Teoria della probabilità

Teoria della probabilità

Nomenclatura

w: La singola esecuzione di un esperimento viene detta "prova"; ad ogni prova corrisponde un risultato w.

Ω: "Omega" è un insieme che contiene tutti i possibili risultati; viene anche detto spazio dei campioni.

E, "EVENTO": è un sottoinsieme di Ω. Un evento è VERIFICATO quando l'uscita sperimentale appartiene all'evento

$E_1 \{1, 3\}$

uscite sperimentali

Se lanciando un dado esce 3, allora l'evento E_1 è verificato, mentre se esce 4 NO.

$w_1 = \{1\}$
$w_2 = \{2\}$
$\vdots$

gli eventi che contengono una sola uscita sperimentale sono detti Eventi Elementari

Spazio degli eventi

Lo spazio degli eventi è chiuso alle operazioni di:

- COMPLEMENTO: $E_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{E} \in \mathcal{E}$
- UNIONE: $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ Le due operazioni ne implicano altre

- INTERSEZIONE: $\underbrace{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}_{\text{dalle leggi di De Morgan}} \Rightarrow A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
- SOTTRAZIONE: $A - B = A \cap \bar{B}$

Assiomi di Kolmogorov

1) Non Negatività

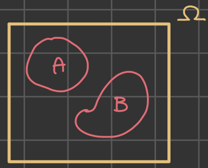
La probabilità si applica sugli eventi, quindi quando si dice "calcola la probabilità di qualcosa" si intende la probabilità di un evento.
La Non Neg. ci dice che se prendiamo un qualunque evento, allora la probabilità di A deve essere SEMPRE maggiore uguale a zero.

- $A \in \mathcal{E} \longrightarrow P(A) \geq 0$

2) Normalizzazione

La probabilità di Ω (Spazio Campione) è UNO.

- $P(\Omega) = 1$



3) Additività

Se A e B sono due eventi, e se $A \cap B = \varnothing$ (disgiunti), allora la probabilità di $A \cup B$ è la prob di A più quella di B.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Per eventi Mutuamente esclusivi

4) Numerabile Additività

E' un'estenzione nel caso lo spazio campione A NON SIA FINITO.
In questo caso ci dice che:

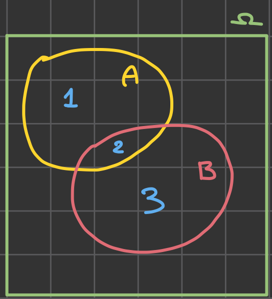
Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ e sono "a due a due disgiunti"

$A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$

Allora $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ Vera anche per $n \to \infty$

Altre formule

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Perché $P(\Omega) = 1$, $\Omega = A \cup \bar{A} \Rightarrow P(\bar{A}) = \overset{1}{P(\Omega)} - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}_{\text{Perché?}} \leq P(A) + P(B)$



$A \cup B$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Ma contiamo 2 volte $A \cap B$

$\Rightarrow \quad \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

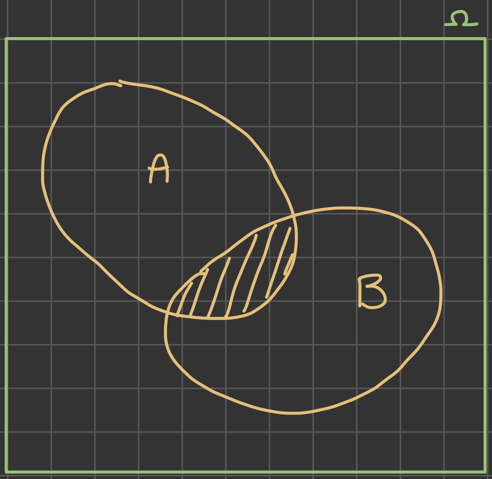
Probabilita' Condizionata ed Indipendenza

Due eventi sono Indipendenti se essi non si "influenzano", ovvero se:

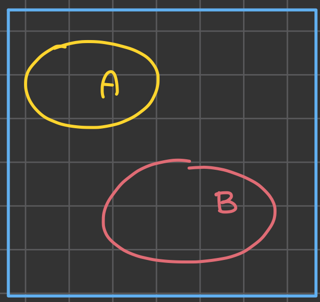
Concetto di indipendenza

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ↑ Indipendenti

*Due eventi mutuamente esclusivi con $P>0$ sono sempre correlati.



$A \cap B$



$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ M.E

$\Rightarrow P(A), P(B) > 0$

$\Rightarrow A \cap B =$

Eventi Mutuamente Esclusivi

Sono degli eventi che non possono accadere allo stesso momento. Ragioniamo con un esempio: lancio di un dado a 6 facce:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{5,6\}$ $\quad C = \{3,4,5\}$

A e B sono M.E.? SI

$\rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(AB) = P(A \text{ AND } B) = 0$ ← zero

↑ insieme vuoto $\qquad (\varnothing \neq 0)$

A e C sono M.E.? NO

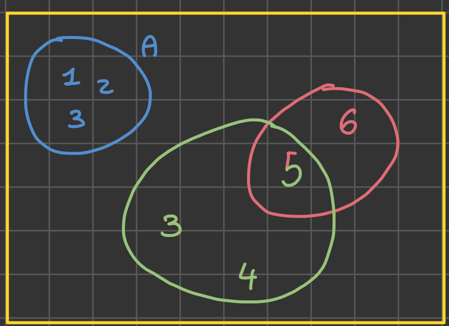
$A \cap C = \{3\} \Rightarrow P(AC) = P(A \text{ AND } C) = \dfrac{\|\{3\}\|}{\|\Omega\|} = 1/6$ NON M.E.

B e C sono M.E.?

$B \cap C = \{5\} \Rightarrow P(B \text{ AND } C) = \frac{1}{6} \neq 0 \Rightarrow$ NON M.E.

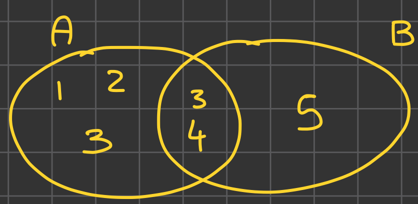
$\Rightarrow$ Come capire se due eventi sono M.E.?

Basta trovare la probabilita' dei due eventi: se $P(AB)$ e' qualsiasi cosa oltre che zero, allora sono M.E.



Altro Esempio: Dado

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5\}$



$\Rightarrow P(A \cup B) = \underset{P(\{1,2,3\})}{P(A)} + \underset{P(\{3,4,5\})}{P(B)} - \underset{P(\{3,4\})}{P(A \cap B)} \overset{!}{=} 5/6$

$\rightarrow$ Infatti $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ 5 casi favorevoli su 6

Probabilità condizionata

Iniziamo con un esempio: lanciamo un dado a 6 facce:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,4,5\}$

$P(A/B)$ = "Prob. di A dato B" = "prob. che accada A dopo che è accaduto b"

- Metodo veloce: $\dfrac{\text{"Elementi di A che sono in B"}}{\text{"Elementi di B"}}$

  → Rispondere alla domanda "quanto di A è presente in B?"

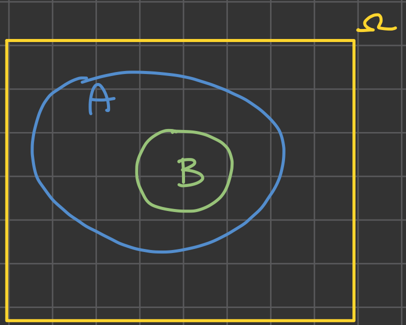
- Formula: $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

$\Rightarrow \quad A\cap B = \{3,5\} \Rightarrow P(A\cap B) = 2/6 \Rightarrow P(A/B) = \dfrac{2/6}{3/6} = 2/3$

Intuitivamente abbiamo che:

1) $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1$ con $B \subseteq A$

Perchè:



Se $A \subseteq B$ vuol dire che se si verifica B, si verifica anche A.

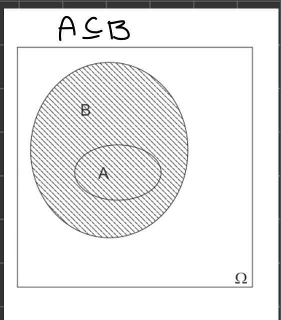
Lancio un dado: $\Omega = \{1,2 \dots 6\}$

$B = \{2,3\}$, $A = \{1,2,3,5\}$

$P(A/B) = \dfrac{\cancel{2}/\cancel{6}}{\cancel{2}/\cancel{6}} = 1$

Anche intuitivamente si capisce che se accade B prima di A, e $A \subseteq B \Rightarrow P(A) = 1$

2) $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} > P(A)$ se $A \subseteq B$



Che vuol dire?

Se $A \subseteq B$ ed accade B allora la probabilità di A condizionata a B non deve diminuire:

$\Omega = \{1,2,\dots,6\}$ $\quad A = \{2\}$ $\quad B = \{1,2,3\}$

$\Rightarrow P(B) = 3/6 = \frac{1}{2} \qquad P(A) = 1/6 \qquad \Rightarrow P(A/B) = \dfrac{1/6}{3/6} = 1/3$

$\Rightarrow \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1/3}{1} = 1/3 \Rightarrow \dfrac{P(A)}{P(B)} > P(A)$

3) $P(A/B) = 0$ se $A \cap B = \emptyset$

Spiegazione: Se A e B sono Mutuamente esclusivi, allora la prob. Cond sia di A/B che B/A è nulla; come abbiamo visto prima se due eventi non si intersecano, allora se si verifica un evento, SICURAMENTE NON SI VERIFICA L'ALTRO.

Legge della probabilità COMPOSTA / CONGIUNTA

Congiunzione di eventi

$$\Rightarrow \underline{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

ovvero $P(A \cap B)$ è uguale alla prob incondizionata di uno per la probabilità condizionata dell'altro.

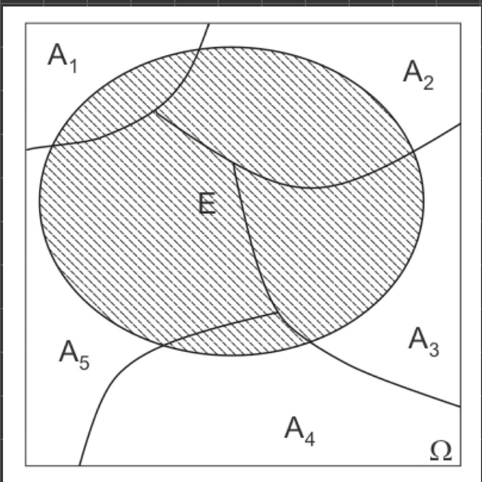
Legge di Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B/A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \underline{P(B) \cdot P(A/B)} = \cancel{P(B)} \cdot \frac{P(A)}{\cancel{P(B)}} \cdot P(B/A) = \underline{P(A) \cdot P(B/A)}$$

$\Rightarrow$ La legge permette di scambiare $P(A)$ con $P(B)$ e $P(A/B)$ con $P(B/A)$

Legge della probabilità totale



Consideriamo una Partizione $\{A_n\}$ FINITA di Ω costituita da eventi a prob. NON NULLA.

Siccome gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ vanno a partizionare Ω (ed E che è un EVENTO CERTO), Sono A due a due mutuamente esclusivi e la loro unione ci da proprio Ω.

Osserviamo che:

$$E = \underbrace{E \cap \Omega}_{1} = \underbrace{E \cap \bigcup_{n=I} A_n}_{2} = \underbrace{\bigcup_{n=I} E \cap A_n}_{3}$$

1) E è uguale all'intersezione di E con Ω, proprio perchè $E \subseteq \Omega$.

2) Essendo che $E = E \cap \Omega$ ed Ω = "Unione di tutti gli eventi in partizione" possiamo scrivere: $E = E \cap \bigcup_{n \in I} A_n$ dove $n \in I$ con I = insieme di numeri naturali;
dove $\text{Max}(I) = \|A_1, A_2 \dots A_n\| \Rightarrow \|I\| = \|n\|$

Tabella 2.6

Leggi fondamentali.

Legge della probabilità composta	$P(A \cap B) = P(A)P(B\|A) = P(B)P(A\|B)$
Legge di Bayes	$P(A\|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} P(B\|A)$
Legge della probabilità totale	$P(E) = \sum_{n \in I} P(A_n)P(E\|A_n)$
	$\{A_n\}$ partizione discreta di Ω
Legge di Bayes seconda formulazione	$P(A_n\|E) = \dfrac{P(A_n)P(E\|A_n)}{\sum_{n \in I} P(EA_n)}, \quad \forall n \in I$

LEGGI FONDAMENTALI

- $\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{3}a^2 - a^2b + \frac{1}{2}a^2b = \cancel{a^2b\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3}a^2$

- $3xy - \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}xz + x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{3}{5}xz + \frac{3}{2}xy - \frac{3}{4}x^2$

$$xy\left(3+\frac{3}{2}\right) + x\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + xz\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right) + \cancel{x^2\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)}$$

$$xy\left(\frac{9}{2}\right) + x\left(-\frac{1}{6}\right) + xz\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{9}{2}xy - \frac{1}{6}x + \frac{1}{5}xz$$

$$-\left(\frac{5}{7}x^2y^2 - \frac{2}{5}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y^3$$

$$-\frac{5}{7}x^2y^2 + \frac{2}{5}x^3y^3 \cancel{- \frac{1}{2}x^2y^2} + \frac{3}{2}x^2y^2 \cancel{+ \frac{1}{2}x^2y^2} - x^3y^3$$

$$= (xy)^2\left(-\frac{5}{7} + \frac{3}{2}\right) + (xy)^3\left(\frac{2}{5} - 1\right) \rightarrow \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$= (xy)^2\left(-\frac{5}{7} + \frac{3}{2} - \frac{3}{5}xy\right)$$

$$\frac{-10+21}{14} = \frac{11}{14}$$

$$= (xy)^2 \cdot \left(\frac{11}{14} - \frac{3}{5}xy\right) = \frac{11}{14}x^2y^2 - \frac{3}{5}x^3y^3$$

$$= x^2 \cdot \left(\frac{11}{14}y^2 - \frac{3}{5}xy^3\right)$$

$$= y^2 \cdot \left(\frac{11}{14}x^2 - \frac{3}{5}x^3y\right)$$