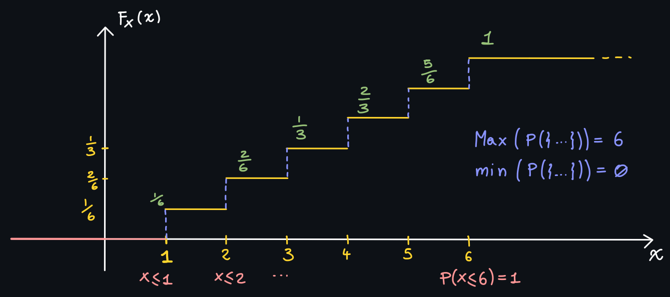
Le variabili aleatorie

CDF - Funzione Di Distribuzione Cumulativa



- E' Detta "Cumulativa" proprio perchè i valori vengono SOMMATI tra loro.
- E' presente per TUTTE le variabili aleatorie

DEFINIZIONE

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

"E' la probabilità che la var Aleatoria X assuma un valore MINORE o UGUALE ad x"

PROPRIETA'

P_2 Non Decrescente $\rightarrow$ per $x_1 > x_2$ $\quad F_x(x_2) \geq F(x_1)$

P_1 $\begin{cases} \text{Per} \quad x \rightarrow +\infty, \quad F_X(x) \rightarrow 1 \\ \text{Per} \quad x \rightarrow -\infty, \quad F_X(x) \rightarrow 0 \end{cases}$ Dimostrate Dal grafico

P_3 CONTINUITA' A DESTRA $\rightarrow$ $\lim_{\underbrace{h \rightarrow 0^+}_{h \text{ molto piccolo}}} F_X(x+h) = F_X(x)$

INOLTRE

- Ogni V.A. ha la sua CDF.
- La SOMMA di tutti i "Salti" della funzione e' pari ad 1
- Quando il NUMERO DI VALORI POSSIBILI AUMENTA, avvengono le seguenti cose:
  - L'INTERVALLO tra i vari salti DIMINUISCE
  - Il NUMERO DI SALTI diventa sempre più grande
  - I Salti Diventano sempre più piccoli

Alternativa alla CDF: PMF - Mass Probability Function

DEFINIZIONE

$$\underbrace{P_X(x)}_{\text{PMF}} = \underbrace{P(\{X = x\})}_{\text{Probabilità}}$$

"Probabilità che la Variabile Aleatoria X Sia proprio uguale a x"

Proprietà

- Non Negativa: $P_X(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_x$
- Normalizzazione: $\sum_{x \in \mathcal{X}_x} P_X(x) = 1$

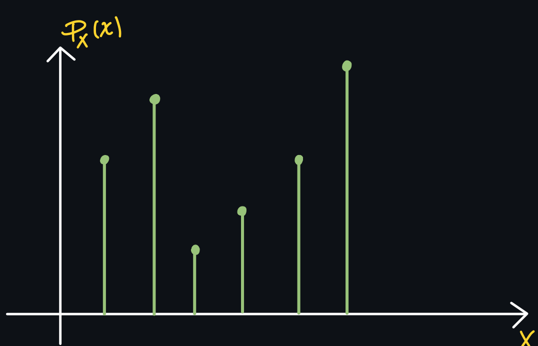


Grafico di esempio

- Ricavare la CDF dalla PMF

$$\underbrace{F_X(x)}_{\text{CDF}} = \boxed{\sum_{\{u \in \mathcal{X}_x : \underbrace{u \leq x}_{\text{Subset di } \mathcal{X}_x \text{ in modo da prendere Solo gli elementi minori di } x}\}} \underbrace{P_X(u)}_{\text{PMF}}}$$

Somma delle Sole PMF più piccole della x

PDF - FUNZIONE DI DENSITA' DI PROBABILITA'

E' Definita come la DERIVATA DELLA CDF, e viene usata per le variabili CONTINUE.

DEFINIZIONE

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Derivata Rispetto ad x

$$\Longrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$$

x e' un estremo

Integriamo Rispetto a u

- LE DIMENSIONI FISICHE DELLA PDF SONO IL RECIPROCO DI QUELLE DELLA VARIABILE ALEATORIA

$$X \text{ (secondi)} \longrightarrow PDF_X = f_X \text{ (secondi)}^{-1}$$

PROPRIETA' COSTITUTIVE

P_1: NON NEGATIVA: $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_X$

P_2: NORMALIZZAZIONE: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

P_3: $P(\{X \in \mathcal{A}\}) = \int_{\mathcal{A}} f_X(x)\, dx$

P_4: CDF: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(v)\, dv$

La funzione $Q(x)$

DEFINIZIONE

La funzione $Q(x)$ e' per definizione la COMPLEMENTARE di una Gaussiana Standard

Il contrario della CDF

$$Q(x) \triangleq P(\{X_0 \geq x\}) = P(\{X_0 > x\}) \quad \text{con } X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

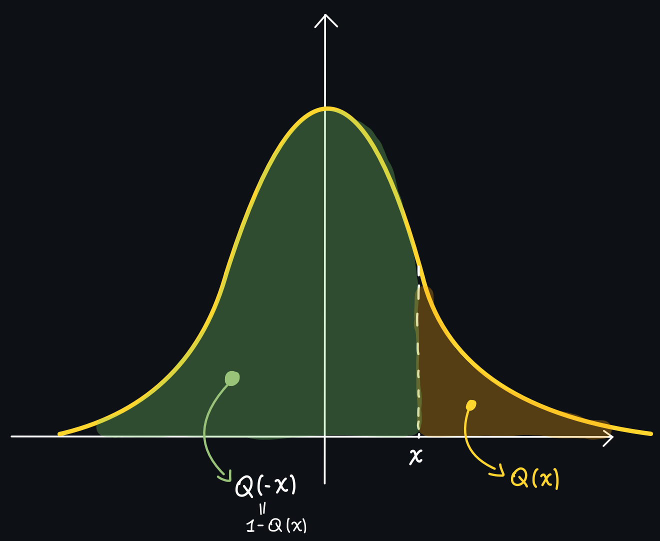
Indifferente se includiamo gli estremi o meno

PROPRIETA'

P_1 : $Q(+\infty) = 0$ → Non include la funzione
$Q(-\infty) = 1$ → Include tutta la funzione

P_2 : Con $x_1 < x_2 \Rightarrow Q(x_1) > Q(x_2)$ Ovvero $Q(x)$ e' decrescente Siccome $Q(x) = \overline{F}_X(x)$ → Funzione crescente

P_3 : $Q(-x) = 1 - Q(x)$ Ovvero $Q(x)$ e' simmetrica



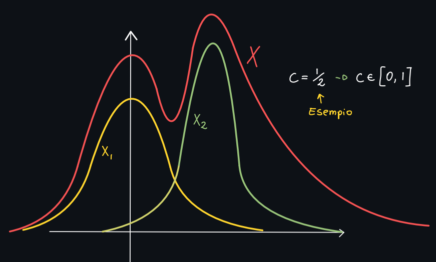
USI DELLA Q - FUNCTION

- $P(\{X \leq x\}) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(\{X > x\}) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(\{x_1 < X < x_2\}) = Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} f_X(v)\, dv$
- $P(\{-x < X < x\}) = 1 - Q\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Variabili Aleatorie di tipo Mixture

E' possibile COMBINARE due PDF X_1 e X_2 con una combinazione del parametro c :

$$f_X(x) = c f_{X_1}(x_1) + (1-c) f_{X_2}(x) \quad \text{con } c \in [0,1]$$



Lista delle variabili Aleatorie
— e delle loro CDF e PDF —

Variabile Aleatoria Bernoulliana

E' una variabile estremamente semplice e si usa per modellare esiti POSITIVO / NEGATIVO

$X \sim B(1, P)$

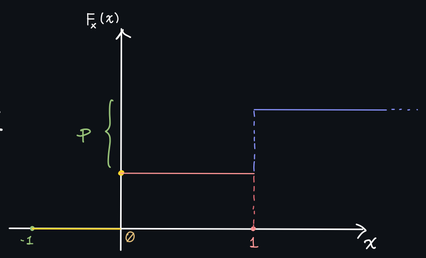
I Parametri $(1, P)$ ci dicono che il valore 1 ha prob. P di verificarsi

Alfabeto $\mathcal{X}_X = \{0, 1\}$

- $P(1) = P(X = 1) = P$
- $P(0) = P(X = 0) = 1 - P = q$

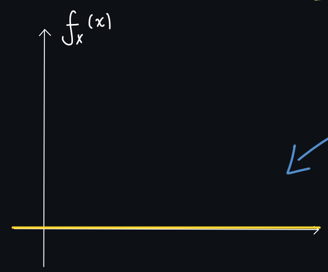
CDF

$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \Omega & \text{per } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ q = 1 - p & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$



PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x \geq 1 \end{cases} = 0 = \text{Const}$$



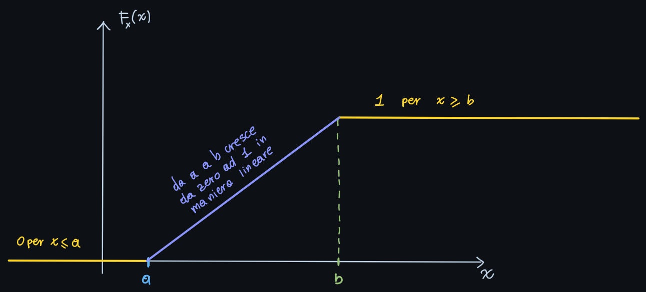
Con la V.a. Bernoulliana, viene usata maggiormente la sua CDF

Variabile Aleatoria UNIFORME

$X \sim U(a, b) \rightarrow$ Uniforme nell'intervallo $[a, b]$

CDF

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$



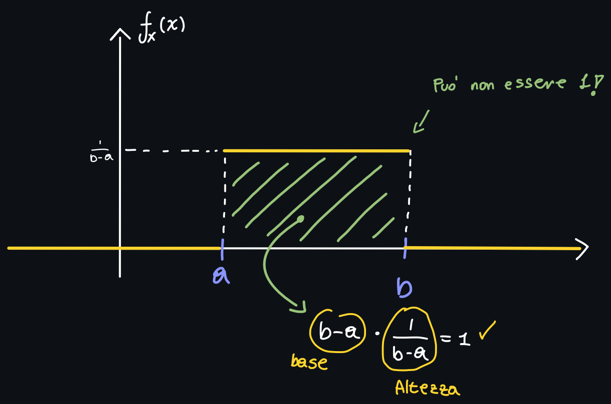
PDF

Deriviamo la CDF:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$

- L'area della curva tra a e b è sempre 1

$\triangleright \int_a^b f_X(x)\, dx = 1$



Distribuzione di Poisson

Definita dalla PMF: $\boxed{P_X(K) = e^{-a} \cdot \frac{a^K}{K!}}$ con $a > 0$ e $K \in \mathbb{N}: 0, 1, \dots$

Verificando le proprietà della PMF: $\sum_{K=0}^{+\infty} P_X(K) = e^{-a} \sum_{K=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a^K}{K!}}_{e^a} = e^{-a} \cdot e^{a} = \frac{e^a}{e^a} = 1$

Siccome PMF(x) = 1, è una PMF

Distribuzione Binomiale

E' una SUCCESSIONE Di variabili Aleatorie Bernoulliane:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow X \sim B(n, p)$$

X: Distribuzione Binomiale

X_i: Variabile Bernoulliana

n: 0 oppure 1

p: ci dice la Probabilità con cui si verifica n

$\Rightarrow P(n) = p$, $P(\bar{n}) = 1 - p$

ESEMPIO $X \sim B(1, p) \Rightarrow P(1) = p$, $P(0) = 1 - p$

Variabile di Rayleigh

DEFINIZIONE

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

PDF

- Grazie allo "SCALINO" $u(x)$ è definita solo per valori positivi della x, infatti:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

- Dipende inoltre dal parametro σ^2, che "dice" quanto la funzione deve essere "ALTA" o "LARGA":

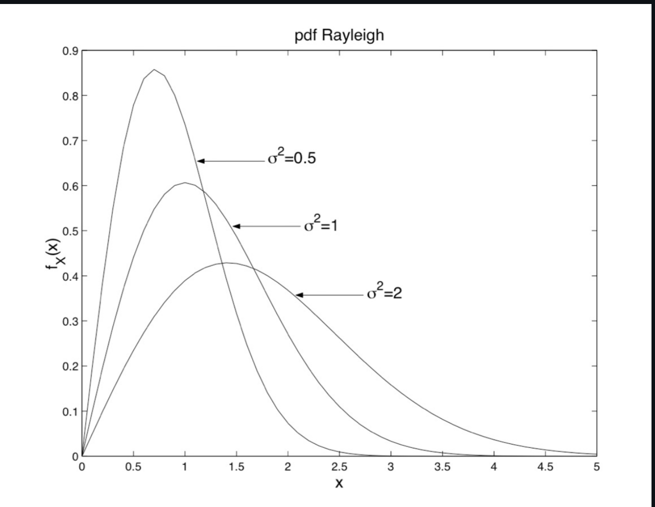


Figura 2.18: PDF di variabili Rayleigh con $\sigma^2 = 0.5, 1, 2$

CDF

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x)$$

Variabile Esponenziale

DEFINIZIONE

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)$$

Con $\lambda > 0$

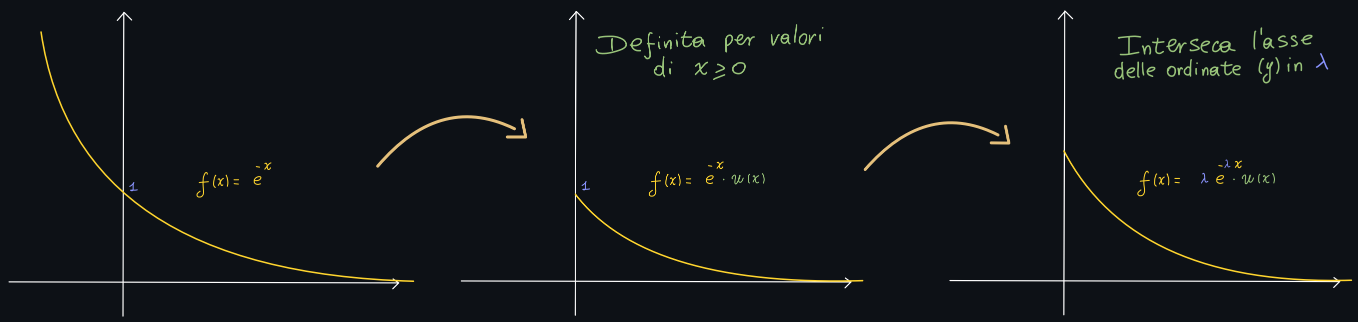
PDF

Si indica come

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Parametro

"variabile di tipo esponenziale di parametro λ"



PROPRIETA'

- NON NEGATIVA $f_X(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_x$
- $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Variabile Gaussiana Standard

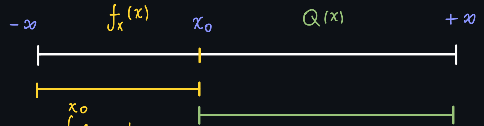
DEFINIZIONE

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PDF

- $CDF = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ ⇒ Definiamo la funzione Q ⇒ $Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$

Non esprimibile in forma chiusa



$\int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx = n$

$\int_{x_0}^{+\infty} Q(x)\,dx = m$

- $n + m = 1$
  ⇒ $m = 1 - n$
  ⇒ $n = 1 - m$ ⇒ $f_X(x) = 1 - Q(x)$

Modo per calcolare $\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

Gaussiana Non Standard

Si ottiene dalla Gaussiana St. tramite una trasformazione ed è una FAMIGLIA DI GAUSSIANE

$$\boxed{X = \sigma X_0 + \mu}$$

X ← Non Standard; X_0 ← Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

μ ← "Mu"; σ^2 ← "Sigma quadro"

Ricaviamo la CDF:

Siccome la CDF è definita da CDF $= F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$, allora ci basta scrivere:

$$\text{CDF} = F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) \Rightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(\{\sigma X_0 + \mu \leq x\}) = \mathbb{P}\left(\left\{X_0 \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right)$$

$$= F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \text{Si calcola con la } Q(x) = \boxed{1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

F_{X_0} ← Gaussiana Standard

CDF di una Gaussiana NON Standard

Ricaviamo la PDF

Siccome, per definizione $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) =$$

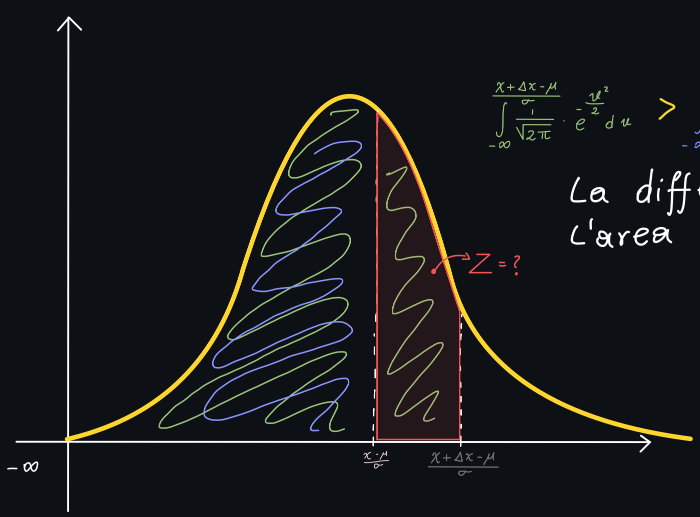
La derivata corrisponde al limite del Rapporto incrementale

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0) \cdot h) - f(x_0)}{h}$$

$$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}{\Delta x}$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du > \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$



La differenza tra i due integrali è semplicemente l'area sottesa alla curva ($f_X(x)$) tra gli estremi $\frac{x-\mu}{\sigma}$ e $\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}$

$\Rightarrow$ Scriviamo il lim. del rapp incr come ·

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv$$

$$= f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv$$

Dal Teorema della media integrale

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\Delta x} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv = \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} \cancel{-\mu} \cancel{-x} \cancel{+\mu}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \Rightarrow f_X(x) = \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Non dipende più da Δx

Siccome $a < x_0 < b$ Possiamo scegliere

$$x_0 = \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}$$

$$= \boxed{f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

PDF

Di una Gaussiana Non Standard

Media e Momenti di una variabile Aleatoria

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x \in A_x} x \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \end{cases}$$

Il numero reale (Media) $\mathbb{E}$ è anche denotato con μ_X

Numero Reale

Teorema Fondamentale per il calcolo della media

$$\mathbb{E}[g(x)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in A_x} g(x) \cdot F_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

MOMENTI DI ORDINE K

La media di una V.A. è anche nota come Momento di ordine 1

$$\mathbb{E}[X^K] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in A_x} x^K \cdot F_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

- Basta elevare alla K la X

Momenti Centrali

Si calcola la media di $(x - \mu_X)^K$

Media della Variabile Aleatoria

$$\mathbb{E}[(x-\mu_X)^K] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^K \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in A_x} (x-\mu_X)^K \cdot F_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

- La media Statistica è un Momento Non centrato di Ordine 1.

VALORE QUADRATICO MEDIO · MS

$$\mathbb{E}[X^2] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \\ \sum_{x_i \in A_x} x^2 \cdot F_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

$\overline{X}^2$

- Semplicemente un momento di ordine 2 Non Centrato

Root Mean Square - RMS - Valore efficace

$$X_{rms} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

- Semplicemente la Radice di un momento di ordine 2 Non Centrato

VARIANZA

$$Var(X) = \mathbb{E}[(x-\mu_X)^2] = \sigma_X^2$$

Media della variabile

Varianza

- Ci dice quanto i valori si discostano Quadraticamente da un valore specifico, come potrebbe essere quello della media μ_X

DEVIAZIONE STANDARD / SCARTO QUADRATICO MEDIO

È la radice della Varianza

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[(x-\mu_X)^2]}$$

- E' uno dei modi per esprimere la dispersione dei dati intorno ad un indice di posizione, che può essere proprio la media

Media e varianza delle Varie variabili Aleatorie

Variabile Aleatonia Bernoulliana

$X \sim B(1, p)$

MEDIA

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ q = 1-p & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} = \sum_{x \in \mathcal{X}_x} x_i \cdot F_X(x) = \sum [0 \cdot (1-p)] + 1 \cdot (p) = p$$

La "p" come argomento ci dice anche la media della variabile

Varianza:

$$\mathbb{E}[(x-p)^2] = \sum_{x_i \in \mathcal{X}_x} (x_i - p)^2 \cdot P_X(x) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p$$

$$= p^2 - p^3 + (1 + p^2 - 2p) \cdot p = \cancel{p^2} - \cancel{p^3} + p + \cancel{p^3} - \cancel{2}p^2$$

$$= \boxed{p - p^2} = p(1-p) = pq$$

$q = 1-p$

V.A. Esponenziale

MEDIA

$$X = \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \qquad \text{dove} \quad u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left\{ \left[x \cdot \left(\int e^{-\lambda x}\right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \int e^{-\lambda x} dx \right\}$$

PARTI

$t = -\lambda x \Rightarrow dx = -\frac{1}{\lambda}$

$$= \cancel{\lambda} \left\{ \left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\cancel{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right\} = [0] + \frac{1}{\lambda} \left[e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \qquad \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \int e^t dt = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

VARIANZA

Calcolo dalla formula $\sigma^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$

varianza — valore quad medio — media

BOH

$$\Rightarrow \overline{X}^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x^2 \cdot (-e^{-\lambda x}) \right]_0^{+\infty} + \int x e^{-\lambda x} dx$$

PARTI

Variabile Uniforme

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

MEDIA

$$E[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{\cancel{b-a}}\cdot\frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2} = \frac{b+a}{2}$$ Media

Varianza

$$Var(X) = E[\bar{X}^2] - E(X)$$

Valore quad medio $= ?$

Media $= \frac{b+a}{2}$

$$\Rightarrow E[\bar{X}^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore quadratico medio

$$\Rightarrow \sigma^2 = \bar{X}^2 - \mu^2$$

Varianza $= (\text{dev std})^2$

Media^2

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3(b^2+2ab+a^2)}{12}$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

VARIANZA

Deviazione Standard

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{\sqrt{(b-a)^2}}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Scarto quadratico Medio

VARIABILE DI RAYLEIGH

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

MEDIA:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx \underset{\text{PARTI}}{=} x \int v \, dv - \int u \, dv = x \int_0^{+\infty} f_X(x) \, dx - \int x \, df(x)$$

PARTI
$u = x \,,\; dv = f_X(x)$

$F_X(x)$

$$= x \cdot \left[F_X(x) \right]_0^{+\infty} - \int x \, df(x) = x \left[F_X(x) - 0 \right] - \int_0^{+\infty} x \, df(x)$$

$$\int x \, \frac{d}{dx} f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$F_X(x) - 0$

$$= x \cdot F_X(x) - \int_0^{+\infty} f_X(x) \, dx = x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) - F_X(x) = x - \left[1 - F_X(x)\right]_0^{+\infty} =$$

Per $x \to \infty$
$F_X(x) \to 1$

$$= x - (1 - 1) = \sigma \int \sqrt{2y} \, dy = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Pongo
$x = \sigma \sqrt{2y}$

VARIANZA

$$E\left[(x - \mu_x)^2\right] = \int_0^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \, f_X(x) \, dx = \int x^2 + \frac{\sigma^2 \pi}{2} - 2 x \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x}{\sigma^2} \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} \, dx$$

Tantissimi passaggi dopo... $= \frac{1}{2}(4 - \pi) \, \sigma^2$

GAUSSIANA STANDARD

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\overset{\mu}{0},\overset{\sigma^2}{1}) \longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

MEDIA

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \emptyset$$

La funzione è simmetrica all'origine

VARIANZA

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(x-\mu_x)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-0)^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

Il differenziale va sempre calcolato su x e non su $\frac{x^2}{2}$, x^3, ...

Siccome la funzione è simmetrica all'asse delle ordinate possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 2\int_0^{+\infty} f(x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \longrightarrow \text{pongo } t = \frac{x^2}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{2t} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t\, e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{1-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) \longrightarrow K = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\sqrt{\pi}} = 1$$

GAMMA DI EULERO

$$\Gamma(K) = \int_0^{+\infty} t^{K-1} \cdot e^{t} dt$$

$$\longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}+\cancel{1}-\cancel{1}} \cdot e^{-t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{t}$$

$$t^{\frac{1}{2}} = t^{1-\frac{1}{2}}$$

Gode delle proprietà

- $\Gamma(K+1) = K\,\Gamma(K)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

GAUSSIANA NON STANDARD

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

MEDIA

$$\mathbb{E}[\underbrace{\sigma X_0 + \mu}] = \sigma \, \mathbb{E}[X_0] + \mu = \mu_X$$

Media

Esprimiamo la G.N.S. come combinazione di quella Standard

$\sigma \to 1$, $\mathbb{E}[X_0] \to 0$

VARIANZA

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E} = [(\sigma X_0 + \cancel{\mu} - \cancel{\mu})^2] = \mathbb{E}[(\sigma X_0)^2] = \sigma^2 \, \mathbb{E}[X_0^2] = \sigma^2$$

$X_0^2 \to 1$

Varianza