Exercices sur les applications du produit scalaire 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

6 mai 2020

Plan

Table des matières

Barbazo, exercice 32 p.228

32 D'après la formule d'Al-Kashi,
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$

$\Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \dfrac{BC^2 - (AB^2 + AC^2)}{-2 \times AB \times AC} \Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$

Donc, $\cos(\hat{A}) = \dfrac{4^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{1}{16}$. La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{A} = 86{,}4°$.

De même, $\cos(\hat{B}) = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \dfrac{4^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 7} = \dfrac{29}{56}$.

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{B} = 58{,}8°$.

Enfin $\cos(\hat{C}) = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \dfrac{6^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 7} = \dfrac{69}{84} = \dfrac{23}{28}$.

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{C} = 34{,}8°$.

Barbazo, exercice 34 p. 228

34 **1.** Dans le triangle ACI rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $CI^2 = AI^2 + AC^2 = 3^2 + 8^2 = 73$.
On a donc $CI = \sqrt{73}$ cm.
Dans le triangle ACB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $CB^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.
On a donc $BC = \sqrt{100} = 10$ cm.
2. Dans le triangle BCI, d'après la formule d'Al-Kashi, $BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \times \cos\left(\widehat{ICB}\right)$.

$$BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \cos\left(\widehat{ICB}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{IC^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times IC \times BC}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{73 + 100 - 9}{2 \times \sqrt{73} \times 10}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{164}{20\sqrt{73}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{41}{5\sqrt{73}}.$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\widehat{ICB} = 16°$.

Barbazo, exercice 36 p.228

36 **1.** Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$.
AC est une grandeur positive donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.
D'après le théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow CI^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow CI^2 = CA^2 + \frac{AB^2}{4}.$$

Soit $CI^2 = \sqrt{84}^2 + \frac{4^2}{4} = 84 + 4 = 88$.

CI est une grandeur positive donc $CI = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$.

2. Dans le triangle BIC, d'après la formule d'Al-Kashi :

$$BI^2 = CI^2 + BC^2 - 2 \times CI \times BC \times \cos(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{CI^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times CI \times BC}.$$

Soit $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{88}^2 + 10^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{88} \times 10} = \frac{184}{20\sqrt{88}} = \frac{23}{5\sqrt{22}}$.

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\alpha = 11°$.

Barbazo, exercice 39 p.229

39 Dans le triangle ABC, d'après la formule d'Al-Kashi :
$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$. Soit :
$AC^2 = 0,8^2 + 1^2 - 2 \times 0,8 \times 1 \times \cos(82) = 1,64 - 1,6 \times \cos(82)$.
BC est une grandeur positive donc
$BC = \sqrt{1,64 - 1,6 \times \cos(82)} = 1,19$. Après avoir été déportée, la deuxième boule se situe à 1,19 m, au centimètre près, du point de lancement de la première boule.

Barbazo, exercice 41 p.229

41 Pour tout point M distinct de N et P, on a le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ est nul. D'après le théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{NP^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{NP^2}{4}.$$

MN et MI sont des grandeurs positives, on a donc le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si $MI = \frac{NP}{2}$.

Barbazo, exercice 43 p.229

43 $AB=\sqrt{(-1-5)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-6 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=-6 \Leftrightarrow MI^2=-6+\frac{\sqrt{61}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{37}{4} \Leftrightarrow MI=\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-6$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Barbazo, exercice 44 p.229

44 **1.** Dans le triangle ABC, d'après la formule d'Al-Kashi :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\times BC\times AB\times\cos\left(\widehat{ABC}\right).$$

Soit $AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2\times 8\times 5\times\cos(60) = 64 + 25 - 40 = 49$.

BC est une grandeur positive donc $BC = \sqrt{49} = 7$.

Soit P le périmètre du triangle ABC, on a :

$$P = AB + BC + CA = 5 + 8 + 7 = 20.$$

2. Soit $\mathcal{A}_{BDC}$ l'aire du triangle BDC, on a $\mathcal{A}_{BDC} = \dfrac{r\times BC}{2}$.

De même $\mathcal{A}_{CDA} = \dfrac{r\times CA}{2}$ et $\mathcal{A}_{ADB} = \dfrac{r\times AB}{2}$.

On a donc :

$$S = \mathcal{A}_{BDC} + \mathcal{A}_{CDA} + \mathcal{A}_{ADB} = \frac{r\times(BC + CA + AB)}{2} = \frac{P\times r}{2}.$$

3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$. Dans le triangle CHB rectangle en H, on a :

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow CH = CB\times\sin\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$\Leftrightarrow CH = 8\times\sin(60) \Leftrightarrow CH = 4\sqrt{3}.$$

Or, $S = \dfrac{CH\times AB}{2}$, donc $S = \dfrac{4\sqrt{3}\times 5}{2} = 10\sqrt{3}$.

4. $S = \dfrac{P\times r}{2} \Leftrightarrow r = \dfrac{2S}{P} \Leftrightarrow r = \dfrac{2\times 10\sqrt{3}}{20} \Leftrightarrow r = 3.$

Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour rayon $\sqrt{3}$.

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 1

46 **1.** Soit I le milieu du segment $[AB]$.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=5 \Leftrightarrow MI^2=5+\frac{5^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{45}{4} \Leftrightarrow MI=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$ Réponse **a**.

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 2

2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, alors :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = DA \times AB = 5.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0.\end{aligned}$$

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point D.