Applicazioni della media e della Potenza

POTENZE MUTUE

Consideriamo un segnale $z(\cdot) = x(\cdot) + y(\cdot)$, $\boxed{P_z = P_{x+y} \neq P_x + P_y}$

Recap Numeri complessi: Modulo quadro di z:

$$|z(\cdot)|^2 = z(\cdot)\cdot z^*(\cdot) = (z_R + jz_I)\cdot\underbrace{(z_R - jz_I)}_{z \text{ coniugato}} = z_R^2 - \cancel{jz_Rz_I} + \cancel{jz_Rz_I} - j^2 z_I^2$$

Perché: Parte Reale, Parte immaginaria

$i^2 = -1$

$$= z_R^2 + z_I^2$$ Proprio il Modulo al quadrato

$$\Rightarrow \langle |z(\cdot)|^2 \rangle = \langle (x(\cdot)+y(\cdot))(x(\cdot)+y(\cdot))^* \rangle = \langle (x(\cdot)+y(\cdot))(x^*(\cdot)+y^*(\cdot))\rangle =$$

$$= \langle x(\cdot)x^*(\cdot) + x(\cdot)y^*(\cdot) + y(\cdot)x^*(\cdot) + y(\cdot)y^*(\cdot) \rangle$$

Media è op. lineare

$$= \underbrace{\langle x(\cdot)x^*(\cdot)\rangle}_{\langle |x(\cdot)|^2\rangle \to P_x} + \underbrace{\langle x(\cdot)y^*(\cdot)\rangle}_{P_{xy}} + \underbrace{\langle y(\cdot)x^*(\cdot)\rangle}_{P_{xy}^*} + \underbrace{\langle y(\cdot)y^*(\cdot)\rangle}_{\langle |y(\cdot)|^2\rangle \to P_y}$$

P_{xy}: Potenza Mutua tra x e y

P_{xy}^*: coniugato di P_{xy}

$$= P_x + P_y + P_{xy} + P_{xy}^*$$

POTENZA MUTUA

$$P_{xy} = \langle x(\cdot)y^*(\cdot)\rangle = \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot y^*(t)\,dt & \text{Continuo} \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)\cdot y^*(n) & \text{Discreto} \end{cases}$$

ovviamente

$$P_{xy}^* = \langle x(\cdot)\,y^*(\cdot)\rangle^* \overset{!\ \text{Proof}}{=} \langle (x_R + jx_I)(y_R - jy_I)\rangle^* = \langle \underbrace{(x_R - jx_I)}_{x^*(\cdot)}\underbrace{(y_R + jy_I)}_{y(\cdot)}\rangle$$

$$= \langle x^*(\cdot)\cdot y(\cdot)\rangle \quad P_{xy}^*$$

$\Rightarrow$ In linea generale: $\boxed{P_{x+y} = P_x + P_y + 2\,\mathrm{Re}\{P_{xy}\}}$ proof $\to$ $z + z^* = z_R + \cancel{jz_I} + z_R - \cancel{jz_I} = 2z_R$

Potenza della Somma

A VOLTE il Termine $\{P_{xy}\}$ si annulla! Quando $P_{xy} = \emptyset$, x si dice ORTOGONALE ad y

$$\{P_{xy}\} = 0 \Rightarrow x \perp y \quad \Rightarrow \boxed{P_{x+y} = P_x + P_y}$$

Potenza della somma di due segnali ORTOGONALI

ES di due segnali ortogonali

- Media Temporale = x_{dc} = Componente Continua = $\langle x(t) \rangle$
- Media Alternata = $x_{ac} = x(t) - x_{dc}$

Recap lez prec

$$\Rightarrow P_{x_{ac} x_{dc}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_{ac}(t) \cdot x^*_{dc}(t)\, dt = x_{dc} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_{ac}(t)\, dt$$

Potenza Mutua $x_{ac}\ x_{dc}$

x_{dc} è la media $\Rightarrow$ Costante

Cost

Media Temporale di $x(t)$

$$\Rightarrow P_{x_{ac} x_{dc}} = x_{dc} \cdot \langle x_{ac}(t) \rangle = x_{dc} \cdot \varnothing = \varnothing$$

$x_{ac} = x(t) - \langle x(t) \rangle$

$\Rightarrow$ Media di un segnale A MEDIA NULLA

$\Rightarrow \varnothing$

$$\Rightarrow x_{ac} \perp x_{dc} \Rightarrow P_x = P_{ac} + P_{dc}$$

ES: Altri due sign. ortogonali

$x(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 t)$ $\quad$ $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ $\quad$ $\rightarrow$ Cos e sin con la stessa freq.

$$P_{xy} = \langle x(t) \cdot y^*(t) \rangle = \langle x(t) \cdot y(t) \rangle = \langle \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) \rangle =$$

Siccome sono 2 segn. reali il coniugato non opera

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$= \langle \tfrac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t) \rangle = \varnothing$$

Media Temporale della sinusoide

$\Rightarrow \cos(x) \perp \sin(x)$

Come sono espresse le potenze?

P_x è espressa in deciBel : dB $\Rightarrow$ $P_x\big|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_\varnothing}$

$\rightarrow$ si fa riferimento ad una potenza che a seconda di come viene scelta ci fa ottenere:

- $P_\varnothing$
  - 1W $\rightarrow$ dBW
  - 1mW $\rightarrow$ dBm

Come è espresso il valore RMS?

$rms = \sqrt{Pow}$

$$x_{rms}\big|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{x_{rms}}{x_0}$$

$x_0 \rightarrow \sqrt{P_\varnothing}$

Perchè il 20?

$$\rightarrow x_{rms}\big|_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{x_{rms}}{x_\varnothing} \right)^2$$

ENERGIE MUTUE

$x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ Sono due segnali di energia ($P_x = 0, \mathcal{E} \neq 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_{xy} + \mathcal{E}_{xy}^*}$$

dove $\mathcal{E}_{xy} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y^*(n) \end{cases}$ $\qquad \mathcal{E}_{yx} = \mathcal{E}_{xy}^* = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x^*(t)\, dt \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x^*(t)\, dt \end{cases}$

possiamo scrivere $\mathcal{E}_{xy}^* + \mathcal{E}_{yx} = 2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{E}_{xy}\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + 2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{E}_{xy}\}}$

Se $\mathcal{E}_{xy} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y \quad \rightarrow x \perp y$

RAPPRESENTARE I SEGNALI : Spazio Dei Segnali

Sono degli spazi particolari che sono CHIUSI rispetto alla SOMMA di due segnali ed alla moltiplicazione per uno scalare.
Possiamo definire 4 SPAZI LINEARI.

- SEGNALI
  - SEGNALI DI POTENZA
    - Somma: $S_{P_1} + S_{P_2} = S_P$
    - Moltiplicazione per scalare: $S_{P_1} \cdot \lambda = \lambda S_P$
  - SEGNALI DI ENERGIA
    - Somma: $S_{E_1} + S_{E_2} = S_E$
    - Moltiplicazione per scalare: $S_{E_1} \cdot \lambda = \lambda S_E$

Lo spazio dei segnali si suddivide:

- SEGNALI
  - Segnali Di POTENZA
    - Tempo CONTINUO
    - Tempo DISCRETO
  - Segnali Di ENERGIA
    - Tempo CONTINUO
    - Tempo DISCRETO

Recap prodotto scalare

PRODOTTO SCALARE degli spazi lineari

ES:

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Possiamo immaginare i vettori come due segnali di sequenze (S. Discreti)

$\rightarrow$ PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{x}$ e $\vec{y}$ $= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i^{*}$

(*) Coniugato se i segnali sono complessi

Prodotto Scalare tra due Segnali

Prodotto Scalare $= \langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \langle x(\cdot) \cdot y^{*}(\cdot) \rangle = \begin{cases} P_{xy} & \text{S. di Potenza} \\ \mathcal{E}_{xy} & \text{S. di Energia.} \end{cases}$

Notazione della Media temporale

- Quando $P_{xy} = 0$, allora $x \perp y$. Due segnali sono ortogonali quando, ad esempio, uno è zero e l'altro è $\neq 0$, e non sono mai $\neq 0$ nello stesso intervallo temporale.

Due segnali sono ortogonali quando sono ORTOGONALI nello spazio, ovvero quando il prodotto scalare è pari a zero.

Il prodotto scalare può anche essere visto come il GRADO DI SIMILITUDINE tra x ed y.

(a) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\leftarrow$ Norma Di Shwartz: il valore assoluto del prodotto scalare è minore uguale del prodotto della norma di x per quella di y.

Norma di un Segnale

$$\boxed{\|x(\cdot)\|^2 = \langle x(\cdot), x(\cdot) \rangle}$$

prodotto scalare tra x e se stesso

proof: $\|x(\cdot)\|^2 = \langle x(\cdot) \cdot x^{*}(\cdot) \rangle = \langle |x(\cdot)|^2 \rangle = \begin{cases} P_x & \text{se } x \text{ è un S. di Potenza} \\ \mathcal{E}_x & \text{Se } x \text{ è un S. di Energia} \end{cases}$

Distanza tra due Segnali

$$\boxed{d_{xy} = \|x(\cdot) - y(\cdot)\|}$$

Norma della differenza tra x e y

Tornando ad ⓐ ↑

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Il valore assoluto del prodotto scalare è limitato superiormente dal prodotto di $\|x\| \cdot \|y\|$.

Vale l'uguaglianza ($|\langle x,y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$) quando c'è un legame di proporzionalità tra x ed y, ovvero quando, ad esempio $x = a \cdot y$.

CHE VUOL DIRE ?

Segnali ortogonali → $\emptyset$

Segnali legati da un LEGAME FORTE (come la lineare dipendenza "$x = a \cdot y$") → $|\langle x,y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

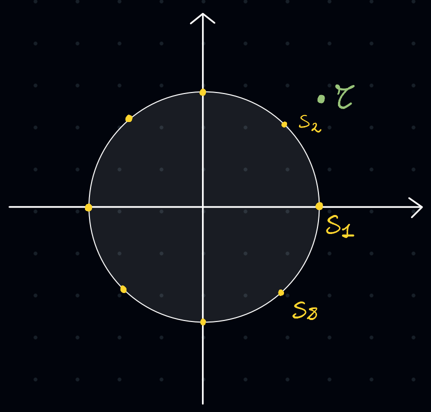
ES: 8 PSK

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

↑ RUMORE

Per trasmettere su un canale, abbiamo bisogno di modulare il segnale;
In un canale in cui entra un ingresso s(t), uscirà un segnale r(t), dove r(t) è “almeno” una versione rumorosa del segnale trasmesso s(t).

Se abbiamo la costellazione di segnali S1, S2, … , S8, ed immaginiamo di trovarci in ricezione (dove non conosciamo il segnale trasmesso), come facciamo a capire se il segnale trasmesso è stato un S1 o S2 o … Sn?

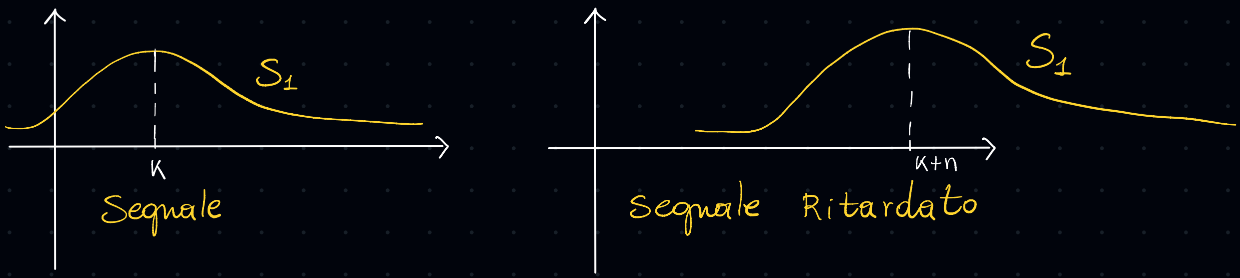


Immaginiamo di ricevere un r che si trova nella posizione (vedi grafico 1), per quale segnale (Sn) decideremmo?

Andiamo a valutare **la distanza** tra r ed ogni Sn, vediamo quello più vicino ad r, e sarà quello l'Sn che decideremo.

⇒ La Norma e la Distanza sono utili nella realtà pratica.

Consideriamo un segnale qualsiasi e la sua versione ritardata:



Quanto Sarà il prodotto scalare tra i due? ZERO

→ Dobbiamo quindi poter "modificare" il segnale per poterci operare

FUNZIONI DI CORRELAZIONE

T. Continuo: $\boxed{r_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle}$

F. di Correlazione

Al variare di τ, ovvero il ritardo.

Dobbiamo però distinguere i segnali di potenza e di Energia:

$$\langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \begin{cases} \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt & \text{Potenza} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt & \text{Energia} \end{cases}$$

T. DISCRETO:

$$r_{xy}(m) = \langle x(n), y(n-m) \rangle = \begin{cases} \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} x(n) \cdot y^*(n-m) & \text{Potenza} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, y^*(n-m) & \text{Energia} \end{cases}$$

FUNZIONE DI AUTO CORRELAZIONE

Può essere utile per valutare la rapidità di variazione o la predicibilità lineare di un segnale con se stesso, quindi negli istanti di tempo successivi.

T. Continuo

$$r_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle \begin{cases} \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt & \text{S. Continui di Potenza} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt & \text{S. Continui di Energia} \end{cases}$$

T Discreto

$$r_x(m) = \langle x(n), x(n-m) \rangle = \begin{cases} \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} x(n)\, x^*(n-m) & \text{Sequenze di Potenza} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n-m) & \text{Sequenze di Energia} \end{cases}$$

ES: f di A.corr. di un segnale costante

$x(t) = A$ per $-\infty < t < +\infty$

$$r_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \begin{cases} \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\, dt \end{cases}$$

Siccome il segnale costante ha P>0 applichiamo la prima

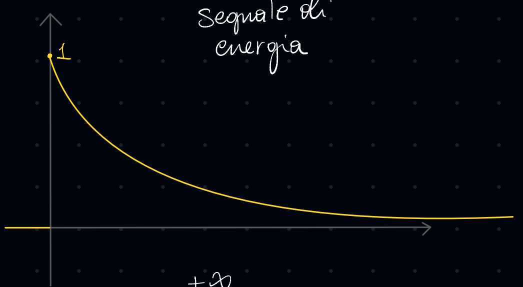
$$\Rightarrow \text{per } x(t) = A,\ x^*(t) = A \Rightarrow r_x(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A^2\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{\cancel{2T}} \cdot \cancel{2T} = A^2$$

La funzione di Autocorr coincide con la sua potenza.

ES: r_x dove x è un esp. monolatero:

$x(t) = A e^{-t} \cdot u(t)$

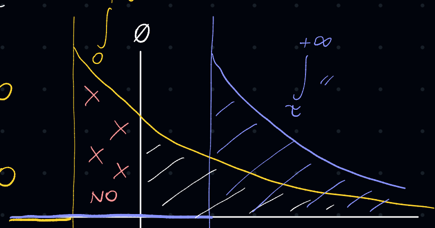
Segnale di energia



$$r_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [A e^{-t} \cdot u(t)] \cdot \overbrace{[A e^{-(t-\tau)} u(t)]}^{\text{Segnale reale}} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-t} \cdot e^{-(t-\tau)}\, dt = \begin{cases} \tau > 0 \\ \tau < 0 \end{cases}$$



$\tau < 0$ $\tau > 0$

Si considera solo $t > 0$ per via di $u(t)$

$$\Rightarrow \tau < 0 \quad \int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-2t} e^{\tau}\, dt = A^2 e^{\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\, dt$$

$$\tau > 0 \quad \int_{\tau}^{+\infty} A^2 e^{-2t} \cdot e^{\tau}\, dt = A^2 e^{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t}\, dt$$

$\tau < 0$: $A^2 e^{\tau}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = A^2 e^{t}\left[0+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}A^2 e^{\tau}$

$\tau > 0$: $A^2 e^{\tau}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{\tau}^{+\infty} = A^2 e^{t}\left[0+\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right] = \frac{1}{2}A^2 e^{-\tau}$

Notiamo che è il contrario del valore assoluto

$\Rightarrow$ $\tau > 0 \quad -t$

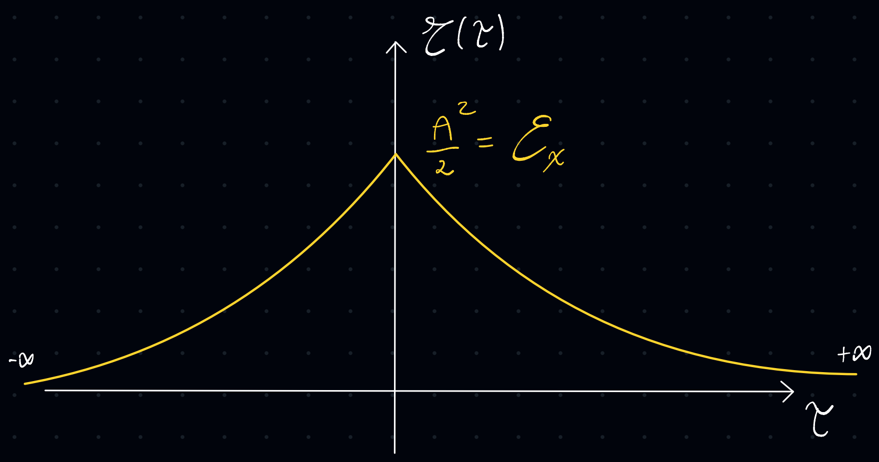
$\tau < 0 \quad t$

$$\Rightarrow \tau_x(\tau) = \frac{A^2}{2}e^{-|\tau|}$$

Se ricordiamo il calcolo dell'energia di $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$, $\mathcal{E}_x = \frac{1}{2a} \Rightarrow \mathcal{E}_{Ae^{-t}u(t)} = A^2\frac{1}{2}$

Capiamo quindi che Nell'origine:

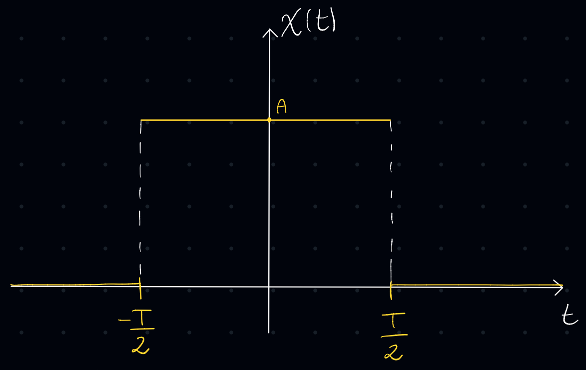
$\tau_x(0) = \frac{A^2}{2}e^{-|0|} = \frac{A^2}{2}$ vale proprio l'energia del segnale!



ES: AuTocorr di una Rect

$x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

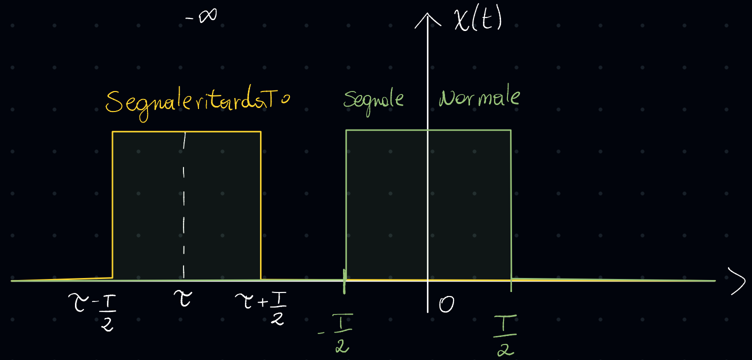
Ampiezza — Durata



Segnale di Energia

$$\text{Auto corr} = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt =$$ Dobbiamo considerare i diversi casi



1° caso: $\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \rightarrow \tau < -\frac{T}{2} - \frac{T}{2}$

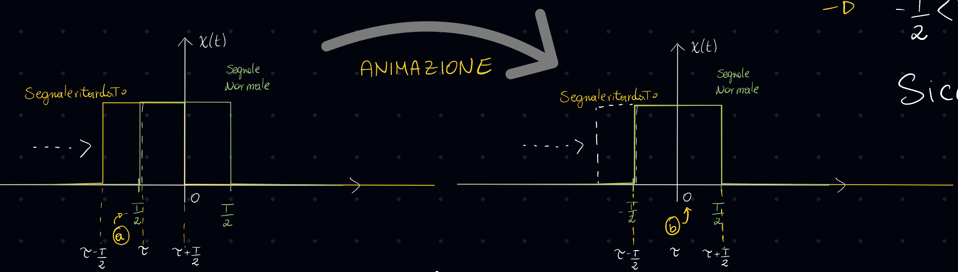
$\rightarrow \tau < -T$

Quanto vale $\varphi_x(\tau)$?

I due segnali non sono correlati $\rightarrow \varphi_x(t) = 0$

II Caso Il segnale ritardato arriva in zero

$\rightarrow -\frac{T}{2} < \tau + \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$



* Immaginiamo di Traslare il Segnale ritardato e di farlo "enTrare" in quello iniziale

Siccome i valori dei due segnali coincidono:

$-\frac{T}{2}$ | $\tau - \frac{T}{2}$; 0 | τ; $\frac{T}{2}$ | $\tau + \frac{T}{2}$

$\rightarrow$ Possiamo considerare l'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \tau + \frac{T}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Sempre immaginando la finestra che trasla, τ partirà dalla posizione $-\frac{T}{2}$ (a) ed arriverà alla posizione $\varnothing$ (b) $\Rightarrow -\frac{T}{2} < \tau < \varnothing$

$\Rightarrow \quad = \tau + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T + \tau$

$\rightarrow \tau - \frac{T}{2} = -\frac{T}{2}$

III Caso: La finestra ritardata parte sovrapposta a quella iniziale ed "esce" fino ad ad arrivare con $\tau - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$

In Termini di τ: $0 < \tau < T$

$$\Rightarrow \int_{\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots \, dt = T - \tau$$

IV Caso $\varphi_x = 0$ $\quad \tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow \tau > T$