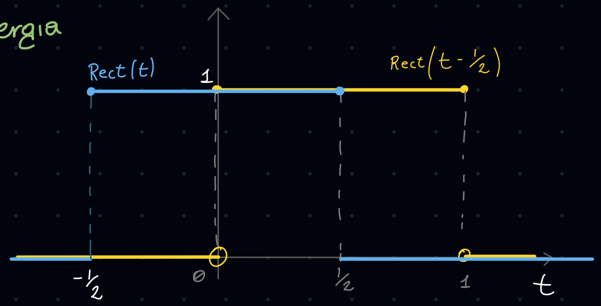
Energia, Potenza, Media, Correlazione dei segnali deterministici

IMPULSO RETTANGOLARE — Segnale di Energia

$$Rect = \Pi = \begin{cases} 1 & \text{Per } 0 \leq t \leq 1 \\ \emptyset & \text{Altrimenti} \end{cases}$$



Altre forme

- $Rect(t-c) \to$ Spostato IN AVANTI DI $+c$
- $Rect(t+c) \to$ Spostato INDIETRO DI $+c$
- $A\,\Pi(t) \to$ Rect di Ampiezza A
- $Rect\left(\frac{t-c}{T}\right) \to$ Rect di Durata $T \Rightarrow \left(c-\frac{1}{2}T < t < c+\frac{1}{2}T\right)$

MEDIA

$$\boxed{\langle s(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} s(t)\,dt}$$

FORMULA GENERALE

Media su $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\langle Rect(t) \rangle_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otw.} \end{cases} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dt = \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

Media su $I = (-\infty, +\infty)$

$$\to \langle Rect(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} dt \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cancel{\int_{-T}^{-\frac{1}{2}} \emptyset\,dt} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dt + \cancel{\int_{\frac{1}{2}}^{T} \emptyset\,dt}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = \emptyset$$

La media su $(-\infty, +\infty)$ è zero

Perchè? Se distribuiamo la media del segnale da $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ (che è 1) su un intervallo infinito, è ovvio che essa diventa zero!

POTENZA

$$\boxed{P_s = \langle \| s(t) \|^2 \rangle = \text{Media del modulo quadro} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \| s(t) \|^2\,dt}$$

$\to$ La potenza è la quantità di Energia che viene trasferita in un intervallo di tempo. Si misura in Watt.

$$P_{R(t)} = \langle \| Rect(t) \|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = \emptyset$$

potenza nulla

ENERGIA

$$\boxed{\mathcal{E}_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\|^2 \, dt = \text{Quantita' TOTALE di energia del segnale}}$$

$$\mathcal{E}_{Rect(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & otw \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 0 \, dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0 \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1 \quad \mathcal{E} \neq 0 \neq \infty$$

POTENZA MUTUA

Dato $z(t) = x(t) + y(t)$

$\rightarrow P_z = P_x + P_y + P_{xy} + P_{yx}$

- $$\boxed{P_{xy} = \langle x(t) \cdot y^*(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t) \, dt}$$ Segnali complessi
- $$\boxed{P_{xy} = P_{yx} \Rightarrow P_z = P_x + P_y + 2 P_{xy}}$$ per segnali Reali
- $$\boxed{P_{xy} = P_{yx} = 0 \Rightarrow \text{ORTOGONALI} \Rightarrow P_z = P_x + P_y}$$ Per Segnali ortogonali

Dato $z(t) = Rect(t) + Rect(t) \Rightarrow z = 2\, Rect(t)$

$\Rightarrow P_z = P_R + P_R + P_{RR} + P_{RR} = 2 P_R + 2 P_{RR}$

0

$$P_{RR} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} Rect(t) \cdot Rect(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & otw \end{cases} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \rightarrow 0$$ Potenza mutua $\rightarrow$ autopotenza(?)

$= 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ Potenza della somma di due Rect

ENERGIA MUTUA

$$\boxed{\mathcal{E}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) \, dt}$$

Segnali complessi

$$\boxed{E_x = E_y \Rightarrow E_z = E_x + E_y + 2 E_{xy}}$$

Segnali Reali

$z = Rect(t) + Rect(t) = 2\,Rect(t)$

$\Rightarrow \mathcal{E}_z = E_{Rect} + E_{Rect} + E_{RR} + E_{RR} = 2E_R + 2E_{RR}$

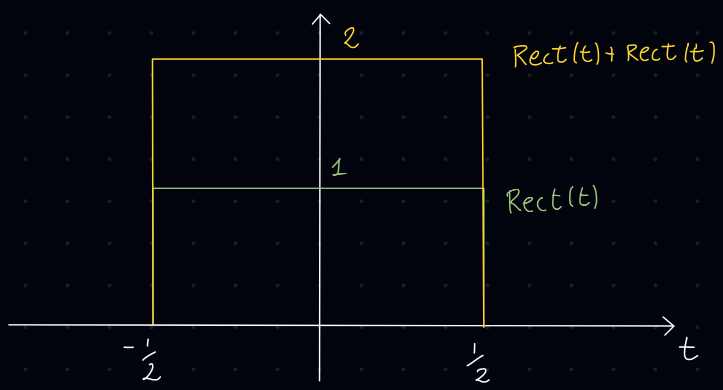
$\rightarrow E_{RR} = \int_{-\infty}^{+\infty} Rect(t)\cdot Rect(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Rect^2(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dt = 1 \quad E_{RR}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_z = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4$ Energia di $\mathcal{E}_{RR}$

Processo alternativo.

$z = Rect(t) + Rect(t) = 2\,Rect(t) \Rightarrow E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\,Rect(t))^2\,dt = 4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dt = 4$

Perchè sono due segnali REALI



$\mathcal{E}_S = (Area_S)^2$

$\Rightarrow \mathcal{E}_R = [(B\times h)]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1\right]^2 = 1$

$\mathcal{E}_{2R} = [(B\times h)]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 2\right]^2 = 2^2 = 4$

CORRELAZIONE

La correlazione ci dice quanto sono SIMILI due segnali: se si "sovrappongono" avranno una correlazione maggiore

$$\tau_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt & \text{Potenza} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot y^*(t-\tau)\,dt & \text{Energia} \end{cases}$$

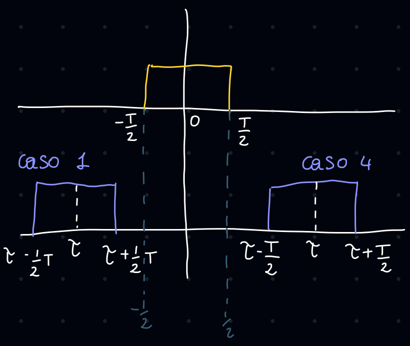
$\Rightarrow$ Autocorrelazione di $Rect(t) = \tau_{Rect(t)} = \langle Rect(t), Rect(t-\tau)\rangle$

= La Rect è un segnale di Energia $\Rightarrow \tau_R = \int_{-\infty}^{+\infty} Rect(t)\cdot Rect(t-\tau)\,dt$

$= \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}-\tau < t < \frac{1}{2}+\tau \\ 0 \end{cases}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot \Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt$ $\rightarrow$ Diversi casi possibili

Caso 1: $\rightarrow$ $\underbrace{\tau + \frac{T}{2}}_{\text{Estremo sup}} < \underbrace{-\frac{T}{2}}_{\text{Estremo inf}}$ $\Rightarrow$ Vuol dire che i due segnali non si "Toccano" quindi il loro prodotto vale zero.



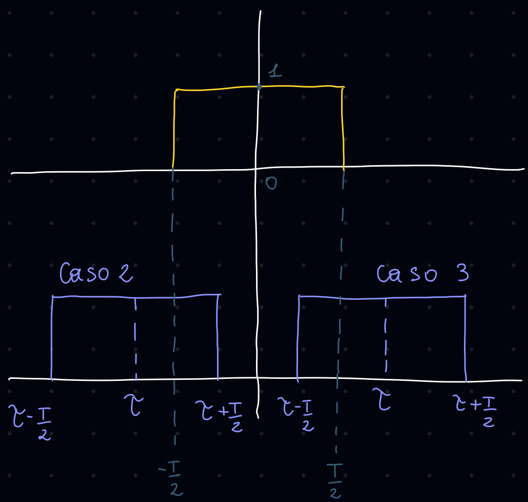
$\Rightarrow$ Siccome la corr è l'integrale del prodotto

$\Rightarrow$ r_x per $\tau < -T = 0$

Caso 4: $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} = \tau > T$ Stessa situa del caso 1

$\Rightarrow$ per $\tau > T$ $r_x = 0$

Caso 2: $\begin{cases} \tau + \frac{T}{2} > -\frac{T}{2} \\ \tau + \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau > -T \\ \tau < 0 \end{cases} \Rightarrow -T < \tau < 0$ Per τ



$$\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau+\frac{T}{2}} A\Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot A\Pi\left(\frac{t-\tau}{2}\right) dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau+\frac{T}{2}} \underbrace{Rect^2\left(\frac{t}{T}\right)}_{1} =$$

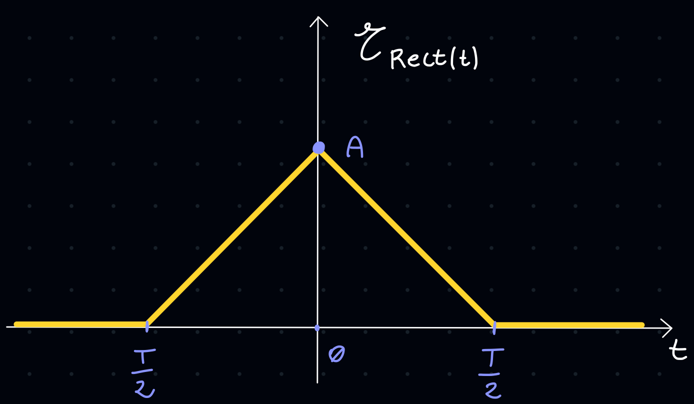
$$= A^2 \left(t\right)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\tau+\frac{T}{2}} = A^2\left(\tau + \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) = A^2(\tau+T)$$

Caso 3: $\begin{cases} \tau - \frac{T}{2} > -\frac{T}{2} \rightarrow \tau > 0 \\ \tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Rightarrow \tau < T \end{cases} \Rightarrow 0 < \tau < T$ Per τ

$$\Rightarrow A^2 \int_{\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Rect\left(\frac{t}{T}\right) = A^2 \left[t\right]_{\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A^2\left(\frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}\right) = A^2(T-\tau)$$

$\Rightarrow$ Tiriamo le somme:

$$r_x = \begin{cases} 0 & \tau < -T \\ A^2(T+\tau) & -T < \tau < 0 \\ A^2(T-\tau) & 0 < \tau < T \\ 0 & \tau > T \end{cases}$$



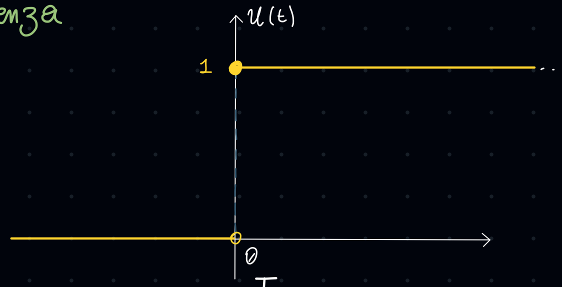
Ristretto a $-T < \tau < T$

$$\begin{cases} A^2(T + \tau) \rightarrow -|\tau| & \tau < 0 \\ A^2(T-\tau) & \tau > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2(T - |\tau|) & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

GRADINO UNITARIO — Segnale di Potenza

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



MEDIA:

$$\langle u(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\cancel{T}}\cancel{T}$$

$$= \frac{1}{2}$$ media

Potenza:

$$P_{u(t)} = \langle \| u(t) \|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1^2\, dt = \frac{1}{2}$$ Potenza finita $\neq 0$

Energia

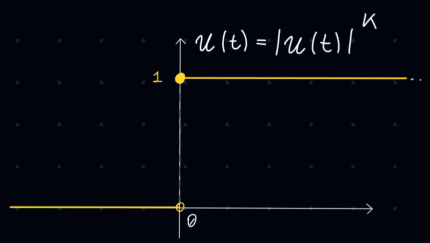
$$\mathcal{E}_{u(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = 0$$ Energia nulla

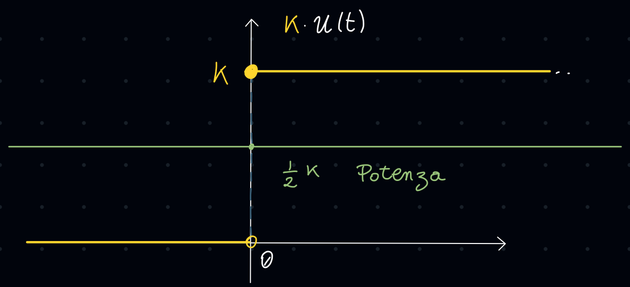
Mutua Potenza

$$P_{uu} = \langle \| u(t), u(t) \| \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)^2\, dt = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ se $z = u(t) + u(t) = 2u(t)$

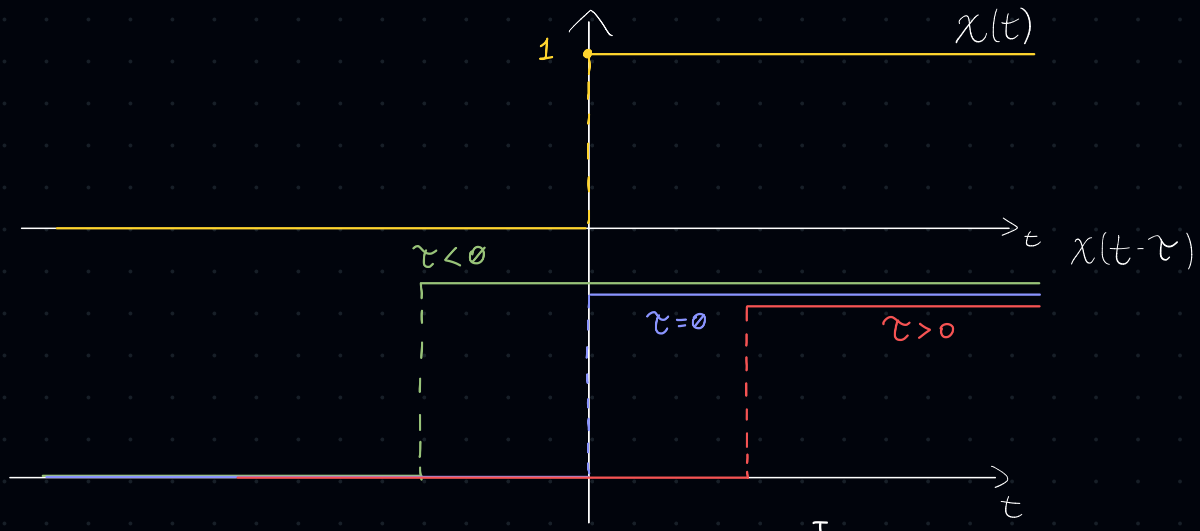
$$\Rightarrow P_z = P_{u(t)} + P_{u(t)} + P_{uu} + P_{uu} = \underbrace{2P_u}_{2\cdot\frac{1}{2}} + \overbrace{2P_{uu}}^{2\cdot\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2$$ Potenza di $2u(t)$





Correlazione

$$r_{uu}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) \cdot u^*(t-\tau)\, dt$$



Caso 1) $\tau < 0 \Rightarrow r_{uu}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1\, dt = \frac{1}{2}$

Caso 2) $\tau = 0 \Rightarrow r_{uu}(\tau) = \frac{1}{2}$

Caso 3) $\tau > 0 \Rightarrow r_{uu}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{T} dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T}(T-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{\tau}{T}}_{\to 0}$

$\Rightarrow r_{uu}(\tau)$ per $\tau > 0 = \frac{1}{2}$

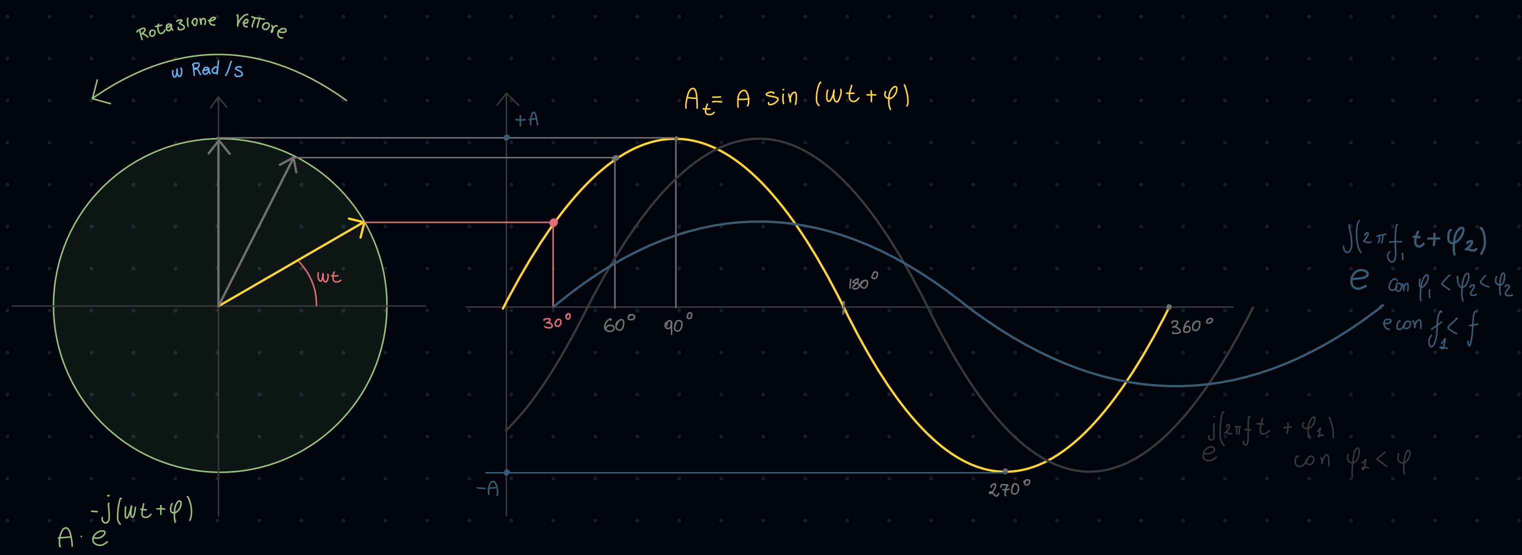
FASORE A TEMPO CONTINUO

Segnale di potenza

Numero complesso i

$$x(t) = A\, e^{j(\omega t + \varphi)} = A\, e^{j(2\pi t + \varphi)} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

Ampiezza — Pulsazione — Fase iniziale



MEDIA Del fasore

$$\langle \text{Phasor} \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A\, e^{j(\omega t + \varphi)}\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{A}{nT} \int_{-n0}^{nT} e^{j(\omega t + \varphi)}\, dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{A}{\cancel{n} T_0} \cdot \cancel{n} \int_0^{T_0} e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\, dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j\omega t}\, dt \Rightarrow \text{Il periodo è: } \frac{2\pi}{\omega}$$

Trascuriamo la fase iniziale $\varphi = 0$

$$= \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{j\omega t}\, dt = \frac{A\omega}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{A\omega}{2\pi} \left[\frac{e^{j2\pi}}{j\omega} - \frac{e^{0}}{j\omega} \right] = \frac{A\omega}{2\pi} \cdot \frac{e^{j2\pi} - 1}{j\omega}$$

→ Scriviamo: $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) - i \sin(2\pi) \Rightarrow \frac{A\omega}{2\pi} \cdot \frac{\overset{1}{\cos(2\pi)} - i \overset{0}{\sin(2\pi)} - 1}{j\omega}$

$$= \frac{A\omega}{2\pi} \cdot \cancel{\frac{1 - 0 - 1}{j\omega}} \to 0 = 0$$

Media del fasore avente $f \neq 0$

Potenza del fasore

$$P_f = \langle \|\text{Phasor}\|^2 \rangle = \langle A e^{jwt} \cdot A e^{jwt} \rangle = \langle A[\overbrace{\cos(wt)}^{1} + i\overbrace{\sin(wt)}^{0}] \cdot B[\overbrace{\cos(wt)}^{1} + i\overbrace{\sin(wt)}^{0}] \rangle$$

$$= \langle A \cdot B \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{AB}{T}\int_{-T}^{T} dt = \lim_{n \to \infty} \frac{AB}{n\,T_0}\int_{n \cdot 0}^{n \cdot T_0} dt = \lim_{n \to \infty} \frac{AB}{\cancel{n}\frac{2\pi}{w}} \cdot \cancel{n}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} dt$$

$$= \frac{wAB}{2\pi} \cdot [t]_0^{\frac{2\pi}{w}} = \frac{\cancel{w}AB}{\cancel{2\pi}}\left[\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{w}} - 0\right] = A \cdot B$$

Potenza $\neq 0$

Energia del fasore ?

$$\mathcal{E}_f = \int_{-\infty}^{+\infty} AB\, dt = AB\int_{-\infty}^{+\infty} dt = \lim_{n \to \infty} AB\, n\int_0^{\frac{2\pi}{w}} t\, dt = +\infty$$

?? Da confermare

Correlazione tra due fasori

$$x(t) = A_1 e^{j\varphi_1} e^{j2\pi f_1 t} \qquad y(t) = A_2 e^{j\varphi_2} e^{j2\pi f_2 t}$$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \langle x(t) \cdot y^*(t-\tau) \rangle = A_1 A_2 \langle e^{j\varphi_1} e^{j2\pi f_1 t} \cdot e^{-j\varphi_2} e^{-j2\pi f_2 (t-\tau)} \rangle$$

$$= A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \langle e^{j2\pi f_1 t} e^{-j2\pi f_2 t} \rangle \cdot e^{j2\pi f_2 \tau} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \langle e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} \rangle e^{j2\pi f_2 \tau}$$

Media di un fasore

$f_1 = f_2 \Rightarrow f = 0 \rightarrow \langle Pn \rangle = A$

$f_1 \neq f_2 \Rightarrow \langle Pn \rangle = \emptyset$

$f_1 \neq f_2$

$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = \emptyset$

Potenza mutua

$f_1 = f_2 = f_0$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = A_1 A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{j2\pi f_0 \tau} = P_{xy} \cdot e^{j2\pi f_0 \tau}$$

$\rightarrow$ la correlazione di due fasori aventi la stessa frequenza è il fasore con la stessa frequenza e la potenza mutua tra i due fasori come ampiezza.

$\Rightarrow$ Se $f_1 = f_2 = f_0$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ e $A_1 = A_2 = A$

$\rightarrow$ Autocorrelazione del fasore $= r_x(\tau) = \underbrace{A^2}_{P_x} e^{j2\pi f_0 t} = P_x e^{j2\pi f_0 t}$

Ampiezza pari alla potenza del segnale

fasore della stessa frequenza $\rightarrow$ con fase nulla

Mutua Potenza

$S(t) = \text{Phasor} = A\, e^{j\omega t}$ Assumiamo fase iniziale nulla

$$P_{ss} = \langle A e^{j\omega t} \cdot A e^{-j\omega t} \rangle = A^2 \langle 1 \rangle = A^2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} A^2 \frac{1}{n T_0} \cdot n \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = \frac{\omega A^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = \frac{\cancel{\omega} A^2}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\omega}} = A^2$$

Mutua potenza del fasore

|||

Potenza del fasore