UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta dell'8 febbraio 2022
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1
Si considerino due variabili aleatorie uniformi discrete
X con alfabeto $\mathcal{A}_X = (1, 2, \ldots 4)$ e
Y con alfabeto $\mathcal{A}_Y = (1, 2, \ldots 5)$
indipendenti. Determinare
1. La PMF della variabile aleatoria $Z = X - Y$
2. Il coefficiente di correlazione tra X e Z.

EX. 2
Dato il segnale $x(t)$ avente densità spettrale di energia

$$S_x(f) = f^2 \;\; \Pi\left(\frac{f}{12}\right)$$

calcolare
a. L'energia del segnale.
b. La banda all'interno della quale è compresa il 90% dell'energia.

EX. 3
Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = R_3(n) - R_2(n+1)$$

rappresentarne il grafico e calcolare
1. La funzione di autocorrelazione $r_x(m)$;
2. La risposta in frequenza $X(\nu)$;
3. La densità spettrale di energia $S_x(\nu)$.

EX. 1

Si considerino due variabili aleatorie uniformi discrete
X con alfabeto $\mathcal{A}_X = (1, 2, \ldots 4)$ e
Y con alfabeto $\mathcal{A}_Y = (1, 2, \ldots 5)$
indipendenti. Determinare

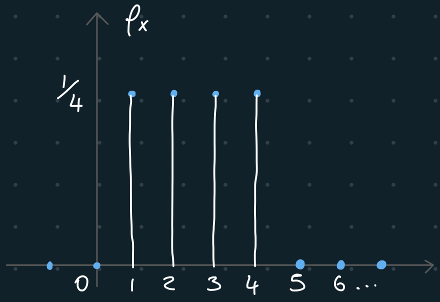
1. La PMF della variabile aleatoria $Z = X - Y$
2. Il coefficiente di correlazione tra X e Z.

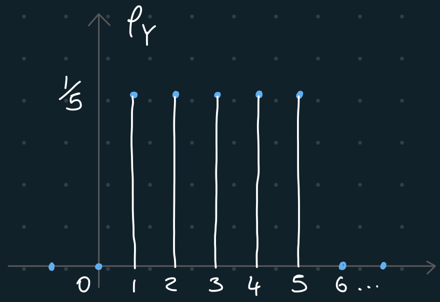
X dove $\mathcal{A}_X = \{1, 2, 3, 4\}$

Y dove $\mathcal{A}_Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

X ed Y indip.

Q_1: PMF di $Z = X - Y$





$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{per } x = 1, 2, \ldots, 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(\{X = x\}) = 1/4$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/5 & \text{per } x = 1, 2, \ldots, 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(\{Y = y\}) = 1/5$

$\Rightarrow$ La prob di $P(\{Z = 3\})$ sarà:

$P(\{Z=3\}) = P(\{X = x\}) - P(\{Y = y\}) = 1/4 - 1/5 = 1/20$

$P(\{Z=3\})$

$$\Rightarrow p_Z(3) = \begin{cases} 1/20 & \forall 3 \in \mathcal{A}_Z \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$ Ans1

Q_2: $\text{Corr}[X, Z] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ calcoliamo μ_X, μ_Y e le varianze

$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2} = 2.5$ μ_X

$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$ μ_Y

$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mu_X^2}_{6.25} = 7.5 - 6.25 = 1.25$ σ_X^2

$\rightarrow$ ci serve $\overline{X}^2 = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4}(1+4+9+16) = \frac{15}{2} = 7.5$ $\overline{X}^2$

$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] = \mathbb{E}[Y^2] - \mu_Y^2 = 11 - 9 = 2$ σ_Y^2

$\rightarrow$ ci serve $\overline{Y}^2 = \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{5}(1+4+9+16+25) = 11$ $\overline{Y}^2$

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$ μ_Z

$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{7.5} - 2\,\mathbb{E}[XY] + \underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{11} = 7.5 - 15 + 11 = \frac{7}{2} = 3.5$ $\overline{Z}^2$

X ed Y indip

$\mathbb{E}[XY] = \mu_X \mu_Y = \frac{15}{2}$

$$\sigma_Z^2 = E\left[(Z-\mu_Z)^2\right] = E[Z^2] + \mu_Z^2 \underbrace{-2\mu_Z E[Z]}_{2\cdot\mu_Z^2} = \underbrace{E[Z^2]}_{\frac{7}{2}} - \underbrace{\mu_Z^2}_{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3,25 \quad \sigma_Z^2$$

$\Rightarrow$ Possiamo calcolare la covarianza $C_{XZ} = E\left[(X-\mu_X)(Z-\mu_Z)\right] =$

$$= E[XZ] - \mu_Z E[X] - \mu_X E[Z] + \mu_X\mu_Z = E[XZ] - \mu_Z\mu_X \cancel{-\mu_Z\mu_X} \cancel{+\mu_Z\mu_X} = E[XZ] - \underbrace{\mu_Z\mu_X}_{-\frac{5}{4}}$$

$\rightarrow$ Ci serve $E[XZ] = E[X\cdot(X-Y)] = \underbrace{E[X^2]}_{\frac{15}{2}} - \underbrace{E[XY]}_{\frac{15}{2}} = 0 \quad E[XZ]$

$$\Rightarrow 0-\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} \quad C_{XZ}$$

$\Rightarrow$ Possiamo calcolare il coeff di correlazione

$$\rho = \frac{C_{XZ}}{\sigma_X\,\sigma_Z} = \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}} \simeq 0.62 \quad \rho_{XZ}$$

EX. 2

Dato il segnale $x(t)$ avente densità spettrale di energia

$$S_x(f) = f^2 \ \Pi\left(\frac{f}{12}\right)$$

calcolare

a. L'energia del segnale.

b. La banda all'interno della quale è compresa il 90% dell'energia.

$$S_x(f) = f^2 \Pi\left(\frac{f}{12}\right) \qquad S_x(f) = |X(f)|^2$$

Q_1: $\mathcal{E}_x = ?$

$\Rightarrow$ Parseval $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$

ci basta calcolare lui

$$\rightarrow \mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \Pi\left(\frac{f}{12}\right) df = \int_{-6}^{6} f^2 df = \left[\frac{f^3}{3}\right]_{-6}^{6} = 72 + 72 = 144 \ \mathcal{E}_x$$

Q_2: B all'interno del quale è compresa il 90% dell'$\mathcal{E}_x$

Per individuare la banda poniamo $\dfrac{\mathcal{E}_x(B)}{\mathcal{E}_x} = 0.9$

$$\rightarrow \frac{1}{\mathcal{E}_x} \int_{-B}^{B} f^2 df = \frac{1}{\mathcal{E}_x}\left[\frac{f^3}{3}\right]_{-B}^{B} = \frac{1}{\mathcal{E}_x} \frac{1}{3}B^3 + \frac{1}{3}B^3 \rightarrow \frac{1}{\underset{144}{\mathcal{E}_x}} \frac{2}{3}B^3 = 0.9$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}B^3 = 0.9 \cdot \mathcal{E}_x \rightarrow B^3 = \frac{0.9 \cdot \mathcal{E}_x \cdot 3}{2} \rightarrow B = \sqrt{\frac{0.9 \cdot \mathcal{E}_x \cdot 3}{2}} = 5.79$$

EX. 3

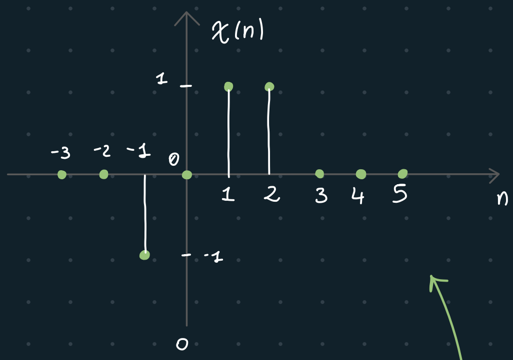
Dato il segnale a tempo discreto

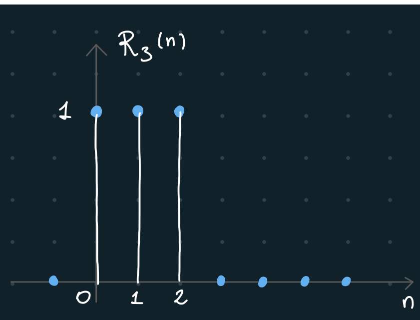
$$x(n) = R_3(n) - R_2(n+1)$$

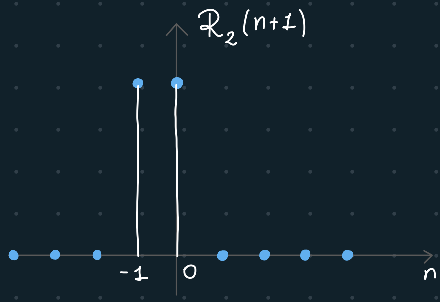
rappresentarne il grafico e calcolare

1. La funzione di autocorrelazione $r_x(m)$;
2. La risposta in frequenza $X(\nu)$;
3. La densità spettrale di energia $S_x(\nu)$.

$$x(n) = R_3(n) - R_2(n+1)$$







Denoto con x gli elementi di $R_3(n)$ e con y gli el di $R_2(n+1)$

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) - y(n) = [0, \dots, 0, \underset{n=-1}{(0-1)}, \underset{n=0}{(1-1)}, \underset{1}{(1-0)}, \underset{2}{(1-0)}, \underset{3}{0}, \dots, 0] = y[n]$$

Q1: Autocorrelazione $r_x(n)$

$$r_x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n)\, x(n-m) \longrightarrow$$

L'autocorr si calcola facendo traslare un segnale sopra un'altro (in questo caso lo stesso S.)

$x(n)$					-1	0	1	1		
$x(n-3)$	-1	0	1	1						
$x(n-2)$		-1	0	1	1					
$x(n-1)$			-1	0	1	1				
$x(n)$					-1	0	1	1		

$r_x(-3) = -1$

$r_x(-2) = -1 + 0 = -1$

$r_x(-1) = 0 + 0 + 1 = 1$

$r_x(0) = 1 + 0 + 1 + 1 = 3$

$$\Rightarrow r_x(n) = -1[\delta(m-3) + \delta(m+3)] - 1[\delta(m-2) + \delta(m+2)] + [\delta(m-1) + \delta(m+1)] + 3\delta(m)$$

$$= -\delta(m-3) - \delta(m+3) - \delta(m-2) - \delta(m+2) + \delta(m-1) + \delta(m+1) + 3\delta(m)$$

Q1 Alternativa: $x(n) = -\delta(n+1) + 0\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$

Autocorrelazione $r_x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n-m) =$

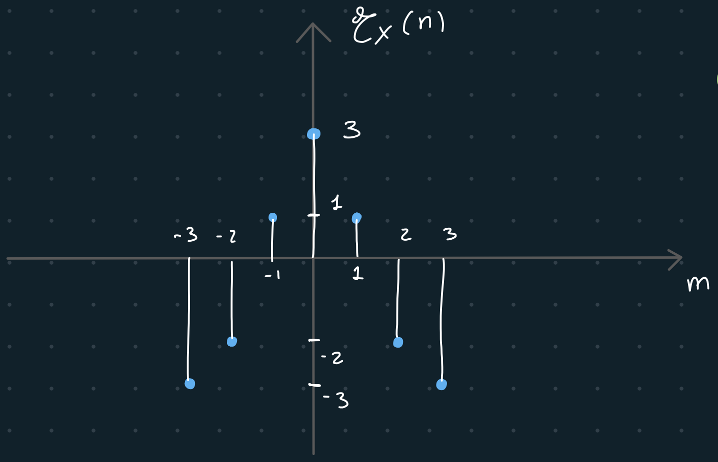
$$= [-\delta(n+1) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]\,[-\delta(n-(m-1)) + \delta(n-(m+1)) + \delta(n-(m+2))]$$

$$= +\delta(m-1+1) - \delta(m+1+1) - \delta(m+2+1) - \delta(m-1-1) + \delta(m+1-1) + \delta(m+2-1) -$$

$$- \delta(m-1-2) + \delta(m+1-2) + \delta(m+2-2) =$$

$$= \underline{\delta(m)} - \underline{\delta(m+2)} - \delta(m+3) - \delta(m-2) + \underline{\delta(m)} + \delta(m+1) - \delta(m-3) + \delta(m-1) + \underline{\delta(m)}$$

$$= 3\delta(m) - \delta(m+2) - \delta(m+3) - \delta(m-3) - \delta(m-2) + \delta(m-1) + \delta(m+1)$$



Time
$Q_{1a} + Q_{1b} = 35'$

Q_2: Risposta in freq $X(\nu)$ $\to$ Sappiamo che $X(\nu) = \mathcal{F}(x(n))$

$\to$ $x(n) = -\delta(n+1) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$

Sappiamo che: $\begin{cases} A\,\delta(n) \rightleftharpoons A \\ x(n-T_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi T_0 \nu} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathcal{F}(x(n)) = -e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu} + e^{-j4\pi\nu}}$ Ans

Q_2 Alternativa

Se vediamo $x(n)$ come $x(n) = -\delta(n+1) + R_2(n-1)$

Allora $X(\nu) = -e^{j2\pi\nu} + \dfrac{\sin(2\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \cdot e^{-j\pi\nu}$

Q_3: Densita' Spett. di $\mathcal{E}$ $\to$ $S_x(\nu) = ?$

Il Teorema di Wiener KinTchine ci dice che: $r_{xy}(\cdot) \rightleftharpoons S_{xy}(\nu)$

e quindi $r_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot)$ e nel nostro caso: $r_x(n) \rightleftharpoons S_x(\nu)$

Abbiamo l'autocorrelazione: $r_x(n) = 3\delta(n) - \delta(n+2) - \delta(n+3) - \delta(n-3) - \delta(m-2) + \delta(n-1) - \delta(n+1)$

$\Rightarrow$ $r_x(n) \rightleftharpoons S_x(\nu) = 3 - e^{j4\pi\nu} - e^{j6\pi\nu} - e^{-j6\pi\nu} - e^{-j4\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu} - e^{j2\pi\nu}$

Possiamo compattare il tutto con il coseno / sin $\quad e^{-jwt} = \cos(wt) - j\sin(wt)$

$\Rightarrow e^{jwt} + e^{-jwt} = \cos(wt) + \cancel{j\sin(wt)} + \cos(wt) - \cancel{j\sin(wt)}$

$\cos(2\pi\nu) + \cancel{i\sin(2\pi\nu)} + \cos(2\pi\nu) - \cancel{i\sin(2\pi\nu)} = 2\cos(2\pi\nu)$

$\cos(w) + i\sin(w) - \cos(w) + i\sin(w) = i\sin(w)$

$\Rightarrow 3 + \left[e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu}\right] - \left[e^{j4\pi\nu} + e^{j4\pi\nu}\right] - \left[e^{j6\pi\nu} + e^{-j6\pi\nu}\right]$

$\Rightarrow$ $\underline{S_x(\nu) = 3 + \cos(2\pi\nu) - \cos(4\pi\nu) - \cos(6\pi\nu)}$ Ans