Formulaire examen intra MAT4681

- L'union de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, contient les éléments de A et les éléments de B
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
- L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de A qui sont aussi éléments de B
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- La permutation fait référence aux différentes façons d'organiser un ensemble d'objets dans un ordre séquentiel.
- La combinaison fait référence à plusieurs manières de choisir des éléments dans un grand ensemble d'objets, de sorte que leur ordre n'a pas d'importance.
- Une probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ telle que
  · $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  · si $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
  où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de Ω.
- $A_1, \cdots, A_k$ forme une partition de Ω si
  · $A_1 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$
  · $\forall i, j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
- Soient deux évènements A et B (dans $\mathcal{F}$) tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on note
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
- Deux évènements A et B (dans $\mathcal{F}$) sont indépendants, noté $A \perp\!\!\!\perp B$, si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$
- L'exponentielle est l'unique fonction f dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp[x] = e^x$. Le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle,
$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+$$
et $\log[e^x] = x,$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
  $\log(x^y) = y \log(x)$
  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- La fonction Gamma est définie par
$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+$$
Pour $z \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z+1) = z!$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Soit f définie sur $[a,b]$, et F telle que $F' = f$, alors
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Pour une variable aléatoire X discrète, la fonction de masse est $f(a) = \mathbb{P}(X = a)$ et la fonction de répartition est $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$.
- X et Y sont indépendantes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) si et seulement si
$$\begin{cases} f(x,y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y),\ \forall\, x, y \\ F(x,y) &= F_X(x) \cdot F_Y(y),\ \forall\, x, y \end{cases}$$
- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $x \in \{0,1\}$
$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1-p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
où $p \in [0,1]$, soit
$$\mathbb{P}(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$$
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $x \in \{0, 1, \cdots, n\}$
$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x \in \{0, 1, \cdots, n\}$$
où $p \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}_*$.
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $x \in \{0, 1, \cdots\} = \mathbb{N}$
$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},\ x \in \mathbb{N},$$
où $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}_*$
$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = p\,(1-p)^{x-1} \text{ pour } x = 1, 2, \cdots$$
où $p \in [0,1]$, avec $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - p^x$.
- Loi de Zipf $\mathcal{Z}(\alpha)$ ou $\mathcal{Z}(n, \alpha)$
  Définie pour $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$ par $f(x) \propto x^{-\alpha}$ où $\alpha > 0$. Plus précisément, si on note $H_{n,s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ le n-ème nombre harmonique généralisé,
$$f(x) = \frac{x^{-\alpha}}{H_{n,\alpha}},\ x \in \{1, 2, \cdots, n\}$$
- Loi de Benford
  Si X prend les valeurs $\{1, 2, \cdots, 9\}$, et
$$f(x) = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

- Si X prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, avec la fonction de masse f, son espérance est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot x_i$$

- La variance de X est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big]$$

aussi, si X prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, avec la fonction de masse f, si $\mu = \mathbb{E}[X]$, sa variance est définie par

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot \big(x_i - \mu\big)^2$$

- L'écart-type de X est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

- Si X est une variable aléatoire continue, sa fonction de répartition est $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$ et la densité est

$$f(a) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=a} = F'(a)$$

- X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, noté $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ si $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction de répartition est

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

- X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ si $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$.
Si X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, pour tout a, b, $a > 0$, $Y = aX + b$ suit une loi uniforme sur $[b, b+a]$.

- Loi exponentielle de paramètre λ (sur $\mathbb{R}_+$)
Pour $\lambda > 0$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

ou

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

- X suit une loi de Pareto si

$$\mathbb{P}[X \leq x] = 1 - x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq 1$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Si $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $Y = \log X$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

- Loi normale, centrée réduite (sur $\mathbb{R}$)
$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ admet pour densité, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Loi normale (sur $\mathbb{R}$)
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Si X a pour densité f,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \times f(x) dx$$

(si l'intégrale est convergente).

- Si X a pour densité f,

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - \mathbb{E}[X]\big)^2 f(x) dx$$

(si l'intégrale est convergente).

- Si X a pour moyenne μ et pour variance σ^2,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

est la version centrée et réduite de X.
Z est centrée car $\mathbb{E}[Z] = 0$ et réduite car $\mathrm{Var}[Z] = 1$.

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$

- Loi des grands nombres
Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. de même moyenne μ et de même variance σ^2. Soit

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

alors pour tout ε (aussi petit que possible),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

- Théorème Central Limite
Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. de même moyenne μ et de même variance σ^2. Soit

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

alors

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

- X et Y sontindépendants (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) si et seulement si

$$\begin{cases} F(x,y) &= F_X(x) \cdot F_Y(y), \ \forall\ x, y \in \mathbb{R} \\ f(x,y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y), \ \forall\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- On appelle covariance d'un couple de variable aléatoire

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]$$

qui s'écrit aussi

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[XY\big] - \mathbb{E}\big[X\big]\mathbb{E}\big[Y\big]$$

(à condition que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$).

- On appelle corrélation d'un couple de variable aléatoire

$$\text{Cor}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\cdot\text{Var}(Y)}}$$

(à condition que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$).

- Pour un échantillon $\{y_1,\cdots,y_n\}$, la moyenne est $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$

  La moyenne est la version empirique de l'espérance d'une variable aléatoire,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}[X=x] \text{ si } \sum_x |x|\mathbb{P}[X=x] < \infty$$

$$\mathbb{E}(X) = \int xf(x)dx \text{ si } \int |x|f(x)dx < \infty$$

- La moyenne tronquée de niveau $\alpha \in [0,1]$ est

$$\frac{1}{n-2k}\sum_{k+1}^{n-k} x_i \text{ où } k = \lfloor \alpha n \rfloor$$

- La Moyenne olympique (Olympic average) est

$$\frac{x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9}{8}$$

- La moyenne de Windsor (Winsorized average) est

$$\frac{\overbrace{x_2+x_2}+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+\overbrace{x_9+x_9}}{10}$$

- Pour une fonction de répartition F,

$$Q(p) \;=\; \inf\{x\in\mathbb{R} : p \leq F(x)\}$$

est la fonction quantile. Le quantile est la seule fonction telle que

$$Q(p) \leq x \text{ si et seulement si } p \leq F(x)$$

Si F est continue et strictement croissante $Q(p) = F^{-1}(p)$.
Q est l'inverse à gauche :

$$Q(F(X)) = X$$

- Quantile empirique (1)

  Notons $\{x_{(i)}\}$ une version ordonnée de $\{x_i\}$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.Le quantile empirique de niveau $p \in (0,1)$ est

$$\widehat{q}_p = (1-f)x_{(k)} + fx_{(k+1)}$$

où $k = \lceil np \rceil$ et $f = n\alpha - \lfloor np \rfloor$.

- Quantile empirique (2)
  Étant donné $\{x_i\}$, si $\widehat{F}$ est la fonction de répartition empirique associée, on peut poser

$$\widetilde{q}_p = \widehat{F}^{-1}(p) = x_{(k)} \text{ où } k = \lceil np \rceil$$

- Notons $\{x_{(i)}\}$ une version ordonnée de $\{x_i\}$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$. On appelle médiane $Q(1/2)$, et sa version empirique est

$$md(x) = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{1}{2}\big(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\big) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- Variance empirique (version 1)
  Étant donné un échantillon $x_1,\cdots,x_n$, on appelle variance empirique

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- Variance empirique (version 2)
  Étant donné un échantillon $x_1,\cdots,x_n$, on appelle variance empirique

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- Étant donné un échantillon appareillé $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$, la covariance empirique est

$$\text{cov} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

- Étant donné un échantillon $x_1,\cdots,x_n$, on appelle écart-type empirique

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

- L'intervalle interquartile (IQR) est

$$\text{IQR} = Q(3/4) - Q(1/4)$$

- On appelle coefficient de variation le ratio

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{\mathbb{E}[X]} \text{ et } cv(\boldsymbol{x}) = \frac{s}{\overline{x}}.$$

- Étant donné un échantillon $\boldsymbol{x} = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, la fonction de répartition empirique est $\widehat{F}$ où

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}(x_i \leq x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\mathbf{1}_{[x_i,\infty)}(x)$$

- Étant donné un échantillon $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ associé à une loi continue, soient

$$\begin{cases} a_0 < \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \ a_k > \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ a_{j+1} = a_j + h = a_0 + (j+1)h \end{cases}$$

est un estimateur de la densité f est l'histogramme

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[a_j, a_{j+1})}(x_i) \text{ où } j \text{ tel que } x \in [a_j, a_{j+1})$$

- Un noyau k est une fonction de densité centrée sur 0, i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xk(x)dx = 0$$

- Étant donné un échantillon $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, un estimateur de la densité f est $\widehat{f}_h$, pour $k > 0$,

$$\widehat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1} k_h(x - x_i), \text{ où } k_h(\cdot) = \frac{1}{h}k\left(\frac{\cdot}{h}\right)$$

- X suit une loi du chi-deux, à ν degrés de liberté, noté $X \sim \chi^2(\nu)$, où $\nu \in \mathbb{N}^*$ si X a pour densité

$$x \mapsto \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \text{ où } x \in [0; +\infty),$$

- Si $X_1, \cdots, X_\nu \sim \mathcal{N}(0,1)$ sont des variables indépendantes

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \sim \chi^2(\nu)$$

où $\nu \in \mathbb{N}_*$

- Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ indépendantes, alors

$$S_n{}^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

suit une loi $\chi^2(n-1)$.

- X suit une loi de Student, $\mathcal{S}t(\nu)$, à ν degrés de liberté, si X a pour densité

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}, \text{ sur } \mathbb{R}$$

where Γ denotes the Gamma function ($\Gamma(n+1) = n!$).

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu)$ sont indépendantes, alors

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \sim \mathcal{S}t(\nu).$$

- Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables indépendantes $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Posons

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{ et } S_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

alors

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

suit une loi $\chi^2(n-1)$ et

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim \mathcal{S}t(n-1).$$

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a les probabilités suivantes

$$\begin{cases}
\mathbb{P}[X \leq -3] \approx 0.1350\% & \mathbb{P}[X \leq -2.326348] \approx 1\% \\
\mathbb{P}[X \leq -2] \approx 2.2750\% & \mathbb{P}[X \leq -1.959964] \approx 2.75\% \\
\mathbb{P}[X \leq -1] \approx 15.865\% & \mathbb{P}[X \leq -1.644854] \approx 5\% \\
\mathbb{P}[X \leq 0] = 50.0000\% & \mathbb{P}[X \leq -1.281552] \approx 10\% \\
\mathbb{P}[X \leq 1] \approx 84.1345\% & \mathbb{P}[X \leq 0.6744898] \approx 75\% \\
\mathbb{P}[X \leq 2] \approx 97.7250\% & \mathbb{P}[X \leq 0.8416212] \approx 80\% \\
\mathbb{P}[X \leq 3] \approx 99.8650\% & \mathbb{P}[X \leq 1.281552] \approx 90\% \\
\mathbb{P}[X \leq 4] \approx 99.9968\% & \mathbb{P}[X \leq 1.644854] \approx 95\%
\end{cases}$$