Preface

这一系列的几篇文章 (预计 20 篇之内吧) 根据 Gilbert Strang 的 Introduction to Linear Algebra 5th Edition 对 Linear Algebra(线性代数) 和 Sheldon Axler 的 Linear Algebra Done Right(3rd Edition) 的一些知识，以及自身的学习经历进行梳理和复习。书里讲到的知识点，我会根据自己的知识进行补充，尽量让它们更加直白容易理解。这些知识对于控制理论的学习是基础性的。我们不要求对每个细节都牢牢记住，但要求熟悉每一个基本概念。在后续其他学科的学习中，我们会时常用到 linear algebra 的许多知识，特别是在线性系统的学习之中，到时候我们就会发现特意回顾它们的价值。文中会时不时出现中英文的词汇的交替使用，一来是为了让读者熟悉这些核心概念的英语，二来是笔者写作的一点习惯。

这里选用了 ElegantBook 作为 Latex 模板写一个短幅的快速复习教程。在此对模板开发团队表示感谢。笔者也不是数学专业出身，对这门学科的浅薄理解如果有误，请君不吝指教。转载请联系笔者，并且注明出处，谢谢。

邮箱：frankmsj94@gmail.com

三脚猫 Frank

2019 年 12 月 12 日

于 California, USA

第 1 章 认识向量 Introduction to Vectors

1.1 向量空间

向量 (**vector**) 是**向量空间** (**vector space**) 中的元素。首先简单回顾 vector space 的定义，或者也叫线性空间 (**linear space**) 的定义。给定一个域 F[1], F 上的向量空间 V 是一个集合 (set)，在集合中定义了两种二元运算 (binary operation)：向量加法 (vector addition) 和标量乘法 (scalar multiplication)。

向量加法 (Vector addition) $+ : V \times V \to V$ 也就是说 V 中任意两个元素在 $+$ 这个 map 作用下任然得到 V 中的元素。

标量乘法 (scalar multiplication) $\cdot : F \times V \to V$ 也就是说 F 中的一个元素与 V 中一个元素在 $\cdot$ 这个 map 作用下任然得到 V 中的元素。

同时这个集合 V 要满足 8 个公理才能称之为向量空间，这里不具体写出来了[2]。如果 F 是一个实数域，那么 V 就称之为实向量空间，也就是实线性空间。在 real vector space 中 n 元实数组就构成了一个向量，n 称为 vector space 的**维度** (**dimension**)，一般写成**列向量** (column vector) 的形式。Linear Algebra 就建立在这两种基本运算之上。任取 V 中两个元素 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$，我们根据定义结合两种运算，便引出了 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 两个向量的线性组合 (linear combination)：$c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.

如果 $c\mathbf{v}$ 可以图示为一条直线，那么 $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ 可以图示为一个平面，前提是 $\mathbf{w}$ 并不能由 $\mathbf{v}$ 表示。这就涉及到是否线性独立的问题了，我们以后会再提。

1.2 向量的点积、长度和夹角

有了向量空间和线性组合的概念，我们接下去介绍向量的**点积**、**长度**和**夹角**概念。在此之前首先让我们回顾什么是欧式空间，全称欧几里得空间 (**Euclidean Space**)。

欧式空间是我们生活的真实世界的一种抽象和高维的推广。我们生活在三维世界里，并且这也是一个实空间。在这个世界里距离，长度和角度都是可以用实数去度量的。对于正整数 n，任意 n 元实数组构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间[3]，我们通常用 $\mathbb{R}^n$ 来表示。此时这个向量空间或者线性空间中并没有定义两个元素

[1] 域 (**field**) 是一个可以定义加减乘除的代数结构 (**Algebraic structure**)

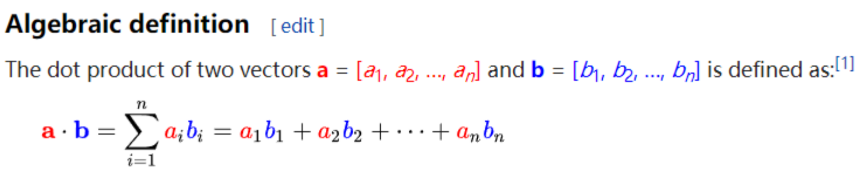
[2] 诸如向量加法结合律，交换律等等

[3] 我们可以通过向量空间的定义去验证

之间的距离，元素自身长度和元素夹角的概念。为了在 $\mathbb{R}^n$ 中能够实现这些，首先就引入了点积 (**dot product**) 的概念，它又被称为欧式空间上的标准内积 (**inner product**)。实向量空间中的点积被定义为一种运算，两个向量进行 dot product 就得到一个实数。把装备了这样一个标准内积或者点积的向量空间，称之为欧几里得空间，简称欧式空间。根据这个标准欧式内积，我们可以定义出向量长度，向量夹角和向量之间的距离。长度由内积诱导的范数（**norm**）来定义，夹角计算就是高中里常用的余弦角公式，以及距离则是由两个向量之差的诱导范数（**induced norm**）来定义的[4]。欧式空间装备了内积，由此天然地装备了范数和长度，于是它有多重身份：内积空间，赋范向量空间，度量空间以及希尔伯特空间的特例（是欧式空间在无穷维和复数域的推广）。

我们应当注意内积是点积的一种广义化，点积是 inner product 的一种，是在欧式空间中的特例，符合内积的所有定义。但是内积可以不在欧式空间上定义。

所以我们说向量空间中向量的点积帮助我们定义了向量的长度概念，即长度由下式计算，它是由标准内积诱导出来的范数：$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$. 这个长度值是自然而然得到的，因为有了点积的定义，我们自然可以通过两个向量自身进行 dot product 运算得到一个实数，我们就把这个实数作为一个向量长度的衡量。范数就是衡量长度的一个概念。这里的内积诱导范数是衡量向量长度的其中一种范数。[5]



Algebraic definition [edit]

The dot product of two vectors $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ and $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ is defined as:[1]

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

图 1.1: Figure from Wikipedia: Dot product

关于点积、长度和夹角有几点结论：如果点积结果为 0，则实际两个向量是互相正交的；单位长度向量指的就是其长度为 1，每个向量可以进行 normalization，除以自身的长度，进行单位化并且方向与原向量保持不变；两个单位向量的点积就是其夹角的余弦。这些大家可以自行验证，也比较简单。（最后一条由夹角公式可以显然得到）。

假设两个向量的夹角为 θ，它由余弦公式给出 (cosine formula):

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}$$

我们可以推出 Cauchy–Schwarz inequality 和三角不等式 (triangle inequality)，推导非常容易，在这里就省略了。

[4]关于范数的定义我们之后再讲，这里默认大家都已经学过了

[5]范数还有很多种，1-norm，2-norm，以及 p-norm，以后会提到

1.3 子空间、张成空间和有限维度空间

回顾**子空间 (subspace)** 的定义。Subspace 是 vector space 的一个子集 (subset)，并且它自己也是一个 vector space。既然 subspace 是一个 vector space，判断一个子集是否是 subspace 就看 addition 和 scaler multiplication 在其上是否封闭。作为向量空间，子空间必须包含零向量。

多个向量之间的线性组合在之前已经提过了，现在假设在一个向量空间 V 中有 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ 个向量，称为 a list of vectors，它们所有的线性组合构成的集合，我们称之为这个 list of vectors 的**张成空间 (span)**，记作 $\mathbf{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$。一组向量的 span 是包含这些向量的最小 subspace[6]。如果 $\text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = V$, 则称 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ spans V(张成了 V)。如果 V 中一组有限数量的向量能够 span V, 那么这个 V 空间就是**有限维度的 (finite- dimensional)**，简称有限维。否则就是**无限维的 (infinite-dimensional)**。

关于 span 和 finite dimension，在 Linear Algebra Done Right 一书中举了**多项式函数 (polynomial)** 的例子，我们一起来看看。这里我就不用 F 来代表一般域了，直接采用我们熟悉的实数域 $\mathbb{R}$。这里采用一个正式定义的格式[7]。

定义 1.1. 多项式函数

- 一个函数 (function), 记为 $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的多项式函数 (polynomial)，如果存在 $\{a_i\} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ 使得它具有如下形式：

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m \tag{1.1}$$

  并且对所有的 $z \in \mathbb{R}$ 成立
- $P(\mathbb{R})$ 是所有系数 $\{a_j\} \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$ 上的 polynomial 的集合

♣

有了 polynomial 的定义，我们可以定义其 degree: 最高幂次项的次数。在式 (1.1) 中 m 就是其 degree，只要 $a_m \neq 0$，同时所有拥有最高 m degree 的多项式集合我们记为 $P_m(\mathbb{R})$。我们下面简易证明 $P(\mathbb{R})$ 是一个向量空间 vector space。

证明 (Not completed) 这里我们只证明加法和数乘的封闭性，其他性质很容易证明。任取两个 polynomial: $p_m^1(z), p_n^2(z) \in P(\mathbb{R})$，它们有不同的 degree，分别为 m, n。它们相加的结果必然是一个 degree 为 m 或者 n 的 polynomial, 仍然属于 $P(\mathbb{R})$, 于是加法封闭得证。取之前的 $p_m^1(z)$, 令 λ 为 $\mathbb{R}$ 上一个数，则显然 $\lambda p_m^1(z)$ 仍然属于 $P(\mathbb{R})$[8]。

我们可以把 $P_m(\mathbb{R})$ 看成是由函数 $p_m(z) = z, p_m(z) = z^2, \ldots, p_m(z) = z^m$ 张成的向量空间，即 $P_m(\mathbb{R}) = \text{span}(z, z^2, \ldots, z^m)$, 这些函数作为这个向量空间的元素，它们

[6] 参见 Linear Algebra Done Right 的证明

[7] 参考同书的定义

[8] 需要注意的是，恒为 0 的 polynomial 拥有的 degree 为 $-\infty$, 所以它必然也是 $P(\mathbb{R})$ 的元素。从上面的证明我们看出 $P_m(\mathbb{R})$ 也是一个向量空间，于是它是 $P(\mathbb{R})$ 的一个 subspace.

的线性组合构成了这个向量空间中的所有向量。$P_m(\mathbb{R})$ 根据定义就是一个 finite-dimensional vector space，对任意 $m \in \mathbb{N}^+$。那么显然 $P(\mathbb{R})$ 是一个 infinite-dimensional vector space(通过 span 去证明)。

1.4 线性独立、基与维度

一组向量是**线性独立的 (linearly independent)**，当且仅当各向量的系数为 0 时的线性组合才为零向量。否则，如果其中一个向量可以由其他剩余的向量的非零线性组合来表示，它们就是**线性相关的 (linearly dependent)**。一组线性相关的向量 $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$，假设有一个向量 v_j 可以被其他向量的线性组合表示，那么 $\mathrm{span}(v_1, v_2, ..., v_m)$ 和去掉 v_j 后剩下向量组张成的空间是一样的。由此我们得到一个非常重要的结论：

命题 1.1

在一个有限维的向量空间中，一组线性独立的向量的个数总是小于或者等于张成该空间所需的最少向量的个数:

根据这个结论，我们可以马上得到另外一个结论

推论 1.1

一个有限维向量空间的子空间也是有限维的。

这个推论的证明用到了上面的命题。如果有一个属于子空间的向量并不在一组有限个数的线性独立的向量组的张成空间中，那么它必然可以和这组向量构成线性独立的向量组。重复这一过程，根据命题的结论，这个过程必然会终止。因为 vector space 是有限维的，那么构造的线性独立的向量数总是会小于等于张成它的向量数。于是 subspace 的每个元素最后必然会落入有限个向量的张成空间中，证明它就是有限维的。能够张成一个向量空间 V 的向量组的向量个数是没有上限的，根据我们之前的说法，如果有一个向量可以由其他的一组向量表示，那么这一组向量张成的空间并不会因为它的加入而改变。当我们重复步骤，去除多余的向量，最后剩下一组线性独立的向量，它们仍然能张成同一个向量空间 V，这是张成这个向量空间需要的最少个数的一组向量。我们把数量最小，同时也线性独立的向量组叫作这个向量空间 V 的**基 (basis)**[9]。

判断这组向量是不是 basis，就看是不是任何一个 V 中的向量都可以由这一组 basis 的 linear combination 构成。通过减少向量组中线性相关的向量，任何一个张成向量空间的向量组[10]都简化成一个 basis。这样的话，任何一个有限维向量

[9]Basis 是指这整一组向量，而并非一组向量中的单个向量。

[10]Linear Algebra Done Right 中把这个向量组叫 spanning list，list 中包含的向量的数量称为它的长度

空间，都可以找到一个有限长度的 spanning list 来张成它，所以它必然可以通过简化得到一个 basis，即**任何有限维 vector space 拥有至少一个 basis**。同理，有限维向量空间 V 中任何一组线性独立的向量组都可以通过扩展的方式，从而转化为一个 basis。方法很简单，只要把这组向量组 $\{u_i\}$ 和 V 的一个 basis $\{w_j\}$ 放在一起，那么一定有 $V = \text{span}(\{u_i\}, \{w_j\})$。那么不断减少线性相关的向量，我们就可以简化出一个 basis 来。

现在我们正式来定义一下向量空间**维度 (dimension)** 的概念。我们知道一个向量空间 V 的任意两个 basis 都有相同的长度，也就是组成 basis 的向量个数都是相等的[11]。我们用向量空间的任意一个 basis 的长度来定义该空间的维度，记作 $\dim V$。V 的任一子空间 U 的维度总有 $\dim U \leq \dim V$. 假设 $\dim V = n$，那么 V 中任意一组拥有 n 个线性独立的向量的向量组是 V 的一个 basis。V 的任意一个长度为 n 的 spanning list 也是它的一个 basis。这两条结论根据我们前面的讨论是非常容易验证的。

Reference

- 1.1、1.2 节主要参考了 Gilbert Strang 的 Introduction to Linear Algebra(5th Edition) 第一章第一、第二节。其中向量空间的定义，欧式空间的定义参考了 Wikipedia articles: Vector space; Euclidean space
- 1.3 和 1.4 节参考了 Sheldon Axler 的 Linear Algebra Done Right(3rd Edition) 第一章与第二章，涵盖了这两章大部分核心概念。

[11]这个结论的证明用到命题1.1