1 Sens de variation d'une suite

1.1 Définition

Définition 1

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Corollaire *admis*

- Si une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

Remarque 1

Une suite croissante (respectivement décroissante) à partir de son premier rang, est dite croissante (respectivement décroissante).

Logique 1 ***Utiliser le sens de variation d'une suite***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.
- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.
- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.

Algorithmique 1

La fonction `Python` ci-dessous prend comme argument la liste `L` des premiers termes d'une suite. Recopier et compléter cette fonction, pour qu'elle retourne `True` si la liste `L` est dans l'ordre croissant et `False` sinon.

```
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return ..........
    return .............
```

1.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n).

- Si le terme général de (u_n) est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,;+\infty[$ alors :
  - (u_n) est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,;+\infty[$.
  - (u_n) est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,;+\infty[$.
- On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si (u_n) est de signe positif à partir d'un certain rang, on peut étudier le **rapport de deux termes consécutifs** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- En terminale, on pourra utiliser un **raisonnement par récurrence** ...

Capacité 1 *Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone, voir exo 2 p.17*

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.

   Démontrer que (u_n) est monotone à partir du rang 1.

2. La fonction `Python` ci-dessous définit-elle une suite croissante ?

```python
def suite(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if val < 734:
            val = val + 1
        else:
            val = 0
    return val
```

Capacité 2 *Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, voir exo 2 p.17*

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.

- Soit n un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
- Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation des suites :

- (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.
- (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.

3. On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$

a. Détailler le calcul de v_1 et v_2.

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

Capacité 3 *Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1*

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

☞ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n}{n+1}$.

☞ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ puis conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

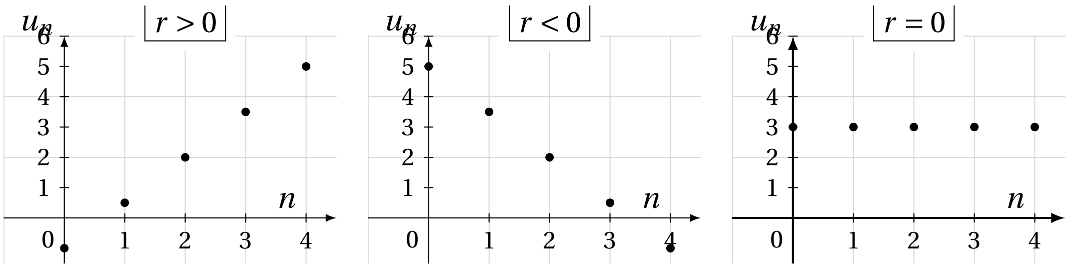
2. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

1.3 Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété 1 ***Suites arithmétiques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

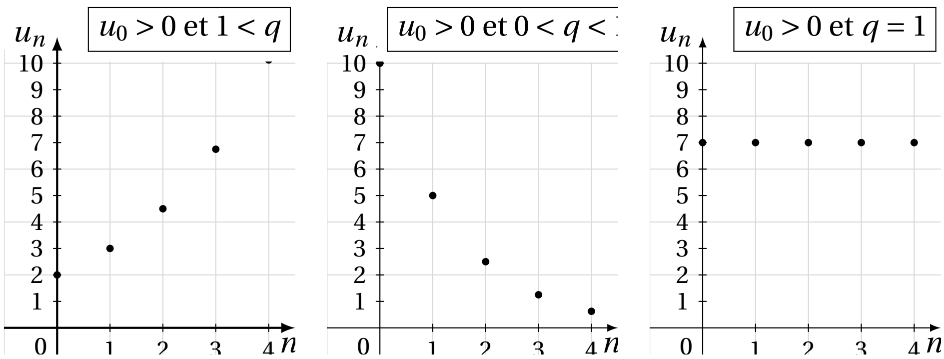
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Propriété 2 ***Suites géométriques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $1 < q$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $0 < q < 1$.



Démonstration *voir exo 44 p.33*

Capacité 4 *Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17*

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de $6,05$ m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

  a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

  b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

  a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1,06$.

  b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.

  c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

  d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand ? Le modèle est-il réaliste ?

  e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
  Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout quequel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ......
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

2 Notion de limite d'une suite

2.1 Un exemple d'évolution de population

Activité 1

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous ?

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelle conjecture peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

5. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

6. Valider ou invalider la conjecture effectuée à la question **3.**.

2.2 Limite finie

Définition 2

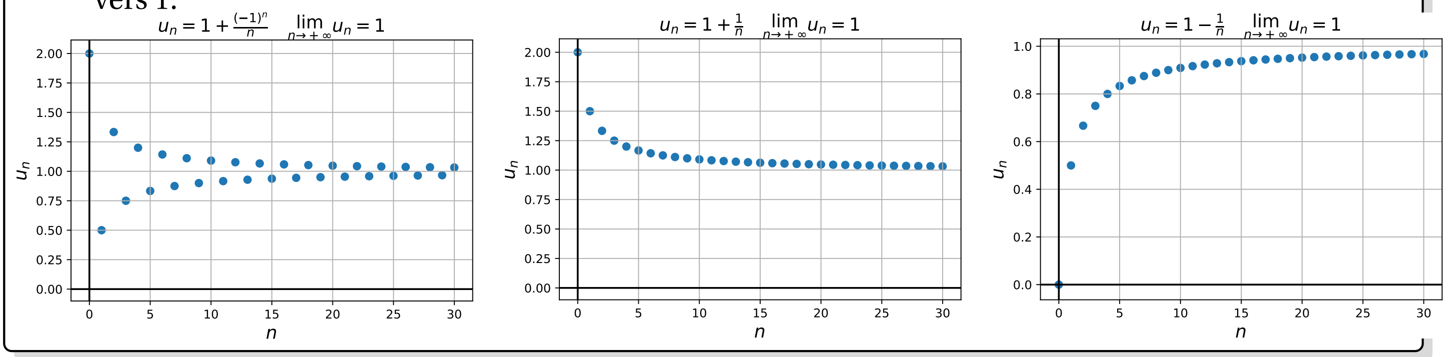
- **Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ dès que n est assez grand.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

- Plus formellement, une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si pour tout réel $a > 0$, il existe seuil n_a à partir duquel la distance entre u_n et ℓ devient inférieure à a.

  Avec des quantificateurs, on formule ainsi : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$, $|u_n - \ell| < a$.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite finie, qui convergent toutes vers 1.



Capacité 5 *Conjecturer la limite d'une suite avec un outil logiciel, voir exo 2 p. 19*

Pour chacune des suites définies ci-dessous, conjecturer avec le mode `suite` de la calculatrice ou avec une fonction écrite en `Python`, si elle possède une limite finie

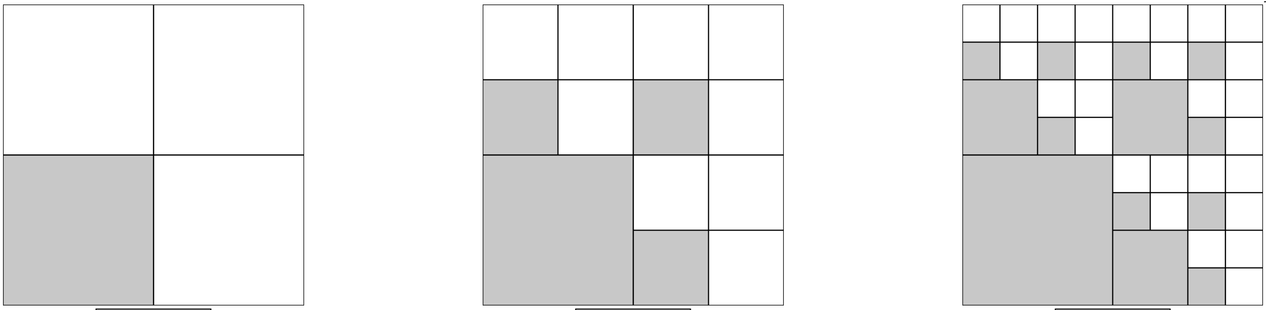
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - 0,5^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 + 10 \times (-0,5)^n$
3. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
4. $u_0 = 100000$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
5. $u_0 = 0,0001$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$
6. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$
7. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$
8. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n(1 - u_n)$
9. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2,5u_n(1 - u_n)$
10. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3,5u_n(1 - u_n)$

Capacité 6 ***Conjecturer la limite d'une suite définie par un motif géométrique***

On colorie un carré en plusieurs étapes :

- Étape 1 : on partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche ;
- Étape 2 : on partage chaque carré non coloriée en quatre en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche ;
- Étapes suivantes : on répète le procédé avec chaque carré non colorié obtenu à l'étape précédente.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n).
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer une formule explicite de b_n.
3. Conjecturer avec la calculatrice si la suite (b_n) possède une limite finie.
4. Écrire une fonction `Python` qui retourne le nombre d'étapes nécessaires pour que 99% du carré initial soit colorié.

2.3 Limite infinie

Définition 3

- n^2 peut dépasser n'importe quel réel positif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

  On dit que la suite $\left(n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $+\infty$.

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty}$.

  Une suite (u_n) pour limite $+\infty$ si u_n peut devenir plus grand que n'importe quel réel $A > a$ pour n assez grand.

- $-n^2$ peut devenir plus petit que n'importe quel réel négatif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

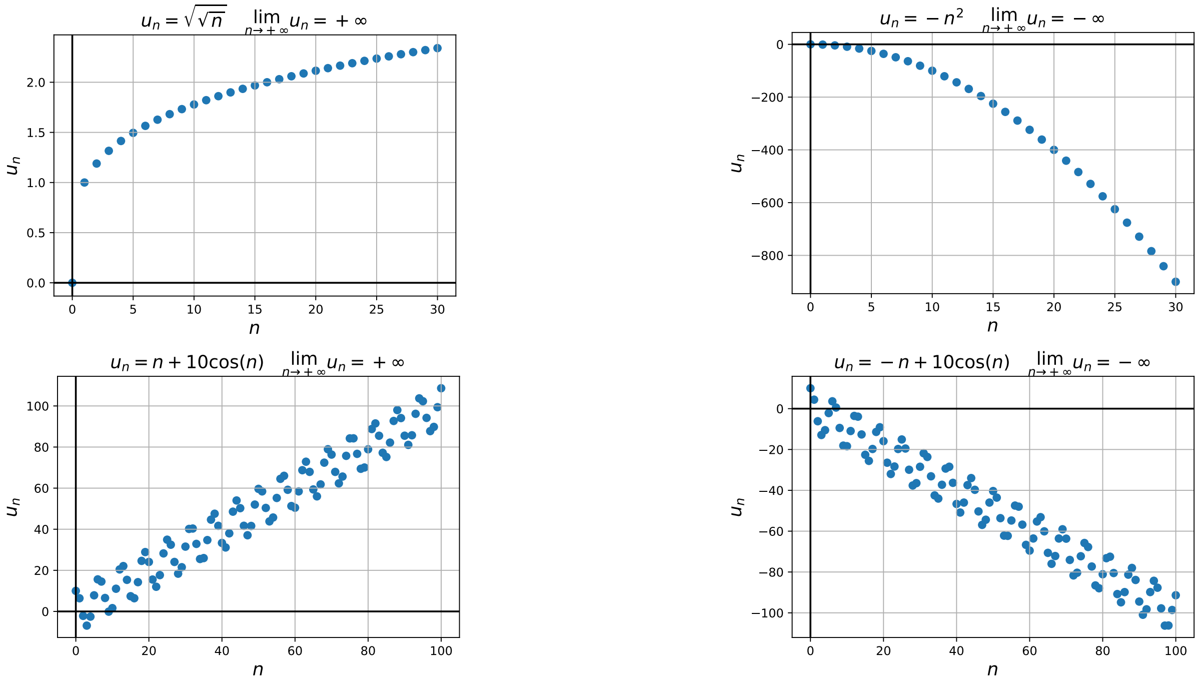
  On dit que la suite $\left(-n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $-\infty$.

On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty}$.

Une suite (u_n) pour limite $-\infty$ si u_n peut devenir plus petit que n'importe quel réel $a < 0$ pour n assez grand.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite infinie.

  On peut remarquer que l'évolution d'une suite de limite infinie peut être plus ou moins rapide et qu'une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante ou vers $-\infty$ sans être décroissante.



Capacité 7 *Limite infinie et algorithme de seuil*

Lors d'une culture *in vitro* de bactéries *Escherichia coli* on s'intéresse à la phase de croissance exponentielle lors de laquelle, dans les conditions optimales de température à 37 degrés celsius, le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.
Lors de la phase exponentielle, le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries double, ici 20 minutes, est appelé temps de génération.

On estime qu'au début de la phase exponentielle, le nombre de bactéries *Eschericha coli* par mL s'élève à 50 millions. Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes. On a ainsi $u_0 = 50$.

1. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $u_3 = 400$ et interpréter la valeur de u_3.
2. **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Calculer le nombre de bactéries par mL au bout de 2 heures de phase exponentielle.
3. **a.** Est-il vrai qu'après 4 heures de phase exponentielle le nombre de bactéries par mL sera supérieur à 200 milliards ?

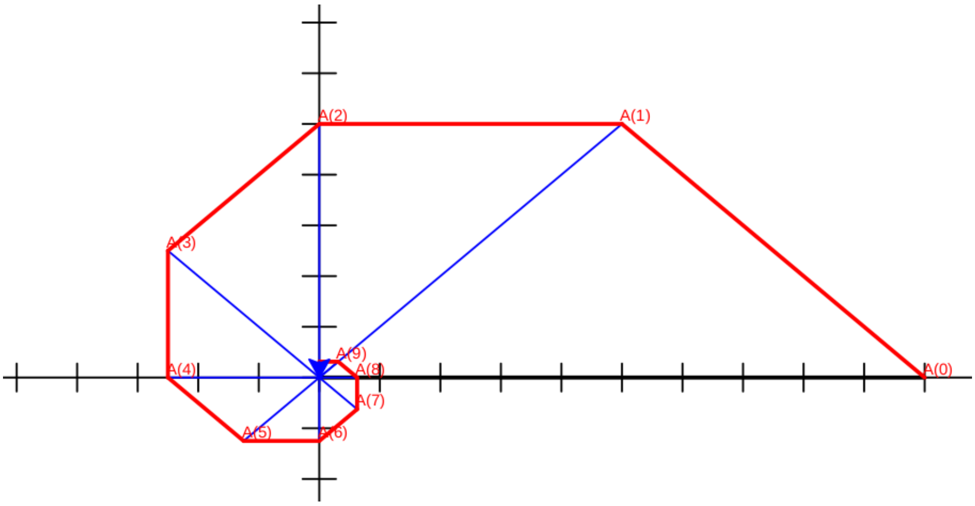
   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n).

Le modèle de croissance exponentiel peut-il être toujours valable ?

c. Écrire en `Python` une fonction `seuil(s)` qui retourne le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant s$ en supposant le modèle exponentiel toujours valable.

Capacité 8 *Conjecturer la limite d'une suite définie par un motif géométrique*

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on construit un triangle rectangle isocèle OA_0A_1 d'hypoténuse $[OA_0]$ avec $A_0(1;0)$, en tournant dans le sens antihoraire. Puis on construit un triangle rectangle isocèle OA_1A_2 d'hypoténuse $[OA_1]$, en tournant dans le sens antihoraire. En répétant le même procédé, on construit une suite de triangles rectangles isocèles OA_0A_1, OA_1A_2, ..., $OA_{n-1}A_n$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

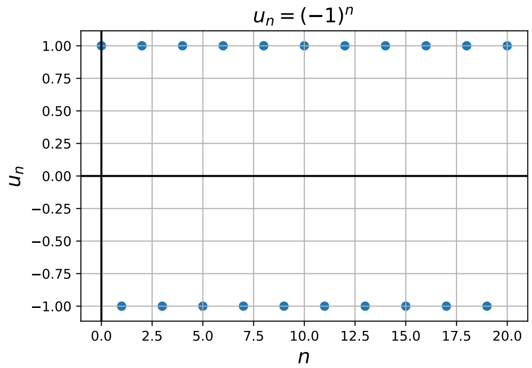


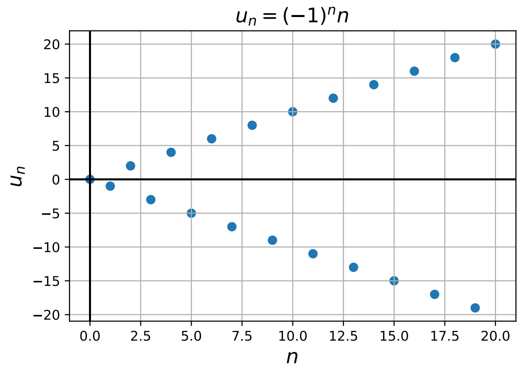
1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et en déduire la nature des suites (a_n) et (b_n).
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer des formules explicites de a_n et b_n.
3. Conjecturer avec la calculatrice si les suites (a_n) et (b_n) possèdent une limite finie.
4. On considère la spirale constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$.
   Sa longueur s_n tend-elle vers une limite ? finie ? infinie ?

2.4 Suite sans limite

Remarque 2

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas nécessairement de limite finie ou infinie.
- Une suite non déterministe à valeurs dans un ensemble fini n'a pas de limite, par exemple la suite des décimales de π ou la suite des résultats lors de la répétition d'une expérience aléatoire de façon indépendante (lancers de dés, de pièces).
- On donne ci-dessous deux exemples de suites sans limite, l'une est bornée (il existe m et M tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$) et l'autre non.





Capacité 9 *Construire des exemples*

Donner un exemple :

- de suite de limite 734 ;
- de suite de limite $+\infty$ puis de suite de limite $-\infty$;
- de suite bornée sans limite puis de suite non bornée sans limite.