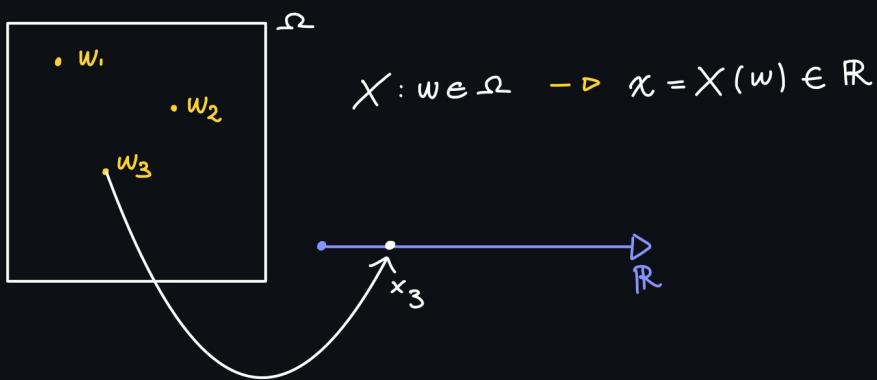


Piccolo Recap

La variabile aleatoria

Abbiamo visto come sia possibile definire uno **spazio di probabilità**, sul quale possiamo costruire un modello matematico particolarmente utilizzato nella **pratica**, ovvero la **variabile aleatoria**.

A partire dallo spazio dei campioni Ω (in cui sono presenti diverse uscite sperimentali) possiamo definire una **funzione matematica** indicata con X (lettera grande):



Variabili Aleatorie
Continue \rightarrow L'alfabeto della variabile è CONTINUO
Discrete \rightarrow L'alfabeto è **Discreto** Finito/Numerabile

La CDF

CDF

$$F_X : \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Non consideriamo più lo spazio dei campioni!}}} \rightarrow F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

La CDF è una Probabilità!

Proprietà Costitutive della CDF

1. $F_X(-\infty) = 0$

- Se ci poniamo a $-\infty$ a che evento corrisponde? Nessun evento \rightarrow Evento impossibile \rightarrow Probabilità 0

2. $F_X(+\infty) = 1$

- Se ci poniamo a $+\infty$ a che evento corrisponde? Corrisponde alla "somma" di tutti gli eventi \rightarrow evento certo $\rightarrow P(\Omega)$ \rightarrow probabilità 1

3. $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

- **Traduzione:** È Una funzione non decrescente

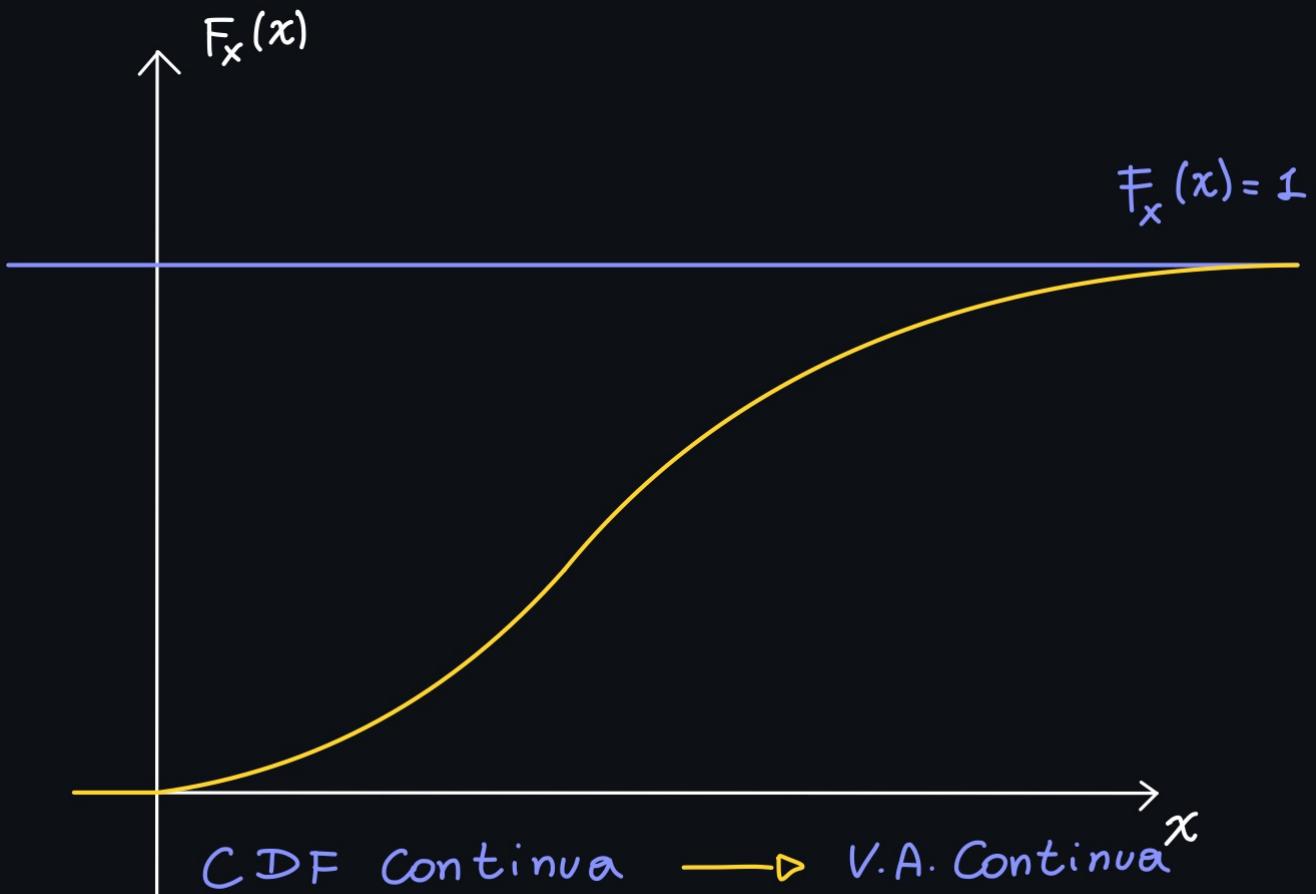
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

- 4.** • "Continuità da destra", ovvero la funzione è sempre continua a destra di x_0

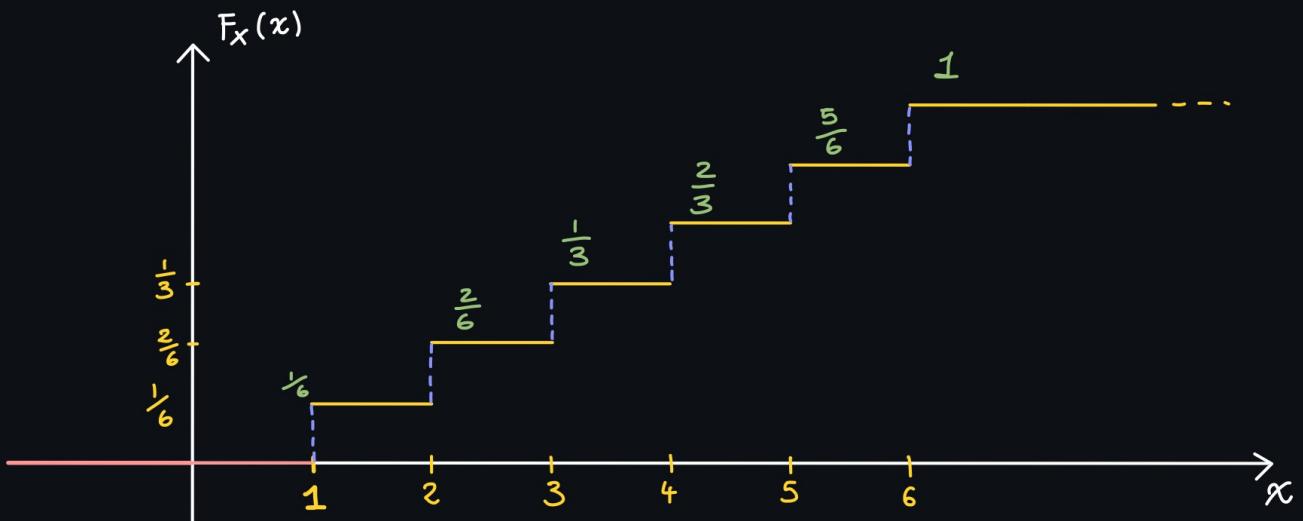
Queste sono delle **proprietà necessarie e sufficienti** affinchè una **qualsiasi funzione** sia una CDF.

Riconoscere le variabili aleatorie dalla CDF

Se, guardando il grafico della CDF di una variabile aleatoria, notiamo che la funzione è continua, sapremo automaticamente che la variabile aleatoria associata sarà una **variabile aleatoria continua** come nel seguente caso:



Se, guardando il grafico della CDF di una variabile aleatoria, notiamo che la funzione è continua **a tratti**, sapremo automaticamente che la variabile aleatoria associata sarà una **variabile aleatoria discreta** come nel seguente caso:



CDF Continua A tratti \longrightarrow V.A. Discreta

Caratterizzazione alternativa alla CDF: la PMF (V.A. Discrete)

Detta **Funzione di "mass probability"**:

$$x \in \mathcal{A}_x \longrightarrow P_x(x) = P(\{X=x\})$$

↑
 Alfabeto di x $\subseteq \mathbb{R}$ ↑
 Definita come la prob. che
 la variabile aleatoria assuma
 il valore di x

Proprietà costitutive della PMF

- Non negatività:** è una funzione non negativa

- $P_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{A}_x$

2. **Normalizzazione:** La somma di tutti valori della CDF dell'alfabeto di X è pari ad 1:

$$1. \quad \sum_{x \in \mathcal{A}_X} P_X(x) = 1$$

Come calcolare la probabilità di un evento specifico?

Calcolare un evento specifico:

$$P(\{x \in A\}) = \sum_{x \in \mathcal{A}_X \cap A} P_X(x)$$

↑
Intersezione Tra
Alfabeto ed evento A

Come ricavare la CDF dalla PMF?

Come ricavare la CDF dalla PMF ?

$$F_x(x) = \sum_{v \in \mathcal{A}_x : v \leq x} P_x(v)$$

Prendiamo solo i valori v minori o uguali ad x

PDF - Funzioni di Densità di probabilità

In questo caso si utilizza, per denotare la funzione, sempre la lettere f, ma in questo caso in minuscolo:

PDF: Funzione di densità di probabilità

$$f_x : x \in \mathbb{R} \rightarrow f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

Guardando bene questa definizione matematica ci accorgiamo abbastanza velocemente che **non si tratta di una probabilità**; anzi, **ha le dimensioni fisiche che sono l'inverso di quelle della variabile aleatoria**:

Istanti di arrivo del viaggiatore

Variabile Aleatoria →
Secondi

PDF
 $S^{-1} = \frac{1}{S}$

Nell'esempio del viaggiatore, se la variabile aleatoria misura in secondi, la PDF misurerà con l'inverso dei secondi, ovvero con s^{-1} oppure $1/s$

Un Esempio: Temperatura in una stanza

Esempio: Temperatura di una stanza

$$17^\circ < \text{temp} < 25^\circ$$

→ Qual'è la probabilità che la Temperatura sia di $20,1\text{ C}^\circ$?

Ammesso di definire una V.A. Continua su questi valori, quanti "Slot" abbiamo tra 17° e $21,5^\circ$?

→ Infiniti

Se volessimo calcolare la probabilità con l'approccio frequentistico la potremmo calcolare come:

Approccio frequentistico

$$\frac{\text{caso favorevole}}{\text{caso totale}} = \frac{1}{\infty} = \emptyset$$

Visto che i casi totali sono infiniti (siamo nel caso di una V.A. Continua), otteniamo che la probabilità che la stanza assuma una data temperatura è **zero**, il che è logicamente impossibile!

Variazione di probabilità

Ha molto più senso studiare la **variazione di probabilità**.

Questo è lo stesso motivo per cui parliamo di **densità di probabilità**; infatti la **densità** è un valore che **integrato** ci restituisce la **potenza**; proviamo quindi ad integrare la PDF:

$$\text{Integriamo la funzione (PDF)}$$

$$\int_{-\infty}^x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{d F_x(x)}{dx} dx = \left[F_x(x) \right]_{-\infty}^x = F_x(x) - F_x(-\infty) = F_x(x)$$

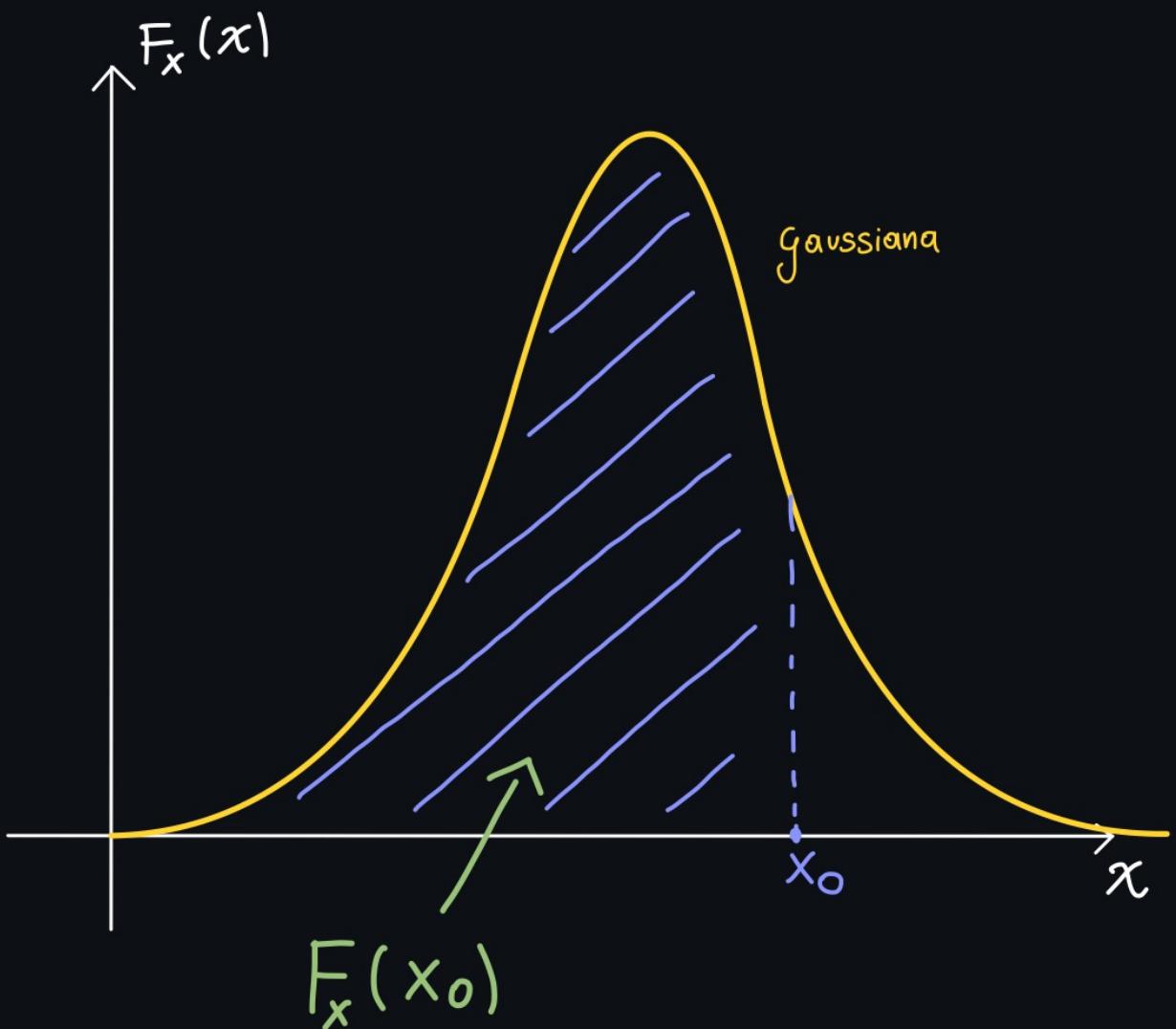
Siccome la CDF vale zero quando x tende a $-\infty$, possiamo toglierla dall'eqazione, lasciandoci solo con $F_x(x)$:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

CDF **PDF**

Ne deduciamo che la CDF è semplicemente l'integrale della PDF tra $-\infty$ ed x

Se fissiamo x_0 e calcoliamo l'integrale della F_X tra 0 ed x_0 cosa otteniamo?



Otteniamo la F_X Valutata in x_0

Quindi?

In pratica, una volta che abbiamo a disposizione la **PDF di una variabile aleatoria** (cosa che nella pratica accade spesso visto che sono disponibili diversi modelli riconosciuti), per calcolare la CDF ci basta **integrare la PDF**.

Proprietà costitutive delle PDF

1. Non negatività

1. Dimostrazione: siccome la PDF è la derivata della CDF (per definizione), e la

CDF è non decrescente (la derivata di una funzione crescente non può essere negativa), allora la PDF è non negativa.

2. Normalizzazione

- In questo caso non avremo una sommatoria ma un integrale:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

Dimostrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} F_X(x) dx = \overbrace{F_X(+\infty)}^1 - \overbrace{F_X(-\infty)}^0 = 1$$

3. Calcolo della probabilità in intervalli

- Se $P(\{x_1 < X \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$
1. Equivale a dire che se conosco la CDF e devo calcolare la probabilità che la variabile aleatoria appartenga ad un intervallo, ci basta prendere il valore della CDF valutata nell'estremo superiore, lo sottraiamo alla $F_X(x_1)$ e troviamo la probabilità.

Se si conosce la PDF ci basta calcolare l'integrale esteso a (x_1, x_2)

Dimostrazione:

Dimostrazione

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$



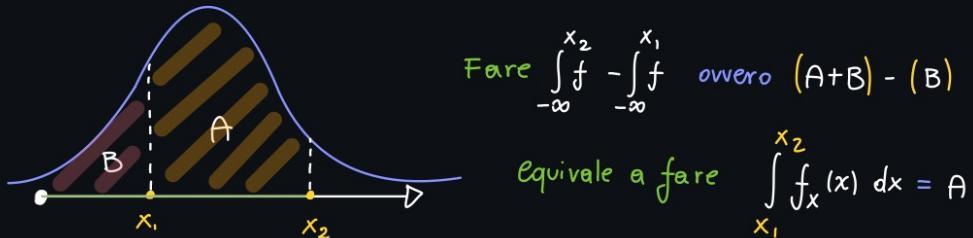
Calcoliamo le probabilità:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(\{X \leq x_2\}) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$\Rightarrow F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$\Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$\Rightarrow \text{La CDF è } F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x) dx$$



Variabile Aleatoria di tipo Rayleigh

Variabile Aleatoria di Tipo Rayleigh

$$X \sim \text{Ray}(\sigma^2)$$

Si legge come: "X è **distribuita** (ha una particolare distribuzione "notevole") Ray"

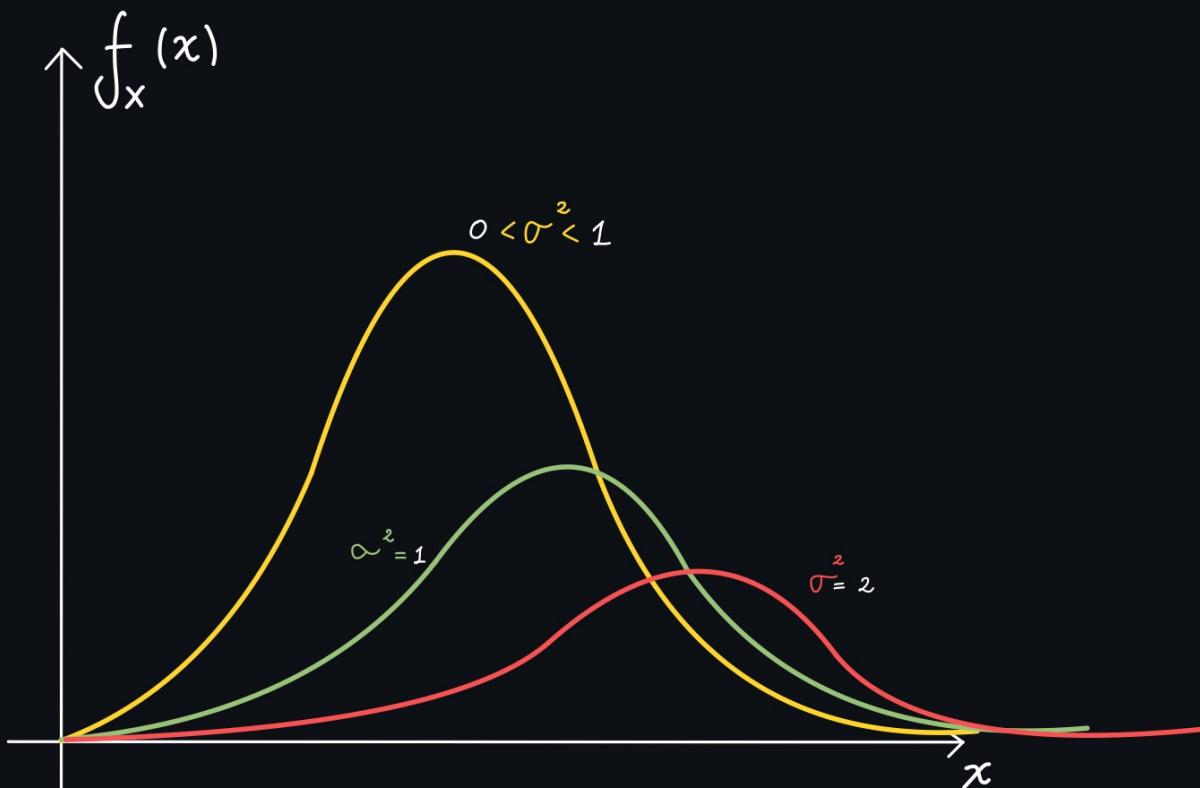
Una variabile aleatoria di tipo Rayleigh ha una **PDF** definita come:

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

↑
"gradino"

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Visto che il "gradino" u vale 0 quando $x < 0$, tutta la funzione PDF non è definita per $x < 0$!



A seconda del valore di σ^2 possiamo ottenere diverse curve (tutte con la stessa forma però!)

Le variabili aleatorie che stiamo vedendo in questa sezione del corso sono variabili aleatorie **"Notevoli"**, proprio perchè **modellano** molti fenomeni naturali

Esempio: Calcolare la CDF della variabile aleatoria di tipo Rayleigh

Calcoliamo la CDF della variabile aleatoria di Rayleigh

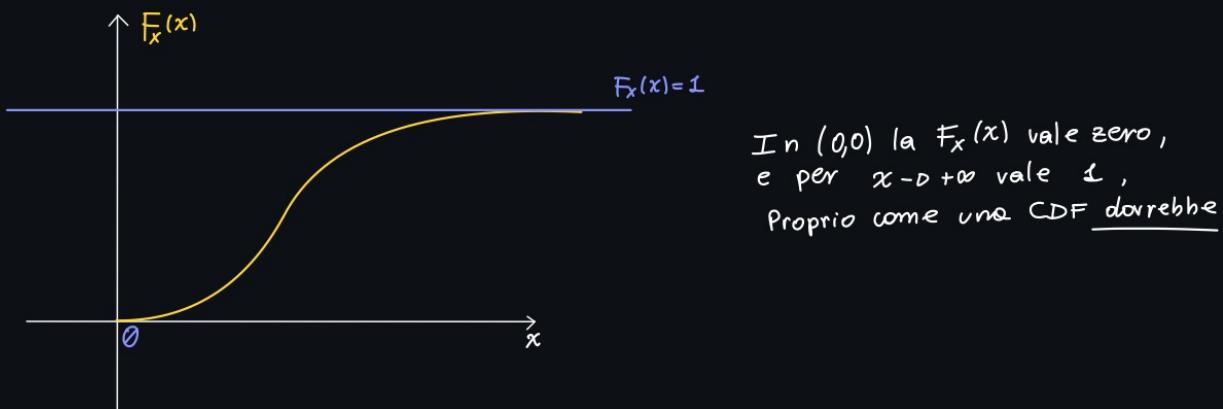
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(v) dv = \int_{-\infty}^{+x} \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot u(v) dv$$

Pongo $s = -\frac{v^2}{2\sigma^2} \Rightarrow ds = -\frac{2v}{2\sigma^2} dv \Rightarrow \int_0^x \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot u(v) \cdot \frac{\sigma^2}{v} dv$

$$\Rightarrow - \int_0^s e^s ds = - \left[e^s \right]_0^s = -e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} + 1$$

L'estremo cambia con la sostituzione

quindi $F_X(x) = (1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}) \cdot u(x)$



🏁 1:09

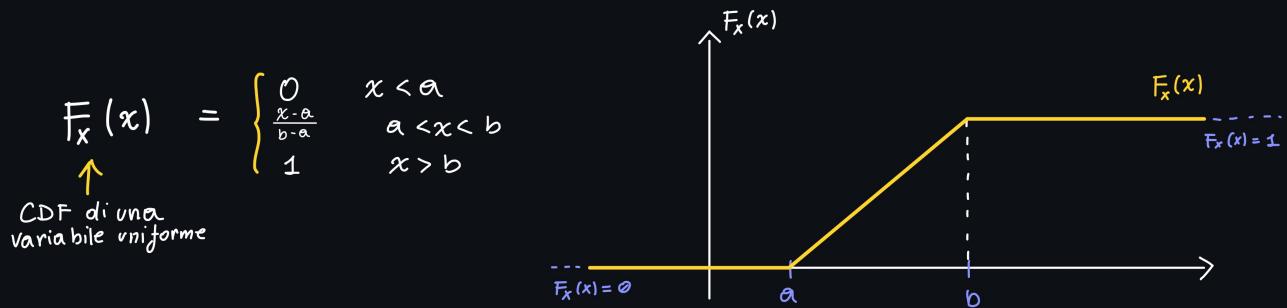
Calcolare la PDF a partire dalla CDF

In questo caso la X si dice **distribuita** con una variabile aleatoria uniforme in **a** e **b**:

Variabile Aleatoria Uniforme

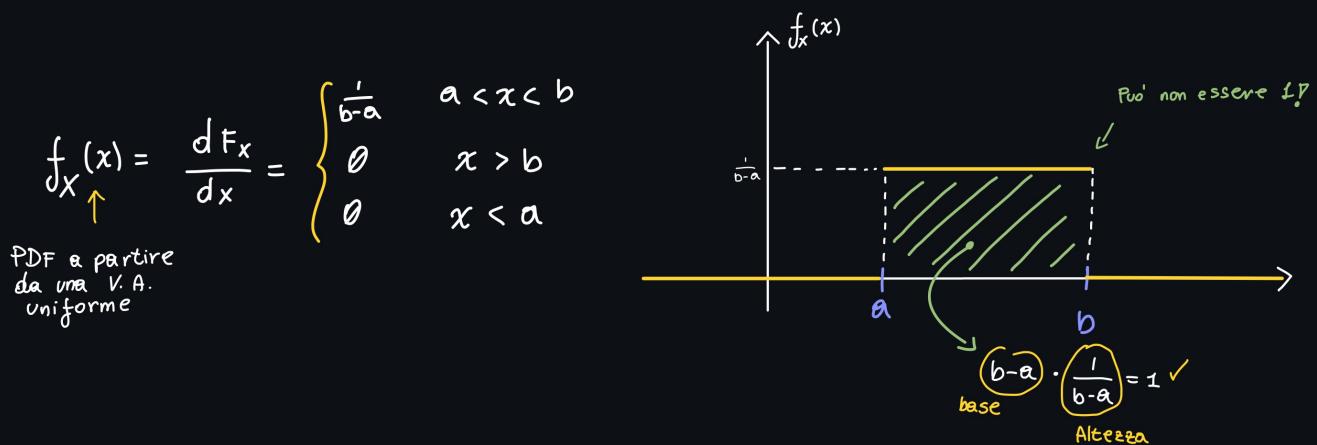
$$X \sim U(a, b)$$

La **CDF di una variabile aleatoria uniforme** viene definita come una funzione **in più intervalli**:



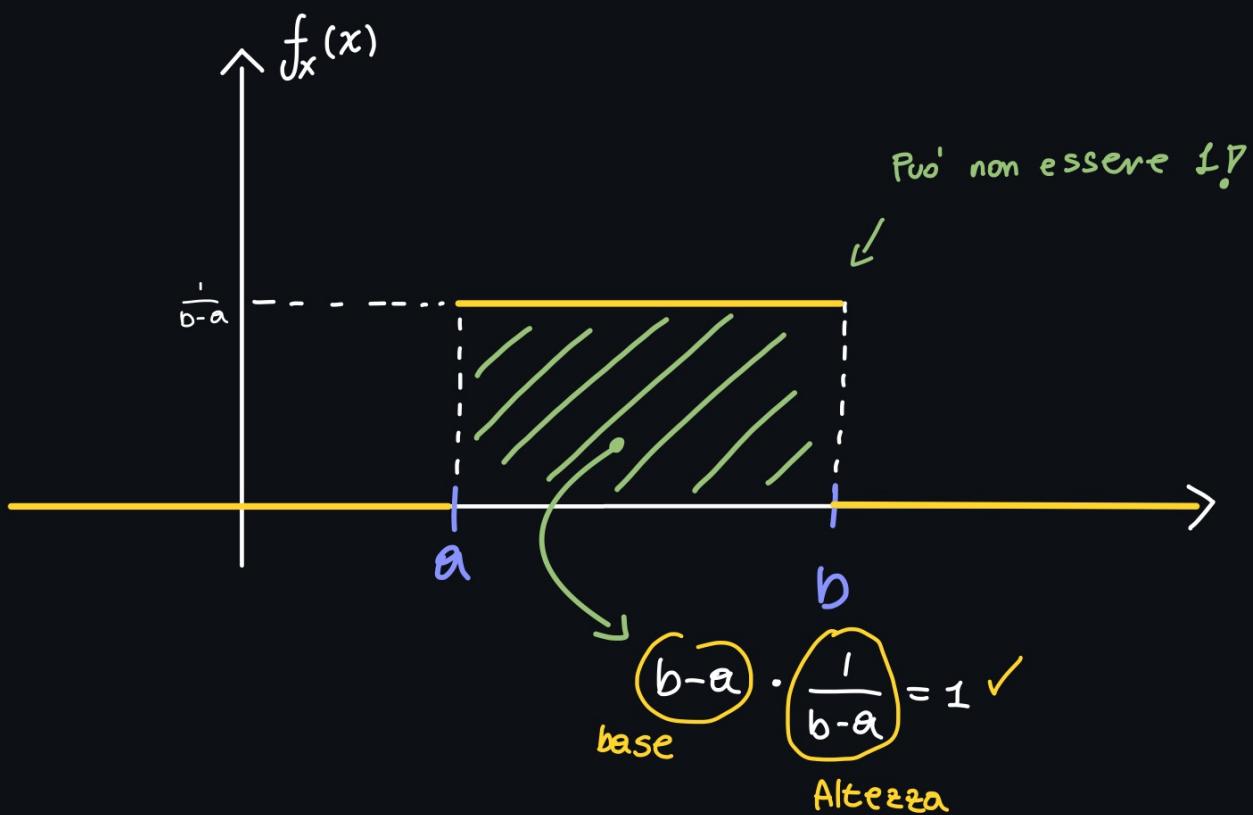
Siccome abbiamo già definito una variabile aleatoria uniforme nelle scorse lezioni, possiamo definire la PDF a partire dalla CDF

La PDF si calcola derivando la CDF



I valori assunti dalla PDF non è detto che siano compresi tra 0 ed 1, proprio perchè abbiamo detto che **la PDF non è una probabilità!**.

Tra le proprietà costitutive della PDF ci sono la **non negatività** e la **normalizzazione**, cioè l'area sottesa alla curva (in questo caso alla funzione costante) deve essere uguale ad 1:



Tiriamo le somme

Abbiamo visto due esempi:

Nella variabile **di tipo Reileigh** abbiamo definito prima la PDF e poi abbiamo ricavato la CDF;

Nel secondo esempio, abbiamo definito prima la CDF ricavandoci successivamente la PDF.

Variabile aleatoria esponenziale

In questo caso la variabile aleatoria X è distribuita nel seguente modo:

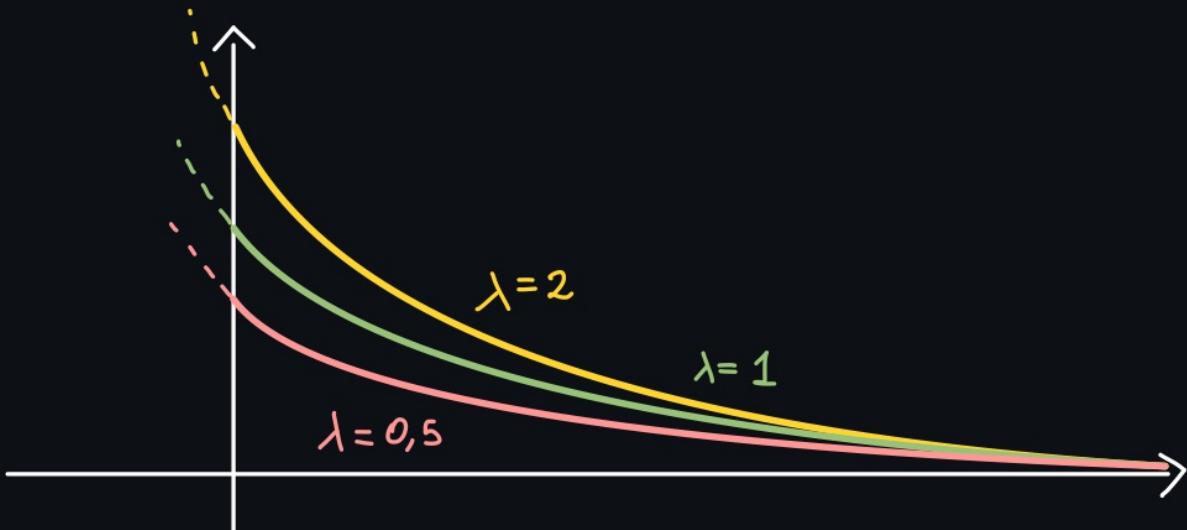
Variabile Aleatoria Esponenziale

$$X \sim \mathcal{E}_x(\lambda)$$

La Sua PDF è del tipo:

$$f_x(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$

Solo valori per $x > 0$



Al variare di λ la curva varia.

$\lambda \gg$ esponenziale accentuato

$\lambda \ll$ esponenziale appiattito

🏁 1:18

Calcoliamo la CDF integrando la PDF

Il calcolo è molto simile a quello fatto in precedenza per la **Variabile di Rayleigh**:

Calcolare la CDF dalla PDF

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(v) dv = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda v} \cdot u(v) dv = \int_0^x \lambda e^{-\lambda v} \cdot u(v) dv$$

Limitiamo l'intervallo a dove non si annulla

$$\Rightarrow \text{Sostituzione} \rightarrow s = -\lambda v \Rightarrow ds = -\lambda dv \Rightarrow - \int_0^{-\lambda x} e^s ds = \left[-e^s \right]_0^{-\lambda x} = \boxed{1 - e^{-\lambda x}} = \boxed{M(x)}$$

Nuovo Intervallo

Variabile Aleatoria Gaussiana

Per descrivere la Gaussiana, dobbiamo iniziare definendo una **variabile aleatoria Gaussiana Standard**:

Variabile aleatoria Gaussiana Standard

Per indicare una Gaussiana Standard, e distinguherla da una **non standard**, invece di usare la **X**, usiamo **X₀**:

Variabile Aleatoria Gaussiana (Standard)

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

La Gaussiana viene anche definita come Normal Distribution

La X₀ è **distribuita ad N**; si utilizza "N" perchè la gaussiana è anche nota come **Normal Distribution**.

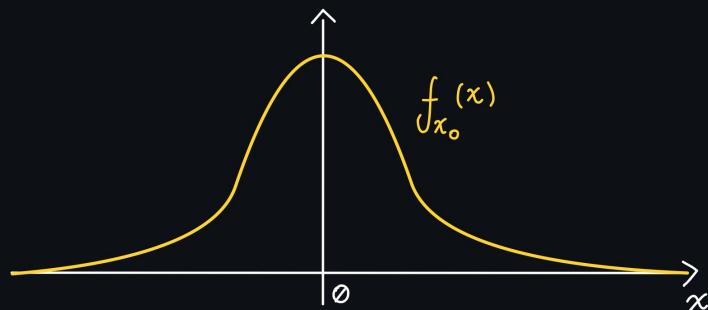
I parametri sono **(0,1)**, perchè a differenza della Gaussiana Non standard questi parametri (nella Gaussiana non standard) possono essere diversi da zero ed uno.

Ad ogni modo la Gaussiana Standard ha i parametri 0,1 fissati.

Una Gaussiana Standard è definita quando ha la PDF come:

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

↑
PDF



La gaussiana Standard è:

- **Centrata** in zero
- Forma a **campana**
- Speculare rispetto all'asse y

È una probabilità! Quindi l'area sottesa a tutta la curva sarà uguale ad 1!

Calcolare la CDF della V.A. Gaussiana Standard dalla sua PDF con la Q-Function

Anche in questo caso la strada per calcolare la CDF è la stessa del calcolo delle precedenti V.A., ma in questo caso abbiamo un "problemino":

Ricavare la CDF dalla PDF

$$F_{x_0}(x) = \int_{-\infty}^x f_{x_0}(v) dv = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad \text{Non è esprimibile in forma chiusa}$$

Per ovviare a questo problema, procediamo "**per via numerica**", in particolare **si preferisce usare la Q-Function**:

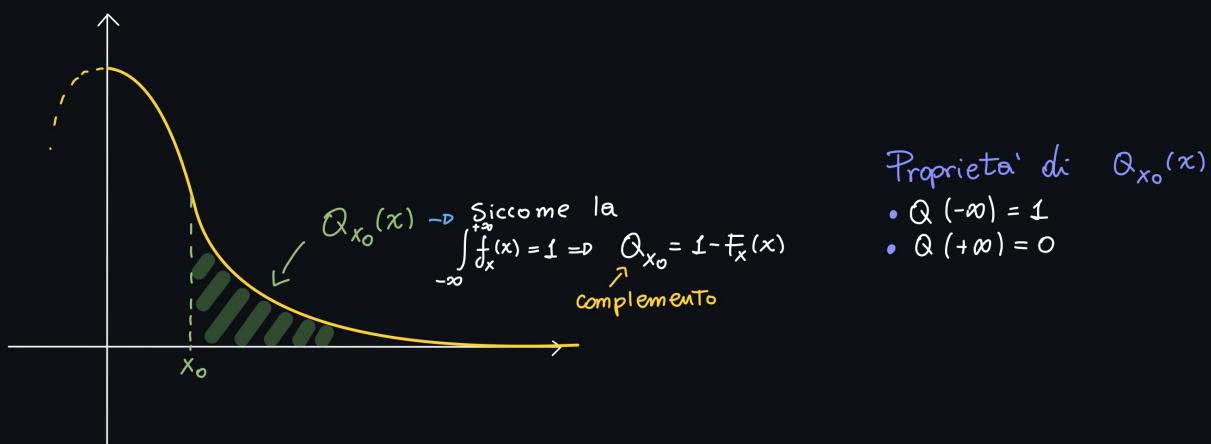
$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - F_{X_0}(x)$$

complementare

Stessa idea di:
 $P(\bar{A}) = 1 - A$

Per via degli estremi di integrazione opposti rispetto alla definizione della CDF, è detta la **COMPLEMENTARE** della CDF.

La Q-function è integrata in tutti i linguaggi di programmazione e non è altro che l'integrale tra x e $+\infty$ della funzione vista precedentemente.



Essendo $Q_{X_0}(x)$ la complementare di F_X valgono le proprietà elencate (deducibili ragionando)

Variabili Aleatorie Gaussiane Non Standard

Variabili Aleatorie Gaussiane Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

μ "mu"
 σ "Sigma"
 \mathcal{N} "calligrafica"

A partire dalla variabile aleatoria standard è possibile definire una famiglia di variabili aleatorie **gaussiane** mediante una **trasformazione lineare della Gaussiana standard**:

Trasformazioni lineari della Gaussiana Standard

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

\uparrow
Applichiamo un fattore
di scala Sigma

Applichiamo un fattore di scala Sigma ad X moltiplicato per X_0 , più mu.

N.B. i fattori Sigma e Mu sono gli stessi parametri visti nella definizione!

I due parametri non sono altro che **la media e la deviazione standard**, ovvero "dove la campana è centrata" (mu) e "quanto è stretta la campana" (sigma)

- $\sigma \gg$ campana larga
- $\sigma \ll$ campana stretta

$$X = \sigma \cdot X_0 + \mu$$

\uparrow \uparrow
Parametro di Parametro di
Scala Locazione
 $\sigma > 0$

Esprimere la CDF (non standard) in termini di una CDF (standard)

La CDF non è altro che la probabilità dell'evento:

Definizione di CDF

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$

x grande *x piccolo*

A questo punto ci basta sostituire X all'interno della definizione:

$$\Rightarrow F_X(x) = P(\{\alpha X_0 + \mu \leq x\})$$

$$= P\left(\{X_0 \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\}\right)$$

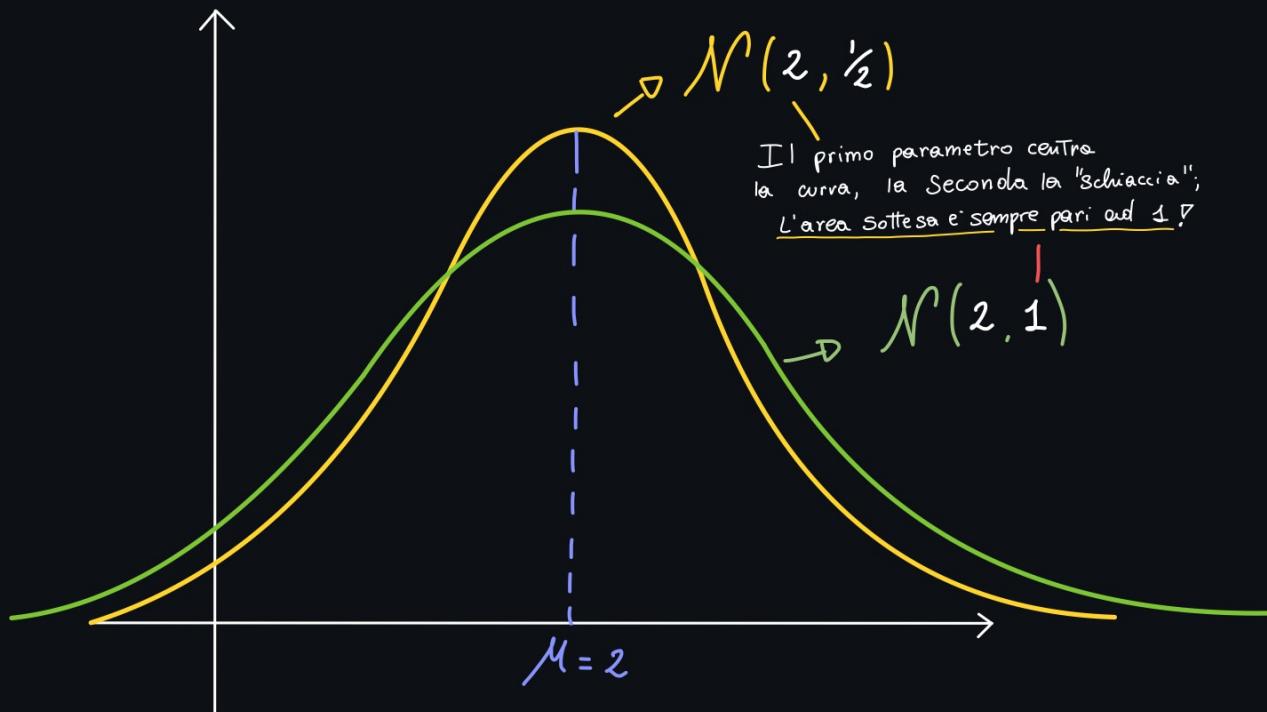
E' la CDF di X_0 valutata in $\frac{x - \mu}{\sigma}$

Variable Aleatoria
Gaussiana Standard

$$F_{X_0}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Stiamo dicendo che la CDF di una variabile aleatoria Gaussiana Qualsiasi che abbia i parametri μ e σ , è esprimibile mediante una CDF di una Gaussiana Standard valutata in $(x - \mu)/\sigma$

Il Grafico risultante è qualcosa del genere:



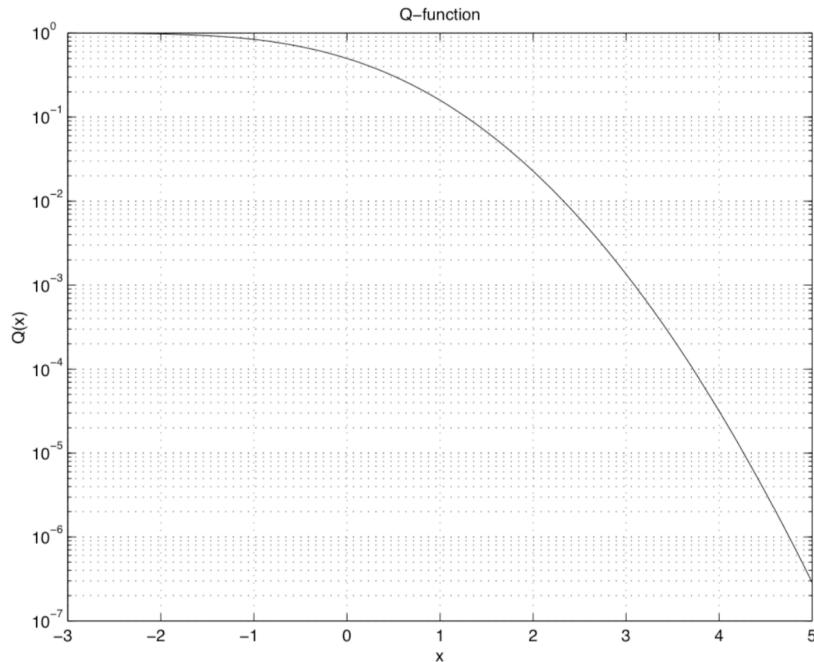
Uno sguardo alle slides...

Alla slide 18 del file [slides_09.pdf](#) vediamo l'integrale della CDF della variabile aleatoria gaussiana che "non riusciamo a calcolare"; questo (come abbiamo visto) può essere risolto andando a definire la variabile **Q(x)**.

Mediante la Q-Function, che è la complementare della CDF, riusciamo a **calcolare delle probabilità che la variabile sia compresa entro alcuni estremi** (ad esempio tra x_1 ed x_2).

Nella Slide 22 troviamo il grafico della funzione Q(x):

- Grafico della funzione $Q(\cdot)$ in scala semilogaritmica.



Quello che però è utile per l'esame non è il grafico, ma la Q-Function in forma tabellare:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744841	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3409029	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787863	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491699	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.1400710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313568	0.1292381	0.1271431	0.1250719	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1020423	0.1002725	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749336	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547992	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170030	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104440	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.0091374	0.0088940	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014889	0.0014412	0.0013948

È infatti importante calcolare i valori della Q-function in maniera precisa, fino alla **seconda cifra decimale**.

Come usare la tabella

Vogliamo, ad esempio, calcolare la $Q(2.37)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5000000	0.4960106	0.4920216	0.4880335	0.4840465	0.4800611	0.4760778	0.4720968	0.4681186	0.4641436
0.1	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443299	0.4403823	0.4364405	0.4325050	0.4285762	0.4246545
0.2	0.4207402	0.4168338	0.4129355	0.4090458	0.4051651	0.4012936	0.3974318	0.3935801	0.3897387	0.3859081
0.3	0.3820885	0.3782804	0.3744811	0.3706999	0.3669282	0.3631693	0.3594235	0.3556912	0.3519727	0.3482682
0.4	0.3445782	0.3400929	0.3372427	0.3335978	0.3299685	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156136	0.3120669
0.5	0.3085375	0.3050257	0.3015317	0.2980559	0.2945985	0.2911596	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
0.6	0.2742531	0.2709309	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578461	0.2546269	0.2514288	0.2482522	0.2450970
0.7	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296494	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
0.8	0.2118553	0.2089709	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1970623	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
0.9	0.1840601	0.1814112	0.1787860	0.1761855	0.1736087	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635430	0.1610870
1.0	0.1586552	0.1562476	0.1538642	0.1515050	0.1491691	0.1468590	0.1445722	0.1423096	0.14000710	0.1378565
1.1	0.1356660	0.1334995	0.1313561	0.1292381	0.1271431	0.1250710	0.1230244	0.1210004	0.1190001	0.1170231
1.2	0.1150696	0.1131394	0.1112324	0.1093485	0.1074876	0.1056497	0.1038346	0.1010423	0.1000275	0.0985253
1.3	0.0968004	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901226	0.0885079	0.0869149	0.0853434	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807566	0.0792639	0.0778030	0.0763585	0.0749334	0.0735292	0.0721450	0.0707808	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642554	0.0630083	0.0617801	0.0605707	0.0593799	0.0582075	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547902	0.0536989	0.0526161	0.0515057	0.0505025	0.0494714	0.0484572	0.0474596	0.0464786	0.0455139
1.7	0.0445654	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400591	0.0392039	0.0383635	0.0375379	0.0367269
1.8	0.0359303	0.0351478	0.0343795	0.0336249	0.0328841	0.0321567	0.0314427	0.0307419	0.0300540	0.0293789
1.9	0.0287165	0.0280660	0.0274289	0.0268034	0.0261894	0.0255880	0.0249978	0.0244191	0.0238517	0.0232954
2.0	0.0227501	0.0222155	0.0216916	0.0211782	0.0206751	0.0201822	0.0196992	0.0192261	0.0187627	0.0183088
2.1	0.0178644	0.0174291	0.0170038	0.0165858	0.0161773	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135525	0.0132093	0.0128737	0.0125454	0.0122244	0.0119106	0.0116037	0.0113038	0.0110106
2.3	0.0107241	0.0104446	0.0101704	0.00993630	0.0099415	0.00993807	0.00993574	0.0088940	0.0086563	0.0084241
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073430	0.0071428	0.0069468	0.0067556	0.0065691	0.0063871
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.0049400	0.0047987
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040425	0.0039070	0.0037925	0.0036811	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032640	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.0027179	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.0019883	0.0019262
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015381	0.0014893	0.0014412	0.0013948

Calcolare la Q-Function di
 $Q(2.37)$

Ci basta prendere le prime due cifre tra le righe, e l'ultima cifra tra le colonne

In questo caso il valore di $Q(2.37) = 0.0088940$