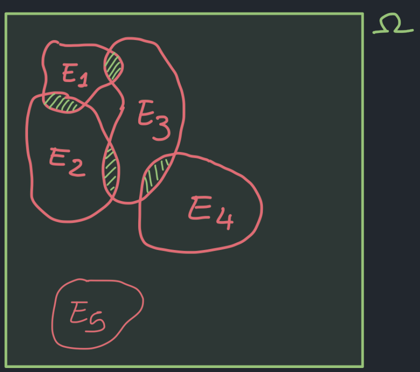
Operazioni sulla probabilità

Operazioni sugli insiemi

Possiamo effettuare delle operazioni sugli eventi; siccome li rappresentiamo come degli insiemi, potremo effettuare tutte le operazioni insiemistiche anche sulla probabilità:

Siccome lavoriamo con degli insiemi ha senso rappresentarli come tali:

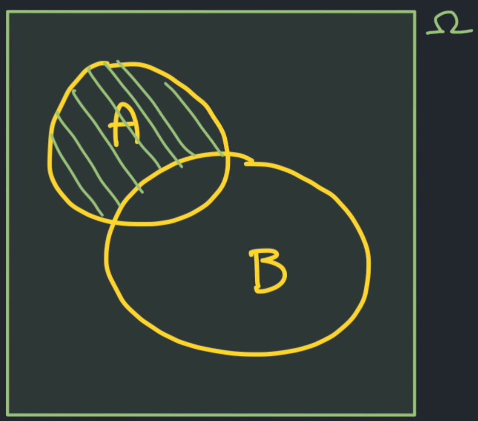


Si nota che E_1 ed E_5 Non "si intersecano" in questo caso si dice che sono Disgiunti: Se si verifica E_1, E_5 non potrà verificarsi, perchè non hanno parti in comune. Si dicono anche in mutua esclusione.

A - B

Come eseguiamo l'operazione A - B?

Un'altro operazione usata spesso è:



$A - B$ → che non è una operazione di sottrazione, ma è un modo per definire:

$$A - B \equiv A \cap \bar{B}$$

Che indica gli Elementi di A che contemporaneamente non appartengono a B.

Altre operazioni

Possiamo derivare le restanti operazioni dalla negazione e dalla "sottrazione":

E le altre operazioni?
Non è detto che definendo solo due operazioni (lez. precedente: unione e compl.) siano valide solo quelle; infatti unione e complemento hanno delle implicazioni:

1) Intersezione
Legge di De Morgan: $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ Con questa legge dimostriamo la chiusura rispetto all'interz.

2) $A - B$
→ $A - B = A \cap \bar{B}$ → Chiusa all'Operazione "$-$".

Assiomi di Kolmogorov

Gli assiomi di Kolmogorov sono un **insieme di 3 regole** che **stabiliscono le fondamenta della probabilità**:

Non negatività

La probabilità di un evento **deve essere SEMPRE maggiore o uguale a zero**, per cui non può essere negativo.

1) Non Negatività
La probabilità si applica sugli eventi, quindi quando si dice "calcola la probabilità di qualcosa" si intende la probabilità di un evento.
La Non Neg. ci dice che se prendiamo un qualunque evento, allora la probabilità di A deve essere SEMPRE maggiore uguale a zero.

- $A \in \mathcal{E} \longrightarrow P(A) \geq 0$

Normalizzazione

La seconda regola ci da nuovamente informazioni su come dovrebbe essere il valore della probabilità di un evento; in particolare questa regola ci dice che **la probabilità di un evento non può essere maggiore di uno**.

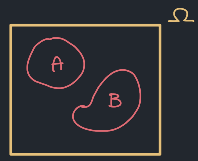
Un evento che ha probabilità 1 è detto **evento certo**, solitamente questo evento coincide con omega, siccome tutti gli altri eventi sono sottoinsiemi di esso.

2) Normalizzazione
La probabilità di Ω (Spazio Campione) è UNO.

- $P(\Omega) = 1$

Additività

Questa regola ci dice che se degli eventi E_1, E_2, E_n sono **disgiunti a due a due**, ovvero **non hanno elementi in comune**, allora la **probabilità dell'unione degli eventi** è la **somma** delle probabilità individuali degli eventi:



3) Additività

Se A e B sono due eventi, e se $A \cap B = \emptyset$ (disgiunti), allora la probabilità di $A \cup B$ è la prob di A più quella di B.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Possiamo **estendere questo ragionamento** ad n eventi:

4) Numerabile Additività

È un'estenzione nel caso lo spazio campione A NON SIA FINITO.
In questo caso ci dice che:

Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ e sono "a due a due disgiunti"

$A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Allora $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Vera anche per $n \to \infty$