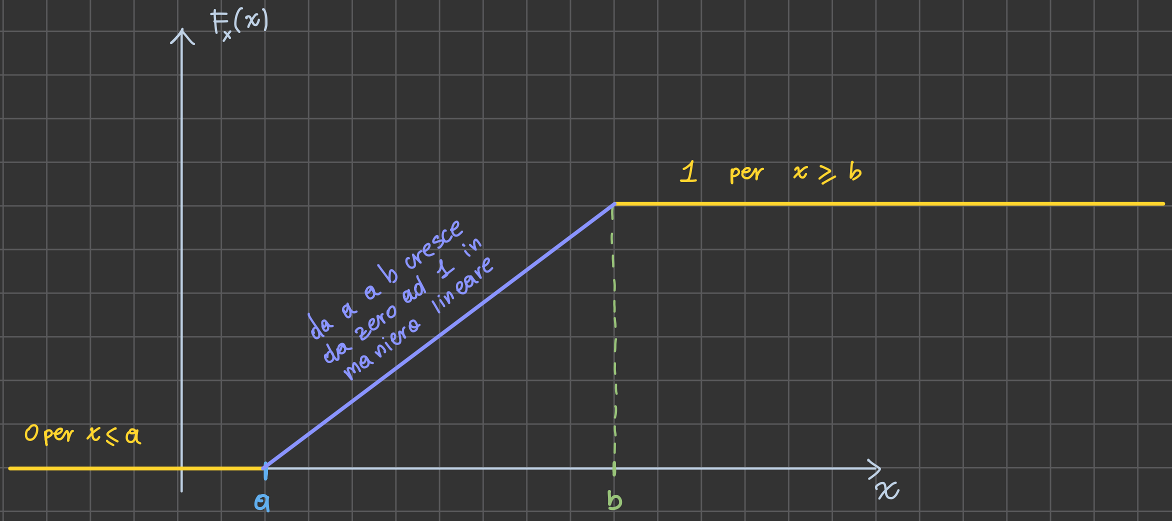
CDF Di una Variabile aleatoria continua uniforme

$X \sim U(a,b)$

"Distribuito come" — "una uniforme"

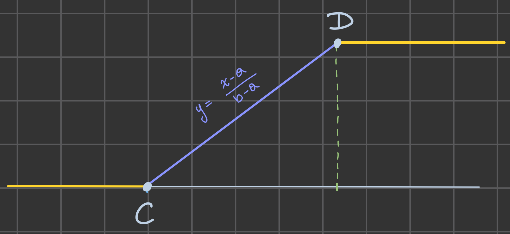


$F_X(x) = 0$ per $x < a$

$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ per $a \leq x < b$

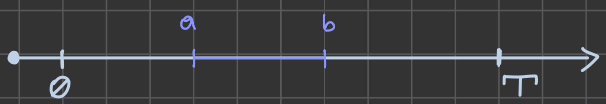
$F_X(x) = 1$ per $x \geq b$

*gli uguali sono messi in modo da rispettare la continuità a destra



$C = (a,0)$, $D = (b,1)$

$\Rightarrow \frac{y-0}{1} = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow y = \frac{x-a}{b-a}$



La probabilità che il viaggiatore arrivi in un certo intervallo di tempo dipende dall'ampiezza dell'intervallo ma non da dove questo intervallo è allocato

Variabile Aleatoria Esponenziale

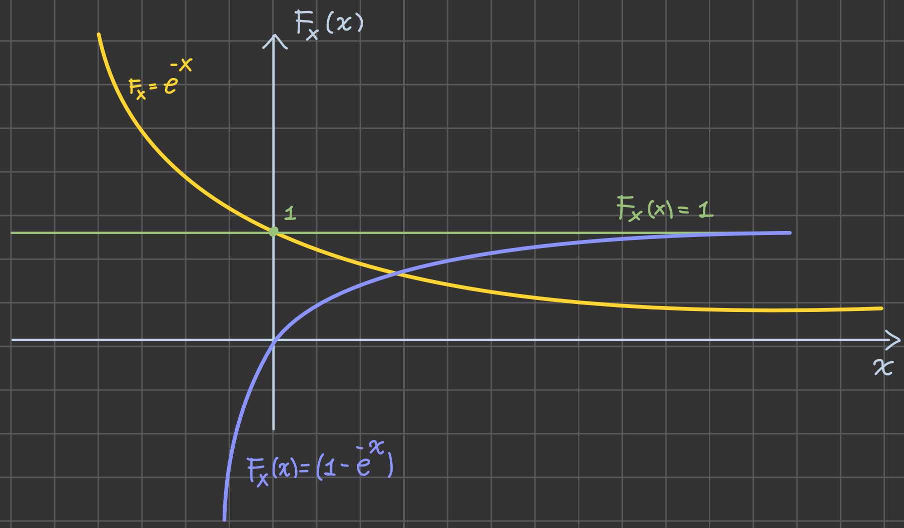
Parametro

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$$

Gradino Unitario

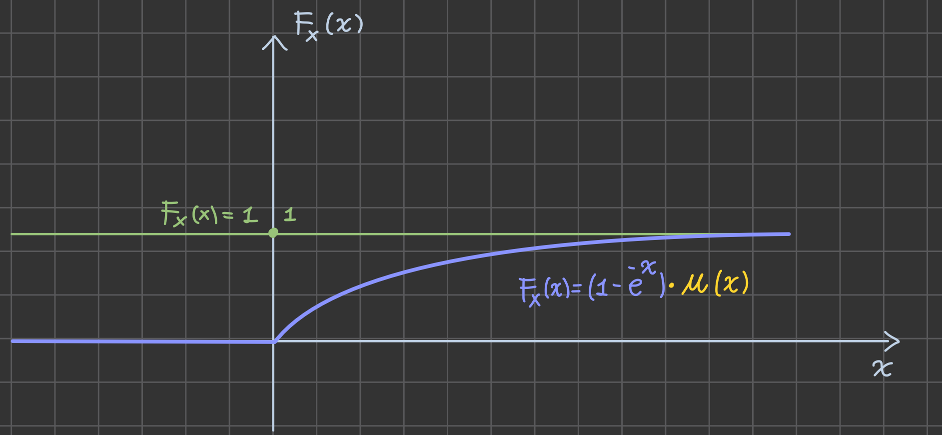
$X \sim Exp(\lambda)$

Si dice che x è esponenziale di parametro λ



Definizione di funzione

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



PMF - Probability Mass Function   Per variabili Discrete

$P_X(x) = P(X = x)$

Probabilita' che X sia uguale ad x

Esempio

$A = \{T, C\}$ Lancio 4 volte $\Rightarrow N = 4$

$\Rightarrow$ uscite $= \{T, T, T, T\} \Rightarrow X = 4$

Variabile Aleatoria

Esempio

$A = \{T, C\}$ Lancio 4 volte $\Rightarrow N = 4$

$\Rightarrow$ uscite $= \{C, T, C, C\} \Rightarrow X = 1$

Variabile Aleatoria

V. A. Binomiale

Lancio una moneta N volte;

T = Successo

C = Insuccesso

Variabile indipendente

$$P(X = K) = P_X(K)$$

V. Aleatoria   P.M.F

• Calcoliamo

P(lancio) = Indipendente

$\Rightarrow P(T \cap T \cap \ldots) = P(T) \cdot P(T) \cdot \ldots$

$\Rightarrow P(N \text{ volte Testa}) = P^N$

Probabilita' di ottenere testa

• $P(\text{Primo lancio } T \text{ e } \overbrace{\text{tutto il resto}}^{N-1} C) = ?$

Siccome $\Omega = \{T, C\} \Rightarrow \overline{T} = C$

Complemento

$\Rightarrow P(T) = P$ Allora $P(C) = 1 - P$

Quindi $P(\{T, C\}) = P \cdot (1 - P)$

$\Rightarrow$ Iteriamo $\Rightarrow P(T, C, \ldots C) = P(X = 1)$

$$= P \cdot (1 - P)^{N-1}$$

• $P(\{T, T, C, \ldots C\}) = ?$

$\Rightarrow P^{2} \cdot (1 - P)^{N-2}$

Esempio con 3 lanci

1	1	1	$X = 3$	$\Rightarrow$ 3 successi
1	0	1	$X = 2$	2 casi uguali
0	1	1	$X = 2$	Ma ottenuti in modo DIVERSO!

Probabilita' dei casi:

1	1	1	$P = P^3$
1	0	1	$P = P^2 \cdot (1 - P)$
0	1	1	$P = P^2 \cdot (1 - P)$

$\hookrightarrow$ Queste prob. vanno contate tante volte quante sono le combinazioni di Due successi su N posti

Combinazioni necessarie

$\Rightarrow$ Coefficiente Binomiale $\Rightarrow \binom{N}{K}$

$\binom{N}{K}$ ci dice quante sono le combinazioni di K elementi su N posti?

$$\Rightarrow \boxed{\binom{N}{K} = \frac{N!}{K!\,(N-K)!}}$$

Variabile Aleatoria Binomiale

$$\Rightarrow \boxed{P(X = K) = \binom{N}{K} \cdot P^K (1 - P)^{N-K}}$$

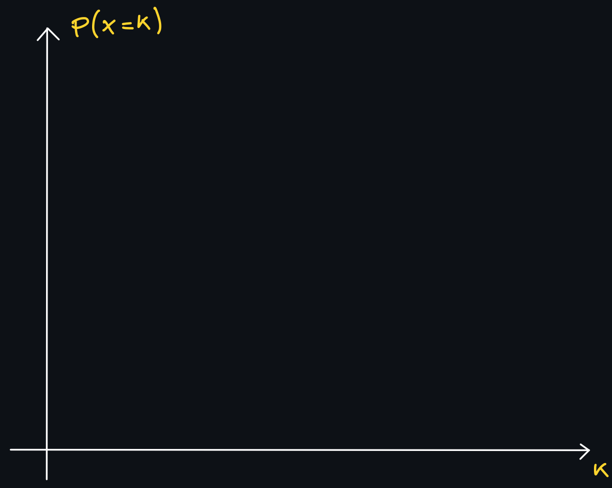
Per $K = 0, 1, \ldots, N$

Variabile Aleatoria di Poisson

$$\boxed{P_X(x=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}$$

k arrivi in un ΔT fissato

Pure birth.



con $k \in (0,+\infty)$

Somma rispetto a k

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow$$

Serie di Mc Laurin $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!}$

Non dipende da k

$$\Rightarrow e^x = \frac{x^k}{k!} \Rightarrow \boxed{e^{\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}} \Rightarrow e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

PMF e CDF

$$\underbrace{F_X(k) - F_X(k-1)}$$

Salto di discontinuita'

Aka Differenza Prima