Variabili Aleatorie

La variabile aleatoria è una funzione, ed il suo **insieme di definizione** è un **evento**.

La variabile produce un numero reale in corrispondenza del risultato di un evento.

Esempio

Supponiamo di lanciare 2 monete in sequenza; le possibili uscite sperimentali saranno:

$$\left\{\begin{matrix} T & T \\ T & C \\ C & T \\ C & C \end{matrix}\right\} \Omega$$

Consideriamo gli eventi elementari come $w = \{T,T\}$ o $w = \{T,C\}$
Andiamo poi a costruire una funzione che al risultato
di un evento, ci dia un valore numerico.

`Ovvero: Ω={(T,T), (TC), (C,T), (C,C)}`

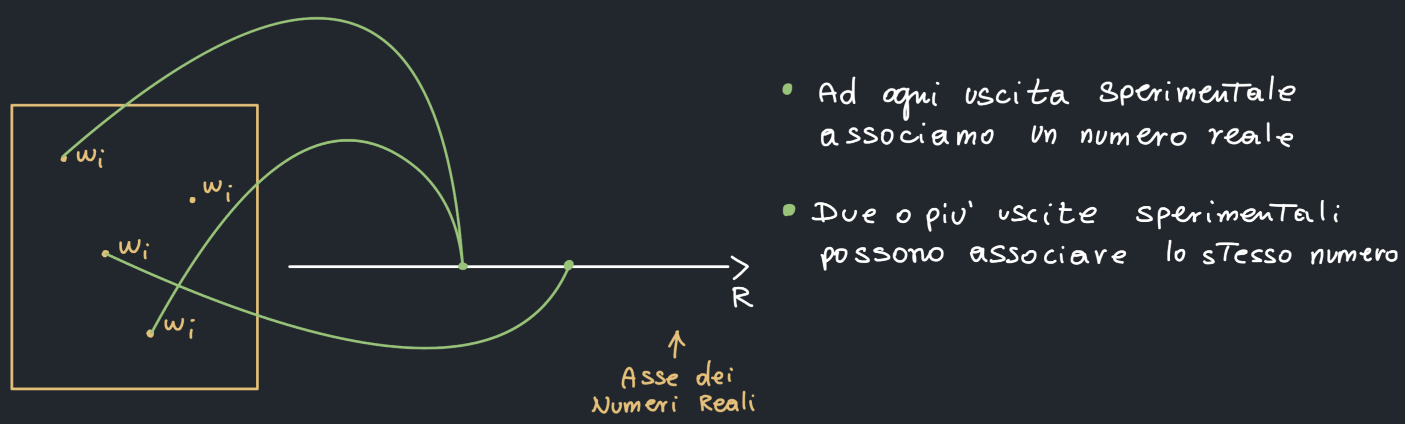
Consideriamo ora gli eventi elementari del tipo: ω={(T,T)} oppure ω={(T,C)} ecc.

Andiamo a costruire una funzione che al **risultato** di un evento, **ci restituisce un valore numerico**:

- x({T,T}) = 1
- x({T,C}) = 2
- x({C,T}) = 3
- x({C,C}) = 4

Inoltre: x(ω) ∊ **R**, Ovvero il codiminio appartiene ai reali.

Graficamente otteniamo:



- Ad ogni uscita sperimentale associamo un numero reale.
- Due o più uscite sperimentali possono associare lo stesso numero reale.

A cosa serve la variabile aleatoria?

Le variabili aleatorie ci permettono di "saltare" la definizione di tutte quelle componenti preliminari come lo spazio campione, e di definire **direttamente** la variabile aleatoria.

Variabile aleatoria Indicatore Di un Evento

I_E = **Variabile indicatrice dell'evento E**

Questa variabile viene definita nel seguente modo:

- $I_E = 1$ quando l'evento E si verifica
- $I_E = 0$ quando l'evento E non si verifica

Sulla base di questa definizione, definiamo una serie di **funzioni standard**, ovvero funzioni reali di una variabile reale:

Funzione di distribuzione cumulativa

Una prima funzione prende il nome di **funzione di distribuzione comulativa** (**CDF**):

$F_X (x) = P(\{X \leq x\})$

- Dove "X" è il nome della **variabile aleatoria**
- Dove "(x)" è la variabile **indipendente** della funzione
- Dove "{X ≤ x}" è l'evento e P è la probabilità
  - X è la variabile aleatoria
  - x è un valore corrente variabile

Esempio - Lancio della moneta:

La prima cosa da fare è costruire la variabile aleatoria, in maniera tale che:

- $X(\{T\}) = 1$
- $X(\{C\}) = 0$

Costruiamo quindi il grafico della funzione $F_X(x)$ in relazione alla variabile indipendente x; per farlo ci basta vedere che valore assume F_X quando varia x:

1. Prendiamo un valore: ad esempio "-1".
2. Ci chiediamo: "qual è la probabilità che x sia **Minore o Uguale** a -1?" --> "Ci sono uscite sperimentali di X che ci danno un valore più piccolo di -1?" **Risposta: NO** .

Questo vuol dire che l'evento $\{x \leq -1\}$ è un insieme vuoto! Abbiamo infatti:

- `{x ≤ -1} = ∅` --> L'insieme è vuoto
- `P{x ≤ -1} = 0` --> La probabilità è nulla

Possiamo muoverci sull'asse delle "x" (variabile indipendente), ma abbiamo la certezza che **non esistono valori più piccoli di meno uno**, ma non ce ne sono nemmeno di più grandi fino ad 1. Sappiamo quindi che la probabilità sarà zero *almeno* fino allo zero **escluso**:

Adesso ci chiediamo nuovamente (siamo ad x = 0): "quando accade l'evento in cui x ≤ 0?" --> accade nel momento in cui ho croce. Infatti, stando a come abbiamo definito la nostra variabile aleatoria, quando otteniamo "croce", X vale proprio zero!

Siccome siamo nell'ipotesi in cui ogni uscita è **equiprobabile**, abbiamo che per ogni uscita la probabilità è di 1/2; di conseguenza, la probabilità che Z sia minore o uguale a zero, **coincide con la probabilità che X sia uguale a zero**, ovvero proprio 1/2!

A questo punto continuiamo come abbiamo fatto finora: prendiamo un nuovo punto, ad esempio "0.4".

Calcoliamo quindi la probabilità che X sia minore a 0.4: P({X ≤ 0.4}) = ? L'unico caso in cui X è minore di 0.4 è proprio quando essa vale zero, ovvero quando esce "croce", e visto che la probabilità coincide alla probabilità dell'uscita sperimentale, abbiamo che P({X ≤ 0.4}) = 0.

Osserviamo che il grafico rimane **costante** fino a quando non arriviamo ad x = 1; in questo caso ci chiediamo nuovamente: "quando X è minore o uguale ad 1?" In questo caso ci sono ben 2 casi: ovvero sia quando esce testa (X=1) sia quando esce croce (X=0)!

Siccome sono due eventi disgiunti, la probabilità corrisponde alla **somma delle probabilità delle due**, per cui 1/2 + 1/2 = 1:

Tiriamo le somme:

La funzione di **distribuzione comulativa della variabile X** è costituita nel seguente modo:

> La funzione è **Costante a tratti**, quindi è **continua in tutto R**.

Inoltre il "salto" che la funzione compie tra un valore ed un altro è detto **Ampiezza**, e vale:

> Si dice che la funzione "cumula", infatti i valori cumulano: il valore successivo al precedente è cumulato (in questo caso) di 1/2.

Esempio - Lancio del dado

In questo caso lavoriamo con 6 uscite sperimentali:

Di conseguenza la probabilità che X sia uguale ad ogni singola uscita sperimentale è:

> L'insieme di tutti i valori che F può assumere si chiama **alfabeto di X**

Tracciamo un grafico:

> Questo accade ogni volta che consideriamo una variabile aleatoria **Discreta**, ovvero una variabile aleatoria in cui il numero di valori possibili che assume, è un insieme finito **discreto o numerabile**.

Nota: la *Variabile Aleatoria* non è x (piccolo), ma X (grande)! x (piccolo) è solo la variabile indipendente, che facciamo scorrere sull'asse (delle x) per far generare valori alla funzione $F_X(x)$.

Esempio - Lancio della moneta finchè non ottengo testa

In questo caso l'insieme delle uscite sperimentali è **infinito numerabile**, perchè posso avere infinite **sequenze** di uscite sperimentali elementari finchè non ottengo una singola sequenza di uscite sperimentali che mi dia testa.

Costruendo la nostra variabile aleatoria X abbiamo che:

Procediamo calcolando la probabilità di ogni valore (1,2,...n):

> Ci accorgiamo che "l'ultima probabilità" è sempre più piccola

> Nel caso in cui abbiamo un insieme infinito numerabile, la funzione è sempre a "scalini", ma non diverge a +∞

🏁 Intervallo

Questi esempi appena visto, sono relativi a variabili aleatorie che hanno un alfabeto **discreto**, quindi o **finito** (come i primi due casi) oppure **numerabile** come quest'ultimo caso appena visto.

In ogni caso parliamo di un **insieme discreto**, ovvero composto da un numero **finito** di valori assunti da x.

X potrebbe anche essere continua: possiamo infatti definire una variabile aleatoria su un insieme infinito, come potrebbe essere il **tempo**: se definiamo una variabile aleatoria che va da `0` a `T` che denota l'istante di arrivo di un treno, non ci troviamo più in un sieme discreto, ma in un insieme finito (tra due numeri ce ne è sempre un terzo).