Séance du 29/04/2021

Capacité 4 *Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17*

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

   a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi. → $u_1 = 1{,}06 \times u_0 - 15$
   $u_1 = 626{,}3$

   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$. → $u_n \xrightarrow{+6\%} 1{,}06\,u_n \xrightarrow{-15} \underbrace{1{,}06u_n - 15}_{u_{n+1}}$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

   point délicat **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand ? Le modèle est-il réaliste?

   e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
   Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ......
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

2) a) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15$$

On considère la suite $v_n = u_n - 250$

Démontrons que (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$$

formule de récurrence de (u_n)

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15 - 250$$

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 265$$

on factorise par 1,06

$$v_{n+1} = 1{,}06 \left(u_n - \frac{265}{1{,}06} \right)$$

$$\boxed{v_{n+1} = 1{,}06\,(u_n - 250) = 1{,}06\, v_n}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de 1,06

Pour demain finir cette capacité 1 + Activité 1 du cours.

Limites de suites

Cours, activité 1.

Activité 1

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous ?

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
	…	…	…
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelle conjecture peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.
5. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout entier naturel n.
   - **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   - **b.** En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   - **c.** Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
6. Valider ou invalider la conjecture effectuée à la question **3.**.

2.2 Limite finie

Définition 2

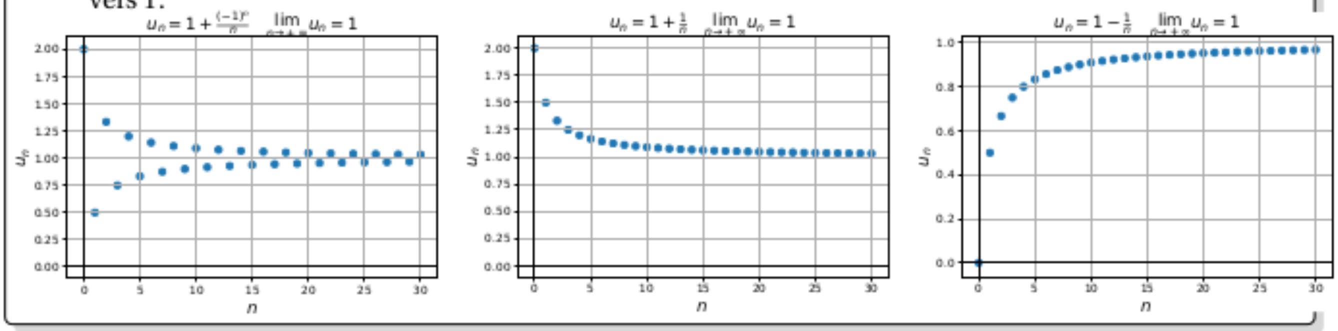
- **Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ dès que n est assez grand.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ et on dit que (u_n) a pour limite ℓ.

- Plus formellement, une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si pour tout réel $a > 0$, il existe seuil n_a à partir duquel la distance entre u_n et ℓ devient inférieure à a.

  Avec des quantificateurs, on formule ainsi : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$, $|\,u_n - \ell\,| < a$.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite finie, qui convergent toutes vers 1.



Capacité 5 ***Conjecturer la limite d'une suite avec un outil logiciel, voir exo 2 p. 19***

Pour chacune des suites définies ci-dessous, conjecturer avec le mode `suite` de la calculatrice ou avec une fonction écrite en `Python`, si elle possède une limite finie.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 - 0,5^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 + 10 \times (-0,5)^n$
3. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
4. $u_0 = 100000$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
5. $u_0 = 0,0001$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
6. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$
7. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$
8. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n(1 - u_n)$
9. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2,5u_n(1 - u_n)$
10. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3,5u_n(1 - u_n)$

Simulations avec la calculatrice Numworks

2.3 Limite infinie

Définition 3

- n^2 peut dépasser n'importe quel réel positif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

  On dit que la suite $\left(n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $+\infty$.

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty}$.

  Une suite (u_n) pour limite $+\infty$ si u_n peut devenir plus grand que n'importe quel réel $a > 0$ pour n assez grand.

- $-n^2$ peut devenir plus petit que n'importe quel réel négatif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

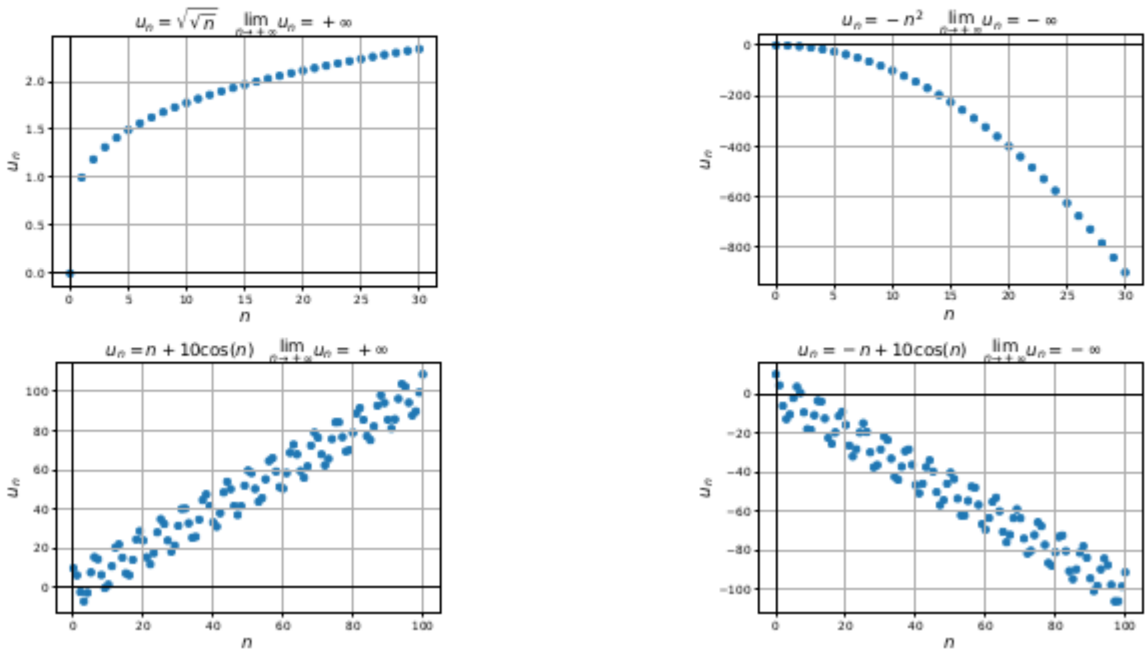
  On dit que la suite $\left(-n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $-\infty$.

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty}$.

  Une suite (u_n) pour limite $-\infty$ si u_n peut devenir plus petit que n'importe quel réel $a < 0$ pour n assez grand.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite infinie.

  On peut remarquer que l'évolution d'une suite de limite infinie peut être plus ou moins rapide et qu'une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante ou vers $-\infty$ sans être décroissante.



Capacité 7 ***Limite infinie et algorithme de seuil***

Lors d'une culture *in vitro* de bactéries *Escherichia coli* on s'intéresse à la phase de croissance exponentielle lors de laquelle, dans les conditions optimales de température à 37 degrés celsius, le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.
Lors de la phase exponentielle, le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries double, ici 20 minutes, est appelé temps de génération.

On estime qu'au début de la phase exponentielle, le nombre de bactéries *Eschericha coli* par mL s'élève à 50 millions. Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes. On a ainsi $u_0 = 50$.

1. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $u_3 = 400$ et interpréter la valeur de u_3.
2. **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. Calculer le nombre de bactéries par mL au bout de 2 heures de phase exponentielle.
3. **a.** Est-il vrai qu'après 4 heures de phase exponentielle le nombre de bactéries par mL sera supérieur à 200 milliards?
   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n).
   Le modèle de croissance exponentielle peut-il être toujours valable ?
   c. Écrire en `Python` une fonction `seuil(s)` qui retourne le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant s$ en supposant le modèle exponentiel toujours valable.