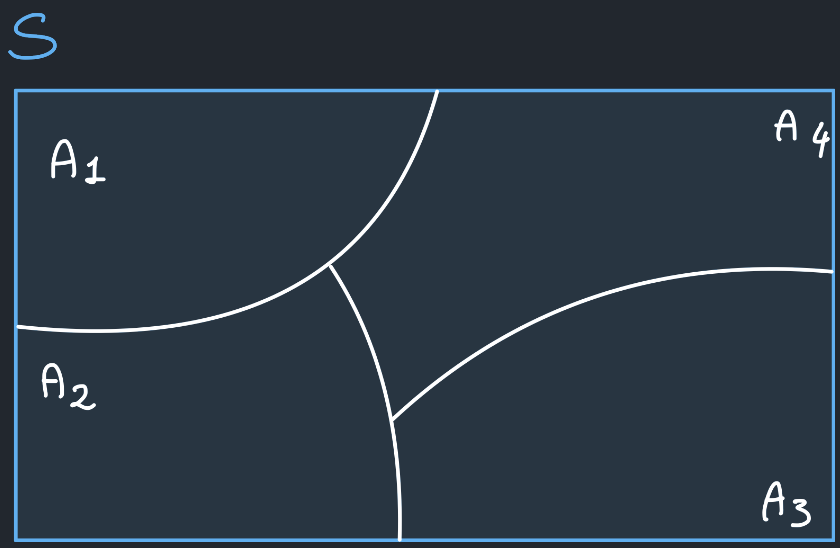
Teorema della probabilità totale

Questo teorema ci **permette di calcolare la probabilità di un evento composto da più *sottoeventi* o *sottogruppi***. Questa tecnica è molto utile nel momento in cui dobbiamo calcolare la probabilità di un evento particolarmente difficile da calcolare direttamente; per questo motivo **scomponiamo il problema** in sottoproblemi, e ne risolviamo uno alla volta.

Enunciazione del teorema della probabilità totale

Siano A_1, A_2, A_n **un insieme** di eventi che **partizionano** uno spazio degli eventi S e che le singole probabilità sono maggiori di zero...



Che cosa vuol dire che questi eventi partizionano uno spazio degli eventi??

Lo spazio degli eventi è lo spazio che **racchiude tutti** gli eventi di un esperimento; gli eventi partizionano uno spazio se si verificano queste due condizioni:

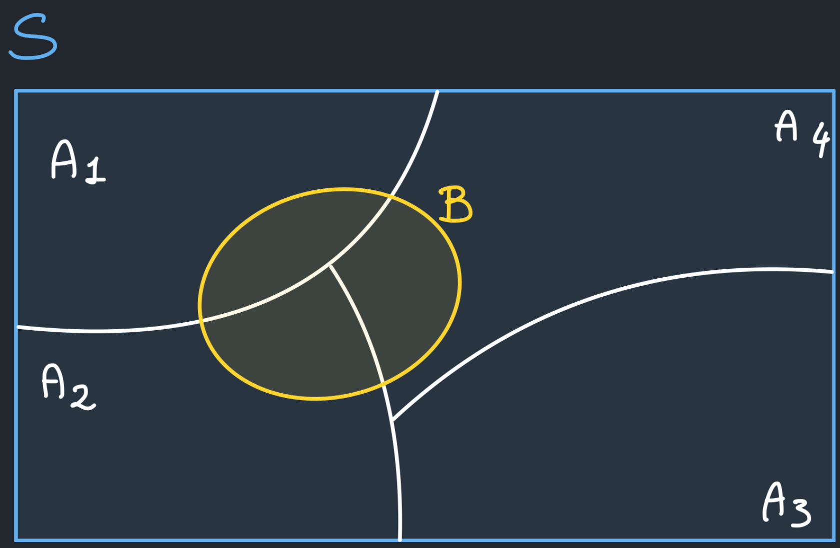
1. L'unione degli eventi ci restituisce S:
   - L'unione degli eventi è S:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

2. L'intersezione degli eventi è l'insieme vuoto:
   - L'intersezione degli eventi è nulla:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$$

Per **un evento qualsiasi B** che andiamo a "disegnare" in S...



Possiamo scrivere la probabilità del nuovo evento B come:

→ Possiamo scrivere la probabilità di B come:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

Consiglio sugli esercizi

Spesso negli esercizi la risposta viene calcolata sia tramite la probabilità totale sia tramite Bayes; prima dovremo trovare la probabilità che ci interessa tramite la probabilità totale, poi scriverci la probabilità condizionata tramite Bayes.

Dimostrazione del teorema della probabilità totale

Per dimostrare questo teorema procediamo per step:

Step 1: asserto

Sappiamo che la probabilità di B può essere calcolata con la probabilità dell'intersezione tra B e l'insieme spazio degli eventi S:

1) $$P(B) = P(B \cap S)$$

Step 2: Partizionamento

Abbiamo detto quando abbiamo spiegato il teorema, che lo spazio degli eventi viene **partizionato**, quindi possiamo scrivere S come **partizione**:

2) Sappiamo che S può essere scritto come partizione:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Unione delle partizioni

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap S) = P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Step 3: Regola distributiva

Possiamo a questo punto distribuire l'intersezione all'interno dell'operazione di unione delle partizioni:

3) Regola distributiva

$$B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = B \cap \left[\{A_1, A_2, A_n\}\right] = B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup B \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$$

$$\Rightarrow P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right)$$

Step 4: Regola della partizione

Possiamo scriverci la probabilità dell'unione di due eventi come **la somma** delle singole probabilità:

4) Regola Della partizione

Possiamo scriverci l'unione come una somma di probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Step 5: Regola della moltiplicazione

Possiamo scriverci l'intersezione tramite la probabilità condizionata (vista nella lezione 2.03, regola della moltiplicazione):

5) Regola della moltiplicazione

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

Legge della prob. Totale