# MAT4681 - Statistique pour les sciences

Arthur Charpentier

# 04 - Moyenne, variance (et rappels de maths) # 2

été 2022

# Variable aléatoire I

Une variable aléatoire $X$ assigne à chaque état de la nature $\omega \in \Omega$ une valeur (réelle). L'évènement $\{\omega : X(\omega) = a\}$ sera noté $X = a$.

**Fonction de masse**

La fonction de masse est $f(a) = \mathbb{P}(X = a)$.

**Fonction de répartition**

La fonction de répartition est $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$

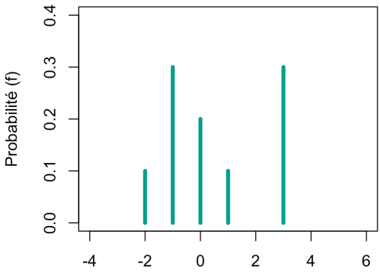
Notons que la fonction de répartition est croissante
(car $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subset \{\omega : X(\omega) \leq b\}$ si $a \leq b$)

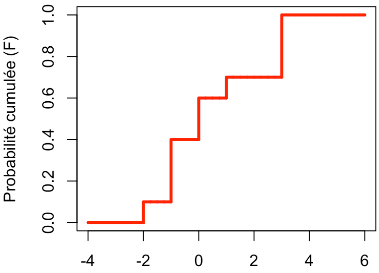
Exemple : Considérons $X$ qui prend 5 valeurs

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| $F(x)$ | 0.1 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 1.0 |

# Variable aléatoire II

```
> x = c(-2, -1, 0, 1, 3)
> p = c(0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.3)
> plot(x, p, type="h")
```




Une fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ vérifie

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

# Variable aléatoire III

$$\begin{cases} f(x,y) = \mathbb{P}[\{X = x\} \cap \{Y = y\}] = \mathbb{P}[X = x, Y = y], \ \forall \ x, y \\ F(x,y) = \mathbb{P}[\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}] = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y], \ \forall \ x, y \end{cases}$$

**Indépendance**

$X$ et $Y$ sont indépendantes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) si et seulement si

$$\begin{cases} f(x,y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y), \ \forall \ x, y \\ F(x,y) &= F_X(x) \cdot F_Y(y), \ \forall \ x, y \end{cases}$$

# Loi de Bernoulli, $x \in \{0, 1\}$

Exemple: $\boldsymbol{x} = \{1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0\}$

**Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $x \in \{0, 1\}$**

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $p \in [0, 1]$, soit

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$$

La notation avec $p$ est la plus usuelle, mais on peut aussi utiliser

$$\text{cote (ou } \textit{odds}\text{)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(X = 0)} = \frac{p}{1 - p} = e^{\theta}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

# Loi binomiale, $x \in \{0, 1, \cdots, n\}$

Exemple: $\boldsymbol{x} = \{2, 1, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 4, 2, 1, 1, 0, 1\}$

**Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $x \in \{0, 1, \cdots, n\}$**

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

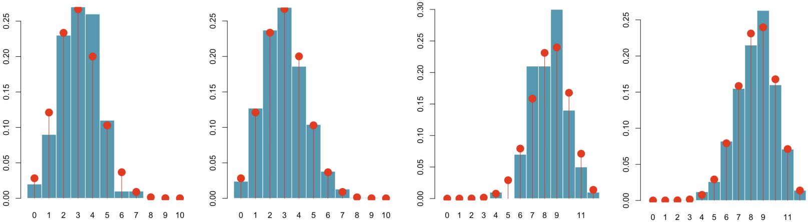
où $p \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}_*$.

Note: souvent, $n$ est connu, alors que $p$ est un paramètre inconnu...
Exemple: $f(5)$ avec $X \sim \mathcal{B}(14, 30\%)$ ($f(5) \approx 19.63\%$)

# Loi de Bernoulli et loi binomiale

Si $Z_1, \cdots, Z_n \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes,

$$X = \sum_{k=1}^{n} Z_k \sim \mathcal{B}(n, p).$$




Aussi, si $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$$

mais si $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, q)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors ... rien

# Loi de Poisson, $x \in \{0, 1, \cdots, \}$

Exemple: $\boldsymbol{x} = \{5, 6, 11, 4, 9, 9, 8, 5, 7, 7, 6, 5, 4, 0, 2, 2, 1, 4, 2, 5\}$
Exemple: $\boldsymbol{x} = \{0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1\}$

**Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $x \in \{0, 1, \cdots\} = \mathbb{N}$**

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x \in \mathbb{N},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Note: on peut montrer que $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z$, donc

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \text{ et donc } \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

# Approximation pour la loi binomiale ★★★

## Loi binomiale et loi de Poisson

si $pn \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

*Dans la pratique, la théorie asymptotique est utilisé selon les cas comme une approximation plus ou moins bonne* [...] *La raison de l'utilisation généralisée de l'infini est qu'il peut fournir des approximations exploitables dans des circonstances où les résultats exacts sont difficiles voire impossibles à obtenir. L'opération mathématique cruciale qui conduit à ces approximations est le passage à la limite, la limite étant l'état où la notion d'infini apparaît. Les limites intéressantes peuvent être nulles, finies, ou infinies. Les limites nulles ou finies fournissent habituellement des approximations recherchées: des éléments difficiles à évaluer dans un contexte réaliste et fini sont remplacés par leurs limites comme approximation*, Davidson & MacKinnon (1993).

# Approximation pour la loi binomiale

**Example 2** Un hôpital a 12000 patients agés, et on a estimé que la probabilité qu'un patient souffre d'un accident cardiaque pendant une journée était de 1/8000. L'hôpital possède seulement trois machines respiratoires nécessaires pour ces accidents cardiaques et se demande si son équipement sera suffisant pour une journée particulière

$X_i = \mathbf{1}(\text{patient } i \text{ souffre d'un accident cardiaque})$,
$X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p = 1/8000$
$X = \displaystyle\sum_{i=1}^{12000} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 12000$. On veut $\mathbb{P}[X \leq 3]$ ?

```
> pbinom(3,12000,1/8000)
[1] 0.9343693133
```

Notons que $X \approx \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = pn = 1.5$

```
> ppois(3,1.5)
[1] 0.9343575456
```

# Approximation pour la loi binomiale

```
> dbinom(0:2, size=10,prob=.2)
[1] 0.1073742 0.2684355 0.3019899
> dpois(0:2,2)
[1] 0.1353353 0.2706706 0.2706706
```

**‘Preuve’ numérique**

| $n$ | $p$ | $\lambda$ | $p_B(0)$ | $p_P(0)$ | $p_B(1)$ | $p_P(1)$ | $p_B(2)$ | $p_P(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.2 | 2 | 0.107 | 0.135 | 0.268 | 0.271 | 0.302 | 0.271 |
| 20 | 0.1 | 2 | 0.122 | 0.135 | 0.270 | 0.271 | 0.285 | 0.271 |
| 50 | 0.04 | 2 | 0.13 | 0.135 | 0.271 | 0.271 | 0.276 | 0.271 |
| 100 | 0.02 | 2 | 0.133 | 0.135 | 0.271 | 0.271 | 0.273 | 0.271 |
| 200 | 0.01 | 2 | 0.134 | 0.135 | 0.271 | 0.271 | 0.272 | 0.271 |

# Approximation pour la loi binomiale ★★★

**Preuve**

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k + O\left(n^{k-1}\right)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

on en déduit

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

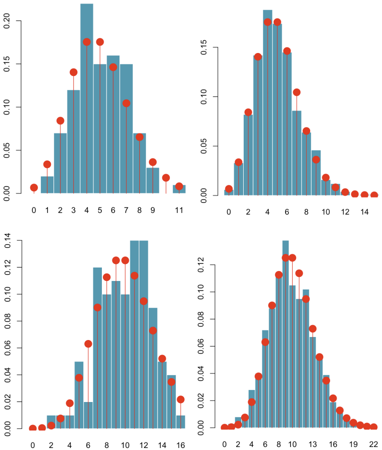
# Loi de Poisson

The Poisson distribution $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, has distribution

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Further, if $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ and $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ are independent, then $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$
A recursive equation can be obtained

$$\frac{\mathbb{P}(X = x + 1)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{\lambda}{x + 1}$$

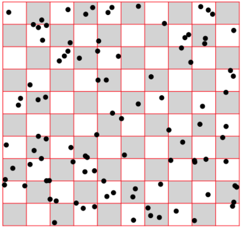



Note: $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, e.g. if $\lambda = 1$, $\mathbb{P}(N = 0) \simeq 36.788\%$ (and $\mathbb{P}(N > 0) \simeq 63.212\%$)

# Application de la loi de Poisson

Considérons un échiquier $10 \times 10$, lançons $n = 100$ pierres, et comptons le nombre de pierre sur chaque case,

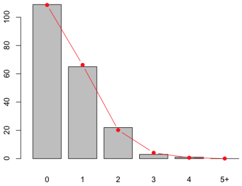
```
> data.frame(N,F=table(nb_cell),P=c
    (dpois(0:4,1),1-ppois(4,1)))
   N  F     P
1  0 36 36.78
2  1 39 36.78
3  2 16 18.39
4  3  7  6.13
5  4  2  1.53
6 5+  0  0.37
> 36+39+16+7+2
[1] 100
```



# Application de la loi de Poisson

Von Bortkiewicz (1898) a étudié le nombre de morts par ruade de cheval dans l'armée prussienne de 1875 à 1894 dans 10 corps de cavalerie (soit 200 corps annuels) .

```
> data.frame(N,F=table(ruades),P=c(
    dpois(0:4,mean(ruades)),1-ppois
    (4,mean(ruades))))
   N   F       P
1  0 109  108.67
2  1  65   66.21
3  2  22   20.22
4  3   3    4.11
5  4   1    0.63
6 5+   0    0.08
> 109+65+22+3+1+0
[1] 200
```



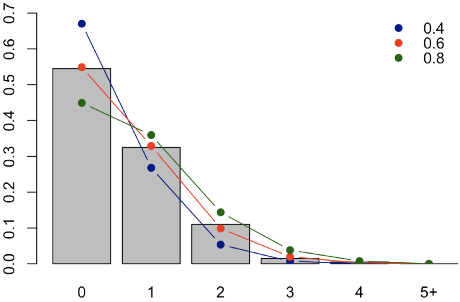
# Application de la loi de Poisson

- choisir une loi de probabilité : loi de Poisson
- si la loi dépend d'un ou plusieurs paramètres, il faut trouver comment choisir ce paramètre [estimation]
- comparer les fréquences observées avec celles prédites par le modèle [prédiction]
- définir un seuil d'acceptabilité et tester si la différence est acceptables [test]

Ici on peut regarder les fréquences de plusieurs lois $\mathcal{P}(\lambda)$

```
> g = function(p) c(dpois(0:4,p),1-ppois(4,p))
> data.frame(N,F=table(ruades),Prob=table(ruades)/sum(
   N))
   N    F   Prob  g(.2)  g(.4)  g(.6)  g(.8)  g(1)
1  0  109  0.545  0.819  0.670  0.549  0.449 0.368
2  1   65  0.325  0.164  0.268  0.329  0.359 0.368
3  2   22  0.110  0.016  0.054  0.099  0.144 0.184
4  3    3  0.015  0.001  0.007  0.020  0.038 0.061
5  4    1  0.005  0.000  0.001  0.003  0.008 0.015
6 5+    0  0.000  0.000  0.000  0.000  0.001 0.004
```

# Application de la loi de Poisson




```
> n
[1] 109    65    22     3     1     0
> 200*g(.61)
[1] 108.6  66.2  20.2   4.2   0.6   0.0
```

# Loi Geometrique, $x \in \mathbb{N}_*$ I

En lien avec la suite/série géométrique, $u_{n+1} = q \times u_n$ avec comme premier terme $u_0$, telle que $u_n = q^n \times u_0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = a \sum_{k=0}^{n} q^k = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{a}{1 - q}$$

lorsque $n \to \infty$, si $q \in [0, 1)$.

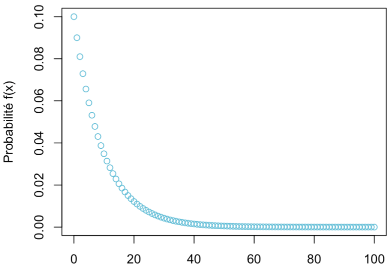
**Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}_*$**

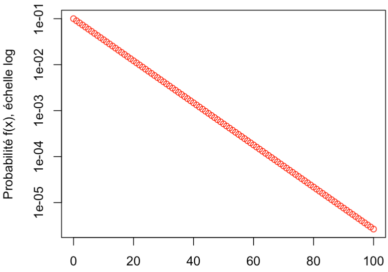
$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = p(1 - p)^{x-1} \text{ pour } x = 1, 2, \cdots$$

où $p \in [0, 1]$, avec $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - p^x$.

# Loi Geometrique, $x \in \mathbb{N}_*$ II

$$f(x) = p\,(1-p)^{x-1} \text{ ou } \log f(x) = \log p + (x-1)\log(1-p)$$




Les points $\{(x, \log f(x))\}$, sont alignés suivant une droite (de pente négative, $\log(1-p)$).

# Loi Geometrique, $x \in \mathbb{N}_*$

Si $Z_1, \cdots, Z_n, \cdots \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes, ntons $X$ la date du premier instant où '1' apparaît,

$$X = \inf_{n \in \mathbb{N}_*} \left\{ n : \; Z_n = 1 \right\} \sim \mathcal{G}(p)$$

Cette distribution vérigie

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\mathbb{P}(X = x+1)}{\mathbb{P}(X = x)} = 1 - p \; (= \text{constante}) \text{ pour } x \geq 1$$

**(autre) Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$**

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x \;\; \text{pour } x = 0, 1, 2, \cdots$$

# Retour sur l'approximation de la loi de Poisson

Soient $Z_i \sim \mathcal{B}(p)$, indépendantes et notons

$$X = \inf_{n\in\mathbb{N}_*} \{n : \; Z_n = 1\} \text{ et } X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

alors $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Si $n \cdot p \simeq \lambda$, alors $X_n \approx \mathcal{P}(\lambda)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 0) &= \mathbb{P}(X > n)\\ &= (1-p)^n\\ &\simeq \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\\ &\approx e^{-\lambda}\end{aligned}$$

| | Number of years without catastrophes | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 |
| 10 | 65.1% | 40.1% | 18.3% | 9.6% | 4.9% |
| 20 | 87.8% | 64.2% | 33.2% | 18.2% | 9.5% |
| 50 | 99.5% | 92.3% | 63.6% | 39.5% | 22.5% |
| 100 | 99.9% | 99.4% | 86.7% | 63.4% | 39.5% |
| 200 | 99.9% | 99.9% | 98.2% | 86.6% | 63.3% |

# Loi de Zipf, $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ I

**Loi de Zipf $\mathcal{Z}(\alpha)$ ou $\mathcal{Z}(n, \alpha)$**

Définie pour $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ par $f(x) \propto x^{-\alpha}$ où $\alpha > 0$.

Si on note $H_{n,s} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ le $n$-ème nombre harmonique généralisé,

$$f(x) = \frac{x^{-\alpha}}{H_{n,\alpha}}, \ x \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

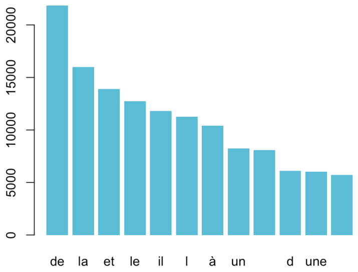
**Log-log-Pareto plot**

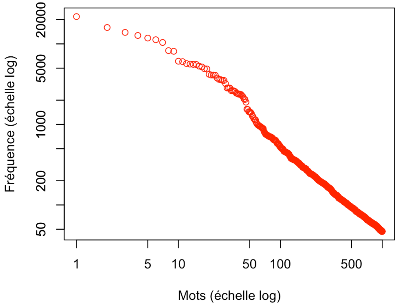
Si $f(x) = H_{n,\alpha}^{-1} x^{-\alpha}$, $\log f(x) = -\log H_{n,\alpha} - \alpha \log x$

# Loi de Zipf, $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ II

Si $f(x) = H_{n,\alpha}^{-1} x^{-\alpha}$, $\log f(x) = -\log H_{n,\alpha} - \alpha \log x$. Aussi, les points $\{(\log x, \log f(x))\}$, sont alignés suivant une droite (de pente négative, $\alpha$).

Application en linguistique, *Les Misérables* de Victor Hugo, avec (environ) 551,536 mots



# Loi de Benford, $x \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ I

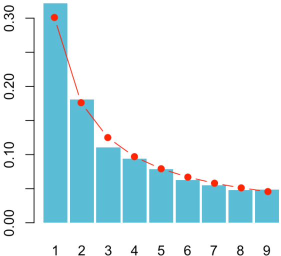
## Loi de Benford

Si $X$ prend les valeurs $\{1, 2, \cdots, 9\}$, et

$$f(x) = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 30.1% | 17.6% | 12.5% | 9.7% | 7.9% | 6.7% | 5.8% | 5.1% | 4.6% |

```
> library(maps)
> data(world.cities)
> X = as.integer(substr(world.
    cities[,3],1,1))
> hist(X)
```



# Espérance mathématique I

## Espérance

Si $X$ prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, avec la fonction de masse $f$, son espérance est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot x_i = \mathbb{P}(X = x_1) \cdot x_1 + \cdots + \mathbb{P}(X = x_k) \cdot x_k$$

$Y = X - \mathbb{E}[X]$ sera la version centrée de $X$.

## Espérance d'une constante, et variable centrée

$$\mathbb{E}[a] = a \text{ et } \mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}[X]\big] = 0$$

En effet, $\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}[X]\big] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X]\big] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0.$

# Espérance mathématique II

**Espérance d'une somme**

Pour tout $a$, $\mathbb{E}[a+X] = a + \mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

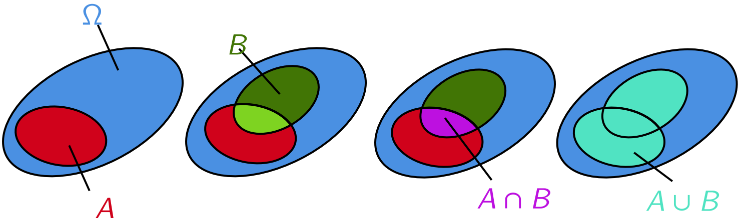
**Espérance d'une somme**

Quelles que soient les variables $X$ et $Y$,

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

# Espérance mathématique III

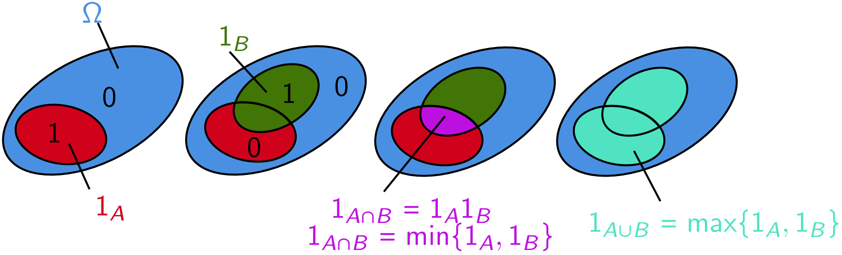
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ et } A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$




$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ survient} \\ 0 \text{ si } A \text{ ne survient pas} \end{cases}$$

# Espérance mathématique IV

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ survient} \\ 0 \text{ si } A \text{ ne survient pas} \end{cases}$$




Alors $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}[A]$ et

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cup B}] = \mathbb{P}[A\cup B] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B]$$

# Espérance mathématique V

On lance un dé (à 6 faces), et on note $X$ la face apparente
Que vaut $\mathbb{E}[X]$ ?

**Réponse**:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

```
> sum(1:6)/6
[1] 3.5
```

On lance deux dés (à 6 faces), et on note $X_1$ et $X_2$ les faces apparentes. Que vaut $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$ ?

**Réponse 1**: on regarde la loi de $X_1 + X_2$

# Espérance mathématique VI

| $x_1 \backslash x_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | |
| 5 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
| 4 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 2/36 |
| 3 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 3/36 |
| 2 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 4/36 |
| 1 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 5/36 |
| | | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 |

```
> sum((2:12)*c(1:6,5:1)/36)
[1] 7
```

**Réponse 2**: l'espérance est linéaire

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

# Espérance mathématique VII

Considérons $X$ qui prend 5 valeurs

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Que vaut $\mathbb{E}[X]$ ?

**Réponse**:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x \cdot f(x) = (-2)\times\frac{1}{10} + (-1)\times\frac{3}{10} + 0\times\frac{2}{10} + 1\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{3}{10}$$

soit

$$\mathbb{E}[X] = \frac{-2-3+0+1+9}{10} = \frac{1}{2}$$

```
> x = c(-2, -1, 0, 1, 3)
> p = c(0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.3)
> sum(x*p)
[1] 0.5
```

# Espérance mathématique VIII

Que vaut $\mathbb{E}[|X|]$ ?

**Réponse**:

$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_x |x| \cdot f(x) = |-2| \times \frac{1}{10} + |-1| \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{2}{10} + 1 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{3}{10}$$

soit

$$\mathbb{E}[|X|] = \frac{2+3+0+1+9}{10} = \frac{3}{2}$$

```
> x = c(-2, -1, 0, 1, 3)
> p = c(0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.3)
> sum(abs(x)*p)
[1] 1.5
```

Notons que $\mathbb{E}[|X|] \neq |\mathbb{E}[X]|$.

# Espérance mathématique IX

Que vaut $\mathbb{E}[X^2]$ ?

**Réponse**:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2 \cdot f(x) = 2^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{2}{10} + 1^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10}$$

soit

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2 + 9^2}{10} = \frac{7}{2}$$

```
> x = c(-2, -1, 0, 1, 3)
> p = c(0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.3)
> sum(x^2*p)
[1] 3.5
```

Notons que $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$.

# Espérance mathématique X

## Espérance d'un produit, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$

Si les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

**Preuve** soit $Z = XY$,

$$\mathbb{P}[Z = z] = \sum_{(x,y):xy=z} \mathbb{P}[X = x, Y = y] = \sum_{(x,y):xy=z} \mathbb{P}[X = x] \cdot \mathbb{P}[Y = y]$$

car $X \perp\!\!\!\perp Y$, et donc

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_z z \cdot \mathbb{P}[Z = z] = \sum_z \sum_{(x,y):xy=z} x\mathbb{P}[X = x] \cdot y\mathbb{P}[Y = y]$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_x x\mathbb{P}[X = x] \cdot \sum_y y\mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

# Espérance mathématique XI

## Espérance de la moyenne

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables de même espérance $\mu$, si $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$.

**Preuve**:

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=\mu} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

# Espérance mathématique XII

**Espérance des lois usuelles**

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{B}(p) & : \mathbb{E}[X] = p \\ X \sim \mathcal{B}(n, p) & : \mathbb{E}[X] = np \\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) & : \mathbb{E}[X] = \lambda \\ X \sim \mathcal{G}(p) & : \mathbb{E}[X] = 1/p \end{cases}$$

# Variance (et écart-type) I

## Variance

La variance de $X$ est définie par

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big]$$

## Variance

Si $X$ prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, avec la fonction de masse $f$, si $\mu = \mathbb{E}[X]$, sa variance est définie par

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot \big(x_i - \mu\big)^2 \text{ où } \mu = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot x_i$$

# Variance (et écart-type) II

**La variance est positive**

Quelle que soit $X$, $\text{Var}[X] \geq 0$.

**Preuve** $\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{f(x_i)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_i - \mu)^2}_{\geq 0} \geq 0.$

**Écart-type**

L'écart-type de $X$ est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

# Variance (et écart-type) III

Exemple : Considérons $X$ qui prend 5 valeurs

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |

Quelle est la variance de $X$ ?

On avait vu que

$$\mathbb{E}[X]=\sum_x x\cdot f(x)=(-2)\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{3}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{10}$$

soit

$$\mathbb{E}[X]=\frac{-2-3+0+1+9}{10}=\frac{1}{2}$$

Aussi,

$$\text{Var}[X]=\sum_x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot f(x)=\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{10}+\cdots+\left(3\right.$$

# Variance (et écart-type) IV

soit

$$\text{Var}[X] = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{10} + \cdots + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{3}{10} = \frac{13}{2}$$

```
> x = c(-2, -1, 0, 1, 3)
> p = c(0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.3)
> sum((x-1/2)^2*p)
[1] 3.25
```

**Variance - formule de König-Huygens**

La variance de $X$ vérifie

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

# Variance (et écart-type) V

**Preuve**: pour rappel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \text{E}[X]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}
$$

Si $\text{Var}[X] = 0$, que peut-on dire de $X$ ?

Si $X$ prend les (vraiment) le valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, avec $f(x_i) > 0$,

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{f(x_i)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_i - \mu)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\text{Var}[X] = 0$ si et seulement si $x_i - \mu = 0$, $\forall i$ : $X$ est constante.

# Variance (et écart-type) VI

**Variance**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Var}(a + bX) = b^2\text{Var}(X)$

**Preuve**:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(a + bX) &= \underbrace{\mathbb{E}\left[(a + bX)^2\right]}_{a^2+2ab\mathbb{E}[X]+b^2\mathbb{E}[X^2]} - \underbrace{\mathbb{E}[a + bX]^2}_{(a+b\mathbb{E}[X])^2} \\
&= \left(a^2 + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2\mathbb{E}[X^2]\right) - \left(a^2 + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2\mathbb{E}[X]^2\right. \\
&= b^2\left(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\right) = b^2\text{Var}(X)
\end{aligned}$$

# Variance (et écart-type) VII

**Variance d'une somme, $X \perp\!\!\!\perp Y$**

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

**Preuve**:

$$\text{Var}\big(X+Y\big) = \mathbb{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathbb{E}\big[(X+Y)\big]^2$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}_{=\text{Var}(X)} + \underbrace{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}_{=\text{Var}(Y)} + 2\underbrace{\Big(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY)\Big)}_{=0}$$

i.e. $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

# Variance (et écart-type) VIII

**Variance de la moyenne**

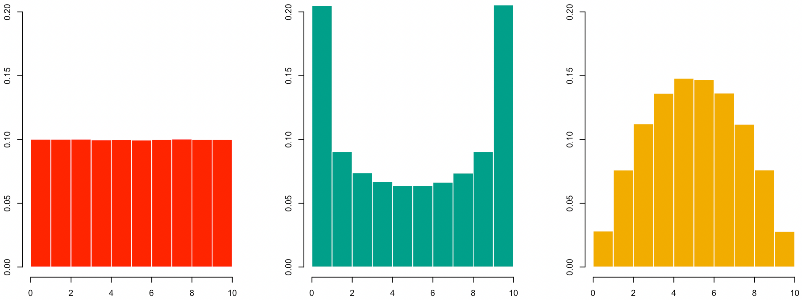
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables indépendantes de même variance $\sigma^2$, si $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\text{Var}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

**Preuve**:

$$\text{Var}(\overline{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\text{Var}(X_i)}_{=\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Variance (et écart-type) IX

On considère les trois distributions suivantes (de même moyenne), associées respectivement aux variables $X$, $Y$, $Z$




Ordonnez les trois distributions en fonction de leur variance

**Réponse**: $\text{Var}[Z] < \text{Var}[X] < \text{Var}[Y]$.

# Variance (et écart-type) X

**Variance des lois usuelles**

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{B}(p) & : \text{Var}[X] = p(1-p) \\ X \sim \mathcal{B}(n,p) & : \text{Var}[X] = np(1-p) \\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) & : \text{Var}[X] = \lambda \\ X \sim \mathcal{G}(p) & : \text{Var}[X] = (1-p)/p^2 \end{cases}$$

# Variable aléatoire continue I

Soient $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ des variables de Bernoulli, $X_i \in \{0, 1\}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \cdots + X_n \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

Si "$\overline{X}_n \to X$" quand $n \to \infty$, alors $X \in [0, 1]$.

Si "$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/2) \to X$" quand $n \to \infty$, alors $X \in \mathbb{R}$.

Examples pratiques : $X$ durée de vie d'une ampoule électrique, $X$ âge d'une personne quand elle décède

# Variable aléatoire continue II

**Fonction de répartition**

La fonction de répartition est $F(a)=\mathbb{P}(X\leq a)$

**Densité**

La densité est $f(a)=\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=a}=F'(a)$

Pour rappel,

$$f(a)=F'(a)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{1}{h}\cdot\mathbb{P}(X\in[a,a+h])$$

ou

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$$

# Variable aléatoire continue III

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,2]$ telle que $f(x) = \alpha x^2$ pour $x \in [0,2]$.
Que vaut $\alpha$ ? Que vaut $\mathbb{P}[X \in [1,2]]$ ?

$X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,2]$ donc

$$\mathbb{P}[X \in [0,2]] = 1 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \alpha x^2 dx = \alpha \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\alpha}{3}$$

autrement dit $\alpha = \frac{3}{8}$. Aussi, la fonction de répartition est, pour $x \in [0,2]$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{8} t^2 dt = \frac{3}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{8}$$

# Variable aléatoire continue IV

avec $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(X) = 1$ pour $x > 2$.
Enfin,

$$\mathbb{P}[X \in [1,2]] = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{8} - \frac{1^3}{8} = \frac{7}{8}$$

On peut montrer que

$$\mathbb{P}[X \in [1,2]] = \int_1^2 \frac{3}{8} t^2 dt = \frac{3}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{8}$$

Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \beta]$ telle que $F(x) = y^2/9$ pour $y \in [0, \beta]$.
Que vaut $\beta$ ?

**Réponse** Comme $F(\beta) = 1$, $\dfrac{\beta^2}{9} = 1$ autrement dit $\beta = 3$ (car $\beta > 0$).

# Variable aléatoire continue V

Si $X$ est continue,

$$\mathbb{P}[X = 0] = 0 \text{ et } \mathbb{P}[X = a] = 0, \ \ \forall a$$

aussi

$$\mathbb{P}\big[X \in [a, b]\big] = \mathbb{P}\big[X \in (a, b)\big]$$

# Variable aléatoire uniforme I

**Loi uniforme (sur $[0,1]$)**

$X$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ si $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

On note $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. La fonction de répartition est

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Loi uniforme**

Si $X$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$, pour tout $h \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\big(X \in [x, x+h]\big) = h, \text{ pour tout } 0 \leq x \leq 1-h.$$

# Variable aléatoire uniforme II

**Loi uniforme (sur $[a, b]$)**

$X$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$.

**Transformation affine d'une variable uniforme**

Si $X$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, pour tout $a, b$, $a > 0$, $Y = aX + b$ suit une loi uniforme sur $[b, b + a]$.

**Preuve** soit $y \in \mathbb{R}$,

$$F(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[aX + b \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right]$$

# Variable aléatoire uniforme III

Si $y \leq b$, $\dfrac{y-b}{a} \leq 0$, $F(y) = 0$; si $y \geq b+a$, $\dfrac{y-b}{a} \geq 1$, $F(y) = 1$.

Sinon $F(y) = \mathbb{P}\left[X \leq \dfrac{y-b}{a}\right] = \dfrac{y-b}{a}$, $f(y) = F'(y) = \dfrac{1}{a}\mathbf{1}_{[b,b+a]}(y)$

# Variable aléatoire exponentielle I

**Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (sur $\mathbb{R}_+$)**

Pour $\lambda > 0$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \text{ ou } F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Soit $X$ une variable aléatoire $\mathcal{E}(0.1)$. Que vaut $\mathbb{P}[X \in [3,7]]$ ?

**Réponse** première approche

$$\mathbb{P}\big[X \in [3,7]\big] = \int_3^7 0.1e^{-0.1x}dx = \Big[e^{-0.1x}\Big]_3^7 = e^{-0.3} - e^{-0.7} \approx 24.4\%$$

Seconde approche

$$\mathbb{P}\big[X \in [3,7]\big] = F(7) - F(3) = [1 - e^{-0.7}] - [1 - e^{-0.3}] \approx 24.4\%$$

# Variable aléatoire exponentielle II

**Loi expontielle**

Si $X$ suit une loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si $h > 0$, $Y = hX$ suit une loi exponentielle $Y \sim \mathcal{E}(\lambda/h)$.

**Preuve** soit $y \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[hX \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{y}{h}\right] = 1 - e^{-\lambda\frac{y}{h}} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{h}y}$$

ce qui correspond à une loi exponentielle de paramètre $\lambda/h$.

**Loi exponentielle**

Si $X$ suit une loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y = e^{-X}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

# Variable aléatoire exponentielle III

**Preuve** soit $y \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[e^{-X} \leq y] = \mathbb{P}\left[-X \leq \log(y)\right] = \mathbb{P}\left[X > -\log(y)\right] = e^{\log(y)}$$

ce qui correspond à une loi uniforme.

**Loi exponentielle et loi géométrique**

Si $X$ suit une loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y = \lceil X \rceil$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

**Preuve** $n = \lceil x \rceil$ signifie $n - 1 < x \leq n$, donc

$$\mathbb{P}[Y = n] = \mathbb{P}\big(X \in [n-1, n]\big) = F(n) - F(n-1) = e^{\lambda(n-1)} - e^{\lambda n}$$

$$\mathbb{P}[Y = n] = \mathbb{P}[X \in [n-1, n]] = [e^{-\lambda}]^{n-1}\Big(1 - e^{-\lambda}\Big)$$

# Variable aléatoire de Pareto I

## Loi de Pareto

$X$ suit une loi de Pareto,

$$\mathbb{P}[X \leq x] = 1 - x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq 1$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

## Loi de Pareto

Si $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $Y = \log X$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

**Preuve** soit $y \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[\log X \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq e^y\right] = 1 - (e^y)^{-\alpha} = 1 - \exp(-\alpha y)$$

ce qui correspond à une loi exponentielle.

# Variable aléatoire gaussienne I

## Loi normale, centrée réduite (sur $\mathbb{R}$)

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ admet pour densité, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

## Loi normale (sur $\mathbb{R}$)

$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

# Variable aléatoire gaussienne II

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\mathbb{P}[X \leq 1.645] = 95\%$$

$$\mathbb{P}[X \leq 1.96] = 97.5\%$$

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

# Variable aléatoire gaussienne III

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\mathbb{P}[X \leq 1.645] = 95\%$$

$$\mathbb{P}[X \leq 1.96] = 97.5\%$$

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | $\boxed{0.9505}$ | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | $\boxed{0.9750}$ | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

# Variable aléatoire gaussienne IV

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

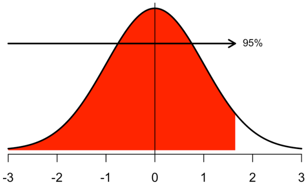
$$\mathbb{P}[X \leq 1.645] = 95\%$$

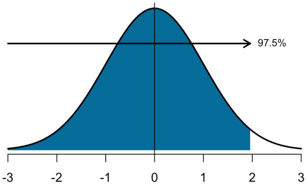
$$\mathbb{P}[X \leq 1.96] = 97.5\%$$

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

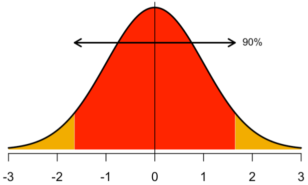
# Variable aléatoire gaussienne V

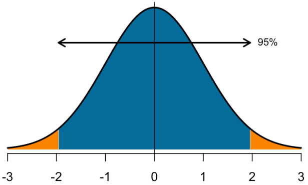
$$\mathbb{P}[X \leq 1.645] = 95\% \text{ et } \mathbb{P}[X \leq 1.96] = 97.5\%$$




$$\mathbb{P}[-1.645 \leq X \leq 1.645] = 90\% \text{ et } \mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 95\%$$

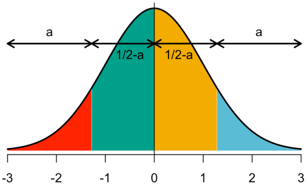


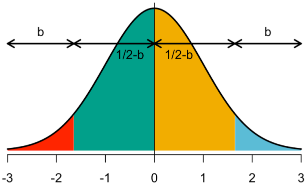



# Variable aléatoire gaussienne VI

La loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique par rapport à 0

$$\mathbb{P}[X < -q] = \mathbb{P}[X > q]$$




**Loi normale**

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

# Variable aléatoire gaussienne VII

Si $X \sim \mathcal{N}(75, 8^2)$, que vaut $\mathbb{P}[X \leq 79]$?

$$\mathbb{P}[X \leq 79] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X - 75}{8} \leq \frac{79 - 75}{8} = \frac{4}{8}\right] = \Phi(0.5)$$

```
> pnorm(.5)
[1] 0.6914625
> pnorm(79,75,8)
[1] 0.6914625
```

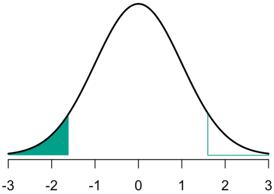
| | 0.00 | 0.01 |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 |

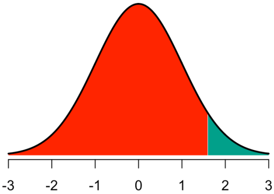
# Variable aléatoire gaussienne VIII

Si $X \sim \mathcal{N}(11, 5^2)$, que vaut $\mathbb{P}[X \leq 3]$?

$$\mathbb{P}[X \leq 3] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X-11}{5} \leq \frac{3-11}{5} = \frac{-8}{5}\right] = \Phi(-1.6) = 1 - \Phi(1.6)$$

```
> 1-pnorm(1.6)
[1] 0.05479929
> pnorm(-1.6)
[1] 0.05479929
> pnorm(3,11,5)
[1] 0.05479929
```




| | 0.00 | 0.01 |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 |

# Variable aléatoire gaussienne IX

Si $X \sim \mathcal{N}(61, 20^2)$, que vaut $\mathbb{P}[X > 20]$?

$$\mathbb{P}[X > 20] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X - 61}{20} > \frac{20 - 61}{20} = \frac{-41}{20}\right] = 1 - \Phi\left(-2.05\right)$$

soit $\Phi\left(2.05\right)$.

```
> pnorm(2.05)
[1] 0.9798178
> 1-pnorm(20,61,20)
[1] 0.9798178
```

| | 0.00 | 0.05 |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5199 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5596 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5987 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6368 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6736 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.7088 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7422 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7734 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.8023 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8289 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8531 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8749 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8944 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9115 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9265 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9394 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9505 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9599 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9678 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9744 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9798 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9842 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9878 |

# Variable aléatoire gaussienne X

Si $X \sim \mathcal{N}(64, 5^2)$, que vaut $\mathbb{P}[X \in [63, 72]]$?

$$\mathbb{P}[X \leq 72] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X-64}{5} \leq \frac{72-64}{5} = \frac{8}{5}\right] = \Phi(1.6)$$

$$\mathbb{P}[X \geq 63] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X-64}{5} \geq \frac{63-64}{5} = \frac{-1}{5}\right] = \Phi(-0.2)$$

```
> pnorm(-.2)
[1] 0.4207403
> pnorm(63,64,5)
[1] 0.4207403
> pnorm(1.6)
[1] 0.9452007
> pnorm(72,64,5)
[1] 0.9452007
> pnorm(1.6)-pnorm(-.2)
[1] 0.5244604
```

# Variable aléatoire gaussienne XI

Si $X \sim \mathcal{N}(64, 5^2)$, que vaut $\mathbb{P}[X \in [63, 72]]$ ?

```
> pnorm(1.6)-pnorm(-.2)
[1] 0.5244604
```

Notons que

$$\mathbb{P}[X \in [63, 72]] = \int_{63}^{72} f(x)dx = \int_{-0.2}^{+1.6} \varphi(z)dz$$

```
> integrate(dnorm,-.2,1.6)
0.5244604 with absolute error < 5.8e-15
```

# Variable aléatoire gaussienne XII

Si $X \sim \mathcal{N}(10, 1.5^2)$, que serait $q$ tel que $\mathbb{P}[X \leq q] = 0.25$ ?

$$\mathbb{P}[X \leq q] = \mathbb{P}\left[Z = \frac{X-10}{1.5} \leq \frac{q-10}{1.5}\right] = 0.25$$

Or $\Phi(z) = 0.25$ signifie que que $z \approx -0.6745$

```
> qnorm(.25)
[1] -0.6744898
> pnorm(-0.6744898)
[1] 0.25
```

donc $\dfrac{q-10}{1.5} = -0.6745$, soit $q = 10 - -0.6745 \times 1.5 = 8.988$

```
> qnorm(.25,10,1.5)
[1] 8.988265
> pnorm(8.988265,10,1.5)
[1] 0.249999
```

# Variable aléatoire gaussienne XIII

La taille d'un enfant de 13 ans suit une loi normale, de moyenne 156 cm, et d'écart-type 4.2 cm. Quelle est la probabilité qu'un garçon choisit au hasard mesure entre 150 cm et 160 cm ?

Autrement dit $X \sim \mathcal{N}(156, 4.2^2)$, et on veut $\mathbb{P}[X \in [150, 160]]$,

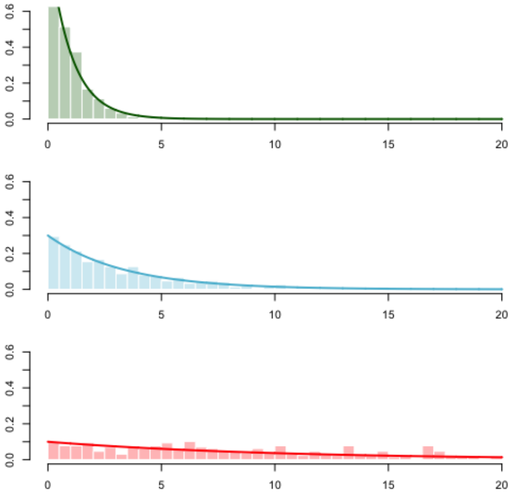
$$\mathbb{P}[150 \leq X \leq 160] = \mathbb{P}\left[\frac{150-156}{4.2} \leq \underbrace{\frac{X-156}{4.2}}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{160-156}{4.2}\right]$$

i.e. $\mathbb{P}[-1.43 \leq Z \leq 0.95]$ qui vaut environ $3/4$,

```
> pnorm((160-156)/4.2)
[1] 0.8295481
> pnorm((150-156)/4.2)
[1] 0.07656373
> pnorm((160-156)/4.2) - pnorm((150-156)/4.2)
[1] 0.7529844
```

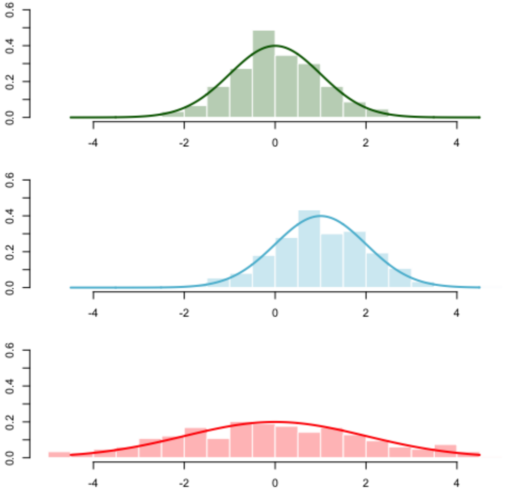
# Variables aléatoires continues I

| | | |
|---|---|---|
| 0.337 | 1.032 | 1.648 |
| 0.655 | 2.195 | 13.24 |
| 1.876 | 2.141 | 18.912 |
| 1.035 | 11.205 | 0.033 |
| 1.055 | 8.614 | 2.287 |
| 4.424 | 0.884 | 16.902 |
| 1.238 | 0.025 | 1.058 |
| 0.762 | 1.551 | 0.26 |
| 1.391 | 0.413 | 11.219 |
| 0.147 | 7.808 | 19.567 |
| 0.957 | 6.545 | 2.917 |
| 0.54 | 0.76 | 9.263 |
| 1.23 | 4.282 | 1.831 |
| 2.895 | 0.812 | 4.102 |
| 0.436 | 5.918 | 10.66 |
| 0.14 | 3.469 | 7.839 |
| 0.146 | 7.031 | 0.379 |
| 1.182 | 12.194 | 5.28 |
| 0.755 | 1.401 | 17.2 |



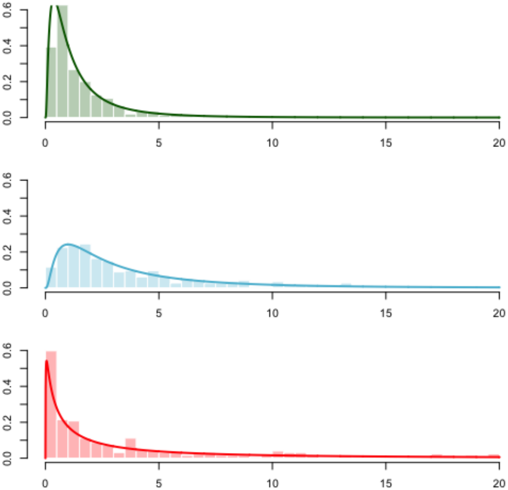
# Variables aléatoires continues II

| | | |
|---|---|---|
| 0.821 | -0.294 | -0.496 |
| 0.944 | 0.879 | -3.585 |
| -0.016 | 0.516 | -0.597 |
| -0.045 | 2.069 | -0.847 |
| 1.125 | 0.964 | 5.351 |
| -2.215 | 0.344 | -2.798 |
| -0.621 | 0.546 | -0.77 |
| 0.39 | 1.099 | 0.665 |
| 1.512 | 2.044 | 0.329 |
| -0.305 | 1.323 | 0.443 |
| 0.576 | -0.025 | 4.003 |
| 0.738 | 1.567 | -0.447 |
| 0.487 | 1.083 | -2.993 |
| -0.82 | 2.512 | -2.273 |
| 0.33 | 2.654 | -0.273 |
| 1.595 | 0.616 | 1.084 |
| -0.836 | 2.971 | 1.057 |
| 0.184 | -0.047 | 3.005 |
| -0.626 | 1.894 | -0.682 |



# Variables aléatoires continues III

| | | |
|---|---|---|
| 2.273 | 0.745 | 1.655 |
| 2.57 | 2.408 | 0.075 |
| 0.984 | 1.675 | 1.496 |
| 0.956 | 7.918 | 1.165 |
| 3.08 | 2.622 | 573.342 |
| 0.109 | 1.411 | 0.166 |
| 0.537 | 1.726 | 1.258 |
| 1.477 | 3.001 | 5.287 |
| 4.535 | 7.718 | 3.776 |
| 0.737 | 3.755 | 4.235 |
| 1.779 | 0.976 | 148.924 |
| 2.092 | 4.793 | 1.739 |
| 1.628 | 2.953 | 0.136 |
| 0.44 | 12.332 | 0.28 |
| 1.39 | 14.213 | 2.068 |
| 4.93 | 1.852 | 8.04 |
| 0.434 | 19.518 | 7.819 |
| 1.202 | 0.954 | 54.864 |
| 0.534 | 6.644 | 1.374 |



# Variables aléatoires continues IV

**Somme de variables gaussiennes, $X \perp\!\!\!\perp Y$**

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

*propriété admise*

**Moyenne de variables gaussiennes, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$**

Si $X_1, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont indépendantes,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

*propriété admise*

# Espérance et variance I

**Espérance**

Si $X$ a pour densité $f$,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

(si l'intégrale est convergente).

Soit $X$ une variable aléatoire $\mathcal{U}([0,1])$. Que vaut $\mathbb{E}[X]$ ?

**Réponse**

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

# Espérance et variance II

Soit $X$ une variable aléatoire $\mathcal{E}(\lambda)$. Que vaut $\mathbb{E}[X]$ ?

**Réponse**

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\lambda x \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \lambda \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

# Espérance et variance III

**Variance**

Si $X$ a pour densité $f$,

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}[X]\right)^2 f(x)dx$$

(si l'intégrale est convergente).

Soit $X$ une variable aléatoire $\mathcal{U}([0,1])$. Que vaut Var$[X]$ ?

**Réponse** on a vu que $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{2}$,

$$\text{Var}[X] = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{2}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{12}$$

# Espérance et variance IV

## Variable gaussienne

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

*propriété admise*

## Variable centrée et réduite

Si $X$ a pour moyenne $\mu$ et pour variance $\sigma^2$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

est la version centrée et réduite de $X$.
$Z$ est centrée car $\mathbb{E}[Z] = 0$ et réduite car $\text{Var}[Z] = 1$.

# Espérance et variance V

## Espérance des lois usuelles

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{U}([0,1]) & : \mathbb{E}[X] = 1/2 \\ X \sim \mathcal{U}([a,b]) & : \mathbb{E}[X] = (a+b)/2 \\ X \sim \mathcal{E}(\lambda) & : \mathbb{E}[X] = 1/\lambda \\ X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) & : \mathbb{E}[X] = \mu \\ X \sim \mathcal{P}(\alpha) & : \mathbb{E}[X] = \alpha/(\alpha-1), \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

# Espérance et variance VI

## Variance - formule de König-Huygens

La variance de $X$ vérifie

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

## Variance des lois usuelles

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{U}([0,1]) & : \text{Var}[X] = 1/12 \\ X \sim \mathcal{U}([a,b]) & : \text{Var}[X] = (b-a)^2/12 \\ X \sim \mathcal{E}(\lambda) & : \text{Var}[X] = 1/\lambda^2 \\ X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) & : \text{Var}[X] = \sigma^2 \\ X \sim \mathcal{P}(\alpha) & : \text{Var}[X] = \alpha/(\alpha-1)^2(\alpha-2) \end{cases}$$

# Approximation pour la loi binomiale ⭐⭐⭐

**Théorème de de Moivre–Laplace**

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

**Preuve** Formule de Stirling $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque $n \to \infty$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p,$$

$$\simeq \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}} p^k q^{n-k}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k\,(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

# Approximation pour la loi binomiale ★★★

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{\log\left(\left(\frac{np}{k}\right)^k\right) + \log\left(\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-k\log\left(\frac{k}{np}\right) + (k-n)\log\left(\frac{n-k}{nq}\right)\right\}$$

On pose $x = \dfrac{(k-np)}{\sqrt{npq}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-k\log\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) + (k-n)\log\left(\frac{n - np - x\sqrt{npq}}{nq}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-k\log\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (k-n)\log\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-k\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \cdots\right) + (k-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} - \right.\right.$$

car $\log(1+x) \simeq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots$

# Approximation pour la loi binomiale ★★★

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-k\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \cdots\right) + (k-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} -\right.\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2 q - \frac{1}{2}x^2 p - \cdots\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

i.e.

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}$$

ou, en posant $\mu = np$ et $\sigma^2 = npq$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

# Approximation pour la loi binomiale

**Example 3** On lance 10 pièces (bien équilibrées). Quelle est la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 fois '*face*'

- valeur exacte (loi binomiale)

Soit $X$ le nombre de '*face*' obtenus, $X \sim \mathcal{B}(10, 1/2)$,

$$\mathbb{P}[X=3] = \binom{10}{3}\frac{1}{2^3}\frac{1}{2^7} = \frac{15}{128},\ \mathbb{P}[X=4] = \binom{10}{4}\frac{1}{2^4}\frac{1}{2^6} = \frac{105}{512}$$

$$\mathbb{P}[X=5] = \binom{10}{5}\frac{1}{2^5}\frac{1}{2^5} = \frac{63}{256},\ \mathbb{P}[X=6] = \binom{10}{6}\frac{1}{2^6}\frac{1}{2^4} = \frac{105}{512}$$

donc

$$\mathbb{P}[X \in \{3,4,5,6\}] = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} \sim 0.7734$$

```
> sum(dbinom(3:6,size = 10,prob = 1/2))
[1] 0.7734375
```

# Approximation pour la loi binomiale

**Example 3** On lance 10 pièces (bien équilibrées). Quelle est la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 fois '*face*'

- valeur approchée (loi normale) - version 1

$\mu = np = 10/2 = 5$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10/4} = \sqrt{5}/2 \sim 1.58$

```
> pnorm(6,5,sqrt(5)/2)-pnorm(3,5,sqrt(5)/2)
[1] 0.6335038
```

On peut centrer et réduire : $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $X = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$

$$\mathbb{P}[3 < Y \leq 6] = \mathbb{P}\left[\frac{3-5}{1.58} < \underbrace{\frac{Y-5}{1.58}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{6-5}{1.58}\right] = \mathbb{P}[-1.788 < X \leq 0.894]$$

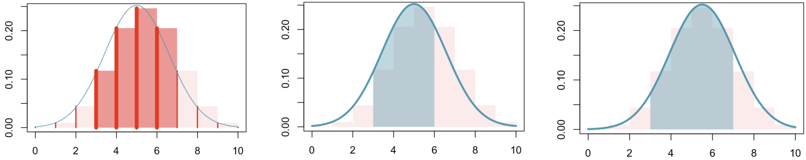
soit $\mathbb{P}[X \leq 0.894] - \mathbb{P}[X \leq -1.788]$

```
> pnorm((6-5)/sqrt(10)*2)-pnorm((3-5)/sqrt(10)*2)
[1] 0.6335038
```

# Approximation pour la loi binomiale

**Example 3** On lance 10 pièces (bien équilibrées). Quelle est la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 fois '*face*'

- valeur approchée (loi normale) - version 2




```
1 > pnorm((6+.5-5)/sqrt(10/4))-pnorm((3-.5-5)/sqrt(10/4))
2 [1] 0.771686
```

- décallage de +1/2 (Berry-Essen)
- $X \in \{3, 4, 5, 6\}$ : intervalle de longueur 4 (et pas 3)

# Approximation pour la loi binomiale ★★★

L'inégalité de Berry-Essen fournit une borne de la différence entre les deux fonctions de répartition lorsque $n$ est grand, pour $X$ une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $Y$ de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition $\Phi$ :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leq x\right)-\Phi(x)\right|\leq\frac{0.4748}{\sqrt{npq}}$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(X\leq x)=\Phi\left(\frac{x-np+1/2}{\sqrt{npq}}\right)+\frac{\text{quelque chose}}{\sqrt{n}}$$

uniformément pour tout $x$, lorsque $n\to\infty$.

# Approximation pour la loi binomiale I

**Example 2** Un hôpital a 12000 patients agés, et on a estimé que la probabilité qu'un patient souffre d'un accident cardiaque pendant une journée était de 1/8000. L'hôpital possède seulement trois machines respiratoires nécessaires pour ces accidents cardiaques et se demande si son équipement sera suffisant pour une journée particulière

On avait utilisé

```
> pbinom(3,12000,1/8000)
[1] 0.9343693133
> ppois(3,1.5)
[1] 0.9343575456
```

On peut aussi considérer

```
> mu = 12000/8000
> s2 = 12000/8000*(1-1/8000)
> pnorm(3.5,mu,sqrt(s2))
[1] 0.9487755
```

# Loi des grands nombres et théorème central limite I

## Loi des grands nombres

Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. de même moyenne $\mu$ et de même variance $\sigma^2$. Soit

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

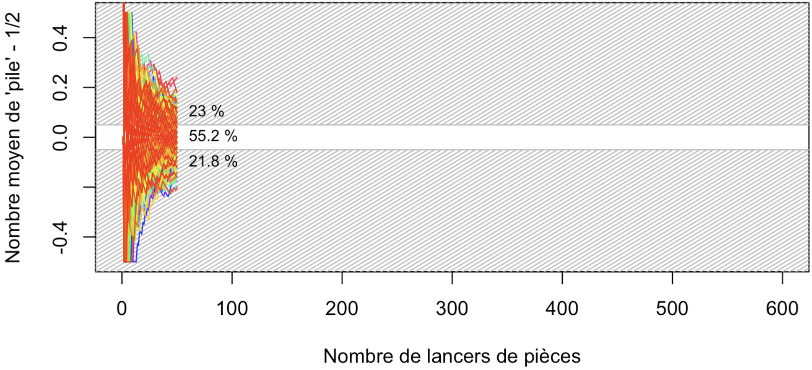
alors pour tout $\varepsilon$ (aussi petit que possible),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon\right) = 1$$

Avec $n$ suffisamment grand, $\overline{X}_n$ sera aussi proche que nous le souhaitons de $\mu$, avec une probabilité proche de 1.

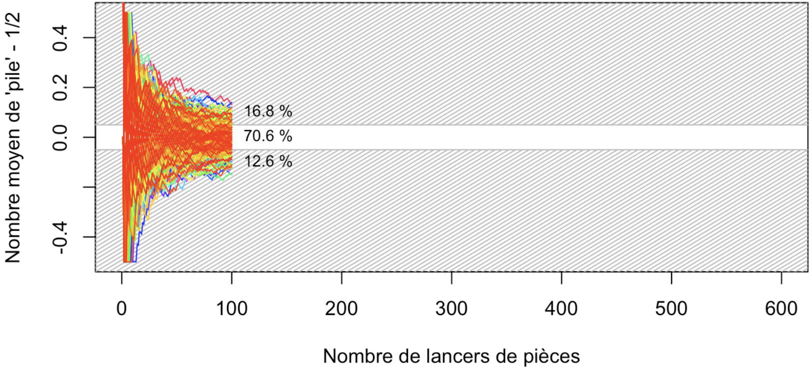
# Convergence, loi des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_{50} - \mu\right| > 5\%\right) \sim 45\% \; (n = 50 \text{ lancers})$$



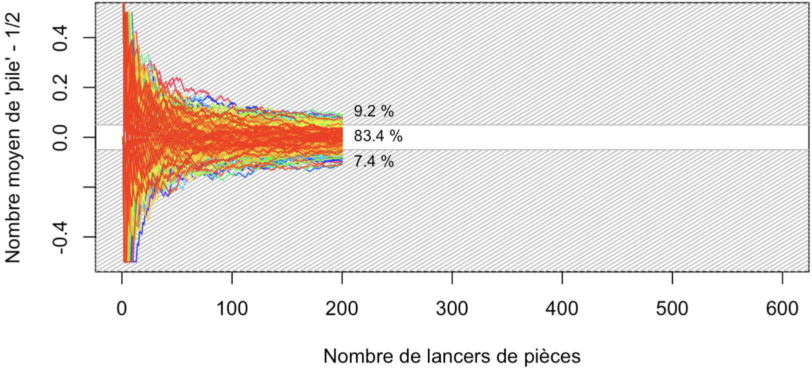
# Convergence, loi des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_{100} - \mu\right| > 5\%\right) \sim 30\% \; (n = 100 \text{ lancers})$$



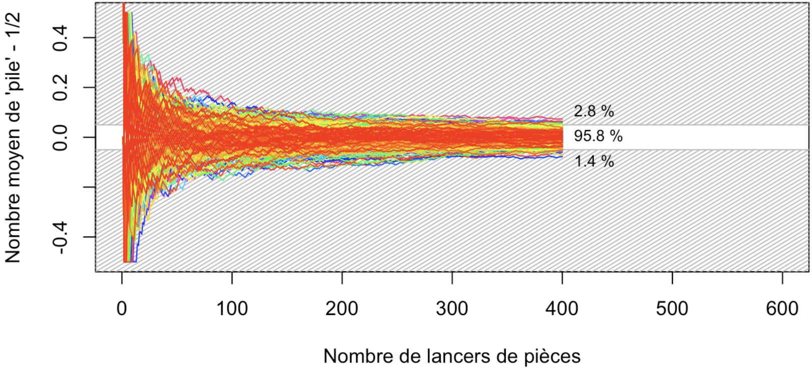
# Convergence, loi des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_{200} - \mu\right| > 5\%\right) \sim 17\% \ (n = 200 \text{ lancers})$$



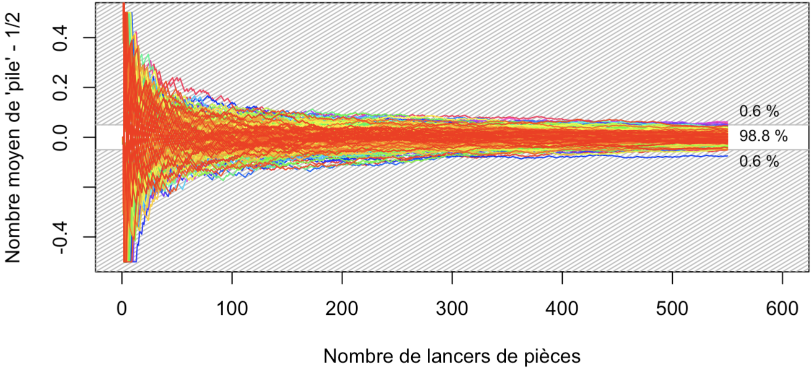
# Convergence, loi des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_{400} - \mu\right| > 5\%\right) \sim 6\% \; (n = 400 \text{ lancers})$$



# Convergence, loi des grands nombres

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_{500} - \mu\right| > 5\%\right) \sim 1\% \ (n = 500 \text{ lancers})$$



# Loi des grands nombres et théorème central limite I

**Théorème Central Limite**

Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. de même moyenne $\mu$ et de même variance $\sigma^2$. Soit

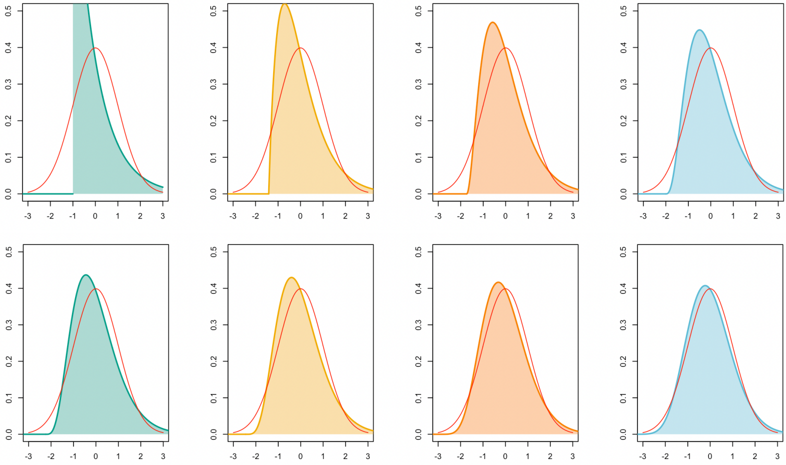
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

alors

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

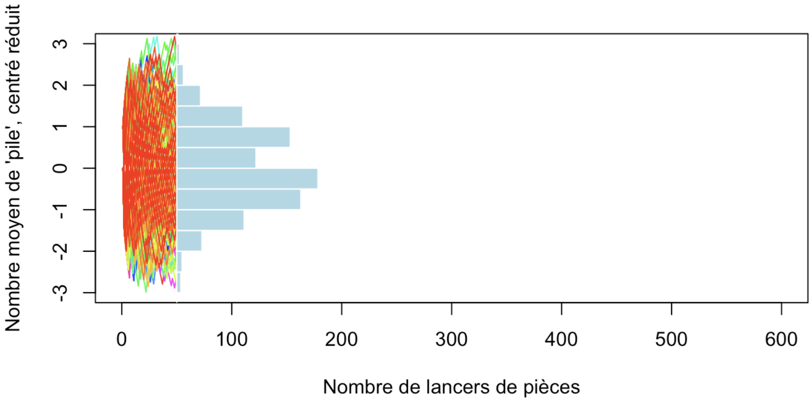
# Loi des grands nombres et théorème central limite II

**Exemple** : moyenne standardisée de variables $\mathcal{E}(1)$ indépendantes ($n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 20$)



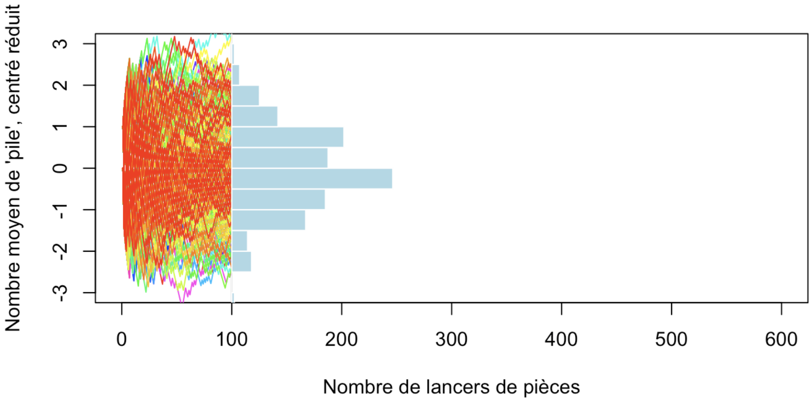
# Convergence, théorème central limite

Histogramme de $\sqrt{50} \cdot \dfrac{\overline{X}_{50} - \mu}{\sigma}$ ($n = 50$ lancers)



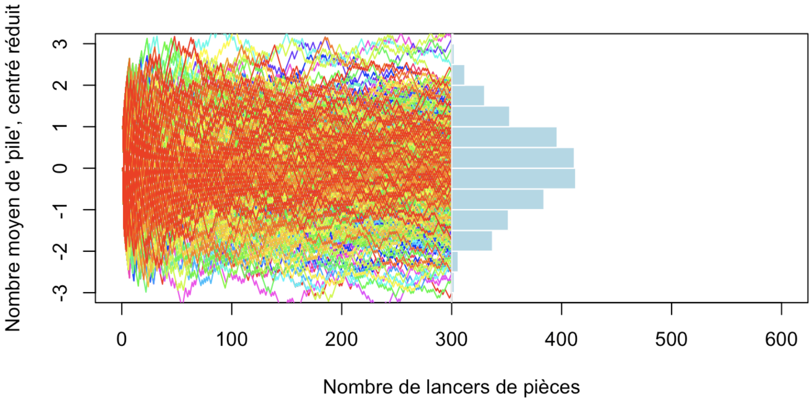
# Convergence, théorème central limite

Histogramme de $\sqrt{100} \cdot \dfrac{\overline{X}_{100} - \mu}{\sigma}$ ($n$ = 100 lancers)



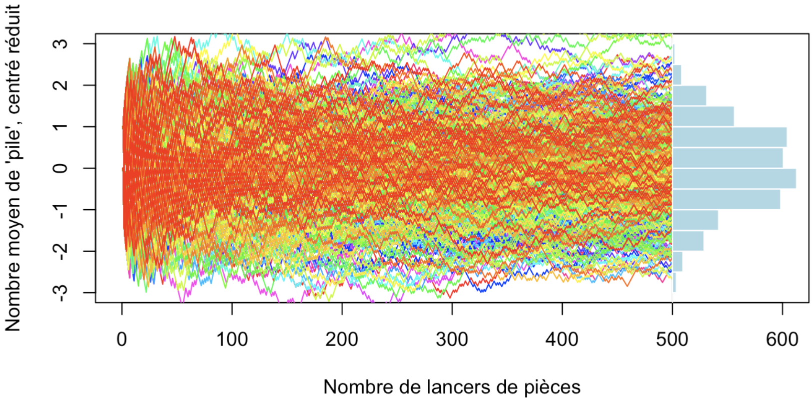
# Convergence, théorème central limite

Histogramme de $\sqrt{300} \cdot \dfrac{\overline{X}_{300} - \mu}{\sigma}$ ($n = 300$ lancers)



# Convergence, théorème central limite

Histogramme de $\sqrt{500} \cdot \dfrac{\overline{X}_{500} - \mu}{\sigma}$ ($n$ = 500 lancers)

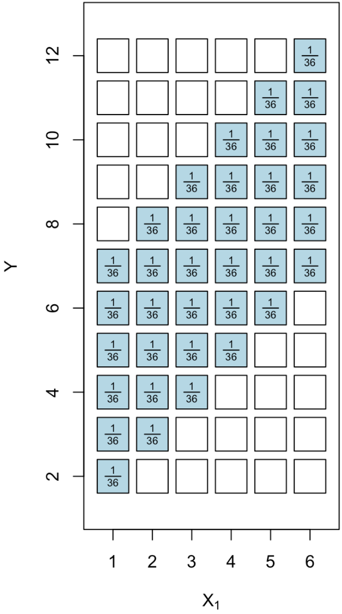


# Distribution jointe

On lance 2 dés (6 face)
$X_1$ la valeur faciale du 1er dé
$X_2$ la valeur faciale du 2nd dé
Notons $Y = X_1 + X_2$.
$\mathbb{P}(X_1 = x_1, Y = y)$ est la loi jointe

- $x_1$ $(\in \{1, 2, \cdots, 6\})$
- $y$ $(\in \{2, 3, \cdots, 12\})$

E.g. $\mathbb{P}(X_1 = 4, Y = 3) = 0$



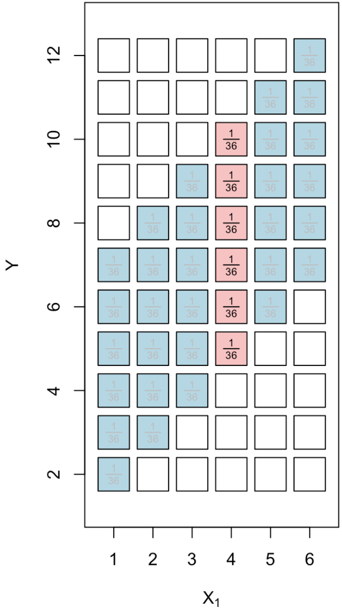
# Conditionnement

$$\mathbb{P}(Y = y | X_1 = x_1) \stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, Y = y)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1)}$$

E.g. $x_1 = 4$, alors

$$\mathbb{P}(Y = y | X_1 = 4) = \frac{1}{6}, \ y \in \{5, 6, \cdots, 10\}$$

(uniforme sur $\{5, 6, \cdots, 10\}$)



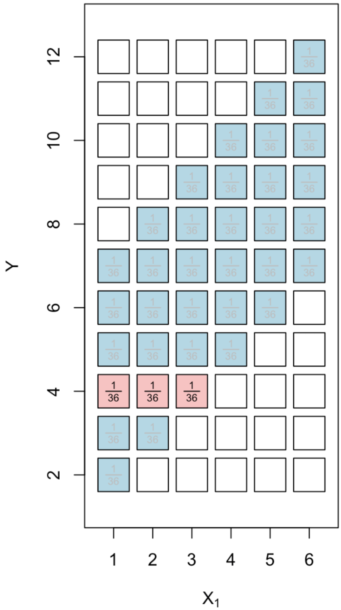
# Conditionnement

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 | Y = y) \stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

E.g. $y = 4$, alors

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 | Y = 4) = \frac{1}{3},\ x_1 \in \{1, 2, 3\}$$

(uniforme sur $\{1, 2, 3\}$)



# Couple de variables aléatoires I

La fonction de répartition du couple $(X,Y)$ est

$$F(\boldsymbol{z}) = F(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \text{ pour tout } \boldsymbol{z} = (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

La densité de $\boldsymbol{Z} = (X,Y)$ est

$$f(\boldsymbol{z}) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ dans le cas continu, } \boldsymbol{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) \text{ dans le cas discret, } \boldsymbol{z} = (x,y) \end{cases}$$

**Indépendance**

$X$ et $Y$ sont indépendants (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) si et seulement si

$$\begin{cases} F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y), \ \forall\ x,y \in \mathbb{R} \\ f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y), \ \forall\ x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*conséquence directe de la définition*

# Couple de variables aléatoires II

$f(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)$ désigne la loi uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \times \mathbf{1}_{[0,1]}(y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**$\mathbb{E}[h(X,Y)]$**

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires,

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \times f(x,y) dxdy$$

# Couple de variables aléatoires III

## Covariance

On appelle covariance d'un couple de variable aléatoire

$$\text{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

(à condition que $\mathbb{E}[X^2]<\infty$ et $\mathbb{E}[Y^2]<\infty$).

## Covariance

Soient $X$, $X_1$, $X_2$ et $Y$ des variables aléatoires,

- $\text{Cov}(X,Y)=\text{Cov}(Y,X)$,
- $\text{Cov}(X,X)=\text{Var}(X)$,
- $\text{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\text{Cov}(X,Y)$,
- $\text{Cov}(X_1+X_2,Y)=\text{Cov}(X_1,Y)+\text{Cov}(X_2,Y)$,

# Couple de variables aléatoires IV

## Covariance

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires,

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow \text{Cov}(X,Y) = 0$$

**Preuve** Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, et

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx}_{\mathbb{E}[X]} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} yf_Y(y)dy}_{\mathbb{E}[Y]}$$

## Covariance

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires,

$$\text{Cov}(X,Y) = 0 \not\Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

# Couple de variables aléatoires V

**Example** Soient $X, Z$ trois variables $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. Si $Y = rX + \sqrt{1-r^2}Z$,

$$\text{Cov}(X, Y^2) = 0, \;\; \text{Cov}(X, Y) = r$$

et $X$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes

**Example** Soit $(X, Y)$ uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$,

$$f(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \times \mathbf{1}_{[0,1]}(y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

alors $X \perp\!\!\!\perp Y$, et

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \left( \int_0^1 x dx \right) y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

# Couple de variables aléatoires VI

Soient $X_1, \cdots, X_{12}$ des indicatrices d'obtention de 'face' en lançant 12 fois une pièce. Soient $Y_1 = X_1 + \cdots + X_7$ et $Y_2 = X_6 + \cdots + X_{12}$.

Que vaut $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ ?

Comme $X_i = \mathbf{1}(\text{'face' au } i\text{-ème lancer})$, $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ donc $\mathbb{E}[X_i] = 1/2$ et $\text{Var}[X_i] = 1/4$.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^{7} \sum_{i=6}^{12} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

avec pour $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$, aussi

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \text{Cov}(X_6, X_6) + \text{Cov}(X_7, X_7) = \text{Var}(X_6) + \text{Var}(X_7) = \frac{1}{2}.$$

# Couple de variables aléatoires VII

## Corrélation

On appelle corrélation d'un couple de variable aléatoire

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

(à condition que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$).

## Corrélation $\in [-1, +1]$

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires,

$$\text{Cor}(X, Y) \in [-1, +1].$$

*propriété admise*

# Couple de variables aléatoires VIII

**Corrélation $\pm 1$**

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires,

$$\text{Cor}(X,Y) = \pm 1 \Longleftrightarrow Y = aX + b$$

*propriété admise*

**Non linéarité de la variance**

For all $X$ and $Y$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}[Y] + 2ab\text{Cov}(X,Y).$$

**Note** $\text{Cor}(X,Y)$ est parfois appelée 'corrélation de Pearson'

# Géométrie des probabilités ★★★ I

Si on considère des variables centrées,

$$\text{Cov}[X,Y] = \langle X,Y\rangle = \mathbb{E}[XY] \text{ et } \text{sd}[X] = \|X\| = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

définissent respectivement un produit scalaire, et une norme.
Aussi on définit

$$X \perp Y \text{ si } \langle X,Y\rangle = \text{Cov}[X,Y] = 0.$$

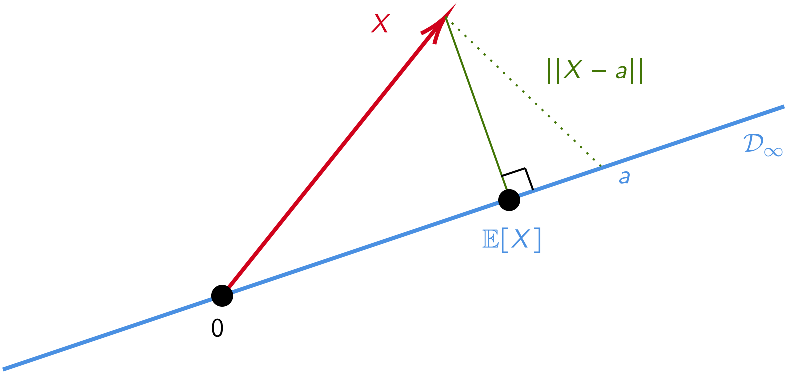
L'ensemble des constantes est une droite $\mathcal{D}_1$ dans cet ensemble (appelé $L^2$)

L'espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ est la projection orthogonale de $X$ sur $\mathcal{D}_1$, car

$$\underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\big\{\|X-a\|\big\} = \underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\big\{\|X-a\|^2\big\} = \underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\big\{\mathbb{E}\big[(X-a)^2\big]\big\} = \mathbb{E}[X]$$

# Géométrie des probabilités ★★★ II

$$\underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\left\{\|X-a\|\right\} = \underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\left\{\|X-a\|^2\right\} = \underset{a\in\mathcal{D}_1}{\text{argmin}}\left\{\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]\right\} = \mathbb{E}[X]$$



# Géométrie des probabilités ★★★ III

Rappelons que la matrice de projection orthogonale sur $\vec{\boldsymbol{x}}$, si $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}]$, s'écrit $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top$

```
> set.seed(1)
> x=rnorm(10)
> mean(x)
[1] 0.1322028
> un = matrix(1,10,1)
> p = un %*% solve(t(un)%*%un) %*% t(un)
> p%*%x
           [,1]
 [1,] 0.1322028
 [2,] 0.1322028
 [3,] 0.1322028
      ...
 [9,] 0.1322028
[10,] 0.1322028
```

# Géométrie des probabilités ★★★ IV

Notons que $\text{cor}[X,Y] = \dfrac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|}$

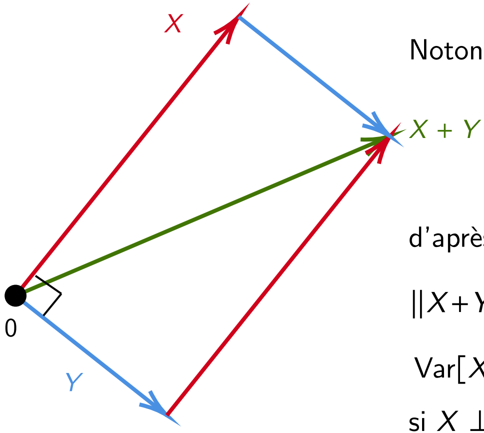
Comme pour un produit scalaire, on a (toujours)

$$-\|X\|\times\|Y\| \leq \langle X,Y\rangle \leq \|X\|\times\|Y\|$$

on en déduit que $\text{cor}[X,Y]\in[-1,+1]$.

De plus, $\text{cor}[X,Y]=\pm 1$ si et seulement si $X /\!\!/ Y$, soit $X = aY$

# Géométrie des probabilités ★★★ V




Notons que $\text{Var}[X] = \|X\|^2$

d'après le théorème de Pythagore,

$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ si $X \perp Y$

$\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

si $X \perp Y$ ($\text{cor}[X,Y] = 0$)
a fortiori si $X \perp\!\!\!\perp Y$

# Géométrie des probabilités ★★★ VI

On peut aussi noter $\mathcal{H}$ l'espace de toutes les variables qui peuvent s'écrire $\psi(X)$ pour $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Formellement, $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est convexe.

On peut montrer que $\mathbb{E}[Y|X]$ est la projection orthogonale de $Y$ sur $\mathcal{H}$... mais on en reparlera probablement plus tard