Capacité 6 ***Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+2y-4=0$ et le point $A(3;3)$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ, perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

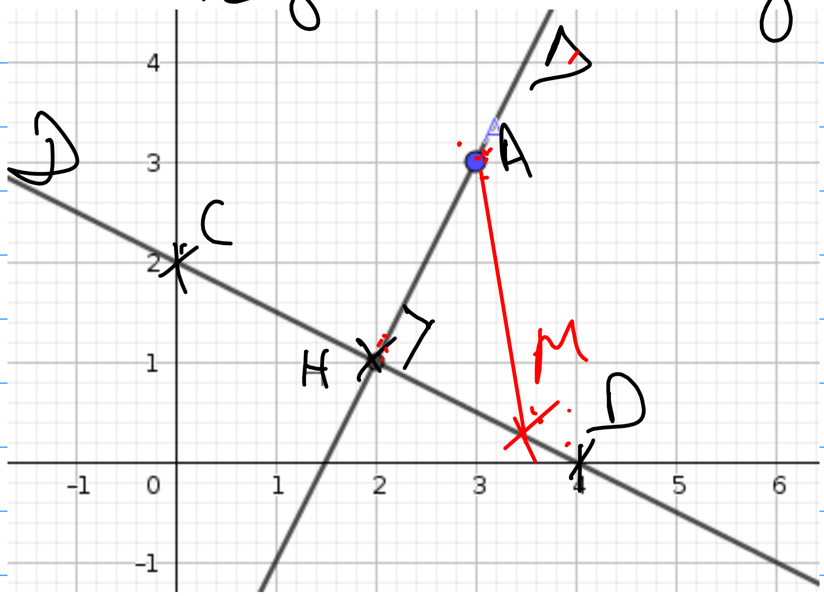
On commence par représenter la droite dans un repère orthonormé :

$\mathscr{D}$: d'équation $x+2y-4=0$

- Pour $x=0$: $0+2y-4=0 \Leftrightarrow y=2$
- Pour $x=4$: $4+2y-4=0 \Leftrightarrow y=0$

$\mathscr{D}$ passe par les points $C(0;2)$ et $D(4;0)$

On peut aussi utiliser l'équation réduite en y : $x+2y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4-x}{2}=2-\frac{1}{2}x$



ordonnée à l'origine

coefficient directeur

1) Δ est la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.

$\mathcal{D}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = 2$

donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-b\,;a)$

$\vec{u}(-2\,;1)$

et un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{n}(a\,;b)$

$\vec{n}(1\,;2)$

Le vecteur $\vec{u}(-2\,;1)$ directeur de $\mathcal{D}$ est normal à Δ.

Une équation de Δ est donc de la forme :

$-2x + 1y + c = 0$

$A(3\,;3) \in \Delta \iff -2 \times 3 + 1 \times 3 + c = 0$

$\iff c = 3$

Δ a pour équation cartésienne $-2x + y + 3 = 0$

2) Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est par définition le point d'intersec-tion de Δ avec $\mathcal{D}$.

Ses coordonnées sont donc solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ -2x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ -2(4-2y)+y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ -8+4y+y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ 5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2=2 \\ y=\frac{5}{5}=1 \end{cases}$$

Les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$ sont :

$$H(2;1)$$

Avec $A(3;3)$ et $H(2;1)$ on a $\overrightarrow{AH}(-1;-2)$

donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH} = (-1)^2+(-2)^2=5$

donc $AH^2=5$

donc $AH=\sqrt{5}$ c'est la distance du

point A à la droite D.