

Exemples du cours sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

19 mars 2020

- Capacité 2
- Capacité 3
- Algorithmique 1
- Capacité 4
- Capacité 5
- Capacité 6
- Capacité 7

- ❶ **Question 1 :** *Démontrer que pour tout réel x et tout entier naturel n , on a $\exp(x)^{-n} = \exp(-nx)$.*

Pour tout réel x et tout entier naturel n , on a

$$\exp(x)^{-n} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = \frac{1}{\exp(nx)} = \exp(-nx)$$

- ❷ **Question 2 :** *Soit a un réel, calculer les expressions*

$$A = \exp(a) \times \exp(2-a), \quad B = (\exp(a) + \exp(-a))^2$$

- $A = \exp(a) \times \exp(2-a) = \exp(a+2-a) = \exp(2)$
- $B = (\exp(a) + \exp(-a))^2 = \exp(2a) + 2\exp(a)\exp(-a) + \exp(-2a) = \exp(a) + 2\exp(0) + \exp(-a) = \exp(a) + \exp(-a) + 2$

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

1 Pour tout réel x ,
$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}.$$

Pour tout réel x ,

$$\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} = \frac{\exp(-x)(\exp(2x)-1)}{\exp(-x)(\exp(2x)+1)}$$

On utilise la relation $\exp(x)\exp(-x) = 1$ en multipliant par $\exp(-x)$ numérateur et dénominateur, cela permet de changer les 1 en $\exp(-x)$ et les $\exp(2x)$ en $\exp(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} &= \frac{\exp(-x+2x)-\exp(-x)}{\exp(-x+2x)+\exp(-x)} \\ \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} &= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}\end{aligned}$$

L'égalité est démontrée.

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

2 Pour tout réel x , $4 - \frac{4}{1+\exp(x)} = \frac{4}{1+\exp(-x)}$.

On utilise la même technique que dans la question précédente.

Pour tout réel x ,

$$4 - \frac{4}{1 + \exp(x)} = 4 - \frac{4\exp(-x)}{(1 + \exp(x))\exp(-x)}$$

$$4 - \frac{4}{1 + \exp(x)} = 4 - \frac{4\exp(-x)}{\exp(-x) + 1}$$

on met sur le même dénominateur

$$4 - \frac{4}{1 + \exp(x)} = \frac{4(\exp(-x) + 1) - 4\exp(-x)}{\exp(-x) + 1} = \frac{4}{\exp(-x) + 1}$$

L'égalité est démontrée.

Question 3 : *Démontrer chacune des égalités suivantes :*

3 Pour tout réel x ,

$$(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2 = 4.$$

Il suffit de développer. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} (\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2 = \\ \exp(2x) + 2\exp(x)\exp(-x) + \exp(-2x) \\ - (\exp(2x) - 2\exp(x)\exp(-x) + \exp(-2x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2 = \\ \exp(2x) + 2\exp(0) + \exp(-2x) - (\exp(2x) - 2\exp(0) + \exp(-2x)) \end{aligned}$$

Les termes en $\exp(2x)$ et $\exp(-2x)$ se simplifient :

$$(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2 = 4$$

L'égalité est démontrée.

Algorithmique 1 Partie 1

la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n}$$

Euler a démontré qu'elle converge vers e.

Complétons la fonction algorithmique $u(n)$ ci-dessous et son implémentation en Python pour qu'elle retourne u_n .

```
Fonction u(n):  
    s ← 1  
    d ← 1  
    Pour k allant de 1 à n  
        d ← d × k  
        s ← s + 1 / d  
    Retourne s
```

Voici l'implémentation en Python pour qu'elle retourne u_n .

```
def u(n):  
    s = 1  
    d = 1  
    for k in range(1, n + 1):  
        d = d * k  
        s = s + 1 / d  
    return s
```


Algorithmique 1 Partie 3

2,718281 est une valeur approchée avec 6 décimales exactes du nombre d'Euler e . Modifions la fonction Python pour qu'elle retourne le plus petit entier n tel que $|u_n - 2,718281| < 10^{-6}$. Il s'agit d'un algorithme de seuil.

```
def seuilU():  
    s = 1  
    d = 1  
    n = 0  
    while abs(s - 2.718281) >= 10 ** (-6):  
        n = n + 1  
        d = d * n  
        s = s + 1 / d  
    return n
```

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- ① $6 < 7$ donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^7 > e^6 \iff e^7 > (e^2)^3$
- ② $-4 > -6$, donc par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^{-4} > e^{-6} \iff e^{-4} > (e^{-3})^2$
- ③ $\forall x < 0$, on a $-x > 0 > x$, donc par croissance de la fonction exponentielle $e^{-x} > 1 > e^x$

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par

$$f(x) = (-x + 2)e^x.$$

- ① f est dérivable sur $[-1; 2]$ comme produit de deux fonctions dérivables définies par $u(x) = -x + 2$ et $v(x) = e^x$.

On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$ et d'après une formule du cours, on a $f' = u'v + uv'$.

On en déduit que

$$f'(x) = -e^x + (-x + 2)e^x = e^x(-1 - x + 2) = e^x(1 - x)$$

- ② D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \iff e^x(1 - x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff 1 = x$$

Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \iff e^x(1 - x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff 1 > x$$

On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, e^x > 0$.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par $f(x) = (-x + 2)e^x$.

2 D'abord, on résout une équation :

$$f'(x) = 0 \iff e^x(1 - x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff 1 = x$$

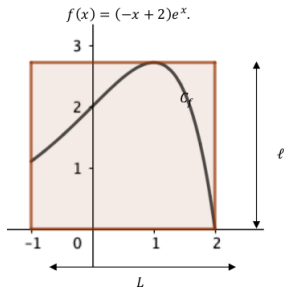
Ensuite, on résout une inéquation :

$$f'(x) > 0 \iff e^x(1 - x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff 1 > x$$

On a utilisé par deux fois la propriété : $\forall x, e^x > 0$.

On en déduit que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-1; 2]$, $f'(x) = 0$ en $x = 1$ et $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[-1; 2]$.

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[-1; 1]$, atteint un maximum en 1 et strictement décroissante sur $[1; 2]$.



- 3 D'après la graphique, la largeur de la plaque est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 2]$, soit $f(1) = e^1 = e$. Ainsi l'aire de la plaque est égale à $L \times l = (2 - (-1)) \times e = 3e$.

Résolution d'équations avec l'exponentielle : on utilise la propriété $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

① $e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

② $e^{x^2+x} = e \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ On résout cette équation du second degré (discriminant $\Delta = 5$) et on trouve

que : $e^{x^2+x} = e \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

③ Notons (E) l'équation $\frac{(e^x)^2 \times e^{x^2}}{(e^x)^4} = e^3$

(E) $\Leftrightarrow e^{2x+x^2-4x} = e^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ On résout cette équation du second degré (discriminant $\Delta = 16$) et on trouve que : (E) $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

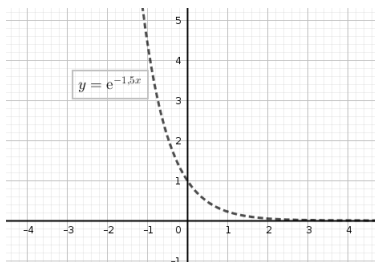
Résolution d'inéquations avec l'exponentielle : on utilise la propriété $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$.

- ① $e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$.
- ② $e^{-2x} > e^{x+3} \Leftrightarrow -2x > x+3 \Leftrightarrow -1 > x$ L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; -1[$.
- ③ $(I) \Leftrightarrow e^{x^2} - (e^x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^{2x}$
 $(I) \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^{2x} \Leftrightarrow x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$ D'après la règle du signe d'un trinôme, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [0; 2]$.
- ④ $(I) \Leftrightarrow e^{2x} - e^x > 0 > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) > 0$ Pour tout réel x , on a $e^x > 0$, donc $(I) \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]0; +\infty[$.

Capacité 6 Question 1 a)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-1,5t}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

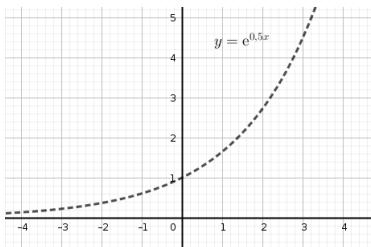
- f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t , on a $f'(t) = -1,5e^{-1,5t}$.
- Pour tout réel t , on a $e^{-1,5t} > 0$ et $-1,5 < 0$ donc $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .



Capacité 6 Question 1 b)

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = e^{0,5t}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t , on a $g'(t) = 0,5e^{0,5t}$.
- Pour tout réel t , on a $e^{0,5t} > 0$ et $0,5 > 0$ donc $g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur \mathbb{R} .



Capacité 6 Question 2)

- $f : x \mapsto e^{2x}$ a pour courbe \mathcal{C}_3
- $g : x \mapsto e^{-\frac{x}{3}}$ a pour courbe \mathcal{C}_2
- $h : x \mapsto e^{\frac{x}{3}}$ a pour courbe \mathcal{C}_4
- $k : x \mapsto e^{-2x}$ a pour courbe \mathcal{C}_1

