Formelsammlung Mathematik

Mario Felder
Michi Fallegger

16. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Repetition

Kreisgleichung
Der Mittelpunkt des Kreises wird mit x_0 und y_0 angegeben.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Rotation um die z-Achse

$$z = f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Schnittwinkel zweier Normalvektoren:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{n_1 \cdot n_2}$$

Extremwertstellen

$y'' = f''(0) > 0$ Linkskrümmung $\rightarrow$ Minimum
$y'' = f''(0) < 0$ Rechtskrümmung $\rightarrow$ Maximum

Definitionsbereiche

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} &\rightarrow \mathbb{D} = \{(x, y) | x + y \geq 0\} \\ \frac{1}{x} &\rightarrow \mathbb{D} = \{x | x \neq 0\} \\ \ln x &\rightarrow \mathbb{D} = \{x | x > 0\} \end{aligned}$$

Kapitel 2

Partielle Ableitung

2.1 Änderungsrate / Ableitung

Die partielle Ableitung nach x im Punkt (x_0, y_0) lautet:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f\prime_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Die partielle Ableitung nach y im Punkt (x_0, y_0) lautet:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f\prime_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 y_0)}{\Delta y}$$

Satz von Schwarz:
Bei stetigen Funktionen, deren Ableitungen auch stetig sind (und existieren) kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen an.
Bsp: $f\prime_{xxy} = f\prime_{xyx}$

Kapitel 3

Differential Funktionen

3.1 Tangentialebene, Linearisierung, totales Differential

Die Gleichung der **Tangentialebene** an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt(x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$ lautet:

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f\prime_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f\prime_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Linearisierte Gleichung entspricht der Tangentialebene mit eingesetzten x_0 und y_0 Werten.

Der Funktionswert ändert sich linearisiert um das **totale Differential** von $f(x, y)$

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = f\prime_x(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}x + f\prime_y(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}y}$$

Es wird $\mathrm{d}x = \Delta x$ und $\mathrm{d}y = \Delta y$ gesetzt.

3.2 Implizit Ableiten

Neue Methode um Funktionen einfacher implizit Ableiten. Durch $F(x,y) = 0$ werde implizit eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Dann gilt für die Ableitung von f an der Stelle (x,y) des Graphen:

$$\boxed{y' = -\frac{F\prime_x(x,y)}{F\prime_x(x,y)}}$$

3.3 Kettenregel

Mit Hilfe der Kettenregel kann eine verschachtelte Funktion wie $z(t) = f(x(t), y(t))$ nach t abgeleitet werden.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f\prime_x(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f\prime_y(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

3.4 Extremalwert ohne Nebenbedingungen

Der Punkt (x_0, y_0) ist eine Extremstelle von $z = f(x,y)$, falls:

$$\boxed{f\prime_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f\prime_y(x_0, y_0) = 0}$$

und zusätzlich:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta = f\prime_{xx}(x_0, y_0) \cdot f\prime_{yy}(x_0, y_0) - f\prime_{xy}(x_0, y_0)^2 \\ \Delta > 0 \text{ und } f\prime_{xx} < 0 \;\rightarrow\; \text{Maximum} \\ \Delta > 0 \text{ und } f\prime_{xx} > 0 \;\rightarrow\; \text{Minimum} \\ \\ \Delta < 0 \;\rightarrow\; \text{Sattelpunkt} \end{array}}$$

Falls $\Delta = 0$ ist, so kann man nicht entscheiden.

3.5 Extremalwert mit Nebenbedingungen

Gesucht ist die Extremstelle von $z = f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

<u>*Lagrange :*</u>

Ist (x_0,y_0) eine Extremstelle, so erfüllt (x_0,y_0) das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} L\prime_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L\prime_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L\prime_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{vmatrix}$$

mit:
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$
$f(x,y) =$ Zielfunktion
$\varphi(x,y) =$ Nebenbedignung

Die Lagrange Methode kann für mehrere Variablen und beliebig vielen Nebenbedignungen angepasst werden.

Zielfunktion: $f(x_1, x_2, x_3, ..)$

Nebenbedingungen:

$$\varphi_1(x_1, y_1) = 0, \qquad \varphi_2(x_2, y_2) = 0$$

$L(x_1, x_2, x_3, ..., \lambda, \mu, ..) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda \cdot \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \mu \cdot \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$

$L\prime_{x1} = 0$
$L\prime_{x2} = 0$
$L\prime_{x3} = 0$
$L\prime_\lambda = 0$
$L\prime_\mu = 0$

Kapitel 4

Integrale

4.1 Doppelintegrale

Kartesische Koordinaten

$$\boxed{\iint\limits_A f(x,y)\mathrm{d}A = \underbrace{\int\limits_{x=a}^{b} \underbrace{\int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y}_{inneresIntegral}\ \mathrm{d}x}_{\text{ä}usseresIntegral}}$$

Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\boxed{\iint\limits_A f(x,y)\mathrm{d}A = \int\limits_{y=a}^{b} \int\limits_{x=g_l(y)}^{g_r(y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad\qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\boxed{\int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int\limits_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \cdot r \cdot \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi}$$

4.2 Allgemeine Flächenintegrale

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{A = \iint\limits_A 1 \ \mathrm{d}A}$$

Polarkoordinaten:

$$\boxed{A = \iint\limits_A r \ \mathrm{d}A}$$

4.2.1 Schwerpunkt einer Fläche

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{s_x = \frac{1}{A} \iint\limits_A x \mathrm{d}A \qquad s_y = \frac{1}{A} \iint\limits_A y \mathrm{d}A}$$

Polarkoordinaten:

$$\boxed{s_x = \frac{1}{A} \iint\limits_A r^2 \cdot \cos(\varphi) \mathrm{d}A \qquad s_y = \frac{1}{A} \iint\limits_A r^2 \cdot \sin(\varphi) \mathrm{d}A}$$

4.2.2 Flächenträgheitsmoment

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_A y^2 \mathrm{d}A \\ I_y &= \iint\limits_A x^2 \mathrm{d}A \\ I_p &= \iint\limits_A (x^2+y^2) \mathrm{d}A \end{aligned}}$$

Polarkoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_A r^3 \cdot \sin^2(\varphi) \mathrm{d}A \\ I_y &= \iint\limits_A r^3 \cdot \cos^2(\varphi) \mathrm{d}A \\ I_p &= \iint\limits_A r^3 \mathrm{d}A \end{aligned}}$$

4.3 Volumenintegrale

Beim Volumenintegral wird über die Projektionsfläche A integriert.

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_{u(x,y)}}^{z_{o(x,y)}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x}$$

Bei Rotationskörper gilt für die Grenzen von z:

$$z = f(x) = f(\sqrt{x^2+y^2})$$

Zylinderkoordinaten:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi, z)\cdot r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi}$$

Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V f\begin{pmatrix} r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi \\ r\cdot\cos\vartheta \end{pmatrix}\cdot r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi}$$

4.4 Allgemeine Volumenintegrale

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V 1\ \mathrm{d}V}$$

Rotationskörper:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V r\ \mathrm{d}V}$$

4.4.1 Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{s_x = \frac{1}{V}\iiint\limits_V x\ \mathrm{d}V \qquad s_y = \frac{1}{V}\iiint\limits_V y\ \mathrm{d}V \qquad s_z = \frac{1}{V}\iiint\limits_V z\ \mathrm{d}V}$$

Rotationskörper:

$$\boxed{s_x = 0 \qquad s_y = 0 \qquad s_z = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zr\ \mathrm{d}V}$$

4.4.2 Massenträgheitsmoment

Kartesische Koordinaten:

$$\boxed{I = \rho \cdot \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\mathrm{d}V}$$

Rotationskörper:

$$\boxed{I = \rho \cdot \iiint\limits_V r^3 \ \mathrm{d}V}$$

Kapitel 5

Vektorgeometrie

5.1 Parameterform

$$\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x_{Start} \\ y_{Start} \\ z_{Start} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{Ziel} - x_{Start} \\ y_{Ziel} - y_{Start} \\ z_{Ziel} - z_{Start} \end{pmatrix}$$

$t \in [0, 1]$

5.2 Geschwindigkeit, Beschleunigung

Geschwindigkeit (Tangentialvektor):
Es sei $\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ eine Bewegung. Dann beträgt die Geschwindigkeit: $\overrightarrow{v(t)} = \dot{\overrightarrow{r(t)}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ und die Beschleunigung: $\overrightarrow{a(t)} = \dot{\overrightarrow{v(t)}} = \ddot{\overrightarrow{r(t)}} \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$

5.3 Bogenlänge

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\mathrm{d}t}$$

5.4 Vektorfeld

Ebenes Vektorfeld:

$$\boxed{\vec{F} = F_x(x,y) \cdot \vec{e}_x + F_y(x,y) \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}}$$

F_x, F_y: Skalare Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y)$

5.5 Wegintegrale, Kurvenintegrale

Um das Wegintegral zu berechnen verwendet man das newtonische Gesetz: $W = F \cdot s$

$$\boxed{W = \int_C \overrightarrow{F}\ \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}}\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y})\ \mathrm{d}t}$$

$\vec{F} = \vec{F}(x,y)$: ebenes Fektorfeld
$\vec{r} = \vec{r}(t)$: Ortsvektor der Kurve C

Für die Arbeit:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \overrightarrow{v}\mathrm{d}r = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{v}\dot{\overrightarrow{r}}\mathrm{d}t$$

5.6 Gradient eines Skalarfeldes

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

$\varphi = \varphi(x, y, z)$: Räumliches Skalarfeld

5.7 Konservative Felder, Potentialfelder

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ heisst konservatives Feld oder Potentialfeld, wenn es eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ so gibt dass:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= \operatorname{grad}\varphi \\ \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

φ: heisst Potential.

In einem Potentialfeld (ohne Loch) sind die Wegintegrale wegunabhängig und es gilt:

$$W = \int \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

Merke: Geschlossener Weg in einem Potentialfeld = 0:

$$W = \int \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \oint \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{r} = 0$$

5.7.1 Konservativ

Nach Satz von Schwarz muss gelten:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{xy} = \varphi'_{yx} \rightarrow \tfrac{\partial F_x}{\partial y} = \tfrac{\partial F_y}{\partial x} \\[1em] \varphi'_{xz} = \varphi'_{zx} \rightarrow \tfrac{\partial F_x}{\partial z} = \tfrac{\partial F_z}{\partial x} \\[1em] \varphi'_{yz} = \varphi'_{zy} \rightarrow \tfrac{\partial F_y}{\partial z} = \tfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Integrabilitätsbedingung,}\\ \text{falls erfüllt existiert ein Potential}\\ \text{und } \vec{F} \text{ ist konservativ.}\end{array}$$

Um φ zu berechnen geht man von folgender Bedingung aus:

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x(x,y,z)} \\ F_{y(x,y,z)} \\ F_{z(x,y,z)} \end{pmatrix}$$

Somit lautet das Lösungssystem:

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= F_{x(x,y,z)} &\rightarrow \quad \varphi_x &= \int F_{x(x,y,z)} \mathrm{d}x + h(y,z) \\ \varphi'_y &= F_{y(x,y,z)} &\rightarrow \quad \varphi_y &= \int F_{y(x,y,z)} \mathrm{d}y + h(x,z) \\ \varphi'_z &= F_{z(x,y,z)} &\rightarrow \quad \varphi_z &= \int F_{z(x,y,z)} \mathrm{d}z + h(x,y) \end{aligned}$$

Aus diesen 3 Gleichungen setzt man $\varphi(x, y, z)$ zusammen. Überschneiden sich Funktion, werden sie nicht hinzugefügt.

z.B.: $\varphi_x = x^2y$ und $\varphi_y = x^2y + 2y$ ergeben: $\varphi(x, y) = x^2y + 2y + C$.

5.7.2 Richtungsableitung

Richtungsableitung:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_a = \frac{\operatorname{grad} f \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \tan \alpha}$$

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f'_x\dot{x} + f'_y\dot{y} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \underbrace{\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}}_{\operatorname{grad} f} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ \operatorname{grad} f \cdot \vec{a} \end{pmatrix}$$

Wenn der Winkel zur x-Achse gegeben ist für die Richtung:

$$\vec{e_a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Der Gradient steht im jeweiligen Punkt senkrecht zur Höhenlinie. Er zeigt in Richtung grössten Anstieg.
Die Falllinie zeigt in Richtung $-\operatorname{grad} f$.

Verschiedene Zusammenhänge mit $\operatorname{grad} f$:

$$\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f = f'^2_x + f'^2_y$$

$$\operatorname{grad} f \cdot \frac{\vec{\operatorname{grad}} f}{|\operatorname{grad} f|} = |\operatorname{grad} f|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

Kapitel 6

Fehlerfortpflanzung

6.1 Fehlerrechnung

Fehlerfortplanzung bei Funktionen mit 1 Variablen

$$y = f(x) \rightarrow \Delta y = |f'(x)|\Delta x$$

Fehlerrechnung bei Funktionen mit 2 Variablen.
Fehlerfortpflanzungsgesetz: Ändert x um Δx und y um Δy so ändert der Funktionswert z um:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Der maximale Fehler von $z = f(x, y)$ lautet:

$$\boxed{\Delta z = |f\prime_x(x_0, y_0)| \cdot \Delta x + |f\prime_y(x_0, y_0)| \cdot \Delta y}$$

$\Delta x \geqslant 0, \Delta y \geqslant 0$

Relativer Fehler: $\frac{\Delta z}{z} = \%$
Absoluter Fehler: $\Delta z = \% \cdot z$