Séance du 29/04/2021

Capacité 4 ***Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17***

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière);
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi. → $u_1 = 1{,}06 \times u_0 - 15$

$u_1 = 626{,}3$

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06\,u_n - 15$. → $u_n \xrightarrow{+6\%} 1{,}06\,u_n \xrightarrow{-15} \underbrace{1{,}06u_n - 15}_{u_{n+1}}$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

point délicat

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand? Le modèle est-il réaliste?

e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ......
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

2) a) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15$$

On considère la suite $v_n = u_n - 250$

Démontrons que (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$$

formule de récurrence de (u_n)

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15 - 250$$

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 265$$

on factorise par 1,06

$$v_{n+1} = 1{,}06 \left(u_n - \frac{265}{1{,}06} \right)$$

$$\boxed{v_{n+1} = 1{,}06\,(u_n - 250) = 1{,}06\, v_n}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de 1,06.

Pour demain finir cette capacité + Activité 1 du cours.

2) b) (v_n) est géométrique de raison 1,06 donc pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_n = v_0 \times 1{,}06^n$$

Or $v_n = u_n - 250$ donc $v_0 = u_0 - 250$

donc $v_0 = 605 - 250 = 355$

On en déduit que $v_n = 355 \times 1{,}06^n$

puis que $u_n = v_n + 250$

$u_n = 250 + 355 \times 1{,}06^n$

c) Pour étudier le sens de variation de (u_n) on va déterminer le signe de la différence :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_{n+1} - u_n = 250 + 355 \times 1{,}06^{n+1}$

$- (250 + 355 \times 1{,}06^n)$

$u_{n+1} - u_n = 355 \times 1{,}06^{n+1} - 355 \times 1{,}06^n$

$u_{n+1} - u_n = 355 (1{,}06^{n+1} - 1{,}06^n)$

$u_{n+1} - u_n = 355 \times 1{,}06^n \times (1{,}06 - 1)$

$u_{n+1} - u_n = 355 \times 1{,}06^n \times 0{,}06$

donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

donc la suite (u_n) est croissante

Remarque :

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $1,06 > 1$

D'après une propriété du cours, (v_n) est croissante.

Donc pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} \geq v_n$$

donc $v_{n+1} - 250 \geq v_n - 250$

donc $u_{n+1} \geq u_n$

donc la suite (u_n) est croissante.

d) $u_n = 1,06^n \times 355 + 250$

u_n peut dépasser n'importe quelle valeur pour n assez grand, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Ce modèle n'est pas réaliste.

d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand ? Le modèle est-il réaliste ?

e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil():
   n ⟵ 0
   u ⟵ 605
   Tant que u < 1000
      u ⟵ 1,06×u+15
      n ⟵ n + 1
   Retourne n
```

Python

```python
def seuil():
    n = 0
    u = 605
    while u<=1000
        u = 1.06 * u + 15
        n = n + 1
    return n
```

seuil() renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 10$ mètres

$u_n = 355 \times 1,06^n + 250$ formule directe

$\begin{cases} u_{n+1} = 1,06\, u_n + 15 \\ u_0 = 605 \text{ cm} \end{cases}$ formule de récurrence

QCM

Question 1 :

La suite définie par $u_n = 0{,}8n$ est

- arithmétique de raison 0,8
- géométrique de raison 0,8
- ni arithmétique, ni géométrique

$u_n = u_0 + r \times n$

avec $u_0 = 0$

et $r = 0{,}8$

Question 2 :

La suite définie par $u_n = 0{,}8^n$ est

- arithmétique de raison 0,8
- géométrique de raison 0,8
- ni arithmétique, ni géométrique

Je reviens

Question 3 :

La suite définie par $u_n = e^{3+n}$ est

- ni arithmétique, ni géométrique
- arithmétique
- géométrique

Je reviens

$$u_n = e^{3+n} = e^3 \times e^n = u_0 \times q^n$$

donc (u_n) géométrique
de raison $q = e$ et $u_0 = e^3$

Question 4 :

La suite définie par $u_n = e^{-2n}$ est

- arithmétique
- géométrique
- ni arithmétique, ni géométrique

Je reviens

$$u_n = u_0 \times q^n = e^{-2n}$$

$$u_n = (e^{-2})^n \qquad (e^x)^n = e^{nx}$$

(u_n) géométrique de raison e^{-2}

Question 5 : Q5

Une suite (u_n) est croissante à partir du rang 0 si

- [ ] $u_0 \leqslant u_1$
- [x] pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$
- [x] pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $u_{n-1} - u_n \leqslant 0$ $\iff \forall n \geqslant 1,\ u_{n-1} \leq u_n$ $\iff \forall n \geqslant 0,\ u_n \leq u_{n+1}$
- [ ] pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_0 \leqslant u_n$

Je reviens

contre-exemple

$$u_n = (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{ou} & \\ -1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, $u_0 \leq u_n$

Rque :

Si (u_n) croissante à partir du rang 0 (A) alors pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq u_0$. (B)

$A \implies B$ (A implique B)

La réciproque ($B \implies A$) est fausse.

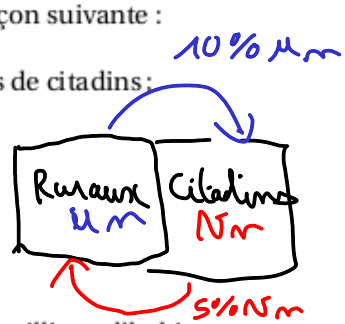
Limites de suites

Cours, activité 1.

Activité 1

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.



Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n. $u_n + v_n = 120$

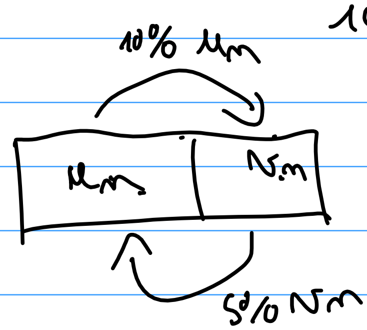
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous ?

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelle conjecture peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.
5. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout entier naturel n.
   - **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   - **b.** En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   - **c.** Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
6. Valider ou invalider la conjecture effectuée à la question **3.**.

En 2010 $u_0 = 90$ $v_0 = 30$

En 2011 $u_1 = \frac{5}{100} \times 30 + \overbrace{90 - \frac{10}{100} \times 90}^{90 \times (1 - \frac{10}{100})} = 1{,}5 + 90 - 9 = 82{,}5$



$v_1 = 120 - u_1 = 37{,}5$

On en déduit qu'on écrit en B3 :

$$\boxed{\begin{array}{l} B3 = 0.9*B2 + C2*0.05 \\ C3 = 120 - B3 \end{array}}$$

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875

3). On peut conjecturer que la suite (u_n) a pour limite 40 et que la suite (v_n) a pour limite 80.

4) Montrons que pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 0{,}85\, u_n + 6$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_n + v_n = 120 \\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 0{,}05\, v_n \end{array}\right.$$ et

donc $u_{n+1} = 0{,}9 u_n + 0{,}05\,(120 - u_n)$

donc $u_{n+1} = 0{,}85 u_n + 6$

5. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

a) Pour tout entier $n \geq 0$:

$w_{n+1} = u_{n+1} - 40$

$w_{n+1} = 0,85 u_n + 6 - 40 = 0,85 u_n - 34$

$w_{n+1} = 0,85 (w_n + 40) - 34$

$w_{n+1} = 0,85 w_n + 34 - 34$

$w_{n+1} = 0,85 w_n$

Donc w_n géométrique de raison 0,85

b) (w_n) géométrique de raison 0,85 donc pour tout entier $n \geq 0$:

$w_n = w_0 \times 0,85^n$

or $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

$w_n = 50 \times 0,85^n$

Sachant que $w_n = u_n - 40$

on a : $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$

et $v_n = 120 - (50 \times 0,85^n + 40)$

On a donc : $v_n = 80 - 50 \times 0,85^n$

et $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$

pour tout entier $n \geqslant 0$

2.2 Limite finie

Définition 2

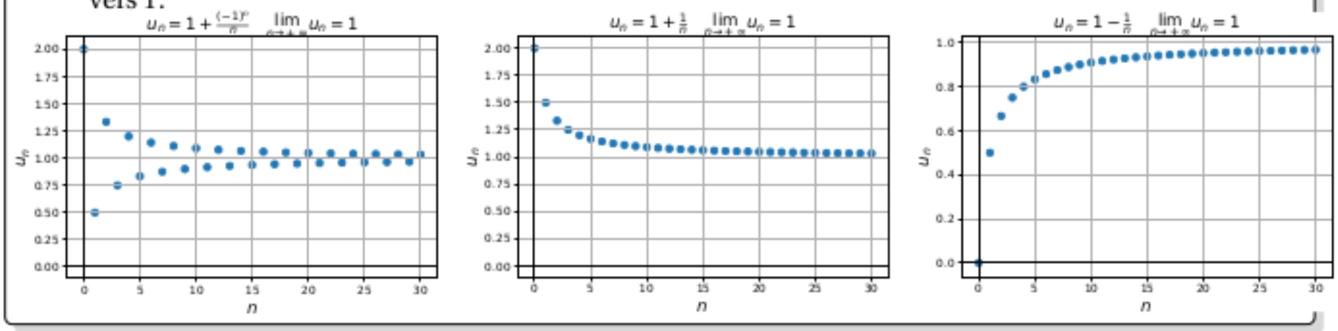
- **Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ dès que n est assez grand.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ et on dit que (u_n) a pour limite ℓ.

- Plus formellement, une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si pour tout réel $a > 0$, il existe seuil n_a à partir duquel la distance entre u_n et ℓ devient inférieure à a.

  Avec des quantificateurs, on formule ainsi : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$, $|u_n - \ell| < a$.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite finie, qui convergent toutes vers 1.



Capacité 5 ***Conjecturer la limite d'une suite avec un outil logiciel, voir exo 2 p. 19***

Pour chacune des suites définies ci-dessous, conjecturer avec le mode `suite` de la calculatrice ou avec une fonction écrite en `Python`, si elle possède une limite finie.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 - 0,5^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 + 10 \times (-0,5)^n$
3. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
4. $u_0 = 100000$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
5. $u_0 = 0,0001$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
6. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$
7. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$
8. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n(1-u_n)$
9. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2,5u_n(1-u_n)$
10. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3,5u_n(1-u_n)$

Emulator Numworks

Simulations avec la calculatrice Numworks

1) $u_n = 4 - 0,5^n$

On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

2) $v_n = 4 + 10 \times (-0,5)^n$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$

3) $u_0 = 10 \qquad u_{n+1} = -0,5u_n + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$

4) $u_0 = 100000 \qquad u_{n+1} = -0,5u_n + 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$

<u>Rque :</u> Si on note ℓ la limite de la suite (u_n), en passant à la limite dans $u_{n+1} = -0,5 u_n + 1$

On a : $\ell = -0,5\ell + 1$

et donc $\ell = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$