MAT4681 - Statistique pour les sciences

Arthur Charpentier

04 - Moyenne, variance (et rappels de maths) # 1

été 2022

Logarithme

Pour $x > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$,

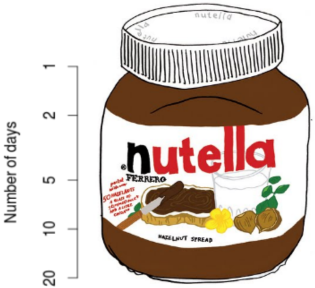
$$\log_b(x) = y \text{ si } b^y = x$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y,$$

$\log_b$ pour $b > 1$ est la seule fonction croissante f telle que $f(b) = 1$ et $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Le logarithme naturel de x est

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$



! $\log(x)$ existe seulement lorsque $x > 0$ (et $\log(0)$ n'existe pas)

Inverse d'une function

Pour $x > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$,

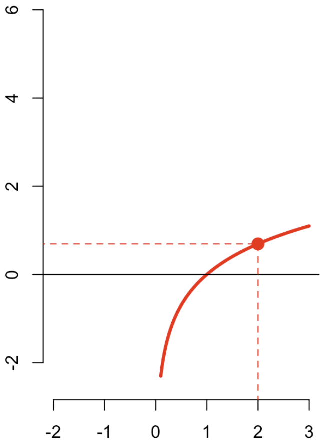
$$\log_b(x) = y \quad \text{si} \quad b^y = x$$

Soit $f(x) = \log_b(x)$ $(= y)$.

L'inverse f^{-1} vérifie $x = f^{-1}(y)$, soit

$$f^{-1}(y) = b^y \ (= x)$$

Intuition :
$f(f^{-1}(y)) = y$ et $f^{-1}(f(x)) = x$
$f(x) = \log(x)$, $f^{-1}(y) = \exp(y)$



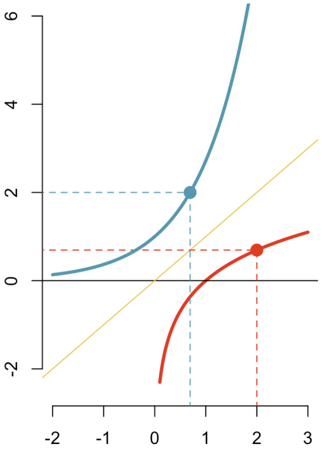
Inverse d'une function

Visuellement, l'inverse est symmétrique par rapport à la première diagonale ($y = x$).

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

alors que

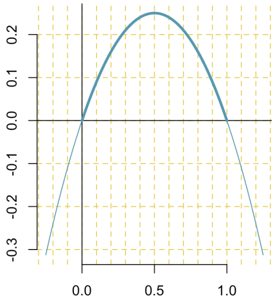
$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$



Polynômes

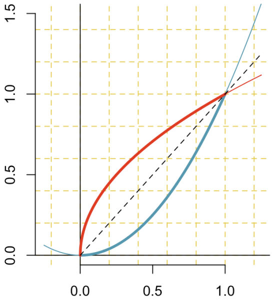
Exemple: $P(x) = 5x^4 + x^2 - 7x + 3$
est un polynôme de degré 4

Exemple: $P(x) = -x^2 + x = x \cdot (1 - x)$
est un polynôme de degré 2 (quadratique)
Le graphe de P est une parabole
Note: $\text{argmax}\{P(x)\} = 1/2$



Example: $P : x \mapsto x^2$
L'inverse de P (sur $[0, \infty)$) est $P^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$
i.e. si $y = x^2$ (avec $x \geq 0$), $x = \sqrt{y}$

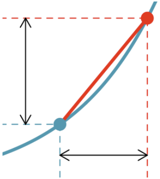
Note: $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$.
$\sqrt{x} \leq x \leq x^2$ pour tout $x \in [1, \infty)$.



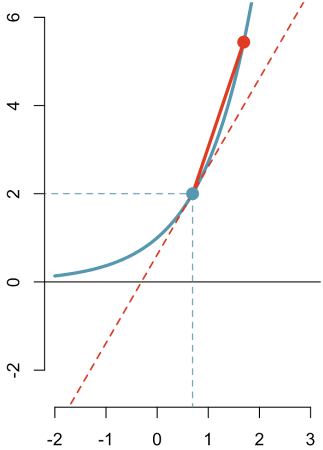
Fonction dérivée

Dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



correspond à la limite de la pente...



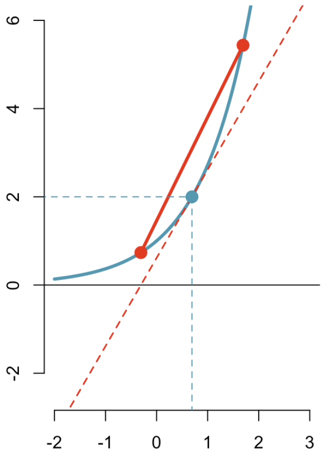
Derivative of a Function

Une expression alternative est

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

notée aussi $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$

(meilleures propriétés numériques erreur en h^2, contre h auparavant)



Fonction dérivée

Propriétés classique :

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (fg)' = f'g + fg'$$

$$(\exp[g])' = g' \exp(g) \text{ et } (\log[g])' = \frac{g'}{g}$$

Chain rule $z = f(y)$ et $y = g(x)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Intégrale d'une function

Pour calculer (numériquement) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (qui vaut $\log(2)$)

En python

```
> import scipy.integrate as integrate
> integrate.quad(lambda x: 1/x,1,2)
(0.6931471805599454, 7.695479593116622e-15)
```

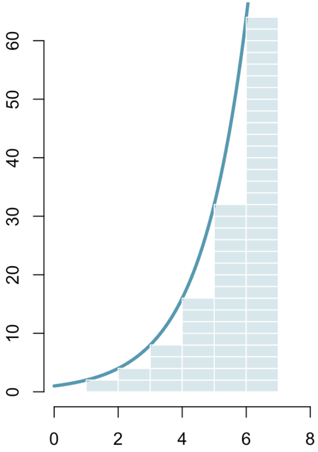
et en R

```
> integrate(function(x) 1/x,1,2)
0.6931472 with absolute error < 7.7e-15
```

Exponentials & Logarithms

$$y = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$$

$n = 10,\ 2^{10} = 1,024$
$n = 20,\ 2^{20} = 1,048,576$
$n = 40,\ 2^{40} \simeq 1,099,511,627,776$
Note : $2^{2n} = (2^n)^2$



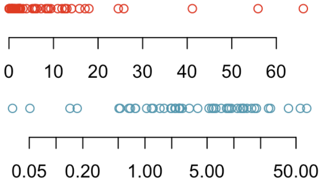
Exponentials & Logarithms

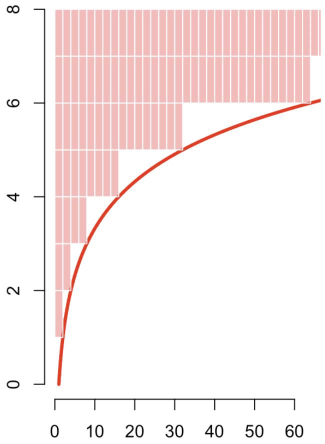
Que vaut n si

$$y = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$$

$$n = \log_2(y)$$

cf échelle logarithmique





Logarithme & Exponentielle

Logarithme & Exponentielle

L'exponentielle est l'unique fonction f dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp[x] = e^x$.
Le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle,

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \log[e^x] = x, \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

$\dfrac{d \log(x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$, et si u est différentiable, $\dfrac{d \log(u(x))}{dx} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$\dfrac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x)$, et $\dfrac{d \exp(u(x))}{dx} = u'(x) \cdot \exp[u(x)]$

$$\begin{cases} \log(ab) = \log(a) + \log(b), & \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \\ \exp[a + b] = \exp[a] \cdot \exp[b], & \forall a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logarithme & Exponentielle

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \log(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Suite géométrique, $u_n - u_{n-1} = k \cdot u_{n-1}$,

$$u_n = (1+k) \cdot u_{n-1} = (1+k)^n \cdot u_0$$

Version continue (taux d'accroissement)

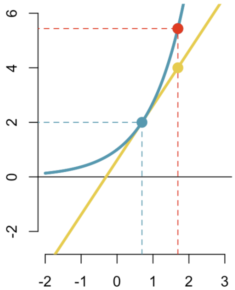
$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = k \cdot u(x) \text{ ou } u'(x) = k \cdot u(x)$$

alors $u(x) = \exp[kx] \cdot u(0) = \exp[k]^x \cdot u(0)$.

Approximation ★★★

We have seen that, if h small,

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



that we can write

$$f(x+h) \simeq f(x) + \frac{f'(x)}{1} h$$

Taylor approximation (expansion),

$$f(x+h) \simeq f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \cdots$$

or

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Counting

- how many ways to order four items $\{A, B, C, D\}$?

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

(here $4! = 24$)

- how many combinations of two items out of four $\{A, B, C, D\}$?

(here (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D) and (C,D), i.e. 6)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

for k elements out of n.

See also the birthday paradox, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \simeq \frac{n^2}{2}$

La version continue de la factorielle ★★★

Fonction Gamma

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+$$

On peut montrer que $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx \\ &= \Big[-x^z e^{-x}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z x^{z-1} e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-x^z e^{-x}\right) - \left(-0^z e^{-0}\right) + z\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

comme $-x^z e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to \infty$

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx = z\Gamma(z)$$

Pour $z \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z+1) = z!$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Dérivées

Dérivée

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dérivée seconde

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$,

$$f''(a) = \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{df'(x)}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

Dérivées

Exemple: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{4x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{3x} + 3}{2\sqrt{x}}$

Exemple: $f(x) = \left(x^2 + 3\right)x^5$, $f'(x) = x^4\left(7x^2 + 15\right)$

Exemple: $f(x) = x^2\sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

Exemple: $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)x$, $f'(x) = 2x$

Exemple: $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$

Exemple: $f(x) = \dfrac{x^2 + \frac{3}{x}}{x^2 + \frac{x}{3}}$, $f'(x) = 3\dfrac{x^3 - 27x - 6}{x\left(3x^2 + x\right)^2}$

Exemple: $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Primitives & Intégrales

Intégrale

Soit f définie sur $[a, b]$, et F telle que $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ou, pour une intégrale impropre

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(si les deux intégrales existent)

Primitives & Intégrales

Exemple: $I_1 = \int_{-1}^{3} (5 - 2x)dx,\ I_1 = 12$

Exemple: $I_2 = \int_{0}^{1} x^2 \left(x^3 - 1\right)^5 dx,\ I_2 = \frac{-1}{18}$

Exemple: $I_3 = \int_{0}^{1} \frac{x}{\left(x^2 - 4\right)^2} dx,\ I_3 = \frac{1}{24}$

Exemple: $I_4 = \int_{0}^{1} e^{-2x} dx,\ I_4 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$

Exemple: $I_5 = \int_{-1}^{1} 2x(8x + 2)^2 dx,\ I_5 = \frac{128}{3}$

Exemple: $I_6 = \int_{0}^{1} x^2 e^x dx,\ I_6 = e - 2$

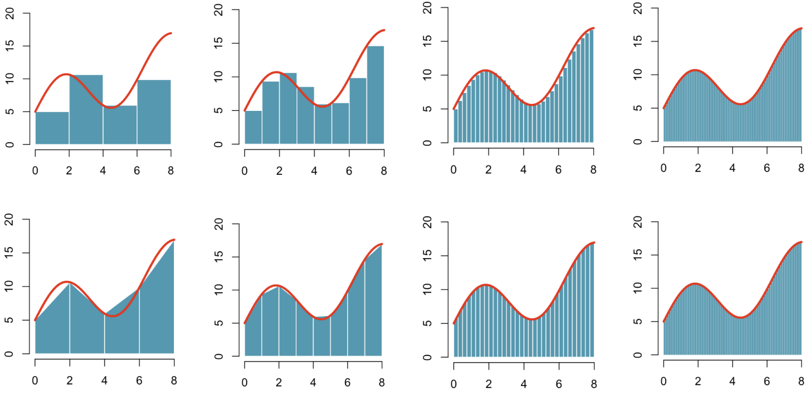
Exemple: $F(y) = \int_{*}^{y} \frac{1}{x^2} + 3x dx,\ F(Y) = -\frac{1}{y} + \frac{3}{2} y^2 + \text{cst}$

Exemple: $F(y) = \int_{*}^{y} \frac{5}{(-2x + 1)^2} + 3dx = \frac{5}{2}\frac{1}{-2y + 1} + 3y + \text{cst}$

Primitives & Intégrales

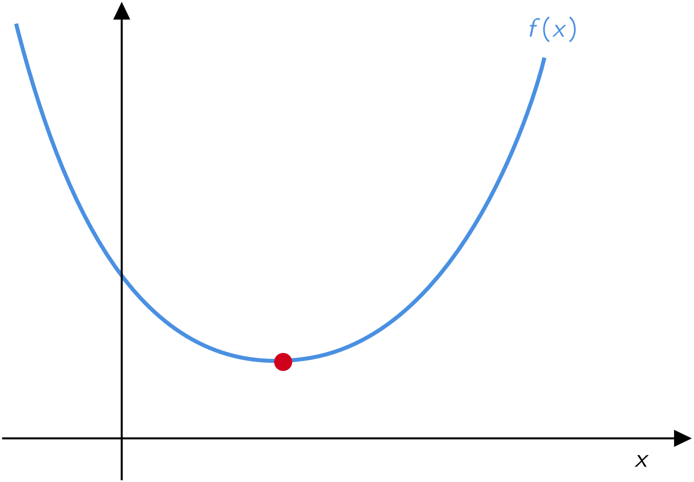
On sera a priori intéressé par un calcul numérique d'une intégrale,

```
> f = function(x) 5-2*x
> integrate(f, -1, 3)
12 with absolute error < 1.4e-13
```



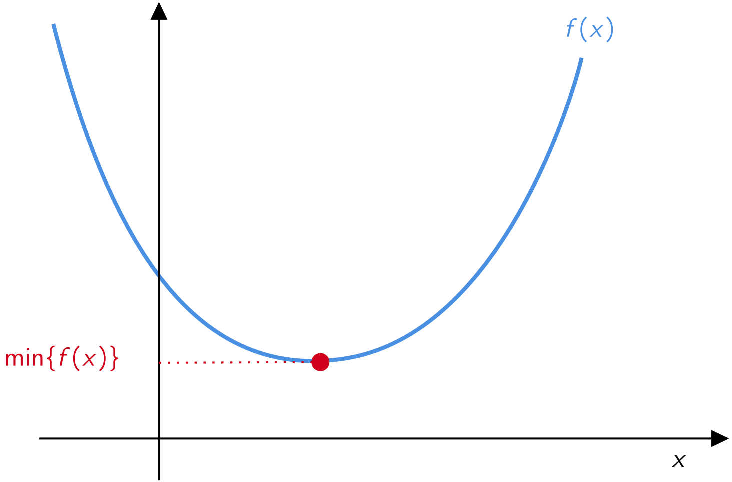
Optimisation I

Soit f une fonction suffisamment régulière



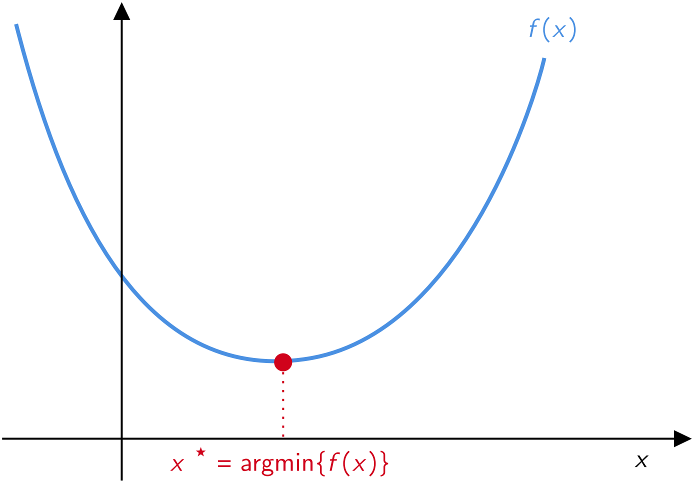
Optimisation II

$\min\{f\}$ est la valeur minimale prise par f



Optimisation III

$x^\star = \text{argmin}\{f\}$ est la valeur x pour laquelle $f(x)$ est minimale



Optimisation IV

Condition du premier ordre, en $x^\star$ la dérivée de f s'annule