

Exemples du cours Applications du produit scalaire 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

30 avril 2020

- Capacité 1
- Capacité 2
- Capacité 3
- Capacité 4
- Capacité 5
- Capacité 6
- Capacité 7
- Capacité 8
- Algorithmique 1
- Capacité 9

Capacité 1 : déterminer une ligne de niveau, partie 1

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4 et I son milieu.

Capacité 1 : déterminer une ligne de niveau, partie 1

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4 et I son milieu.

- Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2$$

I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 2$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \iff \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 2$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - AI^2 = 2$$

Capacité 1 : déterminer une ligne de niveau, partie 2

- Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

$$M \in \Gamma \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$$

d'après la question précédente :

$$M \in \Gamma \iff MI^2 - AI^2 = 2$$

$$M \in \Gamma \iff MI^2 = AI^2 + 2$$

$$AI = AB/2 = 2$$

$$M \in \Gamma \iff MI^2 = 6$$

Γ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$.

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$.

- D'après la propriété d'*Al-Kashi* :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = (AB^2 + BC^2 - AC^2) / (2 \times AB \times BC)$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = (16 + 36 - 25) / (2 \times 4 \times 6)$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = (16 + 36 - 25) / (2 \times 4 \times 6)$$

$$\widehat{ABC} \approx 56^\circ \text{ au degré près}$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$ et $AB = 3$.
Calculer la longueur AC .

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$ et $AB = 3$.
Calculer la longueur AC .

- D'après la propriété d'*Al-Kashi* :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos(50)$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos(50)}$$

$$A \approx 3,1$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.
Calculer la longueur BC .

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.
Calculer la longueur BC .

- D'après la propriété du cosinus :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$5 = 2 \times AB \times \cos(30)$$

$$AB = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Capacité 2 : Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire, partie 3

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.
Calculer la longueur BC .

- D'après la propriété du cosinus :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$5 = 2 \times AB \times \cos(30)$$

$$AB = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

- Ensuite, d'après la propriété d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = 25/3 + 4 - 10$$

$$BC = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4; 5)$ et $B(6; 3)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4; 5)$ et $B(6; 3)$.

- Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} (2; -2)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(4; 5)$ et $B(6; 3)$.

- Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} (2; -2)$.
- Si $\vec{u} (c; d)$ est un vecteur directeur d'une droite alors \vec{n} est un vecteur normal si et seulement si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, donc on peut choisir $\vec{n} (-d; c)$.

Dans notre cas, $\vec{n} (2; 2)$ est un vecteur normal à (AB)

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

- \mathcal{D}_1 d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

- \mathcal{D}_1 d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$.
- \mathcal{D}_2 d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(2; 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

- \mathcal{D}_1 d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$.
- \mathcal{D}_2 d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(2; 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$.
- \mathcal{D}_3 d'équation $y = 3 \Leftrightarrow y - 3 = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(0; 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 0)$.

Capacité 3 : Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal, partie 2

Si \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$ et un vecteur normal est $\vec{n}(a; b)$.

- \mathcal{D}_1 d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$.
- \mathcal{D}_2 d'équation $y = -2x \Leftrightarrow 2x + y = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(2; 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$.
- \mathcal{D}_3 d'équation $y = 3 \Leftrightarrow y - 3 = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(0; 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 0)$.
- \mathcal{D}_4 d'équation $x = 4 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; 0)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(0; 1)$.

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 3)$ et $B(-5; 4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 3)$ et $B(-5; 4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

- La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu. On en déduit que :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Capacité 4 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 3)$ et $B(-5; 4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

- La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu. On en déduit que :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

- On a $\overrightarrow{AB}(-7; 1)$ et $I(-3/2; 7/2)$ donc si $M(x; y)$, alors $\overrightarrow{IM}(x + 3/2; y - 7/2)$. D'après la question précédente :

$$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow -7(x + 3/2) + (y - 7/2) = 0$$

$$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow -7x + y - 14 = 0$$

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D}_1 avec l'axe des abscisses, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

\mathcal{D} coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2; 0)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D}_1 avec l'axe des abscisses, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

\mathcal{D} coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2; 0)$.

- Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D}_1 avec l'axe des ordonnées, on résout le système :

$$\begin{cases} 2y - 3x + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

\mathcal{D} coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -3)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à \mathcal{D}_1 est $\vec{n}(-3; 2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_2 parallèle à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à \mathcal{D}_1 est $\vec{n}(-3; 2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_2 parallèle à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.
- Une équation de \mathcal{D}_2 est donc de la forme $-3x + 2y + c = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur normal à \mathcal{D}_1 est $\vec{n}(-3; 2)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_2 parallèle à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.
- Une équation de \mathcal{D}_2 est donc de la forme $-3x + 2y + c = 0$.
-

$$B(1; 2) \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow -3 + 4 + c = 0$$

$$B(1; 2) \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow c = -1$$

Une équation de \mathcal{D}_2 est $-3x + 2y - 1 = 0$

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur directeur e \mathcal{D}_1 est $\vec{u}(-2; -3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_3 perpendiculaire à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur directeur e \mathcal{D}_1 est $\vec{u}(-2; -3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_3 perpendiculaire à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.
- Une équation de \mathcal{D}_3 est donc de la forme $-2x - 3y + c = 0$.

Capacité 5 : Déterminer un vecteur normal à une droite

Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

- Un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 est $\vec{u}(-2; -3)$, c'est aussi un vecteur normal à la droite \mathcal{D}_3 perpendiculaire à \mathcal{D}_1 et passant par $B(1; 2)$.
- Une équation de \mathcal{D}_3 est donc de la forme $-2x - 3y + c = 0$.
-

$$B(1; 2) \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow -2 - 6 + c = 0$$

$$B(1; 2) \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow c = 8$$

Une équation de \mathcal{D}_3 est $-2x - 3y + 8 = 0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant A . $\vec{u}(-2; 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et donc un vecteur normal à Δ .

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant A . $\vec{u}(-2; 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et donc un vecteur normal à Δ .
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x + y + c = 0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant A . $\vec{u}(-2; 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et donc un vecteur normal à Δ .
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x + y + c = 0$.
-

$$A(3; 3) \in \Delta \Leftrightarrow -6 + 3 + c = 0$$

$$A(3; 3) \in \Delta \Leftrightarrow c = 3$$

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$.

- Soit Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant A . $\vec{u}(-2; 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et donc un vecteur normal à Δ .
- Une équation de Δ est donc de la forme $-2x + y + c = 0$.
-

$$A(3; 3) \in \Delta \Leftrightarrow -6 + 3 + c = 0$$

$$A(3; 3) \in \Delta \Leftrightarrow c = 3$$

- Une équation de Δ est donc $-2x + y + 3 = 0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A est $-2x + y + 3 = 0$.

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A est $-2x + y + 3 = 0$.

- Le projeté orthogonal H de A sur \mathcal{D} est le point d'intersection de \mathcal{D} et de Δ .

Capacité 6 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 3)$. On a démontrée qu'une équation de Δ la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A est $-2x + y + 3 = 0$.

- Le projeté orthogonal H de A sur \mathcal{D} est le point d'intersection de \mathcal{D} et de Δ .
- Les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2(2x - 3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $(2; 1)$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $(\frac{2+5}{2}; \frac{1+3}{2})$ soit $(\frac{7}{2}; 2)$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $(\frac{2+5}{2}; \frac{1+3}{2})$ soit $(\frac{7}{2}; 2)$.
- Le rayon du cercle est $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre I du cercle Γ est le milieu du segment $[AB]$, ses coordonnées sont $(\frac{2+5}{2}; \frac{1+3}{2})$ soit $(\frac{7}{2}; 2)$.
- Le rayon du cercle est $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.
- Une équation de Γ est donc $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4}$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Soit \mathcal{T} la tangente à Γ au point A .

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Soit \mathcal{T} la tangente à Γ au point A .

- Le centre du cercle Γ est $I(\frac{7}{2}; 2)$ donc $\overrightarrow{AI}(\frac{3}{2}; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{T} .

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Soit \mathcal{T} la tangente à Γ au point A .

- Le centre du cercle Γ est $I(\frac{7}{2}; 2)$ donc $\overrightarrow{AI}(\frac{3}{2}; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{T} .
- Une équation de \mathcal{T} est donc de la forme $\frac{3}{2}x + y + c = 0$

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Soit \mathcal{T} la tangente à Γ au point A .

- Le centre du cercle Γ est $I(\frac{7}{2}; 2)$ donc $\overrightarrow{AI}(\frac{3}{2}; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{T} .
- Une équation de \mathcal{T} est donc de la forme $\frac{3}{2}x + y + c = 0$
-

$$A(2; 1) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow 1 + 1 + c = 0$$

$$A(2; 1) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow c = -2$$

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Soit \mathcal{T} la tangente à Γ au point A .

- Le centre du cercle Γ est $I(\frac{7}{2}; 2)$ donc $\overrightarrow{AI}(\frac{3}{2}; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{T} .
- Une équation de \mathcal{T} est donc de la forme $\frac{3}{2}x + y + c = 0$
-

$$A(2; 1) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow 1 + 1 + c = 0$$

$$A(2; 1) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow c = -2$$

- Une équation de \mathcal{T} est donc $\frac{3}{2}x + y - 2 = 0$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Une équation de Γ est donc $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4}$. On considère la droite Δ d'équation $x + y = 6$.

Capacité 7 : Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, Partie 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2; 1)$ et $B(5; 3)$. Une équation de Γ est donc $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4}$. On considère la droite Δ d'équation $x + y = 6$.

- Les coordonnées d'un point d'intersection de Γ et de la droite Δ sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4} \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \frac{7}{2})^2 + (4 - x)^2 = \frac{13}{4} \\ y = 6 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4} \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 15x + 25 = 0 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

On résout l'équation $2x^2 - 15x + 25 = 0$ de discriminant $b^2 - 4ac = 25$ et de racines 5 et $\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} (x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{13}{4} \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 3,5 \end{cases}}$$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2 + y^2 + 2 = 0$.

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2$$

Or pour tout couple de réels (x, y) , on a $x^2 + y^2 \geq 0$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 1

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2 + y^2 + 2 = 0$.

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2$$

Or pour tout couple de réels (x, y) , on a $x^2 + y^2 \geq 0$

- On en déduit que Γ est un ensemble vide.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 26 = 0$.

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 6y + 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 1 - 9 - 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 1 - 9 - 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 6^2$$

Capacité 8 : Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation, Partie 2

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 26 = 0$.

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 6y + 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 1 - 9 - 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 1 - 9 - 26 = 0$$

$$M(x; y) \in \Gamma \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 6^2$$

- On en déduit que Γ est le cercle de centre $\Omega(1; -3)$ et de rayon 6.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1 est $x^2 + y^2 = 1^2$.

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1 est $x^2 + y^2 = 1^2$.
- Si on suppose $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan muni d'un repère orthonormé.

- Une équation cartésienne du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1 est $x^2 + y^2 = 1^2$.
- Si on suppose $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- L'aire \mathcal{A} est celle d'un quart de disque de rayon 1, sa valeur est donc de $\frac{\pi}{4}$.

Algorithmique 1, Partie 2

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

Algorithmique 1, Partie 2

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

```
from math import sqrt

def sommeRectGauche(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + sqrt(1 - (k/n) ** 2)
    return s
```

Algorithmique 1, Partie 2

Calculs des sommes d'aires de rectangles.

```
from math import sqrt

def sommeRectGauche(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + sqrt(1 - (k/n) ** 2)
    return s
```

```
from math import sqrt

def sommeRectDroite(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + sqrt(1 - ((k+1)/n) ** 2)
    return s
```

On encadre l'aire du demi-disque par deux sommes d'aires de rectangles.

On encadre l'aire du demi-disque par deux sommes d'aires de rectangles.

```
epsilon = 0.001
n = 1
while 4 * (sommeRectDroite(n) -
          sommeRectGauche(n)) >= epsilon:
    n += 1
print(n, 4 * sommeRectDroite(n), 4 *
      sommeRectGauche(n))
```

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

- Une équation de \mathcal{P} est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

- Une équation de \mathcal{P} est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4; 2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

- Une équation de \mathcal{P} est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4; 2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

- Une équation de \mathcal{P} est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4; 2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.
- Toujours par hypothèse, on a $0 = a \times 2^2 + 2b + c$. On déduit de ce qui précède que $0 = 4a + 4a + 6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.

Capacité 9, Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole, Partie 1

Une parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6 .

- Une équation de \mathcal{P} est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
- L'abscisse α où l'axe de symétrie coupe l'axe des abscisses, est le milieu de l'intervalle $[-4; 2]$ donc $\alpha = \frac{-4+2}{2} = -1$. On a donc $-\frac{b}{2a} = -1$ et donc $b = 2a$.
- Par hypothèse on a $6 = a \times 0^2 + b \times 0 + c$ donc $c = 6$.
- Toujours par hypothèse, on a $0 = a \times 2^2 + 2b + c$. On déduit de ce qui précède que $0 = 4a + 4a + 6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.
- Une équation de \mathcal{P} est donc $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$.