Indice

Risposta in Frequenza di un sistema LTI

Se poniamo come ingresso un segnale **fasoriale** (fasore), possiamo dimostrare che in uscita avremo la **risposta in frequenza H(e^{jw})** che non dipende dal tempo, moltiplicato per il fasore iniziale:

Risposta in frequenza di un Sys LTI

$$x(n) = e^{jwn} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(n) = H(e^{jw}) \cdot e^{jwn}$$

W é COSTANTE $\rightarrow$ Non dipende da t

Se scriviamo il segnale di output come numero complesso (quale esso è!) con modulo e fase otteniamo:

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere $H(e^{jw})$ in coordinate polari:

- $H(e^{jw}) = \underbrace{|H(e^{jw})|}_{\text{MODULO}} \cdot e^{j \overbrace{\measuredangle H(e^{jw})}^{\text{FASE}}}$ $\Rightarrow y(n) = |H(e^{jw})| \cdot e^{j\measuredangle H(e^{jw})} \cdot e^{jwn}$

$$= |H(e^{jw})| \cdot e^{j(wn + \measuredangle H(e^{jn}))}$$

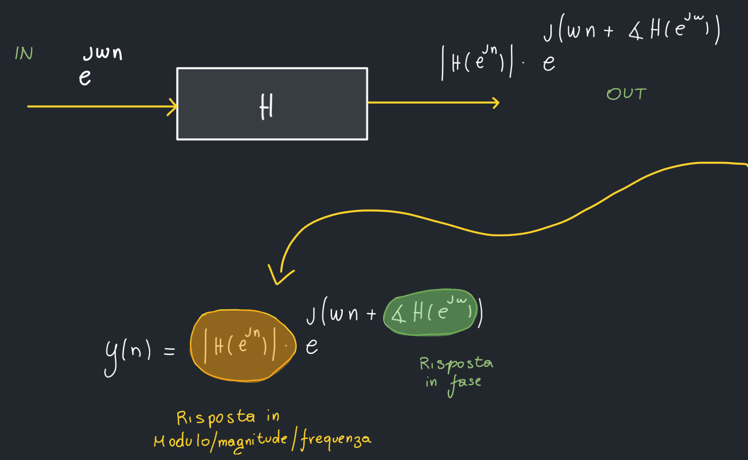
OUTPUT $y(t)$

Differenza tra input ed output

La differenza tra il segnale in input (fasore) ed il segnale in output (y(-)) sono principalmente due:

- Il segnale in output **ha ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza**
- il segnale in output avrà una **fase modificata**, pari proprio alla **fase della risposta in frequenza**.

Tiriamo le Somme:



Quali sono le diff tra i segnali in input e quelli in output?

- Il segnale in OUT ha ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza
- Il segnale in out, che aveva fase iniziale e^{jwn}, ha la fase modificata in $\measuredangle H(e^{jw})$

Capiamo quindi che **possiamo prevedere l'output** se conosciamo la risposta in frequenza H(-)!

Se poniamo in input una sinusoide complessa (**fasore**), questa in output **verrà amplificata** (moltiplicata per la risposta in frequenza) oltre ad essere **shiftata o sfasata** in base alla **risposta in fase**.

Relazione tra uscita e risposta impulsiva

Proviamo a scriverci la risposta come convoluzione tra risposta impulsiva ed ingresso:

$$\underbrace{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)}$$

Sappiamo che $y(\cdot)$ è dato dalla convoluzione tra in e $h(\cdot)$

Abbiamo poi detto di porre in input un fasore, quindi sostituiamo $e^{j\omega n}$ al segnale di ingresso x(n):

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{j\omega(n-k)}$$

Sostituiamo in input la sin. complessa (fasore)

Moltiplichiamo l'argomento dell'esponenziale e successivamente lo scriviamo come moltiplicazione di due exp:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega k}$$

Costante rispetto a k

Dividiamo l'esponenziale

Siccome una parte dell'exp è costante, possiamo portarla fuori:

$$\rightarrow y(n) = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} = e^{jwn} \cdot H(e^{jw})$$

Segnale ziale compl.

un valore costante rispetto al tempo $\rightarrow$ non dipende da n

Battezziamo la costante rispetto al tempo $H(e^{jw})$

Possiamo "battezzare" la sommatoria $H(e^{j\omega})$, che non è altro che la **trasformata di fourier a tempo discreto**, quindi:

$$\boxed{h(n) \xleftrightarrow{\text{DT FT}} H(e^{jw})}$$

Se conosco una delle due $h(\cdot)$ o $H(\cdot)$ posso determinare l'altra tramite la Trasf. di F. a Tempo discreto

Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è uno strumento matematico che usiamo per analizzare i segnali nel **dominio della frequenza**.

La trasformata è nota anche come "Rappresentazione nel dominio della frequenza" del segnale originale.

Overview

Per quali tipi di segnali è possibile calcolare la trasformata?

- Segnali di energia
- Segnali di potenza
  - Per ottenere la trasformata di questi segnali **dobbiamo usare le proprietà** perchè la formula della trasformata è applicabile solo a **segnali assolutamente integrabili**, ovvero per un segnale il quale integrale può essere calcolato per tutti i valori del tempo.
- Segnali correlati ad impulsi
  - Questi ultimi non sono ne segnali di energia ne segnali di potenza; c'è infatti un'eccezione per questo tipo di segnali.

Rappresentazione della trasformata di Fourier

Rappresentazione

$$x(t) \rightleftharpoons X(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hz}}}{f}) \quad \text{oppure} \quad X(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rad/s}}}{wj})$$

La trasformata di Fourier è un **numero complesso**, avrà quindi **un modulo (magnitute)** ed un **angolo o fase**:

$$X(jw) = X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Modulo}} \; \underbrace{\measuredangle X(f)}_{\text{Fase}}$$

Formule per la trasformata

Tempo ➔ Frequenza

La prima formula (**Trasformata di Fourier**) è usata per trasformare il segnale dal dominio del tempo al dominio della frequenza:

$$x(t) \longrightarrow X(f)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

Frequenza ➔ Tempo

Questa formula (**Trasformata inversa di Fourier**) è usata per tornare al dominio del tempo dal dominio della frequenza:

$$X(f) \longrightarrow x(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

Condizioni di esistenza della Trasformata Di Fourier

1. Il segnale deve avere un **numero finito di massimi e minimi** in un **intervallo finito qualsiasi**.

   "intervallo finito" ➔ La FT esiste anche per segnali non periodici, e quindi il "periodo di tempo" in questo caso non è definito.

2. Il segnale deve avere un numero finito di **discontinuità** in un qualsiasi intervallo finito.

3. Il segnale deve essere **assolutamente integrabile**, ovvero:

   $$\text{Abs. Finite}: \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt = n < \infty$$

   Se L'integrale del modulo del segnale ci restituisce un valore n diverso da infinito, allora il segnale è assolutamente integrabile.

   1. I **Segnali di energia** sono assolutamente integrabili (ad esempio la finestra .
   2. Gli **impulse related signals** sono assolutamente integrabili (segnali associati o generati da impulsi).
   3. I **Segnali di potenza** non sono assolutamente integrabili (ad esempio il gradino u(t) è un segnale di potenza).
   4. **I segnali nè di potenza nè di energia non sono assolutamente integrabili.**

La trasformata del gradino unitario

Perche' u(t) non ha una trasformata

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left(e^{0} - \underbrace{e^{-j2\pi f \infty}}_{\text{Indefinito}}\right)$$

Indefinito $\Rightarrow \mathcal{F}(u(t)) = \text{INDEF.}$

Possiamo però ottenere la trasformata se ricaviamo il segnale gradino unitario a partire da una delta:

Ricavare u(t) da una Delta (impulso)

$$u(t) \underset{F.T.}{\rightleftharpoons} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$