Recap: Gaussiana Standard

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\underset{\mu}{0}, \underset{\sigma^2}{1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$ Integrale di Gauss

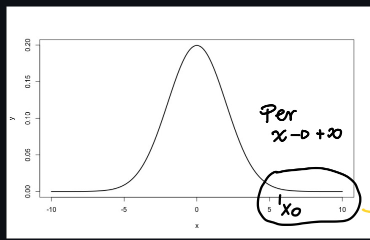
Q-Function

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv \implies \int_{x_0}^{+\infty} \underset{\text{PDF}}{f_X(v)} \, dv = 1 - \underset{\text{CDF}}{F_{X_0}(x)}$$

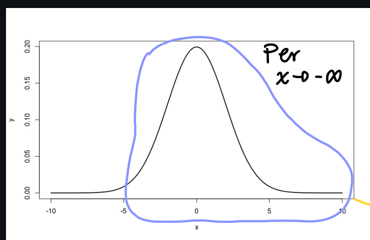
Complementare della CDF

Proprietà della Q-Function

- $Q(+\infty) = 0$ Perché $0 < Q(x) < 1 = Q(-\infty)$
- $x_1 < x_2 \implies \underline{Q(x_1) > Q(x_2)}$
  - $\to$ La $Q(x)$ al contrario della CDF è sempre Decrescente



"Selezioniamo" solo la parte finale della Gaussiana $\to 0$



"Selezioniamo" la maggior parte della Gaussiana $\to 1$

- Simmetria $\to$ $Q(-x) = 1 - Q(x)$

Gaussiana Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) \implies P(\{\sigma X_0 + \mu \leq x\})$$

$$\implies F_X(x) = P\left(\left\{X_0 \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right\}\right) = F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

CDF della V.A. gauss Standard X_0 Valutata in $\frac{x_0 - \mu}{\sigma}$

Riusciamo a calcolare il valore della prob. che $P(\{X \leq x\})$

Esempio di simmetria

$$P(\{X \le x\}) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

P5: $P(\{X > x\}) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Consideriamo la gaussiana non standard

$$\Rightarrow Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} \, dx \quad ?$$

P6: $P(\{x_1 < X \le x_2\})$

Sfruttiamo le proprietà della CDF

→ Sappiamo che è la CDF di: $F_X(x_2) - F_X(x_1)$

$P(\{X < x_2\})$ $\quad$ $P(\{X \le x_1\})$

→ Sappiamo che la CDF = $1 - Q(x)$

$\Rightarrow F_X(x_2) - F_X(x_1) = \cancel{1} - Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \cancel{1} + Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

Quindi: $P(\{x_1 < X \le x_2\}) = \underline{Q\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)}$

P7: $P(\{-x < X \le x\}) = F_X(x) - F_X(-x) = \cancel{1} - Q(-x) - \cancel{1} + Q(x) =$

$$= \underbrace{Q\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right)}_{\text{la scriviamo come...}} - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right)$$

Stessa funzione Q

Due segni opposti

$Q\left[-\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right)\right] \to Q(-x) = 1 - Q(x)$

Calcolare la PDF di una gaussiana Non Standard

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv \rightarrow \frac{d}{dx} CDF = \boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

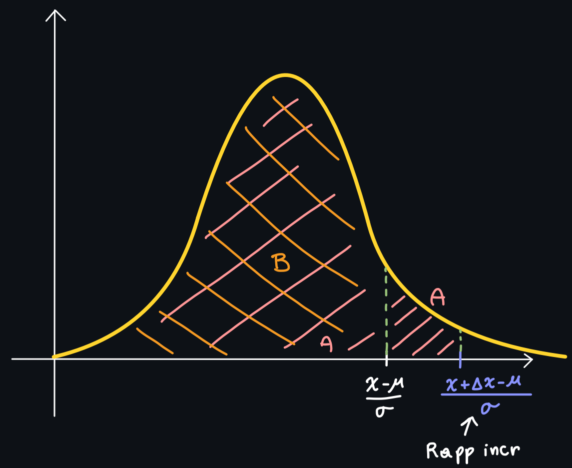
Espressione da Dimostrare

Dimostrazione

① Deriviamo $F_X(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$ → La Derivata è il limite del rapporto Incrementale → $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv - \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{\Delta x}$$

limite del rapp. incrementale



Se calcoliamo A−B otteniamo

$$\int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} f_X(x)$$

Teorema della media Integrale

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)$$

Ampiezza

Non è altro che la funzione valutata in $x_0 \in [a,b]$

$$\text{Rapporto Incrementale} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$\int_a^b f_X(x)\,dx = (b-a) f(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{x}-\cancel{\Delta x}+\cancel{\mu}-x+\mu}{\sigma}}_{b-a} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}}}_{f_X(x_0)}$$

Limite del rapp incr ricavato prima

Siccome $a < x_0 < b \rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} < x_0 < \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} \rightarrow x_0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x < \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} \\ x > \frac{x-\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma} = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Termini comuni

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

PDF di una V.A. Gaussiana Non Standard

$-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$ Argomento dell'esponenziale

Variabili Aleatorie Mixture

Consideriamo due variabili Aleatorie X_1 e X_2
Aventi come PDF $f_{X_1}(x)$ e $f_{X_2}(x)$.

Possiamo combinare X_1 ed X_2 per ottenere X_3

$$\to f_X(x) = c\, f_{X_1}(x) + (1-c)\, f_{X_2}(x) \quad \text{con } c \in [0,1]$$

Le proprieta' sono rispettate?

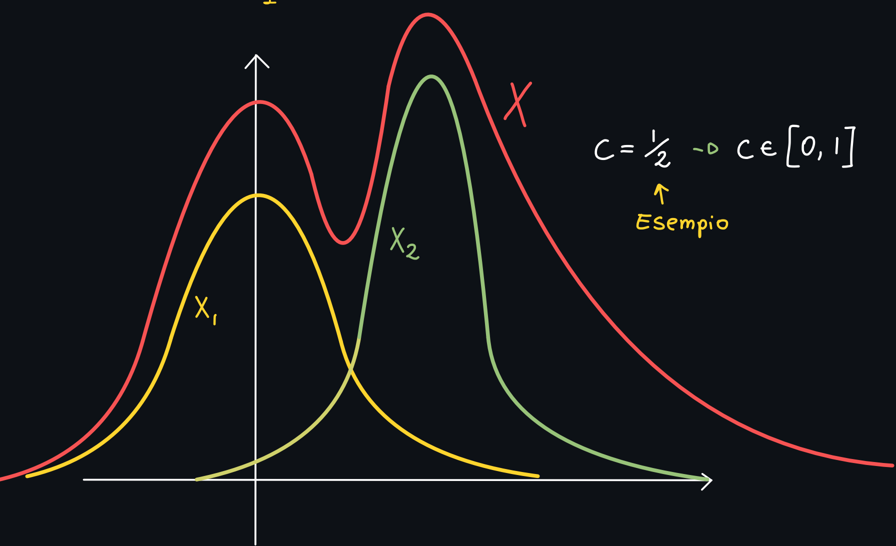
1) $f_X(x) > 0$? $\to$ ottenuta come combinazione lineare di due CDF>0 $\to$ Abbiamo inoltre scelto $c \in [0,1]$ $\to$ Non Negativa ✓

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ $\to$ Se vale la linearita' dell'integrale, la Prop. e' rispettata $\to$ $\int a+b \, dv = \int a \, dv + \int b \, dv$

a e b funzioni

Dimostriamo

$$\to c\underbrace{\int f_{X_1}(x)\,dx}_{1} + (1-c)\underbrace{\int f_{X_2}(x)\,dx}_{1} = \cancel{c} + 1 - \cancel{c} = 1$$ ✓



$c = \frac{1}{2} \to c \in [0,1]$

Esempio

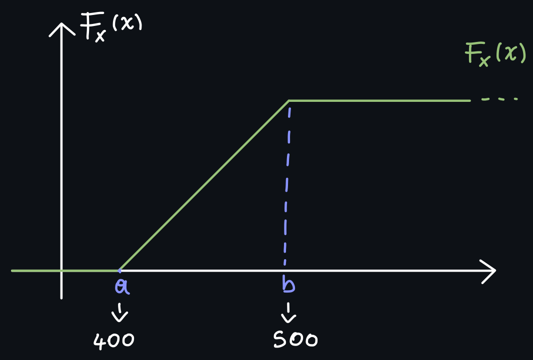
Raccolta di Esercizi (Tracce presenti sul file MarkDown

1) Range costo $(400 \to 500)$€

P("costo compreso tra 450 e 500 €"

$\to X \sim U(400, 500)$

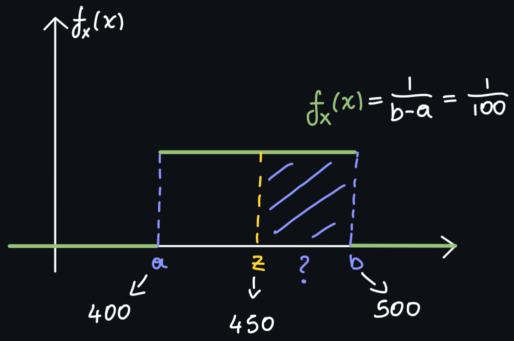
$\Rightarrow P(\{450 < X < 500\}) = ?$

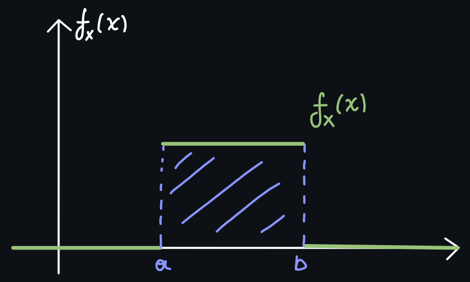


$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Soluzione

Siccome la PDF è costante, la prob è:





$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$P(\{450 < X < 500\}) = \int_z^b f_X(x) = \left[F_X(500) - F_X(450)\right]$$

$$\frac{1}{100}\int_{450}^{500} dx = \frac{1}{100}\left[500 - 450\right] = \frac{1}{100} \cdot 50 = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{x-a}{b-a}\right]_{450}^{500} = \cancel{\frac{500-400}{500-400}} - \frac{450-400}{500-400} = 1 - \frac{50}{100} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

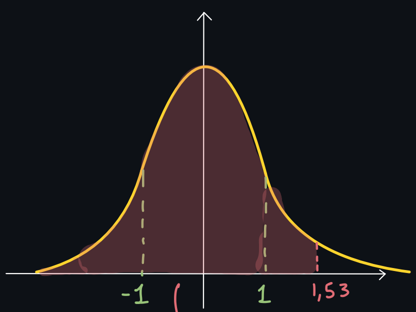
Sono due strade equivalenti ed entrambe valide

2) $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ← standard

$$PDF_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$CDF_y = 1 - F_{X_0}(x)$$

a) $P(\{X_0 \leq 1{,}53\})$



$$F_{X_0}(1{,}53) = 1 - Q(1{,}53) = 1 - 0{,}0630083 = 0{,}937$$

Usiamo la TABELLA

Stesso Risultato

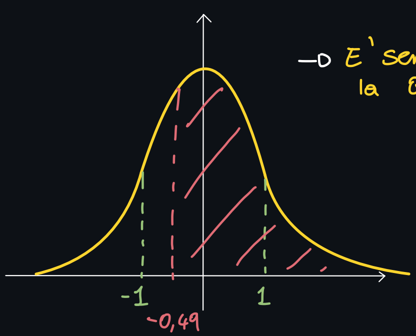
Usando la PDF:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1{,}53} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{1{,}53} = 0{,}936\ldots$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$Q(x)$

b) $P(\{X_0 \geq -0{,}49\})$



→ E' semplicemente la Q function → $P = Q(-0{,}49)$

c) $P(\{-1 < X < 1\}) = [1 - Q(1)] - [1 - Q(-1)] = \cancel{1} - Q(1) \cancel{-1} + Q(-1) = Q(-1) - Q(1)$

$Q(-1) = 1 - Q(1)$

$= 1 - 2Q(1) = 1 - 0{,}159 = 0{,}682 = 68\ \%$

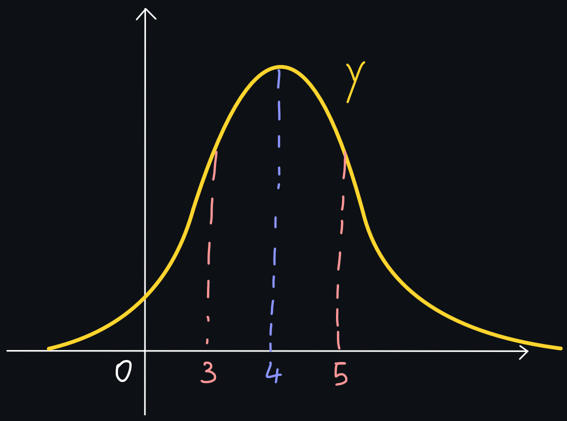
3) Gaussiana Non Standard

$Y = X_0^{1} + 4$

G. Standard

$\rightarrow Y \sim \mathcal{N}(4, 1)$

a) $P(\{Y \geq 5\}) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5-4}{1}\right) = Q(1) = 0{,}159 \cong 15\%$



b) $P(\{3 < Y < 5\}) = [1 - Q(1)] - \left[1 - Q\left(\frac{3-4}{1}\right)\right] = \cancel{1} - Q(1) - \cancel{1} + Q(-1) = Q(-1) - Q(1)$

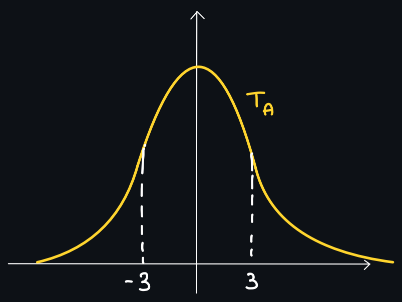
$= 1 - Q(1) - Q(1) = 1 - 2Q(1) = 1 - 2 \cdot 0.159 = 0{,}68 \sim 68\%$

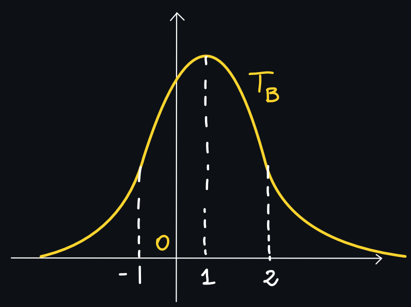
1:32

Ex. 3 In un frigorifero sono conservate 5 provette della sostanza A e 15 della sostanza B. La temperatura della sostanza A viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (0,3) mentre quella della sostanza B viene modellata come una variabile gaussiana con parametri (1,2). Avendo misurato una temperatura minore di zero in una provetta scelta a caso, calcolare la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza di tipo A.

5 provette di A $\to X \sim \mathcal{N}(0,3)$

15 provette di B $\to X \sim \mathcal{N}(1,2)$





$P(A / T<0) = \ ?$

Siccome abbiamo 5 di A e 15 di B, A e B non sono equiprobabili!

$P(\text{P. di estrarre A}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
$P(\text{P. di estrarre B}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$] diversi

$\Rightarrow$ Sfruttiamo le leggi della probabilita': Legge di Bayes

Se usiamo Gauss
Non St. $\to Q\left(\frac{0-0}{\sqrt{3}}\right) = Q(0)$

$$P(A / T<0) = \frac{P(A)}{P(T<0)} \cdot P(T<0 / A)$$

Invertiamo

$\Rightarrow P(T<0 / A) = P(T_A < 0) = 1 - Q(0) = \frac{1}{2}$

"Prob che T sia zero dopo che si verifica A" $\equiv T_A$

$$P(T<0) = P(A) \cdot P(T<0 / A) + P(B) \, P(T<0 / B)$$

Legge della Prob. Totale

$P(T_B < 0) = 1 - Q\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q(0{,}7071) = 1 - 0.47 = 0{,}53$

$\to \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{53}{100} = 0{,}52$

0,41 Risultato prof?

Quindi: $P(A / T<0) = \frac{P(A)}{P(T<0)} \cdot P(T<0 / A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{41}{100}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{82} \simeq 30\%$

Probabilita' di pescare una provetta A