UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 15 marzo 2021
Tempo a disposizione 2.30 ore
Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1

Le variabili aleatorie discrete, X ed Y, possono assumere i valori $X \in \{0, 1\}$, $Y \in \{0, 2\}$ con probabilità

$\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = 0.3,$
$\mathrm{P}(X = 0, Y = 2) = 0.1,$
$\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 0.4,$
$\mathrm{P}(X = 1, Y = 2) = 0.2.$

Calcolare il coefficiente di correlazione tra le due variabili aleatorie.

EX. 2 Si consideri il segnale periodico

$$\widetilde{x}(t) = \mathrm{rep}_2[x(t)]$$

il cui segnale generatore è $x(t) = \Lambda(2(t + 0.5)) - \Lambda(2(t - 0.5))$.

1. Rappresentare graficamente i segnali $x(t)$ e $\widetilde{x}(t)$.
2. Calcolare il modulo della trasformata di Fourier del segnale periodico $\widetilde{x}(t)$.

EX. 3 Il segnale esponenziale

$$x(t) = e^{-2t/\tau} u(t)$$

dove $\tau = 10^{-4}$, viene inviato in ingresso ad un campionatore ideale con frequenza di campionamento f_c.

1. Scrivere l'espressione del segnale campionato nel dominio del tempo.
2. Trovare il valore della banda B del segnale, ottenuta in modo che per $f = B$ la densità spettrale di energia del segnale sia attenuata di 40 dB rispetto alla componente continua.

EX. 1

Le variabili aleatorie discrete, X ed Y, possono assumere i valori $X \in \{0,1\}$, $Y \in \{0,2\}$ con probabilità

$\mathrm{P}(X=0, Y=0) = 0.3,$
$\mathrm{P}(X=0, Y=2) = 0.1,$
$\mathrm{P}(X=1, Y=0) = 0.4,$
$\mathrm{P}(X=1, Y=2) = 0.2.$

Calcolare il coefficiente di correlazione tra le due variabili aleatorie.

$\mathcal{A}_X = \{0,1\}$, $\mathcal{A}_Y = \{0,2\}$ con Prob:

$\mathcal{A}_X \backslash \mathcal{A}_Y$	0	2
0	0.3	0.1
1	0.4	0.2

- Coefficiente di corr $\rho_{XY} = ?$

Sappiamo che $\rho_{XY} = \dfrac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathcal{A}_X} x_k \cdot p(k) = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$ μ_X
- $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}[0+2] = 1$ μ_Y
- $\overline{X}^2 = \sum_{k \in \mathcal{A}_X} x_k^2 \, p(k) = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$ $\overline{X}^2$
- $\overline{Y}^2 = \frac{1}{2}(0+4) = 2$ $\overline{Y}^2$
- $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \overline{X}^2 - \mu_X^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ σ_X^2
- $\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2] = \overline{Y}^2 - \mu_Y^2 = 2 - 1 = 1$ σ_Y^2

$C_{XY} = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathbb{E}[XY] - \cancel{\mu_X \mu_Y} - \mu_X \mu_Y + \cancel{\mu_X \mu_Y} = \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y$

$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] =$ PMF CONGIUNTA $= \sum_{i \in \mathcal{A}_X} \sum_{j \in \mathcal{A}_Y} x_i \cdot y_j \cdot P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$

$= \cancel{0 \cdot 0 \cdot 0.3} + \cancel{1 \cdot 0 \cdot 0.4} + \cancel{0 \cdot 2 \cdot 0.1} + 1 \cdot 2 \cdot 0.2 = 0.4 \Rightarrow C_{XY} = 0.4 - \frac{1}{2} = -0.1$

$\Rightarrow \rho_{XY} = -\dfrac{0.1}{\frac{1}{2} \cdot 1} = -0.2$

Time 30'

EX. 2 Si consideri il segnale periodico

$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_2[x(t)]$$

il cui segnale generatore è $x(t) = \Lambda(2(t + 0.5)) - \Lambda(2(t - 0.5))$.

1. Rappresentare graficamente i segnali $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$.
2. Calcolare il modulo della trasformata di Fourier del segnale periodico $\tilde{x}(t)$.

$\tilde{x}(t) = rep_2[x(t)]$ dove $x(t) = \Lambda\left[2(t+\frac{1}{2})\right] - \Lambda\left[2(t-\frac{1}{2})\right]$

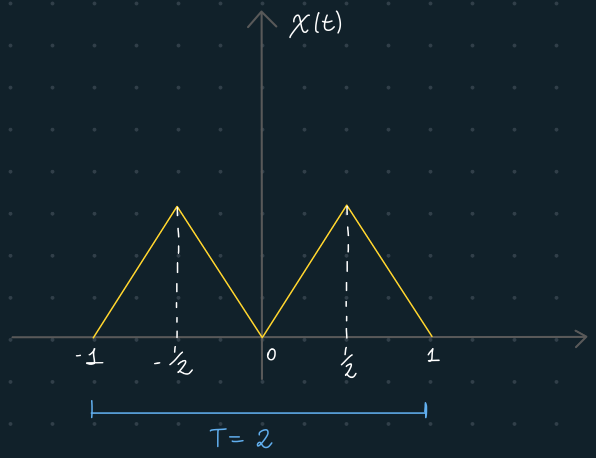
$[-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3] \cdot 2 = [-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6]$ ← Time Scaling

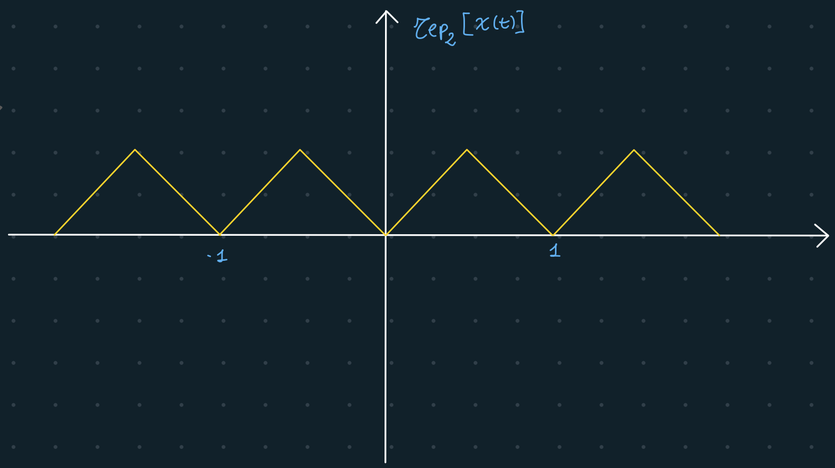
→ Quando c'e' un Time scaling il tempo si "allunga" se $a > 0$

$\Lambda\left(\frac{2t+1}{1}\right) \Rightarrow T = 1$

$$rep_2[x(t)] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left[2(t+\tfrac{1}{2})\right] - \Lambda\left[2(t-\tfrac{1}{2})\right] \cdot \delta(t-2K)$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left[2(2K+\tfrac{1}{2})\right] - \Lambda\left[2(2K-\tfrac{1}{2})\right]$$





Q_2: $|\mathcal{F}(\tilde{x}(t))| = ?$

Sappiamo che $rep_T[x(t)] \rightleftharpoons \tilde{X}_\delta(f)$

$\Lambda\left[2(t+\frac{1}{2})\right] \rightleftharpoons \frac{1}{2} \text{Sinc}^2(f) \cdot e^{+J\pi f}$

$\Lambda\left[2(t-\frac{1}{2})\right] \rightleftharpoons \frac{1}{2} \text{sinc}^2(f)\, e^{-J\pi f}$

$$\Rightarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left[2(t+\tfrac{1}{2})\right] - \Lambda\left[2(t-\tfrac{1}{2})\right] \cdot \delta(t-2K) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \frac{1}{2} \sum_{m=} -\frac{1}{2} \text{Sinc}^2(f) \underbrace{\left[e^{J\pi f} + e^{-J\pi f}\right]}_{2\cos(\pi f)} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}^2\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{m}{2}\right)$$

Time 30'

EX. 3 Il segnale esponenziale

$$x(t) = e^{-2t/\tau} u(t)$$

dove $\tau = 10^{-4}$, viene inviato in ingresso ad un campionatore ideale con frequenza di campionamento f_c.

1. Scrivere l'espressione del segnale campionato nel dominio del tempo.
2. Trovare il valore della banda B del segnale, ottenuta in modo che per $f = B$ la densità spettrale di energia del segnale sia attenuata di 40 dB rispetto alla componente continua.

$x(t) = e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot u(t) \qquad \tau = 10^{-4}$

$x(t)$ viene inviato ad un campionatore ideale con freq di comp f_c

Q_1: $\tilde{x}_\delta(t) = ?$ Siccome $f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f_c}$

$$\tilde{x}_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2kT}{\tau}} \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\frac{k}{f_c}}{\tau}} \delta\left(t - \frac{k}{f_c}\right)$$

Q_2: Banda del segnale in modo che se $f = B$, $S_x(f)$ è attenuata di 40 dB rispetto alla componente continua

x_{dc} non è altro che la media: $x_{dc} = \langle x(t) \rangle$, siccome $x(t)$ è di Energia:

$$x_{dc} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot u(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{1}{\frac{2}{\tau}} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{\tau}{2}\left[\underset{0}{e^{-\infty}} - 1\right] = \frac{\tau}{2} \; x_{dc}$$

dobbiamo trovare: $B = f$: $S_x(f) = \frac{\tau}{2} - 40$

Troviamo $S_x(f) \Rightarrow S_x = |X(f)|^2 \Rightarrow$ Troviamo $X(f)$

- $e^{-at} \cdot u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow e^{-\overset{a}{\frac{2}{\tau}}t} \cdot u(t) = \frac{1}{\frac{2}{\tau} + j2\pi f} = \frac{\tau}{2 + j2\pi f\tau}$

$\Rightarrow S_x(f) = |X(f)|^2 = \left|\frac{\tau}{2 + j2\pi f\tau}\right|^2 \rightarrow$ il segnale è complx $\Rightarrow |X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f)$

$$\Rightarrow S_x(f) = \frac{\tau}{2 + j2\pi f\tau} \cdot \frac{\tau}{2 - j2\pi f\tau} = \frac{\tau^2}{(2 + j2\pi f\tau)(2 - j2\pi f\tau)} = \frac{\tau^2}{4 - \cancel{j4\pi f\tau} + \cancel{j4\pi f\tau} - \underset{-1}{j^2}(2\pi f\tau)^2}$$

$$\Rightarrow S_x(f) = \frac{\tau^2}{4 + (2\pi f\tau)^2}$$

Ora possiamo Trovare $B = f$ / $S_x(f) = \frac{\tau}{2} - 40$

$$\frac{\tau^2}{4 + (2\pi B\tau)^2} = \frac{\tau}{2} - 40 \rightarrow \frac{\tau - 80}{2} \Rightarrow \frac{4 + (2\pi B\tau)^2}{\cancel{\tau^2}} = \frac{2\tau^2}{\tau - 80} \Rightarrow (2\pi B\tau)^2 = \frac{2\tau^2}{\tau - 80} - 4$$

$$\Rightarrow 2\pi B\tau = \sqrt{\frac{2\tau^2}{\tau - 80} - 4} \Rightarrow B = \left[\sqrt{\frac{2\tau}{\tau - 80} - 4}\right] \frac{1}{2\pi\tau} \Rightarrow B =$$

VALORE NEG!

Controlliamo meglio...

$$\cancel{40}^{2}\,dB = \cancel{20} \log_{10} x \Rightarrow 2\,dB = \log_{10} x \Rightarrow x = 10^2$$

Abbiamo detto B / $S_x(B) = \frac{\tau}{2} - 40 = -39$ NEGATIVO !

$\Rightarrow$ Non sarà mai attenuato di 40 dB ! Time 30'

Troviamo τ che ci permetta di avere questa attenuazione

$\rightarrow$ avviene per $\frac{\tau}{2} > 40 \Rightarrow \tau > 80$ Poniamo $\tau = 100$ Esempio

$$\Rightarrow B = \left[\sqrt{\frac{2\tau}{\tau - 80} - 4}\,\right] \cdot \frac{1}{2\pi\tau} = 0.0389 \sim 0.039 \rightarrow 3.9 \times 10^{-3}\ B$$