CONVOLUZIONE

Sistemi Lineari Tempo invarianti (LTI) (tempo discreto)

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots + a_K x_K(n)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + \dots + a_K y_K(n)$$

Quando riusciamo a rappresentare un ingresso come una somma di tanti ingressi elementari, l'uscita per la proprietà di linearità sarà la sovrapposizione delle singole risposte.

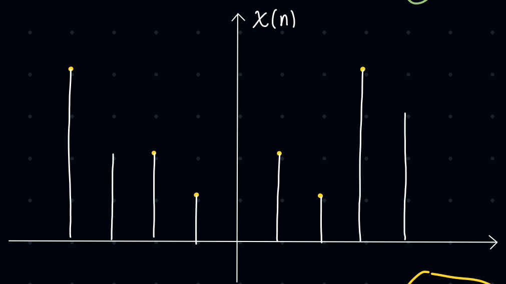
I Passaggio

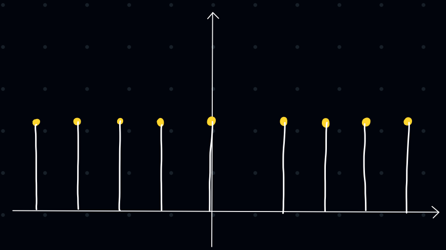
Decompongo l'input con la proprietà:

Vedi 3.0.2 - Segnali Ordinari

Proprietà di riproducibilità: $x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(K)\,\delta(n-K)$

PUNTO ⓐ





II passaggio: definisco $h(n)$ la risposta del sistema ad una δ:

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Linearità

$$\delta(n) \to h(n)$$

Se pongo una δ all'ingresso del sistema

In uscita, $y(n) = h(n)$

Risposta

* A volte $h(n)$ caratterizza il sistema a tal punto da essere posta al posto della "T":

$$\to \boxed{T_K} \to \quad \text{Diventa} \quad \to \boxed{h(n)} \to$$

Siccome questi sistemi sono
- Lineari
- Tempo invarianti

Tempo invarianza

$$\Rightarrow \delta(n-K) \to h(n-K)$$

III Passaggio: Applichiamo la prop. di linearità accennata al punto ⓐ del I pass.

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K)\cdot h(n-K)$$

Applicando la linearità, la tempo I varianza e scrivendo la nostra sequenza come una sovrapposizione di delta, abbiamo trovato questa relazione.

OPERAZIONE DI CONVOLUZIONE

$x(n) * h(n) \leftarrow$ "x convoluto ad h"

Questi sistemi LTI sono molto potenti, perchè dal punto di vista matematico, **dato un qualsiasi ingresso**, se conosciamo la risposta impulsiva del sistema, **mediante l'operazione di convoluzione riusciamo a prevedere l'uscita del sistema.**

Convoluzione Continua

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,dt$$

scriviamo la risposta del sistema ad una delta:

$$\delta(t) \to Sys \to h(t)$$

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere il segnale di uscita dal sistema come:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau} = \boxed{x(t) * h(t)}$$

Convoluzione tra x e h

Convoluzione continua

Qualche esempio.

▷ Conosciamo il legame ingresso/uscita di alcuni sistemi: sistema di differenza prima:

$$y(n) = \underbrace{x(n) - x(n-1)}_{}$$

Diff ra campione corrente e campione prec

$\to$ Risposta impulsiva?

Per definizione la R.I.: Invece dell'ingresso qualsiasi, poniamo una $\delta(t)$, ed in out avremo una $h(t)$

$\Downarrow$

$$x(t) \to y(t)$$
$$\delta(t) \to h(t)$$

otteniamo: $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

Dimostriamo che è un sys LTI

- Lin: $x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$

$$\Rightarrow y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) - a_1 x_1(n-1) - a_2 x_2(n-1) =$$

$$= a_1 \underbrace{(x_1(n) - x_1(n-1))}_{y_1} + a_2 \underbrace{(x_2(n) - x_2(n-1))}_{y_2} = \text{LIN}$$

- Time inv.

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \Rightarrow y(n-m) = x(n-m) - x(n-1-m)$$

$$x(n-m) \Rightarrow y'(n) = \underbrace{\boxed{x(n-m) - x(n-m-1)}}_{y(n-m)}$$

uguali $\Rightarrow$ T. INVARIANT

Sistema LIT

▷ Somma corrente

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \to h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = u(n)$$

gradino

PREREQUISITI PER I SISTEMI LTI

ES 1: $y(t) = x(t) + 5$

a) Time Variant?
- NO Time Scale
- coefficiente Const
- Addizioni / sottr costanti

b) Lineare? se viene aggiunto qualcosa che non sia input - output il sys è <u>NON LINEARE</u>

ES 2: $y(t) = x(t^{2})$ ← Time Scale → Time Variant

linear? → Si: indip. dal time scaling

T.V. + LINEAR ⇒ NOT LTI

ES 3: $\underset{op}{y(t)} = \underset{coeff}{\cos t}\ \underset{out}{x \cdot (t)}$

linear? SI: indip da coefficienti

T.V.? NO: il coeff deve essere const, $\cos(t)$ non è const

Lin + T.V. ⇒ NOT LTI

ES 4: $y(t) = 3\,x(t)$

linear? coeff = 3 ⇒ Linear

T.V.? coeff = 3 = const ⇒ T. IN.

Lin + T. IN. ⇒ <u>LTI</u>

"Impulse Response" e Convoluzione – Da Neso Academy

- $h(t)$ è FISSATO a seconda del SisTema

$\delta(t) \longrightarrow$ **Sistema LTI** $\longrightarrow h(t)$

In input DOBBIAMO avere un impulso unitario

"Impulse Response"

$x(t)$:
- $\Lambda(t)$ NO
- $2\,\delta(t)$ NO
- $\delta(t)$ SI

La CONVOLUZIONE è uno strumento matematico usato per calcolare l'output di un Sistema LTI quando l'input response $h(t)$ e l'input sono disponibili.

Definizione La convoluzione è un Integrale (o sommatoria) che esprime la quantità di SOVRAPPOSIZIONE di un segnale quando è shiftato al di sopra di un altro segnale.

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Operazione di convoluzione:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(n-k) \quad \text{T. Discreto}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{T. Continuo}$$

Nella pratica: Siamo interessati a "muovere" la risposta $h(\cdot)$ facendo rimanere l'input $x(\cdot)$ fermo.

PASSAGGI

1. $x(\cdot) \xrightarrow{t=\tau,\ n=k} x(\tau),\ x(k)$ $\qquad h(\cdot) \xrightarrow{t=\tau,\ n=k} h(\tau),\ h(k)$

2. Time Rev (Riflessione): $h(-\tau)$, $h(-k)$

3. Time Shifting (

4. $h[-(\tau-t)] = h(t-\tau) \to \tau$ è la var indipendente

   $h[-(k-t)] = h(t-k) \to k$ è la var indipendente

   $x(\tau) = h(t-\tau) \to \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$

   $x(k) = h(t-k \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(t-k)$

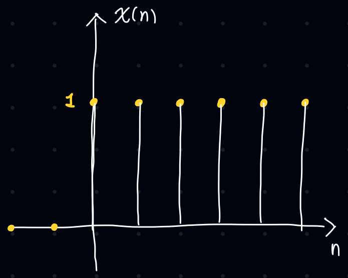
5.

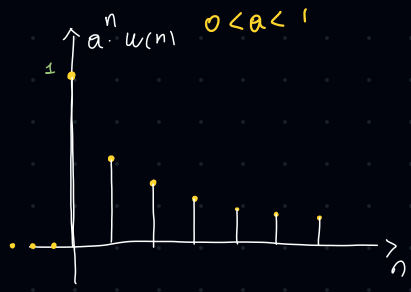
Convoluzione tra un gradino ed una seq exp monolatera.

$$x(n) = u(n) \quad , \quad h(n) = a^n \cdot u(n) \quad \text{con} \quad 0 < a < 1$$

$\rightarrow$ Calcolare l'uscita per un sistema che ha la risposta impulsiva $h(n)$ e per ingresso un gradino.

$\Rightarrow$ Convoluzione $\rightarrow$ $x(n) * h(n)$





$x(n) * h(n)$

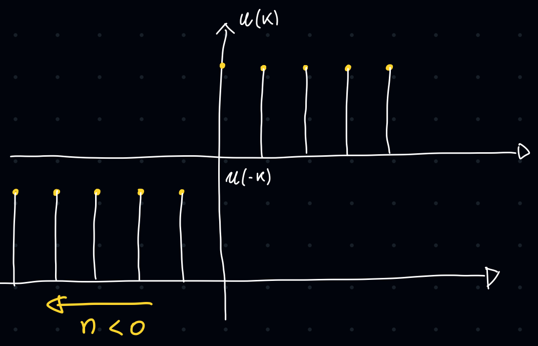
$$\Rightarrow \boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) \cdot a^{n-k} \cdot u(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{u(k) \cdot u(n-k)}_{\text{dobbiamo valutarlo al variare di } k} \cdot a^{n-k}$$

Serie geometrica

$\Rightarrow$ Analizziamo che succede a $u(k) \cdot u(n-k)$ al variare di k:



$$\boxed{u(n-k) = u(-(k-n))}$$

1° cosa da fare: RIBALTAMENTO

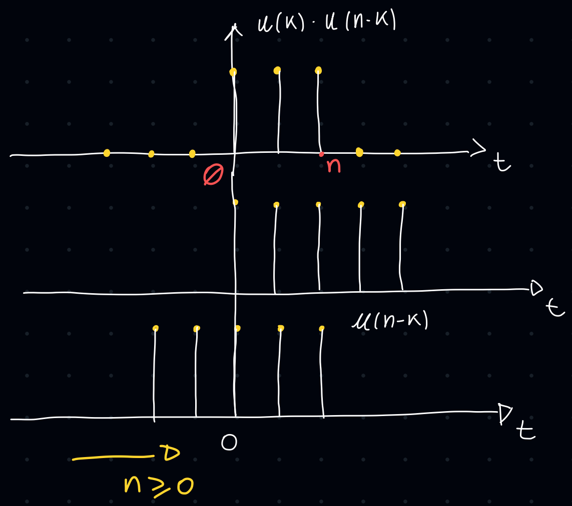
2° cosa: Traslare rispetto ad n

$n \geq 0$ $\rightarrow$ Trasla a Dx

$n < 0$ $\rightarrow$ Trasla a Sx

per $n < 0$ (Trasla a Sx) $y(n) = 0$ (sarebbe $\overset{0}{u(n-k)} \cdot \overset{1}{u(k)} = 0$)

per $n \geq 0$



$$\rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}$$

($u(k) \cdot u(n-k)$ vale 1 per $i(0,n)$)

$$= \sum_{k=0}^{n} \underset{\text{const}}{a^n} \cdot a^{-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} a^{-k} = a^n \boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a}\right)^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$=$ Siccome $0 < a < 1$ (eg: $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ $\frac{1}{a} = b$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

$$= a^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{a}} = a^n \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{a^n - a^n \cdot a^{-(n+1)}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{a\left(a^n - a^{-1}\right)}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} =$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \implies y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot u(n)$$

Convoluzione

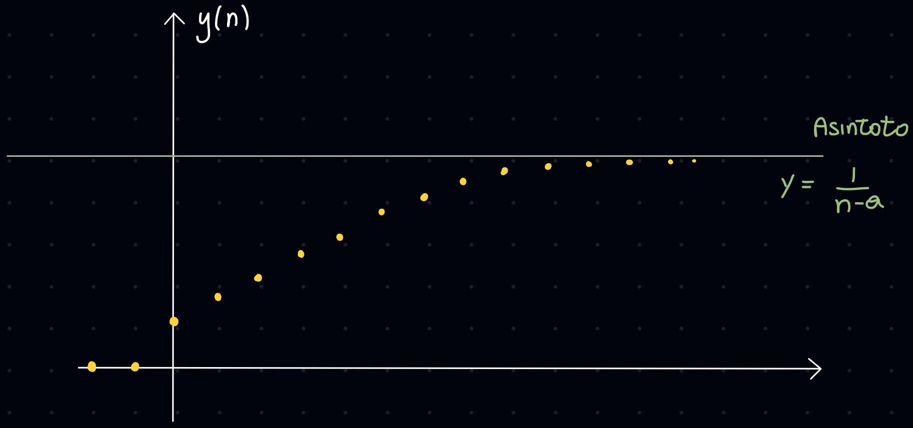
→ Proof Asintoto: $\lim_{n \to \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

$$= \frac{1}{1-a} - \frac{a^{(n+1)}}{1-a} \qquad (n+1) \to +\infty$$

Siccome $0 < a < 1$ $\sim \left(\frac{1}{b}\right)^n \to 0$

$$= \frac{1}{1-a} \quad \text{per } n \to \infty$$

→ GRAFICHIAMO.



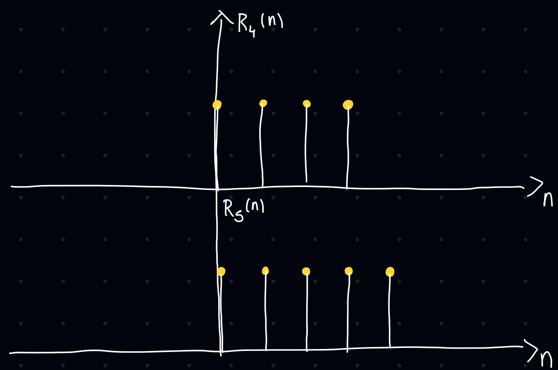
43:00 Esercitazione Matlab

Esempio Numerico: Convoluzione tra due impulsi Rettangolari

Ingresso

$x(n) = R_4(n)$
$h(n) = R_5(n)$ → $y(n) = x(n) * h(n)$

Risposta impulsiva

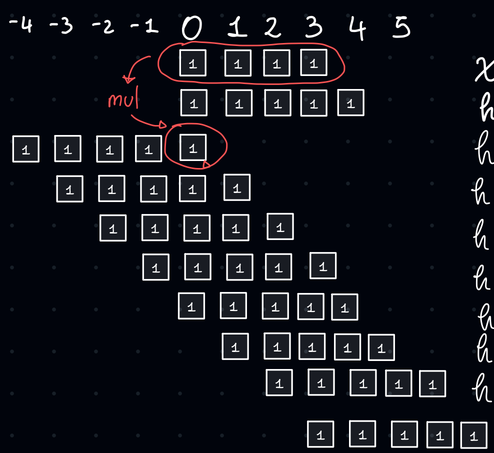


$$\to \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K) \cdot h(n-K)$$

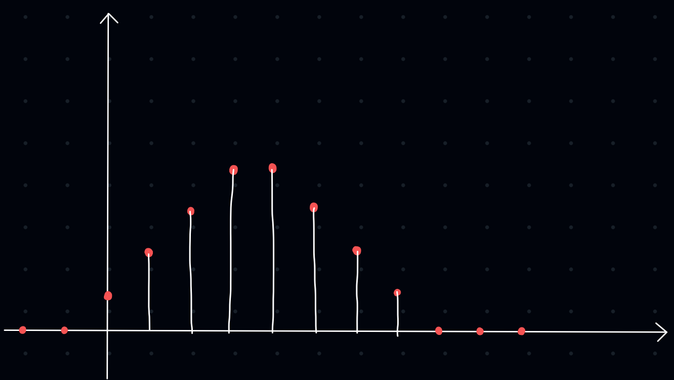
I Step: $h(n-K) = h(-(K-n))$

Ribaltiamo

→ Dopo la convoluzione, un Segnale rimane fisso e l'altro trasla (Ribaltato).



$x(K)$
$h(K)$
$h(-K) = h(-K-0) \to 1 = y(0)$
$h(-K+1) = \sum = \underset{n=0}{1 \cdot 1} + \underset{n=1}{1 \cdot 1} = 2 = y(1)$
$h(-K+2) = 1+1+1 = y(2) = 3$
$h(-K+3) = y(3) = 4$
$h(-K+4) = y(4) = 4$
$h(-K+5) = y(5) = 3$
$h(-K+6) = y(6) = 2$
$h(-K+7) = y(7) = 1$



→ Quando abbiamo due finestre, la loro convoluzione è un Trapezio di dimensioni

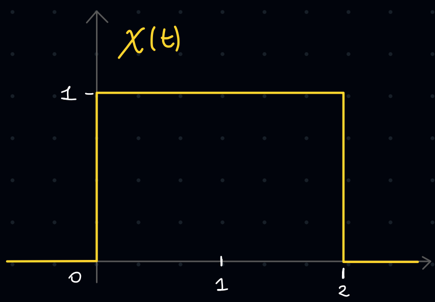
$L + M - 1$

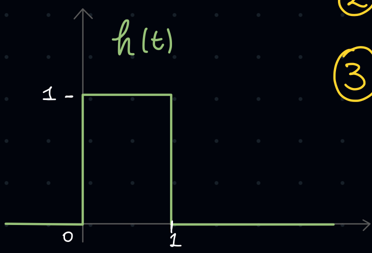
Esempio 1:

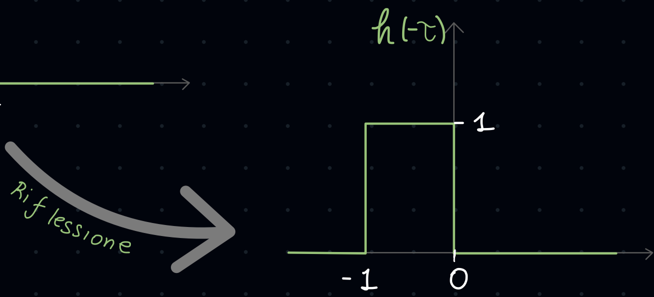
(1): pongo $\tau = t \Rightarrow x(t) \to x(\tau)$, $h(t) \to h(\tau)$

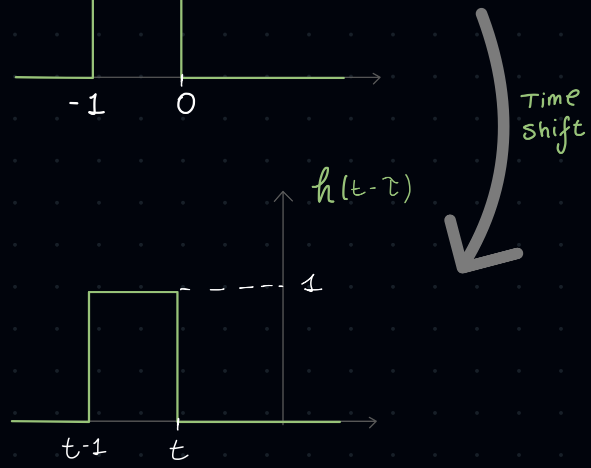
(2): $x(\tau) = x(\tau)$, $h(\tau) = h(-\tau)$

(3): $x(\tau) = x(\tau)$, $h(-\tau) = h(t-\tau)$





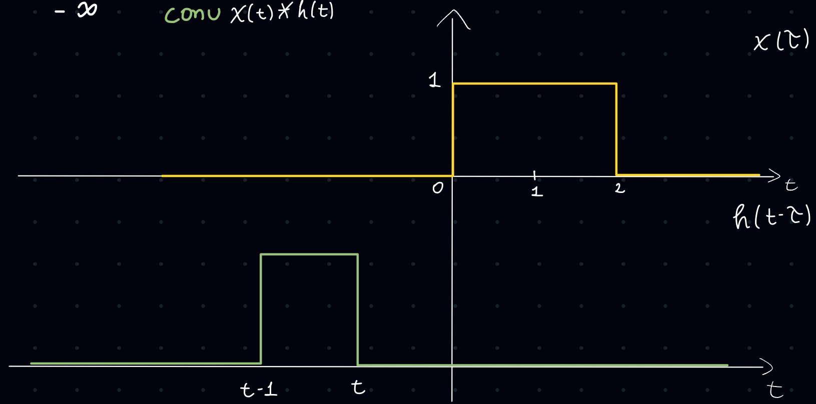




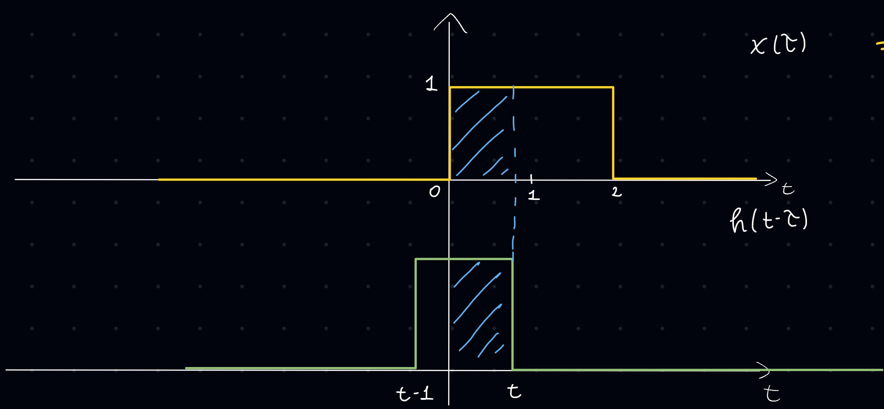
Caso 1: $t<0 \to$ NO OVERLAP

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, d\tau = 0$$

conv $x(t) * h(t)$



Caso 2: $t>0 \wedge t<1 \to 0<t<1$

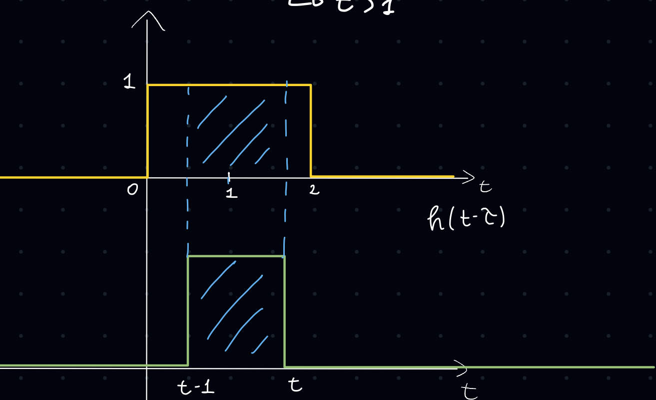


$$\Rightarrow x(\tau)\cdot h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } (t-1,0) \\ 1 & \text{per } (0,t) \\ 0 & \text{per } (t,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t d\tau = [\tau]_0^t = t$$

$\Rightarrow y(t) = t$ per $0<t<1$

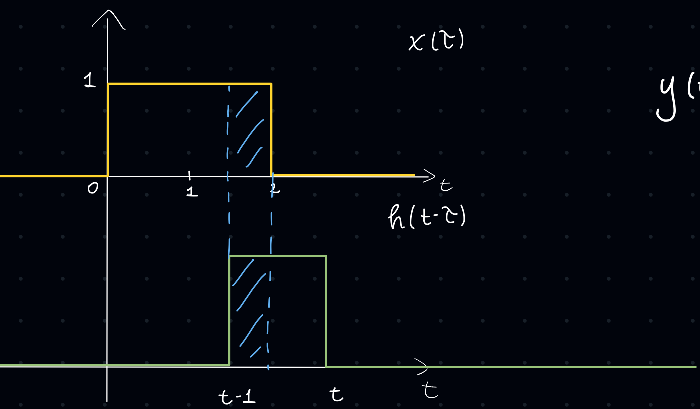
Caso 3: $t-1>0 \wedge t<2 \Rightarrow 1<t<2$
↳ $t>1$



$$\Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{t} d\tau = [\tau]_{t-1}^{t} = [t-t+1] = 1$$

$\Rightarrow y(t) = 1$ per $1<t<2$

Caso 4: $t > 2 \wedge t-1 < 2 \Rightarrow t < 3 \Rightarrow 2 < t < 3$



$$y(t) = \int_{t-1}^{2} dt = \left[\tau\right]_{t-1}^{2} = \left[2 - t + 1\right] = 3 - t$$

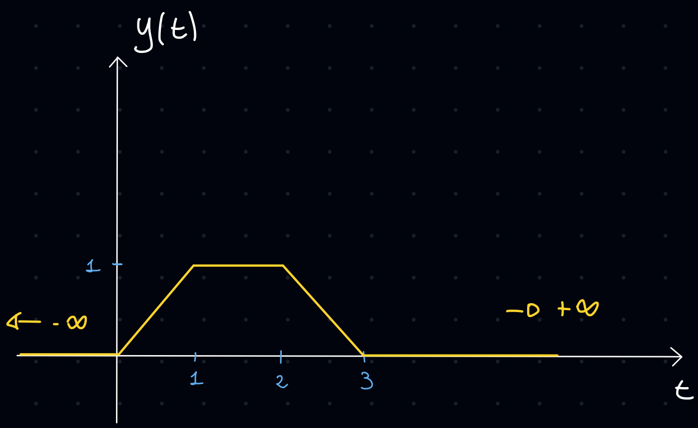
$\Rightarrow y(t) = 3 - t$ per $2 < t < 3$

Caso 4: $t - 1 > 2 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow$ NO OVERLAP

$y(t) = 0$ per $t > 3$

Tiriamo le Somme:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 3 - t & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$



Procedura per il calcolo della Convoluzione discreta

1. RIFLESSIONE → metto in evidenza il meno → $h(-k)$
2. TRASLAZIONE
   - Dx per n positivi
   - Sx per n negativi
3. PRODOTTO → $\sum x(k) \cdot h(-(k+n))$ PER OGNI K SIGNIFICATIVO

   Ovvero per ogni k
   Tale che $x(k) \wedge h(n-k) \neq \emptyset$

   Insieme vuoto

4. SOMMA dei prodotti

Proprieta' della convoluzione

I) Proprieta' commutativa ✓

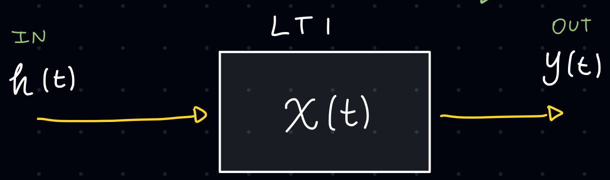
$$\underbrace{x_1(t)}_{\underbrace{x_1(\tau)}_{\text{fissato}}} * \underbrace{x_2(t)}_{\underbrace{x_2(t-\tau)}_{\text{Mobile}}} = y(t) = \underbrace{x_2(t)}_{\underbrace{x_2(\tau)}_{\text{Fissato}}} * \underbrace{x_1(t)}_{\underbrace{x_1(t-\tau)}_{\text{Mobile}}}$$

Dato un sys LTI con un Impulse resp $h(t)$:

=D Sappiamo che possiamo calcolare $y(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

=D Per via della proprieta' 1: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$



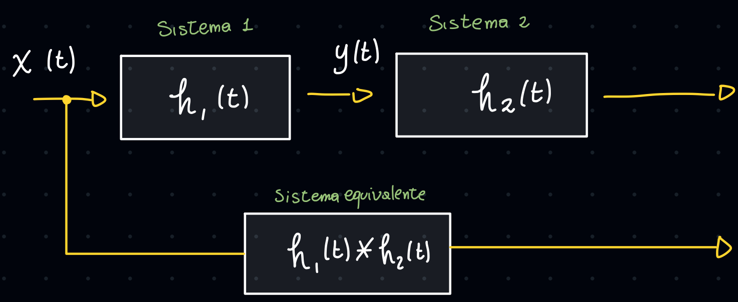
II) Proprieta' Associativa ✓

Dati 3 Segnali:

$$\boxed{(x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = y(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))}$$

L'ordine di conv di 3 segnali non cambia l'output del sys

Dal punto di vista del sistema:



$$y'(t) = \underbrace{(x(t) * h_1(t))}_{y(t)} * h_2(t)$$

$$y'(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

Morale della favola:

Ogni volta che abbiamo due o piu' sistemi connessi in CASCATA, potremo "costruire" un sistema EQUIVALENTE composto dalla convoluzione di tutti gli impulse responses dei sys.

III) Proprietà Distributiva ✓

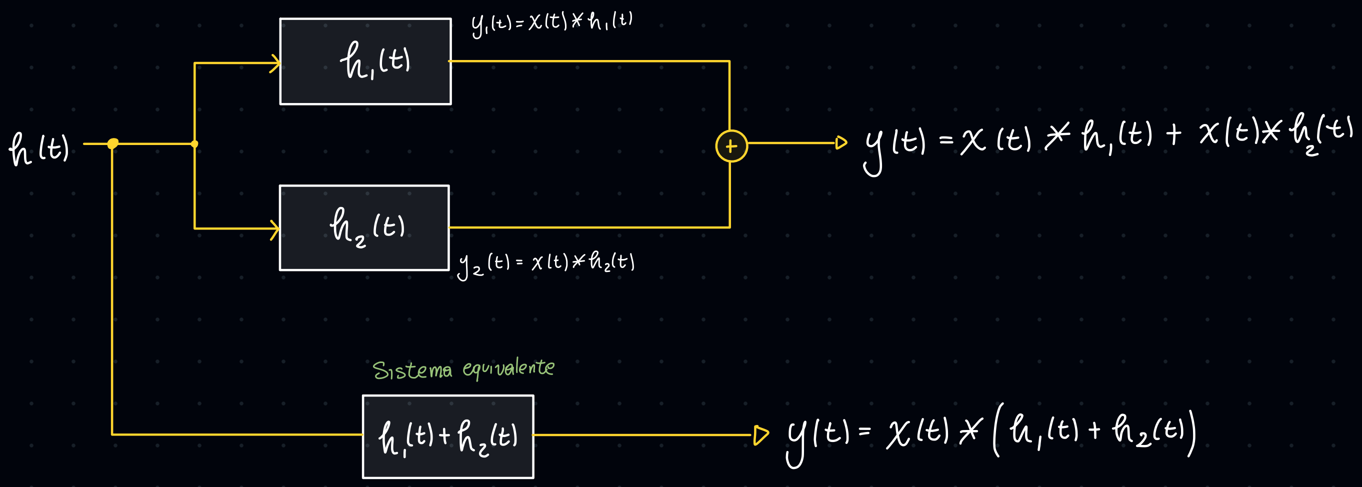
$x_1(t)\ ,\ x_2(t),\ x_3(t) \ \rightarrow\ \underset{x_1, x_3}{Sum} = x_2(t) + x_3(t)$ Vogliamo convolare: $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t))$

$$\Rightarrow x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = y(t) = x_1(t) * (x_2(t)) + x_1(t) * x_3(t)$$

Per la prop Distributiva

- Possiamo vedere l'operazione come uno sviluppo di parentesi: $x(a+b) = xa + xb$

Dal punto di vista del sistema:



Elemento Unitario

IV) Proprietà della funzione Delta ✓

$$\rightarrow \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & \text{othw.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)} \xrightarrow{\text{Per } t_0 = 0} \boxed{x(t) * \delta(t - 0) = x(t)}$$

→ Cheat Code: Sostituire la t di $x(t)$ con qualsiasi sia il contenuto di $\delta(\cancel{\ })$

→ Delta con Ampiezza A:

$$\boxed{x(t) * A\delta(t - t_0) = A\, x(t - t_0)} \xrightarrow{\text{per } t_0 = 0} \boxed{x(t) * A\,\delta(t) = A\, x(t)}$$

Esempio 1: $x(t) = r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) * \delta(t-2) = r(t-2)$$

Esempio 2: $u(t+3) * \delta(t-1) = u(t-1+3) = u(t+2)$

V) Proprietà della Derivata

$$x(t) * h(t) = y(t) \text{ Derivata} \rightarrow \frac{d\,y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \underbrace{x(t) \frac{d}{dt} h(t)}_{①} = \underbrace{\frac{d\,x(t)}{dt} \cdot h(t)}_{②}$$

Due Opzioni

ESEMPIO 1: $y(t) = r(t) * u(t)$

$$\frac{d\,y(t)}{dt} \underset{①}{=} r(t) * \frac{d}{dt} u(t) \rightarrow r(t) * \delta(t) \underset{\text{Proprietà IV}}{=} r(t) \quad \frac{d}{dt} y(t)$$

$$\frac{d\,y(t)}{dt} \underset{②}{=} \frac{d}{dt} r(t) * u(t) = \underbrace{u(t) * u(t) = r(t)}_{ⓐ}$$

Spiegato dalla proprietà 6

VI Proprietà: L'integrale della derivata del segnale è il segnale stesso

$$\int \frac{d}{dt}\left(y(t)\right) dt = y(t)$$

$$\longrightarrow \underbrace{y(t)}_{\text{Output}} = \underbrace{x(t)}_{\text{Input}} * \underbrace{u(t)}_{h(t)} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Proof: $y(t) = x(t) * u(t)$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} y(t) = x(t) * \underbrace{\frac{d}{dt} u(t)}_{\delta(t)} = x(t) * \delta(t)$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau} y(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) * \delta(\tau)\, d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Proof

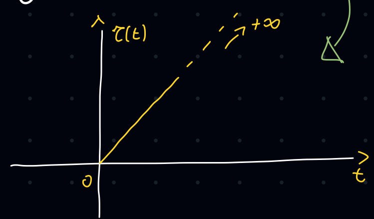
Esempio 1: $y(t) = r(t) * u(t)$

$$= \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{t} t\, dt = \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$$

$\delta(t) \neq 0$ per $t \geq 0$

Esempio 2: otteniamo ⓐ ↑

$$\rightarrow u(t) * u(t) = r(t) \Rightarrow u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{t} dt = t = r(t)$$



VIII: Proprietà dell'invarianza temporale

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow[\text{Time delay}]{} \boxed{x_1(t-t_1) * x(t-t_2) = y[t-(t_1+t_2)]}$$

Esempio 1:

$u(t-1) * u(t-2)$ = Sappiamo che $u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau = r(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t-1) * u(t-2) = r[t-(1+2)] = \underline{r(t-3)}$$

Esempio 2:

$$r(t+2) * u(t-3) = r(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\,d\tau + \int_{0}^{t} \tau\,d\tau = \frac{t^2}{2} = \rho(t)$$

$$\Rightarrow r(t+2) * u(t-3) = \rho[t(2-3)] = \rho(t-1)$$

$$\rightarrow \rho(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{t^2+1-2t}{2} = \frac{t^2-2t}{2} + \frac{1}{2}$$

IX: Proprietà del Time Scaling (cambiamento di Scala)

$x_1(t) * x_2(t) = y(t)$

$\downarrow$ Time scaling di a $\downarrow$ Time scaling di a

$$\boxed{x_1(at) * x_2(at) = \frac{1}{|a|} \cdot y(at) \quad \text{con } a \neq 0}$$

Esempio 1:

$(t^2+t) * t = y(t) \quad \rightarrow$ Se $y(t) = \frac{1}{3} y(3t)$, quali saranno i segnali $x(t)$ e $h(t)$?

da $y(t)$ sappiamo che $a = 3 \Rightarrow x_1(3t) * x_2(3t)$

$\nearrow x_1(t) = t^2+t \Rightarrow \underline{x(3t) = 9t^2+3t}$

$\searrow x_2(t) = h(t) = t \Rightarrow \underline{h(3t) = 3t}$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{3} y(3t) = (9t^2+3t) * 3t}$$

Sistemi ARMA

Auto
Regressing
Moving
Average

$$\int_0^t a_\tau\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t b_\tau\, x(t-\tau)\, d\tau$$

→ hanno una particolare relazione IN/OUT del tipo:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k)}_{AR} = \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} b_n \cdot x(n-m)}_{MA}$$

Se poniamo: $N=0$, $M>1$ ⇒ h è dato da: (MA)

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_m}{a} & m = 0,1,\dots,M-1 \\ \emptyset & \text{otherw.} \end{cases}$$

⇒ M A. Perché è una "Media Mobile"

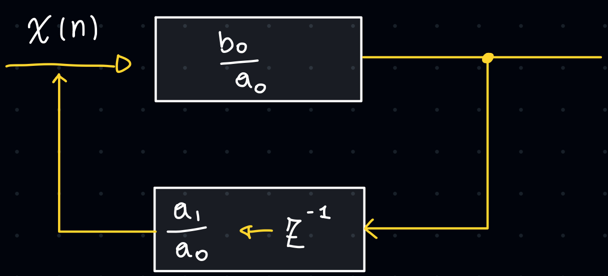
Se poniamo $M=1$, $b_0 \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = b_0\, x(n)$$

Se poniamo: $N=1$ (AR)

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n) \to \cancel{a_0}\ y(n) = \frac{b_0}{a_0} x(n) - \frac{a_1}{a_0} y(n-1)$$

Stiamo scrivendo l'uscita corrente proprio attraverso l'uscita precedente!
E' come se fosse un sistema con memoria o in CONTROREAZIONE:



Se poniamo $N=1$, $M=2$

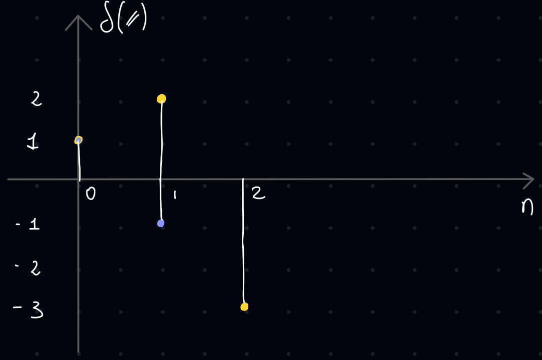
→ $a_0 y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$ → ci ricaviamo $\overset{\text{OUTPUT}}{y(n)}$ →

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0} x(n) + \frac{b_1}{a_0} x(n-1)}_{\text{2 INPUT}} - \frac{a_1}{a_0} y(n-1)$$

componente AUTOREGRESSIVA

ESEMPIO CONVOLUZIONE NUMERICO (non grafico)

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - 3\delta(n-2) \quad , \quad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$



0 1 2 3

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{-3}$ $x(k)$

$\boxed{1}\ \boxed{-1}$ $h(k)$

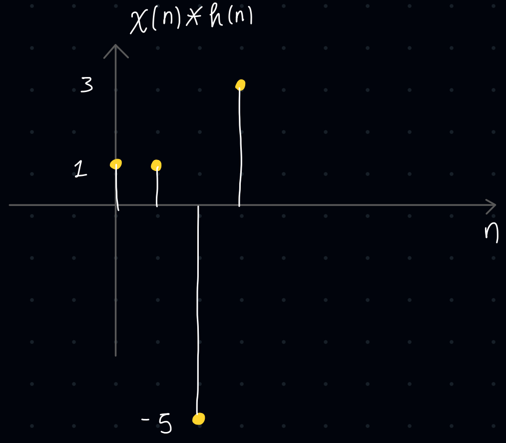
$\boxed{-1}\ \boxed{1}$ $h(-k)$

$\boxed{-1}\ \boxed{1}$ $y(0) = \underline{1}$

$\boxed{-1}\ \boxed{1}$ $y(1) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 = \underline{1}$

$\boxed{-1}\ \boxed{1}$ $y(2) = 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 1 = -2-3 = \underline{-5}$

$\boxed{-1}\ \boxed{1}$ $y(3) = -3\cdot(-1) = \underline{3}$



$$y(n) = x(n) * h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) - 5\delta(n-2) + 3\delta(n-3)$$

Risultato "grafico"

Sfruttiamo le proprieta' della delta

$$\Rightarrow y(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - 3\delta(n-2) * \delta(n) - \delta(n-1)$$

prop. Distrib.

$$= \delta(n)*\delta(n) + \delta(n) * -\delta(n-1) + 2\delta(n-1)*\delta(n) + 2\delta(n-1) * -\delta(n-1) - 3\delta(n-2)*\delta(n) - 3\delta(n-2) * -\delta(n-1)$$

Ignoriamo i segni

$$= \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-1) + 2\delta[n(-1+-1)] + 3\delta(n-2) - 3\delta[n(-2-1)]$$

$$= \delta(n) + \underline{\delta(n-1)} + \underline{2\delta(n-1)} + \underline{2\delta(n-2)} + \underline{3\delta(n-2)} - 3\delta(n-3)$$

$$= \delta(n) + 3\delta(n-1) + 5\delta(n-2) - 3\delta(n-3)$$

Risultato "matematico"

ES: Convoluzione tra due Array:

$x(n) = [1, 2, 3]$, $h(m) = [4, 5, 6]$

$\Rightarrow x(n) * h(n) = [1, 2, 3]$ $= y(N+M-1)[\dots]$

$[6, 5, 4]$

$[6, 5, 4]$

$[6, 5, 4]$

$[6, 5, 4]$

$[6, 5, 4]$

$y(0) = 4$

$y(1) = 5 + 8 = 13$

$y(2) = 6 + 10 + 12 = 28$

$y(3) = 12 + 15 = 27$

$y(4) = 18$

$\Rightarrow y(k) = [4, 13, 28, 27, 18]$