UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 27 Maggio 2021
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1

La durata di un componente elettronico è modellata da una variabile aleatoria esponenziale con media 10000 ore. Calcolare:
1. la probabilità che il componente si guasti nelle prime 1000 ore di funzionamento;
2. la probabilità che il componente duri almeno 10000 ore avendo osservato che è durato almeno 3000 ore.

Determinare se gli eventi $A \equiv \{\text{durata maggiore di 10000 ore}\}$ e $B \equiv \{\text{durata maggiore di 3000 ore}\}$ sono positivamente o negativamente correlati.

EX. 2

Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = R_4(n) - 2R_2(n-2)$$

disegnarne il grafico e calcolarne la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di energia.

EX. 3 Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier, calcolare lo spettro dei seguenti segnali

1. $x(t) = e^{-100t}u(t)\cos(1000\pi t)$
2. $x(t) = \text{rep}_3\ [\Pi(t/3)]$

EX. 1

La durata di un componente elettronico è modellata da una variabile aleatoria esponenziale con media 10000 ore. Calcolare:

1. la probabilità che il componente si guasti nelle prime 1000 ore di funzionamento;
2. la probabilità che il componente duri almeno 10000 ore avendo osservato che è durato almeno 3000 ore.

Determinare se gli eventi $A \equiv \{\text{durata maggiore di 10000 ore}\}$ e $B \equiv \{\text{durata maggiore di 3000 ore}\}$ sono positivamente o negativamente correlati.

$X \sim \mathcal{E}_x(\lambda)$ con $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 10000$

Q_1: Prob che il componente si guasti nelle prime 1000 ore di funz.

La CDF di una V.A. ci dice la prob che accada X per un valore minore di x, ovvero ci dice $P(\{X \leq x\})$; la CDF fa proprio al nostro caso:

$F_X(x) = \left[1 - e^{-\lambda x}\right] \cdot u(x)$ nel nostro caso $\lambda = \frac{1}{10000}$ e $x = 1000$

$\Rightarrow P(\{X \leq 1000\}) = \left[1 - e^{-\frac{1000}{10000}}\right] \cdot u(1000) = \left[1 - e^{-\frac{1}{10}}\right] \cdot 1 = 0.091 \sim 9\%$ Q_1: 5'

Q_2: P che il componente duri ALMENO 10000 ore avendo osservato che è durato ALMENO 3000 ore

$A = \{$"il componente dura almeno 10000"$\}$ $B = \{$"il componente è durato almeno 3000 ore"$\}$

l'esercizio ci chiede, in formule: $P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$ Bayes

- $P(A) = 1 - P(\{X \leq 10000\}) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{10000}{10000}}\right] = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1} = 0.36 \sim 36\%$
- $P(B) = 1 - P(\{X \leq 3000\}) = e^{-\frac{3000}{10000}} = 0.74 \sim 74\%$

$\Rightarrow P(B/A) =$ Se il componente dura 10000 H... Durerà sicuramente 3000 H! $\Rightarrow P(B/A) = 1$

$\rightarrow$ Mettiamo tutto insieme:

- $Q_2 = P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)} = 1 \cdot \frac{e^{-1}}{e^{-\frac{3}{10}}} = 0.49 \sim 49\%$ Q_2: 17'

Q_2 B: Positivamente o negativamente correlati?

$\left.\begin{array}{ll} \rho_{xy} > 0 & \text{A cresce} \rightarrow \text{B cresce} \\ \rho_{xy} < 0 & \text{A cresce} \rightarrow \text{B decresce} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Se un componente dura più di 3000 h (3500, 4000, ...) c'è una prob. maggiore che il componente duri più a lungo proof ES : $B =$ " .... 4000 #"

$\rightarrow P(B) = e^{-\frac{4}{10}} = 0.67$ $\Rightarrow P(A/B) = 1 \cdot \dfrac{e^{-1}}{e^{-\frac{4}{10}}} = 54\% > 49\%$

proof

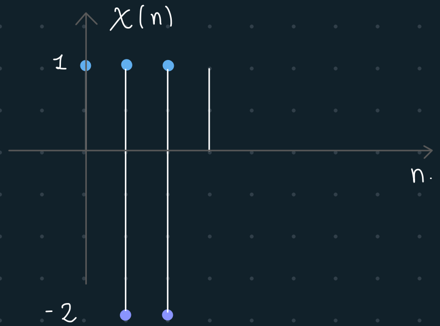
EX. 2

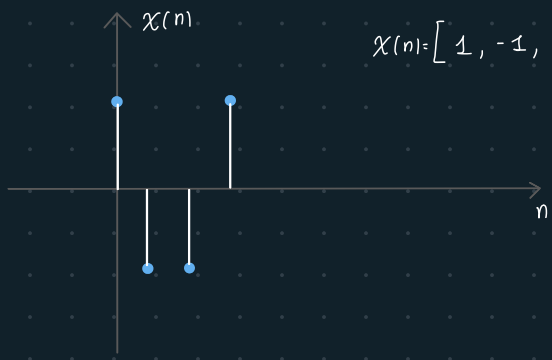
Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = R_4(n) - 2R_2(n-2)$$

disegnarne il grafico e calcolarne la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di energia.

$x(n) = R_4(n) - 2R_2(n-1)$ Q1 A: grafico





$x(n) = [1, -1, -1, 1]$

Q1 B:

				1	-1	-1	1
$r(n+3)$	1	-1	-1	1			
$r(n+2)$		1	-1	-1	1		
$r(n+1)$			1	-1	-1	1	
$r(n)$				1	-1	-1	1

$r(-3) = 1$
$r(-2) = -1 - 1 = -2$
$r(-1) = -1 + 1 - 1 = -1$
$r(0) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$\Rightarrow r_x(n) = [\delta(n-3) + \delta(n+3)] - 2[\delta(n-2) + \delta(n+2)] - [\delta(n-1) + \delta(n+1)] + 4\delta(n)$$

Time 6:36

Q C: $S_x(f) = ?$

Dalla teoria sappiamo che $r_{xy}(\cdot) \rightleftharpoons S_{xy}(\cdot) \Rightarrow r_x(n) \rightleftharpoons S_x(\nu)$

$\Rightarrow$ Trasformiamo $r_x(n)$

$$\Rightarrow S_x(\nu) = [e^{-j6\pi f} + e^{j6\pi f}] - 2[e^{-j4\pi f} + e^{j4\pi f}] - [e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f}] + 4 =$$

$$= 2\cos(6\pi f) - 4\cos(4\pi f) - 2\cos(2\pi f) + 4$$

Time 10'

ATTENZIONE

L'esercizio è giusto ma ho letto $x(n) = R_4(n) - 2R_2(n-1)$ invece di

$x(n) = R_4(n) - 2R_2(n-2)$

EX. 3 Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier, calcolare lo spettro dei seguenti segnali

1. $x(t) = e^{-100t}u(t)\cos(1000\pi t)$
2. $x(t) = \text{rep}_3\,[\Pi(t/3)]$

Q1: $x(t) = e^{-100t} \cdot u(t)\cos(1000\pi t)$

Proprieta' della modulazione

La Teoria ci dice: $2x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t + \varphi_0) \Longleftrightarrow X(f-f_c)e^{j\varphi_0} + X(f+f_c)e^{-j\varphi_0}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{A}\, 2e^{-100t}\cdot u(t)\right]\cdot\cos\left(2\pi t\cdot \overset{f_c}{\frac{1}{2}1000} + \overset{\emptyset}{\varphi_0}\right)$$

per procedere dobbiamo calcolare $\mathcal{F}(e^{-100t}\cdot u(t))$ che è un exp monolatero

Sappiamo che $e^{-at}\cdot u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f}$

• $e^{-100t}\cdot u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{100+j2\pi f}$

Time 8'

→ Siamo pronti: $\mathcal{F}(x(t)) = \frac{\cancel{e^{j\cdot\emptyset}}\ 1}{100+j2\pi(f-500)} + \frac{\cancel{e^{-j\cdot\emptyset}}\ 1}{100+j2\pi(f+500)}$

Q2: $x(t) = \text{rep}_3\left[\Pi\left(\frac{t}{3}\right)\right]$

• $\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t}{3}\right)\right) = 3\,\text{sinc}(3f)$

$\text{rep}[t] \rightleftharpoons X_\delta(f)$

Sappiamo dalla teoria che: $\text{rep}_T[x(t)] \Longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{m}{T}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$

→ Nel nostro caso:

$$\text{rep}_3[x(t)] = \frac{3}{3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\text{Sinc}\left(3\cdot\frac{m}{3}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\text{Sinc}(m)\,\delta\left(f-\frac{m}{3}\right)$$

Time 5'

Questo vuol dire che l'unica volta in cui Il campionamento è $\neq 0$ è proprio per $K = 0$

Perche' $\text{Sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \forall t - \{t=0\} \\ 1 & \text{in } t=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{X}_3(f) = \delta(f)$

Infatti $A \rightleftharpoons A\delta(f)$