Legami input - output per le Densita' Spettrali

$x_1(\cdot) \longrightarrow \boxed{h_1(\cdot)} \longrightarrow y_1(\cdot)$

$x_2(\cdot) \longrightarrow \boxed{h_2(\cdot)} \longrightarrow y_2(\cdot)$

$\xrightarrow{\text{Proprieta'}}$ (a)

$r_{x_1x_2} \longrightarrow \boxed{r_{h_1h_2}} \longrightarrow r_{y_1y_2}$

$$r_{y_1y_2} = r_{x_1x_2} * r_{h_1h_2}$$

$r_{h_1h_2} = h_1(\cdot) * h_2^*(-(\cdot))$

Dimostrazione 3.1.3 lez

Recap

1) $r_{h_1h_2}(\cdot) = h_1 * h_2^*(-(\cdot))$

$$\Rightarrow r_{y_1y_2} = \left[h_1 * h_2^*(-(\cdot))\right] * r_{x_1x_2} \xLeftrightarrow{\text{F.T.}} S_{y_1y_2} = \left[H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot)\right] \cdot S_{x_1x_2}$$

$S_{x_1x_2} \longrightarrow \boxed{H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot)} \longrightarrow S_{y_1y_2}$

Caso particolare 1:

$x(\cdot) \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow y(\cdot)$

$x(\cdot) \longrightarrow \boxed{\delta(\cdot)} \longrightarrow x(\cdot)$

Applichiamo la prop $\longrightarrow$ (a)

$r_x(\cdot) \longrightarrow \boxed{r_h(\cdot)} \longrightarrow r_y(\cdot)$

$$r_y(\cdot) = \overset{h(\cdot) * h(-(\cdot))^*}{r_h(\cdot)} * r_x(\cdot) \Longleftrightarrow S_y(\cdot) = \underbrace{\left[H(\cdot) \cdot H(\cdot)^*\right]}_{|H(\cdot)|^2} \cdot S_x(\cdot)$$

$$\Rightarrow r_y(\cdot) = r_h(\cdot) * r_x(\cdot) \Longleftrightarrow S_y(\cdot) = |H(\cdot)|^2 \cdot S_x(\cdot)$$

$S_x(\cdot) \longrightarrow \boxed{|H(\cdot)|^2} \longrightarrow S_y(\cdot)$

Caso particolare 2: Densita' spettrali non mutue

$$H_1 = H_2 \Rightarrow H_1(\cdot) \cdot H_2^*(\cdot) = |H(\cdot)|^2$$

Quindi: $S_y(\cdot) = |H(\,)|^2 \cdot S_x(\,)$

Caso 3: Densita' Spettrali mutue

Abbiamo $$\underbrace{S_{xy}(\cdot)}_{\updownarrow \; r_{xy}} = \underbrace{S_x(\cdot)}_{\updownarrow \; r_x(\cdot)} \cdot \underbrace{H^*(\cdot)}_{\updownarrow \; h(-(\cdot))^*} \Longleftrightarrow r_{xy} = r_x(\cdot) * h(\cdot) = r_x(\cdot) * \left[h(\cdot) * h^*(-(\cdot))\right]$$

Analogamente $\rightarrow$ $S_{yx}(\cdot) = S_x(\cdot) \cdot H(\cdot)$

Esempio : Rumore termico

Il Rumore termico ha uno SPETTRO BIANCO : ha tutte le componenti spettrali aventi TUTTE LA STESSA AMPIEZZA

Costante di Boltzmann

Temperatura

$$S_w(f) \simeq \frac{KT}{2}$$

Rumore

Densita' Spettrale Del Rumore

Poniamo $\frac{KT}{2} = \frac{N_0}{2}$ per frequenze $< 10^{12}$ Hz

Costante

↳ Tradotto per $f < 10^{12}$ Hz lo spettro E' COSTANTE !

Se il Rumore ha Densita' Spettrale del tipo S_w , quale sara' la funzione di Autocorrelazione del rumore bianco?

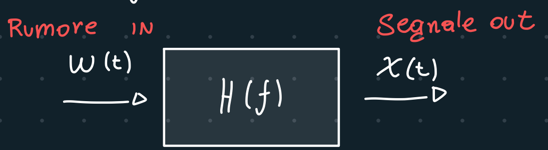
Sappiamo che $r_x(\cdot) \rightleftharpoons S_x(\cdot) \Rightarrow S_w(f) \rightleftharpoons r_w(\tau)$

Visto che lo spettro per $f < \frac{N_0}{2} = const \Rightarrow S_w(f) = A$ cost

quale e' quel segnale che trasformato ci da uno SPETTRO COSTANTE ?

$$\underset{\text{tempo}}{A\,\delta(t)} \rightleftharpoons \underset{\text{Freq}}{A} \Rightarrow S_w(f) \rightleftharpoons \frac{N_0}{2}\,\delta(t)$$

Come Calcolare la Potenza in uscita ad un sistema LTI avente una risposta in frequenza (come un filtro) $H(\cdot)$



Potenza uscita $x(\cdot)$?

Se in uscita abbiamo $x(t)$ allora :

$$S_x(f) = S_w \cdot |H(f)|^2 \rightleftharpoons r_x(\tau) \qquad \text{inoltre} \qquad r_x(0) = P_x$$

Quindi : Calcolare la potenza a partire dal rumore, $H(f)$ ed uscita

1. $S_x(f) = S_w\,|H(f)|^2$
2. $S_x(f) = S_w\,|H(f)|^2 \rightleftharpoons r_x(\tau)$
3. $\tau = 0 \Rightarrow P_x = r_x(\tau)$

→ Calcoliamo la Potenza del Rumore

1. $$S_x = |H(f)|^2 \cdot \overset{S_w}{\frac{N_0}{2}}$$

2. $$S_x = |H(f)|^2 \cdot \overset{S_w}{\frac{N_0}{2}} \Longleftrightarrow \tau_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \cdot |H(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f \tau} \, df$$

3. Per $\tau = 0$ → $$\tau_x(0) = \underbrace{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}_{\text{Potenza di } x} = P_x = \cancel{2} \cdot \frac{N_0}{\cancel{2}} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df$$

⇒ Esprimiamo il tutto in termini di Banda equivalente di rumore:

$$B_N = \int_0^{+\infty} \left| \frac{H(f)}{H(f_0)} \right|^2 df = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df$$

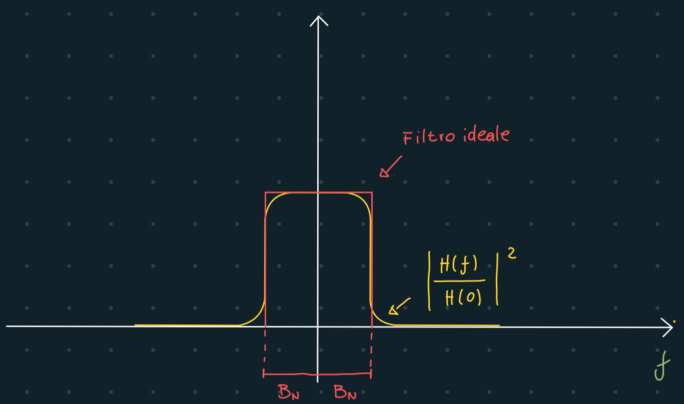
$H(f_0)$ è H nel massimo
Inoltre $H(f_0)$ è cost

→ Possiamo scrivere la banda come:

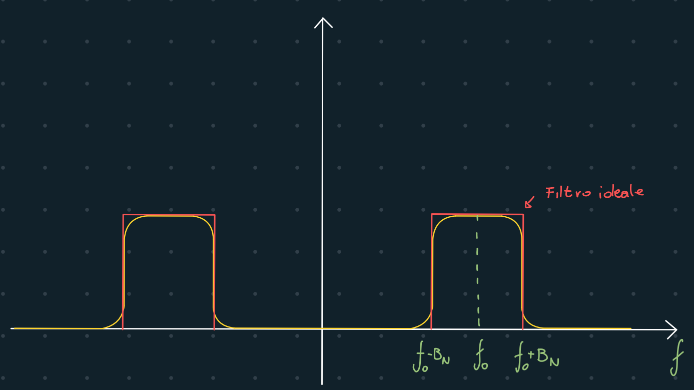
$$P_x = N_0 \underbrace{\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}_{B_N \cdot |H(f_0)|^2} = N_0 \cdot |H(f_0)|^2 \cdot B_N$$

Cosa vuol dire in pratica?

Sistemi passa Basso:



Sistemi Passa Alto



Banda equivalente di rumore a partire dalla risposta impulsiva

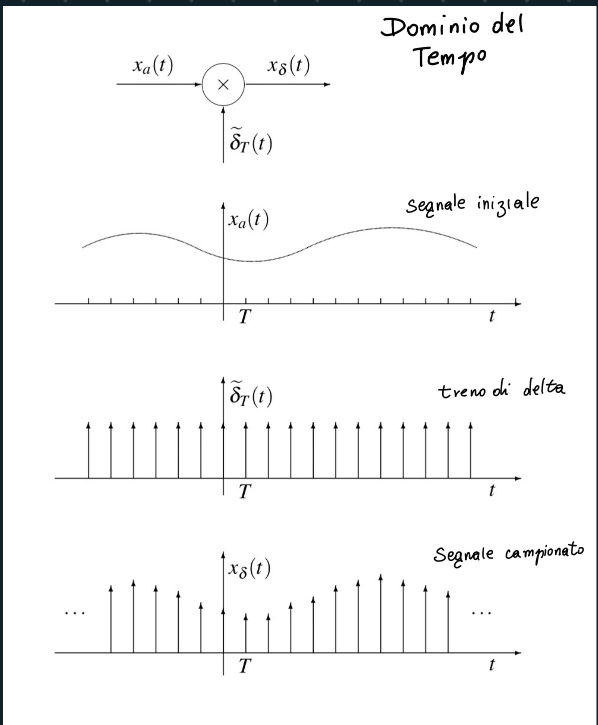
Se $B_N = N_0 \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df$ e $H(f) \rightleftharpoons h(t)$

$\hookrightarrow H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} \, dt$

$$\Rightarrow 2 B_N = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \, dt}{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \, dt \right|^2}$$

Banda eq di rumore in termini di risposta impulsiva

Campionamento dei Segnali



- Continuo

Periodo $f = \frac{1}{T}$

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(kT)\cdot\delta(t-kT)}$$

↳ $x(t-kT)\cdot\delta(t-kT)$ Prop delta

→ Il segnale continuo diventa una sequenza una volta campionato.

Siamo interessati a scoprire quando da una sequenza dei campioni è possibile ricostruire il segnale iniziale

Campionamento Ideale

Nel dominio della frequenza abbiamo

$$x_\delta(t) \overset{FT}{\rightleftharpoons} \underset{\underset{X_\delta(f)}{|||}}{rep_T[x(t)]} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{m}{T}\right) = f_c \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f-kf_c)$$

$\frac{1}{T} = f_c$ frequenza di Campionamento

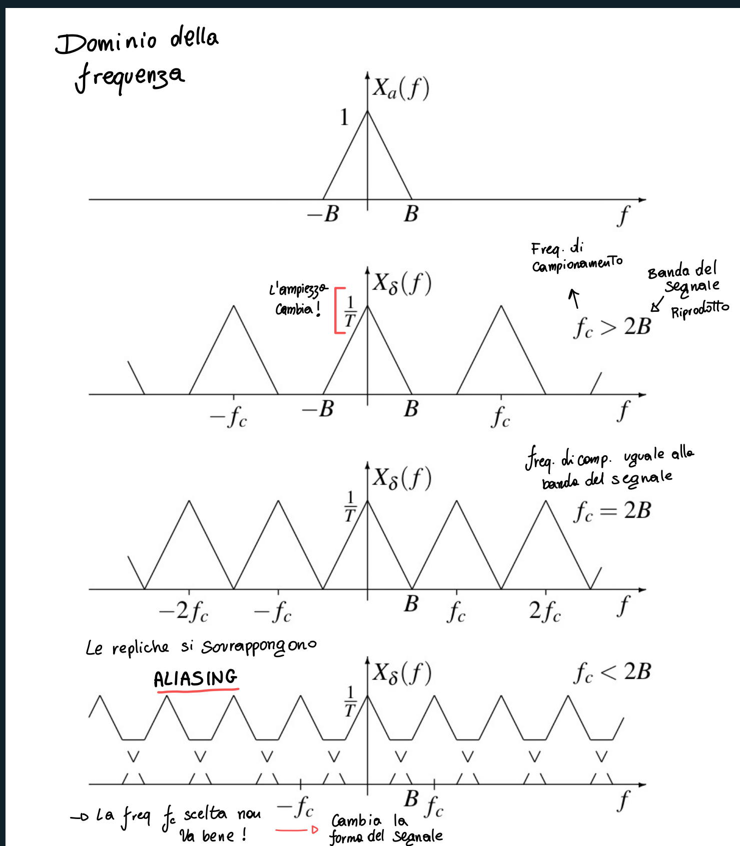
Condizione di NYQUIST

Affinché il segnale possa essere ricostruito a partire dalla sua versione campionata, dobbiamo avere:

$$\boxed{f_c \geq 2B}$$

Equivale a dire $\frac{1}{T} \geq 2B$

→ Siccome T proviene dal campionamento, durante quella fase dobbiamo stare attenti a prendere un PERIODO DI CAMPIONAMENTO tale che, appunto $1/T \geq 2B$



Esercizio 1:

$X(f) = \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)$, $h(t) = -\frac{1}{2}\delta(t) + \delta(t-\frac{T}{2}) - \frac{1}{2}\delta(t-T)$ Calcolare $y(t) = ?$

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{F.T.}{\rightleftharpoons} Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Procedimento 1: $X(f) \rightleftharpoons x(t)$, $y(t) = x(t) * h(t)$ Passo 1:

$$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{Sinc}^2(fT) \Rightarrow A\Lambda\left(\frac{f}{T}\right) \rightleftharpoons AT\,\text{Sinc}^2(tT)$$

$$\rightarrow X(f) = \Lambda\Big(\frac{f}{\underset{T}{2B}}\Big) \rightleftharpoons 2B\,\text{Sinc}^2(t\,2B) \quad x(t)$$

passo 2: $y(t) = x(t) * h(t) = 2B\,\text{Sinc}^2(t2B) * \left[-\frac{1}{2}\delta(t) + \delta(t-\frac{T}{2}) - \frac{1}{2}\delta(t-T)\right]$

ci ricordiamo delle prop della δ

$$\begin{cases} x(t)*\delta(t-T_0) = x(t-T_0) \\ x(A\cdot t)*\delta(t-T_0) = x[A(t-T_0)] \end{cases}$$

$\rightarrow$ Applichiamo le prop. $\rightarrow y(t) = -B\,\text{Sinc}^2[2B\cdot(t-0)] + 2B\,\text{Sinc}^2\left[2B\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] - B\,\text{Sinc}^2[2B(t-T)]$

$$= -B\,\text{Sinc}^2(2B) + 2B\,\text{Sinc}^2\left[2B\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] - B\,\text{Sinc}^2[2B(t-T)]$$

Procedimento 2: $h(t) \rightleftharpoons H(f)$, $Y(f) = X(f)\cdot H(f)$, $Y(f) \rightleftharpoons y(t)$

Passo 1: Sappiamo che $A\delta(t) \rightleftharpoons A$, $x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f)\cdot e^{J2\pi f T_0}$

$$h(t) \rightleftharpoons -\frac{1}{2} + 1\cdot e^{J2\pi f \frac{T}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-J2\pi f T} = H(f)$$

$T_0 = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow Y(f) = \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)\cdot\left[-\frac{1}{2} + e^{JfT} - \frac{1}{2}e^{-J2\pi f T}\right] = -\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f}{2B}\right) + \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)e^{J\pi f T} - \frac{1}{2}\Lambda e^{-J2\pi f T}$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}B\,\text{Sinc}^2[2B(t-0)] \qquad 2B\,\text{Sinc}^2\left[2B\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \qquad -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}B\,\text{Sinc}^2[2B(t-T)]$$

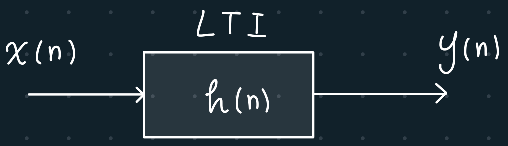
Sappiamo che

$$X(f)\cdot e^{-J2\pi f T_0} \rightleftharpoons x(t-T_0)$$

$$A\Lambda\left(\frac{f}{T}\right) \rightleftharpoons A\cdot T\,\text{Sinc}^2(t\cdot T)$$

Quindi: $y(t) = -B\,\text{Sinc}^2[2Bt] + 2B\,\text{Sinc}^2\left[2B\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] - B\,\text{Sinc}^2[2B(t-T)]$

Esercizio 2:



di tipo MA

MA

$$y(n) = 0.7\,x(n) + 0.2\,x(n-1) + a\,x(n-2)$$

Q: trovare il valore di a per cui si annulla il guadagno in continua

$\rightarrow H(0) = 0$

Passaggio 1:

$$Y(\nu) = 0.7\,X(\nu) + 0.2\,X(\nu)\cdot e^{-j2\pi\nu} + a\,X(\nu)\cdot e^{-j2\pi\nu 2}$$

Siccome $Y(\nu) = H(\nu)\cdot X(\nu) \Rightarrow H(\nu) = \dfrac{Y(\nu)}{X(\nu)}$

$$\Rightarrow H(\nu) = \frac{0.7\cancel{X(\nu)} + 0.2\cancel{X(\nu)}\,e^{-j2\pi\nu} + a\,\cancel{X(\nu)}\,e^{-j4\pi\nu}}{\cancel{X(\nu)}} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}e^{-j2\pi\nu} + a\,e^{-j4\pi\nu}$$

Dove si annulla il guadagno equivale a chiederci: $H(0) = 0$ per quali valori di a?

$$\Rightarrow H(0) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} + a = 0 \Rightarrow a = -\left(\frac{7}{10} + \frac{2}{10}\right) = a = -\frac{9}{10}$$

Q_2: Calcolare il modulo di $H(\nu)$

$$\rightarrow |H(\nu)| = \sqrt{|H(\nu)|^2} = \sqrt{H(\nu)\cdot H(\nu)^*}$$

Step 1:

$$H(\nu)\cdot H(\nu)^* = \underbrace{\left(\frac{7}{10} + \frac{2}{10}e^{-j2\pi\nu} + a\,e^{-j4\pi\nu}\right)}_{H(\nu)}\cdot\underbrace{\left(0{,}7 + \frac{2}{10}\cdot e^{j2\pi\nu} + a\,e^{j4\pi\nu}\right)}_{H^*(\nu)}$$

$$= \frac{49}{10} + \frac{14}{10}e^{j2\pi\nu} + \frac{7}{10}a\,e^{j4\pi\nu} + \frac{14}{10}e^{-j2\pi\nu} + \frac{4}{100} + \frac{2}{10}a\,e^{j2\pi\nu} + \frac{7}{10}a\,e^{-j\pi\nu} + \frac{2}{10}a\,e^{-j2\pi\nu} + a^2$$

Termini noti

$$= \left(\frac{53}{10} + a^2\right) + \left(\frac{14}{10}e^{j2\pi\nu} + \frac{14}{10}e^{-j2\pi\nu}\right) + \left(\frac{7}{10}a\,e^{j4\pi\nu} + \frac{7}{10}a\,e^{-j2\pi\nu}\right) + \left(\frac{2}{10}a\,e^{j2\pi\nu} + \frac{2}{10}a\,e^{-j2\pi\nu}\right)$$

$\rightarrow$ Trasformiamo in cos: $\dfrac{14}{10}\left[\cos(2\pi\nu) + j\cancel{\sin(2\pi\nu)} + \cos(2\pi\nu) - \cancel{j\sin(2\pi\nu)}\right] = \dfrac{14}{10}\cdot 2\cos(2\pi\nu)$

$$= \left(\frac{53}{10} + a^2\right) + \frac{14}{5}\cos(2\pi\nu) + \frac{7}{5}a\cos(2\pi\nu) + \frac{2}{5}a\cos(2\pi\nu)$$

$$\Rightarrow |H(\nu)| = \sqrt{\left(\frac{53}{10} + a^2\right) + \frac{14}{5}\cos(2\pi\nu) + \frac{7}{5}a\cos(2\pi\nu) + \frac{2}{5}a\cos(2\pi\nu)}$$