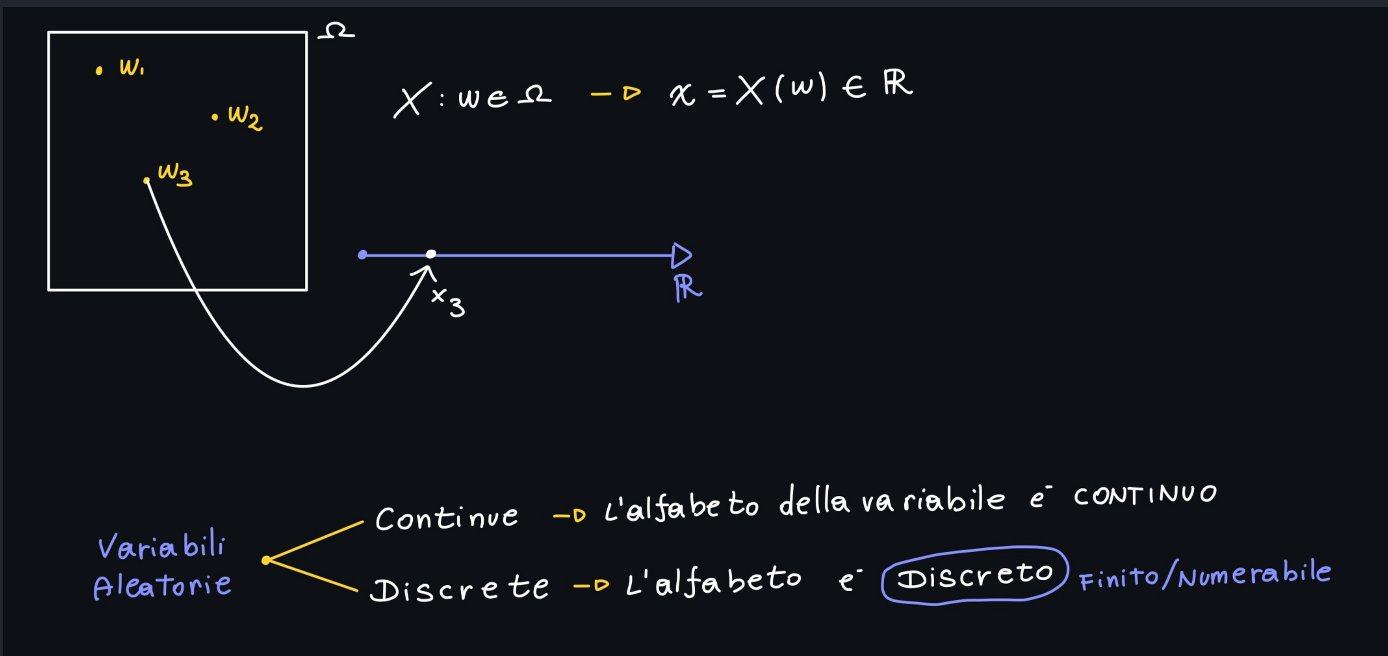
Piccolo Recap

La variabile aleatoria

Abbiamo visto come sia possibile definire uno **spazio di probabilità**, sul quale possiamo costruire un modello matematico particolarmente utilizzato nella **pratica**, ovvero la **variabile aleatoria**.

A partire dallo spazio dei campioni Ω (in cui sono presenti diverse uscite sperimentali) possiamo definire una **funzione matematica** indicata con **X** (lettera grande):



La CDF

CDF

$$F_X : \underbrace{x \in \mathbb{R}} \longrightarrow F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

Non consideriamo più lo spazio dei campioni!

La CDF è una Probabilità!

Proprietà Costitutive della CDF

1. $F_X(-\infty) = 0$
   - Se ci poniamo a -∞ a che evento corrisponde? Nessun evento -> Evento impossibile -> Probabilità 0
2. $F_X(+\infty) = 1$
   - Se ci poniamo a +∞ a che evento corrisponde? Corrisponde alla "somma" di tutti gli eventi -> evento certo -> $P(\Omega)$ -> probabilità 1
3. $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_1)$
   - **Traduzione:** È Una funzione non decrescente

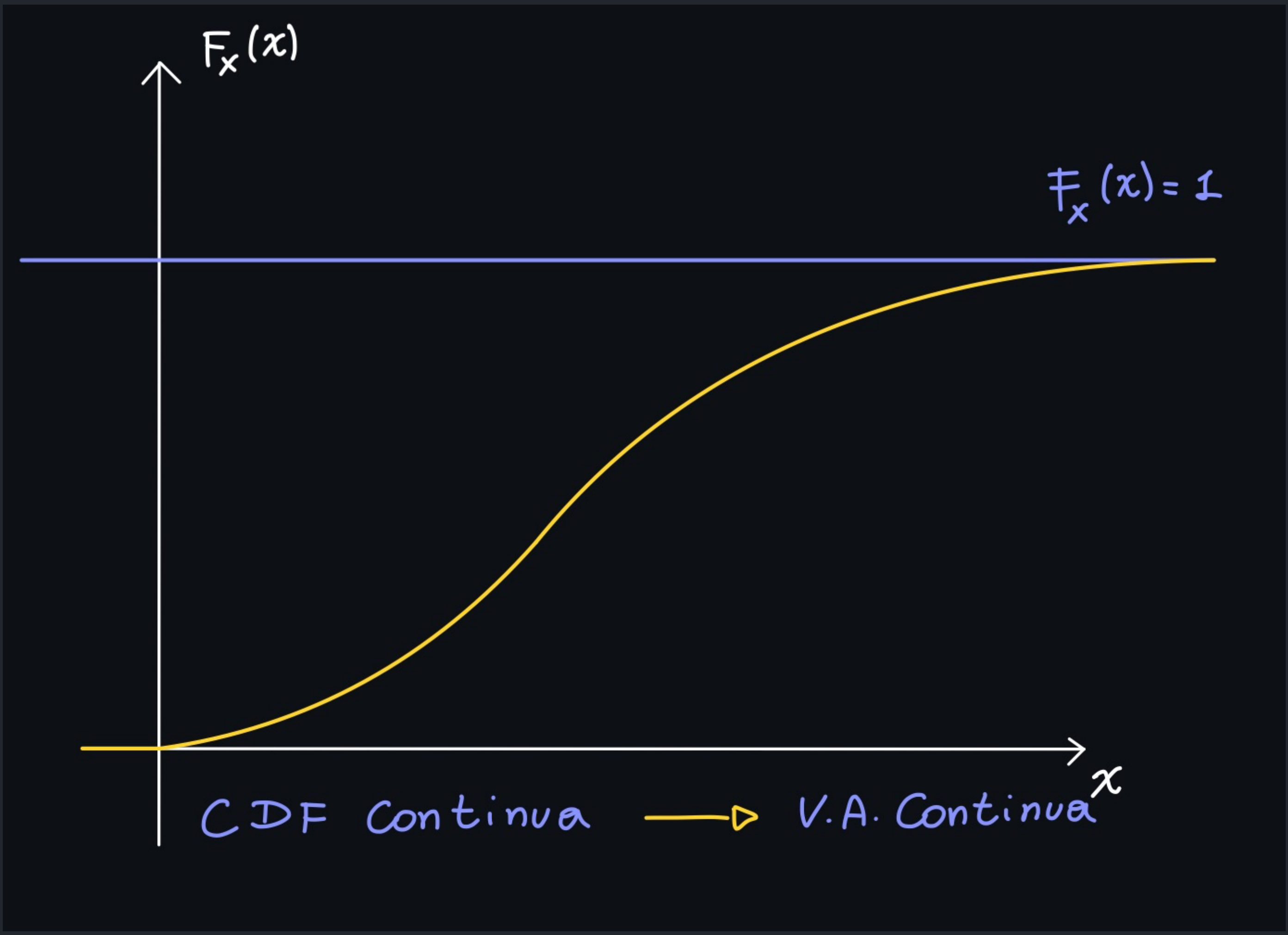
$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

4. - **"Continuità da destra"** , ovvero la funzione è sempre continua a destra di x_0

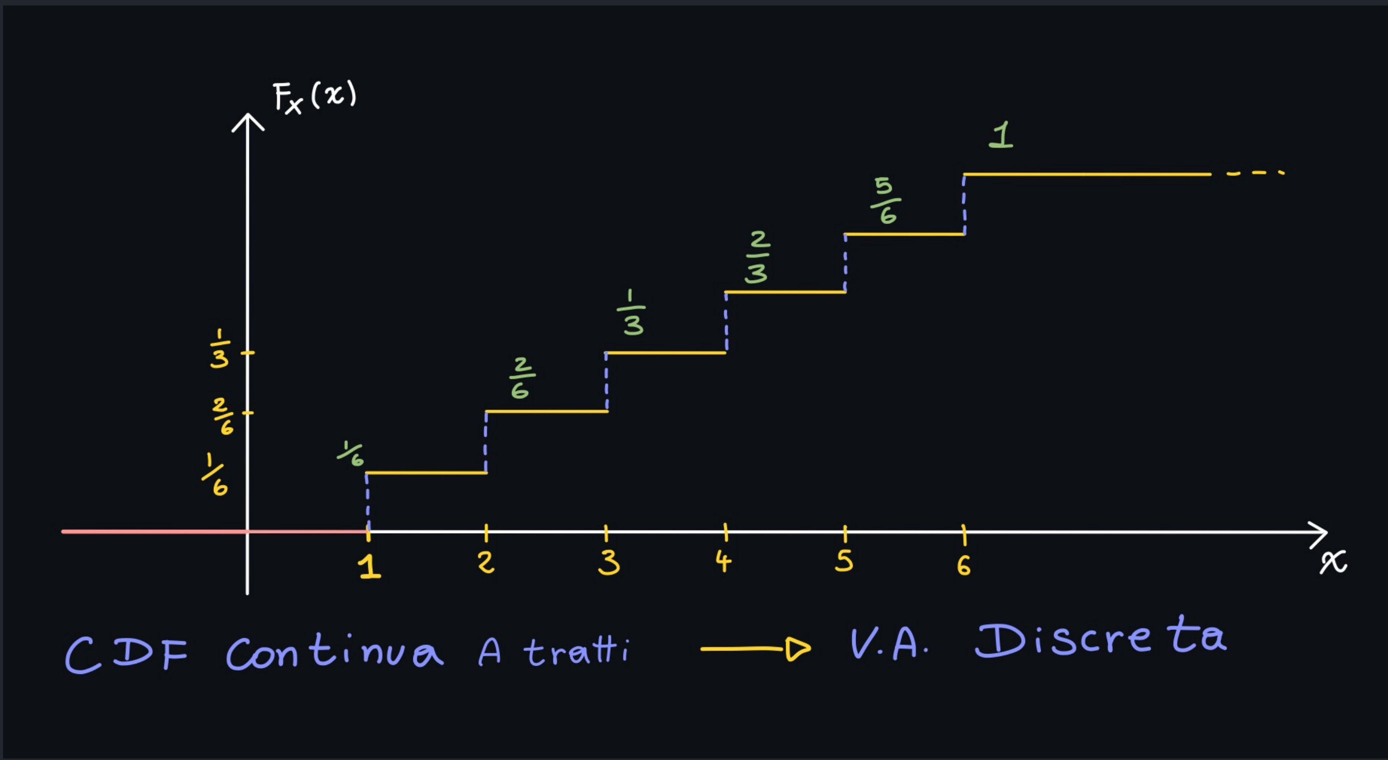
Queste sono delle **proprietà necessarie e sufficienti** affinchè una **qualsiasi funzione** sia una CDF.

Riconoscere le variabili aleatorie dalla CDF

Se, guardando il grafico della CDF di una variabile aleatoria, notiamo che la funzione è continua, sapremo automaticamente che la variabile aleatoria associata sarà una **variabile aleatoria continua** come nel seguente caso:



Se, guardando il grafico della CDF di una variabile aleatoria, notiamo che la funzione è continua **a tratti**, sapremo automaticamente che la variabile aleatoria associata sarà una **variabile aleatoria discreta** come nel seguente caso:



Caratterizzazione alternativa alla CDF: la PMF (V.A. Discrete)

Detta **Funzione di "mass probability"**:

$$x \in A_X \longrightarrow P_X(x) = \underbrace{P(\{X = x\})}$$

Alfabeto di x $\subseteq \mathbb{R}$

Definita come la prob. che la variabile aleatoria assuma il valore di x

Proprietà costitutive della PMF

1. **Non negatività**: è una funzione non negativa
    1. $P_X(x) \geq 0 \ \forall x \in A_X$

2. **Normalizzazione**: La somma di tutti valori della CDF dell'alfabeto di X è pari ad 1:

    1. 2. $$\sum_{x \in \mathcal{A}_X} P_X(x) = 1$$

Come calcolare la probabilità di un evento specifico?

Calcolare un evento specifico:

$$P(\{x \in A\}) = \sum_{x \in \mathcal{A}_X \cap A} P_X(x)$$

Intersezione Tra Alfabeto ed evento A

Come ricavare la CDF dalla PMF?

Come ricavare la CDF dalla PMF ?

$$F_X(x) = \sum_{\nu \in A_X : \nu \leq x} P_X(x)$$

Prendiamo solo i valori ν minori o uguali ad x

PDF - Funzioni di Densità di probabilità

In questo caso si utilizza, per denotare la funzione, sempre la lettere f, ma in questo caso in minuscolo:

PDF: Funzione di densita' di probabilita'

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} \underbrace{F_X(x)}_{\text{CDF}}$$

Guardando bene questa *definizione matematica* ci accorgiamo abbastanza velocemente che **non si tratta di una probabilità**; anzi, **ha le dimensioni fisiche che sono l'inverso di quelle della variabile aleatoria**:

Istanti di arrivo del viaggiatore

Variabile Aleatoria $\longrightarrow$ PDF

Secondi

$$s^{-1} = 1/s$$

> Nell'esempio del viaggiatore, se la variabile aleatoria misura in secondi, la PDF misurerà con l'inverso dei secondi, ovvero con s^{-1} oppure 1/s

Un Esempio: Temperatura in una stanza

Esempio: Temperatura di una stanza

$17° < temp < 25°$

→ Qual'e la probabilita' che la Temperatura sia di 20,1 c° ?

Ammesso di definire una V.A. Continua su questi valori, quanti "Slot" abbiamo tra 17° e 21,5°?

→ Infiniti

Se volessimo calcolare la probabilità con l'approccio frequentistico la potremmo calcolare come:

Approccio frequentistico

$$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi totali}} = \frac{1}{\infty} = \emptyset$$

> Visto che i casi totali sono infiniti (siamo nel caso di una V.A. Continua), otteniamo che la probabilità che la stanza assuma una data temperatura è **zero**, il che è logicamente impossibile!

Variazione di probabilità

Ha molto più senso studiare la **variazione di probabilità**.

Questo è lo stesso motivo per cui parliamo di **densità di probabilità**; infatti la **densità** è un valore che **integrato** ci restituisce la **potenza**; proviamo quindi ad integrare la PDF:

Integriamo la funzione (PDF)

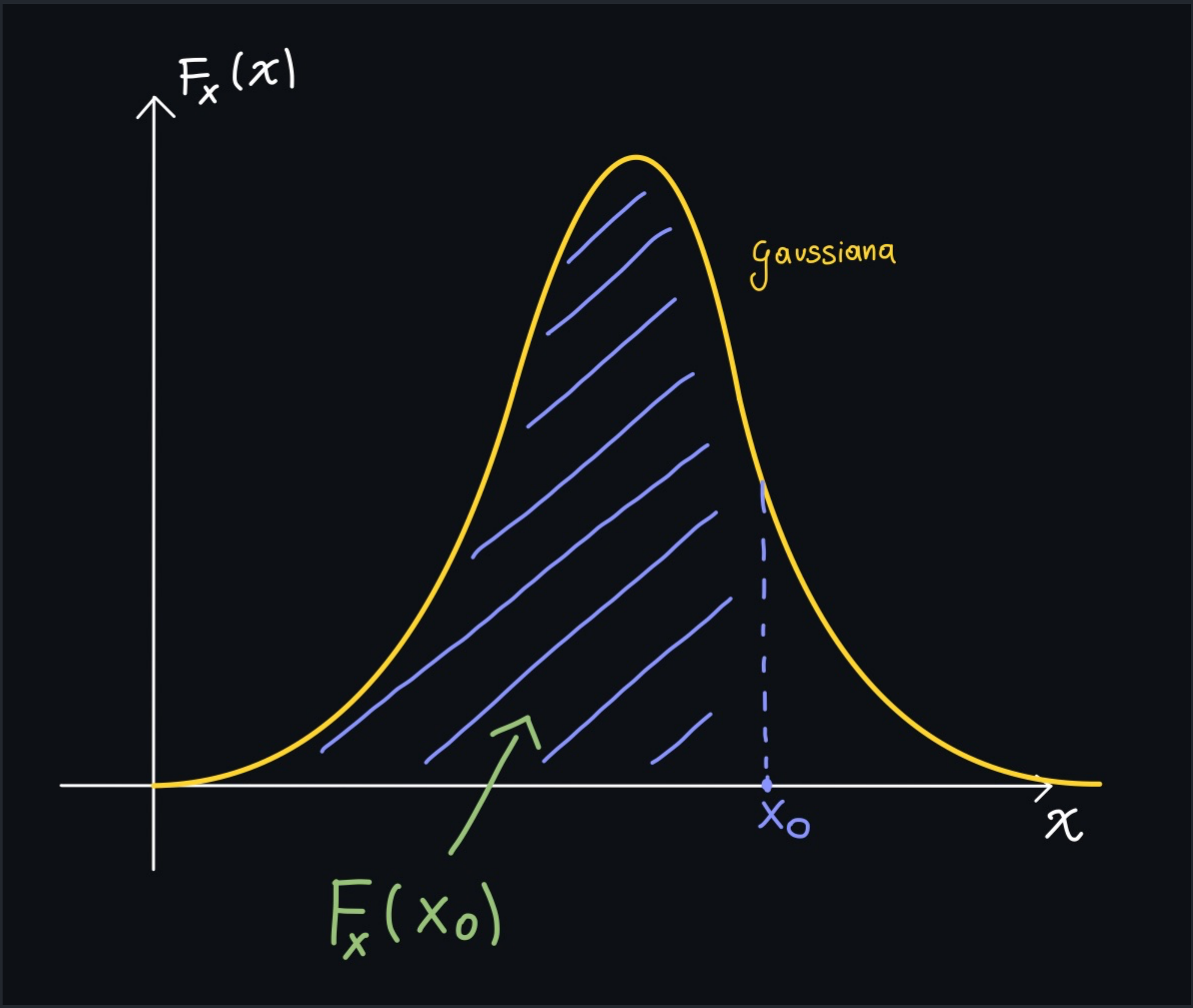
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{d\,F_X(x)}{d\,x}\,dx = \left[F_X(x) \right]_{-\infty}^{x} = F_X(x) - \underbrace{F_X(-\infty)}_{0} = F_X(x)$$

Siccome la CDF vale zero quando x tende a -∞, possiamo toglierla dall'eqazione, lasciandoci solo con $F_X(x)$:

$$\Rightarrow \underbrace{F_X(x)}_{\text{CDF}} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(x)}_{\text{PDF}}\,dx$$

> Ne deduciamo che la CDF è semplicemente l'integrale della PDF tra -∞ ed x

Se fissiamo x_0 e calcoliamo l'integrale della F_X tra 0 ed x_0 cosa otteniamo?



> Otteniamo la F_X Valutata in x_0

Quindi?

In pratica, una volta che abbiamo a disposizione la **PDF di una variabile aleatoria** (cosa che nella pratica accade spesso visto che sono disponibili diversi modelli riconosciuti), per calcolare la CDF ci basta **integrare la PDF**.

Proprietà costitutive delle PDF

1. **Non negatività**
   1. **Dimostrazione:** siccome la PDF è la derivata della CDF (per definizione), e la CDF è *non decrescente* (la derivata di una funzione crescente non può essere

negativa), allora la PDF è non negativa.

2. **Normalizzazione**

    1. In questo caso non avremo una sommatoria ma un integrale:

    - $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

    Dimostrazione

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} F_X(x)\, dx = \overbrace{F_X(+\infty)}^{1} - \overbrace{F_X(+\infty)}^{\emptyset} = 1$$

3. **Calcolo della probabilità in intervalli**

    1. - Se $P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$

        Equivale a dire che se conosco la CDF e devo calcolare la probabilità che la variabile aleatoria appartenga ad un intervallo, ci basta prendere il valore della CDF valutata nell'estremo superiore, lo sottraiamo alla $F_X(x_1)$ e troviamo la probabilità.

        Se si conosce la PDF ci basta calcolare l'integrale esteso a (x_1, x_2)

    Dimostrazione:

Dimostrazione

$$\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$$

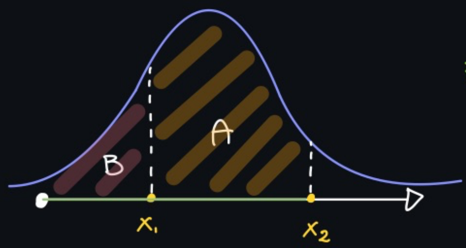
Calcoliamo le probabilità:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \underbrace{P(\{X \le x_2\})}_{F_X(x_2)}^{\text{CDF}} = \underbrace{P(X \le x_1)}_{F_X(x_1)}^{\text{CDF}} + P(\{x_1 < X \le x_2\})$$

$$\Rightarrow F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(\{x_1 < X \le x_2\})$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\{x_1 < X \le x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

$$\rightarrow \text{La CDF } F_X(x) \text{ è } \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx \rightarrow P(\{x_1 < X \le x_2\}) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx$$



Fare $\int_{-\infty}^{x_2} f - \int_{-\infty}^{x_1} f$ ovvero $(A+B) - (B)$

equivale a fare $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = A$

Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh

Variabile Aleatoria di Tipo Rayleigh

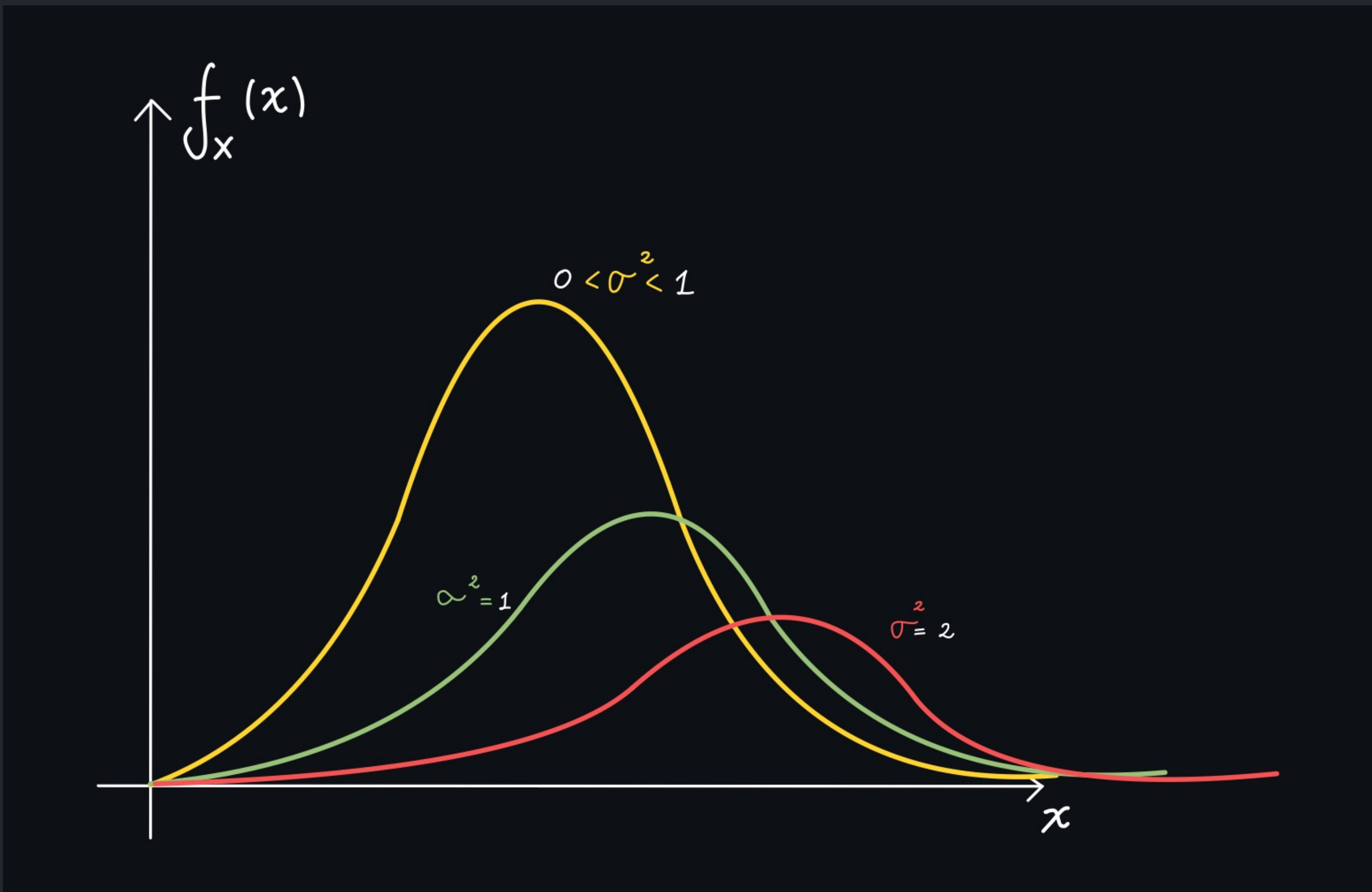
$$X \sim Ray(\sigma^2)$$

> Si legge come: "X è **distribuita** (ha una particolare distribuzione "notevole") Ray"

Una variabile aleatoria di tipo Rayleigh ha una **PDF** definita come:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \underbrace{u(x)}_{\text{"gradino"}} \qquad u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

> Visto che il "gradino" ω vale 0 quando x < 0, tutta la funzione PDF non è definita per x < 0!



> A seconda del valore di σ^2 possiamo ottenere diverse curve (tutte con la stessa forma pero!)

Le variabili aleatorie che stiamo vedendo in questa sezione del corso sono variabili aleatorie "**Notevoli**", proprio perchè **modellano** molti fenomeni naturali

Esempio: Calcolare la CDF della variabile aleatoria di tipo Rayleigh

Calcoliamo la CDF della variabile Aleatoria di Rayleigh

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(v)\,dv = \int_{-\infty}^{+x} \frac{v}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\cdot u(v)\,dv$$

Pongo $s = -\frac{v^2}{2\sigma^2} \Rightarrow ds = -\frac{\cancel{2}v}{2\sigma^2}\,dv \Rightarrow \int_0^{x} \frac{\cancel{v}}{\cancel{\sigma^2}}\, e^{-\frac{v^2}{2\sigma}}\cdot u(v)\cdot \frac{\cancel{\sigma^2}}{\cancel{v}}\,dv$

$$\Rightarrow -\int_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{s}\,ds = -\left[e^{s}\right]_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 1$$

L'estremo cambia con la sostituzione

quindi $\overset{\text{CDF}}{F_X(x)} = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\cdot u(x)$

In (0,0) la $F_X(x)$ vale zero, e per $x \to +\infty$ vale 1, proprio come una CDF dovrebbe

🏁1:09

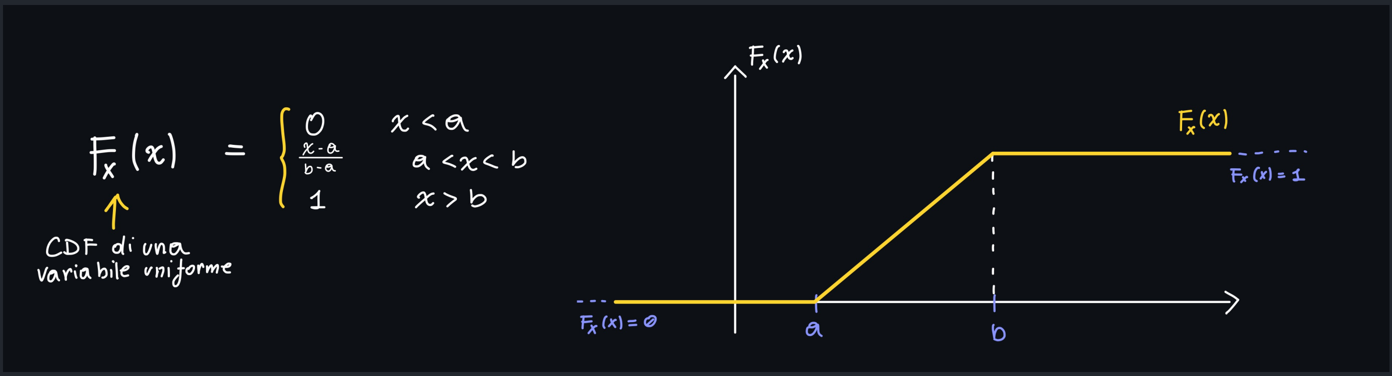
Variabile Aleatoria Uniforme

In questo caso la X si dice **distribuita** con una variabile aleatoria uniforme in **a** e **b**:

Variabile Aleatoria Uniforme

$$X \sim U(a,b)$$

La **CDF di una variabile aleatoria uniforme** viene definita come una funzione **in più intervalli**:

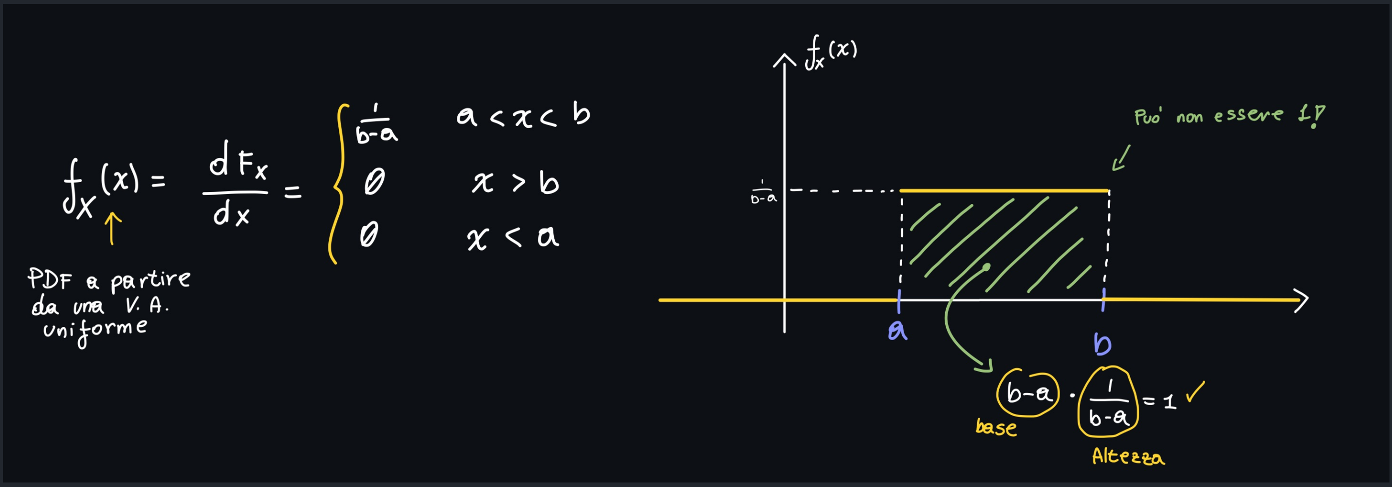


> Siccome abbiamo già definito una variabile aleatoria uniforma nelle scorse lezioni, possiamo definire la PDF a partire dalla CDF

La PDF si calcola derivando la CDF

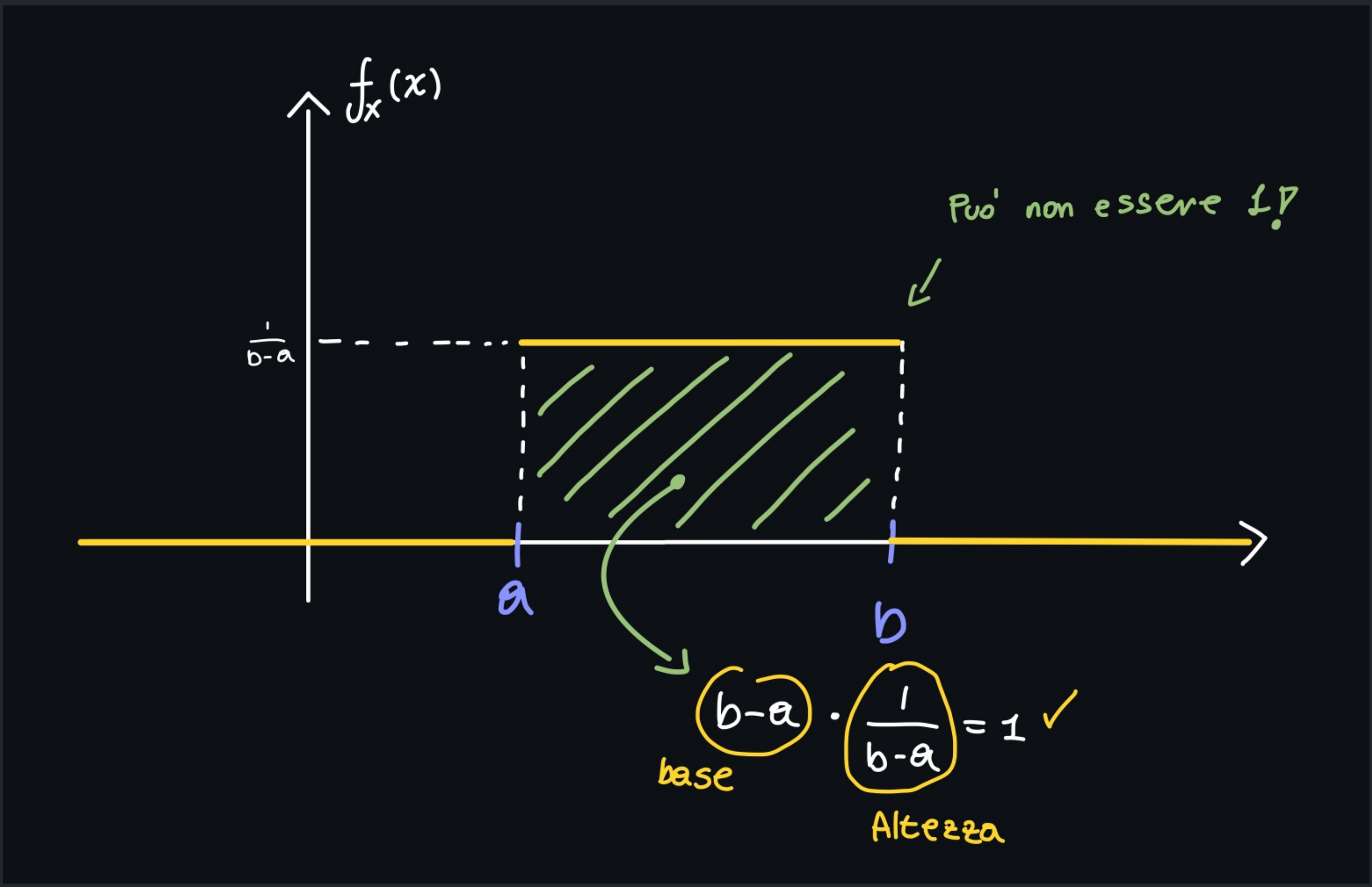
Attenzione:

- L' " **altezza** " della "curva", ovvero l'asse delle y, può **non essere 1** , infatti corrisponde ad 1/(b-a)
- L'area sottesa alla curva però, **deve sempre** essere pari ad 1!



> I valori assunti dalla PDF non è detto che siano compresi tra 0 ed 1, proprio perchè abbiamo detto che **la PDF non è una probabilità!**.

Tra le proprietà costitutive della PDF ci sono la **non negatività** e la **normalizzazione**, cioè l'area sottesa alla curva (in questo caso alla funzione costante) deve essere uguale ad 1:



Tiriamo le somme

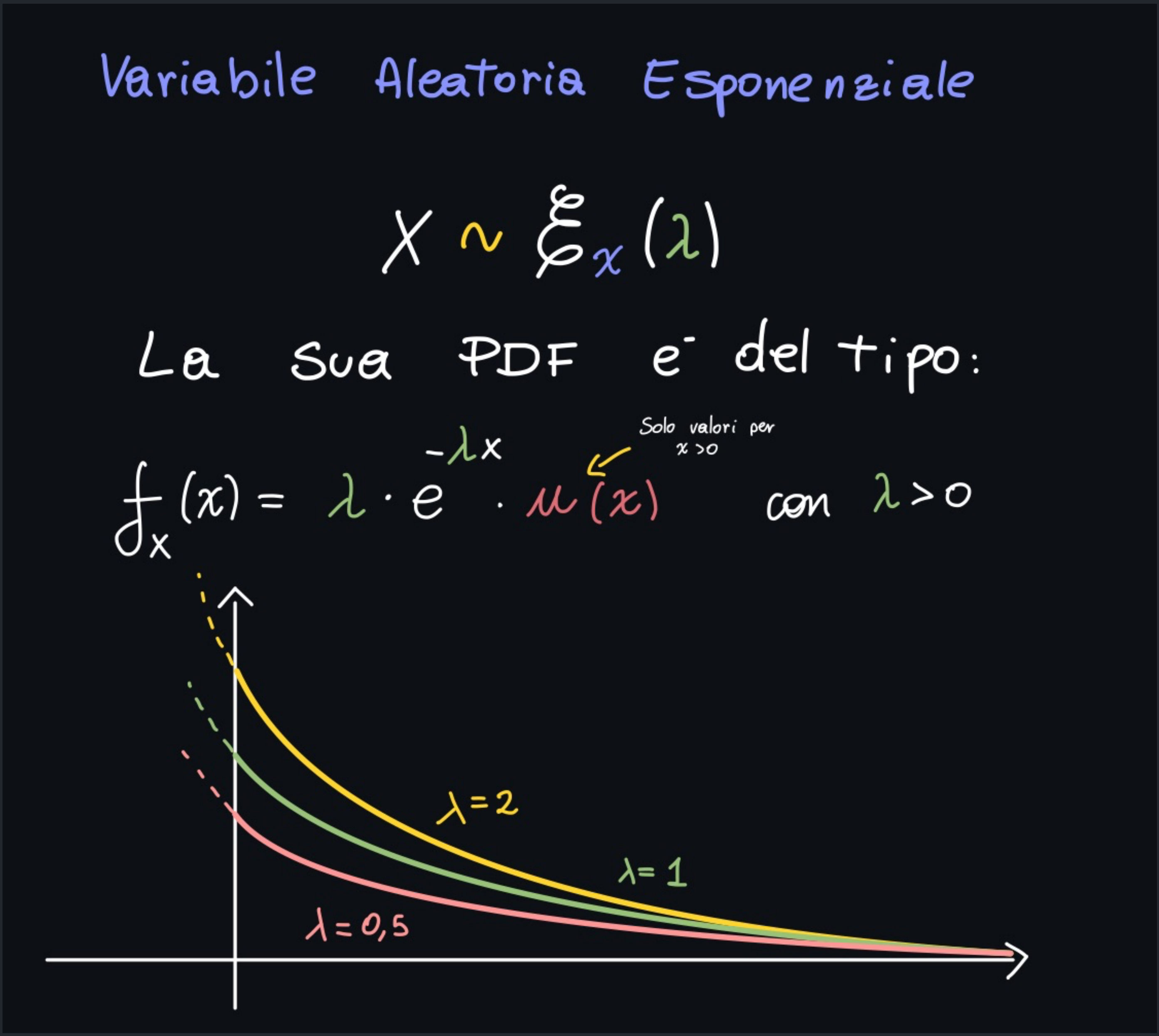
Abbiamo visto due esempi:

Nella variabile **di tipo Reileigh** abbiamo definito prima la PDF e poi abbiamo ricavato la CDF;

Nel secondo esempio, abbiamo definito prima la CDF ricavandoci successivamente la PDF.

Variabile aleatoria esponenziale

In questo caso la variabile aleatoria X è distribuita nel seguente modo:



> Al variare di λ la curva varia.
>
> λ >> esponenziale accentuato
>
> λ << esponenziale appiattito

🏁1:18

Calcoliamo la CDF integrando la PDF

Il calcolo è molto simile a quello fatto in precedenza per la **Variabile di Rayleigh**:

Calcolare la CDF dalla PDF

Limitiamo l'intervallo a dove non si annulla

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda v} \cdot u(v)\,dv = \int_{0}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda v} \cdot u(v)\,dv$$

-> Sostituzione -> $s = -\lambda v \Rightarrow ds = -\lambda\,dv \Rightarrow -\int_{0}^{-\lambda x} e^{s}\,ds = \left[-e^{s}\right]_{0}^{-\lambda x} = \boxed{1 - e^{-\lambda x} \cdot u(x)}$

Nuovo Intervallo

Variabile aleatoria Gaussiana Standard

Per descrivere la Gaussiana, dobbiamo iniziare definendo una **variabile aleatoria Gaussiana Standard**:

Per indicare una Gaussiana Standard, e distinguerla da una **non standard**, invece di usare la **X**, usiamo $\mathbf{X_0}$:

Variabile Aleatoria Gaussiana (Standard)

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

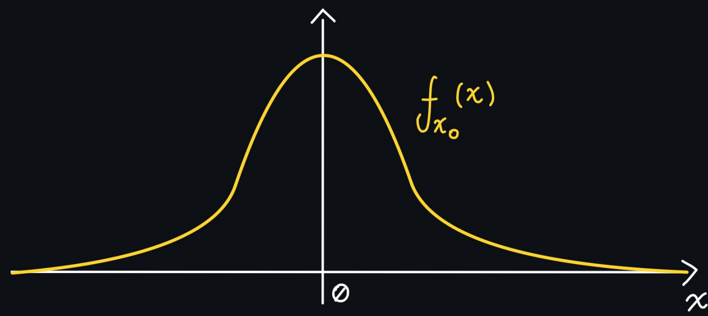
La Gaussiana viene anche definita come NormalDistribution

> La X_0 **è distribuita ad N**; si utilizza "N" perchè la gaussiana è anche nota come **Normal Distribution**.
>
> I parametri zono **(0,1)**, perchè a differenza della Gaussiana Non standard questi parametri (nella Gaussiana non standard) possono essere diversi da zero ed uno.
>
> Ad ogni modo la Gaussiana Standard **ha i parametri 0,1 fissati**.

Una gaussiana Standard è definita quando ha la PDF come:

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PDF



> La gaussiana Standard è:
>
> - **Centrata** in zero
> - Forma a **campana**
> - Speculare rispetto all'asse y

È una probabilità! Quindi l'area sottesa a tutta la curva sarà uguale ad 1!

Calcolare la CDF della V.A. Gaussiana Standard dalla sua PDF

Anche in questo caso la strada per calcolare la CDF è la stessa del calcolo delle precedenti V.A., ma in questo caso abbiamo un "problemino":

Ricavare la CDF dalla PDF

$$F_{x_0}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \leftarrow$$

Non è esprimibile in forma chiusa

Per ovviare a questo problema, procediamo **"per via numerica"**, in particolare **si preferisce usare la Q-Function**:

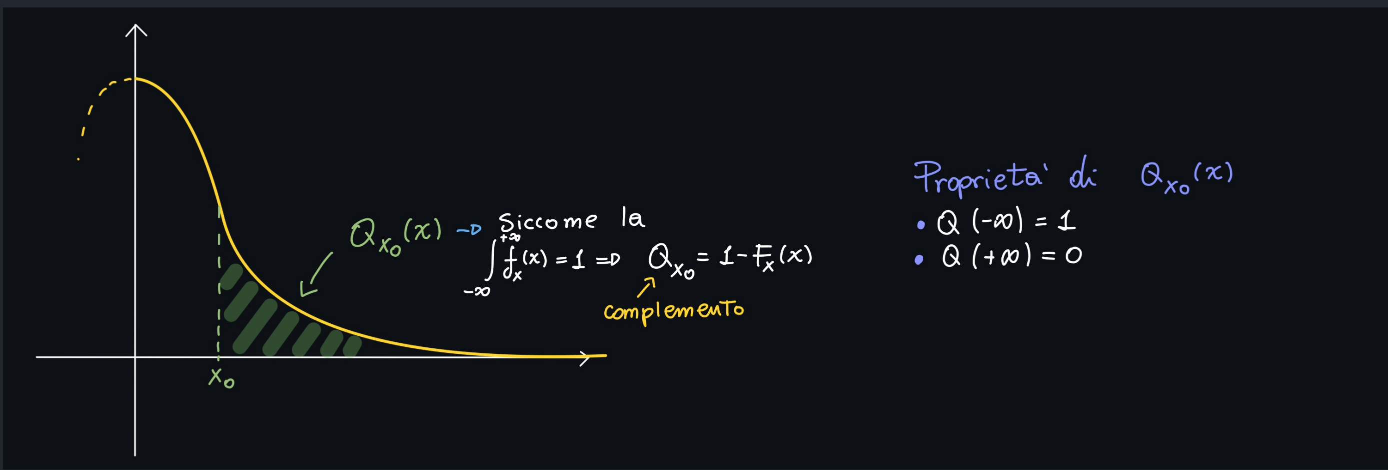
La Q - Function

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \underbrace{1 - F_{X_0}(x)}_{\text{complementare}}$$

Stessa idea di $P(\bar{A}) = 1 - A$

Per via degli estremi di integrazione opposti rispetto alla definizione della CDF, è detta la COMPLEMENTARE della CDT

La Q-function è integrata in tutti i linguaggi di programmazione e non è altro che l'integrale tra x e +∞ della funzione vista precedentemente.



> Essendo $Q_{X_0}(x)$ la complementare di F_X valgono le proprietà elencate (deducibili ragionando)

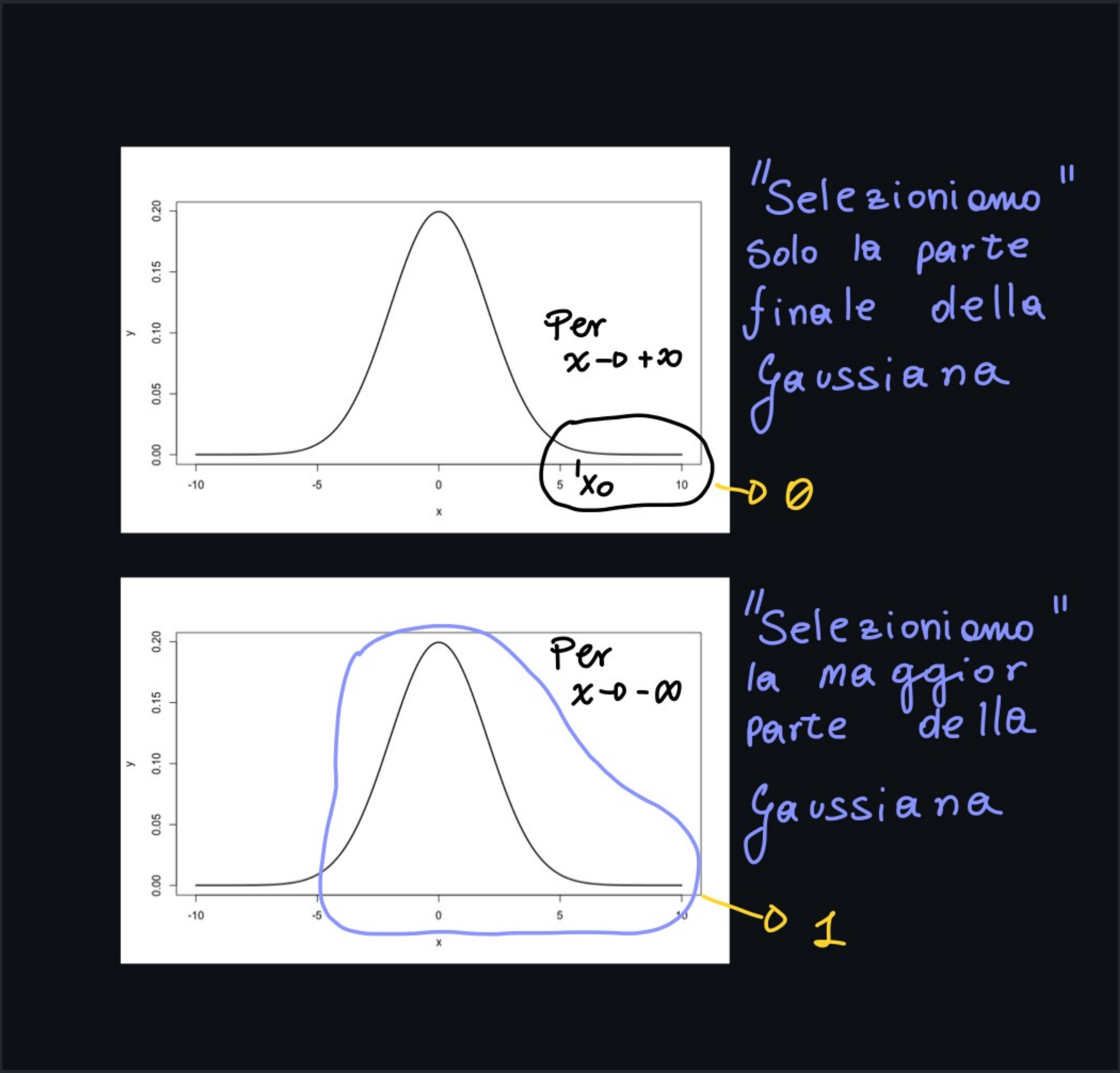
Proprietà della Q-function

La Q - Function è essenzialmente la funzione complementare della PDF della Gaussiana

Proprietà 1 della Q - Function

- $Q(+\infty) = 0$ Perché $0 < Q(x) < 1 = Q(-\infty)$

> Quando x tende a +∞ il valore della Q(x) tende a zero, proprio perchè, per definizione, Q(x) è compreso tra zero ed 1
>
> Quando x tende a -∞ il valore della Q(x) tende ad 1, proprio perchè è come se "selzionassimo" **tutta** la gaussiana



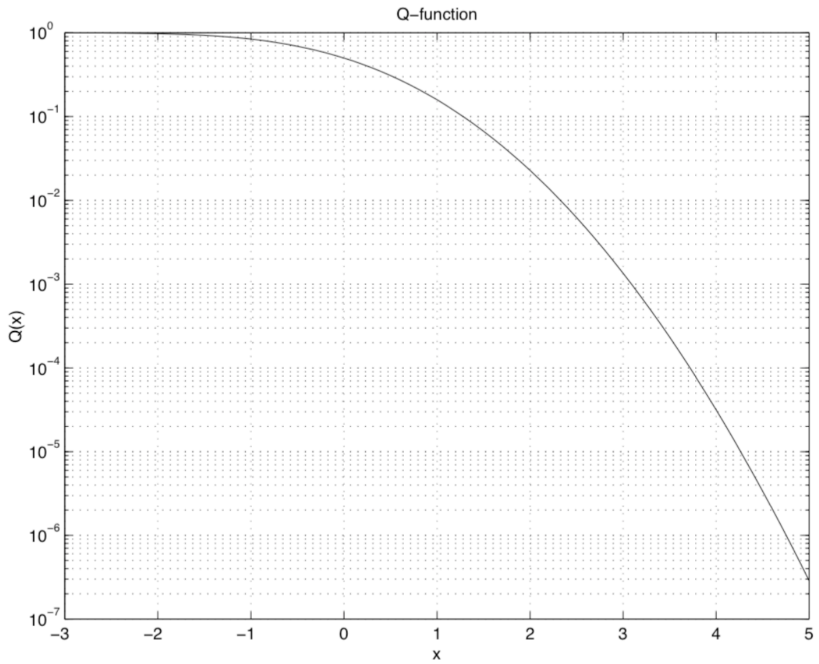
Proprietà 2 della Q - Function

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{Q(x_1) > Q(x_2)}$

  ↳ La Q(x) al contrario della CDF è sempre <u>Decrescente</u>

Sappiamo che la Q(x) è **decrescente**, infatti il suo grafico ce lo conferma:

▶ Grafico della funzione $Q(\cdot)$ in scala semilogaritmica.



Proprietà 3 della Q - Function

- Simmetria → $Q(-x) = 1 - Q(x)$

Per verificare questa proprietà ci basta calcolare ad esempio Q(-2) e verificare che sia uguale a 1-Q(2):

Input

$$0.5\,\mathrm{erfc}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$\mathrm{erfc}(x)$ is the complementary error function

Result

More digits

0.977250…

> Q(-2) = 0.977…

Input

$$1 - 0.5\,\mathrm{erfc}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$\mathrm{erfc}(x)$ is the complementary error function

Result

More digits

0.97724987…

> Calcolando 1 - Q(2) otteniamo proprio Q(-2)

`Valori calcolati con WolframAlpha`

Variabile Aleatoria Gaussiana Non Standard

Variabili Aleatorie Gaussiane Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

"mu" "sigma"

N "calligrafica"

A partire dalla variabile aleatoria standard è possibile definire una famiglia di variabili aleatorie **gaussiane** mediante una **trasformazione lineare della Gaussiana standard**:

Trasformazioni lineari della gaussiana Standard

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

Applichiamo un fattore di scala Sigma

> Applichiamo un fattore di scala Sigma ad X moltiplicato per X_0, più mu.
>
> N.B. i fattori Sigma e Mu sono gli stessi parametri visti nella definizione!
>
> I due parametri non sono altro che **la media** e **la deviazione standard**, ovvero "dove la campana è centrata" (mu) e "quanto è stretta la campana" (sigma)
>
> - σ >> campana larga
> - σ << campana stretta

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

Parametro di Scala

$\sigma > 0$

Parametro di Locazione

Esprimere la CDF (non standard) in termini di una CDF (standard)

La CDF **non è altro che la probabilità dell'evento**:

Definizione di CDF

$$F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

X grande

x piccolo

A questo punto ci basta **sostituire X all'interno della definizione:**

$$\Rightarrow F_X(x) = P(\{\sigma X_0 + \mu \le x\})$$

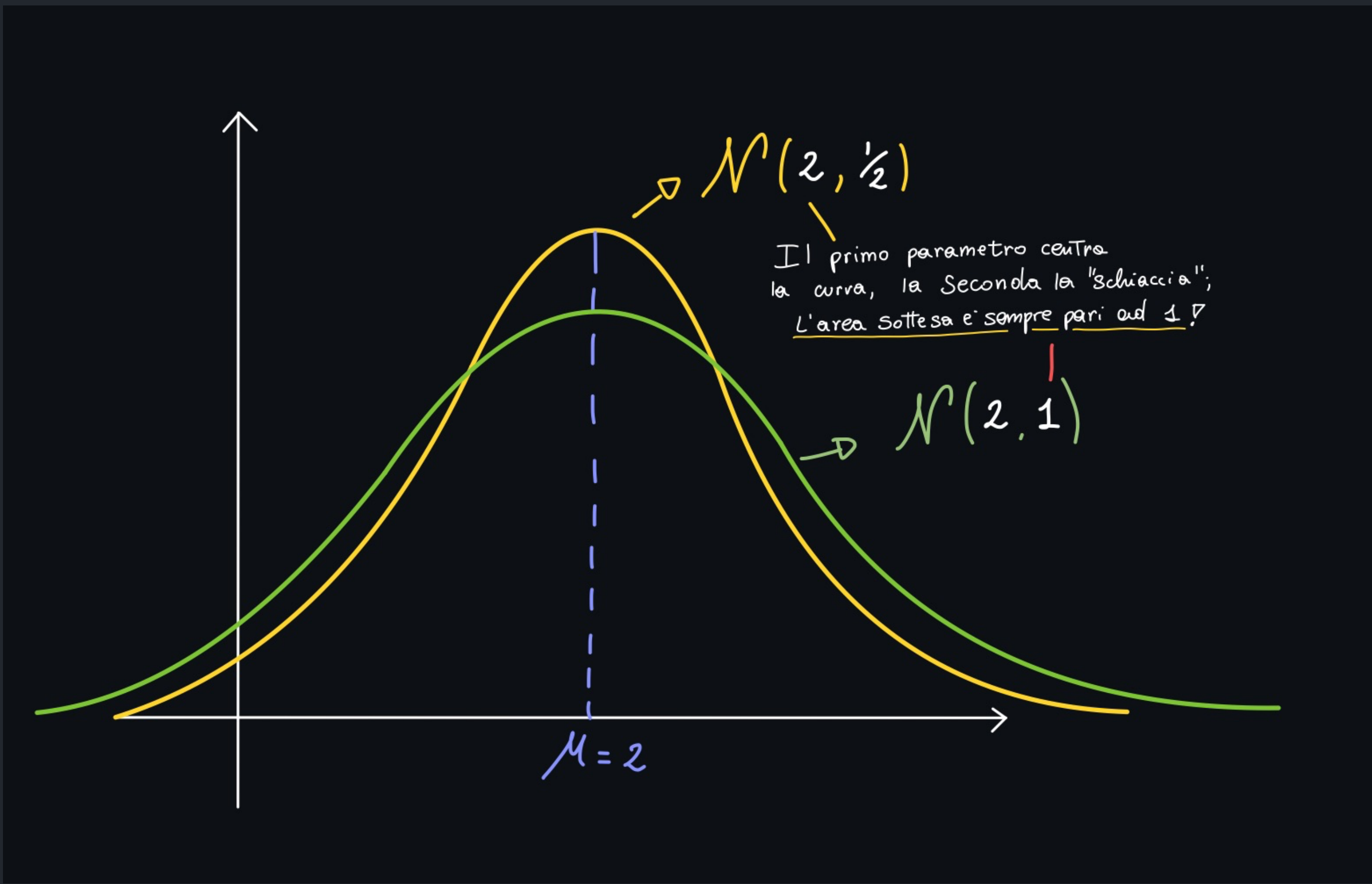
$$= P\left(\left\{X_0 \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right)$$

E' la CDF di X_0 valutata in $\Rightarrow F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Variabile Aleatoria gaussiana Standard

> Stiamo dicendo che la CDF di una variabile aleatoria Gaussiana **Qualsiasi** che abbia i parametri μ e σ, è esprimibile mediante **una CDF di una Gaussiana Standard valutata in (x-μ)/σ**

Il Grafico risultante è qualcosa del genere:



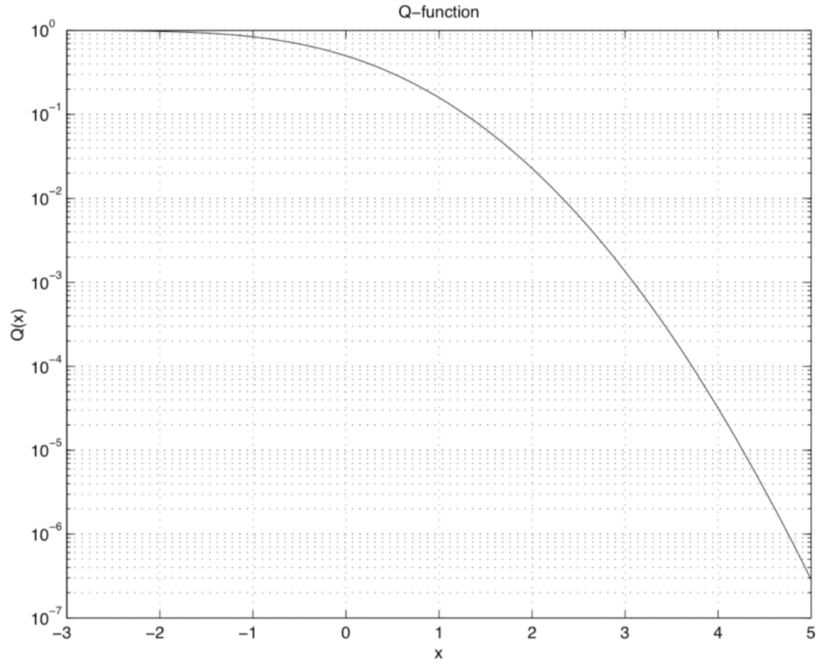
Uno sguardo alle slides...

Alla slide 18 del file `slides_09.pdf` vediamo l'integrale della CDF della variabile aleatoria gaussiana che "non riusciamo a calcolare"; questo (come abbiamo visto) può essere risolto andando a definire la variabile **Q(x)**.

Mediante la Q-Function, che è la complementare della CDF, riusciamo a **calcolare delle proabilità che la variabile sia compresa entro alcuni estremi** (ad esempio tra x_1 ed x_2).

Nella Slide 22 troviamo il grafico della funzione Q(x):

▶ Grafico della funzione $Q(\cdot)$ in scala semilogaritmica.



Quello che però è utile per l'esame non è il grafico, ma la Q-Function in forma tabellare:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744841	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3409029	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787863	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491699	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.1400710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313568	0.1292381	0.1271431	0.1250719	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1020423	0.1002725	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749336	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547992	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170030	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104440	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.0091374	0.0088940	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014889	0.0014412	0.0013948

È infatti importante calcolare i valori della Q-function in maniera precisa, fino alla **seconda cifra decimale**.

Come usare la tabella

Vogliamo, ad esempio, calcolare la Q(2.37):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744841	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3409029	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787863	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491699	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.1400710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313568	0.1292381	0.1271431	0.1250719	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1020423	0.1002725	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749336	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547992	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170030	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104440	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.0091374	$\boxed{0.0088940}$	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014889	0.0014412	0.0013948

Calcolare la Q-Function di

Q(2.37)

> Ci basta prendere le prime due cifre tra le righe, e l'ultima cifra tra le colonne
>
> In questo caso il valore di Q(2.37) = 0.0088940