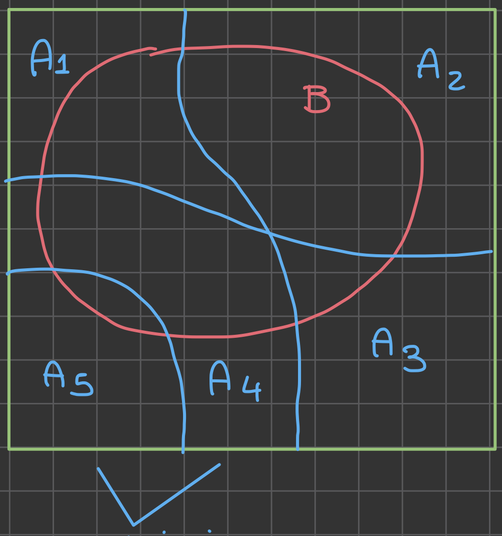
Teorema della probabilità totale

Teorema della Probabilita' Totale — RAGIONAMENTO

Ci consente di scomporre il problema di trovare la probabilita' di un evento una volta note delle Probabilita' Condizionate;
questo e' utile quando abbiamo accesso solo a delle probabilita' dopo che si e' verificato un altro evento.



$\Omega \equiv$ Spazio dei campioni

Iniziamo considerando tutto Ω; Successivamente poniamo l'evento B al suo interno $\Rightarrow B \subseteq \Omega$.

$\rightarrow$ Consideriamo una Partizione (La partizione e' sempre e solo UNA! Essa puo' essere divisa in piu' elementi).
Costruire una partizione di Ω vuol dire riconsiderare Ω come l'unione di altri eventi con le proprieta':

- Due eventi non si intersecano
- L'unione di tutti gli eventi ci da Ω

Partizioni

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad , i \neq j$

Proprieta' della Partizione

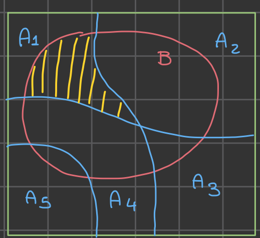
Notiamo che la partizione interseca l'evento B; possiamo quindi qualche relazione:

- L'evento B corrisponde a: $B \cap \Omega = B$ perche' $B \subseteq \Omega$

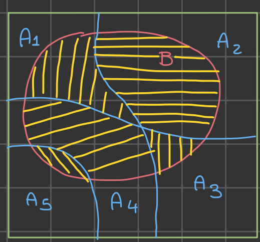
Ma siccome abbiamo scritto la partizione di Ω, possiamo scrivere:

- $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$

$\Rightarrow$ Ci accorgiamo che possiamo scambiare le operaz. di intersezione ed unione; possiamo infatti scrivere B come l'unione delle intersezioni di B e A_i:



Se ad esempio prendiamo $A_1 \cap B$ otteniamo la parte tratteggiata; se facciamo $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B$ otteniamo



$$\Rightarrow B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$$

Calcoliamo la Probabilità:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$ => Applicando la legge della prob comp.

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Legge della probabilità Totale

Esercizio

Consideriamo l'estrazione di 2 carte da un mazzo di carte Napoletane.
Consideriamo poi gli eventi:

$A = \{$"le 2 carte sono dello stesso Segno"$\} = \{DD$ OR BB OR CC OR $SS\}$

$B = \{$"la prima carta è di spade"$\} = \{S\}$

Si vuole conoscere
- La probabilità di A
- La prob. che si verifichi A e non B
- La prob B dato A [P(B/A)]
- I due eventi sono indip.

Prob. di A:

Ho 40 carte ed estraggo una carta; Se consideriamo Tutte le carte le prob. sono equiprobabili. Ma se consideriamo i semi (che sono 4) la prob di ogni seme è $\frac{1}{4}$.

In questo caso omega è: $\Omega = \{B, C, S, D\}$

$$\Rightarrow P(A) = P(BB) + P(CC) + P(SS) + P(DD)$$ ← Legge della Prob Totale

Usiamo questa come esempio

$$\rightarrow P(BB) = P(B \cap B) = \underset{\frac{1}{4}}{P(B_1)} \cdot \underset{\frac{9}{39}}{P(B_2/B_1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39}$$

Sono 4 semi

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{4} \cdot \frac{9}{39}$$ Prob di A

Probabilità che si verifichi A ma non B

$$= P(A \cap \bar{B}) = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{39}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{54}$$

Prob di B/A

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\cancel{9}}{4 \cdot \cancel{39}}}{\frac{\cancel{9}}{\cancel{39}}} = \frac{1}{4}$$

Anche abbastanza intuitivo come risultato

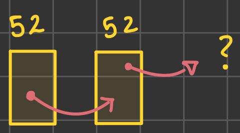
Esercizio: • Tratti da "slides_02"

Una carta viene selezionata da un mazzo di 52 carte e messa in un altro mazzo (di 52 carte)

Ex. 2
Una carta viene selezionata da un mazzo di 52 carte e messa in un secondo mazzo di carte. Successivamente, una carta viene selezionata dal secondo mazzo di carte.

1. Calcolare la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso.
2. Se viene estratto un asso, qual è la probabilità di aver trasferito un asso dal primo al secondo mazzo di carte?
3. Verificare se i due eventi {Estrazione di un asso dal primo mazzo di carte} e {Estrazione di un asso dal secondo mazzo di carte} sono indipendenti.

1) La II Carta è un Asso



Capiamo che la prob è potenzialmente condizionata dal fatto di pescare inizialmente un Asso (Ne avremmo 5 nel II mazzo).

2A = {"la seconda carta è un Asso"}

1A = {"la prima carta è un Asso"}

$$\Rightarrow P(2A) = \underbrace{P(2A/1A) \overset{\text{AND}}{\cdot} P(1A)}_{I} \overset{\text{OR}}{+} \underbrace{P(2A/\overline{1A}) \overset{\text{AND}}{\cdot} P(\overline{1A})}_{II}$$

(a, b, a, b)

Perché?
Peschiamo un Asso o quando dalla prima pesco un Asso (I b) AND dalla seconda peschiamo un Asso (I a) Oppure (OR) dalla prima NON si pesca un asso (II a) DATO CHE dalla prima NON ho pescato un asso per la prob. di non pescare un asso.

In questo modo partizioniamo lo Spazio in due eventi; ⇒ la prob Totale è la somma delle probabilità relative alle Due partizioni.

Il vantaggio è che in questo modo scomponiamo la prob. Totale in Tante prob Più semplici.

$$P(2A) = \underbrace{P(2A/1A)}_{5/53} \cdot \underbrace{P(1A)}_{4/52} + \underbrace{P(2A/\overline{1A})}_{4/53} \cdot \underbrace{P(\overline{1A})}_{\frac{52-4}{52} = \frac{48}{52}} = \frac{5}{53} \cdot \frac{4}{52} + \frac{4}{53} \cdot \frac{48}{52} = \frac{1}{13} \equiv \frac{4}{52}$$

Notiamo che la prob. finale di 2A è proprio la prob di pescare un Asso dal primo mazzo. Ne deduciamo che prendere una carta dal primo mazzo e metterla nel secondo NON altera la prob. di pescare un asso nel secondo

2. Se viene estratto un asso, qual è la probabilità di aver trasferito un asso dal primo al secondo mazzo di carte?

In questo caso, la carta estratta dal II mazzo è SICURAMENTE un asso; vogliamo sapere la probabilità di aver pescato un asso dal PRIMO mazzo.

E' una prob condizionata $\Rightarrow$ $$P(1A/2A) = \frac{P(1A \cap 2A)}{P(2A)} = \frac{\overset{5/53}{P(2A/1A)} \cdot \overset{\cancel{4/52}}{P(1A)}}{\underset{\cancel{4/52}}{P(2A)}} = 5/53$$

3. Verificare se i due eventi {Estrazione di un asso dal primo mazzo di carte} e {Estrazione di un asso dal secondo mazzo di carte} sono indipendenti.

$P(2A/1A) = P(2A)$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{53} \neq \frac{4}{52}$ $\Rightarrow$ Non sono indipendenti $\Rightarrow$ Sono dipendenti

Ex. 5

Una compagnia di assicurazioni ha tre tipologie di clienti, classificati in base alla loro probabilità P_I di avere almeno un incidente nel corso di un anno:

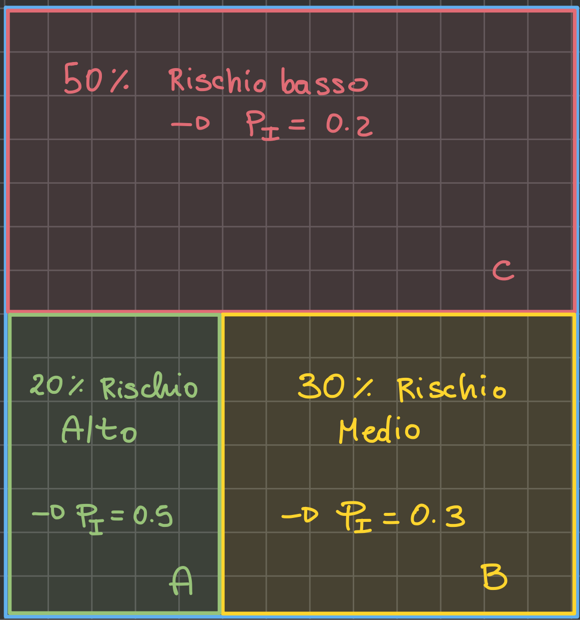
A. rischio alto, $P_I = \cancel{0.2}$ 0.5

B. rischio medio, $P_I = \cancel{0.5}$ 0.3

C. rischio basso, $P_I = \cancel{0.3}$ 0.2

Sapendo che il 20% dei clienti sono a rischio alto, il 30% a rischio medio e il 50% a rischio basso, determinare:

1. la probabilità che un cliente abbia almeno un incidente nel corso dell'anno;
2. la probabilità che un cliente sia a rischio alto dato che ha avuto uno o più incidenti nel corso dell'ultimo anno.



$\Omega \equiv$ tutti i clienti

$D \equiv \{$"Il cliente ha almeno un incidente l'anno"$\}$

$\Rightarrow$ 1) $P(D) = ?$

Possiamo suddividere la prob in 3 sotto insiemi:

- Prob. di inc. dato che $\in$ classe A
- Prob. di inc. dato che $\in$ classe B
- Prob. di inc. dato che $\in$ classe C

$$\Rightarrow P(D) = \underbrace{P(D/A)}_{\text{Prob dato che } \in A} \cdot \underbrace{P(A)}_{\text{Prob. di appart. ad A}} + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\cdot P(D)$$

In questo modo partizioniamo Ω in 3 sottoinsiemi; le singole prob. condizionali sono note:

$P(D/A) = 0.5$ con il 20% di Ω

$P(D/B) = 0.3$ con il 30% di Ω

$P(D/C) = 0.2$ con il 50% di Ω

$\downarrow P(D/A,B,C)$ $\qquad \downarrow P(A,B,C)$

$$\Rightarrow P(D) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 05 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \cancel{\frac{2}{20}}\,\frac{1}{10} = \frac{1}{5}\cancel{\frac{2}{10}} + \frac{9}{100} = \frac{20+9}{100} = \frac{29}{100} \sim 0.29 \sim 30\%$$

2) la prob che un cliente sia a Rischio Alto dato che ha avuto uno o più incidenti nell'ultimo Anno:

$$\Rightarrow P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\overset{\frac{1}{2}}{P(D/A)} \cdot \overset{\frac{2}{10}}{P(A)}}{P(D) \to \frac{29}{100}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{29}{100}} = \frac{7}{29 \times 10^3}$$