CARATTERIZZAZIONI SINTETICHE DEI SEGNALI

Caratterizzazione Sintetica

- MEDIA TEMPORALE
- ENERGIA E POTENZA

Media temporale in un intervallo

$x(t)$ —▷ Segnale continuo

$$\langle x(t) \rangle_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{(t_2-t_1)} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt$$

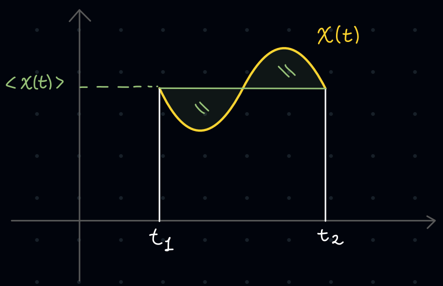
Media per segnali a tempo continuo

$x(n)$, $N_1 < n < N_2$ —▷

$$\langle x(n) \rangle_{(n_1,n_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

vedi ✳ ↓

Media per segnali Discreti ↓ Non è altro che la media Campionaria



← Se consideriamo un RETTANGOLO avente la stessa area sottesa del nostro segnale, otteniamo che la media Temporale non è altro che l'ALTEZZA del rettangolo.

⇒ La media Temporale rappresenta la coordinata dell'ordinata di un ipotetico rettangolo che ha la stessa area di quella sottesa al segnale.

MEDIA TEMPORALE (generale)

—▷ $$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau)\,dt$$

Media Temporale del segnale $x(t)$ (Continuo)

—▷ $$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

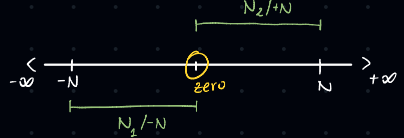
Media Temporale della sequenza $x(n)$ (Discreto)

⇒ La media generale è calcolata facendo tendere ad infinito l'intervallo su cui si calcola la media.

✳

Perché $2N+1$?

—▷ Semplicemente perché se si fa la Somma da $-N$ a $+N$ ($N_1 \to N_2$) i VALORI TOTALI saranno tutti i valori da $-N$ a $+N$ PIÙ il posto dello zero



Proprieta' della Media Temporale

I) Linearita'

Vale sia per continuo che discreto

Dati due valori (a_1, a_2) con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$ e dati due segnali $(x(\cdot)_1 , x(\cdot)_2)$

$$\Rightarrow \langle a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) \rangle = a_1 \langle x_1(\cdot) \rangle + a_2 \langle x_2(\cdot) \rangle$$

Proof: Segue dalla linearita' dell'integrale.

II) INVARIANZA TEMPORALE

Se calcolo la media Temp del segnale traslato di un fattore Δ, questa coincide con la media Temporale del segnale.

$$\rightarrow \langle x(t-\Delta) \rangle = \langle x(t) \rangle$$ Segnale Continuo

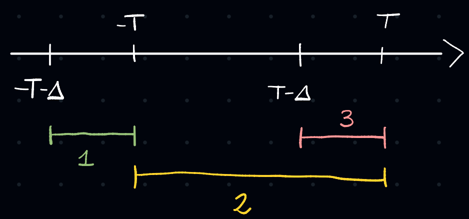
$$\rightarrow \langle x(n-m) \rangle = \langle x(n) \rangle$$ Segnale Discreto

Proof: Vogliamo dimostrare che $\langle x(t-\Delta) \rangle = \langle x(t) \rangle$

$$\Rightarrow \langle x(t-\Delta) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\Delta)\, dt = \frac{1}{2T} \int_{-T-\Delta}^{T-\Delta} x(\tau)\, d\tau$$

$\tau = t - \Delta \rightarrow$ per $t = -T \Rightarrow \tau = -T-\Delta$

per $t = T \Rightarrow \tau = T - \Delta$



$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[(1) + \left((2) - (3) \right) \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\cancel{\int_{-T-\Delta}^{T} x(\tau)\, d\tau} + \int_{-T}^{T} x(\tau)\, d\tau - \cancel{\int_{T-\Delta}^{T} x(\tau)\, d\tau} \right] =$$

Siccome $T\to\infty$ e $\Delta \ll \infty$, Δ e' Trascurabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, dt = \emptyset$$

$T \to +\infty$, $\Delta \ll \infty$

$$\Rightarrow \int_{\infty}^{+\infty} x(\tau)\, d\tau = \emptyset$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \langle x(t) \rangle$$ ✓

Media temp. di $x(t)$

ES: Media di una costante $A \rightarrow x(t) = A$ cost

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A\, dt = \frac{A}{2T} \int_{-T}^{T} dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{A}{2T} \left[t \right]_{-T}^{+T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{A}{\cancel{2T}} \cdot \cancel{2T} = A$$

$T - (-T) = 2T$

ES: $x(t) =$ Finestra rettangolare $\Rightarrow x(t) = A\Pi(t)$

$$\rightarrow \langle A\Pi(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A\Pi(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T} \int_{-T}^{T} \Pi(t)\, dt \Rightarrow \text{rect}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} 1\, dt$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T} \int_{-1/2}^{1/2} dt = \frac{A}{2T} \left[t \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{A}{2T} \cdot \underbrace{\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \right]}_{1} = \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T} \rightarrow \emptyset$$

ES: $x(n) = u(n)$ gradino discreto

$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \langle x(n) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} 1}_{N+1} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot N+1 = \frac{\cancel{N}(1+0)}{\cancel{N}(2+0)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

POTENZA Di un Segnale

→ La potenza è definita attraverso la MEDIA di un segnale

⇒ $P_x = \langle |x^2(\cdot)| \rangle$ Perché con il Modulo? I segnali possono essere reali e complessi;

$\begin{cases} \text{Se } x(\cdot) \in \mathbb{R} \to |x^2(\cdot)| = x^2(\cdot) \\ \text{Se } x(\cdot) \in \mathbb{C} \to |x^2(\cdot)| \neq x^2(\cdot) \, ! \end{cases}$

Ricorda il modulo

Per l'esame è importante saper Calcolare il modulo di un Segnale complesso.

Calcolare il modulo di un numero complesso Recap

$|z| = |a + ib| \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Perché è espressa in questo modo?

→ Corrisponde a fare la MEDIA, quindi una operazione integrale; è quindi anche detta POTENZA MEDIA o VALORE QUADRATICO MEDIO

Infatti: $\sqrt{\langle |x^2(\cdot)| \rangle}$ è detto Valore Root Mean Square

ES: $x(t) = \text{rect}(x) = \Pi(t)$

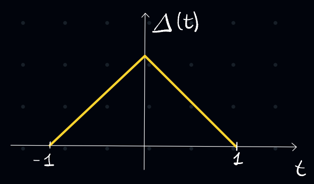
$$P_\Pi = \langle |x^2(t)| \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x^2(t)| \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \underbrace{\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right]}_{1}$$

Il modulo in questo caso non opera perché x è un segnale reale. In più è una f. particolare che vale 1 solo tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \to 0$$

Non è un caso

ES: Consideriamo $x(t) = \Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$



$$\to \langle |x^2(t)| \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Delta(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-1}^{1} (1 - |t|)^2 dt = \frac{1}{2T} \cdot 2 \int_0^1 (1 - t)^2 dt$$

Togliamo il Valore assoluto

$$= \lim_{T \to \infty} = \frac{1}{T} \int_0^1 1 + t^2 - 2t \, dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^1 dt + \int_0^1 t^2 - 2 \int_0^1 t \, dt \right)$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(1 + \frac{1}{3} - 1 \right) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} = 0$$

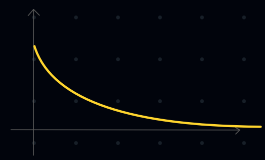
MORALE DELLA FAVOLA

$\rightarrow$ Se abbiamo una funzione limitata, come le finestre rett e Triang., il risultato del calcolo della potenza ci verrà sempre zero.

Questo vale anche per le funzioni che assumono valori non Trascurabili in un intervallo:

$\Rightarrow$ $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$ con $a > \emptyset$, $P_x = \emptyset$

Esponenziale Monolatero



Proof: $\langle |x^2(t)| \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-2at} \cdot u^2(t)\, dt$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{0}^{T} e^{-2at}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{-2a} \int_{0}^{-2aT} e^{\vartheta}\, d\vartheta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2a} \int_{-2aT}^{0} e^{\vartheta}\, d\vartheta$

$u(t)$

$\vartheta = -2a \rightarrow d\vartheta = -2a\,dt$
$\Rightarrow dt = -\frac{1}{2a} d\vartheta$

$\rightarrow t=0 \Rightarrow \vartheta = 0$
$\rightarrow t=T \Rightarrow \vartheta = -2aT$

Togliamo il "-" da $-\frac{1}{2a}$ invertendo gli estremi

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2a} \left[e^{\vartheta} \right]_{-2aT}^{0} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \left[e^{0} - e^{-2aT} \right] = \lim_{T\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2T}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2a}}_{\text{const}} \cdot (1 - \underbrace{e^{-2aT}}_{\to \emptyset})$

$= \emptyset$

ES: Ovviamente non tutti i segnali hanno potenza nulla:

$x(t) = A \Rightarrow P_x = \langle |x^2(t)| \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \frac{A^2}{\cancel{2T}} \cdot \cancel{2T}$

$= A^2$

ES: Potenza del gradino

$P_{u(t)} = \langle |x^2(t)| \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u^2(t)\, dt = \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1^2\, dt = \frac{1}{2T} \left[t \right]_0^T = \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$

- Notazione:

- $\langle x(\cdot) \rangle = x_{dc}$

- $x_{ac}(\cdot) = x(\cdot) - x_{dc}$ Componente Alternativa

media Temporale

Sarà a media nulla

ENERGIA del Segnale

- $$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$ Segnali continui

- $$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$ Segnali Discreti

Esempi: gli stessi dove la potenza veniva <u>zero</u>

ES: $x(t) = \Pi(t)$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, dt = 1$$

ES: $x(t) = \Lambda(t)$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Lambda(t)|^2 dt = \int_{-1}^{1} |1-|t||^2 \, dt = 2\int_0^1 (1-t)^2 dt = 2\int_0^1 dt + 2\int_0^1 t^2 dt - 4\int_0^1 t \, dt$$

$$= 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{2} = 2 + \frac{2}{3} - 2 = \frac{6+2-6}{3} = \frac{2}{3}$$

ES: $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-at} \cdot u(t))^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

- Perchè abbiamo visto questi esempi?

SEGNALI
- SEGNALI DI POTENZA (P_x FINITA e $\neq 0$ $\Rightarrow \mathcal{E}_x$ INFINITA)
- SEGNALI DI ENERGIA (<u>$P_x = 0$</u> $\Rightarrow \mathcal{E}_x$ Finita)

gli esempi visti sono di questo tipo

SEGNALI PERIODICI

Un segnale che si ripete con un periodo.
Questi segnali sono sicuramente di Potenza. La media temporale è calcolata:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt \quad \leftarrow \text{Continuo}$$

Se $x(t)$ è periodico di periodo T_0

I Segnali periodici sono sempre Segnali di potenza

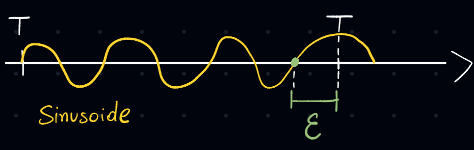
$P_x \neq 0$, $\mathcal{E}_x$ finita

$$\langle x(n) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n) \quad \leftarrow \text{Discreto}$$

Periodo L

Non è il periodo! Il periodo è T_0

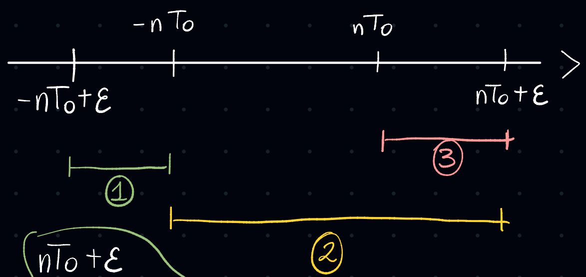
Proof: (continuo) $\Rightarrow$ $\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$



Intervallo $= 3T_0 + \varepsilon$

Siccome il segnale è periodico, lo Scriviamo come Tante volte il periodo (nT_0) più "quello che avanza" (ε)

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\underbrace{2(nT_0+\varepsilon)}_{T}} \int_{-nT_0+\varepsilon}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\, dt$$



$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2(nT_0+\varepsilon)} \left[\int_{-nT_0+\varepsilon}^{-nT_0} x(t)\,dt + \int_{-nT_0}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\, dt - \int_{nT_0}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\, dt \right]$$

per $N \to \infty$ $\to \emptyset$ $\qquad \to \emptyset$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2(nT_0+\varepsilon)} \int_{-nT_0}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2(nT_0+\varepsilon)} \cdot 2n \int_0^{T_0} x(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}(nT_0+\varepsilon)} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

Per la periodicità del segnale

$$= \int_0^{T_0} x(t)\,dt \; \lim_{n \to \infty} \frac{n}{nT_0+\varepsilon} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(T_0+0)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt \quad \text{CVD}$$

Per segnali periodici, la media temporale corrisponde al calcolo integrale sul periodo del segnale diviso il periodo stesso.

ES 1 Componente continua e potenza di un fasore

→ Segnale di Potenza ⇒ $P_x \neq 0$

$x(t) = A \cdot e^{jwt}$ Se $w = 0$, $x(t) = A$ Segnale costante

Se $w \neq 0$ → $x(t)$ è di periodo $\Delta = \frac{2\pi}{w}$

La componente continua è x_{dc}, ovvero la media Temporale di $x(t)$

$$\to X_{dc} = \langle A e^{jwt} \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt \to \frac{1}{\frac{2\pi}{w}}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} A e^{jwt}\,dt = \frac{Aw}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} e^{jwt}\,dt$$

$$= \frac{Aw}{2\pi}\left[\frac{e^{jwt}}{jw}\right]_0^{\frac{2\pi}{w}} = \frac{Aw}{2\pi}\left[\frac{e^{jw\cdot\frac{2\pi}{w}}}{jw} - \frac{e^{0}}{jw}\right] = \frac{Aw}{2\pi}\,\frac{e^{j2\pi} - 1}{2\pi}$$

esponenziale complesso

$$= \frac{\overset{1}{\cos(2\pi)} + j\overset{0}{\sin(2\pi)} - 1}{2\pi} = 0$$ media del fasore

(1) Coordinate Polari → Numeri Complessi

Potenza $P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \langle |A \cdot e^{jwt}|^2 \rangle$ = Il modulo quadro di un numero complesso è

$$|a + ib|^2 = re^2 + imm^2$$

$$\Rightarrow |A e^{jwt}|^2 = A^2 \to P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{w}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} A^2\,dt = \frac{A^2 w}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}} dt = \frac{A^2 \cancel{w}}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{w}} = A^2$$

Potenza del fasore

ES 2: Media Temporale e potenza di un segnale sinusoidale

Segnale di Potenza → $P_x = \frac{A^2}{2} \neq 0$

$x(t) = A \cdot \cos(wt + \varphi)$ con $w \neq 0$

$$= A\cos(wt + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j(wt+\varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(wt+\varphi)}$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{jwt} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-jwt}$$

La sinusoide può essere vista come la Somma di due fasori con Velocità opposte e la metà delle ampiezze.

MEDIA

$$\Rightarrow \langle A\cos(wt+\varphi) \rangle = \langle \underbrace{\frac{A}{2}}_{a_1} e^{j\varphi} e^{jwt} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{a_2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-jwt} \rangle = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot \underbrace{\langle e^{jwt} \rangle}_{0} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \underbrace{\langle e^{-jwt} \rangle}_{0} = 0$$

linearità della media

Media della Sinusoidale

POTENZA:

questa volta non usiamo le coordinate polari → NO num compl.

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \langle |A\cos(wt+\varphi)|^2 \rangle \overset{!}{=} \langle A^2 \cos^2(wt+\varphi) \rangle \to \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

Linearità della media

$$\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow \langle A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2wt + 2\varphi)\right) \rangle \overset{!}{=} \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\langle \cos(2wt+2\varphi) \rangle$$

→ Il coseno è un Segnale periodico ⇒ $\langle S.\ \text{Periodico} \rangle = 0$

$$\Rightarrow P_x = \frac{A^2}{2} + \cancel{\frac{A^2}{2}\langle \cos(\cdot) \rangle} = \frac{A^2}{2}$$ Potenza del segnale Sinusoidale

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\sin(t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,0 - 0 = 0}$$ Proof

Media di $\cos(t) = 0$