

678. Fermat-like Equations

If a triple of positive integers (a, b, c) satisfies $a^2 + b^2 = c^2$, it is called a Pythagorean triple. No triple (a, b, c) satisfies $a^e + b^e = c^e$ when $e \geq 3$ (Fermat's Last Theorem). However, if the exponents of the left-hand side and right-hand side differ, this is not true. For example, $3^3 + 6^3 = 3^5$.

Let a, b, c, e, f be all positive integers, $0 < a < b$, $e \geq 2$, $f \geq 3$ and $c^f \leq N$. Let $F(N)$ be the number of (a, b, c, e, f) such that $a^e + b^e = c^f$. You are given $F(10^3) = 7$, $F(10^5) = 53$, and $F(10^7) = 287$.

Find $F(10^{18})$.

678. 费马式方程

如果一个正整数三元组 (a, b, c) 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那它就是一个毕达哥拉斯三元组。

对于 $e \geq 3$, 费马大定理指出, 没有任何正整数三元组 (a, b, c) 满足 $a^e + b^e = c^e$ 。但是, 如果方程左边的指数与右边不一样, 费马大定理就不一定成立了。比如说, $3^3 + 6^3 = 3^5$ 。

令 a, b, c, e, f 全部为正整数, 且满足 $0 < a < b$, $e \geq 2$, $f \geq 3$ 和 $c^f \leq N$ 。令 $F(N)$ 为满足方程 $a^e + b^e = c^f$ 的正整数五元组个数 (a, b, c, e, f) 。你已经知道 $F(10^3) = 7$, $F(10^5) = 53$, and $F(10^7) = 287$ 。

求 $F(10^{18})$ 。