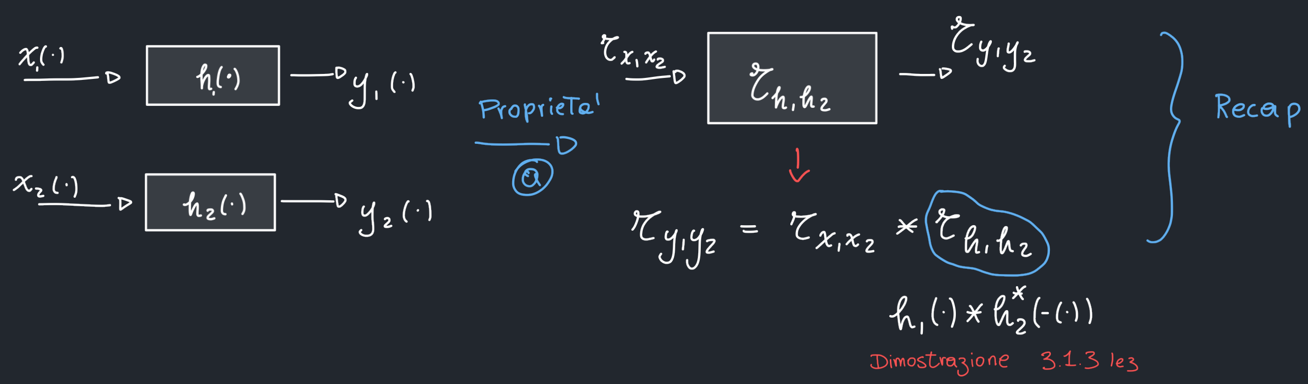
Legami input - output per densità spettrali

[TOC]

Questo discorso sarà molto simile a quello fatto per la **correlazione** nella lezione `3.1.3 - Legami Input Output correlazione`, infatti:

Possiamo scrivere la relazione in/out tra due sistemi separati in termini di mutua correlazione:

Legami input-output per le Densita' Spettrali



Tutte le relazioni viste in termini di correlazione, possono essere scritte in termini di **densità spettrale**:

Densità spettrale mutua dell'uscita

La densità spettrale dell'uscita è uguale alla **funzione di trasferimento mutua** (ovvero il corrispettivo della risposta in frequenza mutua per la densità spettrale -> modulo del prodotto delle risposte in frequenza) moltiplicata per la densità spettrale del segnale in ingresso:

1) $r_{h_1 h_2}(\cdot) = h_1 * h_2^*(-(\cdot))$

$$\to r_{y_1 y_2} = \left[h_1 * h_2^*(-(\cdot))\right] * r_{x_1 x_2} \overset{\text{F.T.}}{\Longleftrightarrow} S_{y_1 y_2} = \left[H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot)\right] \cdot S_{x_1 x_2}$$

$$S_{x_1 x_2} \longrightarrow \boxed{H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot)} \longrightarrow S_{y_1 y_2}$$

Densità spettrale dell'uscita

In questo caso l'output è più semplice, la funzione di trasferimento non è più mutua, e quindi possiamo "riassumerla" nella risposta in frequenza **in modulo quadro**, moltiplicata per la densità spettrale del segnale in ingresso:

Caso particolare 2: Densita' spettrali non mutue

$$H_1 = H_2 \Rightarrow H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot) = |H(\cdot)|^2$$

Quindi: $S_y(\cdot) = |H(\cdot)|^2 \cdot S_x(\cdot)$

Densità spettrali mutue

In questo caso abbiamo in uscita una densità spettrale **mutua**

Caso 3: Densita' Spettrali mutue

Abbiamo $\underset{\substack{\downarrow\uparrow \\ r_{xy}}}{S_{xy}(\cdot)} = \underset{\substack{\downarrow\uparrow \\ r_x(\cdot)}}{\underbrace{S_x(\cdot)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\uparrow \\ h(-(\cdot))^*}}{\underbrace{H^*(\cdot)}} \Longleftrightarrow r_{xy} = r_x(\cdot) * h(\cdot) = r_x(\cdot) * \left[h(\cdot) * h^*(-(\cdot))\right]$

Analogamente $\to S_{yx}(\cdot) = S_x(\cdot) \cdot H(\cdot)$

Esempio: Rumore Termico

Si dice che il rumore termico abbia uno **spettro bianco**, proprio perchè la distribuzione di ampiezza del segnale **uniforme su tutte le frequenze**; questo si traduce nel fatto che **la densità spettrale di potenza del rumore termico è costante su tutte le frequenze**.

Possiamo dire che **lo spettro del rumore termico** dipende dalla costante di Boltzmann e dalla **temperatura**:

Esempio : Rumore termico

Il Rumore termico ha uno SPETTRO BIANCO : ha tutte le componenti spettrali aventi TUTTE LA STESSA AMPIEZZA

Costante di Boltzmann

Temperatura

$$S_w(f) \simeq \frac{KT}{2}$$

Rumore

Densita' Spettrale Del Rumore

Siccome la densità spettrale del rumore termico è costante, possiamo dire che anche il suo spettro lo è (per alcune frequenze):

Poniamo $\frac{KT}{2} = \frac{N_0}{2}$ per frequenze $< 10^{12}$ Hz

Costante

↳ Tradotto per $f < 10^{12}$ Hz lo spettro È COSTANTE !

Autocorrelazione del rumore termico

Proviamo a calcolare l'autocorrelazione del segnale "rumore termico" usando l'uguaglianza di Wiener-Kintchine:

Se il Rumore ha Densità Spettrale del tipo S_w, quale sarà la funzione di Autocorrelazione del rumore bianco?

Sappiamo che $\quad \mathcal{R}_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot) \Rightarrow S_w(f) \rightleftharpoons \mathcal{R}_w(\tau)$

Visto che lo spettro per $f < \frac{N_0}{2} = \text{const} \Rightarrow S_w(f) = A$ cost

Sappiamo che la trasformata di un segnale costante è una delta di ampiezza pari a quella del segnale:

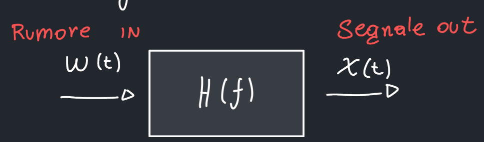
quale è quel segnale che trasformato ci da uno SPETTRO COSTANTE?

$$\underset{\text{tempo}}{A\,\delta(t)} \rightleftharpoons \underset{\text{Freq}}{A} \quad \Rightarrow \quad S_w(f) \rightleftharpoons \frac{N_0}{2}\,\delta(t)$$

Potenza in uscita ad un sistema avente risposta in frequenza H(f)

Il setup è il seguente: abbiamo in ingresso il rumore termico; questo viene moltiplicato per la risposta in frequenza del sistema per ottenere in uscita il segnale x(t):

Come Calcolare la Potenza in uscita ad un sistema LTI avente una risposta in frequenza (come un filtro) $H(\cdot)$



Potenza uscita $x(\cdot)$?

Possiamo sfruttare le uguaglianze scoperte finora per trovarci l'autocorrelazione del segnale in uscita; sappiamo che l'autocorrelazione di un segnata valutata in zero ci restituisce l'energia/potenza del segnale:

Se in uscita abbiamo $x(t)$ allora :

$$S_x(f) = S_w \cdot |H(f)|^2 \rightleftharpoons r_x(\tau) \qquad \text{inoltre} \qquad r_x(0) = P_x$$

Quindi : Calcolare la potenza a partire dal rumore, $H(f)$ ed uscita

1. $S_x(f) = S_w |H(f)|^2$
2. $S_x(f) = S_w |H(f)|^2 \rightleftharpoons r_x(\tau)$
3. $\tau = 0 \Rightarrow P_x = r_x(\tau)$

Abbiamo visto che la densità spettrale di potenza del rumore è una costante, quindi:

→ Calcoliamo la Potenza del Rumore

$$1. \quad S_x = |H(f)|^2 \cdot \overbrace{\frac{N_0}{2}}^{S_w}$$

A questo punto spolveriamo Wiener-Kintchine che ci dice che la densità spettrale di un segnale trasformata corrisponde all'autocorrelazione; ci basta trasformare per ottenere:

$$2. \quad S_x = |H(f)|^2 \cdot \overbrace{\frac{N_0}{2}}^{S_w} \rightleftharpoons r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \cdot |H(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f\tau} \, df$$

Prima di risolvere l'integrale (non vedevi l'ora eh?), semplifichiamoci la vita e poniamo subito Tau = 0 (per calcolare la potenza):

3. Per $\tau = 0 \rightarrow \tau_x(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, df = P_x = \cancel{2} \cdot \frac{N_0}{\cancel{2}} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$

Potenza di x

Banda Di Rumore

La banda di rumore è essenzialmente il range di frequenze in cui si trova **il rumore termico**. Di conseguenza il segnale sarà disturbato dal rumore in quella determinata banda.

La banda di rumore **monolatera** può essere scritta come:

$\Rightarrow$ Esprimiamo il tutto in termini di Banda equivalente di rumore:

$$B_N = \int_0^{+\infty} \left| \frac{H(f)}{H(f_0)} \right|^2 df = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

$H(f_0)$ è H nel massimo
Inoltre $H(f_0)$ è cost

Ci accorgiamo che la banda equivalente di rumore e la nostra potenza condividono lo stesso integrale; la banda, però, è divisa per il modulo quadro della risposta in frequenza valutata in f_0; ci basta quindi moltiplicare per questo valore per sostituire la banda equivalente di rumore all'interno della potenza:

$\rightarrow$ Possiamo scrivere la banda come:

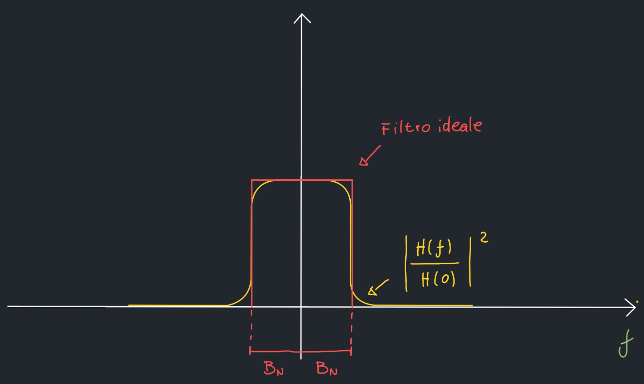
$$P_x = N_0 \underbrace{\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df}_{B_N \cdot |H(f_0)|^2} = N_0 \cdot |H(f_0)|^2 \cdot B_N$$

Capiamo che la banda di rumore è proprio la **banda del filtro ideale avente lo stesso guadagno H(f_0)** di centro banda e la cui funzione di trasferimento dell'energia sottende la stessa area.

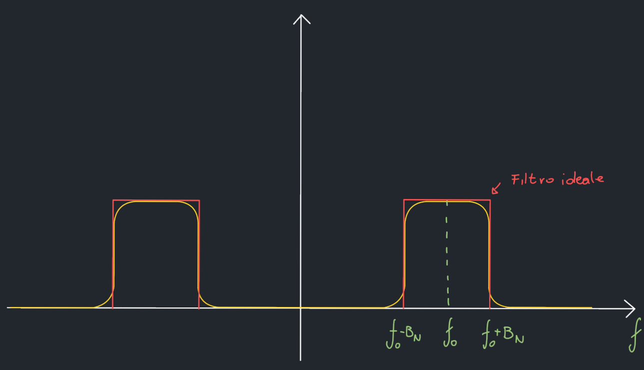
Nella pratica abbiamo:

Cosa vuol dire in pratica?

Sistemi passa Basso:



Sistemi Passa Alto



Banda di rumore a partire dalla risposta impulsiva

Possiamo scriverci la banda di rumore sottoforma di risposta impulsiva, visto che la risposta in frequenza non è altro che la trasformata della risposta impulsiva:

Banda equivalente di rumore a partire dalla risposta impulsiva

$$\text{Se} \quad B_N = N_0 \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df \qquad e \quad H(f) \rightleftharpoons h(t)$$

$$\hookrightarrow \quad H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \, dt$$

$$\Rightarrow \quad 2B_N = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \, dt}{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \, dt \right|^2}$$

Banda eq di rumore in termini di risposta impulsiva