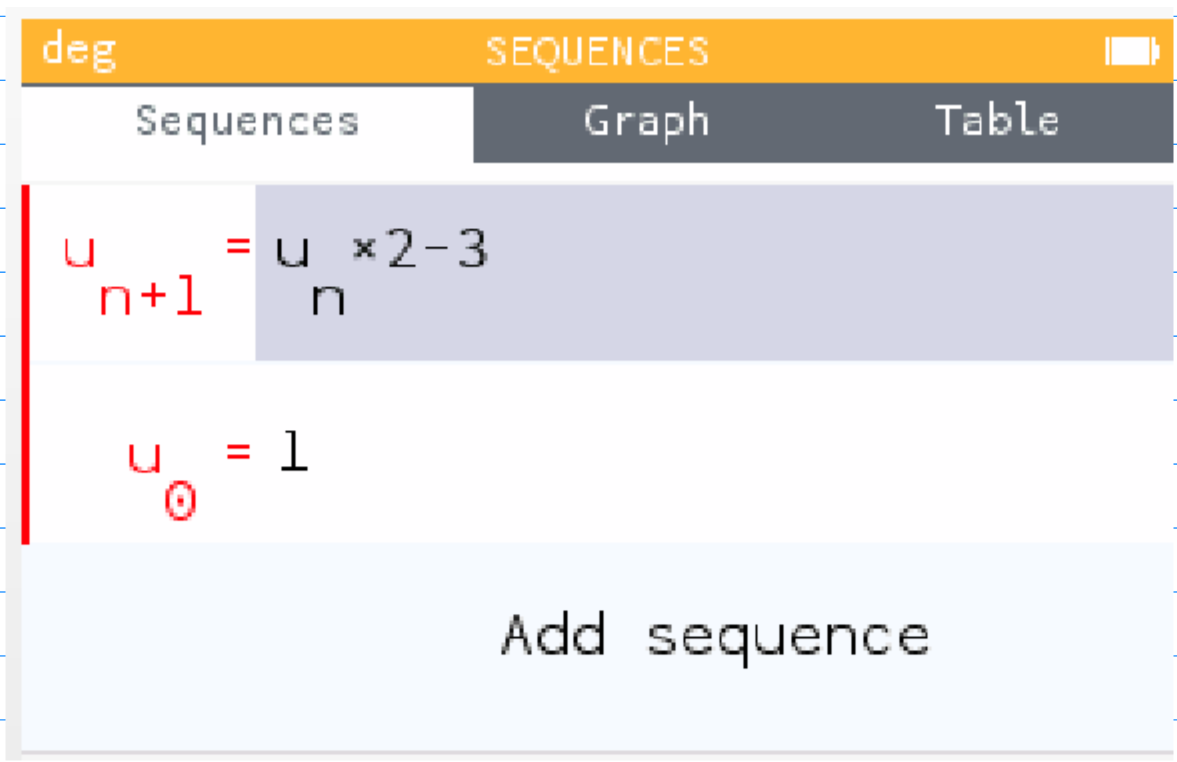
Séance du mercredi 7/04/2021.

QCM bilan sur les suites

Q1 : (u_n) définie par $u_0 = 1$
et pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 2u_n - 3$$

• $u_{10} = -2045$ est correct



• (u_n) arithmétique de raison ?

$u_0 = 1$ $u_1 = -1$ $u_1 - u_0 = -2$

$u_1 = -1$ $u_2 = -5$ $u_2 - u_1 = -4$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

• (u_n) géométrique ?

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{1} = -1$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-5}{-1} = 5$

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

Un programme Python permettant de calculer dans la variable s la somme $u_0+u_1+...+u_{20}$ est :

s contient u_0 c'est correct

```
u = 1
s =u
for k in range(0, 20):
    u = 2 * u - 3
    s = s + u
```

20 tours

à la fin $s = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$

Etape	u	s
Initialisation	1	1
Fin itération 1	$2\times1-3=-1$	$1+(-1)=0$
Fin itération 2	$2\times(-1)-3=-5$	$\overbrace{1+(-1)+(-5)}^{u_0+u_1+u_2}$

☐ Un programme Python permettant de calculer la somme $u_0+u_1+...+u_{20}$ est :

```
u = 1
s = u
for k in range(0, 20):
  s =s  + u
  u = u * 2 - 3
```

c'est incorrect

Par rapport au programme précédent les instructions du bloc de boucle ont été permutées

Etape	s	u
Initialisation	1	1
Fin itération 1	1+1=2	-1
Fin itération 2		

Le 1er terme u_0 est ajouté 2 fois donc la somme s contiendra à la fin :

$$u_0 + u_0 + u_1 + ... + u_{19}$$

Un programme Python permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < -2045$ est :

```
u = 1
n = 0
while u > -2045:
  u = 2 * u - 3
  n = n + 1
```

La condition d'entrée de boucle doit être la négation de la condition de sortie :

La négation de $u_n < -2045$ est $u_n \geqslant -2045$

donc on devrait avoir plutôt $u >= -2045$

Q_2

Question 2 : Q2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$

- [x] Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\boxed{u_n = 3u_{n-1}}$ ou pour tout entier $n \geq 0$. $u_{n+1} = 3u_n$
- [ ] On a pour tout entier naturel n, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$
- [x] Pour tout entier naturel n, on a $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}$
- [x] Pour tout tout entier naturel n, on a $u_n = 3^{n-1} \times 15$ $u_1 = 3 \times 5 = 15$ donc $u_n = 3^{n-1} \times \underbrace{u_1}$
- [ ] Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + 3$
- [ ] Pour tout entier naturel n , on a $u_n = 5 \times 3n$

(u_n) croissante

$u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dots \leq u_{n+10}$

Cours :

Définition 1

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Corollaire *admis*

- Si une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

□ Exemple avec des suites arithmétiques :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -4 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_{n+1} - u_n = 2 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc $u_{n+1} > u_n$

Donc la suite (u_n) croissante

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 2 \\ v_0 = 10^{18} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$:

$v_{n+1} - v_n = -2$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$

donc $v_{n+1} < v_n$

Donc la suite (v_n) est décroissante

□ Exemple de suite ni croissante ni décroissante :

* Une suite constante comme $u_n = 5$ est à la fois croissante et décroissante.

* La suite des décimales de π qui est irrationnel

$p_0 = 3 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 4 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 9$ etc...

n'est ni croissante

* La suite alternée $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante $(-1)^{2021} = -1$ car 2021 est impair

Logique 1 ***Utiliser le sens de variation d'une suite***

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.
- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.
- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.

Affirmation 1 : $(v_n)_{n\geq 0}$ croissante ssi pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \leq v_{n+1}$.

Par exemple avec la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^{n+1}$

on a $v_0 = (-1)^1 = -1$ $\quad v_1 = (-1)^2 = 1$ $\quad$ donc $v_0 \leq v_1$

mais $v_2 = (-1)^{2+1} = -1$ $\quad$ donc $v_1 > v_2$

Ce contre-exemple prouve que l'affirmation est fausse

Affirmation 2 : $(u_n)_{n\geq 0}$ décroissante ssi pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$

C'est faux comme le prouve le contre-exemple de la suite $u_n = (-1)^n$

$u_0 = (-1)^0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \begin{cases} -1 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}$

donc $u_n \leq 1 = u_0$

Pour autant (u_n) n'est pas décroissante car $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$ donc $u_1 < u_2$.

Un autre contre-exemple : $u_n = \cos(n)$

car $u_0 = 1$

et pour tout entier $n \geq 0$ $\cos(n) \leq 1$

mais la suite n'est pas décroissante

Affirmation 3 :

Implication de l'affirmation 2 :

Si $\underbrace{\text{pour tout entier } n \geq 2,\ u_n \leq u_0}_{\text{Proposition A}}$ alors $\underbrace{(u_n) \text{ décroissante}}_{\text{Proposition B}}$.

$\Longrightarrow$

L'implication réciproque s'énonce ainsi :

Si $\underbrace{(u_n) \text{ décroissante}}_{\text{Proposition B}}$ alors $\underbrace{\text{Pour tout entier } n \geq 2,\ u_n \leq u_0}_{\text{Proposition A}}$.

$B \Longrightarrow A$

Cette réciproque est vraie, on pourrait le démontrer par récurrence :

$$u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0$$

toutes justifiées par définition d'une suite décroissante

A retenir : Si une suite est décroissante alors tous ses termes sont plus petits que le 1er terme.

Affirmation 4 :

- (u_n) arithmétique de raison r ssi pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Si $r < 0$ alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = r < 0$$

donc $u_{n+1} \leq u_n$

Donc par définition la suite (u_n) est décroissante.

A retenir : On peut démontrer qu'une suite est décroissante en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Algorithmique 1

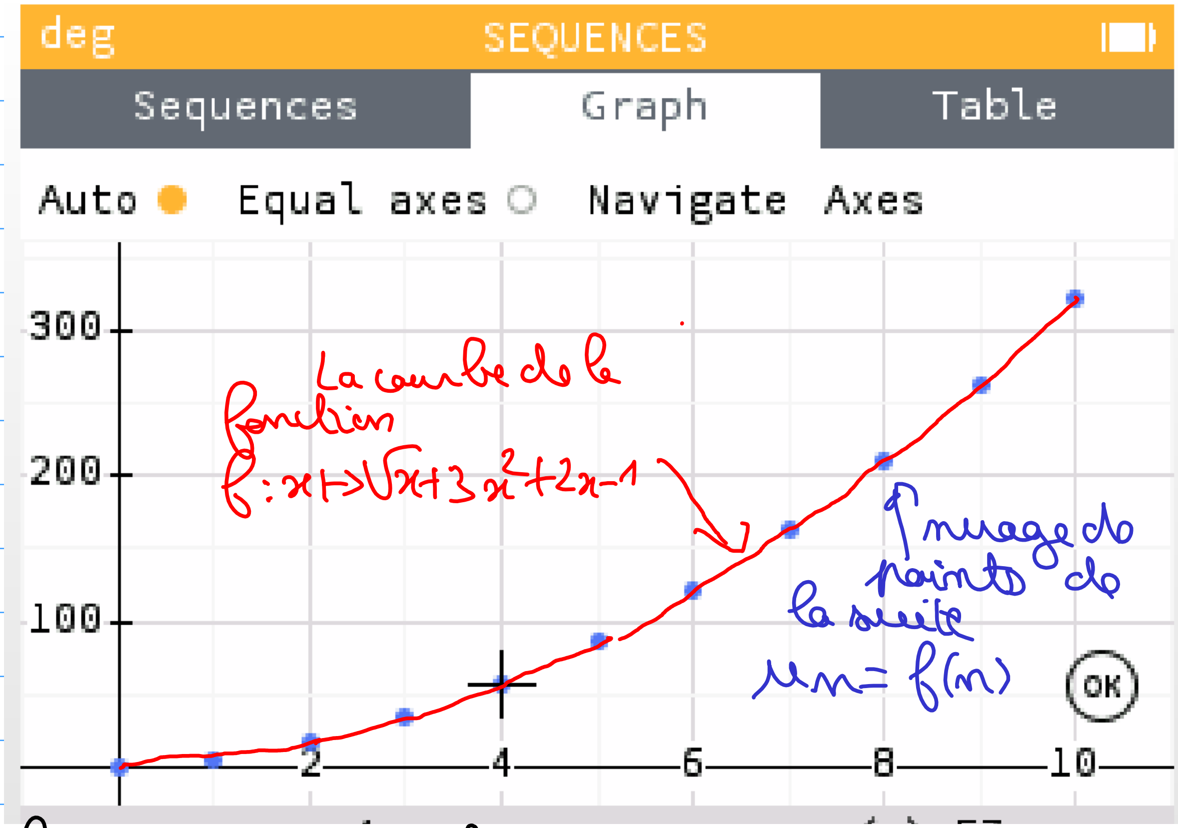
La fonction Python ci-dessous prend comme argument la liste L des premiers termes d'une suite. Recopier et compléter cette fonction, pour qu'elle retourne True si la liste L est dans l'ordre croissant et False sinon.

```
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return ..False.
    return True.....
```

] on renvoie False dès qu'on a un contre-exemple avec 2 termes consécutifs qui ne sont pas dans l'ordre croissant L[k] et L[k+1]

tous les termes consécutifs sont dans l'ordre croissant

Capacité 1



$f : x \mapsto \sqrt{x} + 3x^2 + 2x - 1$

définie sur $[0 ; +\infty[$

dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x + 2$

$f'(x) > 0$ comme somme de nombres positifs

f est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$f(n) \leq f(n+1)$$

donc $u_n \leq u_{n+1}$

donc par définition la suite (u_n) est croissante.

⚠ On ne dérive pas la suite (u_n) mais la fonction f qui apparaît dans la formule directe $u_n = f(n)$.