Variabili congiuntamente gaussiane

Piccolo Recap

La caratterizzazione congiunta è utile quando vogliamo caratterizzare più caratteristiche (ad esempio di un individuo), come Altezza e peso.

Abbiamo quindi una funzione Bidimensionale (a due variabili) che ci descrive la caratterizzazione congiunta.

Inoltre se due variabili sono Indipendenti allora la probabilità si fattorizza col prodotto delle singole probabilità.

- $F_{xy}(x,y)$ → "CONGIUNTE"
- $F_x(x)$, $F_y(y)$ → "MARGINALI"

Nel caso in cui X, Y sono indipendenti

$$\boxed{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})\,P(\{Y \leq y\})} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

PMF e PDF

$$P_{XY} : (x,y) \in \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y \longrightarrow P_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \qquad (2.41)$$

PMF

$$\underbrace{F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}_{CDF_{xy}} \Rightarrow f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$PDF_{xy} = \frac{d^2}{dx\,dy} CDF_{xy}$

Distribuzioni e densità condizionate

CDF condizionata ad un EVENTO

$$F_X(x|B) = P(\{X \leq x\}|B) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)};$$

PDF condizionata ad un EVENTO

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$$

CDF condizionata ad una VARIABILE ALEATORIA

$$P_{X|Y}(x|y) : x \in \mathcal{A}_X \longrightarrow \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

PDF condizionata ad una VARIABILE ALEATORIA

$$f_{X|Y}(x|y) : \quad x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Definizioni e proprietà della PDF congiunta e della PDF condizionata di due v.a.

PDF congiunta	$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$
PDF condizionata	$f_{X\|Y}(x\|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$
PDF marginali	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$
Legge della probabilità composta	$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) f_{X\|Y}(x\|y) = f_X(x) f_{Y\|X}(y\|x)$
Legge di Bayes	$f_{X\|Y}(x\|y) = f_{Y\|X}(y\|x)\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}$
Legge della probabilità totale	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X\|Y}(x\|y) f_Y(y)dy$

> Derivano da quelle per le Marginali

Variabili Aleatorie Indipendenti

due v.a. sono indipendenti quando

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

Quando è possibile fattorizzare la congiunta come prodotto delle Marginali

Momenti congiunti

$$\mathbb{E}\left[X^m Y^r\right] \longrightarrow \begin{matrix} m=1 \\ r=1 \end{matrix} = \mathbb{E}\left[XY\right] = \text{CORRELAZIONE}$$

Momenti centrali congiunti

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^m (Y-\mu_y)^r\right] \longrightarrow \begin{matrix} m=1 \\ r=1 \end{matrix} = \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = \text{COVARIANZA}$$

$C_{xy} < 0$ X, Y variano insieme

$C_{xy} > 0$ X, Y sono inv. prop.

$C_{xy} = 0$ X, Y non sono <u>correlate</u>

CORRELAZIONE $\neq$ DIPENDENZA ⚠

V. A. CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE 12:00

DA STUDIARE

TEORIA DELLA STIMA

Definiamo la media CAMPIONARIA, o MEDIA ARITMETICA

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad = \qquad X_1, X_2, \dots, X_n$$

Variabili Aleatorie (a)

I. I. D. → Identically Indipendent Distributed

OVVERO hanno tutte la stessa media e varianza

cioe' Stessa caratterizzazione + Indipendenti

E' una V.A. a sua volta

⇓

Possiamo calcolare la Media Statistica di S_n

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{\mu} = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\cdot\mu = \mu$$

Media Statistica

Media della singola variabile

"MEDIAMENTE la media e' μ"

Se la VARIANZA e' grande, lo Stimatore (μ) e' accurato?

~ 1:20

⇒ Calcoliamo la Varianza

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(S_n-\mu)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mathbb{E}[X_i]\right)\right\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i - \mathbb{E}[X_i]\right)\left(X_j - \mathbb{E}[X_j]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_i - \mathbb{E}[X_i]\right)\left(X_j - \mathbb{E}[X_j]\right)\right]}_{\text{COVARIANZA TRA } X_i \text{ e } X_j}$$

= Siccome abbiamo precedentemente supposto che le V.A. sono indipendenti (a)

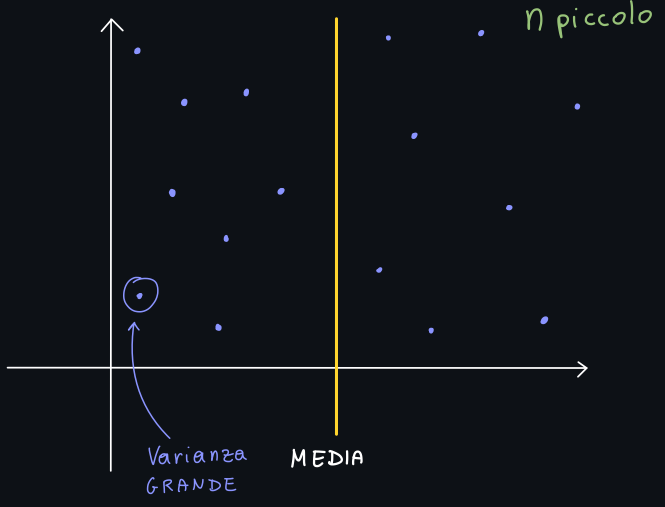
Allora Indip ⇒ Incorrelate

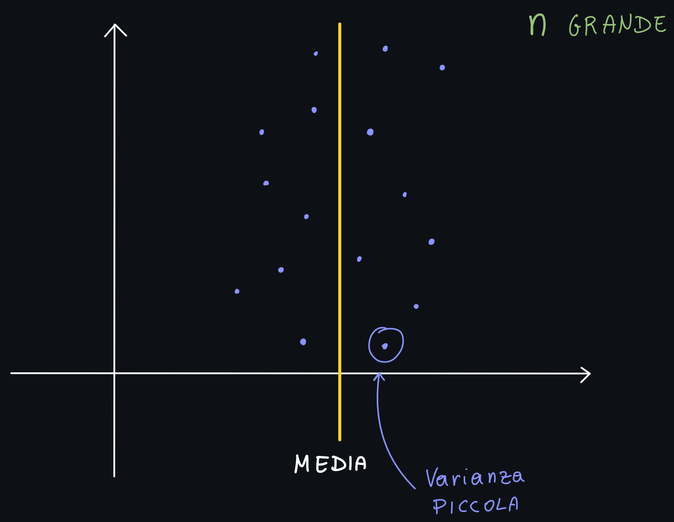
$$\Rightarrow Var[S_n] = \begin{cases} \text{Indip} \Rightarrow \text{Incorr} \Rightarrow C_{X_i X_j} = \emptyset & \text{per } i \neq j \\ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_i - \mathbb{E}[X_i]\right)^2\right]}_{\text{Varianza di } X_i \,=\, \sigma^2} & \text{per } i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow Var[S_n] = \begin{cases} \emptyset & \text{per} \quad i \neq j \\ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} & \text{per} \quad i = j \end{cases}$$

- Il risultato $\sigma_{S_n}^2 = \frac{\sigma_{X_i}^2}{n}$ è IMPORTANTISSIMO perchè dimostra che la VARIANZA della media DIMINUISCE all'aumentare di n.

$\Rightarrow$ All'aumentare delle osservazioni, la nostra Stima di media sarà più fedele possibile.





LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \quad \text{in m.s.}$$

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA "mean square"