Exercices sur les applications du produit scalaire 2019/2020

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

13 mai 2020

Plan

Table des matières, géométrie du triangle

Table des matières, géométrie repérée

Plan

Barbazo, exercice 32 p.228

32 D'après la formule d'Al-Kashi,
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$

$\Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \dfrac{BC^2 - (AB^2 + AC^2)}{-2 \times AB \times AC} \Leftrightarrow \cos(\hat{A}) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}$

Donc, $\cos(\hat{A}) = \dfrac{4^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{1}{16}$. La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{A} = 86{,}4°$.

De même, $\cos(\hat{B}) = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \dfrac{4^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 7} = \dfrac{29}{56}$.

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{B} = 58{,}8°$.

Enfin $\cos(\hat{C}) = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \dfrac{6^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 7} = \dfrac{69}{84} = \dfrac{23}{28}$.

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 0,1° près de l'angle, soit $\hat{C} = 34{,}8°$.

Barbazo, exercice 34 p. 228

34 **1.** Dans le triangle ACI rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $CI^2 = AI^2 + AC^2 = 3^2 + 8^2 = 73$.
On a donc $CI = \sqrt{73}$ cm.
Dans le triangle ACB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $CB^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.
On a donc $BC = \sqrt{100} = 10$ cm.
2. Dans le triangle BCI, d'après la formule d'Al-Kashi,
$BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \times \cos\left(\widehat{ICB}\right)$.

$$BI^2 = IC^2 + BC^2 - 2 \times IC \times BC \cos\left(\widehat{ICB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{IC^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times IC \times BC}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{73 + 100 - 9}{2 \times \sqrt{73} \times 10}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{164}{20\sqrt{73}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ICB}\right) = \frac{41}{5\sqrt{73}}.$$

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\widehat{ICB} = 16°$.

Barbazo, exercice 36 p.228

36 **1.** Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$.
AC est une grandeur positive donc $AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.
D'après le théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow CI^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow CI^2 = CA^2 + \frac{AB^2}{4}.$$

Soit $CI^2 = \sqrt{84}^2 + \frac{4^2}{4} = 84 + 4 = 88$.

CI est une grandeur positive donc $CI = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$.
2. Dans le triangle BIC, d'après la formule d'Al-Kashi :
$BI^2 = CI^2 + BC^2 - 2 \times CI \times BC \times \cos(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{CI^2 + BC^2 - BI^2}{2 \times CI \times BC}.$$

Soit $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{88}^2 + 10^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{88} \times 10} = \frac{184}{20\sqrt{88}} = \frac{23}{5\sqrt{22}}$.
La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée à 1° près de l'angle, soit $\alpha = 11°$.

Barbazo, exercice 39 p.229

39 Dans le triangle ABC, d'après la formule d'Al-Kashi :
$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$. Soit :
$AC^2 = 0{,}8^2 + 1^2 - 2 \times 0{,}8 \times 1 \times \cos(82) = 1{,}64 - 1{,}6 \times \cos(82)$.
BC est une grandeur positive donc
$BC = \sqrt{1{,}64 - 1{,}6 \times \cos(82)} = 1{,}19$. Après avoir été déportée, la deuxième boule se situe à 1,19 m, au centimètre près, du point de lancement de la première boule.

Barbazo, exercice 41 p.229

41 Pour tout point M distinct de N et P, on a le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ est nul. D'après le théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{NP^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{NP^2}{4}.$$

MN et MI sont des grandeurs positives, on a donc le triangle MNP qui est rectangle en M si et seulement si $MI = \frac{NP}{2}$.

Barbazo, exercice 43 p.229

43 $AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -6 \Leftrightarrow MI^2 = -6 + \frac{\sqrt{61}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Barbazo, exercice 44 p.229

44 **1.** Dans le triangle ABC, d'après la formule d'Al-Kashi :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos\left(\widehat{ABC}\right).$$

Soit $AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos(60) = 64 + 25 - 40 = 49$.

BC est une grandeur positive donc $BC = \sqrt{49} = 7$.

Soit P le périmètre du triangle ABC, on a :

$$P = AB + BC + CA = 5 + 8 + 7 = 20.$$

2. Soit $\mathcal{A}_{BDC}$ l'aire du triangle BDC, on a $\mathcal{A}_{BDC} = \dfrac{r \times BC}{2}$.

De même $\mathcal{A}_{CDA} = \dfrac{r \times CA}{2}$ et $\mathcal{A}_{ADB} = \dfrac{r \times AB}{2}$.

On a donc :

$$S = \mathcal{A}_{BDC} + \mathcal{A}_{CDA} + \mathcal{A}_{ADB} = \frac{r \times (BC + CA + AB)}{2} = \frac{P \times r}{2}.$$

3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$. Dans le triangle CHB rectangle en H, on a :

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow CH = CB \times \sin\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$\Leftrightarrow CH = 8 \times \sin(60) \Leftrightarrow CH = 4\sqrt{3}.$$

Or, $S = \dfrac{CH \times AB}{2}$, donc $S = \dfrac{4\sqrt{3} \times 5}{2} = 10\sqrt{3}$.

4. $S = \dfrac{P \times r}{2} \Leftrightarrow r = \dfrac{2S}{P} \Leftrightarrow r = \dfrac{2 \times 10\sqrt{3}}{20} \Leftrightarrow r = 3$.

Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour rayon $\sqrt{3}$.

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 1

46 **1.** Soit I le milieu du segment $[AB]$.
D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 5 + \frac{5^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$ Réponse **a**.

Barbazo, exercice 46 p.229 Partie 2

2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, alors :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = DA \times AB = 5.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0\,.$$

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point D.

Plan

Barbazo, exercice 1 p. 258

1 **a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

d. $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Barbazo, exercice 2 p. 258

2 D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ sont $\vec{n_1}$, $\vec{n_3}$ et $\vec{n_6}$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n_1}\cdot\vec{u} = 2\times1 - 1\times2 = 0$. Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n_1}$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.

Le vecteur $\vec{n_3}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n_3}\cdot\vec{u} = 2\times2 - 1\times4 = 0$. Les vecteurs $\vec{n_3}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n_3}$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.

Le vecteur $\vec{n_6}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n_6}\cdot\vec{u} = 2\times(-1) - 1\times(-2) = 0$. Les vecteurs $\vec{n_6}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n_6}$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.

Barbazo, exercice 3 p. 258 Partie 1

3 $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$. Soit, $\vec{n_1}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n_1}\cdot\vec{u_1} = 1\times(-2)+2\times 1 = 0$. Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{u_1}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n_1}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_1$.

$\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$. Soit, $\vec{n_2}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On a, $\vec{n_2}\cdot\vec{u_2} = 1\times 0+0\times 1 = 0$. Les vecteurs $\vec{n_2}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n_2}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_2$.

$\vec{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_3$. Soit, $\vec{n_3}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 3 p. 258 Partie 2

On a, $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_2$.

$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_3$. Soit, $\overrightarrow{n_3}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a, $\overrightarrow{n_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_3}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\overrightarrow{n_3}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_3$.

$\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_4$. Soit, $\overrightarrow{n_4}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a, $\overrightarrow{n_4} \cdot \overrightarrow{u_4} = 1 \times 4 + 4 \times (-1) = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_4}$ et $\overrightarrow{u_4}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\overrightarrow{n_4}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_4$.

Barbazo, exercice 4 p. 258

4 **1.** L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax+by+c=0$, avec $a=4$ et $b=-1$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, soit ici $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 4 p. 258 Partie 2

2. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = -2$ et $b = 5$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = 1$ et $b = -1$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. $y = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow -x + 3y - 6 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -1$ et $b = 3$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. $y = -3 \Leftrightarrow y + 3 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Barbazo, exercice 5 p. 258

5 **1.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Soit $\vec{n}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3-0 \\ -12-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Soit $\vec{n}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$.

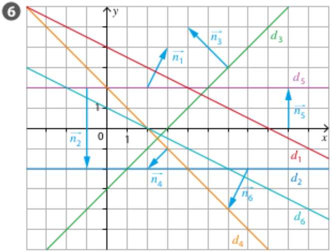
On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 11 \times (-3) - 3 \times (-11) = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3{,}23-1 \\ -4{,}5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}23 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Soit $\vec{n}$ un vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}23 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1{,}5 \times 2{,}23 + 2{,}23 \times (-1{,}5) = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

Barbazo, exercice 6 p. 258



Barbazo, exercice 8 p. 258

8 **1.** Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'.
$\vec{u}\cdot\vec{u'} = 1\times 3 + 3\times 1 = 6 \neq 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u'}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'.
$\vec{u}\cdot\vec{u'} = -1\times 8 + 2\times 4 = 8$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' sont perpendiculaires.

3. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'.
$\vec{u}\cdot\vec{u'} = 1\times 1 + 3\times(-3) = -8 \neq 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

4. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'.
$\vec{u}\cdot\vec{u'} = (1+\sqrt{3})\times(1-\sqrt{3}) + 2\times 1 = 1-3+2 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, on en déduit que les droites d et d' sont perpendiculaires.

Barbazo, exercice 10 p. 2598

10 **1.** $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$; $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1+8}{2} = 3{,}5$.

Le point I a pour coordonnées $(3\,;3{,}5)$.

2. Un vecteur normal à Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Par lecture des coefficients, $a = -3$ et $b = 2$.

$\vec{n}$, un vecteur normal à Δ, a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-4 \\ 8-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$-2 \times 2 - (-3) \times 9 = 23 \neq 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

4. La droite médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Le vecteur $\vec{n}$ normal à la droite Δ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$, vecteur directeur de la droite (BC). On en déduit que les droites Δ et (BC) ne sont pas perpendiculaires et par conséquent que la droite Δ ne peut pas être la médiatrice du segment $[BC]$.

Barbazo, exercice 11 p. 259

11 **1.** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3-8\\4-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\9\end{pmatrix}$

2. Les droites $\mathcal{D}$ et (BC) étant perpendiculaires, un vecteur directeur de la droite (BC) est un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}$.

Barbazo, exercice 11 p. 259 Partie 2

3. Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-11\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite D donc D admet une équation cartésienne de la forme $-11x+9y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

4. A appartient à $D \Leftrightarrow -11\times x_A+9\times y_A+c=0$

$\Leftrightarrow -11\times 8+9\times(-5)+c=0 \Leftrightarrow c=133$

$\Leftrightarrow c=133.$

La droite D a pour équation cartésienne $-11x+9y+133=0$.

Barbazo, exercice 12 p. 259

12 Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ de la droite $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point A.
La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point A admet une équation cartésienne de la forme $-x+3y+c=0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
A appartient à la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$

$$\Leftrightarrow -x_A+3\times y_A+c=0 \Leftrightarrow -1+3\times 3+c=0 \Leftrightarrow c=-8$$

La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point A a pour équation cartésienne $-x+3y-8=0$.

Barbazo, exercice 13 p. 259

13 **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et un vecteur normal pour la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par B.

La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point B admet une équation cartésienne de la forme $-2x-4y+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

B appartient à la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$

$\Leftrightarrow -2x_B - 4\times y_B + c = 0 \Leftrightarrow -2\times 0 - 4\times(-2)+c=0$

$\Leftrightarrow c = -8.$

La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point B a pour équation cartésienne $-2x-4y-8=0$.

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur pour la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par le point $C(3;3)$.

La droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par le point C admet une équation cartésienne de la forme $-4x+2y+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

C appartient à la droite parallèle à $\mathcal{D}$

$\Leftrightarrow -4x_C + 2\times y_C + c = 0$

$\Leftrightarrow -4\times 3 + 2\times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6.$

La droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par le point C a pour équation cartésienne $-4x+2y+6=0$.

Barbazo, exercice 15 p. 259

15 **1.** Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A. Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de A. La hauteur issue de A admet une équation cartésienne de la forme $-3x+3y+c=0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

A appartient à la hauteur $\Leftrightarrow -3\times x_A + 3\times y_A + c = 0$

$\Leftrightarrow -3\times 3 + 3\times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

La hauteur issue de A a pour équation cartésienne $-3x+3y+6=0$.

2. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par I milieu de $[AB]$.

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+2}{2} = 2{,}5$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$.

Le point I a pour coordonnées $(2{,}5\,;-1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ admet une équation cartésienne de la forme $-x-4y+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Barbazo, exercice 15 p. 259 Partie 2

I appartient à la médiatrice $\Leftrightarrow -x_I - 4 \times y_I + c = 0$

$\Leftrightarrow -2,5 - 4 \times (-1) + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -1,5.$

La médiatrice du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne $-x - 4y - 1,5 = 0$.

3. Une figure sur logiciel de géométrie dynamique permet de vérifier les résultats des questions précédentes.

Barbazo, exercice 16 p. 259

16 **1.** Soit I le milieu de $[DD']$.
$x_I = \dfrac{x_D + x_{D'}}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$ et $y_I = \dfrac{y_D + y_{D'}}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2$. Le point I a pour coordonnées $(4\,;2)$.

2. $y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$, l'équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Donc un vecteur normal à Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$2 \times 1 - (-1) \times 8 = 10 \neq 0$. Le vecteur normal à Δ et le vecteur $\overrightarrow{DD'}$ ne sont pas colinéaires.

4. On déduit de la question précédente que les droites Δ et (DD') ne sont pas perpendiculaires, or un point et son symétrique par rapport à une droite sont situés sur une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie. Le point D ne peut donc pas être le symétrique du point D par rapport à la droite d'équation $y = x - 2$.

Barbazo, exercice 17 p. 259

17 **1.** $\Delta : x - y - 2 = 0$ et $1 - (-1) - 2 = 0$, donc H appartient à la droite Δ.

2. Par lecture des coefficients a et b de l'équation cartésienne de Δ, on détermine les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal à la droite Δ.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$-3 \times 1 - (-1) \times (-3) = -6 \neq 0$. Le vecteur normal à Δ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ n'est pas un vecteur normal à Δ.

3. La droite (AH) n'est pas perpendiculaire à la droite Δ, le point H ne peut donc pas être le projeté orthogonal de A sur Δ.