Exemples du cours Suites Partie 2 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

15 avril 2020

Table des matières

Logique 1 Affirmation 1

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :** Pour qu'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante, il suffit que $v_0 \leqslant v_1$.
- **Réponse :** **FAUSSE** comme le prouve le contre-exemple de la suite définie par la suite des décimales de $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$. On a $v_0 = 1$ et $v_1 = 4$ donc $v_0 \leqslant v_1$ est vérifiée, mais la décimale suivante $v_2 = 1$ est strictement inférieure à v_1. Cette suite (v_n) n'est pas donc croissante.

Logique 1 Affirmation 2

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

Logique 1 Affirmation 2

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 2 :** Si une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante
- **Réponse :** **FAUSSE** comme le prouve le contre-exemple de la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = (-1)^n$. On a $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = (-1)^n$ donc $u_n = -1$ ou $u_n = 1$ donc la condition $u_n \leqslant u_0$ est vérifiée. Cependant, la suite n'est pas décroissante puisque par exemple on a $u_{19} = -1 \leqslant 1 = u_{20}$ et $u_{20} = 1 \geqslant -1 = u_{21}$.

Logique 1 Affirmation 3

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.

Logique 1 Affirmation 3

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 3 :** La réciproque de l'implication de l'affirmation 2 est vraie.
- **Réponse :** La réciproque de l'affirmation 2 se formule ainsi :
  « Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$ ».
  Cette affirmation est **Vraie** pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_0$ d'après un corollaire de la définition d'une suite décroissante.

Logique 1 Affirmation 4

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.

Logique 1 Affirmation 4

Déterminer si l'affirmation suivante est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 4 :** Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.
- **Réponse :** Cette affirmation est **VRAI**. Démontrons-le : si une suite (u_n) est arithmétique alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = r$ avec r raison de la suite.
  Si $r < 0$ alors pour tout entier $n \geqslant 0$, on $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

La fonction Python ci-dessous prend comme argument la liste L des premiers termes d'une suite. Recopier et compléter cette fonction, pour qu'elle retourne True si la liste L est dans l'ordre croissant et False sinon.

```
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return ..........
    return .............
```

```
def estCroissante(L):
    for k in range(len(L) - 1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return False
    return True
```

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone.

- **Question** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.
  Démontrer que (u_n) est monotone à partir du rang 1.

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone.

- **Question** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.
  Démontrer que (u_n) est monotone à partir du rang 1.
- **Réponse** Soit f la fonction définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ telle que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 + 2x - 1$.
  Pour tout $x \geqslant 1$, on a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x + 2$ donc $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
  D'après une propriété du cours, la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante.

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone.

- **Question** La fonction `Python` ci-dessous définit-elle une suite croissante ?

```python
def suite(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if val < 734:
            val = val + 1
        else:
            val = 0
    return val
```

Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone.

- **Question** La fonction Python ci-dessous définit-elle une suite croissante ?

```python
def suite(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if val < 734:
            val = val + 1
        else:
            val = 0
    return val
```

- **Réponse NON**, la suite (u_n) ainsi définie vérifie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = n$ si $0 \leqslant n \leqslant 733$ et $u_n = 0$ sinon donc cette suite n'est pas croissante puisque $u_{733} > u_{734}$.

Capacité 2 Partie 1

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.
  - Soit n un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
  - Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.
  - Soit n un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
  - Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $v_{n+1} - v_n = 1 + 0,2^{n+1} - (1 + 0,2^n) = 0,2^n(0,2 - 1) = -0,8 \times 0,2^n$. On en déduit que $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et donc que la suite (v_n) est décroissante.

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** Soit (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n+2}{n+3}$.
- **Réponse** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
  $w_{n+1} - w_n = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+3)^2-(n+2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{1}{(n+4)(n+3)}$.
  On en déduit que $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ et donc que la suite (w_n) est croissante.

Capacité 2 Partie 4

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** On considère la suite (v_n) définie par
  $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$

Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- **Question** On considère la suite (v_n) définie par
$\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$
- **Réponse** On a $v_1 = v_0 + 2 = -2$ et $v_2 = v_1 + 1 = -1$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+1}$.
On en déduit que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et donc que la suite (v_n) est croissante.

Capacité 3 Question 1)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

Capacité 3 Question 1)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_{n+1} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

Or si $n \geqslant 1$ alors $n + n \geqslant n + 1 \Leftrightarrow 2n \geqslant n + 1 \Leftrightarrow \frac{2n}{n+1} \geqslant 1$.
On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, or $u_n > 0$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est donc croissante.

Capacité 3 Question 2)

Soit la suit (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Soit la suit (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1) \times n \times \ldots \times 1}{n \times (n-1) \ldots \times 1} = n+1$$

Or si $n \geqslant 1$ alors $n+1 \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$.
On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$, or $v_n > 0$, donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.
La suite (v_n) est donc croissante.

Capacité 4 Question 1)

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de $6{,}05$ m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante : d'abord une augmentation de $6\,\%$ (apport de la rivière) ; ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

Capacité 4 Question 1)

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de $6,05$ m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante : d'abord une augmentation de $6\,\%$ (apport de la rivière) ; ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

- Le 2 janvier 2018 à midi, le niveau du lac, en cm, était de $u_1 = 1,06u_0 - 15 = 626,3$.

Capacité 4 Question 1)

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante : d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ; ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

- Le 2 janvier 2018 à midi, le niveau du lac, en cm, était de $u_1 = 1{,}06u_0 - 15 = 626{,}3$.
- Soit u_n le niveau du lac n jours après le 1 Janvier 2018, au cours du jour $n+1$, le niveau augmente de 6% donc passe à $1{,}06u_n$ puis diminue de 15 cm, donc on a $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

Capacité 4 Question 2)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

Capacité 4 Question 2)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- Démontrons que la suite (v_n) est géométrique :
  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1{,}06u_n - 15 - 250 = 1{,}06u_n - 265$$
  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1{,}06(u_n - 265/1{,}06) = 1{,}06(u_n - 250) = 1{,}06v_n$$

  On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $1{,}06$.

Capacité 4 Question 2)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- Démontrons que la suite (v_n) est géométrique :
  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06u_n - 15 - 250 = 1,06u_n - 265$$
  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06(u_n - 265/1,06) = 1,06(u_n - 250) = 1,06v_n$$

  On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $1,06$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 1,06^n = (u_0 - 250) \times 1,06^n = 355 \times 1,06^n$.
  On en déduit que $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- Démontrons que la suite (v_n) est géométrique :
  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06u_n - 15 - 250 = 1,06u_n - 265$$
  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06(u_n - 265/1,06) = 1,06(u_n - 250) = 1,06v_n$$

  On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $1,06$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 1,06^n = (u_0 - 250) \times 1,06^n = 355 \times 1,06^n$.
  On en déduit que $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
- La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $1,06 > 1$ donc elle est croissante.
  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a donc $v_n \leqslant v_{n+1}$ et donc
  $v_n + 250 \leqslant v_{n+1} + 250 \Leftrightarrow u_n \leqslant u_{n+1}$.
  La suite (u_n) est donc croissante.

Capacité 4 Question 2)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

Capacité 4 Question 2)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$. En calculant quelques valeurs avec la machine, on peut conjecturer que u_n peut dépasser n'importe quelle valeur pour n assez grand. u_n étant un niveau d'en en cm, ce modèle n'est pas réaliste.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$. En calculant quelques valeurs avec la machine, on peut conjecturer que u_n peut dépasser n'importe quelle valeur pour n assez grand. u_n étant un niveau d'en en cm, ce modèle n'est pas réaliste.
- Algorithme de seuil pour déterminer le nombre de jour au bout duquel le niveau du lac va dépasser 10 m.

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while u <= 1000:
        u = 1.06 * u - 15
        n = n + 1
    return n
```

Activité 1 Questions 1) 2) et 3)

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

Activité 1 Questions 1) 2) et 3)

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.

Activité 1 Questions 1) 2) et 3)

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.
- Pour compléter la feuille de calcul, on peut saisir les formules suivantes :
  `B3 = 0,9 * B2 + 0,05 * C2` et `C3 = 120 - B3`.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.
- Pour compléter la feuille de calcul, on peut saisir les formules suivantes :
  `B3 = 0,9 * B2 + 0,05 * C2` et `C3 = 120 - B3`.
- On peut conjecturer que l'évolution à long terme va se stabiliser autour de 40 millions en zone rurale et 80 millions en zone urbaine.

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution :
  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc
  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

  On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times 0,85^n = (u_0 - 40) \times 0,85^n = 50 \times 0,85^n$. On en déduit que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$.

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

  On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times 0,85^n = (u_0 - 40) \times 0,85^n = 50 \times 0,85^n$. On en déduit que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$.
- Pour tout entier naturel n, on a donc : $v_n = 120 - u_n = 80 - 50 \times 0,85^n$.
- Puisque $0 \leqslant 0,85 < 1$, on peut conjecturer que $0,85^n$ tend vers 0 lorsque $n$tend vers $+\infty$ et donc par somme que u_n tend vers 40 et v_n tend vers 80. La conjecture établie à la question 3) est donc très probablement vraie. (En fait elle l'est.)

Capacité 5

Deux corrigés en ligne sont disponibles :

- Dans un environnement Python interactif : https://repl.it/@fredericjunier/SuitePartie2Capacite5
- Au format pdf : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/ressources/Premiere-Corrige-PartieSuite2-ExemplesCours.pdf

Capacité 6 Partie 1

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.

- Animation : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/images/sierpinski.gif

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.

- Animation : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/images/sierpinski.gif
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$ donc (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Capacité 6 Partie 1

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.

- Animation : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/images/sierpinski.gif
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$ donc (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
- D'après une propriété des suites géométriques, pour tout entier naturel n, on a $b_n = b_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \frac{3}{4}$.

- Animation : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/images/sierpinski.gif
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$ donc (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
- D'après une propriété des suites géométriques, pour tout entier naturel n, on a $b_n = b_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
- Graphiquement (voir l'animation) et avec la calculatrice, on peut conjecturer que la suite (b_n) converge vers 0.

- Animation : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/images/sierpinski.gif
- Graphiquement (voir l'animation) et avec la calculatrice, on peut conjecturer que la suite (b_n) converge vers 0.
- Fonction Python qui retourne le nombre d'étapes nécessaires pour que 99% du carré initial soit colorié.

```python
def seuil():
    b = 1
    n = 0
    while b < 0.99:
        b = b * 3 / 4
        n = n + 1
    return n
```

Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes. On a ainsi $u_0 = 50$. D'après le modèle le nombre de bactéries double à chaque génération, toutes les 20 minutes.

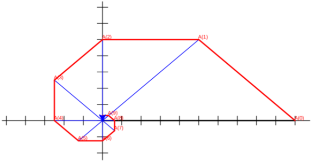
- $u_1 = u_0 \times 2 = 100$ puis $u_2 = 2 \times u_1 = 200$ puis $u_3 = 2 \times u_2 = 400$.
- D'après le modèle, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 2u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2. D'après une propriété du cours sur les suites géométriques, on a $u_n = u_0 \times 2^n = 50 \times 2^n$.
- 2 heures représentent 6×20 minutes, donc le nombre de bactéries au bout de deux heures sera égal à $u_6 = 2^6 \times 50 = 6400$ millions.

Capacité 7 Partie 2

- 4 heures représentent $4 \times 3 \times 20$ minutes, donc le nombre de bactéries au bout de deux heures sera égal à $u_{12} = 2^{12} \times 50 = 204800$ millions donc supérieur à 200 milliards.
- On peut conjecturer que u_n peut dépasser n'importe quel nombre pour n assez grand et que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Il s'agit d'une croissance exponentielle. En pratique cette croissance s'interrompt nécessairement au bout d'un certain nombre de générations, notre monde n'étant pas infini.

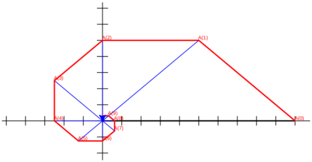
Fonction `seuil(s)` en `Python` qui retourne le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant s$ en supposant le modèle exponentiel toujours valable.

```python
def seuil(s):
    u = 50
    n = 0
    while u < s:
        u = 2 * u
        n = n + 1
    return n
```



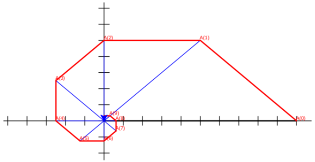
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

Capacité 8 Question 1



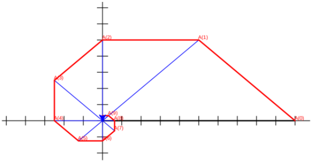
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

- Pour tout entier $n \geqslant 0$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1} donc $OA_{n+1} = AA_n \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n$. De plus OA_nA_{n+1} isocèle en A_{n+1} donc $A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$, donc $b_n = a_{n+1}$ et donc $b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}b_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

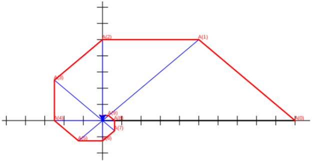


Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

- Pour tout entier $n \geqslant 0$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1} donc $OA_{n+1} = AA_n \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n$. De plus OA_nA_{n+1} isocèle en A_{n+1} donc $A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$, donc $b_n = a_{n+1}$ et donc $b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}b_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
- Les suites (a_n) et (b_n) sont donc identiques et ce sont des suites géométriques de premiers termes $a_0 = 1$ et $b_0 = a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

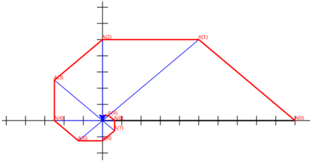


Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

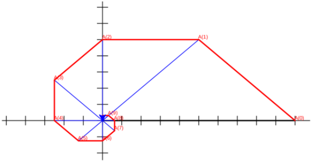
- D'après une propriété du cours sur les suites géométriques, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n b_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$$

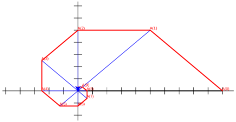


Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

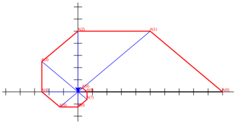


Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n la longueur OA_n et b_n la longueur A_nA_{n+1}.

- Avec la calculatrice, on peut conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0. On verra en terminale que cette propriété est liée à la valeur absolue de la raison qui est strictement inférieure à 1.



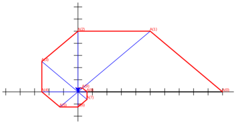
On considère la spirale constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $\ldots$, $[A_{n-1}A_n]$.



On considère la spirale constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $\dots$, $[A_{n-1}A_n]$.

- La longueur de la spirale est égale la somme des n premiers termes termes de la suite (b_n) : $b_0 + b_1 + \dots + b_n$.

Capacité 8 Question 4



On considère la spirale constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $\dots$, $[A_{n-1}A_n]$.

- La longueur de la spirale est égale la somme des n premiers termes termes de la suite (b_n) : $b_0 + b_1 + \dots + b_n$.
- D'après une propriété du cours sur les suites géométriques :

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n = b_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

En reprenant le raisonnement de la question précédente, on peut conjecturer que $b_0 + b_1 + \dots + b_n$ tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Capacité 9

- Un exemple de suite de limite 734 : (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 734 + 0,5^n$;
- Un exemple de suite de limite $+\infty$: (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = n$;
- Un exemple de suite de limite $-\infty$: (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = -n$;
- Un exemple de suite bornée sans limite : (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = \cos(n)$;
- Un exemple de suite non bornée sans limite : (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = n\cos(n)$.