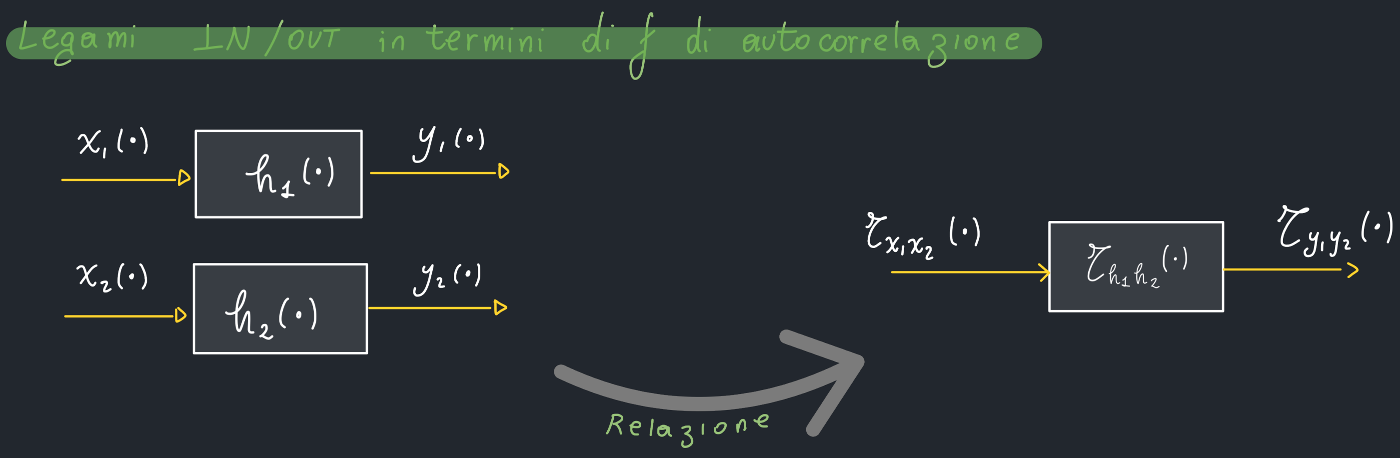
Legami Ingresso Uscita in termini di Correlazione

Possiamo scriverci l'uscita di un sistema tramite l'operazione di **correlazione**:



Questa relazione, sostanzialmente, ci dice che dati due sistemi separati, la correlazione delle uscite dei sistemi può essere scritta come **convoluzione** delle **correlazioni** degli ingressi e delle risposte impulsive dei due sistemi:

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere : $\boxed{r_{y_1y_2}(\cdot) = r_{x_1x_2}(\cdot) * r_{h_1h_2}(\cdot)}$

Dimostrazione del legame ingresso uscita in termini di correlazione

proof: $r_{y_1y_2} = \langle y_1(n), y_2(n-m) \rangle = \left\langle \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) \cdot x_1(n-k_1), \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_2(k_2) \cdot x_2(n-\underset{\text{Ritardo}}{m}-k_2) \right\rangle$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) h_2^*(k_2) \langle x_1(n-k_1), x_2(n-m-k_2) \rangle$$

$n-k_1+k_1-m-k_2$

$\downarrow$

$n-k_1-(k_2+m-k_1)$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) h_2^*(k_2) \overbrace{\langle x_1(n-k_1), x_2\left[n-k_1-(k_2+m-k_1)\right] \rangle}^{r_{x_1x_2}(k_2+m-k_1)}$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1)\, h_2^*(k_2) \cdot r_{x_1x_2}(k_2+m-k_1)$$

$$= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_2^*(k_2) \underbrace{\left[\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) \cdot r_{x_1x_2}(k_2+m-k_1)\right]}_{h_1(m+k_2) * r_{x_1x_2}(m+k_2)}$$

$$h_2^*(-(k+m))$$

$$= k = m + k_2 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[h_1(k) * r_{x_1x_2}(k)\right] \cdot h_2^*(k-m)}$$

$$= h_1(m) * r_{x_1x_2}(m) + h_2^*(-m) = r_{x_1x_2}(m) * \underbrace{h_1(m) * h_2^*(-m)}_{r_{h_1h_2}(m)}$$

$$r_{y_1y_2} = r_{x_1x_2}(m) * r_{h_1h_2}(m)$$

Differenze tra correlazione e convoluzione

Ci sono principalmente 2 differenze:

1. Nella convoluzione non è presente il coniugato, mentre nella correlazione si.
2. Nella convoluzione il risultato viene ribaltato, mentre nella correlazione viene lasciato così com'è.

All'atto pratico, quindi, entrambe le operazioni vanno a far scorrere uno dei due segnali al di sopra dell'altro (solitamente il segnale più corto scorre su quello più lungo); la differenza risiede nel fatto che quando effettuiamo la correlazione, il secondo segnale non viene ribaltato.

Quindi, la convoluzione **serve per calcolare l'effetto di un segnale sull'altro**, mentre la correlazione **serve per misurare la similitudine tra i due segnali**.

Da questa sostanziale differenza capiamo che se il secondo segnale è simmetrico, **sia la convoluzione che la correlazione producono lo stesso risultato!**

$$r_{xy}^{(m)} = \langle x(n), y(n-m) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y^{*}(k-m)$$

nella conv non c'e' il coniugato

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot h(n-k)$$

Nella conv il segnale viene "ribaltato"

→ Per scrivere la corr come conv: $r_{xy}(m) = x(n) * y^{*}(n-m)$

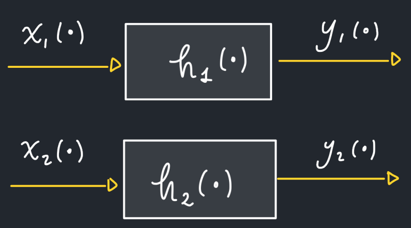
Casi particolari dei legami input-output

Questi casi particolari ci torneranno **molto utili** quando parleremo di legami I/O per densità spettrale.

Caso particolare 1: Autocorrelazione

Possiamo fare lo stesso ragionamento usando **l'autocorrelazione invece della correlazione tra due segnali**:

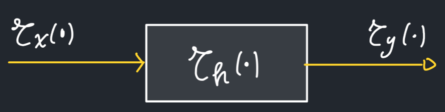
Esempio 1: Caso particolare



Dato i sistemi (stessi di prima) quali sono i legami tra le funzioni di autocorrelazione?

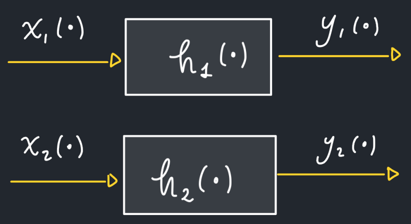
Relazione tra f di autocorrelazione

$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)$$



A cosa serve sapere questo?

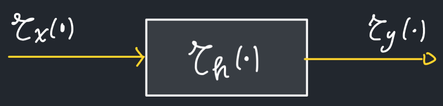
Esempio 1: Caso particolare



Dato i sistemi (stessi di prima) quali sono i legami tra le funzioni di autocorrelazione?

Relazione tra f di autocorrelazione

$$\boxed{r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)}$$



Caso particolare 2:

Caso particolare 3:

Esempi di applicazioni

Multipath

Un segnale può arrivare a destinazione seguendo diversi percorsi; a seconda del percorso seguito il segnale arriverà più o meno ritardato;
Il problema da risolvere è il seguente: siccome in ricezione abbiamo un unico segnale (sommatoria dei diversi segnali) come facciamo a capire il ritardo ed attenuazione del segnale?

Usiamo la **tecnica del calcolo della funzione di mutua correlazione** anche detta **cross correlation**:

Durante ogni trasmissione, viene prima trasmesso un **segnale pilota** avente un andamento noto; solo successivamente viene trasmesso il segnale "non noto".
Dopo la ricezione di entrambi i segnali, questi vengono **confrontati** (tramite la correlazione); questo permette di **capire il ritardo tra i due segnali** e quindi capire il ritardo del segnale non noto.

Processo della cross correlation

Ci scriviamo y(t) come **sommatoria** di diversi segnali in ingresso, ciascuno avente un'ampiezza ed un ritardo **non noti**:

$$\rightarrow \quad \tau_{yx}(\tau) = \langle y(t), x(t-\tau) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot x(t-t_i), x(t-\tau) \rangle$$

$N \qquad +\infty$

Esplicitiamo l'operazione di **correlazione**; ovviamente sia i coefficienti di attenuazione che la somma non vengono influenzati dall'integrale, quindi possiamo portarli fuori:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, x(t-t_i) \cdot x^*(t-\tau)\, dt = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_i) \cdot x^*(\underbrace{t-\tau}_{t-t_i+t_i-\tau})\, dt$$

Ci riscriviamo il ritardo aggiungendo e sottraendo $\mathbf{t_i}$, in modo da far comparire l'autocorrelazione:

Riconosciamo la f di autocorr.

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \tau_x(\tau - t_i)$$

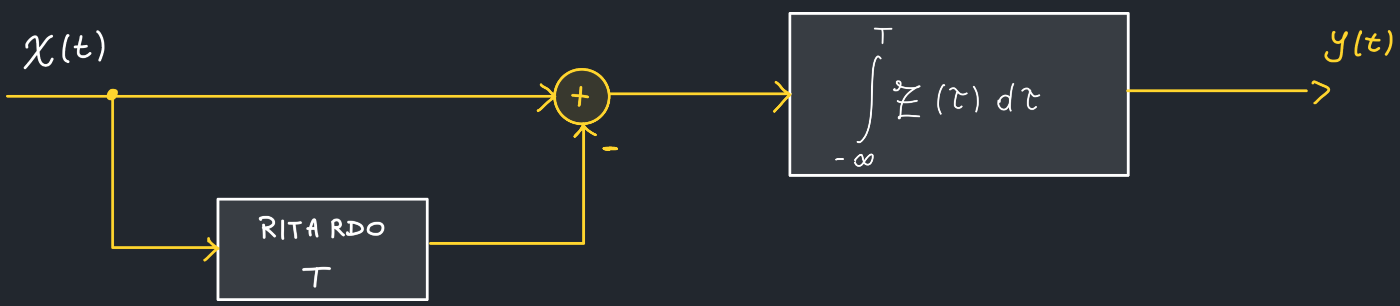
Possiamo quindi scriverci la correlazione tra x ed y come la somma dei prodotti delle diverse autocorrelazioni di x moltiplicate per l'ampiezza corrente.

Zero order Filtro interpolante

Più avanti nelle lezioni vedremo in cosa consiste **il processo di campionamento** di un segnale; essenzialmente un segnale **a tempo continuo** viene trasformato in una **serie di segnali delta** che vengono poi trasmessi;

Il filtro interpolante **ha il compito di ricostruire il segnale continuo a partire da un segnale campionato**.

Questo filtro **è composto da un certo ritardo T che viene sottratto al segnale**:



Ovvero: sottrale al segnale x(t) una sua versione ritardata; se proviamo a scrivere il tutto sottoforma di formule:

In formule...

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) - x(\tau - T)\, d\tau$$

Proviamo a calcolare l'uscita quando in ingresso al filtro abbiamo un segnale rettangolare:

Calcoliamo l'uscita dato $x(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right)$

centrata

durata

Step 1: troviamo l'impulse response del filtro

Per farlo ci basta applicare la definizione della risposta impulsiva:

> La risposta impulsiva di un sistema è la risposta del sistema quando viene sollecitato da un impulso.

Quindi ci basta porre x(t) = impulso di Dirac:

1) Impulse Response?

$h(t) =$ "La risposta del sys all'impulso" $\Rightarrow$ poniamo l'impulso al posto della x

$$\rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\delta(\tau) - \delta(\tau - T)\right) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)\, d\tau$$

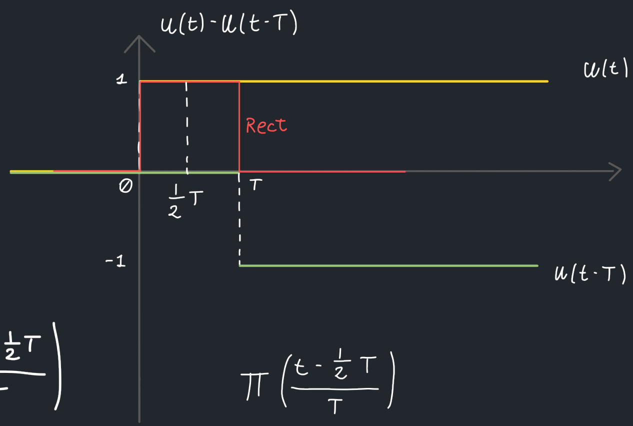
$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \rightarrow \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{otw} \end{cases} \rightarrow u(t)$

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)\, d\tau \rightarrow u(t-T)$

$$= u(t) - u(t-T)$$

$$= \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \quad h(t)$$

Step 2: Calcolare l'uscita come convoluzione tra x(t) ed h(t):

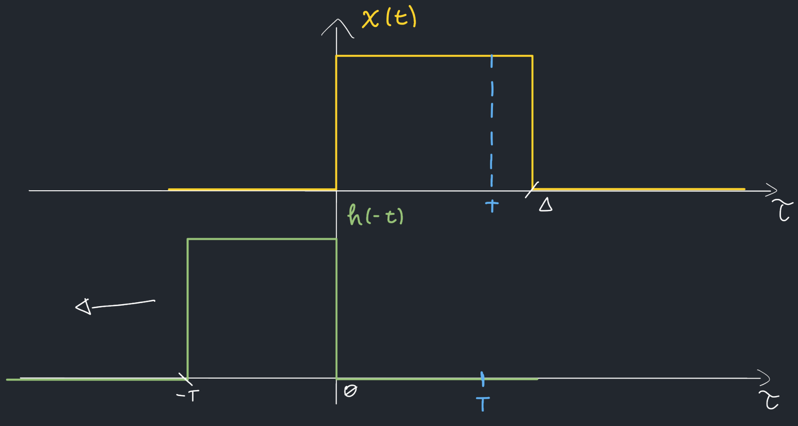


$\rightarrow$ Possiamo quindi calcolarci l'uscita come conuduzione di :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right) * \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

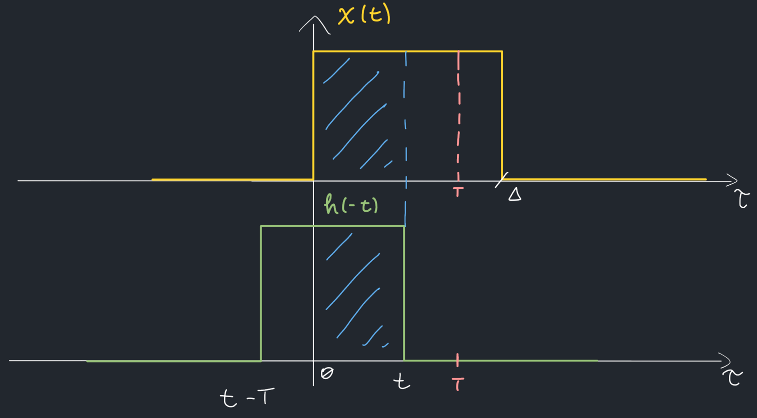
A questo punto ci basta calcolare la convoluzione suddividendo i vari casi come abbiamo imparato a fare nelle scorse lezioni:

- Caso 1:



Caso 1: $t \leq 0 \rightarrow y(t) = 0$

- Caso 2:

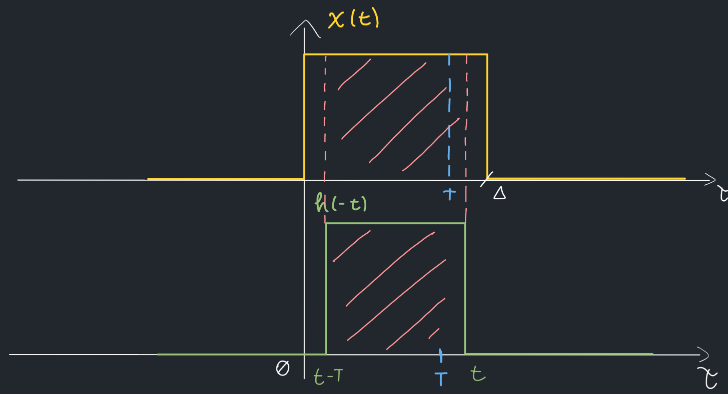


Caso 2 per $\emptyset < t < T$

$$\Rightarrow \int_{0}^{t} \Pi\left(\frac{\tau-\frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right)\cdot\Pi\left(\frac{\tau-\frac{1}{2}T}{T}\right)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} dt = dt = t$$

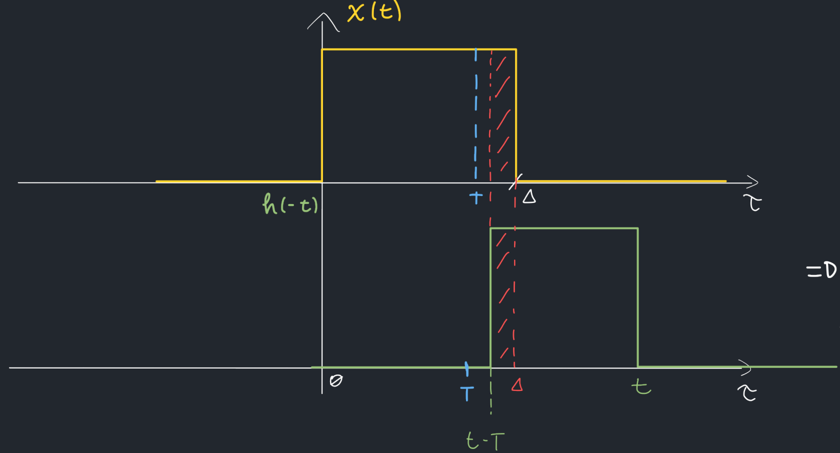
- Caso 3:



Caso 3: $\begin{cases} t > T \\ t < \Delta \end{cases} \Rightarrow T < t < \Delta$

$$\Rightarrow \int_{t-T}^{t} d\tau = \cancel{t} - \cancel{t} + T = T$$

- Caso 4:



Caso 4: $\begin{cases} t > \Delta \\ t-T < \Delta \end{cases} \begin{cases} t > \Delta \\ t < \Delta + T \end{cases}$

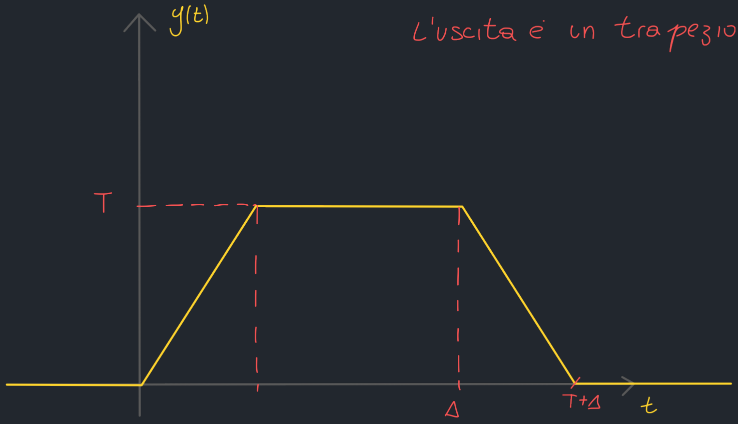
$\rightarrow \Delta < t < T + \Delta$

$$\Rightarrow \int_{t-T}^{\Delta} d\tau = \Delta - t + T$$

- Caso 5:

Caso 5) $t - T > \Delta \Rightarrow t > T + \Delta \Rightarrow \underline{y(t) = 0}$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < T \\ T & T \leq t < \Delta \\ \Delta - t + T & \Delta \leq t < T + \Delta \\ 0 & t \geq \Delta + T \end{cases}$$



Siccome i due segnali x(t) ed h(t) sono due segnali rettangolari la convoluzione tra i due sarà un trapezio; qualora avessero avuto la stessa durata, la convoluzione avrebbe prodotto un segnale triangolare.