# Exemples du cours sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

15 mars 2020

# Table des matières

# Capacité 2 : Questions 1 et 2

1. **Question 1** : *Démontrer que pour tout réel $x$ et tout entier naturel $n$, on a* $\exp(x)^{-n} = \exp(-nx)$.
   Pour tout réel $x$ et tout entier naturel $n$, on a
   $\exp(x)^{-n} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = \frac{1}{\exp(nx)} = \exp(-nx)$
2. **Question 2** : *Soit $a$ un réel, calculer les expressions* $A = \exp(a) \times \exp(2-a)$, $B = (\exp(a) + \exp(-a))^2$
   - $A = \exp(a) \times \exp(2-a) = \exp(a+2-a) = \exp(2)$
   - $B = (\exp(a) + \exp(-a))^2 = \exp(2a) + 2\exp(a)\exp(-a) + \exp(-2a) = \exp(a) + 2\exp(0) + \exp(-a) = \exp(a) + \exp(-a) + 2$

**Question 3** : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

1 *Pour tout réel $x$,* $\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$.

Pour tout réel $x$,

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(-x)\left(\exp(2x)-1\right)}{\exp(-x)\left(\exp(2x)+1\right)}$$

On utilise la relation $\exp(x)\exp(-x)=1$ en multipliant par $\exp(-x)$ numérateur et dénominateur, cela permet de changer les 1 en $\exp(-x)$ et les $\exp(2x)$ en $\exp(x)$

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(-x+2x)-\exp(-x)}{\exp(-x+2x)+\exp(-x)}$$

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$$

L'égalité est démontrée.

**Question 3** : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

2 *Pour tout réel* $x$, $4-\frac{4}{1+\exp(x)}=\frac{4}{1+\exp(-x)}$.

On utilise la même technique que dans la question précédente.
Pour tout réel $x$,

$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=4-\frac{4\exp(-x)}{(1+\exp(x))\exp(-x)}$$

$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=4-\frac{4\exp(-x)}{\exp(-x)+1}$$

on met sur le même dénominateur

$$4-\frac{4}{1+\exp(x)}=\frac{4(\exp(-x)+1)-4\exp(-x)}{\exp(-x)+1}=\frac{4}{\exp(-x)+1}$$

L'égalité est démontrée.

**Question 3** : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

3 *Pour tout réel $x$,*
$(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2=4.$

Il suffit de développer. Pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned}(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2 = \\ \exp(2x)+2\exp(x)\exp(-x)+\exp(-2x) \\ -(\exp(2x)-2\exp(x)\exp(-x)+\exp(-2x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2 = \\ \exp(2x)+2\exp(0)+\exp(-2x)-(\exp(2x)-2\exp(0)+\exp(-2x))\end{aligned}$$

Les termes en $\exp(2x)$ et $\exp(-2x)$ se simplifient :

$$(\exp(x)+\exp(-x))^2-(\exp(x)-\exp(-x))^2=4$$

L'égalité est démontrée.

la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n}$$

Euler a démontré qu'elle converge vers e.
Complétons la fonction algorithmique `u(n)` ci-dessous et son implémentation en `Python` pour qu'elle retourne $u_n$.

```
Fonction u(n):
   s ⟵ 1
   d ⟵ 1
   Pour k allant de 1 à n
      d ⟵ d × k
      s ⟵ s + 1 / d
   Retourne s
```

Voici l'implémentation en `Python` pour qu'elle retourne $u_n$.

```
def u(n):
    s = 1
    d = 1
    for k in range(1, n + 1):
        d = d * k
        s = s + 1 / d
    return s
```

2,718281 est une valeur approchée avec 6 décimales exactes du nombre d'Euler e. Modifions la fonction `Python` pour qu'elle retourne le plus petit entier $n$ tel que $\left|u_n - 2,718281\right| < 10^{-6}$. Il s'agit d'un algorithme de seuil.

```
def seuilU():
    s = 1
    d = 1
    n = 0
    while abs(s - 2.718281) >= 10 ** (-6):
        n = n + 1
        d = d * n
        s = s + 1 / d
    return n
```

# Capacité 3

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. $6<7$ donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^7 > e^6 \Longleftrightarrow e^7 > \left(e^2\right)^3$
2. $-4>-6$, donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^{-4} > e^{-6} \Longleftrightarrow e^{-4} > \left(e^{-3}\right)^2$
3. $\forall x<0$, on a $-x>0>x$, donc par croissance de la fonction exponentielle $e^{-x} > 1 > e^x$

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x$.

1. $f$ est dérivable sur $[-1\,;2]$ comme produit de deux fonctions dérivables définies par $u(x) = -x+2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$ et d'après une formule du cours, on a $f' = u'v + uv'$.
   On en déduit que
   $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (-x+2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1-x+2) = \mathrm{e}^x(1-x)$
2. D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x(1-x) = 0 \Longleftrightarrow 1-x = 0 \Longleftrightarrow 1 = x$$

   Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x(1-x) > 0 \Longleftrightarrow 1-x > 0 \Longleftrightarrow 1 > x$$

   On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, \mathrm{e}^x > 0$.

# Capacité 4 Partie 2

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x$.

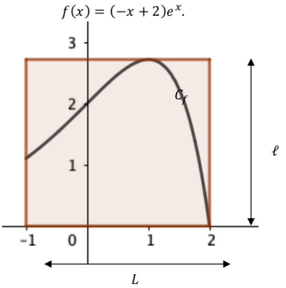
2 D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x(1-x) = 0 \iff 1-x = 0 \iff 1 = x$$

Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x(1-x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff 1 > x$$

On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, \mathrm{e}^x > 0$.
On en déduit que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$, $f'(x) = 0$ en $x = 1$ et $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
Ainsi la fonction $f$ est strictement croissante sur $[-1\,;1]$, atteint un maximum en 1 et strictement décroissante sur $[1\,;2]$.




3 D'après la graphique, la largeur de la plaque est le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$, soit $f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
Ainsi l'aire de la plaque est égale à $L \times l = (2-(-1)) \times \mathrm{e} = 3\mathrm{e}$.