Un Esperimento: lancio di due dadi (insieme)
Quali sono TUTTE le possibili uscite sperimentali?

$D_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$D_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & 3 \\ & \vdots \end{Bmatrix}$$

Tutte le possibili Coppie → 36 Elementi

TUTTE le uscite sperimentali devono avere la stessa probabilità di verificarsi.

Dagli Assiomi (lez 2.2) sappiamo che $P(\Omega) = 1$. Per definizione Tutti gli eventi elementari sono disgiunti: se si verifica un evento non può verificarsi l'altro. Inoltre l'UNIONE di Tutti gli ev. el. da proprio lo spazio campione ⇒

⇒ $P(\text{"unione di tutti gli ev. el."}) = \sum_{i=0}^{n} P_i = P(\Omega) = 1$

⇒ La somma delle prob. di tutti gli ev. el. è uguale ad uno.

Se ricordo che tutte le uscite sono equiprobabili ⇒ $P(A) = \frac{1}{36}$

In modo formale:

Probabilità del singolo elemento

$$P(w_i) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Uno degli el di Ω (11, 21, 62, ..)

Cardinalità di Ω

2 eventi elementari

Prendiamo un qualsiasi evento $E_i \equiv \{(1,1), (1,3)\}$; Notiamo che le due coppie sono disgiunte, perché se esce (1,1) non esce (1, 3).

2 uscite sperimentali

L'evento si verifica quando E_i CONTIENE l'uscita Sperimentale;

Esempio:

$E_i \equiv \{(1,1), (1,3)\}$

- Tiro 2 dadi → esce (1,1) → Verificata
- Tiro 2 dadi → esce (1,2) → NON verificata

⇒ $\boxed{P(E_i) = \frac{N(E)}{|\Omega|}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ Probabilità che esca $(1,1) \cup (1,3) \equiv E_i$

Valida Solo se ogni el è Equiprobabile!

Esempio - Lancio di un solo dado:

$\Omega \equiv \{1,2,3,4,5,6\}$ $\rightarrow$ $E = \{$"faccia pari"$\} \equiv \{2,4,6\}$

$\Rightarrow$ $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dal punto di vista probabilistico il LANCIO DELLA MONETA e "faccia pari" nel lancio dei dadi è la "stessa cosa", ovvero la probabilità è la stessa !

Infatti: $\Omega_{moneta} \equiv \{T, C\}$

$E_T = \{$"Testa"$\} \equiv \{T\}$ $\Rightarrow$ $P(E_T) = \frac{1}{2}$

Una diversa formulazione

$$P(E) = \frac{\text{Numero di elementi di } E}{\|\Omega\|} = \frac{N(E)}{\|\Omega\|}$$

Formulazione Classica

$$P(E) = \frac{\text{\# di uscite sperimentali in cui si verifica } E}{\text{\# Prove Totali}}$$

Formulazione Frequentistica

$\rightarrow$ VINCOLO $\rightarrow$ La prob. è attendibile solo se # Prove $\rightarrow +\infty$

$\rightarrow$ Ovvero se faccio Tante prove

La Formulazione Freq. è utile per STIMARE la probabilità quando non sappiamo nulla dell'esperimento.

Concetto di Indipendenza

Se ho due eventi A e B e si ha che la probabilità di $A \cap B$ è uguale alla probabilità di A per quella di B allora si dice che i due eventi sono Indipendenti

$\rightarrow$ Se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Rightarrow$ Indipendenti

Probabilità Condizionata

$P(A/B)$ = Probabilità dell'evento A Condizionata all'evento

$\rightarrow$ Significa calcolare la probabilità di A Sapendo che si è verificato l'evento B.

$\rightarrow$ Esempio: Lancio 2 volte una moneta; Dato che la prima volta è uscita "Testa", qual è la probabilità che esca nuovamente Testa?

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Domanda: $P(A/B) \geq 0$?

Affinchè sia ≥ 0 allora $\begin{cases} N>0 \\ D>0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} N<0 \\ D<0 \end{cases}$

Siccome si parla di probabilità Sappiamo che entrambi sono positivi $\Rightarrow$ $P(A/B) > 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Primo Assioma verificato

Esercizio: verificare i restanti 2 Assiomi

Cosa accade se i due eventi sono indipendenti?
Otteniamo che $P(A/B) = P(A)$, proprio perchè i due eventi sono indip.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

Se A e B sono disgiunti $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Esercizio

Consideriamo il lancio di 2 dadi ed i due eventi:

$E_1 \equiv \{$"Somma dei res > 8"$\}$

$E_2 \equiv \{$"i due ris. sono uguali"$\}$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ Verificare che i due eventi sono Indipendenti.

Dobbiamo verificare che $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots \end{matrix}\right\} \equiv \Omega \rightarrow \|\Omega\| = 6^2 = 36$$

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	...	...			
3	31	...				
4	41					
5	51					
6	61					

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\Rightarrow E_1 = \{ \quad \}$

$E_2 = \{ \quad \}$

- Siccome ogni uscita sperimentale è equiprobabile, possiamo calcolare la prob di E_1 con la formula:

$$P(E_1) = \frac{N(E_1)}{\|\Omega\|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

- Lo stesso vale per E_2 $\Rightarrow$ $P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ $A \cap B$ è l'evento E_3 / $E_3 = \{$"I ris. sono uguali E la somma > 8"$\}$

$\rightarrow E_3 = \{10, 12\} \Rightarrow \|E_3\| = 2$

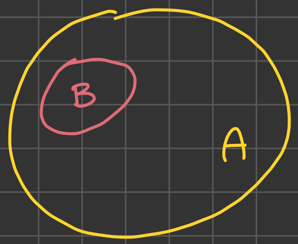
$$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$? $\rightarrow$ $\frac{1}{18} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{18} \neq \frac{5}{108}$

Sono Dipendenti

Verifichiamo con la formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3} \neq \underset{E_1}{\frac{5}{18}}$$



"Probabilita' di B dato A"

$B \subseteq A \rightarrow$ Calcoliamo $P(B/A)$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \geq 0}{P(A) \geq 0}$$

$B \cap A = B$

Ragioniamo

Sappiamo che $P(\Omega) = 1$; $A \subset \Omega \Rightarrow 0 < P(A) < 1$

Siccome $B \subseteq A \rightarrow B \subseteq A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) > P(B)$!

$\Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B) \Rightarrow P(B/A) > P(B) \Rightarrow$ A e' positivamente correlato a B

- Il fatto che accada A, ci da una conoscenza su B e fa crescere la probabilita' che accada B!

Calcoliamo l'opposto: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \Rightarrow$ CERTO

$A \cap B = B$

$\Rightarrow$ "Se accade B, accade anche A".

Probabilita' Composta

Essendo $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ possiamo anche scrivere che:

$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

Se consideriamo $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$

Legge di Bayes

$\Rightarrow P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B) \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Ci da' una relazione Tra $P(A/B)$ e $P(B/A)$.

Nota: $P(A/B) \neq P(B/A)$