

# Exercices sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc  
1 Boulevard Anatole France  
69006 Lyon

22 mars 2020

# Plan

## 1 Exercices du manuel Barbazo

# Table des matières

- Exercice 6 p. 192
- Exercice 8 p. 192
- Exercice 10 p. 192
- Exercice 11 p. 192
- Exercice 12 p. 192
- Exercice 15 p. 193
- Exercice 20 p. 193
- Exercice 22 p. 194
- Exercice 25 p. 194
- Exercice 26 p. 194

# Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 1

On donne les ordres de grandeur :  $\exp(4) = 50$  et  $\exp(6) = 400$ .  
En déduire les ordres de grandeur de  $\exp(2)$  et  $\exp(10)$

- $\exp(2) = \exp(6 - 4) = \frac{\exp(6)}{\exp(4)} \approx \frac{400}{50} = 8$ .
- On peut aussi écrire  $\exp(4) = \exp(2 \times 2) = (\exp(2))^2$ .  
On en déduit que  $(\exp(2))^2 = 50 \Leftrightarrow \exp(2) = \sqrt{50} \approx 7$  car  $\exp(2) > 0$ .

**On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.**

A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve  $\exp(2) \approx 7$ .

- $\exp(10) = \exp(6 + 4) = \exp(6) \times \exp(4) \approx 400 \times 50 = 20000$ .

# Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 2

On donne les ordres de grandeur :  $\exp(4) = 50$  et  $\exp(6) = 400$ .  
En déduire les ordres de grandeur de  $\exp(-2)$ ,  $\exp(8)$  et  $\exp(12)$ .

- De  $\exp(2) \approx 8$  on déduit que  $\exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)} \approx \frac{1}{8}$ .

- $\exp(8) = \exp(4 \times 2) = (\exp(4))^2 \approx 2500$

- On peut aussi écrire

$$\exp(8) = \exp(2 \times 4) = (\exp(2))^4 \approx 8^4 = 4096$$

**On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.**

A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve  $\exp(8) \approx 2981$ .

- $\exp(12) = \exp(2 \times 6) = (\exp(6))^2 \approx 160000$ .

- On peut aussi écrire

$$\exp(12) = \exp(8 + 4) = \exp(8) \times \exp(4) \approx 2500 \times 50 = 125000$$

A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve  
 $\exp(12) \approx 162755$ .

## Barbazo, exercice 8 p. 192

Soit  $x$  un réel, simplifier les expressions en appliquant les propriétés algébriques de l'exponentielle.

- $A = e^{3x}e^{-4x} = e^{3x-4x} = e^{-x}.$
- $B = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$
- $C = \frac{1}{(e^{-x})^6} = e^{-(-6x)} = e^{6x}$
- $C = D$  Coquille dans l'énoncé ?
- $E = \frac{e^{3-2x}(e^x)^5}{e^{x-2}} = \frac{e^{3-2x}e^{5x}}{e^{x-2}} = \frac{e^{3-2x+5x}}{e^{x-2}} = e^{3x+3-(x-2)} = e^{2x+5}.$

# Barbazo, exercice 10 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}$$

L'égalité  $e^x e^{-x} = e^0 = 1$  est utilisée très fréquemment  $\Rightarrow$  à Retenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{e^x}{e^x + e^{x-x}} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{e^x}{e^x + e^0} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée.

## Barbazo, exercice 11 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$$

On met sur le même dénominateur

$$\begin{aligned} e^{-x} - e^{-2x} &= \frac{e^x}{e^x e^x} - \frac{1}{e^{2x}} \\ e^{-x} - e^{-2x} &= \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} \\ e^{-x} - e^{-2x} &= \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée.



## Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 1

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel  $n$  on a  $u_n = \exp(n)$  donc  
 $u_{n+1} = \exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(1)u_n$ .  
La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $\exp(1)$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .

## Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 2

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel  $n$  on a  $u_n = \exp(-n+2)\exp(3n-2)$  donc  $u_n = \exp(-n+2+3n-2) = \exp(2n) = (\exp(2))^n$ .  
La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $\exp(2)$  et de premier terme  $u_0 = \exp(-2)\exp(2) = \exp(0) = 1$ .

## Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 3

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel  $n$  on a  $u_n = \frac{\exp(1)}{\exp(3n+1)}$  donc

$$u_n = \frac{\exp(1)}{\exp(1)\exp(3n)} = \frac{1}{\exp(3n)}.$$

$$\text{On en déduit que } u_n = \left( \frac{1}{\exp(3)} \right)^n = (\exp(-3))^n.$$

La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $\exp(-3)$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .

## Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -5e^{-4x}$ .  
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)e^{-4x} = 20e^{-4x}$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $20 > 0$  et  $e^{-4x} > 0$ , donc  $f'(x) > 0$ .  
La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -5e^{-4x}$ .  
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)e^{-4x} = 20e^{-4x}$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $20 > 0$  et  $e^{-4x} > 0$ , donc  $f'(x) > 0$ .  
La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 2

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (-x + 1)e^{3x}$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$g'(x) = (-1) \times e^{3x} + 3e^{3x}(-x + 1) = e^{3x}(-1 + 3(-x + 1)) = e^{3x}(2 - 3x)$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{3x} > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $2 - 3x$ .

On en déduit que  $g'$  est strictement positive sur  $] -\infty; \frac{2}{3}[,$  s'annule en  $\frac{2}{3}$  puis est strictement négative sur  $]\frac{2}{3}; +\infty[.$

On peut conclure que  $g$  est strictement croissante sur  $] -\infty; \frac{2}{3}[,$  puis strictement décroissante sur  $]\frac{2}{3}; +\infty[.$

## Barbazo, exercice 18 p. 192

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - e^{-2x}$ .

- ①  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = 1 - (-2)e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}$ .
- ② Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-2x} > 0$  donc par produit puis somme  $f'(x) > 0$ .

Ainsi  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- ③ Sur le graphique ci-dessous on peut observer que  $f$  est strictement croissante (on le sait déjà) et change de signe sur  $[0; 1]$ . On peut conjecturer que  $f(x) = 0$  a une unique solution sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - $f(0,4) < 0 < f(0,5)$  donc  $f(0,4) < f(\alpha) < f(0,5)$  donc  $0,4 < \alpha < 0,5$  car  $f$  strictement croissante.
  - $f(0,42) < 0 < f(0,43)$  donc  $f(0,42) < f(\alpha) < f(0,43)$  donc  $0,42 < \alpha < 0,43$  car  $f$  strictement croissante.
  - $f(0,426) < 0 < f(0,427)$  donc  $f(0,426) < f(\alpha) < f(0,427)$  donc  $0,426 < \alpha < 0,427$  car  $f$  strictement croissante.

On en déduit qu'une valeur arrondie de  $\alpha$  à 0,01 près est 0,42.

## Barbazo, exercice 18 p. 192 Algorithmique

```
from math import exp
a = 0
F = a - exp(-2*a)
while F < 0:
    a = a + 0.01
    F = a - exp(-2 * a)
print(a)
```

Ce programme affiche la première valeur de  $a$  telle que  $f(a) \geq 0$  avec  $a = k \times 0,01$  pour  $k$  entier naturel.

D'après la question précédente, le programme affiche 0,43.



## Barbazo, exercice 20 p. 193 Algorithmique

**20** 1.  $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

2.  $e^{2x} = 0$ . Pour tout réel  $x$ ,  $e^{2x} > 0$ .

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

3.  $e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow 3x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

4.  $e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

## Barbazo, exercice 22 p. 193 Algorithmique Partie 1

$$\textcircled{22} \text{ 1. } e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\mathcal{S} = [0; +\infty[$$

$$\text{2. } e^{x-2} < 1 \Leftrightarrow e^{x-2} < e^0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\mathcal{S} = ]-\infty; 2[$$

## Barbazo, exercice 22 p. 193 Algorithmique Partie 2

$$3. e^{2x+1} \geq 0$$

$$\mathcal{S} = ]-\infty; +\infty[$$

$$4. e^{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x-1} \leq e^0 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\mathcal{S} = ]-\infty; 1]$$

## Barbazo, exercice 25 p. 193

**25** 1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = e^x(2x + 3)$$

2. La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = -3e^x + (-3x - 1)e^x = e^x(-3x - 4)$$

3. La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

4. La fonction  $p$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$p'(x) = -\frac{1}{2}e^x + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)e^x = \frac{1}{2}e^x(-x + 1)$$

## Barbazo, exercice 26 p. 194

**26** 1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = e^{-x} - (x-5)e^{-x} = e^{-x}(-x+6)$$

2. La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = 4e^{2x} + 2(4x+2)e^{2x} = 8e^{2x}(x+1)$$

3. La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$h'(x) = 3e^{-2x} - 2\left(3x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x} = 2e^{-2x}(-3x+2)$$

4. La fonction  $p$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$p'(x) = -\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}x + 4\right)e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{5}{2}x + 1\right)$$