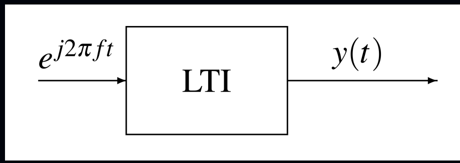
Esercizi trasformate di Fourier “notevoli”

Piccolo Recap

Segnali e sistemi nel dominio della frequenza
La rappresentazione dei segnali mediante δ-impulsi, definita dalla formula di riproducibilità ci ha consentito di ricavare il legame di convoluzione tra ingresso e uscita di un sistema LTI. L'analisi in frequenza è invece basata sulla rappresentazione dei segnali come combinazione lineare di esponenziali complessi.



Poniamo un fasore complesso

$$y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{H(f)} = H(f) e^{j2\pi ft}$$

Osserviamo come in uscita continuiamo ad avere il fasore moltiplicato per

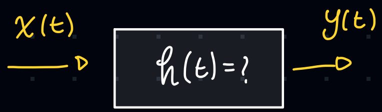
$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Risposta in frequenza

Trasformata di Fourier → $H(f) = \mathcal{F}(h(\tau))$

Inoltre → $H(f) = \left.\dfrac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi ft}}$

Dati tutti questi "Strumenti", come troviamo $h(t)$ nel sys ?



1. Poniamo $x(t) = e^{j2\pi ft}$ per più f possibili
2. Valutiamo l'uscita $y(t)$ e la rapportiamo ad $x(t)$ per diverse f
3. Troviamo $H(f) \xrightarrow{R.F.T.} h(t)$ torniamo nel dominio del tempo

Cambiare Dominio

Segnali Continui

Tempo → Frequenza

- $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \underset{\omega = 2\pi f}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} d\omega$

Frequenza → Tempo

- $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

Segnali Discreti

Tempo → Frequenza

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu} \qquad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\theta n}$$

Frequenza → Tempo

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu) \cdot e^{-j2\pi\nu n} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\theta) \cdot e^{-j2\pi\theta n} d\theta$$

Legame ingresso - uscita - Frequenza

Esprimiamo l'ingresso come: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df =$

$\to y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H(f)\cdot X(f)} \cdot e^{j2\pi f t}\, dt$ ovvero $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Y(f)} \cdot e^{j2\pi f t}\, dt$

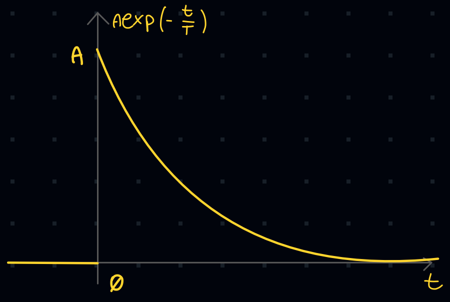
Deduciamo che $Y(\cdot) = X(\cdot)\cdot H(\cdot)$

Concetto di Banda

~15:00

Esempio 1: T. di $\mathcal{F}$ dell'exp monolatero T. Continuo

$x(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$



$\to$ Dall'eq di analisi possiamo calcolare lo spettro dell'input:

$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-\frac{t}{T}}\, u(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$

Trasformata di Fourier

$= A \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(\frac{1+j2\pi f T}{T}\right)}\, dt$

$= -\frac{AT}{1+j2\pi f} \cdot \left[e^{-t\left(\frac{1+j2\pi f T}{T}\right)} \right]_0^{+\infty} = \frac{AT}{1+j\pi f}$ Trasformata

1 Ø

$\Rightarrow$ otteniamo $e^{-\frac{t}{T}} u(t) \Longleftrightarrow \frac{AT}{1+j2\pi f T}$

Come si rappresenta? E' un segnale complesso quindi $\to$

1. Trovare il modulo $\to$ Spettro di ampiezza
2. Trovare la fase $\to$ Spettro di fase

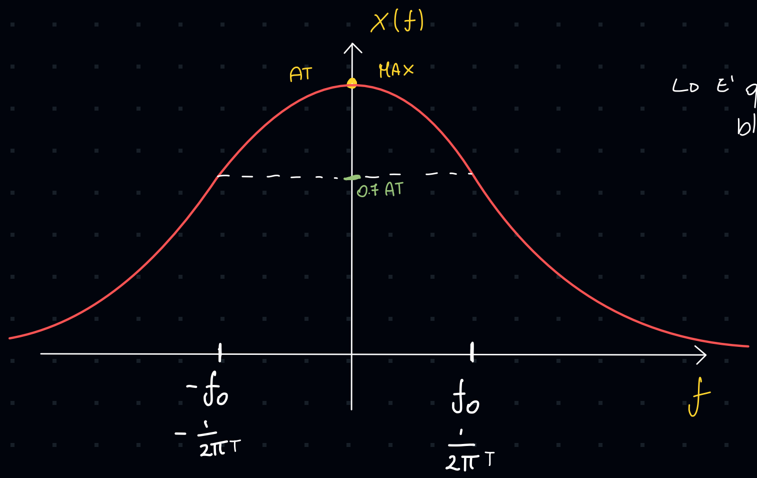
$\to$ 1. Se $A>0$ e $T>0$ $\to$ $|X(f)| = \frac{|Num|}{|Denom|} = \frac{AT}{|1+j2\pi f T|} = \frac{AT}{\sqrt{1^2 + (2\pi f T)^2}}$

Reale $\to$ No modulo

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|X(f)|$

Graficchiamolo:



Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T}$ $\to$ $20 \log_{10} \left[\frac{|X(f_0)|}{|X(0)|} \right] = 20 \log_{10} \frac{\cancel{AT}/\sqrt{2}}{\cancel{AT}}$

Frequenza di taglio

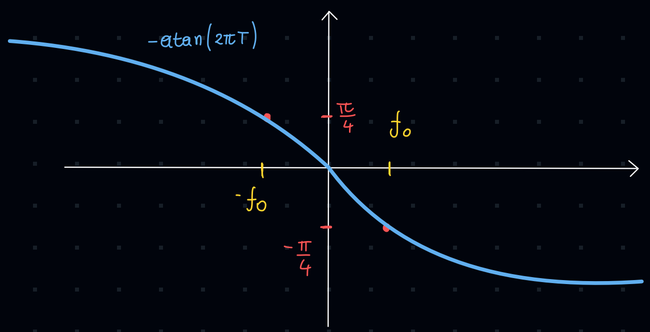
$\to$ E' quella freq al di sopra del quale un filtro blocca il segnale

$= 20 \log_{10} (\sqrt{2}) \simeq -3\,dB$

Attenuazione

2. Fase: $\measuredangle H(f) = \left[\measuredangle \text{Numeratore}\right] - \left[\measuredangle \text{Denominatore}\right] = \emptyset - \text{atan}(2\pi f T)$

Graficchiamolo: Assumiamo $f_0 = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow \measuredangle H(f) = -\text{atan}\left(\cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{2\pi T}} \cancel{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$



Proprieta'

$X^*(-f) = X(f)$ Pari

per $x(t)$ REALE

$\rightarrow$ proof: $X^*(-f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t} dt\right]^* =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^*(t)}_{\substack{\text{Reale} \\ \downarrow \\ x(t)}} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = X(f)$$

Quindi

- Il modulo sara' PARI:

$\rightarrow |H(-f)| \cdot e^{-j\underline{\angle H(f)}} = |H(f)|\, e^{-j\angle H(f)}$

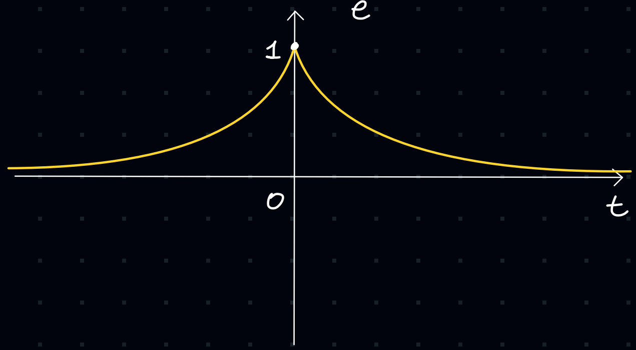
- La fase vale l'opposto $\rightarrow$ E' Dispari

$\rightarrow \underline{\angle H(-f)} = -\underline{\angle H(f)}$

$\rightarrow$ Un esempio e' proprio l'esempio 1 ↑

Esempio 2: Exp Bilatero

$x(t) = e^{-a|t|}$ con $a \geq 0$ $\Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$



$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{+\infty}^{0} e^{t(a-j2\pi f)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(a+j2\pi f)} dt =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \left[e^{t(a-j2\pi f)} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{a+j2\pi f} \left[e^{-t(a+j2\pi f)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot [1-0] + \frac{1}{a+j2\pi f} [0-(-1)] = \underbrace{\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f}}$$

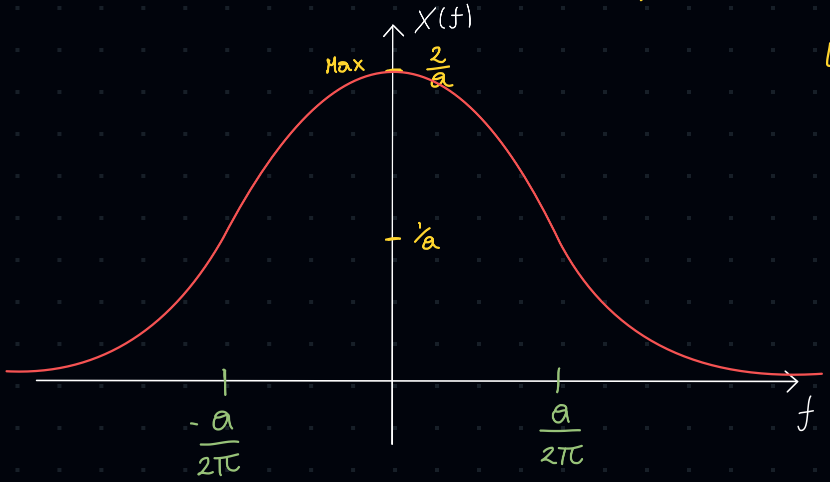
$$= \frac{a+\cancel{j2\pi f}+a-\cancel{j2\pi f}}{a^2+(2\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

$(a-i2\pi f)(a+i2\pi f) =$
$= a^2 + a\cancel{i2\pi f} - a\cancel{i2\pi f} - i^2 (2\pi f)^2$ (i^2: 1)
$= a^2 + (2\pi f)^2$

Non è presente "j"
$\Rightarrow$ Lo spettro è reale !
(e anche pari)

Grafichiamolo:

$f_0 = \frac{a}{2\pi} \rightarrow X\left(\frac{a}{2\pi}\right) = \frac{2a}{a^2+\left(\cancel{2\pi}\frac{a}{\cancel{2\pi}}\right)^2} = \frac{\cancel{2a}}{\cancel{2}a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a}$



Lo $20\log_{10} \frac{X(f_0)}{X(0)} = 20\log_{10} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{2}{a}}$

Attenuazione

$= 20\log_{10} \frac{1}{\cancel{a}} \frac{\cancel{a}}{2}$

$= 20\log_{10} \frac{1}{2} = \sim -6\,dB$

Esempio 3: Tempo discreto: seq exp. monolatera

$x(n) = a^n \cdot u(n)$ con $-1 < a < 1 \Rightarrow |a| < 1$

Spettro $X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(a \cdot e^{-j2\pi\nu}\right)^n}_{\text{Serie geometrica}}$

$\sim \sum_{n=0}^{+\infty} (z)^n$ con $-1 < z < 1$ $= \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a\, e^{-j2\pi\nu}\right)^n = \frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$ Spettro

$\Rightarrow a^n u(n) \rightleftharpoons \frac{1}{1-a\,e^{-j2\pi\nu}}$

• Modulo di $X(f)$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{1}{1-a\cos(2\pi\nu) + ja\sin(2\pi\nu)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos(2\pi\nu))^2 + (a\sin(2\pi\nu))^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2(2\pi\nu) - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2\sin^2(2\pi\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\,(\underbrace{\cos^2(2\pi\nu)+\sin^2(2\pi\nu)}_{1}) + 1 - 2a\cos(2\pi\nu)}}$$

$$\Rightarrow |X(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1-2a\cos(2\pi\nu)}}$$ modulo

• Fase: $\measuredangle H(\nu)$

$$= \measuredangle 1 \xrightarrow{} 0 \; - \measuredangle\left(1-e^{-j2\pi\nu}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{a\sin(2\pi\nu)}{1-a\cos(2\pi\nu)}\right)$$

$\hookrightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{Imm}{Re}\right)$

Esempio 4 : Exp Bilatera Discreta

$$x(n) = a^{|n|} \quad \text{con} \quad |a| < 1 \rightarrow -1 < a < 1$$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-j2\pi\nu n} + \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n} \cdot e^{-j2\pi\nu n}}$$

$K = -n$

$\rightarrow n = -K$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\underbrace{a\, e^{-j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\big)^n + \sum_{K=1}^{+\infty} a^K \cdot e^{j2\pi\nu K}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\underbrace{a\, e^{-j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\big)^n + \sum_{K=1}^{+\infty} \big(\underbrace{a \cdot e^{j2\pi\nu}}_{-1<z<1}\big)^K \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - z^0$$

$$= \frac{1}{1-a e^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{1-a e^{j2\pi\nu}} - 1 = \frac{1-a e^{j2\pi\nu} + 1 - a e^{-j2\pi\nu}}{(1-a e^{-j2\pi\nu})(1-a e^{j2\pi\nu})} - 1 = \frac{1-a e^{j2\pi\nu} + 1 - a e^{-j2\pi\nu}}{1 - a e^{j2\pi\nu} - a e^{-j2\pi\nu} + a^2} - 1$$

$$= \frac{2 - a\overbrace{(e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu})}^{2\cos(\cdot\cdot)}}{1 - a\underbrace{(e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu})}_{2\cos(2\pi\nu)} + a^2} = \frac{2 - 2a\cos(2\pi\nu)}{1 - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2} - 1 = \frac{\cancel{2}^{\,1} \cancel{-2a\cos(2\pi\nu)} \cancel{-1} \cancel{+2a\cos(2\pi\nu)} - a^2}{1 - 2a\cos(2\pi\nu) + a^2}$$

proof

$$\begin{cases} e^{j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) + \cancel{j\sin(2\pi\nu)} \\ e^{-j2\pi\nu} = \cos(2\pi\nu) - \cancel{j\sin(2\pi\nu)} \end{cases}$$

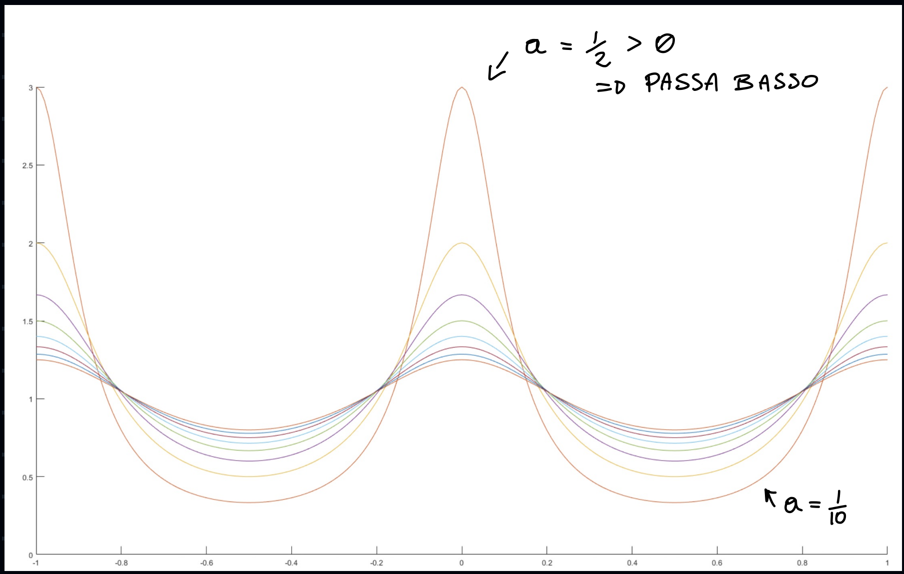
$$\Rightarrow e^{j2\pi\nu} + e^{-j2\pi\nu} = 2\cos(2\pi\nu)$$

$$= \boxed{\frac{1-a^2}{1-2a\cos(2\pi\nu) + a^2}}$$

j è assente

$\Rightarrow$ Reale

$\Rightarrow$ Simmetrico



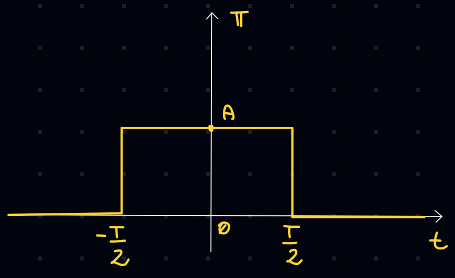
Notiamo come con l'aumentare di a la Banda si restringe

Con $a > 0$ $\rightarrow$ Passa Basso

Con $a < 0$ $\rightarrow$ Passa Alto

Esempio 5: Impulso rettangolare

$$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \to X(f) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\,dt$$



$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}\right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left(\underbrace{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}\right)$$

$\to \cancel{\cos(\pi f T)} - j\sin(\pi f T) - \left[\cancel{\cos(\pi f T)} + j\sin(\pi f T)\right]$

$\to -2j\sin(\pi f T)$

$$= \cancel{-}\frac{A}{\cancel{j}2\pi f}\cdot\left[\cancel{-2j}\sin(\pi f T)\right]$$

$$= A\sin(\pi f T)\cdot\frac{1}{\pi f}$$

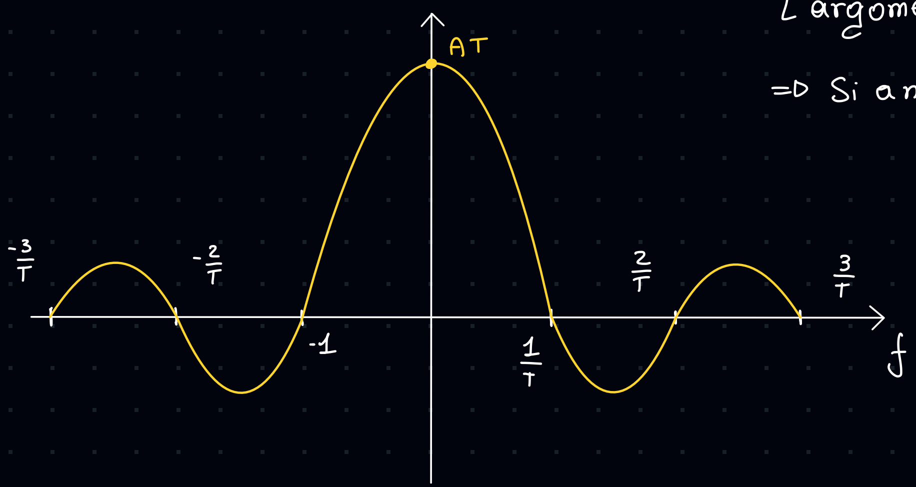
Spettro $X(f)$

$\to$ ci ricorda molto la sinc: sinc: $A\cdot\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

$\Rightarrow$ Lo spettro $X(f) = \frac{A\,T\sin(\pi f T)}{\pi f\,T} = \underline{A T\,\mathrm{Sinc}(f T)}$

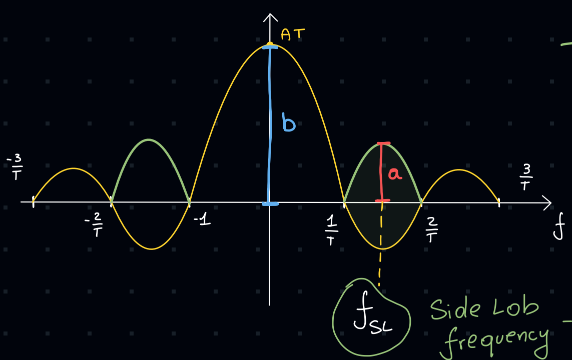
L'argomento della sinc è $\pi f T$

$\Rightarrow$ Si annulla in $fT \pm K \Rightarrow f = \pm\frac{K}{T}$ $\to K \in \mathbb{N}$



- Anche questo è un segnale reale
  $\to$ NO Phase

Domanda: Quanto si attenua il lobbo principale rispetto ai secondari?



Side Lob frequency $\to$ la freq del primo picco secondario

$\to$ Si considera il modulo dello spettro, quindi i lobbi neg diventono positivi.

$\to$ Quanto vale il rapporto tra b e a?

Ans $f_{SL} = \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{2T}$

$$\to 20\log_{10}\left|\frac{X(0)}{X(f_{SL})}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{AT\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)} = 20\log_{10}\left(\frac{AT}{AT\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3}{2}\right)}\right) \cong 13\ \mathrm{dB}$$

A che ci serve?

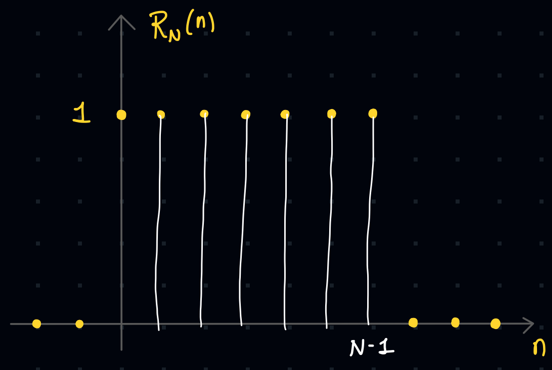
Se scelgo la Banda pari a: $B = \frac{1}{T}$ Sono sicuro che $20 \log_{10} \left(\frac{X(0)}{X(f)} \right) \geq 13 \text{ dB}$

con $f > B$ Vedi inizio lezione

Esempio 6: Rect Discreto

$x(n) = R_N(n)$ → IMPORTANTE: Il segnale R_N (discreto) parte da $n > 0$

⇒ Non simmetrico ⇒ Complesso.



$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\underbrace{e^{-j2\pi\nu}}_{-1<z<1} \Big)^n \qquad \bullet \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\nu} \right)^n = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N} \left(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N} \right)}{e^{-j\pi\nu} \left(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu} \right)}$$

$\cancel{\cos(\pi\nu N)} + j\sin(\pi\nu N) - \cancel{\cos(\pi\nu N)} + j\sin(\pi\nu N)$

$2j\sin(\pi\nu N)$

$\cancel{\cos(\pi\nu)} + j\sin(\pi\nu) + [\cancel{\cos(\pi\nu)} + j\sin(\pi\nu)]$

$2j\sin(\pi\nu)$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N} \cdot \cancel{2j}\sin(\pi\nu N)}{e^{-j\pi\nu} \cdot \cancel{2j}\sin(\pi\nu)} = \frac{e^{-j\pi\nu N} \cdot \sin(\pi\nu N)}{e^{-j\pi\nu} \cdot \sin(\pi\nu)} = e^{-j\pi\nu(N-1)} \cdot \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

$e^{-j(N-1)\pi\nu}$

Pi uscito benissimo!

$X(\nu)$ per una Rect discreta

N	3	4	5	10	∞
$(A_1/A_0)_{dB}$	-9,54	-11,30	-12,04	-12,17	-13,26

Ad un certo punto il rapporto dei lobbi si "assesta" → Dipende poco da N