Indice dei contenuti

Recap lezione precedente

Cambiare Dominio

Cambiare Dominio

Segnali continui

Tempo → Frequenza

- $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \underset{w=2\pi f}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} \, dw$

Frequenza → Tempo

- $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{jwt} \, dw$

Segnali Discreti

Tempo → Frequenza

$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu}$ $\quad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n}$

Frequenza → Tempo

$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu) \cdot e^{-j2\pi\nu n} \, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\theta) \cdot e^{-j2\pi\theta n} \, d\theta$

Legame ingresso uscita

Legame ingresso - uscita - Frequenza

Esprimiamo l'ingresso come: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, e^{j2\pi f t} \, df =$

$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f) \cdot X(f)} \cdot e^{j2\pi f t} \, dt$ ovvero $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{Y(f)} \cdot e^{j2\pi f t} \, dt$

Deduciamo che $Y(\cdot) = X(\cdot) \cdot H(\cdot)$

Trasformate Notevoli

Proprietà dei segnali reali

Quando abbiamo un segnale reale, avremo la seguente proprietà:

Proprieta'

$$X^*(-f) = X(f) \quad \text{Pari}$$

per $x(t)$ REALE

In poche parole, avremo che lo spettro del coniugato riflesso di un segnale **reale** sarà uguale allo spettro del segnale iniziale; questo vuol dire che **i segnali reali sono pari**.

$\rightarrow$ proof:

$$X^*(-f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t}\, dt\right]^* =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^*(t)}_{\substack{\text{Reale} \\ \downarrow \\ x(t)}} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = X(f)$$

Possiamo seguire il seguente schema:

Quindi

- Il modulo sarà PARI :

$$\rightarrow |H(-f)| \cdot e^{-j\angle H(-f)} = |H(f)|\, e^{-j\angle H(f)}$$

- La fase vale l'opposto $\rightarrow$ E' Dispari

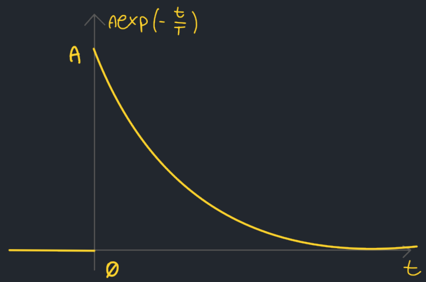
$$\rightarrow \angle H(-f) = -\angle H(f)$$

$\rightarrow$ Un esempio è proprio l'esempio 1 ↑

Trasformata dell'esponenziale monolatero a tempo continuo

Esempio 1: T. di $\mathcal{F}$ dell'exp monolatero T. Continuo

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$$



$\rightarrow$ Dall'eq di analisi possiamo calcolare lo spettro dell'input:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Trasformata di Fourier

$$= A \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(\frac{1+j2\pi f T}{T}\right)} dt$$

$$= -\frac{A\,T}{1+j2\pi f} \cdot \left[e^{-t\left(\frac{1+j2\pi f T}{T}\right)} \right]_0^{+\infty} = \frac{A\,T}{1+j2\pi f}$$

Trasformata

1 ø

$\Rightarrow$ otteniamo

$$e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) \rightleftharpoons \frac{A\,T}{1+j2\pi f T}$$

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale monolatero

Per rappresentare la trasformata di un segnale, che è **un numero complesso**, ci serve sapere **il modulo e la fase dello spettro**:

1. Trovare il modulo → Spettro di ampiezza
2. Trovare la fase → Spettro di fase

Troviamo il modulo dello spettro del segnale exp monolatero

Reale → No modulo

$$|X(f)| = \frac{|Num|}{|Denom|} = \frac{AT}{|1+j2\pi fT|} = \underbrace{\frac{AT}{\sqrt{1^2+(2\pi fT)^2}}}_{|X(f)|}$$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow 20\log_{10}\left[\frac{|X(f_0)|}{|X(0)|}\right] = 20\log_{10}\frac{\frac{\cancel{AT}}{\sqrt{2}}}{\cancel{AT}}$

Frequenza di taglio

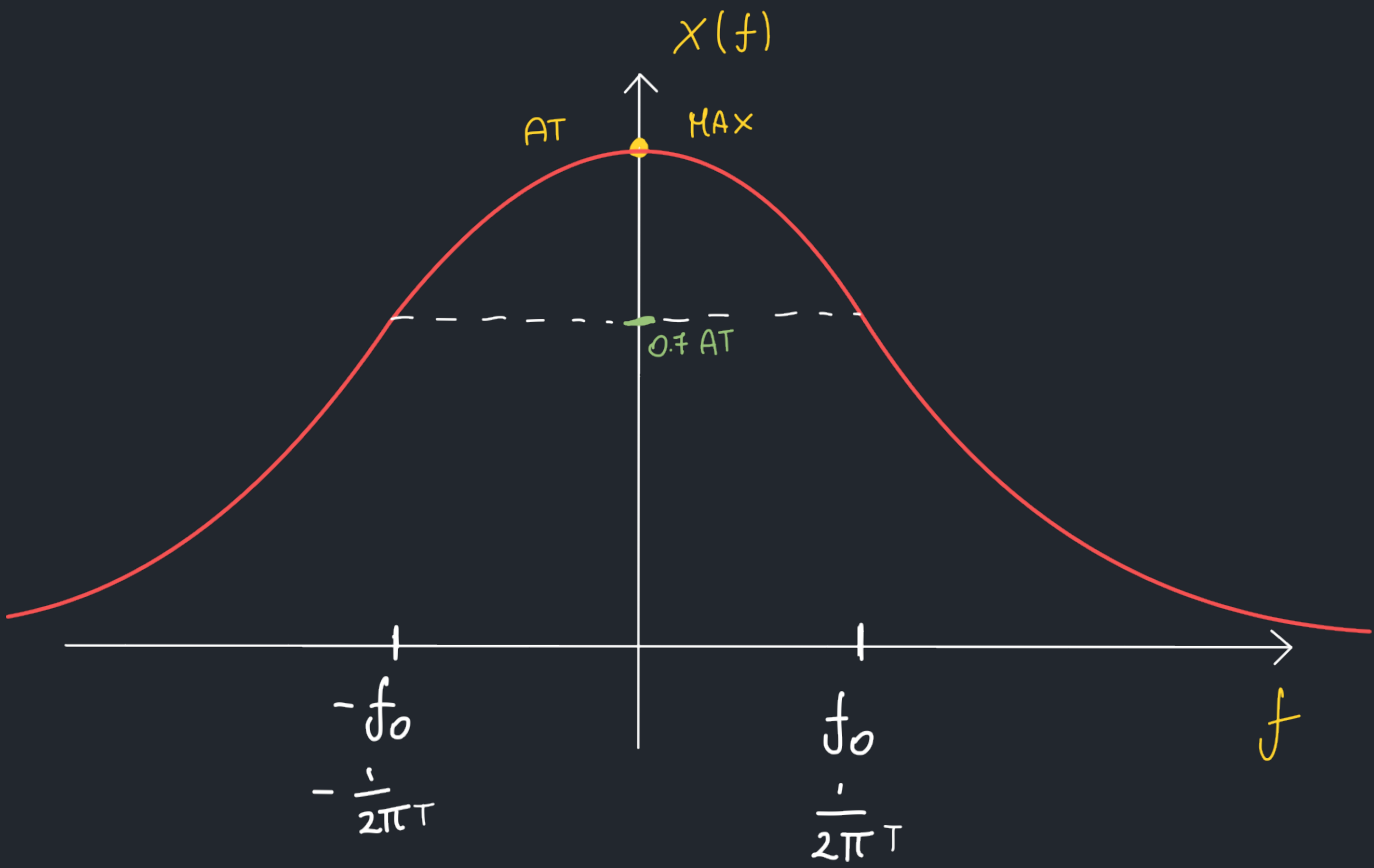
→ E' quella freq al di sopra del quale un filtro blocca il segnale

$$= 20\log_{10}(\sqrt{2}) \cong -3\,dB$$

Attenuazione

Possiamo quindi graficare il modulo dello spettro:

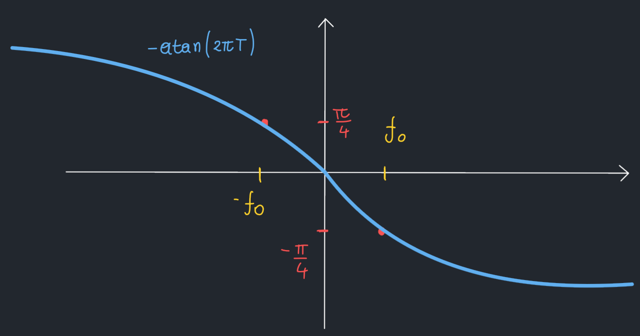
Graficchiamolo:



Troviamo la fase dello spettro del segnale exp monolatero:

2. Fase: $\measuredangle H(f) = [\measuredangle \text{ Numeratore}] - [\measuredangle \text{ Denominatore}] = \emptyset - \text{atan}(2\pi f T)$

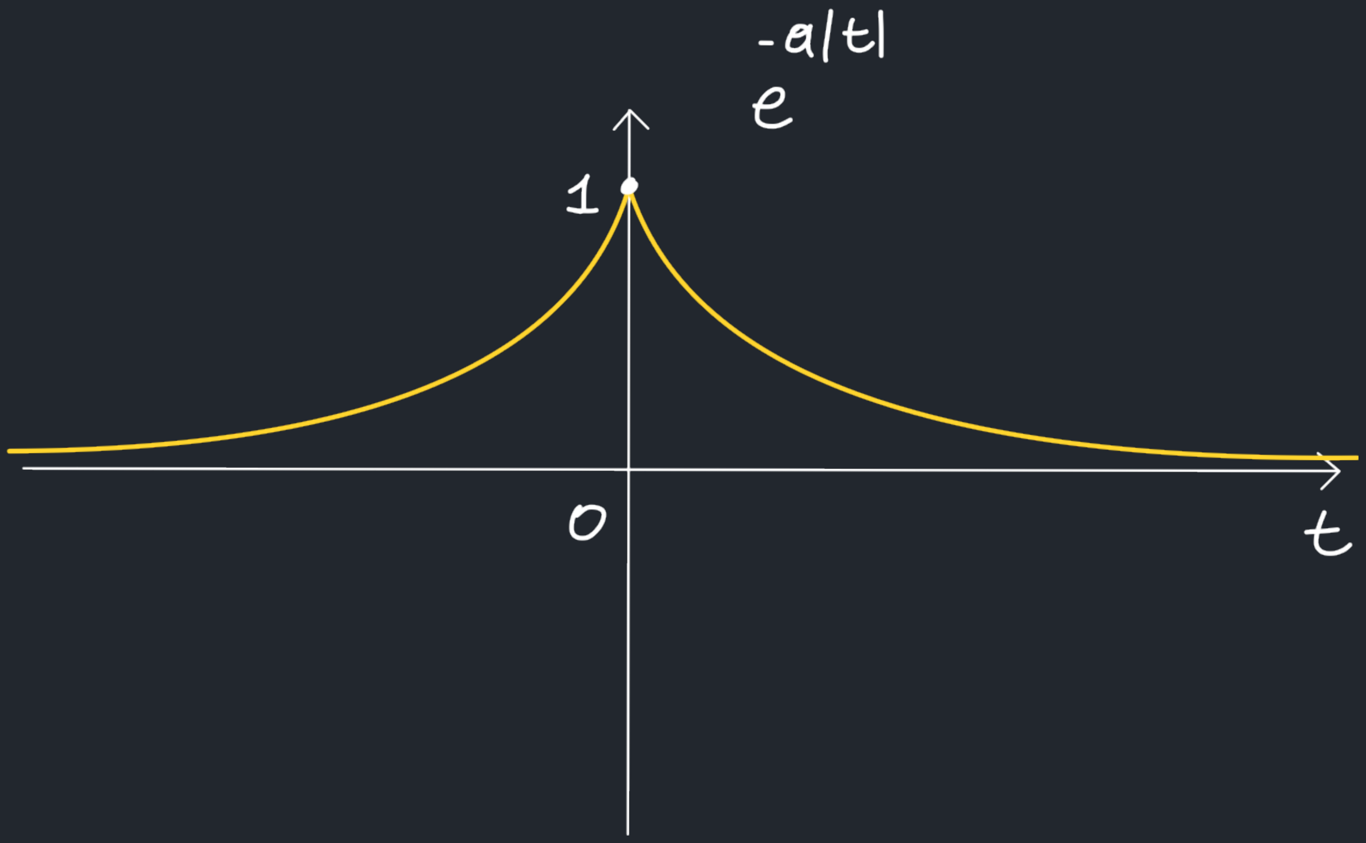
Graficchiamolo: Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow \measuredangle H(f) = -\text{atan}(\cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{2\pi T}} \cancel{T}) = -\frac{\pi}{4}$



Trasformata dell'esponenziale bilatero a tempo continuo

Esempio 2: Exp Bilatero

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad \text{con} \quad a \geq 0$$



Applichiamo la definizione di Trasformata di Fourier a tempo continuo ed otteniamo:

$$\Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi ft}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

Proseguiamo unendo gli esponenziali e mettendo in evidenza il tempo:

$$= \int_{+\infty}^{0} e^{t(a-j2\pi f)}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(a+j2\pi f)}\,dt =$$

A questo punto calcoliamo le primitive:

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot \left[e^{t(a-j2\pi f)} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{a+j2\pi f} \left[e^{-t(a+j2\pi f)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot [1-0] + \frac{1}{a+j2\pi f} [0-(-1)] = \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Ci basta fare il minimo comune multiplo per trovare finalmente la trasformata:

$$= \frac{a + \cancel{j2\pi f} + a - \cancel{j2\pi f}}{a^2+(2\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Non è presente "j"

$\Rightarrow$ Lo spettro è reale!

(e anche pari)

Attenzione!

Lo spettro non contiene una parte immaginaria! Di conseguenza **è uno spettro reale**.

Possiamo facilmente convincerci della veridicità dell'affermazione facendo i calcoli del mcm:

$$(a - i2\pi f)(a + i2\pi f) =$$

$$= a^2 + a\,\cancel{i2\pi} f - a\,\cancel{i2\pi} f \underbrace{- i^2}_{1} (2\pi f)^2$$

$$= a^2 + (2\pi f)^2$$

> La parte immaginaria se ne va moltiplicando i due denominatori

Rappresentare la trasformata dell'esponenziale bilatero

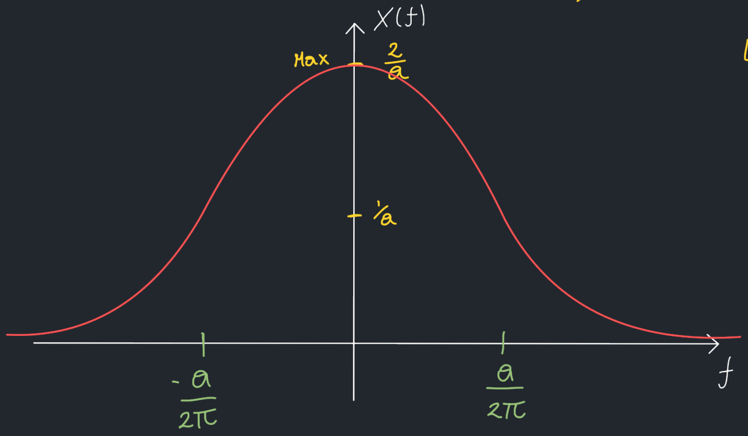
Siccome lo spettro è un segnale reale non abbiamo bisogno di trovare modulo e fase; ci basterà semplicemente fissare una **frequenza di taglio**.

Definiamo la frequenza di taglio come:

> La frequenza di taglio separa la banda di frequenza passante, in cui le informazioni vengono trasmesse senza distorsione, da quella di frequenza che viene bloccata o attenuata. In questo modo, la frequenza di taglio aiuta a ridurre le interferenze e a migliorare la qualità del segnale.

Grafichiamolo:

$$f_0 = \frac{a}{2\pi} \Rightarrow X\left(\frac{a}{2\pi}\right) = \frac{2a}{a^2 + \left(\cancel{2\pi}\,\frac{a}{\cancel{2\pi}}\right)^2} = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\,a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a}$$



$$\Rightarrow 20\log_{10}\frac{X(f_0)}{X(0)} = 20\log_{10}\frac{\frac{1}{a}}{\frac{2}{a}} = 20\log_{10}\frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{2} = 20\log_{10}\frac{1}{2} = \sim -6\,dB$$

Attenuazione

Trasformata della sequenza esponenziale monolatera a tempo discreto

Tendenzialmente i calcoli sono gli stessi dei casi precedenti:

Esempio 3: Tempo discreto: seq exp. monolatera

$x(n) = a^n \cdot u(n)$ con $-1 < a < 1 \Rightarrow |a| < 1$

Spettro $X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a \cdot e^{-j2\pi\nu}\right)^n}_{\text{Serie geometrica}}$

$\sim \sum_{n=0}^{+\infty} (z)^n$ con $-1 < z < 1 = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a\,e^{-j2\pi\nu}\right)^n = \frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$ Spettro

Otteniamo quindi che la relazione tempo -> frequenza della sequenza monolatera è:

Esempio 3: Tempo discreto: seq exp. monolatera

$x(n) = a^n \cdot u(n)$ con $-1 < a < 1 \Rightarrow |a| < 1$

Spettro $X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a \cdot e^{-j2\pi\nu}\right)^n}_{\text{Serie geometrica}}$

$\sim \sum_{n=0}^{+\infty} (z)^n$ con $-1 < z < 1 = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a\,e^{-j2\pi\nu}\right)^n = \frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$ Spettro

Rappresentare la trasformata della sequenza monolatera a tempo discreto

In questo caso nello spettro abbiamo `j`, il che vuol dire che lo spettro è complesso; per rappresentarlo dobbiamo quindi trovarne modulo e fase:

- Modulo di $X(f)$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{1}{1-a\cos(2\pi\nu)+ja\sin(2\pi\nu)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos(2\pi\nu))^2+(a\sin(2\pi\nu))^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2(2\pi\nu)-2a\cos(2\pi\nu)+a^2\sin^2(2\pi\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\underbrace{(\cos^2(2\pi\nu)+\sin^2(2\pi\nu))}_{1}+1-2a\cos(2\pi\nu)}}$$

$$\Rightarrow |X(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1-2a\cos(2\pi\nu)}}$$ modulo

- Fase: $\measuredangle H(\nu)$

$$= \measuredangle 1 - \measuredangle(1-e^{-j2\pi\nu}) = -\operatorname{atan}\left(\frac{a\sin(2\pi\nu)}{1-a\cos(2\pi\nu)}\right)$$

$\measuredangle 1 \rightarrow 0$

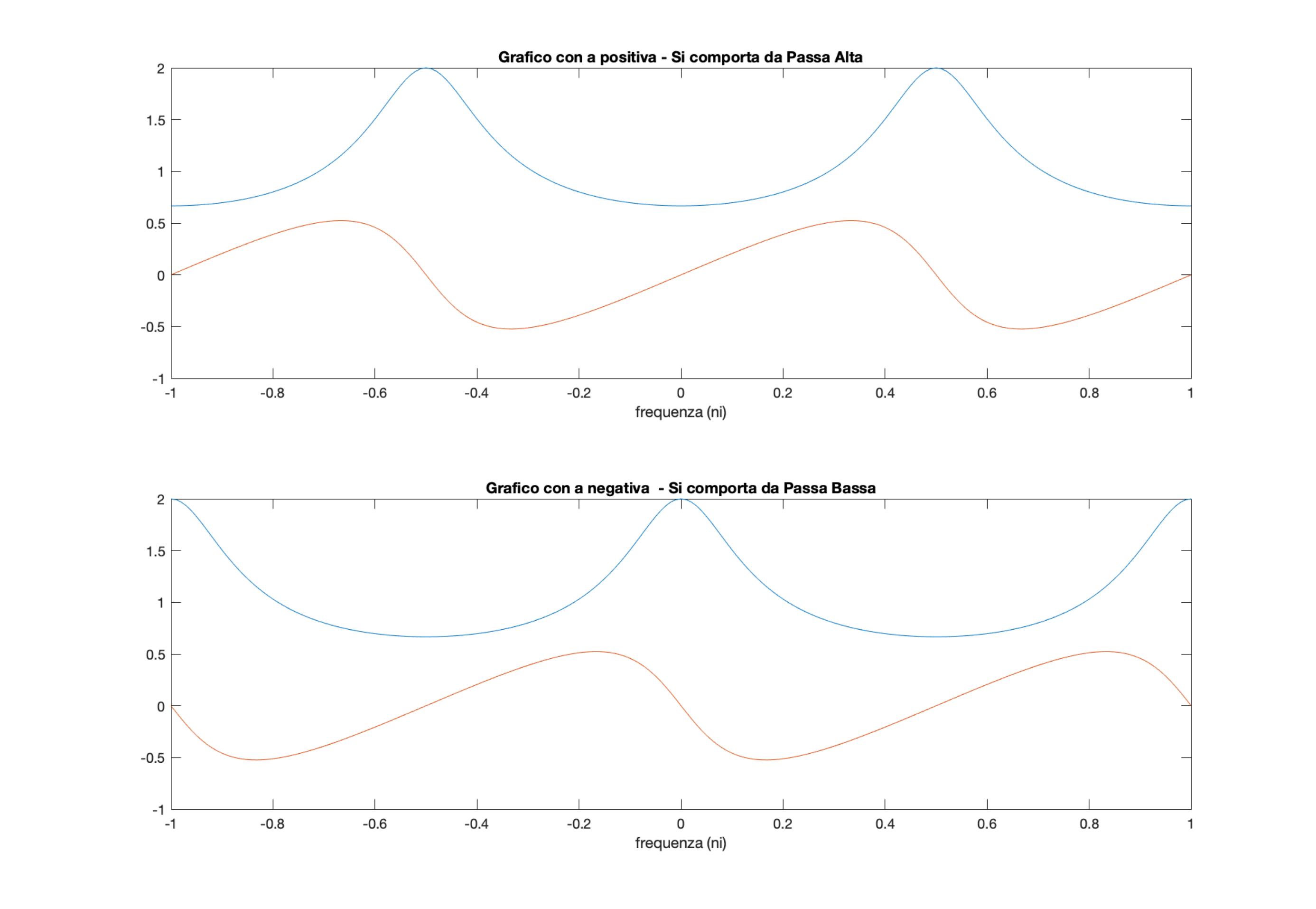
$\rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{Imm}{Re}\right)$

Codice MATLAB Per la sequenza esponenziale monolatera

```
a_pos = 1/2; a_neg = -1/2;  % se a_neg > 0 --> passa alto, se a_neg < 0 --> passa basso.

ni = [-1 : 0.01 : 1];       % un passo fitto per simulare la continuità

X_ni = 1./(1-a_neg * exp(-1i*2*pi*ni));   % usiamo './' perchè abbiamo un vettore

figure(1);

subplot(2,1,1);
plot(ni, abs(X_ni));        % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx
title('Grafico con a positiva');
```

```
xlabel('frequenza (ni)');

hold on                 % per verificare di aver calcolato bene

plot(ni, angle(X_ni));



% plottiamo a positivo
X_ni_pos = 1./(1-a_pos * exp(-1i * 2 * pi * ni));

subplot(2,1,2);
plot(ni, abs(X_ni_pos));      % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx
title('Grafico con a negativa');
xlabel('frequenza (ni)');

hold on                 % per verificare di aver calcolato bene

plot(ni, angle(X_ni_pos));
```

Otteniamo il seguente plot:



> Dobbiamo sempre tenere conto che lo spettro è periodico, quindi dobbiamo considerare solo un certo intorno di ni=0;

Trasformata di una sequenza esponenziale bilatera

Esempio 4 : Exp Bilatero Discreta

$$x(n) = a^{|n|} \quad \text{con} \quad |a| < 1 \rightarrow -1 < a < 1$$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} \cdot e^{-j2\pi\nu n}$$

> È importante notare come abbiamo definito a compresa tra -1 ed 1; questo ci tornerà più avanti nei calcoli per ricondurci a delle serie geometriche.

In questo caso il nostro obbiettivo è quello di **giungere ad una serie geometrica**, di cui conosciamo la convergenza:

Per trovarla quindi spezziamo la sommatoria, **stando attenti a non contare lo zero due volte**, in modo da avere due sommatorie:

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-j2\pi\nu n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n} \cdot e^{-j2\pi\nu n}$$

$K = -n$

$\rightarrow n = -K$

A questo punto ci riscriviamo l sommatorie mettendo insieme l'esponenziale e la `a`:

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\underbrace{a e^{-j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\big)^{n} + \sum_{K=1}^{+\infty} \big(\underbrace{a \cdot e^{j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\big)^{K}$$

Possiamo quindi ridurre le due sommatorie a due serie geometriche, che convergono rispettivamente a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n} = \frac{1}{1-z} - \underbrace{z^{0}}_{1}$$

Le scriviamo quindi come:

$$= \frac{1}{1-ae^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{1-ae^{j2\pi\nu}} - 1 = \frac{1-ae^{j2\pi\nu} + 1-ae^{-j2\pi\nu}}{\left(1-ae^{-j2\pi\nu}\right)\left(1-ae^{j2\pi\nu}\right)} - 1 = \frac{1-ae^{j2\pi\nu} + 1-ae^{-j2\pi\nu}}{1-ae^{j2\pi\nu}-ae^{-j2\pi\nu}+a^{2}} - 1$$

A questo punto ci riscriviamo gli esponenziali come due **cos(-)**:

$$= \frac{2 - a\left(\overbrace{e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu}}^{2\cos(\cdot\cdot)}\right)}{1 - a\left(\underbrace{e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu}}_{\boxed{2\cos(2\pi\nu)}}\right) + a^2}$$

↳ proof

$$\begin{cases} e^{j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) + j\,\cancel{\sin(2\pi\nu)} \\ e^{-j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) - j\,\cancel{\sin(2\pi\nu)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu} = 2\cos(2\pi\nu)}$$

Ottenendo quindi:

$$\frac{2 - 2a\cos(2\pi\nu)}{1 - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2} - 1 = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} - \cancel{2a\cos(2\pi\nu)} \cancel{- 1} + \cancel{2a\cos(2\pi\nu)} - a^2}{1 - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2}$$

Riscrivendo meglio abbiamo che **lo spettro di una sequenza bilatera è**:

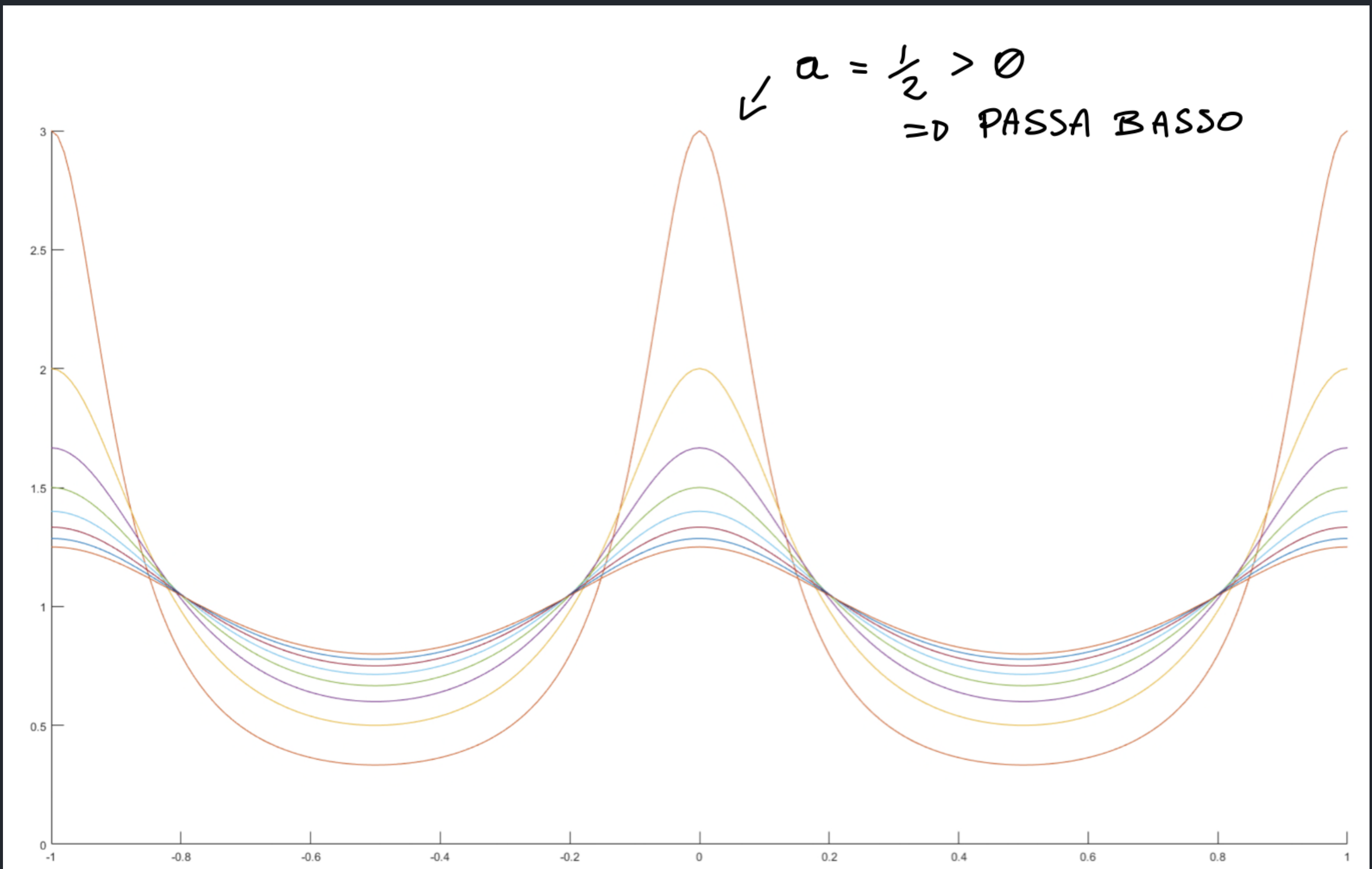
$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2}$$

j è assente

$\Rightarrow$ Reale

$\Rightarrow$ Simmetrico

> Notiamo come anche in questo caso sia assente la parte immaginaria; questo vuol dire che lo spettro non solo è **reale**, ma anche **simmetrico**.



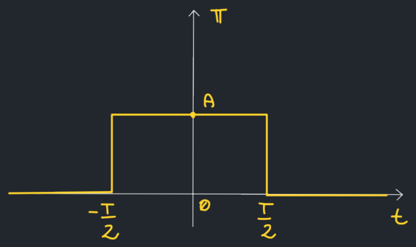
Codice MATLAB per la sequenza esponenziale bilatera

```
a = 1/2;  % se a_neg > 0 --> passa alto, se a_neg < 0 --> passa basso.
figure(1);
ni = -1 : 0.01 : 1;       % un passo fitto per simulare la continuità

X_ni = (1-a^2)./(1 - 2*a*cos(2*pi*ni)+a^2);   % usiamo './' perchè abbiamo un vettore

for n = 2:10
    hold on;
    plot(ni, abs(X_ni));        % 'abs' calcola il modulo di un numero cmplx

    a = 1/n;
    X_ni = (1-a^2)./(1 - 2*a*cos(2*pi*ni)+a^2);
    pause(0.1);
end
```

Trasformata dell'impulso rettangolare (tempo continuo)

Esempio 5: Impulso rettangolare

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow X(f) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\,dt$$



$$= \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-A}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}\right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left(\underbrace{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}\right)$$

$\Rightarrow \cancel{\cos(\pi f T)} - j\sin(\pi f T) - \left[\cancel{\cos(\pi f T)} + j\sin(\pi f T)\right]$

$\Rightarrow -2j\sin(\pi f T)$

$$= \cancel{-}\frac{A}{\cancel{j}2\pi f}\cdot\left[\cancel{-}2\cancel{j}\sin(\pi f T)\right]$$

$$= A\sin(\pi f T)\cdot\frac{1}{\pi f}$$

Spettro X(f)

→ ci ricorda molto la sinc: sinc: $A\cdot\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Anche in questo caso i calcoli sono molto simili alle trasformate precedenti; l'unica differenza sta nel fatto che invece di ridurre i fasori al coseno, in questo caso ci troviamo un sin(-).

Lo spettro della rect risultante, è molto simile alla sinc!

Siccome la rect ha una **durata T** (cosa che la sinc non ha!), possiamo aggiungerlo allo spettro finale semplicemente moltiplicando e dividendo per T/T:

$$\Rightarrow \text{Lo spettro } X(f) = \frac{A\,T\,\sin(\pi f T)}{\pi f\,T} = AT\,\mathrm{Sinc}(fT)$$

> Possiamo quindi scrivere rect(t/T) --> ATsinc(fT)

Rappresentare la trasformata dell'impulso rettangolare

Per prima cosaci accorgiamo che anche in questo caso **lo spettro della trasformata della rect è reale**, quindi pari; ma sopratutto non ci serve trovare modulo e fase per rappresentarlo.

Per rappresentarlo ci basta trovare dei **"punti di riferimento"**:

- La sinc ha valore massimo **in zero** , dove vale proprio **A*T** .
- Si annulla in più valori di f, con cadenza k/T, con K appartenente ai numeri numerabili (1, 2, ..., N).

  Il primo valore di f per cui la sinc si annulla è proprio 1/T:

L'argomento della sinc è $\pi f T$

$\Rightarrow$ Si annulla in $fT \pm K \Rightarrow f = \pm \frac{K}{T}$ $\rightarrow K \in \mathbb{N}$

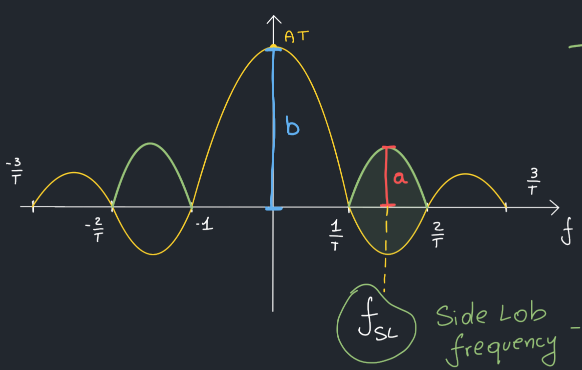
- Anche questo è un segnale reale

  $\rightarrow$ NO Phase

Domanda sulla trasformata dell'impulso rettangolare

`Quanto si attenua il lobbo principale rispetto ai secondari?`

Per rispondere a questa domanda ci basta considerare **il modulo dello spettro della rect**, ovvero **il modulo della sinc**, ovvero ovunque ci sono valori negativi dell'asse delle ordinate, questi diventeranno positivi:



$\rightarrow$ Si considera il modulo dello spettro, quindi i lobbi neg diventono positivi.

$\rightarrow$ la freq del primo picco secondario

Adesso consideriamo la differenza di "altezza" del lobo principale e del primo lobo secondario; chiamiamo le due altezze rispettivamente **b** ed **a**.

Adesso per trovare la risposta ci basta **effettuare il rapporto tra i due lobi**:

Per trovare il rapporto, dobbiamo prima trovare f_{SL}, ovvero la frequenza alla quale si ha il valore massimo del primo lobo secondario; in questo caso è:

Ans. $$f_{SL} = \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{2T}$$

A questo punto **per trovare l'attenuazione in f_{SL}** ci basta effettuare il rapporto tra il valore dello spettro in zero ed il valore dello spettro nel picco del secondo lobo in una scala logaritmica:

$$\rightarrow \quad 20 \log_{10} \left|\frac{X(0)}{X(f_{SL})}\right| = 20 \log_{10} \frac{1}{AT\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)} = 20 \log_{10}\left(\frac{AT}{AT\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)}\right) \cong 13\text{ dB}$$

`A cosa ci serve trovare l'attenuazione al primo lobo?`

Potrebbe tornarci utile nel momento in cui scegliamo la **banda di un sistema caratterizzato da uno spettro come quello appena visto**, pari a 1/T, siamo sicuri che l'attenuazione sarà maggiore a 13dB:

A che ci serve?
Se scelgo la Banda pari a: $B = \frac{1}{T}$ Sono sicuro che $20 \log_{10}\left(\frac{X(0)}{X(f)}\right) \geq 13\text{ dB}$ con $f > B$

Vedi inizio lezione

Concetto di banda
La banda di un segnale può essere definita come l'insieme di frequenze occupate dalle componenti significative dello spettro.
Se consideriamo un **opportuno multiplo della frequenza di taglio a 3dB**, se

poniamo B = $10f_0$ risulta che **le componenti esterne all'intervallo (-B, B) sono attenuate di almeno 23 dB rispetto a quella di centrobanda**.

Scrivendo il tutto negli stessi termini usati per l'attenuazione della sinc appena calcolata abbiamo che:

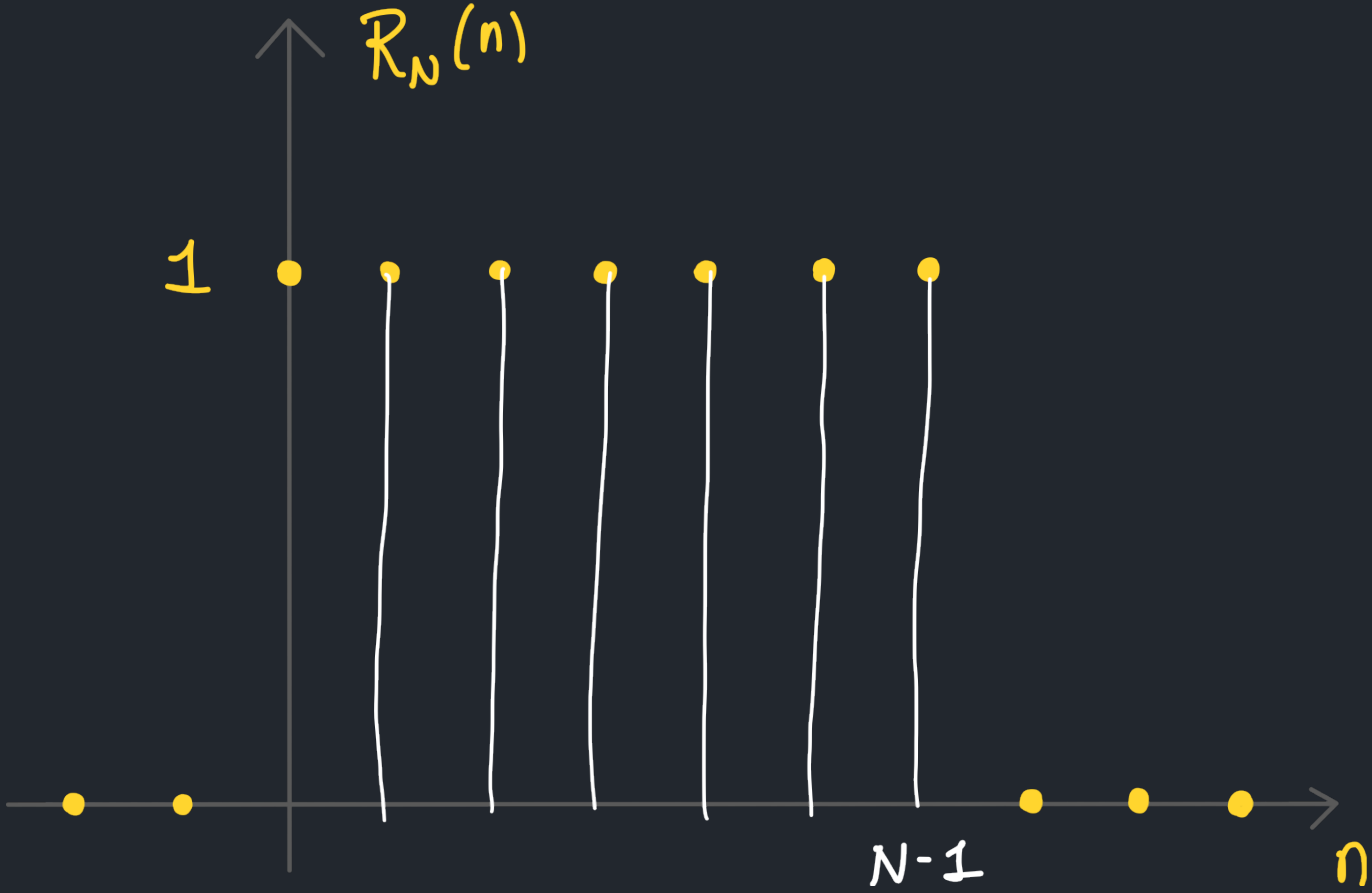
$$20 \log \left| \frac{X(f)}{X(0)} \right| \geq -23 \text{ dB}$$

Trasformata di una sequenza rettangolare discreta

In questo caso i calcoli non sono molto differenti ai calcoli fatti precedentemente; l'unica differenza sta nel fatto che **l'impulso rettangolare a tempo discreto parte da zero, e non da -(1/2) * T!**:

Esempio 6: Rect Discreto

$x(n) = R_N(n) \Rightarrow$ IMPORTANTE: Il segnale R_N (discreto) parte da $n > 0$ $\Rightarrow$ Non simmetrico $\Rightarrow$ Complesso.



> Dal grafico dell'impulso retangolare discreto possiamo notare come questo parta da zero, e non sia simmetrico rispetto all'asse delle ordinate;
>
> questo ci dice che **lo spettro del segnale sarà complesso!**

Applichiamo la definizione di trasformata ed otteniamo:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\underbrace{e^{-j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\Big)^n$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\nu}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi\nu N}}{1-e^{-j2\pi\nu}}$$

Anche in questo caso ci riconduciamo ad una serie geometrica, di cui conosciamo la convergenza.

A questo punto **mettiamo in evidenza il fasore ad esponente negativo** sia al numeratore che al denominatore; questo ci permette di scrivere i due fasori come sin(-):

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N}\left(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}\right)}{e^{-j\pi\nu}\left(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right)}$$

$$\underbrace{\cancel{\cos(\pi\nu N)} + j\sin(\pi\nu N) - \cancel{\cos(\pi\nu N)} + j\sin(\pi\nu N)}_{2j\sin(\pi\nu N)}$$

$$\underbrace{\cancel{\cos(\pi\nu)} + j\sin(\pi\nu) \cancel{-} \left[\cancel{\cos(\pi\nu)} \cancel{-} j\sin(\pi\nu)\right]}_{2j\sin(\pi\nu)}$$

Riscrivendo il tutto in modo più pulito otteniamo:

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N}\cdot \cancel{2j}\sin(\pi\nu N)}{e^{-j\pi\nu}\cdot \cancel{2j}\sin(\pi\nu)} = \frac{e^{-j\pi\nu N}\cdot \sin(\pi\nu N)}{e^{-j\pi\nu}\cdot \sin(\pi\nu)} = e^{-j\pi\nu(N-1)}\cdot\frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

$e^{-j(N-1)\pi\nu}$

Pi uscito benissimo!

$X(\nu)$

per una Rect discreta