Statistiques pour les sciences (MAT-4681)

Arthur Charpentier

12 - Proportions et fréquences

été 2022

Fréquence

Considérons un échantillon $\{x_1, \cdots, x_n\}$, prenant des valeurs A ou B (voire davantage). Supposons que l'on s'intéresse à la fréquence d'apparition de la modalité A.

Notons $y_i = \mathbf{1}_A(x_i)$, et $\{y_1, \cdots, y_n\}$ l'échantillon prenant les valeurs 0 ou 1. La fréquence (d'apparition de A) est

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_A(x_i)$$

(on parle aussi parfois de proportion)

Considérons maintenant une collection de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $Y_1, \cdots, Y_n$, de loi $\mathcal{B}(p)$. Posons

$$F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

Fréquence

Si les variables $Y_1, \cdots, Y_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$

$$\mathbb{E}[F] = p \text{ et } \text{Var}[F] = \frac{p(1-p)}{n}$$

Plus précisément, comme $nF \sim \mathcal{B}(n,p)$,

$$\mathbb{P}\left(F = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \forall k = 0, 1, \cdots, n.$$

Si n est suffisamment grand, d'après le théorème central limite

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{F-p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

En pratique, on suppose l'approximation normale valide si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $n(1-p) \geq 15$

Intervalle de confiance

Modèle binomial, avec n assez grand

Intervalle de confiance, $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{B}(p)$, n grand

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.

$$\left[\widehat{p} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right], \text{ où } \widehat{p} = \overline{x}$$

Note parfois l'intervalle de confiance dépasse 0 ou 1

```
> sum_x = 12
> n =14
> sum_x/n + qnorm(c(.025,.975))*sqrt(sum_x*(n-sum_x)/n
   ^3)
[1] 0.6738432 1.0404425
```

Intervalle de confiance

Il existe de nombreux intervalles de confiance. Par exemple sur nos données avec 12 fois '1' et 2 fois '0' ($n = 14$),

```
> library(binom)
> binom.confint(12, 14, methods = "all")
          method  x  n      mean     lower     upper
1  agresti-coull 12 14 0.8571429 0.5881065 0.9723858
2     asymptotic 12 14 0.8571429 0.6738432 1.0404425
3          bayes 12 14 0.8333333 0.6517227 0.9853611
4        cloglog 12 14 0.8571429 0.5394482 0.9622319
5          exact 12 14 0.8571429 0.5718708 0.9822055
6          logit 12 14 0.8571429 0.5731738 0.9640393
7         probit 12 14 0.8571429 0.6007290 0.9699396
8        profile 12 14 0.8571429 0.6206505 0.9742387
9            lrt 12 14 0.8571429 0.6206560 0.9747079
10     prop.test 12 14 0.8571429 0.5615066 0.9748606
11        wilson 12 14 0.8571429 0.6005862 0.9599061
```

Intervalle de confiance

Il existe de nombreux intervalles de confiance. Par exemple sur nos données avec 12 fois ‘1’ et 2 fois ‘0’ ($n = 14$),

```
> library(DescTools)
> BinomCI(12, 14, sides = "two.sided", method = c("wald", "wilson", "agresti-coull", "arcsine"))
                    est    lwr.ci    upr.ci
wald          0.8571429 0.6738432 1.0000000
wilson        0.8571429 0.6005862 0.9599061
agresti-coull 0.7802461 0.5881065 0.9723858
arcsine       0.8389831 0.6096856 0.9773745
```

Parfois, on utilise une correction pour continuité, avec

$$\left[\widehat{p} \pm \left(u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} + \frac{1}{2n}\right)\right], \text{ où } \widehat{p} = \overline{x}$$

Intervalle de confiance

Modèle binomial, avec n assez grand

Intervalle de confiance, $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{B}(p)$, Agresti–Coull

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.

Posons $\tilde{n} = n + u_{1-\alpha/2}^2$ et $\tilde{p} = \dfrac{1}{\tilde{n}}\left(n\overline{x} + \dfrac{u_{1-\alpha/2}^2}{2}\right)$, alors un intervalle de confiance de niveau α est

$$\left[\tilde{p} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}}\right]$$

Une version approchée est d'utiliser $\tilde{p} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n + 2}{n+4}$

Intervalle de confiance ★★★

Comme on l'a vu dans le chapitre 11, dans un modèle binomial, avec n assez grand

Intervalle de confiance, $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{B}(p)$, Wilson

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.
Un intervalle de confiance de niveau α pour p est

$$\left[\frac{1}{1+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n}}\left(\hat{p}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n}\right) \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{1+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2}}\right]$$

On obtient ces bornes en notant qu'elle correspondent aux p tels que $(\hat{p}-p)^2 = u_{1-\alpha/2}^2 \cdot \dfrac{p(1-p)}{n}$ qui est l'équation de degré 2

$$\left(1+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n}\right)p^2 + \left(-2\hat{p}-\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n}\right)p + \left(\hat{p}^2\right) = 0 \ .$$

Intervalle de confiance ★★★

Modèle binomial, avec n assez grand

Intervalle de confiance, $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{B}(p)$, arcsinus

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.
Un intervalle de confiance de niveau α pour p est

$$\left[\sin^2\left(\arcsin(\sqrt{\widehat{p}}) \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)\right]$$

L'idée est de noter que comme $\text{Var}[\widehat{P}] = \dfrac{p(1-p)}{n}$,

$$\text{Var}\left(\arcsin\left(\sqrt{P}\right)\right) \approx \frac{\text{Var}(P)}{4p(1-p)} = \frac{p(1-p)}{4np(1-p)} = \frac{1}{4n}.$$

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

Soit S le nombre de cas favorable, avec n tirages de variables de Bernoulli de probabilité p. Alors $S \sim \mathcal{B}(n,p)$,

$$F(k;p)=\mathbb{P}[S\leq k]=\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$\overline{F}(k;p)=\mathbb{P}[S\geq k]=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$\frac{\partial\overline{F}(k;p)}{\partial p}=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}ip^{i-1}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n}{i}(n-i)p^{i}(1-p)^{n-i-1}$$

$$=n\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{n-i-1}\right]$$

$$=k\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k}>0$$

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

On reconnaît des lois Beta,

$$\frac{\partial \overline{F}(k;p)}{\partial p} = k\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k} : \text{ loi } \mathcal{B}(k, n-k+1)$$

$$\frac{\partial F(k;p)}{\partial p} = k\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k-1} : \text{ loi } \mathcal{B}(k+1, n-k)$$

Aussi, si on écrit $\mathbb{P}[p^- \leq p \leq p^+] = 1-\alpha$,

$$\begin{cases} p^+ \text{ sera le quantile de niveau } 1-\alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k+1, n-k) \\ p^- \text{ sera le quantile de niveau } \alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k, n-k+1) \end{cases}$$

On parle parfois de méthode de Clopper-Pearson ou de Bolshev.

Intervalle de Confiance pour une proportion ★★★

Exercice 2: avant une élection opposant deux candidats A et B, on a effectué un sondage auprès de 100 personnes : 55 personnes se prononcent en faveur du candidat A. Estimez p (la proportion d'intention de votes en faveur de A) par intervalle de confiance

$$\begin{cases} p^{+} \text{ sera le quantile de niveau } 1-\alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k+1, n-k) \\ p^{-} \text{ sera le quantile de niveau } \alpha/2 \text{ de la loi Beta } \mathcal{B}(k, n-k+1) \end{cases}$$

```
> qbeta(0.975, 55+1,100-55)
[1] 0.6496798
> qbeta(0.025, 55,100-55-1)
[1] 0.4573165
```

Intervalle de Confiance pour une loi binomiale

Exercice 1: avant une élection opposant deux candidats A et B, on a effectué un sondage auprès de 100 personnes : 55 personnes se prononcent en faveur du candidat A. Estimez p (la proportion d'intention de votes en faveur de A) par intervalle de confiance

- approximation Gaussienne

L'intervalle de confiance bilatéral pour p de niveau $1-\alpha$ est

$$\left[\widehat{p}(\boldsymbol{Y}) - u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}}, \widehat{p}(\boldsymbol{Y}) + u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}}{\sqrt{n}}\right]$$

où $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

```
> alpha = 5\100
> u = qnorm(c(alpha/2,1-alpha/2))
> p = 55/100
> p + u*sqrt(p*(1-p)/100)
[1] 0.452493 0.647507
```

Intervalle de confiance ★★★

Modèle binomial, avec n assez grand, comme

$$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(p_x-p_y)}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{m}+\dfrac{\overline{Y}(1-\overline{Y})}{n}}}\approx\mathcal{N}(0,1)$$

Intervalle de confiance pour $p_x - p_y$ $\mathcal{B}(p_x)$ et $\mathcal{B}(p_y)$, Wald

Soient $\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ de loi $\mathcal{B}(p_x)$ et $\boldsymbol{y}=\{y_1,\cdots,y_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p_y)$. Un intervalle de confiance de niveau α pour p_x-p_y est

$$\left[\overline{x}-\overline{y}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{m}+\frac{\overline{y}(1-\overline{y})}{n}}\right]$$

Intervalle de confiance ★★★

On peut considérer une correction pour continuité

$$\left[\overline{x}-\overline{y}\pm\left(u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{m}+\frac{\overline{y}(1-\overline{y})}{n}}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

ou une approche à la Agresti-Coull (avec une correction pour $\overline{x}$, en rajoutant un succès au numérateur, et deux observations au dénominateur)

Intervalle de confiance

Si on a deux échantillons, $\boldsymbol{x}$, $m = 14$ et 12 fois '1' ($\overline{x} = 0.857$) et $\boldsymbol{y}$, $n = 15$ et 11 fois '1' ($\overline{y} = 0.7333$)

```
> library(DescTools)
> BinomDiffCI(12, 14, 11, 15, sides  = "two.sided",
    method = c("wald","score"))
             est      lwr.ci    upr.ci
wald  0.1238095 -0.1654654 0.4130845
score 0.1238095 -0.1773352 0.3967329
```

Région de rejet I

Soit $n = 14$, on a dans le tableau suivant $f_\theta(x)$ pour $x \in \{0, 1, 2, \cdots, 12, 13, 14\}$ pour plusieurs valeurs possibles de θ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.1	0.23	0.36	0.26	0.11	0.03	0.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.04	0.15	0.25	0.25	0.17	0.09	0.03	0.01	0	0	0	0	0	0	0
0.3	0.01	0.04	0.11	0.19	0.23	0.2	0.13	0.06	0.02	0.01	0	0	0	0	0
0.4	0	0.01	0.03	0.08	0.15	0.21	0.21	0.16	0.09	0.04	0.01	0	0	0	0
0.5	0	0	0.01	0.02	0.06	0.12	0.18	0.21	0.18	0.12	0.06	0.02	0.01	0	0
0.6	0	0	0	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.21	0.21	0.15	0.08	0.03	0.01	0
0.7	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.06	0.13	0.2	0.23	0.19	0.11	0.04	0.01
0.8	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.03	0.09	0.17	0.25	0.25	0.15	0.04
0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.03	0.11	0.26	0.36	0.23

On va construire des intervalles de confiance bilatéraux, tels que

$$\mathbb{P}(\theta \notin [a, b]) \leq \alpha$$

Région de rejet II

Région de rejet pour un test bilatéral de niveau $\alpha = 10\%$

$H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.1	0.23	0.36	0.26	0.11	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.04	0.15	0.25	0.25	0.17	0.09	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.3	0.01	0.04	0.11	0.19	0.23	0.2	0.13	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.4	0.00	0.01	0.03	0.08	0.15	0.21	0.21	0.16	0.09	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	0.00	0.00	0.01	0.02	0.06	0.12	0.18	0.21	0.18	0.12	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00
0.6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.09	0.16	0.21	0.21	0.15	0.08	0.03	0.01	0.00
0.7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.06	0.13	0.2	0.23	0.19	0.11	0.04	0.01
0.8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.17	0.25	0.25	0.15	0.04
0.9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.11	0.26	0.36	0.23

Région de rejet III

Région de rejet pour un test bilatéral de niveau $\alpha = 5\%$
$H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.1	0.23	0.36	0.26	0.11	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.04	0.15	0.25	0.25	0.17	0.09	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.3	0.01	0.04	0.11	0.19	0.23	0.2	0.13	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.4	0.00	0.01	0.03	0.08	0.15	0.21	0.21	0.16	0.09	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	0.00	0.00	0.01	0.02	0.06	0.12	0.18	0.21	0.18	0.12	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00
0.6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.09	0.16	0.21	0.21	0.15	0.08	0.03	0.01	0.00
0.7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.06	0.13	0.2	0.23	0.19	0.11	0.04	0.01
0.8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.17	0.25	0.25	0.15	0.04
0.9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.11	0.26	0.36	0.23

Si $p = 1/2$, on rejette si $x \in \{0, 1, 2, 12, 13, 14\}$, ce qui donne une probabilité (réelle) de 1.2% (et pas 5%). En rajoutant 3 et 11, on obtient 5.7% (qui dépasse 5%).

On opposera parfois $1 - \alpha$ (théorique) à la probabilité dite de recouvrement (probabilité réelle d'appartenir l'intervalle de confiance)

Test de proportion

Modèle binomial, avec n assez grand

Test $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p = p_1$, $\mathcal{B}(p)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.
Pour tester $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p = p_1$, on utilise

$$Z = \frac{(\overline{x} - p_0) - 1/2n}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Si H_0 est vraie, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- si $p_1 > p_0$, on rejette H_0 si $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- si $p_1 < p_0$, on rejette H_0 si $z < \Phi^{-1}(\alpha)$

Test de proportion

Modèle binomial, avec n assez grand

Test $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$, $\mathcal{B}(p)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$.
Pour tester $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$, on utilise

$$Z = \frac{(\overline{x} - p_0) - 1/2n}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Si H_0 est vraie, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- on rejette H_0 si $|z| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

Note: on peut remplacer $\widehat{p} = \overline{x}$ par $\tilde{p} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n + 2}{n+4}$

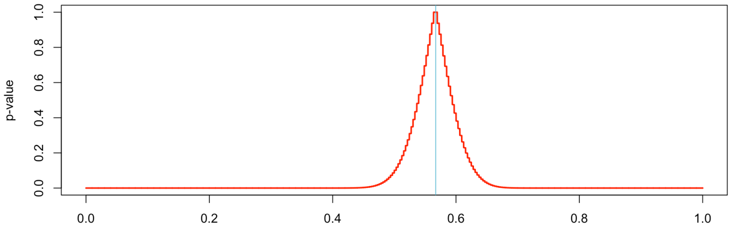
Test de proportion

Considérons un échantillon suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(164, 3/5)$

```
> set.seed(1)
> x = sample(0:1, size=164, probability=c(.4,.6))
> binom.test(sum(x),length(x) ,0.6 , alternative ="two
    .sided")

  Exact binomial test

data:  sum(x) and length(x)
number of successes = 93, number of trials = 164, p-
    value = 0.4255
alternative hypothesis: true probability of success is
     not equal to 0.6
95 percent confidence interval:
 0.4875629 0.6441149
sample estimates:
probability of success
             0.5670732
```

Test de proportion

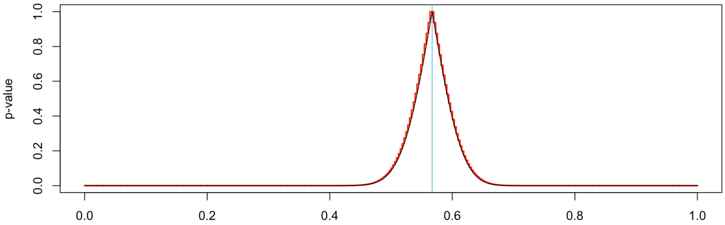
```
> binom.test(sum(x),length(x) ,0.5 , alternative ="two
    .sided")

  Exact binomial test

data:  sum(x) and length(x)
number of successes = 93, number of trials = 164, p-
    value = 0.1007
alternative hypothesis: true probability of success is
     not equal to 0.5
```



Test de proportion

On peut utiliser la p-value avec une approximation Gaussienne,

$$p - \text{value} = 2 \times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n} \cdot \frac{|\overline{x} - p_0|}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}\right)\right)$$



Test de proportion

Modèle binomial avec 2 échantillons, avec n et m assez grands

Test $H_0 : p_x - p_y = p_0$ contre $H_1 : p_x - p_y = p_1$, $\mathcal{B}(p)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ de loi $\mathcal{B}(p_x)$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p_y)$.

Pour tester $H_0 : p_x - p_y = p_0$ contre $H_1 : p_x - p_y = p_1$, on utilise

$$Z = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - p_0}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}},\ p = \frac{m\overline{x} + n\overline{y}}{m+n}$$

Si H_0 est vraie, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- si $p_1 > p_0$, on rejette H_0 si $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- si $p_1 < p_0$, on rejette H_0 si $z < \Phi^{-1}(\alpha)$

Test de proportion

Modèle binomial avec 2 échantillons, avec n et m assez grands

Test $H_0 : p_x - p_y = p_0$ contre $H_1 : p_x - p_y \neq p_0$, $\mathcal{B}(p)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ de loi $\mathcal{B}(p_x)$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ de loi $\mathcal{B}(p_y)$.
Pour tester $H_0 : p_x - p_y = p_0$ contre $H_1 : p_x - p_y \neq p_0$, on utilise

$$Z = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - p_0}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}, \quad p = \frac{m\overline{x} + n\overline{y}}{m+n}$$

Si H_0 est vraie, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- on rejette H_0 si $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$

Quelques tests

On peut aussi utiliser les tests sur des lois binomiales dans d'autres contextes. Par exemple, on peut faire un test sur la médiane. Pour un échantillon $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, notons m la médiane.

Test $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de même loi (inconnue).
Pour tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$, on utilise

$$V = \sum_{i=1}^{n} d_i^0,\ \ d_i^0 = \mathbf{1}(x_i - m_0 > 0) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i > m_0 \\ 0 \text{ si } x_i < m_0 \end{cases}$$

Si H_0 est vraie, V suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$

- si $m_1 > m_0$, on rejette H_0 si $v > F_n^{-1}(1-\alpha)$
- si $m_1 < m_0$, on rejette H_0 si $v < F_n^{-1}(\alpha)$

Où F_n est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Quelques tests dérivés ★★★

... avec bien entendu la version bilatérale

Test $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de même loi (inconnue).
Pour tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$, on utilise

$$V = \sum_{i=1}^{n} d_i^0, \;\; d_i^0 = \mathbf{1}(x_i - m_0 > 0) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i > m_0 \\ 0 \text{ si } x_i < m_0 \end{cases}$$

Si H_0 est vraie, V suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$

- on rejette H_0 si $v > F_n^{-1}(1-\alpha/2)$ ou $v < F_n^{-1}(\alpha/2)$

Où F_n est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Quelques tests dérivés ★★★

Classiquement, la p-value dans le cas où $H_1 : m = m_1 > m_0$ sera $p = \mathbb{P}(V > v)$ soit $1 - F_n(v)$.

```
> loc = "http://freakonometrics.free.fr/MAT4681/
    blood_pressure.txt"
> download.file(loc,"blood_pressure.txt")
> blood_pressure = read.table("blood_pressure.txt",
    header=TRUE, sep=",")
> median(blood_pressure$mmhg)
[1] 134
```

On pourrait tester $m = 120$,

```
> mu0<-120
> d = blood_pressure$mmhg-mu0
> n = length(d[d!=0])
> v = length(d[d>0])
> mean(d[d!=0]>0)
[1] 0.6111111
> v/n
[1] 0.6111111
```

Quelques tests dérivés

On peut aussi avoir un intervalle de confiance pour m

```
> MedianCI(blood_pressure$mmhg, sides = "two.sided",
    method = "exact")
median lwr.ci upr.ci
   134    118    141
> MedianCI(blood_pressure$mmhg, sides = "two.sided",
    method = "boot")
median lwr.ci upr.ci
   134    127    150
```

Quelques tests dérivés ★★★

```
> binom.test(v,n,0.5,alternative="greater")

  Exact binomial test

data:  v and n
number of successes = 33, number of trials = 54, p-
    value = 0.06684
alternative hypothesis: true probability of success is
     greater than 0.5
95 percent confidence interval:
 0.490144 1.000000
```

Quelques tests dérivés ★★★

```
> binom.test(v,n,0.5,alternative="two.sided")

  Exact binomial test

data:  v and n
number of successes = 33, number of trials = 54, p-
    value = 0.1337
alternative hypothesis: true probability of success is
     not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4687878 0.7408017
```

Quelques tests dérivés ★★★

Test $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de même loi inconnue, de médiane m. Pour tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$ on utilise la statistique de test

$$w_+ = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x_i - m_0) = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{1}(x_i > m_0)$$

où r_i est le rang de x_i dans l'échantillon $\boldsymbol{x}$.
Si $n > 20$, W_+ suit (approximativement) une loi normale, i.e.

$$Z = \frac{W_+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

- on rejette H_0 si $z > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ ou $z < \Phi^{-1}(\alpha/2)$

Quelques tests dérivés ★★★

```
> wilcox.test(blood_pressure$mmhg,mu=120,exact=FALSE,correct=TRUE,alternative="two.sided")

	Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  blood_pressure$mmhg
V = 1144.5, p-value = 0.0005441
alternative hypothesis: true location is not equal to 120
```

Quelques tests dérivés ★★★

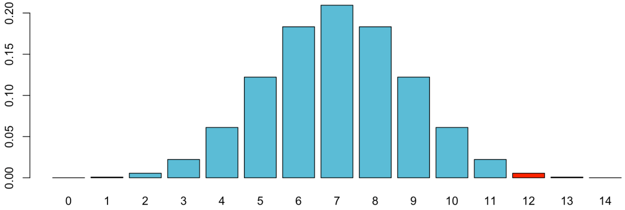
Comment faire quand on a peu d'obervations (n) ? Paul de Poulpe
"*sur 14 prédictions au total, 12 se sont révélées exactes*"

On peut vouloir tester $H_0 : p = 1/2$ contre $H_1 : p > 1/2$.

```
> paul = c(rep(1,12),rep(0,2))
> binom.test(12 ,14 ,0.5 , alternative ="greater")

  Exact binomial test

data:  12 and 14
number of successes = 12, number of trials = 14, p-
    value = 0.00647
alternative hypothesis: true probability of success is
     greater than 0.5
95 percent confidence interval:
 0.6146103 1.0000000
sample estimates:
probability of success
             0.8571429
```

Quelques tests dérivés ★★★

```
> 1 - pbinom(11,size = 14, prob = .5)
[1] 0.006469727
```



Intervalle de confiance pour des comptages

Intervalle de confiance, loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{P}(\mu)$. Si n est grand, un intervalle de confiance de niveau α pour μ est

$$\left[\overline{x} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}\right]$$

```
> set.seed(1)
> x = rpois(n = 60, lambda = 5)
> mean(x)
[1] 5.066667
> PoissonCI(sum(x), length(x), sides = "two.sided",
    method = c("exact", "score", "wald"))
            est   lwr.ci   upr.ci
exact 5.066667 4.513061 5.669440
score 5.066667 4.528228 5.669130
wald  5.066667 4.497114 5.636219
```

Intervalle de confiance pour des comptages ★★★

Il est aussi possible de montrer la relation suivante: si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$F(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \sum_{x=0}^{y} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \mathbb{P}[Z > 2\lambda],\ Z \sim \chi^2_{2(1+y)},\ \forall y \in \mathbb{N}.$$

Intervalle de confiance, loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$

Soit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de loi $\mathcal{P}(\mu)$. Si n est grand, un intervalle de confiance de niveau α pour μ est

$$\left[\frac{1}{2}Q^{-1}_{2n\overline{x}}(\alpha/2)\ ;\ \frac{1}{2}Q^{-1}_{2(n\overline{x}+1)}(1-\alpha/2)\right]$$

où $Q^{-1}_{\nu}(u)$ est le quantile de niveau u de la loi du chi-deux à ν degrés de liberté.

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson ★★★

Pour un niveau $1-\alpha$, on a

$$\mathbb{P}\left(-u_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{Y}_n - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \leq u_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1-\alpha$$

que l'on peut aussi écrire

$$\mathbb{P}\left(\frac{[\bar{Y}_n - \lambda]^2}{\frac{\lambda}{n}} \leq u^2_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1-\alpha$$

ou encore

$$\mathbb{P}\left(\lambda^2 - \lambda\left(2\bar{Y}_n + \frac{u^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}{n}\right) + \bar{Y}_n^2 \leq 0\right) \simeq 1-\alpha$$

on va alors résoudre cette équation de degré 2,

Intervalle de Confiance pour une loi de Poisson ★★★

$$\Delta = \left(2\overline{y} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{n}\right)^2 - 4\overline{y}^2 = 4\frac{\overline{y}u_{1-\alpha/2}^2}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^4}{n^2} > 0$$

donc le polynôme est négatif lorsque λ est entre les deux racines

$$\mathbb{P}\left(\bar{Y}_n + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{2n} - \sqrt{\frac{\bar{Y}_n u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{n} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^4}{4n^2}} < \lambda < \bar{Y}_n + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{2n} + \sqrt{\frac{\bar{Y}_n u_{\frac{1+\gamma}{2}}^2}{n} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}^4}{4n^2}}\right.$$

(on retrouve l'expression précédente en négligeant le terme en n^2)

Voir aussi, sur la loi de Poisson, Hanley (2019).

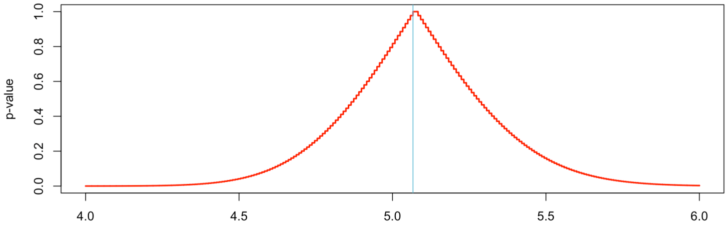
Test pour des comptages

```
> poisson.test(sum(x), length(x), r = 5, alternative =
    "two.sided")

  Exact Poisson test

data:  sum(x) time base: length(x)
number of events = 304, time base = 60, p-value =
   0.8173
alternative hypothesis: true event rate is not equal
   to 5
95 percent confidence interval:
 4.513061 5.669440
sample estimates:
event rate
  5.066667
```

Test pour des comptages

```
> poisson.test(sum(x), length(x), r = 6, alternative =
     "two.sided")

number of events = 304, time base = 60, p-value =
    0.002657
alternative hypothesis: true event rate is not equal
    to 6
```

On peut visualiser l'évolution de la p-value du test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$, en fonction de μ_0



Test pour des comptages

Modèle de Poisson avec 2 échantillons, avec n et m assez grands

Test $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ contre $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq 0$, $\mathcal{P}(\mu)$

Soient $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ de loi $\mathcal{P}(\mu_x)$ et $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ de loi $\mathcal{P}(\mu_y)$.
Pour tester $H_0 : \mu_x = \mu_y$ contre $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, on utilise

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{m\overline{x} + n\overline{y}}}$$

Si H_0 est vraie, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- on rejette H_0 si $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$

Test pour des comptages ★★★

```
> mean(x)
[1] 5.066667
> library(vcd)
> goodfit(x, type = "poisson", method = "ML")

Observed and fitted values for poisson distribution
with parameters estimated by ‘ML’

 count  observed      fitted  pearson residual
     0         0   0.3782038       -0.61498275
     1         2   1.9162325        0.06051336
     2         4   4.8544557       -0.38781027
     3         7   8.1986364       -0.41861679
     4        12  10.3849394        0.50117205
     5        10  10.5234053       -0.16134664
     6        11   8.8864311        0.70901059
     7         8   6.4320835        0.61822577
     8         3   4.0736529       -0.53195130
     9         2   2.2933157       -0.19368829
    10         0   1.1619466       -1.07793628
    11         1   0.5351997        0.10909110
```

Test pour des comptages ★★★

```r
> plot(goodfit(x, type = "poisson", method = "ML"))
```

On peut comparer l'histogramme empirique des x_i, et la fréquence théorique de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$,