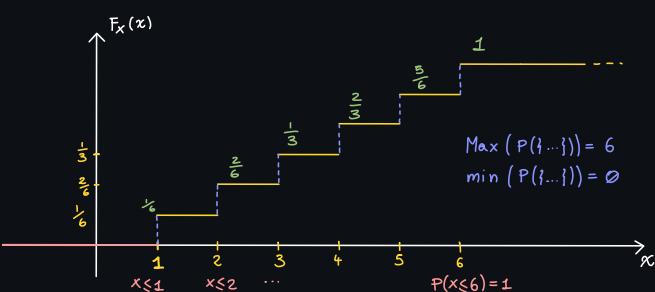


# **LE VARIABILI ALEATORIE**



# CDF - Funzione Di Distribuzione Cumulativa



- E' detta "Cumulativa" proprio perché i valori vengono SOMMATI tra loro.
- E' presente per TUTTE le variabili aleatorie

## PROPRIETA'

P<sub>2</sub> Non Decrescente  $\rightarrow$  per  $x_1 > x_2$   $F_X(x_2) \geq F(x_1)$

P<sub>1</sub>  $\begin{cases} \text{Per } x \rightarrow +\infty, & F_X(x) \rightarrow 1 \\ \text{Per } x \rightarrow -\infty, & F_X(x) \rightarrow 0 \end{cases}$

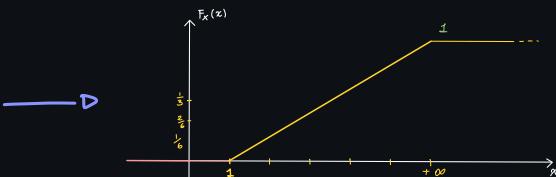
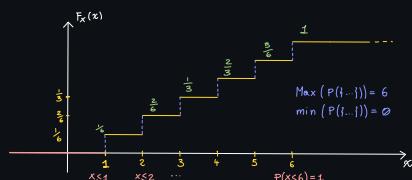
Dimostrate  
Dal grafico

P<sub>3</sub> CONTINUITA' A DESTRA  $\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

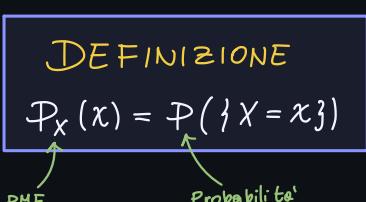
$h$  molto piccolo

## INOLTRE

- Ogni V.A. ha la sua CDF.
- La SOMMA di tutti i "Salti" della funzione e' pari ad 1
- Quando il NUMERO DI VALORI POSSIBILI AUMENTA, avvengono le seguenti cose:
  - L'INTERVALLO tra i vari salti DIMINUISCE
  - Il NUMERO DI SALTI diventa sempre più grande
  - I Salti Diventano sempre più piccoli

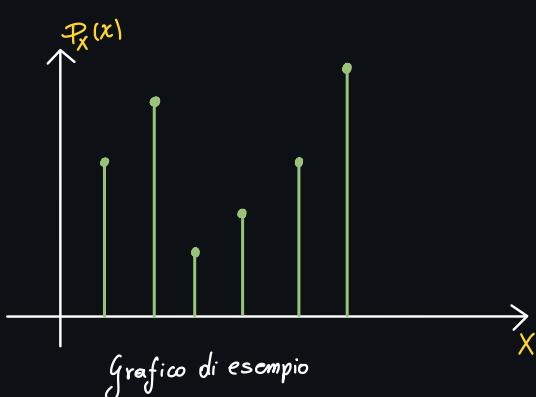


## Alternativa alla CDF: PMF - Mass Probability Function



"Probabilità che la variabile Aleatoria  $X$  sia proprio uguale a  $x$ "

- Proprietà'**
- Non Negativa:  $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_x$
  - Normalizzazione:  $\sum_{x \in \mathcal{X}_x} P_X(x) = 1$



**Ricavare la CDF dalla PMF**

$$F_X(x) = \sum_{\{u \in \mathcal{X}_x : u \leq x\}} P_X(u)$$

Subset di  $\mathcal{X}_x$  in modo da prendere solo gli elementi minori di  $x$

Summa delle sole PMF Più piccole della  $x$

# PDF - FUNZIONE DI DENSITA' DI PROBABILITA'

E' Definita come la DERIVATA DELLA CDF , e viene usata per le variabili CONTINUE.

## DEFINIZIONE

$$f_x : x \in \mathbb{R} \rightarrow f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

↑ Derivata  
Rispetto ad  
 $x$

$$\Rightarrow F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du$$

$x \leftarrow x$  è un estremo  
Integriamo  
Rispetto a  $u$

- LE DIMENSIONI FISICHE DELLA PDF SONO IL RECIPROCO DI QUELLE DELLA VARIABILE ALEATORIA

$$X \text{ (secondi)} \rightarrow \text{PDF}_x = f_x \text{ (secondi)}^{-1}$$

## PROPRIETA' COSTITUTIVE

$$P_1: \text{NON NEGATIVA: } f_x(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

$$P_2: \text{NORMALIZZAZIONE: } \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$$

$$P_3: \mathbb{P}(\{X \in \mathcal{A}\}) = \int_{\mathcal{A}} f_x(x) dx$$

$$P_4: \text{CDF: } F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du$$

# La funzione $Q(x)$

## DEFINIZIONE

La funzione  $Q(x)$  è per definizione la COMPLEMENTARE di una Gaussiana Standard

Il contrario della CDF

$$Q(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{P}(\{X_0 \geq x\}) = \mathbb{P}(\{X_0 > x\})$$

Con  $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$

In indifferente  
Se includiamo gli estremi o meno

## PROPRIETÀ

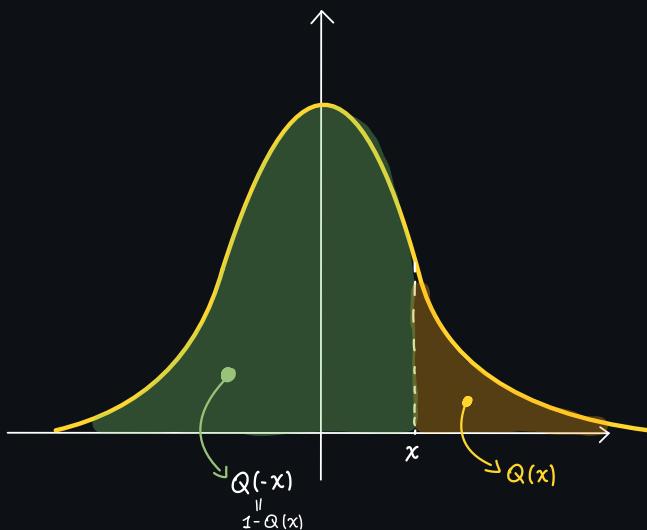
$P_1$ :  $Q(+\infty) = 0 \rightarrow$  Non include la funzione

$Q(-\infty) = 1 \rightarrow$  Include tutta la funzione

$P_2$ : Con  $x_1 < x_2 \Rightarrow Q(x_1) > Q(x_2)$  ovvero  $Q(x)$  è decrescente siccome  $Q(x) = \overline{F_x(x)}$

$P_3$ :  $Q(-x) = 1 - Q(x)$  ovvero  $Q(x)$  è simmetrica

Funzione Crescente



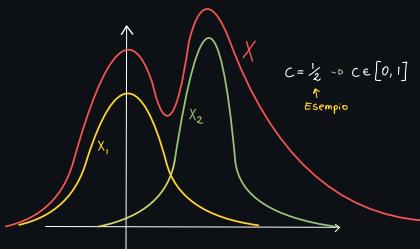
## USI DELLA Q-FUNCTION

- $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $\mathbb{P}(\{X > x\}) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $\mathbb{P}(\{x_1 < X < x_2\}) = Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} f_X(u) du$
- $\mathbb{P}(\{-x < X < x\}) = 1 - Q\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

## Variabili Aleatorie di tipo Mixture

E' possibile COMBINARE due PDF  $X_1$  e  $X_2$  con una combinazione del parametro  $c$ :

$$f_X(x) = c f_{X_1}(x) + (1-c) f_{X_2}(x) \quad \text{con } c \in [0, 1]$$



# Lista delle variabili Aleatorie

e delle loro CDF e PDF

## Variabile Aleatoria Bernulliana

E' una variabile estremamente semplice e si usa per modellare esiti POSITIVO / NEGATIVO

$$X \sim \mathcal{B}(1, p)$$

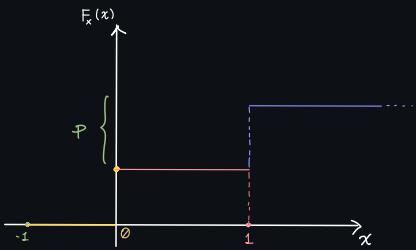
I parametri  $(1, p)$   
ci dicono che il valore 1  
ha prob.  $p$  di verificarsi

$$\text{Alfabeto } \chi_X = \{0, 1\}$$

$$\begin{cases} P(1) = P(X=1) = p \\ P(0) = P(X=0) = 1-p = q \end{cases}$$

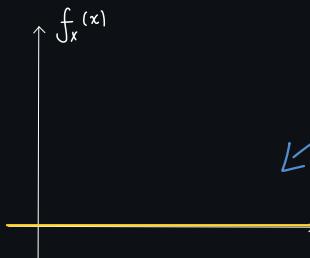
CDF

$$\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ q = 1-p & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$



PDF

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases} = 0 = \text{Const}$$



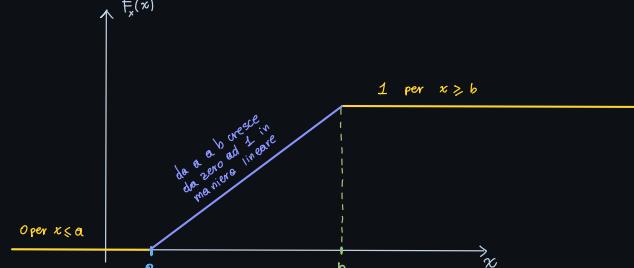
Con la V.a.  
Bernulliana, viene  
usa maggiormente  
la sua CDF

## Variabile Aleatoria UNIFORME

$$X \sim U(a, b) \rightarrow \text{Uniforme nell'intervalle } [a, b]$$

CDF

$$F_x = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{per } x > b \end{cases}$$



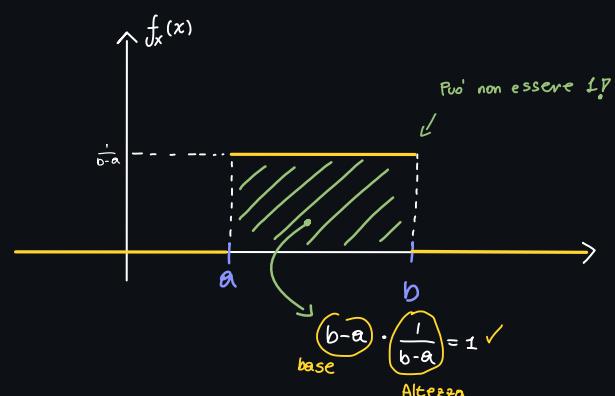
PDF

Deriviamo la CDF:

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$

- L'area della curva tra  $a$  e  $b$  è sempre 1

►  $\int_a^b f_x(x) dx = 1$



# Distribuzione di Poisson

Definita dalla PMF:  $P_X(K) = \frac{e^{-\alpha}}{K!} \cdot \frac{\alpha^K}{K!}$  con  $\alpha > 0$  e  $K \in \mathbb{N} : 0, 1, \dots$

Verificando le proprietà della PMF:  $\sum_{K=0}^{+\infty} P_X(K) = e^{-\alpha} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\alpha^K}{K!} = e^{-\alpha} \cdot e^{\alpha} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}} = 1$

Siccome  $PMF(x)=1$ , è una PMF

## Distribuzione Binomiale

E' una SUCCESSIONE DI variabili Aleatorie Bernoulliane:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow X \sim B(n, p)$$

↑                      ↑  
 Distribuzione        Variabile  
 Binomiale            Bernoulliana

ci dice la Probabilità  
 Con cui si verifica n

$$\Rightarrow \begin{aligned} P(n) &= P \\ P(\bar{n}) &= 1 - P \end{aligned}$$

ESEMPIO  $X \sim B(1, p) \Rightarrow \begin{aligned} P(1) &= p \\ P(0) &= 1 - p \end{aligned}$

## Variabile di Rayleigh

**DEFINIZIONE**

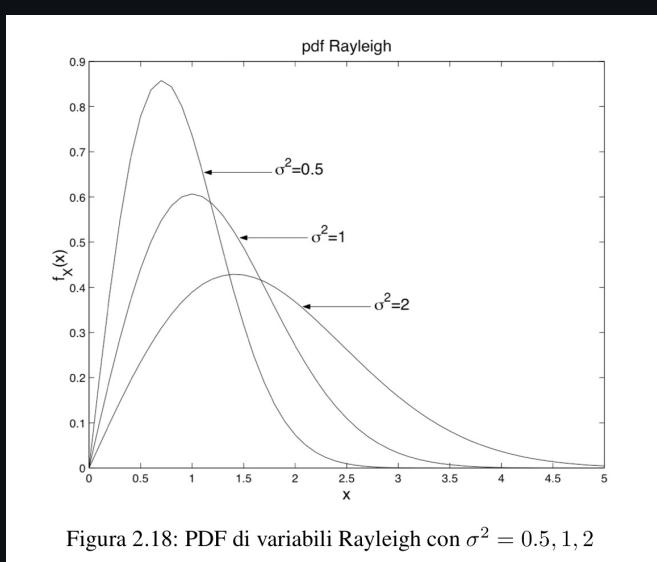
$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

PDF

Grazie allo "SCALINO"  $u(x)$  è definita solo per valori positivi della  $x$ , infatti:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

- Dipende inoltre dal parametro  $\sigma^2$ , che "dice" quanto la funzione dovrà essere "ALTA" o "LARGA":



**CDF**

$$F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}) \cdot u(x)$$

# Variabile Esponenziale

**DEFINIZIONE**

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)$$

Con  $\lambda > 0$

PDF

Si indica come

$$X \sim \xi(\lambda)$$

↑  
Parametro

"variabile di tipo esponenziale di parametro  $\lambda$ "



## PROPRIETÀ

- NON NEGATIVA  $f_X(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} P\{\lambda x \leq x\} &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \lambda \int_0^x e^{-\lambda u} du = \left[ -e^{-\lambda u} \right]_0^x \\ &= e^{-\lambda x} + 1 = \boxed{1 - e^{-\lambda x}} \end{aligned}$$

CDF

# Variabile Gaussiana Standard

## DEFINIZIONE

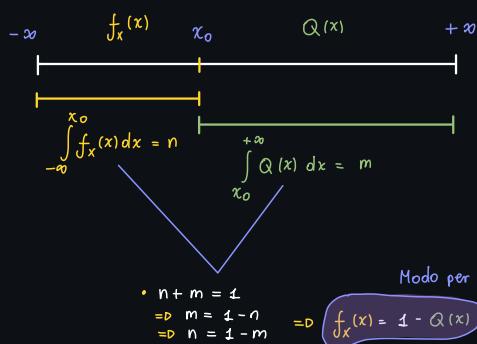
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PDF

• CDF =  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$

*Non esprimibile in forma chiusa*

=> Definiamo la funzione  $Q$  =>  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$



Modo per calcolare  $\int_{-\infty}^x f_X(x) dx$

$$f_X(x) = 1 - Q(x)$$

# Gaussiana Non Standard

Si ottiene dalla Gaussiana St. tramite una trasformazione ed è una FAMIGLIA DI GAUSSIANE

$$X = \sigma X_0 + \mu$$

↑ Non Standard      ↑ Standard  
 "Mu"                "Sigma quadro"

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Ricaviamo la CDF:

Siccome la CDF è definita da  $CDF = F_X(x) = P(\{X \leq x\})$ , allora ci basta scrivere:

$$\begin{aligned} CDF = F_X(x) = P(\{X \leq x\}) &\Rightarrow F_X(x) = P(\{\sigma X_0 + \mu \leq x\}) = P\left(\{X_0 \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\}\right) \\ &= F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \stackrel{\text{gaussiana Standard}}{\Rightarrow} = \text{Si calcola con la } Q(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

CDF di Una Gaussiana NON Standard

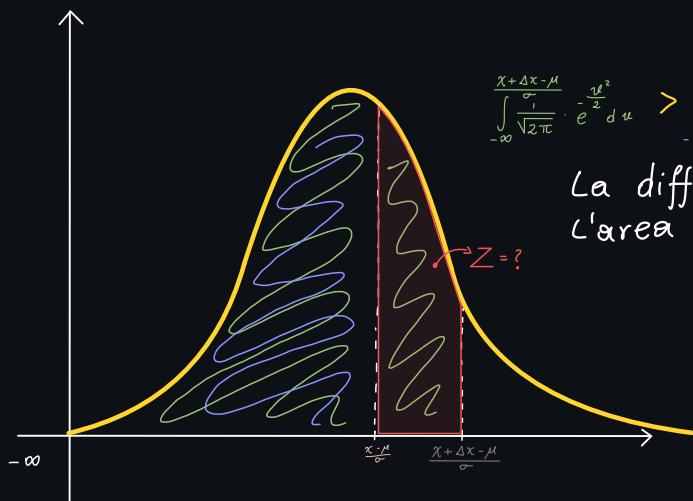
Ricaviamo la PDF

Siccome, per definizione  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_X(x) &= \frac{d}{dx} \left( 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right) = \stackrel{\text{La derivata corrisponde al limite del Rapporto incrementale}}{\uparrow} \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} \\ &Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}{\Delta x}$$



$$\int_{-\infty}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du > \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

La differenza tra i due integrali è semplicemente l'area sottesa alla curva ( $f_X(x)$ ) tra gli estremi

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \text{ e } \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}$$

$\Rightarrow$  Scriviamo il lim. del rapp incr come:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma} \right)}{\Delta x}$$

Dal Teorema della media integrale

$$= \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma} \right)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{x+\Delta x-\mu > x+\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

Non dipende più da  $\Delta x$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Siccome  $a < x_0 < b$   
Possiamo scegliere

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

PDF  
Di una Gaussiana  
Non Standard

# Media e Momenti di una variabile Aleatoria

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{Continua} \end{cases}$$

↑  
Numero Reale

Il numero reale (Media)  
 $\mathbb{E}$  è anche denotato  
con  $\mu_X$

Teorema Fondamentale per il calcolo della media

$$\mathbb{E}[g(x)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in \mathcal{X}_X} g(x_i) \cdot P_X(x_i) & \text{Discreta} \end{cases}$$

## MOMENTI DI ORDINE K

La media di una V.A. è anche nota come Momento di ordine 1

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x) dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in \mathcal{X}_X} x^k \cdot P_X(x_i) & \text{Discreta} \end{cases}$$

- Basta elevare alla k la x

## Momenti Centrali:

Si calcola la media di  $(x - \mu_X)^k$

Media della variabile aleatoria

$$\mathbb{E}[(x - \mu_X)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^k \cdot f_X(x) dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in \mathcal{X}_X} (x - \mu_X)^k \cdot P_X(x_i) & \text{Discreta} \end{cases}$$

- La media Statistica è un Momento Non centrato di ordine 1.

## VALORE QUADRATICO MEDIO · MG

$$\mathbb{E}[X^2] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in \mathcal{X}_X} x^2 \cdot P_X(x_i) & \text{Discreta} \end{cases}$$

- Semplicemente un momento di ordine 2 Non Centrato

## Root Mean Square - RMS - Valore efficace

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

- Semplicemente la Radice di un momento di ordine 2 Non Centrato

## VARIANZA

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(x - \mu_X)^2] = \sigma_X^2$$

↑ Media della variabile  
Varianza

- Ci dice quanto i valori si discostano quadraticamente da un valore specifico, come potrebbe essere quello della media  $\mu_X$

## DEVIAZIONE STANDARD / SCARTO QUADRATICO MEDIO

E' la radice della Varianza

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[(x - \mu_X)^2]}$$

- E' uno dei modi per esprimere la dispersione dei dati intorno ad un indice di posizione, che può essere proprio la media

# Media e varianza delle Varie Variabili Aleatorie

## Variabile Aleatoria Bernoulliana

$$X \sim \mathcal{B}(1, p)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ q = 1-p & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

### MEDIA

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x \cdot F_X(x) = \sum [\theta \cdot (1-p)] + 1 \cdot (p) = p$$

La "p" come argomento ci dice anche la media della variabile

### Varianza:

$$\begin{aligned} E[(X-p)^2] &= \sum_{x_i \in \mathcal{X}_X} (x_i - p)^2 \cdot P_X(x) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\ &= p^2 - p^3 + (1+p^2-2p) \cdot p = p^2 - p^3 + p + p^3 - 2p^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) = pq \quad | \quad q = 1-p \end{aligned}$$

## V.A. Esponenziale

### MEDIA

$$\begin{aligned} X = \int_0^\infty x \cdot f_X(x) dx &\rightarrow f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \quad \text{dove } u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \\ E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[ x \cdot \left( \int e^{-\lambda x} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \int e^{-\lambda x} dx \quad \text{PARTI} \\ &= \lambda \left[ -\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \quad t = -\lambda x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\lambda} dx \\ &= \left[ 0 \right] + \frac{1}{\lambda} \left[ e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda} \int e^t dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

### VARIANZA

$$\text{Calcolo dalla formula } \sigma^2 = \bar{x}^2 - \mu_x^2$$

Varianza      ↑      ↓ media  
                  Valore quad medio

### BOFH

$$\rightarrow \bar{x}^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ x^2 \cdot (-e^{-\lambda x}) \right]_0^{+\infty} + \int x e^{-\lambda x} dx \quad \text{PARTI}$$

## Variabile Uniforme

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

## MEDIA

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2} \text{ media} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

## Varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[\bar{X}^2] - E(X) \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Valore quadro} \\ \text{medio} \\ = ? \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{media} \\ = \frac{b+a}{2} \end{matrix} \\ &\Rightarrow E[\bar{X}^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} \end{matrix} \\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Valore quadratrico medio} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma^2 &= \bar{X}^2 - \mu^2 \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Varianza} \\ = (\text{dev std})^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \text{media}^2 \end{matrix} \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3(b^2 + 2ab + a^2)}{12} \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

VARIANZA

## Deriazione Standard

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{\sqrt{(b-a)^2}}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

scarto quadratrico  
Medio

# VARIABILE DI RAYLEIGH

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

MEDIA:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = x \int v dv - \int u dv = x \left( \int f_x(x) dx \right) - \int x df(x)$$

|  
PARTI  
 $u = x, dv = f(x)$

$$\begin{aligned} &= x \cdot \left[ F_x(x) \right]_0^{+\infty} - \int x df(x) = x \left[ F_x(x) - 0 \right] - \int x df(x) \\ &= x \cdot F_x(x) - \int_0^{+\infty} f_x(x) dx = x \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) - F_x(x) = x - \left[ 1 - F_x(x) \right]_0^{+\infty} = \\ &= x - (1 - 1) = \underset{\substack{\text{pongo} \\ x = \sigma \sqrt{2y}}}{\sigma \int \sqrt{2y} dy} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$F_x(x) - 0$   
per  $x \rightarrow \infty$   
 $F_x(x) \rightarrow 1$

VARIANZA

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(x - \mu_x)^2] &= \int_0^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx = \int x^2 + \frac{\sigma^2 \pi}{2} - 2x\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} (4 - \pi) \sigma^2 \end{aligned}$$

Tantissimi passaggi dopo...

# GAUSSIANA STANDARD

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

MEDIA

$$\Rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \textcircled{0}$$

La funzione  
è simmetrica  
all'origine

## VARIANZA

$$\Rightarrow E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - 0)^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

Siccome la funzione è simmetrica all'asse delle ordinate possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \rightarrow \text{pongo } t = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2t} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{1-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Il differenziale va sempre calcolato su  $x$  e non su  $\frac{x^2}{2}, x^3, \dots$

## GAMMA DI EULERO

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} t^{k-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}+1-1} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt$$

$$t^{\frac{1}{2}} = \cancel{t}^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \Rightarrow k = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{\sqrt{\pi}} = \textcircled{1}$$

Godet delle proprietà:

$$\bullet \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

$$\bullet \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

# GAUSSIANA NON STANDARD

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

## MEDIA

$$\mathbb{E}[\sigma X_0 + \mu] = (\underbrace{\sigma}_{1} \underbrace{\mathbb{E}[X_0]}_{0}) + \mu = \underbrace{\mu_x}_{\text{Media}}$$

Esprimiamo la g.n.s.  
come combinazione di  
quella standard

## VARIANZA

$$\mathbb{E}[(x - \mu)^2] = \mathbb{E} = \left[ (\sigma X_0 + \cancel{\mu} - \mu)^2 \right] = \mathbb{E}[(\sigma X_0)^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[X_0^2] = \underbrace{\sigma^2}_{\text{Varianza}}$$

## Formule Utili esercizi

### DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

• PDF  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)$  • CDF  $F(x) = \int_0^x f_X(v) dv = 1 - e^{-\lambda x}$

• Rate / Ratio /  $\lambda = \frac{1}{\mu_X} = \frac{1}{\text{media}}$

### MEDIA DI UNA PDF DI VARIABILI CONGIUNTE

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} A(x,y) & \text{per } x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f_{xy}(x,y) dx dy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} A(f_x(x), f_y(y)) dx dy$$

$$= A \int_{x_0}^{x_1} f_x(x) \cdot \int_{y_0}^{y_1} f_y(y) dy dx$$

L'obiettivo è separare  $x$  ed  $y$  e risolvere come un integrale doppio

Dimostrare che due v.a sono indipendenti:

$$\mathbb{E}[f_{xy}(x,y)] = \mathbb{E}[f_x(x)] \cdot \mathbb{E}[f_y(y)] \Rightarrow \text{INDIPENDENTI}$$

↑  
Media della congiunta

↑  
Medie delle Marginali