Prise de notes du 8/04/2020

QCM sens de variation 2

Question 1 : Q1

La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{4n}$ est

- ○ ni arithmétique, ni géométrique
- ○ arithmétique
- X géométrique

Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_n = e^{4n}$

$u_n = (e^4)^n$

donc $u_n = u_0 \times q^n$

avec $u_0 = 1$ et $q = e^4$

$u_{n+1} = \underbrace{e^{4(n+1)}} = e^{4n+4}$

$u_{n+1} = \underbrace{e^4}_{q} \times \underbrace{e^{4n}}_{u_n}$

$u_{n+1} = q \times u_n$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^4$

Question 2 :

La suite définie par $u_n = e^{-2n}$ est

- arithmétique
- géométrique
- ni arithmétique, ni géométrique

Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_n = \left(e^{-2}\right)^n = u_0 \times q^n \text{ avec } \begin{cases} u_0 = 1 \\ q = e^{-2} \end{cases}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-2(n+1)}}{e^{-2n}} = e^{-2(n+1)} \times e^{2n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-2n-2} \times e^{2n} = e^{-2n-2+2n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-2}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison e^{-2}.

Question 3 : Q7

Si une suite (u_n) est croissante à partir du rang 0 alors

- [x] $u_0 \leqslant u_1$.
- [x] pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n \leqslant u_{n+2}$
- [x] pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$] définition
- [x] pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant u_0$

Pour tout entier $n \geq 0$,
$u_n \leq u_{n+1}$

→ Définition d'une suite crois-
-sante à partir du rang 0

$$\underbrace{u_n \leq u_{n+1}}_{\text{définition pour } n} \leq u_{n+1+1}$$

définition pour n ; définition pour $n+1$

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$$

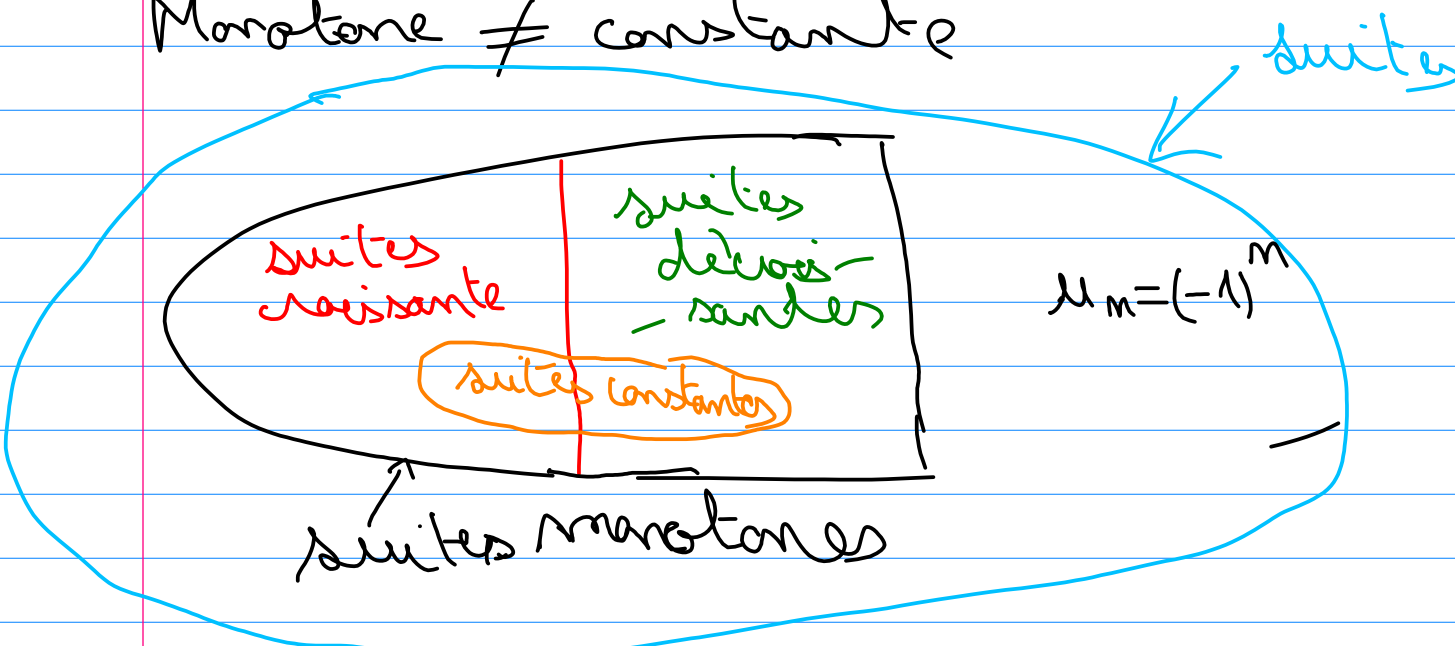
Question 4 : **Copie de Q7**

Si une suite (u_n) est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_{n+2} \geqslant u_n$ alors

- [ ] (u_n) est une suite croissante
- [ ] (u_n) est une suite décroissante
- [x] (u_n) n'est pas nécessairement monotone

Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.

Monotone $\neq$ constante



La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = (-1)^n$

vérifie : $u_{n+2} = (-1)^{n+2}$

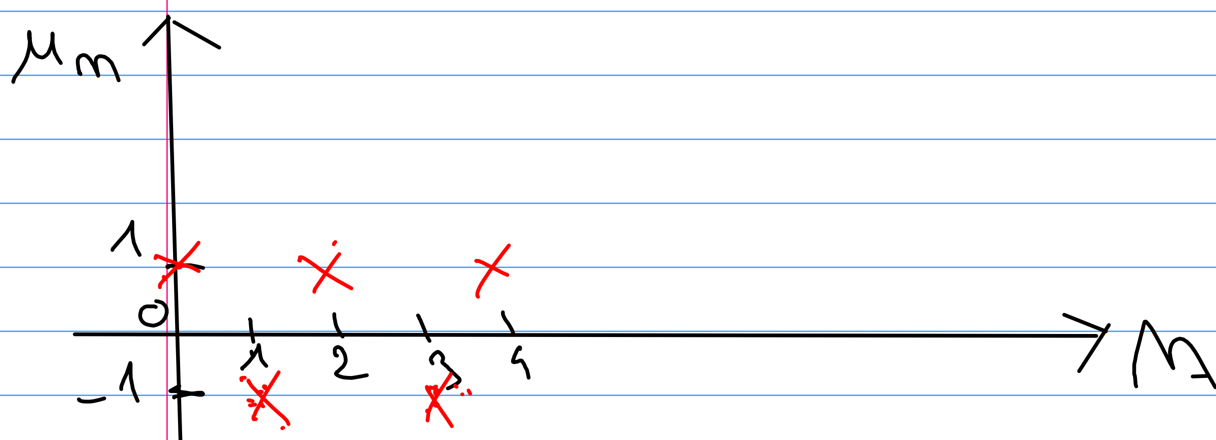
$u_{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2$

$u_{n+2} = u_n \times 1$

On a pour tout entier $n \geq 0$:

$u_{n+2} = u_n$ donc $u_n \leq u_{n+2}$

mais cette suite n'est ni crois-
-sante car $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$
ni décroissante car $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$

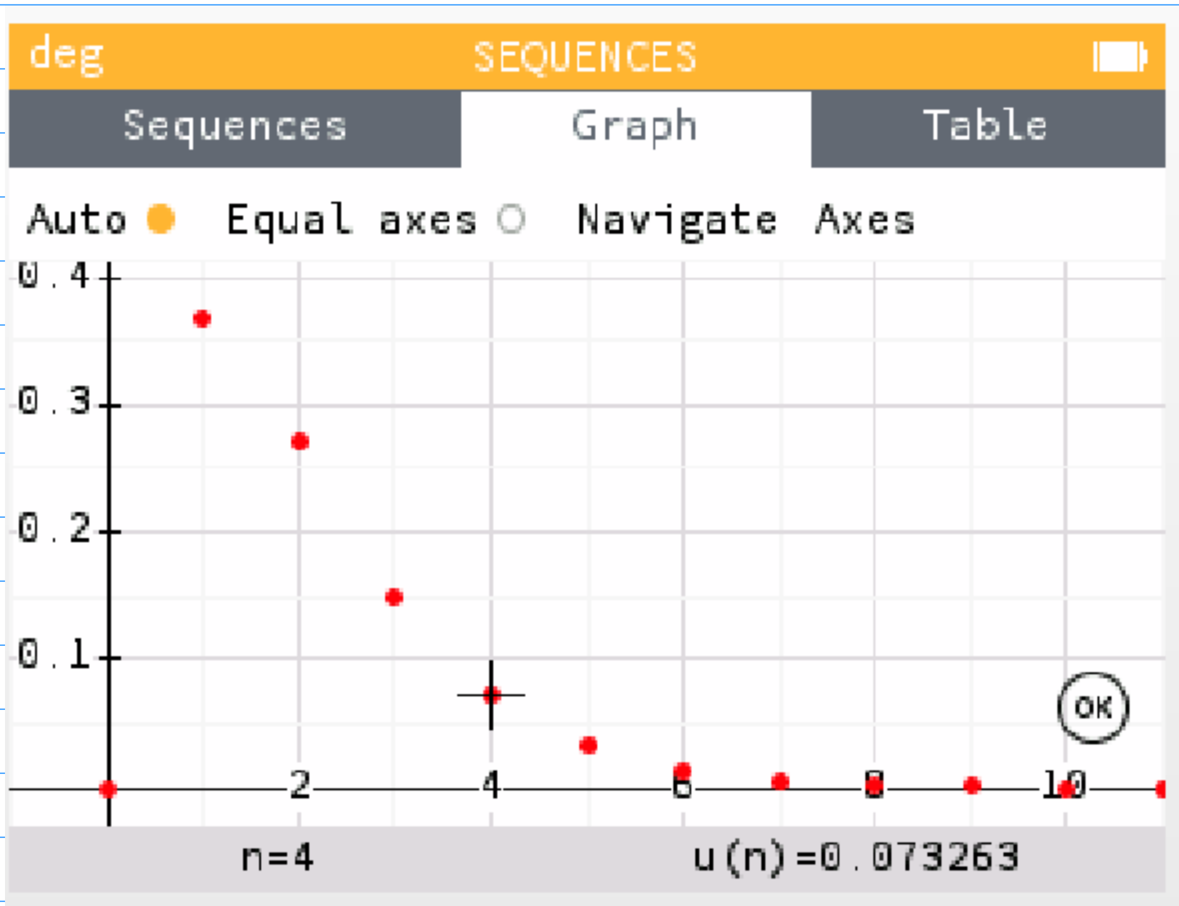


Retour sur la capacité 1 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_n = n e^{-n}$$

Étudier son sens de variation.



$u_n = f(n)$

où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x e^{-x}$$

Pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = x e^{-x}$$

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

$u(x) = x$ $\quad$ $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v'(x) = -e^{-x}$

donc $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} =$

$$f'(x) = e^{-x}(1-x)$$

Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} > 0$ donc

$f'(x)$ du signe de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

La fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

donc la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est décroissante à partir du rang 1.

Capacité 2 ***Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, voir exo 2 p.17***

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.

- Soit n un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
- Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation des suites :

- (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.
- (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.

2 méthodes possibles $u_{n+1} - u_n$ ou $u_n = f(n)$ et on étudie le sens de variation de f en dérivant

3. On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$

a. Détailler le calcul de v_1 et v_2.

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

1) Pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2$$

donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang 0.

2) Soit (v_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$v_n = 1 + 0,2^n$

$v_0 = 1 +$ $\qquad$ $v_1 =$ $\qquad$ $v_2 =$

Set the interval

n	v_n
0	2
1	1.2
2	1.04
3	1.008
4	1.0016
5	1.00032
6	1.000064

On peut conjecturer que (v_n) est décroissante et converge vers 1

Pour tout entier $n \geq 0$,

$v_{n+1} - v_n = 1 + 0,2^{n+1} - (1 + 0,2^n)$

$v_{n+1} - v_n = 0,2^{n+1} - 0,2^n$

$v_{n+1} - v_n = 0,2^n \times (0,2^1 - 1)$

$v_{n+1} - v_n = \underbrace{0,2^n \times (-0,8)}_{\text{négatif}}$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

donc $v_{n+1} \leq v_n$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

- Soit (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_n = \frac{n+2}{n+3}$$

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n =$$

$$= \frac{n+1+2}{n+1+3} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+3)^2}{(n+4)(n+3)} - \frac{(n+2)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

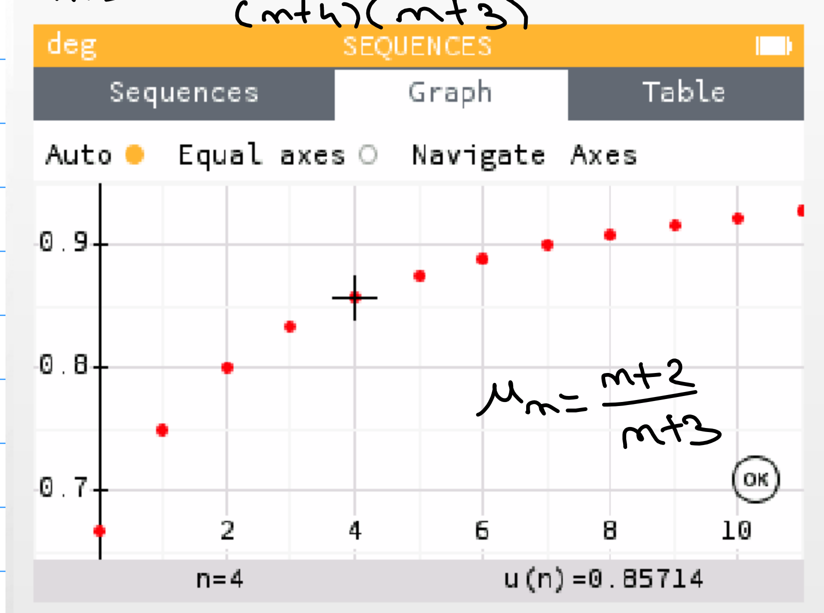
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+3)^2 - (n+2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2+6n+9-(n^2+6n+8)}{(n+4)(n+3)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+4)(n+3)}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc $u_{n+1} > u_n$

donc la suite est strictement croissante



Remarque : Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$n+3 > n+2$$

donc $\frac{n+3}{n+3} > \frac{n+2}{n+3}$ donc $1 > u_n$

3) $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n^2+1} \end{cases}$

$v_1 = v_0 + \dfrac{2}{0^2+1} = -4 + 2 = -2$

$v_2 = v_1 + \dfrac{2}{1^2+1} = -2 + 2 = -1$

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+1}$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$

donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Capacité 3 ***Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1***

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$.
   - ☞ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.
   - ☞ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ puis conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

1) (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$.
par :

$$u_n = \frac{2^n}{n}$$

on veut comparer u_n et u_{n+1}

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2^n}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2^n \times (n+1)}{n(n+1)} - \frac{2^{n+1} \times n}{n(n+1)}$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2^n \times (n+1) - 2^{n+1} \times n}{n(n+1)}$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2^n \times (n+1 - 2^1 \times n)}{n(n+1)}$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2^n \times (1-n)}{n(n+1)}$$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$1 - n \leq 0$.

donc $u_n - u_{n+1} \leq 0$

donc $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} \times \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$$

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$$

or $n \geq 1$ donc $n+n \geq n+1$

et donc $2n \geq n+1$

et donc $\frac{2n}{n+1} \geq 1$

et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

comme $u_n > 0$

on a $u_{n+1} \geq u_n$

$\times u_n > 0$ donc on ne change pas le sens de variation.