Circuits logiques

Première NSI Lycée du Parc

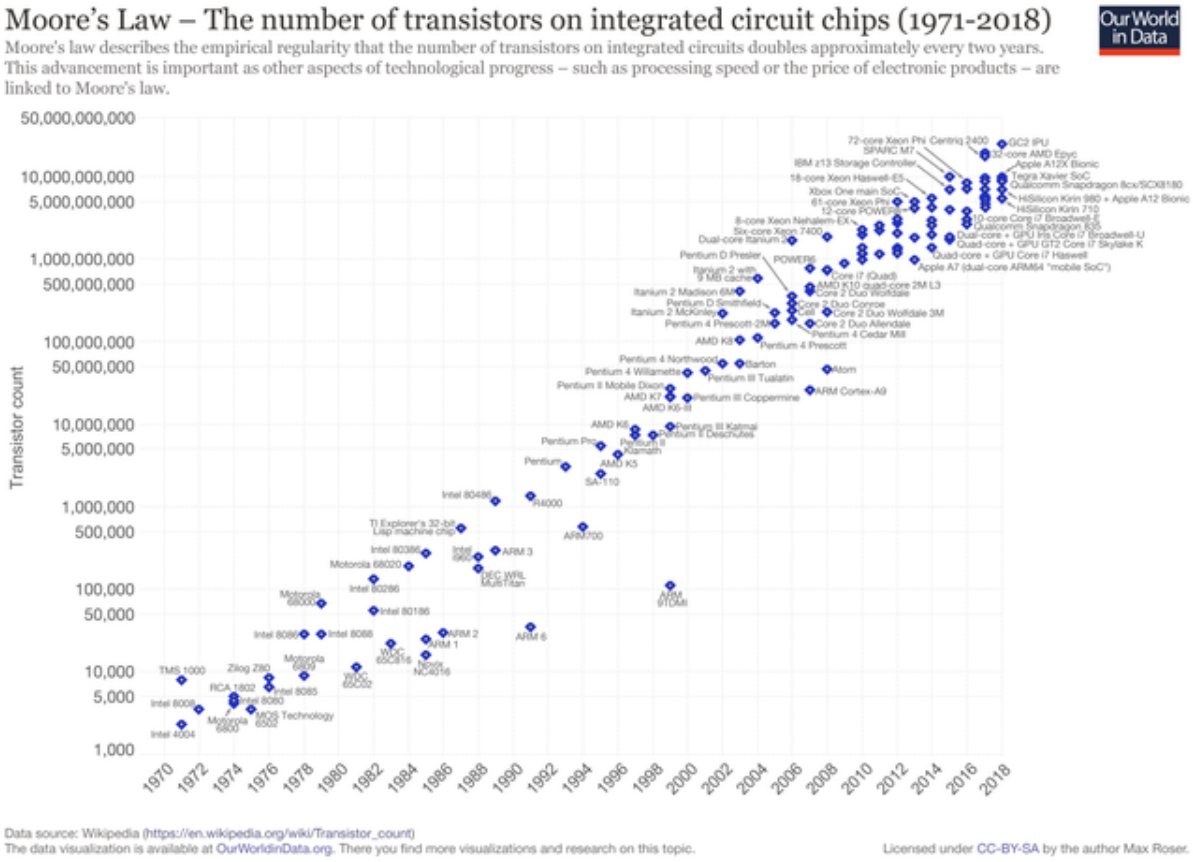
Table des matières

Crédits

Ce cours est largement inspiré du chapitre 22 du manuel NSI de la collection Tortue chez Ellipsen auteurs : Ballabonski, Conchon, Filliatre, N'Guyen.

Préambule

Les circuits d'une ordinateur manipulent uniquement des 0 ou des 1 représentés en interne par des tensions hautes ou basses. Les premiers ordinateurs construits dans la période 1945-1950 sont basés sur une technologie de tube à vide ou tube électrique. En 1947, aux laboratoires Bell, Shockley, Bardeen et Brattain inventent le **transistor** au *germanium* un petit composant électronique qui se comporte comme un interrupteur. Les transistors, plus petits et dissipant moins de chaleur, vont supplanter les tubes électriques : en 1954 le *germanium* est remplacé par le *silicium*, en 1955 apparaissent les premiers ordinteurs entièrement transistorisés, en 1960 le transistor à effet de champ permet l'intégration de dizaines composants dans un centimètre carré. Les transistors sont ensuite directement gravés dans une plaque de *silicium* constitutant un **cicrcuit intégré**. En 1965 Gordon Moore futur directeur d'Intel énonce la loi empirique portant son nom qui fixe une feuille de route à l'industrie des mircroprocesseurs : le doublement de la densité d'intégration des transistors tous les deux ans. Cette loi s'est vérifiée jusqu'à présent avec une finesse de gravure d'environ 5 nanomètres en 2020. Le graphique ci-dessous représente le nombre de transistors par circuit intégré.



1 Portes logiques

1.1 Le transistor porte logique de base

Définition 1

Un **transitor** possède trois broches : la grille, la sortie (ou drain) et la source soumis à des états de tension haute ou basse qu'on peut assimiler aux valeurs binaires 1 et 0 d'un **bit**. Si la tension appliquée sur la grille est haute (bit à 1) alors le transitor laisse passer le courant entre la source d'énergie et la sortie et ce dernier passe à l'état de tension basse (bit à 0), sinon la sortie reste en tension haute (bit 1).

Une **fonction logique** prend un ou plusieurs bits en entrée et retourne un ou plusieurs bits en sortie. Une **table logique** représente toutes les sorties produites par une fonction logique pour toutes les entrées possibles.

Un transistor représente une fonction logique dont le bit d'entrée est l'état de tension de la grille et le bit de sortie, l'état de tension de la sortie. La **table logique** (table 1) associée est celle du **NON logique** ou **Inverseur**.

Fichier de test Logisim : transistor.circ.

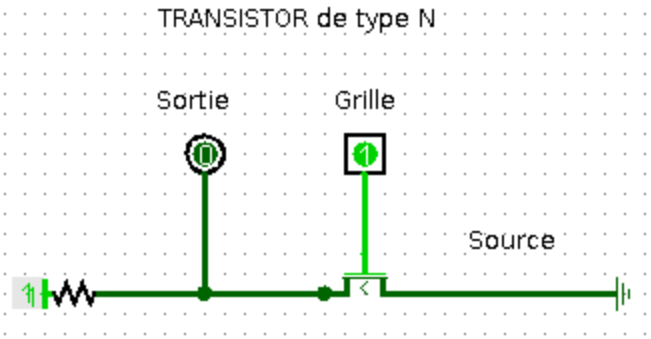
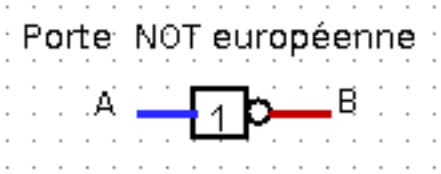
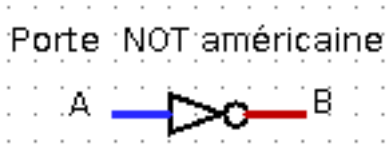


Table 1: **Table logique d'une porte NON**

A	B = NON(A)
0	1
1	0

Il existe deux conventions de représentation symbolique des portes logiques, une européenne et une américaine.





1.2 D'autres portes logiques

1.2.1 Transistors en série ou en parallèle

Exercice 1

On donne ci-dessous les représentations de deux portes logiques :

- La **porte NAND** constituée de deux transistors en série
- La **porte NOR** constituée de deux transistors en parallèle

Chacune de ces portes logiques comportent deux bits d'entrée : A pour la grille du transistor 1 et B pourla grille du transistor 2 et un bit de sortie.

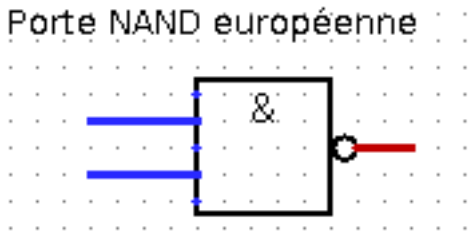
Compléter leurs tables logiques.

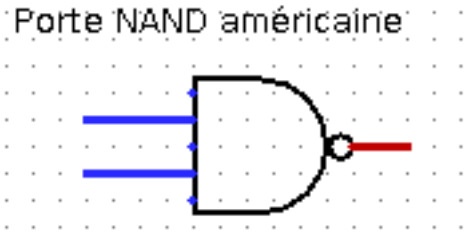
Vérifier avec Logisim et les fichiers porte_NAND.circ et porte_NOR.circ.

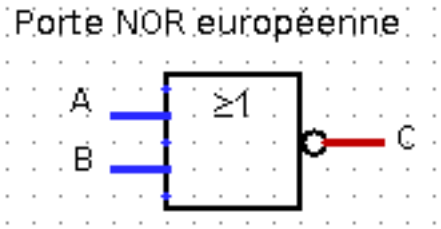
A	B	NAND(A, B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

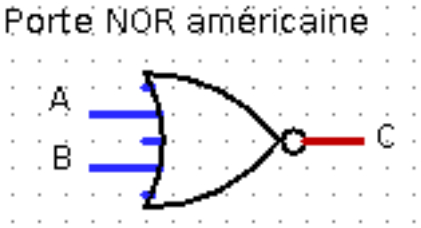
A	B	NOR(A, B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Voici les représentations symboliques des portes logiques NAND et NOR :







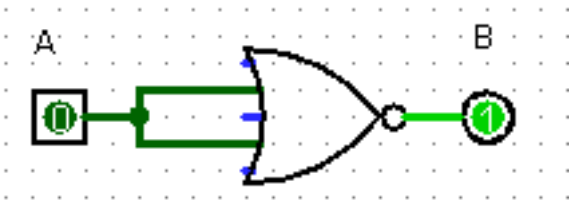


1.2.2 Portes logiques et fonctions logiques élémentaires

Exercice 2

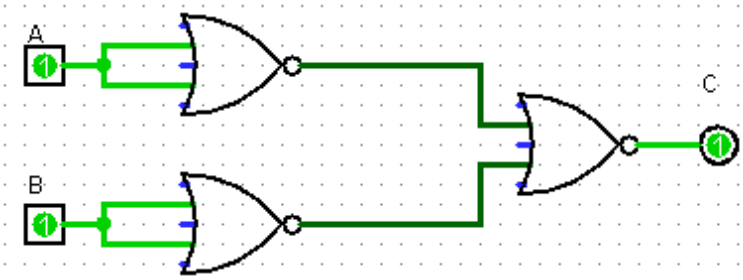
Fichier de test Logisim : exercice2.circ.

1. Compléter la table logique de la porte logique représentée par le circuit ci-dessous. Quelle porte logique peut-on ainsi représenter ?



A	B = f(A)
0	
1	

2. Compléter la table logique de la porte logique représentée par le circuit ci-dessous. Quelle fonction logique correspond à cette porte logique ?

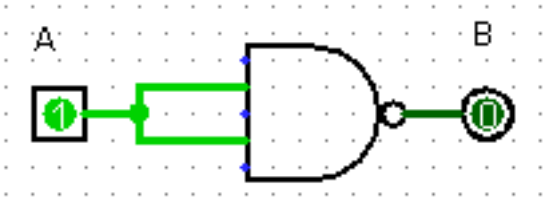


A	B	C = g(A, B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Exercice 3

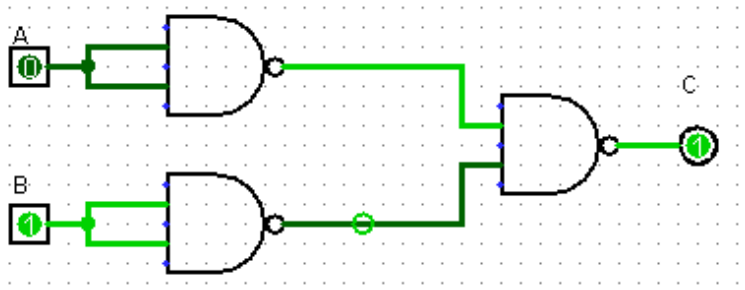
Fichier de test Logisim : exercice3.circ.

1. Compléter la table logique de la porte logique représentée par le circuit ci-dessous. Quelle porte logique peut-on ainsi représenter ?



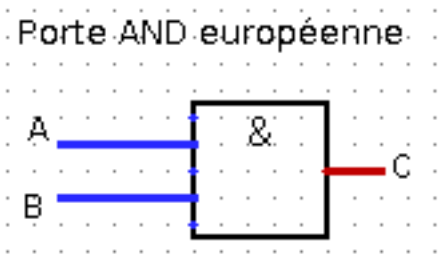
A	B = f(A)
0	
1	

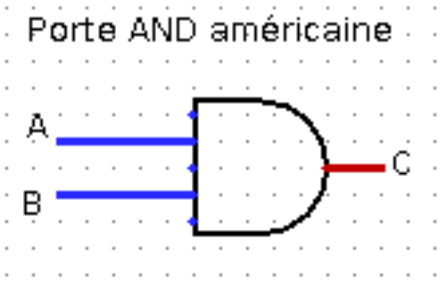
2. Compléter la table logique de la porte logique représentée par le circuit ci-dessous. Quelle fonction logique correspond à cette porte logique ?

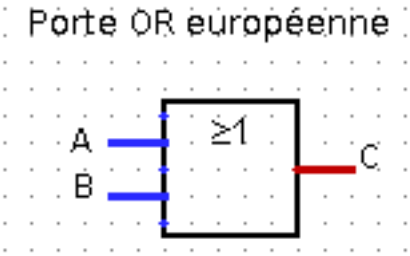


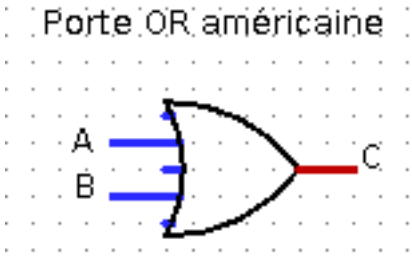
A	B	C = g(A, B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Voici les représentations symboliques des portes logiques `AND` et `OR` :









Exercice 4

1. Construire un circuit représentant une porte `OR` uniquement avec des portes `NOR`.
2. Construire un circuit représentant une porte `AND` uniquement avec des portes `NAND`.

Ainsi chacune des portes, `NAND` ou `OR` permet de construire les portes `NOT`, `OR`, `AND`. Toute porte logique pouvant logique pouvant s'exprimer à l'aide de ces trois portes, les portes `NAND` et `OR` sont dites *universelles*.

2 Fonctions booléennes

2.1 Fonctions booléennes

Définition 2

- Un **booléen** est un type de données pouvant prendre deux valeurs `True` (Vrai) ou `False` (Faux) qu'on représente numériquement par un **bit** de valeur 1 pour `True` ou 0 pour `False`. Electroniquement, les valeurs 1 et 0 se traduisent respectivement par des tensions haute ou basse.
- Une **fonction booléenne** f associe un booléen à un ou plusieurs booléens.
- Une **fonction booléenne** avec n arguments est définie sur un ensemble $\{0;1\}^n$ à 2^n valeurs et prend ses valeurs dans $\{0;1\}$ qui a 2 éléments. On peut recenser les 2^n évaluations d'une fonction booléenne à n arguments dans une **table de vérité** qui la définit entièrement. Il existe 2^{2^n} fonctions booléennes à n arguments.
- Une **porte logique** est la représentation sous forme de circuit d'une fonction booléenne et sa **table logique** est la **table de vérité** de cette fonction.

Exercice 5

1. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle affiche la table de vérité d'une fonction booléenne à deux entrées. Expliquer le rôle de la fonction `int`.

```
def table_verite_2bits(fonction):
    print('|{:^10}|{:^10}|{:^15}|'.format('a','b',fonction.__name__+'(a,b)'))
    for a in ............:
        for b in ............:
            print('|{:^10}|{:^10}|{:^15}|'.format(......, ......,
            int(fonctionbool(a,b))))
```

1. Vérifier que les tables de vérité affichées pour les fonctions `bool.__or__`, `bool.__and__` et `bool.__not__` sont correctes.

```
In [4]: table_verite_2bits(bool.__or__)
|    a     |    b     |  __or__(a,b) |
|    1     |    1     |       1      |
|    1     |    0     |       1      |
|    0     |    1     |       1      |
|    0     |    0     |       0      |
```

Propriété 1

On peut exprimer toute fonction booléenne à l'aide de trois fonctions booléennes élémentaires :

- La *négation* de x est une fonction à 1 bit d'entrée (unaire) notée $\neg x$ ou $\overline{x}$.
  Si `x` est un booléen, sa *négation* est `not x` en `Python`.

x	$\neg x$
0	
1	

- La *conjonction* de x et y est une fonction à 2 bits d'entrée (binaire) notée $x \wedge y$ ou $x.y$.
  Si `x` et `y` sont des booléens, leur *conjonction* est `x and y` en `Python`.

x	y	$x \wedge y$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

- La *disconjonction* de x et y est une fonction à 2 bits d'entrée (binaire) notée $x \vee y$ ou $x + y$.
  Si `x` et `y` sont des booléens, leur *disjonction* est `x or y` en `Python`

x	y	$x \vee y$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Propriété 2

1. Les fonctions booléennes élémentaires respectent un certain nombre de règles qui permettent de simplifier les expressions booléennes complexes :

- *opérateur involutif* : $\neg(\neg x) = x$ et $\overline{\overline{x}} = x$
- *élément neutre* : $1 \wedge x = x$ et $1.x = x$ ou $0 \vee x = x$ et $0 + x = x$
- *élément absorbant* : $0 \wedge x = 0$ et $0.x = 0$ ou $1 \vee x = x$ et $1 + x = 1$
- *idempotence* : $x \wedge x = x$ et $x.x = x$ ou $x \vee x = x$ et $x + x = x$
- *complément* : $x \wedge (\neg x) = 0$ et $x.(\overline{x}) = 0$ ou $x \vee (\neg x) = 1$ et $x + \overline{x} = 1$
- *commutativité* : $x \wedge y = y \wedge x$ et $x.y = y.x$ ou $x \vee y = y \vee x$ et $x + y = y + x$
- *associativité* : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ et $x.(y.z) = (x.y).z$ ou $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x + (y + z) = (x + y) + z$
- *distributivité* : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ et $x.(y + z) = x.y + xz$ ou $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ et $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$
- *loi de Morgan* : $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ et $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$ ou $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ et $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$

2. Les fonctions booléennes élémentaire respectent des règles de priorité : la *négation* est prioritaire sur la *conjonction* qui est proritaire sur la *disjonction*.
   Il est recommandé de mettre des parenthèses plutôt que d'appliquer les règles de priorité dans l'écriture des expressions booléennes.

Exercice 6

Démontrer dans chaque cas l'égalité des expressions booléennes en utilisant les deux méthodes suivantes :

- **Méthode 1** : en comparant les tables de vérité des deux expressions booléennes ;
- **Méthode 2** : en utilisant les règles de simplification de la propriété 2.

1. $x + x.y = x$
2. $x + \overline{x}.y = x + y$
3. $\underline{x.z + \overline{x}.y} + y.z = x.z + \overline{x}.y$
4. $\overline{y.(x + \overline{y})} = \overline{x} + \overline{y}$
5. $x.(\overline{x} + \overline{y}).(x + y) = x.\overline{y}$

Exercice 7

On considère la fonction booléenne dont la table de vérité est :

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Exprimer chacune des lignes où la fonction prend la valeur 1 comme la *conjonction* des entrées en remplaçant chaque 1 par la variable qu'il représente et chaque 0 par la négation de la variable. Par exemple le 1 de la deuxième ligne s'écrira $\overline{x}.y$.
2. On peut alors écrire $f(x, y)$ comme la *disjonction* des *formes conjonctives* obtenues à la question précédente. En déduire une expression booléenne de $f(x, y)$.
3. Ouvrir le logiciel Logisim et construire une porte logique représentant cette fonction booléenne.
4. Cette fonction s'appelle `OU EXCLUSIF` ou `XOR`. Ce nom vous paraît-il bien choisi ?

2.2 Dresser la table de vérité d'une fonction booléenne

2.3 Expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité

2.4 Simplification d'expressions booléennes

3 Circuits combinatoires

3.1 Demi-additionneur et additionneur 1 bit

3.2 Décodeur avec 2 bits d'entrées