Statistiques pour les sciences (MAT-4681)

Arthur Charpentier

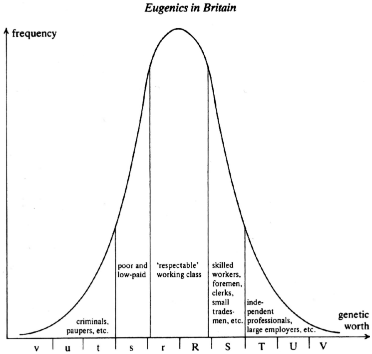
08 - La loi normale et les lois dérivées

été 2022

Gaussian distribution

Legendre and Gauss (or Gauß) introduced the distribution as a *law of errors*...

Quetelet's average man
Galton's view of British social structure (picture Eugenics in Britain)



Galton needed to revolutionize this branch of mathematics, error theory and the use of the Gauss distribution as a distribution of errors from a mean value. A new statistical paradigm was needed, The Structure of Scientific Revolutions, Kuhn 1970.

Loi normale centrée & réduite

Loi normale / Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, with density on $\mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

Loi normale / Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\text{Var}[X] = 1$.

Gaussian Tables

In many applications we should solve

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx = p$$

no simple analytical formula...
Need for a standard normal table

Hence $\Phi(1.64) = 95\%$
and $\Phi(1.96) = 97.5\%$,
$\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$
$\Phi^{-1}(0.025) = -1.96$

```
> qnorm(.95)
[1] 1.644854
> qnorm(.975)
[1] 1.959964
```

Table n° 3.

VALEURS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$, POUR DES VALEURS DE t EXPRIMÉES EN FONCTION DE ρ PRIS POUR UNITÉ.

$\frac{t}{\rho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences	$\frac{t}{\rho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences
0,0	0,000	54	2,5	0,908	13
0,1	0,054	53	2,6	0,921	10
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0,3	0,160	53	2,8	0,941	9
0,4	0,213	51	2,9	0,950	7
0,5	0,264	50	3,0	0,957	6
0,6	0,314	49	3,1	0,963	6
0,7	0,363	48	3,2	0,969	5
0,8	0,411	45	3,3	0,974	4
0,9	0,436	44	3,4	0,978	4
1,0	0,500	42	3,5	0,982	3
1,1	0,542	40	3,6	0,985	2
1,2	0,582	37	3,7	0,987	3
1,3	0,619	36	3,8	0,990	1
1,4	0,655	33	3,9	0,991	2
1,5	0,688	31	4,0	0,993	1
1,6	0,719	29	4,1	0,994	1
1,7	0,748	27	4,2	0,995	1
1,8	0,775	25	4,3	0,996	1
1,9	0,800	23	4,4	0,997	1
2,0	0,823	20	4,5	0,998	0
2,1	0,843	19	4,6	0,998	0
2,2	0,862	17	4,7	0,998	1
2,3	0,879	16	4,8	0,999	0
2,4	0,895	13	4,9	0,999	0
2,5	0,908		5,0	0,999	

Cette table est indépendante de la précision des observations : elle donne la probabilité que l'erreur, pour une espèce quelconque d'observations, ne dépasse pas une certaine valeur exprimée en fonction de l'erreur probable.

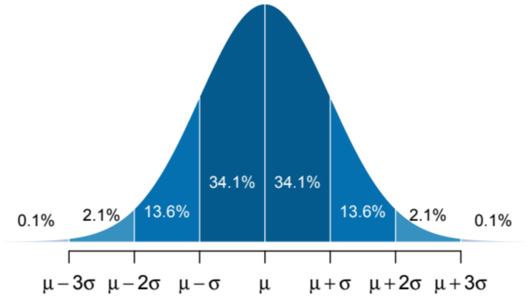
Elle montre que, sur 1000 erreurs, il en reste 54 au-dessous de 0,1 de l'erreur probable; 107 au-dessous de 0,2, etc. En d'autres termes, on peut parier 54 contre 946 que l'erreur que l'on commettra, dans une espèce quelconque d'observations, sera moindre que 0,1 de l'erreur probable ; 107 contre 893 qu'elle sera moindre que 0,2 de l'erreur probable, etc.

Gaussian distribution

Loi normale / Gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, with density on $\mathbb{R}$, for $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma \in \mathbb{R}_{+\star}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

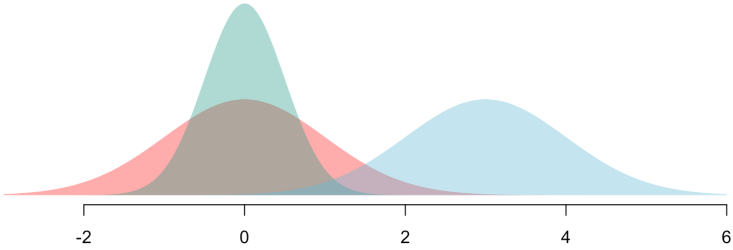


Distribution gaussienne

Loi normale / Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{E}(X) = \mu$ and $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Sur le dessin ci-dessous, il y a les densités de trois lois normales, $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{N}(0, 0.5)$, $\mathcal{N}(3, 1)$.



Distribution gaussienne

Loi normale / centrée-réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Loi normale transformée

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Somme de variables gaussiennes indépendantes

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes,

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Distribution gaussienne

Note Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes,

$$X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Moyenne de variables gaussiennes, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$

Si $X_1, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont indépendantes,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

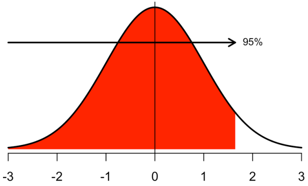
ou, dit autrement

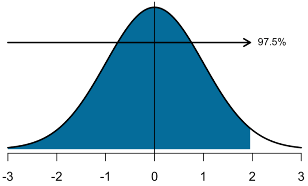
$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Distribution gaussienne

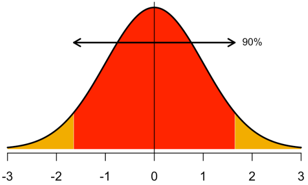
Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

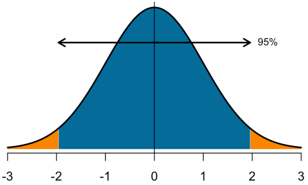
$$\mathbb{P}[X \leq 1.645] = 95\% \text{ et } \mathbb{P}[X \leq 1.96] = 97.5\%$$





$$\mathbb{P}[-1.645 \leq X \leq 1.645] = 90\% \text{ et } \mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 95\%$$





Quantiles

```
> qnorm(.9, mean = 5, sd = 2)
[1] 7.563103
> 5 + 2*qnorm(.9)
[1] 7.563103
```

Central Limit Theorem

Let $X_i \sim \mathcal{B}(p)$,

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p \text{ and } \mathbb{P}(X_i = 1) = p.$$

then $X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ (binomial distribution), for $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

then, when n is large enough

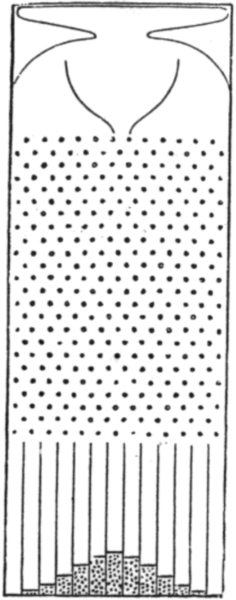
$$X \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

or

$$\overline{X} = \frac{X}{n} \simeq \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

(picture Quincunx, or Galton's box)

FIG. 7.

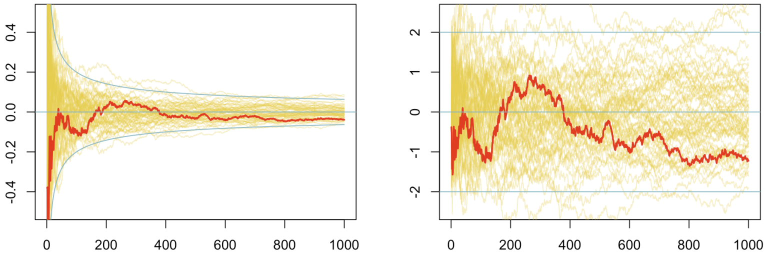


Central Limit Theorem

Central Limit Theorem

Suppose $\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$ is a sequence of i.i.d. random variables with $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ and $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$, then, if $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ as n goes to infinity,

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \to \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

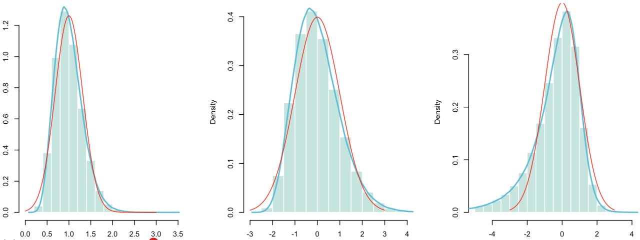


Central Limit Theorem

On peut simuler des échantillons $\{x_1, \cdots, x_{10}\}$, avec $X_i \sim \mathcal{E}(1)$, et regarder la distribution de

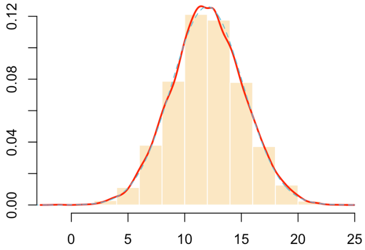
$$\overline{x},\ \sqrt{10}\frac{\overline{x}-1}{1} \text{ et } \sqrt{10}\frac{\overline{x}-1}{s},\ s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2$$

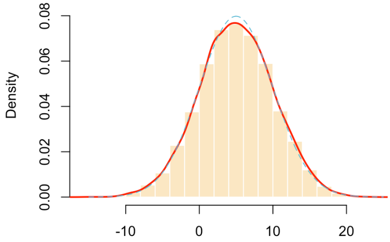
```
> n = 1e6; M1 = M2 = M3 = rep(NA,n)
> for(i in 1:n){
+      X = rexp(10)
+      M1[i] = mean(X)
+      M2[i] = sqrt(10)*(mean(X)-1)
+      M3[i] = sqrt(10)*(mean(X)-1)/sd(X) }
```



Somme de variables normales indépendantes

```
> x=seq(-15,25,length=1001)
> S = rnorm(n,7,3)+rnorm(n,5,1)
> hist(S,probability = TRUE)
> lines(density(S),col="red")
> lines(x,dnorm(x,7+5,sqrt(3^2+1^2)),col="blue")
>
> S = rnorm(n,7,3)+rnorm(n,-2,4)
> hist(S,probability = TRUE,)
> lines(density(S),col="red")
> lines(x,dnorm(x,7-2,sqrt(3^2+4^2)),col="blue")
```





Chi-Square Distribution

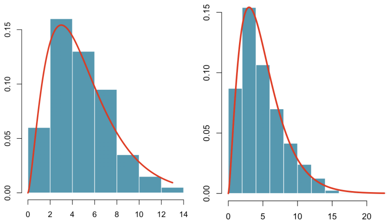
Chi-deux $\chi^2(\nu)$

The chi-squared distribution $\chi^2(\nu)$, with $\nu \in \mathbb{N}^*$ has density

$$x \mapsto \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \text{ where } x \in [0; +\infty),$$

where Γ denotes the Gamma function ($\Gamma(n+1) = n!$).

$\mathbb{E}(X) = \nu$ et $\text{Var}(X) = 2\nu$, cf chi-squared distribution



Chi-Square Distribution

Chi-deux $\chi^2(\nu)$

If $X_1, \cdots, X_\nu \sim \mathcal{N}(0,1)$ are independent variables, then $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \sim \chi^2(\nu)$, when $\nu \in \mathbb{N}_*$.

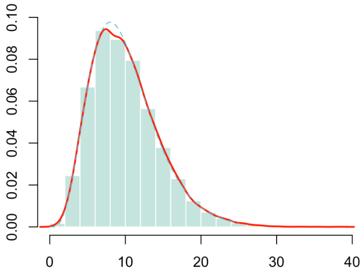
Somme de Chi-deux $\chi^2(\nu)$ indépendantes

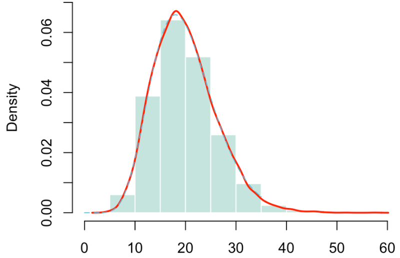
Si $X \sim \chi^2(\mu)$ et $Y \sim \chi^2(\nu)$ sont indépendantes,

$$X + Y \sim \chi^2(\mu + \nu)$$

Somme de chi-deux indépendantes

```
> x=seq(0,35,length=1001)
> S = rchisq(n,4)+rchisq(n,6)
> hist(S,probability = TRUE)
> lines(density(S),col="red")
> lines(x,dchisq(x,4+6),col="blue")
>
> S = rchisq(n,7)+rchisq(n,13)
> hist(S,probability = TRUE)
> lines(density(S),col="red")
> lines(x,dchisq(x,7+13),col="blue")
```





Chi-Square Distribution ★★★

Chi-deux $\chi^2(\nu-1)$

Let $X_1,\cdots,X_n$ be $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ independent random variables.

Then $S_n{}^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ has a $\chi^2(n-1)$ distribution.

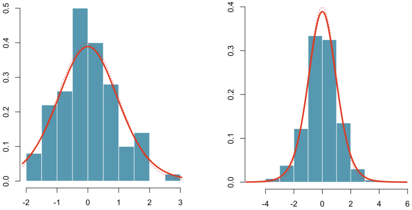
Preuve (heuristique):

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\left(\overline{X}-\mu\right)^2}_{\sim\chi^2(1)}\sim\chi^2(n)$$

Student's t Distribution

Student t $\mathcal{S}t(\nu)$

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}, \text{ on } \mathbb{R}$$



Student t $\mathcal{S}t(\nu)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ and } \mathrm{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \text{ when } \nu > 2.$$

Student's t Distribution

Student t $\mathcal{S}t(\nu)$

If $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ and $Y \sim \chi^2(\nu)$ are independents, then

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \sim \mathcal{S}t(\nu).$$

see Student's t

Let $X_1, \cdots, X_n$ be $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ independent random variables. Let

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{ and } S_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Then $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ has a $\chi^2(n-1)$ distribution, and furthermore

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim \mathcal{S}t(n-1).$$

Fisher's F Distribution ★★★

Loi de Fisher $\mathcal{F}(d_1, d_2)$

$$f(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{B}(d_1/2, d_2/2)}\left(\frac{d_1\,x}{d_1\,x + d_2}\right)^{d_1/2}\left(1 - \frac{d_1\,x}{d_1\,x + d_2}\right)^{d_2/2}$$

for $x \geq 0$ and $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, where B denotes the Beta function.

Loi de Fisher $\mathcal{F}(d_1, d_2)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d_2}{d_2 - 2} \text{ when } d_2 > 2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2\,d_2^2\,(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)} \text{ when } d_2 > 4.$$

Fisher's F Distribution ★★★

If $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, then $\dfrac{1}{X} \sim \mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$.

Loi de Fisher $\mathcal{F}(d_1, d_2)$

If $X_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ and $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ are independent

$$Y = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$$

see Fisher's $\mathcal{F}$ on wikipedia

Fisher's F Distribution ★★★

On peut montrer que si $X \sim \mathcal{S}td(\nu)$, alors $X^2 \sim \mathcal{F}(1,\nu)$. Ou dit autrement si F_{1-p} est le quantile de niveau $1-p$ de la loi $\mathcal{F}(1,\nu)$, $F_{1-p} = t_{1-p/2}^2$ où t_{1-p} est le quantile de niveau $1-p$ de la loi $\mathcal{S}td(\nu)$.

La loi $\mathcal{F}(1,\nu)$ a pour densité

$$f(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^{\nu/2}u^{-1/2}(\nu+u)^{-(\nu+1)/2} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$f(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}u^{-1/2}\left(1+\frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

aussi

$$\int_0^{F_{1-p}} f(u)du = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{F_{1-p}} u^{-1/2}\left(1+\frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} du = 1-p$$

Fisher's F Distribution ★★★

Faisons le changement de variable, $t = \sqrt{u}$,

$$2\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\sqrt{F_{1-p}}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} dt = 1-p$$

on reconnaît une intégrale associée à la loi de Student.
Si $T \sim \mathcal{S}td(\nu)$, on a écrit $\mathbb{P}(T \in [0, \sqrt{F_{1-p}}])$,

$$2\mathbb{P}(T \in [0, \sqrt{F_{1-p}}]) = 1-p \text{ i.e. } \frac{1-p}{2} = \mathbb{P}(T \leq \sqrt{F_{1-p}}]) - \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 0]}_{=1/2}$$

$$\mathbb{P}(T \leq \sqrt{F_{1-p}}]) = 1 - \frac{p}{2} \text{ mais on sait que } \mathbb{P}(T \leq t_{1-p/2}]) = 1 - \frac{p}{2}$$

donc $F_{1-p} = t^2_{1-p/2}$.

```
> qf(.95,1,10)
[1] 4.964603
> qt(.975,10)^2
[1] 4.964603
```

Sommes de variables aléatoires ★★★

Comme on l'a vu dans la partie 4, la loi d'une somme de variables est compliquée à calculer, en général.

On lance deux dés (à 6 faces), et on note X_1 et X_2 les faces apparentes. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4	5	6	
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	3/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	4/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36
		1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36

Sommes de variables aléatoires ⭐⭐⭐

Pour calculer $\mathbb{P}[X_1 + X_2 = k]$, $k \in \{2, 3, \cdots, 12\}$, on utilise

$$\mathbb{P}[X_1 + X_2 = k] = \sum_i \mathbb{P}[X_1 + X_2 = k | X_1 = i] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i]$$

(formule des probabilités totale) soit, comme $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$$\mathbb{P}[X_1 + X_2 = k] = \sum_i \mathbb{P}[X_2 = k - i] \cdot \mathbb{P}[X_1 = i]$$

Dans le cas continue, on a une relation du genre

$$f_{X_1+X_2}(s) = \int f_{X_1}(x) f_{X_2}(s - x) dx$$

si les variables $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$!

Mais quelques cas particulier sont faciles

Sommes de variables aléatoires ★★★

Somme de variables indépendantes, $X \perp\!\!\!\perp Y$

Si $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$, $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_x+\mu_y,\sigma_x^2+\sigma_y^2)$
Si $X \sim \chi^2(\mu)$ et $Y \sim \chi^2(\nu)$, $X+Y \sim \chi^2(\mu+\nu)$