Proprietà della Trasformata di FOURIER

I) Linearità

$$\begin{cases} x_1(\cdot) \rightleftharpoons X_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \rightleftharpoons X_2(\cdot) \end{cases}$$ e vogliamo trovare $y(\cdot)$

$\rightarrow$ $y(\cdot) = a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) \rightleftharpoons Y(\cdot) = a_1 X_1(\cdot) + a_2 X_2(\cdot)$

Se conosciamo gli spettri è inutile calcolare altre Trasformate.

II) Dualità

Se $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ vuol dire che $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

Cambio di var

Spettro considerato nel tempo

Esempio 1:

$$\underbrace{x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)}_{\text{Dominio: tempo}} \rightarrow \mathcal{F}(x(t)) = \underbrace{X(f) = AT\,\mathrm{Sinc}(fT)}_{\text{Dominio: freq}}$$

- Se in t abbiamo $AT\,\mathrm{Sinc}(t \cdot T) \rightleftharpoons A\Pi\left(-\frac{f}{T}\right) \rightleftharpoons A\Pi\left(\frac{f}{T}\right)$

Cambio var $f = t$

La rect è pari $\rightarrow$ il meno non cambia Niente

Tempo — freq

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\mathrm{Sinc}(fT)$$

Dualità

Tempo — freq

$$AT\,\mathrm{Sinc}(t \cdot T) \rightleftharpoons \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

proof a ~ 12:00

III) Trasformate degli impulsi · IMPULSI IDEALI

- $x(n) = \delta(n) \rightleftarrows X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(k) \cdot e^{-j2\pi\nu k}}_{x(n)\cdot\delta(n) = x(0)\delta(n)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) \cdot e^{0} = 1$

Tempo freq.

Quindi: $\delta(n) \rightleftarrows 1$

- $x(t) = \delta(t) \rightleftarrows X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot 1\, dt = 1 \cdot \left[-\infty + \infty \right] = 1$

?

Morale della favola:

- $\delta(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi\nu n} d\nu$ Tempo discreto
- $\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} dt$ Tempo continuo

ottenute con l'eq di sintesi

Inoltre, per la Dualita':

$1 \rightleftarrows \delta(-f) = \delta(f)$ (PARI) $\Rightarrow$ $\overbrace{x(t) = A}^{\text{Dominio del Tempo}} \rightleftarrows X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \underbrace{A \cdot \delta(f)}_{\text{Dominio della freq.}}$

IV Proprieta' Di Simmetria

$x(-(\cdot)) \rightleftarrows X(-(\cdot))$ $\Rightarrow$ $x(\cdot)$ è pari $\Rightarrow$ $X(\cdot)$ è Pari

Riflessione nel tempo — Riflessione nella freq

$x^*(\cdot) \rightleftarrows X^{*}(-(\cdot))$ — Sia coniug che riflessione

$\rightarrow$ Se x è reale $x^*(\cdot) \rightleftarrows X(\cdot) \Rightarrow X^*(-(\cdot)) = X(\cdot)$

Se x è reale

E quindi:

$X^*(-(\cdot)) = X(\cdot)$

$\underbrace{|X(-f)| \cdot e^{-j\angle X(-f)}}_{\text{Coniugato di } X(-f)} = |X(f)|\, e^{j\angle X(f)}$

$\rightarrow$ Possiamo scrivere che

1. $|X(-f)| = |X(f)|$ $\rightarrow$ PARI
2. $\angle X(-f) = \angle X(f)$ $\rightarrow$ Dispari

V) Time Scaling

$$x(a\cdot t) \rightleftharpoons \underbrace{\frac{1}{|a|}}_{\text{se } a \in \mathbb{Z}} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$\Rightarrow$ Se a comprime nel dominio del tempo farà espandere lo spettro (freq)

$\Rightarrow$ Se a espande nel dominio della freq farà comprimere il segnale $x(t)$.

Esempio 1: $y_1(t) = x(2t)$ con $x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{othw.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Pi(2t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < 2t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{othw} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4} \\ 0 \quad \text{othw} \end{cases} \Rightarrow \text{COMPRESSIONE}$$

Sappiamo che $\underset{\text{Tempo}}{\Pi(t)} \rightleftharpoons \underset{\text{freq}}{\text{Sinc}(f)} \Rightarrow Y_1(f) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Espanso}} \cdot X\left(\frac{f}{2}\right)$

Esempio 2: $y_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ con $x = \Pi(t)$ $\quad a = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Pi\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{othw} \end{cases} \Rightarrow \text{Espanso}$$

$$\Rightarrow \text{Se } x = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \rightleftharpoons X(f) = \text{sinc}(f) \Rightarrow Y_1(f) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \text{Sinc}\left(\frac{f}{\frac{1}{2}}\right) = 2\,\text{sinc}(2f)$$

VI) Traslazione Temporale

$$x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f)\cdot e^{\overset{\text{Ritardo}}{-j2\pi f T_0}}$$

Scriviamo lo spettro come modulo e fase: $\underbrace{|X(f)|}_{\text{Il modulo rimane invariato}} e^{j\angle X(f)} \cdot e^{-j2\pi f T_0}$

$$e^{j(\angle X(f) - 2\pi f T_0)} \quad \varphi(T) \text{ Nuova fase}$$

Morale della favola:

Ad un ritardo nel dominio del tempo corrisponde uno sfasamento nel dominio della frequenza.

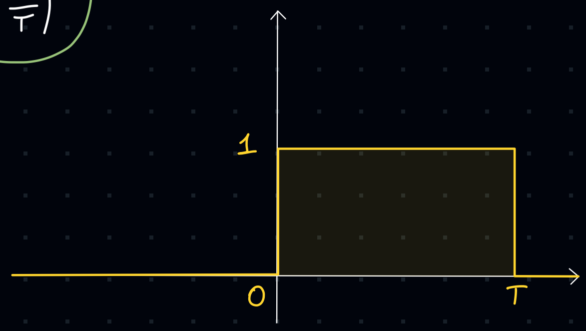
proof: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-T)\, e^{-j2\pi f T} dt$ pongo $s = t - T \Rightarrow t = s+T$, $ds = dt \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\cdot e^{-j2\pi f(s+T)} ds$

$$= \underbrace{e^{-j2\pi f T}}_{\text{Ritardo}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\cdot e^{-j2\pi f s}}_{X(f)} ds$$

Esempio 1:

$$y(t) = x\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \text{con} \quad x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow T\,\mathrm{Sinc}(fT)$$

$$= \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$



$$\Rightarrow Y(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi f T}$$

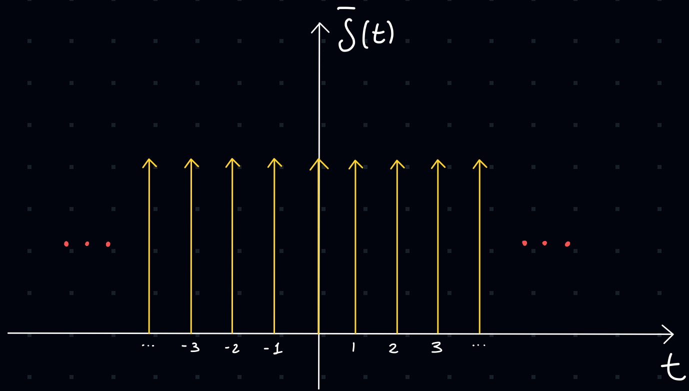
$$= T\,\mathrm{Sinc}(T \cdot f) \cdot e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$= T\,\mathrm{Sinc}(T \cdot f) \cdot e^{-j\pi f T}$$

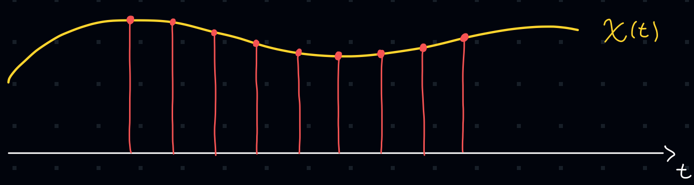
VII) Segnale campionatore IDEALE di periodo T

IMPORTANTE

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$$



→ Se abbiamo il "treno di delta" moltip. per un segnale $x()$, vengono prelevati i valori negli indici.



→ Se abbiamo un treno nel dominio del tempo, lo avremo anche nel dominio della freq

Tempo — frequenza

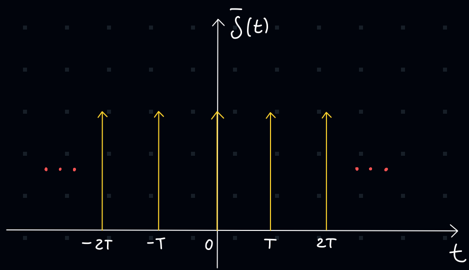
$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) \rightleftharpoons \tilde{\delta}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f-m)$$

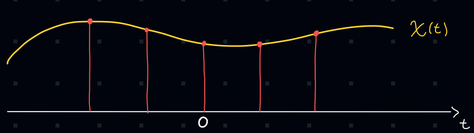
Consideriamo un treno di periodo NON GENERICO di periodo T:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T)$$

Le δ sono distanziate a Multipli di T

⇒ Possiamo decidere la cadenza con cui campionare il Segnale





- $\mathrm{rep}_T[\delta(t)]$: Replicazione del segnale tra parentesi con cadenza T

Riscriviamo $\tilde{\delta}_T(\,)$

$$-\!\!\triangleright\ \tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left[T\left(\frac{t}{T}-k\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\cdot\delta\left(\frac{t}{T}-k\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-k\right)$$

T in evidenza

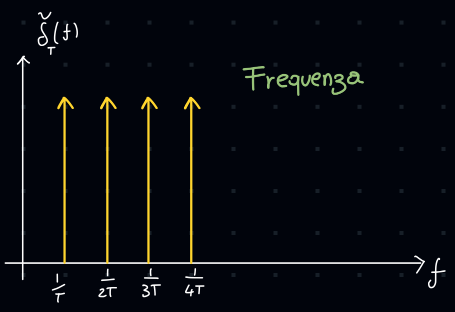
$\delta(a\cdot t) = \frac{1}{|a|}\cdot\delta(t)$

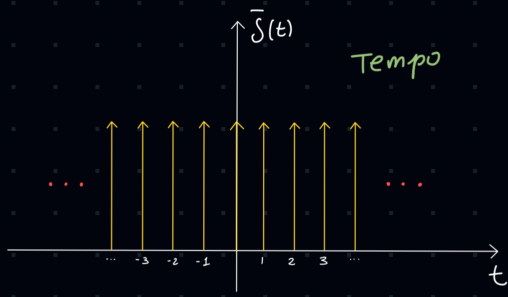
Treno di Delta Valuta to in $\frac{t}{T}$

Passiamo al dominio della freq:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-k\right) = \tilde{\delta}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T\,\tilde{\delta}(fT) = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(fT-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left[T\left(f-\frac{m}{T}\right)\right]$$

$$=\!\!\triangleright\quad \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-k\right) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$





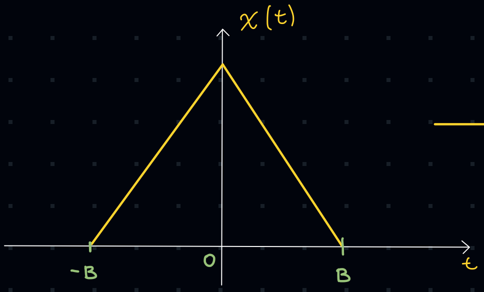
VIII) Traslazione Temporale nel Dominio della frequenza

Si applica nella modulazione

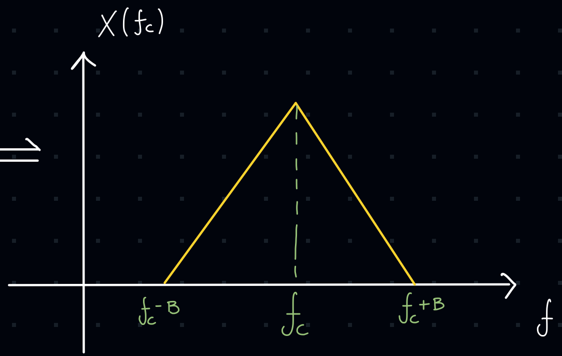
$$x(t)\cdot e^{j2\pi f_c t} \rightleftharpoons X(f-f_c)$$

Tempo — frequenza

$$x(\nu)\ e^{j2\pi\nu_c n} \rightleftharpoons X(\nu-\nu_c)$$



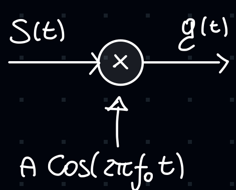
$$-\!\!\triangleright\ \cdot\ e^{j2\pi f_c t} \rightleftharpoons$$



Esempio 1.1) Modulazione di ampiezza

(analogica, mod di ampiezza)

-▷ Il segnale viene moltiplicato per il cos di un'opportuna frequenza.

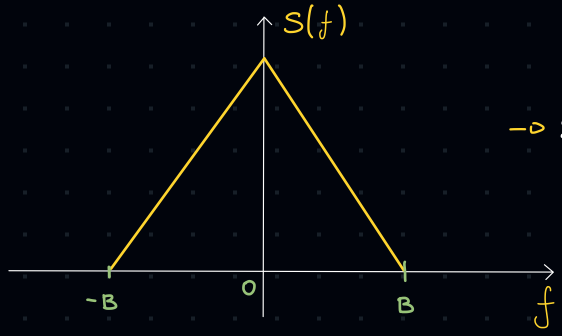


$$=\!\!\triangleright\ g(t) = S(t)\cdot A\cos(2\pi f_0 t) = S(t)\cdot\frac{A}{2}\cdot\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

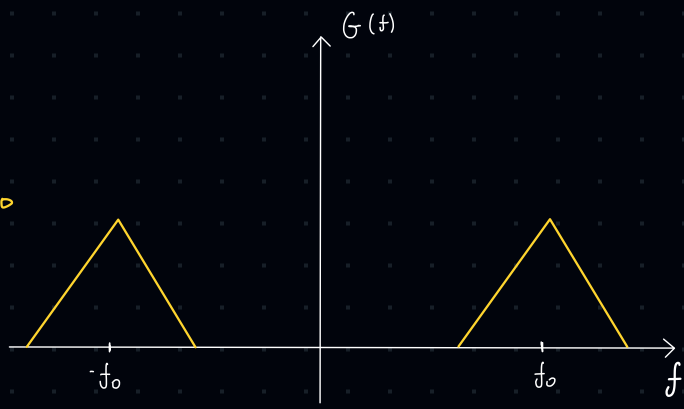
$$= \frac{A}{2}S(t)\,e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}S(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

che succede in freq ?

in freq -▷ $G(f) = \frac{A}{2}S(f-f_0) + \frac{A}{2}S(f+f_0)$

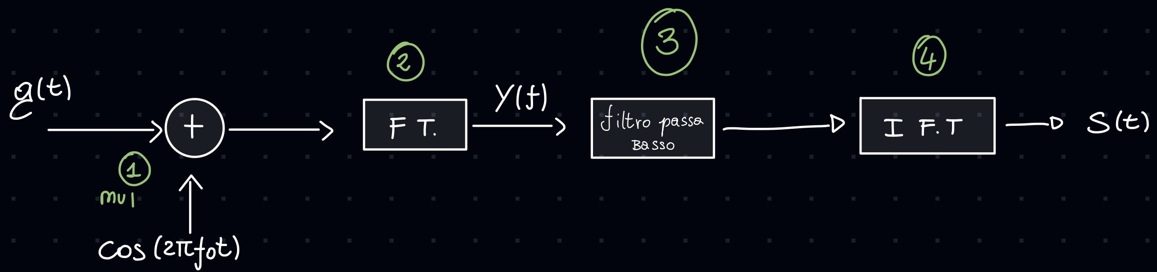


$\rightarrow S(t)\cdot A\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow$



Esempio 1.2 : Demodulatore

(con semplificazioni)



Perche'?

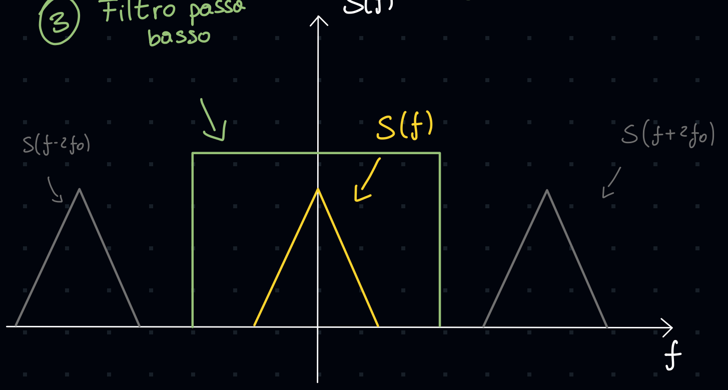
$$y(t) = g(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) = A\,S(t)\cos(2\pi f_0 t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) = A\,S(t)\cdot\cos^2(2\pi f_0 t)$$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$$= A\,S(t)\cdot\left(\frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right) = \frac{A}{2}S(t) + \frac{A}{2}S(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

$$\mathcal{F}\left(g(t)\cdot\cos(\cdot\cdot)\right) = Y(f) = \underbrace{\frac{A}{2}S(f)}_{\text{Segnale che ci interessa}} + \underbrace{\frac{A}{4}S(f-2f_0) + \frac{A}{4}S(f+2f_0)}_{\text{Segnali shiftati centrati in } \pm 2f_0}$$

3 Filtro passa basso



→ I segnali shiftati non ci servono →

→ Applichiamo un filtro Passa - Basso 3

3 → Otteniamo $Y(f) = \frac{A}{2}S(f) \rightleftharpoons y(t) = s(t)$ 4

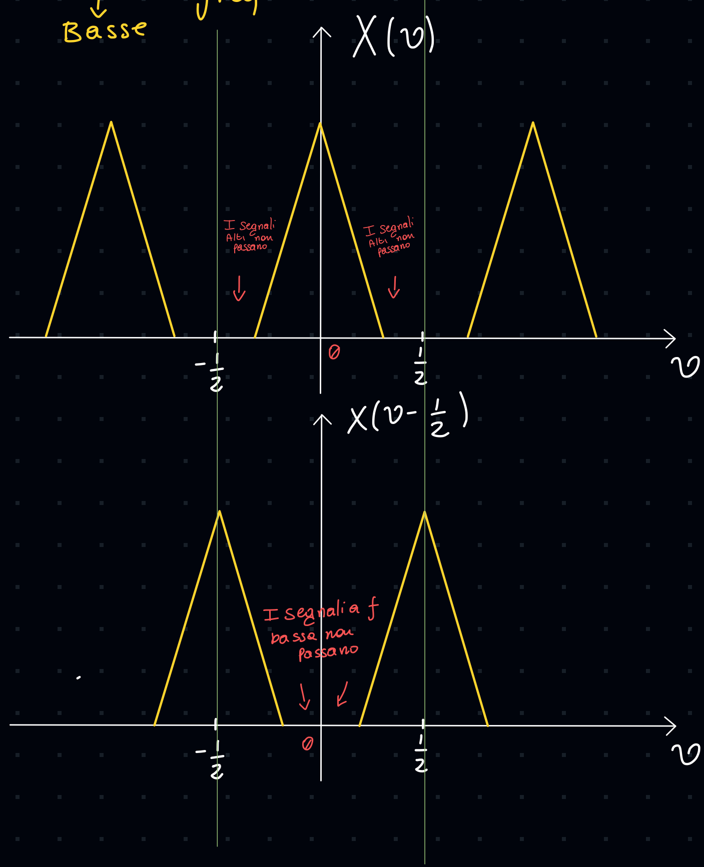
Esempio 2:

$$x(n) \cdot e^{j2\pi \nu_c n} \rightleftharpoons X(\nu - \nu_c) \qquad \text{poniamo } \nu_c = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(n)\, e^{j\pi n} \rightleftharpoons X\left(\nu - \tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{Scambio}$$

$$e^{j\pi n} \to \underbrace{\cos(\pi n) + j\sin(\pi n)}_{(-1)^n}$$

Alte ↕ Basse freq.



→ Vediamo dai grafici che inizialmente si comporta da passa basso mentre sfasando il segnale, siccome esso è periodico, si comporta da passa Alto.

Esempio 3:

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{A è il segnale}}\, \underbrace{e^{j2\pi f_c t}}_{\text{Sfasamento}} \rightleftharpoons X(f) = ?$$

$$s(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons S(f - f_c)$$

$$\Rightarrow X(f) = A\,\delta(f - f_c)$$

Esempio 4: Impulso modulato

$$x(t) = \underbrace{A\,\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right)}_{S} \cdot \underbrace{\cos(2\pi f_c t)}_{\text{modulato}} \rightleftharpoons X(f) = ?$$

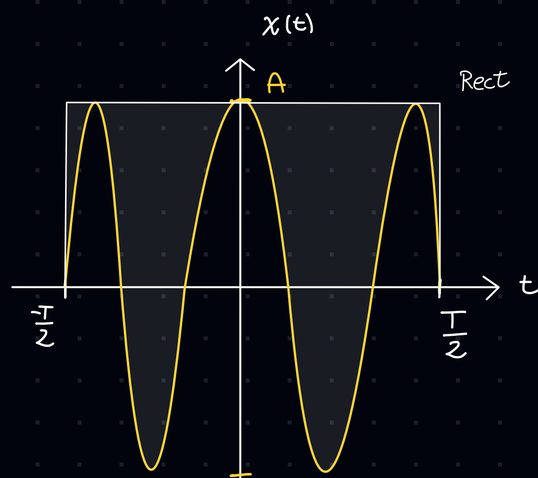
1.) Applichiamo la prop. di modulazione : $A \cdot s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{A}{2} S(f - f_0) + \frac{A}{2} S(f - f_0)$

$$\to A\,\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\mathrm{sinc}(fT) \Rightarrow X(f) = \frac{A}{2} T\,\mathrm{sinc}\left[(f - f_c)T\right] + \frac{A}{2} T\,\mathrm{sinc}\left[(f - f_0)T\right]$$

Esempio 5: Impulso RF - Radio Freq.

$$x(t) = A\,\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\pi t}{T}\right)$$

Il cos è in forma strana



$$\to \cos\left(\tfrac{\pi t}{T}\right) \to f_c = \tfrac{1}{2T} \to \cos(2\pi f_c T)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x(t) = A\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_c T)}$$

Ancora una volta un impulso modulato

$$\text{rect} \rightleftharpoons AT\,\mathrm{sinc}(fT) \Rightarrow A\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$\Rightarrow A\Pi\left(\tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos(\ldots) \Rightarrow X(f - f_0) \Rightarrow X(f) = \frac{A}{2} T\,\mathrm{sinc}\left[(f - f_0)T\right] + \frac{A}{2} T\,\mathrm{sinc}\left[(f - f_0)T\right]$$

$-A$

Q: Cosa ci aspettiamo in freq?

Ans. Ci aspettiamo Due sinc