

Statistiques pour les sciences (MAT-4681)

Arthur Charpentier

09 - Modèle Probabiliste, Paramètre et Inférence

été 2022

Statistique et Paramètre

Statistique

Étant donné un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ une statistique est une fonction des observations, $t(\mathbf{x}) = t(x_1, \dots, x_n)$.

Par exemple $t(x_1, \dots, x_n) = x_5$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ou $\max\{x_i\} - \min\{x_i\}$.

Paramètre

Un paramètre est un nombre qui décrit la distribution de X . C'est un nombre fixe, et souvent inconnu.

Par exemple p pour une loi $\mathcal{B}(p)$ ou $\frac{p}{1-p}$

Modèle paramétrique

Formalisation du problème : nous supposons disposer de Y_1, \dots, Y_n copies indépendantes d'une variable aléatoire Y dont la densité est paramétré par un paramètre réel ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$) ou vectoriel ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$).

On notera $\{Y_1, \dots, Y_n\} F_\theta \in \mathcal{F}$ où \mathcal{F} est la famille de lois

Exemples :

- ▶ Loi de Bernoulli $Y \sim \mathcal{B}(p)$, $\theta = p \in (0, 1)$ ou $\theta = \frac{p}{1-p} \in \mathbb{R}_+$
- ▶ Loi de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\theta = \lambda \in \mathbb{R}_+$, ou $\theta = \log \lambda \in \mathbb{R}$
- ▶ Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

Identifiabilité

$$\theta_1 \neq \theta_2 \implies F_{\theta_1} \neq F_{\theta_2} \text{ ou } F_{\theta_1} = F_{\theta_2} \implies \theta_1 = \theta_2.$$

Modèle paramétrique

Example: Le modèle Gaussien, sur \mathbb{R}

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right); \theta = (\mu, \sigma^2) \right\}.$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors

$$f_{\theta_1} = f_{\theta_2}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x - \mu_2)^2\right)$$

$$\iff \frac{1}{\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2 + \log \sigma_1 = \frac{1}{\sigma_2^2}(x - \mu_2)^2 + \log \sigma_2$$

$$\iff x^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) - 2x \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right) + \left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \log \sigma_1 - \log \sigma_2 \right) = 0$$

Modèle paramétrique

Example: Le modèle mélange d'exponentielles, sur \mathbb{R}_+

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\theta}(x) = \alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - \alpha)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}; \theta = (\alpha, \lambda_1, \lambda_2) \right\}.$$

où $\alpha \in (0, 1)$ et $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Soient $\theta_1 = (\alpha, \lambda_1, \lambda_2)$ et $\theta_2 = (1 - \alpha, \lambda_2, \lambda_1)$,

$$\theta_1 \neq \theta_2 \text{ mais } f_{\theta_1} = f_{\theta_2}$$

Ce modèle n'est alors pas identifiable...

Modèle paramétrique

θ est le paramètre (en général inconnu) de la loi F_θ

Θ est l'espace des paramètres

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un échantillon aléatoire de n copies indépendantes de loi f_θ

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ les valeurs observées de $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$
 n la taille de l'échantillon

Modèle paramétrique

Un estimateur d'un paramètre θ est une variable aléatoire (fonction de l'échantillon \mathbf{Y}) et est noté $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$. La valeur estimée de $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ s'appelle aussi estimation et est notée $\hat{\theta}(\mathbf{y})$.

(dans de nombreux ouvrages, $\hat{\theta}$ désigne aussi bien $\hat{\theta}(\mathbf{y})$ que $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$)
L'**estimateur** est une variable aléatoire $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ et l'**estimation** est une constante $\hat{\theta}(\mathbf{y})$

Exemple : observations suivant une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$

$$\hat{\theta}_1(\mathbf{Y}) = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \text{ et } \hat{\theta}_1(\mathbf{y}) = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\hat{\theta}_2(\mathbf{Y}) = \bar{Y} = \frac{\min\{Y_i\} + \max\{Y_i\}}{2} \text{ et } \hat{\theta}_2(\mathbf{y}) = \bar{y} = \frac{\min\{y_i\} + \max\{y_i\}}{2}$$

Biais d'un estimateur

On appelle biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ de θ la quantité

$$\text{bias}[\hat{\theta}(\mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\hat{\theta}(\mathbf{Y})] - \theta$$

On dit que

- ▶ $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ est un estimateur sans biais de θ si $\text{bias}[\hat{\theta}(\mathbf{Y})] = 0$
- ▶ $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{bias}[\hat{\theta}(\mathbf{Y})] = 0$$

Example Y_1, \dots, Y_n de moyenne μ ,

- ▶ $\hat{\mu}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ est un estimateur sans biais de μ
- ▶ $\tilde{\mu}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{n+3} \sum_{i=1}^n Y_i$ est un estimateur asymptotiquement

sans biais de μ

Example Y_1, \dots, Y_n de variance σ^2 ,

► $\hat{\sigma}^2(\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ estimate sans biais de σ^2

► $\tilde{\sigma}^2(\mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ est un estimateur
asymptotiquement sans biais de σ^2

Example Y_1, \dots, Y_n , de loi F . Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbf{1}(Y_i \leq y)}_{X_i}$$

où les variables X_i sont des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = F(y)$.

$$\mathbb{E}[\hat{F}(y)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[Y_i \leq y] = F(y)$$

donc $\hat{F}(y)$ est un estimateur sans biais de $F(y)$, pour tout y .

Moyenne Quadratique (MSE)

Erreur Quadratique Moyenne

On appelle erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ et on note $EQM(\hat{\theta}(\mathbf{Y}))$ la quantité

$$EQM(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = \mathbb{E} \left[(\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta)^2 \right]$$

Un peu de calcul permet d'écrire

$$EQM(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = \text{bias}(\hat{\theta}(\mathbf{Y}))^2 + \text{Var}(\hat{\theta}(\mathbf{Y}))$$

Consistance

Un estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ est consistant si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = 0$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Pour un estimateur sans biais

$$EQM(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = \text{Var}(\hat{\theta}(\mathbf{Y}))$$

Un estimateur asymptotiquement sans biais est consistant si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = 0$$

Efficacité

Soient $\hat{\theta}_1(\mathbf{Y})$ et $\hat{\theta}_2(\mathbf{Y})$ deux estimateurs de θ . $\hat{\theta}_1(\mathbf{Y})$ est plus efficace que $\hat{\theta}_2(\mathbf{Y})$ si $EQM(\hat{\theta}_1(\mathbf{Y})) < EQM(\hat{\theta}_2(\mathbf{Y}))$.

$$eff(\hat{\theta}_1(\mathbf{Y}), \hat{\theta}_2(\mathbf{Y})) = \frac{EQM(\hat{\theta}_2(\mathbf{Y}))}{EQM(\hat{\theta}_1(\mathbf{Y}))} \text{ rapport d'efficacité}$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Example: Y_1, \dots, Y_n de moyenne μ ,

$$\hat{\mu}_1(\mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \text{ et } \hat{\mu}_2(\mathbf{Y}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} Y_i$$

alors $\text{eff}(\hat{\mu}_1(\mathbf{Y}), \hat{\mu}_2(\mathbf{Y})) = 2$

Moyenne Quadratique (MSE)

Example: Y_1, \dots, Y_n des variables $\mathcal{B}(p)$. Soit $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.
 $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ donc $\mathbb{E}[S_n] = np$ et $\text{Var}[S_n] = np(1 - p)$.

$$\hat{p}_1 = \frac{S_n}{n} \text{ et } \hat{p}_2 = \frac{S_n + 1}{n + 2}$$

$$\mathbb{E}[\hat{p}_1] = p \text{ et } \text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{p(1 - p)}{n}$$

Comme c'est un estimateur sans biais de p , $EQM(\hat{p}_1) = \frac{p(1 - p)}{n}$

$$\mathbb{E}[\hat{p}_2] = \frac{np + 1}{n + 2} \text{ et } \text{Var}(\hat{p}_2) = \frac{\text{Var}(S_n)}{(n + 2)^2} = \frac{np(1 - p)}{(n + 2)^2}$$

$$EQM(\hat{p}_2) = \left[\frac{np + 1}{n + 2} - p \right]^2 + \frac{np(1 - p)}{(n + 2)^2} = \frac{(1 - 2p)^2 + np(1 - p)}{(n + 2)^2}$$

Moyenne Quadratique (MSE)

Aussi, le rapport d'efficacité vaut

$$\text{eff}(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = \frac{EQM(\hat{p}_2)}{EQM(\hat{p}_1)} = \frac{n}{(n+2)^2} \left[n + \frac{(1-2p)^2}{p(1-p)} \right]$$

Si $p \sim 1/2$, ce rapport vaut $n^2/(n+2)^2 < 1$.

En fait \hat{p}_2 domine \hat{p}_1 si

$$p \in \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \right)$$

Maximum de Vraisemblance

Vraisemblance (Likelihood)

Soit $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ . La fonction de vraisemblance est

$$\mathcal{L}(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n f_\theta(y_i)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\theta}(\mathbf{y}) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \{\mathcal{L}(\theta|\mathbf{y})\} \text{ et } \hat{\theta}(\mathbf{Y}) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \{\mathcal{L}(\theta|\mathbf{Y})\}$$

Maximum de Vraisemblance

Log-Vraisemblance

Soit $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ . La fonction de log-vraisemblance est

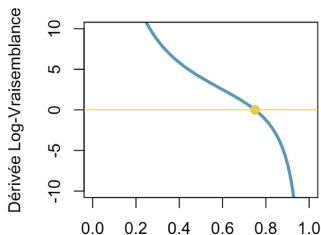
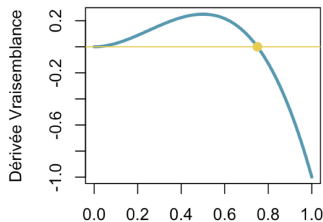
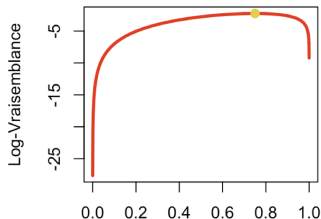
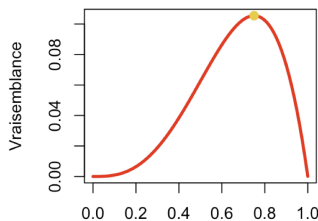
$$\log \mathcal{L}(\theta|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \log f_\theta(y_i)$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\theta}(\mathbf{y}) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \{ \log \mathcal{L}(\theta|\mathbf{y}) \} \text{ et } \hat{\theta}(\mathbf{Y}) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \{ \log \mathcal{L}(\theta|\mathbf{Y}) \}$$

Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

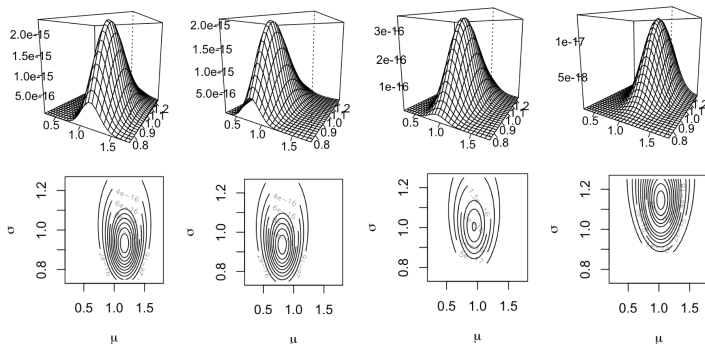
$$\mathbf{y} = \{0, 1, 1, 1\}, Y_i \sim \mathcal{B}(\theta).$$



Vraisemblance, cas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Pour les paramètres univariés, on peut visualiser la vraisemblance, mais c'est plus compliqué en dimension plus grande...

Vraisemblance $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ pour 4 échantillons \mathbf{y}



Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

Exemple 1 : on a fait un sondage sur 15 personnes pour savoir s'ils appréciaient le cours de MAT4681, quelle est l'estimation par maximum de vraisemblance de la proportion de gens satisfaits ?

- ce que nous dit la théorie

$$\mathcal{L}(p; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{s_n} (1-p)^{n-s_n}, \quad s_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\log \mathcal{L}(p; \mathbf{x}) = s_n \log(p) + (n - s_n) \log(1 - p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log \mathcal{L}(p; \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial p} s_n \log(p) + (n - s_n) \log(1 - p) = \frac{s_n}{p} - \frac{n - s_n}{1 - p}$$

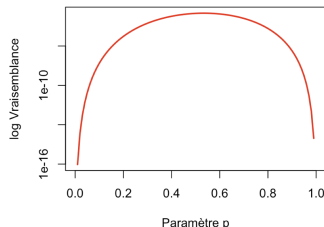
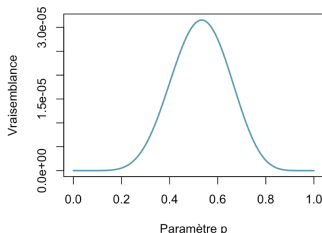
$$\left. \frac{\partial}{\partial p} \log \mathcal{L}(p; \mathbf{x}) \right|_{p=\hat{p}} = 0 \text{ si et seulement si } \frac{s_n}{\hat{p}} = \frac{n - s_n}{1 - \hat{p}}, \text{ soit } \hat{p} = \frac{s_n}{n} = \bar{x}$$

Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous dit la pratique

Traçons la fonction de (log)vraisemblance $p \mapsto \mathcal{L}(p; \mathbf{x})$

```
1 > n=15
2 > x = c(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)
3 > vraisemblance = fonction(p) prod(dbinom(x,size = 1,
      prob = p))
4 > vect_p = seq(0,1,by=0.01)
5 > plot(vect_p, Vectorize(vraisemblance)(vect_p))
```



Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous dit la pratique

On peut chercher le maximum de la fonction $p \mapsto \mathcal{L}(p; \mathbf{x})$

```
1 > optim(par = .5, fn = function(z) -vraisemblance(z))
2 $par
3 [1] 0.5333252
4
5 $value
6 [1] -3.155276e-05
```

La théorie nous avait dit que ce maximum a une forme particulière,
 $\hat{p} = \bar{x}$

```
1 > mean(x)
2 [1] 0.5333333
```

Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous disent les mathématiques

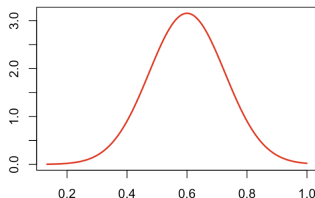
Comme $\hat{p}(\mathbf{x}) = \bar{x}$, on peut utiliser la loi des grands nombres,

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\hat{p}(\mathbf{X}) - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

mais ici $n = 15$ (approximation Gaussienne peut être mauvaise)

Si $p = 60\%$ la distribution (approchée) de $\hat{p}(\mathbf{X})$ serait

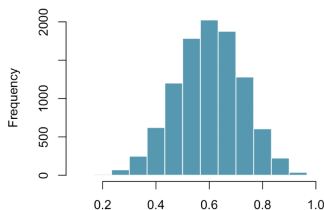
```
1 > u=seq(2/15, 1, by=.001)
2 > plot(u, dnorm(u, .6, sqrt(.4*.6/15)))
```



Vraisemblance, cas $\mathcal{B}(p)$

- ce que nous disent les simulations, si on suppose $\theta = 60\%$

```
1 > theta=rep(NA,1e4)
2 > for(s in 1:1e4){
3 +   x=sample(0:1,size = n,prob = c(.4,.6),replace=
   TRUE)
4 +   neglogL = function(p) -sum(log(dbinom(x,size =
   1,prob = p)))
5 +   theta[s] = optim(par = .5,fn = neglogL)$par
6 + }
7 > hist(theta)
```



Méthode des Moments

Méthode des Moments

Soit $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ un échantillon i.i.d. de variables de loi f_θ . Soient $m_k(\theta) = \mathbb{E}[Y^k]$ où $Y \sim f_\theta$, et $\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^k$ le moment empirique. Soit $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d)$ la solution du système d'équations

$$\begin{cases} m_1(\hat{\theta}) = \hat{m}_1 \\ \vdots \\ m_d(\hat{\theta}) = \hat{m}_d \end{cases}$$

Note: on peut parfois considérer les moments centrés (i.e. $\text{Var}[Y]$ au lieu de $\mathbb{E}[Y^2]$)

Méthode des moments, cas $\mathcal{B}(p)$

Exemple 2 : on a fait un sondage sur 15 personnes pour savoir s'ils appréciaient le cours de MAT4681, quelle est l'estimation par la méthode des moments de la proportion de gens satisfaits ?

- ce que nous dit la théorie

$$\mathbb{E}(X) = m_1(p) = p$$

or $\hat{m}_1 = \bar{x}$ donc $\hat{p}(x) = \bar{x}$

- ce que nous disent les mathématiques

Comme $\hat{p}(\mathbf{x}) = \bar{x}$, on peut utiliser la loi des grands nombres,

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\hat{p}(\mathbf{X}) - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

mais ici $n = 15$ (approximation Gaussienne peut être mauvaise)

Méthode des moments, cas $\mathcal{B}(n, p)$

Que se passe-t-il si $Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$, où n est aussi inconnu ?

$$\mathbb{E}[Y] = np \text{ et } \text{Var}[Y] = np(1 - p)$$

On va alors résoudre

$$\begin{cases} \widehat{np} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ \widehat{np}(1 - \widehat{p}) = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \end{cases}$$

soit

$$\widehat{p} = \frac{\bar{y} - s^2}{\bar{y}} \text{ et } \widehat{n} = \frac{\bar{y}^2}{\bar{y} - s^2}$$

Note: il est possible d'avoir $\widehat{p} < 0$

Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

Exemple 3 : On observe des données modélisées par une loi de densité $\mapsto \theta y^{\theta-1}$ pour $y \in [0, 1]$. Quels sont les estimateurs de θ ?

```
1 > y = c(0.685, 0.754, 0.853, 0.973, 0.633, 0.97,  
          0.984, 0.888, 0.876, 0.451, 0.637, 0.609, 0.898,  
          0.761, 0.928, 0.819, 0.91, 0.998, 0.758, 0.931,  
          0.981, 0.642, 0.885, 0.553, 0.686)
```

- méthode des moments

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y \cdot \theta y^{\theta-1} dy = \theta \int_0^1 y^{\theta} dy = \theta \left[\frac{y^{\theta+1}}{\theta+1} \right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

L'estimateur par la méthode des moments vérifie

$$\bar{y} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta} + 1} \text{ soit } \hat{\theta} = \frac{\bar{y}}{1 - \bar{y}}$$

Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

- maximum de vraisemblance

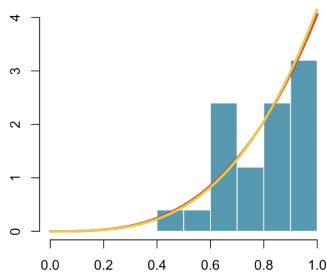
$$\log \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y}) = n \log(\theta) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(y_i)$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(y_i)$$

$$\left. \frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} \right|_{-\theta = \hat{\theta} = 0} \text{ si } \frac{n}{\theta} = - \sum_{i=1}^n \log(y_i), \text{ i.e. } \hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \log(y_i)}$$

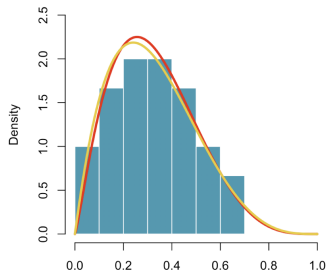
```
1 > (a=mean(y)/(1-mean(y)))  
2 [1] 4.062526  
3 > (b=-25/sum(log(y)))  
4 [1] 4.166513
```

Les deux densités sont très proches



Maximum de Vraisemblance vs Méthode des Moments

Les deux estimateurs sont proches
et les densités aussi

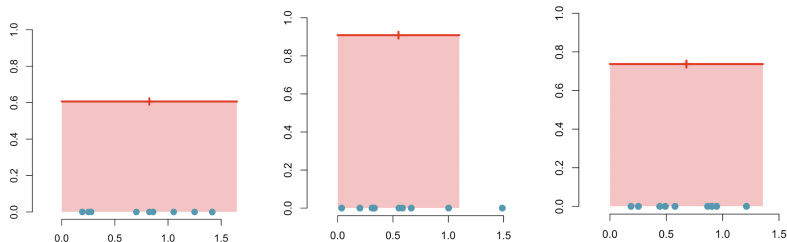


Méthode des Moments

Example: $\{y_1, \dots, y_n\}$ de loi $\mathcal{U}([0, \theta])$, $\mathbb{E}[Y] = \theta/2$, alors

$$\bar{y} = \hat{\theta}/2 \text{ i.e. } \hat{\theta} = 2\bar{y}$$

Même si $y_i \leq \theta$ (par hypothèse), on peut avoir $\hat{\theta} < y_j$



Note: estimateur du maximum de vraisemblance pour $\mathcal{U}([0, \theta])$?

Théorème Central Limite

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et une variance σ^2 . La moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ centrée converge vers une loi normale :

$$\sqrt{n}[\bar{X}_n - \mu] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$