Probabilità condizionata e composta

Un Esperimento: lancio di due dadi (insieme)
Quali sono TUTTE le possibili uscite sperimentali ?

$D_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$D_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & 3 \\ & \vdots \end{matrix} \right\}$$

Tutte le possibili Coppie $\Rightarrow$ 36 Elementi

TUTTE le uscite sperimentali devono avere la stessa probabilità di verificarsi.

Dagli Assiomi (lez 2.2) sappiamo che $P(\Omega) = 1$. Per definizione tutti gli eventi elementari sono disgiunti: se si verifica un evento non può verificarsi l'altro.
Inoltre l'UNIONE di tutti gli ev. el. da proprio lo spazio campione $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(\text{"unione di tutti gli ev. el."}) = \sum_{i=0}^{n} P_i = P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow$ La somma delle prob. di tutti gli ev. el. è uguale ad uno.

Se ricordo che tutte le uscite sono equiprobabili $\Rightarrow P(A) = 1/36$

In modo formale:

Probabilità del singolo elemento

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Uno degli el di Ω (11, 21, 62, ..)

Cardinalità di Ω

2 eventi elementari

Prendiamo un qualsiasi evento $E_i \equiv \{(1,1), (1,3)\}$; Notiamo che le due coppie sono disgiunte, perché se esce (1,1) non esce (1, 3).

2 uscite sperimentali

L'evento si verifica quando E_i CONTIENE l'uscita sperimentale;

Esempio:

$E_i \equiv \{(1,1), (1,3)\}$

- Tiro 2 dadi $\rightarrow$ esce (1,1) $\longrightarrow$ Verificata
- Tiro 2 dadi $\rightarrow$ esce (1,2) $\longrightarrow$ NON verificata

$$\Rightarrow \boxed{P(E_i) = \frac{N(E)}{|\Omega|}} = \frac{2}{36} = 1/18$$

Probabilità che esca $(1,1) \cup (1,3) \equiv E_i$

Valida Solo se ogni el è Equiprobabile!

Esempio - Lancio di un solo dado:

$\Omega \equiv \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow E = \{\text{"faccia pari"}\} \equiv \{2,4,6\}$

$\Rightarrow P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dal punto di vista probabilistico il LANCIO DELLA MONETA e "faccia pari" nel lancio dei dadi è la "stessa cosa", ovvero la probabilità è la stessa !

Infatti: $\Omega_{moneta} \equiv \{T, C\}$

$E_T = \{\text{"Testa"}\} \equiv \{T\} \Rightarrow P(E_T) = \frac{1}{2}$

Una diversa formulazione

$$P(E) = \frac{\text{Numero di elementi di } E}{\|\Omega\|} = \frac{N(E)}{\|\Omega\|}$$

Formulazione Classica

$$P(E) = \frac{\text{\# di uscite sperimentali in cui si verifica } E}{\text{\# Prove Totali}}$$

Formulazione Frequentistica

VINCOLO $\rightarrow$ La prob. è attendibile solo se # Prove $\rightarrow +\infty$

$\rightarrow$ ovvero se faccio tante prove

La formulazione Freq. è utile per STIMARE la probabilità quando non sappiamo nulla dell'esperimento.

Concetto di Indipendenza

Se ho due eventi A e B e si ha che la probabilità di $A \cap B$ è uguale alla probabilità di A per quella di B allora si dice che i due eventi sono Indipendenti

$\Rightarrow$ Se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Rightarrow$ Indipendenti

Probabilità Condizionata

$P(A/B)$ = Probabilità dell'evento A Condizionata all'evento

$\Rightarrow$ Significa calcolare la probabilità di A Sapendo che si è verificato l'evento B.

$\Rightarrow$ Esempio: Lancio 2 volte una moneta; Dato che la prima volta è uscita "Testa", qual è la probabilità che esca nuovamente Testa?

$$\Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Domanda: $P(A/B) \geq 0$?

Affinchè sia ≥ 0 allora $\begin{cases} N>0 \\ D>0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} N<0 \\ D<0 \end{cases}$

Siccome si parla di probabilità Sappiamo che entrambi sono positivi $\Rightarrow$ $P(A/B) > 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Primo Assioma verificato

Esercizio: verificare i restanti 2 Assiomi

Cosa accade se i due eventi sono indipendenti?
Otteniamo che $\underline{P(A/B) = P(A)}$, proprio perchè i due eventi sono indip.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

Se A e B Sono disgiunti $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Esercizio

Consideriamo il lancio di 2 dadi ed i due eventi:

$E_1 \equiv \{$"Somma dei res > 8"$\}$

$E_2 \equiv \{$"i due ris. sono uguali"$\}$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ Verificare che i due eventi sono Indipendenti.

Dobbiamo verificare che $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots \end{Bmatrix} \equiv \Omega \rightarrow \|\Omega\| = 6^2 = 36$$

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	...	...			
3	31	...				
4	41					
5	51					
6	61					

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\Rightarrow E_1 = \{ \}$

$E_2 = \{ \}$

- Siccome ogni uscita sperimentale è equiprobabile, possiamo calcolare la prob di E_1 con la formula:

$$P(E_1) = \frac{N(E_1)}{\|\Omega\|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

- Lo stesso vale per $E_2 \Rightarrow P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow A \cap B$ è l'evento E_3 / $E_3 = \{$"I ris. sono uguali E la somma > 8"$\}$

$\rightarrow E_3 = \{10, 12\} \Rightarrow \|E_3\| = 2$

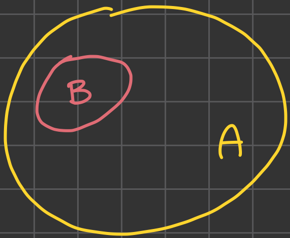
$$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$\overset{?}{\Rightarrow} P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$? $\rightarrow \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{18} \neq \frac{5}{108}$

Sono Dipendenti

Verifichiamo con la formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3} \neq \underset{E_1}{\frac{5}{18}}$$



"Probabilita' di B dato A"

$B \subseteq A \Rightarrow$ Calcoliamo $P(B/A)$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \geq 0}{P(A) \geq 0}$$

$B \cap A = B$

Ragioniamo

Sappiamo che $P(\Omega) = 1$; $A \subset \Omega \Rightarrow 0 < P(A) < 1$

Siccome $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) > P(B)$!

$\Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B) \Rightarrow P(B/A) > P(B) \Rightarrow$ A e' positivamente correlato a B

- Il fatto che accada A, ci da una conoscenza su B e fa crescere la probabilita' che accada B!

Calcoliamo l'opposto: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \Rightarrow$ CERTO

$A \cap B = B$

$\Rightarrow$ "Se accade B, accade anche A".

Probabilita' Composta

Essendo $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ possiamo anche scrivere che:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Se consideriamo $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$

Legge di Bayes

$\Rightarrow P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B) \Rightarrow$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Ci da' una relazione tra $P(A/B)$ e $P(B/A)$.

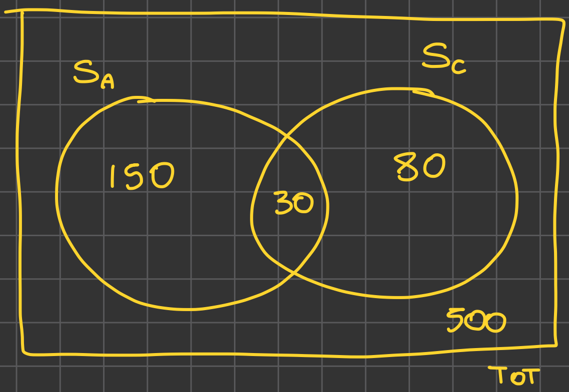
Nota: $P(A/B) \neq P(B/A)$

Esempi da Link

1. There are 500 students in a certain school. 150 students are enrolled in an Algebra course and 80 students are enrolled in a Chemistry course. There are 30 students who are taking both Algebra and Chemistry. If a student is chosen at random, (a) What is the probability that the student is taking Algebra? (b) What is the probability that the student is taking Chemistry given that the student is also taking Algebra? (c) What is the probability that the student is taking Algebra given that the student is also taking Chemistry?

$S_{TOT} = 500$ $\qquad$ $S_{A \cap C} = 30$

$S_A = 150$ $\qquad$ $S_C = 80$



$$\Rightarrow P(A) = \frac{15\cancel{0}}{50\cancel{0}} = \frac{3}{10} = .3 = 30\%$$

$$P(C) = \frac{8\cancel{0}}{50\cancel{0}} = \frac{4}{25} = .16 = 16\%$$

1) Qual e' la prob che uno studente ha freq. chimico sapendo che ha frequentato Algebra?

$$\Rightarrow P(C/A) = \text{"quanto di C e' in A?"}$$

$$= \frac{30}{150} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{30/\cancel{500}}{150/\cancel{500}}$$

$$= \frac{1}{5} = .2 = 20\%$$

Domanda

Che cosa vuol dire chiedersi la 1 ?
Vuol dire che su 500 studenti totali, il 20% ha freq. chimica $\Rightarrow$ 20% 150 = 30

2) Prob che uno studente frequenta algebra, sapendo che frequenta anche chimica?

$$P(A/C) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = .37 = 37\%$$

2. There are 200 birds in a zoo. 70 birds are male with brown eyes and 100 birds are female with brown eyes. 20 of the birds are male with blue eyes and 10 birds are female with blue eyes. Construct a contigency table. If a bird is selected at random, what is the probability that the bird is (A) a female? (B) a male with brown eyes? (C) a female given that it has brown eyes? (D) a male given that it has blue eyes? (E) a creature with blue eyes given that it's a female?

TOT = 200
MBw = 70
FBw = 100
MBl = 20
FBl = 10

G	Bw	Bl	
M	70	20	90 TOT
F	100	10	110 TOT
	170	30	200

$\}$ 200

Dopo aver costruito la tabella, rispondiamo alle domande:

- $P(F) = \frac{110}{200} = .55 = 55\%$ di beccare una femmina
- $P(MBw) = \frac{70}{200} = .35 = 35\%$
- $P(F/Bw) = \frac{P(F \cap Bw)}{P(Bw)} = \frac{100}{170} = .58 = 58\%$
- $P(M/Bl) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0.6\bar{6} = 66.6\%$
- $P(Bl/F) = \frac{10}{110} = .09 = 9\%$