Cours du 28/04/2021

Étude du sens de variation d'une suite

n°39 p.33

39 Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n(1 - v_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

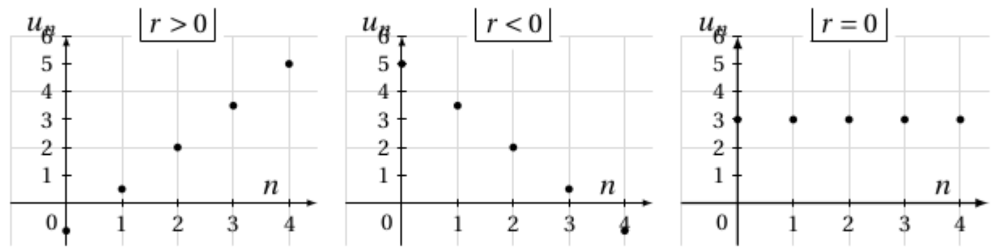
QCM Pronote

Sens de variation d'une suite arithmétique.

Propriété 1 ***Suites arithmétiques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Propriété 2 ***Suites géométriques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- **Premier cas** $u_0 > 0$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $1 < q$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $0 < q < 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $q < 0$

- **Deuxième cas** $u_0 > 0$.

  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -un$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 >$.

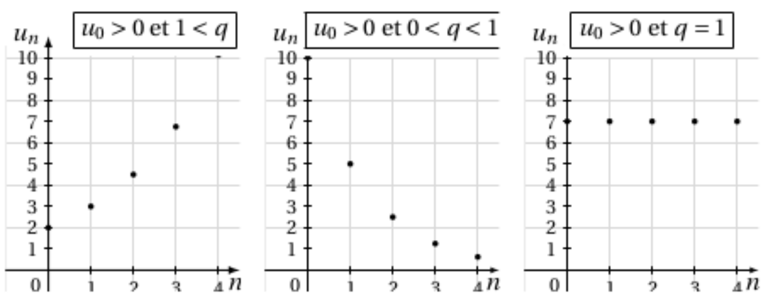
  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $1 < q$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $0 < q < 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $q < 0$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.



n° 43 p. 33

43 Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le 1er terme et la raison, déterminer le sens de variation.

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.

2. $v_0 = -1$ et $q = \frac{4}{5}$.

3. $w_0 = \frac{-2}{3}$ et $q = \frac{8}{3}$.

4. $t_0 = 0{,}5$ et $q = 10^{-1}$.

n°44 p.33

44 **Démonstration**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de q.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de q.

Capacité 4 *Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17*

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière);
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand ? Le modèle est-il réaliste?

e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ......
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

84 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel :

$$n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Recopier puis compléter la fonction informatique suivante programmée en langage Python afin qu'elle renvoie le terme u_n pour $n \geqslant 1$.

```python
def terme_u(n):
    u=...
    for i in range(...):
        u=...
    return u
```

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$v_n = u_n + 1.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

b. Donner une expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = 2^n - 1.$$

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.