Cours du 28/04/2021

Étude du sens de variation d'une suite

n° 39 p. 33

39 Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n(1 - v_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1) $u_0 = -5$

$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 0 + 3 = -5 + 3 = -2$

$n = 0$

$u_0 < u_1$ est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que (u_n) soit croissante

Quantificateur → Pour tout entier $n \geq 0$:

$\cancel{u_{n+1} - u_n = u_n + n + 3 - (u_{n-1} + (n-1) + 3)}$

$\cancel{u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1}$

$\underbrace{u_{n+1}} - u_n = \underbrace{u_n + n + 3} - u_n = \underbrace{n + 3}_{\text{on s'intéresse au signe}}$

Or n est un entier naturel donc $n \geq 0$

donc $n + 3 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

<u>Conclusion :</u> La suite (u_n) est croissante.

39 Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3\text{, pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n(1 - v_n)\text{, pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2) On étudie le signe de la différence

Pour tout entier $n \geq 0$:

$v_{n+1} = v_n(1 - v_n) = v_n - v_n^2$) utile transforma-tion

donc $v_{n+1} - v_n = -v_n^2$

Or $v_n^2 \geq 0$ donc $-v_n^2 \leq 0$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

donc $v_{n+1} \leq v_n$

La suite (v_n) est donc décroissante

1 Sens de variation d'une suite

1.1 Définition

Définition 1

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Si (u_n) croissante alors $u_n \leq u_{n+3}$
etc....

Corollaire *admis*

- Si une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

QCM Pronote

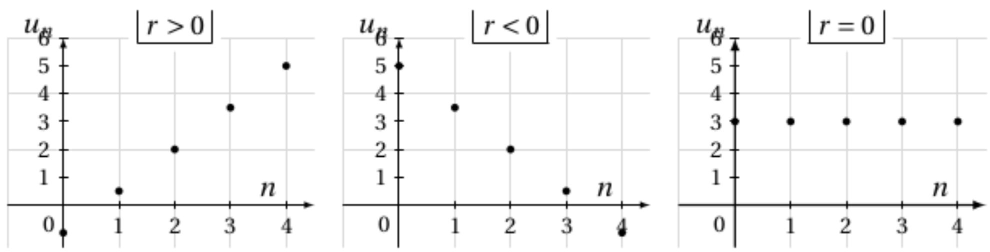
↳ Non

Cours : Sens de variation d'une suite arithmétique.

Propriété 1 ***Suites arithmétiques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r>0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r=0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r<0$.



Exemples : On considère des suites arithmétiques

u_0	raison r	Forme explicite u_n	Sens de variation
-3	2	$u_n=u_0+n\times r=-3+2n$	croissante
604	0	$u_n=604$	constante
12	-3	$u_n=12-3n$	décroissante

On peut toujours se ramener au cas où $u_0 > 0$ quitte à considérer la suite opposée

Propriété 2 ***Suites géométriques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Cas à retenir

- **Premier cas** $u_0 > 0$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  $u_n = u_0 \times q^n$

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $1 < q$
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $0 < q < 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $q < 0$

- **Deuxième cas** $u_0 < 0$ $u_0 < 0$

  $v_n = -u_n$

  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 > 0$

  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

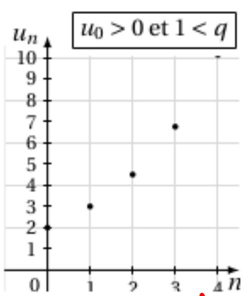
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $1 < q$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $0 < q < 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $q < 0$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

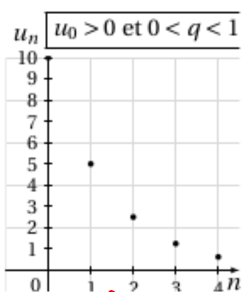
- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.

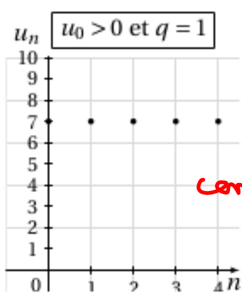
à retenir



croissante



décroissante



constante

n° 43 p.33

43 Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le 1[er] terme et la raison, déterminer le sens de variation.

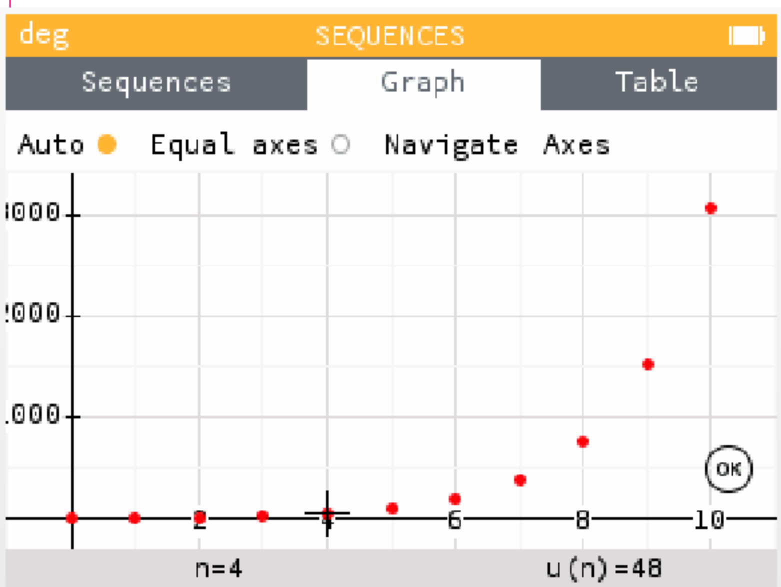
1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.

2. $v_0 = -1$ et $q = \frac{4}{5}$. croissante

3. $w_0 = \frac{-2}{3}$ et $q = \frac{8}{3}$.

4. $t_0 = 0{,}5$ et $q = 10^{-1}$.

1)

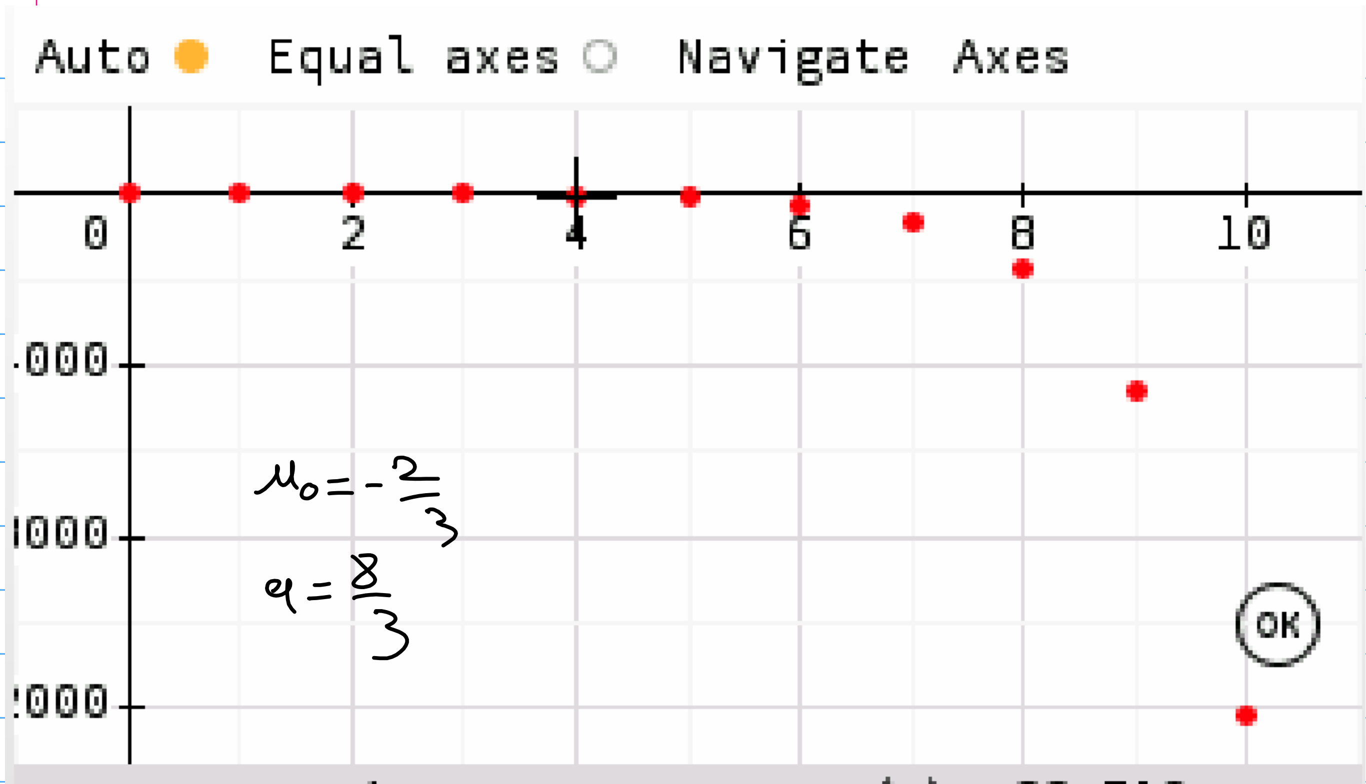


On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante

Preuve : (u_n) est géométrique de premier terme $u_0=3$ et de raison $q=2$
donc on a la formule explicite : $u_n = 3\times 2^n$

D'une part $u_0>0$, d'autre part la raison q vérifie $q>1$, donc d'après une propriété du cours (u_n) est croissante.

3)



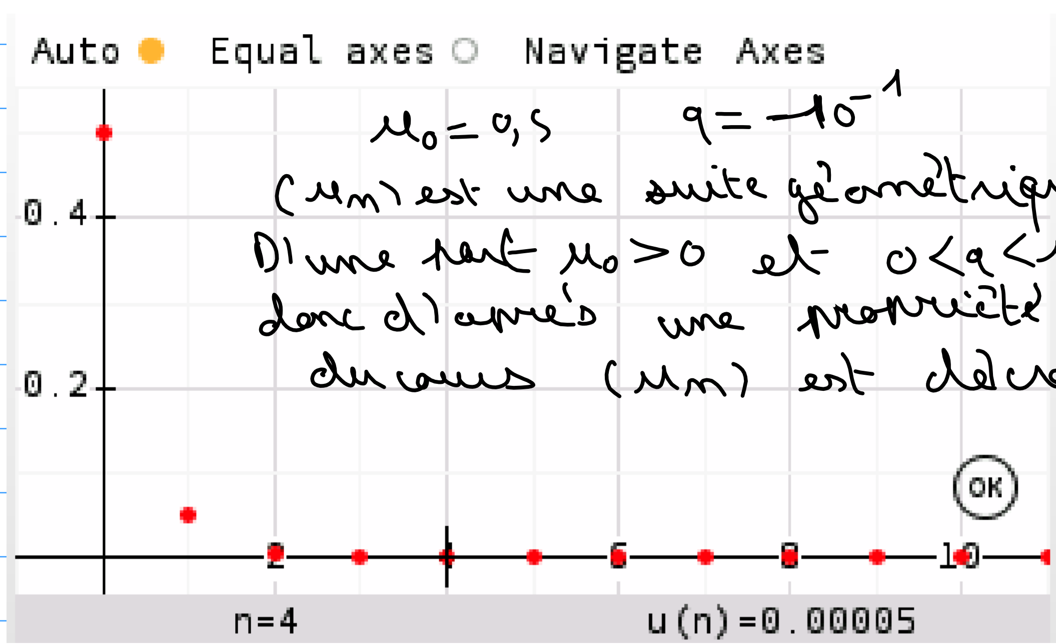
$u_0 = -\frac{2}{3}$

$q = \frac{8}{3}$

On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

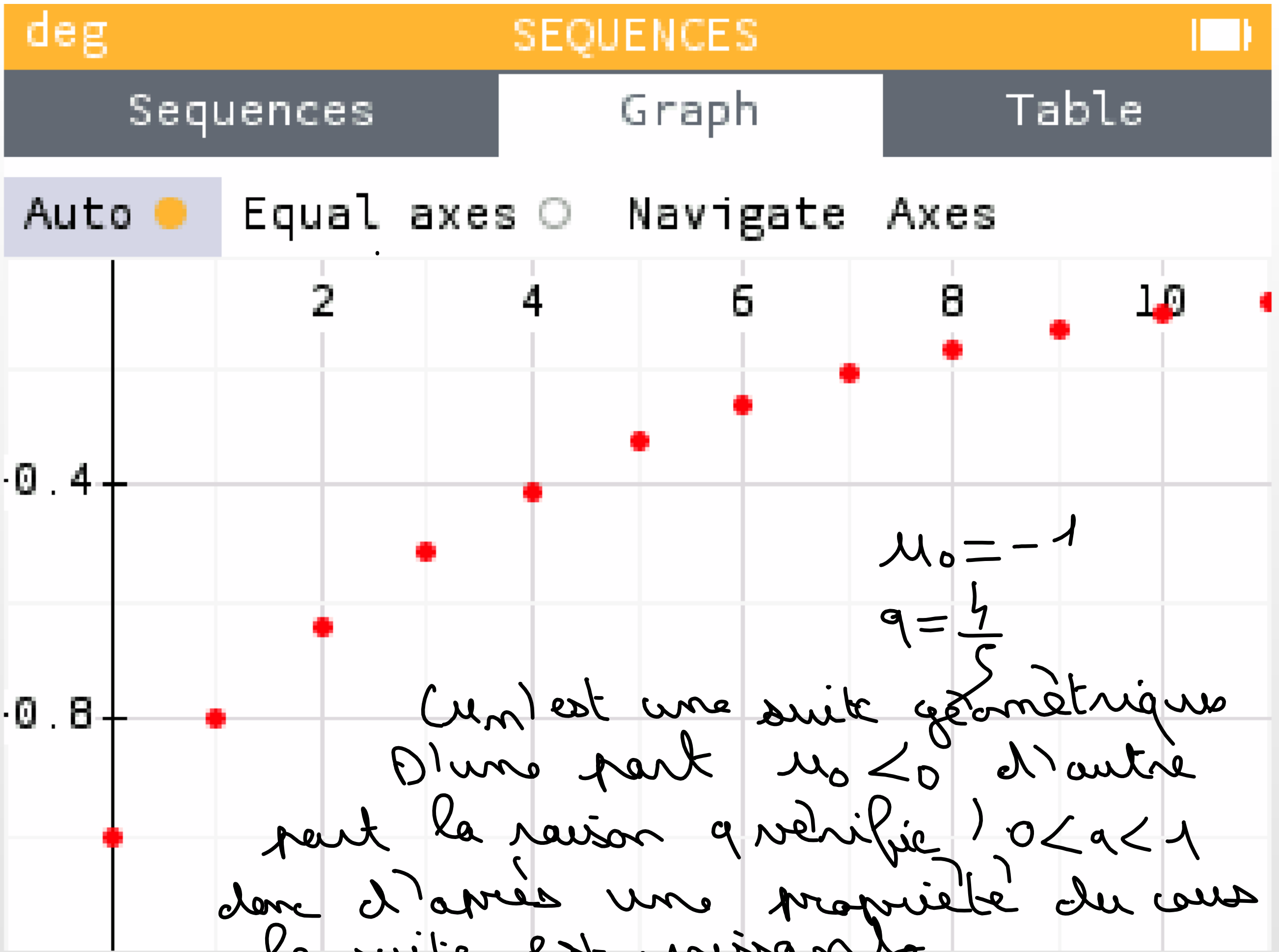
La suite (u_n) est géométrique. D'une part $u_0 < 0$ et d'autre part la raison q vérifie $q > 1$, donc d'après une propriété du cours la suite (u_n) est décroissante

3)



$u_0 = 0,5$ $q = 10^{-1}$

(u_n) est une suite géométrique. D'une part $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, donc d'après une propriété du cours (u_n) est décroissante



$u_0 = -1$

$q = \frac{4}{5}$

(u_n) est une suite géométrique
D'une part $u_0 < 0$ d'autre part la raison q vérifie : $0 < q < 1$
donc d'après une propriété du cours la suite est croissante

n°44 p.33

44 **Démonstration**
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.
1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de q.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de q.

1) On se donne un nombre $q > 0$
Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n$$

On veut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n \times q - q^n = \underbrace{q^n \times (q-1)}_{\text{produit}}$$

On peut appliquer la règle du signe d'un produit. Sachant que $q^n > 0$ on peut distinguer deux cas (le signe dépend de $q-1$) :

q	0		1		$+\infty$
signe de $q-1$	||	$-$	0	$+$	

1er cas : $0 < q < 1$: $u_{n+1} - u_n < 0$
donc $u_{n+1} < u_n$
donc (u_n) décroissante

2ème cas : $1 < q$: $u_{n+1} - u_n > 0$
donc $u_{n+1} > u_n$
donc (u_n) croissante.

Capacité 4 ***Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17***

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière);
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi. → $u_1 = 1{,}06 \times u_0 - 15$

$u_1 = 626{,}3$

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$. → $u_n \xrightarrow{+6\%} 1{,}06\,u_n \xrightarrow{-15} \underbrace{1{,}06u_n - 15}_{u_{n+1}}$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

point délicat

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand? Le modèle est-il réaliste?

e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ......
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

2) a) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15$$

On considère la suite $v_n = u_n - 250$

Démontrons que (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$$

formule de récurrence de (u_n)

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 15 - 250$$

$$v_{n+1} = 1{,}06\, u_n - 265$$

on factorise par 1,06

$$v_{n+1} = 1{,}06\left(u_n - \frac{265}{1{,}06}\right)$$

$$\boxed{v_{n+1} = 1{,}06\,(u_n - 250) = 1{,}06\, v_n}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de 1,06

Pour demain finir cette capacité

+ Activité 1 du cours.

84 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel :

$$n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Recopier puis compléter la fonction informatique suivante programmée en langage Python afin qu'elle renvoie le terme u_n pour $n \geqslant 1$.

```python
def terme_u(n):
    u=...
    for i in range(...):
        u=...
    return u
```

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$v_n = u_n + 1.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

b. Donner une expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = 2^n - 1.$$

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. Conjecturer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} u_n$.