# Legami ingresso-uscita per le funzioni di correlazione

# Legami ingresso-uscita per le funzioni di correlazione

## Componente continua dell'uscita

**Esempio 1:** $y_{dc}$ = Media Temp del segnale $= \langle y(\cdot) \rangle$

$$y_{ac} = y(\cdot) - y_{dc} = y(\cdot) - y_{dc}$$

Sistema discreto. op di conv.

$$y_{dc} = \langle y(n) \rangle = \langle h(n) * x(n) \rangle = \langle \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) \cdot x(n-K) \rangle$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle h(K) \cdot x(n-K) \rangle}_{h(K) \cdot \langle x(n-K) \rangle}$$

Perche' la media e' su n

L'op. di media non e' influenzata dalle traslazioni $\Rightarrow \langle x(n-K) \rangle = \langle x(n) \rangle = x_{dc}$

$$= \underbrace{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)}_{H(0)} \cdot x_{dc} \Rightarrow y_{dc} = H(0) \cdot x_{dc}$$

Guadagno del sistema

Il guadagno in continua dell'uscita e' proporzionale tramite coefficiente di proporzionalita' $H(0)$ per la componente $x_{dc}$

## Legami IN/OUT in termini di f di autocorrelazione


$\Rightarrow$ Possiamo scrivere: $r_{y_1y_2}(\cdot) = r_{x_1x_2}(\cdot) * r_{h_1h_2}(\cdot)$

proof: $$r_{y_1y_2} = \langle y_1(n), y_2(n-m) \rangle = \langle \sum_{K_1=-\infty}^{+\infty} h_1(K_1) \cdot x_1(n-K_1), \sum_{K_2=-\infty}^{+\infty} h_2(K_2) \cdot x_2(n-m-K_2) \rangle$$

Ritardo

$$= \sum_{K_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{K_2=-\infty}^{+\infty} h_1(K_1) h_2^*(K_2) \langle x_1(n-K_1), x_2(\underbrace{n-m-K_2}_{n-K_1+K_1-m-K_2}) \rangle$$

$n-K_1+K_1-m-K_2$

$\downarrow$

$n-K_1-(K_2+m-K_1)$

$$= \sum_{K_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{K_2=-\infty}^{+\infty} h_1(K_1) h_2^*(K_2) \overbrace{\langle x_1(n-K_1), x_2[n-K_1-(K_2+m-K_1)] \rangle}^{r_{x_1x_2}(K_2+m-K_1)}$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) h_2^*(k_2) \cdot r_{x_1x_2}(k_2+m-k_1)$$

$$= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_2^*(k_2) \underbrace{\left[\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) \cdot r_{x_1x_2}(k_2+m-k_1)\right]}_{h_1(m+k_2) * r_{x_1x_2}(m+k_2)}$$

$h_2^*(-(k+m))$

$$= k = m + k_2 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[h_1(k) * r_{x_1x_2}(k)\right] \cdot h_2^*(k-m)}$$

$$= h_1(m) * r_{x_1x_2}(m) + h_2^*(-m) = r_{x_1x_2}(m) * \underbrace{h_1(m) * h_2^*(-m)}_{r_{h_1h_2}(m)}$$

$$r_{y_1y_2} = r_{x_1x_2}(m) * r_{h_1h_2}(m)$$

Correlazione VS Convoluzione

$$r_{xy}^{(m)} = \langle x(n), y(n-m) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y^*(k-m)$$

nella conv non c'e' il coniugato

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot h(n-k)$$

Nella conv il segnale viene "ribaltato"

$\rightarrow$ Per scrivere la corr come conv : $r_{xy}(m) = x(n) * y^*(n-m)$

**Esempio 1:** *Caso particolare*

$$x_1(\cdot) \longrightarrow \boxed{h_1(\cdot)} \longrightarrow y_1(\cdot)$$

$$x_2(\cdot) \longrightarrow \boxed{h_2(\cdot)} \longrightarrow y_2(\cdot)$$

Dato i sistemi (stessi di prima) quali sono i legami tra le funzioni di autocorrelazione?

Relazione tra f di autocorrelazione

$$\boxed{r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot)}$$

$$r_x(\cdot) \longrightarrow \boxed{r_h(\cdot)} \longrightarrow r_y(\cdot)$$

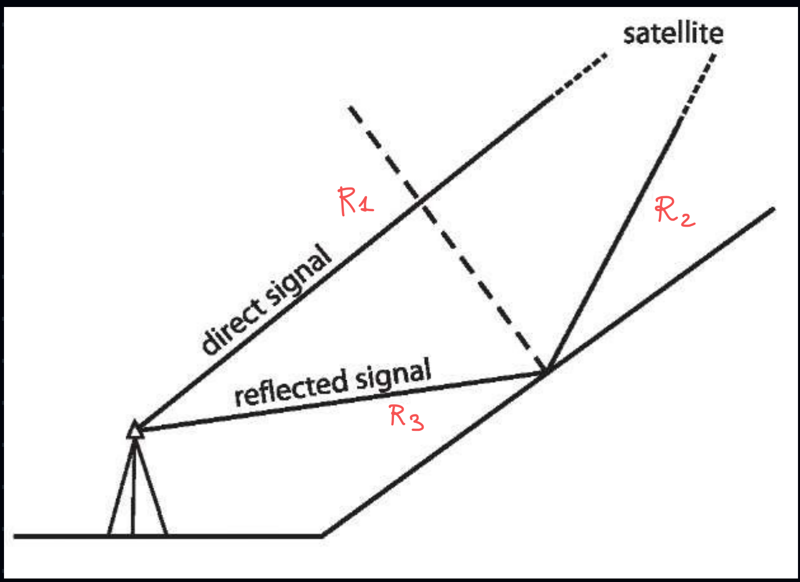
=> A che ci serve?

Se conosciamo $r_x(\cdot)$ ed $r_h(\cdot)$ non c'è motivo di calcolarci $y(\cdot) = x(\cdot) * h()$, per poi trovare $r_y(\cdot)$. Per calcolare $r_y(\cdot)$ ci basta fare la convoluzione tra $r_x(\cdot)$ e $r_h(\cdot)$.

**Esempio 2:** 33:00 Lez 24

# Utilizzo pratico: Cammini Multipli

Multi Path




Un segnale puo' arrivare a destinazione seguendo diversi percorsi.
A seconda del percorso seguito il segnale arrivera' da piu' o meno ritardato.

- $\tau_1 = \dfrac{R_1}{c}$
- $\tau_2 = \dfrac{R_2 + R_3}{c}$

Il segnale in presenza di cammini multipli

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \quad x(t - t_i)$$

Coefficienti di attenuazione

Ritardi

Siccome in ricezione riceviamo la sommatoria complessiva del segnale, come facciamo a capire il Ritardo e l'attenuazione del segnale?

⇒ Tecnica del calcolo della funzione di mutua correlazione

$$\to \quad r_{yx}(\tau) = \langle y(t), x(t-\tau) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot x(t-t_i) \;, x(t-\tau) \rangle$$

Supponiamo che i segnali siano dei segnali di Energia (limitati)

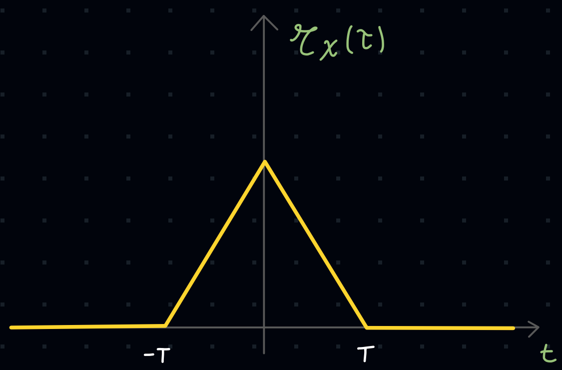
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, x(t-t_i) \cdot x^*(t-\tau)\, dt = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_i) \cdot x^*(\underbrace{t-\tau}_{t-t_i+t_i-\tau})\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_i) \cdot x^*\big(t - t_i - (\tau - \tau_i)\big)\, dt$$

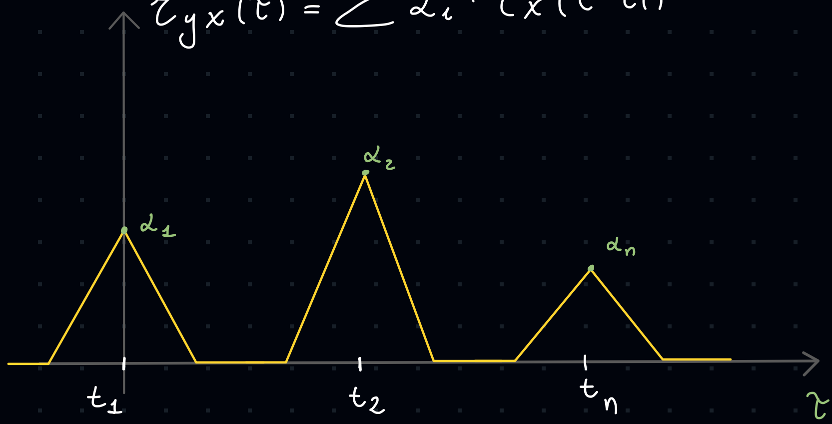
Riconosciamo la f di autocorr.

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot r_x(\tau - \tau_i)$$

Se supponiamo di avere in ingresso una Rect, avremo.

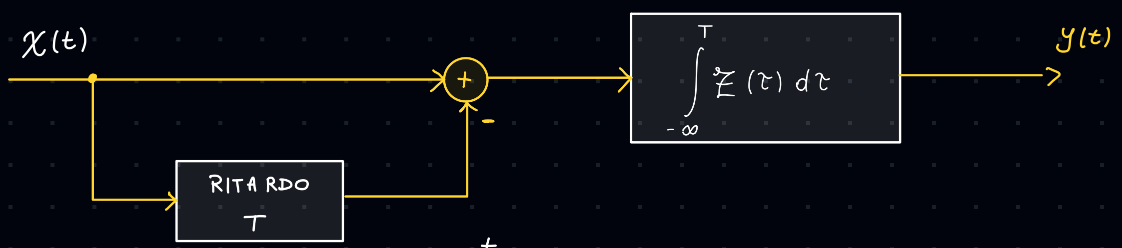



$$r_{yx}(\tau) = \sum \alpha_i \cdot r_x(\tau - \tau_i)$$



## ESEMPIO 1) Zero Order Filtro Interpolante

E' un sistema LTI avente un certo ritardo $T$ che viene sottratto al segnale.




In formule...
$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) - x(\tau - T)\, d\tau$$

Calcoliamo l'uscita dato $x(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right)$ ← centrata, ← durata

1) Impulse Response?

$h(t) =$ " La risposta del sys all'impulso " $\to$ poniamo l'impulso al posto della $x$

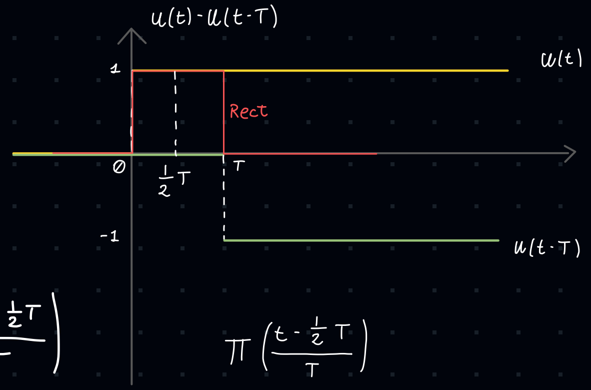
$$\to h(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\delta(\tau) - \delta(\tau - T)\right) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)\, d\tau$$

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \to \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & otw \end{cases} \to u(t)$

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)\, d\tau \to u(t-T)$

$$= u(t) - u(t-T)$$

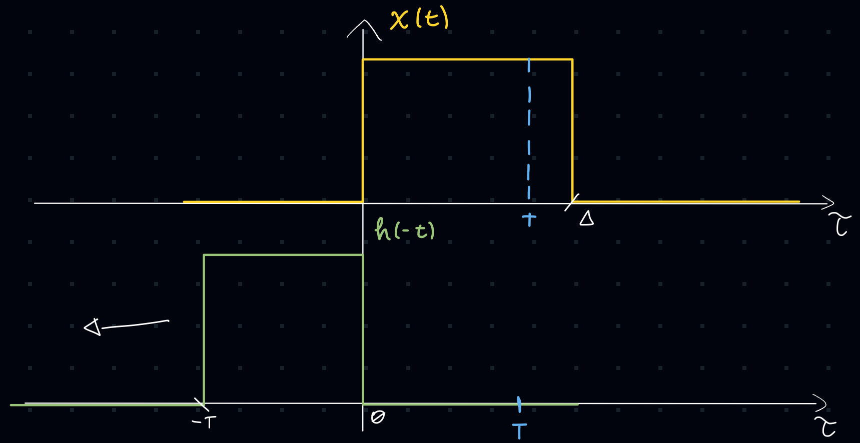
$$= \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \quad h(t)$$



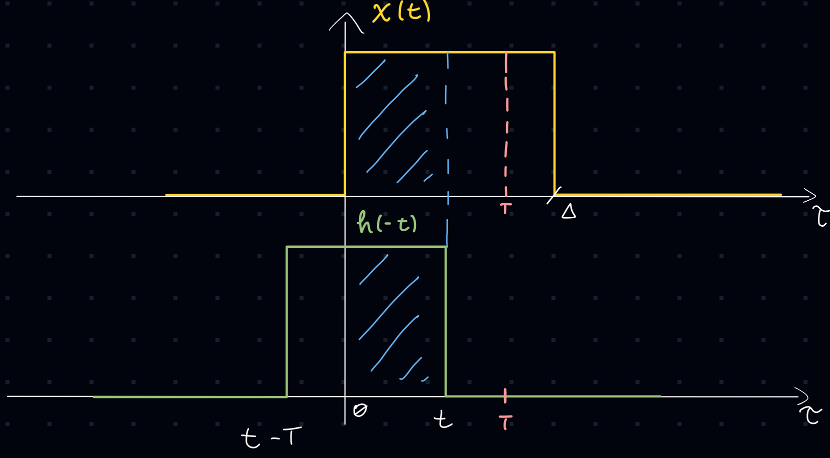

$\to$ Possiamo quindi calcolarci l'uscita come convoluzione di:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right) * \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

Supponiamo che $\Delta > T$



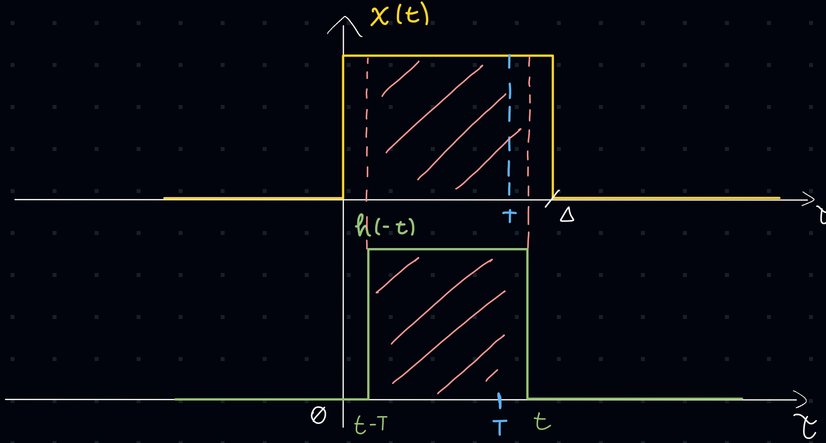

Caso 1: $t \leq 0 \to y(t) = 0$




## Caso 2 per $\emptyset < t < T$

$$\Rightarrow \int_0^t \Pi\left(\frac{\tau-\frac{1}{2}\Delta}{\Delta}\right)\cdot\Pi\left(\frac{\tau-\frac{1}{2}T}{T}\right)d\tau$$

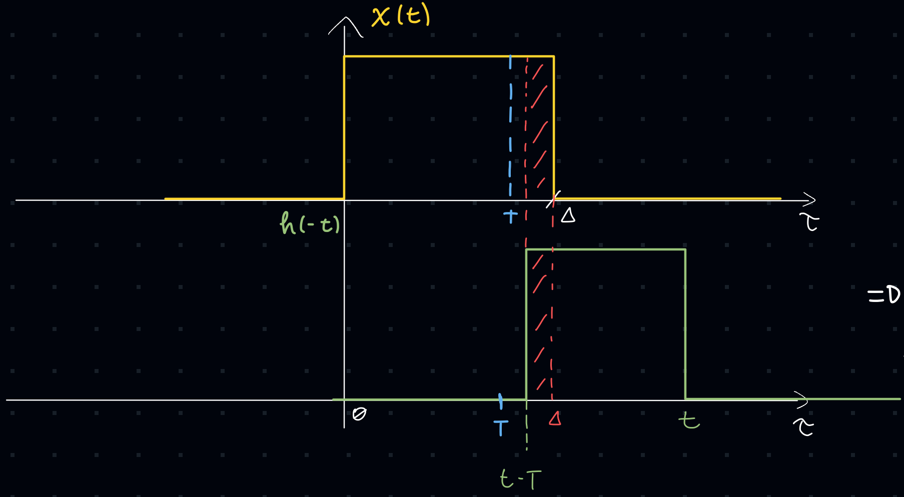
$$= \int_0^t dt = dt = t$$




## Caso 3:

$$\begin{cases} t > T \\ t < \Delta \end{cases} \Rightarrow T < t < \Delta$$

$$\Rightarrow \int_{t-T}^{t} d\tau = \cancel{t}-\cancel{t}+T = T$$




## Caso 4:

$$\begin{cases} t > \Delta \\ t-T < \Delta \end{cases} \quad \begin{cases} t > \Delta \\ t < \Delta + T \end{cases}$$

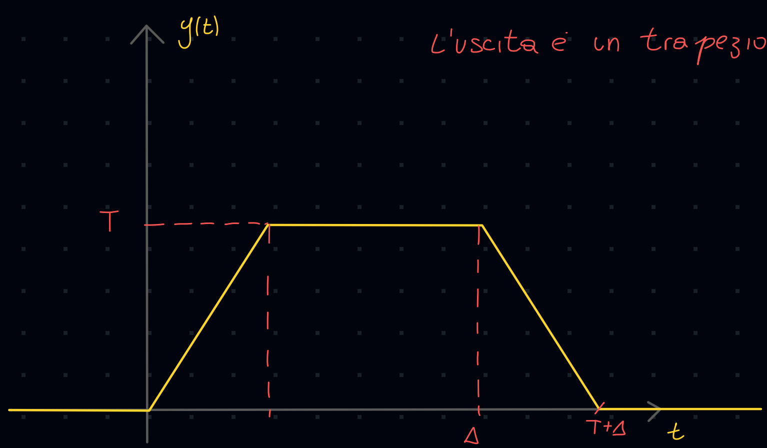
$$\Rightarrow \quad \Delta < t < T+\Delta$$

$$\Rightarrow \int_{t-T}^{\Delta} d\tau = \Delta - t + T$$

## Caso 5)

$t-T > \Delta \Rightarrow t > T+\Delta \quad \Rightarrow y(t) = \emptyset$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < \emptyset \\ t & 0 \leq t < T \\ T & T \leq t < \Delta \\ \Delta - t + T & \Delta \leq t < T+\Delta \\ 0 & t \geq \Delta + T \end{cases}$$




L'uscita è un trapezio

## Procedura per la convoluzione Continua

1) RIFLESSIONE di uno dei due segnali: $x(t) \to x(-t)$ / $h(t) \to h(-t)$

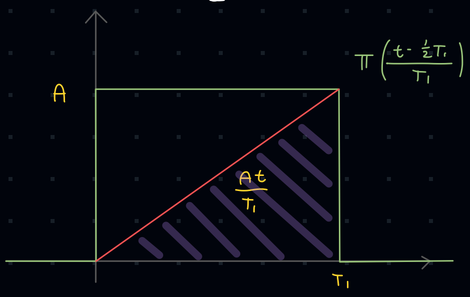
2) TRASLAZIONE
- $t > 0 \to$ Dx
- $t < 0 \to$ Sx

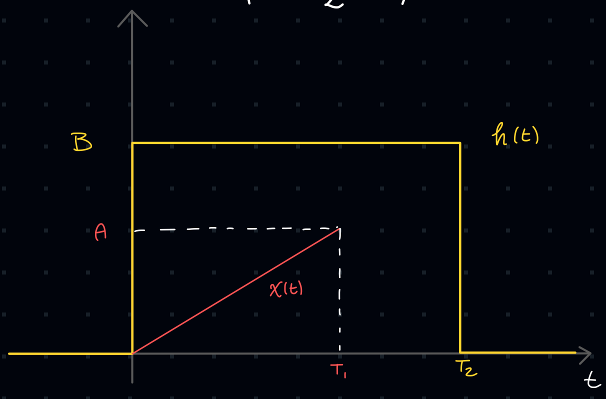
3) CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEL PRODOTTO

→ Ripetuto per ogni intervallo di integrazione.

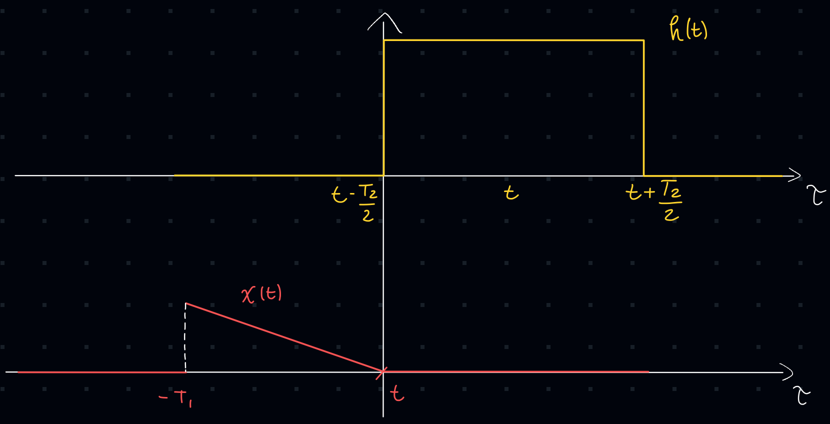
# ESEMPIO 2)

$$x(t) = \frac{At}{T_1}\,\Pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}T_1}{T_1}\right) \qquad h(t) = B\,\Pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}T_2}{T_2}\right) \qquad \begin{cases} T_2 > T_1 \\ B > A \end{cases}$$



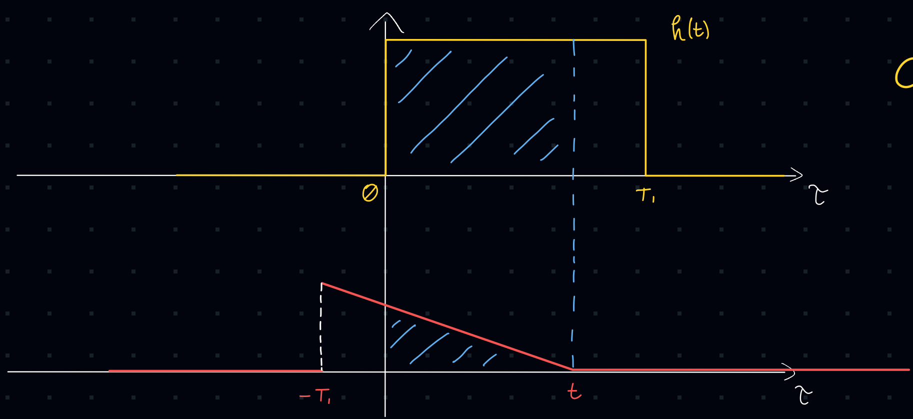




Calcoliamo la conv $(x(t), h(t))$




Caso 1: $x(t) \cdot h(t) = \emptyset$

$\Rightarrow y(t) = \emptyset$ per $t<0$




Caso 2: $\begin{cases} t>0 \\ t<T_1 \end{cases} \rightarrow \quad 0<t<T_1$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t \frac{A \cdot B\,(t-\tau)}{T_1}\,d\tau$$

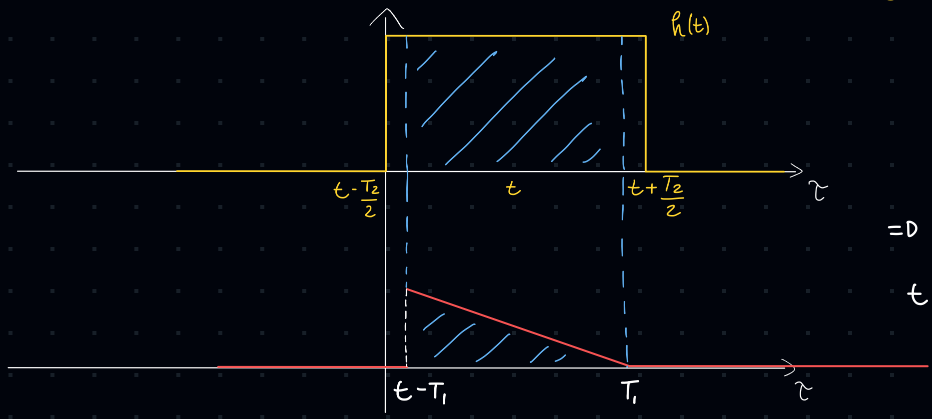
$$= AB\int_0^t \frac{t-\tau}{T_1}\,d\tau = \frac{AB}{T_1}\int_0^t t-\tau\,d\tau$$

$$= \frac{AB}{T_1}\left[t\int_0^t d\tau - \int_0^t \tau\,d\tau\right] = \frac{AB}{T_1}\left[t^2 - \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t\right] = \frac{AB}{T_1}\left[t^2 - \frac{t^2}{2}\right] = \frac{AB}{T_1}\,\frac{t^2}{2}$$

$y(t)$ per $0<t<T_1$

Caso 3: $\begin{cases} t < T_2 \\ t - T_1 > 0 \end{cases} \begin{cases} t < T_2 \\ t > T_1 \end{cases}$

$\rightarrow \quad T_1 < t < T_2$



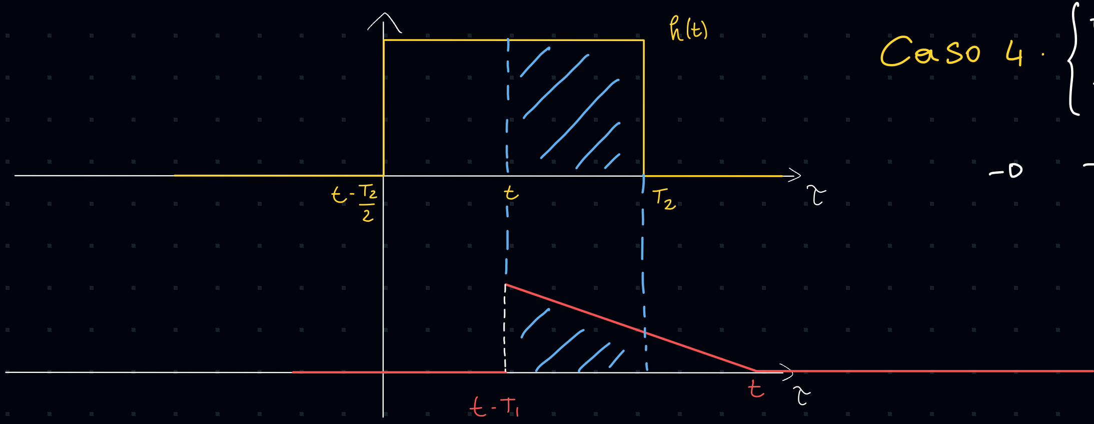

$$\Rightarrow \int_{t-T_1}^{T_1} \frac{AB(t-\tau)}{T_1}\, d\tau$$

$$= \frac{AB}{T_1} \int_{t-T_1}^{T_1} t - \tau\, d\tau = \frac{AB}{T_1}\left[ t \int_{t-T_1}^{T_1} d\tau - \int_{t-T_1}^{T_1} \tau\, d\tau \right] = \frac{AB}{T_1}\left\{ t\left[\cancel{T_1} - t + \cancel{T_1}\right] - \left[\frac{T_1^2}{2} - \left(\frac{t-T_1}{2}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{AB}{T_1}\left\{ -t^2 - \frac{T_1^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{T_1^2}{2} + tT_1 \right\} = \text{Dovrebbe uscire } \frac{AB}{2} T_1$$

Caso 4: $\begin{cases} t - T_1 < T_2 \\ t > t_2 \end{cases} \begin{cases} t < T_2 + T_1 \\ t > T_1 \end{cases}$

$\rightarrow \quad T_2 < t < T_1 + T_2$




$$\Rightarrow \int_{-t-T_1}^{T_2} \frac{AB\,(t-\tau)}{T_1}\, d\tau = \frac{AB}{T_1}\left(\frac{T_1^2}{2} - \frac{(T_2 - t)^2}{2}\right)$$

Caso 3: $y(t) = \emptyset$

* ES da rifare, la prof ha fatto confusione con gli intervalli

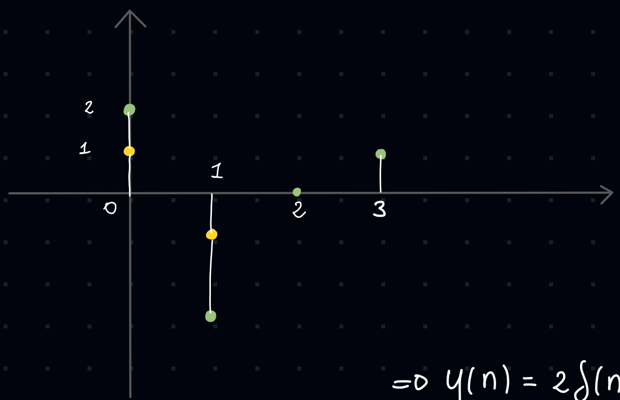
## ESEMPIO 3) - Caso Discreto

$x(n) = 2\delta(n) - 3\delta(n-1) + \delta(n-3)$ , $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

→ Calcolare la f di auto corr dell'uscita $y(n)$ e la sua Energia

### 1) Strada a)

→ $y(n) = x(n) * h(n)$ ①




| 2 | -3 | 0 | 1 | $x(n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | | | $h(n)$ |

$h(-n)$: -1 | 1

$y(0) = \underline{2}$

$y(1) = -2 + (-3) = \underline{-5}$

$y(2) = \underline{3}$

$y(3) = \underline{1}$

$y(4) = \underline{-1}$

$\Rightarrow y(n) = 2\delta(n) - 5\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-3) - \delta(n-4)$

② $\tau_y(m) = \langle y(n), y^*(n) \rangle$ → Stesso proc ma senza "flip"

| 2 | -5 | 3 | 1 | -1 | $y(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -5 | 3 | 1 | -1 | $y(n)$ |

| Shift | | Risultato |
|---|---|---|
| | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(0) = 4 + 25 + 9 + 1 + 1 = 40$ |
| Sx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(1) = -10 - 15 + 3 - 1 = -23$ |
| Dx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(-1) = -10 - 15 + 3 - 1 = -23$ |
| Sx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(2) = 6 - 5 - 3 = -2$ |
| Dx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(-2) = -2$ |
| Sx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(3) = 2 + 5 = 7$ |
| Dx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(-3) = 7$ |
| Sx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(4) = -2$ |
| Dx | 2 \| -5 \| 3 \| 1 \| -1 | $y(-4) = -2$ |

È indifferente se shiftiamo a dx o a Sx !

$\Rightarrow \tau_y(m) = 40\delta(n) - 23\delta(n-1) - 23\delta(1-n) - 2\delta(n-2) - 2\delta(2-n) + 7\delta(n-3) + 7(3-n) - 2\delta(n-4) - 2\delta(4-n)$

→ Siccome l'energia di un segnale è data dalla sua autocorrelazione valutata in zero :

$\mathcal{E}_y = \tau_y(0) = \underline{40}$