UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 14 gennaio 2021
Tempo a disposizione 2.30 ore
Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto (± 2 punti).

EX. 1 Si consideri una variabile aleatoria gaussiana standard, $X \sim \mathbb{N}(0, 1)$ e la trasformazione $Y = 2X + 3$. Si calcolino le probabilità
1. $P(X \leq 3)$
2. $P(X > 1)$

Considerata una seconda variabile aleatoria gaussiana standard Z, indipendente da X, si calcoli la probabilità che $Z + Y$ sia maggiore di 4.

EX. 2 Un sistema LTI è costituito dalla cascata di due filtri con risposta impulsiva

$$h_1(t) = -\frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \tag{1}$$

$$h_2(t) = \frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t - T}{2T}\right) \tag{2}$$

1. Rappresentare il grafico delle due risposte impulsive
2. Calcolare la risposta impulsiva della cascata dei due sistemi e rappresentarne il grafico.
3. Determinarne la risposta in frequenza della cascata dei due sistemi.

EX. 3 Dati i due segnali

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t) \\ x_2(t) &= \Pi\left(\frac{t}{4}\right) \end{aligned}$$

calcolarne il prodotto scalare e la densità spettrale di energia mutua.

EX. 1 Si consideri una variabile aleatoria gaussiana standard, $X \sim \mathbb{N}(0,1)$ e la trasformazione $Y = 2X + 3$. Si calcolino le probabilità

1. $P(X \leq 3)$
2. $P(X > 1)$

Considerata una seconda variabile aleatoria gaussiana standard Z, indipendente da X, si calcoli la probabilità che $Z + Y$ sia maggiore di 4.

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ con $Y = 2X+3$

Step 1 Trovare media e varianza di Y:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2X+3] = 2\,\mathbb{E}[X] + 3 = 2\cdot 0 + 3 = 3 \;\mu_Y$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2] = \mathbb{E}[\overline{Y}^2] + \mu_Y^2 - 2\mu_Y^2 \Rightarrow \overline{Y}^2 = ?$$

$$\overline{Y}^2 = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[(2X+3)^2] = 4\,\mathbb{E}[\overline{X}^2] + 12\,\mu_X + 9$$

$$\overline{X}^2 = ? \rightarrow \overline{X}^2 = \mu_X^2 + \sigma_X^2 = 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \overline{Y}^2 = 4 + 12\cdot 0 + 9 = 13$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4 \;\sigma_Y^2$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(3,4)$$

Q_1: $P(X \leq 3) = 1 - Q_Y\left(\frac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) =$ con $x = 3$, $\mu_Y = 3$ e $\sigma_Y = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow P(\{X \leq 3\}) = 1 - Q\left(\frac{3-3}{2}\right) =$

$= 1 - Q(0) = 1 - 0.5 = \frac{1}{2}$ P_1 $= 50\%$

Q_2: $P(\{X > 1\}) = Q\left(\frac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$ con $x = 1 \Rightarrow Q\left(\frac{1-3}{2}\right) = Q(-1) = 1 - Q(1) = 1 - 0.1586$

$= 0.8414$ P_2 $\sim 84\%$

Q_3: Consideriamo Z indip da X; $P(\{Z+Y > 4\})$ Chiamiamo $K = Z + Y$
Dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\rightarrow P(\{K > 4\}) = ?$ $\quad Q_K\left(\frac{4-\mu_K}{\sigma_K}\right) \rightarrow$ Dobbiamo trovare $\begin{cases} \mu_K = ? \\ \sigma_K = ? \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[K] = \mathbb{E}[X+Y] = \mu_X + \mu_Y = 0 + 3 = 3 \;\mu_K$$

$\sigma_K =$ Siccome Z ed X sono incorr. $\Rightarrow \sigma_K = \sigma_X + \sigma_Z = 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow P(\{K > 4\}) = Q\left(\frac{4-3}{\sqrt{2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Q(0.70) = 0.241 \sim 24\%$$

Proof $\sigma_K = \mathbb{E}[(K-\mu_K)^2] = [(X+Z-\mu_K)^2] = \overline{X}^2 + \mathbb{E}[XZ] - \underline{\mu_K\mu_X} + \mathbb{E}[XZ] + \overline{Z}^2 - \underline{\mu_K\mu_Z}$

$= \overline{X}^2 + \overline{Z}^2 + 2\underbrace{\mathbb{E}[XZ]}_{\mu_X\mu_Z} - 4\mu_K\mu_Z \qquad -\underline{\mu_K\mu_X} - \underline{\mu_K\mu_Z} + \mu_K^2$

Time 10'

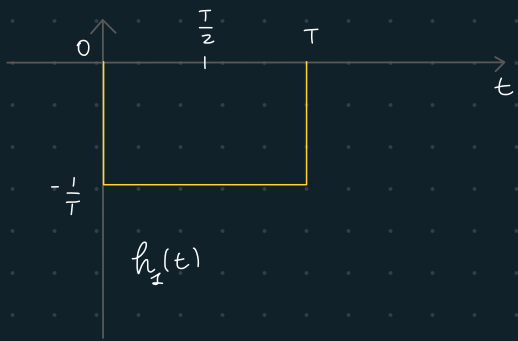
$\overline{X}^2 = \overline{Z}^2 = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow 2 + 2\mu_X\mu_Z - 4\mu_K\mu_Z = 2 + 0 - 0 = 2$

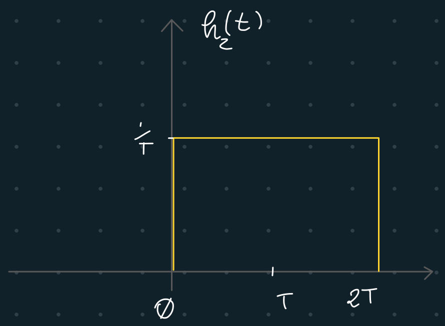
EX. 2 Un sistema LTI è costituito dalla cascata di due filtri con risposta impulsiva

$$h_1(t) = -\frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$
$$h_2(t) = \frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

1. Rappresentare il grafico delle due risposte impulsive
2. Calcolare la risposta impulsiva della cascata dei due sistemi e rappresentarne il grafico.
3. Determinarne la risposta in frequenza della cascata dei due sistemi.

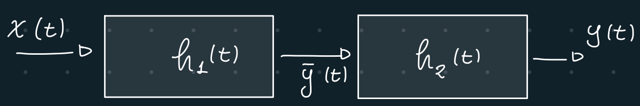
$h_1(t) = -\frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ $\qquad$ $h_2(t) = \frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$

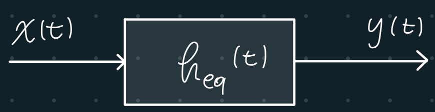




Q2: $h_{eq}(t) = ?$

Dalla teoria sappiamo che due syst in cascata possono essere sostituiti con un unico sys equivalente:





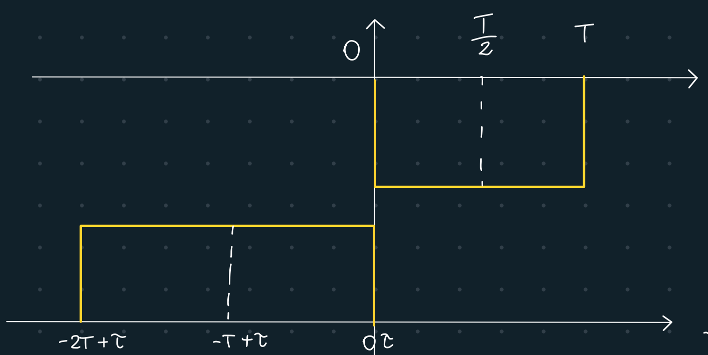
$h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t)$

Possiamo trovare $h_{eq}(t)$ anche come $h_{eq}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[H_1(f)\cdot H_2(f)\right]$

- $H_1(f) = -\frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\,\text{Sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} = -\text{Sinc}(fT)\,e^{-j\pi f T}$
- $H_2(f) = 2\,\text{Sinc}(f2T)\,e^{-j2\pi f T}$

$\Rightarrow H_{eq}(f) = -\text{Sinc}(fT)\,e^{-j\pi f T}\cdot \text{Sinc}(2fT)\,e^{-j2\pi f T}$ esce una funz difficile da moltiplicare

Dobbiamo trovare $h_{eq}(t)$ come $h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t)$



$h_2(\tau) \to h_2\left[-(t-\tau)\right] = h_2(-t+\tau)$

Caso 1 e 5: $\tau < 0 \;\cup\; -2T+\tau > T$
$\to \tau > 3T$

$r_{h_1 h_2} = 0$

Caso 2: $\tau > 0 \cup \tau < T \to \quad 0 < \tau < T$

$\Rightarrow \int_0^{\tau} h_1 h_2 \, dt = -\frac{1}{T^2}\left[\tau - 0\right] = -\frac{\tau}{T^2}$

Caso 3: $\tau > 0 \cup \tau > T \cup -2T+\tau < 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau > 0 \\ \tau > T \\ \tau < 2T \end{cases} \Rightarrow T < \tau < 2T$

$$\int_T^{2T} h_1 h_2 \, dt = \int_0^T -\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{T} \, dt = -\frac{1}{T^2}\left[T-0\right] = -\frac{1}{T}$$

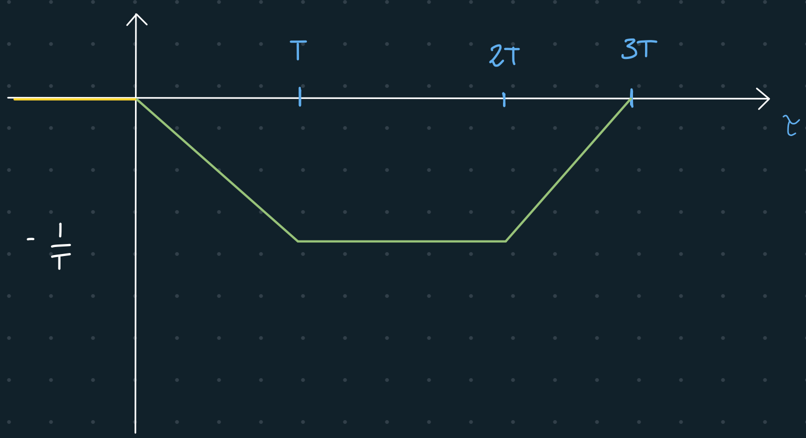
Caso 4: $-2T+\tau < T \cup -2T+\tau > 0 \quad \begin{cases} \tau > 2T \\ \tau < 3T \end{cases} \Rightarrow 2T < \tau < 3T$

$$-\frac{1}{T^2}\int_{-2T+\tau}^{T} dt = -\frac{1}{T^2}\left[T^2-\left(-2T+\tau\right)\right] = -\frac{1}{T^2}\left[T^2+2T-\tau\right] = -1 - \frac{2}{T} - \frac{\tau}{T^2}$$

$$= -\frac{T^2+2T-\tau}{T^2}$$

$$\Rightarrow r_{h_1 h_2} = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 0 & \tau > 3T \\ -\frac{\tau}{T^2} & 0 < \tau < T \\ -\frac{1}{T} & T < \tau < 2T \\ -\frac{T^2+2T-\tau}{T^2} & 2T < \tau < 3T \end{cases}$$

Time ~ 40'

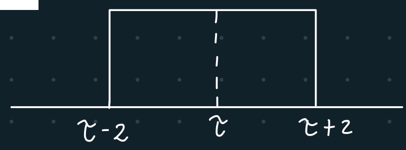


EX. 3 Dati i due segnali

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$
$$x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

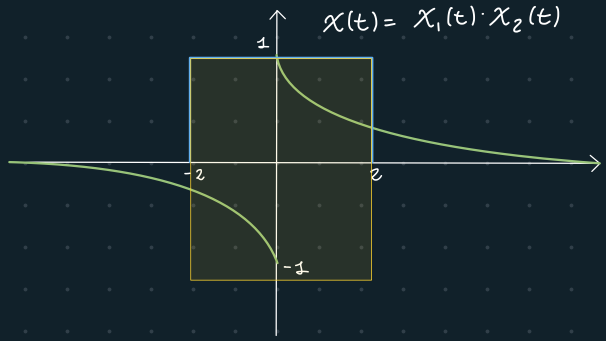
calcolarne il prodotto scalare e la densità spettrale di energia mutua.

$\Pi\left(\frac{t-\tau}{4}\right)$



$$x_1(t) = e^{-2t}\cdot u(t) - e^{2t}u(-t) \qquad x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

$x(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)$



Q_2: $S_{x_1x_2}$

Sappiamo che $r_{x_1x_2} \rightleftharpoons S_{x_1x_2}$

Visto che $r_{x_1x_2}(\tau)$

$$\int_{\tau-2}^{\tau+2} e^{-2t}\cdot u(t) - e^{2t}u(t)\,dt = \quad \text{per } \tau \geq 2$$

$$\int_{\tau-2}^{\tau+2} e^{-2t}\,dt - \int_{\tau-2}^{\tau+2} e^{2t}\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2(\tau+2)} - e^{-2(\tau-2)}\right] - \frac{1}{2}\left[e^{2(\tau+2)} - e^{2(\tau-2)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-2\tau-4} - e^{-2\tau+4}\right] - \frac{1}{2}\left[e^{2\tau+2} - e^{2\tau-2}\right]$$

Per $\tau < 2 \rightarrow$

$$\int_{0}^{\tau+2} e^{-2t}\,dt - \int_{\tau-2}^{0} e^{2t}\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2\tau-4} - 1\right] - \frac{1}{2}e\left[1 - e^{2\tau-4}\right]$$

$\rightarrow$ Troppo complicato

20'

$$S_{x_1x_2}(f) = X_1(f)\,X_2^*(f)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{1}{-2+j2\pi f} \qquad X_2(f) = 4\,\mathrm{Sinc}(4f)$$

$$\Rightarrow S_{x_1x_2} = \frac{2\,\mathrm{Sinc}(4f)}{1+j\pi f} - \frac{2\,\mathrm{Sinc}(4f)}{-1+j\pi f}$$