Media Statistica: Rappresentazione sintetica delle variabili aleatorie

Introduciamo un **numero** che caratterizza la variabile aleatoria che si chiama **Media Statistica**:

MEDIA STATISTICA

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx & \text{Variabili Continue} \\ \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{A}_X} x\, P_X(x) & \text{Variabili Discrete} \end{cases}$$

Expectation

"Valore Atteso"

> Non Facciamo altro che prendere tutti i valori della variabile aleatoria, li **pesiamo** moltiplicandoli per la **probabilità che la variabile aleatoria assuma quel valore** ($f_X(x)$ e $F_X(x)$)

→ x_1 "pesa" di più di x_2

> Il "peso" è dato proprio **dalla probabilità che la x assuma proprio quel valore**.

Perchè si chiama "media del valore atteso?"

Essenzialmente perchè la media si concentra sui valori che sono **più probabili**!

La media statistica confrontata a quella aritmentica (esempio discreto)

La media statistica non equivale alla media aritmetica (la media a cui siamo tutti abituati); questo perchè la media aritmetica di N valori (discreti) si calcola nel seguente modo:

Media Aritmetica

$$I = \{\text{"insieme di } n \text{ numeri"}\}$$

$$\rightarrow \quad M_S = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{\| I \|}$$

Cardinalità di I

> Detto in maniera semplice: "somma di tutti i valori diviso il numero di valori".

Nella media Statistica di N valori (anche in questo caso siamo in ambito discreto) invece, abbiamo che la media viene calcolata nel seguente modo:

MEDIA STATISTICA

$I = \{$"insieme di n numeri"$\}$

$$M_A = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot P_X(a_i)$$

Probabilita' che a_i assuma proprio quel valore $\rightarrow$ Se equiprobabile $P_X(a) = \frac{1}{\|I\|}$ costante

Nel caso di entries equiprobabili

$$\rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i$$

> Nel caso in cui gli elementi sono equiprobabili, il "peso" diventa costante ed è quindi possibile portarlo fuori dalla sommatoria (o integrale nel caso continuo).

Calcolare la media: Qualche esempio dalle varie variabili aleatorie

Media della Variabile Bernoulliana - Esempio Variabile Discreta

Variabile Bernoulli

$X \sim B(1, p)$

è la classica variabile costruita per gli esempi di Lancio Della Moneta

$$\mathcal{X}_X = \{\overset{T}{0}, \overset{C}{1}\}$$

→ Modella il Successo o insuccesso di qualcosa

$0 = 1 - p$

Assume valore 1 con Probabilità p

> Chiamiamo "q" la probabilità di "zero": `q = 1 - p`

Questa variabile aleatoria è di concezione molto semplice, quindi sarà altrettanto semplice calcolarne la media:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x_i \cdot p_X(x)$$

Media

$$= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Media della Variabile Aleatoria Esponenziale - Esempio Variabile Continua

Variabile Esponenziale

$$X \sim \mathcal{E}_X(\lambda) \rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Si restringe per via del gradino } u(x)}}{=} \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PARTI}}}{=} \left[x \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= [0 \cdot 0] + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{0}^{+\infty} = \left[0 - \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot 1\right)\right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$t = e^{-\lambda x} \rightarrow dx = \frac{1}{-\lambda e^{-\lambda x}}\,dt$$

Possiamo definire la Variabile Aleatoria Esponenziale con la sua PDF, ma possiamo anche semplicemente dire che **ha una media pari ad 1/λ**

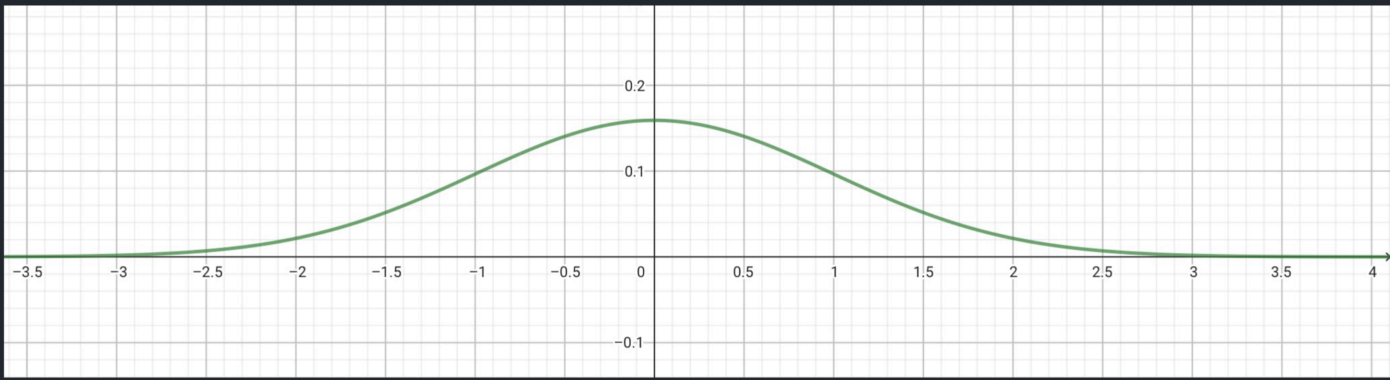
Media della Variabile Gaussiana Standard - Esempio

Media della Gaussiana Standard

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow f_{X_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\,dx = 0$$

In questo caso possiamo dire fin da subito che l'integrale risulta zero perchè, se proviamo a *plottare* la funzione, ci accorgiamo immediatamente che è una funzione **pari**, il che ci dice che l'integrale di questa funzione parti da meno a più infinito, è proprio zero:



Media della Variabile Gaussiana Non Standard - Esempio

Con la Gaussiana Non Standard ci accorgiamo di una particolarità interessante: se in quella standard abbiamo ottenuto "zero" come media, ci aspetteremo di ottenere il valore (appunto) medio anche in questo caso, che non è più fissato a 0, ma **varia a seconda di μ**!

La media è un operatore lineare: la media della somma è la somma delle medie, e la media della costante per la variabile aleatoria è uguale alla costante per la media della variabile aleatoria.

In altre parole μ è proprio questo il valore che assumerà la media, dimostriamolo:

Media della Gaussiana Non Standard

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \to f_X(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma X_0 + \mu] = \sigma \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X_0]}_{\emptyset} + \mu = \mu$$

Media di una Gaussiana Standard

Portiamo fuori dalla media le costanti μ e σ visto che non la influenzano

ES:

- $\int c \cdot x \, dx = c \int x \, dx$
- $\sum c \cdot x = c \cdot \sum x$

> Dimostriamo quindi che la **media statistica** di una gaussiana Non Standard è proprio pari a μ!
>
> È stato possibile dimostrarlo proprio perchè **abbiamo espresso la gaussiana non standard come quella standard**

Gaussiana Non Standard espressa come Gaussiana Standard

- $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ STANDARD
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ NON STANDARD

$$\rightarrow \boxed{X = X_0 \cdot \sigma + \mu}$$

🏁 23:00

Curiosità

In statistica oltre alla media statistica esistono anche **Mediana e moda**, che **solo nel caso della Gaussiana**, coincidono proprio a μ.

Media della Variabile Aleatoria Binomiale

Variabile Aleatoria Binomiale - Media

$$X \sim B(n, p)$$

Modella il conteggio Dei successi di un esperimento

Possiamo però vederla come una sommatoria di variabili Bernoulliane:

Possiamo vederla come... $\longrightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X \sim B(1,p)$ con $\mathcal{X}_X = \{\underset{1-p}{0}, \underset{p}{1}\}$

Variabile Bernoulliana

Quindi: $\mathbb{E} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{p} = n \cdot p$

Teorema Fondamentale Del Calcolo della Media

Sia X una variabile aleatoria con PDF o PMF assegnata; la media di una qualsiasi funzione g(x) può essere calcolata nel seguente modo:

Teorema Fondamentale

$$\mathbb{E}[g(x)] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx & \text{Continua} \\ \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{X}_X} g(x) \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

Quando è utile?

Ci torna molto utile quando abbiamo una funzione "difficile" di cui conosciamo la PDF: invece di calcolare la PDF della nuova variabile aleatoria (che è una funzione di quella precedente), ci basta integrare (o fare la sommatoria) rispetto alla PDF o

PMF della variabile originaria.

Non c'è bisogno di conoscere la PDF o PMF della funzione ma solo quella della Variabile Aleatoria Originaria.

Esempio

Esempio

$y = g(X)$

dove $g(X) = \cos(X)$

$X \sim U(0, 2\pi)$

V. Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ 0 & \text{per } x > b \\ \frac{1}{b-a} & \text{per } a < x < b \end{cases}$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x) \cdot f_X(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \Big[\sin(x) \Big]_0^{2\pi}$$

> Grazie a questo teorema, quindi, possiamo calcolare la media di una qualsiasi funzione se siamo a conoscenza della sua PDF o PMF

Momenti di Una Variabile Aleatoria

La media è anche definita come "momento", ma cosa si intende per "momenti di una variabile aleatoria X" ?

Si definisce Momento di **ordine k** della variabile aleatoria X la quantità:

Momento di X di ordine K

$$\mathbb{E}[X^K] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot f_X(x)\, dx & \text{Continua} \\ \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{X}_X} x^K \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

> Stiamo semplicemente elevando a **k** la **X**

Momenti Centrali di ordine k

Momenti centrali di ordine 1

Si definisce Momento Centrale (detto anche *centrato intorno a* μ_X) di ordine **k**, la quantità:

Momenti Centrati

$$E\left[(X-\mu_x)^k\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^k \cdot f_X(x)\,dx \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_x} (x-\mu_x)^k \cdot P_X(x) \end{cases}$$

> La media è un **momento non centrato di ordine 1**.

🏁37:00

Momenti di Ordine II

Tutti gli esempi di valori (momenti) sono di **Momenti di ordine II**.

Valore Quadratico Medio - MS

Viene detto anche **Valore MS**, che sta per **Mean Square**, tradotto: **Media Quadratica**.

Come il nome suggerisce, è semplicemente la media, non più di x, ma di x^2:

E' la media di x^2

$$\rightarrow \quad \mathbb{E}[X^2] = \overline{X^2} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx & \text{Continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_X} x^2 \cdot P_X(x) & \text{Discreta} \end{cases}$$

Momento di ordine 2 Non CentraTo

Indicata Anche in questo Modo

Valore Root Mean Square - RMS

A volte, invece di usare il valore MS, viene usato il RMS, detto anche **valore efficace**, e non è altro che la **radice dell' MS**:

- Valore RMS - Root Mean Square

A volte invece di usare il valore MS si usa il RMS, detto anche VALORE EFFICACE

$$\rightarrow \quad X_{rms} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

Varianza

Possiamo introdurre la varianza con un esempio:

L'altezza media degli studenti di una classe universitaria ci dice solo una parte di come è composta la classe (ci dice, appunto, solo la media delle altezze). Se oltre alla media conosciamo anche un valore che ci dice "più o meno" (rispetto alla media) **quanto variano le altezze**, abbiamo sicuramente una conoscenza nettamente maggiore della composizione della classe:

→ Momento Centrale di II Ordine → $Var(X) = \underbrace{E[(X-\mu_X)^2]}_{\text{Si sottrae la MEDIA}} = \underbrace{\sigma_X^2}_{\text{VARIANZA}} = (\text{Dev. Standard})^2$

> Vediamo come la **varianza** non è altro che la **deviazione standard** elevata al quadrato; procediamo quindi alla definizione di deviazione standard.
>
> **Attenzione!** Quando scriviamo $E[(x-\mu)^2]$ e poi calcoliamo l'integrale (o la sommatoria), **dobbiamo ricordarci del teorema della media**, che ci dice che la funzione da calcolare va moltiplicata per la **PDF o PMF** della variabile aleatoria in esame!

Deviazione Standard

Come abbiamo visto nella sezione precedente, la **deviazione standard** non è altro che la **radice della varianza**:

– DEVIAZIONE STANDARD

Si definisce D.S. la RADICE della Varianza

→ $\sigma_X = \sqrt{E[(X-\mu_X)^2]}$ → "Sigma" (σ) non è usato "a caso"! Infatti viene anche usato come parametro nelle Gaussiane non Standard.

Varianza di una trasformazione affine di una variabile aleatoria

Infatti $\underbrace{aX+b}_{\text{per una qualsiasi trasformazione affine di una V.A.}} \longrightarrow Var(aX+b) = a^2 \cdot \sigma_X^2$

aX+b V.A.

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E\left[(aX+b-\mu_{aX+b})^2\right] = E\left[\{(aX+b)-E[aX+b]\}^2\right] \\
&= E\left[\{aX+\cancel{b} \underbrace{- aE[X]-\cancel{b}}_{\text{Per la linearita' della Media}}\}^2\right] = E\left[\{a(X-E[X])\}^2\right] \\
&= E\left[a^2(X-E[X])^2\right] = a^2 \overbrace{E\left[(X-\mu_X)^2\right]}^{\text{VARIANZA}} = a^2\sigma^2
\end{aligned}
$$

Gaussiana

Sappiamo che la Gaussiana non standard è definita come:

Gaussiana

$$X = \sigma X_0 + \mu$$

Abbiamo visto prima che la varianza di aX+b è pari a (a^2 σ^2), ed infatti:

$$\rightarrow \quad Var(X) = \underbrace{\sigma^2}_{a^2} \cdot Var[\underbrace{X_0}_{?}]$$

Il problema sopraggiunge quando ci accorgiamo di non conoscere la varianza di X_0, dobbiamo quindi calcolarla...

Varianza di una Gaussiana Standard

$$\rightarrow Var[X_0] = \mathbb{E}\left[(X - \underbrace{\mu_x}_{\emptyset})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2\,dx$$

$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — media — guess what this is...

Poniamo

$$= \frac{x^2}{2} = t \rightarrow x^2 = 2t \rightarrow x = \pm\sqrt{2t} \quad \xrightarrow{\text{La funzione è pari}} \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}_{\sqrt{\pi}}} \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{t}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-t}\,dt$$

> Immagine (1)

Giunti a questo punto, "ci ricordiamo" che esiste una funzione chiamata "gamma di Eulero" ($\Gamma(k)$) che è proprio uguale a...

Gamma di Eulero:

$$\Gamma(K) = \int_0^{+\infty} t^{K-1} \cdot e^{-t} \, dt$$

> Immagine (2)

Tramite qualche passaggio algebrico, quindi, ci accorgiamo che l'integrale ottenuto nell'immagine (1) è proprio l'integrale ottenuto nella (2) con parametro `(1/2 + 1)`:

$$\rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}\cancel{+1}\cancel{-1}} \cdot e^{-t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}$$

$$1-\tfrac{1}{2}$$

Questa è una funzione particolare, e gode della proprietà:

Gode delle proprieta':

- $\Gamma(K+1) = K\,\Gamma(K)$
- $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Quindi... pongo $K = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{1-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{K}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\Gamma(K)}_{\sqrt{\pi}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} = 1$

Mettendo tutto assieme e sfruttando le proprieta'

Scopriamo quindi che **la varianza della Gaussiana Standard ha varianza pari ad 1** :

$$\Rightarrow Var[X_0] = Var[(X \sim \mathcal{N}(0,1))] = \mathbb{E}[(X-\mu_x)^2] = 1$$

gaussiana Standard

Abbiamo così dimostrato che la gaussiana Standard ha **Media Nulla** e **varianza unitaria**, proprio pari ai parametri della funzione!

Ma non era questo il punto della dimostrazione, infatti il nostro obbiettivo era quello di ricavare la varianza della **Gaussiana Non Standard:**

Varianza di una Gaussiana Non Standard

Torniamo alla Varianza della gaussiana Non Standard

$$Var[X] = Var(\sigma X_0 + \mu) = \sigma^2 \cdot Var[X + \underbrace{\mu}_{0}] = \sigma^2 \underbrace{Var[X_0]}_{1} = \sigma^2$$

Abbiamo così dimostrato che la varianza di una Gaussiana Non Standard **è proprio σ^2**! Che corrisponde proprio ad uno dei parametri della funzione:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Media   Varianza

Deduciamo quindi che i parametri usati nella Gaussiana Non Standard, oltre ad essere dei parametri usati per la **posizione** e **scala** (graficamente), hanno anche un **significato di caratterizzazione sintetica della variabile**!

Valore quadratico medio (MS), Varianza e Media sono legate tra loro

Se definiamo una variabile aleatoria Gaussiana con una sua media e varianza, seguirà che il valore MS viene calcolato (derivato) da Media e Varianza; lo stesso accade a parti inverse: se sono definiti MS e Varianza, allora la Media viene calcolata dalle altre due.

Vediamo perchè:

Valore quadratico medio (MS), Varianza e Media sono legate tra loro

Definizione Di Varianza

$$\underbrace{\mathbb{E}[(x-\mu_x)^2]}_{\sigma^2 \triangleq \text{Varianza}} = \mathbb{E}[x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2] = \underbrace{\mathbb{E}[x^2]}_{\text{MS}} \underbrace{-2\mu_x \mathbb{E}[x]}_{-2\mu_x^2} + \mu_x^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$$

costanti

Possiamo quindi collegare tra loro tutti e 3 i valori:

$$\Rightarrow \sigma^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$$

$$\Rightarrow \overline{X}^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

$$\Rightarrow \mu_x^2 = \overline{X}^2 - \sigma^2$$

Raccolta di esercizi

Fino a 1:35 vengono risolti degli esercizi sui **momenti**.

Recap della lezione

Abbiamo visto i **momenti**, che non sono altro che dei **numeri**, che in maniera **sintetica** ci caratterizza la variabile aleatoria, **senza l'ausilio della funzione.**

Ad esempio: se abbiamo una gaussiana e ci viene detto che la media "170", sappiamo benissimo che la nostra variabile aleatoria è centrata in μ_x (ovvero la media) e se ci viene fornita anche la deviazione standard, sappiamo quanto è piatta o quanto è "alta" la Gaussiana.

Abbiamo anche introdotto altri "numeri" che ci caratterizzano la variabile aleatoria, che sono i **momenti di ordine altro** (k), introducendo il **momento di secondo ordine**.

Sono momenti di secondo ordine:

- Valore quadratico medio
- Il valore RMS
- Varianza

Questi sono detti **momenti Centrali**, perchè la varianza (ad esempio) è un **momento del secondo ordine centrato** (ovvero con la **media** sottratta).