Esercizi di probabilità

Esercizio 1

Nel lancio di un dado calcolare la probabilità di ottenere un numero dispari.
[1/2]

Link

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow E = \{\text{"un numero dispari"}\} = \{1,3,5\}$

$\Rightarrow P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = .5 = 50\%$

Esercizio 2

Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità di ottenere una figura.
[3/10]

12 ; 4 assi + 24 = 28

$\Omega = \{\text{Figure}, \text{numeri}\} \qquad E = \{\text{Figura}\}$

$\Rightarrow \|\Omega\| = 40 \ , \ \|E\| = 12$

$\Rightarrow P(E) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$

Esercizio 3

Si lanciano due dadi, calcolare la probabilità di avere due numeri uguali. Calcolare inoltre la probabilità che la somma delle due facce sia 5.
[1/6 | 1/9]

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$

$A = \{\text{"due numeri uguali"}\} = \{(1,1),(2,2),\dots(6,6)\}$

$\Rightarrow \|A\| = 6 \qquad \|\Omega\| = 6^2 = 36$

$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{\text{"Somma di 2 facce = 5"}\}$

$= \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)\} \Rightarrow \|B\| = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \sim 11\%$

Esercizio 4

Si lanciano 3 monete, calcolare la probabilità di avere due teste ed una croce.
[3/8]

$\Omega = \{T,C\}^3$

$E = \{\text{"due T ed una C"}\} =$

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} T & T & T \\ T & T & C \\ T & C & T \\ T & C & C \\ C & T & T \\ C & T & C \\ C & C & T \\ C & C & C \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow P(E) = \frac{3}{8}$

Esercizio 5

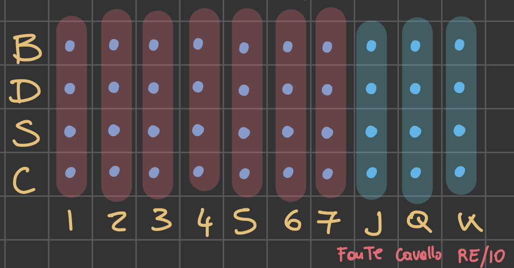
Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta, calcolare la probabilità di avere:
A] una carta di fiori.
B] un numero dispari.
C] una non figura.
[1/4 | 2/5 | 7/10]

$A = \{\text{"una carta di fiori"}\} \Rightarrow \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 25\%$

$B = \{\text{"num. dispari"}\} \Rightarrow \frac{4 \cdot 4}{40}^{*} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

* 4 e non 5 perchè il cavallo non è numerabile

$C = \{\text{"una non figura"}\}$



$\Rightarrow P(\text{Fig}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$

$P(C) = \frac{28}{40} = \frac{7}{10} = 70\%$

$\Rightarrow \text{Fig} \cap C = \emptyset$

$\text{Fig} \cup C = \Omega$

Esercizio 6

Una scatola contiene 100 lampade di cui 95 "buone" e 5 che non si accendono.
Si estraggono 10 lampade a caso, calcola la probabilità di estrarle tutte "buone".
[0,58]

$\Omega = \{B, B, \dots B_{95}, R, R, R, R, R\}$

Estraiamo 10 lampade

$$= \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi totali}} = \frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{95!}{\cancel{10!}\,(85)!}}{\frac{100!}{\cancel{10!}\,(90)!}}$$

$$= \frac{95!}{85!} \cdot \frac{90!}{100!} = \frac{\cancel{95!}}{\cancel{85!}} \cdot \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot \cancel{85!}}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot \cancel{95!}}$$

$$= 0.58 \simeq 60\%$$

Formula combinazioni $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Esercizi probabilita' Condizionata

Esercizio 1

Si stima che il 30% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 3% siano diabetici e che il 2% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

1. sia diabetico se è obeso;
2. sia obeso se è diabetico.

Tot = n

$D = 3\% = 0.03$

$O = 30\% = 0.3$

$D \cap O = O \cap D = 2\% = 0.02$

$A = \{$"sia diab. se obeso"$\} \Rightarrow P(D/O) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0.02}{0.3} =$

$= \dfrac{2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-1}} = \dfrac{2}{3} \dfrac{10^{\cancel{-2}\,-1}}{\cancel{10^{-1}}} = \dfrac{3}{2} \cdot 10^{-1} = 0.667 \sim 67\%$

$B = \{$"sia obeso se diabetico"$\} \Rightarrow P(O/D) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(D)} = \dfrac{0.02}{0.03}$

$\Rightarrow P(O/D) = \dfrac{2}{3} = 0.667$

Esercizi svolti su probabilità condizionata e teorema di Bayes

Esercizio 1

Si stima che il 30% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 3% siano diabetici e che il 2% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

1. sia diabetico se è obeso;

2. sia obeso se è diabetico.

Soluzione

Indichiamo con O e D i seguenti eventi:

O="un individuo scelto casualmente sia obeso";

D="un individuo scelto casualmente sia di diabetico".

Il testo ci dice che $P(O) = 0.30$, $P(D) = 0.03$ e $P(O \cap D) = 0.02$.

1. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia diabetico *dato* che è obeso, ossia $P(D|O)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(D|O) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{0.02}{0.3} = 0.067$$

2. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia obeso *dato* che è diabetico, ossia $P(O|D)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(O|D) = \frac{P(D \cap O)}{P(D)} = \frac{0.02}{0.03} = 0.667$$

Esercizio 2

A un esame universitario si presentano sia studenti che hanno seguito il corso sia studenti che non l'hanno seguito. Il docente ritiene che il 65% degli studenti abbiano seguito il corso. La probabilità che uno studente superi l'esame dato che ha seguito il corso è 0.75, mentre la probabilità che uno studente superi l'esame dato che non ha seguito il corso è 0.40.

- Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?
- Qual è la probabilità che uno studente abbia seguito il corso dato che ha superato l'esame?

Soluzione

Indichiamo con A e B gli eventi:

A="lo studente supera l'esame";

B="lo studente ha seguito il corso"

1. Dall'informazione fornita dal docente "il 65% degli studenti hanno seguito il corso", approssimando la probabilità con la frequenza relativa, si ha P(B) = 0.65 e applicando il primo teorema del calcolo delle probabilità si ottiene:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

   e inoltre $P(A|B) = 0.75$ e $P(A|\bar{B}) = 0.40$. L'evento A può essere rappresentato come l'unione di due eventi incompatibili $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$; pertanto

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

   dove

   - $P(A \cap B) = P(A|B) * P(B) = 0.75 * 0.65 = 0.4875$
   - $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B}) * P(\bar{B}) = 0.40 * 0.35 = 0.1400$

   Pertanto $P(A) = 0.4875 + 0.1400 = 0.6275$

2. La probabilità richiesta è

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4875}{0.6275} = 0.7769$$

Esercizio 3

Ad una certa conferenza, partecipano 30 psichiatri e 24 psicologi. Due di queste 54 persone vengono scelte casualmente per fare parte di una commissione. Qual è la probabilità che venga scelto almeno uno psicologo?

Soluzione

Siano A e B gli eventi

A="il soggetto scelto è uno psicologo"

B="il soggetto scelto è uno psichiatra"

Vogliamo calcolare la probabilità che su 2 soggetti estratti almeno uno sia uno psicologo. Possiamo adottare 2 possibili strategie.

Strategia 1: l'evento "estraggo almeno 1 psicologo" è complementare all'evento "non estraggo alcun psicologo". Pertanto Pr("almeno 1 sia uno psicologo")=1-Pr("nessuno psicologo")=1-Pr("2 psichiatra"). Sia B_1 l'evento "seleziono uno psichiatra alla prima selezione" e B_2 l'evento "seleziono uno psichiatra alla seconda selezione". La probabilità richiesta è pertanto pari a :

$$1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - P(B_1)P(B_2|B_1) = 1 - \frac{30}{54}\frac{29}{53} = 0.6960$$

Strategia 2: equivalentemente questa probabilità poteva essere calcolata come probabilità dell'unione dei seguenti eventi:

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$$

ossia

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = P((A_1 \cap A_2)) + P((A_1 \cap B_2)) + P((B_1 \cap A_2)) = 0.6960$$

poichè

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{23}{53} = 0.1929$
- $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{30}{53} = 0.2516$
- $P(B_1 \cap A_2) = P(B_1)P(A_2|B_1) = \frac{30}{54}\frac{24}{53} = 0.2516$

Esercizio 4

Su un tavolo ci sono 2 monete. Qaudno vengono lanciate, una moneta da' testa con probabilità 0.5 mentre l'altra da' testa con probabilità 0.6. Una moneta viene scelta a caso e lanciata.

1. Qual è la probabilità che esca testa?
2. Se esce croce, qual è la probabilità che fosse la moneta equilibrata?

Soluzione
Siano

M_1=la moneta scelta è la moneta 1

M_2=la moneta scelta è la moneta 2

Il testo afferma che $P(T|M_1) = 0.5$ e $P(T|M_2) = 0.6$.

1. $P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.6 = 0.55$
2. Si vuole calcolare la probabilità che essendo uscita croce sia stata estratta la moneta 1; applicando il teorema di Bayes

$$P(M_1|C) = \frac{P(C|M_1)P(M_1)}{P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2) * P(M_2)} = \frac{0.5 * 0.5}{(0.5 * 0.5) + (0.5 * 0.4)} = 0.55$$

Esercizio 5

Tra i partecipanti ad un concorso per giovani compositori il 50% suona il pianoforte, il 30% suona il violino e il 20% la chitarra. Partecipano ad un concorso per la prima volta il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti e il 10% dei chitarristi. Applicando i concetti di probabilita' condizionata e il teorema di Bayes, rispondere alle seguenti domande.

1. Qual è la percentuale di aspiranti compositori alla prima esperienza?
2. Sapendo che ad esibirsi per primo sarà un compositore alla prima esperienza, qual è la probabilità che sia un chitarrista?

Soluzione
Siano:

A = Aspiranti compositori alla prima esperianza

B = Pianisti

C = Violinisti

D = Chitarristi

abbiamo

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup C \cup D)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) \\
&= P(A|B) + P(B) + P(A|C)P(C) + P(A|D)P(D) \\
&= 0.1 \cdot 0.5 + 0.33 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.17
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo quesito abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(D|A) &= \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.17} = 0.12
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un *falso positivo* (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo?

Soluzione

Indichiamo rispettivamente con D ed E gli eventi

D = *un soggetto estratto casualmente ha la malattia*

E= *il test è positivo*

Il testo ci dice che il test è affidabile al 99%, ossia fornisce un esito positivo quando il soggetto è effettivamente malato. Ciò significa che

$$P(E|D) = 0.99$$

Tuttavia, l'esame fornisce un *falso postivo* nel 2% dei casi, ossia

$$P(E|D^c) = 0.02$$

Sapendo che P(D)=0.005, per determinare $P(D|E)$ possiamo utilizzare il Teorema di Bayes come segue:

$$P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995} = 0.199$$

Risulta quindi che una persona scelta a caso che ottiene risultato positivo al test ha una probabilità del 20% di avere effettivamente la malattia.

I calcoli precedentemente svolti ci dicono anche che la probabilità che il test dia un risultato positivo è $P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) = 0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995 = 0.02485$ e quindi la probabilità che il test dia un risutato negativo è $P(E^c) = 1 - 0.02485 = 0.97515$.

La probabilità che una persona scelta a caso che ottiene un risultato negativo al test sia di fatto malata è

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D)P(D)}{P(E^c|D)P(D) + P(E^c|D^c)P(D^c)} = \frac{(1 - 0.99) \cdot 0.005}{0.97515} = \frac{1}{19503}$$

che è un numero confortante.

Valutare che cosa succede delle due probabilità scritte precedentemente quando $P(E|D) < 0.99$ o la prevalenza della malattia nella popolazione ($P(D)$)è superiore allo 0.5 %.

ESERCIZI VARIABILI ALEATORIE Dal video

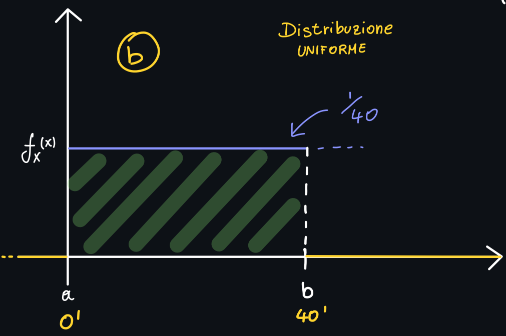
1. The amount of time a person must wait for a train to arrive in a certain town is uniformly distributed between 0 and 40 minutes. ~~(a)~~ Determine the probability density function f(x). ~~(b)~~ Draw a graph of f(x). ~~(c)~~ What is the probability that a person must wait less than 8 minutes? (d) What is the probability that a person must wait more than 30 minutes? (e) Calculate P(10 < x < 26), P(x = 20), and P(x > 45).
(f) Calculate the mean and standard deviation. (g) What is the 85th percentile?

$A_{TOT} = 1$

(a) Determiniamo la $f_X(x)$

$$A = 1 = \underset{b-a}{B} \cdot \underset{f_X(x)}{H} \Rightarrow H = \frac{1}{B} \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

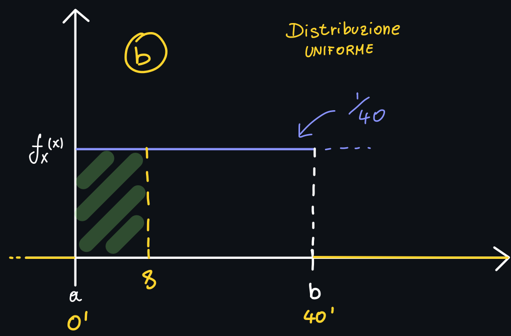
$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{40-0} = 1/40$$



(c) P che una persona debba aspettare meno di 8''?

$$P(\{X \leq 8\}) = F_X(8) \Rightarrow \frac{8-0}{40-0} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

oppure $A = B \cdot H = 8 \cdot 1/40 = 1/5 = 20\%$



(d) $P(\{X \geq 30\})$

$$\Rightarrow \underbrace{P(\{X \leq 40\})}_{P(\{\Omega\})=1} - \underbrace{P(\{X \leq 30\})}_{F_X(30) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = 1/4 = 25\%$$

(e) • $P(\{10 < X < 26\})$

$$P = \int_{10}^{26} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_{10}^{26} dx = 1/40 \, [26-10] = \frac{1}{40} \cdot 16 = \frac{2}{5} = 40\%$$

• $P(\{X = 20\}) = \emptyset$

• $P(\{X > 45\}) = ?$ $\Rightarrow f_X(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \Rightarrow 0 \cdot \int_{45}^{+\infty} dx = 0\,[+\infty - 45] = \emptyset$

(f) Media e deviazione Standard

$$E = \begin{cases} \sum_{x_i \in A_X} x_i \cdot F_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x)\, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = \int_a^b x \cdot f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right]$$

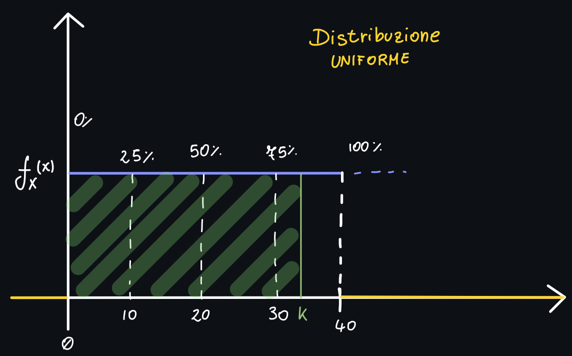
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$= \frac{40+0}{2} = 20$$ Valore Medio

Varianza di una V.A. Uniforme:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{40-0}{2\sqrt{3}} \cong 11,5$$

9 Qual è l'85% ?



Chiamiamo $K = 85\%$

$$\Rightarrow P_X(K) = \frac{85}{100} \Rightarrow \frac{85}{100} = K \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{85}{100} \cdot b-a = K \Rightarrow K = \frac{85}{100} \cdot 40 = 34$$

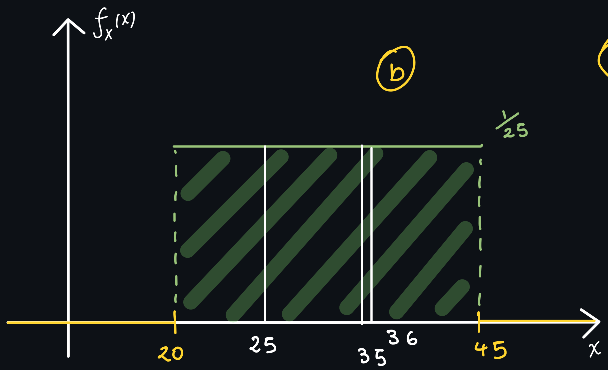
Proof $P_X(34) = \frac{34-0}{40} = 0,85$

$$P_X(K) = \frac{85}{100} \Rightarrow \frac{K-a}{b-a} = \frac{85}{100} \rightarrow K = \frac{85}{100} \cdot 40$$

2. The amount of time that it takes a student to complete a chemistry test is uniformly distributed between 20 and 45 minutes. ~~(a)~~ Write the probability density function f(x). ~~(b)~~ Draw a graph. ~~(c)~~ What is the probability that a student will take more than 36 minutes to complete the exam? ~~(d)~~ What is the probability that the student will take between 26 and 35 minutes to complete the test? (e) Determine the ~~median, variance~~, and ~~standard deviation~~. ~~(f)~~ What is the value of the 3rd quartile? (g) What is the probability that the student will take more than 40 minutes to complete the test given that he always take more than 30 minutes to complete any chemistry test?

(a)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x > b \end{cases} \to f_X(x) = \frac{1}{45-20} = \frac{1}{25}$$

(b)



(c) $P(\{X \geq 36\}) = P(\{X \leq 45\}) - P(\{X \leq 36\})$, con $P(\{X \leq 45\}) \to P_X(45) = 1$ e $P(\{X \leq 36\}) \to P_X(36)$

$$\to 1 - \frac{36-20}{45-20} = 1 - \frac{16}{25} = 0{,}36 = 36\%$$

(d) $P(\{26 < X < 36\}) = P_X(35) - P_X(26) = \frac{35-20}{25} - \frac{26-20}{25} = \frac{15}{25} - \frac{6}{25} = 36\%$

(e) Media $= \mu = \mathbb{E}[X^1] = \int_a^b x \cdot f_X(x)\, dx = \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$

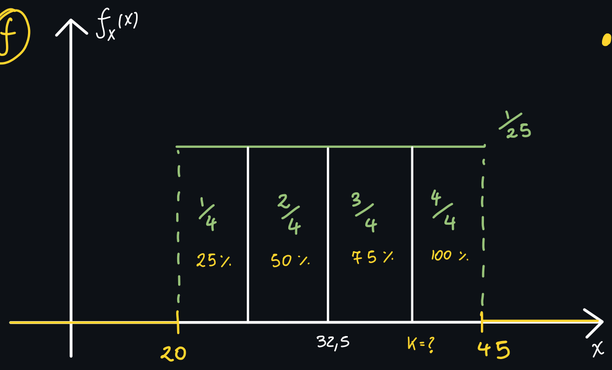
$$\mathbb{E}[X] = \int_{20}^{45} x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_{20}^{45} x\, dx = \frac{1}{45-20} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{20}^{45} = \frac{45+20}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$$

Varianza

$$\to \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(45-20)^2}{12} \cong 52$$

Standard dev. $\sqrt{52} \cong 2\sqrt{13}$

(f)



- Dobbiamo trovare il valore K che abbia Probabilita' 75%

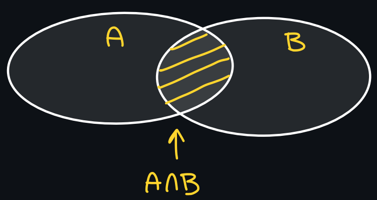
$$\to P_X(K) = 75\% = \frac{75}{100} \to \frac{K-20}{45-20} = \frac{75}{100}$$

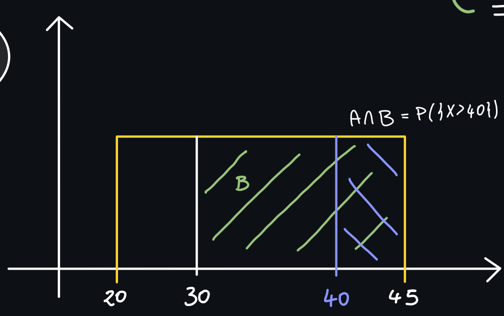
$$\to K = \left(\frac{75}{100} \cdot 25\right) + 20 = 38{,}75$$

(g) $P(\{X \geq 40\} / \text{Impiega sempre più di } 30\,min)$

$A = X \geq 40$
$B =$ Impiega sempre $> 30 \to X > 30$

$$\to P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{X \geq 40\})}{P(\{X \geq 30\})} = \frac{\overset{5}{(45-40)} \cdot \cancel{(\frac{1}{25})}}{\underset{15}{(45-30)} \cancel{(\frac{1}{25})}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \cong 33\%$$



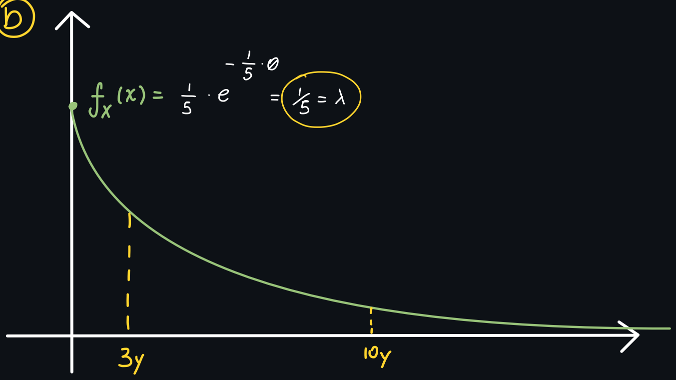


1. Laptops produced by company XYZ last, on average, for 5 years. The life span of each laptop follows an exponential distribution. ~~(a)~~ Calculate the rate parameter. ~~(b)~~ Write the probability density function and graph it. ~~(c)~~ What is the probability that a laptop will last less than 3 years? ~~(d)~~ What is the probability that a laptop will last more than 10 years? (e) What is the probability that a laptop will last between 4 and 7 years?

$f_X(\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ Probabilita' che il laptop duri λ anni $\Rightarrow$

(a) $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ ANNI}^{-1}$

(b)



(c) $= P(\{X \leq 3\}) = \int_0^3 f_X(\vartheta)\, d\vartheta =$

$= \lambda \int_0^3 e^{-\lambda\vartheta} d\vartheta \Rightarrow t = -\lambda\vartheta \Rightarrow d\vartheta = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow -\int_0^3 e^t dt$

$= -e^t = \left[-e^{-\lambda\vartheta}\right]_0^3 = -e^{-\lambda 3} + 1 =$

$= 1 - e^{-\lambda 3} \underset{\lambda = 1/5}{=} 1 - e^{-\frac{3}{5}} \cong 0\,45 \cong 45\%$

(d) $P(\{X > 10\}) = 1 - P(\{X \leq 10\})$

$= 1 - F_X(10)$

$\Rightarrow \cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\frac{10}{5}}) = e^{-\frac{10}{5}} = 0.13 \cong 13\%$

(e) $P(\{4 < X < 7\}) = \int_4^7 \lambda e^{-\lambda\vartheta} d\vartheta = \left[-e^{-\lambda\vartheta}\right]_4^7 = \left[-e^{-\frac{\vartheta}{5}}\right]_4^7$

$= -e^{-\frac{7}{5}} + e^{-\frac{4}{5}} = 0{,}44 - 0{,}246 = 0{,}203 \sim 20\%$

Alternativamente (CDF)

$P(\{4 < X < 7\}) = P(\{X \leq 7\}) - P(\{X \leq 4\}) = F_X(7) - F_X(4) = (1 - e^{-\frac{7}{5}}) - (1 - e^{-\frac{4}{5}})$

$= \cancel{1} - e^{-\frac{7}{5}} - \cancel{1} + e^{-\frac{4}{5}} = e^{-}$

Si consideri la coppia di variabili aleatorie X ed Y la cui funzione di densità congiunta (sono continue) è la funzione:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} A(x+xy) & 0 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare il valore di A

(b) Verificare se le variabili aleatorie sono indipendenti

(c) Calcolare la PDF condizionata

(a) La PDF gode delle prop
- Non Neg
- Normalizzazione

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1 \xrightarrow{\text{Nel Nostro caso}} \int_0^1\int_0^4 A(x+x\cdot y)\,dx\,dy$$

$$= A\int_0^1\int_0^4 x(1+y)\,dx\,dy = A\int_0^1 x \int_0^4 1\,dy + \int_0^4 y\,dy\,dx = A\int_0^1 x\,[y]_0^4 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 dx$$

$$= A\int_0^1 x\cdot([4]+[8])\,dx = 12A\int_0^1 x\,dx = 12A\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 6A$$

(b) Due variabili sono indipendenti quando la PDF congiunta è il prodotto delle marginali

→ Integriamo la PDF congiunta rispetto all'altra variabile

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$

Proof$_2$: $$= \int_0^4 A(x+xy)\,dy = A\int_0^4 x(1+y)\,dy = Ax\int_0^4 dy + Ax\int_0^4 y\,dy$$

$$= Ax\left[y+\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = Ax\left[4+\frac{16}{2}\right] = 12Ax$$

dovrebbe uscire $2x$ (??)

Proof$_2$ $$f_y(x) = \int_0^1 A(x+xy)\,dx = A\int_0^1 x(1+y)\,dx = (1+y)A\int_0^1 x\,dx = (1+y)A\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= (1+y)A\cdot\frac{1}{2}$$

dovrebbe uscire $\frac{1}{12}(1+y)$ (??)

$$\Rightarrow E[f_{xy}(x,y)] = E[f_x(x)]\cdot E[f_y(y)] \Rightarrow \text{INDIPENDENTI}$$

Quindi $\frac{1}{2}(1+y) \cdot 12x = 6(x+xy) = \nexists \left[f_{xy}(x,y) \right] \Rightarrow$ INDIP.

ⓒ PDF Condizionata

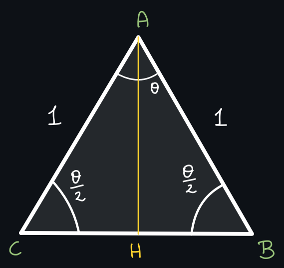
$$\Rightarrow f_{y/x}(y/x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

Perchè Indipendenti

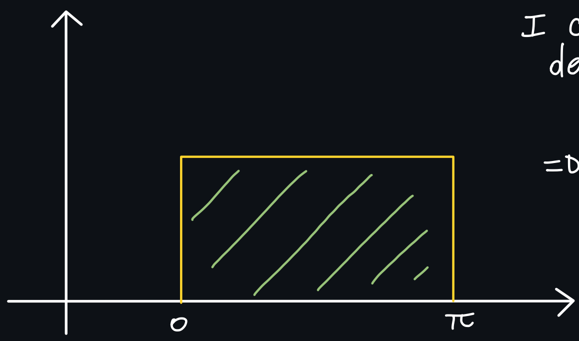
Proof:

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{\cancel{A}(x+xy)}{\cancel{A}\,12x} = \frac{\cancel{x}(1+y)}{12\cancel{x}} = \frac{1}{12}(1+y)$$

Ex. 1
Si consideri un triangolo isoscele in cui i lati uguali hanno misura unitaria e l'angolo al vertice è una variabile aleatoria uniforme in $(0, \pi)$. Calcolare la media e la varianza dell'area del triangolo.



$\theta \sim U(0, \pi)$



• Media e varianza dell'area = ?

I cateti sono legati fra loro dall'angolo adiacente

$$\Rightarrow A = \cancel{2}\,\frac{AH \cdot HC}{\cancel{2}} = \overline{AH} \cdot \overline{HC}$$

$$= 1 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \Rightarrow$ $x = \frac{\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sin(\theta)$$ Area

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x < a \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Applichiamo il teorema della media

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \text{MEDIA} = E\left[\frac{1}{2}\sin(\theta)\right] = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\theta \, \frac{1}{b-a}\, d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{b-a}\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\left[\frac{\cos(\theta)}{2\pi}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 1\right] = \frac{1}{\pi}$$ Media

Ex. 5
Si consideri un canale di trasmissione con ingresso $X \sim \mathcal{B}(1, 1/2)$ ed uscita Y, variabile aleatoria discreta, con alfabeto $\mathcal{A}_Y = \{-1, 0, 1\}$ e PMF condizionali riportate in tabella.

y	$f_{Y\|X}(y\|0)$	$f_{Y\|X}(y\|1)$
1	0	$1-\epsilon$
0	ϵ	ϵ
-1	$1-\epsilon$	0

Calcolare $E[Y]$, $E[Y^2]$, e σ_Y^2; determinare inoltre il coefficiente di correlazione tra l'ingresso e l'uscita del canale.

Procedimento Mio

y	$f_{Y/X}(y/0)$	$f_{Y/X}(y/1)$
1	0	$1-\varepsilon$
0	ε	ε
-1	$1-\varepsilon$	$\emptyset$

↑ $P_{Y/X}(y,x)$

$X \sim \mathcal{B}(1, 1/2)$ $\quad Y$ V.A. / $\mathcal{A}_y = \{-1, 0, 1\}$

$\Rightarrow P(1) = 1/2$
$P(0) = 1/2$

$$PMF_{Y/X} = P(\{Y = y\}/X) = \frac{P(\{Y=y\} \cap X)}{P(X)}$$

$\Rightarrow$ ES: $P_{Y/X}(1,0) = \emptyset$
$P_{Y/X}(1,1) = 1$

$$= \frac{P(\{Y=y\} \cap \{X = x\})}{P(\{X = x\})}$$

• $E[Y] = ?$

$\rightarrow P(Y) = P(\{Y = y\})$

$$\text{Siccome } P_{Y/X}(y/x) = \frac{\overbrace{P(\{Y=y\}}^{?} \cap \overbrace{\{X=x\})}^{1/2}}{\underbrace{P(\{X=x\})}_{1/2}} \rightarrow P_{xy}(x,y) = \overset{\text{Tabella}}{P_{Y/X}(y/x)} \cdot \overset{1/2}{P(\{X = x\})}$$

$\Rightarrow$ Calcoliamo tutti i valori

• $P_{xy}(x,y) = P_{Y/X}(y/x) \cdot 1/2$ Perche $P(X=1) = P(X=0) = 1/2$

- $X = 0$, $Y = 0$
$P_{xy}(0,0) = P_{Y/X}(0/0) \cdot 1/2 = 1/2\,\varepsilon$

- $X = 1$, $Y = 0$ $\quad P_{xy}(1,0) = P_{Y/X}(0,1) \cdot 1/2 = 1/2\,\varepsilon$

- $X = \emptyset$, $Y = -1$ $\quad P_{xy}(0,-1) = P_{Y/X}(-1,0) \cdot 1/2 = \frac{1-\varepsilon}{2}$

- $X = 1$, $Y = -1$ $\quad P_{xy}(1,-1) = P_{Y/X}(-1,1) \cdot 1/2 = \emptyset$

- $X = 0$, $Y = 1$ $\quad P_{xy}(0,1) = P_{Y/X}(1,0) \cdot 1/2 = \emptyset$

- $X = 1$, $Y = 1$ $\quad P_{xy}(1,1) = P_{Y/X}(1,1) \cdot 1/2 = \frac{1-\varepsilon}{2}$

y	$P_{xy}(y,0)$	$P_{xy}(y,1)$
1	$\emptyset$	$\frac{1-\varepsilon}{2}$
0	$1/2\,\varepsilon$	$1/2\,\varepsilon$
-1	$\frac{1-\varepsilon}{2}$	$\emptyset$

↗ $P_{xy}(x,y)$

$$\Rightarrow E[Y] = \sum_{y \in \mathcal{A}_y} y_i \cdot P_{xy}(x,y) = 1 \cdot \left(0 + \frac{1-\varepsilon}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - 1\left(\frac{1-\varepsilon}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2} = 0$$ Media di y

- $$\overline{Y^2} = E[Y^2] = \sum_{y \in \mathcal{A}_y} y_i^2 \cdot P_y(y) = 1 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) + 0 + 1\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) = 1-\varepsilon$$ V.Q.M.

- $$\sigma_y^2 = E\left[(y-\mu_y)^2\right] = E\left[(\underbrace{y-1}_{a}-\underbrace{\varepsilon}_{b})^2\right] = E\left[(y-1)^2 + \varepsilon^2 - 2(\varepsilon(y-1))\right]$$

$$= E\left[y^2 + 1 - 2y + \varepsilon^2 - 2\varepsilon y + 2\varepsilon\right] = \underbrace{E[y^2]}_{1-\varepsilon} + 1 - \cancel{2E[y]} + \varepsilon^2 - \cancel{2\varepsilon E[y]} + 2\varepsilon$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\varepsilon} + \cancel{1} + \varepsilon^2 + \overset{\varepsilon}{\cancel{2\varepsilon}} = \varepsilon^2 + \varepsilon = \varepsilon(1+\varepsilon)$$

Procedimento Prof

Ex. 5

Si consideri un canale di trasmissione con ingresso $X \sim \mathcal{B}(1, 1/2)$ ed uscita Y, variabile aleatoria discreta, con alfabeto $\mathcal{A}_Y = \{-1, 0, 1\}$ e PMF condizionali riportate in tabella.

y	$f_{Y\|X}(y\|0)$	$f_{Y\|X}(y\|1)$
1	0	$1-\epsilon$
0	ϵ	ϵ
-1	$1-\epsilon$	0

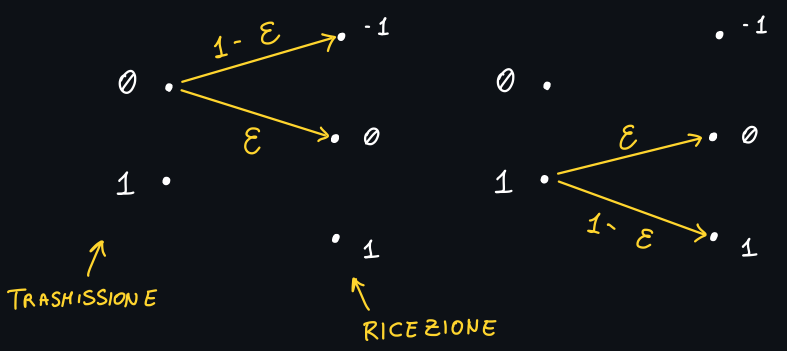
Calcolare $E[Y]$, $E[Y^2]$, e σ_Y^2; determinare inoltre il coefficiente di correlazione tra l'ingresso e l'uscita del canale.

$X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$ con uscita Y, e $\mathcal{A}_y = \{-1, 0, 1\}$

$\mathcal{A}_y$

y	$P_{Y/X}(y/0)$	$P_{Y/X}(y/1)$
1	0	$1-\varepsilon$
0	ε	ε
-1	$1-\varepsilon$	$\emptyset$

Probabilita'



- Media di $Y = E[Y] = ?$

$\Rightarrow X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(\{X=0\}) = \frac{1}{2} \\ P(\{X=1\}) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Per definizione

Per calcolare $E[Y]$ ci serve la PMF, ma abbiamo solo la PMF condizionata;

$\rightarrow$ Ricordiamo la def di PMF condizionata : $P_{Y/X}(y/x) = \underbrace{P(\{Y=y\}/\{X=x\})}_{\text{In Tabella}} = \dfrac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{\underbrace{P(\{X=x\})}_{\frac{1}{2}}}$?

$\Rightarrow P_{XY}(x,y) = P_{Y/X}(y/x) \cdot P(\{X=x\})$

$=$

y	$P_{XY}(0,y)$	$P_{XY}(1,y)$	
1	0	$\frac{1-\varepsilon}{2}$	$P_Y(1)$
0	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$P_Y(0)$
-1	$\frac{1-\varepsilon}{2}$	$\emptyset$	$P_Y(-1)$

x y

- $P_{XY}(0,1) = P_{Y/X}(1/\overset{0}{0}) \cdot \frac{1}{2} = \emptyset$
- $P_{XY}(1,1) = \underbrace{P_{Y/X}(1/1)}_{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon$
- $P_{XY}(0,0) = P_{Y/X}(0,0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon$
- ...

$\Rightarrow P_Y(y) = \sum_{x \in \mathcal{A}_X} P_{XY}(x,y)$

$\Rightarrow P_Y(1) = \dfrac{1-\varepsilon}{2}$

$P_Y(0) = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$

$P_Y(-1) = \dfrac{1-\varepsilon}{0}$

$\Rightarrow E[Y] = \sum_{y_i \in \mathcal{A}_y} y_i \cdot P_Y(y)$

$= 1 \cdot \dfrac{1-\varepsilon}{2} + \cancel{0 \cdot \varepsilon} + (-1) \cdot \dfrac{1-\varepsilon}{2}$

$= \dfrac{1-\varepsilon}{2} - \dfrac{1-\varepsilon}{2} = 0$ MEDIA DI Y

- $\mathbb{E}[y^2] = ?$

$$\mathbb{E}[x^2] = \overline{x}^2 = \sum_{x \in A_x} x_i^2 \cdot P_x(x_i) = \sum_{y \in A_y} 1^2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{2} + 0 + (-1)^2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{2} = 1-\varepsilon$$

Valore quad
Medio

- $\sigma_y^2 = ?$

$$\rightarrow \mathbb{E}\left[(y-\mu_y)^2\right] = \cancel{\sum_{y \in A_y} y_i^2 \cdot P_y(y_i)} = 1-\varepsilon$$

↑ Guarda pagine
Prec per il proc.
Corretto

Ex. 2
Una variabile aleatoria X ha la seguente PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verificare che la funzione assegnata soddisfi le proprietà caratterizzanti la PDF. Calcolare inoltre

1. $P(\{X \leq 2\})$
2. $P(\{X < 2\})$
3. $P(\{-1 < X < 1.5\})$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

- Non Negativa

$\Rightarrow f_X(x) > 0$ per $\frac{2x}{9} > 0$ per $x > 0$

$\Rightarrow$ NON Neg ✓

- Normalizzazione

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\int_0^3 x\,dx = \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{9}\,\frac{9}{2} = 1 \ ✓$$

1) $P(\{X \leq 2\}) = F_X(2)$

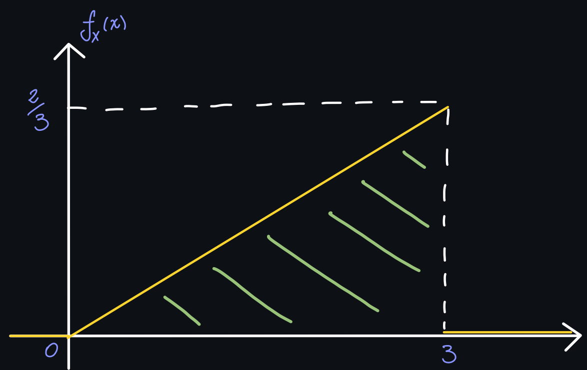
$$P = \frac{2}{9}\int_0^2 x\,dx = \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{9}\,\frac{4}{2} = \frac{4}{9} \sim 44\%$$

2) $P(\{x < 2\}) = P(\{x \leq 2\}) \simeq 44\%$

3) $P(\{-1 < X < \frac{3}{2}\})$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\int_0^{3/2} x\,dx = \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{3/2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}}\,\frac{\frac{\cancel{9}}{4}}{\cancel{2}} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$\Rightarrow$ Possiamo anche visualizzare graficamente la PDF



Si considerino due variabili aleatorie gaussiane che sono costruite a partire da due gaussiane standard:

$$X_1 = 2X_{01} + 3X_{02} \qquad \text{dove} \qquad X_{01} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$X_2 = X_{01} + 2X_{02} \qquad \qquad X_{02} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Indipendenti

(1) Calcolare la matrice di covarianza $\underline{\underline{C}} = ?$

(2) La media e la varianza di una variabile aleatoria z, tale che: $z = X_1 - 2X_2$

$$\mathbb{E}[z] = \mu_z = ?$$

$$\mathbb{E}\left[(z-\mu_z)^2\right] = \sigma^2 = ?$$

(3) Calcolare la probabilità: $\mathbb{P}(\{z \geq 1\}) = ?$

(1):

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)^2\right] & \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\right] \\ \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\right] & \mathbb{E}\left[(X_2-\mu_2)^2\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & C_{X_1X_2} \\ C_{X_1X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}$$

Matrice di Covarianza

- $\mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)^2\right]$: $\mu_1 = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}\left[2X_{01} + 3X_{02}\right] = 2\,\mathbb{E}[\cancel{X_{01}}]^{0} + 3\,\mathbb{E}[\cancel{X_{02}}]^{0}$

$= 0$

$\mu_1 = \mu_2 = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \overline{X_1^2} = \mathbb{E}\left[(2X_{01}+3X_{02})^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[4X_{01}^2 + 9X_{02}^2 + 12X_{01}X_{02}\right] = 4\underbrace{\mathbb{E}\left[X_{01}^2\right]}_{Var(X_0)=1} + 9\underbrace{\mathbb{E}\left[X_{02}^2\right]}_{Var(X_0)=1} + 12\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X_{01}X_{02}\right]}}_{0}$$

$\to$ Indipendenti

$$= 4 + 9 = 13 \quad \sigma_1^2$$

- $\sigma_2^2 = \mathbb{E}\left[(X_2-\mu_2)^2\right]$: $\mu_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2^2 = \mathbb{E}\left[X_2^2\right] = \overline{X_2^2}$

$$= \mathbb{E}\left[(X_{01}+2X_{02})^2\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{X_{01}^2}_{1} + 4\underbrace{X_{02}^2}_{4} + \underbrace{\cancel{4X_{01}X_{02}}}_{0}\right] = 4 + 1 = 5 \quad \sigma_2^2$$

- $C_{X_1X_2} = \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\right] = \mathbb{E}\left[X_1 \cdot X_2\right] = \mathbb{E}\left[(2X_{01}+3X_{02})(X_{01}+2X_{02})\right]$

$$= \mathbb{E}\left[2X_{01}^2 + 4X_{01}X_{02} + 3X_{01}X_{02} + 6X_{02}^2\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{2X_{01}^2}_{2} + \underbrace{7X_{01}X_{02}}_{0} + \underbrace{6X_{02}^2}_{6}\right]$$

$\overset{!}{=} 2+6 = 8 \quad C_{x_1 x_2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

② Data $Z = X_1 - 2X_2$

ⓐ $\mu_Z = \mathbb{E}[Z] = ?$

ⓑ $\sigma^2 = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)^2] = 2$

a) $\mu_Z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 - 2X_2] = \mathbb{E}[X_1] - 2\mathbb{E}[X_2]$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_1] = 2\mathbb{E}[X_{01}] + 3\mathbb{E}[X_{02}] = \emptyset$

$\rightarrow 2\mathbb{E}[X_{02}] = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Z] = \underline{\emptyset}$

b) $\sigma_Z^2 =$ Siccome e' ottenuta da una comb lin di $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \sigma_Z^2 = 1$

ⓒ $P(\{Z \geq 1\})$

$= 1 - F_Z(1) = Q(1)$ Siccome $Q(x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow Q(1) = Q\left(\frac{1-0}{1}\right) = Q(1) \hat{=} 0{,}16$

Ex. 3
Siano X e Y due *v.a.* a media nulla, identicamente distribuite, ma correlate con coefficiente di correlazione ρ. Calcolare valor medio, valore quadratico medio e varianza delle due v.a.

$$Z = X$$
$$V = Y - \rho X$$

Inoltre dimostrare che Z e V sono incorrelate

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ $\quad X, Y \sim$ Distribuzione Comune

Inoltre $\underbrace{\mathbb{E}[X \cdot Y]}_{r_{xy}} = \rho$ $\quad \to$ $\boxed{\begin{array}{l} Z = X \\ V = Y - \rho X \end{array}}$ Z e V sono ottenute da comb. lin di x e y

$\to \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] = \underline{\overline{X}^2}$, $\quad \underline{\sigma_Y^2 = \overline{Y}^2}$

- $Z = X \Rightarrow \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] = \underline{0}\ \mu_Z$
- $\mathbb{E}[Z^2] = \overline{Z}^2 = \mathbb{E}[X^2] = \overline{X}^2 = \sigma_X^2$
- $Var[Z] = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)^2] = \mathbb{E}[Z^2] = \sigma_X^2$

- $V = Y - \rho X \Rightarrow \mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[Y] - \rho\,\mathbb{E}[X] = 0 - \rho \cdot 0 = \underline{0}\ \mu_V$
- $\overline{V}^2 = \mathbb{E}[V^2] = \mathbb{E}[(Y-\rho X)^2] = \underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{\sigma_Y^2} + \rho^2 \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{\sigma_X^2} - \rho \underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{\rho}$

$= \underline{\sigma_Y^2 + \rho^2 \sigma_X^2 - \rho^2}$

- $Var(V) = \mathbb{E}[(V-\mu_V)^2] = \mathbb{E}[V^2] = \underline{\sigma_Y^2 + \rho^2\sigma_X^2 - \rho^2}$

$\Rightarrow \overline{V}^2 = Var(V) = \sigma_Y^2 + \rho^2\sigma_X^2 - \rho^2$

- Incorrelate $\to Cov(Z, V) = 0$

proof: $C_{ZV} = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)(V-\mu_V)] = \mathbb{E}[ZV] - \cancel{\mu_V \mathbb{E}[Z]}_0 - \cancel{\mu_Z \mathbb{E}[V]}_0 + \cancel{\mu_Z \mu_V}_0$

$= \mathbb{E}[ZV] = \mathbb{E}[(X)(Y-\rho X)] = \mathbb{E}[XY] - \rho \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{\sigma_X^2}$

$= \mathbb{E}[XY] - \rho\sigma_X^2 = \rho\,\sigma_X\sigma_Y - \rho\,\sigma_X^2 = \rho\sigma_X^2 - \rho\,\sigma_X^2 = 0$

$\sigma_X = \sigma_Y$

Ex. 6
Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie gaussiane indipendenti, $X_1 \sim \mathcal{N}(1,4)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(0.5, 0.36)$. Date le due variabili aleatorie $Y_1 = X_1$ e $Y_2 = X_1 + X_2$ si determinino medie e varianze di Y_1 e Y_2 ed il loro coefficiente di correlazione .

$X_1 \sim \mathcal{N}(1,4)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, \frac{9}{25})$

$Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$

- $\mu_{Y_1} = E[Y_1] = E[X_1] \underset{\text{DEF}}{=} 1$

Solitamente si usa $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $\sigma^2_{Y_1} = \sigma^2_{X_1} =$ Se X è definito come $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \to \sigma^2_{Y_1} = 4$
  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \to \sigma^2_{Y_1} = 16$

- $\mu_{Y_2} = E[Y_2] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

- $\sigma^2_{Y_2} = Var[Y_2] = Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2]$

$\to Var[X_1] = E[(X_1 - \mu_{X_1})^2] = 4$

$\to Var[X_2] = E[(X_2 - \mu_{X_2})^2] = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow Var(Y_2) = 4 + \frac{9}{25} \cong 4,36$

- Coefficiente di correlazione

$\Rightarrow \mu_{Y_1 Y_2} = E[Y_1 Y_2] \Rightarrow E[(X_1)(X_1 + X_2)] = E[X_1^2] + E[X_2] \neq \mu_{Y_1} \mu_{Y_2}$

$\Rightarrow$ CORRELATE

$\to C_{Y_1 Y_2} = E[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)] =$

$= E[Y_1 Y_2] - \underbrace{\mu_{Y_2}}_{\frac{3}{2}} \underbrace{E[X_1]}_{1} - \underbrace{\mu_{Y_1}}_{1} \underbrace{E[Y_2]}_{\frac{3}{2}} + \underbrace{\mu_1 \mu_2}_{1 + \frac{3}{2}} = \mu_{Y_1 Y_2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + 1\right)$

$= \mu_{Y_1 Y_2} - 3 + \frac{5}{2} = \mu_{Y_1 Y_2} - \frac{1}{2} =$ BOH

Ex. 10

Si considerino due variabili aleatorie $Y_1 = 3X_1 + 2$ e $Y_2 = 2X_2$ costruite a partire dalle variabili aleatorie gaussiane standard, indipendenti X_1 e X_2. Calcolare:

1. la matrice di covarianza C tra le due variabili Y_1 e Y_2;
2. la media e la varianza di $Z = Y_1 + Y_2$;
3. La probabilità $P(Z \geq 3)$.

$Y_1 = 3X_1+2 \qquad Y_2 = 2X_2 \qquad X_1 = X_2 = X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$

1) Matrice di Covarianza

$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{Y_1} & C_{Y_1Y_2} \\ C_{Y_1Y_2} & \sigma^2_{Y_2} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \sigma^2_{Y_1} = \mathbb{E}[(Y_1-\mu_{Y_1})^2] =$

• $\mu_{Y_1} = \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[3X_1+2] = 3\,\mathbb{E}[X_1]+2 = 3\cdot 0+2 = 2$

$\rightarrow \mathbb{E}[(3X_1+2-2)^2] = \mathbb{E}[3X_1^2] = 3\,\underbrace{\mathbb{E}[X_1^2]}_{1} = 3 \quad \sigma^2_{Y_1}$

$\rightarrow \sigma^2_{Y_2} = \mathbb{E}[(Y_2-\mu_{Y_2})^2]$

• $\mu_{Y_2} = \mathbb{E}[2X_2] = \emptyset \quad \Rightarrow \sigma^2_{Y_2} = \mathbb{E}[(2X_2)^2] = 2\,\underbrace{\mathbb{E}[X_2^2]}_{1} = 2 \quad \sigma^2_{Y_2}$

$C_{Y_1Y_2} = \mathbb{E}[(Y_1-\mu_{Y_1})(Y_2-\mu_{Y_2})] = \mathbb{E}[(3X_1+2-3)(2X_2-2)]$

$= \mathbb{E}[(3X_1-1)(2X_2-2)] = 6\,\underbrace{\mathbb{E}[X_1X_2]}_{\emptyset} - 6\,\underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\emptyset} - 2\,\underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{\emptyset} + 2 = 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

2: Media e Varianza di $Z = Y_1+Y_2$

$\rightarrow \mu_Z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = 2+3 = 5 \quad \mu_Z$

$\rightarrow \sigma^2_Z = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)^2] = \mathbb{E}[Z^2] + \mu_Z^2 - \mu_Z\,\mathbb{E}[Z]$

$= \mathbb{E}[(\underbrace{3X_1+2}_{a} + \underbrace{2X_2}_{b})^2] + \cancel{25} - \cancel{25} = \mathbb{E}[(3X+2)^2] + \underbrace{4\,\mathbb{E}[X_2^2]}_{4} - 2\,\mathbb{E}[(3X_1+2)(2X_2)]$

$= 9\,\underbrace{\cancel{\mathbb{E}[X_1^2]}}_{1} + 4 + \underbrace{\cancel{12\,\mathbb{E}[X_1]}}_{0} + 4 - \cancel{2}\{\underbrace{\cancel{6\,\mathbb{E}[X_1X_2]}}_{\emptyset} + \underbrace{\cancel{4\,\mathbb{E}[X_2]}}_{\emptyset}\}$

$= 9+4+4 = 17 \quad \sigma^2_Z$ Boh..

ESERCIZI DAL LIBRO

Ex. 2.1 Si determini lo spazio dei campioni relativo al doppio lancio di un dado. Si individuino inoltre i seguenti eventi:

$A \equiv \{$*"la somma dei due lanci è 5"*$\}$

$B \equiv \{$*"primo lancio pari"*$\}$

$C \equiv \{$*"primo lancio pari e la somma dei due lanci è 5"*$\}$

$D \equiv \{$*"primo lancio pari oppure la somma dei due lanci è 5"*$\}$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$$

- $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
- $B = \{(2,1)(2,2)(\dots)(4,1)(4,2)(\dots)(6,1)(6,2)(\dots)\}$
- $C = \{B \cap (\text{"Somma due dadi} = 5\text{"})\} = \{(2,3)(4,1)\}$
- $D = \{B \cup C\}$

Ex. 2.2 Si consideri un canale binario, cioè un mezzo di trasmissione che accetta in ingresso simboli "0" e "1" e fornisce in uscita simboli "0" e "1". A causa dei disturbi presenti sul canale, però, non sempre il simbolo in uscita è uguale a quello che viene effettivamente trasmesso, è cioè possibile che si verifichi un errore di trasmissione. Per tale motivo, il funzionamento del canale binario può essere correttamente descritto come un esperimento aleatorio. Si individuino lo spazio dei campioni relativo alla trasmissione di un solo simbolo e gli eventi:

$A \equiv \{$*"si è verificato un errore nella trasmissione del simbolo 1"*$\}$

$B \equiv \{$*"si è verificato un errore di trasmissione"*$\}$

$C \equiv \{$*"si è ricevuto il simbolo 0"*$\}$

$D \equiv \{$*"si è trasmesso il simbolo 1"*$\}$

$$\Omega = \{(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)\}$$

- $A = \{(1,0)\}$

  Input output

- $B = \{(0,1)(1,0)\}$
- $C = \{(1,0)(0,0)\}$
- $D = \{(1,0)(1,1)\}$

Ex. 2.4 Un esperimento aleatorio consiste nell'estrarre tre carte da un mazzo di carte napoletane. Considerato l'evento $E = \{$*le carte estratte sono tutte di coppe"*$\}$, stabilire in quali delle seguenti estrazioni si verifica l'evento $\overline{E}$:

$\omega_1 \equiv$ (2 di bastoni, 5 di coppe, asso di denari)

$\omega_2 \equiv$ (asso di spade, 7 di denari, 10 di spade)

$\omega_3 \equiv$ (asso di spade, 6 di coppe, 10 di spade)

$\omega_4 \equiv$ (asso di coppe, 2 di coppe, 3 di coppe)

$\Omega = \{(10 \times B), (10 \times D), (10 \times S), (10 \times C)\} \Rightarrow \|\Omega\| = 40$

$\rightarrow$ Per avere l'evento E, Tutte e 3 le estrazioni devono contenere carte di Coppe.

$\Rightarrow \overline{E} = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ $\qquad \omega_4 = E$

Ex. 2.7 Una moneta non truccata viene lanciata quattro volte. Si determini lo spazio dei campioni e si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

$A \equiv \{$*"si ottengono esattamente tre teste"*$\}$

$B \equiv \{$*"si ottiene almeno una testa"*$\}$

$C \equiv \{$*"il numero di teste è uguale al numero di croci"*$\}$

$D \equiv \{$*"il numero di teste è maggiore del numero di croci"*$\}$

$\Omega = \{\overset{T}{0}, \overset{C}{1}\}^4$

$\Downarrow$

A	B	C	D	
0	0	0	0	
0	0	0	1	–
0	0	1	0	–
0	0	1	1	
0	1	0	0	–
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	–
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

- $A = \dfrac{4}{2^4} = \dfrac{4}{16} = 25\%$
- $B = 25\%$
- $C = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8} \sim 37\%$
- $D = \dfrac{4}{16} = 25\%$

Ex. 2.9 Calcolare le seguenti probabilità:

~~a.~~ $P(\overline{B})$;

~~b.~~ $P(A \cup \overline{B})$;

c. $P(B - A)$;

d. $P(B \cap \overline{A})$;

e. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

sapendo che: $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{3}$ $\qquad P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$.

$P(A) = P(B) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/10$

Se $P(A) = P(B) = 1/3$

$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$ perche $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\Rightarrow P(B) = \underset{\text{TOT}}{1} - \underset{P(A)+P(C)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ ✓

$\rightarrow P(\overline{B}) =$ "TUTTO TRANNE B" $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(A \cup \overline{B}) = \underset{1/3}{P(A)} + \underset{2/3}{P(\overline{B})} - \underset{P(A \cap C)}{P(A \cap \overline{B})}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - [P(A)\ P(B)] = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \sim 55\%$

Ex. 2.18 Siano X e Y due *v.a.* a media nulla, identicamente distribuite, ma correlate con coefficiente (indice) di correlazione ρ. Calcolare valor medio, valore quadratico medio e varianza delle due *v.a.*

$$Z = X$$
$$V = Y - \rho X$$

Dimostrare inoltre che tali *v.a.* sono incorrelate.

$\mu_X = \mu_Y = \emptyset$

$\mu_{XY} = \rho$

$Var(X \text{ con } \mu_X = 0) = E[X^2] = \overline{X^2}$

- $Z = X$
  - $\mu_Z = \mu_Z = 0$
  - $\overline{Z^2} = \overline{X^2} = E[X^2] = Var(X)$
  - $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \underline{Var(X) = Var(Z)}$
- $V = Y - \rho X$
  - $\mu_V = E[Y - \rho X] = E[Y] - \rho[X] = 0$
  - $\overline{V^2} = E[(V-\mu_V)^2] = E[V^2] = E[(Y-\rho X)^2] =$

$= \underbrace{E[Y^2]}_{Var(Y)} + \underbrace{E[(\rho X)^2]}_{\rho^2 Var(X)} - 2\underbrace{E[\rho XY]}_{2 \cdot \rho^2} = Var(Y) + \rho^2 Var(X) - 2\rho^2$

Ex. 7
Date le variabili aleatorie $X \sim \mathcal{N}(1, 0.16)$ e $Y \sim \mathcal{N}(2, 0.25)$, congiuntamente gaussiane con coefficiente di correlazione $\rho_{XY} = 0.8$, calcolare $P(Z > 4)$, dove $Z = X + Y$.

N.B. Se X e Y sono congiuntamente Gaussiane la loro somma è gaussiana.

$X \sim \mathcal{N}(1, \frac{4}{25})$ $\qquad \mu_{xy} = \rho_{xy} = \frac{2}{25}$

$Y \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{4})$

- $P(z>4)$ dove $z = X+Y$

Siccome $z = X+Y \Rightarrow \mu_z = \mu_x + \mu_y = 1+2 = 3\ \mu_z$

$$Var(z) = E[(z-\mu_z)^2] = E[z^2 + \mu_z^2 - \mu_z z] = E[z^2] + \cancel{\mu_z^2} \cancel{- \mu_z E[z]}$$

$$\Rightarrow E[(x+y)^2] = E[x^2] + E[y^2] + 2\underbrace{E[xy]}_{\rho}$$

$$Var(z) = E[(z - E[z])^2] \Rightarrow E[z] = E[x+y] = E[x] + E[y]$$

$z = x+y$

$$\Rightarrow z - E[z] = x+y - E[x] - E[y] \Rightarrow Var(z) = E[(x+y-E[x]-E[y])^2]$$

$$\Rightarrow Var(z) = E[(\underbrace{x+y}_{a} - \underbrace{(E[x]+E[y])}_{b})^2]$$

$$Var(z) = E[x^2 + y^2 + (E[x]+E[y])^2 + \cancel{2xE[x]} + \cancel{2yE[y]} - \cancel{2xE[x]} - \cancel{2yE[y]} -$$
$$- 2yE[y] - 2xE[y] - 2yE[x]]$$

$$= E[x^2 + y^2 + \underbrace{E[x]^2}_{\mu_x^2} + \underbrace{E[y]^2}_{\mu_y^2} + \underbrace{2E[xy]}_{\substack{2\mu_{xy} \\ 2\cdot 0.8}} - 2y\underbrace{E[y]}_{\mu_y} - 2x\underbrace{E[y]}_{\mu_y} - 2y\underbrace{E[x]}_{\mu_x}]$$

$$= E[x^2] + E[y^2] - \mu_x^2 + \mu_y^2 + 2\mu_{xy} - 2\mu_y \underbrace{E[y]}_{\mu_y} - 2\mu_y \underbrace{E[x]}_{\mu_x} + 2\mu_x \underbrace{E[y]}_{\mu_y}$$

$$= E[x^2] + E[y^2] - \mu_x^2 + \cancel{\mu_y^2} + 2\mu_{xy} \cancel{-2\mu_y^2} - \cancel{2\mu_y\mu_x} + \cancel{2\mu_x\mu_y}$$

$$= E[x^2] + E[y^2] - \mu_x^2 - \mu_y^2$$

$$\overline{X}^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

$$= \cancel{\mu_x^2} + \sigma_x^2 + \cancel{\mu_y^2} + \sigma_y^2 - \cancel{\mu_x^2} - \cancel{\mu_y^2}$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\Rightarrow Var(z) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 0.16 + 0,25 = 0,41$$

$$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(3, 0,41)$$

- Calcolare $P(\{Z > 4\})$

$$P(\{Z>4\}) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{4-3}{0,64}\right) \sim Q(1,56) \sim 0,0074$$

Si considerino due variabili aleatorie gaussiane che sono costruite a partire da due gaussiane standard:

$$X_1 = 2X_{01} + 3X_{02} \qquad \text{dove} \qquad X_{01} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$X_2 = X_{01} + 2X_{02} \qquad \qquad X_{02} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Indipendenti

1. Calcolare la matrice di covarianza $\underline{\underline{C}} = ?$
2. La media e la varianza di una variabile aleatoria z, tale che: $z = X_1 - 2X_2$ — $\mathbb{E}[z] = \mu_z = ?$, $\mathbb{E}[(z-\mu_z)^2] = \sigma^2 = ?$
3. Calcolare la probabilità: $\mathbb{P}(\{z \geq 1\}) = ?$

$E_{xy}(x,y)$

$\underline{\underline{C}}$

EX. 1 Il livello di liquido in un serbatoio è modellabile attraverso una v.a. Gaussiana come media 6 metri e deviazione standard 0.5 metri. Calcolare le seguenti probabilità

1. che il lvello sia compreso tra 5.1 e 6.9 m.
2. che su un totale di 5 osservazioni indipendenti, in tre casi si misuri un llvello compreso tra 5.1 e 6.9 m.
3. che la somma di due misure indipendenti sia maggiore di 10 m.

$X \sim \mathcal{N}(6, 0{,}5^2) \Rightarrow \mu_x = 6 \quad \sigma_x^2 = 1/4$

1) $P(\{5.1 < x < 6.9\})$

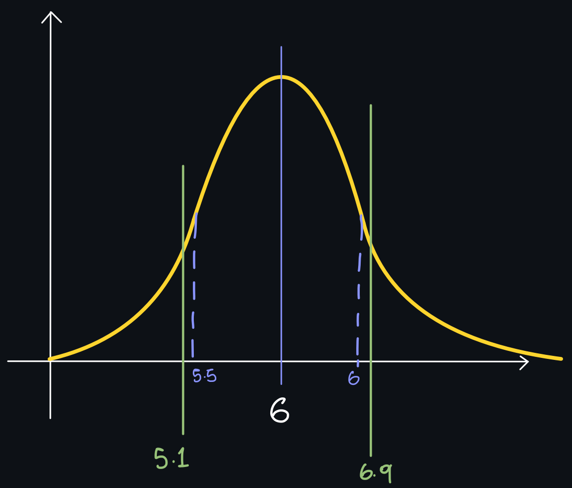
$\rightarrow P(\{x_0 < x < x_1\}) = P(\{X > x_0\}) - P(\{X > x_1\}) = Q\left(\frac{x_0 - \mu_x}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_1 - \mu_x}{\sigma}\right)$

$= Q\left(\frac{5.1 - 6}{0.5}\right) - Q\left(\frac{6.9 - 6}{0.5}\right) = Q(-1.8) - Q(1.8) = 1 - Q(1.8) - Q(1.8) = 1 - 2Q(1.8)$

$Q(-x) = 1 - Q(x)$

$= 1 - 2 \cdot 0.359 = 0.928 \sim 92\%$

$\bullet\ P_1 = P(\{5.1 < x < 6.9\})$



2) 5 oss indipendenti $\quad$ 3/5 casi $\quad X = (\{5.1 < x < 6.9\})$

PMF Binomiale: $P_2 = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot q^{5-3}$

$p = P_1$

$q = 1 - p = 1 - P_1 = 0{,}072$

$q^{5-3} = q^2 = 5.184 \times 10^{-3}$

$\Rightarrow P_2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0.799 \cdot 5.184 \times 10^{-3} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2} \cdot 0.799 \cdot 5.184 \times 10^{-3} = 0.041 \sim 4\%\ P_2$

3) Somma di due misure indip. sia > 10

$\Rightarrow Z = X_1 + X_2 \quad \rightarrow P(\{Z > 10\}) \Rightarrow 1 - F_Z(10) = Q_Z(10)$

Siccome X_1 e X_2 sono indip:

$\mu_Z = \mu_{x_1} + \mu_{x_2}$

$\sigma_Z^2 = \sigma_Z^2 + \sigma_Z^2$

$\Rightarrow Z \sim (12, 1/2)$

$\Rightarrow P_3 = Q\left(\frac{x_1 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = Q\left(\frac{10 - 12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = Q(-2\sqrt{2}) = 1 - Q(2\sqrt{2}) = 0.997$

$\sim 99\%$

EX. 1 Si consideri una variabile aleatoria Z che rappresenta la somma dei punteggi ottenuti dal lancio di due dati bilanciati. Determinare:

1. La PMF di Z;
2. la media e la varianza di Z.

Z = somma di 1 lancio di 2 dadi

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Min = 1 Max = 12

$\Rightarrow \mathcal{X}_Z = \{1, 2, \dots, 12\}$

$$PMF_Z = P(Z = z)$$

$$\Rightarrow P(Z = z) = P_Z(x)$$

$$P(0) = P(1) = P(x > 12) = \emptyset$$

$$P(2) = P(12) = 1/36$$

$$P(3) = 2/36 = 1/18 = P(11)$$

$$P(4) = 1/12 = P(10)$$

$$P(5) = 1/9 = P(9)$$

$$P(6) = \frac{5}{36} = P(8)$$

$$P(7) = 1/6$$

- $$\mu_Z = E[Z] = \sum_{z \in \mathcal{X}_Z} z_i \cdot P_Z = \frac{1}{36} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{10}{9} + 1 + \frac{5}{6} + \frac{11}{18} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{247}{36} \cong 6.86 \sim 7 \; \mu_Z$$

- $$\sigma_Z^2 = E\left[(Z - \mu_Z)^2\right] = \sum_{z \in \mathcal{X}_Z} (z_i - \mu)^2 \cdot P_Z(z)$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{16}{18} + \frac{9}{12} + \frac{4}{9} + \frac{5}{36} + \cancel{(7-7)^2 \cdot \frac{1}{6}} + \frac{5}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{12} + \frac{16}{18} + \frac{25}{36}$$

$$= \frac{35}{6} \sim 5.83$$ Varianza di z

• Procedimento con V.A.

$Z = D_1 + D_2$ Siccome i dadi sono uguali $\Rightarrow E[D_1] = E[D_2]$

D_1: Dado 1, D_2: Dado 2

$\Rightarrow E[D] = \sum_{D \in A_D} D_i \cdot P_D = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$ Media dado

$\Rightarrow E[Z] = E[D_1 + D_2] = E[D_1] + E[D_2] = 7$

Inoltre dato che $Z = D_1 + D_2 \Rightarrow \sigma_Z^2 = \sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2$

$\Rightarrow Var(D) = E[(D - \mu_D)^2] = E[D^2 + \mu_D^2 - \mu_D E[D]] = \bar{D}^2 - \mu_D^2$

$\Rightarrow \bar{D}^2 = E[D^2] = \sum_{D \in A_D} D_i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum D_i^2 = (1+4+9+16+25+36) \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

$\Rightarrow Var(D) = \frac{91}{6} - 3.5^2 \simeq 2.92$ $Var(D)$

$\Rightarrow Var(Z) = 2 \cdot 2.92 = 5.83$ σ_Z^2