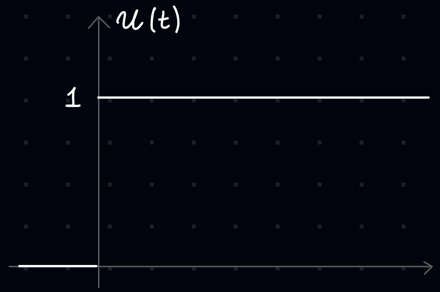
SEGNALI ORDINARI

GRADINO UNITARIO

- Tempo continuo

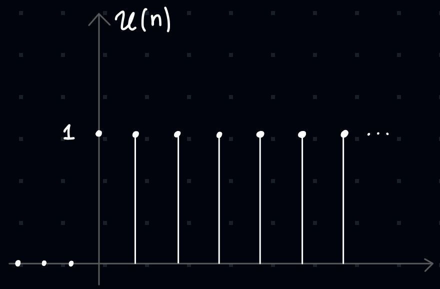
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



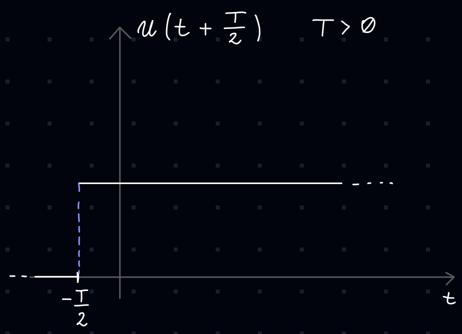
E' quella funzione usata in alcune distribuzioni per renderle definite solo per $x \geq 0$

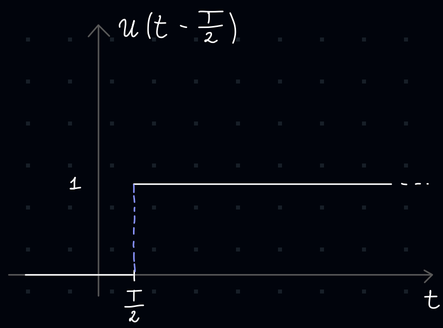
- Tempo discreto

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



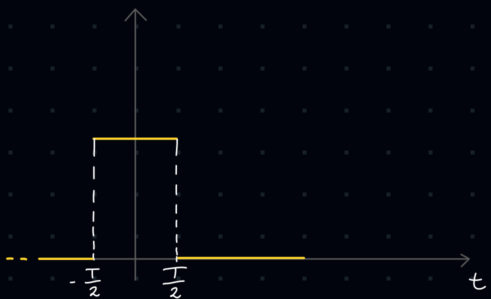
Combinando due gradini...





Se combiniamo i due gradini:

$u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right) =$ FINESTRA rettangolare



FASORE A TEMPO CONTINUO

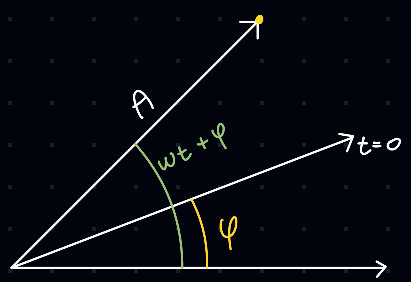
$$x(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j(2\pi f t + \varphi)}$$

Espressa in termini di pulsazione — Espressa in termini di frequenza

- A: Ampiezza
- ω: Pulsazione
- t: fase iniziale
- f: frequenza → legata alla pulsazione da $\boxed{\omega = 2\pi f}$

Come rappresentiamo un SEGNALE COMPLESSO?

Avremo un VETTORE RUOTANTE, dove la prima posizione del vettore in $T=0$ ha un Angolo φ.



- Il vettore ha angolo $\omega t + \varphi$ ed è di modulo $= A$.
- In Pratica il segnale è un vettore ruotante che si muove con una velocità angolare (ω, rad/s), ovvero in termini di giri al secondo (Hz, frequenza).
- Il fasore a tempo continuo è un SEGNALE PERIODICO di periodo:

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Periodo del fasore

→ Nel fasore a Tempo discreto, non è così!

- DIMOSTRAZIONE del Periodo

$$x(t+T) = x(t)$$

$$A e^{j(\omega(t+T)+\varphi)} = A e^{j\omega t} \cdot A e^{j\omega T} \cdot A e^{j\omega\varphi} \quad (i)$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow A e^{j\omega T} = A e^{j\omega\frac{2\pi}{\omega}} = A e^{j2\pi} = A(\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + j\underbrace{\sin(2\pi)}_{0}) = A$$

$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$

→ tornando alla (i) $\quad x(t+T) = A e^{j\omega t} \cdot \underbrace{A e^{j\omega T}}_{1} \cdot A e^{j\omega\varphi} = A e^{j(\omega t + \varphi)} = x(t)$

Il segnale è PERIODICO

Segnale Sinusoidale (tempo continuo)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

Formule di Eulero

Perché? $A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t + \varphi) + \cancel{j\sin(\omega t + \varphi)}\right] + \frac{A}{2}\left[\cos(-(\omega t + \varphi)) + \cancel{j\sin(-(\omega t + \varphi))}\right]$

→ Il cos è una f PARI
Il sin è una f DISPARI
⇒ I due seni si semplificano

$$\Rightarrow A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t + \varphi)\right] + \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t + \varphi)\right] = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi possiamo scrivere

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ e^{j(\omega t+\varphi)} \right\}$$

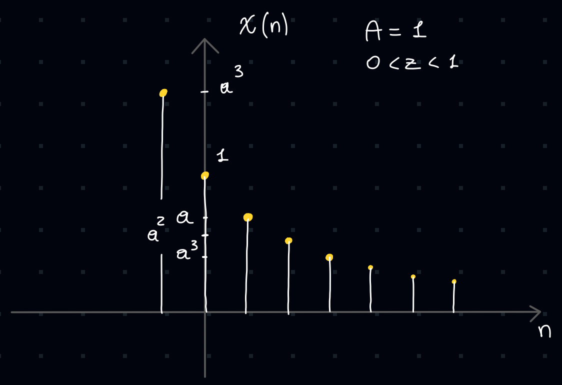
- La Parte reale è il coseno
- La Parte immaginaria è il seno

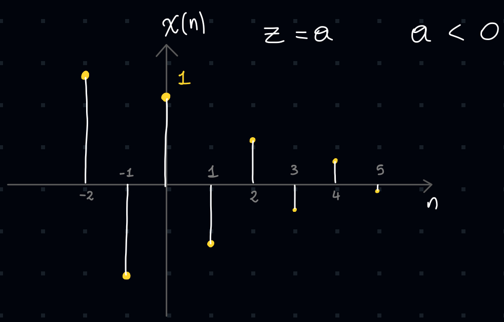
SEQUENZA ESPONENZIALE (Segnale Discreto)

$$x(n) = C \cdot z^n \qquad \text{con} \quad C, z \in \mathbb{C}$$

Ampiezza (C), Base (z)

ESEMPIO $C, z \in \mathbb{R} \rightarrow C = 1$, $z = a$, con $0 < a < 1$





FASORE A TEMPO DISCRETO

$$x(n) = A \cdot e^{j(\theta n + \varphi)} = A\, e^{j(2\pi \nu n + \varphi)}$$

θ: Pulsazione Discreta ; φ: Fase iniziale

ν = "NU" → Frequenza Discreta

① Non è periodico per ogni ν

→ Proof: $x(n) = x(n+N)$ → Poniamo $A=1$ e $\varphi = 0$ per semplicità di calcolo

↑ Da dimostrare

$$\rightarrow e^{j\theta n} = e^{j\theta(n+N)} = e^{j\theta n} \cdot e^{j\theta N}$$

Affinché il prodotto sia $= e^{j\theta n} \Rightarrow e^{j\theta N} = 1$

→ quando $e^{j\theta N}$ è pari ad 1? Siccome possiamo scriverlo come $e^{j\theta N} = A\cos(\theta N + \varphi)$, e $A=1$ e $\varphi = 0$ ⇒ $\cos(\theta N) = 1$ ⇔ $\theta N = 2K\pi$

Quindi $\underbrace{\frac{\theta}{2\pi}}_{\text{Deve essere}} = \frac{K}{N} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{K}{N}}$ Il segnale sarà Periodico solo quando $\nu = \frac{K}{N}$

$\frac{\theta}{2\pi} = \nu$

② NON FLUTTUA sempre più velocemente al crescere della pulsazione/frequenza.

→ Abbiamo visto come il vettore che rappresenta il fasore continuo Ruota sempre più velocemente al crescere di w o f.

→ Questo non avviene col fasore Discreto:

$$e^{j\theta n} = e^{j(\theta+\gamma)n}$$

$A=1$ $\varphi=0$

Non è detto che ② sia più veloce di ①

Infatti Quando $\gamma = 2\pi$ I due fasori sono uguali!

⇒ Deduciamo che non possiamo scegliere θ a "caso", perché al crescere di θ non è detto che la funzione cresca di conseguenza.

Scegliamo Theta come: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oppure $-\pi \leq \theta \leq \pi$

Scegliamo Nu come: $0 \leq \nu \leq 1$

Sequenza Sinusoidale (Segnale Discreto)

$$x(n) = A\cos(\theta n + \varphi) = A\cos(2\pi \nu n + \varphi)$$

Pulsazione θ

Frequenza NU

Visualizzare una Sinusoide con Matlab

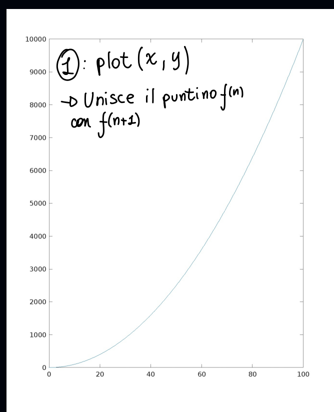
Analizziamo il codice:

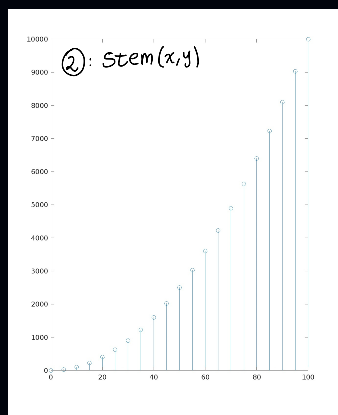
```
clc;  Pulisce l'output
close all;  Chiude tutti i precedenti Plot

phi = 0;   φ=0 => Non utilizzato nel codice
t=(-10:0.01:10);
f = 1/4;   FREQUENZA
x_t = cos(2*pi*t*f);  Coseno come argomento tutte le variabili dichiarate


figure;
plot(t, x_t);   Funzione Matlab ①
ylabel('segnale');
xlabel('tempo in secondi');
title('Segnale vs Tempo');
% zoom xon;

hold on   Permette di sovrapporre le visualizzazioni su un unico grafico


nu = f;  -> ν=freq
n = (-10:1:10);  Lo step è grande
x_n = cos(2 * pi * nu * n);  Nuova funzione da plottare

stem(n, x_n);  Funzione Matlab ②
```

$t = (-10 : 0.01 : 10)$

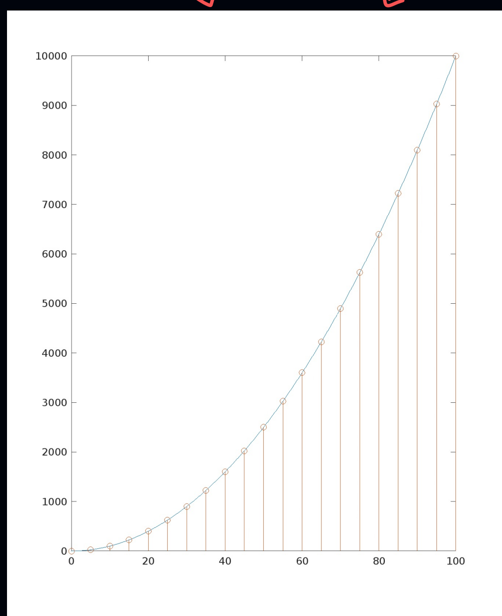
- -10: Estremo INFERIORE
- 0.01: STEP -> Distanza tra n ed n+1
- 10: ESTREMO SUPERIORE

- Step piccolo -> Simula funct continua
- Step grande -> f. discreta



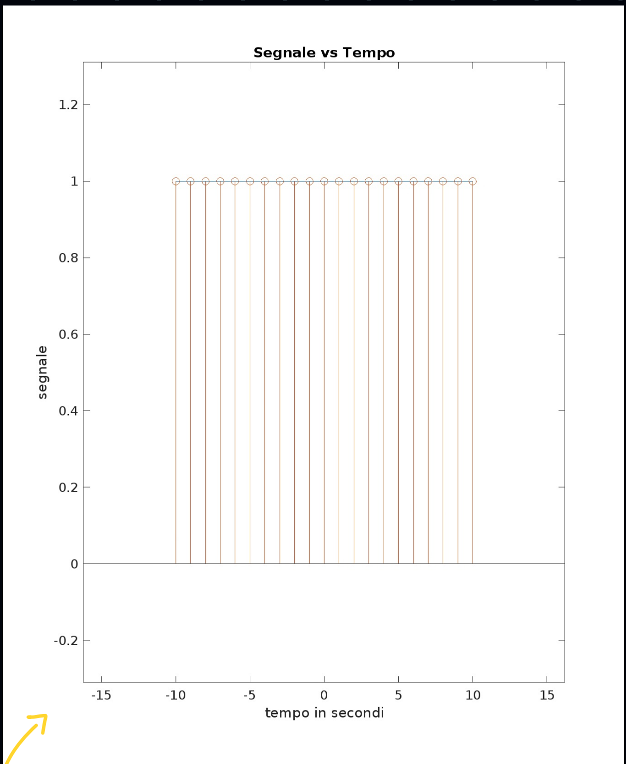


hold on



Torniamo al segnale sinusoidale:

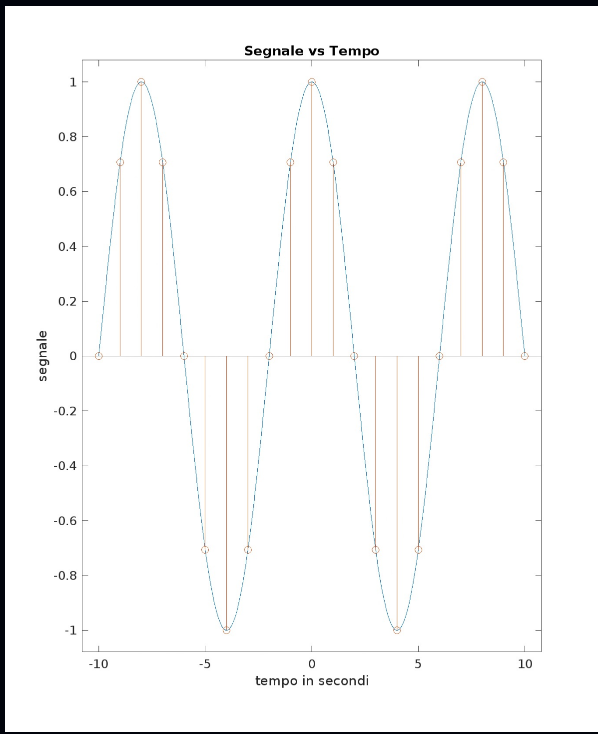
Con una frequenza di 0 otteniamo il grafico:



Non è altro che la funzione finestra da -10 a +10, costante e pari ad 1.

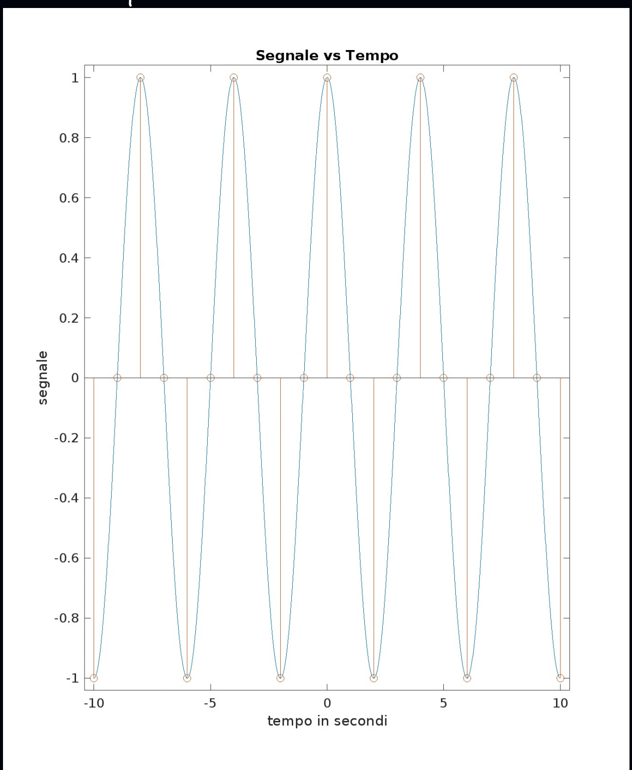
$+\frac{1}{8}$

Frequenza pari ad $1/8$



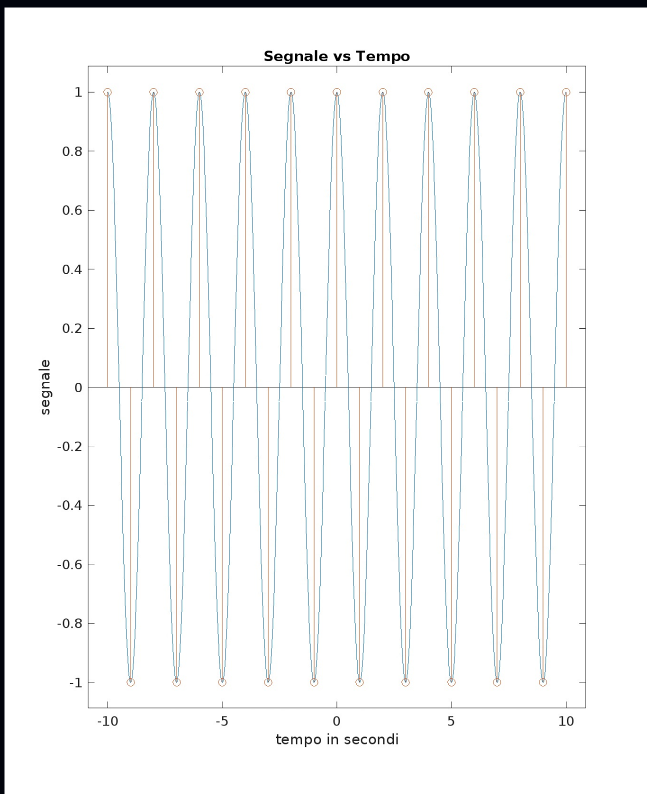
$+\frac{1}{8}$

Frequenza pari a $1/4$



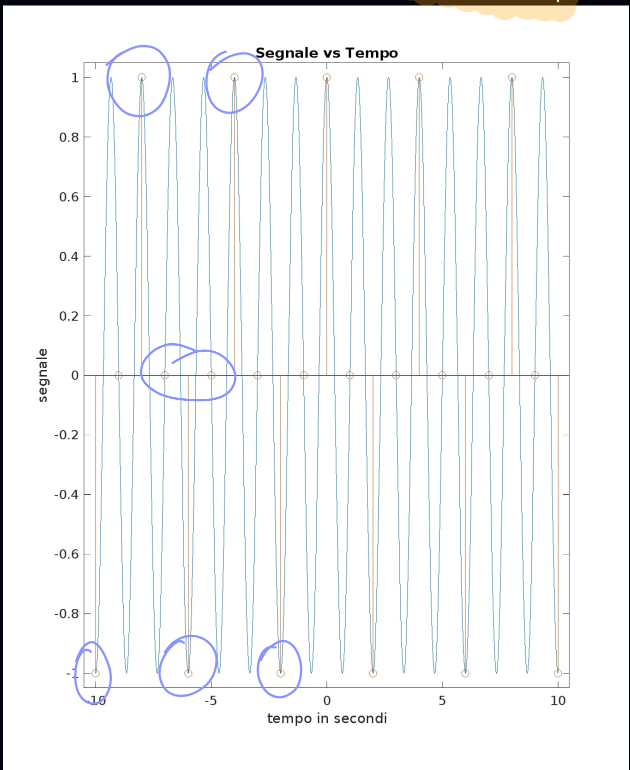
$+\frac{2}{8}$

Frequenza pari a $1/2$



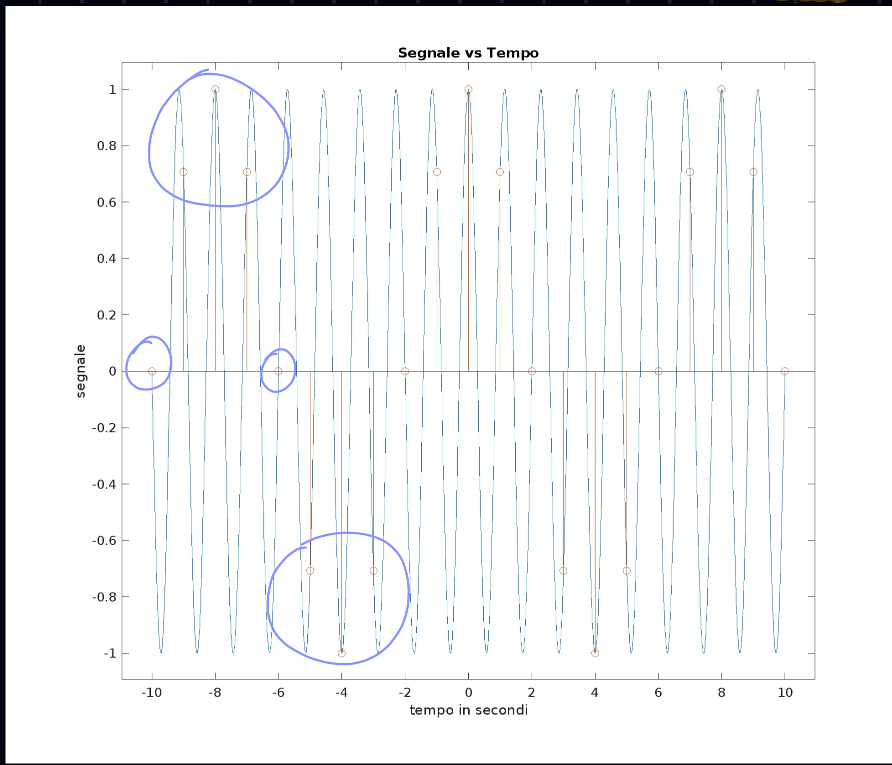
$+\frac{1}{8}$

Frequenza $= \frac{3}{4}$, $\nu = \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

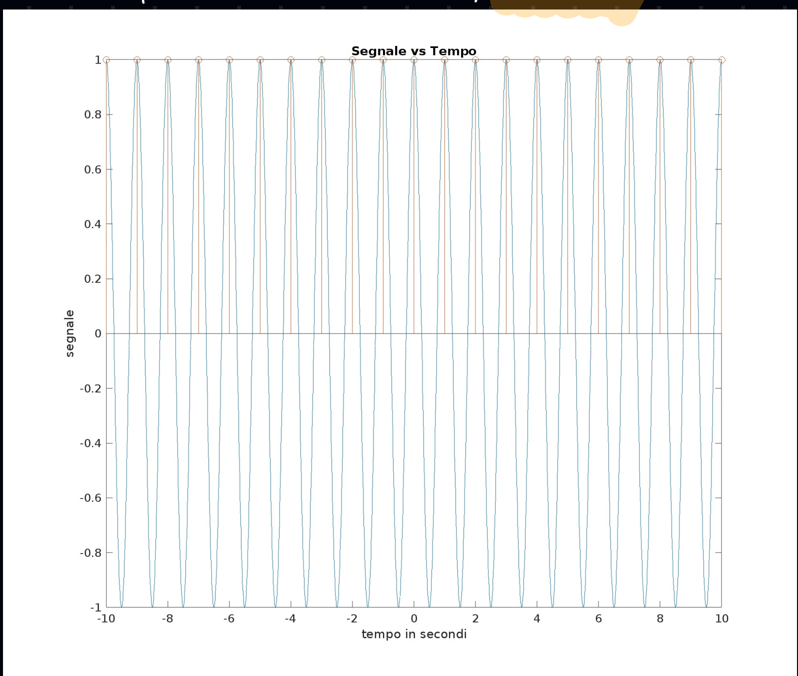


$+\frac{1}{8}$

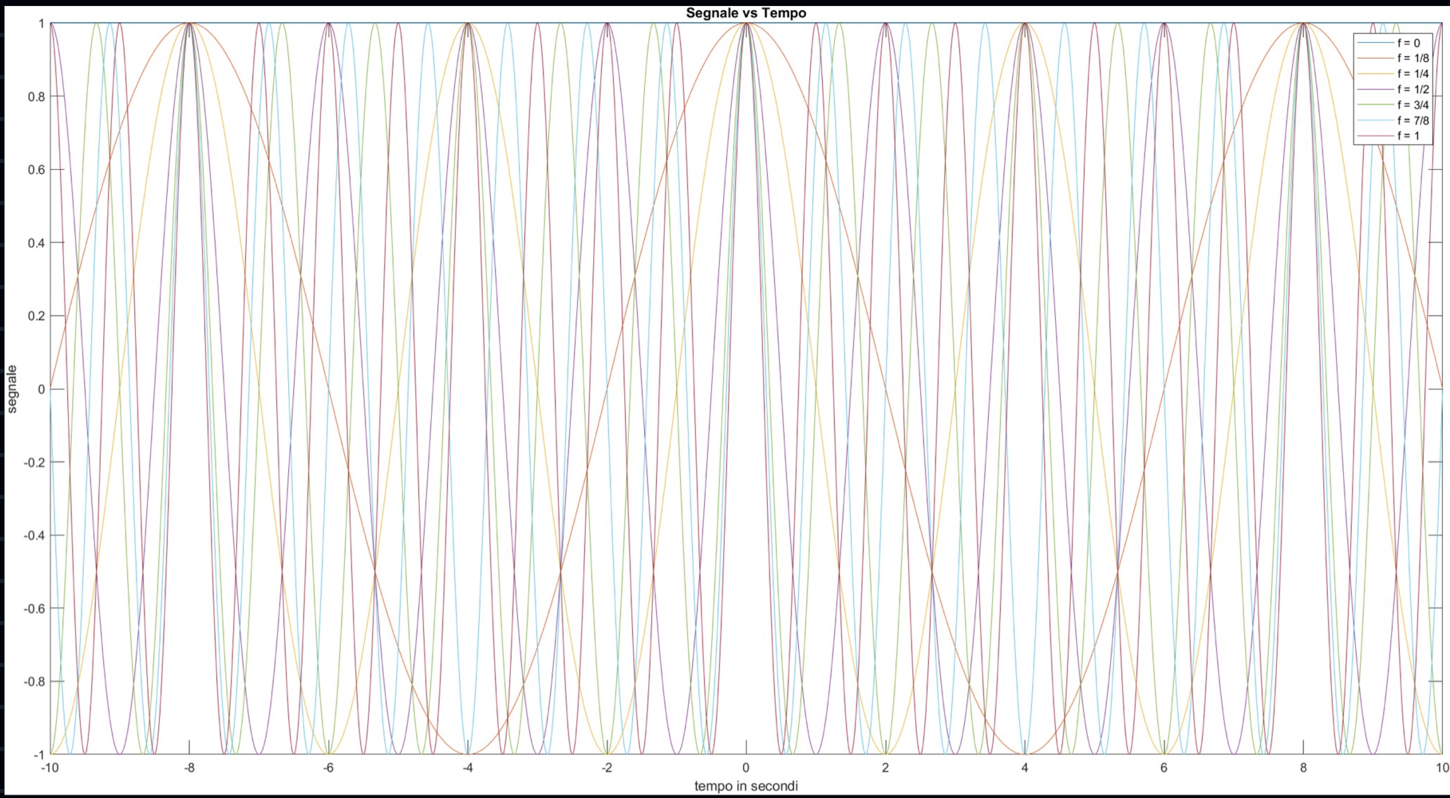
Frequenza pari a $\frac{7}{8}$, $\nu = \frac{7}{8} = -\frac{1}{8}$

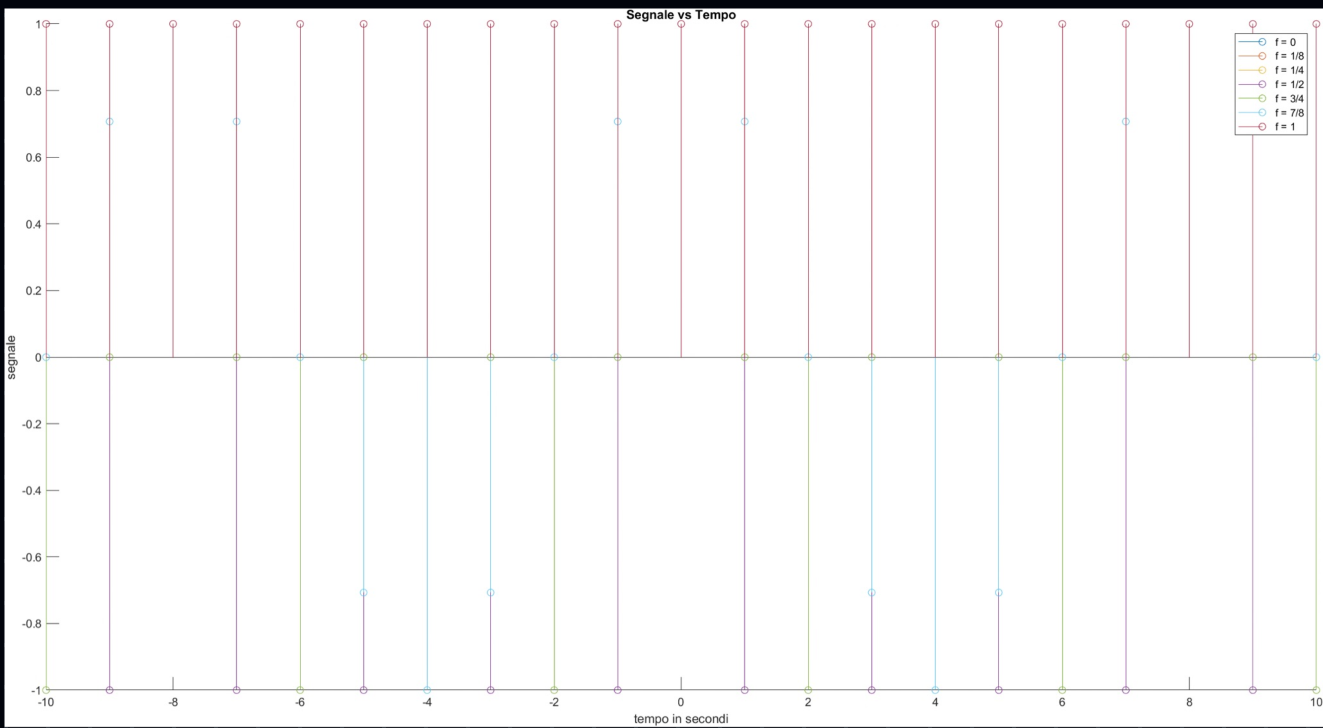


Frequenza pari a 1 , $\nu = 1 = 0$



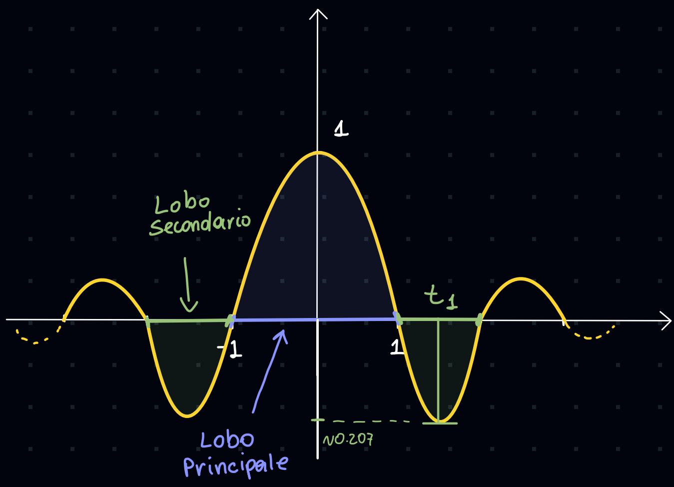
- Si nota che con l'aumentare della frequenza di $K\frac{1}{8}$, seppur la frequenza (segnale continuo) aumenta, superato $f = \nu = \frac{1}{2}$ il campionamento discreto assume valori uguali a quelli assunti per sottomultipli di $K\frac{1}{8}$, che aveva quindi già assunto.


Segnale vs Tempo
f = 0
f = 1/8
f = 1/4
f = 1/2
f = 3/4
f = 7/8
f = 1
segnale
tempo in secondi


Segnale vs Tempo
f = 0
f = 1/8
f = 1/4
f = 1/2
f = 3/4
f = 7/8
f = 1
segnale
tempo in secondi

IMPULSO DI TIPO SYNC

$$x(t) = \text{Sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



- Se calcoliamo:

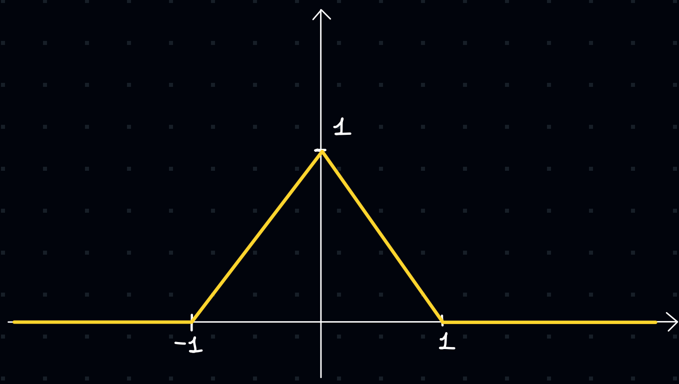
$$20 \log\left(\frac{|x(0)|}{|x(t_1)|}\right) = 20 \log\left(\frac{|x(0)|}{\sim 0.207}\right) = 13.26 \text{ dB}$$

Il rapporto delle ampiezze tra lobo principale e lobi secondari viene indicata in dB

IMPULSO TRIANGOLARE

$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ \emptyset & \text{Altrove} \end{cases}$$

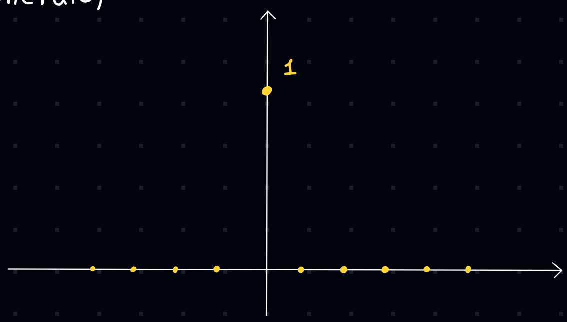
↑ Lambda



IMPULSO DISCRETO (generale)

$$\delta(n) \begin{cases} 1 & n = \emptyset \\ 0 & n \neq \emptyset \end{cases}$$

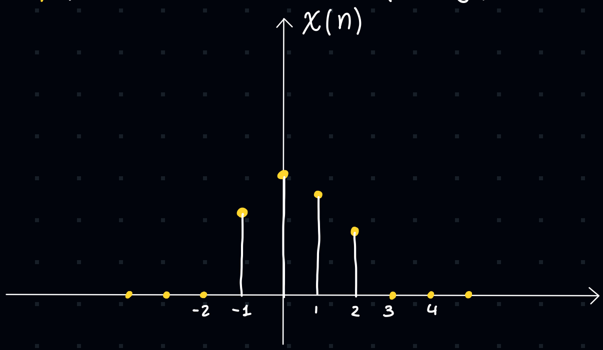
↑ Delta piccolo

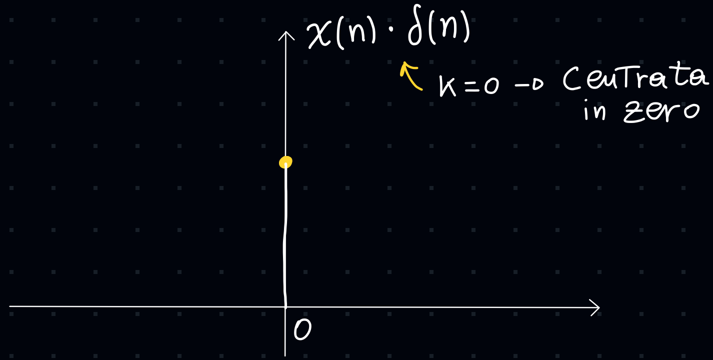


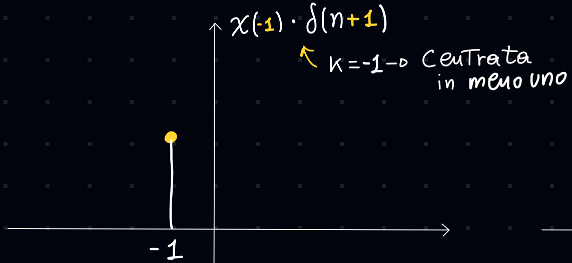
PROPRIETA'

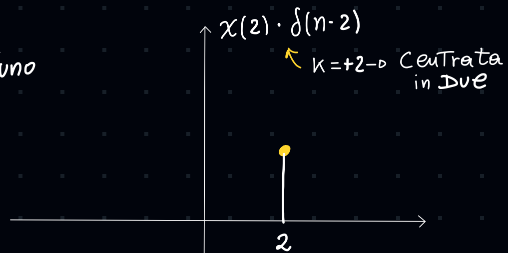
Centrato in K

I) $x(n) \cdot \delta(n-K) = x(K) \cdot \delta(n-K)$









→ Se sommiamo TUTTI i valori $x(k)\cdot\delta(n-k)$, otteniamo proprio $x(n)$

II) Proprieta' di RIPRODUCIBILITA':

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot\delta(n-k) = x(n)}$$

⇒ Ricordando il segnale gradino $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$\to u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\cdot\delta(n-k) = \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(m)}$$

gradino in forma di sommatoria

pongo $n-k=m$

Questo perchè il gradino è pari a 0 fino ad $n=0$;

$$\text{Infatti } \sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi scritto il gradino come una sommatoria da $-\infty$ a n

→ Visto che $u(n)\cdot\delta(n-k) = u(0)\cdot\delta(0) = 1$

centrato in zero

→ E' come sommare: $\underset{-\infty}{0} + \ldots + \underset{m=n-1}{0} + \underset{m=n}{1} = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

• Passaggio inverso

Possiamo scrivere $\delta(n)$ come la differenza di due gradini:

$$\boxed{\delta(n) = u(n) - u(n-1)}$$

Centrato in $n=0$ ⇒ $u(0) = 1 = \delta(-1)$

$$1 - 0 = 1 = u(0)$$

Differenza prima

⇒ Proprieta' Del Campionamento: quando moltiplichiamo un qualsiasi segnale per la Δ otteniamo il segnale valutato in zero.

$$x(t)\cdot\delta(t-\tau) = x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$$

Nel caso in cui $\tau = 0$ ovvero non c'è ritardo

* dalla lez 21, 1:23

$$x(t)\cdot\Delta(t) = x(0)\cdot\Delta(t)$$

IMPULSO CONTINUO

- $\forall x(t)$ continua in $t=0$ come "quella funzione δ" che integrata:

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot\delta(t)\,dt = \begin{cases} x(0) & \text{se } 0\in(t_1,t_2) \\ 0 & \text{se } 0\notin(t_1,t_2) \end{cases}$$

E' l'analogo di quella a tempo discreto. Serve a prelevare il campione all'istante 0 del segnale.

PROPRIETA'

I) L'impulso ha area unitaria (Normalizzazione)

$t_1=-\infty$, $t_2=\infty$ e $x(t)=1$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt =$ $\delta(t)$ vale $x(t)$ quando $0\in(t_1,t_2)$

$\rightarrow$ Siccome $0\in(-\infty,+\infty)$, è come fare $\ldots 0+\ldots+1+\ldots+0+\ldots = 1$

Sicuramente

$$\underset{x(-n)=x(-\infty)=0}{\ldots 0} + \ldots + \underset{x(0)=\underbrace{x(t)=1}_{\text{definito da noi}}}{1} + \ldots + \underset{x(+n)=x(+\infty)=0}{0} + \ldots = 1$$

II) Campionamento

$t_1=-\infty$, $t_2=+\infty$

a) $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t)\,dt = x(0)$ $\rightarrow$ Conferma il fatto che riusciamo a prelevare il valore del segnale in <u>zero</u>.

b) Consideriamo una funzione che è il prodotto di due segnali:

$$f = x(t)\cdot y(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot y(t)\cdot\delta(t)\,dt = x(t)\cdot y(t)\Big|_{\text{in }0} = x(0)\cdot y(0)$$

c) Consideriamo $f = y(t)\cdot x(0)$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cdot x(t)\cdot\delta(t)\,dt = x(0)\cdot y(0)$$

d) Siccome il risultato in b e c è il medesimo:

$$\Rightarrow \boxed{x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)}$$

Proprietà del Campionamento dell'impulso discreto

III) Cambiamento di scala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\underset{\substack{\uparrow\\\text{operazione}\\\text{di scala}}}{\delta(at)}\,dt \underset{\substack{\text{Cambiamento}\\\text{di variabile}}}{=} \tau = a\cdot t \Rightarrow d\tau = a\,dt \rightarrow t=\frac{\tau}{a} = \begin{cases} a>0 & \ldots \\ a<0 & \text{gli estremi si invertono} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}\cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\delta(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\cdot x(0) \Rightarrow \boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

$$\boxed{a=-1 \rightarrow \delta(-t)=\delta(t)}$$

IV) Riproducibilità

$$\overset{a}{x(t)\cdot\delta(t-\tau)} = \overset{b}{x(\tau)\,\delta(t-\tau)}$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau}_{a} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau}_{b} \Rightarrow x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{1 \text{ NORM.}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Proprietà di riproducibilità → Analogo alla proprietà vista per il tempo Discreto

⇒ Cosa succede con il "gradino"?

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

gradino in forma integrale

- Passaggio inverso: $\delta(\tau) = \frac{d}{dx}u(x)$

- Siccome non abbiamo una funzione ORDINARIA che soddisfi le proprietà 1-4, possiamo definire una famiglia avente le proprietà:

1 $$\lim_{T\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta_T(t)\,dt = x(0)$$

- L'unico modo di risolvere il problema matematico è definire queste funzioni al limite della loro ampiezza che tende a zero.

In pratica 2 $$\lim_{T\to 0}\delta_T(t) = \delta(t)$$

ES: possiamo porre
- $\delta_T(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ → Con una finestra Rettangolare
- $\delta_T(t) = \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ → Con una finestra Triangolare