UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

CORSO di LAUREA in INGEGNERIA INFORMATICA

Prova scritta del 20 febbraio 2023
Lo studente può svolgere a sua scelta e in modo **esclusivo** i primi due esercizi e la domanda di teoria oppure i tre esercizi.
Tempo a disposizione 2.30 ore.

Riportare i calcoli e commentare lo svolgimento degli esercizi.
L'ordine e la chiarezza espositiva concorrono alla formulazione del voto ($\pm$ 2 punti).
È ammessa la consultazione del solo formulario.

EX. 1
Un giocatore d'azzardo propone ad uno studente universitario la seguente scommessa. Lo studente lancia un dado e guadagna 30 euro ogni lancio fin quando non ottiene 6. Quando ottiene il numero 6 deve restituire al giocatore d'azzardo 100 euro. Lo studente decide di accettare solo se la probabilità di non perdere è maggiore del 60%. Mostrare il procedimento e i calcoli per verificare se lo studente accetta la scommessa oppure no.

EX. 2
Calcolare l'energia del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2t^2\Pi(t/\alpha)$$

con α parametro.

D. 1
Definire il fasore a tempo discreto e descriverne le proprietà.

EX. 3
Il segnale esponenziale $x(t) = e^{-10t}u(t)$ viene inviato in ingresso ad un derivatore ideale. Tracciare il grafico della densità spettrale di energia del segnale in uscita al sistema e dire se il segnale è di tipo passa-basso, passa-alto o passa-banda. Ricavare il valore della frequenza in corrispondenza del quale la ESD del segnale in uscita si attenua di 20 dB rispetto al valore massimo.

EX. 1

Un giocatore d'azzardo propone ad uno studente universitario la seguente scommessa. Lo studente lancia un dado e guadagna 30 euro ogni lancio fin quando non ottiene 6. Quando ottiene il numero 6 deve restituire al giocatore d'azzardo 100 euro. Lo studente decide di accettare solo se la probabilità di non perdere è maggiore del 60%. Mostrare il procedimento e i calcoli per verificare se lo studente accetta la scommessa oppure no.

Ans: Possiamo usare la DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

Dati K PROVE definiamo la probabilità come:

$P(K) = p \cdot q^{K}$ dove p è la probabilità di insuccesso e $q = 1 - p$

PMF

A questo punto dobbiamo capire quanto vale K?

Assumiamo che per "non perdere" e quindi "vincere" si intenda il guadagno monetario dello studente.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \to +30$ €

$G = \{6\} \to -100$ €

Per "vincere" lo studente deve fare almeno [..] lanci:

uscite: $+30, +30, +30, +30, -100 = +20$ €

S S S S G

$\Rightarrow$ Almeno quattro lanci $\Rightarrow$ $K = 4$

$\Rightarrow$ Sia $E = \{$"Lo studente Perde dopo il 4 lancio di seguito (perde al 5°)"$\}$

$$\Rightarrow P(E) = \sum_{K=1}^{K} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{K} =$$

Probabilità di perdere al K-esimo lancio

Lancio	Calcolo	Probabilità DI PERDERE AI K lancio	
1° lancio	$1/6$	$1/6$	-100
2° lancio	$\frac{1}{6} \cdot 5/6$	30%	- 70
3° lancio	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	40%	- 40
4° lancio	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	51%	- 10
5° lancio	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	59,8%	+ 20

$\Rightarrow P(E) = 1 - 0.598 = 0.40$ % $\Rightarrow$ Lo studente non accetta!

Come derivare la distribuzione geometrica

$\to$ Consideriamo l'Esperimento di Bernoulli che consiste in un esperimento casuale avente solo due possibili uscite: successo o fallimento $\Rightarrow$ Distribuzione Bernoulliana.

Ripetiamo l'Esperimento fino al primo successo e contiamo il numero di fallimenti.

Ricordiamo che la distribuzione di Bernoulli è $P_X(x) = \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \end{cases}$

Abbiamo quindi una SEQUENZA di Lanci INDIPENDENTI; Caliamoci nel ruolo del giocatore d'azzardo $\Rightarrow$ $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è un INSUCCESSO PER NOI

$\Rightarrow$ Contiamo gli insuccessi $\Rightarrow$ $P(\text{INSUCCESSO}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ Insuccesso Per NOI

Successo

Usiamo la Bernoulliana per calcolare successi / insuccessi

$\Rightarrow$ $P_B(0) = 1 - p = \frac{5}{6}$ = INSUCCESSO = 0 Per la bernoulliana $\rightarrow$ $P(\{X = 0\}) = 1 - p$

$P_B(1) = p = \frac{1}{6}$ = SUCCESSO = 1 Per la Bernoulliana $\rightarrow$ $P(\{X = 1\}) = p$

$$\Rightarrow P(\{B_n\}) = \underbrace{P(\{B_1 = 0\}) \cap P(\{B_2 = 0\}) \cap \ldots \cap P(\{B_n = 0\})}_{\text{Insuccessi}} \cap \underbrace{P(B_{n+1} = 1\})}_{\text{SUCCESSI}}$$

Se i lanci sono indipendenti $\rightarrow$ Congiunta $= \prod_{k=1}^{n}$ marginali

$$\Rightarrow P(\{B_n\}) = (1-p)^n \cdot p = P_X(x)$$

Per trovare la CDF $\rightarrow$ $\sum_{k=0}^{k-1} P_X(x)$

EX. 2

Calcolare l'energia del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2t^2\Pi(t/\alpha)$$

con α parametro.

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|2t^2\Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right|^2 dt = 4\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \cdot \Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = 4\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} t^4 dt = 4 \left.\frac{t^5}{5}\right|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 4\left[\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(-\frac{\alpha}{5}\right)^5}{5}\right] = 4\left[\frac{\frac{\alpha^5}{32}}{5} + \frac{\frac{\alpha^5}{32}}{5}\right] = \frac{20\alpha^5}{32} + \frac{20\alpha^5}{32} = \frac{5}{4}\alpha^5$$

D. 1

Definire il fasore a tempo discreto e descriverne le proprietà.

Il fasore a tempo discreto è, come la sua versione continua, una rappresentazione COMPLESSA di una sinusoide; siccome è in forma complessa, avrà un modulo (ampiezza) ed un Angolo + fase iniziale.

$$x(t) = A \cdot e^{-j(\theta n + \varphi)} = A e^{-j(2\pi\nu n + \varphi)}$$

A differenza della sua versione continua, non è periodico

$$\Rightarrow \quad x(n) \neq x(n+N) \Rightarrow e^{-j\theta n} \neq e^{-j\theta(n+N)} = e^{-j\theta n} e^{-j\theta N}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta n) + i\sin(\theta n) = [\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)]\underbrace{[\cos(\theta N) + i\sin(\theta N)]}_{\text{deve essere } 1 \text{ (Non complesso!)}}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta N) + i\sin(\theta N) = 1 \quad \text{per} \quad \theta N = 2k\pi$$

e non $\forall\, \theta N$

Inoltre non fluttua sempre più velocemente all'aumentare di θ o ν

$$\Rightarrow \quad e^{-j\theta n} = e^{-j(\theta+\gamma)n} = e^{-j\theta n} e^{-j\gamma n}$$

infatti $e^{-j\theta n} e^{-j\gamma n} = [\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)][\cos(\gamma n) + i\sin(\gamma n)]$

per $\gamma = 2\pi \Rightarrow \cos(\cdot) = 1$, $i\sin(\cdot) = \emptyset \Rightarrow e^{-j(\theta+\gamma)n} \underset{\gamma=2\pi}{=} e^{-j\theta n}$

$\Rightarrow$ Scegliamo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\emptyset}{2\pi} \leq \frac{\cancel{2\pi}\nu}{\cancel{2\pi}} \leq \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} \Rightarrow 0 \leq \nu \leq 1$

Lista Dimostrazioni

2.01 - Algebra Degli eventi

L'algebra degli eventi ci serve a COSTRUIRE un modello matematico che ci permetta di definire un evento come una Funzione che assegna un valore numerico da zero ad 1 a ciascun evento appartenente all'algebra.

Ogni evento che appartiene all'Algebra deve rispettare delle "Regole"

COMPLEMENTO: Se $E_1 \in \mathcal{E}$ allora anche $\bar{E}_1 \in \mathcal{E}$

UNIONE: $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$

$\hookrightarrow$ UNIONE NUMERABILE $Z = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}_Z} E_i \in \mathcal{E}$

INTERSEZIONE: $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$

DIFFERENZA: $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 - E_2 \in \mathcal{E}$

Esempio:

$\Omega = \{T, C\}$

C: Se $T \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{T} \in \mathcal{E} \Rightarrow C \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = \{T, C, \dots$

U: Se $T, C \in \mathcal{E} \Rightarrow T \cup C \in \mathcal{E} \Rightarrow \{T, C\} \in \mathcal{E}$ ma $\{T, C\} = \Omega$

Quindi $\Omega \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = \{T, C, \Omega, \dots\}$

Se $\Omega \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{E}$ ma $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{E} = \{T, C, \Omega, \emptyset\}$

2.02 Assiomi di Kolmogorov — opera sull'algebra degli Eventi

Sono un insieme di 3 Regole

1) **Non negatività**: la prob di un evento deve SEMPRE non negativa

$\Rightarrow$ Se $E \in \mathcal{E}$ allora $P(E) \geq 0$

Algebra degli Eventi

2) Normalizzazione: la probabilita' dell'evento certo Ω e' 1

in $\mathcal{E}$, $P(\Omega) = 1$

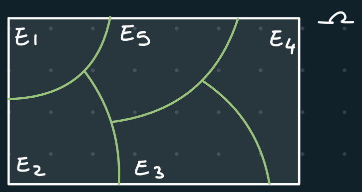
Esempio Dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(\Omega) = 1 = 100\%$

3) Additivita' se abbiamo degli eventi mutuamente Esclusivi allora

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \qquad P\left[\bigcup_{i \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}} E_n\right] = \sum_{k \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}} P(E_k)$$

$\Rightarrow$ Possiamo immaginare l'insieme delle uscite Ω come un diagramma di Venn



Ed immaginiamo la sua area come la sua probabilita'

$A_{\square} = P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow$ Possiamo PARTIZIONARE l'insieme in piu' sottoinsieme DISGIUNTI, che alla fine saranno i nostri Eventi

Siccome $E_i \cap E_j = \emptyset \Rightarrow$ Possiamo scrivere $P(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$

2.03 - Eventi Indipendenti

Se abbiamo che $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ Allora sono indipendenti

2.03 - Probabilità Condizionata

Serve per trovare la probabilità che un evento avvenga dopo che ne è avvenuto un altro.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

← Il problema c'è se non riusciamo a calcolare $A \cap B$

↓

Bayes

Sappiamo che se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ Disgiunti

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\Rightarrow P(A/B) \underset{A \cap B = \emptyset}{=} \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

2.03 - Legge prob composta ⇒ Legge di Bayes

Sappiamo che $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ⇒ Isoliamo $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ Legge prob composta

Inoltre $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

⇒ Eguagliamo i risultati: $P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Legge di Bayes

2.04 - Legge della prob. Totale

Ci Torna molto utile quando dobbiamo trovare la probabilità di un evento COMPOSTO da più sottoeventi o sotto gruppi.

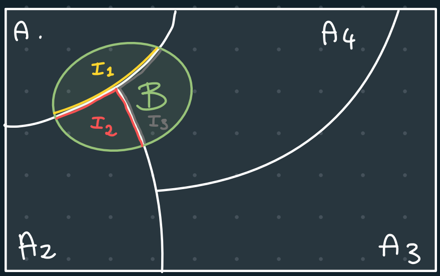
Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ degli eventi a due a due DISGIUNTI, cioè $A_i \cap A_k = \emptyset$

Allora possiamo PARTIZIONARE lo Spazio degli Eventi

PARTIZIONE — $\bigcup_{i \in \mathcal{A}_S} E_i = \Omega$

$E_i \cap E_k = \emptyset \quad \forall\, i,k \in \mathcal{A}_\Omega$

Ω



Possiamo scriverci B come l'unione delle intersezioni tra A_i e B

$\rightarrow B = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cup B) \cup (A_3 \cap B)$

$= \bigcup_{i=1}^{3} A_i \cap B$

$\rightarrow$ Generalizzando $B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$

Finora abbiamo ragionato solo sugli insiemi, calcoliamo la probabilità:

$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right)$ L'unione può essere scritta come somma perché $P(A \cup B)$ ci dice la prob che almeno uno dei due si verifichi

$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$ $\rightarrow$ Applichiamo la legge della prob composta

$P(B/A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \rightarrow P(A_i \cap B) = P(B/A_i)\, P(A_i)$

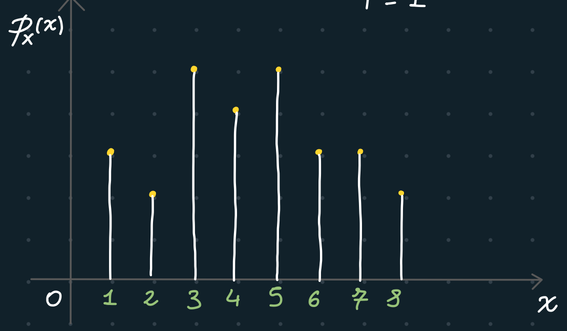
$= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$

Legge prob TOT

2.06 - Proprieta' costitutive della PMF - Probability mass function

$p_X(x) = P(X = x)$ Variabili Discrete

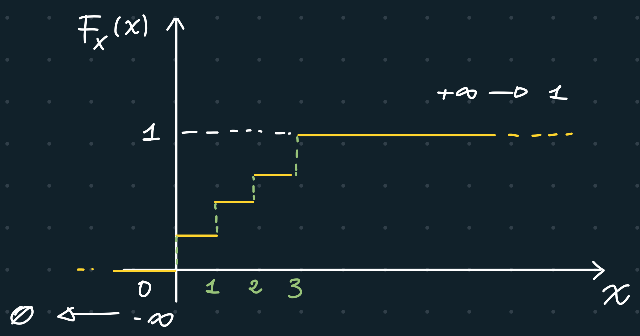
- Non Negativa : $p_X(x) \geq 0$ e $p_X(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq p_X(x) \leq 1$
- Normalizzazione: $\sum_{i=1}^{n} p_X(x) = 1$



2.06 - Proprieta' costitutive della CDF - Cumulative Density function

$F_X(x) = P(X \leq x)$ Variabili Discrete + Continue

- Non decrescente $\Rightarrow F_X(x_1) \geq F_X(x_0)$ con $x_1 > x_0$
- Limitata $\Rightarrow 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x$
- Continua a Destra $\Rightarrow \lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$
- Tende a 0 per $x \to -\infty$ e Tende ad 1 per $x \to +\infty$



* Quando il valore di n aumenta la grandezza dello scalino diminuisce

(grandezza media)

CDF Dalla PMF

$$F_X(x_0) = \sum_{\{i \in \mathcal{X}_X : i < x_0\}} p_X(x_i)$$

2.06 - Proprieta' costitutive della PDF

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$ Variabili Continue

Dobbiamo Trovare $x_0 < P_X < x_1$ Se usiamo la CDF sono infiniti

Integriamo la PDF (per trovare la CDF)

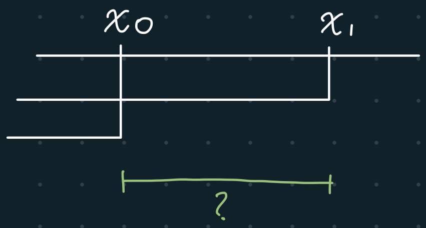
Sappiamo Tende a 0

$$\to \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{d}{dx} F_X(x)\,dx = \Big[F_X(x)\Big]_{-\infty}^{x_0} = F_X(x_0) - F_X(-\infty)$$

$$= F_X(x_0)$$

$$\Rightarrow F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

Quindi per trovare $P(x_0 \leq x \leq x_1)$ Avremo

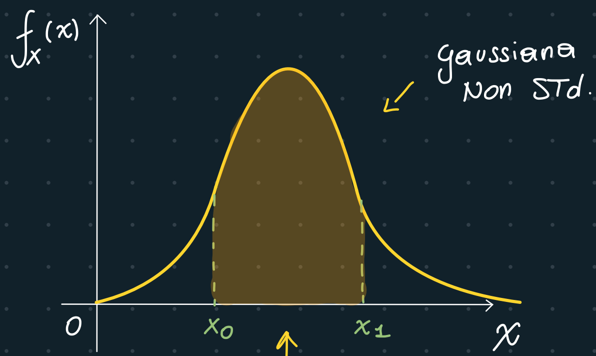


$$P(x_0 < x < x_1) = \underbrace{F_X(x_1)}_{\int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx} - \underbrace{F_X(x_0)}_{\int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx}$$

$$= F_X(x)\Big|_{-\infty}^{x_1} - F_X(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} = F_X(x_1) - F_X(x_0) = \Big[F_X(x)\Big]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} f_X(x)\,dx$$

- La PDF e' Non Negativa : $f_X(x) > 0 \quad \forall x$
- Siccome e' la derivata della CDF, "Eredita" la proprieta' di Normalizz:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$



$$\int_{x_0}^{x_1} f_X(x)\,dx$$

Dimostrazione Normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} F_X(x)\,dx = \Big[F_X(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \underbrace{F_X(+\infty)}_{1} - \underbrace{F(-\infty)}_{0} = 1$$

2.09 - Momenti di Ordine 1 Non centrali Es Valore Atteso μ_x

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\, dx & \text{V.A. Continue} \\ \sum_{i \in \mathcal{A}_x} x \cdot p_x(x_i) & \text{V.A. Discrete} \end{cases}$$

2.09 - Momenti di Ordine K Non centrali Es Valore quadratico medio $\overline{X}^2$

$$E[X^K] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot f_x(x)\, dx & \text{V.A. Continue} \\ \sum_{i \in \mathcal{A}_x} x^K \cdot P_x(x_i) & \text{V.A. Discrete} \end{cases}$$

$\underset{\text{VQM}}{\overline{X}^2} \to \underset{\text{RMS}}{\sqrt{\overline{X}^2}}$

2.09 - Momenti centrali di Ordine K   E ordine II : Varianza

$$E[(X-\mu_x)^K] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^K \cdot \overset{\text{Funzione}}{f_x(\underset{\text{Non serve}}{x})}\, dx \\ \sum_{n \in \mathcal{A}_x} (x-\mu_x)^K \cdot \overset{\text{costante}}{P_x(\underset{\text{Serve}}{x_i})}\, dx \end{cases}$$

$Var(x) = E[(X-\mu_x)^2] = \sigma_x^2$ VARIANZA ci dice quanto si discostano dalla media i valori di una Distribuzione. Esempio Altezza

- $\sigma_x^2 >>$ Maggiore Dispersione
- $\sigma_x^2 <<$ Minore Dispersione

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ = DEVIAZIONE STANDARD   Misura sempre la dispersione

2.09 - Legame Tra σ_x^2, $\overline{X}^2$ e μ_x

$$\sigma_x^2 = E[(X-\mu_x)^2] = E[X^2 - \underbrace{2\mu_x}_{\text{costanti}} X + \mu_x^2] = \underbrace{E[X^2]}_{\overline{X}^2} - \mu_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \overline{X}^2 - \mu_x^2$$

2.09 - Trasformazione affine di una r.a. $aX+b \to Var(aX+b) = a^2\sigma_x^2$

$$E[(aX+b-\mu_{aX+b})^2] = E\left[\{aX+b-E[aX+b]\}^2\right] = E[(aX+\cancel{b} - aE[X]+\cancel{b})^2]$$

$$= E[(a(X-E[X]))^2] = a^2 E[(X-\mu_x)^2] = a^2\sigma_x^2$$

Lista Variabili Aleatorie ed i loro utilizzi...

Distribuzione Bernoulliana DISCRETA

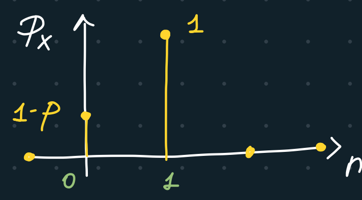
Viene usata per modellare eventi Binari (lancio Moneta) ha valore 1 se l'Evento si verifica:

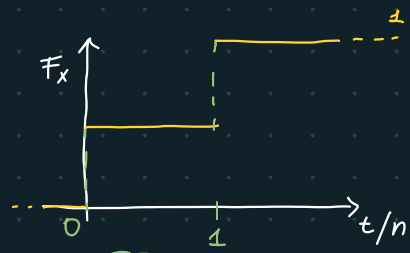
Probabilita' che si verifichi

$$X \sim B(1,p) \quad \text{dove} \quad p = P(\{X=1\}) \Rightarrow \bar{p} = P(\{X=0\}) = 1-p$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad p_X(x) = \begin{cases} 0 & X \neq 0,1 \\ p & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \end{cases}$$

$f_X(x) = 0$ Derivata di 1 e $(1-p) = 0$





$$E[B] = \sum_{i \in \mathcal{A}_X} x_i \cdot p_B(x_i) = 1 \cdot p + (1-p)\cdot 0 = p \quad \mu_B$$

$$E[B^2] = \bar{B}^2 = \sum_{i \in \mathcal{A}_X} x_i^2 \cdot p_B(x_i) = p \quad \bar{B}^2$$

$$\sigma_B^2 = E[(B-\mu_B)^2] = E[B^2] - \mu_B^2 = p - p^2 = p(\underbrace{1-p}_{q}) = pq \quad \sigma_B^2$$

$$E[X^k] = \sum_{i \in \mathcal{A}_X} x_i^k \cdot p_X(x_i) = 1^k \cdot 1 + 0 = 1^k \quad \text{Sempre } 1!$$

Distribuzione di Poisson DISCRETA

E' una distribuzione che ci dice "quante volte x avviene in un tempo y" dove x e' un evento Semi-raro

$$X \sim P_o(a) \quad \text{con alfabeto} \quad \mathbb{N}_0 = \{1, 2, .., +\infty\}$$

naturale

MEDIA

$$p_X(k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } a > 0$$

$P(X=k) \rightarrow k$ arrivi

Verificare prop della PMF $\rightarrow$ Norm. $\rightarrow \sum_{i \in \mathcal{A}_X} p_X(x_i) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!} = e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{e^a} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$$

MClaurin

Distribuzione Binomiale DISCRETA

Viene usata per modellare EVENTI BINARI ripetuti più volte in condizioni simili.

→ Alternativamente: Conteggio Successi

$$X \sim B(n,p) \quad \text{con } \mathcal{X}_x = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P_X(x) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad e \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

La v.a. Binomiale CONTEGGIA i successi $\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i = P$

$X \sim B(1,p)$ con $\mathcal{X}_x = \{0,1\}$ ← Bernoulliana!

$$\Rightarrow \underbrace{E[B]}_{\text{Binomiale}} = E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\text{Bernoulliana}}\Big] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{n} \underbrace{E[X_i]}_{\mu_X = P} = n \cdot p \quad \mu_B$$

$\mu_X = P$ ← Media Bernoulliana

μ_B ← Binomiale (se X_i equiprob)

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = n\,\mathrm{Var}(\underbrace{B}_{\text{Bernoulliana}}) = n \cdot E\left[(B-\mu_B)^2\right] = \left(E[B^2] - \mu_B^2\right) n = n \cdot (P - p^2)$$

$$= n\left[P(\underbrace{1-p}_{q})\right] = npq \quad \sigma_B^2$$

σ_B^2 ← Binomiale

Distribuzione Uniforme CONTINUA

viene usata per modellare eventi equiprobabili (Es: Dado)

$$X \sim U(a,b)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \qquad f_X = \frac{d}{dx} F_X(x) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Media

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a}\, x \cdot \mathrm{rect}(a,b)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{1}{2}(b+a) \quad \mu_X$$

V.Q.M.

$$E[X^2] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) \quad \overline{X^2}$$

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \mu_X^2 = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(b+a)^2 = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(b^2+2ab+a^2)$$

Varianza

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} \quad \sigma_X^2$$

Distribuzione di Rayleigh   CONTINUA

E' usata per modellare grandezze fisiche che possono essere descritte come la somma di piu' variabili aleatorie di tipo gaussiane.

Le variabili devono essere indipendenti; la somma di un grande numero di variabili indipendenti converge in una gaussiana.

$X \sim Ray(\sigma^2)$

PDF: $$f_{Ray}(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$

CDF Si deriva dalla PDF $\rightarrow$ $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\, dx$

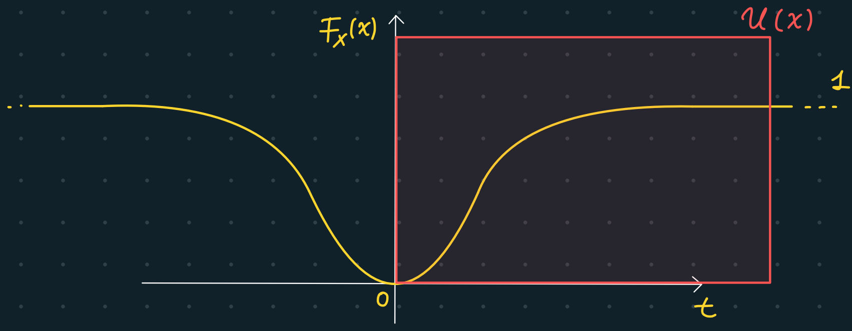
$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)\, dx = \int_0^{x_0} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$ pongo $S = -\frac{x^2}{2\sigma^2}$

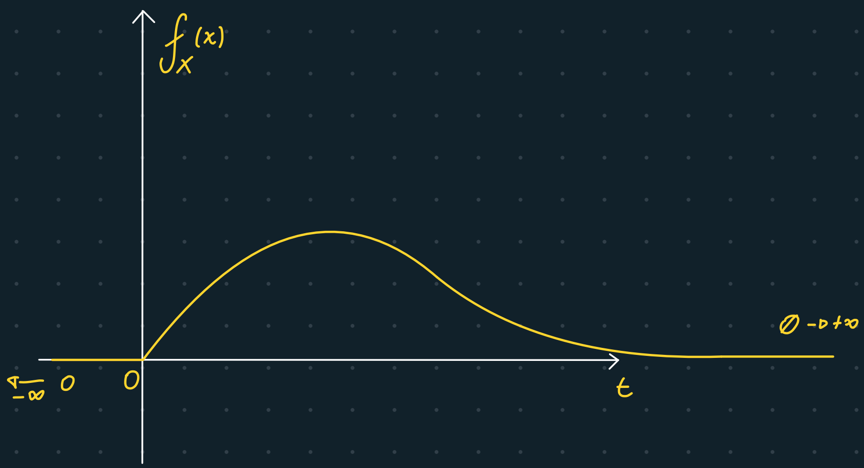
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{x^2}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial}{ds} = -\frac{x}{\sigma^2} \Rightarrow ds = -\frac{\sigma^2}{x}$$

Estremi: $S = -\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big|_{x=0} = \emptyset$, $S = -\frac{x^2}{2\sigma}\Big|_{x=x_0} = -\frac{x_0^2}{2\sigma^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{x_0} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} \frac{\cancel{x}}{\cancel{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\cancel{\sigma^2}}{\cancel{x}} ds = \int_0^{-\frac{x_0}{2\sigma^2}} e^{-s} ds = -\left[e^{-s}\right]_0^{\frac{x_0}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = -e^{-\frac{x_0}{2\sigma^2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x_0}{2\sigma^2}}$$ $F_X(x)$





$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{\sigma^2}}_{f} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{g} \cdot u(x)\, dx \underset{\text{Parti}}{=} \frac{x^2}{\sigma^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} - \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \cdot \left(-\frac{x}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}\right) dx$$

Distribuzione Esponenziale CONTINUA

Viene usata per modellare il tempo di attesa tra eventi di Tipo Poisson

Sono Eventi che si verificano in modo casuale e rari nel tempo, come ad esempio il numero di auto che passano in un ora per un casello.

$X \sim \mathcal{E}_X(\lambda)$

PDF

↳ PDF: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)$ con $\lambda > 0$

CDF: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)\,dx = \lambda \int_0^{x_0} e^{-\lambda x}\,dx = -\cancel{\lambda}\frac{1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda x}\Big|_0^{x_0}$

$= -e^{-\lambda x_0} + 1 = 1 - e^{-\lambda x_0}$ CDF

Media $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot u(x)\,dx = \int_0 x \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$ PARTI

→ Formula: $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$

$u = x \rightarrow du = 1\,dv$

$dv = \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow v = -\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx =$ Siccome per $x \rightarrow \infty$ $e^{-\lambda x} << x \rightarrow \emptyset$

$-x \rightarrow -\infty$

$e^{-\lambda x} \rightarrow 0$

$= \emptyset + \frac{1}{\lambda}\left[0 + 1\right] = \frac{1}{\lambda}$ μ_X

Varianza $\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$

?

$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$ PARTI → $\int u \cdot dv = uv - \int v\,du$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x$

$dv = \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

$= \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}}_{\emptyset} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow \sigma_X^2 = \overline{X}^2 - \mu_X^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ σ_X^2

Distribuzione Gaussiana Standard CONTINUA

Viene usata per modellare la distribuzione di diversi fenomeni naturali

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\underset{\text{media}}{\mu}, \underset{\text{varianza}}{\sigma^2}) \quad \text{dove } \mu = 0 \text{ e } \sigma^2 = 1$$

PDF: $f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

CDF: $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$

Non integrabile TotalmenTe

$\Rightarrow$ Definiamo la Q-function come $\int_{x_0}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$

Q - Function

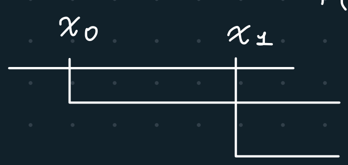
$\Rightarrow$ $F_X(x) = 1 - Q(x_0)$ CDF

sappiamo che $\int f_X(x)\,dx = 1$

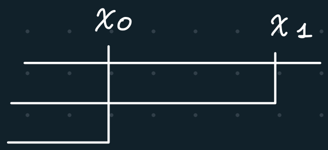
$\Rightarrow$ $Q(x_0) = 1 - F_X(x_0)$

Proprieta' Q function

- Sempre decrescente: $Q(x_1) < Q(x_0)$ con $x_0 < x_1$ $\forall \underbrace{x_0, x_1}_{\text{coppia}}$
- $\lim_{x_0 \to +\infty} Q(x_0) \to 0$
- Non Negativa
- Simmetrica: $Q(-x_0) = 1 - Q(x_0)$
- Calcolo della Probabilita'
  - $F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = 1 - Q(x_0)$
  - $P(\{X > x_0\}) = Q(x_0)$
  - $P(\{x_0 < X < x_1\})$?

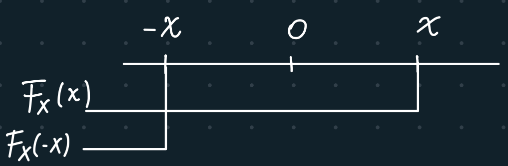
$\to$ 

$Q(x_0)$
$Q(x_1)$ $\Rightarrow$ $P(\{x_0 < X < x_1\}) = Q(x_0) - Q(x_1)$



$F_X(x_1)$
$F_X(x_0)$ $\Rightarrow$ $P(\{x_0 < X < x_1\}) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$

- Probabilita' Simmetrica: $P(\{-x_0 < X < x_0\}) = F_X(x) - F_X(-x)$



$= \cancel{1} - Q(x) - \cancel{1} + Q(-x) = -Q(-x) + Q(x)$

$= -1 + Q(x) + Q(x) = 2Q(x) - 1$

Distribuzione Gaussiana Non Standard

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ^2 qualsiasi

E' ottenuta da una trasformazione lineare della gaussiana Standard

$$X = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Scala}}}{\sigma} \cdot X_0 + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Traslazione}}}{\mu} \longrightarrow$$

Infatti sappiamo che la CDF Trova

$$P(\{X < x_0\})$$

$\Rightarrow$ Nel nostro caso CDF $= F_X(x_0) = P(\{X \leq x_0\})$

Siccome $X = \sigma X_0 + \mu \Rightarrow F_X(x_0) = P(\{\sigma X_0 + \mu \leq x_0\})$

$$\Rightarrow F_X(x_0) = P\left(\left\{X_0 \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right\}\right)$$

CDF V.A. gaussiana Non Std.

CDF

$$\Rightarrow F_X(x_0) = F_{X_0}\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = \boxed{1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

CDF V.A. gaussiana Non Standard

PDF

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$\Rightarrow$ La CDF della gaussiana (oltre al $1-Q(x_0)$) e'

$$F_X(x) = \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$\rightarrow$ La derivata e' il limite del rapporto incrementale $\Rightarrow$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Il Teorema della media integrale ci dice che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \quad \text{con } a \leq x_0 \leq b$$

Quindi portiamo $\frac{1}{(b-a)}$ dall'altra parte

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(x_0) \quad \text{Sempre con } a < x_0 < b$$

$$\Rightarrow \text{Possiamo Scriverci } \frac{d}{dx} F_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x + \cancel{\Delta x} - \cancel{\mu} - x + \cancel{\mu}}{\sigma}\right)}_{b-a} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_0^2}}_{f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x_0^2}$$

Siccome dobbiamo calcolare la PDF di una gaussiana Non Standard, visto che $F_X(x) = F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ prendiamo $x_0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ siccome

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{x+\Delta x-\mu}{\sigma}$$

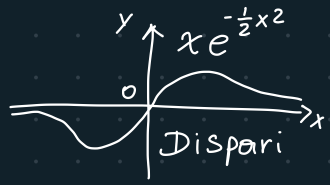
Ottieniamo finalmente $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}F_{X_0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

PDF

MEDIA

$$E[X_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

sappiamo che



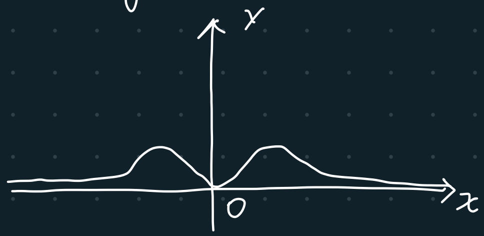
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F.\ \text{dispari} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad E[X_0] = 0$$

$$\Rightarrow E[X] = E[\sigma X_0+\mu] = \sigma\, \overset{\emptyset}{\cancel{E[X_0]}} + \mu = \mu \quad \mu_X$$

VARIANZA

$$E[(X_0-\mu_{x_0})^2] = E[X_0^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$$

La funzione è PARI



$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

pongo $s = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2s} \Rightarrow dx = \sqrt{2s}\frac{d}{ds} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{s}}ds = dt$$

Estremi: $s = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0} = \emptyset$, $s = \frac{x^2}{2}\Big|_{+\infty} = +\infty$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} 2\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{s}\, e^{\underbrace{-\frac{1}{2}x^2}_{s}}\, \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{s}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} 2s\cdot e^{-s}\cdot s^{-\frac{1}{2}}ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} 2s^{1-\frac{1}{2}}\, e^{-s}ds$$

→ GAMMA DI EULERO $\Gamma = \int_{0}^{+\infty} s^{k-1} e^{s} ds$ sappiamo che $\begin{cases}\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) \\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} s^{\overset{k}{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-s} ds = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Varianza X_0

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[\left(\sigma X_0 + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}\right)^2\right] = E\left[(\sigma X_0)^2\right] = \sigma^2 E\left[X_0^2\right]$$

$$E\left[X_0^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \sigma_{X_0}^2 = 1$$

↑ visto prima

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

2.10 - Caratterizzazione congiunta di due variabili Aleatorie

PMF Congiunta di X e Y : $\quad P_{X,Y} : (x,y) \in \mathcal{A}_X \cdot \mathcal{A}_Y \to P_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$

Per Variabili Discrete

CDF Congiunta di X ed Y: $\quad F_{XY}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$

PDF Congiunta di X ed Y: $\quad f_{XY}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f_{XY}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$

Per una coppia di variabili continue

Derivata II Parziale

2.10 - Distribuzioni condizionate AD UN EVENTO

PMF: $\quad P_X(x/B) = P(\overbrace{\{X=x\}}^{P_X(x)}/B) = \dfrac{P(P_X(x) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\{X=x\} \cap B)}{P(B)}$

Sappiamo che $\quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$\Rightarrow P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)} \Rightarrow P_X(x/B) = P(B/\{X=x\}) \cdot \frac{P_X(x)}{P(B)}$$

CDF: $\quad F_X(x/B) = P(\{X \leq x\}/B) = \dfrac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$

PDF $\quad f_X(x/B) = \dfrac{d}{dx} F_X(x/B)$

2.10 - Distribuzioni condizionate ad una variabile aleatoria Y

PMF - X e Y DISCRETE

$$P_{X/Y}(x/y) = P_X(x / \{Y=y\}) = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{P(\{Y=y\})}$$

dove $x, y \in \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$

$\Rightarrow$ ci accorgiamo che $P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$ è proprio la PMF Congiunta di x e y

inoltre $P(\{Y=y\}) = P_Y(y)$

$$\Rightarrow P_{X/Y}(x/y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$ ← PMF Congiunta

CDF - X e Y DISCRETE (Dal libro pg 57)

$$F_{X/Y}(x / \{Y \leq y\}) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}{P(\{Y \leq y\})} = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$$ ← CDF Congiunta

PDF - X e Y CONTINUE

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Leggi della Probabilità per la PDF

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) \cdot f_{XY}(x/y) = f_X(x) f_{Y/X}(y/x)$$

proof. Siccome $f_{X/Y}(x/y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_{X/Y}(x/y) \cdot f_Y(y)$

Legge probabilità composta PDF

Possiamo ricavare anche Bayes:

Per ricavare Bayes: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$
$= P(B/A) \cdot P(A)$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$\rightarrow$ Applichiamo alle PDF $\rightarrow$ $f_{XY}(x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}^2 = f_{X/Y}(x/y) \cdot f_Y(y)$

$f_{YX}(y,x)$ con $y,x \in \mathbb{R}^2 = f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x)$

$$\Rightarrow f_{X/Y}(x,y) = \frac{f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$$ Bayes per le PDF

Per ricavare la legge della Prob Totale ci basta integrare la legge della prob composta:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot f_{X/Y}(x/y)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = f_Y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X/Y}(x/y)\, dx$$

$\int PDF = 1$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx \quad (1)$$

Legge prob Totale per le PDF

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{YX}(y,x)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(x)}_{\text{Const}} \cdot \overbrace{f_{Y/X}(y/x)\, dy}^{1} \Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y/X}(y/x)\, dy \quad (2)$$

2.10 - MOMENTI CONGIUNTI DI ORDINE $K = m + r$ RACCHIUDE TUTTI I MOMENTI

$$E[x^m y^r] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot y^r \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy & \text{CONTINUE} \\ \sum_{x \in A_X} \sum_{y \in A_Y} x^m \cdot y^r \cdot F_{XY}(x,y) & \text{DISCRETE} \end{cases}$$

Correlazione : $m, r = 1$ ORDINE 1 NON CENTRALE

$$E[XY] = r_{xy}$$

2.10 - MOMENTI CONGIUNTI CENTRALI DI ORDINE $K = m + r$

$$E\left[(X-\mu_X)^m \cdot (Y-\mu_Y)^r\right]$$ se $m = r = 1 \Rightarrow$ Covarianza

$$Cov[X,Y] = C_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - \mu_X\mu_Y - \cancel{\mu_X\mu_Y} + \cancel{\mu_X\mu_Y}$$

$$= \boxed{E[XY]} - \mu_X\mu_Y$$

r_{XY} correlazione

SE $C_{XY} = 0 \Rightarrow X$ e Y sono INCORRELATE

DIFFERENZA Tra covarianza e correlazione : Cov : misura la relazione lineare Tra due variabili $\Rightarrow$ Per Cov > 0 le variabili crescono o decrescono insieme, per Cov < 0 una cresce e l'altra decresce. Correlazione : è una cov normalizzata $-1 \leq r_{XY} \leq 1$

Quindi $C_{XY} = r_{XY} - \mu_X \mu_Y \Rightarrow r_{XY} = C_{XY} + \mu_X \mu_Y$

SE Incorrelate $\Rightarrow C_{XY} = 0 \Rightarrow r_{XY} = \mathbb{E}[XY] = \underbrace{C_{XY}}_{\emptyset} + \mu_X \mu_Y = \mu_X \mu_Y$ r_{XY} se X, Y incorrelate

IMPORTANTE L'incorrelazione è più Debole dell'indipendenza!

X, Y INDIPENDENTI $\Rightarrow$ INCORRELATE

X, Y INCORRELATE $\not\Rightarrow$ INDIPENDENTI

SE $C_{XY} = 0 \Rightarrow r_{XY} = \mu_X \mu_Y$ SE μ_X OR $\mu_Y = 0 \Rightarrow$ ORTOGONALI

INDIPENDENTI SE...

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P_{XY}(x,y)$ con $x,y \in \mathcal{X}_X \times \mathcal{X}_Y$
  $= P_X(x) \cdot P_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathcal{X}_X \times \mathcal{X}_Y$
  invece di $P_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$
- $f_{XY}(x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}^2$
  $= f_X(x) \cdot f_Y(y)$
  invece di $f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x,y)$

INCORRELATE SE

- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mu_X \mu_Y$

invece di $r_{XY} = C_{XY} + \mu_X \mu_Y$

Proof X, Y INDIPENDENTI $\Rightarrow$ INCORRELATE

X e Y continue $\rightarrow$ se X e Y sono indip $\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ ①

ma $\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$ ①

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx}_{\mathbb{E}[X]} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy}_{\mathbb{E}[Y]}$$

ESEMPIO INCORRELATE MA NON INDIPENDENTI

$$X = \cos(\theta) \qquad \text{con} \quad \theta \sim U(-\pi, \pi) \qquad \text{con} \quad f_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{otw} \\ \frac{1}{b-a} & a \leq \alpha \leq b \end{cases}$$
$$Y = \sin(\theta)$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \cdot f_\theta(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \cos\theta \cdot \frac{1}{b-a}\, d\alpha = \frac{1}{b-a} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \sin(\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{b-a}(\emptyset - \emptyset) = \emptyset$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\theta \cdot f_\theta(\alpha)\, d\theta = \frac{1}{b-a}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \emptyset$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \sin\theta \cdot f_\theta(\alpha)\, d\theta = \emptyset$$ INCORRELATE

Sappiamo pero' che $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ $\Rightarrow$ DIPENDENTI

Dimostrazioni Segnali

3.0.1 - Trasformazioni Segnali

Trasformazioni
- AMPIEZZA
  - Somma $x(\cdot)+y(\cdot)$
  - mul per scalare $\alpha\, x(\cdot)$
  - mul Tra segnali $x(\cdot)\, y(\cdot)$
- TEMPO
  - Time Scaling
  - Time Shift
  - Reflection

Time shift

$y(t) = x(t-T_0)$ $\to$ T_0 è un Ritardo o Anticipazione

$T_0 > 0 \to$ RITARDO
$T_0 < 0 \to$ ANTICIPAZIONE

Time Scale

$y(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $\to$ Il Tempo si espande o contrae

$\to$ $a < x(t) < b$ quindi $a < t < b$

$\to$ Applico Time scale $\to$ $a < x\left(\frac{t}{\alpha}\right) < b \Rightarrow \alpha a < \frac{t}{\cancel{\alpha}} \cdot \cancel{\alpha} < b\alpha$

Per $\alpha \geq 1 \to$ $\alpha a < t < \alpha b$ Il tempo si Espande

Per $0 \leq \alpha < 1$ $\alpha = \frac{1}{K}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{k} a < t < \frac{1}{k} b$

Il tempo si restringe

Riflessione

$y(x) = x(-t)$ Il segnale viene Ribaltato

Combinazione
1. Riflessione
2. time scaling
3. time shifting

Segnali Ordinari

Finestra rett continua

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases} \Rightarrow \pi\left(\frac{t-T_0}{T}\right) = \begin{cases} 1 & T_0 - \frac{T}{2} < t < T_0 + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

Finestra Rett Discreta

$$R_N = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

Finestra Triangolare Continua

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases} \Rightarrow 1 < |t| = \begin{cases} 1+t & \text{per } t < 0 \cap t > -1 \\ 1-t & \text{per } t > 0 \cap t < 1 \end{cases}$$

Gradino Unitario Continuo

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Discreto

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Impulso Discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

CAMPIONAMENTO

P_1: $x(n) \cdot \delta(n-k) = x(k) \cdot \delta(n-k)$

P_2: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) = x(n)$

Dimostrazione P_2:

$A = 1 \Rightarrow \delta(n-k)$

Scriviamo $x(k) = x(n) \cdot \delta(n-k) \Rightarrow \sum_k x(k) \cdot \delta(n-k) = \sum_k x(n) \, \delta(n-k) \cdot \delta(n-k)$

$= x(n) \sum_k \delta(n-k)$ è una finestra rett infinita

$\Rightarrow x(n) \cdot (1 \; \forall k) = x(n)$

Impulso continuo

E' quella funzione che moltiplicata per un segnale lo campiona in To (o zero)

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \delta(t) \, dt = \begin{cases} x(0) & \text{per } t_1 < t < t_2 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

P1: Normalizzazione

poniamo $t_1 = -\infty$ e $t_2 = +\infty$ e $x(t) = 1 = cost$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt$

Siccome la delta ha ampiezza 1 e durata infinitesima (IN ZERO)

$\Rightarrow -\infty < \delta(t) < +\infty \Rightarrow 0 + 0 + \ldots + 1 + \ldots + 0 + 0 = 1$

P2: Campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t)\, dt = x(0)$$

proof

Consideriamo $f = x(t)\, y(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) \cdot \delta(t)\, dt \overset{\text{TESI}}{=} \underline{x(0) \cdot y(0)}$

uguali

consideriamo $f_1 = x(0) \cdot y(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(0) \cdot y(t) \cdot \delta(t)\, dt \overset{\text{TESI}}{=} \overline{x(0)\, y(0)}$

$$\Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(t) \cdot \cancel{y(t)} \cdot \delta(t)\, \cancel{dt} = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(0)\, \cancel{y(t)} \cdot \delta(t)\, \cancel{dt}$$

$$\Rightarrow x(t) \cdot \delta(t) = x(0)\, \delta(t)$$ CVD

P3: Cambiamento di scala + *proof*

$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(a \cdot t)\, dt$ pongo $\tau = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{\tau}{a} \Rightarrow dt = \frac{\tau}{a}\, d\tau = \frac{1}{a}\, d\tau$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{a}\, d\tau$

$\rightarrow$ Siccome la a "proviene" dalla δ che e' PARI $\rightarrow \delta(-t) = \delta(t)$
la a deve essere in modulo perche' non sappiamo se era positiva o neg

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{\tau}{a}\right) \cdot \delta(\tau)\, dt \Rightarrow x(t)\, \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|}\, x\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \delta(t)$$

P4: Riproducibilita' + *proof*

$x(t) \cdot \delta(t-\tau)\, dt = x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$ Per verificarla integriamo entrambi i membri in $d\tau$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\substack{\text{Cost} \\ \text{risp } \tau}} \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau \rightarrow x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau}_{\substack{\text{NORM} \\ = 1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$$

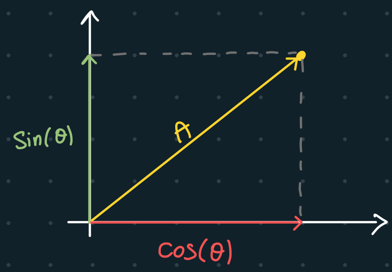
Fasore a Tempo continuo

$$x(t) = A \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{-j(2\pi f t + \varphi)}$$

Il fasore è un modo di rappresentare una sinusoide con una frequenza f e fase φ può essere espresso come L'ESPONENZIALE COMPLESSO di un ANGOLO O FASE che varia nel tempo.

Identità di Eulero

$$A e^{-j(2\pi f t + \varphi)} = \underbrace{A}_{\text{Modulo}} \left[\cos(\underbrace{2\pi f t}_{\text{Angolo}} + \underbrace{\varphi}_{\text{FASE}}) + i \sin(2\pi f t + \varphi) \right]$$



P_1: Invariante Temporalmente $\quad x(t+T_0) = x(t) \Rightarrow e^{-j(2\pi f t + T_0 + \varphi)} = e^{-j(2\pi f t + \varphi)}$

proof $\quad e^{-j(\omega(t+T_0))} = e^{-j\omega t} e^{-j\omega T_0} \overset{\uparrow}{=} e^{-j\omega t}$

Quando è vera?

$$\Rightarrow [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] [\cos(\omega t T_0) + i \sin(\omega t T_0)] = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

Pongo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \cdot [\underbrace{\cos(2\pi)}_{\text{Sempre } 1} + \underbrace{i \cancel{\sin(2\pi)}}_{\text{Sempre } 0}] = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$

$\Rightarrow \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad$ CVD

Componente continua e potenza del fasore

$x(t) = A e^{-j\omega t}$

$\Rightarrow \langle x(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |A e^{-j\omega t}|^2 dt \Rightarrow$ Il fasore è periodico $\Rightarrow \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$

T_0 Periodo fasore

Troviamo T_0

$e^{-j\omega t} = e^{-j\omega(t+T_0)} = e^{-j\omega t} e^{-j\omega T_0} \Rightarrow \cos(\omega T_0) + i \sin(\omega T_0) = 1$ per $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \langle A e^{-j\omega t} \rangle = \frac{A}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{A \cancel{\omega}}{2\pi} \cdot \frac{1}{j\cancel{\omega}} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= -\frac{A}{2\pi} \cdot \frac{1}{j} \left[\underline{e^{-j2\pi} - 1} \right] =$$

$\Rightarrow$ Coordinate Polari $\Rightarrow e^{-j2\pi} - 1 = \overset{1}{\cos(2\pi)} + i \overset{0}{\sin(2\pi)} - 1 = \emptyset \Rightarrow \langle A e^{-j\omega t} \rangle = \emptyset$

Potenza

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt \qquad |Ae^{-j\omega t}|^2 = (Ae^{-j\omega t})(Ae^{j\omega t})$$

$$= A^2 \Rightarrow P_x = \frac{\omega}{2\pi} A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = \frac{\omega}{2\pi} A^2 \cdot t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{2\pi}} A^2 \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\omega}} = A^2$$

Fasore a tempo discreto

$$x(n) = A e^{-j(\theta n + \varphi)} = A e^{-j(2\pi \nu n + \varphi)}.$$

P_1: Non è periodico

$$x(n) \neq x(n+N) \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quando?}}}{e^{j\theta n} = e^{j\theta n} e^{j\theta N}} \quad \text{quando?} \rightarrow e^{j\theta N} = 1$$

Non complesso!

$$e^{j\theta N} = \cos(\theta N) + i \sin(\theta N) = 1 \quad \text{per} \quad \theta N = 2k\pi \rightarrow N = \frac{2k\pi}{\theta}$$

Affinché il fasore sia periodico $\theta = \frac{2k\pi}{N}$

P_2: Non fluttua necessariamente al crescere di ω / f

L'antitesi è che $e^{-j\theta t} = e^{-j(\theta+\gamma)n} \rightarrow e^{-j\theta n} \cdot e^{-j\gamma n}$

$$\Rightarrow [\cos(\theta n) + i \sin(\theta n)]\,[\cos(\gamma n) + i \sin(\gamma n)]$$

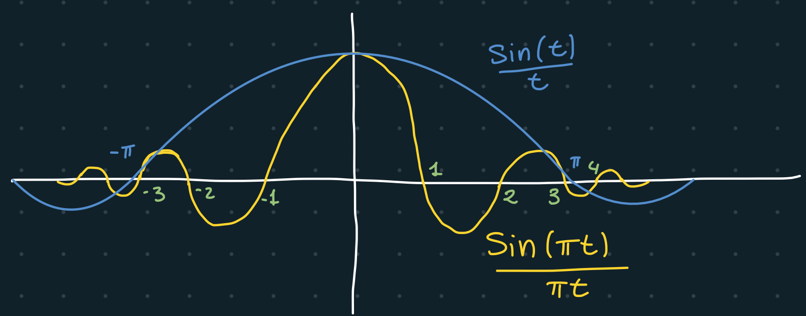
$$\text{quando } \gamma = 2\pi \rightarrow [\cos(\theta n) + i \sin(\theta n)]\,[\underbrace{\cos(\gamma n)}_{1} + i \underbrace{\sin(\gamma n)}_{\emptyset}] = e^{-j\omega t}$$

→ Scegliamo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{0}{\cancel{2\pi}} \leq \frac{\cancel{2\pi}\nu}{\cancel{2\pi}} \leq \frac{\cancel{2\pi}^{1}}{\cancel{2\pi}} \rightarrow 0 \leq \nu \leq 1$

Segnale SINC

NORMALIZZATO

$$\mathrm{Sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Attenuazione tra primo e secondo lobo

$$20 \log_{10} \left| \frac{x(0)}{x(t_1)} \right| = n\, dB$$

Auto correlazione tra due fasori

$x(t) = A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)}$ $\qquad$ $y(t) = A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$$r_{xy}(\tau) = \langle A_1 e^{j\omega_1 t} e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{-j\omega_2 t} e^{j\omega_2 \tau - j\varphi} \rangle = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot e^{j\omega_2 \tau} \langle e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega_2 t} \rangle$$

Se $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow r_{x_1 x_2}(\tau) = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot e^{j\omega\tau}$ $\quad r_{xy}(\tau)$

$$P_{xy} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1 e^{j\omega_1 t} e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{-j\omega_2 t} e^{j\varphi_2} \, dt$$

$= A_1 A_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \langle e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega_2 t} \rangle$ se $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow P_{xy} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = P_{xy} \cdot e^{j\omega\tau}$$

Se $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 \to$ $\quad P_{xy} = A^2 e^{j(\varphi - \varphi)} = A^2$

$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = A^2 e^{j\omega\tau}$ $\quad$ La funzione di auto correlazione di un fasore e' sempre un fasore

Trasformazione di un fasore

$x(t) = e^{j2\pi f t}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{1}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Non assolutamente integrabile

↳ se $\int_a^b |f(x)| \, dx = C$

$\Rightarrow$ Usiamo le proprieta'

$x(t) = A \, e^{j2\pi f_0 t}$ $\qquad$ $A \rightleftharpoons A\delta(f) \Rightarrow X(f) = A\delta(f - f_0)$

$\bar{x}(t)$ $\quad$ Sfasamento

Segnale sinusoidale

E' essenzialmente un fasore con la componente complessa sempre nulla

$\rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi)$

Possiamo rappresentarlo con 2 fasori:

$$A\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) = \left\{\left[\cos(\omega t) + i\cancel{\sin(\omega t)}\right] + \left[\cos(\omega t) - i\cancel{\sin(\omega t)}\right]\right\} A$$

$$= A\cancel{2}\cos(\omega t) = \frac{A}{2}\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right)$$

$\frac{}{2}$

Siccome il segnale sinusoidale è $A\cos(\omega t + \varphi)$ è la parte reale di un fasore

$$\Rightarrow \quad e^{-j\omega t} = \boxed{\cos(\omega t)} + i\sin(\omega t)$$

$$\uparrow$$

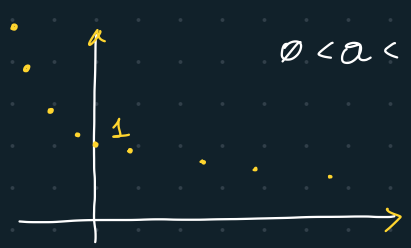
$$Re\{e^{-j\omega t}\} = \text{segnale sinusoidale}$$

Sequenza Sinusoidale

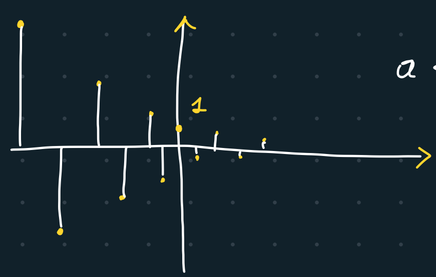
$$x(n) = A \cdot \cos(\theta n + \varphi) \quad = A\cos(2\pi\nu n + \varphi)$$

Sequenza Esponenziale

$x(n) = A \cdot a^n$ a seconda della base a otteniamo forme diverse:



$0 < a < 1$



$a < 1$

Componente continua del segnale sinusoidale

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[e^{-j\omega t}e^{-j\varphi} + e^{+j\omega t}e^{j\varphi}\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{A}{2}\left(e^{-j\omega t}e^{-j\varphi} + e^{j\omega t}e^{j\varphi}\right)\right\rangle = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}\underbrace{\langle e^{-j\omega t}\rangle}_{0} + \frac{A}{2}e^{j\varphi}\underbrace{\langle e^{j\omega t}\rangle}_{0} = \emptyset$$

La media è lineare

$$P_x = \langle|x(t)|^2\rangle \rightarrow \langle|A\cos(\omega t)|^2\rangle \rightarrow A^2\langle\cos^2(\omega t)\rangle \rightarrow \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\left[\underbrace{\langle 1\rangle}_{1} + \underbrace{\langle\cos(2\omega t)\rangle}_{0}\right] = \frac{A^2}{2}$$

Proof

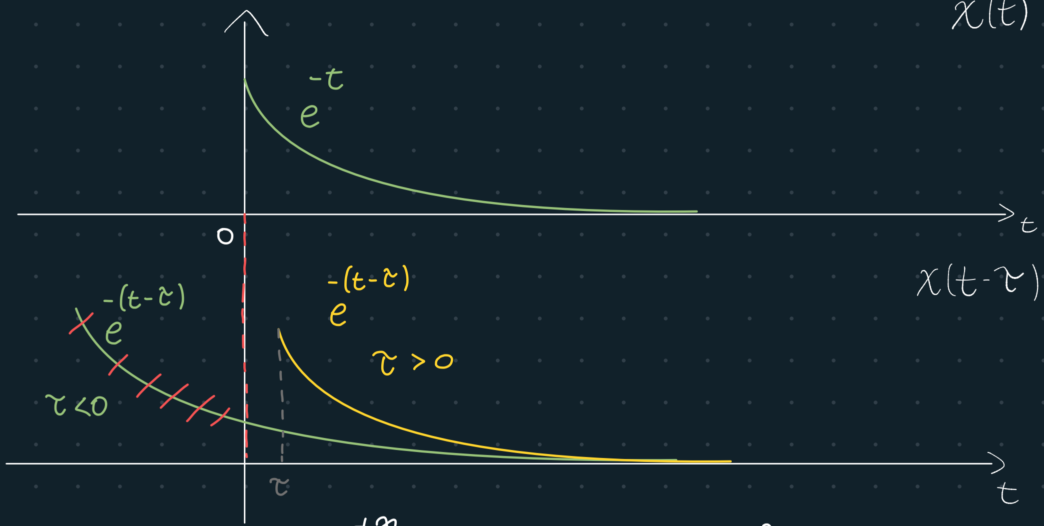
$$P(\cos(\omega t)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega t)\,dt \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega t)\Big|_0^{2\pi} = \emptyset$$

Esponenziale Monolatero

$$x(t) = A\, e^{-t} \cdot u(t) \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}_x(\tau) = \text{ENERGIA, CONTINUO}$$

Autocorrelazione

$$\Rightarrow \mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-t} \cdot u(t) \cdot A\, e^{t-\tau} \cdot u(t)\, dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-(t-\tau)}\, dt$$



Per $\tau < 0$ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_x(\tau) = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-(t-\tau)}\, dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-t} \cdot e^{\tau}\, dt = A^2 e^{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2t}\, dt$

$$= -A^2 e^{\tau}\, \frac{1}{2}\, e^{-2t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2 e^{\tau}}{2} \qquad \tau < 0$$

Per $\tau > 0$ $\rightarrow$ $\mathcal{R}_x(\tau) = A^2 e^{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t}\, dt = -\frac{A^2 e^{\tau}}{2}\, e^{-2t} \Big|_{\tau}^{+\infty} = -\frac{A^2 e^{\tau}}{2} \left[0 - e^{-2\tau} \right]$

$$= \frac{A^2 \cancel{e^{\tau}} \cdot e^{-\cancel{2}\tau}}{2} = \frac{A^2 e^{-\tau}}{2} \qquad \tau > 0$$

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \begin{cases} \dfrac{A^2 e^{\tau}}{2} & \text{per } \tau < 0 \\[2ex] \dfrac{A^2 e^{-\tau}}{2} & \text{per } \tau > 0 \end{cases}$$

Proprio l'opposto del modulo per τ

$$\Rightarrow \mathcal{R}_x(\tau) = \frac{A^2 e^{-|\tau|}}{2}$$

Trasformata dell' esponenziale monolatero

$$\rightarrow \quad x(t) = A\, e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(f) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}}\, e^{-j2\pi f t} \cdot u(t)\, dt = \quad A \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(j2\pi f + \frac{1}{T}\right)t}\, dt = \frac{A}{-j2\pi f - \frac{1}{T}} \; e^{-\left(j2\pi f + \frac{1}{T}\right)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{A}{-\frac{j2\pi f T + 1}{T}} \left[0 - 1\right] = -\frac{A\,T}{1 + j2\pi f T}(-1) = \frac{A\,T}{1 + j2\pi f T}$$

Rappresentare lo spettro $\rightarrow$ lo spettro è complesso $\rightarrow$ ha modulo e Fase

$$|X(f)| = \frac{|Num|}{|Denom|} = \frac{|AT|}{|1 + j2\pi f T|} = \frac{A\,T}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}} = |X(f)|$$

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Quanto si attenua rispetto al valore in origine ?

$$\rightarrow \text{ se } f_0 = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow |X(f_0)| = \frac{A\,T}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{A\,T}{\sqrt{2}}$$

Attenuazione rispetto a $X(0) = \quad 20 \log_{10} \left| \frac{X(f_0)}{X(\emptyset)} \right| \rightarrow 20 \log_{10} \left| \frac{\frac{\cancel{AT}}{\sqrt{2}}}{\cancel{AT}} \right| =$

$$= 20 \log_{10} (\sqrt{2}) \simeq -3\text{ dB}$$

Caratterizzazione Sintetica

3.03 - Operazione di media

$$< x(t) >_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$$

$$< x(n) >_{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

Se $N_1 < 0$ e $N_2 > 0$

3.03 - Operazione di media estesa ad un intervallo $(-\infty, +\infty)$

$$< x(t) > = \lim_{T = +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$$

$$< x(n) > = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

In questo caso serve sempre

Proprieta' della media

P_1: Invarianza Temporale: $< x(t - T_0) > = < x(t) >$

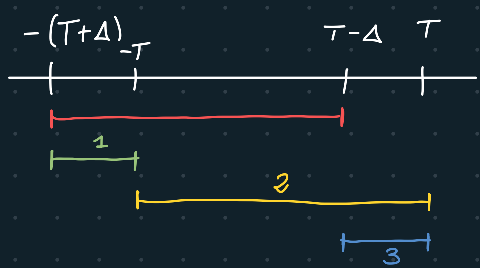
Usiamo $x(t)$ segnale continuo

$$\Rightarrow < x(t + \Delta) > = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t - \Delta)\, dt \qquad \text{pongo } \tau = t - \Delta \Rightarrow t = \tau - \Delta$$

$$\Rightarrow dt = d\tau$$

Estremi $\to$ $\underset{t=-T}{\tau = t - \Delta} = -(T + \Delta)$, $\underset{t=T}{\tau = t - \Delta} = T - \Delta$

$$\Rightarrow \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-(T+\Delta)}^{T - \Delta} x(\tau)\, d\tau$$



$$= 1 + 2 - 3$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left[\int_{-(T+\Delta)}^{-T} x(\tau)\,d\tau + \int_{-T}^{T} x(\tau)\,d\tau - \int_{T-\Delta}^{T} x(\tau)\,dt\right]$$

$$\sim \int_{-T}^{-T} x(\tau)\,d\tau = \emptyset \qquad \sim \int_{T}^{T} x(\tau)\,d\tau = \emptyset$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(\tau)\,d\tau = \langle x(\tau)\rangle$$

CVD

P_2: Lineare

$$\Rightarrow \langle a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot)\rangle = \langle a_1 x_1(\cdot)\rangle + \langle a_2 x_2(\cdot)\rangle$$

Proof Banale:

$$\langle a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\,dt =$$

CVD

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left\{\int_{-T}^{T} a_1 x_1(t)\,dt + \int_{-T}^{T} a_2 x_2(t)\,dt\right\} = \langle a_1 x_1(t)\rangle + \langle a_2 x_2(t)\rangle$$

Componenti del segnale

- Media del segnale $\Rightarrow$ COMPONENTE CONTINUA $= x_{dc}$
- Componente Alternata $\Rightarrow$ Segnale privato della media $\Rightarrow$ $x_{ac} = x - x_{dc}$

3.03 - POTENZA

E' la media del modulo quadro del segnale. I segnali di potenza sono quelli NON LIMITATI (potenza: sinusoide)

$$\Rightarrow P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt & \text{Continui} \\ \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 & \text{Discreti} \end{cases}$$

→ Se abbiamo funzioni limitate la loro potenza è sempre zero

Potenza dell'exp mono decr

$$x(t) = Ae^{-at}\cdot u(t)$$

$$\Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |Ae^{-at}|\cdot u(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{0}^{+\infty} e^{-2at}\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{A}{2T}\cdot\frac{1}{2a}\, e^{-2at}\Big|_{0}^{+\infty} = \lim_{T\to\infty} \cancel{-}\frac{A}{2T}\cdot\frac{1}{2A}\cdot[0\cancel{-}1]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^{\cancel{2}}}{4\cancel{A}T} \sim \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} \to 0$$

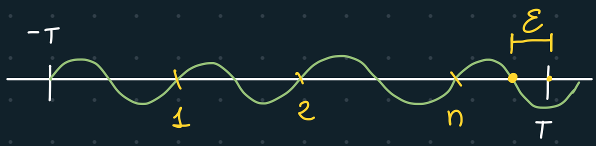
Segnali periodici → DI POTENZA

$$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)\, dt$$

$$\langle x(n) = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} x(n)$$

Proof: Sappiamo che la media di $x(t)$ è $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, dt$

$x(t)$ se periodico è qualcosa del genere:

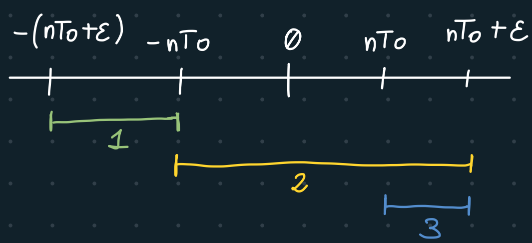


L'intervallo è $nT+\varepsilon$

Siccome $T\to\infty \Rightarrow n\to\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(nT+\varepsilon)}\int_{-(nT+\varepsilon)}^{nT+\varepsilon} x(t)\, dt$$

→ Sfruttiamo il trucchetto visto per la dimostrazione dell'inv. Temp. della media



1 + 2 - 3

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(nT+\varepsilon)} \left\{ \cancel{\int_{-(nT+\varepsilon)}^{-nT} x(t)\,dt} + \int_{-nT}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\,dt - \cancel{\int_{nT_0}^{nT_0+\varepsilon} x(t)\,dt} \right\}$$

$\varepsilon << T$

$$\Rightarrow \sim \int_{-T}^{-T} x(t)\,dt = 0$$

$\varepsilon << T$

$$\Rightarrow \sim \int_{T}^{T} x(t)\,dt = 0$$

$T \to +\infty$, $\varepsilon << T$ $\Rightarrow \cancel{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(nT+\varepsilon)} \int_{-nT}^{nT+\varepsilon} x(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(nT+\varepsilon)}\, n\, 2\int_{T}^{T+\varepsilon} x(t)\,dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2}(nT+\varepsilon)} \cdot \cancel{2}\, n \int_{0}^{T} x(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,dt \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}T + \cancel{\varepsilon}}$$

Indipendente da n

$\varepsilon << T$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt$$

Media per segnali PERIODICI

3.03 - Energia

E' un' operazione integrale $\to$ No media

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

Continui

$$\mathcal{E}_x = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Discreti

3.0.4 - Potenze Mutue

$$P_{xy} = \langle x(\cdot) \cdot y^*(\cdot) \rangle = \begin{cases} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t)\, dt \\ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{K=-T}^{T} x(n) \cdot y^*(n) \end{cases}$$

Proof $P_{xy}^* = \langle x(\cdot) \cdot y^*(\cdot) \rangle^* \to \langle (x_R + i x_I)(y_R + i y_I) \rangle = \langle x_R y_R + x_R i y_I + y_R i x_I + x_I y_I \rangle$

$= \langle x^*(\cdot)\, y(\cdot) \rangle$

$$x'(t) = x(t) + y(t) \to P_{x'} = \langle |x(t) + y(t)|^2 \rangle = \langle (x(t)+y(t))(x(t)+y(t))^* \rangle$$

$$= \underbrace{\langle |x(t)|^2 \rangle}_{P_x} + \underbrace{\langle x(t) \cdot y^*(t) \rangle}_{P_{xy}} + \underbrace{\langle y(t) \cdot x^*(t) \rangle}_{P_{xy}^*} + \underbrace{\langle |y(t)|^2 \rangle}_{P_y}$$

$$\Rightarrow P_{x+y} = P_x + P_y + P_{xy} + P_{xy}^* \to z + z^* = z_R + i\cancel{z_I} + z_R - i\cancel{z_I} = \underbrace{z_R + z_R}_{2 z_R}$$

$$= P_x + P_y + 2\, \mathrm{Re}\{P_{xy}\}$$

Potenza di un segnale dato dalla somma di due segnali

ORTOGONALITA' SEGNALI DI POTENZA

→ Due segnali sono ortogonali quando la potenza della somma di due segnali è razionalizzabile nella somma delle potenze "marginali"

E quindi $P_{xy} = \emptyset$ ⇒ la potenza mutua è zero

Se $P_{xy} \to P_{x+y} = P_x + P_y + 2\underbrace{\mathrm{Re}\{P_{xy}\}}_{\emptyset} = P_x + P_y$

Esempio segnali ortogonali

$x(t)$ = media / componente continua , $y(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$ → componente Alternata

→ $x(t)$ = qualsiasi segnale

⇒ $x_{dc}(t) = \langle x(t) \rangle$ e $x_{ac} = x(t) - x_{dc}$

proof :

$$P_{x_{ac} x_{dc}} = \langle x_{ac} \cdot x_{dc}^* \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{ac} \cdot x_{dc}^* \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{x_{dc}}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{ac} \, dt$$

Reale + costante

Siccome $x_{ac} = x - x_{dc} = \emptyset \Rightarrow P_{x_{ac} x_{dc}} = \lim_{T \to \infty} \frac{x_{dc}}{2T} \cdot \emptyset = \emptyset$

Quindi $\underline{P_{x_{ac}+x_{dc}} = P_{x_{ac}} + P_{x_{dc}}}$

Il valore quadratico medio RMS

$\to$ si esprime in dB/W $\to$ $x_{rms}\Big|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{x_{rms}}{x_0} \right)$

$\sqrt{P_x}$

Valore Massimo $\sqrt{P_0}$

3.0.4 Energie mutue

$$\mathcal{E}_{xy} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y^*(n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sia $x'(t) = x(t) + y(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{x'} = \mathcal{E}_{x+y} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)+y(t)|^2 dt$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_y} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt}_{\mathcal{E}_{xy}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot y(t)\, dt}_{\mathcal{E}_{xy}^*}$$

Siccome $\mathcal{E}_{xy} + \mathcal{E}_{xy}^* = z + z^* = z_R + z_i + z_R - z_I = 2 z_R = 2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{E}_{xy}\}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{x'} = \mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + 2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{E}_{xy}\}$$

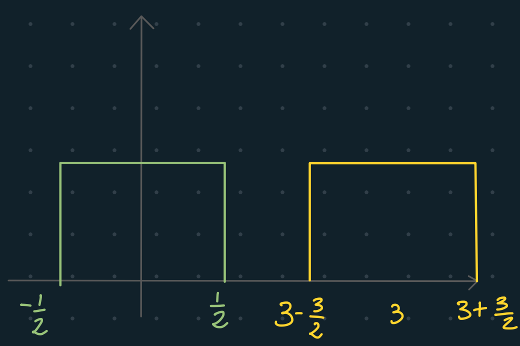
$\to$ Se $\mathcal{E}_{xy} = \emptyset \Rightarrow$ <u>ORTOGONALI</u>

SEGNALI DI ENERGIA ORTOGONALI

Un semplice esempio è il seguente.

$x(t) = \pi(t) \qquad y(t) = \pi(t-3)$

$$\mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) \cdot \pi(t-3)\, dt = 0$$



Prodotto Scalare e Norma

Prodotto scalare : $< x(t), y(t) > = < x(t) \cdot y^*(t) > = \begin{cases} P_{xy} & \text{Pow} \\ \mathcal{E}_{xy} & \text{Energy} \end{cases}$

Norma : $\| x(\cdot) \|^2 = < x(\cdot), x(\cdot) > = \begin{cases} P_x \\ \mathcal{E}_x \end{cases}$

Distanza tra due segnali

$\rightarrow D_{xy} = \| x(\cdot) - y(\cdot) \|$

Funzione Di Correlazione

OPERAZIONE DI MEDIA

Serve a misurare la similitudine di due segnali AL VARIARE DEL RITARDO

$$r_{xy}(\tau) = < x(t), y(t-\tau) > = \begin{cases} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt & \text{Potenza} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt & \text{Energia} \end{cases}$$

$$r_{xy}(m) = < x(n), y(n-m) > = \begin{cases} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{K=-N}^{N} x(n) \cdot y^*(n-m) & \text{Potenza} \\ \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x(n)\, y^*(n-m) & \text{Energia} \end{cases}$$

Autocorrelazione del segnale costante

$x(t) = A$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = < x(t) \cdot y^*(t-\tau) > = \text{POTENZA} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A \cdot A\, dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{2T} \, t \Big|_{-T}^{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{2T} 2T = A^2$$

Proprieta' della Correlazione

P_1: Valore nell'origine : $r_x(0) = \mathcal{E}_x$

proof $r_x(\tau)$ con $\tau = 0$ $\to$ $r_x(0) = \langle x(t) \cdot x^*(t-0)\rangle$ = Definizione di $\begin{cases} \text{Energia} \\ \text{Potenza} \end{cases}$

P_2: Simmetria coniugata : $r_{xy}(\cdot) = r_{yx}^*(-\tau)$

proof: $r_{xy}(\tau) = \langle x(t) \cdot y^*(t-\tau)\rangle = \langle x(t-\tau+\tau) \cdot y^*(t-\tau)\rangle$

pongo $\bar{t} = t-\tau$ $\Rightarrow$ $\langle x(\bar{t}+\tau) \cdot y^*(\bar{t})\rangle$ Sappiamo che $x y^* = (x^* y)^*$

$\Rightarrow \langle (\underbrace{x^*(t+\tau) \cdot y(\bar{t})}_{r_{yx}(-\tau)})^* \rangle$ $r_{yx}^*(-\tau)$

$P3$: E' LIMITATA

$|r_{xy}(\cdot)| \leq |x(\cdot)| \cdot |y(\cdot)|$ proof $r_{xy}(\tau) = |\langle x(t) \cdot y^*(t-\tau)\rangle| \leq |x(t)|\, |y^*(t-\tau)|$

La Norma e' invariante Temporalmente $\Rightarrow |y(t)| = |y(t-\tau)|$

$\Rightarrow |r_{xy}(\cdot)| \leq |x(t)|\, |y(t)|$

$\to$ Queste prop valgono anche per l'auto correlazione.

I Sistemi

P1: Un sistema è DISPERSIVO o con memoria quando l'output dipende dai valori precedenti dell input → FILTRO MA

P2: Un sistema è CAUSALE quando $y()$ dipende solo da valori di x correnti o passati; mai futuri

→ NON CAUSALE : $y(n) = b_0 x(n) + b_1 \underbrace{x(n+1)}_{\text{FUTURO}}$ con $b_1 \neq 0$

P3: Invertibilità: è invertibile quando esiste un sistema che, dato l'output di un altro sistema, restituisce $x(t)$

→ NON INV : $y(t) = x^2(t) \Rightarrow x(t) = \sqrt{x^2(t)} = \pm x(t)$?

→ INV : Accumulatore $y(n) = \sum x(k)$

→ $x(k) = \{[y(n) - y(n-1)]\} = x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) - x(k-1)$

P4. Temporalmente invariante quando ad una traslazione in x corrisponde una in y

$x(t-T_0) \rightarrow Sys \rightarrow y(t-T_0)$

→ NON T. INV: $y(t) = n \cdot x(n) \Rightarrow x(t-T_0) \Rightarrow y = n \cdot x(t-T_0) \neq x(t-T_0)$

P5: LINEARE quando sia omogeneo che Additivo

→ OMOGENEO $a\,x(t) \rightarrow Sys \rightarrow a \cdot y(t)$

→ Additivo Sia $\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e $\bar{y}(t) = y_1(t) + y_2(t)$

e $x_1(t) \rightarrow Sys \rightarrow y_1(t)$, $x_2(t) \rightarrow Sys \rightarrow y_2(t)$

Allora $\bar{x}(t) \rightarrow Sys \rightarrow \bar{y}(t)$

→ NON LINEARE $y(n) = n \cdot x^2(n) \Rightarrow$

- Omogeneo ? $\bar{x} = a\,x(t) \rightarrow Sys \rightarrow n \cdot a^2 x^2(n) \neq a\,x(t)$ NON OMO
- Additivo ? $\bar{x}(n) = x_1(n) + x_2(n)$ $y_1 = n\,x_1^2(n)$ $y_2 = n\,x_2^2$

$\Rightarrow [x_1(n) + x_2(n)] \rightarrow Sys \rightarrow n \cdot [x_1(n) + x_2(n)]^2 \neq y_1 + y_2$ non lineare

→ Lineare $\bar{x}_1(t) = a_1 x_1(t)$, $\bar{x}_2(t) = a_2 x_2(t)$ → Sys → $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

Sistemi Lti

Un sistema e' LIT quando e' sia LINEARE che INVARIANTE TEMPORALMENTE.

Tiriamo fuori la proprieta' di riproducibilita' della Delta

$$\rightarrow x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\uparrow}{x(k)} \cdot \delta(n-k)$$

Chiamiamo $h(t)$, $h(n)$ la risposta di un sistema ad un impulso di Dirac

$$\Rightarrow \quad \underset{x(n)}{\delta(n)} \rightarrow Sys \rightarrow \underset{y(n)}{h(n)}$$

Possiamo scrivere $x(n) = \sum x(k) \cdot \delta(n-k)$

$$\Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Convoluzione Continua

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

Dimostrare che un sistema e' LTI

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

1: lineare Sia $x(n) = a x_1(n) + a_2 x_2(n) \rightarrow Sys \rightarrow a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) -$

$$- a_1 x_1(n-1) - a_2 x_2(n-1)$$

$$\Rightarrow a_1 (\underbrace{x_1(n) - x_1(n-1)}_{y_1}) + a_2 (\underbrace{x_2(n) - x_2(n-1)}_{y_2}) \leftarrow \text{LINEARE}$$

Time inv: $x(n+T_0) \overset{?}{=} y(n+T_0)$

$$x(n+T_0) \rightarrow Sys \rightarrow x(n+T_0) - x(n+T_0-1)$$

$$y(t) = x(n+T_0) - x(n+T_0-1) \quad \text{Time inv.}$$

$$y(n+T_0)$$

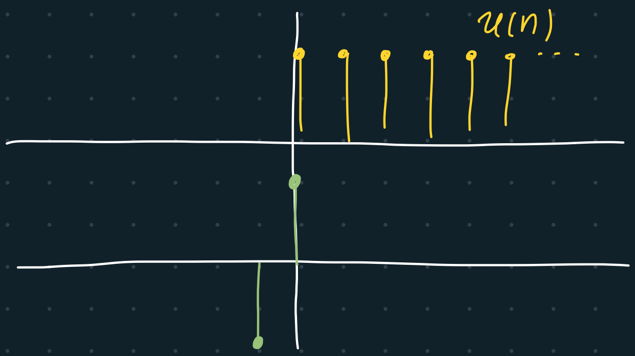
SE il sys e LTI $\rightarrow$ $y(n) = x(n) * h(n)$

$\rightarrow$ ci manca $h(n) = \delta(n) \rightarrow Sys \rightarrow h(n)$

$\Rightarrow \quad y(n) = x(n) - x(n-1)$

$\Rightarrow \quad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

$\Rightarrow$ Se $\quad x(n) = u(n) \Rightarrow y(n) = u(n) * h(n)$



MEDIA DELL'USCITA

$$y_{dc} = \langle y(n) \rangle = \langle h(n) * x(n) \rangle = \left\langle \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot x(n-K) \right\rangle = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \langle h(K) \cdot x(n-K) \rangle$$

$$= \langle x(n-K) \rangle \cdot \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) \rightarrow \text{la media è T.I} \rightarrow \langle x(n-K) \rangle = \langle x(n) \rangle$$

$\Rightarrow$ Battezzo $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)$ guadagno in uscita $H(0) \rightarrow$

$$\rightarrow y_{dc} = \langle x(n) \rangle \cdot H(0)$$

Proprieta' della convoluzione

P_1: Commutativa $x_1(\cdot) * x_2(\cdot) = y(\cdot) = x_2(\cdot) * x_1(\cdot)$

$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ proof

$x(n) * h(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K) \cdot h(n-K)$ pongo $\bar{K} = n - K \Rightarrow K = n - \bar{K}$

$$\Rightarrow x(n) * h(n) = \sum_{\bar{K}=-\infty}^{+\infty} x(n-\bar{K}) \cdot h(\bar{K}) = h(n) * x(n)$$

P_2: Distributiva / Associativa

$$x * (h_1 * h_2) = (x * h_1) * h_2$$

proof: $x * (h_1 * h_2) = x * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_1(m) \cdot h_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K) \cdot h_1(m) \cdot h_2(n-m-K)$

Non dipende da K

$$\rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_1(m) \underbrace{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K) \cdot h_2(n-m-K)}_{x(n-m) * h_2(n-m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_1(m) \cdot \left(x(n-m) * h_2(n-m)\right)$$

$$= h_1(K) * \left(x(K) * h_2(K)\right)$$

P3 Convoluzione per la Delta

$$x(t) * \delta(t-T_0) = x(t-T_0) \quad \rightarrow \quad x(t) * A\delta(t-T_0) = A\,x(t-T_0)$$

ES: $u(t+2) * \delta(t-1) = u(t+2-1) = u(t+1)$

P7: Invarianza Temporale

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\text{Sys Time delay}} x_1(t-T_1) * x_2(t-T_2) = y[t-(t_1+t_2)]$$

ES: $u(t-1) * u(t-2) = \pi(t-[1+2]) = \pi(t-3)$

P8: Time scaling

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\text{Sys Time Scaling}} x_1(a\cdot t) * x_2(a\cdot t) = \frac{1}{|a|}\, y(a\cdot t)$$

ES: $(t^2+t) * t = y(t)$ se $y(t) = \frac{1}{3}\, y(3t) \Rightarrow a = 3$

$$\Rightarrow x_1(3t) * x_2(3t) = \begin{cases} x_1(3t) = 9t^2 + 3t \\ x_2(3t) = 3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (9t^2 + 3t) * 3t = \frac{1}{3}\, y(3t)$$

Legami IN OUT AuTo correlazione

$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot) \quad \rightarrow \quad r_{y_1 y_2}(\cdot) = r_{x_1 x_2}(\cdot) * r_{h_1 h_2}(\cdot)$$

Proof:

$r_{y_1 y_2} = \langle y_1(n), y_2(n-m) \rangle =$ possiamo scrivere $y_i(n) = h_i(k_i) * x_i(n-k_i)$

$$= \left\langle \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1)\, x_1(n-k_1),\ \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_2(k_2)\, x_2(n-k_2-m) \right\rangle$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1)\, h_2(k_2) \langle x_1(n-k_1), x_2(n-k_2-m) \rangle$$

$\rightarrow$ Scriviamo

Differenza tra correlazione e convoluzione

$$r_{xy}(m) = \langle x(n), y(n-m) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y^{*}(n-m)$$

$\leftarrow$ Coniugato

$$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h(n-m)$$

$\uparrow$ Segnale ribaltato

Trasformata di Fourier

Poniamo in input un fasore ad un sistema LTI avente risposta impulsiva $h(t)$

$$e^{j2\pi ft} \to \underset{h(t)}{Sys} \to y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Abbiamo ottenuto in out lo stesso fasore di prima, moltiplicato per un "nuovo pezzo" che chiamiamo $H(f) \to$ Risposta in frequenza

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2\pi ft} \cdot H(f)$$

ES: $y(n) = x(n-1)$ $\qquad h(n) = ?$

$$\underset{e^{j2\pi\nu n}}{y(n)} = e^{j2\pi\nu(n-1)} \Rightarrow e^{j2\pi\nu(n-1)} = e^{j2\pi\nu n} \cdot H(\nu)$$

$$\Rightarrow e^{j2\pi\nu n} \cdot e^{-j2\pi\nu} = e^{j2\pi\nu n} H(\nu)$$

$$\Rightarrow H(\nu) = \frac{e^{j2\pi\nu n} \cdot e^{-j2\pi\nu}}{e^{j2\pi\nu n}} = e^{-j2\pi\nu} \quad H(\nu)$$

ES: $y(t) = x(t-T)$, $h(t) = ?$

$$e^{j2\pi ft} \to Sys \to \underset{x(t)=e^{j2\pi ft}}{y(t)} = e^{j2\pi f(t-T_0)} \Rightarrow y(t) = e^{j2\pi ft} \cdot H(f)$$

$$\Rightarrow e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi fT_0} = e^{j2\pi ft} \cdot H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{\cancel{e^{j2\pi ft}} \cdot e^{-j2\pi fT_0}}{\cancel{e^{j2\pi ft}}} \Rightarrow H(f) = e^{-j2\pi fT_0}$$

3.2.1 Trasformata

Tempo $\to$ frequenza $\quad x(t) \to X(f)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi \nu n} \, dn \qquad X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\theta n}$$

Fequenza tempo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) \, e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu) \, e^{j2\pi \nu n} \, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\nu) \cdot e^{j\theta n} \, d\theta$$

Legami ingresso - uscita dominio della frequenza

Sappiamo che $\quad y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \, d\tau$

Se poniamo $\quad x(t) = e^{j2\pi f t} \to sys \to y(t) = ?$

$$\to y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{\text{Indipendente da } \tau} \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau \quad \to y(t) = e^{j2\pi f t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau}_{H(f)}$$

$$\Rightarrow y(t) = H(f) \cdot \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{x(t)} \quad \to \underline{y(t) = H(f) \cdot x(t)}$$

Se $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau = H(f) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau = X(f)$

$\Rightarrow$ Applico la Trasformata ad entrambi i lati

$$\to \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau}_{Y(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f)}_{\text{Non dipende da } \tau} \, x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau = H(f) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \, d\tau}_{X(f)}$$

$$\Rightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

Dimostrazione Alternativa

$$\mathcal{F}\left(x_1(t) * x_2(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j2\pi f t}\, dt$$

-> Cambiamo l'ordine di integrazione

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X_2(f)\cdot e^{-j2\pi f \tau}}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot X_2(f) \cdot e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$

non dipende da τ

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(x_1(t) * x_2(t)\right) = X_2(f) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{X_1(f)} = X_2(f) \cdot X_1(f)$$

Proprieta' dello spettro per segnali Reali

$X^*(-f) = X(f)$ → PARI

$$X^*(-f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t} dt\right]^* \to \text{Applico il Coniugato} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^*(t)}_{\text{Reale}} \underbrace{\left(e^{-j2\pi(-f)t}\right)^*}_{} dt$$

Reale
$x^*(t) = x(t)$

$$\left(e^{j2\pi ft}\right)^* = e^{-j2\pi ft}$$

$$= X^*(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

Proprieta' della Trasformata

P_1: Linearita'

$$\begin{cases} x_1(\cdot) \rightleftharpoons X_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \rightleftharpoons X_2(\cdot) \end{cases} \Rightarrow y(\cdot) = a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) \rightleftharpoons Y(f) = a_1 X_1(\cdot) + a_2 X_2(\cdot)$$

La linearita' richiede la omogeneita' + Additivita': proof

$$y(\cdot) = a x_1(\cdot) \rightleftharpoons Y(\cdot) = a \cdot X_1(\cdot) \qquad y(t) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \rightleftharpoons Y(f) = X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$$

1) $y(\cdot) = a x_1(\cdot) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} a x_1(\cdot) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = a X_1(\cdot)$ ✓

2) $y(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(\cdot) + x_2(\cdot)] e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 e^{\cdots} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 e^{\cdots} dt = X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$ ✓

P_2: Dualita'

Se $x(t) \rightleftharpoons X(f) \Rightarrow X(t) \rightleftharpoons x(f)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(w) e^{jwt} dw \Rightarrow 2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(w) e^{jwt} dw \qquad \text{Se } t = -t$$

$$\Rightarrow 2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(w) \cdot e^{-jwt} dw \qquad \text{Scambiamo } w \text{ con } t$$

$$\Rightarrow 2\pi x(-w) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jwt} dt}_{FT[x(t)]} \Rightarrow x(t) \rightleftharpoons 2\pi x(-w)$$

Con freq:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) \cdot e^{j2\pi f t} dt \qquad \text{se } t = -t \Rightarrow x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\Rightarrow \text{Scambio } f \text{ con } t \Rightarrow x(-f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{X(t)} \Rightarrow X(t) \rightleftharpoons x(-f)$$

P_3: Trasformata di un IMPULSO

$$x(t) = \delta(n) \rightleftharpoons \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) \cdot e^{-j2\pi v n} = \text{prop: } \delta(n) \cdot x(n) = x(0) \cdot \delta(n)$$

$$\Rightarrow X(f) = \sum \delta(n) \cdot e^{0} = 1 \text{ Solo in } n=0 \Rightarrow \delta(n) \rightleftharpoons 1 \text{ oppure } A$$

$$\delta(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

P_4: TIME REVERSAL

$$x(-t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

pongo $\tau = -t \Rightarrow d\tau = -t\,dt \Rightarrow d\tau = -dt \rightarrow dt = -d\tau$

Estremi $\rightarrow$ $\tau = -t = \tau = +\infty$ ($t = -\infty$) $\quad \tau = -t = \tau = -\infty$ ($t = +\infty$)

$$\Rightarrow x(-t) \rightleftharpoons -\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau = +\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\tau(-\omega)}\, d\tau}_{\text{Trasformata}}$$

Scambiamo

$$\rightarrow x(-t) \rightleftharpoons X(-\omega)$$

P_5: Time Shifting

$$x(t-T_0) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-T_0)\, e^{-j2\pi f(t)}\, dt$$

pongo $\tau = t - T_0 \Rightarrow t = \tau + T_0$ Estremi

$-\infty = -\infty$, $+\infty = +\infty$

$t = \tau + \infty$

$$\Rightarrow x(t-T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f(\tau+T_0)}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, e^{j2\pi f T_0}\, d\tau = e^{j2\pi f T_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{X(f)}$$

$\Rightarrow$ Time Shift $\rightarrow$ Sfasamento

P6: Time Scaling

$$\mathcal{F}(x(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

pongo $\tau = at \Rightarrow t = \frac{\tau}{a} \rightarrow dt = \frac{\tau}{a}\, d\tau \Rightarrow dt = \frac{1}{a}\, d\tau$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}}\, d\tau \Rightarrow \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\tau 2\pi\left(\frac{f}{a}\right)}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Se a è REALE

Per $a > 0 \rightarrow x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$

per $a < 0 \rightarrow x(at) \rightleftharpoons -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\left(-\frac{f}{a}\right)}\, d\tau = -\frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right)$

$$\Rightarrow x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

per una COMPRESSIONE NEL TEMPO si ha uno stretch in frequenza

se $0 < a < 1 \rightarrow \frac{1}{a} > 1$

P: Frequency Shifting

$$\mathcal{F}\left(e^{j2\pi f_0 t}\cdot x(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi t(f-f_0)}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad x(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} \rightleftarrows X(f-f_0)$$

P: REPLICAZIONE → LA DELTA NON C'ENTRA!

Sappiamo che $\tilde{x}(t) = rep_T[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$

Con le sequenze → $\tilde{x}(n) = rep_N[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN)$

Se usiamo come segnale generatore una DELTA otteniamo il campionatore ideale, che moltiplicato per un segnale qualsiasi lo CAMPIONA:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\delta}(n) &= rep_N[\delta(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-kN)\\ \tilde{\delta}(t) &= rep_T[\delta(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\end{aligned}\right\} \text{TRENO CAMPIONATORE}$$

→ Diverso dalla convoluzione!!

→ moltiplichiamo un segnale per il treno:

$$x(t)\cdot \tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-kT) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\cdot\delta(t-kT)}_{\text{SEGNALE CAMPIONATO}}$$

Per la proprietà Della Delta

TRASFORMATA DELLA REPLICAZIONE

→ Scrivere la Replicazione di un segnale come convoluzione per una DELTA

Sappiamo che $x(t) * \delta(t-T_0) = x(t-T_0)\cdot\delta(t-T_0)$

$\Rightarrow$ Se $T_0 = kT$ → $x(t) * \delta(t-kT) = x(t-kT)\;\delta(t-kT)$

$$\rightarrow \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)}_{\text{Segnale REPLICATO}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t-kT)}_{\text{Segnale REPLICATO In Termini di convoluzione}}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = rep_T[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{Costante rispetto a k}} * \delta(t-kT) = x(t) * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)}_{\text{TRENO CAMPIONATORE}}$$

TRASFORMATA DEL TRENO CAMPIONATORE

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t-KT)$$ = metto in evidenza T = $\sum \delta\left(T\left(\frac{t}{T}-K\right)\right)$ = Prop δ: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta\left(\frac{t}{a}\right)$

$$= \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T}-K\right) \rightleftharpoons$$ TRASFORMO

$$\frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T}-K\right) \rightleftharpoons \begin{cases} \text{Linearità} & a\cdot x(t) \rightleftharpoons aX(f) \\ \text{time scale} & x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{T}\cdot T\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{f}{\frac{1}{T}}-m\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(Tf-m)$$ = T in evidenza = $\sum_{m=-\infty} \delta\left[T\left(f-\frac{m}{T}\right)\right]$

$\Rightarrow$ Prop Delta $\Rightarrow$ $\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$ Trasformata TRENO CAMPIONATORE

$\Rightarrow$ Tornando a $\tilde{x}(t) = rep_T[x(t)] = x(t) * \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t-KT)$

ricordiamo la prop $x(t) * y(t) = X(f)\cdot Y(f)$

$$\Rightarrow \bar{X}(f) = X(f)\cdot \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t-\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot \delta\left(t-\frac{m}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{m}{T}\right) \cdot \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

CAMPIONAMENTO IN FREQ.

Se poniamo $f_c = \frac{1}{T}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}_T(t) \rightleftharpoons f_c \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f_c m)$

$\Rightarrow$ $\tilde{x}(t) \rightleftharpoons X_\delta(f)$

REP. CAMP.

Condizione di NYQUIST

Affinché il segnale possa essere ricostruito a partire da un campionamento, la frequenza di campionamento deve essere pari almeno al doppio della Banda.

$\Rightarrow f_c \geq 2B$ se $f_c = \frac{1}{T}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{T} \geq 2B \Rightarrow T \leq \frac{1}{2B}$

Il periodo di riproduzione deve essere minore di $\frac{1}{2B}$

proof Campionamento $\rightleftharpoons$ Replicazione

$$x_s(t) = x(t)\cdot \tilde{\delta}(t) = x(t)\cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)}_{\text{Treno campionatore}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

Trasformata del Treno campionatore $\tilde{\delta}_T(t) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{m}{T})$

$$\Rightarrow x_s(t) \rightleftharpoons X(f) * \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{m}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f)*\delta(f-\frac{m}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f-\frac{m}{T})$$

MODULAZIONE ovvero $x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) = \bar{x}(t)$

$$\rightarrow \mathcal{F}(\bar{x}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt$$

NON USIAMO LA DEF

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\bar{x}(t)) = \mathcal{F}\left[x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\right] = \mathcal{F}\left\{x(t)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(e^{-j2\pi f_c t} + e^{j2\pi f_c t}\right)\right]\right\} =$$

C

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[x(t)\cdot\left(e^{-j2\pi f_c t} + e^{j2\pi f_c t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[x(t)\cdot e^{-j2\pi f_c t} + x(t)\,e^{j2\pi f_c t}\right] = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\mathcal{F}\left(x(t)\cdot e^{-j2\pi f_c t}\right)}_{\text{Proprieta' di shift}} + \mathcal{F}\left(x(t)\cdot e^{j2\pi f_c t}\right)\right]$$

$$\rightarrow x(t)\cdot e^{-j2\pi f_c t} \rightleftharpoons X(f-f_c)$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(f-f_c) + X(f+f_c)\right]$$

Il segnale si sdoppia!

Proprieta' Valore nell'origine

$$x(t) \rightleftharpoons X(f) \Rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt$$

per $f=0 \rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{0}\,dt$

Area sottesa al segnale

MODULATORE E DEMODULATORE

Modulazione

1M. Moltiplicazione per $\cos(2\pi f_c t)$
2M. Trasformazione in freq

Demodulazione

1D. Moltiplicazione per cos
2D. Trasformazione Tempo $\to$ freq
3D. Filtro passa Basso
4D. Trasformazione freq $\to$ Tempo

Sia $x(t)$ il segnale da modulare

1M. $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

2M. $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{1}{2}\left[X(f-f_c) + X(f+f_c)\right]$

1D ci arriva $g(t)$ segnale modulato $\to$ $g(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$

$\to x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t)$

Sappiamo che $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

$$\Rightarrow x(t)\left(\frac{1+\cos(4\pi f_c t)}{2}\right)$$

2D F.T. $\to$ freq

$$\to \frac{1}{2} x(f) + \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(2\pi [f_c \cdot 2] t) = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{4} X(f-2f_0) + \frac{1}{4} X(f+2f_0)$$

Ci basta isolare lui

3D Filtro passa basso $\to$ $\left[\frac{1}{2} \cdot X(f) + \frac{1}{4} X(f-2f_0) + \frac{1}{4} X(f+2f_0)\right] \cdot \Pi(t)$

Filtro passa basso generico

4D IFT

$\to$ dopo il filtro abbiamo $\frac{1}{2} X(f) \rightleftharpoons \frac{1}{2} x(t)$

Proprieta' della Derivata TEMPO

partiamo da $s(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ $s(t)$ e' la derivata di un altro segnale

$$s(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad , \quad \text{Scriviamo} \quad x(t) \overset{IFT}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} e^{j2\pi f t}}_{j2\pi f \cdot e^{j2\pi f t}} \, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f \cdot X(f)\, e^{j2\pi f t} \, df}_{A}$$

lineare

Teniamo a mente (A) e procediamo

possiamo scrivere $s(t) = \frac{d}{dx} x(t) \overset{IFT}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f t} \, df}_{B}$

$$\Rightarrow A = B \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} j2\pi f \cdot X(f)\, \cancel{e^{j2\pi f t}} \, \cancel{df} = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} S(f)\, \cancel{e^{j2\pi f t}} \, \cancel{df}$$

$$\Rightarrow j2\pi f\, X(f) = S(f)$$

DERIVATA FREQUENZA

$$Y(f) = \frac{d}{df} X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \underbrace{\frac{d}{df} \cdot e^{-j2\pi f t}}_{-j2\pi t\, e^{-j2\pi f t}} \, dt = \underbrace{- \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot j2\pi t\, e^{-j2\pi f t} \, dt}_{\text{Passo (A)}}$$

inoltre $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \frac{d}{df} X(f)$

$$\Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} y(t)\, \cancel{e^{-j2\pi f t}} \, \cancel{dt} = - \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(t) \cdot j2\pi t\, \cancel{e^{-j2\pi f t}} \, \cancel{dt} \quad \Rightarrow \quad y(t) = -j2\pi f t \cdot x(t)$$

oppure dal passo A...

$$j2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t) \cdot t \; e^{-j2\pi f t} \, dt \quad \text{pongo } s = -x(t) \cdot t \quad \Rightarrow j2\pi \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t} \, dt}_{\mathcal{F}(-x(t) \cdot t)}$$

SCABIO BASSE-ALTE FREQUENZE

$S(n) = x(n) \cdot (-1)^n \to \cos(\pi n)$ ovvero $\to \cos(\pi n) + i \underbrace{\sin(\pi n)}_{\text{sempre } 0}$ = fasore senza parte imm

Possiamo quindi scrivere

$S(n) = x(n) \cdot \cos(\pi n)$ modulazione

$= x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T_0} n\right)$

se divido per T_0 l'arg del coseno posso decidere "ogni quanti π" il segnale si ripete:

Pongo $\nu_c = \frac{1}{2T_0} \Rightarrow \frac{1}{T_0} = 2\nu_c \Rightarrow S(n) = x(n) \cdot \cos(\underline{2\pi \nu_c} n)$

Analogo a $2\pi f t$

$\to$ la prop di modulazione ci dice che

$S(f) = \underbrace{X(\nu - \nu_c) + X(\nu + \nu_c)}_{\text{FILTRO}} \leftarrow$ Il segnale si è sdoppiato

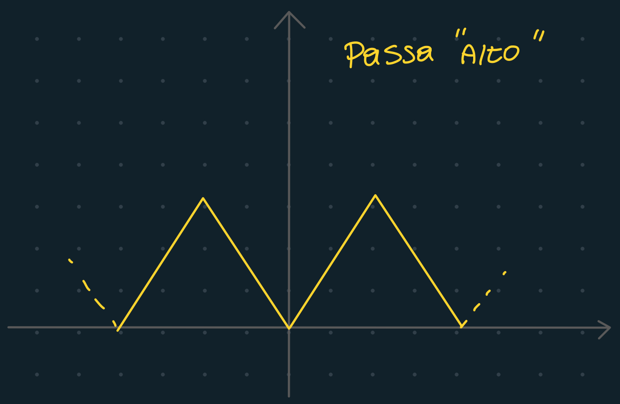
$\to$ Siccome lo spettro è periodico avremo che il segnale si ripete all'infinito

$\Rightarrow$ Possiamo scambiare le alte con le basse frequenze cambiando il valore di ν_c quindi di T

Esempio

$\nu_c = 2 \Rightarrow \frac{1}{2T} = 2 \Rightarrow 2T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 1$

$\Rightarrow S(f) = X(\nu - 2) + X(\nu + 2)$ se ad esempio la Banda dello Spettro è 1



RELAZIONE DI PARSEVAL

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt$$

Sappiamo che $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \cdot x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* e^{j2\pi f t} df}_{A}\, dt$$

Proprieta' del coniugato

$x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-t)$ proof $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$

$$X^*(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* \cdot \left(e^{-j2\pi f t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* \cdot e^{j2\pi f t} dt$$

$\rightarrow$ Sostituisco $f = -f \Rightarrow X^*(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* e^{-j2\pi f t} dt$

Continuo A:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* e^{j2\pi f t} df\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt}_{X(f)} \Big]^* df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f) \cdot X^*(f)}_{|X(f)|^2} df \Rightarrow \mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Battezzato DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

Proprieta' ESD

1) Per segnali reali e' PARI $S_x(-f) = S_x(f)$

2) Time invariant $\rightarrow$ $x(t-T_0) \rightleftharpoons X(f)\, e^{-j2\pi f T_0}$

3) $\Rightarrow |Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2$ DA DIMOSTRARE

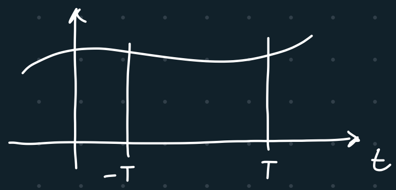
Funzione di Trasferimento di Energia

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Da Parseval sappiamo che: $\mathcal{E}_x \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_x(f)|^2 df$

-> Non si può Applicare ai segnali di Potenza

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$



Nessuno ci assicura che l'area sottesa è la stesso in freq.

Usiamo $x_T(t) = x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$ Segnale finestrato

Associamo a $x_T(t)$ uno spettro: $x_T(t) \rightleftharpoons X_T(f)$

$$\Rightarrow P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt$$

Se il segnale è finestrato possiamo integrare su Tutto $\mathbb{R}$

=> Possiamo applicare Parseval => $P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df$

$$\Rightarrow P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2 \right) df$$

-> La densità spettrale è quella che integrata ci dà l'energia

DENSITA' SPETTRALI MUTUE

$$S_{xy} = X(f) \cdot Y^*(f) \Rightarrow \mathcal{E}_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f) \cdot Y^*(f)}_{S_{xy}} df$$

$$P_{xy} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot y^*(t)\, dt = \text{pongo } x(t) \cdot y^*(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = x_T(t) \cdot y_T^*(t)$$

Associo $x_T(t) \to X_T(f)$
$y_T(t) \to Y_T(f)$

$$\Rightarrow P_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} X_T(f) \cdot Y_T(f)\, df$$

Seq En: $\mathcal{E}_{xy}$ con $x(n)$ e $y(n)$ $\to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)\, y^*(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot Y^*(\nu)$

Seq Pow $P_{xy} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n) \cdot y_N^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} X_N(\nu) \cdot Y_N^*(\nu)$

TEOREMA DI WIENER KINTCHINE

$$r_{xy}(\cdot) = \langle x(\,), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

Forte somiglianza con la convoluzione

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow$ Affinche' la correlazione possa essere scritta come convoluzione, la y deve essere sia coniugata che riflessa:

$$r_{xy}(\tau) = x(t) * y^*(-t)$$

Trasformiamo r_{xy} $\Rightarrow$ $x(t) * y^*(-t) \rightleftharpoons X(f) \cdot Y^*(f)$

Densita' spettrale di Energia mutua

proof

$$y^*(-t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(-t)\, e^{j2\pi f t}\, dt \right]^* \quad t = -t$$

$$\Rightarrow \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \right]^* = Y^*(f)$$

$\Rightarrow$ $r_{xy}(\tau) \rightleftharpoons S_{xy}(f)$ se $x = y$ $r_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)$

LEGAMI IN OUT DENSITA' SPETTRALI

$$r_{h_1 h_2}(t) = h_1 * h_2^*(-t)$$

$$\Rightarrow \quad r_{y_1 y_2}(t) = r_{h_1 h_2}(t) * r_{x_1 x_2}(t) \rightleftharpoons S_{y_1 y_2}(f) = \left[H_1(f) \cdot H_2^*(f) \right] \cdot S_{XY}(f)$$

Se $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$ e $h_1 = h_2$

$$r_y(t) = r_h(t) * r_x(t) \rightleftharpoons S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$$

①

$$S_{yx}(f) = H(f) \, S_x(f)$$

②

$$S_{xy}(f) = H(f)^* \cdot S_x(f)$$

proof 1: $S_{yx}(f) = Y(f) \cdot X^*(f)$

$$\underbrace{H(f) \cdot S_x(f)}_{Y(f)} \; S_x^*(f) = Y(f) \cdot X^*(f) = S_{yx}(f)$$

CVD

proof 2: $S_{xy}(f) = H^*(f) \, S_x(f)$

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) \quad \Rightarrow \quad H^*(f) \cdot S_x(f) = H^*(f) \cdot X(f) \cdot X^*(f) = \left[H(f) \cdot X^*(f) \cdot X(f) \right]^*$$

$$= \left[Y(f) \cdot X^*(f) \right]^* = Y^*(f) \cdot X(f) \quad S_{xy}(f)$$