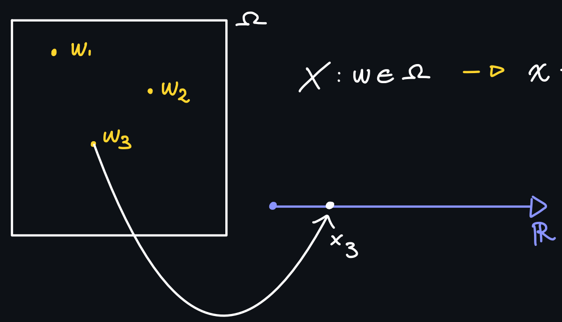
Recap Variabile Aleatoria



$X : w \in \Omega \rightarrow x = X(w) \in \mathbb{R}$

Variabili Aleatorie
- Continue → L'alfabeto della variabile è CONTINUO
- Discrete → L'alfabeto è Discreto Finito/Numerabile

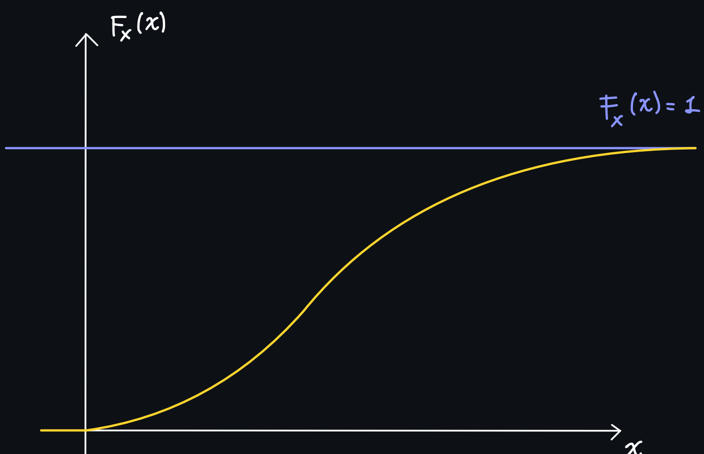
CDF

$$F_X \cdot \underbrace{x \in \mathbb{R}} \rightarrow F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

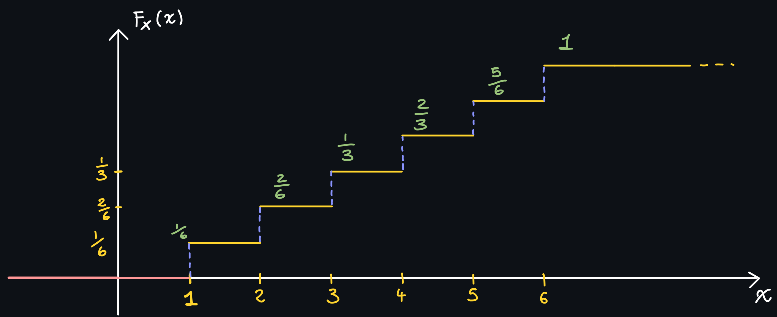
Non consideriamo più lo spazio dei campioni!

La CDF è una Probabilità!

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$



CDF Continua → V.A. Continua



CDF Continua A tratti → V.A. Discreta

PMF - Probability Mass Function

$$x \in \mathcal{A}_X \longrightarrow p_X(x) = \underbrace{P(\{X = x\})}$$

Alfabeto di x $\subseteq \mathbb{R}$

Definita come la prob. che la variabile aleatoria assuma il valore di x

1. $p_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}_X$

2. $\sum_{x \in \mathcal{A}_X} p_X(x) = 1$

Calcolare un evento specifico:

$$P(\{x \in A\}) = \sum_{x \in \mathcal{A}_X \cap A} p_X(x)$$

Intersezione tra Alfabeto ed evento A

Come ricavare la CDF dalla PMF?

$$F_X(x) = \sum_{\nu \in \mathcal{A}_X : \nu \leq x} p_X(x)$$

Prendiamo solo i valori ν minori o uguali ad x

PDF: Funzione di densita' di probabilita'

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

CDF

Istanti di arrivo del viaggiatore

Variabile Aleatoria —▷ PDF
Secondi $s^{-1} = 1/s$

Esempio: Temperatura di una stanza

$17° < temp < 25°$

—▷ Qual'e la probabilita' che la Temperatura sia di 20,1 C° ?
Ammesso di definire una V.A. Continua su questi valori, quanti "Slot" abbiamo tra 17° e 21,5° ?

—▷ Infiniti

Approccio frequentistico

$$\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi totali}} = \frac{1}{\infty} = \emptyset$$

Integriamo la funzione (PDF)

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{d F_X(x)}{dx}\, dx = \Big[F_X(x) \Big]_{-\infty}^{x} = F_X(x) - F_X(-\infty) = F_X(x)$$

$F_X(-\infty) \rightarrow \emptyset$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{F_X(x)}_{\text{CDF}} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(x)}_{\text{PDF}}\, dx}$$

Proprieta' della PDF

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Dimostrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} F_X(x)\,dx = \overbrace{F_X(+\infty)}^{1} - \overbrace{F_X(+\infty)}^{0} = 1$$

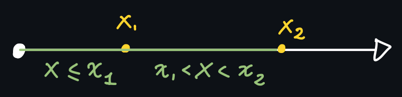
- Se $$P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

Equivale a dire che se conosco la CDF e devo calcolare la probabilita' che la variabile aleatoria appartenga ad un intervallo, ci basta prendere il valore della CDF valutata nell'estremo superiore, lo sottraiamo alla $F_X(x_1)$ e troviamo la probabilita'.

Se si conosce la PDF ci basta calcolare l'integrale esteso a (x_1, x_2)

Dimostrazione

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x < X \leq x_2\}$$



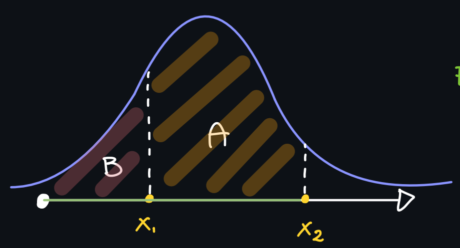
Calcoliamo le probabilita':

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \underbrace{\overset{CDF}{P(\{X \leq x_2\})}}_{F_X(x_2)} = \underbrace{\overset{CDF}{P(X \leq x_1)}}_{F_X(x_1)} + P(\{x_1 < X \leq x_2\})$$

$$\Rightarrow F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(\{x_1 < X \leq x_2\})$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1))}$$

$\rightarrow$ La CDF $F_X(x)$ e' $\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ $\rightarrow$ $P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx$



Fare $\int_{-\infty}^{x_2} f - \int_{-\infty}^{x_1} f$ owero $(A+B) - (B)$

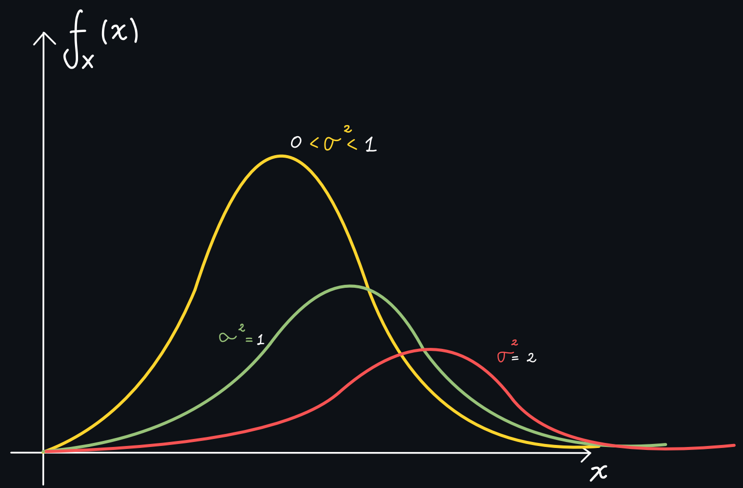
equivale a fare $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = A$

Variabile Aleatoria di Tipo Rayleigh

$$X \sim Ray(\sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x) \qquad u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

"gradino"



Calcoliamo la CDF della variabile Aleatoria di Rayleigh

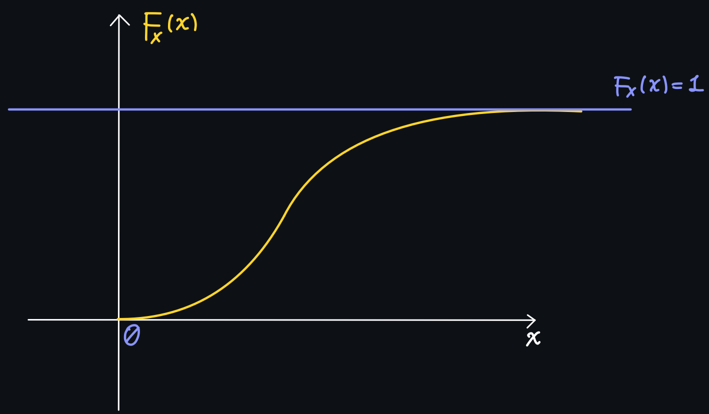
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(v)\,dv = \int_{-\infty}^{+x} \frac{v}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot u(v)\,dv$$

Pongo $S = -\frac{v^2}{2\sigma^2} \Rightarrow ds = -\frac{\cancel{2}v}{\cancel{2}\sigma^2}\,dv \Rightarrow \int_0^x \frac{\cancel{v}}{\cancel{\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma}} \cdot u(v) \cdot \frac{\cancel{\sigma^2}}{\cancel{v}}\,dv$

$$\Rightarrow -\int_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^S\,ds = -\left[e^S\right]_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 1$$

→ L'estremo cambia con la sostituzione

quindi $F_X^{CDF}(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x)$



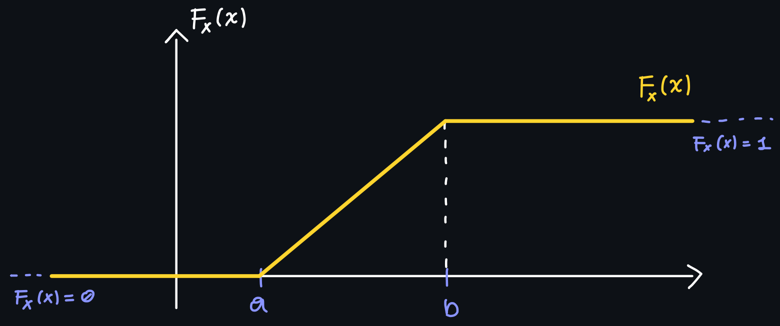
In (0,0) la $F_X(x)$ vale zero, e per $x \to +\infty$ vale 1, proprio come una CDF dovrebbe

Variabile Aleatoria Uniforme

$$X \sim U(a,b)$$

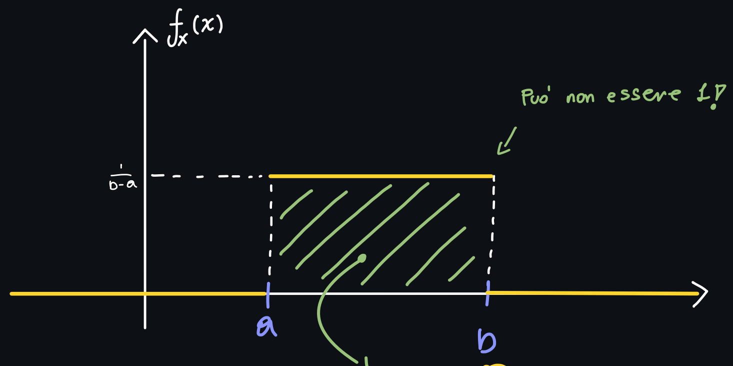
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

CDF di una variabile uniforme



$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x > b \\ 0 & x < a \end{cases}$$

PDF a partire da una V. A. uniforme



$$(b-a) \cdot \frac{1}{b-a} = 1 \checkmark$$

base · Altezza

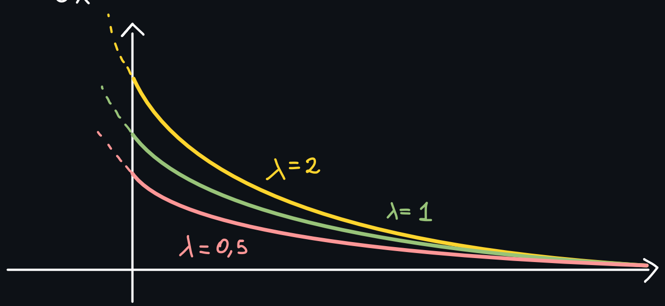
Variabile Aleatoria Esponenziale

$$X \sim \mathcal{E}_X(\lambda)$$

La sua PDF è del tipo:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$

Solo valori per $x > 0$



Calcolare la CDF dalla PDF

Limitiamo l'intervallo a dove non si annulla

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda v} \cdot u(v)\, dv = \int_{0}^{x} \lambda\, e^{-\lambda v} \cdot u(v)\, dv$$

→ Sostituzione → $s = -\lambda v \Rightarrow ds = -\lambda\, dv \Rightarrow -\int_{0}^{-\lambda x} e^{s}\, ds = \left[-e^{s}\right]_{0}^{-\lambda x} = \boxed{1 - e^{-\lambda x} \cdot u(x)}$

Nuovo Intervallo

Variabile Aleatoria Gaussiana (Standard)

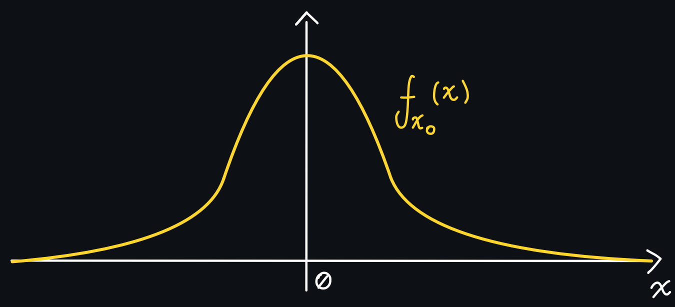
$$X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

La Gaussiana viene anche definita come Normal Distribution

Una Gaussiana Standard è definita quando ha la PDF come:

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PDF



Ricavare la CDF dalla PDF

$$F_{X_0}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$$

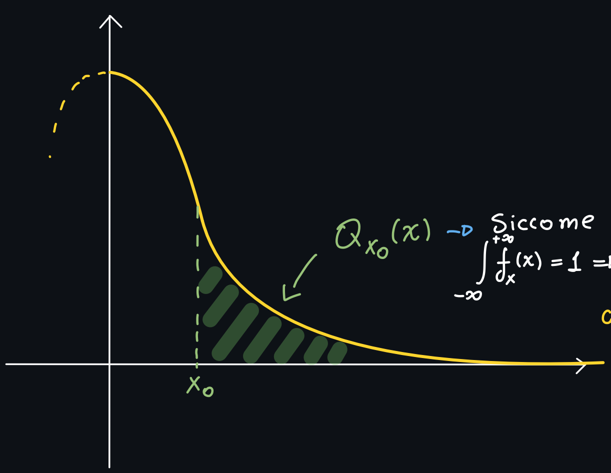
Non è esprimibile in forma chiusa

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = \boxed{1 - F_{X_0}(x)}$$

complementare

Stessa idea di $P(\bar{A}) = 1 - A$

Per via degli estremi di integrazione opposti rispetto alla definizione della CDF, è detta la COMPLEMENTARE della CDF



$Q_{X_0}(x) \rightarrow$ Siccome la $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow Q_{X_0} = 1 - F_X(x)$

complemento

Proprietà di $Q_{X_0}(x)$

- $Q(-\infty) = 1$
- $Q(+\infty) = 0$

Variabili Aleatorie Gaussiane Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

N "calligrafica" "mu" "Sigma"

Trasformazioni lineari della Gaussiana Standard

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

Parametro di Scala $\sigma > 0$

Parametro di Locazione

Definizione di CDF

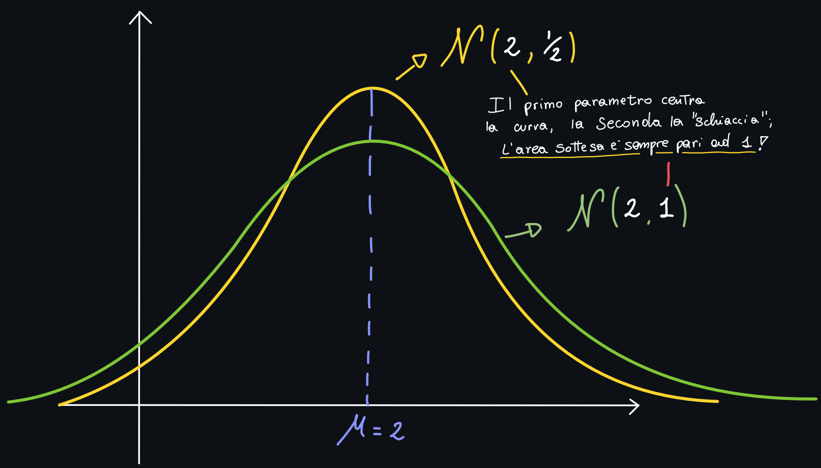
$F_X(x) = P(\{X \le x\})$

X grande x piccolo

$$\Rightarrow F_X(x) = P(\{\sigma X_0 + \mu \le x\}) = P\left(\left\{X_0 \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right)$$

E' la CDF di X_0 valutata in $\Rightarrow F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Variabile Aleatoria Gaussiana Standard



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744841	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3409029	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787863	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491699	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.1400710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313568	0.1292381	0.1271431	0.1250719	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1020423	0.1002725	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749336	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547992	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170030	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104440	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.0091374	$\boxed{0.0088940}$	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014889	0.0014412	0.0013948

Calcolare la Q-Function di

$Q(2.37)$