Sistemi LTI - Linear Time Invariant

Un sistema si dice LTI quando rispetta sia la **proprietà di linearità** che la **proprietà di tempo invarianza**;

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots + a_k x_k(n)$$

$$\downarrow$$

$$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + \dots + a_k y_k(n)$$

Impulse Response e Convoluzione

Per arrivare alla definizione di convoluzione dobbiamo seguire 3 passaggi:

Passaggio 1: Proprietà di Riproducibilità

Abbiamo visto nelle proprietà della delta (nella lezione 3.02 - Segnali Ordinari) la **proprietà di riproducibilità (time shifting) della delta:**

> La proprietà di riproducibilità della delta ci dice che se moltiplichiamo una delta shiftata temporalmente per un segnale x(t), avremo come risultato il segnale x(t) valutato nel time shift della delta, moltiplicato per la delta stessa.

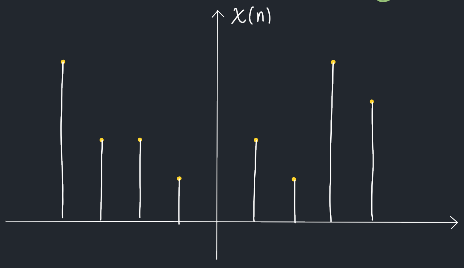
Se sfruttiamo questa proprietà possiamo decomporre tutto il segnale in entrata, facendo una sommatoria:

I Passaggio

Decompongo l'input con la proprietà:

Proprietà di riproducibilità: $x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(K)\,\delta(n-K)$

PUNTO @



Passaggio 2: Impulse Response

L'impulse response è la risposta di un sistema LTI quando in input viene fornito un segnale di tipo delta, ovvero un impulso di Dirac:

Siccome abbiamo a che fare con dei sistemi LTI, questi rispetteranno le proprietà di **linearità e tempo invarianza:**

Siccome questi sistemi sono — Lineari

— Tempo invarianti

Tempo invarianza

$\Rightarrow \boxed{\delta(n-K) \rightarrow h(n-K)}$

Passaggio 3: Convoluzione a tempo discreto

Come ultimo passaggio ci basta sostituire il nostro nuovo **impulse response** alla delta nella proprietà di riproducibilità, in modo da ottenere:

III Passaggio: Applichiamo la prop. di linearità accennata al punto a del I pass.

$$\Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Applicando la linearità, la tempo I varianza e scrivendo la nostra sequenza come una sovrapposizione di delta, abbiamo trovato questa relazione.

OPERAZIONE DI CONVOLUZIONE

$x(n) * h(n) \longleftarrow$ "x convoluto ad h"

Questi sistemi LTI sono molto potenti, perchè dal punto di vista matematico, **dato un qualsiasi ingresso**, se conosciamo la risposta impulsiva del sistema, **mediante l'operazione di convoluzione riusciamo a prevedere l'uscita del sistema**.

Possiamo quindi scrivere l'uscita di un sistema LTI come convoluzione dell'ingresso al sistema, ed il suo impulse response.

Capiamo quindi che l'operazione di convoluzione è molto simile all'operazione di **correlazione**, dove il primo segnale resta fermo ed il secondo viene traslato al di sopra del primo; in questo caso avviene la stessa cosa:

Nella convoluzione il segnale in input resta fermo mentre l'impulse response trasla al di sopra dell'input.

Convoluzione a tempo continuo

La convoluzione a tempo continuo è la medesima operazione ma con l'utilizzo degli integrali invece che della sommatoria:

Convduzione Continua

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \, dt$$

scriviamo la risposta del sistema ad uno delta:

$$\delta(t) \rightarrow Sys \rightarrow h(t)$$

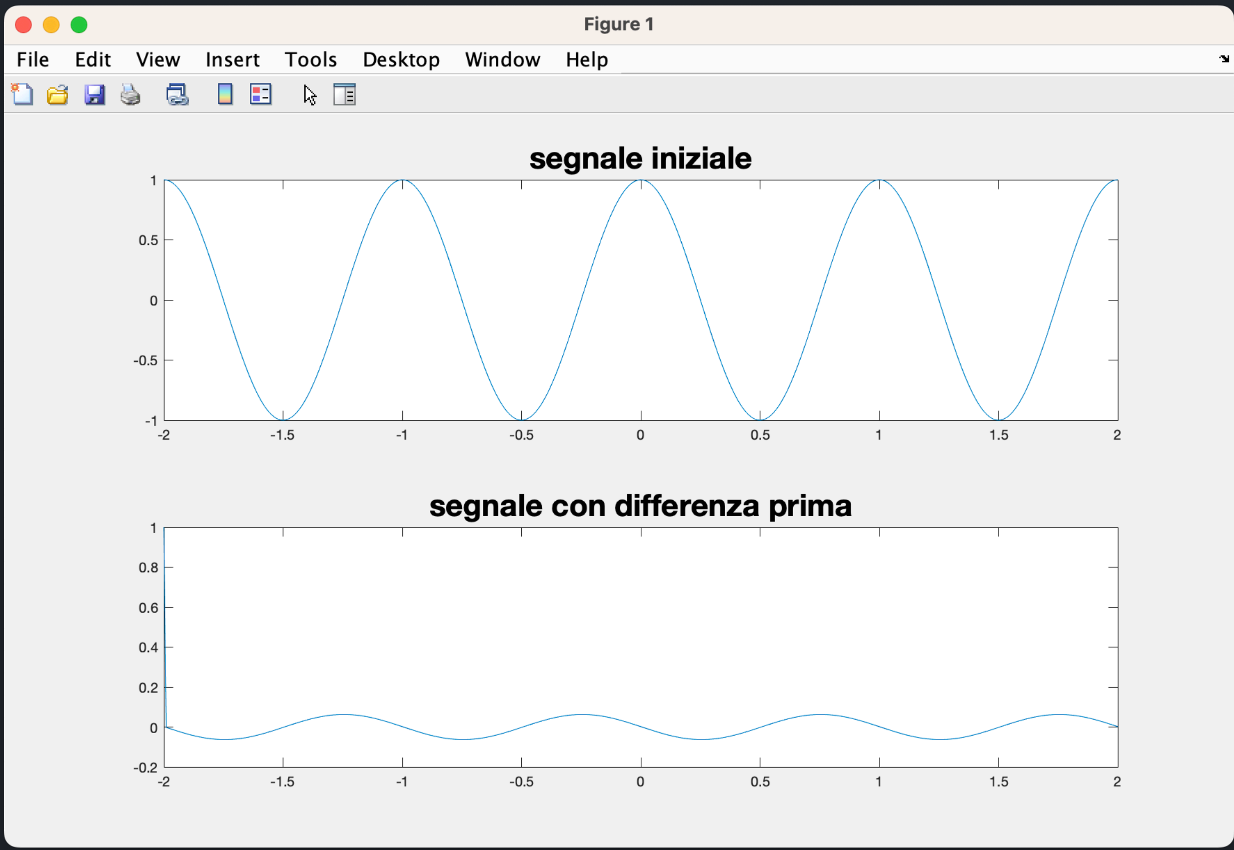
$\Rightarrow$ Possiamo scrivere il segnale di uscita dal sistema come:

$$\underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \, d\tau}_{\text{Convoluzione tra } x \text{ e } h} = \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{Convoluzione continua}}$$

Esempio 1 per la convoluzione: sistema differenza prima

Conosciamo il legame ingresso/uscita di alcuni sistemi, come ad esempio il sistema differenza prima.

Il sistema differenza prima non fa altro che sottrarre all'elemento corrente di un segnale, il suo elemento precedente.



$$y(n) = \underbrace{x(n) - x(n-1)}$$

Diff ra campione corrente
e compione prec

Prima di procedere con l'esempio, però, dobbiamo assicurarci che il sistema sia LTI:

Il sistema differenza prima è LTI?

Per prima cosa verifichiamo la **linearità** del sistema:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \leftarrow \text{Sistema differenza prima}$$

pongo $x(n) = a\,x(n) + b\,x(n) \Rightarrow$ Sostituisco in $y(n)$

$$\Rightarrow y(n) = a\,x(n) + b\,x(n) - [a\,x(n-1) + b\,x(n-1)]$$
$$= a\,x(n) + b\,x(n) - a\,x(n-1) - b\,x(n-1)$$
$$= a\underbrace{[x(n) - x(n-1)]}_{y_1} + b\underbrace{[x(n) - x(n-1)]}_{y_2}$$

$$\Rightarrow y(n) = a\,y_1(n) + b\,y_2(n) \leftarrow \text{Lineare}$$

Dopo aver dimostrato che il sistema è lineare, dobbiamo dimostrare che è anche **tempo invariante**:

1) pongo $x(n) = x(n-m)$ ← Ritardo $\Rightarrow y(n) = x(n-m) - x(n-m-1)$

2) $y(n-m) = x(n-m) - x(n-m-1)$ ← Pongo $n = n-m$

① = ② ⇒ Sys T.I.

Per dimostrare che un sistema è tempo invariante ci basta effettuare due sostituzioni e calcolare l'uscita del sistema:

1. Sostituiamo al segnale di ingresso un segnale ritardato di ritardo m.
   Calcoliamo l'uscita y(n).
2. Sostituiamo **all'uscita** y(n) **l'uscita ritardata y(n-m)** .
   Calcoliamo l'uscita y(n-m).

Se le due uscite sono uguali, allora il sistema è tempo invariante.

Calcoliamo la risposta impulsiva del sistema differenza prima

Torniamo al legame ingresso - uscita del sistema differenza prima; per definizione la risposta impulsiva di un sistema è la risposta del sistema quando viene sollecitato da un impulso:

→ Risposta impulsiva?

Per definizione la R.I.: Invece dell'ingresso qualsiasi, poniamo una $\delta(t)$, ed in out avremo una $h(t)$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \rightarrow y(t)$$
$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

ottieniamo: $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

Ci basta quindi sostituire all'ingresso del sistema una delta per ottenere la risposta impulsiva del sistema; se effettuiamo la convoluzione tra un segnale input qualsiasi e la risposta inpulsiva, otterremo l'output del sistema.

Output del sistema differenza prima: gradino unitario discreto in input

Dopo aver trovato la risposta impulsiva di un sistema, riusciamo a prevedere l'output del sistema dato in input un segnale qualsiasi; ci basta effettuare la convoluzione tra un input scelto da noi (in questo caso un gradino unitario a tempo discreto):

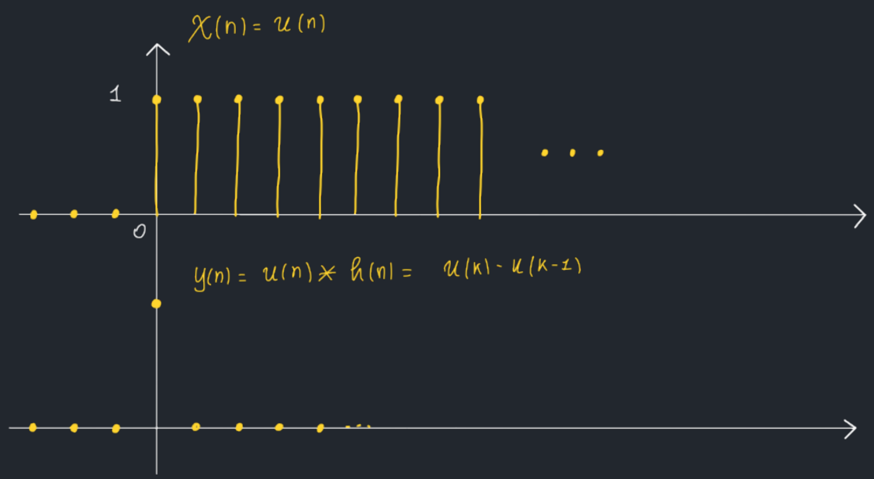
ES: $x[n] = u(n)$ $\qquad\qquad$ $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & otw. \end{cases}$

$$y[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n) \cdot [\delta(n-k) - \delta(n-k-1)]$$

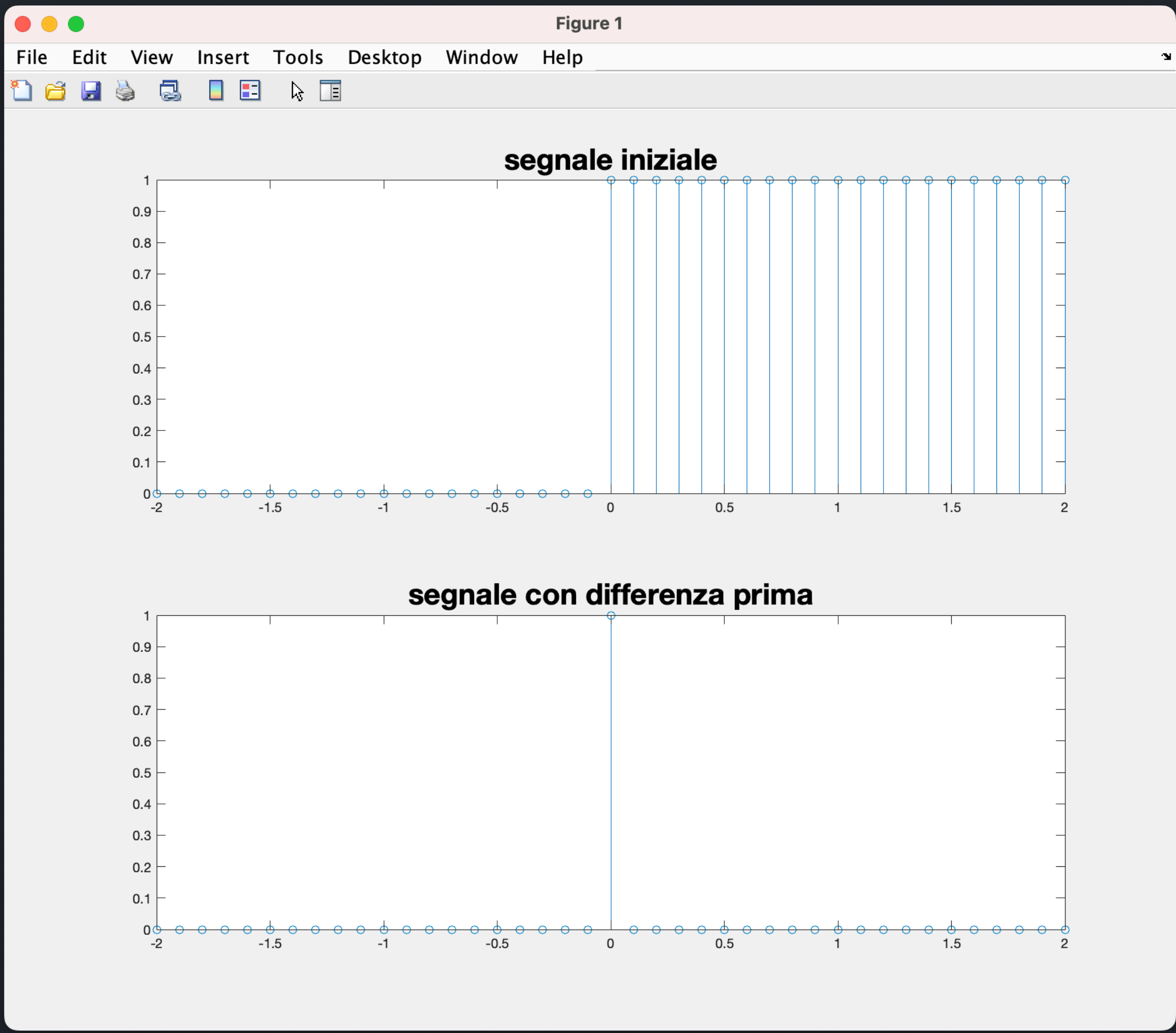
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n) \cdot \delta(n-k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n)\, \delta(n-k-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k) - \sum_{k=0}^{+\infty} u(k-1)$$

$$\begin{array}{lccccc} & k=-1 & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \\ \text{Poniamo} \quad n = [& -\frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & 1, & \frac{3}{2} \,] \end{array}$$

$$y[n] = u(k) - u(k-1) = [\,(u(0) - u(-\tfrac{1}{2})),\ (u(\tfrac{1}{2}) - u(0)),\ (u(1) - u(\tfrac{1}{2}))\ \ldots\,]$$
$$= [\,1, 0, 0, \ldots, 0\,]$$



In questo caso la convoluzione ci ha portati al risultato y[n] = u[k] - u[k-1]; il risultato grafico è di semplice interpretazione: per definizione gradino unitario ha ampiezza costante 1, quindi solo il primo valore sarà diverso da zero:



Output del sistema differenza prima: finestra discreta in input

Possiamo fare lo stesso ragionamento ponendo in input il segnale finestra discreta:

ES: $x(t) = R_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otw} \end{cases}$

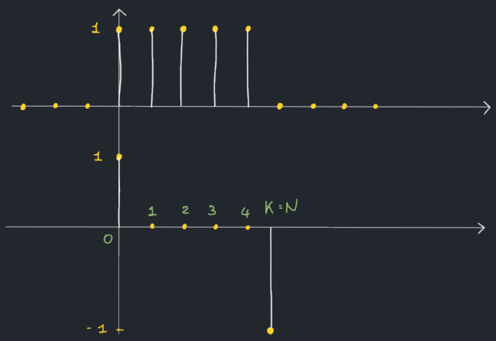
$$\Rightarrow h[n] = R_N[n] * h[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} R_N[n] \cdot [\delta(n-K) - \delta(n-K-1)]$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} R_N(n) \cdot \delta(n-K) - R_N(n) \cdot \delta(n-K-1) = \underbrace{\sum_{K=0}^{+\infty} R_N[K] - R_N[K-1]}_{y[n]}$$

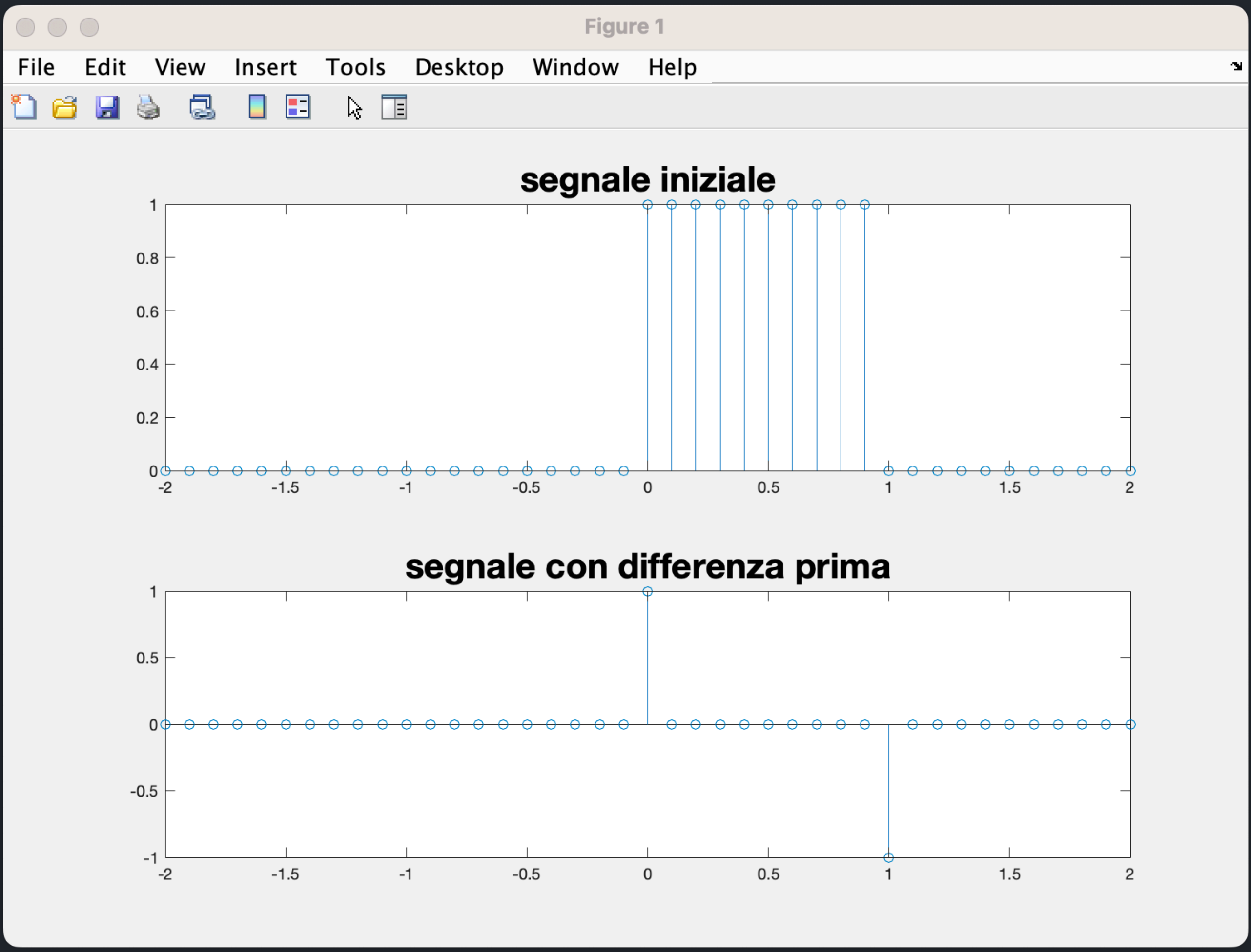
Poniamo $n = [\underset{K=-1}{-\tfrac{1}{2}}, \underset{K=0}{0}, \underset{K=1}{\tfrac{1}{2}}, \underset{K=2}{1}, \underset{K=3}{\tfrac{3}{2}}]$

Asse del tempo

$$\Rightarrow y[n] = [(1-0), (1-1), (1-1), \dots, (0-1), (0-0), \dots] = [1, 0, 0, \dots, -1, 0, \dots]$$



Anche in questo caso possiamo verificare con matlab:



> Il segnale negativo si verifica quando k=N

Esempi di Convoluzione tra segnali

Convoluzione tra un gradino ed una sequenza esponenziale monolatera