



Recap: Gaussian Standard

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

μ σ^2

Integrale di Gauss

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Q-Function

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

Complementare della CDF

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} f_x(v) dv = 1 - F_{x_0}(x)$$

x_0 \uparrow PDF \uparrow CDF

Proprietà della Q-Function

- $Q(+\infty) = 0$ Perché $0 < Q(x) < 1 = Q(-\infty)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow Q(x_1) > Q(x_2)$
 \hookrightarrow La Q(x) al contrario della CDF e' sempre Decrescente

- Simmetria $\rightarrow Q(-x) = 1 - Q(x)$

Gaussian Non Standard

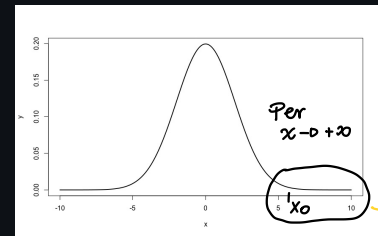
$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$P_x(x) = P(\{X \leq x\}) \Rightarrow P(\{x_0 + \mu \leq x\})$$

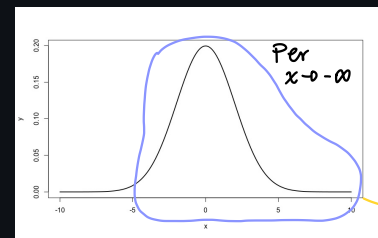
$$\Rightarrow P_x(x) = P\left(\left\{x_0 \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\}\right) = F_{x_0}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

\uparrow
 CDF della V.A. Gauss Standard X_0
 Valutata in $\frac{x_0 - \mu}{\sigma}$

\uparrow
 Riusciamo a calcolare
 il valore della prob. che
 $P(\{X \leq x\})$



"Selezioniamo" solo la parte finale della Gaussian



"Selezioniamo" la maggior parte della Gaussian

Esempio di simmetria

$$P(\{X \leq x\}) = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P5: P(\{X > x\}) = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

↑
Consideriamo la
gaussiana non Standard

$$\Rightarrow Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} dx ?$$

$$P6: P(\{x_1 < X \leq x_2\})$$

Sfruttiamo le proprietà della CDF

$$\rightarrow \text{Sappiamo che è la CDF di: } F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$P(\{X < x_2\}) \quad P(\{X \leq x_2\})$$

\rightarrow Sappiamo che la CDF = $1 - Q(x)$

$$\Rightarrow F_X(x_2) - F_X(x_1) = 1 - Q\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - 1 + Q\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{Quindi: } P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = \underline{Q\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)}$$

$$P7: P(\{-x < X \leq x\}) = F_X(x) - F_X(-x) = 1 - Q(-x) - 1 + Q(x) =$$

Stessa funzione Q

$$= Q\left(\frac{-x - \mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x + \mu}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{x + \mu}{\sigma}\right)$$

↓ la Scriviamo come...

$$Q\left[-\left(\frac{x + \mu}{\sigma}\right)\right] \rightarrow Q(-x) = 1 - Q(x)$$

Due segni
opposti

Calcolare la PDF di una Gaussiana Non Standard

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv \rightarrow \frac{d}{dx} CDF = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

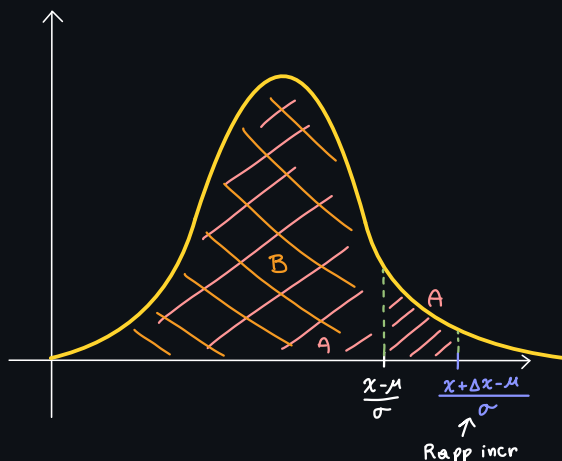
Espressione da Dimostrare

Dimostrazione

① Deriviamo $F_X(x)$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv \rightarrow \text{La Derivata \(\epsilon\) il limite del rapporto incrementale} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv - \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{\Delta x}$$

limite del rapp. incrementale



Se calcoliamo A-B otteniamo

$$\frac{\int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} f_X(x) dx}{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

Teorema della media Integrata

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx = f(x_0)$$

Ampiezza

Non \(\epsilon\) altro che la funzione valutata in $x_0 \in [a, b]$

Rapporto Incrementale = $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv$

$$\int_a^b f_X(x) dx = (b-a) f(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} - \frac{x-\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}}$$

Limite del rapp incr ricavato prima

$f_X(x_0)$

Siccome $a < x_0 < b \rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} < x_0 < \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} \rightarrow x_0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\begin{cases} x < \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} \\ x > \frac{x-\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Termini comuni

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

PDF di una V.A. Gaussiana Non Standard

$-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$ Argomento dell'esponenziale

Variabili Aleatorie Mixture

Consideriamo due variabili Aleatorie X_1 e X_2
Aventi come PDF $f_{X_1}(x)$ e $f_{X_2}(x)$.

Possiamo combinare X_1 ed X_2 per ottenere X_3

$$\rightarrow f_X(x) = c f_{X_1}(x) + (1-c) f_{X_2}(x) \quad \text{con } c \in [0, 1]$$

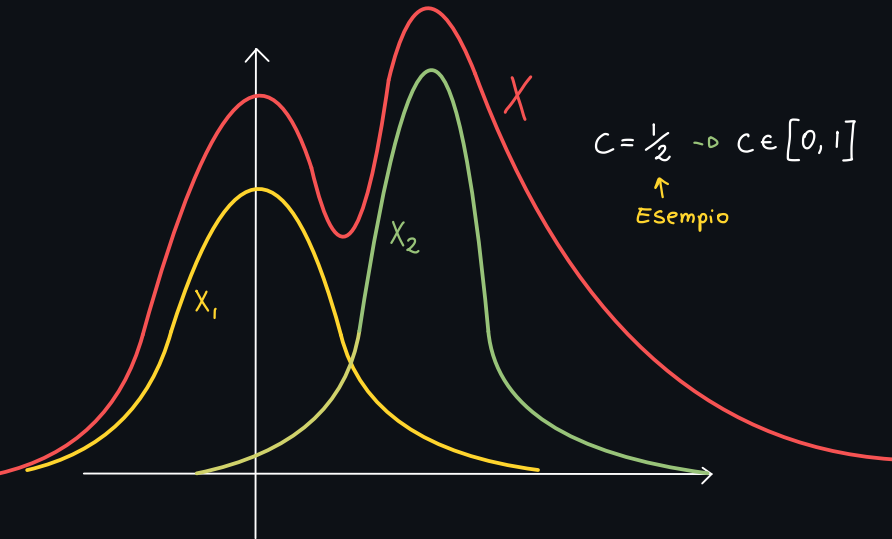
Le proprietà Sono rispettate?

1) $f_X(x) > 0$? \rightarrow ottenuta come combinazione lineare di due PDF > 0 \rightarrow Abbiamo inoltre scelto $c \in [0, 1]$ \rightarrow Non Negativa ✓

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ \rightarrow Se vale la linearità dell'integrale, la Prop. è rispettata $\rightarrow \int a+b dv = \int a dv + \int b dv$
a e b funzioni

Dimostriamo

$$\rightarrow c \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) dx + (1-c) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x) dx = c + 1-c = 1 \quad \checkmark$$



Raccolta di esercizi (Tracce presenti sul file Markdown)

1) Range costo (400 -> 500)€

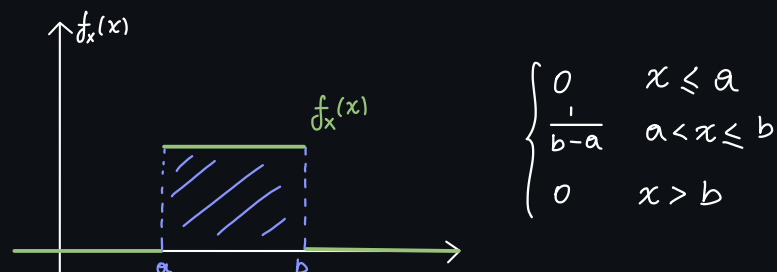
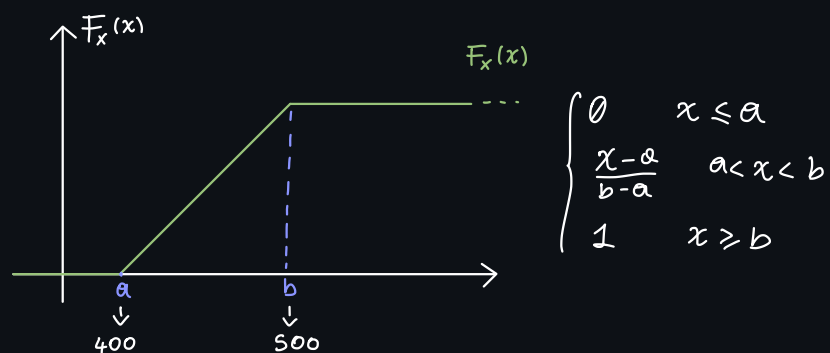
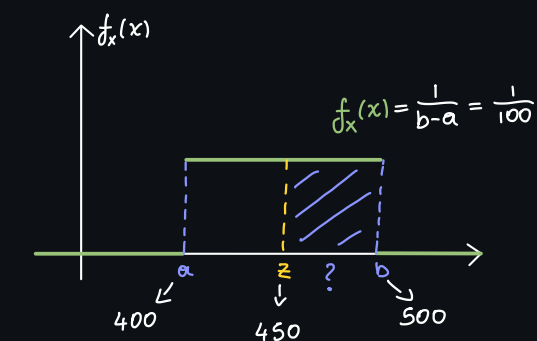
$P(\text{"costo compreso tra 450 e 500 €"})$

$\rightarrow X \sim U(400, 500)$

$\Rightarrow P(\{450 < X < 500\}) = ?$

Soluzione

Siccome la PDF è costante, la prob è:



$$P(\{450 < X < 500\}) = \int_{450}^{500} f_X(x) dx = [F_X(500) - F_X(450)]$$

$$\frac{1}{100} \int_{450}^{500} dx = \frac{1}{100} [500 - 450] = \frac{1}{100} \cdot 50 = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{x-a}{b-a} \right]_{450}^{500} = \frac{500-400}{500-400} - \frac{450-400}{500-400} = 1 - \frac{50}{100} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Sono due strade equivalenti ed entrambe valide

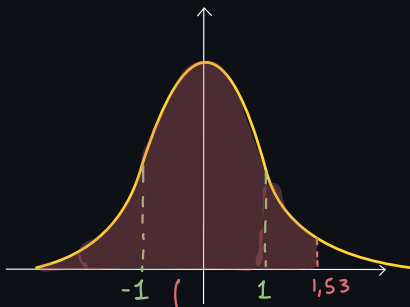
2) $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$

Standard

a) $P\{X_0 \leq 1,53\}$

$$PDF_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$CDF_f = 1 - F_{X_0}(x)$$



$$F_{X_0}(1,53) = 1 - Q(1,53) = 1 - 0,0630083 = 0,937$$

Usiamo la
TABELLA

Stesso
risultato

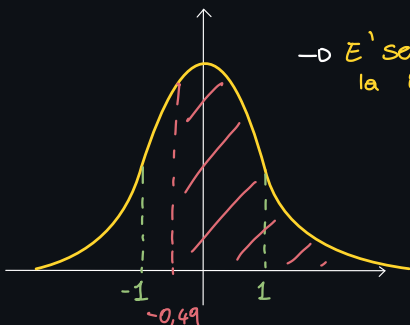
Usando la PDF.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,53} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{1,53} = 0,936...$$

$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

\downarrow
Q(x)

b) $P\{X_0 \geq -0,49\}$



→ E' semplicemente
la Q function

$$\rightarrow P = Q(-0,49)$$

c) $P\{-1 < X < 1\} = [1 - Q(1)] - [1 - Q(-1)] = 1 - Q(1) - 1 + Q(-1) = Q(-1) - Q(1)$

$$Q(-1) = 1 - Q(1)$$

$$= 1 - 2Q(1) = 1 - 0,159 = 0,682 = 68\%$$

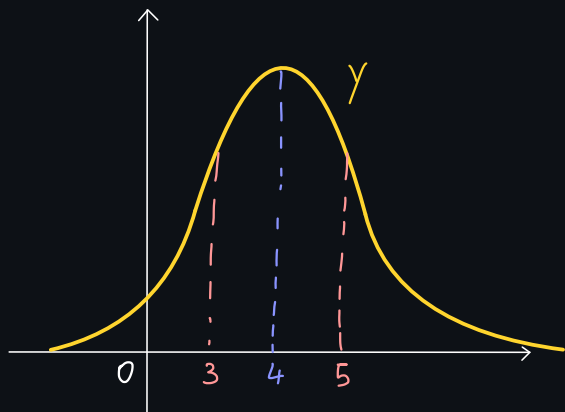


3) Gaussian Non Standard

a) $P(\{Y \geq 5\}) = Q\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5-4}{1}\right) = Q(1) = 0,159 \approx 15\%$

$Y = X_0 + 4$
 \uparrow
 c. standard

$\rightarrow Y \sim \mathcal{N}(4, 1)$



b) $P(\{3 < Y < 5\}) = [1 - Q(1)] - [1 - Q\left(\frac{3-4}{1}\right)] = 1 - Q(1) - 1 + Q(-1) = Q(-1) - Q(1)$

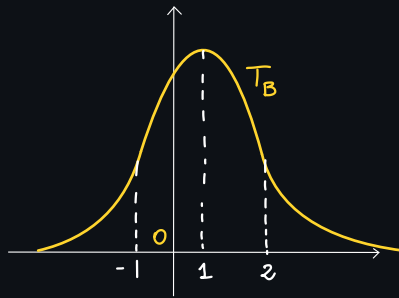
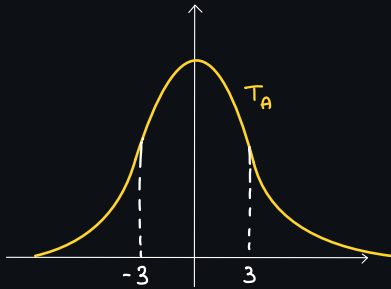
$= 1 - Q(1) - Q(1) = 1 - 2Q(1) = 1 - 2 \cdot 0,159 = 0,68 \approx 68\%$

1:32

Ex. 3 In un frigorifero sono conservate 5 provette della sostanza A e 15 della sostanza B. La temperatura della sostanza A viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (0,3) mentre quella della sostanza B viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (1,2). Avendo misurato una temperatura minore di zero in una provetta scelta a caso, calcolare la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza di tipo A.

5 provette di A $\rightarrow X \sim \mathcal{N}(0,3)$

15 provette di B $\rightarrow X \sim \mathcal{N}(1,2)$



$$P(A/T < 0) = ?$$

Siccome abbiamo 5 di A e 15 di B, A e B non sono equiprobabili!

$$\begin{aligned} P(\text{P. di estrarre A}) &= \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \\ P(\text{P. di estrarre B}) &= \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad \text{diversi}$$

\Rightarrow Sfruttiamo le leggi della probabilità: Legge di Bayes

Se usiamo Gauss
Non St. $\rightarrow Q\left(\frac{0-0}{\sqrt{3}}\right) = Q(0)$

\uparrow

$$P(A/T < 0) = \frac{P(A)}{P(T < 0)} \cdot P(T < 0 / A)$$

$$\Rightarrow P(T < 0 / A) = P(T_A < 0) = 1 - Q(0) = \frac{1}{2}$$

"Prob che T sia zero dopo che si verifica A" $\equiv T_A$

Invertiamo

$$P(T < 0) = P(A) \cdot P(T < 0 / A) + P(B) \cdot P(T < 0 / B)$$

$$P(T_B < 0) = 1 - Q\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q(0,7071) = 1 - 0,47 = 0,53$$

Legge della Prob. Totale

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{53}{100} = 0,52 \quad \text{Risultato prof?}$$

$$\text{Quindi: } P(A/T < 0) = \frac{P(A)}{P(T < 0)} \cdot P(T < 0 / A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{41}{100}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{82} \approx 30\%$$

Probabilità di pescare una provetta A

