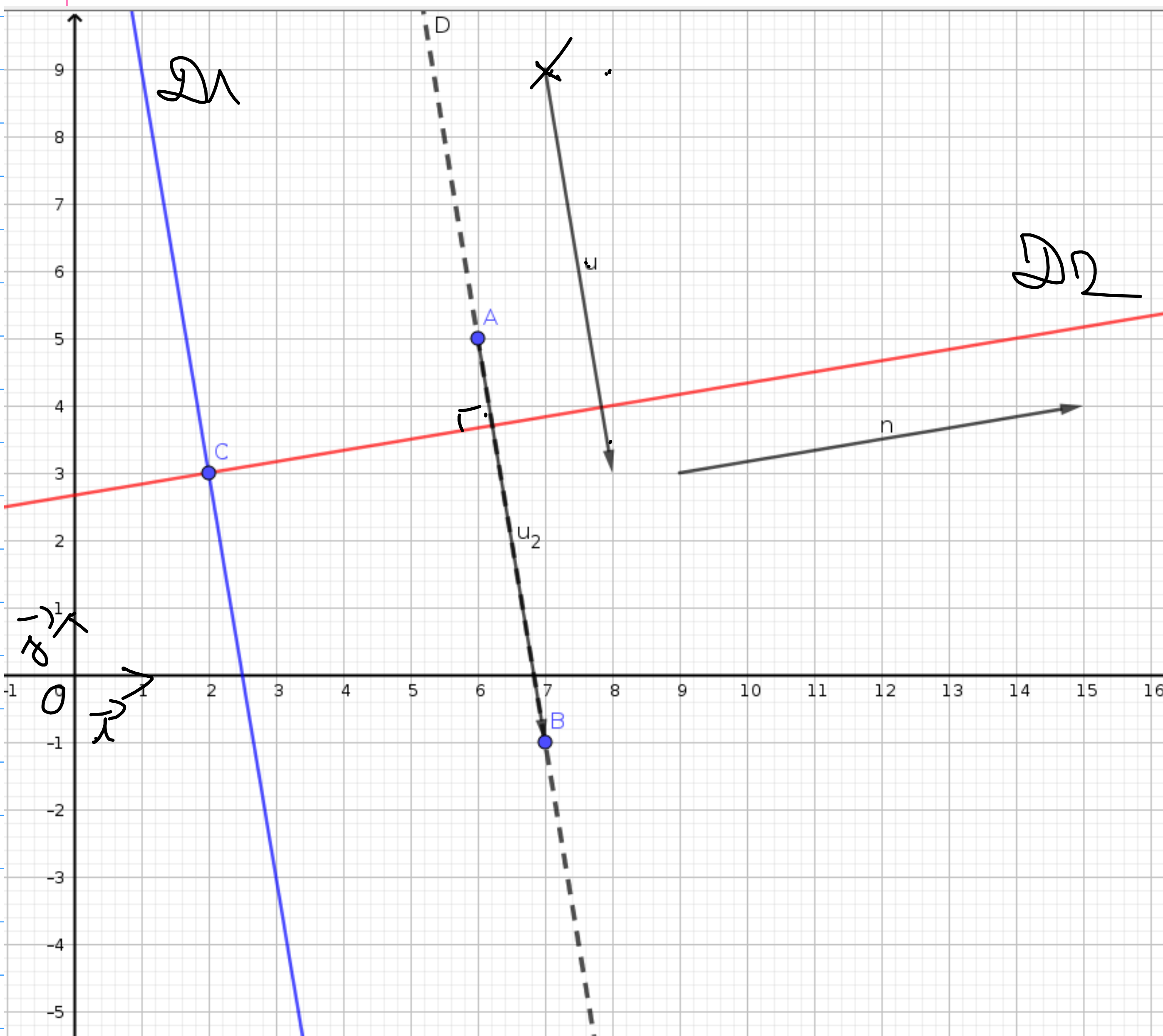
Applications du produit scalaire
Équations de droites

Activité d'introduction



Dans un repère orthonormal du plan, soit les points A(6;5) B(7;-1) et C(2;3)

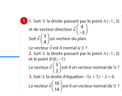
Q1 Déterminer une équation de la droite (AB)

Q2 Déterminer une équation de la droite D_1 parallèle à (AB) passant par C

Q3 Déterminer une équation de la droite D_2 perpendiculaire à (AB) passant par C.

Réponses :

Q1 (AB) est caractérisée par :



- le point $A(6;5)$
- un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

$A(6;5)$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$B(7;-1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$M(x;y)$ appartient à la droite (AB) ssi $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$M(x;y) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff -6(x-6) - (y-5) = 0$

$\iff -6x + 36 - y + 5 = 0$

$M(x;y) \in (AB) \iff -6x - y + 41 = 0$

$-6x - y + 41 = 0$ est une équation cartésienne de (AB) de la forme $ax + by + 41 = 0$ avec $a = -6$ et $b = -1$

On remarque que $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur directeur de (AB).

$(AB) : -6x - y + 41 = 0$

Par exemple $-6x_A - y_A + 41 = -6\times 6 - 5 - 41 = 0$

$M(x;y) \in (AB)$ ssi $-6x - y + 41 = 0$

Q2 $\overrightarrow{AB}$ vecteur directeur de (AB) dirige aussi la droite $\mathcal{D}_1$ passant par C et parallèle à (AB)

$\begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc on peut prendre comme coefficients

$\begin{cases} -b_1 = 1 \\ a_1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ a_1 = -6 \end{cases}$ pour une

équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ qui est de la forme :

$\mathcal{D}_1 : -6x - y + c_1 = 0$

Pour calculer le coefficient c_1 il suffit de prendre un point de $\mathcal{D}_1$.
On prend le point $C(2;3)$

$$-6\times 2-3+c_1=0 \iff c_1=15$$

Une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à $\mathcal{D}$ passant par C est donc :

$$-6x-y+15=0$$

Rque : $\mathcal{D} : -6x-y+41=0$

$\mathcal{D}$ a pour équation réduite :

$$y=\underbrace{-6}_{\text{coefficient directeur}}x+\underbrace{41}_{\text{ordonnée à l'origine}}$$

$\mathcal{D}_1$ a pour équation réduite $y=-6x+15$

Q3) Déterminons une équation de la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passe par C

$M(x;y) \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \underbrace{\overrightarrow{AB}} = 0$

vecteur directeur de (AB) et pour $\mathcal{D}_2$ c'est un vecteur normal

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$M(x;y) \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow (x-2)\times 1 + (y-3)\times(-6) = 0$

$\Leftrightarrow x-2 -6y+18=0$

$\Leftrightarrow \underset{a_2}{x} \underbrace{-6}_{b_2} y + 18 = 0$

Si on note $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ à la droite $\mathcal{D}_2$ ils apparaissent dans une équation de $\mathcal{D}_2$

Cours

Propriété 6 3

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\boxed{\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b)}$.

   Il existe un réel c tel que pour tout point $M\left(x\,;\,y\right)$ du plan :

   $$M \text{ appartient à } \mathscr{D} \text{ si et seulement si } \boxed{ax+by+c=0}$$

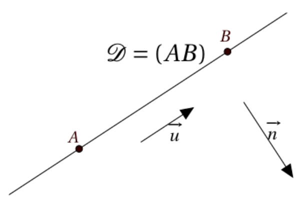
   $\boxed{ax+by+c=0}$ est une **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.

2. Réciproquement, si $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$, alors $ax+by+c=0$ est une **équation cartésienne** d'une droite de vecteur normal $\boxed{\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b)}$.

Propriété 5 2

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et A un point de $\mathscr{D}$.
Un point M du plan appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

Définition 1 1



1. Un **vecteur directeur** à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $\mathscr{D}$.

2. Un **vecteur normal** à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Applications exercices du manuel

Exercice 1 p.236

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(-1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Le vecteur $\vec{n}$ est-il normal à $\mathcal{D}$?

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(-1\,;2)$ et le point $B(0\,;-1)$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal de $\mathcal{D}$?

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-5x+7y-2=0$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal de $\mathcal{D}$?

1) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 12 + (-12) = 0$

donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

Or $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

donc $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$.

<u>Rque:</u> $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1 \times 5 + 2 \times (-3) = 5 - 6 = -1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux donc $\vec{n}$ n'est pas normal à $\mathcal{D}$.

3) $\mathcal{D} : -5x + 7y - 2 = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

$a = -5 \qquad b = 7$

donc $\vec{m}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Deux vecteurs sont normaux à une même droite ssi ils sont colinéaires.

$$\vec{n} = k\,\vec{m} \iff \begin{cases} 10 = -5k \\ 14 = 7k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont ~~pas~~ colinéaires et $\vec{n}$ n'est pas normal à $\mathcal{D}$.

Exercice 6 p.256

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

6 Soit d $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et passant par le point $A\,(4\,;3)$.

1. Déterminer une équation de d.

2. Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d passant par A.

3. Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à d et passant par l'origine du repère.

1) $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

donc une équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax+by+c=0$

avec $a=2$ et $b=-1$

De plus $A(4;3)$ appartient à $\mathcal{D}$

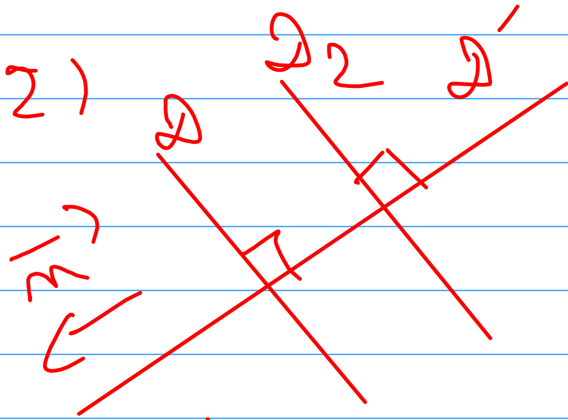
soit $2\times 4+(-1)\times 3+c=0$

$2\times 4-3+c=0 \iff c=3-8=-5$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc :

$2x-y-5=0$

2)



Si $\mathcal{D}'$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ alors $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$ est directeur pour $\mathcal{D}'$: $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathcal{D}'$ d'équation $a'x+b'y+c'=0$: $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ étant vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, on peut poser $-b'=2$ et $a'=-1$

Une équation de $\mathcal{D}'$ est alors de la forme : $-x-2y+c'=0$

$A(4;3)$ appartient à $\mathcal{D}'$ ssi

$-4-2\times3+c'=0$

$-11 + c' = 0 \iff c' = 11$

Une équation de $\mathcal{D}'$ est donc : $-x - 2y + 11 = 0$

3) $\mathcal{D}_2$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et passe par l'origine du repère.

Deux droites parallèles ont les mêmes vecteurs normaux, $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$ et donc à $\mathcal{D}_2$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc une équation de $\mathcal{D}_2$ est de la forme $2x - y + c_2 = 0$

$O(0;0)$ appartient à $\mathcal{D}_2$ ssi

$2 \times 0 - 0 + c_2 = 0$

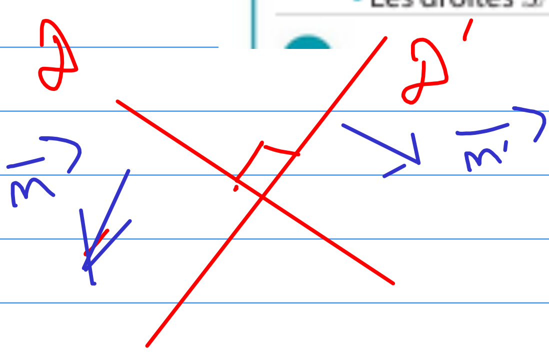
Or $2 \times 0 - 0 + c_2 = 0 \iff c_2 = 0$

$\mathcal{D}_2$ d'équation $2x - y = 0$

Rque : les droites passant par l'origine ont une équation de la forme
$ax + by = 0$

Exercice 7 p.256

7 Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne est $3x - 5y + 1 = 0$.
Soit $\mathcal{D}'$ la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ qui passe par l'origine du repère.
• Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles perpendiculaires ?



$\mathcal{D}$: $3x - 5y + 1 = 0$
$a = 3 \quad b = -5$
de vecteur normal
$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

D' de vecteur normal $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 3\times(-4) + (-5)\times(-2)$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = -2 \neq 0$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogo-

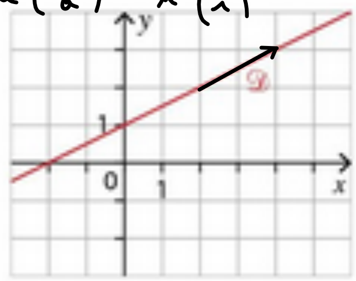
-naux donc les droites D et D'

ne sont pas perpendiculaires

Exercice 1 p.251

1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur



$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{D}$

2. $\mathscr{D}$ passe par le point $A(5;1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{D}$

3. Une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est :

$$5x - 4y + 6 = 0.$$

4. L'équation réduite de $\mathscr{D}$ est :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

3) $a = 5$ $b = -4$

donc $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal à (AB)

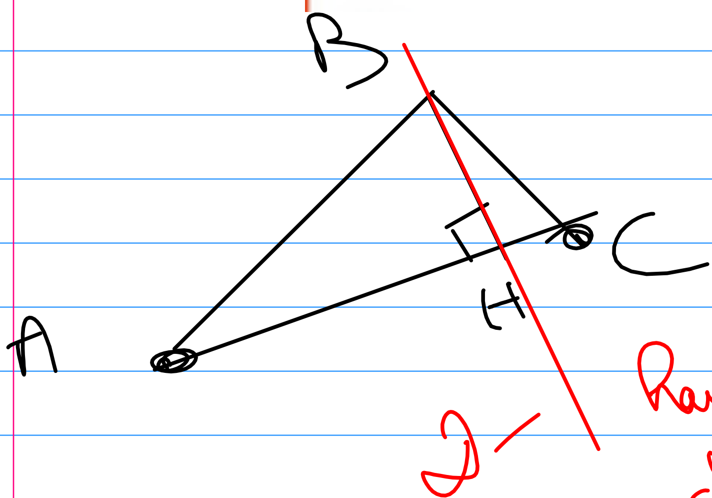
4) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \iff \frac{1}{2}x + y - \frac{7}{4} = 0$

$a = \frac{1}{2}$ $b = 1$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{D}$

Exercice 2 p. 251

2 Soient les points $A(0\,;-2)$, $B(3\,;-1)$ et $C(2\,;1)$.
• Déterminer une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.



Hauteur issue de de B

$\mathcal{D}$ passe par $B(3\,;-1)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{D}$

On peut poser $a=2$ et $b=3$

pour obtenir une équation $ax+by+c=0$ de la droite $\mathcal{D}$.

D a une équation de la forme
$2x+3y+c=0$

$B(3;-1)$ appartient à D
ssi $2\times3+3\times(-1)+c=0$

$2\times3+3\times(-1)+c=0 \iff c=-3$

Une équation de la hauteur issue de B est donc :

$2x+3y-3=0$.