

Variabili Aleatorie

La variabile aleatoria è una funzione, ed il suo **insieme di definizione** è un **evento**.

La variabile produce un numero reale in corrispondenza del risultato di un evento.

Esempio

Supponiamo di lanciare 2 monete in sequenza; le possibili uscite sperimentali saranno:

Ovvero: $\Omega = \{(T,T), (TC), (C,T), (C,C)\}$

Consideriamo ora gli eventi elementari del tipo: $\omega = \{(T,T)\}$ oppure $\omega = \{(T,C)\}$ ecc.

Andiamo a costruire una funzione che al **risultato** di un evento, **ci restituisce un valore numerico**:

- $x(\{T,T\}) = 1$
- $x(\{T,C\}) = 2$
- $x(\{C,T\}) = 3$
- $x(\{C,C\}) = 4$

Inoltre: $x(\omega) \in \mathbf{R}$, Ovvero il codominio appartiene ai reali.

Graficamente otteniamo:

- Ad ogni uscita sperimentale associamo un numero reale.
- Due o più uscite sperimentali possono associare lo stesso numero reale.

A cosa serve la variabile aleatoria?

Le variabili aleatorie ci permettono di "saltare" la definizione di tutte quelle componenti preliminari come lo spazio campione, e di definire **direttamente** la variabile aleatoria.

Variabile aleatoria Indicatore Di un Evento

I_E = **Variabile indicatrice dell'evento E**

Questa variabile viene definita nel seguente modo:

- $I_E = 1$ quando l'evento E si verifica
- $I_E = 0$ quando l'evento E non si verifica

Sulla base di questa definizione, definiamo una serie di **funzioni standard**, ovvero funzioni reali di una variabile reale:

Funzione di distribuzione cumulativa

Una prima funzione prende il nome di **funzione di distribuzione cumulativa (CDF)**:

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

- Dove "X" è il nome della **variabile aleatoria**
- Dove "(x)" è la variabile **indipendente** della funzione
- Dove " $\{X \leq x\}$ " è l'evento e P è la probabilità
 - X è la variabile aleatoria
 - x è un valore corrente variabile

Esempio - Lancio della moneta:

La prima cosa da fare è costruire la variabile aleatoria, in maniera tale che:

- $X(\{T\}) = 1$
- $X(\{C\}) = 0$

Costruiamo quindi il grafico della funzione $F_X(x)$ in relazione alla variabile indipendente x ; per farlo ci basta vedere che valore assume F_X quando varia x :

1. Prendiamo un valore: ad esempio "-1".
2. Ci chiediamo: "qual è la probabilità che x sia **Minore o Uguale** a -1?" --> "Ci sono uscite sperimentali di X che ci danno un valore più piccolo di -1?" **Risposta: NO**.

Questo vuol dire che l'evento $\{x \leq -1\}$ è un insieme vuoto! Abbiamo infatti:

- $\{x \leq -1\} = \emptyset$ --> L'insieme è vuoto
- $P\{x \leq -1\} = 0$ --> La probabilità è nulla

Possiamo muoverci sull'asse delle " x " (variabile indipendente), ma abbiamo la certezza che **non esistono valori più piccoli di meno uno**, ma non ce ne sono nemmeno di più grandi fino ad 1. Sappiamo quindi che la probabilità sarà zero **almeno** fino allo zero **escluso**:

Adesso ci chiediamo nuovamente (siamo ad $x = 0$): "quando accade l'evento in cui $x \leq 0$?" --> accade nel momento in cui ho croce. Infatti, stando a come abbiamo definito la nostra variabile aleatoria, quando otteniamo "croce", X vale proprio zero!

Siccome siamo nell'ipotesi in cui ogni uscita è **equiprobabile**, abbiamo che per ogni uscita la probabilità è di $1/2$; di conseguenza, la probabilità che Z sia minore o uguale a zero, **coincide con la probabilità che X sia uguale a zero**, ovvero proprio $1/2$!

A questo punto continuiamo come abbiamo fatto finora: prendiamo un nuovo punto, ad esempio "0.4".

Calcoliamo quindi la probabilità che X sia minore a 0.4: $P(\{X \leq 0.4\}) = ?$ L'unico caso in cui X è minore di 0.4 è proprio quando essa vale zero, ovvero quando esce "croce", e visto che la probabilità coincide alla probabilità dell'uscita sperimentale, abbiamo che $P(\{X \leq 0.4\}) = 0$.

Osserviamo che il grafico rimane **costante** fino a quando non arriviamo ad $x = 1$; in questo caso ci chiediamo nuovamente: "quando X è minore o uguale ad 1?" In questo caso ci sono ben 2 casi: ovvero sia quando esce testa ($X=1$) sia quando esce croce ($X=0$)!

Siccome sono due eventi disgiunti, la probabilità corrisponde alla **somma delle probabilità delle due**, per cui $1/2 + 1/2 = 1$:

Tiriamo le somme:

La funzione di **distribuzione cumulativa della variabile X** è costituita nel seguente modo:

La funzione è **Costante a tratti**, quindi è **continua in tutto \mathbb{R}** .

Inoltre il "salto" che la funzione compie tra un valore ed un altro è detto **Ampiezza**, e vale:

Si dice che la funzione "cumula", infatti i valori cumulano: il valore successivo al precedente è cumulato (in questo caso) di $1/2$.

Esempio - Lancio del dado

In questo caso lavoriamo con 6 uscite sperimentali:

Di conseguenza la probabilità che X sia uguale ad ogni singola uscita sperimentale è:

L'insieme di tutti i valori che F può assumere si chiama **alfabeto di X**

Tracciamo un grafico:

Questo accade ogni volta che consideriamo una variabile aleatoria **Discreta**, ovvero una variabile aleatoria in cui il numero di valori possibili che assume, è un insieme finito **discreto o numerabile**.

Nota: la Variabile Aleatoria non è x (piccolo), ma X (grande)! x (piccolo) è solo la variabile indipendente, che facciamo scorrere sull'asse (delle x) per far generare valori alla funzione $F_X(x)$.

Esempio - Lancio della moneta finché non ottengo testa

In questo caso l'insieme delle uscite sperimentali è **infinito numerabile**, perchè posso avere infinite **sequenze** di uscite sperimentali elementari finché non ottengo una singola sequenza di uscite sperimentali che mi dia testa.

Costruendo la nostra variabile aleatoria X abbiamo che:

Procediamo calcolando la probabilità di ogni valore $(1, 2, \dots, n)$:

Ci accorgiamo che "l'ultima probabilità" è sempre più piccola

Nel caso in cui abbiamo un insieme infinito numerabile, la funzione è sempre a "scalini", ma non diverge a $+\infty$

🏁 Intervallo

Questi esempi appena visto, sono relativi a variabili aleatorie che hanno un alfabeto **discreto**, quindi o **finito** (come i primi due casi) oppure **numerabile** come quest'ultimo caso appena visto.

In ogni caso parliamo di un **insieme discreto**, ovvero composto da un numero **finito** di valori assunti da x .

X potrebbe anche essere continua: possiamo infatti definire una variabile aleatoria su un insieme infinito, come potrebbe essere il **tempo**: se definiamo una variabile aleatoria che va da 0 a T che denota l'istante di arrivo di un treno, non ci troviamo più in un insieme discreto, ma in un insieme finito (tra due numeri ce ne è sempre un terzo).