AMPLIACIÓN DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Pedro Miranda Menéndez

Resumen

En este tema estudiaremos tres algoritmos en los que se profundiza en el método simplex. En primer lugar veremos el método simplex revisado, en el que se estudian posibles reducciones en la complejidad del algoritmo del simplex. A continuación se trata el método simplex para variables acotadas, en el que se adapta el simplex para no tener que añadir restricciones debidas a las cotas de las variables. Finalmente, se estudia el algoritmo primal-dual, que sigue la misma filosofía que el algoritmo dual que se vio en la asignatura de Investigación Operativa.

1. Método simplex revisado

En este método se busca reducir la complejidad del simplex, de forma que se almacene y se realicen estrictamente las operaciones que son necesarias para hallar una nueva solución básica factible y comprobar si esta solución es óptima.

Sea entonces el problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{array}{rll} \text{mín} & \vec{c}^t\vec{x} & \\ \text{sujeto a} & A\vec{x} & = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} & \end{array}$$

en el que ya hemos introducido las variables de holgura para tener igualdades. Como en el simplex, suponemos que tenemos n variables (originales y de holgura) y m restricciones, con $m \leq n$; y suponemos que $rg(A) = m$.

Vamos entonces a revisar las operaciones que se realizan en una iteración del simplex. Consideremos una solución básica factible de este problema donde las variables básicas están en $\vec{x}_B$ y las variables no básicas en $\vec{x}_N$. Las variables básicas determinan una submatriz B dentro de A de forma que descomponemos A en (B, N); esto también define una descomposición sobre $\vec{c}$ en $\vec{c}_B$ y $\vec{c}_N$ correspondientes a los valores de $\vec{c}$ de $\vec{x}_B$ y $\vec{x}_N$, respectivamente. Sea finalmente $\vec{z}_N := \vec{c}_B^t B^{-1}N$. Con todo esto podemos escribir la tabla del simplex de esta solución básica factible, que vendría dada por

$\vec{x}_B^t$	$\vec{x}_N^t$	z
$\vec{0}^t$	$\vec{z}_N^t - \vec{c}_N^t$	$\vec{c}_B^t B^{-1}\vec{b}$
Id	$B^{-1}N$	$B^{-1}\vec{b}$

Para obtener esta tabla es necesario calcular todos los vectores $B^{-1}\vec{a}_j$ para todas las variables no básicas x_j y así poder determinar $B^{-1}N$. De la misma forma, es necesario computar $B^{-1}\vec{b}$, que nos da los valores de las variables básicas. Una vez hallados estos valores, hay que ver si la solución es óptima, para lo que hay que calcular los valores de la primera fila $\vec{z}_N^t - \vec{c}_N$ y finalmente hallar el valor de la función objetivo para esta solución, que sería $\vec{c}_B^t B^{-1}\vec{b}$.

Consideremos una solución básica factible cuyos coeficientes en las restricciones constituyen la matriz B invertible. Lo primero que tenemos que estudiar es si esta solución es óptima. Por lo visto en el simplex, para ello se hallan los coeficientes $z_i - c_i = \vec{c}_B^t B^{-1}\vec{a}_i - c_i$ para aquellas variables x_i que no son básicas.

Si para todas las variables x_i no básicas se tiene $\vec{c}_B^t B^{-1}\vec{a}_i - c_i \leq 0$, entonces la solución es óptima y ya hemos terminado. Y no se necesita conocer los valores de $B^{-1}N$, que el simplex calcula por defecto.

Supongamos entonces que tenemos alguna variable no básica, digamos x_i, para la que $\vec{c}_B^t B^{-1}\vec{a}_i - c_i > 0$; entonces la base no es óptima y tenemos que iterar. Según se ha visto en el simplex, la variable x_i debe entrar en la base y tenemos que determinar qué variable sale de la misma. Para ello, tenemos que calcular en primer lugar el vector $\vec{y}_i = B^{-1}\vec{a}_i$, pero nótese que no se usan los vectores de las demás variables no básicas, que nuevamente el simplex calcula por defecto.

Si $\vec{y} \leq \vec{0}$, entonces tenemos una solución no acotada y el problema ha terminado. Si no es así, entonces la variable que abandona la base es una de las variables en las que se alcanza el mínimo

$$\text{mín}\left\{\frac{(B^{-1}\vec{b})_j}{y_j} : y_j > 0\right\}.$$

Y una vez determinadas la variable que entra y la que sale hay que calcular la nueva tabla del simplex, que volverá a calcular una gran cantidad de información que finalmente no se va a utilizar.

Vamos entonces a observar qué necesitamos para realizar una iteración. En primer lugar, nótese que en todo el proceso está omnipresente la matriz B, o más concretamente, B^{-1}.

Conocida B^{-1}, tenemos que calcular $\vec{c}_B^t B^{-1}\vec{a}_i - c_i$ para las variables no básicas. En este caso, tenemos en común el valor $\vec{w}^t := \vec{c}_B^t B^{-1}$. De esta forma, el valor a calcular es $\vec{w}^t\vec{a}_i - c_i$. Si para todas las variables x_i no básicas se tiene que este valor es no positivo, entonces la solución es óptima y ya hemos terminado. En otro caso, tendremos una variable x_i para la que el correspondiente valor es positivo y que será la variable candidata a entrar.

Fijada la variable x_i, tenemos que determinar la variable que sale. Y para ellos necesitamos conocer $\vec{y}_i = B^{-1}\vec{a}_i$ y $\hat{b} := B^{-1}\vec{b}$. Si $\vec{y}_i \leq \vec{0}$, entonces tenemos solución no acotada. En caso contrario podemos determinar la variable que sale de la base. Y una vez determinada la variable que sale tenemos que determinar los datos para poder realizar la siguiente iteración.

En el método simplex revisado se parte de una solución básica factible inicial y se almacena en una tabla la siguiente información:

$$\begin{array}{c|c} \vec{w}^t & \vec{c}_B^t\hat{b} \\ \hline B^{-1} & \hat{b} \end{array}$$

Luego añadiremos una columna adicional para realizar la operación de pivotaje si fuese necesario. En esta columna almacenaremos $\vec{w}^t\vec{a}_i - c_i$ y el vector $\vec{y}_i$. Nótese que para la siguiente iteración sólo necesitamos la nueva matriz $\hat{B}^{-1}, \hat{B}^{-1}\vec{b}, \hat{w} := \vec{c}^{\,t}_{\hat{B}}\hat{B}^{-1}$, y estos datos se obtienen al pivotar sobre el elemento pivotal (que se almacena en la columna adicional) tal y como se vio en el simplex; en este sentido, el método simplex revisado tiene la ventaja adicional sobre el simplex de que siempre conocemos la inversa de la matriz básica; recuérdese que en un problema general de programación lineal, esta matriz y el vector $\vec{w}$ aparecían en las columnas correspondientes a las variables de holgura, pero si no había holguras éste era un problema complicado.

Veamos un ejemplo del funcionamiento del método.

Ejemplo 1. *Sea el problema*

$$
\begin{array}{lccccccl}
\text{mín} & -x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & -4x_5 & +2x_6 & \\
s.a & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & \leq 6 \\
 & 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & & & \leq 4 \\
 & & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & +x_6 & \leq 4 \\
\multicolumn{8}{c}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Introducimos las variables de holgura y consideramos como base inicial estas variables. De esta forma $B = Id$ y $B^{-1} = Id$. Además, $\vec{w} = \vec{c}^{\,t}_B B^{-1} = \vec{0}^t, \hat{b} = B^{-1}\vec{b} = \vec{b}$ y $\vec{c}^{\,t}_B B^{-1}\vec{b} = 0$. Todos estos datos los almacenamos en una tabla como sigue:

	0	0	0	0
h_1	1	0	0	6
h_2	0	1	0	4
h_3	0	0	1	4

Consideremos ahora las variables no básicas y para cada una de ellas calculamos los valores $\vec{w}^t\vec{a}_i - c_i$. Se obtiene entonces:

$$\vec{w}^t\vec{a}_1 - c_1 = 1,\ \vec{w}^t\vec{a}_2 - c_2 = 2,\ \vec{w}^t\vec{a}_3 - c_3 = -1,\ \vec{w}^t\vec{a}_4 - c_4 = 1,\ \vec{w}^t\vec{a}_5 - c_5 = 4,\ \vec{w}^t\vec{a}_6 - c_6 = -2.$$

Entonces la solución no es óptima. Cogemos una de las variables que toman valor positivo, por ejemplo x_5, que es la que tiene el valor más positivo. Entonces,

$$\vec{y}_5 = B^{-1}\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y la añadimos a la tabla anterior como una columna adicional junto con $\vec{w}^t\vec{a}_5 - c_5$. Operando como en el simplex vemos que la variable que abandona la base es h_3, pues es donde se minimiza $\{\frac{\hat{b}_i}{y_i} : y_i > 0\}$. Ahora pivotamos sobre ese valor.

	0	0	0	0	4
h_1	1	0	0	6	1
h_2	0	1	0	4	0
h_3	0	0	1	4	2

	0	0	-2	-8
h_1	1	0	-1/2	4
h_2	0	1	0	4
x_5	0	0	1/2	2

Consideramos nuevamente las variables no básicas y calculamos $\vec{w}^t\vec{a}_i - c_i$. Se obtiene entonces:

$$\vec{w}^t\vec{a}_1 - c_1 = 1,\ \vec{w}^t\vec{a}_2 - c_2 = 2,\ \vec{w}^t\vec{a}_3 - c_3 = -3,\ \vec{w}^t\vec{a}_4 - c_4 = -1,\ \vec{w}^t\vec{a}_6 - c_6 = -4,\ \vec{w}^t\vec{e}_3 - 0 = -2.$$

Nótese que este último valor no sería necesario porque h_3 ha salido de la base en la iteración anterior y entonces no puede volver a entrar en la base en esta iteración. La solución no es óptima. Cogemos una de las variables que toman valor positivo, por ejemplo x_2, que es la que tiene el valor más positivo. Entonces,

$$\vec{y}_2 = B^{-1}\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La variable que abandona la base es h_1. Pivotando se obtiene

	0	0	0	0	2
h_1	1	0	-1/2	4	1
h_2	0	1	0	4	-1
x_5	0	0	1/2	2	0

	-2	0	-1	-16
x_2	1	0	-1/2	4
h_2	1	1	-1/2	8
x_5	0	0	1/2	2

Repitiendo el proceso se obtiene:

$$\vec{w}^t\vec{a}_1 - c_1 = -1,\ \vec{w}^t\vec{a}_3 - c_3 = -4,\ \vec{w}^t\vec{a}_4 - c_4 = -2,\ \vec{w}^t\vec{a}_6 - c_6 = -5,\ \vec{w}^t\vec{e}_1 - 0 = -2,\ \vec{w}^t\vec{e}_3 - 0 = -1.$$

Luego la solución ya es óptima. Esta solución es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 2,\ x_6 = 0,\ z = -16.$$

RESUMEN DEL MÉTODO SIMPLEX REVISADO

1. Obtener una solución básica factible inicial, para la que se almacena en una tabla $B^{-1}, \vec{w}^t = \vec{c}_B^t B^{-1}, \vec{w}^t\vec{b}, B^{-1}\vec{b}$ de la forma

$$\begin{array}{c|c} \vec{w}^t & \vec{w}^t\vec{b} \\ \hline B^{-1} & B^{-1}\vec{b} =: \hat{b} \end{array}$$

2. Para cada variable no básica x_j se calcula $\vec{w}^t\vec{a}_j - c_j$.
   a) Si todos estos valores son negativos o nulos, entonces la solución es óptima. FIN.
   b) En caso contrario, ir al Paso 3.
3. Elegir una variable no básica x_j para la que $\vec{w}^t\vec{a}_j - c_j > 0$. Se calcula $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$.
   a) Si $\vec{y}_j \leq \vec{0}$, tenemos una solución no acotada. FIN.
   b) En caso contrario, pasar al Paso 4.
4. Se añade una columna a la tabla de la forma

$$\begin{array}{c} \vec{w}^t\vec{a}_j - c_j \\ \hline \vec{y}_j \end{array}$$

   Se determina la variable que sale de la base, que se corresponde con una variable para la que se minimiza

$$\left\{ \frac{\hat{b}_k}{y_k} : y_k > 0 \right\}.$$

   El correspodiente valor y_j es el pivote.
5. Pivotar.
6. Volver al Paso 2.

2. Método simplex para variables acotadas

En ocasiones tenemos problemas de Programación Lineal en el que las variables están acotadas superiormente, inferiormente o bien superior e inferiormente. Estos problemas pueden ser resueltos mediante el método simplex sin más que tomar esas cotas como restricciones; sin embargo, esto se traduce en que se aumenta el número de restricciones y, como hay que añadir variables de holgura para estas restricciones, aumenta también el número de variables a manejar. Esto implica un aumento de la complejidad[1]. El método simplex para variables acotadas propone una alternativa para evitar esta situación.

Consideremos entonces el problema [P]

[1] En realidad, si la variable x_i está acotada inferiormente por un valor l_i, el problema puede adaptarse a la forma general del simplex, es decir, $x_i \geq 0$ sin más que considerar el cambio de variable $x_i' = x_i - l_i$. Por ello, estas restricciones pueden tratarse de forma distinta a la que veremos en esta sección. Por otra parte, si x_i tiene una cota superior u_i, pero no está acotada inferiormente, podemos hacer el cambio $x_i' = -x_i$, con lo que x_i' está acotada inferiormente y podemos aplicar lo dicho anteriormente. La situación que no se puede evitar es aquella en la que la variable tiene tanto una cota superior como una cota inferior, $l_i \leq x_i \leq u_i$. De todas formas, el desarrollo matemático es similar en las tres situaciones.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{mín} & \vec{c}^t\vec{x} & \\
s.a & A\vec{x} & = \vec{b} \\
 & \vec{l} \leq \vec{x} \leq \vec{u} &
\end{array}
$$

en la que la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $m \leq n$ y $rg(A) = m$. Podría ocurrir que algunas de las variables no tuviesen cota superior (es lo que pasaría por ejemplo con las variables de holgura) o cota inferior; si x_i no está acotado superiormente hacemos $u_i = \infty$ y si no está acotado inferiormente hacemos $l_i = -\infty$.

Lo que hace el método simplex para variables acotadas es adaptar el método simplex de forma que no sea necesario incluir las restricciones de las cotas como restricciones en las tablas del simplex. Para ello desarrollaremos el método simplex teniendo en cuenta estas cotas.

Primeramente, tenemos que trasladar el concepto de solución básica factible y comprobar que coincide con los puntos extremos del poliedro convexo de la región factible.

Definition 1. *Dada $\vec{x}$, se dice que es una* **solución básica factible** *de [P] si puede descomponerse en tres partes $\vec{x}^t = (\vec{x}^t_B, \vec{x}^t_{N_l}, \vec{x}^t_{N_u})$ de forma que B es una submatriz cuadrada de A de orden m inversible y*

- *Si i es tal que x_i está en $\vec{x}_{N_l}$, entonces $x_i = l_i$.*
- *Si i es tal que x_i está en $\vec{x}_{N_u}$, entonces $x_i = u_i$.*
- *$\vec{x}_B$, que es la única solución del sistema*

$$B\vec{x}_B = \vec{B} - N_l\vec{l}_{N_l} - N_u\vec{u}_{N_u},$$

además satisface que si i es tal que x_i está en $\vec{x}_B$, entonces $l_i \leq x_i \leq u_i$.

Si alguna coordenada de $\vec{x}_B$ alcanza la correspondiente cota superior o inferior, diremos que tenemos una **solución básica factible degenerada**.

Nota 1. *No es posible asignar a x_i los valores $+\infty$ o $-\infty$.*

Veamos ahora el Teorema Fundamental de la Programación Lineal adaptado a [P].

Teorema 1. *Dado un problema de programación lineal [P] en la forma anterior, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con $rg(A) = m$, se tiene:*

1. *Si hay una solución factible, entonces existe una solución básica factible.*
2. *Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución básica factible que es óptima para el problema.*

Demostración:

1. Sea $A \equiv (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ y sea $(x_1, ..., x_n)$ una solución factible. Entonces, por definición de factibilidad,

$$\vec{a}_1 x_1 + ... + \vec{a}_n x_n = \vec{b}.$$

Supongamos que exactamente p de las variables de decisión toman valores distintos de las cotas superiores e inferiores en esta solución factible y por comodidad supongamos que son las p primeras. Supongamos también por comodidad que las variables $x_{p+1}, ..., x_{p+q}$ alcanzan su cota inferior y que las variables $x_{p+q+1}, ..., x_n$ alcanzan su cota superior. Entonces,

$$\vec{a}_1 x_1 + ... + \vec{a}_p x_p = \vec{b} - \vec{a}_{p+1} l_{p+1} - ... - \vec{a}_{p+q} l_{p+q} - \vec{a}_{p+q+1} u_{p++q1} - ... - \vec{a}_n u_n.$$

Tenemos ahora dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos que $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_p$ son linealmente independientes. Como $rg(A) = m$, necesariamente $p \leq m$. Si $p = m$, entonces $\vec{x}$ cumple la definición de S.B.F. y el resultado es cierto.

  Supongamos entonces que $p < m$. Como $rg(A) = m$, entonces existen $m - p$ vectores columna en $\vec{a}_{i_1}, ..., \vec{a}_{i_{m-p}}$, de forma que unidos a $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_p$ forman un sistema de m vectores linealmente independientes. Asignando a estas coordenadas el valor l_i o u_i se obtiene que $\vec{x}$ es una S.B.F. degenerada y el resultado es cierto.

- **Caso 2:** Supongamos que $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_p$ son linealmente dependientes. Entonces existen $y_1, ..., y_p$ valores reales no todos nulos tales que

  $$\vec{a}_1 y_1 + ... + \vec{a}_p y_p = \vec{0}.$$

  Además, podemos suponer que alguno de los y_i es positivo, pues si todos fueran negativos bastaría multiplicar lo anterior por -1. Entonces, para todo λ escalar se tiene

  $$\vec{a}_1(x_1 - \lambda y_1) + ... + \vec{a}_p(x_p - \lambda y_p) = \vec{b} - \vec{a}_{p+1} l_{p+1} - ... - \vec{a}_{p+q} l_{p+q} - \vec{a}_{p+q+1} u_{p++q1} - ... - \vec{a}_n u_n.$$

  De esta forma, si definimos $\vec{y}^t := (y_1, ..., y_p, 0, ..., 0)$, entonces $\vec{x} - \lambda \vec{y}$ es solución del sistema $A\vec{z} = \vec{b}$. A medida que λ crece los valores de las variables de decisión $x_1, ..., x_p$ crecen, decrecen o permanecen inmutables, según el correspondiente valor del vector $\vec{y}$ sea negativo, positivo o nulo, respectivamente.

  Como existe i tal que $y_i > 0$, se tiene que $x_i - \lambda y_i$ decrece al crecer λ. Sea λ_1 dado por

  $$\lambda_1 := \text{mín} \left\{ \frac{x_i - l_i}{y_i} \ : \ y_i > 0 \right\}.$$

  Sea ahora λ_2 dado por

  $$\lambda_2 := \text{mín} \left\{ \frac{u_i - x_i}{y_i} \ : \ y_i < 0 \right\}.$$

Nótese que λ_2 podría no existir ya que podría ser que no hubiese valores $y_i < 0$; en este caso le asignamos el valor ∞. El que sí toma siempre un valor positivo es λ_1. Se define $\lambda_0 = \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Entonces se tiene que $\vec{x} - \lambda_0\vec{y}$ es una solución factible del problema, que además tiene a lo sumo $p-1$ valores x_i tales que $l_i < x_i < u_i$. Reiterando este proceso se llega a una solución factible en la que las columnas de A correspondientes a las variables de decisión con valor diferente de las cotas son linealmente independientes (en el caso límite llegamos a que todas las variables toman los valores de las cotas), con lo que podemos aplicar el Caso 1 y el resultado es cierto.

2. Sea $\vec{x}$ una solución factible óptima y supongamos que exactamente p de las variables de decisión toman valores distintos de las cotas superiores e inferiores en esta solución factible y por comodidad supongamos que son las p primeras. Supongamos también por comodidad que las variables $x_{p+1}, ..., x_{p+q}$ alcanzan su cota inferior y que las variables $x_{p+q+1}, ..., x_n$ alcanzan su cota superior. Tenemos dos casos:

   - **Caso 1:** Supongamos que $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_p$ son linealmente independientes. Entonces, por lo visto en el punto anterior, $\vec{x}$ es una S.B.F. y el resultado es cierto.
   - **Caso 2:** Supongamos que $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_p$ son linealmente dependientes. Entonces, con la misma notación que en el punto anterior, se tiene que $\vec{x} - \lambda_0\vec{y}$ es una solución factible del problema, que además tiene $p-1$ valores que no toman los valores de las cotas. Veamos ahora que esta solución también es óptima. El valor de la función objetivo en función de λ es

     $$\vec{c}^t\vec{x} - \lambda\vec{c}^t\vec{y}.$$

     Entonces, para valores suficientemente pequeños en valor absoluto de λ, se tiene que $\vec{l} \leq \vec{x} - \lambda\vec{y} \leq \vec{u}$. Si fuese $\vec{c}^t\vec{y} \neq 0$, podríamos tomar una solución mejor que la óptima, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $\vec{c}^t\vec{y} = 0$ y la solución $\vec{x} - \lambda_0\vec{y}$ es una solución factible óptima.

     Reiterando este proceso tal y como se hizo en el primer punto se llega a una solución factible óptima en la que las columnas de A correspondientes a las variables de decisión con valor diferente de las cotas son linealmente independientes, con lo que podemos aplicar el Caso 1 y el resultado es cierto. □

Veamos ahora que el conjunto de soluciones básicas factibles así definidas coincide con el conjunto de puntos extremos del poliedro de soluciones factibles.

Teorema 2. *(Equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas factibles) Sea un problema de programación lineal con variables acotadas en el que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con $rg(A) = m$ y sea $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Sea K el politopo definido por los puntos en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen*

$$A\vec{x} = \vec{b}, \ \vec{l} \leq \vec{x} \leq \vec{u}.$$

Entonces, un punto $\vec{x}$ es un punto extremo que K si y sólo si $\vec{x}$ es una solución básica factible tal y como se definió anteriormente.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que $\vec{x}$ es un punto extremo de K y que las componentes distintas del valor de las cotas superior o inferior de $\vec{x}$ son las k primeras; supongamos que de la coordenada $k+1$ a la coordenada p toman el valor de la cota inferior y que de la coordenada $p+1$ en adelante toman el valor de la cota superior. Entonces se tiene que

$$x_1\vec{a}_1 + ... + x_k\vec{a}_k = \vec{b} - \vec{a}_{k+1}l_{k+1} - ... - \vec{a}_p l_p - \vec{a}_{p+1}u_{k+1} - ... - \vec{a}_n u_n.$$

Para demostrar que $\vec{x}$ es una S.B.F. debemos demostrar que $\{\vec{a_1}, ..., \vec{a}_k\}$ es un sistema de vectores l.i.; supongamos que no lo es. Entonces, existen $y_1, ..., y_k$ no todos nulos tal que

$$y_1\vec{a}_1 + ... + y_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Definimos $\vec{y}^t = (y_1, ..., y_k, 0, ..., 0)$. Entonces, como $x_i > l_i, x_i < u_i, i = 1, ..., k$, se tiene que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, $\vec{x} - \lambda\vec{y} \geq \vec{l}, \vec{x} - \lambda\vec{y} \leq \vec{u},\ \vec{x} + \lambda\vec{y} \geq \vec{l}, \vec{x} - \lambda\vec{y} \leq \vec{u}$. Pero entonces hemos obtenido dos puntos factibles tales que

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \lambda\vec{y}) + \frac{1}{2}(\vec{x} + \lambda\vec{y}),$$

lo que contradice que $\vec{x}$ sea un punto extremo.

$\Leftarrow$) Sea $\vec{x}^t = (x_1, ..., x_m, l_{m+1}, ..., l_p, u_{p+1}, ..., u_n)$ una S.B.F.; entonces se verifica que

$$x_1\vec{a}_1 + ... + x_m\vec{a}_m = \vec{b} - \vec{a}_{m+1}l_{m+1} - ... - \vec{a}_p l_p - \vec{a}_{p+1}u_{k+1} - ... - \vec{a}_n u_n,$$

y además $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m\}$ son l.i., con lo que $(x_1, ..., x_m)$ es la única solución del sistema. Supongamos que existen $\vec{y}, \vec{z} \in K$ y $0 < \alpha < 1$ tales que

$$\vec{x} = \alpha\vec{y} + (1-\alpha)\vec{z}.$$

Como están en K, necesariamente $\vec{y} \geq \vec{l}, \vec{z} \geq \vec{l}, \vec{y} \leq \vec{u}, \vec{z} \leq \vec{u}$. Esto implica que las últimas $n-m$ coordenadas de $\vec{y}$ y $\vec{z}$ coinciden con las de $\vec{x}$. Además, debe cumplirse que

$$y_1\vec{a}_1 + ... + y_m\vec{a}_m = \vec{b} - \vec{a}_{m+1}l_{m+1} - ... - \vec{a}_p l_p - -\vec{a}_{p+1}u_{k+1} - ... - \vec{a}_n u_n,$$
$$z_1\vec{a}_1 + ... + z_m\vec{a}_m = \vec{b} - \vec{a}_{m+1}l_{m+1} - ... - \vec{a}_p l_p - -\vec{a}_{p+1}u_{k+1} - ... - \vec{a}_n u_n.$$

Como $(x_1, ..., x_m)$ es la única solución del sistema, esto implica que $\vec{x} = \vec{y} = \vec{z}$, y así $\vec{x}$ es un punto extremo de K. □

El método simplex para variables acotadas es una adaptación del método simplex en el que en cada iteración se pasa de una S.B.F. a otra S.B.F. mejor. La filosofía del método es muy similar a la del simplex.

Consideremos el sistema:

$$\begin{array}{rcl} z - c_1x_1 - ... - c_nx_n & = & 0 \\ \vec{a}_1x_1 + ... + \vec{a}_nx_n & = & \vec{b} \end{array}$$

Sea una S.B.F. inicial y construyamos la tabla del simplex correspondiente. Suponiendo para aligerar la notación que las variables básicas son $x_1, ..., x_m$, que las variables

$x_{m+1}, ..., x_p$ toman su cota inferior y que $x_{p+1}, ..., x_n$ toman su cota superior. Definimos las variables

$$x'_i = x_i - l_i, i = k+1, ..., p, \;\; x'_i = u_i - x_i, i = p+1, ..., n.$$

Aquí, $x'_i, i = m+1, ..., p$ representa lo que aumentamos la variable x_i respecto de su cota inferior (que actualmente es 0) y $x'_i, i = p+1, ..., n$ representa lo que disminuimos la variable x_i de su cota superior (que en la solución actual también es 0). De esta manera, sustituyendo $x_i, i = m+1, ..., n$ por su correspondiente valor en función de las variables x'_i se obtiene:

$$\begin{aligned} z - c_1x_1 - ... - c_mx_m - c_{m+1}(x'_{m+1} + l_{m+1}) - ... - c_p(l_p + x'_p) & \\ -c_{p+1}(u_{p+1} - x'_{p+1}) - ... - c_n(u_n - x'_n) &= 0 \\ \vec{a}_1x_1 + ... + \vec{a}_mx_m + \vec{a}_{m+1}(x'_{m+1} + l_{m+1}) + ... + \vec{a}_p(l_p + x'_p) & \\ +\vec{a}_{p+1}(u_{m+1} - x'_{m+1}) + ... + \vec{a}_n(u_n - x'_n) &= \vec{b} \end{aligned}$$

Y tomando como nuevas variables las $x_i, i = 1, ..., m$ y $x'_i, i = m+1, ..., n$ se tiene

$$z - c_1x_1 - ... - c_mx_m - c_{m+1}x'_{m+1} - ... - c_px'_p + c_{p+1}x'_{p+1} ... + c_nx'_n = \\ c_{m+1}l_{m+1} + ... + c_pl_p + c_{p+1}u_{p+1} + ... + c_nu_n$$

$$\vec{a}_1x_1 + ... + \vec{a}_mx_m + \vec{a}_{m+1}x'_{m+1} + ... + \vec{a}_px'_p - \vec{a}_{p+1}x'_{m+1} - ... - \vec{a}_nx'_n = \\ \vec{b} - \vec{a}_{m+1}l_{m+1} - ... - \vec{a}_pl_p - \vec{a}_{p+1}u_{m+1} - ... - \vec{a}_nu_n.$$

Usaremos la notación

$$\begin{aligned} \hat{z} &:= c_{m+1}l_{m+1} + ... + c_pl_p + c_{p+1}u_{p+1} + ... + c_nu_n \\ \hat{b} &:= \vec{b} - \vec{a}_{m+1}l_{m+1} - ... - \vec{a}_pl_p - \vec{a}_{p+1}u_{m+1} - ... - \vec{a}_nu_n. \end{aligned}$$

Consideremos primeramente las restricciones. Siguiendo el método simplex, tenemos que poner este sistema en la forma de eliminación de Gauss para las variables básicas; y esto se consigue multiplicando por B^{-1}. Entonces se obtiene

$$Id\vec{x}_B + B^{-1}N_l\vec{x}'_l - B^{-1}N_u\vec{x}'_u = B^{-1}\hat{b}.$$

Nos queda ahora calcular la primera fila de la tabla del simplex. Este valor es 0 para las variables básicas, y proviene de sustituir x_i en la primera ecuación por su valor en el sistema de ecuaciones en forma de eliminación de Gauss, i.e.

$$x_i = (B^{-1}\hat{b})_i - y_{m+1,i}x_{m+1} - ... - y_{p,i}x_p + y_{p+1,i}x_{p+1} + ... + y_{n,i}x_n, \; i = 1, ..., m,$$

donde $y_i^t = (y_{m+1,i}, ..., y_{n,i}) = ((B^{-1}\vec{a}_{m+1})_i, ..., (B^{-1}\vec{a}_n)_i)$. Tal y como se vio en el desarrollo del método simplex, nos quedaría la ecuación

$$z+\left(\vec{c}_B^t B^{-1} N_l-\vec{c}_l\right)^t \vec{x}_l'-\left(\vec{c}_B^t B^{-1} N_u-\vec{c}_u\right)^t \vec{x}_u'=\vec{c}_B^t B^{-1}\hat{b}+\hat{z}. \tag{1}$$

En definitiva, los valores en la primera fila vendrían dados por

$$\vec{0},\ (\vec{c}_B^t B^{-1} N_l-\vec{c}_l)^t,\ (-\vec{c}_B^t B^{-1} N_u+\vec{c}_u)^t.$$

Así, obtenemos lo mismo que obtendríamos en el método simplex salvo para las variables que están en su cota superior, donde se obtiene el valor opuesto. En definitiva, una tabla del tipo

$\vec{x}_B^t$	$\vec{x}_l'^t$	$\vec{x}_u'^t$	z
$\vec{0}^t$	$\vec{z}_l^t-\vec{c}_l^t$	$-\vec{z}_u^t+\vec{c}_u^t$	$\hat{z}+\vec{c}_B^t B^{-1}\hat{b}$
Id	$B^{-1}N_l$	$-B^{-1}N_u$	$B^{-1}\hat{b}$

donde $\vec{z}_l=\vec{c}_B^t B^{-1}N_l$ y $\vec{z}_u=\vec{c}_B^t B^{-1}N_u$. Como las variables que alcanzan su cota superior van cambiando a lo largo de las iteraciones, sería pesado ir cambiando las correspondientes columnas de signo. Por ello, vamos a tomar el opuesto de estas columnas, de forma que se obtiene

$\vec{x}_B^t$	$\vec{x}_l'^t$	$\vec{x}_u'^t$	z
$\vec{0}^t$	$\vec{z}_l^t-\vec{c}_l^t$	$\vec{z}_u^t-\vec{c}_u^t$	$\hat{z}+\vec{c}_B^t B^{-1}\hat{b}$
Id	$B^{-1}N_l$	$B^{-1}N_u$	$B^{-1}\hat{b}$

Denotemos

$$\overline{z}:=\hat{z}+\vec{c}_B^t B^{-1}\hat{b}, \quad \bar{b}=B^{-1}\hat{b}.$$

Nótese que entonces la condición de entrada en la base para las variables en $\vec{x}_u$ seguirá el criterio opuesto al del simplex. Esto tiene sentido, pues aunque estamos aumentando una variable x_i' esto se traduce en que la variable x_i disminuye desde su cota superior.

Finalmente, como las variables básicas van variando en las distintas iteraciones, denotaremos $x_i(l)$ a la variable x_i si no es básica y alcanza su cota inferior y por $x_i(u)$ a la variable x_i si no es básica y alcanza su cota superior.

Consideremos entonces una tabla del simplex tal y como se explicó anteriormente. El siguiente paso está en determinar si interesa meter alguna variable en la base. Para ello, nos fijaremos en los coeficientes z_j-c_j que aparecen en la primera fila para las variables no básicas.

A partir de la Ecuación (1), si $x_j', j=m+1,...,p$ tiene un coeficiente z_j-c_j positivo, entonces interesa que aumente su valor, es decir, interesa que x_j aumente su valor desde su cota inferior. De la misma forma, si una variable $x_j', j=p+1,...,n$ tiene un coeficiente c_j-z_j positivo (o equivalentemente, z_j-c_j es negativo), entonces interesa que aumente su valor, es decir, interesa que x_j disminuya su valor. En resumen, dada nuestra tabla, esta tabla será óptima si $z_j-c_j\leq 0, j=m+1,...,p$, y $z_j-c_j\geq 0, j=p+1,...,n$. Si hay varias variables que no cumplen estas condiciones podemos escoger una cualquiera de ellas como variable entrante aunque en general, se considera como variable que entra una en las que se alcanza el máximo de

$$\text{máx}\{z_j - c_j : j = m+1, ..., p, \quad c_j - z_j : j = p+1, ..., n\},$$

siempre que este máximo sea positivo.

Supongamos que interesa que entre en la base la variable x_i y supongamos que x_i está actualmente en su cota inferior. Tenemos ahora que determinar la variable que sale. Eliminando las otras variables no básicas, el sistema de ecuaciones de las restricciones queda

$$\begin{aligned} x_1 + y_{1,i}x_i' &= \bar{b}_1 \\ ... &= ... \\ x_m + y_{m,i}x_i' &= \bar{b}_m \end{aligned}$$

Tenemos tres casos:

- Es posible que alguna de las variables básicas alcance su cota inferior. Esto sería debido a que hay coeficientes $y_{j,i}$ con valor positivo. Tal y como se vio en el simplex, el máximo valor que podría tomar x_i' vendría dado por

$$\lambda_1 := \text{mín}\left\{\frac{\bar{b}_j - l_j}{y_{j,i}} : y_{j,i} > 0\right\}.$$

- Es posible que alguna de las variables básicas alcance su cota superior. Esto sería debido a que hay coeficientes $y_{j,i}$ con valor negativo. Por simetría con el caso anterior, el máximo valor que podría tomar x_i' vendría dado por

$$\lambda_2 := \text{mín}\left\{\frac{u_j - \bar{b}_j}{-y_{j,i}} : y_{j,i} < 0\right\}.$$

- Finalmente, es posible que x_i' aumente hasta que x_i alcance su cota superior. En este caso, x_i' tomaría el valor $u_i - l_i$.

Definimos

$$\lambda := \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, u_i - l_i\}.$$

Es interesante notar que posible que no haya coeficientes $y_{j,i}$ con valor positivo; en este caso se asigna $\lambda_1 = \infty$. Por otra parte, si alguna variable no está acotada inferiormente, sería $l_j = -\infty$ y esta variable no se tiene en cuenta en la definición de λ_1; si no hay términos para definir λ_1, asignamos a λ_1 el valor infinito. De la misma forma, si no hay valores negativos, asignamos $\lambda_2 = \infty$ y si alguna variable no está acotada superiormente, sería $u_j = \infty$ y esta variable no se tiene en cuenta en la definición de λ_2; si no hay términos para definir λ_2, asignamos a λ_2 el valor infinito. Finalmente, si x_i no está acotada superiormente, asignamos a u_i el valor infinito, con lo que el valor $u_i - l_i$ sería infinito.

Si λ toma el valor infinito, entonces tenemos una solución no acotada puesto que podemos aumentar el valor de x_i indefinidamente sin que se pierda la factibilidad.

Supongamos que λ toma un valor real; veamos ahora cómo queda la nueva tabla.

- Si $\lambda = \lambda_1$, y el valor λ_1 se obtiene para la variable x_j básica, entonces el pivote es $y_{j,i}$. Tenemos ahora que pivotar sobre este valor. Esto se hace para toda la tabla excepto para la última columna. El valor de x_i pasa a ser $l_i + \lambda_1$, y éste es el valor que tenemos que poner en la última posición de la fila j. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} - (z_i - c_i)\lambda_1$. Para el resto de posiciones de la columna, el valor pasa a ser $\overline{b}_k - y_{k,i}\lambda_1$. La variable x_j deja de ser básica y hay que poner en la tabla $x_j(l)$.

- Si $\lambda = \lambda_2$, y el valor λ_2 se obtiene para la variable x_j básica, entonces el pivote es $y_{j,i}$. Tenemos ahora que pivotar sobre este valor (que es negativo). Esto se hace para toda la tabla excepto para la última columna. El valor de x_i pasa a ser $l_i + \lambda_2$, y éste es el valor que tenemos que poner en la última posición de la fila j. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} - (z_i - c_i)\lambda_2$. Para el resto de posiciones de la columna, el valor pasa a ser $\overline{b}_k - y_{k,i}\lambda_2$. La variable x_j deja de ser básica y hay que poner en la tabla $x_j(u)$.

- Si $\lambda = u_i - l_i$, entonces las variables básicas siguen siendo las mismas. Por lo tanto, no tenemos que pivotar. Sin embargo, sí han cambiado los valores de las variables básicas y de la función objetivo. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} - (z_i - c_i)(u_i - l_i)$. El valor de las variable básica x_k pasa a ser $\overline{b}_k - y_{k,i}(u_i - l_i)$. Hay que poner en la tabla $x_i(u)$.

Si x_i está actualmente en su cota superior, tenemos que tener en cuenta que los coeficientes reales de x_i' son los opuestos de los que hemos escrito anteriormente. Entonces, las ecuaciones ahora son:

$$\begin{aligned} x_1 - y_{1,i}x_i' &= \overline{b}_1 \\ ... &= ... \\ x_m - y_{m,i}x_i' &= \overline{b}_m \end{aligned}$$

En consecuencia, los casos que teníamos antes se desarrollan análogamente y se obtiene lo siguiente por simetría:

- Es posible que alguna de las variables básicas alcance su cota inferior. Esto sería debido a que hay coeficientes $y_{j,i}$ con valor negativo. El máximo valor que podría tomar x_i' vendría dado por

$$\lambda_1 := \text{mín}\left\{\frac{\overline{b}_j - l_j}{-y_{j,i}} : y_{j,i} < 0\right\}.$$

- Es posible que alguna de las variables básicas alcance su cota superior. Esto sería debido a que hay coeficientes $y_{j,i}$ con valor positivo. Por simetría con el caso anterior, el máximo valor que podría tomar x_i' vendría dado por

$$\lambda_2 := \text{mín}\left\{\frac{u_j - \overline{b}_j}{y_{j,i}} : y_{j,i} > 0\right\}.$$

- Finalmente, es posible que x'_i aumente hasta que x_i alcance su cota inferior. En este caso, x'_i tomaría el valor $u_i - l_i$.

Como necesitamos mantener la factibilidad y tenemos que pasar a otra solución básica factible, asignaremos a x'_i el menor de estos tres valores, i.e.

$$\lambda := \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, u_i - l_i\}.$$

Como sucedía antes, es posible que no haya coeficientes $y_{j,i}$ con valor negativo; en este caso se asigna $\lambda_1 = \infty$; de la misma forma, si alguna variable x_j no está acotada inferiormente, sería $l_j = -\infty$ y esta variable no se tiene en cuenta en la definición de λ_1; si no hay términos para definir λ_1, asignamos a λ_1 el valor infinito. Si no hay valores positivos, asignamos $\lambda_2 = \infty$, y si alguna variable x_j no está acotada superiormente, sería $u_j = \infty$ y esta variable no se tiene en cuenta en la definición de λ_2; si no hay términos para definir λ_2, asignamos a λ_2 el valor infinito. Finalmente, si x_i no está acotada inferiormente, asignamos a l_i el valor $-\infty$, con lo que el valor $u_i - l_i$ sería infinito. Si λ toma el valor infinito, entonces tenemos una solución no acotada.

Si λ toma un valor real, veamos ahora cómo queda la nueva tabla.

- Si $\lambda = \lambda_1$, y el valor λ_1 se obtiene para la variable x_j básica, entonces el pivote es $y_{j,i}$. Tenemos ahora que pivotar sobre este valor (que es negativo). Esto se hace para toda la tabla excepto para la última columna. El valor de x_i pasa a ser $u_i - \lambda_1$, y éste es el valor que tenemos que poner en la última posición de la fila j. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} + (z_i - c_i)\lambda_1$. Para el resto de posiciones de la columna, el valor pasa a ser $\overline{b}_k + y_{k,i}\lambda_1$. La variable x_j deja de ser básica y hay que poner en la tabla $x_j(l)$.

- Si $\lambda = \lambda_2$, y el valor λ_2 se obtiene para la variable x_j básica, entonces el pivote es $y_{j,i}$. Tenemos ahora que pivotar sobre este valor. Esto se hace para toda la tabla excepto para la última columna. El valor de x_i pasa a ser $u_i - \lambda_2$, y éste es el valor que tenemos que poner en la última posición de la fila j. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} + (z_i - c_i)\lambda_2$. Para el resto de posiciones de la columna, el valor pasa a ser $\overline{b}_k + y_{k,i}\lambda_2$. La variable x_j deja de ser básica y hay que poner en la tabla $x_j(u)$.

- Si $\lambda = u_i - l_i$, entonces las variables básicas siguen siendo las mismas. Por lo tanto, no tenemos que pivotar. Sin embargo, sí han cambiado los valores de las variables básicas y de la función objetivo. El valor de la función objetivo pasa a ser $\overline{z} + (z_i - c_i)(u_i - l_i)$. El valor de las variable básica x_k pasa a ser $\overline{b}_k + y_{k,i}(u_i - l_i)$. Hay que poner en la tabla $x_i(l)$.

Veamos con un ejemplo el funcionamiento de este algoritmo

Ejemplo 2. *Sea el problema*

$$\begin{array}{lcccc}
\text{mín} & -2x_1 & -4x_2 & -x_3 & \\
s.a & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 10 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 4 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 4 & 0 \leq x_2 \leq 6 & 1 \leq x_3 \leq 4 &
\end{array}$$

Introducimos las variables de holgura y consideramos como base inicial estas variables. Entonces las variables x_1, x_2, x_3 son no básicas. Pero por la definición de solución básica factible para un problema de variables acotadas, pueden tomar el valor de su cota inferior o el valor de su cota superior, con tal de que se obtenga factibilidad. Si hacemos $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ (las cotas inferiores), entonces se tiene que $h_1 = 9, h_2 = 5$ y el valor de la función objetivo es -1. Estos valores determinan una solución factible, por lo que nos sirven para empezar el problema (nótese que ésta no es la única opción); y también son los valores que aparecen en la última columna. De esta forma se obtiene una tabla como sigue:

	$x_1(l)$	$x_2(l)$	$x_3(l)$	h_1	h_2	z
	2	4	1	0	0	-1
h_1	2	1	1	1	0	9
h_2	1	1	-1	0	1	5

Vamos a tomar x_2 como candidata a entrar en la base. Entonces,

$$\lambda_1 = \text{mín}\{\frac{9-0}{1}, \frac{5-0}{1}\} = 5,\ \lambda_2 = \infty,\ u_2 - l_2 = 6 \Longrightarrow \lambda = 5.$$

De esta forma h_2 abandona la base y pasa a tomar el valor 0 (su cota inferior). Y x_2 pasa a tomar el valor $0 + 5 = 5$. Además, h_1 pasa a ser $9 - 1 \times 5, z = -1 - 4 \times 5 = -21$. El resto de la tabla se obtiene pivotando. La tabla final es

	$x_1(l)$	x_2	$x_3(l)$	h_1	$h_2(l)$	z
	-2	0	5	0	-4	-21
h_1	1	0	2	1	-1	4
x_2	1	1	-1	0	1	5

Vamos a tomar x_3 como candidata a entrar en la base. Entonces,

$$\lambda_1 = \text{mín}\{\frac{4-0}{2}\} = 2,\ \lambda_2 = \text{mín}\{\frac{6-5}{1}\} = 1,\ u_3 - l_3 = 3 \Longrightarrow \lambda = 1.$$

Por lo tanto, x_2 alcanza su cota superior 6 y sale de la base. Entra x_3 con valor $1 + 1 = 2$. El valor de h_1 ahora pasa a ser 4-2=2; y z pasa a ser $-21 - 5 \times 1 = -26$. El resto de las variables siguen con el mismo valor y el resto de la tabla se obtiene pivotando. La tabla final es:

	$x_1(l)$	$x_2(u)$	x_3	h_1	$h_2(l)$	z
	3	5	0	0	1	-26
h_1	3	2	0	1	1	2
x_3	-1	-1	1	0	-1	2

Ahora vamos a tomar como candidata a entrar x_1 (nótese que x_2 no es candidata a entrar porque está en su cota superior. Entonces,

$$\lambda_1 = \text{mín}\{\frac{2-0}{3}\} = 2/3,\ \lambda_2 = \text{mín}\{\frac{4-2}{1}\} = 2,\ u_1 - l_1 = 4 \Longrightarrow \lambda = 2/3.$$

Entonces sale h_1 de la base porque alcanza su cota inferior (0); para las otras variables, x_1 pasa a valer $x_1 = 0 + 2/3 = 2/3$, $x_3 = 2 + 2/3 = 8/3$, $z = -26 - 3 \times 2/3 = -28$. El resto de las variables siguen con el mismo valor y el resto de la tabla se obtiene pivotando. La tabla final es:

	x_1	$x_2(u)$	x_3	$h_1(l)$	$h_2(l)$	z
	0	3	0	-1	0	-28
x_1	1	2/3	0	1/3	1/3	2/3
x_3	0	-1/3	1	1/3	-2/3	8/3

Y esta tabla ya es óptima (aunque podríamos meter la variable h_2 y obtener otra solución óptima). El resultado final es:

$$x_1 = 2/3, x_2 = 6, x_3 = 8/3, z = -28.$$

RESUMEN DEL MÉTODO SIMPLEX PARA VARIABLES ACOTADAS

1. Se considera una solución básica factible inicial y se construye la tabla

	$\vec{x}_B^t$	$\vec{x}_{N_l}^t$	$\vec{x}_{N_u}^t$	z
	$\vec{0}^t$	$\vec{z}_{N_l}^t - \vec{c}_{N_l}^t$	$\vec{z}_{N_u}^t - \vec{c}_{N_u}^t$	$\overline{z}$
$\vec{x}_B$	Id	$B^{-1}N_l$	$B^{-1}N_u$	$\overline{b}$

2. Si $z_i - c_i \leq 0$ para toda variable no básica x_i que está en su cota inferior y si $z_i - c_i \geq 0$ para toda variable no básica x_i que está en su cota superior, entonces la solución es óptima. FIN.
3. En caso contrario, se toma una variable x_i no básica que esté en su cota inferior y para la que $z_i - c_i > 0$, ó una variable x_i no básica que esté en su cota superior y para la que $z_i - c_i < 0$.
4. Si la variable elegida está en su cota inferior, se calcula

$$\lambda := \min\{\lambda_1, \lambda_2, u_i - l_i\}$$

donde

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\overline{b}_j - l_j}{y_{ji}} : y_{ji} > 0\right\},\ \lambda_2 = \min\left\{\frac{u_j - \overline{b}_j}{-y_{ji}} : y_{ji} < 0\right\}.$$

   a) Si $\lambda = \lambda_1$,
      - Sale de la base la variable x_j para la que se alcanza el valor λ_1.
      - La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} - (z_i - c_i)\lambda_1,\ x_i = l_i + \lambda_1,\ x_k = \overline{b}_k - y_{ki}\lambda_1,\ \text{básica diferente de } x_j.$$

      - El resto de la tabla se obtiene pivotando sobre y_{ji}.

   b) Si $\lambda = \lambda_2$,
      - Sale x_j para la que se alcanza el valor λ_2 de la base.
      - La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} - (z_i - c_i)\lambda_2,\ x_i = l_i + \lambda_2,\ x_k = \overline{b}_k - y_{ki}\lambda_2,\ \text{básica diferente de } x_j.$$

      - El resto de la tabla se obtiene pivotando sobre y_{ji} (negativo).

   c) Si $\lambda = u_i - l_i$
      - La variable x_i toma su cota superior y sigue sin entrar en la base.
      - La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} - (z_i - c_i)(u_i - l_i),\ x_k = \overline{b}_k - y_{ki}(u_i - l_i),\ \text{básica}.$$

      - El resto de la tabla no cambia.

   Volver al Paso 2.

5. Si la variable elegida está en su cota superior, se calcula

$$\lambda := \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, u_i - l_i\}$$

donde

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{\frac{\overline{b}_j - l_j}{-y_{ji}} : y_{ji} < 0\right\},\ \lambda_2 = \text{mín}\left\{\frac{u_j - \overline{b}_j}{y_{ji}} : y_{ji} > 0\right\}.$$

a) Si $\lambda = \lambda_1$,
- Sale x_j para la que se alcanza el valor λ_1 de la base.
- La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} + (z_i - c_i)\lambda_1,\ x_i = u_i - \lambda_1,\ x_k = \overline{b}_k + y_{ki}\lambda_1,\ \text{básica diferente de } x_j.$$

- El resto de la tabla se obtiene pivotando sobre y_{ji} (negativo).

b) Si $\lambda = \lambda_2$,
- Sale x_j para la que se alcanza el valor λ_2 de la base.
- La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} + (z_i - c_i)\lambda_2,\ x_i = u_i - \lambda_2,\ x_k = \overline{b}_k + y_{ki}\lambda_2,\ \text{básica diferente de } x_j.$$

- El resto de la tabla se obtiene pivotando sobre y_{ji}.

c) Si $\lambda = u_i - l_i$
- La variable x_i toma su cota inferior y sigue sin entrar en la base.
- La última columna vale:

$$\overline{z} \to \overline{z} + (z_i - c_i)(u_i - l_i),\ x_k = \overline{b}_k + y_{ki}(u_i - l_i),\ \text{básica}.$$

- El resto de la tabla no cambia.

Volver al Paso 2.

3. El algoritmo primal-dual

En esta sección vamos a ver otro algoritmo para resolver un problema de Programación Lineal. El método simplex comienza en una solución básica factible del problema primal y en cada iteración se mejora esta solución hasta conseguir llegar a una solución óptima sin perder la factibilidad. Por otra parte, el algoritmo dual parte de una solución que es óptima y la va modificando hasta llegar a una solución que sea factible sin perder la optimalidad.

El algoritmo primal-dual se basa en las relaciones entre los problemas primal y dual. Comienza con una solución básica factible para el problema dual (como ocurría con el algoritmo dual) y busca que la solución básica complementaria para el problema primal sea factible. Si esto ocurre, entonces por los teoremas de dualidad se tiene que esta solución tiene que ser óptima para el primal. Si no es así, hay que modificar la solución del dual y repetir el proceso. Vamos a ver con detalle cómo se consigue esto.

Consideremos el siguiente problema primal:

$$\begin{array}{lll} [P] \text{ mín} & \vec{c}^t\vec{x} & \\ \text{sujeto a} & A\vec{x} & = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} & \end{array}$$

cuyo correspondiente problema dual es

$$\begin{array}{lll} D([P]) \text{ máx} & \vec{b}^t\vec{w} & \\ \text{sujeto a} & \vec{w}^tA & \leq \vec{c} \\ & w_i \in \mathbb{R}, \forall i & \end{array}$$

Asumiremos que $\vec{b} \geq \vec{0}$, lo que no supone ninguna pérdida de generalidad. Consideremos ahora una solución básica factible del problema dual, que denotaremos por $\vec{w}$. Ahora, aplicando el teorema de la holgura complementaria, si $\vec{w}^t\vec{a}_j = c_j$, entonces es posible que la correspondiente variable x_j del primal tome un valor positivo (nótese que podría ser cero), mientras que si $\vec{w}^t\vec{a}_j < c_j$, necesariamente $x_j = 0$. Sea Q definido por

$$Q := \{j : \vec{w}^t\vec{a}_j = c_j\}.$$

Se trata entonces de intentar encontrar una solución que sea factible para el primal pero que sólo utilice las variables de Q. En definitiva, se trata de ver si tiene solución el sistema

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j\in Q} \vec{a}_j x_j & = & \vec{b} \\ x_j & \geq & 0 \end{array}$$

Si existe solución, entonces ya tenemos una solución complementaria factible de $\vec{w}$ y por los teoremas de dualidad tiene que ser óptima. El problema aparece si no existe tal solución. Entonces tenemos que buscar otra solución factible del dual y volver a probar. Sin embargo, proceder de esta manera sería muy ineficiente; por ello, vamos a intentar aprovechar la solución $\vec{w}$ de alguna manera. Para ello, vamos a resolver el problema de forma similar a lo que se hacía en el método de las dos fases. Así, consideramos el siguiente problema, que llamaremos *problema primal restringido*, denotado [PR],

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{j\in Q} 0x_j + \vec{1}^t\vec{x}_a & \\ \text{sujeto a} & \sum_{j\in Q} \vec{a}_j x_j + I\vec{x}_a & = \vec{b} \\ & x_j, x_a & \geq 0 \end{array}$$

En este problema las m variables en $\vec{x}_a$ son variables artificiales para poder encontrar una solución factible inicial (recuérdese que $\vec{b} \geq \vec{0}$). Si la solución de este problema es 0, entonces todas las variables artificiales se anulan y obtenemos una solución que es factible para [P], con lo que ya habríamos obtenido la solución de este problema.

Supongamos entonces que la solución del problema no es 0 y denotemos esta solución por x_0. Entonces alguna variable artificial es positiva y no se ha conseguido factibilidad en [P]. Lo que vamos a hacer es buscar otra solución del dual de forma que las variables de Q que son básicas en la solución del problema anterior [PR] continúen siendo básicas, y añadir otra nueva variable al conjunto Q, de forma que sea más fácil encontrar una solución factible de [P], ya que tendremos un conjunto más grande con el que trabajar. Para ello procederemos de la siguiente manera. Consideremos el problema dual de [PR], que viene dado por D(PR)

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & \vec{v}^t\vec{b} & \\ \text{sujeto a} & \vec{v}^t\vec{a}_j & \leq \vec{0},\ \forall j \in Q. \\ & \vec{v} & \leq \vec{1} \\ & v_j \in \mathbb{R},\ \forall j & \end{array}$$

Sea $\vec{v}^*$ la solución óptima de este problema (nótese que siempre existe por el Teorema Fundamental de Dualidad, ya que el problema [PR] tiene solución óptima finita). Por otra parte, por el Teorema de la Holgura Complementaria, si $x_j > 0$, entonces $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j = 0$. Construimos la siguiente solución para $D[P]$:

$$\vec{w}' := \vec{w} + \theta\vec{v}^*.$$

Aquí θ es una constante positiva a la que asignaremos valor más adelante. Para $\vec{w}'$ se tiene lo siguiente:

$$\vec{w}'^t\vec{a}_j - \vec{c} = \vec{w}^t\vec{a}_j - \vec{c} + \theta\vec{v}^{*t}\vec{a}_j.$$

Para $j \in Q$, tenemos que $\vec{w}^t\vec{a}_j - \vec{c} = 0$ por definición de Q; como además $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j \leq 0$ por factibilidad de D(PR), concluimos que

$$\vec{w}'^t\vec{a}_j - \vec{c} \leq 0,\ \forall j \in Q.$$

Además, si x_j es básico en el problema primal restringido [PR], se tiene por holgura complementaria que $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j = 0$ y $\vec{w}'^t\vec{a}_j - \vec{c} = 0$, con lo que x_j seguirá en Q para la siguiente iteración. Finalmente, consideremos los índices que no están en Q; como estos índices j no están en el problema D(PR), no tenemos ninguna información sobre el valor de $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j$.

Consideremos los índices para los que $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j > 0$. Como $j \notin Q$, tenemos por definición de Q que $\vec{w}^t\vec{a}_j - \vec{c} < 0$; entonces, al igual que en el método simplex, podemos encontrar un valor de θ de forma que $\vec{w}'^t\vec{a}_j - \vec{c}_j \leq 0$ para todos los índices que no están en Q y que valga 0 en al menos uno de estos índices. Esto se consigue asignando a θ el valor

$$\theta = \text{mín}\left\{\frac{-(\vec{w}^t\vec{a}_j - \vec{c})}{\vec{v}^{*t}\vec{a}_j} : \vec{v}^{*t}\vec{a}_j > 0\right\} > 0.$$

De esta manera obtenemos un nuevo vector $\vec{w}'$ factible en el dual D(P) y de forma que su correspondiente conjunto Q tiene a las variables que antes eran positivas en el problema primal restringido [PR] y al menos un índice que no estaba anteriormente en Q. Se trata ahora de reiterar el proceso hasta conseguir factibilidad en el problema original o, equivalentemente, que la solución del problema primal restringido [PR] sea 0.

¿Qué pasa si para todos los índices $j \notin Q$ satisfacen $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j \leq 0$? En este caso no tenemos índice para calcular el valor de θ. Si esto sucede, dado $\vec{w}'$, como $\vec{v}^{*t}\vec{a}_j \leq 0, \forall j$, se tiene que $\vec{w}'$ es factible para cualquier valor de $\theta > 0$. Además, la solución del dual D(P) para $\vec{w}'$ es

$$\vec{b}^t\vec{w}' = \vec{b}^t\vec{w} + \theta\vec{b}^t\vec{v}^*.$$

Como $\vec{b}^t\vec{v}^* = x_0 > 0$ (ya que es la solución del dual del primal restringido D(PR) y la solución del primal restringido [PR] es x_0), entonces el dual tiene solución no acotada y, por el Teorema Fundamental de Dualidad, se tiene que el problema primal [P] es infactible.

Nótese que el algoritmo siempre termina en un número finito de iteraciones, ya que Q varía de iteración en iteración y no se repite porque la solución mejora en cada iteración.

Ejemplo 3. *Consideremos el problema*

$$\begin{array}{rll} \text{mín} & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 & = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 & = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 & \end{array}$$

Entonces el problema dual viene dado por

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & 6w_1 + 3w_2 & \\ \text{sujeto a} & 2w_1 + w_2 & \leq 3 \\ & -w_1 + w_2 & \leq 4 \\ & w_1 + 2w_2 & \leq 6 \\ & 6w_1 + w_2 & \leq 7 \\ & -5w_1 + 2w_2 & \leq 1 \\ & -w_1 & \leq 0 \\ & -w_2 & \leq 0 \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Una solución factible del problema dual es $(0,0)$. *Si consideramos esta solución, entonces se tiene que las únicas restricciones que se dan con igualdad son las dos últimas, luego* $Q = \{6,7\}$. *Las holguras de las demás restricciones son (3, 4, 6, 7, 1). Entonces, el problema primal restringido es*

$$\begin{array}{rll} \text{mín} & a_1 + a_2 & \\ \text{sujeto a} & -x_6 + a_1 & = 6 \\ & -x_7 + a_2 & = 3 \\ & x_6, x_7, a_1, a_2 \geq 0 & \end{array}$$

Ahora bien, es evidente que la solución de este problema viene dada por $a_1 = 6, a_2 = 3, x_6 = 0, x_7 = 0$ y entonces $x_0 = 9$. Pasamos entonces al dual de este problema que viene dado por

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & 6v_1 + 3v_2 & \\ \text{sujeto a} & -v_1 & \leq 0 \\ & -v_2 & \leq 0 \\ & v_1 & \leq 1 \\ & v_2 & \leq 1 \\ & v_1, v_2 \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Aplicando el Teorema de Holgura Complementaria, se tiene que las dos últimas restricciones tienen que cumplirse con igualdad en la solución óptima, lo que nos lleva a que la solución es $v_1^* = 1, v_2^* = 1$. Entonces se tiene:

$$\vec{a}_1^t \vec{v}^* = 3,\ \vec{a}_2^t \vec{v}^* = 0,\ \vec{a}_3^t \vec{v}^* = 3,\ \vec{a}_4^t \vec{v}^* = 7,\ \vec{a}_5^t \vec{v}^* = -3.$$

Nótese que no se hace el producto para las dos últimas restricciones porque eran las que en la iteración anterior estaban en Q. Comparando con las holguras halladas anteriormente,

$$\theta = \text{mín}\left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{7}\right\} = 1.$$

Y, en consecuencia, el nuevo conjunto $Q = \{1, 4\}$ (nótese que han salido las restricciones 6 y 7, debido a que x_6, x_7 no son positivas en la solución óptima del problema primal restringido). De esta forma, el nuevo problema primal restringido es

$$\begin{array}{rll} \text{mín} & a_1 + a_2 & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 6x_4 + a_1 & = 6 \\ & x_1 + x_4 + a_2 & = 3 \\ & x_1, x_4, a_1, a_2 \geq 0 & \end{array}$$

Y ahora la solución de este problema es $x_1 = 3, x_2 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$. Luego la solución del problema primal es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

RESUMEN DEL DESARROLLO TEÓRICO DEL MÉTODO PRIMAL-DUAL

$$
\begin{array}{lll}
[P] & \text{mín} & \vec{c}^t\vec{x} \\
 & & A\vec{x} = \vec{b} \\
 & & \vec{x} \geq \vec{0} \\
 & \Downarrow & \\
D[P] & \text{máx} & \vec{y}^t\vec{b} \\
 & & A^t\vec{y} \leq \vec{c} \qquad \rightarrow Q := \{\vec{a}_i : \vec{y}^t\vec{a}_i = c_i\} \\
 & & \vec{y} \in \mathbb{R}^m \\
 & \Downarrow & \\
[PR] & \text{mín} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \\
 & & \displaystyle\sum_{i\in Q} \vec{a}_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \vec{e}_i a_i = \vec{b} \\
 & & \vec{x}, \vec{a} \geq \vec{0} \\
 & \Downarrow & \\
D[PR] & \text{máx} & \vec{w}^t\vec{b} \\
 & & Q^t\vec{w} \leq \vec{0} \\
 & & \vec{w} \leq \vec{1} \qquad \rightarrow \vec{v}^* \ s.o. \\
 & & \vec{w} \in \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

En la práctica, el algortimo primal-dual se aplica en forma de tabla. En este caso, tenemos dos líneas correspondientes a la función objetivo. En la primera, tenemos los valores $z_j - c_j$ para el problema primal, y en la segunda tenemos los valores $z_j^* - c_j^*$ para el problema primal restringido. Veamos la forma de actuar en formato tabla en el ejemplo anterior. Nótese que

$$\theta = \text{mín}\left\{\frac{-(\vec{w}^t\vec{a}_j - c_j)}{\vec{v}^{*t}\vec{a}_j} : \vec{v}^{*t}\vec{a}_j > 0\right\} = \text{mín}\left\{\frac{-(z_j - c_j)}{z_j^* - c_j^*} : z_j^* - c_j^* > 0\right\}.$$

Es decir, la primera parte de la primera fila con el signo cambiado dividida entre la segunda parte. Una vez hallado el valor de θ, se toma como solución del dual el valor $\vec{w}' = \vec{w} + \theta\vec{v}^*$; entonces, el valor de la función objetivo es

$$\vec{b}^t\vec{w}' = \vec{b}^t\vec{w} + \theta\vec{b}^t\vec{v}^*$$

y, los valores de la primera fila se obtienen haciendo 0 pivotando la primera parte de la primera fila con la segunda parte sobre la columna donde se obtiene el valor de θ. Esto nos da el valor de la primera parte de la primera fila para la siguiente iteración.

Y ahora se resuelve el problema primal restringido, cuya función objetivo viene dada por la segunda parte de la primera fila. Pero hay que tener en cuenta que no se usan todas las variables para resolverlo, sino solamente las variables del nuevo conjunto Q.

Ejemplo 4. *(Continuación del Ejemplo 3)*

Vamos a resolver este problema en forma de tabla. Como comenzamos con la solución dual básica $(w_1, w_2) = (0, 0)$. *Entonces, la primera tabla del algoritmo primal-dual es*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_1	a_2	z
	-3	-4	-6	-7	-1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	2	-1	1	6	-5	-1	0	1	0	6
a_2	1	1	2	1	2	0	-1	0	1	3

Nótese que como a_1 *y* a_2 *son básicas en el problema primal restringido y tienen coeficiente -1 en la segunda parte de la primera fila, tenemos que iterar para conseguir una tabla del simplex para el problema primal restringido. De esta forma se obtiene la siguiente tabla:*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	z
	-3	-4	-6	-7	-1	0	0	0	0	0
	3	0	3	7	-3	-1	-1	0	0	9
a_1	2	-1	1	6	-5	-1	0	1	0	6
a_2	1	1	2	1	2	0	-1	0	1	3

Ahora esta tabla es óptima para el problema lineal restringido, puesto que las únicas variables a tener en cuenta son x_6, x_7, a_1, a_2 *(que aparecen en negrita en la tabla anterior). Como no hemos conseguido una solución factible del primal (la función objetivo de la segunda parte de la primera línea vale 9), tenemos que pasar a otra solución* $\vec{w}'$ *del dual. Para hallar el valor de* θ *hacemos*

$$\theta = \text{mín}\{-\frac{-3}{3}, -\frac{-6}{3}, -\frac{-7}{7}\} = 1.$$

De esta forma, entran x_1 *y* x_4 *en* Q*, pero salen* x_6 *y* x_7 *que no eran básicos en la solución óptima del problema primal restringido. Hacemos cero en los coeficientes de* x_1 *y* x_4 *en la primera parte de la primera fila, lo que se consigue restando a ésta la segunda parte multiplicada por* -1. *Se obtiene así la tabla*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_1	a_2	z
	0	-4	-3	0	-4	-1	-1	0	0	9
	3	0	3	7	-3	-1	-1	0	0	9
a_1	2	-1	1	6	-5	-1	0	1	0	6
a_2	1	1	2	1	2	0	-1	0	1	3

Nótese que esta solución es factible para el dual, puesto que es óptima para el primal. Y a continuación resolvemos el problema primal restringido teniendo sólo en cuenta las variables x_1, x_4, a_1, a_2.

	$\mathbf{x}_1$	x_2	x_3	$\mathbf{x}_4$	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	z
	0	*-4*	*-3*	*0*	*-4*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*9*
	3	*0*	*3*	*7*	*-3*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*9*
a_1	*2*	*-1*	*1*	**6**	*-5*	*-1*	*0*	*1*	*0*	*6*
a_2	*1*	*1*	*2*	*1*	*2*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*3*
	0	*-4*	*-3*	*0*	*-4*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*9*
	2/3	*7/6*	*11/6*	*0*	*17/6*	*1/6*	*-1*	*-7/6*	*0*	*2*
x_4	*1/3*	*-1/6*	*1/6*	*1*	*-5/6*	*-1/6*	*0*	*1/6*	*0*	*1*
a_2	**2/3**	*7/6*	*11/6*	*0*	*17/6*	*1/6*	*-1*	*-1/6*	*1*	*2*
	0	*-4*	*-3*	*0*	*-4*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*9*
	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*
x_4	*0*	*-3/4*	*-3/4*	*1*	*-9/4*	*-1/4*	*1/2*	*1/4*	*-1/2*	*0*
x_1	*1*	*7/4*	*11/4*	*0*	*17/4*	*1/4*	*-3/2*	*-1/4*	*3/2*	*3*

Aquí ya hemos conseguido una solución factible del primal que, por construcción, es la solución óptima del problema.

RESUMEN DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL

1. Considerar una solución básica óptima inicial, que proviene de una solución factible del dual. Se construye la tabla con dos funciones objetivo, la primera con los valores $z_i - c_i$ para la solución optimal:

	x_1	...	x_n	a_1	...	a_m	z
	$z_1 - c_1$	...	$z_n - c_n$	0	...	0	$\vec{c}_B^{\,t} B^{-1}\vec{b}$
	0	...	0	-1	...	-1	0
$\vec{a}$	$\vec{y}_1$	...	$\vec{y}_n$	$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_m$	$B^{-1}\vec{b}$

   Nótese que no es una tabla del simplex porque la segunda fila tiene coeficientes no nulas en las variables básicas.
2. Se resuelve el problema primal restringido, en el que las únicas variables que pueden entrar en la base son las que tienen valor cero en la primera fila.
3. Si el valor de la función objetivo en la segunda fila vale cero, ya se ha obtenido la solución del problema inicial. FIN.
4. Si en la segunda fila todos los coeficientes son negativos o nulos, el problema tiene solución no acotada. FIN
5. Si en la segunda fila hay coeficientes con valor positivo, se calcula

$$\lambda = \text{mín}\{-\frac{z_i - c_i}{z'_i - c'_i} : z'_i - c'_i > 0\},$$

   done los valores $z'_i - c'_i$ son los que aparecen en la segunda fila.
   Se suma a la primera fila la segunda multiplicada por λ.
   Volver al Paso 2.