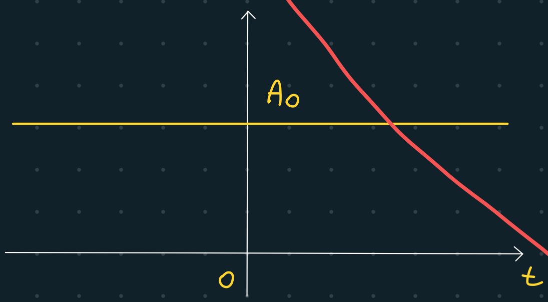
Trasformate di Fourier di segnali elementari

Segnale "dc" - Costante

$x(t) = A_0$ 1. Condizione $\to \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 \, dt = A_0 \cdot t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \to$ Non integrabile Abs.



Come facciamo ad integrare ?

→ Poniamo il caso di avere un segnale $x(t)$ avente la F.T. uguale a:

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega) = A_0 \cdot \delta(\omega)$$

Possiamo trovare il Segnale $x(t)$ con la I.F.T.

$$\to x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 0) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

Proprietà delta
$\delta(t-k) \cdot x(t) = \delta(t) \cdot x(k)$

$$= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) \cdot e^{j0t} \, dt = \frac{A_0}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) \, d\omega}_{1}$$

Proprietà di Normalizzazione

$$= \frac{A_0}{2\pi} \quad x(t) \qquad \Rightarrow \frac{A_0}{2\pi} \Longleftrightarrow A_0 \, \delta(\omega)$$

Linearità

→ Possiamo usare la proprietà della F.T.: $C \cdot x(t) \Longleftrightarrow C \cdot X(f)$

$$\Rightarrow \cancel{2\pi} \cdot \frac{A_0}{\cancel{2\pi}} \Longleftrightarrow 2\pi \, A_0 \, \delta(\omega) \Rightarrow \boxed{A_0 \Longleftrightarrow 2\pi \, A_0 \, \delta(\omega)}$$

$\mathcal{F}(A_0)$??

Segnale "dc" - Costante

$$x(t) = A \Longleftrightarrow X(f) = ?$$

Diciamo di avere $x(t) \Longleftrightarrow X(f) = A \, \delta(f)$ ⇒ la sua Trasf. Inv. sarà:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(A \, \delta(f)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \delta(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df = A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df \Rightarrow A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \, df$$

const

Normalizzazione → 1

$$\Rightarrow \boxed{A \overset{F.T.}{\Longleftrightarrow} A \cdot \delta(f)}$$

$$\delta(t - t_0) \, x(t) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\Rightarrow e^{j2\pi 0 \cdot t} = 1$$

Segnali Esponenziali

▷ $x(t) = e^{-at} u(t)$ con $a > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt = -\frac{e^{-t(a+j\omega)}}{a+j\omega t}\Bigg|_{0}^{+\infty} = 0 + \frac{1}{a+j\omega t} = \boxed{\frac{1}{a+j\omega t}}$$

$\mathcal{F}(e^{-at})$

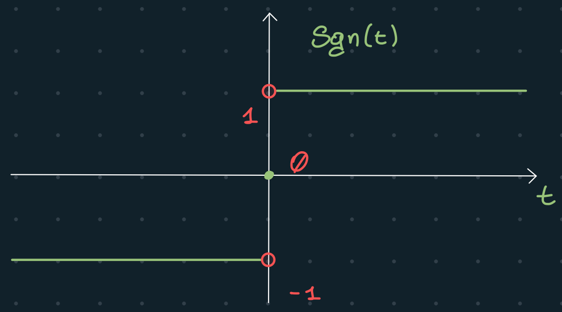
▷ $x(t) = e^{at} u(-t)$ con $a > 0$

$$\mathcal{F}(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a-j\omega} \; e^{t(a-j\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-j\omega}[1-0]$$

$\mathcal{F}(x(t))$

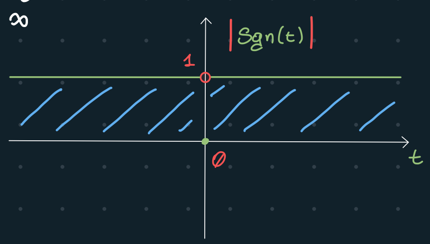
Funzione Signum

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} -1 & t<0 \\ 0 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

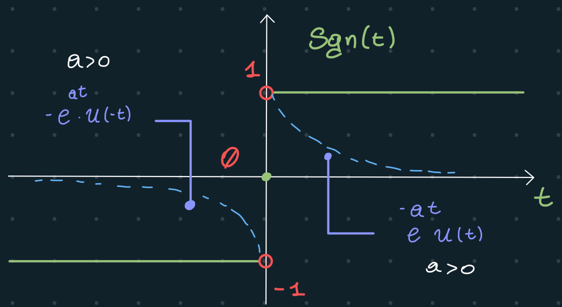


1) Condizione per la F.T. : Segnale integrabile Assolutamente

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |Sgn(t)|\, dt = +\infty \quad \Rightarrow \text{Condizione violata}$$



→ Se riusciamo a far convergere il segnale, sarà possibile integrarlo Assolutamente



→ Possiamo scrivere $Sgn(t) = u(t) - u(-t)$

⇒ la versione convergente sarà:

- $u(t) = \lim_{a \to \emptyset} e^{-at} \cdot u(t)$ quando $a \to 0$ abbiamo $1 \cdot u(t) = u(t)$
- $u(-t) = \lim_{a \to \emptyset} e^{at} \cdot u(-t)$

$$\Rightarrow Sgn(t) = \lim_{a \to \emptyset} \left[e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t) \right]$$

Abs. Integ.

→ Possiamo calcolare la F.T. : $X(f) = \lim_{a \to \emptyset} \left[\mathcal{F}(e^{-at} u(t)) - \mathcal{F}(e^{at} u(-t)) \right]$

$$\rightarrow \mathcal{F}(e^{-at} u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{a + j2\pi f t}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right] = \lim_{a \to \emptyset} \left[\frac{\cancel{a} - j\omega - \cancel{a} - j\omega}{a^2 - j^2\omega^2} \right] = \lim_{\cancel{a \to \emptyset}} \left[\frac{-2j\omega}{\cancel{a^2} - \underset{-1}{j^2}\omega^2} \right]$$

$$= -\frac{2j\cancel{\omega}}{\omega^{\cancel{2}}} = -\frac{2j}{\omega} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{2j^2}{j\omega} = \frac{2}{j\omega} \quad \mathcal{F}(x(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{Sgn(t) \Longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

Gradino Unitario

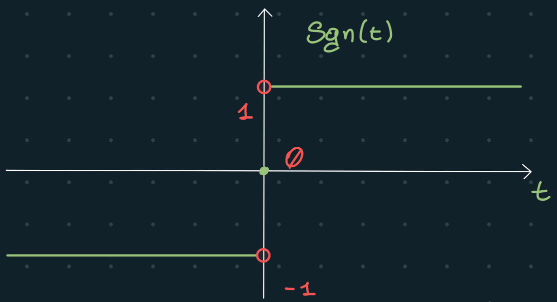
$$\mathcal{F}(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\,dt = -\frac{1}{j2\pi f}\cdot e^{-j2\pi f t}\Big|_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{j2\pi f}\left[+\infty - 1\right]$$

↑ Non Integrabile !

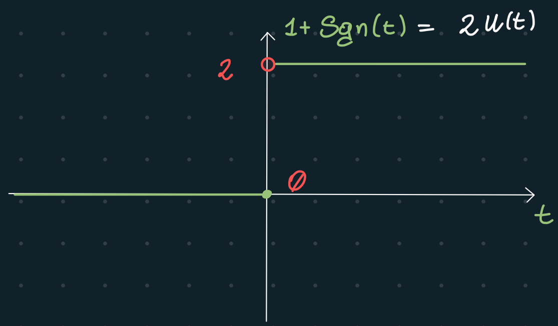
Infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = +\infty$ non ASSOLUTAMENTE integrabile.

→ Per calcolare la $\mathcal{F}(u(t))$ dobbiamo rendere $u(t)$ convergente

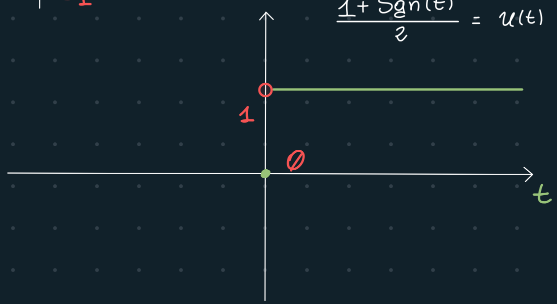
→ Sappiamo che $sgn(t) \Longleftrightarrow \frac{2j}{\omega}$ → Se riusciamo a scrivere $u(t)$ in termini di $sgn(t)$ possiamo trasformare!



Amplitude Shifting →



Amplitude Shift $\frac{1+sgn(t)}{2}$ →



$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$

⇒ A questo punto possiamo trasformare:

$$\mathcal{F}(u(t)) = \underbrace{\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\delta(\omega)} + \mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2}sgn(t)\right) = \cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\delta(\omega) + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{j\omega} = \boxed{\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

$\mathcal{F}(u(t))$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t) = \frac{1}{2}\cdot\delta(f) + \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{F}(sgn(t))}_{\frac{1}{j\pi f}} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

Esponenziale Monolatero

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$$

$$\mathcal{F}(x(t)) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot u(t)\, dt = A\int_0^{+\infty} e^{-t\left(j2\pi f + \frac{1}{T}\right)} dt = A\int_0^{+\infty} e^{-t\left(\frac{j2\pi f T + 1}{T}\right)} dt$$

$$= -\frac{AT}{j2\pi f T+1} \cdot e^{-t\left(\frac{j2\pi f T+1}{T}\right)}\Bigg|_0^{+\infty} = -\frac{AT}{j2\pi f T+1}\cdot[0-1] = \frac{AT}{j2\pi f T+1} \quad \mathcal{F}(x(t))$$

Rappresentare il segnale

Modulo. $\left|\frac{AT}{j2\pi f T+1}\right| = \frac{|Num|}{|Denom|} = \frac{AT}{\sqrt{-4\pi^2 f^2 T^2 + 1}}$

Come lo grafichiamo?

1. Trovare il val max

$\Rightarrow$ quando $\frac{AT}{\sqrt{/\!/}} = AT$? quando $\sqrt{1+(2\pi f T)} = 1 \Rightarrow 2\pi f T = 0 \Rightarrow f = 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}(0) = AT$

2. Trovare il valore alla freq di taglio:

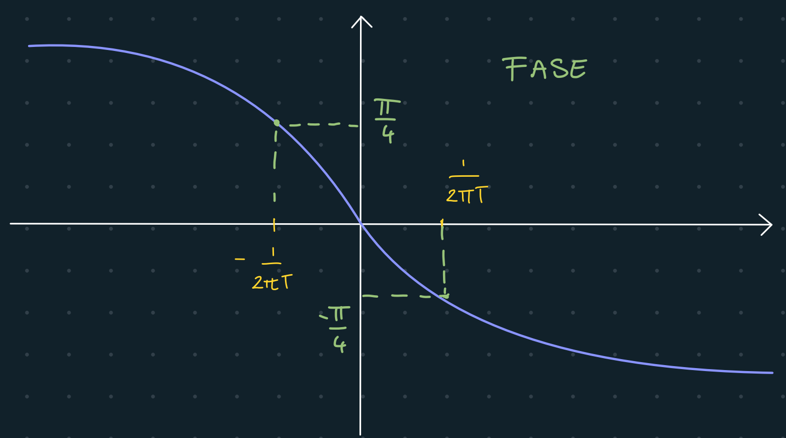
$$f_0 = \frac{1}{2\pi T} \Rightarrow y(f_0) = \frac{AT}{\sqrt{1+(\cancel{2\pi T}\cdot\frac{1}{\cancel{2\pi T}})}} = \frac{AT}{\sqrt{2}} \sim 0.7 \cdot AT$$

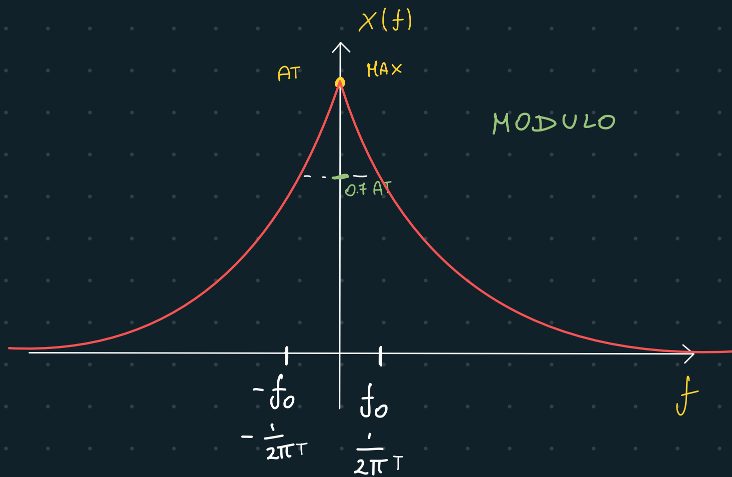
$\to$ Scopriamo l'attenuazione

$\Rightarrow$ Attenuazione tra $\frac{\mathcal{F}(f_0)}{\mathcal{F}(0)} = 20\log_{10}\frac{\frac{\cancel{AT}}{\sqrt{2}}}{\cancel{AT}} = 20\log_{10}(\sqrt{2}) \cong 3.01$ dB

Fase: $\angle X(f) = \angle Num - \angle Denom = 0 - \text{atan}(2\pi f T)$

Assumendo $f_0 = \frac{1}{2\pi T} \to \angle X(f) = \text{atan}(1) = \frac{\pi}{4}$





Trasformata di segnali collegati a segnali sgn(t) e u(t)

$\rightarrow \begin{cases} \text{Ramp} \\ \text{Step} \\ \text{Ramp + Step} \end{cases} \Rightarrow$ Deriviamo n volte finché non otteniamo $\rightarrow$ Composta da soli impulsi

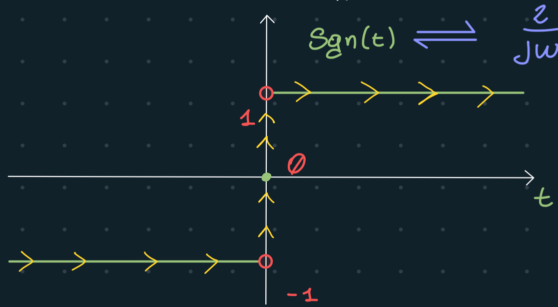
$$\text{Ramp} \xrightarrow{\text{Diff}} \text{Gradini} \xrightarrow{\text{Diff}} \text{Impulsi}$$

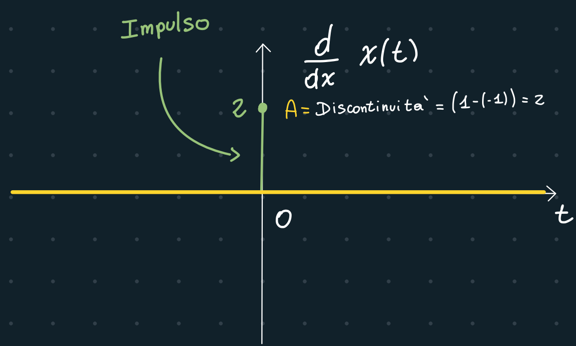
$\Rightarrow$
- Ramp   2 Derivate
- Step   1 Derivata

Trasformata della sgn(t) con la Derivata.

$x(t)$ $X(w)$

$$\text{Sgn}(t) \rightleftharpoons \frac{2}{jw}$$



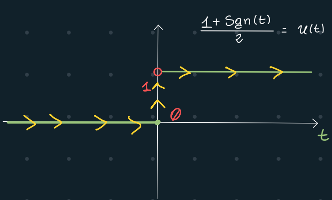


$\Rightarrow$ Abbiamo un solo impulso $\Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = 2 \cdot \delta(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}x(t)\right)}_{(jw)\cdot X(w)} = \underbrace{\mathcal{F}\left(2\delta(t)\right)}_{2\cdot 1} \rightarrow (jw)\,X(w) = 2 \Rightarrow X(w) = \frac{2}{jw}$$

Trasformata della sgn(t)

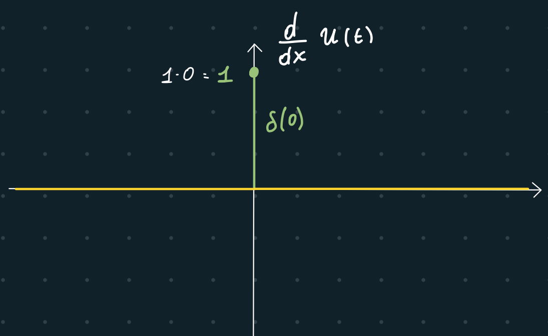
Trasformata del gradino con le Derivate



$\boxed{\pi\,\delta(w) + \frac{1}{jw}}$

$\mathcal{F}(u(t))$

1) Deriviamo il Segnale 2 volte



$$\Rightarrow \frac{d}{dx}x(t) = \delta(t) \Rightarrow (jw)\,X(w) = 1 \rightarrow X(w) = \frac{1}{jw}$$

Non Si Trova !

Perché la F.T. Non si trova ?

→ Non Abbiamo considerato il VALORE DC (Media)

- $< Sgn(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{0} -1\, dt + \int_{0}^{+T} dt \right]$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[-t\Big|_{-T}^{0} + t\Big|_{0}^{T} \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \left[0 - \cancel{T} + \cancel{T} - 0 \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \to 0$

Media

Se la media è zero non dobbiamo includerla nella Trasformata

- $< u(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{+T} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\cancel{T}} \cancel{T} = \frac{1}{2}$ Media $u(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \overset{F.T.}{\rightleftharpoons} \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \delta(\omega) = \pi\,\delta(\omega)$ $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Addizioniamo la media: $\mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(t)$

Morale della favola: Quando calcoliamo la trasformata tramite la derivata dobbiamo prima controllare che la media del segnale sia zero; se è $\neq 0$, allora calcoliamo la media e la addizioniamo alla derivata.

Trasformata di un fasore complesso

$$x(t) = e^{jw_0 t} \rightleftharpoons X(w) = ?$$

Consideriamo $X'(w) = \delta(w - w_0) \xrightleftharpoons{I.F.T.} x'(t)$

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X'(w) \cdot e^{jwt}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w - w_0) \cdot e^{jwt}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w - w_0) \cdot \underbrace{e^{jw_0 t}}_{\text{cost}}\, dw$$

$$= \frac{e^{jw_0 t}}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w - w_0)\, dw}_{\text{Normalizz.} \to 1} \Rightarrow x'(t) = \frac{e^{jw_0 t}}{2\pi} \Rightarrow \frac{e^{jw_0 t}}{2\pi} \rightleftharpoons \delta(w - w_0)$$

$\to$ Siccome vogliamo calcolare $e^{jw_0 t} \Rightarrow \cancel{2\pi}\,\dfrac{e^{jw_0 t}}{\cancel{2\pi}} \rightleftharpoons \delta(w - w_0) \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow \boxed{e^{jw_0 t} \rightleftharpoons 2\pi\, \delta(w - w_0)}$$

Esercizi per trasformate

Prob 1: $x(t) = e^{-at^2}$ con $a>0$ $\qquad X(\omega) = ?$

Sol: $x(t)$ converge? $\rightarrow$ $x(t) = \dfrac{1}{e^{at^2}} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \dfrac{1}{e^{at^2}} \rightarrow \emptyset$ Converge

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt \underset{\text{A.I.}}{=} \text{FINITO} \Rightarrow$ Trasformabile

$$\rightarrow \text{F.T.} = \mathcal{F}(e^{-at^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(j\omega t + at^2)}\, dt}_{X(\omega)}$$

Prob 2: Se la F.T. di $x(t)$ è $X(\omega)$, Trovare la F.T. di $y(t) = x(2t-3)$

Sol: $x(t) \rightleftharpoons X(\omega)$, $y(t) = x(2t-3) \rightleftharpoons Y(\omega) = ?$

Metodo 1: Time Shift → Time Scale

sfasamento

$$x(t) \xrightarrow[\text{Shift}]{\text{Time}} x(t-3) \qquad \text{Proprietà VI} \Rightarrow \mathcal{F}(x(t-3)) = X(\omega) \cdot e^{-j\omega 3}$$

$$x(t-3) \xrightarrow[\text{Scaling}]{\text{time}} x(2t-3) \qquad \text{Prop V} + \text{Prop I} \Rightarrow \mathcal{F}(x'(3t) \cdot e^{-j\omega t 3}) = \frac{1}{|2|} \cdot X\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2} 3}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}j\omega}$$

Metodo 2: time Scale → Time Shift

$$x(t) \xrightarrow[\text{Scale}]{\text{time}} x(2t) \quad \Rightarrow \mathcal{F}(x(2t)) = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$x(2t) \xrightarrow[\text{Shift}]{\text{time}} x(2t-3) \Rightarrow \mathcal{F}(2t-3) = \mathcal{F}\left(2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot X\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\frac{3}{2}j\omega}$$

$Y(t)$

Prob Bonus $x(t) \rightleftharpoons X(\omega)$, $y(t) = x(-3t+9) \rightleftharpoons Y(\omega) = ?$

$$y(t) \rightleftharpoons x\left[-3(t-3)\right] \Rightarrow Y(t) = \frac{1}{|-3|} X\left(\frac{\omega}{3}\right) \cdot e^{-3j\omega}$$

Proof della Proprietà

$$x(t-T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-T_0) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \qquad \text{pongo } s = t - T_0 \Rightarrow t = s + T_0$$

$$\Rightarrow ds = dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot e^{-j\omega(s+T_0)} \, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot e^{-j\omega s} \underbrace{e^{-j\omega T_0}}_{\text{Const}} \, dt = e^{-j\omega T_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \cdot e^{-j\omega s} \, ds}_{\text{F.T.} = X(\omega)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x(t-T_0)) = e^{-j\omega T_0} \cdot X(\omega)$$

Prob 3:

$$x(t) = \frac{1}{a + jt} \rightleftharpoons X(\omega) = ?$$

Sappiamo che $x'(t) = e^{-at} \cdot u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{1 + j\omega}$

$$\xrightarrow{\omega = t} \quad \frac{1}{1 + jt} \rightleftharpoons 2\pi \, e^{-a(-\omega)} \cdot u(-\omega) = 2\pi \, e^{a\omega} \cdot u(-\omega)$$