# Exemples du cours Suites Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

29 mars 2020

# Table des matières

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.

# Logique 1 Affirmation 1

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.
- **Réponse :** **FAUSSE** comme le prouve le contre-exemple de la suite définie par la suite des décimales de $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$. On a $v_0 = 1$ et $v_1 = 4$ donc $v_0 \leqslant v_1$ est vérifiée, mais la décimale suivante $v_2 = 1$ est strictement inférieure à $v_1$. Cette suite $(v_n)$ n'est pas donc croissante.

# Logique 1 Affirmation 2

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

# Logique 1 Affirmation 2

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante
- **Réponse :** **FAUSSE** comme le prouve le contre-exemple de la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n - (-1)^n$. On a $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = (-1)^n$ donc $u_n = -1$ ou $u_n = 1$ donc la condition $u_n \leqslant u_0$ est vérifiée. Cependant, la suite n'est pas décroissante puisque par exemple on a $u_{19} = -1 \leqslant 1 = u_{20}$ et $u_{20} = 1 \geqslant -1 = u_{21}$.

# Logique 1 Affirmation 3

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.

# Logique 1 Affirmation 3

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.
- **Réponse :** La réciproque de l'affirmation 2 se formule ainsi : « Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$ ».
  Cette affirmation est **Vraie** pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$ comme le prouve le contre-exemple de la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n - (-1)^n$. On a $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = (-1)^n$ donc $u_n = -1$ ou $u_n = 1$ donc la condition $u_n \leqslant u_0$ est vérifiée. Cependant, la suite n'est pas décroissante puisque par exemple on a $u_{19} = -1 \leqslant 1 = u_{20}$ et $u_{20} = 1 \geqslant -1 = u_{21}$.

# Logique 1 Affirmation 4

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r<0$ est décroissante.
- **Réponse :** Cette affirmation est **VRAI**. Démontrons-le : si une suite $(u_n)$ est arithmétique alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = r$ avec $r$ raison de la suite.
  Si $r<0$ alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

La fonction `Python` ci-dessous prend comme argument la liste `L` des premiers termes d'une suite. Recopier et compléter cette fonction, pour qu'elle retourne `True` si la liste `L` est dans l'ordre croissant et `False` sinon.

```
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return ..........
    return .............
```

# Algorithmique 1 solution

```python
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return False
    return True
```

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec $f$ monotone.

- **Question** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.
  Démontrer que $(u_n)$ est monotone à partir du rang 1.

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec $f$ monotone.

- **Question** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.
  Démontrer que $(u_n)$ est monotone à partir du rang 1.
- **Réponse** Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 + 2x - 1$.
  Pour tout $x \geqslant 1$, on a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x + 2$ donc $f'(x) > 0$ donc $f$ strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
  D'après une propriété du cours, la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante.

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec $f$ monotone.

- **Question** La fonction `Python` ci-dessous définit-elle une suite croissante ?

```python
def suite(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if val < 734:
            val = val + 1
        else:
            val = 0
    return val
```

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec $f$ monotone.

- **Question** La fonction `Python` ci-dessous définit-elle une suite croissante ?

```python
def suite(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if val < 734:
            val = val + 1
        else:
            val = 0
    return val
```

- **Réponse NON**, la suite $(u_n)$ ainsi définie vérifie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = n$ si $0 \leqslant n \leqslant 733$ et $u_n = 0$ sinon donc cette suite n'est pas croissante puisque $u_{733} > u_{734}$.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.
  - Soit $n$ un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
  - Conclure sur le sens de variation de la suite $(u_n)$.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.
  - Soit $n$ un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
  - Conclure sur le sens de variation de la suite $(u_n)$.
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc $(u_n)$ est croissante.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit $(v_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit $(v_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $v_{n+1} - v_n = 1 + 0,2^{n+1} - (1 + 0,2^n) = 0,2^n(0,2 - 1) = -0,8 \times 0,2^n$.
  On en déduit que $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et donc que la suite $(v_n)$ est décroissante.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit $(w_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit $(w_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n+2}{n+3}$.
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $w_{n+1} - w_n = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+3)^2-(n+2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{1}{(n+4)(n+3)}$.
  On en déduit que $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ et donc que la suite $(w_n)$ est croissante.

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** On considère la suite $(v_n)$ définie par
$$\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** On considère la suite $(v_n)$ définie par
  $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$
- **Réponse** On a $v_1 = v_0 + 2 = -2$ et $v_2 = v_1 + 1 = -1$.
  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+1}$.
  On en déduit que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et donc que la suite $(v_n)$ est croissante.