Statistiques pour les sciences (MAT-4681)

Arthur Charpentier

10 - Intervalle de confiance

été 2022

Intervalle de Confiance

Comme auparavant, $Y_1, \cdots, Y_n$ sont des copies indépendantes d'une variable aléatoire Y dont la densité est paramétré par un paramétre réel ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$) ou vectoriel ($\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$), i.e. $\{Y_1, \cdots, Y_n\} \sim f_\theta \in \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est la famille de lois.

Estimation ponctuelle : $\widehat{\theta}(\boldsymbol{y})$ est une simple valeur numérique

Intervalle de Confiance

Soit $\boldsymbol{Y}$ un échantillon aléatoire de variables i.i.d. de loi f_θ. Un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ est un intervalle (aléatoire) $\big[\widehat{a}(\boldsymbol{Y}), \widehat{b}(\boldsymbol{Y})\big]$ tel que

$$\mathbb{P}\Big[\theta \in \big[\widehat{a}(\boldsymbol{Y}), \widehat{b}(\boldsymbol{Y})\big]\Big] = 1-\alpha$$

Classiquement, α vaut 10%, 5% ou 1%.

Intervalle de Confiance

Intervalle de Confiance unilatéral

Soit $\boldsymbol{Y}$ un échantillon aléatoire de variables i.i.d. de loi f_θ. Un intervalle de confiance unilatéral à droite de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ est un intervalle (aléatoire) $\big[-\infty, \widehat{b}(\boldsymbol{Y})\big]$ tel que

$$\mathbb{P}\Big[\theta \leq \widehat{b}(\boldsymbol{Y})\Big] = \mathbb{P}\Big[\theta \in \big(-\infty, \widehat{b}(\boldsymbol{Y})\big]\Big] = 1-\alpha$$

et un intervalle de confiance unilatéral à gauche de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ est un intervalle (aléatoire) $\big[\widehat{a}(\boldsymbol{Y}), +\infty\big]$ tel que

$$\mathbb{P}\Big[\theta \geq \widehat{a}(\boldsymbol{Y})\Big] = \mathbb{P}\Big[\theta \in \big[\widehat{a}(\boldsymbol{Y}), +\infty\big)\Big] = 1-\alpha$$

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

L'idée de base dans le modèle Gaussien (puis binomial ou Poisson) est que, si

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

comme $\mu = Y - Z\sigma_0$ et que $-Z \in [\Phi^{-1}(a); \Phi^{-1}(1-a)]$ avec une probabilité $1 - 2a$,

$$\mu \in \left[Y + \Phi^{-1}(a)\sigma_0; Y + \Phi^{-1}(1-a)\sigma_0\right] \text{ avec probabilité } 1 - 2a$$

ou, $-Z \in [-\infty; \Phi^{-1}(1-a)]$ avec une probabilité $1 - a$,

$$\mu \in \left(-\infty; Y + \Phi^{-1}(1-a)\sigma_0\right] \text{ avec probabilité } 1 - a$$

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Soit $\{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, où σ_0^2 est supposé connu.

$$\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y} \text{ et } \widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

Posons $Z = \dfrac{\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$, alors $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme

$$\mathbb{P}\Big(Z \in \big[\Phi^{-1}(\alpha/2), \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\big]\Big) = \mathbb{P}\big(Z \in [-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]\big) = 1-\alpha$$

l'intervalle de confiance bilatéral pour μ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

où $u_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Intervalle de Confiance pour μ, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Soit $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon aléatoire tiré de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour μ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[\overline{y} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{y} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

où $u_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$. Soit, au niveau $\alpha = 5\%$

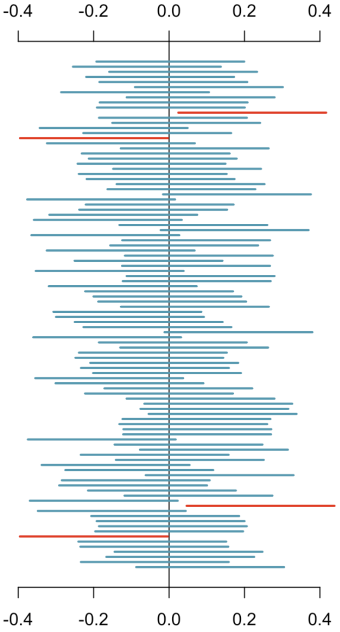
$$\left[\overline{y} - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{y} + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de confiance de seuil α ?

Échantillon $\mathcal{N}(\mu, 1)$ de taille n,

$$IC_\alpha = \left[\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) \pm u_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

```
> alpha = .05
> set.seed(1)
> n = 100
> IC = matrix(NA,100,2)
> for(s in 1:100){
+  x = rnorm(100,0,1)
+  m = mean(x)
+  IC[s,1] = m-qnorm(1-alpha
   /2)*1/sqrt(n)
+  IC[s,2] = m+qnorm(1-alpha
   /2)*1/sqrt(n)
+ }
> idx = which((IC[,1]<0)&(IC
   [,2]>0))
```

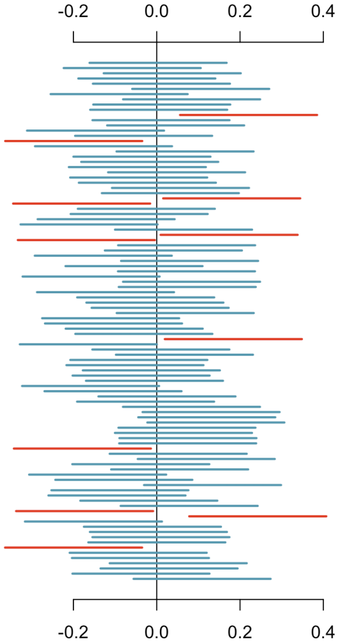


Intervalle de confiance de seuil α ?

Échantillon $\mathcal{N}(\mu,1)$ de taille n,

$$IC_\alpha = \left[\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) \pm u_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

```
> alpha = .10
> set.seed(1)
> n = 100
> IC = matrix(NA,100,2)
> for(s in 1:100){
+  x = rnorm(100,0,1)
+  m = mean(x)
+  IC[s,1] = m-qnorm(1-alpha
   /2)*1/sqrt(n)
+  IC[s,2] = m+qnorm(1-alpha
   /2)*1/sqrt(n)
+ }
> idx = which((IC[,1]<0)&(IC
   [,2]>0))
```

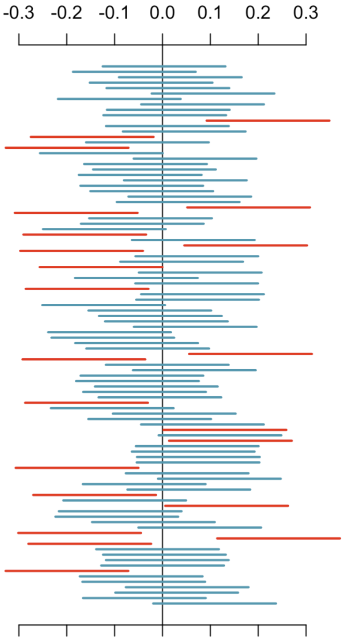


Intervalle de confiance de seuil α ?

Échantillon $\mathcal{N}(\mu,1)$ de taille n,

$$IC_\alpha = \left[\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) \pm u_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

```
> alpha = .20
> set.seed(1)
> n = 100
> IC = matrix(NA,100,2)
> for(s in 1:100){
+   x = rnorm(100,0,1)
+   m = mean(x)
+   IC[s,1] = m-qnorm(1-alpha/2)*1/sqrt(n)
+   IC[s,2] = m+qnorm(1-alpha/2)*1/sqrt(n)
+ }
> idx = which((IC[,1]<0)&(IC[,2]>0))
```

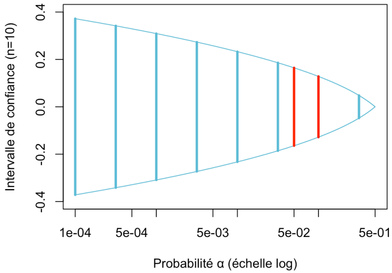


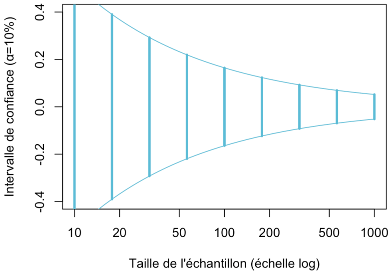
Intervalle de confiance de seuil α ?

De manière générale, l'intervalle de confiance est de la forme

$$IC_\alpha = \left[\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) \pm u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ de longueur } \ell = 2u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- ℓ est d'autant plus grand que α est petit
- ℓ est d'autant plus grand que n est petit

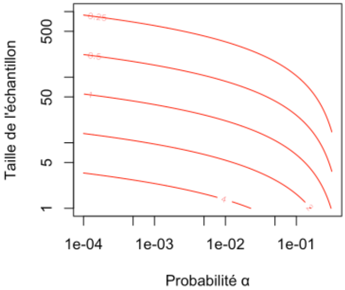


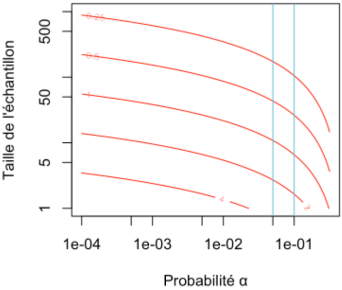


Intervalle de confiance de seuil α ?

Courbes donnant la même taille pour l'intervalle de confiance,

$$n = \frac{4u_{\alpha/2}^2\sigma}{\ell^2}$$





$$\ell = 2u_{10\%/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2u_{5\%/2}\frac{\sigma}{\sqrt{1.4198 \cdot n}}$$

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Exercice 1 On a observé les 5 notes suivant, supposées suivre une loi $\mathcal{N}(\mu, 0.04)$. Donner un intervalle de confiance à 90% pour μ.

```
> y = c(3.4, 3.7, 3.9, 3.6, 3.75)
```

L'intervalle de confiance, pour μ est

$$IC_{10\%} = \left[\overline{y} \pm 1.64 \frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{5}}\right] = [3.523; 3.817]$$

```
> mean(y)+c(-1.64,1.64)*sqrt(.04)/sqrt(5)
[1] 3.523314 3.816686
```

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Pour l'instant, on supposait σ_0 connue.
Pour rappel, si $Y_1, \cdots, Y_n$ est une collection de variables indépendantes $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{ et } S_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Alors

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim \mathcal{S}t(n-1).$$

Comme

$$\mathbb{P}\left(T \in \left[F_{n-1}^{-1}(\alpha/2), F_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)\right]\right) = \mathbb{P}\left(Z \in \left[-t_{n-1,\alpha/2}, t_{n-1,\alpha/2}\right]\right)$$

l'intervalle de confiance bilatéral pour μ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\overline{Y} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{Y} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Intervalle de Confiance pour μ, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Soit $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon aléatoire tiré de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour μ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[\overline{y} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{y} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

où $t_{n-1,\alpha/2} = F_{n-1}^{-1}(1 - \alpha/2)$. Si $n > 100$

$$\left[\overline{y} - u_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{y} + u_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Exercice 1' On a observé les 5 notes suivant, supposées suivre une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Donner un intervalle de confiance à 90% pour μ.

```
> y = c(3.4, 3.7, 3.9, 3.6, 3.75)
> qt(.95,length(y)-1)
[1] 2.131847
> var(y)
[1] 0.0345
```

L'intervalle de confiance, pour μ est

$$IC_{10\%} = \left[\overline{y} \pm 2.13\frac{\sqrt{0.0345}}{\sqrt{5}}\right] = [3.493; 3.847]$$

```
> mean(y)+qt(c(.05,.95), 4)*sd(y)/sqrt(5)
[1] 3.492916 3.847084
```

Intervalle de Confiance $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

On peut aussi utiliser (comme on le verra plus tard sur les tests de moyenne)

```
> t.test(y, conf.level = 0.9)

90 percent confidence interval:
 3.492916 3.847084
sample estimates:
mean of x
     3.67
```

qui donne exactement la même chose que

```
> mean(y)+qt(c(.05,.95), 4)*sd(y)/sqrt(5)
[1] 3.492916 3.847084
```

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Considérons deux échantillons indépendants,

$$\begin{cases} x_1, \cdots, x_m, \;\; X_i \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_{0,x}^2), \;\; \text{où } \sigma_{0,x} \text{ est connu} \\ y_1, \cdots, y_n, \;\; Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_{0,y}^2), \;\; \text{où } \sigma_{0,y} \text{ est connu} \end{cases}$$

On veut un intervalle de confiance pour $\delta = \mu_x - \mu_y$.

Comme $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_{0,x}^2)$, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x, \dfrac{\sigma_{0,x}^2}{m}\right)$

Comme $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_{0,y}^2)$, $\overline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_y, \dfrac{\sigma_{0,y}^2}{n}\right)$ avec $\overline{X} \perp\!\!\!\perp \overline{Y}$,

$$\Delta = \overline{X} - \overline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_{0,x}^2}{m} + \frac{\sigma_{0,y}^2}{n}\right)$$

que l'on va centrer, et réduire.

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu,\sigma_0^2)$

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_{0,x}^2}{m}+\dfrac{\sigma_{0,y}^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

d'où un intervalle de confiance pour $\delta = \mu_x - \mu_y$ de la forme

$$\left[(\overline{x}-\overline{y}) - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_{0,x}^2}{m}+\frac{\sigma_{0,y}^2}{n}}, \overline{y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_{0,x}^2}{m}+\frac{\sigma_{0,y}^2}{n}}\right]$$

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$

Intervalle de Confiance pour $\mu_x - \mu_y$, $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ deux échantillons aléatoires indépendants tiré de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_{0,x}^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_{0,y}^2)$ respectivement. L'intervalle de confiance bilatéral pour $\delta = \mu_x - \mu_y$ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[(\overline{x} - \overline{y}) \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_{0,x}^2}{m} + \frac{\sigma_{0,y}^2}{n}}\right]$$

RAJOUTER LES CODES R !!!

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Si les variances sont inconnues, mais égales

Intervalle de Confiance pour $\mu_x - \mu_y$, $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ deux échantillons aléatoires indépendants tiré de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma^2)$ respectivement. L'intervalle de confiance bilatéral pour $\delta = \mu_x - \mu_y$ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[(\overline{x} - \overline{y}) \pm t_{m+n-2,\alpha/2} \widehat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right]$$

où $\widehat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{(m-1)\widehat{\sigma}_x^2 + (n-1)\widehat{\sigma}_y^2}{m+n-2}}$.

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Si les variances sont inconnues, et différentes

Intervalle de Confiance pour $\mu_x - \mu_y$, $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ deux échantillons aléatoires de loi $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ respectivement. L'intervalle de confiance bilatéral pour $\delta = \mu_x - \mu_y$ de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[(\overline{x} - \overline{y}) \pm t_{\nu,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{m} + \frac{\widehat{\sigma}_y^2}{n}}\right]$$

où $\nu = \dfrac{\left(\dfrac{\widehat{\sigma_x}^2}{m} + \dfrac{\widehat{\sigma_y}^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{\widehat{\sigma_x}^2}{m}\right)^2 + \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{\widehat{\sigma_y}^2}{n}\right)^2}$

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

```
> x = Davis$height[Davis$sex == "F"]
> y = Davis$height[Davis$sex == "M"]
> m = length(x)
> n = length(y)
> sx2 = var(x)
> sy2 = var(y)
```

On peut tenter d'avoir un intervalle de confiance pour Δ, différence entre la taille moyenne (en cm) des hommes et des femmes. Et montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\Delta \in [11.58; 15.01]\Big) = 95\%.$$

Intervalle de Confiance, 2 échantillons $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

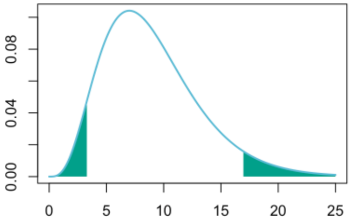
```
> x = Davis$height[Davis$sex == "F"]
> y = Davis$height[Davis$sex == "M"]
> t.test(y,x)

t = 15.28, df = 174.29, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 11.57949 15.01467
sample estimates:
mean of x mean of y
 178.0114  164.7143
```

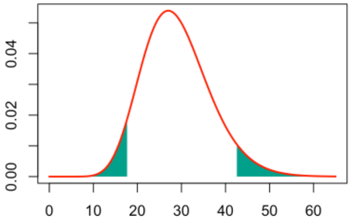
```
> (nu = (sx2/m+sy2/n)^2/((sx2/m)^2/(m-1)+(sy2/n)^2/(n-1)))
[1] 174.2935
> (mean(y)-mean(x)) + qt(c(.025,.975),df = nu) * sqrt(sx2/m+sy2/n)
[1] 11.57949 15.01467
```

Intervalle de Confiance pour la variance

Pour rappel, si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\text{si } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \text{ alors } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$





$$\mathbb{P}\left(F_{n-1}^{-1}(\alpha/2) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq F_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

où F_ν désigne la fonction de répartition de la loi $\chi^2(\nu)$.

Intervalle de Confiance pour la variance

Intervalle de Confiance pour σ^2, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1,\cdots,x_n\}$ de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour σ^2 de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\frac{(n-1)\widehat{\sigma}^2}{F_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)};\frac{(n-1)\widehat{\sigma}^2}{F_{n-1}^{-1}(\alpha/2)}\right]$$

Intervalle de Confiance pour σ, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1,\cdots,x_n\}$ de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour σ^2 de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)}{F_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)}}\cdot\widehat{\sigma};\sqrt{\frac{(n-1)}{F_{n-1}^{-1}(\alpha/2)}}\cdot\widehat{\sigma}\right]$$

Intervalle de Confiance pour un rapport de variances ★★★

Intervalle de Confiance pour σ_x^2/σ_y^2, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Soient $\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ et $\boldsymbol{y}=\{y_1,\cdots,y_n\}$ deux échantillons aléatoires de loi $\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$ respectivement. L'intervalle de confiance bilatéral pour $r=\sigma_x^2/\sigma_y^2$ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[F_{n-1,m-1}^{-1}(\alpha/2)\cdot\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{\widehat{\sigma}_y^2};F_{n-1,m-1}^{-1}(1-\alpha/2)\cdot\frac{\widehat{\sigma}_x^2}{\widehat{\sigma}_y^2}\right]$$

où $F_{a,b}$ est la fonction de répartition de la loi de Fisher $\mathcal{F}(a,b)$.

Intervalle de Confiance pour un rapport de variances

```
> x = c(9.1,12.5,10.2,9.5,7.3,5.6,10.1,13.0,12.8,9.0,7.9,7.7)
> y = c(11.6,21.0,20.9,7.1,15.9,15.6,17.9,10.3,16.5,17.4,15.7,17.1,13.5,12.7,19.0)
> var(x)/var(y)
[1] 0.359796
> qf(c(.025,.975),length(y)-1,length(x)-1)
[1] 0.3231446 3.3588102
> qf(c(.025,.975),length(y)-1,length(x)-1)*var(x)/var(y)
[1] 0.1162661 1.2084866
```

Aussi, l'estimation de $\text{Var}[X]/\text{Var}[Y]$ est 0.36 et

$$\mathbb{P}\left(\frac{\text{Var}[X]}{\text{Var}[Y]} \in [0.116; 1.208]\right) = 95\%$$

Intervalle de Confiance pour un rapport de variances ★★★

```
> x = Davis$height[Davis$sex == "F"]
> y = Davis$height[Davis$sex == "M"]
> var.test(x,y)

  F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.77203, num df = 111, denom df = 87,
p-value = 0.1979
alternative hypothesis: true ratio of variances is not
     equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5153698 1.1452526
```

```
> var(x)/var(y)
[1] 0.7720278
> qf(c(.025,.975),n-1,m-1)*var(x)/var(y)
[1] 0.5153698 1.1452526
```

Intervalle de Confiance pour une proportion

Soient $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ des variables $\mathcal{B}(p)$ indépendantes.

Soit $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

La méthode de Clopper & Pearson consiste à chercher p^- et p^+, tels que $\mathbb{P}[p^- \leq p \leq p^+] = 1 - \alpha$, quel que soit n.

Intervalle de Confiance pour une proportion

Soient $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ des variables $\mathcal{B}(p)$ indépendantes.

Soit $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Si n **est suffisamment grand**, on peut invoquer le théorème central limite,

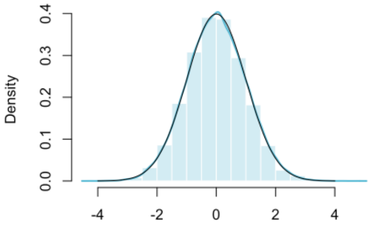
$$\frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

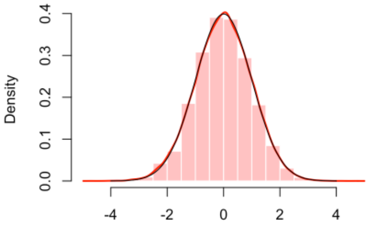
mais aussi

$$\sqrt{n}\frac{S - np}{\sqrt{S(n-S)}} = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - p}{\sqrt{\overline{Y}(1-\overline{Y})}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Intervalle de Confiance pour une proportion

```
> n = 256
> p = .4
> S1 = S2 = rep(NA, 10000)
> for(i in 1:10000){
+     y = sample(0:1, size = n, prob = c(1-p,p),
    replace = TRUE)
+     S1[i] = sqrt(n)*(mean(y)-p)/(sqrt(p*(1-p)))
+     S2[i] = sqrt(n)*(mean(y)-p)/(sqrt(mean(y)*(1-mean
    (y))))
+  }
```





Intervalle de Confiance pour une proportion

Comme $Z = \sqrt{n}\dfrac{\overline{Y} - p}{\sqrt{\overline{Y}(1-\overline{Y})}} \approx \mathcal{N}(0,1)$, on peut obtenir facilement un intervalle de confiance pour p

Intervalle de Confiance pour p, $\mathcal{B}(p)$ - Wald

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{B}(p)$. L'intervalle de confiance bi-latéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\hat{p} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} = \overline{x}$$

On parler d'approche de Wald.

Valide si $n \geq 50$, $n\hat{p} \geq 10$ et $n(1-\hat{p}) \geq 10$.

Intervalle de Confiance pour une proportion

L'approche de Agresti - Coull propose une petite correction

Intervalle de Confiance pour p, $\mathcal{B}(p)$ - Agresti & Coull

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{B}(p)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\tilde{p} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}}$$

où $\tilde{n} = n + u_{\alpha/2}^2$, $\tilde{s} = n\overline{x} + \frac{1}{2}u_{\alpha/2}^2$, $\tilde{p} = \frac{\tilde{s}}{\tilde{n}}$. Si $\alpha = 5\%$, $\tilde{n} = n+4$, $\tilde{s} = n\overline{x} + 2$

Si $\alpha = 5\%$, on utilise le test standard (de Wald) en ajoutant deux '0' et deux '1'.

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale ★★★

Soit $\{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$.
$\widehat{p}(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y}$, alors $\widehat{p}(\boldsymbol{Y}) \approx \mathcal{N}\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$.
L'intervalle de confiance bilatéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{p}(\boldsymbol{Y}) - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}}, \widehat{p}(\boldsymbol{Y}) + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}}\right]$$

où $u_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.
Là encore, des calculs plus rigoureux pourraient être faits

$$\frac{\hat{p} + \frac{(1{,}96)^2}{2n}}{1 + \frac{(1{,}96)^2}{n}} \pm \frac{1}{1 + \frac{(1{,}96)^2}{n}} \sqrt{\frac{(1,96)^2}{n}\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{(1,96)^4}{4n^2}}$$

On parle de méthode de Wilson.

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale ★★★

Intervalle de Confiance pour p, $\mathcal{B}(p)$ - Wilson

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{B}(p)$. L'intervalle de confiance bi-latéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\frac{\hat{p} + \dfrac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \dfrac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \dfrac{u_{\alpha/2}^2}{n}}$$

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

Soit S le nombre de cas favorable, avec n tirages de variables de Bernoulli de probabilité p. Alors $S \sim \mathcal{B}(n,p)$,

$$F(k;p) = \mathbb{P}[S \leq k] = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\overline{F}(k;p) = \mathbb{P}[S \geq k] = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\frac{\partial \overline{F}(k;p)}{\partial p} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} i p^{i-1} (1-p)^{n-i} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i) p^i (1-p)^{n-i-1}$$

$$= n \left[\sum_{i=k}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1} \right]$$

$$= k \binom{n}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k} > 0$$

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

On reconnaît des lois Beta,

$$\frac{\partial \overline{F}(k;p)}{\partial p} = k\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k} : \text{ loi } \mathcal{B}(k, n-k+1)$$

$$\frac{\partial F(k;p)}{\partial p} = k\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k-1} : \text{ loi } \mathcal{B}(k+1, n-k)$$

Aussi, si on écrit $\mathbb{P}[p^- \leq p \leq p^+] = 1-\alpha$,

$$\begin{cases} p^+ \text{ sera le quantile de niveau } 1-\alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k+1, n-k) \\ p^- \text{ sera le quantile de niveau } \alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k, n-k+1) \end{cases}$$

On parle parfois de méthode de Clopper-Pearson ou de Bolshev.

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

Exercice 2: avant une élection opposant deux candidats A et B, on a effectué un sondage auprès de 100 personnes : 55 personnes se prononcent en faveur du candidat A. Estimez p (la proportion d'intention de votes en faveur de A) par intervalle de confiance

$$\begin{cases} p^{+} \text{ sera le quantile de niveau } 1-\alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k+1, n-k) \\ p^{-} \text{ sera le quantile de niveau } \alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k, n-k+1) \end{cases}$$

```
> qbeta(0.975, 55+1,100-55)
[1] 0.6496798
> qbeta(0.025, 55,100-55-1)
[1] 0.4573165
```

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale ★★★

Exercice 2: avant une élection opposant deux candidats A et B, on a effectué un sondage auprès de 100 personnes : 55 personnes se prononcent en faveur du candidat A. Estimez p (la proportion d'intention de votes en faveur de A) par intervalle de confiance

• approximation Gaussienne

L'intervalle de confiance bilatéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{p}(\boldsymbol{Y})-u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}},\widehat{p}(\boldsymbol{Y})+u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}}\right]$$

où $u_{\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

```
> alpha = 5\100
> u = qnorm(c(alpha/2,1-alpha/2))
> p = 55/100
> p + u*sqrt(p*(1-p)/100)
[1] 0.452493 0.647507
```

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale

```
> prop.test(x = 55, n = 100, conf.level=0.95, correct = FALSE)

  1-sample proportions test without continuity correction

data:  55 out of 100, null probability 0.5
X-squared = 1, df = 1, p-value = 0.3173
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4524460 0.6438546
sample estimates:
   p
0.55
```

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale

```
> library(Hmisc)
> binconf(x=55, n=100)
 PointEst     Lower     Upper
     0.55 0.452446 0.6438546
> library(prevalence)
> propCI(x = 55, n = 100)
   x   n    p         method level     lower     upper
1 55 100 0.55 agresti.coull  0.95 0.4524288 0.6438718
2 55 100 0.55          exact  0.95 0.4472802 0.6496798
3 55 100 0.55       jeffreys  0.95 0.4522290 0.6449231
4 55 100 0.55           wald  0.95 0.4524930 0.6475070
5 55 100 0.55         wilson  0.95 0.4524460 0.6438546
```

Intervalle de Confiance pour deux proportion

Intervalle de Confiance pour $p_x - p_y$, $\mathcal{B}(p)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_m\}$ deux échantillons indépendants de loi $\mathcal{B}(p_x)$ et $\mathcal{B}(p_y)$, respectivement. L'intervalle de confiance bilatéral pour $\delta = p_x - p_y$ de niveau $1 - \alpha$ est

$$(\overline{x} - \overline{y}) \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{m} + \frac{\overline{y}(1-\overline{y})}{n}}$$

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson

Soit $\{y_1, \cdots, y_n\}$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$\widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y}$, alors $\widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y}) \approx \mathcal{N}\left(\lambda, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

L'intervalle de confiance bilatéral pour λ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y}) - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y})}}{\sqrt{n}}, \widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y}) + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}(\boldsymbol{Y})}}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalle de Confiance pour λ, $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. L'intervalle de confiance bilatéral pour λ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\overline{y} - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{y}}}{\sqrt{n}}, \overline{y} + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{y}}}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson ★★★

Il est aussi possible de montrer la relation suivante: si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$F(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \sum_{x=0}^{y} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \mathbb{P}[Z > 2\lambda],\ Z \sim \chi^2_{2(1+y)},\ \forall y \in \mathbb{N}.$$

Intervalle de Confiance pour λ, $\mathcal{P}(\lambda)$ - Garwood

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. L'intervalle de confiance bi-latéral pour λ de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\frac{1}{2n}F^{-1}_{2n\overline{x}}(\alpha/2); \frac{1}{2n}F^{-1}_{2(n\overline{x}+1)}(1-\alpha/2)\right]$$

où F^{-1}_{ν} est la fonction quantile de la loi χ^2_{ν}.

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson ★★★

Pour un niveau $1-\alpha$, on a

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{Y}_n - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \leq u_{\alpha/2}\right) \simeq 1-\alpha$$

que l'on peut aussi écrire

$$\mathbb{P}\left(\frac{[\bar{Y}_n - \lambda]^2}{\frac{\lambda}{n}} \leq u_{\alpha/2}^2\right) \simeq 1-\alpha$$

ou encore

$$\mathbb{P}\left(\lambda^2 - \lambda\left(2\bar{Y}_n + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{n}\right) + \bar{Y}_n^2 \leq 0\right) \simeq 1-\alpha$$

on va alors résoudre cette équation de degré 2,

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson ★★★

$$\Delta = \left(2\overline{y} + \frac{u_{\alpha/2}}{n}\right)^2 - 4\overline{y}^2 = 4\frac{\overline{y}u_{\alpha/2}^2}{n} + \frac{u_{\alpha/2}^4}{n^2} > 0$$

donc le polynôme est négatif lorsque λ est entre les deux racines

$$\mathbb{P}\left(\bar{Y}_n + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{2n} - \sqrt{\frac{\bar{Y}_n u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{n} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^4}{4n^2}} < \lambda < \bar{Y}_n + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{2n} + \sqrt{\frac{\bar{Y}_n u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{n} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^4}{4n^2}}\right.$$

(on retrouve l'expression précédente en négligeant le terme en n^2)

Voir aussi, sur la loi de Poisson, Hanley (2019).

Intervalle de Confiance pour une loi géométrique ★★★

Intervalle de Confiance pour p, $\mathcal{G}(p)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{G}(p)$. L'intervalle de confiance bi-latéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{p} \pm u_{\alpha/2}\widehat{p}\sqrt{\frac{1-\widehat{p}}{n}}\right] \text{ où } \widehat{p} = \frac{1}{\overline{y}}.$$

alors que celui pour p^{-1} (correspondant à l'espérance de Y) est

$$\left[\overline{y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{y}(\overline{y}-1)}{n}}; \overline{y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{y}(\overline{y}-1)}{n}}\right]$$

Exemple

EXEMPLE 3

Dans le cadre de l'*Enquête sur les dépenses des ménages 2011*, Statistique Canada a établi que les 1 574 ménages québécois de l'échantillon dépensaient en moyenne 1 807 \$ par année au restaurant avec un écart type corrigé de 556 \$. Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 90 % permettant d'estimer le montant annuel moyen des dépenses au restaurant pour l'ensemble des ménages du Québec.

Sources: Statistique Canada. *Tableau 203-0021*, CANSIM.
Statistique Canada. *Guide de l'utilisateur, Enquête sur les dépenses des ménages 2011*, février 2013.

(via Simard (2015))

On a observé $\{x_1, \cdots, x_n\}$, avec $n = 1574$, où x_i est la dépense de l'individu i au restorant. On sait que $\overline{x} = 1807$ et $\widehat{\sigma} = 556$.

$$\mu \in \left[\overline{x} - u_{95\%}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{95\%}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

soit

$$\mu \in \left[1807 \pm 1.645\frac{556}{\sqrt{1574}}\right] = [1807 \pm 23] = [1784; 1830]$$

Exemple

EXEMPLE

Le problème suivant est inspiré des résultats d'un sondage publié dans *Le Journal de Québec* du 11 mars 2012.

Les deux solitudes s'éloignent

Il y a vraiment deux Canada en un. Le sondage Léger Marketing publié aujourd'hui montre à quel point les Québécois sont distincts des autres Canadiens.

- D'une part, les Québécois sont proportionnellement plus nombreux que les Canadiens à être d'avis que les choses vont mal au Canada (71 % contre 43 %) et à être favorables au droit à l'avortement (85 % contre 66 %).
- D'autre part, ils sont, toujours en proportion, moins nombreux que les Canadiens à se dire favorables : à l'extraction du pétrole des sables bitumineux (36 % contre 63 %) ; à la mise en valeur de la monarchie (9 % contre 36 %) ; au financement accru de l'armée canadienne (19 % contre 37 %).

Méthodologie

Ce sondage a été réalisé du 28 février au 5 mars 2012 par Léger Marketing. Les résultats reposent sur 2 509 entrevues téléphoniques : 1 001 au Québec et 1 508 dans le reste du Canada. La marge d'erreur est d'au plus 3,1 % pour l'échantillon québécois et d'au plus 2,5 % pour l'échantillon hors Québec, et cela, 19 fois sur 20.

(via Simard (2015))

Exercice: Donner un intervalle de confiance (au niveau de 95%) du pourcentage des Québécois qui sont d'avis que les choses vont mal au Canada

Exemple

71 % des 1001 Québécois interrogés sont de cet avis,

donc $n = 1001$ et $\widehat{p} = 71\%$.
$n = 1001$ et $\widehat{p} = 71\%$, l'intervalle de confiance à 95% pour p est

$$\left[\widehat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] = \left[71 \pm 1.96\sqrt{\frac{71 \times 29}{1001}}\right] = \left[71 \pm 2.7\right] \text{ en } \%$$

Note: le document mentionne $\pm 3.1\%$, qui correspond au pire écart, c'est à dire lorsque $p \sim 50\%$. En effet

$$1.96 \max_{p\in[0,1]}\left\{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1.96\sqrt{\frac{50 \times 50}{1001}} \sim 3.907\%$$

Exemple I

On dispose des données suivantes correspondant à des durées d'attente. Quel serait l'intervalle de confiance de la durée moyenne d'attente θ, à 95% ?

```
> y = c(0.76, 1.18, 0.15, 0.14, 0.44, 2.89, 1.23,
    0.54, 0.96, 0.15, 1.39, 0.76, 1.24, 4.42, 1.05,
    1.04, 1.88, 0.65, 0.34, 0.59)
```

1. En supposant les données Gaussiennes,

```
> t.test(y)

95 percent confidence interval:
 0.6130457 1.5669543
```

aussi $\mathbb{P}(\theta \in [0.613; 1.567]) = 95\%$.

Exemple II

2. On peut supposer données exponentielles, $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, et $\theta = \lambda^{-1}$. D'après le théorème central limite

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \theta}{\sqrt{\theta^2}} = \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \theta}{\theta} =\sim \mathcal{N}(0,1)$$

et donc, comme auparavant,

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{Y} - \theta}{\theta} \leq u_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

qui s'inverse en

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{Y}}{1 + u_{\alpha/2}/\sqrt{n}} \leq \theta \leq \frac{\overline{Y}}{1 - u_{\alpha/2}/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Exemple III

Intervalle de Confiance pour λ^{-1}, $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un échantillon, réalisation de variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. L'intervalle de confiance bi-latéral pour λ^{-1} (correspondant à la moyenne) de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\frac{\overline{y}}{1+u_{\alpha/2}/\sqrt{n}}; \frac{\overline{y}}{1-u_{\alpha/2}/\sqrt{n}}\right]$$

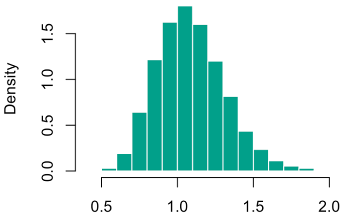
```
> mean(y)/(1+qnorm(c(.975,.025))/sqrt(length(y)))
[1] 0.7578595 1.9404039
```

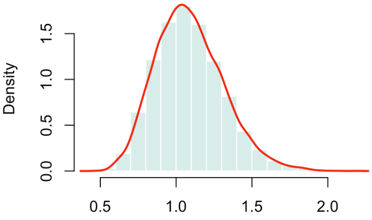
aussi $\mathbb{P}(\theta \in [0.758; 1.940]) = 95\%$.

Exemple IV

On peut tenter du rééchantillonage

```
> ybar = rep(NA,10000)
> for(i in 1:10000) ybar[i] = mean(sample(y,size=
    length(y),replace=TRUE))
```





Les quantiles empiriques sont

```
> quantile(ybar,c(.025,.975))
    2.5%     97.5%
0.706000 1.577012
```

aussi $\mathbb{P}(\theta \in [0.706; 1.577]) = 95\%$.