UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 18 febbraio 2021

Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.

L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto (± 2 punti).

EX. 1

Si consideri una variabile discreta X con alfabeto $\mathcal{A}_X = \{1, 2, 3, 4\}$ e PMF $p_X(x) = x/10,\ x \in \mathcal{A}_X$. Si consideri quindi una variabile Y indicatore di evento che vale 1 quando X è pari e 0 altrimenti. Determinare

a. la pmf della variabile Y;
b. la pmf congiunta di X e Y;
c. la correlazione tra X e Y.

EX. 2 Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 3\delta(n+1)$$

calcolarne la densità spettrale di energia.

EX. 3 Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = \text{rep}_\pi \left[e^{-at}u(t)\right]$$

e l'espressione nel dominio del tempo del segnale $y(t)$ ottenuto filtrando $x(t)$ con il filtro passa-banda ideale avente risposta in frequenza

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f+f_0}{f_c}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_0}{f_c}\right) \quad \text{dove} \quad f_0 = \frac{100}{2\pi},\ \ f_c = \frac{1}{2\pi}$$

EX. 1

Si consideri una variabile discreta X con alfabeto $\mathcal{A}_X = \{1, 2, 3, 4\}$ e PMF $p_X(x) = x/10,\ x \in \mathcal{A}_X$. Si consideri quindi una variabile Y indicatore di evento che vale 1 quando X è pari e 0 altrimenti. Determinare

a. la pmf della variabile Y;
b. la pmf congiunta di X e Y;
c. la correlazione tra X e Y.

X con $\mathcal{A}_X = \{1,2,3,4\}$ con PMF $p_X = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{con } x \in \mathcal{A}_X \\ 0 & \text{con } x \notin \mathcal{A}_X \end{cases}$

Consideriamo Y indicatore di evento che vale 1 quando X è pari e 0 altrimenti

$Y = \begin{cases} 1 & X \text{ è PARI} \\ 0 & \text{otws.} \end{cases}$ =▷ X è pari quando x è pari, ovvero per $x = \{2, 4\}$

Q_1 PMF di $Y = ?$ Y dipende da X =▷ $P_Y(1) = P_X(2) + P_X(4) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$

$P_Y(0) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Q_2: PMF Congiunta $p_{XY}: (x,y) \in \mathcal{A}_X \mathcal{A}_Y$ –▷ $p_{XY}(x,y)$ –▷ $P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$

–▷ $p_{XY} = \sum_{i \in \mathcal{A}_X} \sum_{j \in \mathcal{A}_Y} [x_i \cdot y_j] \cdot p_X \cdot p_Y$

$P_{XY}(x,y) = P(\{X = x\}) \cap P(\{Y = y\})$

=▷ $P_{XY}(x,y) = P(X/Y) \cdot P_Y(y)$

=▷ $P(X/Y) = P(Y/X) \cdot \frac{P(X)}{P(Y)}$

X	Y	P(X/Y)	$P_Y(Y)$	$P_{XY}(x,y)$
1	0	½	$\frac{2}{5}$	
1	1		$\frac{3}{5}$	
2	0		⋮	
2	1		⋮	
3	0			
3	1			
4	0			
4	1			

X
1
2
3
4

EX. 2 Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 3\delta(n+1)$$

calcolarne la densità spettrale di energia.

$x(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 3\delta(n+1)$ $\quad Q_1: \ S_x(\nu) = ?$

Sappiamo che $S_x(\nu) = |X(\nu)|^2$ ma anche che $r_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot)$

Calcoliamo $r_x(\cdot)$

$$\Rightarrow r_x(n) = 9\left[\delta(n-2)+\delta(n+2)\right] + 12\left[\delta(n-1)+\delta(n+1)\right] + 22\,\delta(n)$$

			3, 2, 3	
$x(n+2)$	3, 2, 3			$r(-2) = 9$
$x(n+1)$		3, 2, 3		$r(-1) = 6+6 = 12$
$x(n)$			3, 2, 3	$r(0) = 9+4+9 = 22$

$\rightarrow$ Troviamo S_x Trasformando $r_x(n) \rightleftharpoons S_x(\nu)$

$$\Rightarrow 9\left[e^{-j4\pi f} + e^{j4\pi f}\right] + 12\left[e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}\right] + 22 = \underbrace{18\cos(4\pi f) + 24\cos(2\pi f) + 22}_{S_x(\nu)}$$

Time 5'

EX. 3 Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = \text{rep}_\pi \left[e^{-at}u(t)\right]$$

e l'espressione nel dominio del tempo del segnale $y(t)$ ottenuto filtrando $x(t)$ con il filtro passa-banda ideale avente risposta in frequenza

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f+f_0}{f_c}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_0}{f_c}\right) \quad \text{dove} \quad f_0 = \frac{100}{2\pi},\ f_c = \frac{1}{2\pi}$$

$x(t) = \text{rep}_\pi\left[e^{-at} \cdot u(t)\right]$ segnale gen $s(t) = e^{-at} \cdot u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{a - j2\pi f}$

Q_1: Trasformata $x(t) = ?$

Sappiamo che: $\text{rep}_T[x(t)] = \tilde{x}_S(f)$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot \delta(t - k\pi) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a(t-k\pi)}$$

Rep

$$\Rightarrow \text{rep}_\pi[x(t)] \rightleftharpoons \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j2\pi\frac{m}{\pi}} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j2m} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{\pi}\right)$$

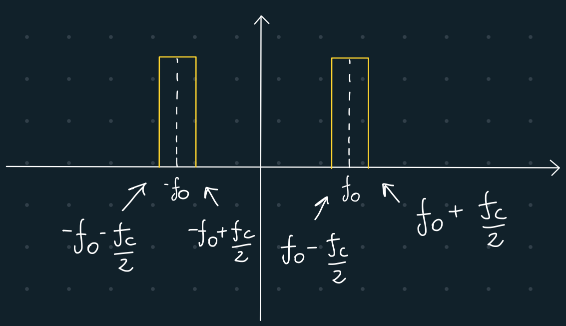
Q_1

Q_2: $y(t)$ ottenuto filtrando $x(t)$ con il filtro passa Banda avente

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f+f_0}{f_c}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_0}{f_c}\right) \quad \text{dove} \quad f_0 = \frac{100}{2\pi} \quad f_c = \frac{1}{2\pi}$$

Sappiamo che $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ Quindi

$$Y(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot \delta\left(f\ \frac{m}{\pi}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f+f_0}{f_c}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{\pi}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f-f_0}{f_c}\right)$$



$$\Pi\left(\frac{f-f_0}{f_c}\right) \rightleftharpoons f_c\ \text{Sinc}(t f_c) \cdot e^{-j2\pi t f_0}$$

$$\Pi\left(\frac{f+f_0}{f_c}\right) \rightleftharpoons f_c\ \text{sinc}(t f_c) \cdot e^{j2\pi t f_0}$$

$\Rightarrow$ Le finestre hanno l'effetto di far passare i soli segnali che si ritrovano al loro interno:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-f_0-\frac{f_c}{2}}^{-f_0+\frac{f_c}{2}} \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot \delta\left(f - \frac{k}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=f_0-\frac{f_c}{2}}^{f_0+\frac{f_c}{2}} \frac{1}{a - j2\pi f} \cdot \delta\left(f - \frac{m}{\pi}\right)$$

la riproduzione avera $T = \pi$ $\Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$

$k \in (-15.995 - 15.8)$ $\quad m \in (15.835,\ 15.995)$

Siccome $f_c < \frac{1}{\pi} \Rightarrow K = f_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}\cdot\delta\left(f-\frac{\cancel{100}^{50}}{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\pi}}}\right) + \frac{1}{a-j2\pi f}\cdot\delta\left(f-\frac{\cancel{100}^{50}}{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\pi}}}\right) = \frac{1}{a-j\cancel{2\pi}\frac{100}{\cancel{2\pi}}}\cdot\delta(f-50) + \frac{1}{a-j\cancel{2\pi}\frac{100}{\cancel{2\pi}}}\cdot\delta(f-50)$$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{a-j100}\cdot\delta(f-50) + \frac{1}{a+j100}\cdot\delta(f+50)$$

$\rightarrow$ Per avere $y(t)$ Trasformiamo $Y(f)$

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{a-j100}e^{-j100t} + \frac{1}{a+j100}e^{+j100t} = \frac{(a+100j)e^{-j100t} + (a-j100)e^{+j100t}}{(a-j100)(a+j100)} =$$ Pongo $100=\omega$

$$= \frac{ae^{-j\omega t} + j100e^{-j\omega t} + ae^{j\omega t} - j100e^{j\omega t}}{a^2 + a\cancel{j\omega} - a\cancel{j\omega} + \omega} = \frac{a(e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}) + j100(e^{-j\omega t}-e^{j\omega t})}{a^2+\omega}$$

$$= \frac{2a\cos(\omega t) - 100\cdot 2j^2\sin(\omega t)}{a^2+\omega}$$

$$e^{-j\omega t} - e^{j\omega t} = \cancel{\cos(\omega t)} - i\sin(\omega t) - \cancel{\cos(\omega t)} - i\sin(\omega t) = -2i\sin(\omega t)$$

$$= \frac{2a\cos - 200\sin(\omega t)}{a^2+\omega}$$