UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 5 novembre 2021
Tempo a disposizione 2.30 ore

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto (± 2 punti).
È possibile consultare il solo testo di teoria.

EX. 1
Si considerino due variabile aleatorie gaussiane standard indipendenti X_1 e X_2 e la trasformazione $Y_1 = 2X_1 + X_2$ e $Y_2 = 3X_1 + 2X_2$. Calcolare

1. la covarianza tra Y_1 e Y_2
2. la $\Pr(Y_1 > Y_2)$.

EX. 2
Dato il segnale

$$x(t) = 2\,\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)\,e^{-t/3}$$

calcolarne la trasformata di Fourier e la banda che ricomprende il 95% dell'energia.

EX. 3
Calcolare l'autocorrelazione del segnale in uscita al sistema definito dalla relazione ingresso-uscita $y(n) = 2x(n) + x(n-1)$, sapendo che l'autocorrelazione del segnale in ingresso è $r_x(m) = 3^{-|m|}$.

EX. 1

Si considerino due variabile aleatorie gaussiane standard indipendenti X_1 e X_2 e la trasformazione $Y_1 = 2X_1 + X_2$ e $Y_2 = 3X_1 + 2X_2$. Calcolare

1. la covarianza tra Y_1 e Y_2
2. la $\Pr(Y_1 > Y_2)$.

$X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad Y_1 = 2X_1 + X_2$ e $Y_2 = 3X_1 + 2X_2$

Q. Covarianza tra Y_1 e Y_2

Sappiamo che $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ → sostituiamo

$\mathrm{cov}(Y_1,Y_2) = E[(Y_1-\mu_{Y_1})(Y_2-\mu_{Y_2})] = E[Y_1 Y_2] - \mu_{Y_1}\mu_{Y_2} - \cancel{\mu_{Y_1}\mu_{Y_2}} + \cancel{\mu_{Y_1}\mu_{Y_2}}$

$\Rightarrow \mathrm{cov}(Y_1,Y_2) = E[Y_1 Y_2] - \mu_{Y_1}\mu_{Y_2}$

Calcoliamo le medie di Y_1 e Y_2

$E[Y_1] = E[2X_1 + X_2] = 2E[X_1] + E[X_2] = 2\cdot 0 + 0 = 0 \ \mu_{Y_1}$

$E[Y_2] = 3\mu_{X_1} + \mu_{X_2} = 0 \ \mu_{Y_2}$

$E[Y_1 Y_2] = E[(2X_1+X_2)(3X_1+2X_2)] = 6\overline{X_1^2} + 4\underbrace{E[X_1X_2]} + 3\underbrace{E[X_1X_2]} + 2\overline{X_2^2}$

X_1 e X_2 indip $\Rightarrow E[X_1X_2] = \mu_{X_1}\mu_{X_2} = 0$

$\Rightarrow E[Y_1Y_2] = 6\overline{X_1^2} + 2\overline{X_2^2}$

Sappiamo che $\overline{X^2} = \sigma_X^2 + \mu_X^2 \Rightarrow \overline{X_1^2} = \overline{X_2^2} = 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow E[Y_1Y_2] = 6\cdot 1 + 2\cdot 1 = 8 \quad E[Y_1Y_2]$

→ Mettiamo tutto insieme:

Time 13'

$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = E[Y_1Y_2] - \mu_{Y_1}\mu_{Y_2} = 8 - 0 = 8 \ C_{Y_1Y_2}$

Ans

Q_2: Probabilita' che $Y_1 > Y_2$ → $P(\{Y_1 > Y_2\})$

Calcolare $P(\{Y_1>Y_2\})$ significa calcolare $P(\{Y_1 - Y_2 > 0\}) \Rightarrow Y_1 - Y_2 = Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$\mu_Z = \mu_{Y_1} - \mu_{Y_2} = 0$

$\sigma_{Y_1} = E[(Y_1-\mu_{Y_1})^2] = \overline{Y^2} - 2\mu_{Y_1}^2 + \mu_{Y_1}^2 = \overline{Y^2} + \mu_{Y_1}^2 = \overline{Y_1^2} = E[(2X_1+X_2)^2] = 2\overline{X_1^2} + 2\mu_{X_1}\mu_{X_2} + \overline{X_2^2}$

↳ $\overline{X_1^2} = \sigma_{X_1}^2 + \mu_{X_1}^2 = 1 = \overline{X_2^2} \Rightarrow \overline{Y_1^2} = 2 = \sigma_{Y_1} = \sigma_{Y_2}$

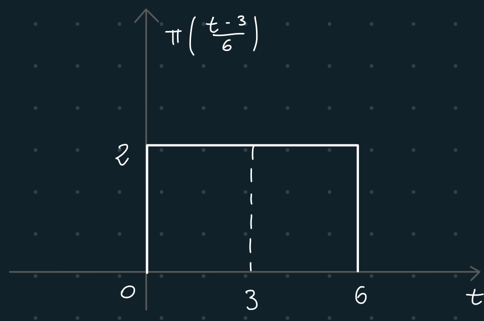
$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 2) \Rightarrow P(\{Z < 0\}) = 1 - Q\left(\frac{0-0}{\sigma_Z}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Ans

EX. 2

Dato il segnale

$$x(t) = 2\,\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)\, e^{-t/3}$$

calcolarne la trasformata di Fourier e la banda che ricomprende il 95% dell'energia.



Q_1: L'esercizio sostanzialmente ci chiede:

$$\frac{\mathcal{E}(B)}{\mathcal{E}(0)} = 0.95\ \mathcal{E}_x$$

Calcoliamo la Trasformata: $x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)\cdot e^{-\frac{t}{3}}$

$\Rightarrow$ osservando il segnale ci conviene applicare la definizione di F.T.:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)\cdot e^{-\frac{t}{3}}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \text{Il segnale } \Pi \text{ restringe l'int all'intervallo } (0,6)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^6 e^{-\frac{t}{3}}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = 2\int_0^6 e^{-t\left(\frac{1}{3}+j2\pi f\right)} dt = -\frac{2}{\frac{1}{3}+j2\pi f}\cdot e^{-t\left(\frac{1}{3}+j2\pi f\right)}\Big|_0^6 = -\frac{6}{1+j6\pi f}\cdot\left[e^{-2-12j\pi f} - 1\right]$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{6}{1+j6\pi f}\left[1 - e^{-2(1+6j\pi f)}\right]$$

Sappiamo, da Parseval che $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

$$\Rightarrow Q_1:\quad \mathcal{E}_x(B) = 0.95\,\mathcal{E}_x \Longleftrightarrow \mathcal{E}_X(B) = 0.95\,\mathcal{E}_X \Rightarrow \int_{-B}^{B} |X(f)|^2 df = 0.95\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\Rightarrow |X(f)|^2 = \left|\frac{6}{1+j6\pi f} - \frac{6e^{-2}e^{-j6\pi f}}{1+j6\pi f}\right|^2 = X(f)\cdot X^*(f) = \left[\frac{6}{1+j6\pi f} - \frac{6e^{-2}e^{-j6\pi f}}{1+j6\pi f}\right]\cdot\left[\frac{6}{1-j6\pi f} - \frac{6e^{-2}e^{j6\pi f}}{1-j6\pi f}\right]$$

Battezzo $j6\pi f = \omega$

$$\Rightarrow \frac{36}{(1+\omega)(1-\omega)} - \frac{36e^{-2}e^{j6\pi f}}{(1+\omega)(1-\omega)} - \frac{36e^{-2}e^{-j6\pi f}}{(1+\omega)(1-\omega)} + \frac{36e^{-4}}{(1+\omega)(1-\omega)} = \frac{36}{1+6\pi f} - \frac{36e^{-2}\overbrace{\left(e^{j6\pi f}+e^{-j6\pi f}\right)}^{2\cos(6\pi f)}}{1+6\pi f} + \frac{36e^{-4}}{1+6\pi f}$$

$$= \frac{36}{1+6\pi f} - \frac{72e^{-2}\cos(6\pi f)}{1+6\pi f} + \frac{36e^{-4}}{1+6\pi f} = \frac{36}{1+6\pi f}\left[1 - 2e^{-2}\cos(6\pi f) + e^{-4}\right]$$

$$= \int\frac{36}{1+6\pi f}\,df \quad \text{Sost } 6\pi f = s \Rightarrow 6\pi df = ds \Rightarrow df = \frac{1}{6\pi}ds \Rightarrow \frac{1}{6\pi}\int\frac{36}{1+s}\,ds = \frac{6}{\pi}\ln(s+1) \Rightarrow \frac{6}{\pi}\ln(6\pi f)$$

$$\int\frac{72e^{-2}\cos(6\pi f)}{1+6\pi f}\,df$$ BOH

INTEGRALE TROPPO DIFFICILE ! :(

$$\Rightarrow \text{Sol}\quad \int_{-B}^{B} S_x(f)\,df = 0.95\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df$$

$$\mathcal{E}_x = \int |x(t)|^2 dt \Rightarrow \quad |x(t)|^2 = 4\pi^2 \left(\frac{t-3}{6}\right) e^{-\frac{2}{3}t} \leftarrow \text{REALE}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_x = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \pi \left(\frac{t-3}{6}\right) e^{-\frac{2}{3}t} \Rightarrow 4\int_0^6 e^{-\frac{2}{3}t} dt = \frac{4}{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}t}\Big|_0^6 = -6\left[e^{-4} - 1\right] \Rightarrow \mathcal{E}_x = -6e^{-4} + 6 \sim 5.89\,J$$

EX. 3

Calcolare l'autocorrelazione del segnale in uscita al sistema definito dalla relazione ingresso-uscita $y(n) = 2x(n) + x(n-1)$, sapendo che l'autocorrelazione del segnale in ingresso è $r_x(m) = 3^{-|m|}$.

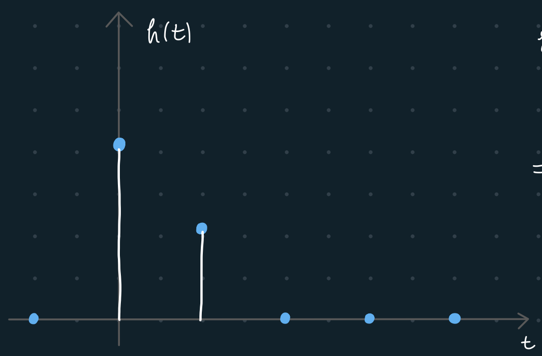
$y(n) = 2x(n) + x(n-1)$ $\quad r_x(m) = 3^{-|m|}$

Calcoliamo $h(n)$ applicando la definizione di risposta impulsiva:

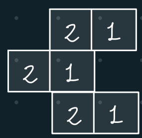
- $h(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1)$

Sappiamo inoltre che $r_y = r_x * r_h$

⇒ Calcoliam $r_h(m)$



$r(n-1)$
$r(n)$



$r(-1) = 2$
$r(0) = 4+1 = 5$

⇒ $r_h = 2\left(\delta(n-1) + \delta(n+1)\right) + 5\delta(n)$

⇒ • $r_h = 2\delta(n+1) + 5\delta(n) + 2\delta(n-1)$

→ Sappiamo che $r_y = r_x(m) * r_h(m) = 3^{-|m|} * \left[2\delta(m+1) + 5\delta(m) + 2\delta(m-1)\right]$

⇒ $r_y(m) = 3^{-|m+1|} + 5 \cdot 3^{-|m|} + 2 \cdot 3^{-|m-1|}$ Time ~8'