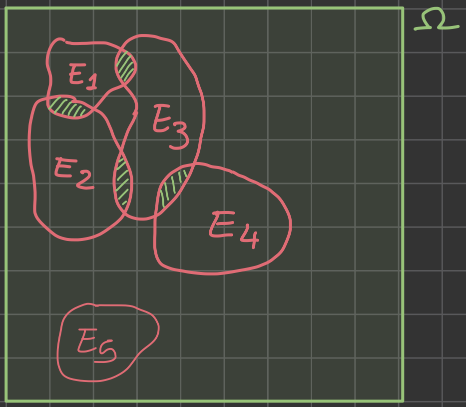
## Piccolo Recap

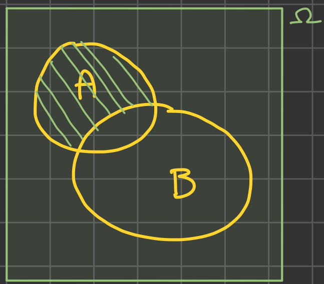
La precedente lezione abbiamo visto come un insieme di eventi, con le due "Regole" viste, è chiuso al complemento e all'unione:
dire che l'insieme è chiuso al complemento diciamo che facendo il complemento di un insieme, l'insieme risultante è dello stesso tipo di quello iniziale.

Siccome lavoriamo con degli insiemi ha senso rappresentarli come tali:




Si nota che $E_1$ ed $E_5$ Non "si intersecano" in questo caso si dice che sono Disgiunti:
Se si verifica $E_1$, $E_5$ non potrà verificarsi, perché non hanno parti in comune. Si dicono anche in mutua esclusione.

Un'altra operazione usata spesso è:




$A - B$ → che non è una operazione di sottrazione, ma è un modo per definire:

$$A - B \equiv A \cap \bar{B}$$

Che indica gli Elementi di A che contemporaneamente non appartengono a B.

## ESEMPIO

Prendiamo un insieme di 3 bit, e facciamo finta che questi siano le nostre uscite sperimentali, risultati di tanti round di lanci di monete $(0 = T, 1 = C)$ dove ogni round è composto da 3 lanci.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} = \Omega$$

Il "gioco" è: se in un round escono un numero di zeri pari vinco, altrimenti perdo.

⇒ Le possibili uscite sp. sono 2: {zeri pari, z. dispari}

È ovvio che è più probabile che esca una sequenza con un numero di zeri dispari.

$E_1$ = zeri pari = {001, 010, 100}

$E_2$ = zeri dispari = $\bar{E}_1$ = {000, 011, 101, 110, 111} = $\Omega - E_1 = \Omega \cap \bar{E}_1$

$E_3$ = {"il primo bit è 1"} = {100, 101, 110, 111}

⇒ $E_4 = E_1 \cap E_3$ = {"gli el comuni tra $E_1$ ed $E_3$"} = {100}

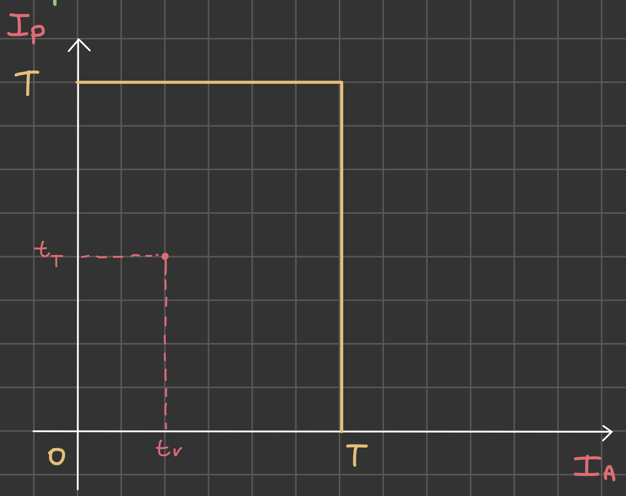
[...]

E le altre operazioni?
Non è detto che definendo solo due operazioni (lez precedente: unione e compl.) siano valide solo quelle; infatti unione e complemento hanno delle implicazioni:

1) Intersezione
Legge di De Morgan: $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ Con questa legge dimostriamo la chiusura rispetto all'intersez.

2) $A - B$
$\rightarrow A - B = A \cap \bar{B} \rightarrow$ Chiusa all'Operazione "−".

Esempio insieme continuo (def vista alla lez 2.01)




L'asse x misura l'istante di arrivo del viaggiatore, mentre y l'istante di partenza del treno.

Se il viaggiatore arriva ad una certa ora, ed il treno parte ad un'altra ora, l'uscita sperimentale corrisponde ad un punto nel quadrato.

$t_v \rightarrow$ tempo arrivo viaggiatore
$t_T \rightarrow$ tempo partenza treno

~ 25:00

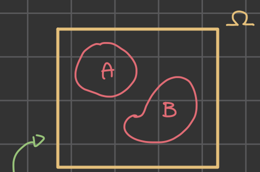
## Assiomi di Kolmogorov

1) Non Negatività
La probabilità si applica sugli eventi, quindi quando si dice "calcola la probabilità di qualcosa" si intende la probabilità di un evento.
La Non Neg. ci dice che se prendiamo un qualunque evento, allora la probabilità di A deve essere SEMPRE maggiore uguale a zero.

- $A \in \mathcal{E} \longrightarrow P(A) \geq 0$

2) Normalizzazione
La probabilità di $\Omega$ (Spazio Campione) è UNO.

- $P(\Omega) = 1$




3) Additività
Se A e B sono due eventi, e se $A \cap B = \emptyset$ (disgiunti), allora la probabilità di $A \cup B$ è la prob di A più quella di B.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) Numerabile Additività

È un'estenzione nel caso lo spazio campione A NON SIA FINITO.
In questo caso ci dice che:

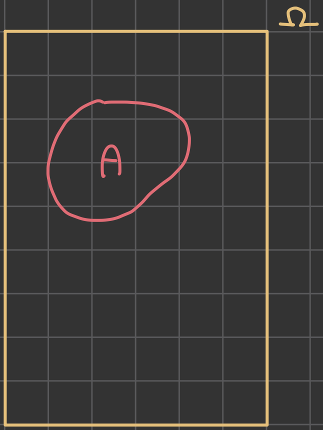
Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ e sono "a due a due disgiunti"
$\hookrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Allora $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ Vera anche per $n \to \infty$

Morale Della favola

Gli Assiomi di K. insieme alle definizioni viste prima $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ Ci definisce Completamente il sistema dal punto di vista probabilistico

Un Esempio




• Qual è la probabilità di $\bar{A}$?

Sappiamo che $A \in \mathcal{E}$, ma anche $\bar{A} \in \mathcal{E}$.
↑ Algebra degli eventi

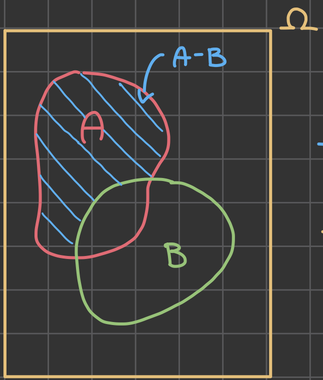
Se conosco $P(A)$, posso conoscere anche $P(\bar{A})$? Come?

Ragionamento:
$\Omega \equiv \{A\} \Rightarrow \mathcal{E} = \{A, \bar{A}, \Omega, \emptyset\}$

$A$ e $\bar{A}$ Sono disgiunti $\to A \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

$\to P(\Omega) = 1 \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Altro esempio: $P(A - B)$




$A - B = A \cap \bar{B}$

$\to$ Scriviamo A e B come due insiemi disgiunti:

$A \cup B = \underbrace{(A \cap \bar{B})}_{A-B} \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$

$\Rightarrow P(A-B) = P(A \cup B) - P(B)$

1:14

Il Terzo Assioma ci fornisce una regola per calcolare la $P(A\cup B)$ quando $A\cap B=\emptyset$

Ma se $A\cap B\neq\emptyset$ allora $P(A\cup B)=?$