UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 10 gennaio 2022
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1
Un dado viene truccato in modo da ottenere il risultato "1" con probabilità 0.2. Si determini il punteggio medio e la deviazione standard del punteggio derivanti dal lancio del dado. Ripetere il calcolo nel caso in cui il dado venga lanciato insieme ad un dado non truccato e di calcola la somma dei punteggi ottenuti dai due dadi.

EX. 2
Calcolare il risultato delle seguenti espressioni.

1. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t/2-2)\delta(3t-1)dt + e^{2t} * \delta(t-2)$
2. $x(t) = \Pi(t/2)\delta(t-1) + \text{sinc}((t-1)/4) * \delta(t/2)$
3. $x(t) = \delta(t-1) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-2k)$

EX. 3
Il segnale sinusoidale $x(t) = \cos(2\pi 10t)$ viene filtrato mediante un sistema avente risposta impulsiva $h(t) = e^{-t/2}u(t)$. Calcolare il segnale $y(t)$ in uscita al filtro e il suo spettro $Y(f)$.

EX. 1

Un dado viene truccato in modo da ottenere il risultato "1" con probabilità 0.2. Si determini il punteggio medio e la deviazione standard del punteggio derivanti dal lancio del dado. Ripetere il calcolo nel caso in cui il dado venga lanciato insieme ad un dado non truccato e di calcola la somma dei punteggi ottenuti dai due dadi.

Tempo 28''

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\{X = 1\}) = \frac{2}{10}$

$\Rightarrow P(\{X=1\}, \{X=2\}, \dots \{X=6\}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\{X=2\}, \{X=3\}, \dots, \{X=6\}) = 1 - 0{,}2 = 0.8$

$\Rightarrow$ Assumendo che la prob del resto dei dadi è Equiprob $\Rightarrow P(\{X=2\}) = \frac{4}{25} = 0{,}16$

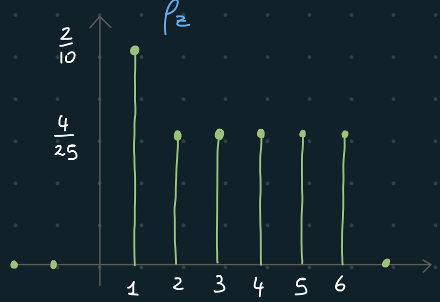
$P(\{X=3\}) = \frac{4}{25}$

$\vdots$

$P(\{X=6\}) = \frac{4}{25}$

Associamo una V.A. al fenomeno: V.A. Discreto, PMF

$$Z = \begin{cases} \frac{2}{10} & \text{se } x = 1 \\ \frac{4}{25} & \text{se } x = 2, 3, \dots, 6 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$



Time 17

Q_1: $E[Z] = \sum_{x \in A_x} x \cdot P_x(x) = 1 \cdot \frac{2}{10} + \frac{4}{25}(2+3+4+5+6) = \frac{2}{10} + \frac{24}{25} = \frac{29}{25} \simeq 1.16$ Punteggio medio

$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_Z^2}$ Calcoliamo la varianza: $\sigma_Z^2 = E[(Z-\mu_Z)^2] = E[Z^2] - 2\mu_Z E[Z] + \mu_Z^2$

$E[Z^2] \downarrow \overline{Z}^2$

Calcoliamo $\overline{Z}^2 = \sum_{x \in A_x} x^2 \cdot P_x(x) = 1 \frac{2}{10} + \frac{4}{25}(4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{2}{10} + \frac{94}{25} = \frac{99}{25} \sim 4$

$\Rightarrow \sigma_Z^2 = 4 - 2.691 + 1{,}345 = 2.4$ varianza

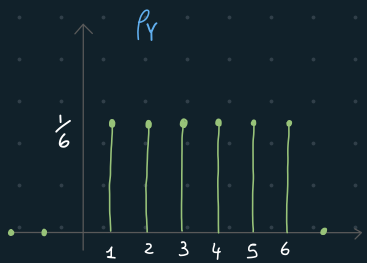
$\Rightarrow \sigma_Z = \sqrt{2.4} \sim 1{,}54$ dev St.

time: 10

Q_2: Il dado viene lanciato insieme ad un dado non truccato:

Associo Y al dado non truccato

$$\Rightarrow PMF_Y = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } x = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$



La variabile M e' data da $\underbrace{M = Z + Y}_{\text{Somma dei punteggi}}$

→ $\mathbb{E}[M] = ?$ $\sigma_M = ?$

$\mathbb{E}[M]$

- $\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[Y] = 1{,}16 + \mathbb{E}[Y] = 1{,}16 + \left[\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\right] = 1.16 + 3{,}5 = 4{,}66$

  Per la lin della media

- $\sigma_M = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)(Y-\mu_Y)] = \mathbb{E}[ZY] - \mu_Y\mathbb{E}[Z] - \mu_Z\mathbb{E}[Y] + \mu_Z\mu_Y$

  $= \mathbb{E}[ZY] - 4.06 - \cancel{4.06} + \cancel{4.06} = \mathbb{E}[ZY] - 4.06$

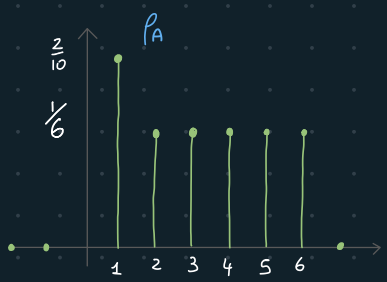
Soluzione Alternativa: non ridimensiono la prob degli altri numeri del dado

$$\Rightarrow \quad P(\{X=1\}) = 0.2$$
$$P(\{X=2\}) = 1/6$$
$$\vdots$$
$$P(\{X=6\}) = 1/6$$

Il problema: $P(\Omega) = \frac{2}{10} + 5\left(\frac{1}{6}\right) = 1.0\bar{3}$ $\quad P>1$??

Associo la V.A. A al fenomeno:

$$p_A = \begin{cases} \frac{2}{10} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 2,3,\dots,6 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$



→ Calcolo la Media di A:

Ans

$$E[A] = \sum_{x \in \mathcal{X}_A} x_i P(x_i) = \frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{1}{6}(2+3+4+5+6) = 3.4 \; \mu_A$$

$$E[A^2] = \bar{A}^2 = \sum_{x \in \mathcal{X}_A} x_i^2 P(x_i) = \frac{2}{10} + 0.16 \cdot 4 + 0.16 \cdot 9 + 0.16 \cdot 16 + 0.16 \cdot 16 + 0.16 \cdot 25 + 0.16 \cdot 36 = 14.6 \quad \bar{A}^2$$

Q_1: $E[A] = 3.4$

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} \Rightarrow \sigma_A^2 = E[(A-\mu_A)^2] = E[A^2] - 2\mu_A E[A] + \mu_A^2 = 14.6 - (3.4)^2 = 3.04$$

⟹ Dev Std: $\sigma_A \simeq 1.74$ $\quad \sigma_A$ Ans

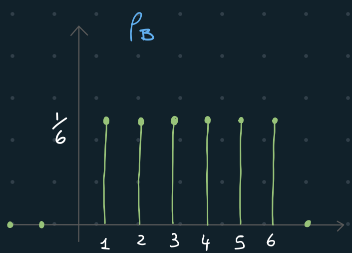
Q_2: Assumiamo che il primo dado venga lanciato con un dado truccato e che si prenda in considerazione la somma dei punteggi:

⟹ A: V.A. dado truccato ; V.A. B → Dado NON truccato

$$p_B = \begin{cases} 1/6 & x = 1,2,\dots,6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[B] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5 \; \mu_B$$

$$E[B^2] = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = 15{,}17 \; \bar{B}^2$$



Inoltre V.A. Z → $Z = A + B$

$$\Rightarrow E[Z] = E[A] + E[B] = 3.4 + 3.5 = 6.9 \; \mu_Z$$

$$\sigma_Z^2 = E[(Z-\mu_Z)^2] = E[Z^2] - 2\mu_Z^2 + \mu_Z^2 = E[Z^2] - \mu_Z^2$$

$$E[Z^2] = E[(A+B)^2] = \underbrace{E[A^2]}_{14,6} + \underbrace{E[B^2]}_{15,17} + 2\underbrace{E[AB]}_{} = 53.57 \Rightarrow \sigma_Z \simeq 7.31$$

$E[AB] = \mu_A \cdot \mu_B = 11.9$

EX. 2

Calcolare il risultato delle seguenti espressioni.

1. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t/2-2)\delta(3t-1)dt + e^{2t} * \delta(t-2)$
2. $x(t) = \Pi(t/2)\delta(t-1) + \text{sinc}((t-1)/4) * \delta(t/2)$
3. $x(t) = \delta(t-1) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-2k)$

1. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t}{2}-2\right)\cdot\delta(3t-1)\,dt \quad + e^{2t} * \delta(t-2)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\left[\frac{1}{2}(t-4)\right]\cdot\delta(3t-1)\,dt + e^{2t} * \delta(t-2)$$

(a)

b) $e^{2t} * \delta(t-2) = e^{2(t-2)} * \delta(t-2) = e^{2(t-2)}$

1

a) $\begin{cases} x(t)\cdot\delta(t-\tau) = x(t-\tau)\cdot\delta(t-\tau) \\ x(t)\cdot\delta(at) = \frac{1}{|a|}\cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\delta(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \Lambda\left[\frac{1}{2}(t-4)\right]\cdot\delta\left[3\left(t-\frac{1}{3}\right)\right] \Rightarrow x(t)\cdot\delta(At) = \frac{1}{|A|}\cdot x\left(\frac{t}{A}\right)\cdot\delta(t)$$

$\overline{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\Lambda\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t}{3}-4\right)\right]\cdot\delta\left(t-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Lambda\left[\frac{1}{6}(t-12)\right]\cdot\delta\left(t-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Lambda\left[\frac{1}{6}\left[t-\left(12+\frac{1}{3}\right)\right]\right] =$$

EX. 3

Il segnale sinusoidale $x(t) = \cos(2\pi 10t)$ viene filtrato mediante un sistema avente risposta impulsiva $h(t) = e^{-t/2}u(t)$. Calcolare il segnale $y(t)$ in uscita al filtro e il suo spettro $Y(f)$.

$$x(t) = \cos(2\pi 10 t)$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot u(t)$$

Q : $y(t)$ e $Y(t)$

Sappiamo che $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

$$\Rightarrow X(f) = \mathcal{F}\left[\cos(2\pi 10 t)\right] \quad \Rightarrow \quad \cos(2\pi 10 t) = \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi 10 t} + e^{j2\pi 10 t}\right] = \frac{1}{2}e^{j2\pi 10 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 10 t}$$

$$\Rightarrow X(f) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi 10 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 10 t}\right) = A e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons A\delta(f - f_0) \Rightarrow \underbrace{X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+10)}_{X(f)}$$

$$H(f) = \mathcal{F}\left[e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t)\right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} = \frac{1}{\frac{1+j4\pi f}{2}} = \underbrace{\frac{2}{1+j4\pi f}}_{H(f)}$$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-10) + \delta(f+10)\right] \cdot \frac{2}{1+j4\pi f} = \frac{\delta(f-10)}{1+j4\pi f} + \frac{\delta(f+10)}{1+j4\pi f}$$

$Y(f)$ spettro

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(f)) =$$

Siccome $\frac{1}{2}e^{j2\pi 10 t} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\delta(f-10)$ ed $e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{\frac{1}{2}+j2\pi f}$

$\Rightarrow$ metto in evidenza 2 al denom

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}+j2\pi f\right)}\delta(f-10) + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}+j2\pi f\right)} \cdot \delta(f+10)$$

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{1}{2}\delta(f-10)}^{\frac{1}{2}e^{-j2\pi 10 t}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}+j2\pi f}}^{e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t)} + \overbrace{\frac{1}{2}\delta(f+10)}^{\frac{1}{2}e^{j2\pi 10 t}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}+j2\pi f}}^{e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(Y(f)) = y(t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi 10 t} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 10 t} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = \overbrace{\frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi 10 t} + e^{j2\pi 10 t}\right]}^{\cos(2\pi 10 t)} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$= \cos(2\pi 10 t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t)$$

$y(t)$

osserviamo che il segnale in uscita è proprio il coseno moltiplicato per l'exp