CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 16 giugno 2022

Lo studente può svolgere a sua scelta i primi due esercizi e la domanda di teoria oppure i tre esercizi.

Tempo a disposizione 2.30 ore.

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.

L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto (± 2 punti).

È ammessa la consultazione del solo formulario.

EX. 1

Si considerino due variabili aleatorie uniformi, X con alfabeto $\{0, 1, 2\}$ e Y, con alfabeto $\{-1, 0, 1\}$, indipendenti.

1. Scrivere, in forma tabellare, la PMF congiunta delle due variabili aleatorie X e Y.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione tra la variabile aleatoria $Z = X + Y$ e la variabile aleatoria X.

EX. 2

Dato il segnale campionato

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(3kT)\delta(t - kT) .$$

Calcolare il suo spettro e la frequenza minima di campionamento $f_c = 1/T$ per la ricostruibilità del segnale.

D. 1

Definire il concetto di ortogonalità tra segnali considerando sia la rappresentazione nel dominio del tempo che quella nel dominio della frequenza.

EX. 3

Il segnale $x(t)$ avente funzione di autocorrelazione

$$r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$$

viene filtrato mediante il sistema caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$.

Calcolare

1. la densità spettrale di energia del segnale $y(t)$ in uscita al sistema;
2. l'energia di $y(t)$.

EX. 1

Si considerino due variabili aleatorie uniformi, X con alfabeto $\{0,1,2\}$ e Y, con alfabeto $\{-1,0,1\}$, indipendenti.

1. Scrivere, in forma tabellare, la PMF congiunta delle due variabili aleatorie X e Y.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione tra la variabile aleatoria $Z = X + Y$ e la variabile aleatoria X.

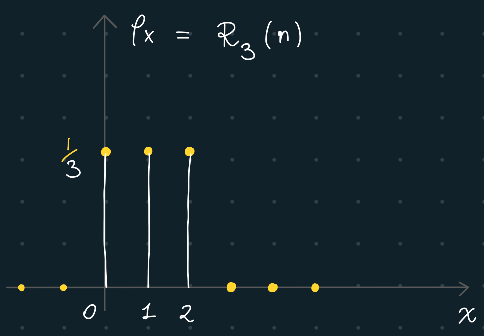
$X \sim U(a,b)$ $\qquad \mathcal{A}_X = \{0,1,2\}$ $\qquad$ X ed Y Indipendenti

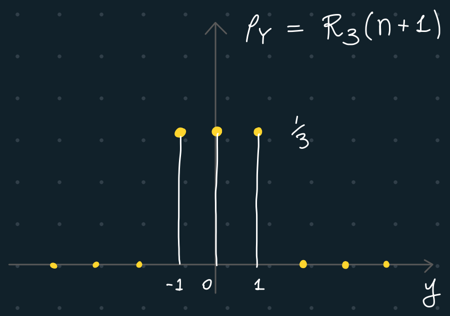
$Y \sim U(a,b)$ $\qquad \mathcal{A}_Y = \{-1,0,1\}$

PMF Congiunta : $p_{XY} : (x,y) \in \mathcal{A}_X \cdot \mathcal{A}_Y \rightarrow p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$

$\rightarrow$ La PMF congiunta è la prob che sia x sia uguale ad X e che allo stesso momento $Y=y$:

$$\Rightarrow \quad P(\{X=x\}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \qquad P(\{Y=y\}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } -1 < y < 1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$





$\rightarrow$ Siccome le var sono INDIPENDENTI $\rightarrow$ $P_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$ Traduciamo $\cap$ con AND $\rightarrow$ $(\cdot)$

Sappiamo che $P(X) = P(Y) = \frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow \quad P_{XY}(x,y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Le uscite sono EQUIPROBABILI $\Rightarrow$

$\mathcal{A}_X$	$\mathcal{A}_Y$	P_{XY}
0	-1	1/9
0	0	1/9
0	1	1/9
1	-1	1/9
1	0	1/9
1	1	1/9
2	-1	1/9
2	0	1/9
2	1	1/9

In definitiva : $P_{XY}(x,y) = P(\{X=y\} \cap \{Y=y\}) = \frac{1}{9} \quad \forall x,y \in \mathcal{A}_X \cdot \mathcal{A}_y$

Q_2 : Coefficiente di correlazione $Z = X + Y$ ed X

Ci servirà... μ_X, μ_Y, μ_Z ; $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$; $\bar{X}^2, \bar{Y}^2, \bar{Z}^2$

$\rightarrow$ Perchè $\rho_{ZX} = \dfrac{C_{ZX}}{\sigma_Z \cdot \sigma_X}$

- Mettiamoci a lavoro...

$$\mu_X = E[X] = \sum_{k \in \mathcal{A}_X} x(k) \cdot P_X(k) = \frac{1}{3}(0+1+2) = 1 \; \mu_X$$

$$\mu_Y = \frac{1}{3}(-1+0+1) = 0 \; \mu_Y$$

$$\mu_Z = E[X+Y] = \mu_X + \mu_Y = 1 \; \mu_Z$$

$$Z \sim U(a,b) \; , \; \mu_Z = \frac{a+b}{2} = 1$$

$\overline{X^2} = \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in \mathcal{R}_X} x^2(k) \cdot P_X(k) = \frac{1}{3}(0+1+4) = \frac{5}{3}$ $\overline{X^2}$

$\overline{Y^2} = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3}$ $\overline{Y^2}$

$\overline{Z^2} = \mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\,\mathbb{E}[XY]$ → X ed Y sono incorrelate → $r_{XY} = \mu_X \mu_Y = 0$

$= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ $\overline{Z^2}$

$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \overline{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \overline{X^2} - \mu_X^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ σ_X^2 $\Rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{6}}{3} \sim 0.81$

$\sigma_Y^2 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$ σ_Y^2 $\Rightarrow \sigma_Y = \frac{\sqrt{6}}{3} \sim 0.81$

$\sigma_Z^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ σ_Z^2 $\Rightarrow \sigma_Z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sim 1.15$

Tutto pronto! $Cov(Z,X) = \mathbb{E}[(Z-\mu_Z)(X-\mu_X)] = \mathbb{E}[ZX] - \mu_X \mathbb{E}[Z] - \mu_Z \mathbb{E}[X] + \mu_Z \mu_X$

Scriviamo $\mathbb{E}[ZX]$ come $\mathbb{E}[X(X+Y)] = \overline{X^2} + \mathbb{E}[XY] = \frac{5}{3} + 0 = \frac{5}{3}$ $\mathbb{E}[ZX]$

$\Rightarrow Cov_{ZX} = \frac{5}{3} - 1 \cdot 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ C_{ZX}

$\Rightarrow \rho_{XZ} = \frac{C_{XZ}}{\sigma_X \sigma_Z} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6\sqrt{2}}{9}} = \frac{2}{\cancel{3}} \frac{\cancel{9}^{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

coeff di corr.

EX. 2

Dato il segnale campionato

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(3kT)\delta(t-kT) .$$

Calcolare il suo spettro e la frequenza minima di campionamento $f_c = 1/T$ per la ricostruibilità del segnale.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(3kT) \cdot \delta(t-kT)$$

→ Dalle proprietà della δ sappiamo che: $\text{Sinc}(3kT) \cdot \delta(t-kT) = \text{sinc}(3t) \cdot \delta(t-kT)$

- Sappiamo che ad un campionamento nel tempo corrisponde una RIPRODUZIONE in frequenza:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t-kT) \Longleftrightarrow \text{rep}_T[x(t)] = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

→ Dobbiamo quindi ottenere lo spettro del segnale $X(f)$

→ Sappiamo che $A\,\text{Sinc}(2Bt) \Longleftrightarrow \frac{A}{2B}\, \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$

il nostro segnale $s(t) = \text{Sinc}(3t)$ non è proprio "pronto" per la trasformazione ... moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$s(t) = \text{Sinc}\left(\underbrace{\tfrac{3}{2}}_{B}\, 2t\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot \frac{3}{2}}\right) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{3}\, \Pi\left(\frac{f}{3}\right)$$

$S(f)$

⇒ Siamo pronti per Trasformare $x(t)$

$X(f)$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Sinc}(3kT) \cdot \delta(t-kT) \Longleftrightarrow \frac{1}{3T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f}{3}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \frac{1}{3T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - \frac{m}{T}}{3}\right)$$

Q_2: f_c minima per la riproducibilità

Dal teorema di "..." sappiamo che la freq minima f_c affinché un segnale sia ricostruibile è

$$f_c \geq 2B$$

⇒ Dobbiamo trovare la Banda che contiene il segnale: $f_c = \frac{1}{T}$

→ Sappiamo che la durata della Rect è $3 \Rightarrow B = \frac{1}{2} 3 = \frac{3}{2}$

⇒ Siccome $f_c \geq 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow f_c \geq 3$

Time 20'

EX. 3

Il segnale $x(t)$ avente funzione di autocorrelazione

$$r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$$

viene filtrato mediante il sistema caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$. Calcolare

1. la densità spettrale di energia del segnale $y(t)$ in uscita al sistema;
2. l'energia di $y(t)$.

$r_x(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$ viene filtrato da un sistema avente $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$

Q_1: $S_y(t) = ?$

- Sappiamo che: $Y(f) = X(f) \cdot H(f) \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Per trovare $h(t)$ ci affidiamo alla teoria: l'uscita di un sys è data da $x(t) * h(t) = y(t)$
inoltre $h(t)$ è la risposta del sistema ($y(t)$) quando viene sollecitato da un impulso

$\Rightarrow$ Per trovare $h(t)$ ci basta sostituire ad x un impulso.

$$y(t) = 2x(t) + 3x(t-2) \Rightarrow h(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t-2) \quad h(t)$$

Dalla teoria sappiamo che $\underbrace{S_Y(f)}_{\text{Ans}} = \underbrace{|H(f)|^2}_{\mathcal{F}(h(t))} \cdot \underbrace{S_x(f)}_{?}$

Per trovare $S_x(f) \rightarrow$ T. di Kintchine: $r_{xy} \rightleftharpoons S_{xy} \Rightarrow r_x \rightleftharpoons S_x$

$\Rightarrow$ ci basta trasformare r_x

Riscriviamo: $S_Y(f) = |\mathcal{F}(h(t))|^2 \cdot \mathcal{F}(r_x)$

- $H(f) = \begin{cases} A\delta(t) \rightleftharpoons A \\ x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0} \end{cases} \Rightarrow H(f) = 2 + 3e^{-j4\pi f}$ $H(f)$

COMPLESSO!

- $\mathcal{F}(r_x) = S_x(f) = \begin{cases} e^{-a|t|} \rightleftharpoons \dfrac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ 2x(t) \rightleftharpoons 2X(t) \end{cases} \Rightarrow 2e^{-3\tau} \rightleftharpoons \dfrac{3 \cdot 4}{9 + (2\pi f)^2} = \dfrac{12}{9 + (2\pi f)^2}$ $\mathcal{F}(r_x)$

Reale

Siamo pronti: $S_Y(f) = \boxed{\left|2 + 3e^{-j4\pi f}\right|^2} \cdot \dfrac{12}{9 + (2\pi f)^2}$

modulo quadro di un numero complx!

$$\rightarrow |H(f)|^2 = \left(2 + 3e^{-j4\pi f}\right) \cdot \left(2 + 3e^{j4\pi f}\right) = 4 + 6e^{j4\pi f} + 6e^{-j4\pi f} + 9 = 4 + 12\cos(4\pi f) + 9 = 13 + 12\cos(4\pi f)$$

$$6\left[e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}\right] = 12\cos(4\pi f)$$

$$\Rightarrow S_Y(f) = [13 + 12\cos(4\pi f)] \cdot \frac{12}{9+(2\pi f)^2} = \frac{156}{9+(2\pi f)^2} + \frac{144\cos(4\pi f)}{9+(2\pi f)^2}$$

Q_2: Energia di $y(t)$

Ricordiamo l'uguaglianza di Parseval: $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$ $\mathcal{E}_x$

$\rightarrow$ Per calcolare l'Energia di $y(t)$ ci basta integrare la sua densità spettrale!

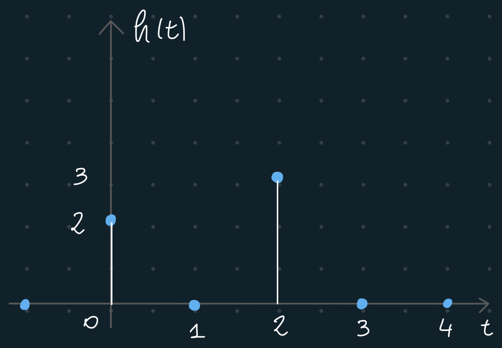
$$\Rightarrow \mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{156}{9+(2\pi f^2)}\, df + 144\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4\pi f)}{9+(2\pi f)^2}\, df$$ $\leftarrow$ Troppo difficile

$\rightarrow$ Dobbiamo calcolare $r_h(t)$ $\leftarrow$ Autocorrelazione

$h(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t-2)$

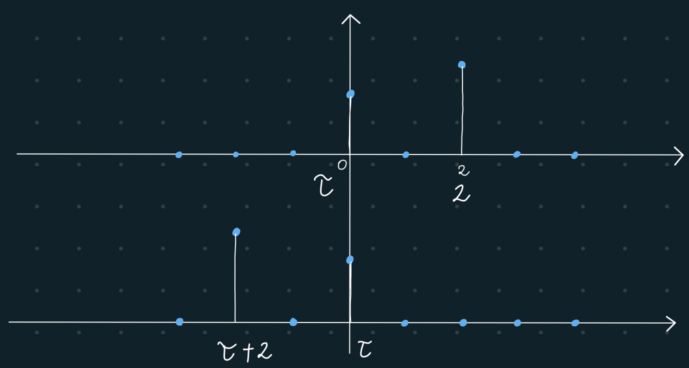
$$r_{h(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot h^*(t-\tau)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [2\delta(t) + 3(t-2)] \cdot [2\delta(t-\tau) + 3\delta(t-\tau-2)]\, dt$$



$$h(-t) = \underbrace{2\delta(-t)}_{\text{Pari}} + 3\delta(-t-2) = 2\delta(t) + 3\delta\underbrace{[-(t+2)]}_{\text{Pari}}$$

$$\Rightarrow h(-t) = 2\delta(t) + 3\delta(t+2)$$



			2	0	3
$r_x(t-2)$	2	0	3		
$r_x(t-1)$		2	0	3	
$r_x(t)$			2	0	3

$r_x(-2) = 6$

$r_x(-1) = 0 + 0 = 0$

$r_x(0) = 4 + 0 + 9 = 13$

$$\Rightarrow r_x = 6\left(\delta(t-2) + \delta(t+2)\right) + 13\,\delta(t)$$

$$\Rightarrow r_h = 6\delta(t-2) + 6\delta(t+2) + 13\delta(t)$$

Siccome $\mathcal{E}_y = r_y(0)$ $\rightarrow$ dobbiamo calcolare $r_y(t)$

$$\Rightarrow r_y(t) = r_x(\tau) * r_h(\tau)$$

$\rightarrow$ usiamo le proprietà della δ: $r_y(t) = 2e^{-3|\tau|}\left[6\delta(t-2) + 6\delta(t+2) + 13\delta(t)\right]$

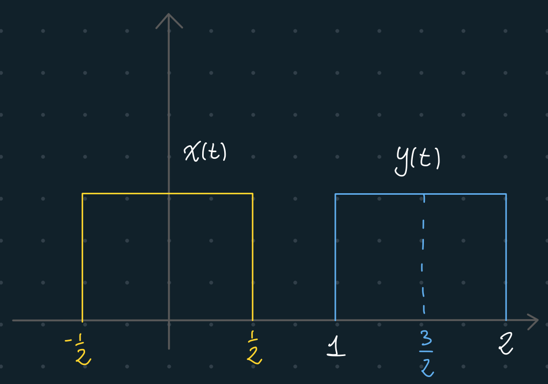
$$\rightarrow r_y(t) = 12e^{-3\cdot 2} + 12e^{-3\cdot|-2|} + 13\cdot 2 = 24e^{-6} + 26 \simeq 26.059$$

Time 60 min

ma credo ci sia un modo più veloce per calcolare l'Energia

Domanda Di Teoria

$x(t) = \Pi(t)$ $\qquad$ $y(t) = \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right)$



$$\mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) \cdot \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) dt = \varnothing$$