Exercices sur l'exponentielle 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

19 mars 2020

Plan

Table des matières

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 1

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(2)$ et $\exp(10)$

- $\exp(2) = \exp(6-4) = \frac{\exp(6)}{\exp(4)} \approx \frac{400}{50} = 8$.
- On peut aussi écrire $\exp(4) = \exp(2 \times 2) = (\exp(2))^2$.
  On en déduit que $(\exp(2))^2 = 50 \Leftrightarrow \exp(2) = \sqrt{50} \approx 7$ car $\exp(2) > 0$.
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(2) \approx 7$.
- $\exp(10) = \exp(6+4) = \exp(6) \times \exp(4) \approx 400 \times 50 = 20000$.

Barbazo, exercice 6 p. 192, Partie 2

On donne les ordres de grandeur : $\exp(4) = 50$ et $\exp(6) = 400$.
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(-2)$, $\exp(8)$ et $\exp(12)$.

- De $\exp(2) \approx 8$ on déduit que $\exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)} \approx \frac{1}{8}$.
- $\exp(8) = \exp(4 \times 2) = (\exp(4))^2 \approx 2500$
- On peut aussi écrire
  $\exp(8) = \exp(2 \times 4) = (\exp(2))^4 \approx 8^4 = 4096$
  On manipule des ordres de grandeur, selon la façon de mener le calcul, on peut obtenir des résultats différents.
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve $\exp(8) \approx 2981$.
- $\exp(12) = \exp(2 \times 6) = (\exp(6))^2 \approx 160000$.
- On peut aussi écrire
  $\exp(12) = \exp(8 + 4) = \exp(8) \times \exp(4) \approx 2500 \times 50 = 125000$
  A l'unité près, avec la calculatrice, on trouve
  $\exp(12) \approx 162755$.

Barbazo, exercice 8 p. 192

Soit x un réel, simplifier les expressions en appliquant les propriétés algébriques de l'exponentielle.

- $A = e^{3x}e^{-4x} = e^{3x-4x} = e^{-x}$.
- $B = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$
- $C = \frac{1}{(e^{-x})^6} = e^{-(-6x)} = e^{6x}$
- $C = D$ Coquille dans l'énoncé ?
- $E = \frac{e^{3-2x}(e^x)^5}{e^{x-2}} = \frac{e^{3-2x}e^{5x}}{e^{x-2}} = \frac{e^{3-2x+5x}}{e^{x-2}} = e^{3x+3-(x-2)} = e^{2x+5}$.

Barbazo, exercice 10 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}$$

L'égalité $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ est utilisée très fréquemment $\Rightarrow$ à Retenir

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + e^{x-x}}$$
$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + e^0}$$
$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 11 p. 192

Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple partir d'un membre pour obtenir l'autre membre par transformation algébrique. Pour tout réel x, on a :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$$

On met sur le même dénominateur

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x}{e^x e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$$
$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}$$
$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

L'égalité est démontrée.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 1

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(n)$ donc $u_{n+1} = \exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(1)u_n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(1)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 2

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \exp(-n+2)\exp(3n-2)$ donc $u_n = \exp(-n+2+3n-2) = \exp(2n) = (\exp(2))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(2)$ et de premier terme $u_0 = \exp(-2)\exp(2) = \exp(0) = 1$.

Barbazo, exercice 12 p. 192 Question 3

Pour chaque suite définie par son terme général, on démontre qu'elle est géométrique et on précise son premier terme et sa raison :

- Pour tout entier naturel n on a $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(3n+1)}$ donc $u_n = \frac{exp(1)}{\exp(1)\exp(3n)} = \frac{1}{\exp(3n)}$.
  On en déduit que $u_n = \left(\frac{1}{\exp(3)}\right)^n = (\exp(-3))^n$.
  La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(-3)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\mathrm{e}^{-4x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)\mathrm{e}^{-4x} = 20\mathrm{e}^{-4x}$$

Pour tout réel x, on a $20 > 0$ et $\mathrm{e}^{-4x} > 0$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\mathrm{e}^{-4x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (-5) \times (-4)\mathrm{e}^{-4x} = 20\mathrm{e}^{-4x}$$

Pour tout réel x, on a $20 > 0$ et $\mathrm{e}^{-4x} > 0$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 192 Question 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{3x}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x}(-x+1) = \mathrm{e}^{3x}(-1+3(-x+1)) = \mathrm{e}^{3x}(2-3x)$$

Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{3x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-3x$.
On en déduit que g' est strictement positive sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$, s'annule en $\frac{2}{3}$ puis est strictement négative sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.
On peut conclure que g est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ puis strictement décroissante sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

Barbazo, exercice 18 p. 192

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :$f'(x) = 1 - (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.
2. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc par produit puis somme $f'(x) > 0$.
   Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Sur le graphique ci-dessous on peut observer que f est strictement croissante (on le sait déjà) et change de signe sur $[0;1]$. On peut conjecturer que $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$.
   - $f(0,4) < 0 < f(0,5)$ donc $f(0,4) < f(\alpha) < f(0,5)$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$ car f strictement croissante.
   - $f(0,42) < 0 < f(0,43)$ donc $f(0,42) < f(\alpha) < f(0,43)$ donc $0,42 < \alpha < 0,43$ car f strictement croissante.
   - $f(0,426) < 0 < f(0,427)$ donc $f(0,426) < f(\alpha) < f(0,427)$ donc $0,426 < \alpha < 0,427$ car f strictement croissante.

   On en déduit qu'une valeur arrondie de α à $0,01$ près est $0,42$.

Barbazo, exercice 18 p. 192 Algorithmique

```
from math import exp
a = 0
F = a - exp(-2*a)
while F < 0:
    a =a + 0.01
    F = a - exp(-2 * a)
print(a)
```

Ce programme affiche la première valeur de a telle que $f(a) \geqslant 0$ avec $a = k \times 0,01$ pour k entier naturel.
D'après la question précédente, le programme affiche $0,43$.