UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta dell'22 marzo 2022
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1
Date due variabili aleatorie Gaussiane correlate, $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ con $\mu_1 = 0, \sigma_1^2 = 4$, $\mu_2 = 3, \sigma_2^2 = 2$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.4$.
Calcolare:
1. la media e la varianza della variabile aleatoria $Z = X_1 + X_2$;
2. la probabilità $P(Z \geq -3)$.

EX. 2
Dato il segnale a tempo discreto avente funzione di autocorrelazione $r_x(m) = 0.5^{|2m|}$, calcolarne (sviluppando i calcoli) la densità spettrale di energia. Successivamente, calcolare il valore della frequenza ν nell'intervallo $(0, 1/2)$ per cui si ha un'attenuazione della ESD di 3 dB rispetto al valore a frequenza 0.

EX. 3
Si consideri il segnale

$$x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t+2}{2}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

Calcolare lo spettro del segnale campionato, assumendo una frequenza di campionamento $f_c = 10$ Hz.

EX. 1

Date due variabili aleatorie Gaussiane correlate, $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ con $\mu_1 = 0, \sigma_1^2 = 4$, $\mu_2 = 3, \sigma_2^2 = 2$ e coefficiente di correlazione $\rho = 0.4$.

Calcolare:

1. la media e la varianza della variabile aleatoria $Z = X_1 + X_2$;
2. la probabilità $P(Z \geq -3)$.

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ con $\mu_1 = 0$, $\sigma_1^2 = 4$, $\mu_2 = 3$, $\sigma_2^2 = 2$

e coefficiente di correlazione $\rho = 0.4$

$\Rightarrow X_1 \sim \mathcal{N}(0, 4)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(3, 2)$

Q1 A: Media di $Z = X_1 + X_2$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 0 + 3 = 3 \Rightarrow \mathcal{N}(3, \sigma_Z^2)$$

Per la prop. di linearità della media

Q1 B: Varianza di Z

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(Z - \mu_Z)^2] = \mathbb{E}[Z^2] - \mu_Z^2 + \mu_Z^2 = \mathbb{E}[Z^2] - \mu_Z^2 = \mathbb{E}[(X_1 + X_2)^2] - \mu_Z^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_1^2]}_{?} + \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{?} + \underbrace{2\,\mathbb{E}[X_1 X_2]}_{?} - \mu_Z^2$$

Troviamo $\overline{X_1^2}$ e $\overline{X_2^2}$: Sappiamo, dalla relazione: $\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \mu_X^2 \Rightarrow \overline{X^2} = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

$\Rightarrow \overline{X_1^2} = 4$ $\overline{X_1^2}$

$\Rightarrow \overline{X_2^2} = 2 + 3^2 = 11$ $\overline{X_2^2}$

Troviamo $\mathbb{E}[X_1 X_2]$: Sappiamo che Sono CORRELATE $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] \overset{\text{correlate}}{=} \mu_X \mu_Y + \underbrace{C_{XY}}_{?}$

Sappiamo che $\rho_{XY} = \dfrac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow C_{XY} = \rho_{XY} \cdot \sigma_X \sigma_Y$

$\Rightarrow$ Nel nostro caso: $C_{XY} = \rho_{X_1 X_2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} = 0.4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \simeq 1.13$ $C_{X_1 X_2}$

$\Rightarrow$ Tornando alla correlazione $\mathbb{E}[X_1 X_2] = r_{X_1 X_2} = 0 \cdot 3 + 1.13 \simeq 1.13$ $r_{X_1 X_2}$

$\Rightarrow$ Tornando ad $\overline{Z^2} = \overline{X_1^2} + \overline{X_2^2} + 2 \cdot r_{X_1 X_2} = 4 + 11 + 2 \cdot (1.13) = 17.26$ $\overline{Z^2}$

quindi $\sigma_Z^2 = \overline{Z^2} - \mu_Z^2 = 17.26 - 9 = 8.26$ σ_Z^2

$\Rightarrow$ $Z \sim \mathcal{N}(3, 8.26)$ Ans

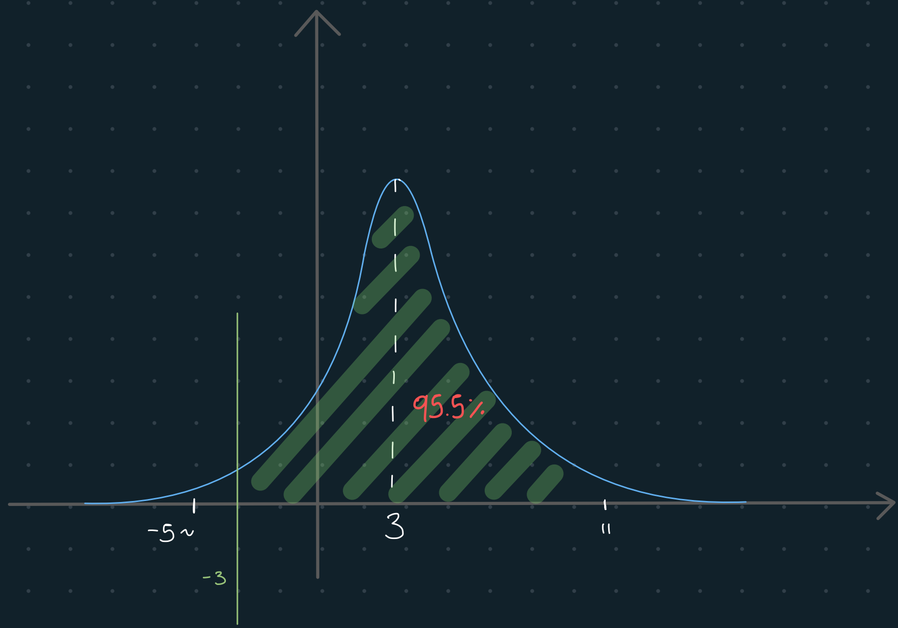
Q_2: $P(\{Z \geq -3\})$

Sappiamo che la CDF della gaussiana non standard è $P(\{X \leq x\}) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

-D Nel nostro caso se dobbiamo trovare $P(\{X \geq x\})$ ci basta la Q-function

$$\Rightarrow P(\{X \geq -3\}) = Q\left(\frac{-3-3}{\sim 2.29}\right) = Q\left(-\frac{6}{\sim 2.29}\right) = 1 - Q\left(\frac{6}{\sim 2.29}\right) = 1 - Q(\sim 2{,}61) = 1 - 0.00453$$

$= 0.995 \Rightarrow$ c'è il 99.5% di probabilità che $x \geq 3$ rientri nella curva:



EX. 2

Dato il segnale a tempo discreto avente funzione di autocorrelazione $r_x(m) = 0.5^{|2m|}$, calcolarne (sviluppando i calcoli) la densità spettrale di energia. Successivamente, calcolare il valore della frequenza ν nell'intervallo $(0, 1/2)$ per cui si ha un'attenuazione della ESD di 3 dB rispetto al valore a frequenza 0.

$$r_x(m) = 0.5^{|2m|}$$

Q_1: $S_x(\nu) = ?$

Teorema di W.-Kintchine

Sappiamo che $r_{xy}(\cdot) \rightleftharpoons S_{xy}(\cdot) \Rightarrow r_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot)$

Inoltre sappiamo che $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 f = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$

Troviamo $S_x(\cdot)$. 1) Trasformare l'autocorrelazione:

$r_x(m) = 0.5^{|2m|}$ è un esponenziale bilatero con $a = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < a < 1$

$$\Rightarrow a^{|n|} = \frac{1-a^2}{1-2a\cdot\cos(2\pi\nu + a^2)}$$

$$\mathcal{F}\left(0.5^{|2m|}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 0.5^{|2m|} \cdot e^{-j2\pi\nu m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} 0.5^{-2m} \cdot e^{-j2\pi\nu m} + \sum_{m=0}^{+\infty} 0.5^{+2m} \cdot e^{-j2\pi\nu m}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} e^{j2\pi\nu}\right)^m + \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-j2\pi\nu}\right)^m \Rightarrow \text{Siccome } \sum_{\substack{m=0 \\ -1<b<1}}^{+\infty} (b)^m = \frac{1}{1-b}$$

$$\text{inoltre } \sum_{m=1}^{+\infty} (b)^n = \frac{1}{1-b} - b^0$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j2\pi\nu}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu}} - 1$$

$$= \frac{1-0.25e^{-j2\pi\nu} + 1-0.25e^{j2\pi\nu}}{\left(1-0.25e^{j2\pi\nu}\right)\left(1-0.25e^{-j2\pi\nu}\right)} - 1$$

Sfrutto $-\frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{4}e^{j2\pi\nu} = -\left[\frac{1}{4}\left(e^{-j2\pi\nu} + e^{j2\pi\nu}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{4}\left[\cos(w) - i\cancel{\sin(w)} + \cos(w) + i\cancel{\sin(w)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{4}e^{j2\pi\nu}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu} - \frac{1}{4}e^{j2\pi\nu} + \frac{1}{16}} - 1 = \frac{2-0.5\cos(2\pi\nu)}{1-0.5\cos(2\pi\nu)+\frac{1}{16}} - 1 =$$

$$= \frac{\cancel{2}^{\,1} - 0.5\cancel{\cos(2\pi\nu)} + 0.5\cancel{\cos(2\pi\nu)} - \cancel{1} - \frac{1}{16}}{1-0.5\cos(2\pi\nu)+\frac{1}{16}} = \frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)+\frac{1}{16}} = \frac{0.9375}{1.0625 - \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} \quad S_x(\nu)$$

L'Energia è: $S_x(0) = \frac{0.9375}{1.0625 - \frac{1}{2}\underbrace{\cos(0)}_{1}} = 0.332 \quad \mathcal{E}$

40'

Q_2: ν in $I(0, \frac{1}{2})$ per cui si ha un'attenuazione della ESD di 3 dB rispetto a $\nu = 0$

$$S_X(\nu) - S_X(0) = -3dB \quad \rightarrow \quad S_X(\nu) = S_X(0) - 3dB \qquad -3dB = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_X(\nu) = 1.089$$

$$\rightarrow \frac{0.9375}{1.0625 - \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} = 1.089 \rightarrow \frac{A}{B - \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} = C \rightarrow A = CB - \frac{C}{2}\cos(2\pi\nu) \Rightarrow \frac{C}{2}\cos(2\pi\nu) = CB - A$$

Radianti

$$\rightarrow \cos(2\pi\nu) = 2B - \frac{2A}{C} \rightarrow \cos(2\pi\nu) = 2.125 - 1.721 \cong 0.4 \Rightarrow \nu = \frac{\cos^{-1}(0.4)}{2\pi} = \frac{1.59}{6.28} = 0.184$$

$$\cancel{2\pi}\nu = \cos^{-1}\left(2 \cdot 1.0625 - \frac{2 \cdot (1 -}{1.0625}\right) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

EX. 3

Si consideri il segnale

$$x(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t+2}{2}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

Calcolare lo spettro del segnale campionato, assumendo una frequenza di campionamento $f_c = 10$ Hz.

$$x(t) = \text{Sinc}^2\left(\frac{t+2}{2}\right) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t-2}{2}\right) = \text{Sinc}^2\left[\frac{1}{2}(t+1)\right] + \text{Sinc}^2\left[\frac{1}{2}(t-1)\right]$$

Sappiamo che $AT\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{sinc}^2(fT)$

- $\text{Sinc}^2\left(\frac{t+2}{2}\right) \rightleftharpoons 2\Delta\left(\frac{t}{2}\right)\cdot e^{j4\pi f}$
- $\text{Sinc}^2\left(\frac{t-2}{2}\right) \rightleftharpoons 2\Delta\left(\frac{t}{2}\right)\cdot e^{-j4\pi f}$

$$\Rightarrow X(f) = 2\Delta\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}\right] = 2\Delta(2f)\cdot\cos(4\pi f)$$

Il segnale viene anche finestrato dal cos.

Q, B: Segnale campionato

$$\delta_f(X(f)) = f_c\sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot\delta(f-Kf_c) = f_c\sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(f-Kf_c) = 10\sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\Delta\left[2(f-10K)\right]\cdot\cos\left[4\pi(f-10K)\right]$$

EX. 2
Dato il segnale a tempo discreto avente funzione di autocorrelazione $r_x(m) = 0.5^{|2m|}$, calcolarne (sviluppando i calcoli) la densità spettrale di energia. Successivamente, calcolare il valore della frequenza ν nell'intervallo $(0, 1/2)$ per cui si ha un'attenuazione della ESD di 3 dB rispetto al valore a frequenza 0.

CREDO CHE QUESTA VERSIONE SIA GIUSTA

$$r_x(m) = \frac{1}{2}^{|2m|} \qquad Q_1 \quad S_x(\nu) = ?$$

Sappiamo che $r_{xy}(t) \rightleftharpoons S_{xy}(f) \Rightarrow r_x(m) \rightleftharpoons S_x(\nu)$

$\Rightarrow$ Trasformiamo $r_x(m)$

$$x(n) \rightleftharpoons \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} \Rightarrow S_x(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|2m|} \cdot e^{-j2\pi\nu m}$$ $\Rightarrow$ Spezziamo la somma

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2m} \cdot e^{-j2\pi\nu m} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} e^{-j2\pi\nu m} = \sum_{m=-\infty}^{0} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{j2\pi\nu}\right]^m + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{-j2\pi\nu}\right]^m$$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\sum_{k=0}^{+\infty} [a]^k = \frac{1}{1-a} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} = \frac{1}{1-a} - a^0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j2\pi\nu}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu}} - \underbrace{\left[\frac{1}{4}e^{\sim}\right]^0}_{1} = \frac{1-0.25e^{-j2\pi\nu} + 1-0.25e^{j2\pi\nu}}{(1-0.25e^{j2\pi\nu})(1-0.25e^{-j2\pi\nu})} - 1$$

$$= \frac{2-\frac{1}{4}\left(e^{j2\pi\nu}+e^{-j2\pi\nu}\right)}{(\dots)(\dots)} - 1 = \frac{2-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)}{(1-0.25e^{j2\pi\nu})(1-0.25e^{-j2\pi\nu})} - 1 = \frac{2-0.5\cos(2\pi\nu)}{1\underbrace{-\frac{1}{4}e^{-j2\pi\nu}-\frac{1}{4}e^{j2\pi\nu}}_{\to -\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)}+\frac{1}{16}} - 1$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}\cancel{\cos(2\pi\nu)}-1.0625+\frac{1}{2}\cancel{\cos(2\pi\nu)}}{1.0625-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} = \frac{2-1.0625}{1.0625-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)}$$ S_x $\sim 20'$

Valore della freq ν in $I(0,\frac{1}{2})$ per cui si ha un'attenuazione della S_x di -3dB rispetto a $S_x(0)$

$\rightarrow$ In formule $\rightarrow$ $\nu: \quad S_x(\nu) = S_x(0) - 3$

$$\Rightarrow \frac{2-1.0625}{1.0625-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} = \frac{2-1.0625}{1.0625-\frac{1}{2}\cos(0)} - 3$$ $\Rightarrow$ Battezzo $1.0625 = A$

$$\rightarrow \frac{2-A}{A-\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu)} = \frac{2-A-3A+\frac{3}{2}}{A-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2-A-3A+\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}A-1-A^2} = \frac{1}{A-\frac{1}{2}\cos(\sim)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(2\pi\nu) = -\frac{2\left(\frac{5}{2}A - 1 - A^2\right)}{\frac{7}{2} - 4A} + 2A \quad \Rightarrow \quad \cancel{2\pi}\nu = \cos^{-1}\left[\frac{(5A - 2 - 2A^2)2}{7 - 8A} + 2A\right] \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\cos\left(-\frac{45}{32} + 2A\right) \cdot \frac{1}{2\pi} = \cos^{-1}\left(\frac{23}{32}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{0.768}{2\pi} = 0.158 \quad \text{(Senza Appro ssimazioni)}$$