MAT4681 - Statistique pour les sciences

Arthur Charpentier

03 - Probabilités

été 2022

Combinaisons et permutation I

abc et *cba* sont deux permutations de $\{a, b, c\}$

Donnez toutes les permutations de 3 éléments de $\{a, b, c, d\}$
Réponse:

abc abd acb acd adb adc bac bad bca bcd bda bdc cab cad cba cbd cda cdb dab dac dba dbc dca dcb

Il y a 24 permutations,
Attention l'ordre intervient !

Permutations

La permutation fait référence aux différentes façons d'organiser un ensemble d'objets dans un ordre séquentiel.

Combinaisons et permutation II

Donnez toutes les combinaisons de 3 éléments de $\{a, b, c, d\}$

Réponse:

abc abd acd bcd

Il y a 4 combinaisons, $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \cdot (1)}$

Combinaison

La combinaison fait référence à plusieurs manières de choisir des éléments dans un grand ensemble d'objets, de sorte que leur ordre n'a pas d'importance.

Combinaisons et permutation III

Comptez le nombre de façons d'obtenir exactement 3 têtes en 10 tirages d'une pièce de monnaie

Réponse:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \cdots 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \cdot (7 \times 6 \times 5 \cdots 2 \times 11)} = 120$$

Pour une pièce de monnaie équitable, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 face en 10 tirages ?

Il y a 2^{10} résultats possibles à partir de 10 lancers

$$\begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases} \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

Pour une pièce de monnaie équitable, chaque résultat a la même probabilité, de sorte que la probabilité d'obtenir exactement 3 face est la suivante

$$\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{3} = \frac{120}{1024} \approx 11.7\%$$

Combinaisons et permutation IV

Combien y-a-t-il de possibilités de permuter les lettres de MATH ?
Il y a $4! = 24$ permutations

MATH MAHT MTAH MTHA MHAT MHTA AMTH AMHT
AHMT AHTM ATHM ATMH TAMH TAHM TMAH TMHA
THAM THMA HAMT HATM HMAT HMTA HTAM HTMA

Combien y-a-t-il de possibilités de permuter les lettres de STAT ?
Il y a 12 permutations

STAT SATT STTA TSAT ASTT TSTA TAST ATST TTSA
TATS ATTS TTAS

Formellement, on obtient le nombre de permutations possibles quand il y a des répétitions $\dfrac{4!}{2!1!1!}$, car (S,2), (A,1) et (T,1)

Combinaisons et permutation V

Combien y-a-t-il de possibilités de permuter STATISTIQUES ?
Il y a 12 lettres, (S,3) (T,3) (A,1) (I,2) (Q,1) (U,1) (E,1)

$$\frac{12!}{3!3!2!1!1!1!1!} = 6,652,800$$

Combinaisons et permutation VI

Combien peut-on écrire mots à partir de PARALLELE ? Combien de mots n'ont pas deux A consécutifs ?

Il y a 9 lettres, (A,2), (E,2), (L,3), (P,1), (R,1)

$$\frac{9!}{2!3!2!} = 15,120 \text{ mots}$$

Avec AA, il y a 8! arrangements possibles, avec les (E,2), (L,3)

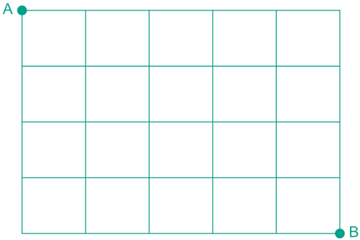
$$\frac{8!}{3!2!} = 3,360 \text{ mots}$$

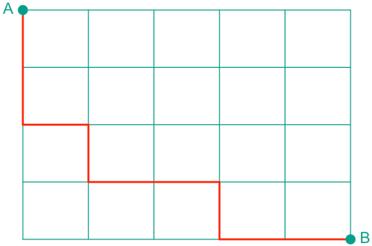
Le nombre de mots sans AA est

$$\frac{9!}{2!3!2!} - \frac{8!}{3!2!} = 11,760 \text{ mots}$$

Combinaisons et permutation VII

Considérons deux points A et B sur la grille ci-dessous. Combien y-a-t-il de chemins de A à B ?





Un chemin est une succession de 9 pas, 4 vers le bas (B), 5 vers la droite (D). Le chemin de droite est BBDBDDBDD

Il y a $\dfrac{9!}{5!4!} = 126$ chemins (ou "plus courts chemins")

Combinaisons et permutation VIII

De combien de façons cinq garçons et cinq filles peuvent-ils s'aligner, si aucun deux garçons ou filles ne peuvent se suivre ?
Il faut alterner, on a soit BGBGBGBGBG, soit GBGBGBGBGB.
Dans le premier cas, les garçons peuvent être disposés de 5! façons, tout comme les filles, soit un total de 5! façons.
Soit un total de $5! \times 5!$ arrangements.
Pareil pour le deuxième (symétrique)
pour un total supplémentaire de $5! \times 5!$ supplémentaires.
Il peuvent s'aligner dans $2 \times (5!)^2 = 28,800$ façons

On notera que les probabilités faibles surviennent,

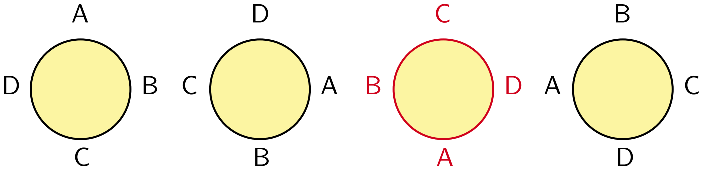
$$\frac{1}{28800} = 0.000035$$

(souvent, ce sont les probabilités relatives qui nous intéressent)

Combinaisons et permutation IX

De combien de façons peut-on asseoir 9 personnes autour d'une table circulaire ?

Attenion, avec 4 personnes, les arrangements ci-dessous sont identiques



On choisit arbitrairement une personne, puis on place les 8 personnes qui reste à sa droite, de $8! = 40,320$ façons.

Jeux de cartes I

Jeux de 52 cartes,

- 13 rangs : $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$
- 4 couleurs (enseignes) : $\{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

Une main (au poker) est un ensemble de 5 cartes (différentes)

Example $\{4\diamondsuit, 10\diamondsuit, 7\clubsuit, D\heartsuit, V\spadesuit\}$

Une main ayant "une pair" contient 2 cartes de même rang, les 3 autres étant de rang distinct

Example $\{4\diamondsuit, 10\diamondsuit, D\clubsuit, D\heartsuit, V\spadesuit\}$

Quelle est la probabilité d'avoir "une paire" ?

Jeux de cartes II

- méthode 1 (sans tenir compte de l'ordre)

1. choisir le rang de la paire : 13 rangs différents
2. choisir les couleurs de la paire : 2 couleurs parmi 4, $\binom{4}{2}$
3. choisir 3 rangs parmi les $13 - 1 = 12$ restants (car il ne faut pas d'autre paire) $\binom{13}{3}$
4. choisir les 3 couleurs associées aux 3 rangs, soit 4^3

Le nombre de mains avec "une paire" est

$$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{13}{3} \times 4^3 = 1098240$$

Le nombre de mains possibles est $\binom{52}{5} = 2598960$

Jeux de cartes III

donc une probabilité $\dfrac{1098240}{2598960} \approx 42.257\%$.

- méthode 2 (en tenant compte de l'ordre)

1. choisir les positions dans la main pour la paire : $\displaystyle\binom{5}{2}$
2. Placer une carte dans la première position de la paire : 52 cartes, donc 52 façons de faire.
3. Placer une carte dans la deuxième position de la paire : comme elle doit correspondre au rang première carte, il n'y a que 3 façons de faire.
4. Placer une carte dans le premier emplacement libre : elle ne peut pas correspondre à la paire, il y a donc $52 - 4 = 48$ façons de faire.

Jeux de cartes IV

5. Placer une carte dans l'emplacement libre suivant : elle ne peut pas correspondre à la paire ou à la carte précédente, il y a donc $48 - 4 = 44$ façons de faire.
6. Placez une carte dans le dernier emplacement libre : il y a $44 - 4 = 40$ façons de faire.

Le nombre de mains avec "une paire" est (en tenant compte de l'ordre)

$$\binom{5}{2} \times 52 \times 3 \times 48 \times 44 \times 40 = 131788800$$

Le nombre de mains est $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311875200$

donc une probabilité $\dfrac{131788800}{311875200} \approx 42.257\%$.

Formalisme probabiliste I

On note Ω tous les résultats possibles

$$\Omega = \{Janvier, Février, Mars, Avril, Mai, Juin, Juillet, Août, \\ Septembre, Octobre, Novembre, Décembre\}$$

Combien y-a-t-il d'éléments dans Ω ?

Réponse : $n = 12$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de Ω

Mois qui ont 31 jours :

$T = \{Janvier, Mars, Mai, Juin, Juillet, Août, Octobre, Décembre\}$

$T \in \mathcal{F}$

Combien y-a-t-il d'éléments dans $\mathcal{F}$?

Réponse : 2^n, soit ici 4096

$\varnothing \in \mathcal{F}$ et $\Omega \in \mathcal{F}$

Formalisme probabiliste II

Une probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$.

Que vérifie la fonction $\mathbb{P}$?

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$
- si $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Probabilité (version simplifiée)

Une probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- si $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Formalisme probabiliste III

On lance 3 pièces de monnaie

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF\}$$

$$\begin{cases} A_0 = \text{obtenir aucune fois `face' sur 3 lancers} \\ A_1 = \text{obtenir exactement 1 fois `face' sur 3 lancers} \\ A_2 = \text{obtenir exactement 2 fois `face' sur 3 lancers} \\ A_3 = \text{obtenir exactement 3 fois `face' sur 3 lancers} \end{cases}$$

Si la pièce n'est pas truquée

$$\begin{cases} A_0 = \{PPP\} \in \mathcal{F}, \text{ et } \mathbb{P}(A_0) = 1/8 \\ A_1 = \{FPP, PFP, PPF\} \in \mathcal{F}, \text{ et } \mathbb{P}(A_1) = 3/8 \\ A_2 = \{PFF, FPF, FFP\} \in \mathcal{F}, \text{ et } \mathbb{P}(A_2) = 3/8 \\ A_3 = \{FFF\} \in \mathcal{F}, \text{ et } \mathbb{P}(A_3) = 1/8 \end{cases}$$

$A_0 \cup \cdots \cup A_3 = \Omega$ et $\forall i, j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$

Formalisme probabiliste IV

Partition

$A_1, \cdots, A_k$ forme une partition de Ω si

- $A_1 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$
- $\forall i, j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$

Partition

Si $A_1, \cdots, A_k$ forme une partition de Ω

$$\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Formalisme probabiliste V

Espace probabilisé

Un espace probabilisé est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec

- un ensemble d'évènements Ω
- l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties de Ω
- une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$