RACCOLTA DI ESERCIZI

① $X_I \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\mu_1 = 168\,cm$ $\sigma_1 = 5\,cm$ (Italiano) 45 %

$X_S \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\mu_2 = 160\,cm$ $\sigma_2 = 4\,cm$ (Spagnola) 55 %

→ Trovare l'altezza media della popolazione complessiva sapendo che la probabilità che la popolazione sia Italiano è: $P(X_I) = 0{,}45 = 45\%$

- $P(X_I) = 45 \Rightarrow P(X_S) = 1 - 45\% = 55\%$ $\Rightarrow X = X_I + X_S$

Popolazione Totale

$$\Rightarrow F_X(x) = P(\{X \le x\}) = \underbrace{P(\{X \le x\}/X_I)}_{F_X(X_I)} \cdot \underbrace{P(X_I)}_{0{,}45} + \underbrace{P(\{X \le x\}/X_S\}}_{F_X(X_S)} \cdot \underbrace{P(X_S)}_{0{,}55}$$

$$F_X(x) = F_X(X_I) \cdot 0{,}45 \quad F_X(X_S) \cdot 0{,}55$$

→ Ci serve la PDF → Deriviamo → $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(X_I) \cdot 0{,}45 + \frac{d}{dx} F_X(X_S) \cdot 0{,}55$

$$= \underbrace{0{,}45}_{\rho} \cdot f_{X_I}(x) + \underbrace{0{,}55}_{1-\rho} \cdot f_{X_S}(x)$$

Variabile Aleatoria MIXTURE

$f_X(x) = c\, f_{X_1}(x) + (1-c) f_{X_2}(x)$

Quindi $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left[\frac{45}{100} f_{X_I}(x) + \frac{55}{100} f_{X_S}(x) \right] dx$

$$= \frac{45}{100} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_I}(x)\,dx}_{\mu_1} + \frac{55}{100} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_S}(x)\,dx}_{\mu_2} = \frac{45}{100} \cdot 168 + \frac{55}{100} \cdot 160 \cong 163\,cm$$

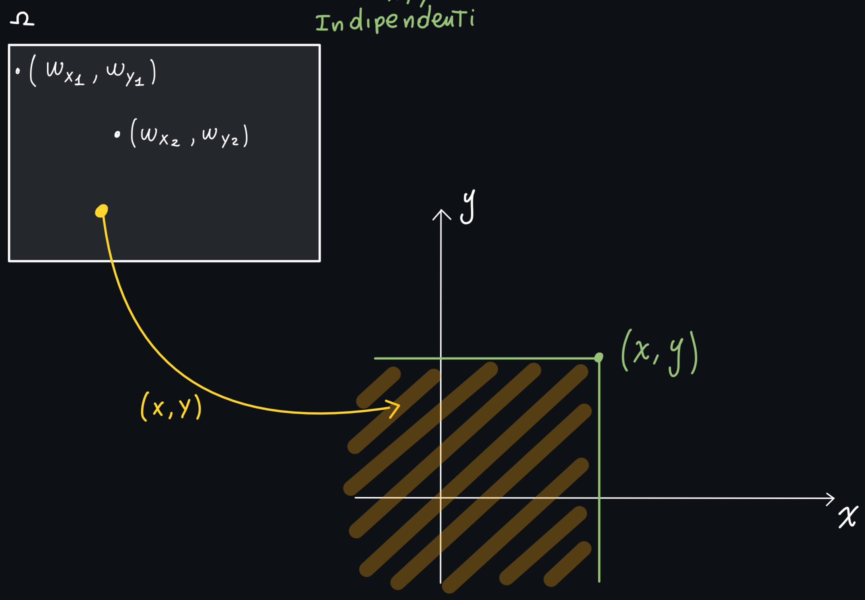
Momenti di ordine 1

Caratterizzazione congiunta di due variabili aleatorie

CDF congiunta di X e Y

Marginali

$$P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) \underset{X,Y \text{ Indipendenti}}{=} \overbrace{P(\{X \le x\})}^{F_X(x)} \cdot \overbrace{P(\{Y \le y\})}^{F_Y(y)}$$



CDF CONGIUNTA

$$F_{XY} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to F_{XY}(x,y) = P(\{X \le x\} \cap \{Y < y\})$$

PDF e PMF congiunte

PMF: Se X e Y sono v.a. <u>discrete</u>, si definisce

$$\underset{\text{PMF}}{P_{XY}} : (x,y) \in \mathcal{A}_X \underset{\text{Prodotto cartesiano tra gli Alfabeti}}{\times} \mathcal{A}_Y \to P_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

PDF: Se X e Y sono v.a. <u>continue</u>, si definisce

$$f_{XY} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f_{XY}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}}_{\text{Derivata II Parziale}} \underbrace{F_{XY}(x,y)}_{\text{Della CDF congiunta}}$$

Distribuzioni Condizionate

CDF condizionata a B EVENTO !!

$$F_X(x \mid B) = P(\{X \le x\} \mid B) = \frac{P(\{X \le x\} \cap B)}{P(B)}$$

Dato l'evento B

CDF Condizionata

PMF Condizionata

$$P_X(x \mid B) = P(\{X = x\} \mid B) = \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)}$$

PMF Condizionata

PDF condizionata $\to$ Se X è continua

$$f_X(x \mid B) = \frac{d}{dx} F_X(x \mid B)$$

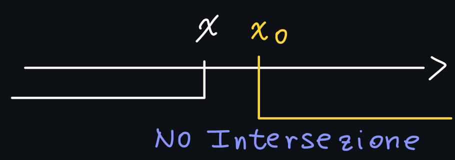
PDF Condizionata

UN ESEMPIO: Radar ad Impulsi

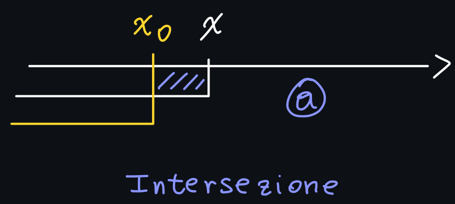
In un sistema radar gli impulsi riflessi hanno un' AMPIEZZA R.
Sullo schermo vengono visualizzati solo gli impulsi tale che $r_{Impulso} \ge x_0$

CDF e PDF visualizzati sullo schermo = ?

$$F_R(x \mid \{R > x_0\}) = \frac{\overset{(a)}{P(\{R \le x\} \cap \{R > x_0\})}}{P(\{R > x_0\})}$$



$\Rightarrow$ Per assicurarci che ci sia intersezione Non Nulla $\to$ $u(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x \ge x_0 \\ 0 & \text{Altro} \end{cases}$



$\Rightarrow$ Possiamo scrivere (a) come:

$$= \frac{P(\{R \le x\} \cap \{R > x_0\})}{P(\{R > x_0\})} = \frac{P(\{R \le x\}) - P(\{R \le x_0\})}{1 - P(\{R \le x_0\})}$$

Sono tutti espressi in CDF

$$\text{(b)} \quad = \frac{F_R(x) - F_R(x_0)}{1 - F_R(x_0)} \cdot u(x - x_0)$$

$u(x-x_0) \to$ gradino che serve ad assicurarsi di avere Intersezione non nulla

CDF della prob di visualizzare l'impulso a schermo

Modelliamo R su una distribuzione di Raylegh

$\to R \sim Ray(\sigma^2)$ $\qquad F_R(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x)$

= Sostituiamo $F_R(x)$ nella (b)

$$= \frac{\left(\cancel{1} - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) - \left(\cancel{1} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\right)}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\right)} \cdot u(x - x_0)$$

$$= \frac{-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}}{-e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\left(-e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)$$

1

$$= \left(1 - e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x - x_0)$$

CDF

- Calcolare la PDF

$$f_R(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(x - x_0) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2 - x_0^2}{2\sigma^2}}$$

PDF

PMF e PDF di X condizionate ad Y VARIABILE ALEATORIA ?!

PMF

X e Y v.a. DISCRETE

$$\rightarrow P_{X|Y}(x|y) = P_X(x \mid \{Y=y\}) = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{P(\{Y=y\})} \quad \text{con } P_Y \neq 0$$

PMF

$$= \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$P_{XY}(x,y)$ ← PMF Congiunta

$P_Y(y)$ ← PMF Marginale di y

PDF

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$f_{XY}(x,y)$ ← PDF Congiunta

$f_Y(y)$ ← PDF Marginale di y

Leggi della probabilita' per la PDF

$$f_{XY}(x,y) = \boxed{f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \cdot f_Y(y|x)}$$ ← Analogo della legge della prob. composta

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} \cdot f_{XY}(y|x)$$ ← Analogo della Legge di BAYES

Inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+} \overset{\text{congiunta}}{f_{XY}(x,y)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx = f_Y(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx}_{=1}$$

$$f_{XY}(x/y) = f_Y(x) f_{X/Y}(x/y)$$

perche' e' una PDF

P: NORMALIZZAZIONE $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} PDF = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = f_Y(y)$$

Se integro la congiunta rispetto ad una delle 2 variabili → ottengo la marginale rispetto all'altra

- Altre Dimostrazioni a 01:12

VARIABILI ALEATORIE STATISTICAMENTE INDIPENDENTI 2.10

Se abbiamo X e Y Indipendenti, allora: $\boxed{F_{XY} = (x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)}$

$\underbrace{X \text{ e } Y}_{\text{V. A. Discrete}}$

Se abbiamo X e Y Indipendenti, allora: $\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$

$\underbrace{X \text{ e } Y}_{\text{V. A. continue}}$

Possiamo generalizzare il concetto:

n V. A. Indipendenti → $\boxed{f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)}$

Caratterizzazione CONGIUNTA SINTETICA: MOMENTI CONGIUNTI DI X e Y di ordine K

↳ $K = m + r$

$$\underbrace{E\left[X^{\overset{K}{\widehat{m}}} \cdot Y^{r}\right]}_{} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot y^r \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy & \text{V. Continue} \\ \displaystyle\sum_{x \in A_X}\sum_{y \in A_Y} x^m \cdot y^r \cdot F_{XY}(x,y) & \text{V. Discrete} \end{cases}$$

Nel caso delle V.A. Singole ci interessavano solo alcuni dei momenti, come media, varianza, ecc.

Nel caso delle V.A. CONGIUNTE La definizione dei momenti di ordine K racchiude TUTTI I MOMENTI

- $m = 0$, $r = 1$

→ $E[X^0 \cdot Y^1] = E[Y] = \mu_Y$ Media di Y

- $m = 1$, $r = 0$

→ $E[X^1 \cdot Y^0] = E[X] = \mu_X$ Media d X

- $m = 2$, $r = 0$

→ $E[X^2 \cdot Y^0] = E[X^2] = \overline{X}^2$ Valore quadratico Medio

- $m = 1$, $r = 1$

→ $E[X \cdot Y] =$
- Media di X e Y
- Correlazione $(X, Y) = r_{XY}$

MOMENTI CENTRALI Di ordine $K = m + r$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^m \cdot (Y-\mu_y)^r\right]}$$

→ Come prima, racchiude tutti i momenti:

- $m = 2,\ r = 0$

→ $\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2 \cdot (Y-\mu_y)^0\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] = \sigma^2$ Varianza

- ...

- $m = 1,\ r = 1$

Covarianza

→ $\mathbb{E}\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = C_{xy} = \mathrm{cov}(X,Y)$

Perchè è importante?

⇒ Quando $C_{xy} = 0$ ⇒ X, Y sono INCORRELATE

Esplicitiamo la media

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = \mathbb{E}\left[xy - \mu_x y - \mu_y x + \mu_x\mu_y\right] =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{r_{xy}} - \mu_x \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\mu_y} - \mu_y \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu_x} + \mu_x \cdot \mu_y = r_{xy} - 2\mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y = r_{xy} - \mu_x\mu_y$$

→ $r_{xy} = C_{xy} + \mu_x\mu_y$

Correlazione

Covarianza

Prodotto delle Medie

→ Cosa succede se le V.A. Sono incorrelate? → $C_{xy} = \emptyset$

→ $\underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{r_{xy}} = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mu_x\mu_y$

Incorrelazione VS Indipendenza

- INDIP ⇒ INCORR

Dimostrazione a 1:32

- INCORR ⇏ INDIP

V.A. Congiuntamente Gaussiane

Essendo congiunta, avremo una PDF BIDIMENZIONALE (funzione a due variabili)

$$X_1 = a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \mu_1$$

$$X_2 = a_{21} \underset{\text{gaussiana Standard}}{X_{01}} + a_{22} X_{02} + \mu_2$$

Inoltre $X_{01} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_{02} \sim \mathcal{N}(0,1)$ Sono Indipendenti

Calcoliamo i momenti congiunti (media)

- $E[X_1] = E[a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \mu_1] = a_{11} \underbrace{E[X_{01}]}_{0} + a_{12} \underbrace{E[X_{02}]}_{0} + \mu_1 = \mu_1$
- $E[X_2] = \mu_2$

(Covarianza)

$$= E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = r_{xy} = E[(a_{11} X_{01} + a_{12} X_{02} + \cancel{\mu_1} - \cancel{\mu_1})(a_{21} X_{01} + a_{22} X_{02} + \cancel{\mu_2} - \cancel{\mu_2})]$$

$$= E[a_{11} a_{21} X_{01}^2 + a_{12} a_{21} X_{02} X_{01} + a_{11} a_{22} X_{01} X_{02} + a_{12} a_{22} X_{02}^2]$$

$$= a_{11} a_{21} \underbrace{E[X_{01}^2]}_{\overline{X_{01}^2} \to 1} + \cancel{a_{12} a_{21} \underbrace{E[X_{01} \cdot X_{02}]}_{\underbrace{E[X_{01}]\, E[X_{02}]}_{0}}} + \cancel{a_{11} a_{22} \underbrace{E[X_{01} X_{02}]}_{0}} + a_{12} a_{22} \underbrace{E[X_{02}^2]}_{1 \leftarrow \overline{X_{02}^2}}$$

$$= a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}$$