EX. 3

Il segnale $x(t)$ avente funzione di autocorrelazione

$$r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$$

viene filtrato mediante il sistema caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$.

Calcolare

1. la densità spettrale di energia del segnale $y(t)$ in uscita al sistema;
2. l'energia di $y(t)$.

$r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$ $\qquad y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$ $\qquad S_y(f) = ?$

Sappiamo che $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$ ① $\Rightarrow$ Possiamo usare l'uguaglianza ② per trovare $S_x(f)$ e poi sfruttare la ① per trovare $S_y(f)$

uguaglianza ②: $r_{xy}(t) \rightleftharpoons S_{xy}(f) \Rightarrow r_x(t) \rightleftharpoons S_x(f)$

Passo 1: Trovare $S_x(f)$:

sappiamo che: $e^{-a|t|} \rightleftharpoons \dfrac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

$$\Rightarrow r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|} \rightleftharpoons \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3^2 + (2\pi f)^2} = \frac{12}{9 + (2\pi f)^2} \quad S_x(f)$$

Passo 2A: Trovare $H(f)$

$\rightarrow$ Per definizione $h(t)$ è la risposta del sistema ad un impulso:

$$\Rightarrow \delta(t) \longrightarrow \boxed{Sys} \longrightarrow h(t) \quad \Rightarrow y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)\Big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t-2)$$

Passo 2B: Trasformare $h(t) \rightleftharpoons H(f)$

$\rightarrow$ Sappiamo che $\begin{cases} A\delta(t) \rightleftharpoons A \\ x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f)\, e^{-j2\pi f T_0} \end{cases}$

$$\Rightarrow H(f) = 2 + 3e^{-j4\pi f}$$

Passo 3: Trovare $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

Prima dobbiamo calcolare $|H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f)$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \left[2 + 3e^{-j4\pi f}\right] \cdot \left[2 + 3e^{j4\pi f}\right] = 4 + 6e^{j4\pi f} + 6e^{-j4\pi f} + 9$$

$$= 13 + 6\left[2\cos(4\pi f)\right] = 13 + 12\cos(4\pi f) \quad |H(f)|^2$$

$$\rightarrow S_y(f) = \left[13 + 12\cos(4\pi f)\right] \cdot \frac{12}{9 + (2\pi f)^2} = \frac{156}{9 + (2\pi f)^2} + \frac{144\cos(4\pi f)}{9 + (2\pi f)^2} \quad S_y(f)$$

Time 15'

Q_2: $\mathcal{E}_y = ?$ sappiamo che $\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df$

Tutto Troppo lungo!

$\rightarrow$ Ma sappiamo che $\overset{③}{\mathcal{R}_y(0) = \mathcal{E}_y}$

La relazione ② funziona anche al contrario: $S_y(f) \rightleftharpoons \mathcal{R}_y(t)$

$\rightarrow$ Dobbiamo trasformare: $\underbrace{\frac{156}{9+(2\pi f)^2}}_{a} + \underbrace{\frac{144\cos(4\pi f)}{9+(2\pi f)^2}}_{b}$

a) Ci ricordiamo la Trasformata del passo 1:

$$\frac{12}{9+(2\pi f)^2} \rightleftharpoons 2e^{-3|t|} \Rightarrow \overbrace{13\cdot\frac{12}{9+(2\pi f)^2}}^{156} \rightleftharpoons 13\cdot 2e^{-3|t|} = \underbrace{26e^{-3|t|}}_{a}$$

b) Vedo un coseno $\Rightarrow$ Proprieta' di modulazione

$$S(t) = \frac{144}{9+(2\pi f)^2}\cdot\cos(4\pi f)$$

$\rightarrow$ sappiamo che $2x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\varphi_0) \rightleftharpoons X(f-f_c)e^{j\varphi_0} + X(f+f_c)e^{j\varphi_0}$

$\rightarrow$ riscriviamo $S(t)$ come $\underset{A}{6}\cdot\underbrace{2\cdot\frac{12}{9+(2\pi f)^2}}_{2\cdot x(t)}$ $\Rightarrow x(t) \rightleftharpoons 2e^{-3|t|}$, $\varphi_0 = 0$, $f_c = 2$

$$\Rightarrow \frac{144}{9+(2\pi f)^2}\cdot\cos(4\pi f) \rightleftharpoons 6\cdot\left[2e^{-3|t-2|} + 2e^{-3|t+2|}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_y(t) = 26e^{-3|t|} + 12e^{-3|t-2|} + 12e^{-3|t+2|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_y = \mathcal{R}_y(0) = 26 + 12e^{-3|-2|} + 12e^{-3|2|} = \underbrace{26.059}_{\mathcal{E}_y}$$

Time 30'