**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO**
**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA**

**CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA**

**Prova scritta del 14 settembre 2021**
Tempo a disposizione 2.30 ore

**Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.**
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto (± 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

**EX. 1**
Un esperimento consiste nel lanciare una moneta ben bilanciata 6 volte. Successivamente si contano i risultati in cui si ottiene testa e si lancia un'altra moneta nel caso in cui si sono ottenute almeno 3 teste.
Calcolare
1. la probabilità di lanciare la seconda moneta;
2. la probabilità che si ottenga testa nel lancio della seconda moneta.

**EX. 2**
Si consideri il segnale
$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-j2\pi 100t}$$
Calcolarne
1. l'energia e la densità spettrale di energia;
3. la funzione di autocorrelazione.

**EX. 3**
Il segnale $x(n) = 3\delta(n-1) - \delta(n-2)$, viene inviato in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(n) = R_3(n)$.
Calcolare
1. l'autocorrelazione e l'energia del segnale in uscita al sistema;
2. la densità spettrale di energia mutua tra uscita e ingresso.

**EX. 1**

Un esperimento consiste nel lanciare una moneta ben bilanciata 6 volte. Successivamente si contano i risultati in cui si ottiene testa e si lancia un'altra moneta nel caso in cui si sono ottenute almeno 3 teste.

Calcolare

1. la probabilità di lanciare la seconda moneta;
2. la probabilità che si ottenga testa nel lancio della seconda moneta.

$\Omega = \{$"6 lanci"$\}$ $\quad A = \{$"Escono 3 Teste su 6 lanci"$\}$

Nella Traccia leggiamo una parola "contano"; questo ci deve subito far venire in mente la "V.A. che conta" ovvero la Distribuzione Binomiale, definita come:

$X \sim B(n,p)$ dove n sono gli elementi totali da contare e p la probabilita' (uguale $\forall x \in A_X$) definiamo q come $1-p$.

Sappiamo che i lanci sono 6 $\Rightarrow 2^6 = 64$ possibili lanci. Piu' lanci uguali (solo T o solo C) vogliamo ottenere, minore sara' la probabilita', il perche' lo vedremo dopo...

Definiamo la PMF della V.A. B: $\quad p_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con $k = |\text{Lanci}|$ e $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\Rightarrow$ Nel nostro caso $n = 6$ e $k = \dots$ beh ragioniamoci:

Facciamo un esempio: Lanciamo la moneta 6 volte ma vogliamo ottenere MASSIMO 2 volte Testa

$\Rightarrow P(\{X \leq 2\}) = P(\{X=0\}) + P(\{X=1\}) + P(\{X=2\})$

Nel nostro caso vogliamo ottenere MINIMO 3 Teste $\Rightarrow$

$$P(\{X \geq 3\}) = P(\Omega) - [\underbrace{\text{Prob dei casi in cui si ottengono}}_{P(\{X=3\}) + P(\{X=4\}) + P(\{X=5\}) + P(\{X=6\})} \overset{\text{Almeno}}{\smile} \text{3 Teste}]$$

$$\Rightarrow P(\{X \geq 3\}) = 1 - P(\{X=3\}) + P(\{X=4\}) + P(\{X=5\}) + P(\{X=6\})$$

Come calcoliamo $P(\{X = x\})$ ?

Poniamo $k = 3,4,5,6$ e sostituiamo a $p_X(k)$ $\rightarrow$ ES: $p_X(3) = P(\{X=3\})$

- $p_X(3) = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{1}{64} = \frac{20}{64}$
- $p_X(4) = \frac{{}^{3}\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$
- $p_X(5) = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{64}$
- $p_X(6) = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 1} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$

La prob scende all'aumentare dei lanci "positivi"

$\Rightarrow P(\{X \geq 3\}) = 1 - (20+15+6+1) \cdot \frac{1}{64} = \frac{11}{32} \sim 34\%$

Time 15'

**EX. 2**

Si consideri il segnale

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-j2\pi 100 t}$$

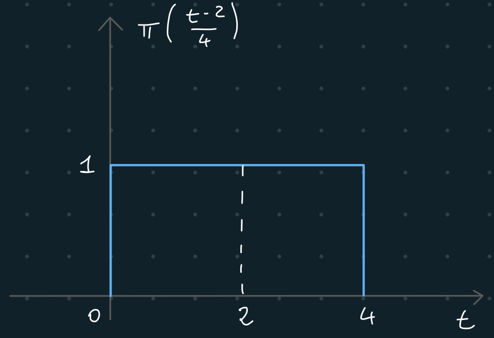
Calcolarne

1. l'energia e la densità spettrale di energia;
3. la funzione di autocorrelazione.

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \cdot e^{-j2\pi 100 t}$$

$Q_1$: $\mathcal{E}$ e $S_x$ ci conviene calcolare l'$\mathcal{E}$ con la definizione

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$




Dobbiamo Trovare $|x(t)|^2$, il segnale e' complesso!

$$\Rightarrow |x(t)|^2 = \left[\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \cdot e^{-j2\pi 100 t}\right]\left[\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \cdot e^{j2\pi 100 t}\right] = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) dt = \int_0^4 dt = t\Big|_0^4 \Rightarrow \mathcal{E}_x = 4\ J$$

$S_x = |X(f)|^2 \Rightarrow$ Troviamo la Trasformata Sapendo che: $x(t) \cdot y(t) \rightleftharpoons X(f) * Y(f)$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT \operatorname{sinc}(fT)$ e che $A e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons A\delta(f-f_0)$

Ricordiamo la proprieta': $x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f T}$

- $\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \rightleftharpoons 4 \operatorname{sinc}(4f) \cdot e^{-j4\pi f}$
- $e^{-j2\pi 100 t} \Rightarrow$ poniamo $f_0 = -100 \Rightarrow e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f-f_0) = \delta(f+100)$

$\Rightarrow X(f) = 4 \operatorname{sinc}(4f)\, e^{-j4\pi f} * \delta(f+100) \Rightarrow$ la convoluzione per una delta non ci spaventa

Sappiamo che $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

$$\Rightarrow X(f) = 4 \operatorname{sinc}\left[4(f+100)\right] e^{-j4\pi(f+100)}$$

$\rightarrow$ Per calcolare $S_x(f)$ dobbiamo calcolare il modulo quadro di $X(f)$

$$\Rightarrow \left\{4\,\mathrm{Sinc}\left[4(f+100)\right] e^{-j4\pi(f+100)}\right\} \cdot \left\{4\,\mathrm{Sinc}\left[4(f+100)\right] e^{j4\pi(f+100)}\right\}$$

$$= 16\,\mathrm{Sinc}^2\left[4(f+100)\right] \cancel{e^{-j4\pi(f+100)}} \cdot \cancel{e^{j4\pi(f+100)}} \Rightarrow S_x(f) = 16\,\mathrm{Sinc}^2\left[4(f+100)\right]$$

$$= 16\,\mathrm{Sinc}^2(4f+400)$$

$Q_2$: $\mathcal{R}_x(t)$ ? Sappiamo dal Teorema di wiener - Kinchine che $\mathcal{R}_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot)$

$\rightarrow$ per trovare $\mathcal{R}_x(t)$ ci basta trasformare $S_x(f)$

$\Rightarrow$ Teniamo a mente le proprieta':
$$\begin{cases} X(af) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right) \\ X(f-T_0) \rightleftharpoons x(t) \cdot e^{-j2\pi t T_0} \end{cases}$$

Inoltre $AT\,\mathrm{Sinc}^2(fT) \rightleftharpoons A\,\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_x(t) = 16\,\Lambda\left(\frac{t}{4}\right) \cdot e^{-j2\pi t 400}$$

Time TOT: 24'

**EX. 3**

Il segnale $x(n) = 3\delta(n-1) - \delta(n-2)$, viene inviato in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(n) = R_3(n)$.

Calcolare

1. l'autocorrelazione e l'energia del segnale in uscita al sistema;
2. la densità spettrale di energia mutua tra uscita e ingresso.

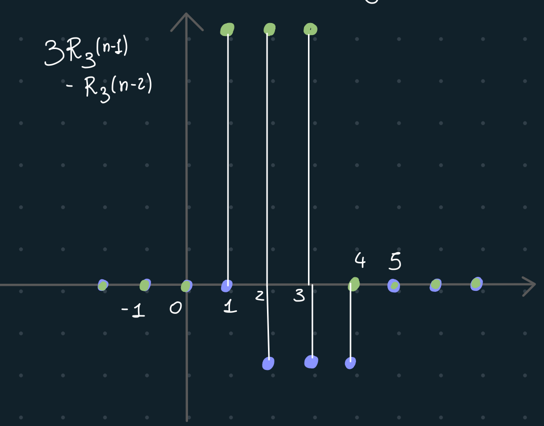
$x(n) = 3\delta(n-1) - \delta(n-2)$ $\qquad h(n) = R_3(n)$

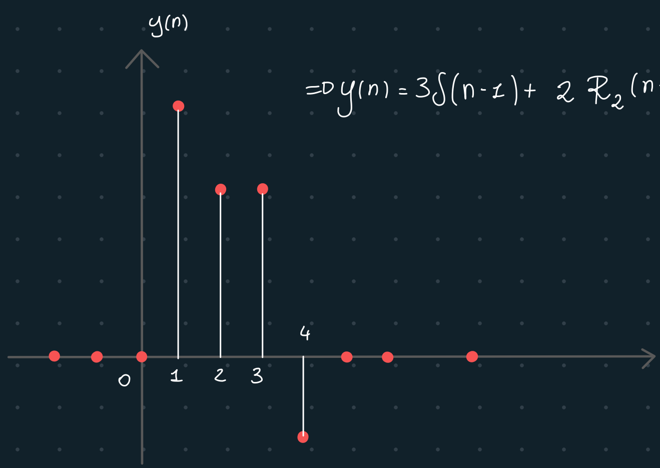
$Q_1$: $\tau_y(m) = ?$

Per prima cosa dobbiamo trovare $y(n) = x(n) * h(n)$

- $y(n) = 3R_3(n) * \delta(n-1) - R_3(n) \cdot \delta(n-2) = 3R_3(n-1) - R_3(n-2)$ $\quad y(n)$

Ora calcoliamo $\tau_y(m)$, ma prima vediamo come è fatto $y(n)$




$\Rightarrow y(n) = 3\delta(n-1) + 2R_2(n-2) - \delta(n-4)$

Calcoliamo $\tau_y(m)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 3 | 2 | 2 | -1 |
| $\tau(m-3)$ | 3 | 2 | 2 | -1 | | | |
| $\tau(m-2)$ | | 3 | 2 | 2 | -1 | | |
| $\tau(m-1)$ | | | 3 | 2 | 2 | -1 | |
| $\tau(m)$ | | | | 3 | 2 | 2 | -1 |

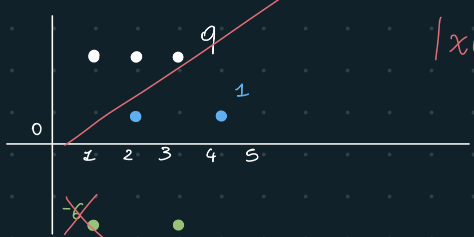
$\tau(-3) = -3$
$\tau(-2) = 6 - 2 = 4$
$\tau(-1) = 6 + 4 - 2 = 8$
$\tau(0) = 9 + 8 + 1 = 18$

$$\tau_y(m) = -3\left[\delta(m-3)\delta(m+3)\right] + 4\left[\delta(m-2) + \delta(m+2)\right] + 8\left[\delta(m-1) + \delta(m+1)\right] + 18\,\delta(m)$$

segnale reale

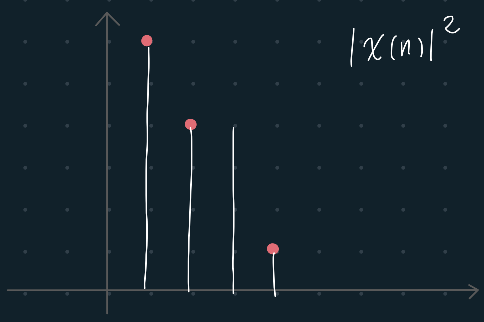
$Q_1$ B: $\mathcal{E}_y = ?$ $\qquad \mathcal{E}_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[3R_3(n-1) - R_3(n-2)\right]^2$ ②

$$= \sum_{k \in \eta_k} 9R_3(n-1) + R_3(n-2) - 6R_3(n-1)R_3(n-2)$$




$|x(n)|^2 = [\,x(0) = 0,\ x(1) = 9+1,\ x(2) = 9+1-6,\ x(3) = 9+1-6,\ x(4) = 1\,]$

$\Rightarrow |x(n)|^2 = 10\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + \delta(n-4)$




$Q_1$ B: $\mathcal{E}_y = ?$

Per trovare l'energia di $y(n)$ ci basta valutare l'autocorrelazione in zero:

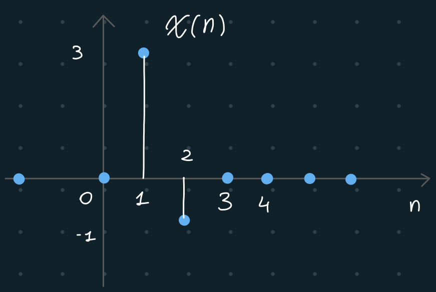
$$\mathcal{E}_y = r_y(0) = 18 \text{ J}$$

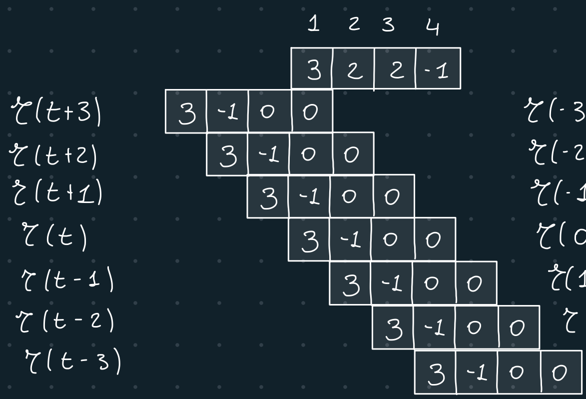
Time 22 min

$Q_2$: $S_{yx} = ?$ Sappiamo che $r_{yx} \rightleftharpoons S_{yx}(f)$

$\rightarrow$ dobbiamo trovare $r_{yx}$

$$x(n) = 3\delta(n-1) - \delta(n-2)$$




$r(-3) = 0$

$r(-2) = 0$

$r(-1) = -3$

$r(0) = 9 - 2 = 7$

$r(1) = 6 - 2 = 4$

$r(2) = 6 + 1 = 7$

$r(3) = -3$

Prima di scrivere $r_{yx}$ teniamo a mente una cosa importante: se abbiamo scritto la corr come

$\Rightarrow$ $r(t \ominus 3)$ $\rightarrow$ Dobbiamo cambiare segno!

$r(t \ominus 2)$

$\vdots$

$$\Rightarrow r_{yx}(t) = -3\delta(t+1) + 7\delta(t) + 4\delta(t-1) + 7\delta(t-2) - 3\delta(t-3)$$

Troviamo $S_x(f)$ $\rightarrow$ Trasformiamo $r_{yx}(t)$

Teniamo a mente che $\begin{cases} A\delta(t) \rightleftharpoons A \\ x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f)\cdot e^{-j2\pi f T_0} \end{cases}$

$$S_x(f) = -3e^{+j2\pi f} + 7 + 4e^{-j2\pi f} + 7e^{-j4\pi f} - 3e^{-j6\pi f} = -12\left[\underbrace{e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}}_{2\cos(2\pi f)}\right] + 7 + 7e^{-j4\pi f} - 3e^{-j6\pi f}$$

- Strada 2: $x(t), y(t) \rightleftharpoons X(f), Y(f) \Rightarrow |$

Sappiamo che $S_{yx} = Y(f)\cdot X^*(f)$

- $X(f) = 3e^{-j2\pi f} - e^{-j4\pi f}$
- $Y(f) = 3e^{-j2\pi f} + 2e^{-j4\pi f} + 2e^{-j6\pi f} - e^{-j8\pi f}$

Strada 2 molto più veloce!

$$\Rightarrow \left[3e^{-j2\pi f} + 2e^{-j4\pi f} + 2e^{-j6\pi f} - e^{-j8\pi f}\right]\left[3e^{j2\pi f} - e^{j4\pi f}\right]$$

$$= 9 - e^{2j\pi f} + 6e^{-j2\pi f} - 2 + 6e^{-j4\pi f} - 2e^{-j2\pi f} - 3e^{-6\pi f} + e^{-j4\pi f}$$

$$= 7 - 3e^{j2\pi f} - 4e^{-j2\pi f} + 7e^{-j4\pi f} - 3e^{-6\pi f}$$

Stesso risultato dell'altro metodo

Correlazione Tra y ed x