Statistiques pour les sciences (MAT-4681)

Arthur Charpentier

13 - Loi multinomiale et tableaux croisés

été 2022

Un peu de formalisme...

Tableau de comptage

X peut prendre les modalités $\{x_1, \cdots, x_J\}$. On appelle tableau de comptage le vecteur $\boldsymbol{n}$ de taille J $\boldsymbol{n} = [n_j] = (n_1, \cdots, n_J)$ où n_j est le nombre d'individus dont la modalité est x_j.

Example Considérons l'exemple où X désigne la couleur des yeux, de la base `HairEyeColor`,

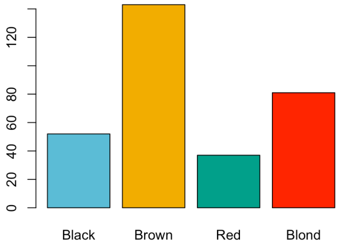
```
> data(HairEyeColor)
> n = apply(HairEyeColor[,,Sex="Female"],1,sum)
> n
Black  Brown    Red  Blond
   52    143     37     81
```

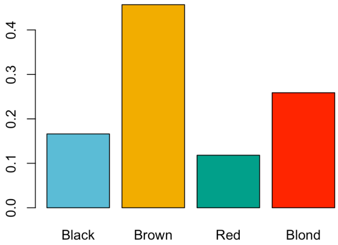
Un peu de formalisme...

Si n est l'effectif total, $n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_j x_i$, et la fréquence est

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{n}\boldsymbol{n} = \left[\frac{n_j}{n}\right]$$

```
> barplot(n)
> f = n/sum(n)
> barplot(f)
```





avec le comptage (gauche) et les probabilités (droite)

Loi multinomiale

On suppose que $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est une collection de variables catégorielles indépendantes, de loi $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_J)$

La variable $Y_{j:i} = \mathbf{1}_j(X_i)$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_j)$, où

$$p_j = \mathbb{E}[Y_j] = \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_j(X)\big) = \mathbb{P}[X = x_j]$$

La variable $N_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_j(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_{j:i}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_j)$

Espérance, variance et covariance

$$\text{E}(N_i) = np_i \quad \text{var}(N_i) = np_i(1 - p_i)$$

$$\text{cov}(N_i, N_j) = -np_i p_j$$

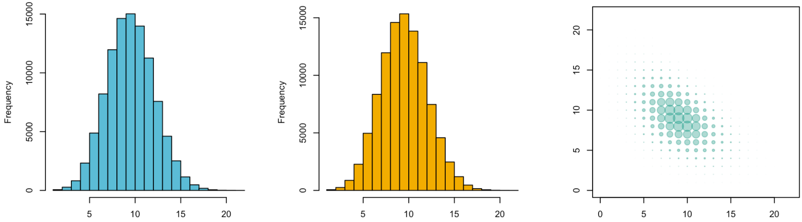
(admis)

Loi multinomiale

Les variables N_i et N_j ne sont pas indépendantes, car $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} N_j = n$

Exemple On peut simuler une loi prenant les valeurs $\{1, 2, 3\}$, uniforme ($\boldsymbol{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$), $n = 30$ fois.

```
> X = sample(1:3,size=n,replace=TRUE)
> N = table(X)[as.character(1:3)]
```



Loi multinomiale

On peut montrer que

Loi multinomiale

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, \dots N_j = n_J) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_J^{n_J}$$

pour tout $\boldsymbol{n} = (n_1, \cdots, n_J)$ tel que $n_1 + \cdots + n_J = n$.

En particulier si $J = 2$, on retrouve la loi binomiale,

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1! n_2!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}$$

pour n_1 et n_2 tels que $n_1 + n_2 = n$, ou

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n - n_1) = \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} p_1^{n_1} (1 - p_1)^{n - n_1}$$

Loi multinomiale

On peut montrer que

Loi multinomiale, approximation

Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une collection de variables catégorielles indépendantes, de probabilités $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_J)$, et si n_j est le nombre d'observations de la modalité j,

$$\frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

et

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j} \approx \chi^2(J-1)$$

(le résultat sera admis ici)

Test

Cette dernière propriété permet de proposer un test de fréquence

Loi multinomiale, test $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$ contre $H_1 : \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}_0$

Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une collection de variables catégorielles indépendantes, de probabilités $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_J)$, pour tester $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$ contre $H_1 : \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}_0$ la statistique de test est

$$Q = \sum_{j=1}^{J} \frac{(N\hat{p}_j - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_j - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}}$$

Si $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$ est vraie, $Q \sim \chi^2(J-1)$. Et donc

- on rejette H_0 si $q > Q_{J-1}^{-1}(1-\alpha)$

où Q_ν est la fonction de répartition de la loi du chi-deux, $\chi^2(\nu)$.

Loi multinomiale, test

On a lancé $n = 600$ fois un dé, est-il biaisé ?

```
> table(X1)
   1     2     3    4    5    6
  88   109   107   94  105   97
```

$$q = \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(109-100)^2}{100} + \frac{(107-100)^2}{100} + \frac{(94-100)^2}{100} + \frac{(105 -}{1}$$

```
> sum((table(X1)-100)^2/100)
[1] 3.44
```

or le quantile à 95% d'une loi $\chi^2(6-1)$ est 11.07

```
> qchisq(.95,6-1)
[1] 11.0705
```

et la p-value vaut 36.7%

```
> 1-pchisq(3.44,6-1)
[1] 0.6324852
```

Loi multinomiale, test

On a lancé $n = 600$ fois un (autre) dé, est-il biaisé ?

```
> table(X2)
   1     2     3    4    5    6
  89   131    93   92  104   91
```

$$q = \frac{(89-100)^2}{100} + \frac{(131-100)^2}{100} + \frac{(93-100)^2}{100} + \frac{(92-100)^2}{100} + \frac{(104-}{10}$$

```
> sum((table(X2)-100)^2/100)
[1] 12.92
```

qui dépasse le quantile à 95% d'une loi $\chi^2(6-1)$ est 11.07

```
> qchisq(.95,6-1)
[1] 11.0705
```

et la p-value vaut 36.7%

```
> 1-pchisq(12.92,6-1)
[1] 0.0241401
```

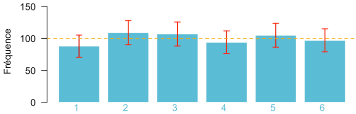
Tests multiples ★★★

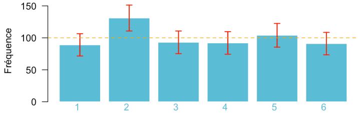
On a ponctuellement des intervalles de confidance, sur les probabilités

$$\left[\widehat{p}_j \pm u_{1-\alpha}.\sqrt{\frac{\widehat{p}_j(1-\widehat{p}_j)}{n}}\right] \text{ où } \widehat{p}_j = \frac{n_j}{n},$$

et sur les fréquences

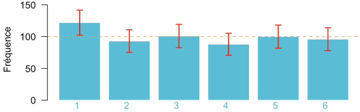
$$\left[n_j \pm u_{1-\alpha}.\sqrt{\frac{n_j(n-n_j)}{n}}\right]$$

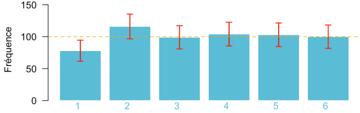




Tests multiples ★★★

Ces intervalles de confiance sont associés à 6 tests simples



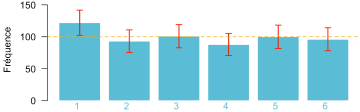


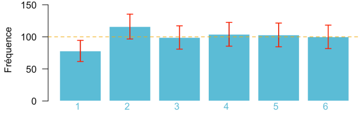
On peut refuser un test simple (un sur les six)

```
> table(X)
  1   2   3   4   5   6
 78 116  99 104 103 100
> prop.test(table(X)[1],600,1/6)

  1-sample proportions test with continuity correction

data:  table(X)[1] out of 600, null probability 1/6
X-squared = 5.547, df = 1, p-value = 0.01851
alternative hypothesis: true p is not equal to
    0.1666667
95 percent confidence interval:
 0.1046716 0.1601808
```

Tests multiples ★★★

et on peut accepter le test multiple (p-value de 17.6%)





Car ici, on regarde un test multiple, $H_0 : p_1 = \cdots = p_6$.

```
> 1-pchisq(sum((table(X)-100)^2/100),6-1)
[1] 0.175996
```

i.e.

```
> chisq.test(table(X), p = rep(1/6,6))

  Chi-squared test for given probabilities

data:  table(X)
X-squared = 7.66, df = 5, p-value = 0.176
```

Un peu de formalisme...

La formule de base repose sur

$$Z_j = \frac{\text{comptage observé} - \text{comptage attendu sous } H_0}{\sqrt{\text{comptage attendu}}} = \frac{O_j - E_j}{\sqrt{E_j}}$$

Si on a assez d'observations, $Z_j \approx \mathcal{N}(0,1)$ et

$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_{J-1}^2 + Z_J^2 \approx \chi^2(J-1)$$

que l'on notera aussi

$$Q = \sum_{j=1}^{J} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \approx \chi^2(J-1)$$

Un peu de formalisme...

De manière générale, la statistique de test est

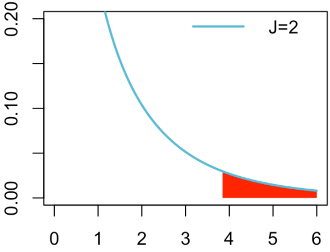
$$q = \sum_{j=1}^{J} \frac{(N\hat{p}_{0,j} - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_j - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}}$$

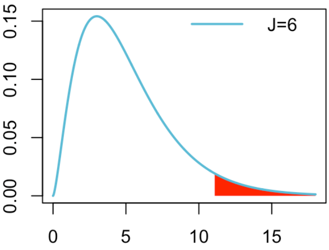
la p-value est

$$p = \mathbb{P}[Q > q | Q \sim \chi^2(J-1)]$$

mais on peut passer par la région de rejet

- si $q > Q_{J-1}^{-1}(1-\alpha)$ on rejette H_0
- si $q < Q_{J-1}^{-1}(1-\alpha)$ on ne rejette pas H_0





Test d'ajustement I

On a vu (partie 11) que le test de Komogorov Smirnov pouvait être utilisé comme test d'ajustement pour une loi continue. Pour des lois discrètes, on peut parfois utiliser un test du chi-deux.

Example Considérons la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$

```
> dpois(0:15,2),3
[1]  0.135 0.271 0.271 0.180 0.090 0.036 0.012 0.003
[9]  0.001 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
```

On pourra noter

```
> p = c(dpois(0:4,2),1-ppois(4,2))
> names(p) = c(0:4,"5+")
> p
    0     1     2     3     4    5+
0.135 0.271 0.271 0.180 0.090 0.053
```

Test d'ajustement II

Test d'ajustement, test $H_0 : X \sim f_0$ contre $H_1 : X \nsim f_0$

Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une collection de variables indépendantes de loi f_0. Notons $\boldsymbol{p}_0 = (p_{0,1}, \cdots, p_{0,J})$ le vecteur de probabilités associées à f_0, possiblement en faisant des regroupements de valeurs. Pour tester $H_0 : X \sim f_0$ contre $H_1 : X \nsim f_0$ la statistique de test est

$$Q = \sum_{j=1}^{J} \frac{(N\hat{p}_j - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_j - Np_{0,j})^2}{Np_{0,j}}$$

Si $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$ est vraie, $Q \sim \chi^2(J-1)$. Et donc

- on rejette H_0 si $q > Q_{J-1}^{-1}(1-\alpha)$

où Q_ν est la fonction de répartition de la loi du chi-deux, $\chi^2(\nu)$.

Test d'ajustement III

Example 1 : Pendant la second guerre mondiale, les impacts de bombes V1 et V2 tombées dans une zone de 144 km^2 dans le sud de Londres. Il divisa cette zone en 576 zones de 0.25 km^2 et compta le nombre d'impact dans chacune des zones.

No. of flying bombs per square	Expected no. of squares (Poisson)	Actual no. of squares
0	226·74	229
1	211·39	211
2	98·54	93
3	30·62	35
4	7·14	7
5 and over	1·57	1
	576·00	576

On a le comptage complet

```
> (n=c(229,211,93,35,7,0,0,1))
[1] 229 211  93  35   7   0   0   1
```

Test d'ajustement IV

L'estimateur de la méthode des moments est $\widehat{\lambda} = \overline{y}$

```
> (lambda = sum(n*((0:7))/sum(n))
[1] 0.9322917
> y = rep(0:7, n)
> mean(y)
[1] 0.9322917
```

L'estimateur du maximum de vraisemblance aussi

```
> fitdistr(y,"poisson")
     lambda
  0.93229167
 (0.04023135)
> logvrais = function(L){sum(log(dpois(y,L)))}
> optim(1,function(t) -logvrais(t))
$par
[1] 0.9322266
```

donc $\widehat{\lambda} = 0.932$.

Test d'ajustement V

L'estimateur de la méthode des moments est $\widehat{\lambda} = \overline{y}$

```
> (GF = goodfit(y,type="poisson"))

 count  observed       fitted  pearson  residual
     0       229  226.7427226        0.14990574
     1       211  211.3903507       -0.02684803
     2        93   98.5387312       -0.55796481
     3        35   30.6222793        0.79109619
     4         7    7.1372240       -0.05136476
     5         0    1.3307949       -1.15360083
     6         0    0.2067815       -0.45473234
     7         1    0.0275401        5.49264136
> summary(GF)

   Goodness-of-fit test for poisson distribution

                       X^2 df    P(> X^2)
Likelihood Ratio 9.262686  4 0.05485867
```

Test d'ajustement VI

L'estimateur de la méthode des moments est $\widehat{\lambda} = \overline{y}$

On peut tenter 6 classes $\{0, 1, 2, 3, 4, 5+\}$, comme dans l'article

```
> observed <- c(n[1:5],sum(n[6:8]))
> names(observed) = c(0:4,"5+")
> observed
  0   1   2   3   4  5+
229 211  93  35   7   1
> expected = c(dpois(0:4,lambda),1-ppois(4,lambda))
> names(expected)=names(observed)
> expected
0    1    2    3    4   5+
0.39 0.37 0.17 0.05 0.01 0.00
> chisq.test(x=observed, p=expected)

  Chi-squared test for given probabilities

data:  observed
X-squared = 1.1692, df = 5, p-value = 0.9478
```

Test d'ajustement VII

On peut tenter 5 classes $\{0, 1, 2, 3, 4+\}$,

```
> observed <- c(n[1:4],sum(n[5:8]))
> names(observed) = c(0:3,"4+")
> observed
  0   1   2   3  4+
229 211  93  35   8
> expected = c(dpois(0:3,lambda),1-ppois(3,lambda))
> names(expected) = c(0:3,"4+")
> expected
   0    1    2    3   4+
0.39 0.37 0.17 0.05 0.02
> chisq.test(x=observed, p=expected)

  Chi-squared test for given probabilities

data:  observed
X-squared = 1.0176, df = 4, p-value = 0.9071
```

Test d'ajustement VIII

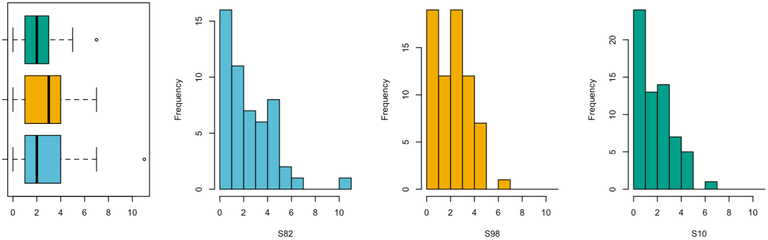
Example 2 : Sur trois coupes du monde de soccer, on analyse le nombre de buts par match. A-t-on des lois de Poisson ?

```
> soccer1982 = read.table("http://freakonometrics.free
    .fr/soccer1982")
> S82 = (soccer1982$V1+soccer1982$V2)
> soccer1998 = read.table("http://freakonometrics.free
    .fr/soccer1998")
> S98 = (soccer1998$V1+soccer1998$V2)
> soccer2010 = read.table("http://freakonometrics.free
    .fr/soccer2010")
> S10 = (soccer2010$V1+soccer2010$V3)
```

On notera $\boldsymbol{x} = \{x_1, \cdots, x_{52}\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_1, \cdots, y_{70}\}$, $\boldsymbol{z} = \{z_1, \cdots, z_{64}\}$ les trois échantillons

Test d'ajustement IX

```
> boxplot(S82,S98,S10,horizontal=TRUE)
> hist(S82,breaks=0:11)
```




```
> library(vcd)
> GF10 = goodfit(S10, type="poisson")
> summary(GF10)

	 Goodness-of-fit test for poisson distribution

                      X^2 df  P(> X^2)
Likelihood Ratio 5.586765  5 0.3485255
```

Test d'ajustement X

En 2010, on ne rejette pas l'hypothèse (H_0) que le nombre de buts par match Z suit une loi de Poisson,

```
> GF10

Observed and fitted values for poisson distribution
with parameters estimated by ‘ML’

 count observed     fitted pearson residual
     0        7  6.6409703        0.1393204
     1       17 15.0459484        0.5037630
     2       13 17.0442384       -0.9795981
     3       14 12.8719508        0.3144169
     4        7  7.2907534       -0.1076809
     5        5  3.3036226        0.9333129
     6        0  1.2474617       -1.1168982
     7        1  0.4037543        0.5972266
```

Mais pour 1982, on la rejette

Test d'ajustement XI

```
> GF82=goodfit(S82,type="poisson")
> summary(GF82)

   Goodness-of-fit test for poisson distribution

                       X^2 df    P(> X^2)
Likelihood Ratio 17.397  7 0.01500801
> GF82

Observed and fitted values for poisson distribution
with parameters estimated by 'ML'

 count observed      fitted pearson residual
     0        7  3.137892546      2.18024510
     1        9  8.810236764      0.06393200
     2       11 12.368216995     -0.38904643
     3        7 11.575382572     -1.34480631
    ...
    11        1  0.006719346     10.61881076
```

Un peu de formalisme...

Tableau de contingence

X peut prendre les modalités $\{x_1, \cdots, x_I\}$ et Y les modalités $\{y_1, \cdots, y_J\}$. On appelle tableau de contingence la matrice N, $I \times J$, $N = [n_{i,j}]$ où $n_{i,j}$ est le nombre d'individus dont les modalités sont x_i et y_j. On parle parfois aussi de tri-croisé.

Example Considérons l'exemple où X désigne la couleur des cheveux, et Y la couleur des yeux, de la base HairEyeColor,

```
> data(HairEyeColor)
> HairEyeColor[,,Sex="Female"]
       Eye
Hair    Brown Blue Hazel Green
  Black    36    9     5     2
  Brown    66   34    29    14
  Red      16    7     7     7
  Blond     4   64     5     8
```

Un peu de formalisme...

Effets marginaux

Les effets marginaux sont notés

$$n_{i,\cdot} = \sum_j n_{i,j} \text{ et } n_{\cdot,j} = \sum_i n_{i,j}$$

L'effectif total de la population est alors

$$n = \sum_i n_{i,\cdot} = \sum_j n_{\cdot,j} = \sum_{i,j} n_{i,j}$$

```
> apply(HairEyeColor[,,Sex="Female"],2,sum)
Brown  Blue Hazel Green
  122   114    46    31
> apply(HairEyeColor[,,Sex="Female"],1,sum)
Black Brown   Red Blond
   52   143    37    81
```

Un peu de formalisme...

On pose alors $F = \dfrac{1}{n}N = [f_{i,j}]$, où $f_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{n}$.

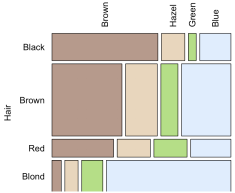
```
> HairEyeColor[,,Sex="Female"]/sum(HairEyeColor[,,Sex
    ="Female"])
       Eye
Hair          Brown       Blue      Hazel       Green
  Black 0.11501597 0.02875399 0.01597444 0.006389776
  Brown 0.21086262 0.10862620 0.09265176 0.044728435
  Red   0.05111821 0.02236422 0.02236422 0.022364217
  Blond 0.01277955 0.20447284 0.01597444 0.025559105
```

De la même manière, on peut définir les effets marginaux

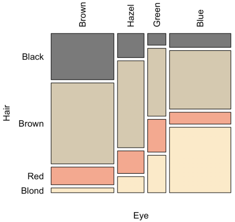
$$f_{i,\cdot} = \sum_j f_{i,j} \text{ et } f_{\cdot,j} = \sum_i f_{i,j}$$

Probabilités conditionnelles

	brown	hazel	green	blue	
black	63.0%	13.9%	4.6%	18.5%	100.0%
brown	41.6%	18.9%	10.1%	29.4%	100.0%
red	36.6%	19.7%	19.7%	23.9%	100.0%
blond	5.5%	7.9%	12.6%	74.0%	100.0%
	37.2%	15.7%	10.8%	36.3%	



	brown	hazel	green	blue	
black	30.9%	16.1%	7.8%	9.3%	18.2%
brown	54.1%	58.1%	45.3%	39.1%	48.3%
red	11.8%	15.1%	21.9%	7.9%	12.0%
blond	3.2%	10.8%	25.0%	43.7%	21.5%
	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	



Test d'indépendance I

Indépendance $X \perp\!\!\!\perp Y$

Soit X et Y deux variables discrètes, X et Y sont indépendantes - noté $X \perp\!\!\!\perp Y$ - si

$$\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \mathbb{P}[X = x] \cdot \mathbb{P}[Y = y], \ \forall x, y.$$

Compte tenu des notations précédentes,

- on estime $\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j]$ par $\widehat{p}_{i,j} = f_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{n}$
- on estime $\mathbb{P}[X = x_i]$ par $\widehat{p}_{i,\cdot} = f_{i,\cdot} = \dfrac{n_{i,\cdot}}{n}$
- on estime $\mathbb{P}[Y = y_j]$ par $\widehat{p}_{\cdot,j} = f_{\cdot,j} = \dfrac{n_{\cdot,j}}{n}$

Test d'indépendance II

Indépendance empirique $\boldsymbol{x} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{y}$

Soit $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$ des couples de variables catégorielles appareillées. Si $[n_{i,j}]$ est le tableau de contingence associé, on dira que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont empiriquement indépendant - noté $\boldsymbol{x} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{y}$ - si

$$\widehat{p}_{i,j} = \widehat{p}_{i,\cdot}\widehat{p}_{\cdot,j} \text{ ou } \frac{n_{i,j}}{n} = \frac{n_{i,\cdot}}{n}\frac{n_{\cdot,j}}{n}, \ \forall i \text{ et } j$$

$$\text{ou } n_{i,j} = \frac{n_{i,\cdot}n_{\cdot,j}}{n}, \ \forall i \text{ et } j$$

On pourra noter $\widehat{p}^{\perp}_{i,j} = \widehat{p}_{i,\cdot}\widehat{p}_{\cdot,j}$, et on aura indépendance si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{\perp}$

Un test naturel sera un test du chi-deux.

Test d'indépendance III

Test $H_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$ contre $H_1 : X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$

Soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$ des couples de variables catégorielles appareillées. Si $[n_{i,j}]$ est le tableau de contingence associé, pour tester $H_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$ contre $H_1 : X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$ la statistique de test est

$$Q = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(n\hat{p}_{i,j} - n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}\right)^2}{n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(n_{i,j} - n_{i,\cdot}n_{\cdot,j}\right)^2}{n_{i,\cdot}n_{\cdot,j}}$$

Si $H_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$ est vraie, $Q \sim \chi^2((I-1)(J-1))$. Et donc

- on rejette H_0 si $q > Q^{-1}_{(I-1)(J-1))}(1-\alpha)$

où Q_ν est la fonction de répartition de la loi du chi-deux, $\chi^2(\nu)$.

Test d'indépendance IV

Notons qu'on peut aussi écrire la statistique de test sur les probabilités, et pas les comptages

$$Q = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{(n\hat{p}_{i,j} - n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j})^2}{n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}} = n\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{(\hat{p}_{i,j} - \hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j})^2}{\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}}$$

On peut également écrire

$$Q = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\epsilon_{i,j}^2 \text{ où } \epsilon_{i,j} = \frac{(n\hat{p}_{i,j} - n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j})}{\sqrt{n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}}}$$

où, si $H_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$ est vraie, $\epsilon_{i,j} \approx \mathcal{N}(0,1)$.

$\epsilon_{i,j}^2$ est appelée contribution au test du chi-deux

Test d'indépendance V

```
> N = HairEyeColor[,,Sex="Female"]+HairEyeColor[,,Sex
    ="Male"]
> (Q = chisq.test(N))

  Pearson's Chi-squared test

data:  N
X-squared = 138.29, df = 9, p-value < 2.2e-16
> Q$observed
       Eye
Hair    Brown Blue Hazel Green
  Black    68   20    15     5
  Brown   119   84    54    29
  Red      26   17    14    14
  Blond     7   94    10    16
```

Test d'indépendance VI

```
> Q$expected
        Eye
Hair          Brown       Blue     Hazel     Green
  Black   40.13514   39.22297 16.96622 11.675676
  Brown  106.28378 103.86824 44.92905 30.918919
  Red     26.38514   25.78547 11.15372  7.675676
  Blond   47.19595   46.12331 19.95101 13.729730
```

Comme attendu, on notera que $n_{\cdot,j}^{\perp} = n_{\cdot,j}$ pour tout j

```
> apply(Q$observed,2,sum)
Brown  Blue Hazel Green
  220   215    93    64
> apply(Q$expected,2,sum)
Brown  Blue Hazel Green
  220   215    93    64
```

(et on vérifiera que $n_{\cdot,j}^{\perp} = n_{\cdot,j}$ pour tout j)

Test d'indépendance VII

```
> Q

  Pearson's Chi-squared test

data:  N
X-squared = 138.29, df = 9, p-value < 2.2e-16
```

On rejette ici $H_0 : X \perp\!\!\!\perp Y$ car q dépasse le quantile à 95% d'une loi du $\chi^2(3 \times 3)$,

```
> qchisq(.95,3*3)
[1] 16.91898
```

avec une p-value inférieure à 10^{-16}.

On peut aussi calculer les résidus $\epsilon_{i,j} = \dfrac{(n\hat{p}_{i,j} - n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j})}{\sqrt{n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}}}$

Test d'indépendance VIII

Les résidus sont $\epsilon_{i,j} = \dfrac{(n\hat{p}_{i,j} - n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j})}{\sqrt{n\hat{p}_{i,\cdot}\hat{p}_{\cdot,j}}}$

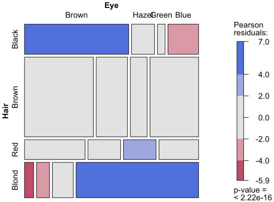
```
> Q$residuals
        Eye
Hair       Brown    Blue   Hazel   Green
  Black   4.3984 -3.0694 -0.4774 -1.9537
  Brown   1.2335 -1.9495  1.3533 -0.3451
  Red    -0.0750 -1.7301  0.8523  2.2827
  Blond  -5.8510  7.0496 -2.2278  0.6127
```

On rejette H_0 car on a

- trop de personnes aux cheveux `Black` ayant les yeux `Brown`
- trop de personnes aux cheveux `Blond` ayant les yeux `Blue`
- pas assez de personnes `Black` ayant les yeux `Blue`
- pas assez de personnes `Blond` ayant les yeux `Brown`

Test d'indépendance IX

	brown	hazel	green	blue	
black	68	15	5	20	108
brown	119	54	29	84	286
red	26	14	14	17	71
blond	7	10	16	94	127
	220	93	64	215	



	brown	hazel	green	blue	
black	40	17	12	39	108
brown	106	45	31	104	286
red	26	11	8	26	71
blond	47	20	14	46	127
	220	93	64	215	

on compare $n_{i,j}$ et $n_{i,j}^{\perp}$

$$n_{i,j}^{\perp} = \frac{n_{i,\cdot} \cdot n_{\cdot,j}}{n}$$

Test d'indépendance I

Example 3 : En analysant les données relatives à la peine de mort pour les condamnées pour meurtre en Floride 1976-1987, on a les statistiques suivantes

- meurtrier de "race blanche" et victime de "race blanche": 53 condamnés à mort, 414 non condamnés à mort
- meurtrier de "race blanche" et victime de "race noire": 0 condamné à mort, 16 non condamnés à mort
- meurtrier de "race noire" et victime de "race blanche": 11 condamnés à mort, 37 non condamnés à mort
- meurtrier de "race noire" et victime de "race noire": 4 condamnés à mort, 139 non condamnés à mort

Que peut-on dire (statistiquement) sur la base de ces statistiques ?

Test d'indépendance II

Indépendance entre la "race" de la victime et la condamnation

```
> N = matrix(c(53+11,0+4,414+37,139+16),2,2)
> rownames(N) = c("blanc","noir")
> colnames(N) = c("a mort","pas a mort")
> Q = chisq.test(N)
> Q$observed
      a mort pas a mort
blanc     64        451
noir       4        155
> Q$expected
        a mort pas a mort
blanc 51.95846   463.0415
noir  16.04154   142.9585
> Q$residuals
         a mort pas a mort
blanc  1.670529 -0.5595929
noir  -3.006485  1.0071107
> Q
X-squared = 12.087, df = 1, p-value = 0.0005077
```

Test d'indépendance III

Indépendance entre la "race" de l'accusé(e) et la condamnation

```
> N = matrix(c(53+0,11+4,414+16,139+37),2,2)
> rownames(N) = c("blanc","noir")
> colnames(N) = c("a mort","pas a mort")
> Q = chisq.test(N)
> Q$observed
      a mort pas a mort
blanc     53        430
noir      15        176
> Q$expected
        a mort pas a mort
blanc 48.72997     434.27
noir  19.27003     171.73
> Q$residuals
          a mort pas a mort
blanc  0.6116920 -0.2049042
noir  -0.9727242  0.3258426
> Q
X-squared = 1.1447, df = 1, p-value = 0.2847
```

Test d'indépendance IV

Indépendance entre la "race" de la victime et l'accusé(e)

```
> N = matrix(c(53+114,0+16,11+37,139+4),2,2)
> rownames(N) = c("blanc","noir")
> colnames(N) = c("blanc","blanc")
> Q = chisq.test(N)
> Q$observed
      blanc blanc
blanc   167    48
noir     16   143
> Q$expected
          blanc     blanc
blanc 105.20053 109.79947
noir   77.79947  81.20053
> Q$residuals
          blanc     blanc
blanc  6.025259 -5.897726
noir  -7.006424  6.858123
> Q
X-squared = 164.52, df = 1, p-value < 2.2e-16
```