Mathe 1 Cheatsheet

Für Probeklausur (Ganter, Noack)

LAG

Vollständige Induktion

Beweis erfolgt für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.
IV für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{N}(4k-3) = n(2n-1) \iff (4*1-3) = 1*(2-1) \iff 1 = 1\checkmark$
IA für $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{N}(4k-3) = n(2n-1)$
IS für $n = n+1$:
$\sum_{k=1}^{N+1}(4k-3) = (n+1)(2(n+1)-1) \iff \sum_{k=1}^{N}(4k-3) + (4*(n+1)-3) = (n+1)(2n+1)$
nach IA gilt:
$n(2n-1) + (4*(n+1)-3) = (n+1)(2n+1) \iff 2n^2-n+4n+4-3 = (n+1)(2n+1) \iff (2n^2+3n+1 = 2n^2+n+2n+1 \iff 2n^2+3n+1 = 2n^2+3n+1\checkmark$

Ebenengleichungen

In $\mathbb{R}_3$ kann es Ebenen der folgenden Formen geben:

1. Parameterform: $E : \vec{x} = \vec{p} + \vec{s} * n + \vec{t} * m$ mit $\vec{p}$ als Stützvektor und $\vec{s}, \vec{t}$ als Richtungsvektoren, $n, m \in \mathbb{R}$
2. Koordinatenform: $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $(x_1, x_2, x_3)^T = \vec{x}$ ist dann ein Normalenvektor der Ebene
3. Normalform: $E : (\vec{x}-\vec{p})*\vec{n} = 0$ mit $\vec{p}$ als Ortsvektor, der in E liegt und $\vec{N}$ als Normalenvektor von E.

Lineare Gleichungssysteme

Lösen von linearem Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Gauss durch elementare Zeilenumformungen (Addieren eines Vielfachen von anderen Gleichungen, Umtauschen von Gleichungen und Skalierung). Erw. Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \vec{b}_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \vec{b}_2 \end{array}\right)$$

Inverse zu Matrizen

Es existiert ein A^{-1} zu einer Matrix A, wenn A quadratisch ist und das homogene LGS $A * \vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt $A^{-1} \times A = E$. *Pivotspalten* sind Spalten, in denen nur in einer Zeile eine 1 steht. Gibt es nach Vor- und Rückwärtsphase noch Nicht-Pivotspalten, hat das LGS unendlich viele Lösungen. Gibt es eine Zeile $(0, 0, 0, c)$ mit $c \neq 0$, gibt es keine Lösung.

Körper

Ein Körper enthält eine Menge K an Elementen, für die Addition und Multiplikation definiert und kommutativ ist. Es gelten die Distributivgesetze.

Vektorräume

Ein Vektorraum über einem Körper K (z. B. $\mathbb{R}$) enthält Elemente aus K. Addition und Multiplikation mit einem Skalar sind kommutativ, assoziativ und im Vektorraum abgeschlossen. Es gibt zu jedem Element ein Inverses und jeder Vektorraum muss ein neutrales Element enthalten. Für einen Untervektorraum U gilt:

1. $\vec{0} \in U$
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U : \vec{u} + \vec{v} \in U$
3. $\forall \vec{u} \in U, \forall c \in K : c\vec{u} \in U$

Lineare Unabhängigkeit

Zeigen von linearer (Un-)Abhängigkeit durch Gauss-Verfahren: Alle Vektoren als Spalten in eine Matrix packen. Wenn nur die triviale Lösung herauskommt, sind die Vektoren linear unabhängig. Ansonsten sind sie linear abhängig (Die triviale Lösung kommt dann heraus, wenn die Matrix nur Pivotspalten enthält).

LU-Faktorisierung

- Soll A als untere Dreickecksmatrix L und obere Dreieckmatrix U faktorisiert werden, gilt $A = L \times U$
- U ist die erste durch elementare Zeilenumformungen erreichte Matrix in Zeilenstufenform (ZSF) (**nicht** reduziert). Vertauschungen und Skalierungen sind zwecks Eindeutigkeit **nicht** erlaubt!
- L ist das Produkt der invertierten Elementarmatrizen $L = E_1^{-1} \times E_2^{-1} \times E_n^{-1}$ bis zum Erreichen von U. Beim Invertieren der Elementarmatrizen wird das Vorzeichen aller Spalten darin außer auf der Diagonalen vertauscht.
- Lösung von $L \times U = \vec{b}$, wenn L und U bekannt sind durch $L \times \vec{y} = \vec{b}$. Dann $U \times \vec{x} = \vec{y}$ lösen.

Diskrete Strukturen

Mengenoperationen

1. Durchschnitt von A und B: $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
2. Vereinigung von A und B: $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
3. Komplement $\overline{A}$ einer Menge in E: $\overline{A} := \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$
4. Differenz von A und B: $A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge E:

- Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Absorptionsgesetze: $A \cap (A \cup B) = A$ und $A \cup (A \cap B) = A$
- Idempotenzgesetze: $A \cap A = A$ und $A \cup A = A$
- Gesetze für das Komplement: $A \cap \overline{A} = \emptyset$ und $A \cup \overline{A} = E$
- De Morgan-Gesetze: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- Neutrale Elemente: $A \cap E = A$ und $A \cup \emptyset = A$
- Dominanzgesetze: $A \cap \emptyset = \emptyset$ und $A \cup E = E$
- $\emptyset$ und E-Komplemente : $\overline{\emptyset} = E$ und $\overline{E} = \emptyset$
- Doppeltes Komplement: $\overline{\overline{A}} = A$
- Potenzmenge $P(A)$ einer Menge A enthält alle Teilmengen von A und $\emptyset$. Es gilt: $|P(A)| = 2^{|A|}$
- Kartesisches Produkt zweier Mengen $A \times B$ enthält alle geordneten Paare. Es gilt $|A \times B| = |A| * |B|$. Beispiel:

Begriffsverbände

- Formaler Kontext G, M, I in Tabelle: Merkmale oben, Gegenstände links.
- Lesen von Begriffsverband: Von oben nach unten

Kanonische Darstellung und Teiler

- Primfaktorzerlegung ist kanonische Darstellung, bswp. 22: $22 = 2^1 * 11^1$. 3 teilt $n \in \mathbb{N}$, wenn Quersumme durch 3 teilbar ist. 7 teilt $n \in \mathbb{N}$ dann, alternierende 3er-Quersumme durch 7 teilbar ist. 11 teilt $n \in \mathbb{N}$, wenn alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Bspw. 61259: $6 - 1 + 2 - 5 + 9 = 11\surd$
- Anzahl Teiler von n: Summe der Exponenten der Primfaktoren, jeweils + 1, bspw. 22: $teilerzahl(22) = (1+1)*(1+1) = 4$ (nämlich 2, 11, 1, 22)
- Anzahl teilerfremder Zahlen zu n: Eulersche φ-Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ mit den Primfaktoren $p_1^a ... p_k^l$: $\varphi(n) = n*(1-\frac{1}{p_1})*(1-\frac{1}{p_2})*...*(1-\frac{1}{p_k})$ (p sind also immer die Basen)
- Paar Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999

ggT und euklidischer Algorithmus

ggT wird mit euklidischem Algorithmus bestimmt. In erweiterter Form:

i	n_i	n_{i+1}	r	q_i	a_{i+1}	a_i
1.	238	154	84	1	2	-3
2.	154	84	70	1	-1	2
3.	84	70	14	1	1	-1
4.	70	14	0	5	0	1
5.	14	0			1	0

Hier ist $ggT(238, 154) = 14$
$a_i = a_{i+2} - q_i * a_{i+1}$
$q_i = n_i div n_{i+1}$

Restklassenringe

- In $\mathbb{Z}_{22}$ sind 0-21 drin, negative Zahlen: Solange $22 \equiv 0 \pmod{n}$ addieren, bis Ergebnis in $\mathbb{Z}_n$ liegt
- Einheit: Zahl $a \in \mathbb{Z}_n$ ist Einheit, wenn $a * b \equiv 1 \pmod{n}$. Das gilt dann, wenn $ggT(a, n) = 1$.
- Nullteiler: Zahl $a \in \mathbb{Z}_n$ ist Nullteiler, wenn $a * b \equiv 0 \pmod{n}$
- Division nur für Einheiten. Ist a Einheit in $\mathbb{Z}_n$, dann wird inverses Element n^{-1} durch erw. euklidischen Algorithmus bestimmt (mit n als erstem Wert und a als zweitem). Inverses zu n ist dann der Wert, der als a_1 oben rechts rauskommt.
- Rechnen mit Potenzen: $a^m * a^n = a^{m+n}$, $a^n = a^{n \bmod (p-1)}$
- Lemma von Euler-Fermat: $a^{\varphi(n)} \bmod n = 1$, falls a zu n teilerfremd ist ($ggT(a, n) = 1$)

Gruppen

Eine Gruppe G enthält Elemente, für die eine Operation $\circ$ definiert ist ($\circ$ muss in G abgeschlossen sein). Es existiert für jedes $a \in G$ ein inverses Element a^{-1} und es gibt ein neutrales Element $e \in G$. Außerdem ist $\circ$ assoziativ:

1. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$
2. $g \circ e = g = e \circ g$ für alle $g \in G$
3. $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ für alle $g \in G$

Die Anzahl $|G|$ der Elemente einer Gruppe ist die Ordnung der Gruppe G.

Untergruppen

1. Untergruppen von G müssen dann alle diese Kriterien erfüllen. Zu jeder Teilmenge T aus G gibt es eine kleinste erzeugte Untergruppe, die $< T >$ geschrieben wird. Sie enthält das neutrale Element, alle Elemente von T und alle Elemente aus G, die man durch das wiederholte Anwenden der Gruppenoperation und Invertieren rauskriegt.
2. Die Ordnung eines Elements ist die Ordnung der davon erzeugten Untergruppe.

3. Ist U eine Untergruppe der Gruppe G und g ein Element von G, dann nennt man $g \circ U := \{g \circ u | u \in U\}$ Linksnebenklasse von U. Die Linksnebenklasse über g enthält also alle Elemente, die rauskommen, wenn man g an ein Element aus U von links ranrechnet (rechts rum: Rechtsnebenklassen...)
4. Satz von Lagrange: Die Ordnung einer Untergruppe teilt stets die Ordnung der Gruppe: $[G : U] = \frac{|G|}{|U|}$
5. Anzahl der Nebenklassen einer Untergruppe: $G : U$

Gebaut mit LaTeX