Segnali nel dominio della frequenza

Segnali Nel dominio della frequenza

I Sistemi - frequenza - T. Continuo

Fasore

$$e^{j2\pi f t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{j2\pi f t} e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau}_{H(f)}$$

Fasore in ingresso

$H(f) \Rightarrow$ Risposta in frequenza del Sistema

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2\pi f t} \cdot H(t)$$

INTEGRIAMO

f complessa

$$|H(f)| \cdot e^{j\angle H(f)}$$ Fase

$$\Rightarrow |H(f)| \cdot e^{j2\pi f t + \angle H(f)}$$

il Fasore in OUT è un fasore con fase ed Ampiezza diverse.

$$H(f) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$$

I Sistemi - Frequenza - T. Discreto

$$e^{j2\pi \nu n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

freq. Discreta : ν ("Ni")

$$y(n) = h(n) * e^{j2\pi \nu n}$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) \cdot e^{j2\pi \nu (n-K)}$$

$$= e^{j2\pi \nu n} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) \cdot e^{-j2\pi \nu K}$$

RISPOSTA DISCRETA IN FREQUENZA $H(\nu)$

Risp. in freq T. Discreto

$$\Rightarrow e^{j2\pi \nu n} \cdot H(\nu)$$

$$H(\nu) = \left.\frac{y(n)}{x(n)}\right|_{x(n) = e^{j2\pi \nu n}}$$

Se poniamo $\nu = 0$

$\Rightarrow$ Fasore $= e^{0} = 1 = \underline{\text{COST}}$

$$\Rightarrow \left.\sum_{K=-\infty}^{+\infty} H(K)\right|_{\nu=0} = \text{Guadagno in Continua}$$ (Vedi lez 3.1.3)

- $H(\nu+1) = H(\nu)$

$\rightarrow$ proof: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{-j2\pi(\nu+1)k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{-j2\pi\nu k}\, e^{-j2\pi k}$ $\rightarrow$ $\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \underbrace{j\sin(2\pi)}_{0} \rightarrow 1$ $\quad k \in N$

$\Rightarrow H(\nu+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n)\cdot e^{-j2\pi\nu k} \cdot 1 = \underline{H(\nu)}$

CVD

ESEMPIO 1) T. Disc.

Ritardo Elem.

$y(n) = x(n-1)$, $h(n) = ?$

Ans. Dobbiamo sollecitare il sys con un fasore del tipo: $x(n)\ e^{j2\pi\nu n}$

$\rightarrow y(n) = e^{j2\pi\nu(n-1)} = e^{j2\pi\nu}\cdot e^{-j2\pi\nu}$ $\Rightarrow \underset{x(n-1)}{y(n)} = \underset{e^{j2\pi\nu n}}{x(n)}\ H(\nu)$

Fasore iniziale $x(n)$ $\quad H(\nu)$

$\Rightarrow$ proof $H(\nu) = \dfrac{x(n-1)}{e^{j2\pi\nu n}} = \dfrac{e^{j2\pi\nu(n-1)}}{e^{j2\pi\nu n}} = \dfrac{\cancel{e^{j2\pi\nu n}}\cdot e^{-j2\pi\nu}}{\cancel{e^{j2\pi\nu n}}} \Rightarrow H(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$

ESEMPIO 1) T. Continuo

$y(t) = x(t-T)$, $h(t) = ?$

$\Rightarrow x(t) = e^{j2\pi f t} \longrightarrow \overset{h(t)}{\text{Sys}} \longrightarrow y(t) = e^{j2\pi f(t-T)} = \underset{x(t)}{e^{j2\pi f t}}\ \underset{H(f)}{e^{-j2\pi f T}}$

$\underbrace{y(t)}_{x(t-T)} = \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{x(t)}\ \underbrace{e^{-j2\pi f T}}_{H(f)} \rightarrow x(t-T) = x(t)\cdot H(f)$

$\Rightarrow$ proof $e^{j2\pi f(t-T)} = e^{j2\pi f t}\cdot H(f) \rightarrow H(f) = \dfrac{\cancel{e^{j2\pi f t}}\ e^{-j2\pi f T}}{\cancel{e^{j2\pi f t}}} \Rightarrow H(f) = e^{-2\pi f T}$

ESEMPIO 2: SISTEMA ARMA: $y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k)}_{\text{Auto Regressivo}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} b_m \cdot x(n-m)}_{\text{Moving average}}$

$x(n) = e^{j2\pi\nu n}$

$$x(n) \longrightarrow \text{sys} \longrightarrow \underbrace{y(n) = e^{j2\pi\nu n} \cdot H(\nu)}_{\text{Definizione}}$$

$$\rightarrow e^{j2\pi\nu n} \cdot H(\nu) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{j2\pi\nu(n-k)} H(\nu) + \sum_{m=0}^{M-1} b_m \cdot e^{j2\pi\nu(n-m)}$$

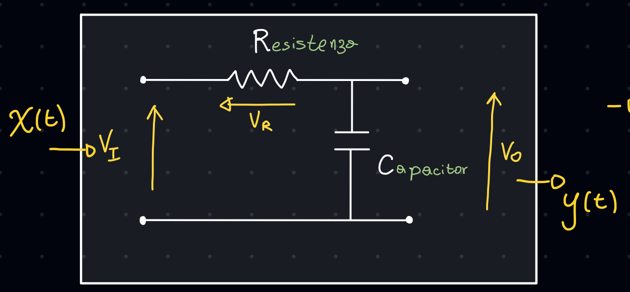
$$\cancel{e^{j2\pi\nu n}} \cdot H(\nu) = H(\nu) \cdot \cancel{e^{j2\pi\nu n}} \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{-j2\pi\nu k} + \cancel{e^{j2\pi\nu n}} \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m}$$

$$H(\nu) = H(\nu) \cdot \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k} + \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m} = H(\nu) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k} \cdot H(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m}$$

$$\rightarrow H(\nu)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k}\right) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m} \Rightarrow H(\nu) = \frac{\overbrace{\sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m}}^{MA}}{\underbrace{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k}}_{AR}}$$

ESEMPIO 3: FILTRO RC (Resistenza - Capacita')

└ Separa i segnali → Limita banda e freq

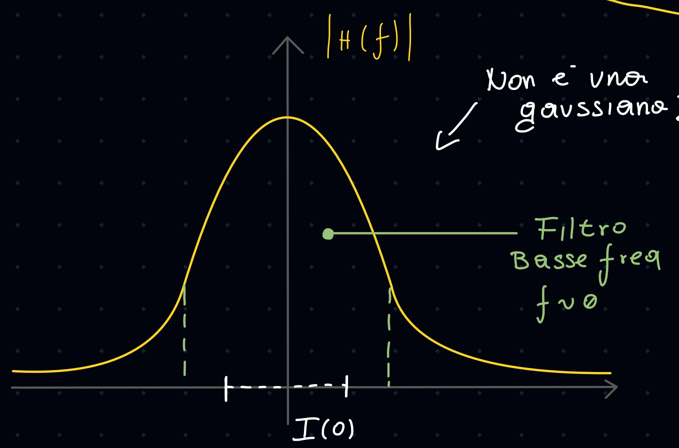


$$\rightarrow V_I - \underbrace{V_R}_{iR \,\to\, C\frac{d}{dt}V_0} - V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) - RC\frac{d}{dt}y(t) = y(t) \quad (1)$$

→ Applichiamo un fasore $x(t) = e^{j2\pi f t} \rightarrow \text{Sys} \xrightarrow{h(t)} y(t)$

$$\rightarrow y(t) = e^{j2\pi f t} \cdot H(f) \Rightarrow \cancel{e^{j2\pi f t}} - RC\, j2\pi f t\, \cancel{e^{j2\pi f t}} \cdot H(f) = \cancel{e^{j2\pi f t}} \cdot H(f)$$

$$\rightarrow H(f)(1 + j2\pi f t\, RC) = 1 \rightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f t\, RC}$$



$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

Se poniamo $f = f_c \Rightarrow H(f) = \frac{1}{1+j}$

$$\Rightarrow |H(c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{In Decibel}} 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\,dB$$

RISPOSTA IN REGIME SINUSOIDALE

Immaginiamo di avere un Sistema reale e di sollecitarlo in input con un Segnale Sinusoidale del tipo:

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x) \underset{\text{Formule di Eulero}}{=} \frac{A_x}{2}\left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_x)}\right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{A_x}{2} e^{j\varphi_x}}_{a_1} \cdot \underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{x_1(t)} + \underbrace{\frac{A_x}{2} e^{-j\varphi_x}}_{a_2}}_{\text{Non dipendono da } t \Rightarrow \text{Costanti}} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi f_0 t}}_{x_2(t)} = \text{Per la linearità...}$$

Siccome x_1 ed x_2 Sono dei fasori

$$y(t) = H(f_0) \cdot \underset{\text{Fasore}}{x_n(t)}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

uscite ad $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$$= a_1 H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} + a_2 H(f_0) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \frac{A_x}{2} e^{j\varphi_x} \cdot H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_x}{2} e^{-j\varphi_x} \cdot H(f_0) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

Complesso coniugato dell'altro "pezzo"

$$= 2 \cdot \text{Parte Reale}: A_x H(f_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$\left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)}$$

$$= A_x |H(f_0)| \cdot e^{j\angle H(f_0)} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$= |H(f_0)| \cdot e^{j\angle H(f_0)} \cdot \frac{A_x}{2}\left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_x)}\right)$$

$$= |H(f_0)| \cdot \underbrace{\frac{A_x}{2}\left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x + \angle H(f_0))} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_x + \angle H(f_0))}\right)}_{\cos(\dots)}$$

$$= \underset{A_y}{|H(f_0)|} \cdot A_x \cos(2\pi f_0 t + \underset{\text{Fase di } y}{\varphi_x + \angle H(f_0)})$$

Ampiezza Diversa e con l'aggiunta della fase $\angle H(f_0)$

⇒ Possiamo scrivere:

$$|H(f_0)| = \frac{A_y}{A_x}$$

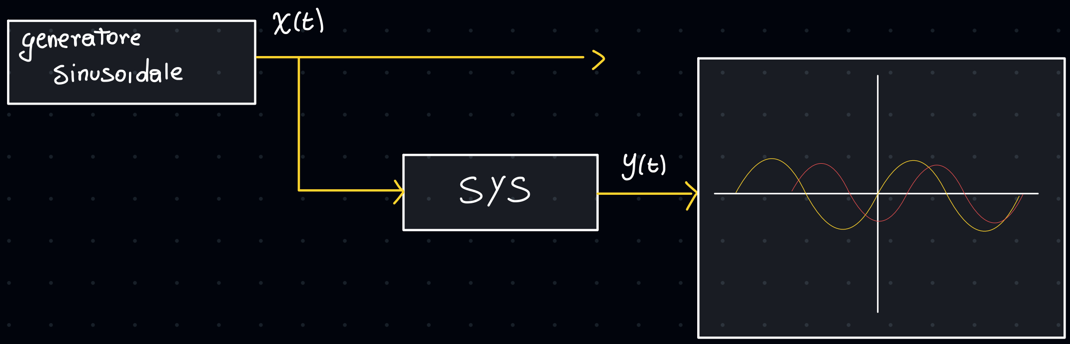
La fase: $\angle H(f_0) = \varphi_y - \varphi_x$

A Che Serve tutto ciò?

Ci serve per stimare la risposta in frequenza di un sistema.

→ Il rapporto delle Ampiezze in uscita ed in ingresso, e tramite il calcolo dello sfasamento delle fasi, ci permette di calcolare la risposta in frequenza.

Possibile Applicazione:



oscilloscopio

Trasformata di FOURIER

Tempo continuo:

Equazione di Sintesi: ci permette di esprimere qualsiasi segnale nel seguente modo:

$$\underbrace{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df}_{\text{Frequenza}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w) \cdot e^{jwt}\, dw}_{\text{Pulsazione}}$$

FREQ → TEMPO

- $X(f)$ e $X(w)$ che sono ampiezze, sono date dall'equazione di Analisi

Equazione di Analisi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$

TEMPO → FREQ

Tempo Discreto

Equazione di Sintesi:

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \cdot e^{j\theta n}\, d\theta$$

"Nu"

Periodico

Equazione di Analisi

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} \qquad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n}$$

Passare da un dominio all'altro:

Rappresentazione 1)

$x(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot)$

$t \quad n$ — $f \quad \omega \quad \nu \quad \theta$

Dominio del Tempo — Dominio della frequenza

Con l'eq di Sintesi ed Analisi possiamo passare da un dominio all'altro.

Rappresentazione 2)

$$x(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}$$

$$X(\cdot) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\}$$

Trasformata di Fourier di $x(\cdot)$

Anti trasformata di Fourier di $X(\cdot)$

Tornando indietro nella lezione di oggi...

Avevamo definito i segnali nel dominio della frequenza a tempo continuo come:

$$\rightarrow \; e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau$$

Fasore in ingresso

Non e' altro che la Trasformata di Fourier della RISPOSTA IMPULSIVA

Legami I/O nel dominio della frequenza

Tempo Continuo:

Scriviamo $x(t)$ con l'eq di sintesi come una sovrapposizione di fasori.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df$$

Al singolo ingresso elementare $e^{j2\pi f t} \longrightarrow H(f) \cdot e^{j2\pi f t}$

quindi per la linearita':
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df$$

→ Applico l'eq di sintesi ad $y(t)$ → $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df$

$$\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)}$$

Invece della convoluzione (Tempo) adesso abbiamo un prodotto

Tempo Discreto:

$$Y(\cdot) = H(\cdot) \cdot X(\cdot) \Rightarrow \underbrace{|Y(\cdot)|}_{\text{modulo}} = |H(\cdot)| \cdot |X(\cdot)| \Rightarrow \underbrace{\angle Y(\cdot)}_{\text{Fase}} = \angle H(\cdot) + \angle X(\cdot)$$

- Dalle lezioni di Neso Academy   Da 111 → playlist   Signals & Systems

Sistemi LTI

Linear Sys + Time inv. Sys

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow y(t)$

Segue il principio di "superposition"

⇒
- Regola di Additività
- Regola di omogeneità

→ Ogni delay in input è riflesso in output.

Impulse response → E' l'output del sys quando l'input è un impulso.

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow h(t)$ ↖ Impulse Resp.

$h(t)$ é usato per definire il sys.

Anche la "TRANSFER FUNCTION" è usata per definire il Sistema

TRASFORMATA DI LAPLACE / FOURIER

Finora abbiamo visto segnali e sys nel dominio del tempo, ma se vogliamo usare la Relazione IN/OUT del sys nel dominio del t sarebbe difficile;

E' per questo motivo che ci torna utile spostarci nel dominio della frequenza tramite la trasformata di LAPLACE o DI FOURIER

Il Sys LTI è definito tramite $h(t)$; ma se $h(t)$ non è noto, ma la relaz tra $y(t)$ e $x(t)$ è nota, ci spostiamo nel dominio della frequenza.

Tempo → Frequenza

$\underset{\text{NON NOTO}}{h(t) = ?} \xrightarrow{\text{Laplace}} H(w)$

$\underset{\text{NOTO}}{h(t)} \longleftarrow H(w)$: Trasformata di Laplace INVERSA

Tempo → Frequenza

$\underset{\text{NON NOTO}}{h(t) = ?} \xrightarrow{\text{Fourier}} H(S)$

$\underset{\text{NOTO}}{h(t)} \longleftarrow H(S)$: Trasformata di Fourier INVERSA

Transfer function - Trasformata DI LAPLACE

Abbiamo il sistema : $y(t) = x(t-1) + x(t+1)$

Tempo

Per analizzare altre proprieta' del sys ci serve $h(t)$ [che non abbiamo]

$\delta(t) \rightarrow \boxed{\text{Sys}} \rightarrow h(t)$

→ Ottenere $h(t)$ nel dominio della freq e' piu' facile

Usiamo la trasf di Laplace

$f(t)$

$$\downarrow$$

$$L\{f(t)\} = \mathcal{F}(s)$$

Var Complessa

$\hookrightarrow s = \sigma + j\omega$

$$\mathcal{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

Trasformata di Laplace $\mathcal{F}(s)$

Esempi di calcolo della $\mathcal{F}(f(t))$

ES: $f(t) = 2$

$$\rightarrow \mathcal{F}(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot e^{-st} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{2}{-s} \left[e^{-st} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2}{s} \left[\underset{\downarrow \, 0}{e^{-\infty}} - \underset{\downarrow \, +\infty}{e^{+\infty}} \right] = +\infty$$

ES 2: $f(t) = 2 \cdot u(t) \quad \rightarrow u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(2 \cdot u(t)) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \cancel{2 \int_{-\infty}^{0} 0 \, dt}_{\,0} + 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{2}{s} \left[e^{-st} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{2}{s} \left[\underset{\downarrow \, 0}{e^{-\infty}} - 1 \right] = \frac{2}{s}$$

$$\rightarrow \mathcal{F}(2u(t)) = \frac{2}{s}$$

ES 3: $f(t) = u(t) \quad \rightarrow \mathcal{F}(u(t)) = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left[e^{-st} \right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{s}$

⇒ GENERALIZZIAMO: $\mathcal{F}(A \cdot u(t)) = \frac{A}{s}$

Passare dal D. del tempo a quello della frequenza

Tornando a $y(t) = x(t-1) + x(t+1)$

$$Y(s) = X(s) \cdot e^{-s} + X(s) e^{s}$$

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{\text{tutte le cond. iniziali} = 0}$$

TRANSFER FUNCTION

$\rightarrow Y(s) = X(s)\left[e^{-s} + e^{s}\right] \Rightarrow H(s) = \dfrac{\cancel{X(s)}\left[e^{-s} + e^{s}\right]}{\cancel{X(s)}} = \underline{e^{-s} + e^{s}}$

$H(s)$ freq.

- Dalla Transf. Funct $H(s)$ possiamo trovare $h(t)$

$\boxed{h(t) \rightleftharpoons H(s)}$

Tornare al dominio del tempo $\rightarrow$ Trasformata INVERSA DI Laplace (ILT)

$$L\{f(t)\} = \mathcal{F}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Big\downarrow \text{ILT}$$

Vogliamo trovare la funzione stessa

$$\Rightarrow H(s) = \underset{\substack{\downarrow \text{ILT} \\ \delta(t-1)}}{e^{-s}} + \underset{\substack{\downarrow \text{ILT} \\ \delta(t+1)}}{e^{s}} \Rightarrow \underline{h(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1)}$$

Risposta in frequenza di un Sys LTI - Prima parte della lez

Se prendiamo un segnale in input come una sinusoide complessa con Frequenza omega (ω), possiamo dimostrare che in uscita avremo la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ che non dipende dal Tempo, moltiplicato per il segnale in input.

w é COSTANTE $\Rightarrow$ Non dipende da t

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere $H(e^{j\omega})$ in coordinate polari:

- $H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{MODULO}} \cdot e^{j \overbrace{\measuredangle H(e^{j\omega})}^{\text{FASE}}} \Rightarrow y(n) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\measuredangle H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega n}$

$$= |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j(\omega n + \measuredangle H(e^{jn}))}$$

OUTPUT $y(t)$

Tiriamo le Somme:

Quali sono le diff tra i segnali in input e quelli in output?

- Il segnale in OUT ha ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza
- Il segnale in out, che aveva fase iniziale $e^{j\omega n}$, ha la fase modificata in $\measuredangle H(e^{j\omega})$

$$y(n) = \underbrace{|H(e^{jn})|}_{\text{Risposta in Modulo/magnitude/frequenza}} \cdot e^{j(\omega n + \overbrace{\measuredangle H(e^{j\omega})}^{\text{Risposta in fase}})}$$

Quindi: Se mettiamo in input una sinusoide complessa (fasore) in input, questa, in output, verrà Amplificata per la risposta in frequenza, e verrà Shiftata (fase) in base alla risposta in fase.

La forza di questo sistema.

Se abbiamo un imput complicato, come la Somma di due sinusoidi complesse, usiamo le proprietà dei sistemi lineari:

$$x(n) = \alpha_1 e^{j\omega_1 n} + \alpha_2 e^{j\omega_2 n} \Rightarrow y(n) = \alpha_1 H(e^{j\omega_1 n}) \cdot e^{j(\omega_1 n + \measuredangle H(e^{j\omega_1}))} + \alpha_2 H(e^{j\omega_2 n}) \cdot e^{j(\omega_2 n + \measuredangle H(e^{j\omega_2}))}$$

Relazione tra l'uscita $y(\cdot)$ e $h(\cdot)$

$$\underbrace{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)}_{} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{jw(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{jwn} \cdot e^{-jwk}$$

Sappiamo che $y(\cdot)$ è dato dalla convoluzione tra in e $h(\cdot)$

Sostituiamo in input la sin complessa (fasore)

Dividiamo l'esponenziale

Costante rispetto a k

$$\to y(n) = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} = e^{jwn} \cdot H(e^{jw})$$

Segnale iniziale compl.

un valore costante rispetto al tempo
$\to$ non dipende da n

Battezziamo la costante rispetto al tempo $H(e^{jw})$

$\to$ Ci accorgiamo che $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-jwk}$ è proprio la Trasformata di Fourier a Tempo discreto

$$h(n) \xleftrightarrow{DT\ FT} H(e^{jw})$$

Se conosco una delle due $h(\cdot)$ o $H(\cdot)$ posso determinare l'altra tramite la Trasf. di F. a Tempo discreto

Esempio 1:

$$y_1(n) = \tfrac{1}{2}x(n) + \tfrac{1}{2}x(n-1) \qquad h(n) = \begin{cases} 1/2 & n = 0,1 \\ 0 & \text{othw} \end{cases}$$

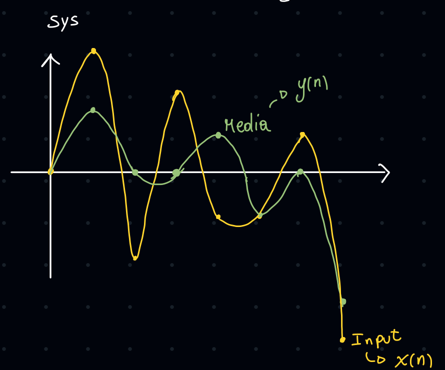
$\to$ Analizziamo il sys:

Scriviamo $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$ come $y(n) = \dfrac{x(n)+x(n-1)}{2}$

i due input più recenti

Diviso 2

$\Rightarrow$ E' evidente che il sys computi una "media" tra i due ultimi input e "LEVIGHI" il segnale!



Tornando al problema: possiamo scrivere la risposta in frequenza come la t. di F.

$$\to H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot e^{-jwk} = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-jw \cdot 0} + \tfrac{1}{2} e^{-jw \cdot 1}$$

abbiamo 2 $k \to 2\ h(\cdot)$

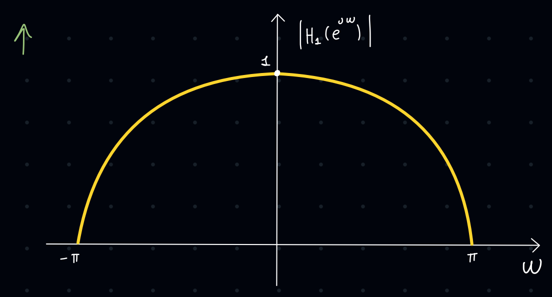
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} e^{-jw} \quad H(e^{jw})$$

$\to$ Riscriviamo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-jw}$

$$e^{jw} = \cos(w) + j\sin(w)$$
$$e^{-jw} = \cos(w) - j\sin(w)$$

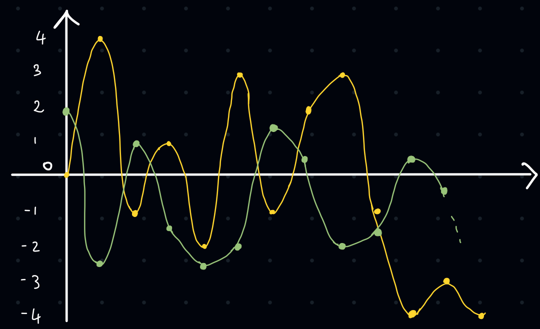
$$\to e^{jw} + e^{-jw} = 2\cos(w) \to \tfrac{1}{2}(e^{jw} + e^{-jw}) = \cos(w)$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} e^{-jw}) = e^{-j\frac{w}{2}} \cos\left(\tfrac{w}{2}\right)$$



Esempio 2:

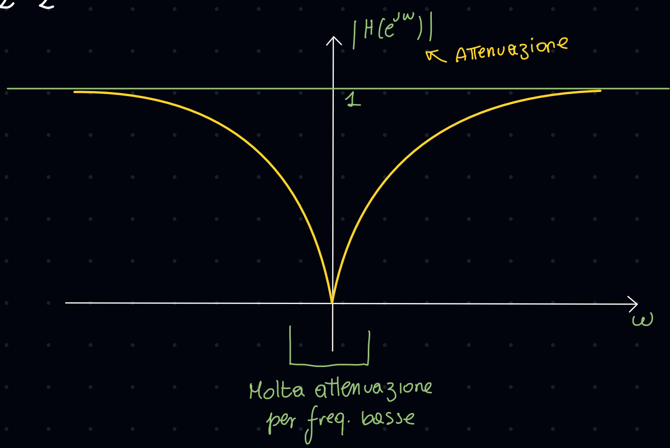
$$y_2(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) \qquad h_2(n) = \begin{cases} 1/2 & n=0 \\ -1/2 & n=1 \\ 0 & \text{oThw.} \end{cases}$$



$$H(e^{jw}) = \mathcal{F}h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot e^{jwk}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{jw} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{jw}$$

$$= je^{-j\frac{w}{2}} \cdot \sin\left(\frac{w}{2}\right)$$



Proprietà convoluzione - Moltiplicazione

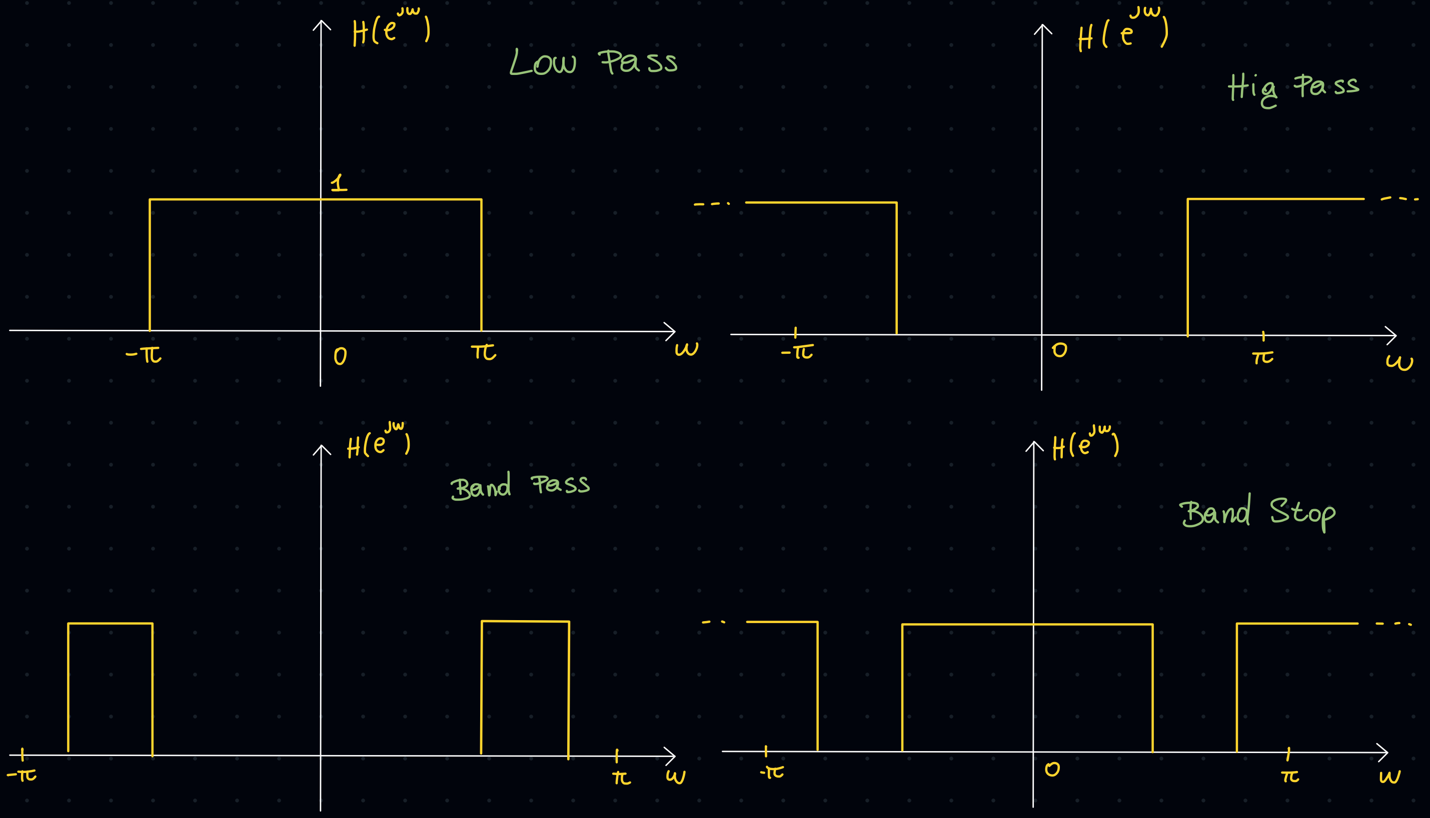
$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{DT\ F.T.} Y(e^{jw}) = H(e^{jw})\ X(e^{jw})$$

→ Che vuol dire ?

Se nel dominio del tempo dobbiamo effettuare la convoluzione, nel dominio della freq. ci basta moltiplicare.

Idea di filtraggio

I filtri ci permettono di "far passare" determinate frequenze invece di altre:



Esercizio 7.1

Determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni :

a) $x(t) = u(t-1)e^{-2t} + u(t) - u(t+2)$;

Ripassino

T. Inversa : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, dt \quad \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$

freq → time

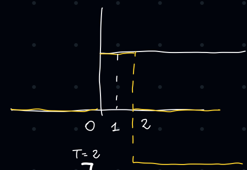
Trasformata : $\mathcal{F}(x(t)) = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt \quad \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, d\omega$

time → freq

a) $x(t) = u(t-1) \cdot e^{-2t} + u(t) - u(t+2)$

$\Pi(t+1)$

→ per la linearità : $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[u(t-1) \cdot e^{-2t} - u(t+2) + u(t)\right] =$



$= \mathcal{F}\left[u(t-1) e^{-2t}\right] - \mathcal{F}\left[u(t+2) - u(t)\right] = e^{-2} \, \mathcal{F}\left[u(t-1) \, e^{-2(t-1)}\right] - \mathcal{F}\left[\Pi(t+1)\right]$