Esercizio 1

Nel lancio di un dado calcolare la probabilità di ottenere un numero dispari.
[1/2]

Link

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow E = \{\text{"un numero dispari"}\} = \{1,3,5\}$

$\Rightarrow P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = .5 = 50\%$

Esercizio 2

Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità di ottenere una figura.
[3/10]

$\Omega = \{\underset{\uparrow\, 12}{\text{Figure}}, \underset{\uparrow\, 4\text{assi} + 24 = 28}{\text{numeri}}\} \qquad E = \{\text{Figura}\}$

$\Rightarrow \|\Omega\| = 40, \quad \|E\| = 12$

$\Rightarrow P(E) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$

Esercizio 3

Si lanciano due dadi, calcolare la probabilità di avere due numeri uguali. Calcolare inoltre la probabilità che la somma delle due facce sia 5.
[1/6 | 1/9]

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$

$A = \{\text{"due numeri uguali"}\} = \{(1,1),(2,2), \dots (6,6)\}$

$\Rightarrow \|A\| = 6 \qquad \|\Omega\| = 6^2 = 36$

$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{\text{Somma di 2 facce} = 5\text{"}\}$

$= \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)\} \Rightarrow \|B\| = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \sim 11\%$

Esercizio 4

Si lanciano 3 monete, calcolare la probabilità di avere due teste ed una croce.
[3/8]

$\Omega = \{T,C\}^3$

$E = \{\text{"due T ed una C"}\} =$

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} T & T & T \\ T & T & C \\ T & C & T \\ T & C & C \\ C & T & T \\ C & T & C \\ C & C & T \\ C & C & C \end{matrix}\right\} \qquad \Rightarrow P(E) = \frac{3}{8}$$

Esercizio 5

Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta, calcolare la probabilità di avere:
A] una carta di fiori.
B] un numero dispari.
C] una non figura.
[1/4 | 2/5 | 7/10]

$A = \{\text{"una carta di fiori"}\} \Rightarrow \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 25\%$

$B = \{\text{"num. dispari"}\} \Rightarrow \frac{4 \cdot 4^{*}}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

* 4 e non 5 perchè il cavallo non è numerabile

$C = \{\text{"una non figura"}\}$

$\Rightarrow P(\text{Fig}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$

$P(C) = \frac{28}{40} = \frac{7}{10} = 70\%$

$\Rightarrow \text{Fig} \cap C = \emptyset$

$\text{Fig} \cup C = \Omega$

Esercizio 6

Una scatola contiene 100 lampade di cui 95 "buone" e 5 che non si accendono.
Si estraggono 10 lampade a caso, calcola la probabilità di estrarle tutte "buone".
[0,58]

$\Omega = \{ B, B, \dots B_{95}, R, R, R, R, R \}$

Estraiamo 10 lampade

$$= \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi totali}} = \frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{95!}{\cancel{10!}(85)!}}{\frac{100!}{\cancel{10!}(90)!}}$$

$$= \frac{95!}{85!} \cdot \frac{90!}{100!} = \frac{\cancel{95}!}{\cancel{85}!} \cdot \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot \cancel{85!}}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot \cancel{95!}}$$

$$= 0.58 \simeq 60\%$$

Formula combinazioni $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Esercizi probabilità Condizionata

Esercizio 1

Si stima che il 30% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 3% siano diabetici e che il 2% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

1. sia diabetico se è obeso;
2. sia obeso se è diabetico.

$Tot = n$

$D = 3\% = 0.03$

$O = 30\% = 0.3$

$D \cap O = O \cap D = 2\% = 0.02$

$A = \{\text{"sia diab. se obeso"}\} \Rightarrow P(D/O) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0.02}{0.3} =$

$= \dfrac{2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-1}} = \dfrac{2}{3} \dfrac{10^{\cancel{-2}\ -1}}{\cancel{10^{-1}}} = \dfrac{3}{2} \cdot 10^{-1} = 0.667 \sim 67\%$

$B = \{\text{"sia obeso se diabetico"}\} \Rightarrow P(O/D) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(D)} = \dfrac{0.02}{0.03}$

$\Rightarrow P(O/D) = \dfrac{2}{3} = 0.667$

Esercizi svolti su probabilità condizionata e teorema di Bayes

Esercizio 1

Si stima che il 30% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 3% siano diabetici e che il 2% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

1. sia diabetico se è obeso;
2. sia obeso se è diabetico.

Soluzione

Indichiamo con O e D i seguenti eventi:

O="un individuo scelto casualmente sia obeso";

D="un individuo scelto casualmente sia di diabetico".

Il testo ci dice che $P(O) = 0.30$, $P(D) = 0.03$ e $P(O \cap D) = 0.02$.

1. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia diabetico *dato* che è obeso, ossia $P(D|O)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(D|O) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{0.02}{0.3} = 0.067$$
2. Il quesito chiede la probabilità che il soggetto sia obeso *dato* che è diabetico, ossia $P(O|D)$; applicando la regola della probabilità condizionata si ha
$$P(O|D) = \frac{P(D \cap O)}{P(D)} = \frac{0.02}{0.03} = 0.667$$

Esercizio 2

A un esame universitario si presentano sia studenti che hanno seguito il corso sia studenti che non l'hanno seguito. Il docente ritiene che il 65% degli studenti abbiano seguito il corso. La probabilità che uno studente superi l'esame dato che ha seguito il corso è 0.75, mentre la probabilità che uno studente superi l'esame dato che non ha seguito il corso è 0.40.

- Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?
- Qual è la probabilità che uno studente abbia seguito il corso dato che ha superato l'esame?

Soluzione

Indichiamo con A e B gli eventi:

A="lo studente supera l'esame";

B="lo studente ha seguito il corso"

1. Dall'informazione fornita dal docente "il 65% degli studenti hanno seguito il corso", approssimando la probabilità con la frequenza relativa, si ha P(B) = 0.65 e applicando il primo teorema del calcolo delle probabilità si ottiene:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

   e inoltre $P(A|B) = 0.75$ e $P(A|\bar{B}) = 0.40$. L'evento A può essere rappresentato come l'unione di due eventi incompatibili $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$; pertanto

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

   dove

   - $P(A \cap B) = P(A|B) * P(B) = 0.75 * 0.65 = 0.4875$
   - $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B}) * P(\bar{B}) = 0.40 * 0.35 = 0.1400$

   Pertanto $P(A) = 0.4875 + 0.1400 = 0.6275$

2. La probabilità richiesta è

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4875}{0.6275} = 0.7769$$

Esercizio 3

Ad una certa conferenza, partecipano 30 psichiatri e 24 psicologi. Due di queste 54 persone vengono scelte casualmente per fare parte di una commissione. Qual è la probabilità che venga scelto almeno uno psicologo?

Soluzione
Siano A e B gli eventi

A="il soggetto scelto è uno psicologo"

B="il soggetto scelto è uno psichiatra"

Vogliamo calcolare la probabilità che su 2 soggetti estratti almeno uno sia uno psicologo. Possiamo adottare 2 possibili strategie.

Strategia 1: l'evento "estraggo almeno 1 psicologo" è complementare all'evento "non estraggo alcun psicologo". Pertanto Pr("almeno 1 sia uno psicologo")=1-Pr("nessuno psicologo")=1-Pr("2 psichiatra"). Sia B_1 l'evento "seleziono uno psichiatra alla prima selezione" e B_2 l'evento "seleziono uno psichiatra alla seconda selezione". La probabilità richiesta è pertanto pari a :

$$1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - P(B_1)P(B_2|B_1) = 1 - \frac{30}{54}\frac{29}{53} = 0.6960$$

Strategia 2: equivalentemente questa probabilità poteva essere calcolata come probabilità dell'unione dei seguenti eventi:

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$$

ossia

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = P((A_1 \cap A_2)) + P((A_1 \cap B_2)) + P((B_1 \cap A_2)) = 0.6960$$

poichè

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{23}{53} = 0.1929$
- $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{24}{54}\frac{30}{53} = 0.2516$
- $P(B_1 \cap A_2) = P(B_1)P(A_2|B_1) = \frac{30}{54}\frac{24}{53} = 0.2516$

Esercizio 4

Su un tavolo ci sono 2 monete. Qaudno vengono lanciate, una moneta da' testa con probabilità 0.5 mentre l'altra da' testa con probabilità 0.6. Una moneta viene scelta a caso e lanciata.

1. Qual è la probabilità che esca testa?
2. Se esce croce, qual è la probabilità che fosse la moneta equilibrata?

Soluzione
Siano

M_1=la moneta scelta è la moneta 1

M_2=la moneta scelta è la moneta 2

Il testo afferma che $P(T|M_1) = 0.5$ e $P(T|M_2) = 0.6$.

1. $P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.6 = 0.55$
2. Si vuole calcolare la probabilità che essendo uscita croce sia stata estratta la moneta 1; applicando il teorema di Bayes

$$P(M_1|C) = \frac{P(C|M_1)P(M_1)}{P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2) * P(M_2)} = \frac{0.5 * 0.5}{(0.5 * 0.5) + (0.5 * 0.4)} = 0.55$$

Esercizio 5

Tra i partecipanti ad un concorso per giovani compositori il 50% suona il pianoforte, il 30% suona il violino e il 20% la chitarra. Partecipano ad un concorso per la prima volta il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti e il 10% dei chitarristi. Applicando i concetti di probabilita' condizionata e il teorema di Bayes, rispondere alle seguenti domande.

1. Qual è la percentuale di aspiranti compositori alla prima esperienza?
2. Sapendo che ad esibirsi per primo sarà un compositore alla prima esperienza, qual è la probabilità che sia un chitarrista?

Soluzione
Siano:

A = Aspiranti compositori alla prima esperianza

B = Pianisti

C = Violinisti

D = Chitarristi

abbiamo

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup C \cup D)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) \\
&= P(A|B) + P(B) + P(A|C)P(C) + P(A|D)P(D) \\
&= 0.1 \cdot 0.5 + 0.33 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.17
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo quesito abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(D|A) &= \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.17} = 0.12
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un *falso positivo* (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo?

Soluzione

Indichiamo rispettivamente con D ed E gli eventi

D = *un soggetto estratto casualmente ha la malattia*

E= *il test è positivo*

Il testo ci dice che il test è affidabile al 99%, ossia fornisce un esito positivo quando il soggetto è effettivamente malato. Ciò significa che

$$P(E|D) = 0.99$$

Tuttavia, l'esame fornisce un *falso postivo* nel 2% dei casi, ossia

$$P(E|D^c) = 0.02$$

Sapendo che P(D)=0.005, per determinare $P(D|E)$ possiamo utilizzare il Teorema di Bayes come segue:

$$P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995} = 0.199$$

Risulta quindi che una persona scelta a caso che ottiene risultato positivo al test ha una probabilità del 20% di avere effettivamente la malattia.

I calcoli precedentemente svolti ci dicono anche che la probabilità che il test dia un risultato positivo è $P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) = 0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995 = 0.02485$ e quindi la probabilità che il test dia un risutato negativo è $P(E^c) = 1 - 0.02485 = 0.97515$.

La probabilità che una persona scelta a caso che ottiene un risultato negativo al test sia di fatto malata è

$$P(D|E^c) = \frac{P(E^c|D)P(D)}{P(E^c|D)P(D) + P(E^c|D^c)P(D^c)} = \frac{(1 - 0.99) \cdot 0.005}{0.97515} = \frac{1}{19503}$$

che è un numero confortante.

Valutare che cosa succede delle due probabilità scritte precedentemente quando $P(E|D) < 0.99$ o la prevalenza della malattia nella popolazione ($P(D)$)è superiore allo 0.5 %.

ESERCIZI VARIABILI ALEATORIE — Dal video

1. The amount of time a person must wait for a train to arrive in a certain town is uniformly distributed between 0 and 40 minutes. ~~(a)~~ Determine the probability density function f(x). ~~(b)~~ Draw a graph of f(x). ~~(c)~~ What is the probability that a person must wait less than 8 minutes? (d) What is the probability that a person must wait more than 30 minutes? (e) Calculate P(10 < x < 26), P(x = 20), and P(x > 45).
(f) Calculate the mean and standard deviation. (g) What is the 85th percentile?

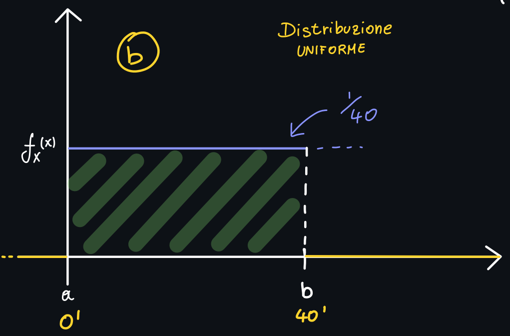
$A_{TOT} = 1$

(a) Determiniamo la $f_X(x)$

$$A = 1 = \underbrace{B}_{b-a} \cdot \underbrace{H}_{f_X(x)} \Rightarrow H = \frac{1}{B} \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\rightarrow f_X(x) = \frac{1}{40-0} = 1/40$$

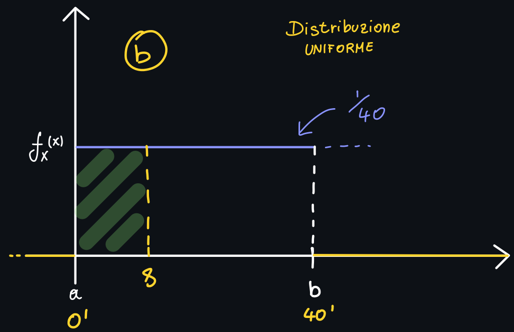
(b)



(c) P che una persona debba aspettare meno di 8''?

$$P(\{X \leq 8\}) = F_X(8) \Rightarrow \frac{8-0}{40-0} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

oppure $A = B \cdot H = 8 \cdot 1/40 = 1/5 = 20\%$



(d) $P(\{X \geq 30\})$

$$\rightarrow \underbrace{P(\{X \leq 40\})}_{P(\{\Omega\})=1} - \underbrace{P(\{X \leq 30\})}_{F_X(30) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = 1/4 = 25\%$$

(e) • $P(\{10 < X < 26\})$

$$P = \int_{10}^{26} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_{10}^{26} dx = 1/40\,[26-10] = \frac{1}{40} \cdot 16 = \frac{2}{5} = 40\%$$

• $P(\{X = 20\}) = 0$

• $P(\{X > 45\}) = ?$ $\rightarrow$ $f_X(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \Rightarrow 0 \cdot \int_{45}^{+\infty} dx = 0\,[+\infty - 45] = 0$

(f) Media e deviazione Standard

$$E = \begin{cases} \sum_{x_i \in A_X} x_i \cdot F_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = \int_a^b x \cdot f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right]$$

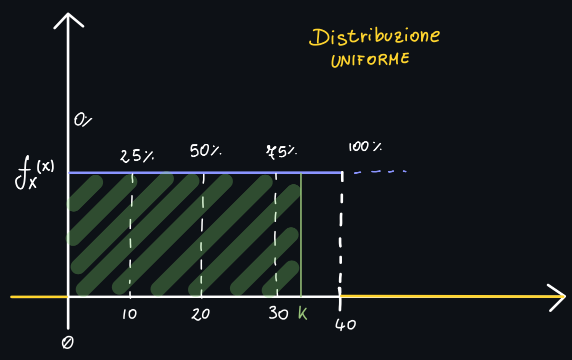
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$= \frac{40+0}{2} = 20$$ Valore Medio

Varianza di una V.A. Uniforme:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{40-0}{2\sqrt{3}} \cong 11,5$$

9 Qual è l'85% ?



Chiamiamo $K = 85\%$

$$\Rightarrow P_X(K) = \frac{85}{100} \Rightarrow \frac{85}{100} = K \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{85}{100} \cdot b-a = K \Rightarrow K = \frac{85}{100} \cdot 40 = 34$$

Proof $P_X(34) = \frac{34-0}{40} = 0,85$

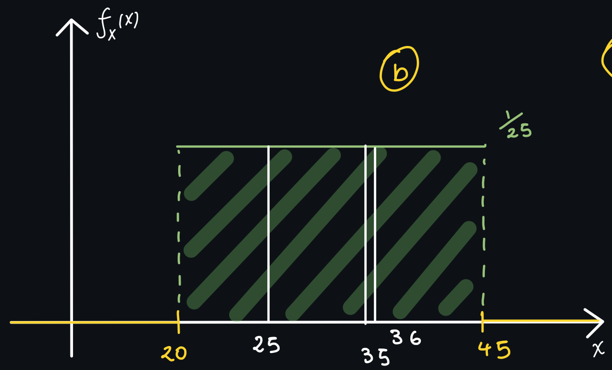
$$P_X(K) = \frac{85}{100} \Rightarrow \frac{K-a}{b-a} = \frac{85}{100} \rightarrow K = \frac{85}{100} \cdot 40$$

2. The amount of time that it takes a student to complete a chemistry test is uniformly distributed between 20 and 45 minutes. (a) Write the probability density function f(x). (b) Draw a graph. (c) What is the probability that a student will take more than 36 minutes to complete the exam? (d) What is the probability that the student will take between 26 and 35 minutes to complete the test? (e) Determine the ~~median, variance~~, and ~~standard deviation~~. (f) What is the value of the 3rd quartile? (g) What is the probability that the student will take more than 40 minutes to complete the test given that he always take more than 30 minutes to complete any chemistry test?

(a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x > b \end{cases} \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{45-20} = \frac{1}{25}$$

(b)



(c) $P(\{X \geq 36\}) = P(\{X \leq 45\}) - P(\{X \leq 36\})$

$P(\{X \leq 45\}) \rightarrow P_X(45) = 1$, $P(\{X \leq 36\}) \rightarrow P_X(36)$

$$\rightarrow 1 - \frac{36-20}{45-20} = 1 - \frac{16}{25} = 0{,}36 = 36\%$$

(d) $P(\{26 < X < 36\}) = P_X(35) - P_X(26) = \frac{35-20}{25} - \frac{26-20}{25} = \frac{15}{25} - \frac{6}{25} = 36\%$

(e) Media $= \mu = \mathbb{E}[X] = \int_a^b x \cdot f_X(x)\,dx = \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$

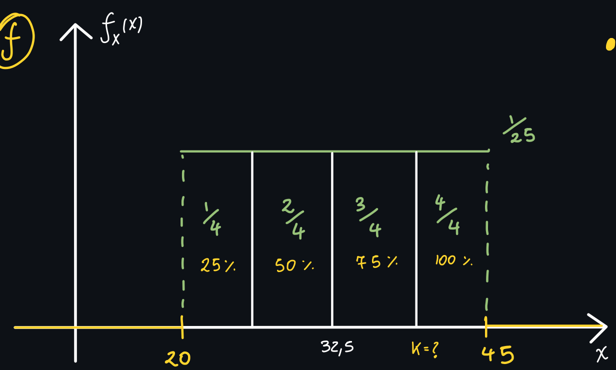
$$\mathbb{E}[X] = \int_{20}^{45} x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_{20}^{45} x\,dx = \frac{1}{45-20}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{20}^{45} = \frac{45+20}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$$

Varianza

$$\rightarrow \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(45-20)^2}{12} \cong 52$$

Standard dev. $\sqrt{52} \cong 2\sqrt{13}$

(f)



• Dobbiamo trovare il valore K che abbia Probabilita' 75%

$$\rightarrow P_X(K) = 75\% = \frac{75}{100} \rightarrow \frac{K-20}{45-20} = \frac{75}{100}$$

$$\rightarrow K = \left(\frac{75}{100} \cdot 25\right) + 20 = 38{,}75$$

(g) $P(\{X \geq 40\} / \text{Impiega sempre più di } 30\text{ min})$

$A = X \geq 40$

$B =$ Impiega sempre > 30 $\rightarrow X > 30$

$$\rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{X \geq 40\})}{P(\{X \geq 30\})} = \frac{(45-40) \cdot \cancel{(1/25)}}{(45-30)\,\cancel{(1/25)}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \cong 33\%$$