Relazione di Parseval

La relazione di Parseval è una **teoria matematica** che afferma che **l'energia di un segnale** può essere calcolata sia integrando il modulo quadro del segnale nel dominio del tempo, sia integrando il modulo quadro **dello spettro** nel dominio della frequenza!

Vediamo perchè:

La prima cosa da fare è scriverci la formula dell'energia, esplicitiamo il modulo quadro e successivamente cerchiamo di calcolare la trasformata inversa di Fourier applicando la definizione:

Relazione di Parseval

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) \, dt \quad \longrightarrow \quad \text{I.F.T.} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df$$

$$\mathcal{F}^*(x(t))$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t} \, df$$

Sostituiamo quindi al segnale x la sua forma scritta in termini di trasformata inversa:

$$\text{Sostituiamo} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t} \, df \right] dt$$

Otteniamo un integrale all'interno dell'integrale iniziale; siccome è un segnale di energia possiamo scambiare l'ordine degli elementi all'interno degli integrali:

Possiamo scambiare l'ordine degli elementi da integrare perchè $x(t)$ è di Energia

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot \underbrace{\overbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt \right]}^{F.T}}_{X(f)} df$$

Ma notiamo che (ponendo il segnale all'interno del secondo integrale ed il suo spettro fuori), "salta fuori" proprio lo spettro del segnale (non coniugato! Scriviamoci questo integrale come lo spettro del segnale x:

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \cdot X(f)}_{|X(f)|^2} \, df$$

Notiamo che Lo spettro di x moltiplicato per lo spettro di x coniugato **non è altro che il modulo quadro dello spettro di x!**

Morale della favola

Abbiamo capito quindi che possiamo scrivere l'energia di un segnale sia come l'integrazione del suo segnale in modulo quadro, sia come integrazione del **suo spettro** in modulo quadro; questo è molto importante, perchè ci dice che **l'energia viene conservata** indipendentemente dal dominio in cui ci troviamo!

Morale della favola:

$$\boxed{\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df}$$

L'energia è la stessa sia nel campo del tempo che nella freq.

$\Rightarrow$ È possibile vedere l'energia direttamente sullo spettro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Possiamo definire una banda in termini energetici

Per le sequenze

$$\mathcal{E}_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

Lo spettro è periodico e <u>CONTINUO</u>