

Indice dei contenuti

Indice dei contenuti

Recap lezione precedente

Cambiare Dominio

Legame ingresso uscita

Trasformate Notevoli

Proprietà dei segnali reali

Trasformata dell'esponenziale monolatero a tempo continuo

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale monolatero

Troviamo il modulo dello spettro del segnale exp monolatero

Troviamo la fase dello spettro del segnale exp monolatero:

Trasformata dell'esponenziale bilatero a tempo continuo

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale bilatero

Trasformata della sequenza esponenziale monolatera a tempo discreto

Rappresentare la trasformata della sequenza monolatera a tempo discreto

Codice MATLAB Per la sequenza esponenziale monolatera

Trasformata di una sequenza esponenziale bilatera

Codice MATLAB per la sequenza esponenziale bilatera

Trasformata dell'impulso rettangolare (tempo continuo)

Rappresentare la trasformata dell'impulso rettangolare

Domanda sulla trasformata dell'impulso rettangolare

Trasformata di una sequenza rettangolare discreta

Recap lezione precedente

Cambiare Dominio

Cambiare Dominio

Segnali Continui

Tempo \rightarrow Frequenza

$$\bullet X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} dw$$

$w = 2\pi f$

Frequenza \rightarrow Tempo

$$\bullet x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{jwt} dw$$

Segnali Discreti

Tempo \rightarrow Frequenza

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi vn}$$

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n}$$

Frequenza \rightarrow Tempo

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v) \cdot e^{-j2\pi vn} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\theta) \cdot e^{-j2\pi \theta n} d\theta$$

Legame ingresso uscita

Legame ingresso - uscita - Frequenza

Esprimiamo l'ingresso come:

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df =$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} dt$$

Deduiamo che $X(\cdot) = Y(\cdot) \cdot H(\cdot)$

Trasformate Notevoli

Proprietà dei segnali reali

Quando abbiamo un segnale reale, avremo la seguente proprietà:

Proprietà'

$$X^*(-f) = X(f) \quad \text{Pari}$$

per $x(t)$ REALE

In poche parole, avremo che lo spettro del coniugato riflesso di un segnale **reale** sarà uguale allo spettro del segnale iniziale; questo vuol dire che **i segnali reali sono pari.**

-> proof: $X^*(-f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^*$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^*(t)}_{\substack{\text{Reale} \\ \downarrow \\ x(t)}} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

Possiamo seguire il seguente schema:

- Quindi
- Il modulo sarà PARI:

$$\Rightarrow |H(f)| \cdot e^{-\underline{J\angle H(f)}} = |H(f)| e^{-\underline{J\angle H(f)}}$$
 - La fase vale l'opposto \Rightarrow E' Dispari

$$\Rightarrow \underline{\angle H(-f)} = -\underline{\angle H(f)}$$
- Un esempio è proprio
l'esempio 1 ↑

Trasformata dell'esponenziale monolatero a tempo continuo

Esempio 1: T. di \mathcal{F} dell'exp monolatero T. Continuo

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$$

Dall'eq di analisi possiamo calcolare lo spettro dell'input:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Trasformata di Fourier

$$= A \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi f t} dt = A \int_0^{+\infty} e^{-t \left(\frac{1+j2\pi f T}{T} \right)} dt$$

$$= -\frac{A T}{1+j2\pi f} \cdot \left[e^{-t \left(\frac{1+j2\pi f T}{T} \right)} \right]_0^{+\infty} = \frac{A T}{1+j2\pi f}$$

Trasformata

\Rightarrow otteniamo

$$e^{-\frac{t}{T}} u(t) \Leftrightarrow \frac{A T}{1+j2\pi f T}$$

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale monolatero

Per rappresentare la trasformata di un segnale, che è **un numero complesso**, ci serve sapere **il modulo e la fase dello spettro**:

1. Trovare il modulo \rightarrow Spettro di ampiezza
2. Trovare la fase \rightarrow Spettro di fase

Troviamo il modulo dello spettro del segnale \exp monolatero

$$|X(f)| = \frac{|\text{num}|}{|\text{denom}|} = \frac{\text{AT}}{|1 + j2\pi f T|} = \frac{\text{AT}}{\sqrt{1^2 + (2\pi f T)^2}}$$

Reale \rightarrow No modulo

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow 20 \log_{10} \left[\frac{|X(f_0)|}{|X(0)|} \right] = 20 \log_{10} \frac{\frac{\text{AT}}{\sqrt{2}}}{\text{AT}}$

Frequenza di taglio

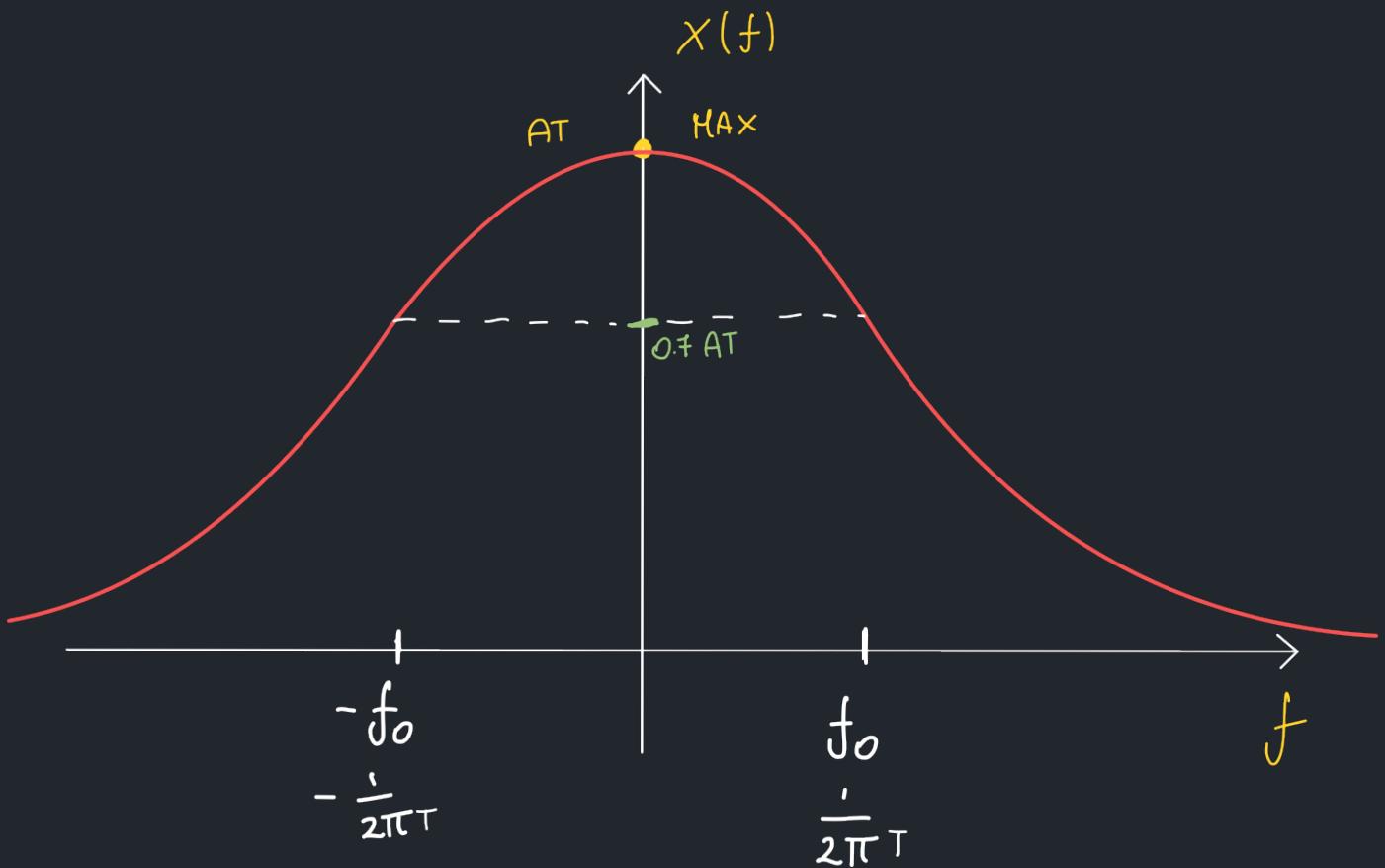
\hookrightarrow E' quella freq al di sopra del quale un filtro blocca il segnale

$= 20 \log_{10} (\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}$

ATTenuazione

Possiamo quindi graficare il modulo dello spettro:

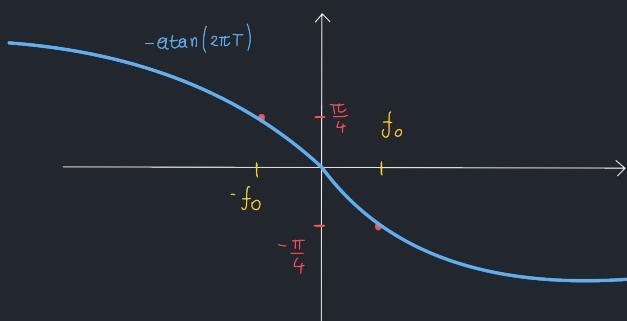
Grafichiamolo:



Troviamo la fase dello spettro del segnale exp monolatero:

$$2. \text{ Fase: } \angle H(f) = [\angle \text{ Numeratore}] - [\angle \text{ Denominatore}] = 0 - \text{atan}(2\pi f T)$$

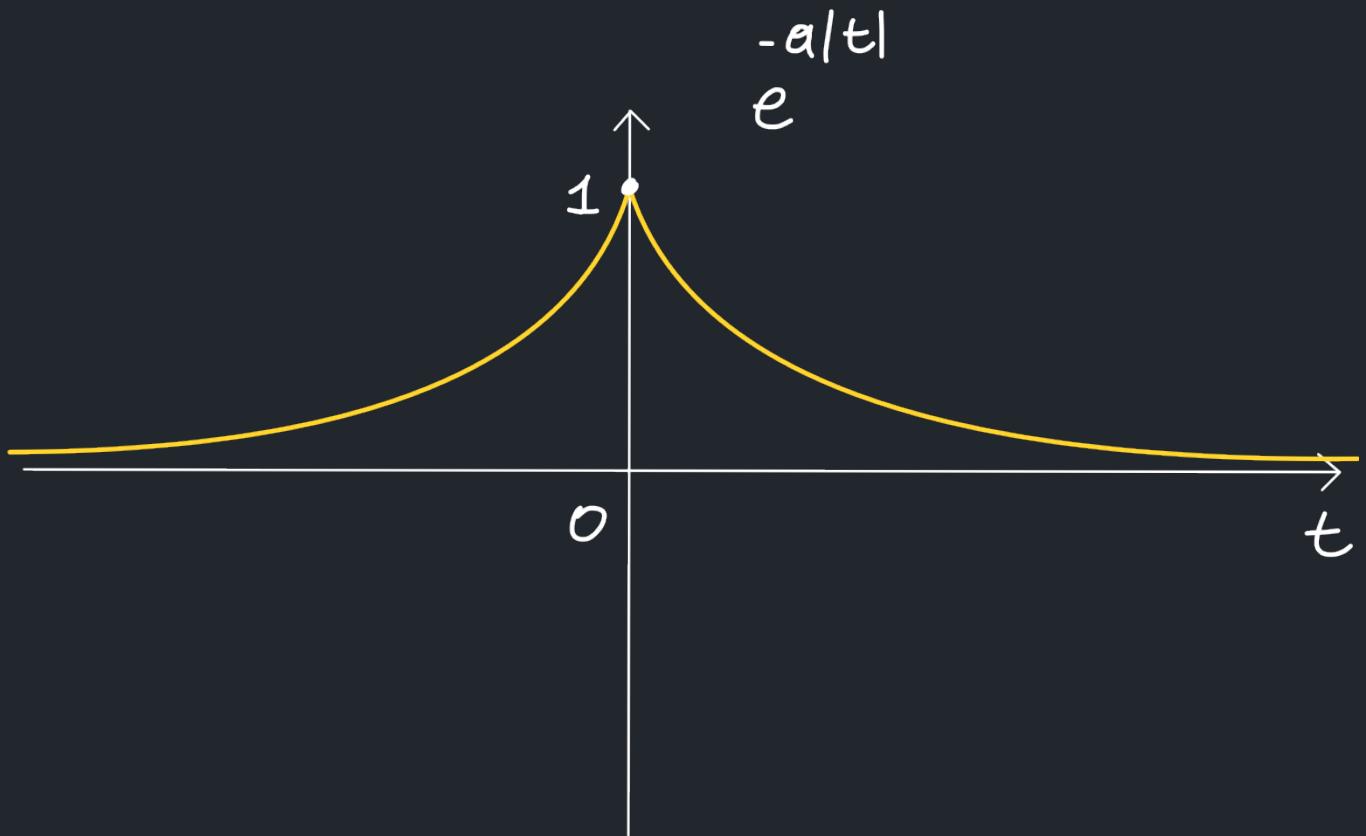
Grafichiamolo: Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T}$ -> $\angle H(f) = -\text{atan}\left(2\pi \frac{1}{2\pi T} f\right) = -\frac{\pi}{4}$



Trasformata dell'esponenziale bilatero a tempo continuo

Esempio 2: Exp Bilatero

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad \text{con } a \geq 0$$



Applichiamo la definizione di Trasformata di Fourier a tempo continuo ed otteniamo:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \end{aligned}$$

Proseguiamo unendo gli esponenziali e mettendo in evidenza il tempo:

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt =$$

A questo punto calcoliamo le primitive:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a-j2\pi f} \left[e^{(a-j2\pi f)t} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{a+j2\pi f} \left[-e^{-(a+j2\pi f)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot [1-0] + \frac{1}{a+j2\pi f} [0-(-1)] = \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} \end{aligned}$$

Ci basta fare il minimo comune multiplo per trovare finalmente la trasformata:

$$= \frac{a+j2\pi f + a-j2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Non c'è presente "j"

\Rightarrow Lo spettro è reale!
(e anche pari)

Attenzione!

Lo spettro non contiene una parte immaginaria! Di conseguenza **è uno spettro reale**.

Possiamo facilmente convincerci della veridicità dell'affermazione facendo i calcoli del mcm:

$$\begin{aligned} & (a - i 2\pi f)(a + i 2\pi f) = \\ &= a^2 + a \cancel{i 2\pi f} - a \cancel{i 2\pi f} - \cancel{i^2} (2\pi f)^2 \\ &= a^2 + (2\pi f)^2 \end{aligned}$$

| La parte immaginaria se ne va moltiplicando i due denominatori

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale bilatero

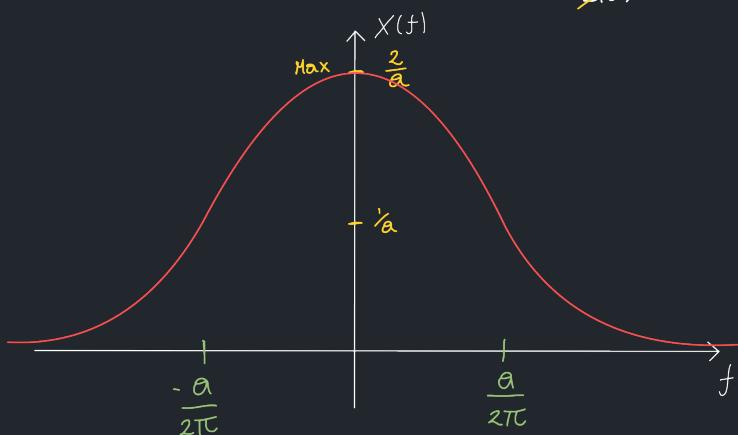
Siccome lo spettro è un segnale reale non abbiamo bisogno di trovare modulo e fase; ci basterà semplicemente fissare una **frequenza di taglio**.

Definiamo la frequenza di taglio come:

| La frequenza di taglio separa la banda di frequenza passante, in cui le informazioni vengono trasmesse senza distorsione, da quella di frequenza che viene bloccata o attenuata. In questo modo, la frequenza di taglio aiuta a ridurre le interferenze e a migliorare la qualità del segnale.

Grafichiamo:

$$f_0 = \frac{a}{2\pi} \rightarrow X\left(\frac{a}{2\pi}\right) = \frac{2a}{a^2 + \left(\frac{2\pi}{2\pi} \frac{a}{2\pi}\right)^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$$



$$\begin{aligned} 20 \log_{10} \frac{X(f_0)}{X(0)} &= 20 \log_{10} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} \\ &= 20 \log_{10} \frac{1}{a} \\ &= 20 \log_{10} \frac{1}{2} = \sim -6 \text{ dB} \end{aligned}$$

Trasformata della sequenza esponenziale monolatera a tempo discreto

Tendenzialmente i calcoli sono gli stessi dei casi precedenti:

Esempio 3: Tempo discreto : seq exp. monolatera

$$\begin{aligned} X(n) &= a^n \cdot u(n) \quad \text{con} \quad -1 < a < 1 \quad \rightarrow \quad |a| < 1 \\ \text{Spettro} \quad X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(a \cdot e^{-j2\pi\omega}\right)^n}_{\text{Serie geometrica}} \\ &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} (\underline{z})^n \quad \text{con} \quad -1 < z < 1 = \frac{1}{1-z} \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a e^{-j2\pi\omega}\right)^n = \frac{1}{1-a e^{-j2\pi\omega}} \quad \text{Spettro} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che la relazione tempo \rightarrow frequenza della sequenza monolatera è:

Esempio 3: Tempo discreto : seq exp. monolatera

$$\begin{aligned} X(n) &= a^n \cdot u(n) \quad \text{con} \quad -1 < a < 1 \quad \rightarrow \quad |a| < 1 \\ \text{Spettro} \quad X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(a \cdot e^{-j2\pi\omega}\right)^n}_{\text{Serie geometrica}} \\ &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} (\underline{z})^n \quad \text{con} \quad -1 < z < 1 = \frac{1}{1-z} \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a e^{-j2\pi\omega}\right)^n = \frac{1}{1-a e^{-j2\pi\omega}} \quad \text{Spettro} \end{aligned}$$

Rappresentare la trasformata della sequenza monolatera a tempo discreto

In questo caso nello spettro abbiamo j , il che vuol dire che lo spettro è complesso; per rappresentarlo dobbiamo quindi trovarne modulo e fase:

- Modulo di $X(f)$

$$\begin{aligned} |X(v)| &= \left| \frac{1}{1 - a \cos(2\pi v) + j a \sin(2\pi v)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a \cos(2\pi v))^2 + (a \sin(2\pi v))^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \cos^2(2\pi v) - 2a \cos(2\pi v) + a^2 \sin^2(2\pi v)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 (\cos^2(2\pi v) + \sin^2(2\pi v)) + 1 - 2a \cos(2\pi v)}} \\ &\Rightarrow |X(v)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1 - 2a \cos(2\pi v)}} \quad \text{modulo} \end{aligned}$$

- Fase: $\angle H(v)$

$$= \angle 1 - \angle (1 - e^{j2\pi v}) = -\operatorname{atan} \left(\frac{a \sin(2\pi v)}{1 - a \cos(2\pi v)} \right) \quad \hookrightarrow \operatorname{atan} \left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}} \right)$$

Codice MATLAB Per la sequenza esponenziale monolatera

```
a_pos = 1/2; a_neg = -1/2; % se a_neg > 0 --> passa alto, se a_neg < 0 --> passa basso.
```

```
ni = [-1 : 0.01 : 1]; % un passo fitto per simulare la continuità
```

```
X_ni = 1 ./ (1 - a_neg * exp(-1i * 2 * pi * ni)); % usiamo './' perchè abbiamo un vettore
```

```
figure(1);
```

```
subplot(2,1,1);
plot(ni, abs(X_ni)); % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx
title('Grafico con a positiva');
```

```

xlabel('frequenza (ni)');

hold on % per verificare di aver calcolato bene

plot(ni, angle(X_ni));

% plottiamo a positivo
X_ni_pos = 1./((1-a_pos * exp(-li * 2 * pi * ni)));

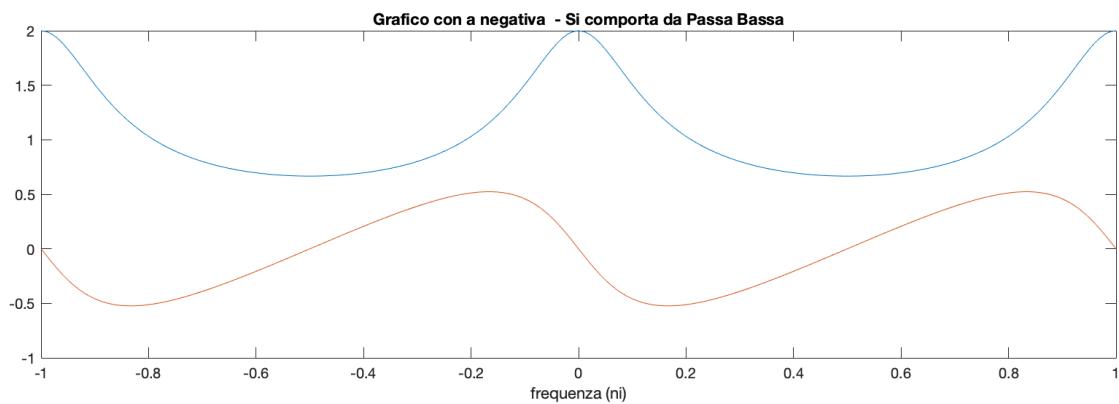
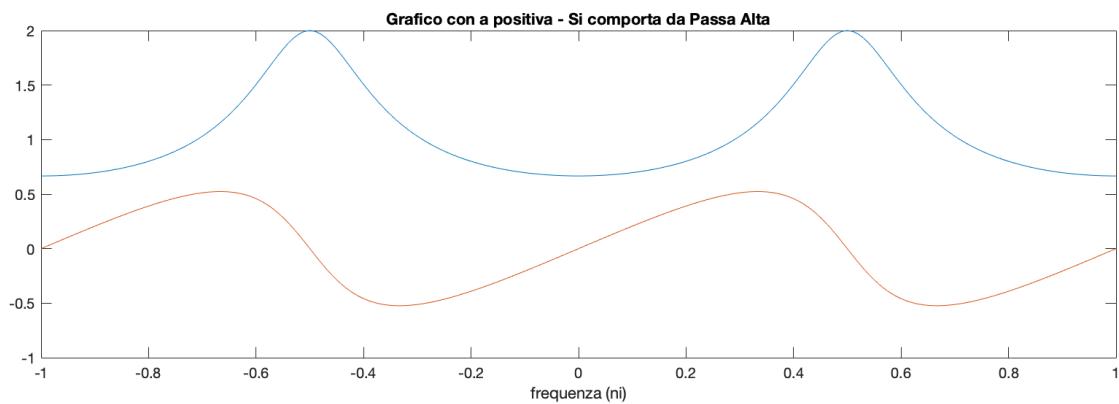
subplot(2,1,2);
plot(ni, abs(X_ni_pos)); % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx
title('Grafico con a negativa');
xlabel('frequenza (ni)');

hold on % per verificare di aver calcolato bene

plot(ni, angle(X_ni_pos));

```

Otteniamo il seguente plot:



Dobbiamo sempre tenere conto che lo spettro è periodico, quindi dobbiamo considerare solo un certo intorno di $n_i=0$;

Trasformata di una sequenza esponenziale bilatera

Esempio 4 : Exp Bilatera Discreta
 $|n|$
 $X(n) = a^n$ con $|a| < 1 \rightarrow -1 < a < 1$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi \omega n}$$

È importante notare come abbiamo definito a compresa tra -1 ed 1; questo ci tornerà più avanti nei calcoli per ricondurci a delle serie geometriche.

In questo caso il nostro obiettivo è quello di **giungere ad una serie geometrica**, di cui conosciamo la convergenza:

Per trovarla quindi spezziamo la sommatoria, **stando attenti a non contare lo zero due volte**, in modo da avere due sommatorie:

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a \cdot e^{-j2\pi\nu n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot e^{-j2\pi\nu n}$$

$K = -n$
 $-n = -K$

A questo punto ci riscriviamo le sommatorie mettendo insieme l'esponenziale e la **a**:

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(a \cdot e^{-j2\pi\nu} \right)^n}_{-1 < z < 1} + \sum_{K=1}^{+\infty} \underbrace{\left(a \cdot e^{j2\pi\nu} \right)^K}_{-1 < z < 1}$$

Possiamo quindi ridurre le due sommatorie a due serie geometriche, che convergono rispettivamente a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - \underbrace{z^0}_1$$

Le scriviamo quindi come:

$$= \frac{1}{1-a e^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{1-a e^{j2\pi\nu}} - 1 = \frac{1-a e^{j2\pi\nu} + 1-a e^{-j2\pi\nu}}{(1-a e^{-j2\pi\nu})(1-a e^{j2\pi\nu})} - 1 = \frac{\frac{j2\pi\nu}{1-a e^{j2\pi\nu}} + \frac{-j2\pi\nu}{1-a e^{-j2\pi\nu}}}{\frac{1-a e^{j2\pi\nu}}{1-a e^{-j2\pi\nu}} - \frac{a e^{j2\pi\nu}}{1-a e^{-j2\pi\nu}} + \frac{a^2}{1-a e^{-j2\pi\nu}}} - 1$$

A questo punto ci riscriviamo gli esponenziali come due **cos(-)**:

$$= \frac{2 - a (e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu})}{1 - a (e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu}) + a^2}$$

$|2 \cos(2\pi\nu)|$

proof $\left\{ \begin{array}{l} e^{j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) + j \sin(2\pi\nu) \\ e^{-j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) - j \sin(2\pi\nu) \end{array} \right.$

$$\Rightarrow e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu} = 2 \cos(2\pi\nu)$$

Ottenendo quindi:

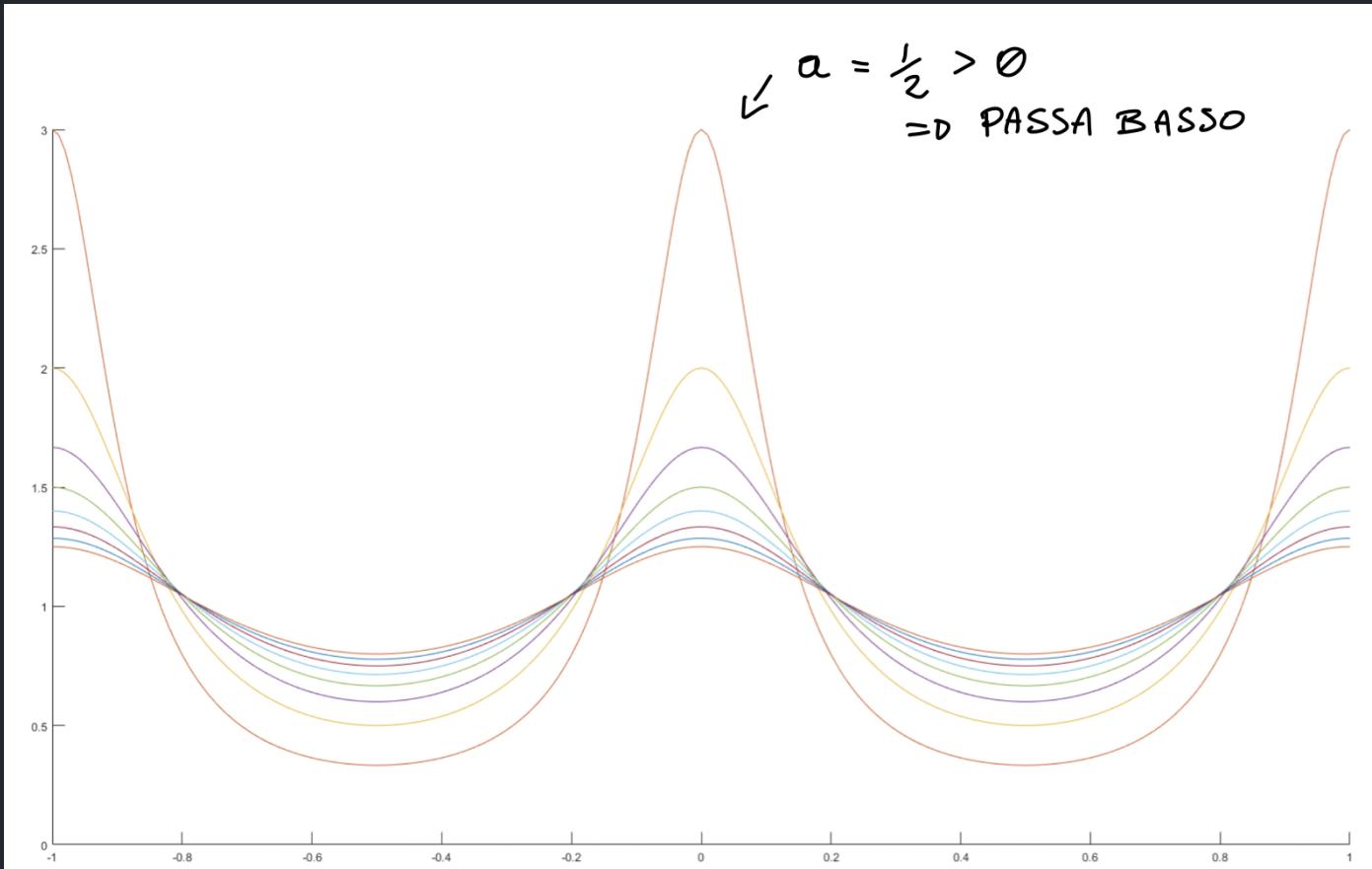
$$\frac{2 - 2a \cos(2\pi\nu)}{1 - 2a \cos(2\pi\nu) + a^2} - 1 = \frac{1}{2 - 2a \cos(2\pi\nu) - 1 + 2a \cos(2\pi\nu) - a^2}$$

Riscrivendo meglio abbiamo che **lo spettro di una sequenza bilatera è:**

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(2\pi\nu) + a^2}$$

j è assente
 \Rightarrow Reale
 \Rightarrow Simmetrico

Notiamo come anche in questo caso sia assente la parte immaginaria; questo vuol dire che lo spettro non solo è **reale**, ma anche **simmetrico**.



Codice MATLAB per la sequenza esponenziale bilatera

```

a = 1/2; % se a_neg > 0 --> passa alto, se a_neg < 0 --> passa basso.
figure(1);
ni = -1 : 0.01 : 1; % un passo fitto per simulare la continuità

X_ni = (1-a^2)./(1 - 2*a*cos(2*pi*ni)+a^2); % usiamo './' perchè abbiamo un vettore

for n = 2:10
    hold on;
    plot(ni, abs(X_ni)); % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx

    a = 1/n;
    X_ni = (1-a^2)./(1 - 2*a*cos(2*pi*ni)+a^2);
    pause(0.1);
end

```

Trasformata dell'impulso rettangolare (tempo continuo)

Esempio 5: Impulso rettangolare

$$x(t) = A \pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-\infty}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f \frac{T}{2}} \right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f} \left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T} \right)$$

$$\hookrightarrow \cos(\pi f T) - j \sin(\pi f T) - [\cos(\pi f T) + j \sin(\pi f T)]$$

$$\hookrightarrow -2j \sin(\pi f T)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f} \cdot [2j \sin(\pi f T)]$$

Spettro $X(f)$

$$= A \sin(\pi f T) \cdot \frac{1}{\pi f}$$

\rightarrow ricorda molto la sinc: sinc: $A \cdot \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Anche in questo caso i calcoli sono molto simili alle trasformate precedenti; l'unica differenza sta nel fatto che invece di ridurre i fasori al coseno, in questo caso ci troviamo un sin(-).

Lo spettro della rect risultante, è molto simile alla sinc!

Siccome la rect ha una **durata T** (cosa che la sinc non ha!), possiamo aggiungerlo allo spettro finale semplicemente moltiplicando e dividendo per T/T:

$$\Rightarrow \text{Lo spettro } X(f) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \frac{AT \operatorname{sinc}(fT)}{\pi f T}$$

Possiamo quindi scrivere $\operatorname{rect}(t/T) \rightarrow AT \operatorname{sinc}(fT)$

Rappresentare la trasformata dell'impulso rettangolare

Per prima cosa accorgiamo che anche in questo caso **lo spettro della trasformata della rect è reale**, quindi pari; ma soprattutto non ci serve trovare modulo e fase per rappresentarlo.

Per rappresentarlo ci basta trovare dei "**punti di riferimento**":

- La sinc ha valore massimo **in zero**, dove vale proprio A^*T .
- Si annulla in più valori di f , con cadenza k/T , con K appartenente ai numeri numerabili ($1, 2, \dots, N$).

Il primo valore di f per cui la sinc si annulla è proprio $1/T$:

L'argomento della sinc è $\pi f T$

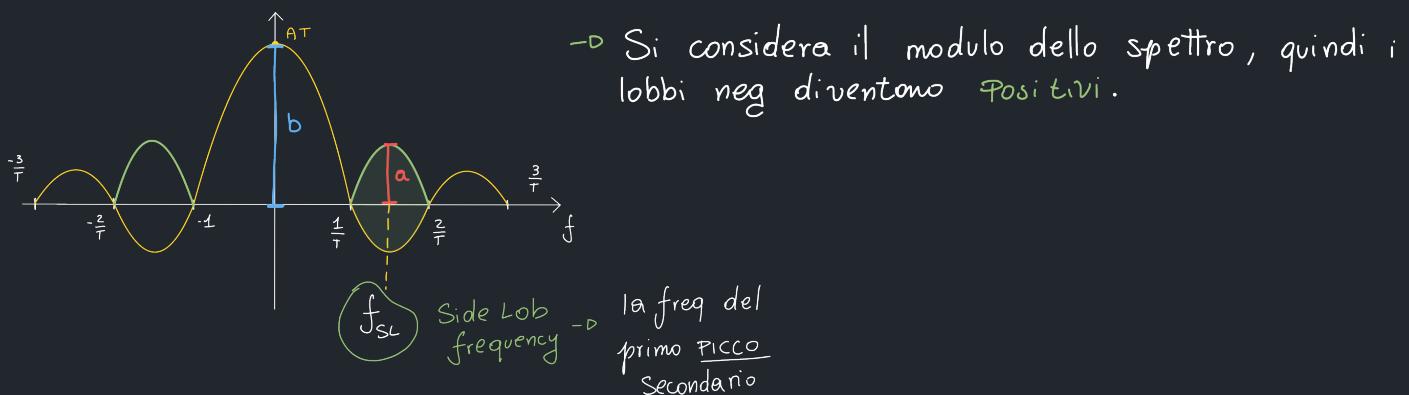
$$\Rightarrow \text{Si annulla in } fT \pm k \Rightarrow f = \pm \frac{k}{T} \quad \rightarrow K \in \mathbb{N}$$

- Anche questo è un **segnale reale**
 $\rightarrow \underline{\text{NO Phase}}$

Domanda sulla trasformata dell'impulso rettangolare

Quanto si attenua il lobo principale rispetto ai secondari?

Per rispondere a questa domanda ci basta considerare **il modulo dello spettro della rect**, ovvero **il modulo della sinc**, ovvero ovunque ci sono valori negativi dell'asse delle ordinate, questi diventeranno positivi:



Adesso consideriamo la differenza di "altezza" del lobo principale e del primo lobo secondario; chiamiamo le due altezze rispettivamente **b** ed **a**.

Adesso per trovare la risposta ci basta **effettuare il rapporto tra i due lobbi**:

Per trovare il rapporto, dobbiamo prima trovare f_{SL} , ovvero la frequenza alla quale si ha il valore massimo del primo lobo secondario; in questo caso è:

$$\text{Ans. } f_{SL} = \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T} \right) \frac{1}{2} = \frac{3}{2T}$$

A questo punto **per trovare l'attenuazione in f_{SL}** ci basta effettuare il rapporto tra il valore dello spettro in zero ed il valore dello spettro nel picco del secondo lobo in una scala logaritmica:

$$-0 \quad 20 \log_{10} \left| \frac{X(0)}{X(f_{SL})} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{AT \operatorname{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)} = 20 \log_{10} \left(\frac{AT}{AT \operatorname{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)} \right) \approx 13 \text{ dB}$$

A cosa ci serve trovare l'attenuazione al primo lobo?

Potrebbe tornarci utile nel momento in cui scegliamo la **banda di un sistema caratterizzato da uno spettro come quello appena visto**, pari a $1/T$, siamo sicuri che l'attenuazione sarà maggiore a 13dB:

A che ci serve?

Se scelgo la Banda poniamo: $B = \frac{1}{T}$ sono sicuro che $20 \log_{10} \left(\frac{X(0)}{X(f)} \right) \geq 13 \text{ dB}$

↑
con $f > B$ Vedi inizio
legione

Concetto di banda

La banda di un segnale può essere definita come l'insieme di frequenze occupate dalle componenti significative dello spettro.

Se consideriamo un **opportuno multiplo della frequenza di taglio a 3dB**, se

poniamo $B = 10f_0$ risulta che **le componenti esterne all'intervallo $(-B, B)$ sono attenuate di almeno 23 dB rispetto a quella di centrobanda.**

Scrivendo il tutto negli stessi termini usati per l'attenuazione della sinc appena calcolata abbiamo che:

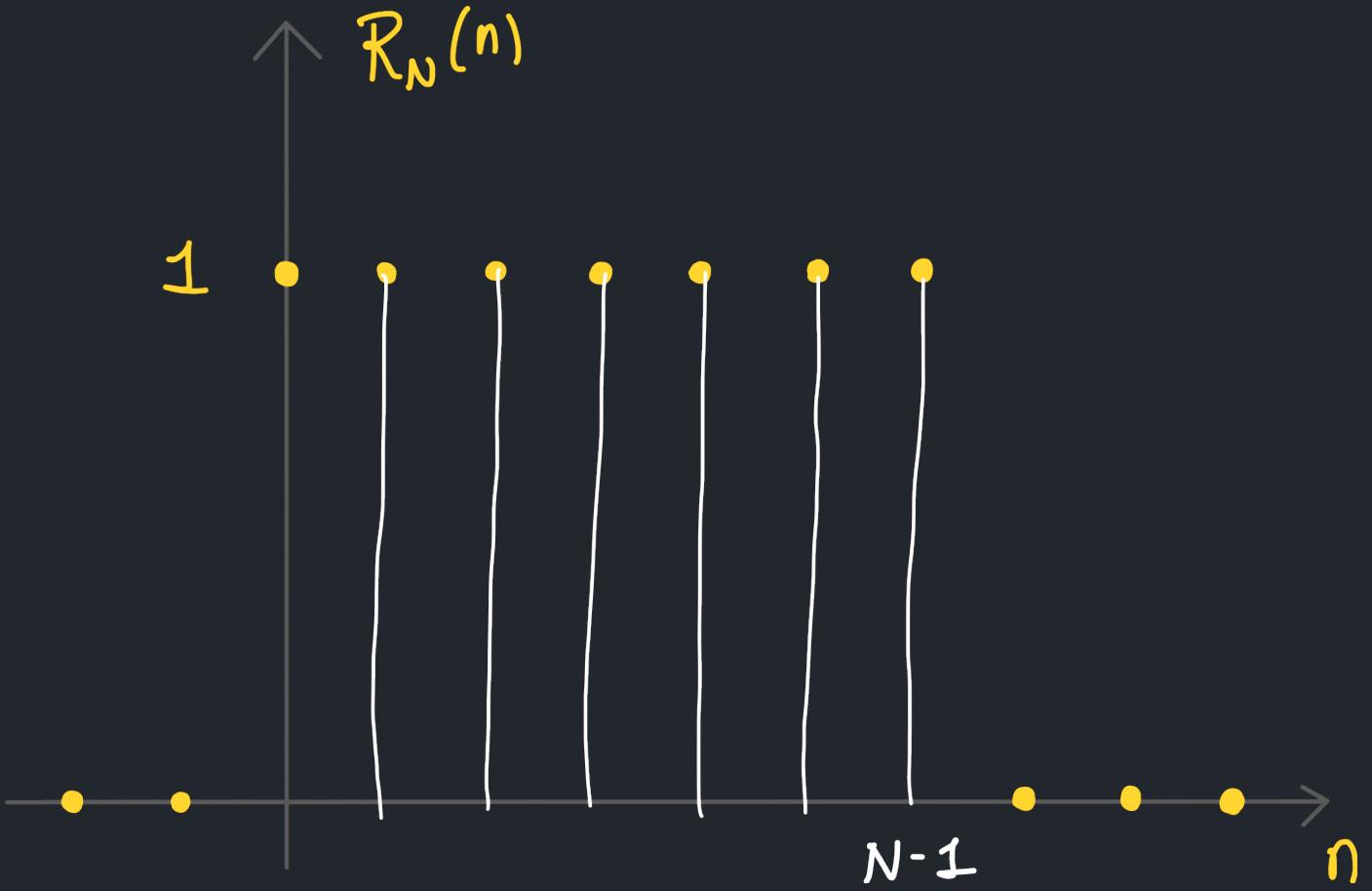
$$20 \log \left| \frac{X(f)}{X(0)} \right| \geq -23 \text{ dB}$$

Trasformata di una sequenza rettangolare discreta

In questo caso i calcoli non sono molto differenti ai calcoli fatti precedentemente; l'unica differenza sta nel fatto che **l'impulso rettangolare a tempo discreto parte da zero, e non da $-(1/2) * T$!**:

Esempio 6: Rect Discreto

$X(n) = R_N(n) \Rightarrow$ IMPORTANTE : Il segnale R_N (discreto) parte da $n > 0$
 \Rightarrow Non Simmetrico \Rightarrow Complesso.



Dal grafico dell'impulso retangolare discreto possiamo notare come questo parta da zero, e non sia simmetrico rispetto all'asse delle ordinate;

questo ci dice che **lo spettro del segnale sarà complesso!**

Applichiamo la definizione di trasformata ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
 X(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\nu} \right)^n \cdot \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\nu} \right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi\nu N}}{1-e^{-j2\pi\nu}}
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso ci riconduciamo ad una serie geometrica, di cui conosciamo la convergenza.

A questo punto **mettiamo in evidenza il fasore ad esponente negativo** sia al numeratore che al denominatore; questo ci permette di scrivere i due fasori come $\sin(-)$:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-j\pi vN} \left(e^{j\pi vN} - e^{-j\pi vN} \right)}{e^{-j\pi v} \left(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v} \right)} \rightarrow \frac{\cos(\pi vN) + j \sin(\pi vN) - \cos(-\pi vN) + j \sin(-\pi vN)}{2j \sin(\pi vN)} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \frac{\cos(\pi v) + j \sin(\pi v) - [\cos(\pi v) + j \sin(\pi v)]}{2j \sin(\pi v)}
 \end{aligned}$$

Riscrivendo il tutto in modo più pulito otteniamo:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-j\pi vN}}{e^{-j\pi v}} \cdot \frac{2j \sin(\pi vN)}{2j \sin(\pi v)} = \frac{e^{-j\pi vN}}{e^{-j\pi v}} \cdot \frac{\sin(\pi vN)}{\sin(\pi v)} = \frac{e^{-j\pi v(N-1)}}{\sin(\pi v)} \cdot \frac{\sin(\pi vN)}{\sin(\pi v)} \\
 &\quad \text{per una Rect } \underline{\text{discreta}}
 \end{aligned}$$

Pi uscito benissimo!