Data Science for Actuaries (ACT6100)

Arthur Charpentier

09 - Modèle Probabiliste, Paramètre et Inférence

été 2022

Statistique et Paramètre

Statistique

Étant donné un échantillon $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une statistique est une fonction des observations, $t(\boldsymbol{x}) = t(x_1, \cdots, x_n)$..

Par exemple $t(x_1, \cdots, x_n) = x_5$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ou $\max\{x_i\} - \min\{x_i\}$.

Paramètre

Un paramètre est un nombre qui décrit la distribution de X. C'est un nombre fixe, et souvent inconnu.

Par exemple p pour une loi $\mathcal{B}(p)$ ou $\displaystyle\frac{p}{1-p}$

Modèle paramétrique

Formalisation du problème : nous supposons disposer de $Y_1, \cdots, Y_n$ copies indépendantes d'une variable aléatoire Y dont la densité est paramétré par un paramétre réel ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$) ou vectoriel ($\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$).
On notera $\{Y_1, \cdots, Y_n\} F_\theta \in \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est la famille de lois
Exemples :

- Loi de Bernoulli $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $\theta = p \in (0,1)$ ou $\theta = \dfrac{p}{1-p} \in \mathbb{R}_+$
- Loi de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\theta = \lambda \in \mathbb{R}_+$, ou $\theta = \log \lambda \in \mathbb{R}$
- Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

Identifiabilité

$$\theta_1 \neq \theta_2 \Longrightarrow F_{\theta_1} \neq F_{\theta_2} \text{ ou } F_{\theta_1} = F_{\theta_2} \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Modèle paramétrique

Example: Le modèle Gaussien, sur $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right);\ \theta = (\mu,\sigma^2)\right\}.$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
& f_{\theta_1} = f_{\theta_2} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 + \log\sigma_1 = \frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2 + \log\sigma_2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - 2x\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \log\sigma_1 - \log\sigma_2\right) =
\end{aligned}$$

Modèle paramétrique

Example: Le modèle mélange d'exponentielles, sur $\mathbb{R}_+$

$$\mathcal{F} = \Big\{ f_\theta(x) = \alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-\alpha)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x};\ \theta = (\alpha, \lambda_1, \lambda_2) \Big\}.$$

où $\alpha \in (0,1)$ et $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
Soient $\theta_1 = (\alpha, \lambda_1, \lambda_2)$ et $\theta_2 = (1-\alpha, \lambda_2, \lambda_1)$,

$$\theta_1 \neq \theta_2 \text{ mais } f_{\theta_1} = f_{\theta_2}$$

Ce modèle n'est alors pas identifiable...

Modèle paramétrique

θ est le paramètre (en général inconnu) de la loi F_θ
Θ est l'espace des paramètres
$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ est un échantillon aléatoire de n copies indépendantes de loi f_θ
$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ les valeurs observées de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$
n la taille de l'échantillon

Modèle paramétrique

Un estimateur d'un paramètre θ est une variable aléatoire (fonction de l'échantillon $\boldsymbol{Y}$) et est noté $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$. La valeur estimée de $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ s'appelle aussi estimation et est notée $\widehat{\theta}(\boldsymbol{y})$.
(dans de nombreux ouvrages, $\widehat{\theta}$ désigne aussi bien $\widehat{\theta}(\boldsymbol{y})$ que $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$)
L'estimateur est une variable aléatoire $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ et l'estimation est une constante $\widehat{\theta}(\boldsymbol{y})$

Example : observations suivant une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$

$$\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ et } \widehat{\theta}_1(\boldsymbol{y}) = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y} = \frac{\min\{Y_i\} + \max\{Y_i\}}{2} \text{ et } \widehat{\theta}_2(\boldsymbol{y}) = \overline{y} = \frac{\min\{y_i\} + \max\{y_i\}}{2}$$

Biais

Biais d'un estimateur

On appelle biais d'un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ la quantité

$$\text{bias}[\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})] = \mathbb{E}[\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})] - \theta$$

On dit que

- $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ est un estimateur sans biais de θ si $\text{bias}[\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})] = 0$
- $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ si
$$\lim_{n\to\infty} \text{bias}[\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})] = 0$$

Example $Y_1, \cdots, Y_n$ de moyenne μ,

- $\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est un estimateur sans biais de μ
- $\widetilde{\mu}(\boldsymbol{Y}) = \dfrac{1}{n+3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de μ

Biais

Example $Y_1, \cdots, Y_n$ de variance σ^2,

- $\widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{Y}) = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ estimate sans biais de σ^2
- $\widetilde{\sigma}^2(\boldsymbol{Y}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2

Biais

Example $Y_1, \cdots, Y_n$, de loi F. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{F}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{1}(Y_i \leq y)}_{X_i}$$

où les variables X_i sont des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = F(y)$.

$$\mathbb{E}\big[\widehat{F}(y)\big] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[Y_i \leq y] = F(y)$$

donc $\widehat{F}(y)$ est un estimateur sans biais de $F(y)$, pour tout y.

Moyenne Quadratique (MSE)

Erreur Quadratique Moyenne

On appelle erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ et on note $EQM(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y}))$ la quantité

$$EQM(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})) = \mathbb{E}\left[\left(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y}) - \theta\right)^2\right]$$

Un peu de calcul permet d'écrire

$$EQM(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})) = \text{bias}\left(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})\right)^2 + \text{Var}\left(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})\right)$$

Consistance

Un estimateur $\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$ est consistant si

$$\lim_{n\rightarrow\infty} EQM(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})) = 0$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Pour un estimateur sans biais

$$EQM(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})) = \text{Var}\big(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})\big)$$

Un estimateur asymptotiquement sans biais est consistant si

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}\big(\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})\big) = 0$$

Efficacité

Soient $\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y})$ et $\widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y})$ deux estimateurs de θ. $\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y})$ est plus efficace que $\widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y})$ si $EQM(\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y})) < EQM(\widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y}))$.

$$\mathit{eff}(\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y}), \widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y})) = \frac{EQM(\widehat{\theta}_2(\boldsymbol{Y}))}{EQM(\widehat{\theta}_1(\boldsymbol{Y}))} \text{ rapport d'efficacité}$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Example: $Y_1, \cdots, Y_n$ de moyenne μ,

$$\widehat{\mu}_1(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ et } \widehat{\mu}_2(\boldsymbol{Y}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2} Y_i$$

alors $\textit{eff}(\widehat{\mu}_1(\boldsymbol{Y}), \widehat{\mu}_2(\boldsymbol{Y})) = 2$

Moyenne Quadratique (MSE)

Example: $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables $\mathcal{B}(p)$. Soit $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
$S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ donc $\mathbb{E}[S_n] = np$ et $\text{Var}[S_n] = np(1-p)$.

$$\widehat{p}_1 = \frac{S_n}{n} \text{ et } \widehat{p}_2 = \frac{S_n+1}{n+2}$$

$$\mathbb{E}[\widehat{p}_1] = p \text{ et } \text{Var}(\widehat{p}_1) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Comme c'est un estimateur sans biais de p, $EQM(\widehat{p}_1) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

$$\mathbb{E}[\widehat{p}_2] = \frac{np+1}{n+2} \text{ et } \text{Var}(\widehat{p}_2) = \frac{\text{Var}\,(S_n)}{(n+2)^2} = \frac{np(1-p)}{(n+2)^2}$$

$$EQM(\widehat{p}_2) = \left[\frac{np+1}{n+2} - p\right]^2 + \frac{np(1-p)}{(n+2)^2} = \frac{(1-2p)^2 + np(1-p)}{(n+2)^2}$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Aussi, le rapport d'efficacité vaut

$$eff(\widehat{p}_1, \widehat{p}_2) = \frac{EQM(\widehat{p}_2)}{EQM(\widehat{p}_1)} = \frac{n}{(n+2)^2}\left[n + \frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}\right]$$

Si $p \sim 1/2$, ce rapport vaut $n^2/(n+2)^2 < 1$.
En fait $\widehat{p}_2$ domine $\widehat{p}_1$ si

$$p \in \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)$$

Maximum de Vraisemblance

Vraisemblance (Likelihood)

Soit $\boldsymbol{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ. La fonction de vraisemblance est

$$\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(y_i)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est

$$\widehat{\theta}(\boldsymbol{y}) = \underset{\theta\in\Theta}{\text{argmin}}\big\{\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{y})\big\} \text{ et } \widehat{\theta}(\boldsymbol{Y}) = \underset{\theta\in\Theta}{\text{argmin}}\big\{\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{Y})\big\}$$

Maximum de Vraisemblance

Log-Vraisemblance

Soit $\boldsymbol{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ. La fonction de log-vraisemblance est

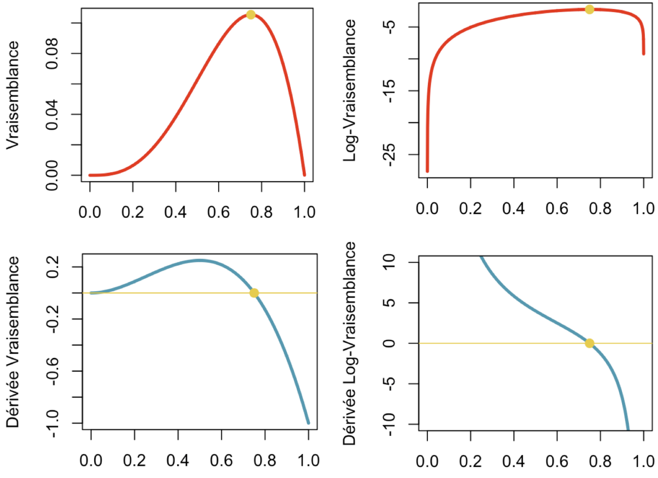
$$\log \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(y_i)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est

$$\widehat{\theta}(\boldsymbol{y}) = \underset{\theta\in\Theta}{\text{argmin}}\Big\{\log \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{y})\Big\} \text{ et } \widehat{\theta}(\boldsymbol{Y}) = \underset{\theta\in\Theta}{\text{argmin}}\Big\{\log \mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{Y})\Big\}$$

Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

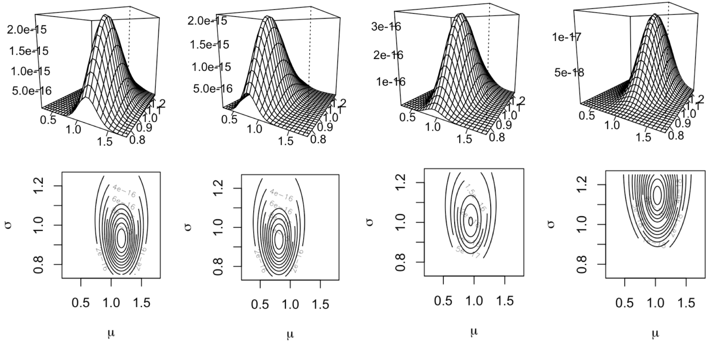
$$\boldsymbol{y} = \{0, 1, 1, 1\}, \; Y_i \sim \mathcal{B}(\theta).$$



Vraisemblance, cas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Pour les paramètres univariés, on peut visualiser la vraisemblance, mais c'est plus compliqué en dimension plus grande...

Vraisemblance $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ pour 4 échantillons $\boldsymbol{y}$



Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

Example 1 : on a fait un sondage sur 15 personnes pour savoir s'ils appréciaient le cours de MAT4681, quelle est l'estimation par maximum de vraisemblance de la proportion de gens satisfaits ?

- ce que nous dit la théorie

$$\mathcal{L}(p;\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{s_n}(1-p)^{n-s_n},\ s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\log \mathcal{L}(p;\boldsymbol{x}) = s_n \log(p) + (n-s_n)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\log \mathcal{L}(p;\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial p} s_n x \log(p) + (n-s_n)\log(1-p) = \frac{s_n}{p} - \frac{n-s_n}{1-p}$$

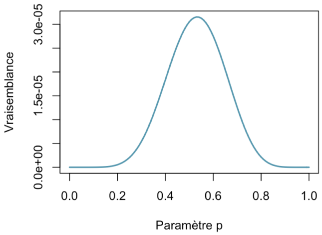
$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\log \mathcal{L}(p;\boldsymbol{x})\right|_{p=\widehat{p}} = 0 \text{ si et seulement si } \frac{s_n}{\widehat{p}} = \frac{n-s_n}{1-\widehat{p}},\ \text{soit } \widehat{p} = \frac{s_n}{n} = \overline{x}$$

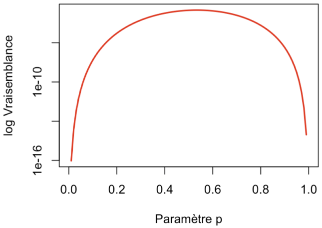
Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous dit la pratique

Traçons la fonction de (log)vraisemblance $p \mapsto \mathcal{L}(p; \boldsymbol{x})$

```
> n=15
> x = c(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)
> vraisemblance = function(p) prod(dbinom(x,size = 1,
   prob = p))
> vect_p = seq(0,1,by=0.01)
> plot(vect_p,Vectorize(vraisemblance)(vect_p))
```





Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous dit la pratique

On peut chercher le maximum de la fonction $p \mapsto \mathcal{L}(p; \boldsymbol{x})$

```
> optim(par = .5,fn = function(z) -vraisemblance(z))
$par
[1] 0.5333252

$value
[1] -3.155276e-05
```

La théorie nous avait dit que ce maximum a une forme particulière, $\widehat{p} = \overline{x}$

```
> mean(x)
[1] 0.5333333
```

Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

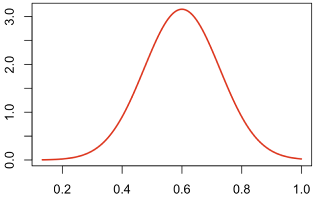
- ce que nous disent les mathématiques

Comme $\widehat{p}(\boldsymbol{x}) = \overline{x}$, on peut utiliser la loi des grands nombres,

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\widehat{p}(\boldsymbol{X}) - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

mais ici $n = 15$ (approximation Gaussienne peut être mauvaise)
Si $p = 60\%$ la distribution (approchée) de $\widehat{p}(\boldsymbol{X})$ serait

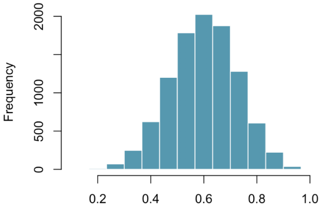
```
> u=seq(2/15,1,by=.001)
> plot(u,dnorm(u,.6,sqrt(.4*.6/15)))
```



Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous disent les simulations, si on suppose $\theta = 60\%$

```
> theta=rep(NA,1e4)
> for(s in 1:1e4){
+     x=sample(0:1,size = n,prob = c(.4,.6),replace=TRUE)
+     neglogL = function(p) -sum(log(dbinom(x,size = 1,prob = p)))
+     theta[s] = optim(par = .5,fn = neglogL)$par
+ }
> hist(theta)
```



Méthode des Moments

Méthode des Moments

Soit $\boldsymbol{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ. Soient $m_k(\theta) = \mathbb{E}[Y^k]$ où $Y \sim f_\theta$, et $\widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^k$ le moment empirique. Soit $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_1, \cdots, \widehat{\theta}_d)$ la solution du système d'équations

$$\begin{cases} m_1(\widehat{\theta}) = \widehat{m}_1 \\ \quad\vdots \\ m_d(\widehat{\theta}) = \widehat{m}_d \end{cases}$$

Note: on peut parfois considérer les moments centrés (i.e. $\text{Var}[Y]$ au lieu de $\mathbb{E}[Y^2]$)

Méthode des moments, cas $\mathcal{B}(p)$

Example 2 : on a fait un sondage sur 15 personnes pour savoir s'ils appréciaient le cours de MAT4681, quelle est l'estimation par la méthode des moments de la proportion de gens satisfaits ?

• ce que nous dit la théorie

$$\mathbb{E}(X) = m_1(p) = p$$

or $\widehat{m}_1 = \overline{x}$ donc $\widehat{p}(x) = \overline{x}$

• ce que nous disent les mathématiques
Comme $\widehat{p}(\boldsymbol{x}) = \overline{x}$, on peut utiliser la loi des grands nombres,

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\widehat{p}(\boldsymbol{X}) - p}{\sqrt{p(1-p)}} \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0,1)$$

mais ici $n = 15$ (approximation Gaussienne peut être mauvaise)

Méthode des moments, cas $\mathcal{B}(n,p)$

Que se passe-t-il si $Y_i \sim \mathcal{B}(n,p)$, où n est aussi inconnu ?

$$\mathbb{E}[Y] = np \text{ et } \text{Var}[Y] = np(1-p)$$

On va alors résoudre

$$\begin{cases} \widehat{n}\widehat{p} = \overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \widehat{n}\widehat{p}(1-\widehat{p}) = s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2 \end{cases}$$

soit

$$\widehat{p} = \frac{\overline{y} - s^2}{\overline{y}} \text{ et } \widehat{n} = \frac{\overline{y}^2}{\overline{y} - s^2}$$

Note: il est possible d'avoir $\widehat{p} < 0$

Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

Example 3 : On observe des données modélisées par une loi de densité $\mapsto \theta y^{\theta-1}$ pour $y \in [0,1]$. Quels sont les estimateurs de θ?

```
> y = c(0.685, 0.754, 0.853, 0.973, 0.633, 0.97,
    0.984, 0.888, 0.876, 0.451, 0.637, 0.609, 0.898,
    0.761, 0.928, 0.819, 0.91, 0.998, 0.758, 0.931,
    0.981, 0.642, 0.885, 0.553, 0.686)
```

- méthode des moments

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y \cdot \theta y^{\theta-1} dy = \theta \int_0^1 y^\theta dy = \theta \left[\frac{y^{\theta+1}}{\theta+1} \right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

L'estimateur par la méthode des moments vérifie

$$\overline{y} = \frac{\widehat{\theta}}{\widehat{\theta}+1} \text{ soit } \widehat{\theta} = \frac{\overline{y}}{1-\overline{y}}$$

Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

- maximum de vraisemblance

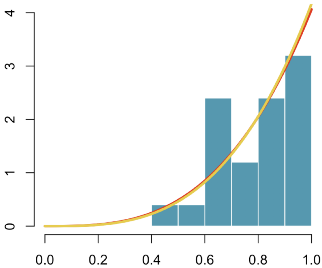
$$\log \mathcal{L}(\theta;\boldsymbol{y}) = n\log(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(y_i)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta;\boldsymbol{y})}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\log(y_i)$$

$$\left.\frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta;\boldsymbol{y})}{\partial\theta}\right|_{\theta=\widehat{\theta}} = 0 \text{ si } \frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n}\log(y_i), \text{ i.e. } \widehat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\log(y_i)}$$

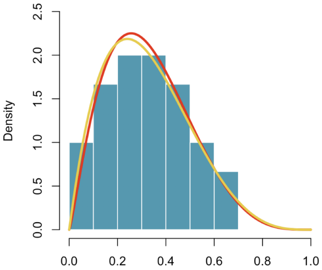
```
> (a=mean(y)/(1-mean(y)))
[1] 4.062526
> (b=-25/sum(log(y)))
[1] 4.166513
```

Les deux densités sont très proches



Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

Les deux estimateurs sont proches
et les densités aussi

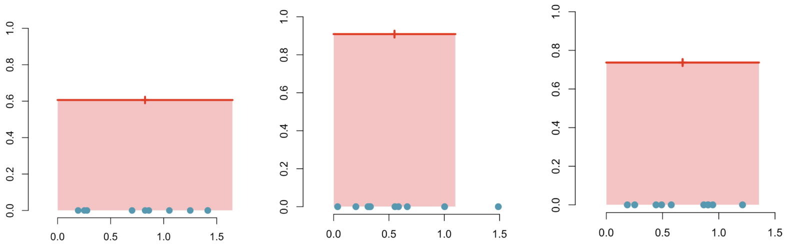


Méthode des Moments

Example: $\{y_1, \cdots, y_n\}$ de loi $\mathcal{U}([0,\theta])$, $\mathbb{E}[Y] = \theta/2$, alors

$$\overline{y} = \widehat{\theta}/2 \text{ i.e. } \widehat{\theta} = 2\overline{y}$$

Même si $y_i \leq \theta$ (par hypothèse), on peut avoir $\widehat{\theta} < y_j$



Note: estimateur du maximum de vraisemblance pour $\mathcal{U}([0,\theta])$?

Méthode des Moments

Théorème Central Limite

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et une variance σ^2. La moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ centrée converge vers une loi normale :

$$\sqrt{n}[\overline{X}_n - \mu] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$