Exercices sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

15 mars 2020

Plan

1 Exercices du manuel Barbazo

Table des matières

- Exercice 6 p. 192
- Exercice 8 p. 192
- Exercice 10 p. 192
- Exercice 11 p. 192
- Exercice 12 p. 192

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 1

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(2)$ et $\exp(10)$

- $\exp(2) = \exp(6-4) = \frac{\exp(6)}{\exp(4)} \approx \frac{400}{50} = 8$.
- On peut aussi écrire $\exp(4) = \exp(2\times 2) = (\exp(2))^2$.
  On en déduit que $(\exp(2))^2 = 50 \Leftrightarrow \exp(2) = \sqrt{50} \approx 7$ car $\exp(2) > 0$.
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(2) \approx 7$.
- $\exp(10) = \exp(6+4) = \exp(6)\times\exp(4) \approx 400\times 50 = 20000$.

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 2

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(-2)$, $\exp(8)$ et $\exp(12)$.

- De $\exp(2) \approx 8$ on déduit que $\exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)} \approx \frac{1}{8}$.
- $\exp(8) = \exp(4 \times 2) = (\exp(4))^2 \approx 2500$
- On peut aussi écrire
  $\exp(8) = \exp(2 \times 4) = (\exp(2))^4 \approx 8^4 = 4096$
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(8) \approx 2981$.
- $\exp(12) = \exp(2 \times 6) = (\exp(6))^2 \approx 160000$.
- On peut aussi écrire
  $\exp(12) = \exp(8 + 4) = \exp(8) \times \exp(4) \approx 2500 \times 50 = 125000$
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve
  $\exp(12) \approx 162755$.

Barbazo, exercice 8 p. 192

Soit x un réel, simplifier les expressions en appliquant les propriétés algébriques de l'exponentielle.

- $A = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{3x-4x} = \mathrm{e}^{-x}$.
- $B = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-2x}$
- $C = \frac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6} = \mathrm{e}^{-(-6x)} = \mathrm{e}^{6x}$
- $C = D$ Coquille dans l'énoncé ?
- $E = \frac{\mathrm{e}^{3-2x}(\mathrm{e}^{x})^5}{\mathrm{e}^{x-2}} = \frac{\mathrm{e}^{3-2x}\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{x-2}} = \frac{\mathrm{e}^{3-2x+5x}}{\mathrm{e}^{x-2}} = \mathrm{e}^{3x+3-(x-2)} = \mathrm{e}^{2x+5}$.

Barbazo, exercice 10 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-x})}$$

L'égalité $\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{0} = 1$ est utilisée très fréquemment $\Rightarrow$ à Retenir

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x-x}}$$
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{0}}$$
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 11 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$$

On met sur le même dénominateur

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x}{e^x e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$$
$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}$$
$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 1

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(n)$ donc $u_{n+1} = \exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(1)u_n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(1)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 2

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(-n+2)\exp(3n-2)$ donc $u_n = \exp(-n+2+3n-2) = \exp(2n) = (\exp(2))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(2)$ et de premier terme $u_0 = \exp(-2)\exp(2) = \exp(0) = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 3

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(3n+1)}$ donc $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(1)\exp(3n)} = \frac{1}{\exp(3n)}$.
  On en déduit que $u_n = \left(\frac{1}{\exp(3)}\right)^n = (\exp(-3))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(-3)$ et de premier terme $u_0 = 1$.