Proprietà di convoluzione, derivata ed integrale della trasformata di Fourier

LEZ 28

Impulso RF - Caso particolare

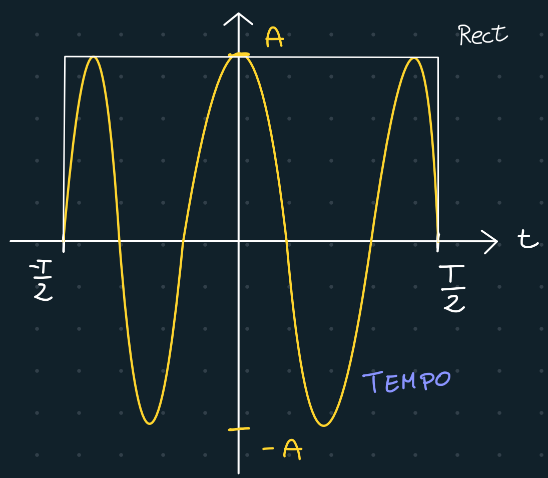
$2f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{2f_c}$

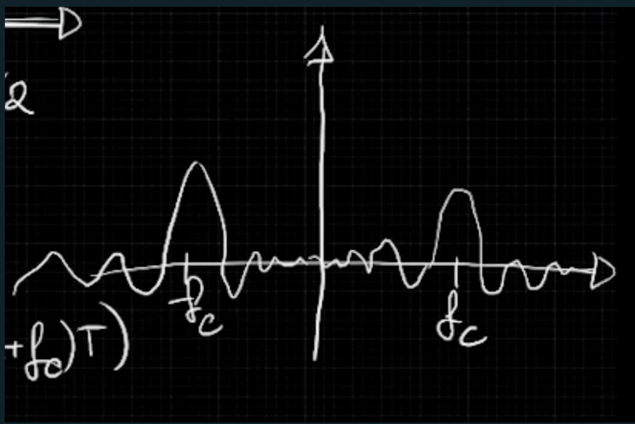
$$x(t) = \underbrace{A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}_{\text{MODULAZIONE}}$$

pongo $f_c = \frac{1}{2T} \Rightarrow x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot \cos(2\pi f_c t)$

→ Prop della Modulazione: $x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{A}{2}X(f-f_c)+\frac{A}{2}X(f-f_c)}_{\text{2 segnali Sinc}}$ a)

Cos FINESTRATO





Impulso Modulato rettangolare

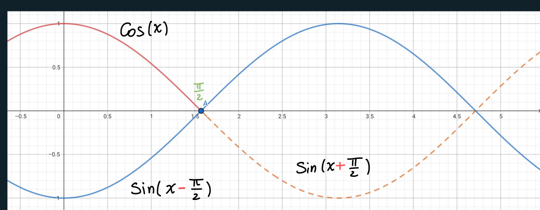
Continuiamo a) $\frac{A}{2}X(f-f_c)+\frac{A}{2}X(f-f_c)$ con $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{Sinc}(fT)$

→ $\frac{A}{2}T\,\text{Sinc}(T(f-f_c)) + \frac{A}{2}T\,\text{Sinc}(T(f+f_c)) \xrightarrow[f_c=\frac{1}{2T}]{} \frac{A}{2}T\,\text{Sinc}\left(T\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right) + \frac{A}{2}T\,\text{Sinc}\left(T\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right)$

→ $\frac{A}{2}T\,\text{Sinc}\left(fT-\frac{1}{2}\right) + \frac{A}{2}T\,\text{Sinc}\left(Tf+\frac{1}{2}\right)$ → Esplicitiamo la Sinc: $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A}{2}T\,\frac{\sin\left(\pi fT+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi fT-\frac{\pi}{2}} + \frac{A}{2}T\,\frac{\sin\left(\pi fT+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi fT+\frac{\pi}{2}}$

Sappiamo che $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$



$\Rightarrow -\frac{A}{2}T\,\frac{\cos(\pi fT)}{\pi fT-\frac{\pi}{2}} + \frac{A}{2}T\,\frac{\cos(\pi fT)}{\pi fT+\frac{\pi}{2}}$

→ Mettiamo in Evidenza → $\frac{1}{2}AT\cos(\pi fT)\left[\frac{1}{\pi fT+\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi fT-\frac{\pi}{2}}\right]$ → MCM →

→ $\frac{1}{2}AT\cos(\pi fT)\left[\frac{\cancel{\pi fT}-\frac{\pi}{2}-\cancel{\pi fT}-\frac{\pi}{2}}{\pi^2f^2T^2-\frac{\pi^2}{4}}\right] = \frac{1}{2}AT\cos(\pi fT)\left[\frac{-\pi}{-\pi^2f^2T^2+\frac{\pi^2}{4}}\right]$ Mettiamo il "-" → in Evidenza

→ $\frac{1}{2}AT\cos(\pi fT)\left[\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}-\pi^2f^2T^2}\right] \xrightarrow[\frac{\pi^2}{4}]{\text{Evidenza}} \frac{1}{2}AT\cos(\pi fT)\left[\frac{\cancel{\pi}}{\frac{\pi^{\cancel{2}}}{4}\left(1-4f^2T^2\right)}\right]$

→ Moltiplichiamo → $\frac{2\,\cancel{\frac{1}{2}}\,AT\cos(\pi fT)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(1-(2fT)^2\right)}$ → $\frac{2AT\cos(\pi fT)}{1-(2fT)^2}$

Prendiamo in considerazione la forma generale:

$$\boxed{AT\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot \cos(2\pi f_c t) \rightleftharpoons \frac{1}{2}AT\,\mathrm{Sinc}\left(T(f-f_c)\right) + \frac{1}{2}AT\,\mathrm{Sinc}\left(T(f+f_c)\right)}$$

FINESTRA MODULATA

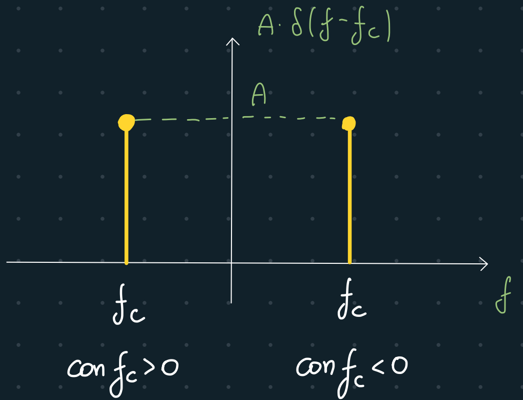
Trasformata di un fasore

$x(t) = A\cdot e^{j2\pi f_c t}$

Per effettuare la Trasformata di un fasore, invece di effettuare calcoli inutili, possiamo sfruttare le proprietà viste nella lez precedente:

$$x(t)\cdot e^{j2\pi f_c t} \rightleftharpoons X(f-f_c) \quad \Rightarrow \text{ in questo caso } \Rightarrow \underbrace{A}_{x(t)}\cdot \underbrace{e^{j2\pi f_c t}}_{\text{Fasore}} = \mathcal{F}[A(f-f_c)]$$

Siccome $A \rightleftharpoons A\cdot\delta(f) \Rightarrow A\cdot e^{j2\pi f_c t} \rightleftharpoons A\cdot \tilde{\delta}(f-f_c)$



Scambio Alte - basse frequenze

Moduliamo il segnale $s(n) = x(n)\cdot(-1)^n$

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere $(-1)^n$ come $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$ perché $e^{j\pi n} = \cos(\pi n) + \cancel{j\sin(\pi n)}$

+1, -1, +1, ...

Sempre zero per $k\pi$

quindi $x(n)\cdot(-1)^n = x(n)\cdot\cos(\pi n)$

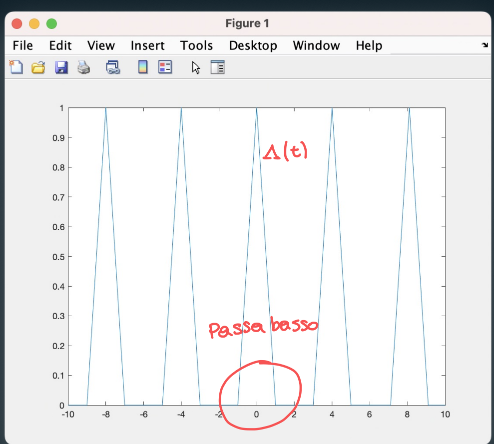
$\Rightarrow \cos\left(\pi\frac{n}{T}\right) \Rightarrow T=1 \Rightarrow$ Si ripete ogni π

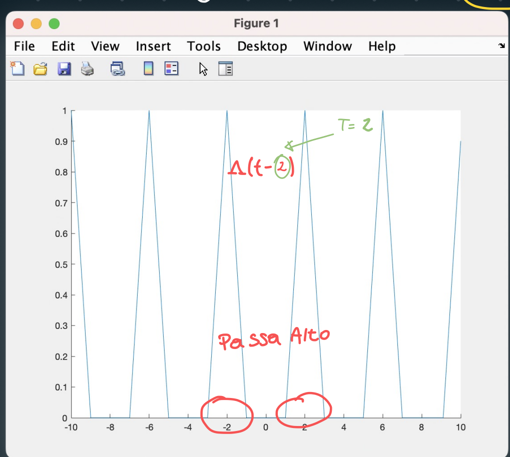
poniamo $\nu_c = \frac{1}{2T} \Rightarrow x(n)\cdot\cos(\pi\, 2\nu_c n)$

Applichiamo la proprietà di modulazione: $x(n)\cdot\cos(2\pi\nu_c n) \rightleftharpoons X(\nu-\nu_c)$

Se poniamo la freq discreta ν_c pari a: $\nu_c = \frac{1}{2} \Rightarrow X(\nu-\nu_c) = X\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$

L'effetto in freq è la traslazione del segnale di $\frac{1}{2}T$





Il periodo della finestra triangolare è $T=2$

Proprieta' di Convoluzione

Tempo → Frequenza

$x(\cdot) * y(\cdot) \rightleftharpoons X(\cdot) \cdot Y(\cdot)$

Convoluzione ↑ ↑ Prodotto

Nel dominio della freq invece di fare la convoluzione ci basta moltiplicare

- Proprieta' Duale : tempo continuo
  $x(t) \cdot y(t) \rightleftharpoons X(f) * Y(f)$

- Proprieta' Duale : tempo discreto
  $x(n) \cdot y(n) \rightleftharpoons X(\nu) * Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, Y(\nu - u)\, du$

  Convoluzione periodica

Esempio

$y(t) = x(t) * x(t)$ con $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

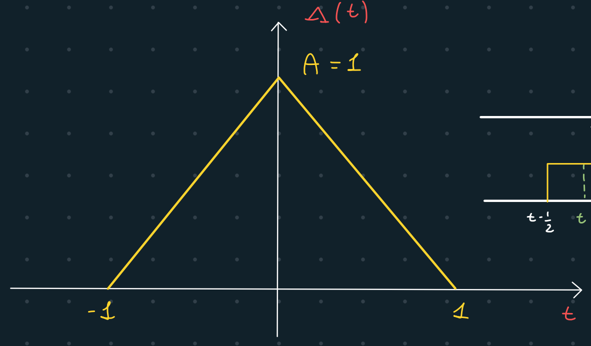
nel dominio del tempo sarebbe una convoluzione con casi, ecc.

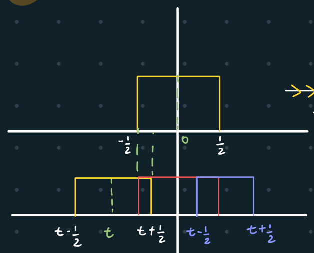
→ Freq: $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\, \text{Sinc}(fT)$
↑ 1

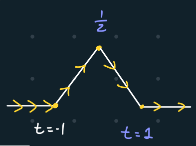
$\Rightarrow \boxed{y(t) = T^2\, \text{Sinc}^2(fT)}$

Trasformata del Segnale Triangolare

→ Perche'? → $\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T_2}\right)$ dove $T_1 = T_2$







$\left.\begin{aligned} t+\tfrac{1}{2} > -\tfrac{1}{2} &\rightarrow t > -1 \\ t+\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2} &\rightarrow t < 1 \end{aligned}\right\} -1 < t < 1$

$\left.\begin{aligned} t-\tfrac{1}{2} > 0 &\rightarrow t > \tfrac{1}{2} \\ t-\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2} &\rightarrow t < 1 \end{aligned}\right\} \tfrac{1}{2} < t < 1$

$\left[\underbrace{x_1(\cdot) * x_2(\cdot)}_{y(\cdot)} \rightleftharpoons \underbrace{X_1(f) \cdot X_2(f)}_{y(\cdot)}\right] = y(\cdot)$

Proprietà del valore nell'origine

Consideriamo $x() \rightleftharpoons X(\cdot)$

Eq. Analisi = F.T. = $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$ → quanto vale per $f=0$? = $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{0} dt$

Tempo continuo

Eq. Analisi = F.T. = $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi \nu n}$ → $\nu = 0$ → $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{0}$

Tempo discreto

Area del segnale nel Dominio del tempo

Morale della favola

Il valore nell'origine dello spettro equivale al calcolo dell'area del segnale nel dominio del tempo!

t continuo

Eq. Sintesi = I.F.T = $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$ → $t = 0$ → $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df$

Area dello spettro

t. Discreto

Eq. Sintesi = I.F.T = $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu) \cdot e^{j2\pi \nu n} d\nu$ → $n = 0$ → $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu)\, d\nu$

Area dello spettro nel periodo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Derivazione nel dominio del tempo

Partiamo da un segnale $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Possiamo scrivere $y(t)$ come :

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \underset{\text{I.F.T.}}{=} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt} \cdot e^{j2\pi f t} df$$

$\hookrightarrow j2\pi f \, e^{j2\pi f t}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot j2\pi f \cdot e^{j2\pi f t} df$$

Se abbiamo un segnale nel d.Tempo che è la Derivata di un altro segnale $x(t)$ nel dominio della freq. $y(f)$ sarà lo spettro del segnale $x(t)$ moltiplicato per $j2\pi f$

Possiamo scrivere $y(t)$ anche come:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \underset{\text{I.F.T.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

Egualiamo i due risultati: $\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} Y(f) \cancel{e^{j2\pi f t}} \cancel{df} = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} X(f) \cdot j2\pi f \cdot \cancel{e^{j2\pi f t}} \cancel{df}$

restiamo con: $Y(f) = X(f) \cdot j2\pi f$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \rightleftharpoons X(f) \cdot j2\pi f}$

Per Derivata prima

Possiamo anche avere un segnale $y(t)$ che è la Derivata K-esima di un segnale $x(t)$

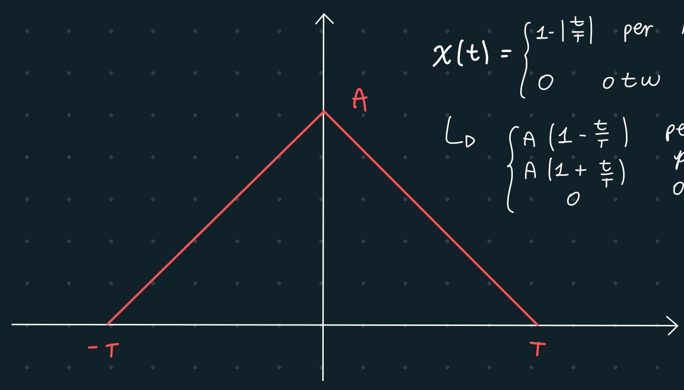
$\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t) \rightleftharpoons X(f) \cdot (j2\pi f)^k}$

E con il tempo Discreto?

$$y(n) = \underbrace{x(n) - x(n-1)}_{\text{Derivata Discreta}} \rightleftharpoons Y(v) = X(v) \cdot (1 - e^{-j2\pi v})$$

Esempio

$x(t) = A\,\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ vogliamo calcolare $s(t) = \frac{d}{dt}\,x(t) = ?$

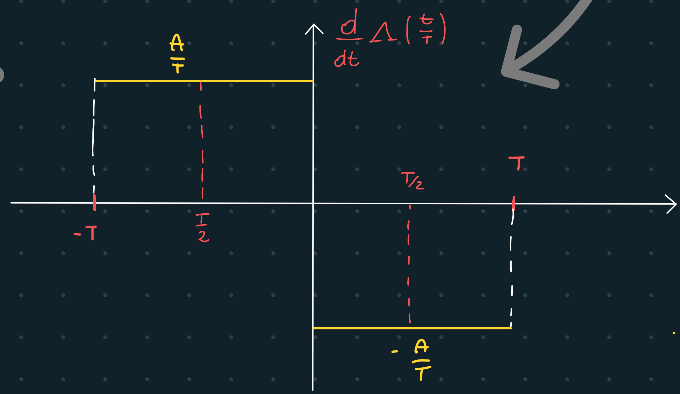


$$x(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & \text{per } |t| < 1 \\ 0 & otw \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} A\left(1 - \frac{t}{T}\right) & \text{per } 0 < t \leq T \\ A\left(1 + \frac{t}{T}\right) & \text{per } -T \leq t < 0 \\ 0 & otw \end{cases}$$

Derivo

$$\Rightarrow s(t) = \frac{d}{dt}\,x(t) = \begin{cases} -\frac{A}{T} & 0 < t < T \\ \frac{A}{T} & -T < t < 0 \\ 0 & \end{cases}$$



Possiamo quindi riscriverci
La Deriv. della $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ come la Somma di due Rect:

$$s(t) = \frac{d}{dt}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{A}{T}\,\Pi\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\,\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$\Rightarrow S(f) = \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}x\right) \cdot j2\pi f \quad \Rightarrow \begin{cases} A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\ \mathrm{Sinc}(\pi T) \\ \text{Lin.} \\ x(t - T_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}\,\mathrm{Sinc}(fT) \cdot e^{+j2\pi f\left(+\frac{T}{\cancel{2}}\right)} - \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \cdot \mathrm{Sinc}(fT) \cdot e^{-j\cancel{2}\pi f\left(\frac{T}{\cancel{2}}\right)}$$

Ampiezza   Periodo

$$= A\,\mathrm{Sinc}(fT)\,e^{j\pi f T} - A\,\mathrm{Sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi f T} = A\,\mathrm{Sinc}(fT)\underbrace{\left[e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right]}$$

$$\cancel{\cos(w)} + j\sin(w) - \cancel{\cos(w)} + j\sin(w) = 2j\sin(\pi f T)$$

$$= A\,\mathrm{Sinc}(fT) \cdot 2j\sin(\pi f T)$$

La Trasformata é valida anche così, ma non "vediamo" le due sinc

$\Rightarrow$ Moltiplico e divido per $(\pi f T)$ $\rightarrow A\,\mathrm{Sinc}(fT) \cdot \frac{2j\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot \pi f T = A\,\mathrm{Sinc}(fT) \cdot 2j\,\mathrm{Sinc}(\pi f T) \cdot \pi f T$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{d}{dt}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = AT\ \mathrm{Sinc}^2(fT) \cdot j2\pi f$$

Corrisponde alla proprietà della Derivata !

$\rightarrow$ Procedura Alternativa:

$s(t) = \frac{d}{dt}\,x(t)$ con $x(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

$\rightarrow$ Notiamo che $A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\ \mathrm{Sinc}^2(fT)$ $\rightarrow$ Applico la proprietà della Derivata $\rightarrow s(t) \rightleftharpoons \underline{AT\,\mathrm{Sinc}^2(fT) \cdot j2\pi f}$

$$\int_{-T}^{0} \frac{A}{T}\, dt - \int_{0}^{T} \frac{A}{T}\, dt = \frac{A}{T}\left[t\right]_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\left[t\right]_{0}^{T} = \frac{A}{\cancel{T}} \cdot (-\cancel{T}) - \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T} = -2A$$

Riassumendo :

Abbiamo $y(t) = \underbrace{A\Delta\left(\frac{t}{T}\right)}_{s(t)} \rightleftharpoons Y(f) = ?$

1^a Procedura : Non conosciamo la Trasformata

→ Immaginiamo che $s(t)$ sia la derivata di $x(t)$

$x(t)$ → Calcoliamo la Derivata del segnale → $\frac{d}{dt}x(t)$ → $\overbrace{s(t) = \frac{d}{dt}x(t) = X(f) \cdot 2\pi f}^{\text{Proprieta'}}$ →

→ $S(f) = X(f) \cdot 2\pi f$

2^a Procedura : Conosciamo la Trasformata del segnale

Conosciamo $s(t) \rightleftharpoons S(f)$ → $Y(f) = S(f) \cdot 2\pi f$

Proprieta' Di integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$$

abbiamo

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \rightleftharpoons Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0) \cdot \delta(f)}$$

Calcolo della trasformata del segnale gradino (step signal) e signum

Vedi la parte finale della lezione