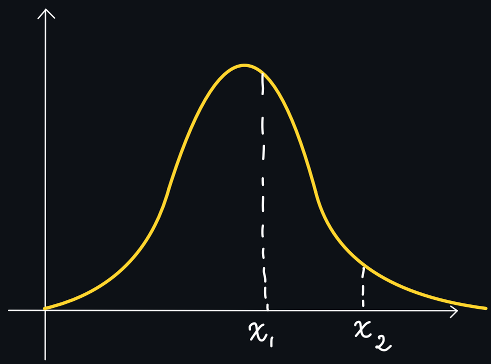
MEDIA STATISTICA

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx & \text{Variabili Continue} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x\, P_X(x) & \text{Variabili Discrete} \end{cases}$$

Expectation

"Valore Atteso"



→ x_1 "pesa" di piu' di x_2

Media Aritmetica

$I = \{$"insieme di n numeri"$\}$

→ $M_S = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{\| I \|}$

Cardinalita' di I

MEDIA STATISTICA

$I = \{$"insieme di n numeri"$\}$

$$M_A = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot P_X(a_i)$$

Probabilita' che a_i assuma proprio quel valore → Se equiprobabile $P_X(a) = \dfrac{1}{\| I \|}$ costante

Nel caso di entries equiprobabili

→ $\dfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i$

Variabile Bernoulli

$X \sim B(1, P)$ è la classica variabile costruita per gli esempi di Lancio Della Moneta

$\mathcal{X}_X = \{\overset{T}{0}, \overset{C}{1}\}$ → Modella il Successo o insuccesso di qualcosa

$q = 1 - P$

Assume valore 1 con Probabilita' P

Media →

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x_i \cdot P_X(x)$$

$$= 0 \cdot q + 1 \cdot P = P$$

Variabile Esponenziale

$$X \sim \mathcal{E}_X(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\lambda \cdot e^{-\lambda x} u(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x\,\lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \Big[x\cdot(-e^{-\lambda x})\Big]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

Si restringe per via del gradino $u(x)$

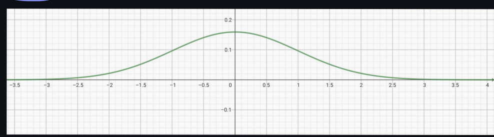
PARTI

$$= [0\cdot 0] + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{0}^{+\infty} = \left[0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\cdot 1\right)\right] = \frac{1}{\lambda}$$

$t = e^{-\lambda x} \Rightarrow dx = \frac{1}{-\lambda e^{-\lambda x}}\,dt$

PARI $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \text{F. Disp} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Media della Gaussiana Standard

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow f_{X_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\,dx = 0$$

Media della Gaussiana Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma) \Rightarrow f_X(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma X_0 + \mu] = \sigma\,\mathbb{E}[X_0] + \mu = \mu$$

$\mathbb{E}[X_0] \to 0$

Media di una Gaussiana Standard

Portiamo fuori dalla media le costanti μ e σ visto che non la influenzano

ES:
- $\int c \cdot x\,dx = c \int x\,dx$
- $\sum c \cdot x = c \cdot \sum x$

- $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ STANDARD
- $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ NON STANDARD

$$\Rightarrow \boxed{X = X_0 \cdot \sigma + \mu}$$

Variabile Aleatoria Binomiale - Media

$X \sim B(n,p)$ — Modella il conteggio dei successi di un esperimento

Possiamo vederla come... $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = P$

$X \sim B(1,p)$ con $\mathcal{X}_x = \{0,1\}$, con $0 \to 1-p$, $1 \to p$

Variabile Bernoulliana

Quindi: $\mathbb{E} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{p} = n \cdot p$

Teorema Fondamentale

$$\mathbb{E}[g(x)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & \text{Continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_x} g(x) \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

Esempio

$y = g(X)$

dove $g(X) = \cos(X)$

$X \sim U[0, 2\pi]$ ← V. Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ 0 & \text{per } x > b \\ \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \end{cases}$$

$$\to \mathbb{E}[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\sin(x)\right]_0^{2\pi}$$

Momento di X di ordine k

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx & \text{Continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_x} x^k \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

Momenti Centrati

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^k\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^k \cdot f_X(x)\, dx \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_x} (x-\mu_x)^k \cdot P_X(x) \end{cases}$$

Momenti di Ordine II

- Valore Quadratico Medio (MS)

Detto Anche VALORE MS → Indica **Mean** **Square**
"medio" "quadratico"

E' la media di x^2

$$\mathbb{E}[X^2] = \overline{X^2} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx & \text{Continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x^2 \cdot p_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

Momento di ordine 2 Non Centrato

Indicata Anche in questo Modo

- Valore RMS - Root Mean Square

A volte invece di usare il valore MS si usa il **RMS**, detto anche VALORE EFFICACE

$$\rightarrow X_{rms} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

- VARIANZA

→ Partiamo con un ESEMPIO: l'altezza media di una classe ci dice solo una "parte" di come è composta la classe. Ma se ci viene detta la media "Più o meno 10 cm" Sappiamo Anche "COME VARIA" l'altezza media della classe.

→ Momento Centrale di II Ordine → $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \sigma_X^2 = (\text{Dev. Standard})^2$

Si sottrae la MEDIA

VARIANZA

- DEVIAZIONE STANDARD

Si definisce D.S. la RADICE della Varianza

$$\rightarrow \sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]}$$

→ "sigma" (σ) non è usato "a caso"! Infatti viene anche usato come parametro nelle Gaussiane non Standard.

Infatti $\underbrace{aX+b}$ per una qualsiasi trasformazione affine di una V.A. $aX+b$ v.a. → $Var(aX+b) = a^2 \cdot \sigma_X^2$

Dimostrazione

$$Var(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b-\mu_{aX+b})^2] = \mathbb{E}\left[\{(aX+b)-\mathbb{E}[aX+b]\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\{aX+\cancel{b} - \underbrace{a\mathbb{E}[X]-\cancel{b}}_{\text{Per la linearita' della Media}}\}^2\right] = \mathbb{E}\left[\{a(X-\mathbb{E}[X])\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}[a^2(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2 \underbrace{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]}_{\text{VARIANZA}} = a^2\sigma^2$$

🚩 1:04:25

Gaussiana

$$X = \sigma X_0 + \mu \;\rightarrow\; Var(X) = \underset{a^2}{\sigma^2} \cdot \underset{?}{Var[X_0]}$$

$$\rightarrow Var[X_0] = \mathbb{E}\left[(X-\underset{0}{\mu_x})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2\,dx$$

$X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ — media, guess what this is...

Poniamo

$$= \frac{x^2}{2} = t \rightarrow x^2 = 2t \rightarrow x = \pm\sqrt{2t} \rightarrow \underset{\text{La funzione è pari}}{} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{t}}$$

$dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\,dt$$

$1-\frac{1}{2}$

Gamma di Eulero:

$$\Gamma(K) = \int_0^{+\infty} t^{K-1} \cdot e^{-t}\,dt \;\rightarrow\; \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}\cancel{+1-1}} \cdot e^{-t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}$$

$1-\frac{1}{2}$

Gode delle proprietà:
- $\Gamma(K+1) = K\,\Gamma(K)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Quindi... pongo $K = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{1-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \underset{\frac{1}{2}}{K} \cdot \underset{\sqrt{\pi}}{\Gamma(K)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} = 1$$

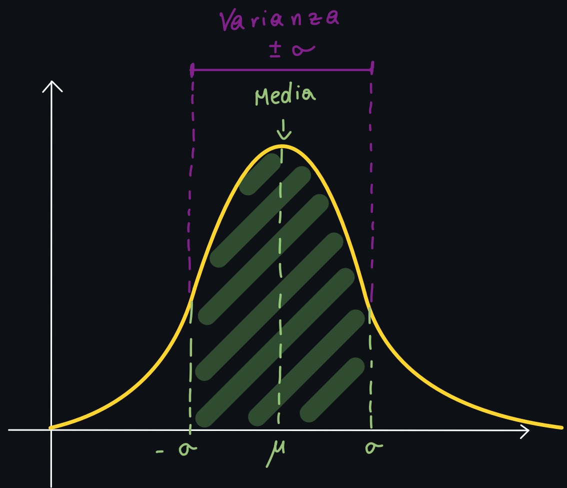
Mettendo tutto assieme e sfruttando le proprietà

$$\Rightarrow \underset{\text{gaussiana Standard}}{Var[X_0]} = Var\left[(X \sim \mathcal{N}(0,1))\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] = 1$$

Torniamo alla Varianza della gaussiana Non Standard

$$Var[X] = Var(\sigma X_0 + \mu) = \sigma^2 \cdot Var[X + \underset{0}{\mu}] = \sigma^2 \underset{1}{\boxed{Var[X_0]}} = \sigma^2$$

$$X \sim \mathcal{N}(\underset{\text{Media}}{\mu}, \underset{\text{Varianza}}{\sigma^2})$$



Valore quadratico medio (MS), Varianza e Media sono legate tra loro

Definizione Di Varianza

$$\underbrace{E\left[(X-\mu_x)^2\right]}_{\sigma^2 \triangleq \text{Varianza}} = E\left[x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2\right] = \underbrace{\boxed{E[x^2]}}_{MS} \underbrace{\boxed{-2\mu_x E[x]}}_{-2\mu_x^2} + \mu_x^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$$

Costanti

$$\Rightarrow \sigma^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$$

$$\rightarrow \overline{X}^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

$$\rightarrow \mu_x^2 = \overline{X}^2 - \sigma^2$$

Raccolta di Esercizi

- Momenti di una V.A. Bernoulliana

$$X \sim B(1,P) \rightarrow A_x = \{0,1\} < \begin{matrix} 0 = 1-P = q \\ 1 = P \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum x_i \cdot P_x(x)$$

$$= 0\cdot(1-P) + 1\cdot(P) = P$$

Media μ_x

Momenti Non centrale di ordine K

$$\rightarrow E[X^K] = \sum_{x_i \in A_x} x_i^K \cdot P_x(x) = 0^K\cdot(1-P) + 1^K P = P$$

Sempre P

- I Momenti di qualsiasi ordine, per la var di Bernoulli Sono sempre uguali a P

E la Varianza?

$$Var(X) = E\left[(X-\mu_x)^2\right] =$$

Siccome abbiamo appena dimostrato che: $\sigma^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$

$=$ E conosciamo $E[x^K] = P$ (per le Bernoulliane)

$$\Rightarrow \sigma^2 = P - \mu_x^2 = P - P^2 = P\cdot(1-P)$$

$$= P\cdot q$$

Momenti CENTRALI Di una Gaussiana

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Momento di ordine K $\rightarrow$

$$E\left[(X-\mu_x)^K\right] = E\left[(\sigma X_0 + \cancel{\mu} - \cancel{\mu})^K\right] = E\left[(\sigma X_0)^K\right] = \sigma^K E\left[X_0^K\right]$$

$X = \sigma X_0 + \mu$

σ^2 = Varianza

Media

Come Dimostrare $E[x^K] = \sigma^K (K-1)!!$

$$E\left[X_0^K\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} K \text{ DISP} = 0 \\ K \text{ pari} = \text{Funzioni } \Gamma \text{ di Eulero} = (K-1)!! = \underbrace{(1\ 3\cdot 5)}_{\text{Prodotto degli interi Dispari}} \end{cases}$$

Analogo al caso prec

Valore dell'integrale

Momenti di una ESPONENZIALE

$X = \mathcal{E}_X(1) \longrightarrow F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot u(x)$

$\lambda = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^k] = \sum_{x_i \in A_x} x^k \cdot (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot e^{-x}\, dx$$

Momento di ordine K Non Centrale

PARTI

$$= \int_0^{+\infty} x^k \cdot \frac{d}{dx}(-e^{-x})\, dx = \left[-x^k e^{-x}\right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x} = \Gamma(K)$$

$\mathbb{E}[X^{k-1}]$

Gamma di Eulero

$$= K\, \mathbb{E}(X^{k-1}) \longrightarrow$$

Ricorsivo

se calcoliamo $\mathbb{E}[X^{k-1}]$ otteniamo $\rightarrow (k-1) \cdot \mathbb{E}(X^{k-2})$

$\hookrightarrow$ e così via ...

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)\, dx = K\, \mathbb{E}[X^{k-1}] = K!$$