Abordemos el problema por Fuerza Bruta o Búsqueda Exhaustiva primeramente:

Para un N dado sea S = {1, 2, 3, …, 2N}. Notemos que si escogemos N números de S para la primera fila entonces los N restantes quedan para la segunda y ambas filas están en orden creciente, solo faltaría chequear que las columnas lo estén así como las restricciones de los conjuntos A y B. Por lo que hay $\binom{2N}{N}$ configuraciones a chequear, las cuales podemos generar con las cadenas binarias de longitud 2N que tengan N unos (C[x] = 1 si x va para la primera fila, C[x] = 0 si x se ubica en la segunda) y comenzado con $\underbrace{11..1}_{N}\underbrace{00..0}_{N}$ haciéndole `prev_permutation()` las examinaremos todas hasta llegar a $\underbrace{00..0}_{N}\underbrace{11..1}_{N}$.

```
int TABLAS[2][MAXN], f1 = 0, f2 = 0;
int sol = 0;
string C = string(N, '1') + string(N, '0');
do{
    for (int x = 0 ; x < 2 * N ; x++)
        if (C[x] == '1')
            TABLAS[0][++f1] = x + 1;
        else
            TABLAS[1][++f2] = x + 1;
    if (ok(TABLAS))
        sol++;
}while(prev_permutation(C.begin(), C.end()));
```

En la implementación anterior omitimos la función `ok()` que retorna `true` si la configuración en TABLAS es correcta según las restricciones del problema o `false` en caso contrario. Esta solución da en tiempo para N <= 12.

Observemos ahora que para cualquier columna x se cumpla que los dos elementos de la x-ésima columna estén en orden creciente entonces el x-ésimo 1 debe estar antes del x-ésimo 0. Ejemplo la cadena binaria “100110” que corresponde con configuración:

1	4	5
2	3	6

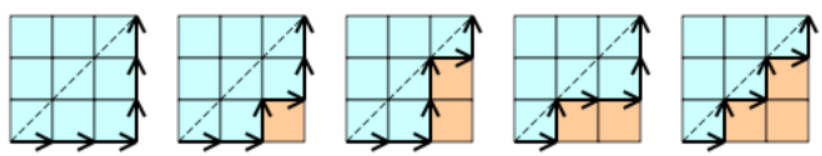
No es válida. Luego esto nos dice que solo debemos examinar las cadenas binarias de longitud 2N con N unos donde para todo prefijo de las mismas la cantidad de 1s sea mayor o igual a la cantidad de 0s. Si establecemos la correspondencia 1 con ‘(’ y 0 con ‘)’ entonces las configuraciones que estamos buscando son las parentizaciones balanceadas con algunos símbolos ‘(’s fijos [elementos en el conjunto A] y algunos ‘)’s fijos [elementos en el conjunto B]. La biyección se hace clara puesto que una cadena de paréntesis es balanceada sí y solo sí la cantidad de ‘(’s [1s] es igual a la cantidad de ‘)’s [1s] y para todo prefijo la cantidad de abiertos [1s] es mayor o igual a la cantidad de cerrados [0s]. Veamos un ejemplo:

N = 3; A = {3}; B = {}

Cadena binaria	Tablas	Parentización
111000	1 2 3 4 5 6	((( )))
101100	1 3 4 2 5 6	( ) (( ))
101010	1 3 5 2 4 6	( ) ( ) ( )

O sea, el problema se reduce a encontrar cuántas parentizaciones balanceadas tienen este formato: ? ? (? ? ?

Para resolver el problema de contar las parentizaciones balanceadas de N parejas de ()s observemos que son iguales a la cantidad de caminos en una matriz cuadrada de (N+1)x(N+1) de la celda 1, 1 a la N + 1, N + 1 donde solo está permitido a cada paso ir hacia abajo [asociado a ( ] o ir a la derecha [asociado a)] y todo el tiempo estemos en el camino por debajo de la diagonal principal o en ella para asegurar la condición de que en todo momento la cantidad de cerrados no sobrepase la cantidad de abiertos.



Los elementos fijos de A y de B nos dicen que en algunas casillas solo podrá llegarse o bien de arriba o bien de la izquierda respectivamente. Dicho esto solo queda elaborar la definición por Programación Dinámica para el conteo:

P[x] = ‘(’ si x pertenece a A; P[x] = ‘)’ si x pertenece a B en otro caso P[x] = ‘?’.

dp(i, j) = cantidad de caminos de 1,1 a i,j que cumplen las condiciones anteriores.

```
dp(1, 1) = 1
Para i en [2..N+1]:
        Para j en [1..i]:
              cant = i – 1 + j – 1
              dp(i, j) = dp(i, j – 1)                 si i == j o P[cant] == ‘)’
              dp(i, j) = dp(i – 1, j)                 si P[cant] == ‘(’
              dp(i, j) = dp(i – 1, j) + dp(i, j – 1)  si P[cant] == ‘?’
Sol = dp(N + 1, N + 1)
```

La complejidad temporal y espacial esta solución es O(N^2).

Habilidades requeridas: técnicas de conteo (biyección), programación dinámica
Actividades propuestas: 2260 - Dick Words (COJ). Investigar sobre los Números de Catalan.