第6章 容斥原理及应用

错位排序的一些结论

递推公式

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

常数

可以使用上面的递推公式求出来错位排序常用的一些数值，$D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44, D_6 = 265, D_7 = 1854$。

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int p = 0, q = 1;
    int n;
    scanf("%d", &n);

    for(int i = 3; i <= n; ++ i) {
        int tmp = (i-1)*(p+q);
        printf("D%d = %d\n", i, tmp);
        p = q;
        q = tmp;
    }
    return 0;
}
```

EX1

> Find the number of integers between 1 and 10,000 inclusive that are not divisible by 4,5, or 6.

本题写的详细些，后面类似的题目就不再解释太多细节。

设$A_i, i = 1, 2, 3$分别为1到10，000之间能被4、5和6整除的个数。

计算集合大小时采用**向下取整**，例如$\lfloor \dfrac{10000}{6} \rfloor = 1666$，表明还取不到下一个6的倍数。

$A_1 \cap A_3$表示既是4的倍数，也是6的倍数，4和6的最小公倍数是12，即能被12整除的数。

set	size
A_1	2500
A_2	2000
A_3	1666
$A_1 \cap A_2$	500
$A_1 \cap A_3$	833
$A_2 \cap A_3$	333
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	166

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| - \sum |A_i A_j A_k| \\ =& 10000 - (2500 + 2000 + 1666) + (500 + 833 + 333) - 166 \\ =& 5334 \end{aligned}$$

EX2

> Find the number of integers between 1 and 10,000 inclusive that are not divisible by 4, 6, 7, or 10.

验证代码

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main()
{
    int cnt = 0;
    vector<int> arr{4, 6, 7, 10};
    for(int i = 1; i <= 10000; ++ i) {
        bool flag = true;
        for(auto item: arr) {
            if(i%item == 0) {
                flag = false;
                break;
            }
        }
        if(flag) {
            printf("%d ", i);
            cnt ++;
            if(cnt % 20 == 0) printf("\n");
        }
    }
    printf("\nTotal number = %d\n", cnt);
    return 0;
}
```

EX3

> Find the number of integers between 1 and 10,000 that are neither perfect squares nor perfect cubes.

既是完全平方数也是完全立方数的数一定能拆分成6个相同数的乘积。

计算满足$x^2 \leq 10000, \quad y^3 \leq 10000, \quad z^6 \leq 10000$的最大整数解，得$x=100, y=21, z=4$。

set	size
A_1	100
A_2	21
$A_1 \cap A_2$	4

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = & |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| \\ = & 10000 - (100+21) + 4 \\ = & 9883\end{aligned}$$

EX4

> Determine the number of 12-combinations of the multiset
> $$S = \{4 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot c, 5 \cdot d\}$$

多重集合的组合与方程的非负整数解个数等价，因此满足

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 5$$

的方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

设$A_i, i=1,2,3,4$分别是满足$x_1 \ge 5, x_2 \ge 4, x_3 \ge 5, x_4 \ge 6$的解组成的集合。

求满足$x_1 \ge 5$的解，进行变量代换$y_1 = x_1 - 5, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4$，方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

此时方程的解个数为$\binom{7+4-1}{7} = 120$，即$|A_1| = 120$。
同理可以计算$|A_2| = 165, |A_3| = 120, |A_4| = 84$。

求满足$x_1 \ge 5, x_2 \ge 4$的解，进行变量代换$y_1 = x_1 - 5, y_2 = x_2 - 4, y_3 = x_3, y_4 = x_4$，方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$

此时方程的解个数为$\binom{3+4-1}{3} = 20$，即$|A_1 \cap A_2| = 20$。

因此可以求出

set	size
A_1	120
A_2	165
A_3	120
A_4	84
$A_1 \cap A_2$	20
$A_1 \cap A_3$	10
$A_1 \cap A_4$	4
$A_2 \cap A_3$	20
$A_2 \cap A_4$	10
$A_3 \cap A_4$	4
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	0
$A_1 \cap A_2 \cap A_4$	0
$A_1 \cap A_3 \cap A_4$	0
$A_2 \cap A_3 \cap A_4$	0
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$	0

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_iA_j| - \sum |A_iA_jA_k| + \sum |A_iA_jA_kA_u| \\ =& 455 - (120+165+120+84) + (20+10+4+20+10+4) \\ =& 34\end{aligned}$$

EX5

> Determine the number of 10-conbiations of the multiset
>
> $$S = \{\infty \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$$

本题和上一题的区别就在于x_1没有上界，不需要考虑x_1上界的补集。
定义A_1, A_2, A_3分别表示$x_2 \ge 5, x_3 \ge 6, x_4 \ge 8$。

set	size
A_1	$\binom{8}{3} = 56$

set	size
A_2	$\binom{7}{3} = 35$
A_3	$\binom{5}{3} = 10$
$A_1 \cap A_2$	0
$A_1 \cap A_3$	0
$A_2 \cap A_3$	0
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	0

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| - \sum |A_i A_j A_k| \\ =& 286 - (56 + 35 + 10) \\ =& 185\end{aligned}$$

EX6

> A bakery sells chocolate, cinnamon, and plain doughnuts and at a particular time has 6 chocolate, 6 cinnamon, and 3 plain. If a box contains 12 doughnuts, how many different options are there for a box of oughnuts?

该问题可以转化为方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

在$0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 3$的条件下整数解的个数。

定义A_1, A_2, A_3分别表示$x_1 \geq 7, x_2 \geq 7, x_3 \geq 4$。

set	size
A_1	$\binom{7}{2} = 21$
A_2	$\binom{7}{2} = 21$
A_3	$\binom{10}{2} = 45$
$A_1 \cap A_2$	0
$A_1 \cap A_3$	$\binom{3}{2}$ = 3
$A_2 \cap A_3$	$\binom{3}{2} = 3$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	0

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| - \sum |A_i A_j A_k| \\ =& \binom{12+2}{2} - (21 + 21 + 45) + (3 + 3) \\ =& 91 - (21 + 21 + 45) + (3 + 3) \\ =& 10\end{aligned}$$

EX7

> Determine the number of solutions of the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ in nonnegative integers x_1, x_2, x_3, and x_4 not exceeding 8.

本题可以利用对称性减少计算，

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| =& \binom{17}{3} - 4\binom{8}{3} \\
=& 680 - 4\times 56 \\
=& 456
\end{aligned}
$$

EX8

> Determine the number of solutions of the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ in positive integers x_1, x_2, x_3, x_4, and x_5 not exceeding 5.

类似上一题，不过本题强调**正**（**positive**）整数，取值范围因此是$1 \le x_i \le 5$，先平移变成$0 \le y_i \le 4$，求解方程$\sum y_i = 9$。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}| =& \binom{13}{4} - 5\binom{8}{4} + \binom{5}{2}\binom{3}{4} \\
=& 715 - 5\times 70 + 10\times 0 \\
=& 365
\end{aligned}
$$

EX9

> Determine the number of integral solutions of the equation
>
> $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$
>
> that satisfy
>
> $$1 \le x_1 \le 6, 0 \le x_2 \le 7, 4 \le x_3 \le 8, 2 \le x_4 \le 6$$

过程略，答案96。

EX10

> Let S be a multiset with k distinct objects with given repetition numbers $n_l, n_2, ..., n_k$, respectively. Let r be a positive integer such that there is at least one r-combination of S. Show that, in applying the inclusion-exclusion principle to determine the number of r-combinations of S, one has $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k = \emptyset$.

多重集合r组合问题转化为方程$\sum\limits_{i=0}^{k} x_i = r, 0 \le x_i \le n_i$的整数解问题。

假设存在一组解，因此有$r \le \sum\limits_{i=0}^{k} n_i$，记$A_i$为满足$x_i > n_i$的集合。

当$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \ne \emptyset$，即存在$r = \sum\limits_{i=0}^{k} x_i > \sum\limits_{i=0}^{k} n_i \ge r$，产生矛盾，所以$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k = \emptyset$。

EX10吐槽

本题的奇怪之处就在于题目没告诉这些A_1、A_2等究竟是什么。

EX11

> Determine the number of permutations of {1, 2, ... ,8} in which no even integer is in its natural position.

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| =& 8! - 4\times 7! + \binom{4}{2}\times 6! + \binom{4}{3}\times 5! + 4! \\
=& 715 - 5\times 70 + 10\times 0 \\
=& 24024
\end{aligned}
$$

EX12

> Determine the number of permutations of {1, 2, ... ,8} in which exactly four integers are in their natural positions.

选出4个数放入自然位置，剩余4个数进行错位排序。

$$D_4 = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 9$$

因此总排列数为，

$$\binom{8}{4} \times D_4 = 70 \times 9 = 630$$

EX12注

n元素错位排序可以直接使用公式，

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

EX13

> Determine the number of permutations of {1, 2, ... ,9} in which at least one odd integer is in its natural position.

设A_i表示i在自然位置上，

set	size
A_i	$8!$
$A_i \cap A_j$	$7!$
$A_i \cap A_j \cap A_k$	$6!$
$A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_u$	$5!$
$A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_u \cap A_v$	$4!$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_9| =& S - |\overline{A_1} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_9}| \\ =& 5 \times 8! - \binom{5}{2} \times 7! + \binom{5}{3} \times 6! - 5 \times 5! + 4! \\ =& 157824\end{aligned}$$

EX13注

本题考查定理6.1.2（正文p102）「至少具有性质」的计数。大多数题目还是考察定理6.1.1「不具有性质」的容斥原理。

EX14

> Determine a general formula for the number of permutations of the set {1, 2, ... , n} in which exactly k integers are in their natural positions.

选k个放到自然位置，其余n-k个进行错位排序。

$$\binom{n}{k} D_{n-k}$$

EX15

> At a party, seven gentlemen check their hats. In how many ways can their hats be returned so that
> (a) no gentleman receives his own hat?
> (b) at least one of the gentlemen receives his own hat?
> (c) at least two of the gentlemen receive their own hats?

EX15Q(a)

进行错位排序，$D_7=1854$。

EX15Q(b)

全排序减去错位排序（没有人在自然位置），即至少有一个在自然位置。$7!-D_7=3186$。

EX15Q(c)

从上一问的结果（至少有一人在自然位置）中减去恰有一人在自然位置的情况，即至少有两人在自然位置，$3186-7D_6=3186-7\times 265=1331$。

EX16

> Use combinatorial reasoning to derive the identity
>
> $$n!=\binom{n}{0}D_0+\binom{n}{1}D_{n-1}+\binom{n}{2}D_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}D_1+\binom{n}{n}D_0$$
>
> (Here,D_0 is defined to be 1.)

记S为$\{1,2,\cdots,n\}$的全排列集合，S_i表示恰有i个元素在自然位置的排序，显然$\{S_i\}$划分了S，因此$|S|=\sum_{i=0}^{n}|S_i|$。

全排列$|S|=n!$，恰有i个自然位置的错位排序（参考EX14），有$\binom{n}{i}D_{n-i}$个，因此等式成立。

EX16评注

本题定义了$D_0=1$，而本身的错位排序$D_1=0$。

EX17

> Determine the number of permutations of the multiset
>
> $$S=\{3\cdot a,4\cdot b,2\cdot c\}$$
>
> where, for each type of letter, the letters of the same type do not appear consecutively. (Thus *abbbbcaca* is not allowed, but *abbbacacb* is.)

设$A_i,i=1,2,3$分别表示出现了*aaa*、*bbbb*和*cc*，A_1可以当作aaa,b,b,b,b,c,c的排列，即$\binom{7}{1\ 4\ 2}=105$。

set	size
A_1	105
A_2	$\binom{6}{3\ 1\ 2}=60$
A_3	$\binom{8}{3\ 4\ 1}=280$
$A_1\cap A_2$	$\binom{4}{1\ 1\ 2}=12$
$A_1\cap A_3$	$\binom{6}{1\ 4\ 1}=30$
$A_2\cap A_3$	$\binom{5}{3\ 1\ 1}=20$
$A_1\cap A_2\cap A_3$	$\binom{3}{1\ 1\ 1}=3$

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=&|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\sum|A_iA_jA_k|\\=&1260-(105+60+280)+(12+30+20)-3\\=&874\end{aligned}$$

EX17注

本题是求的**多重集合排序**问题和上面的多重集合组合问题进行区分。

EX18

> Verify the factorial formula
>
> $$n! = (n-1)((n-2)! + (n-1)!), \qquad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

没太看懂这题想干什么。

EX19

> Using the evaluation of the derangement numbers as given in Theorem 6.3.1, provide a proof of the relation
>
> $$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \quad (n = 3, 4, 5, \dots).$$

展开合并同类项即可，

$$D_{n-2} = (n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!}$$

将D_{n-1}拆分为能与D_{n-2}同类相加的两项，

$$\begin{aligned} D_{n-1} =& (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} \\ =& (n-1) \cdot (n-2)! (\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}) \\ =& (n-1) \cdot (n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

将D_{n-1}与D_{n-2}求和，

$$D_{n-1} + D_{n-2} = n \cdot (n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1}$$

$$(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = n! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1}(n-1)$$

将D_n拆分为上述形式，

$$\begin{aligned} D_n =& n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \\ =& n! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + n! (\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}) \\ =& n! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1} n + (-1)^n \\ =& (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \end{aligned}$$

综上，等式成立。

EX20

> Starting from the formula Dn = nDn- 1 + (_l)n, (n = 2,3,4, ...), give a proof of Theorem 6.3.1.

使用数学归纳法证明，当$n \geq 1$时，总有

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

当n=1时，1只能放在自然位置，没有错位排序，所以错位排序数为0，且$D_1 = 1! \times (1-1) = 0$成立。

当$n \geq 2$时，假设等式成立，对于n+1有

$$\begin{aligned}
D_{n+1} =& (n+1)D_n + (-1)^{n+1} \\
=& (n+1) \times n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n+1} \\
=& (n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)! \times \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
=& (n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

符合等式，综上证毕。

EX21

> Prove that D_n is an even number if and only if n is an odd number.

语句p：n为奇数；语句q：D_n为偶数。
原题目可以转化为证明如下两个命题：若p成立，则q也成立；若q成立，则p也成立。

我们先考虑命题二，对于命题二我们验证它的「逆否命题」，若$\neg q$成立，则$\neg p$也成立。
命题转化为，n为偶数时，D_n为奇数。

观察式子$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$，当n为偶数时，nD_{n-1}项为偶数，$(-1)^n = 1$，显然D_n为奇数，命题二的逆否命题为真，命题二也为真。

对于命题一，我们采用数学归纳法证明。当n为奇数时，
并且当n=1时，有$D_1 = 0$，显然成立；

当n=2k+1(≥ 1)时，设D_{2k+1}为偶数；那么当$n = 2k+3$时，$D_{2k+3} = (2k+3)D_{2k+2} + (-1)^{(2k+3)} = (2k+3)D_{2k+2} - 1$，由命题二的逆否命题可知$D_{2k+2}$一定为奇数，进而两个奇数的乘积$(2k+3)D_{2k+2}$也为奇数，减一后为偶数。

综上，当n为奇数时，命题得证。

因为命题一和命题二均为真，因此可以说，D_n是偶数当且仅当n是奇数。

EX21吐槽

颇有点压轴题的感觉，证明「若n为奇数，则D_n为偶数」这个命题前需要先证明「若n为偶数，则D_n为奇数」。如果有前一问的引导，难度会小一些；若是直接跳跃性地构造最后一问，难度就大很多。

EX22

> Show that the numbers Q_n of Section 6.5 can be rewritten in the form
>
> $$Q_n = (n-1)!(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!})$$

对Q_n定义的变形，

$$
\begin{aligned}
Q_n =&n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! \\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k(n-k)! \\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}\cdot(-1)^k\cdot(n-k)! \\
=&(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!} \\
=&(n-1)!(\frac{n-0}{0!} - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n-(n-1)}{(n-1)!}) \\
=&(n-1)!(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!})
\end{aligned}
$$

综上，证毕。

EX23

> (Continuation of Exercise 22.) Use the identity
>
> $$(-1)^k\frac{n-k}{k!} = (-1)^k\frac{n}{k!} + (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}$$
>
> to prove that $Q_n = D_n + D_{n-1}, (n = 2, 3, ...)$.

$$
\begin{aligned}
Q_n =&(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!} \\
=&(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}((-1)^k\frac{n}{k!} + (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}) \\
=&nD_{n-1} + (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \\
=&nD_{n-1} + (n-1)!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{(i)!} \\
=&nD_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \\
=&D_{n-1} + (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad \text{for } D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\
=&D_n + D_{n-1}
\end{aligned}
$$

EX23注

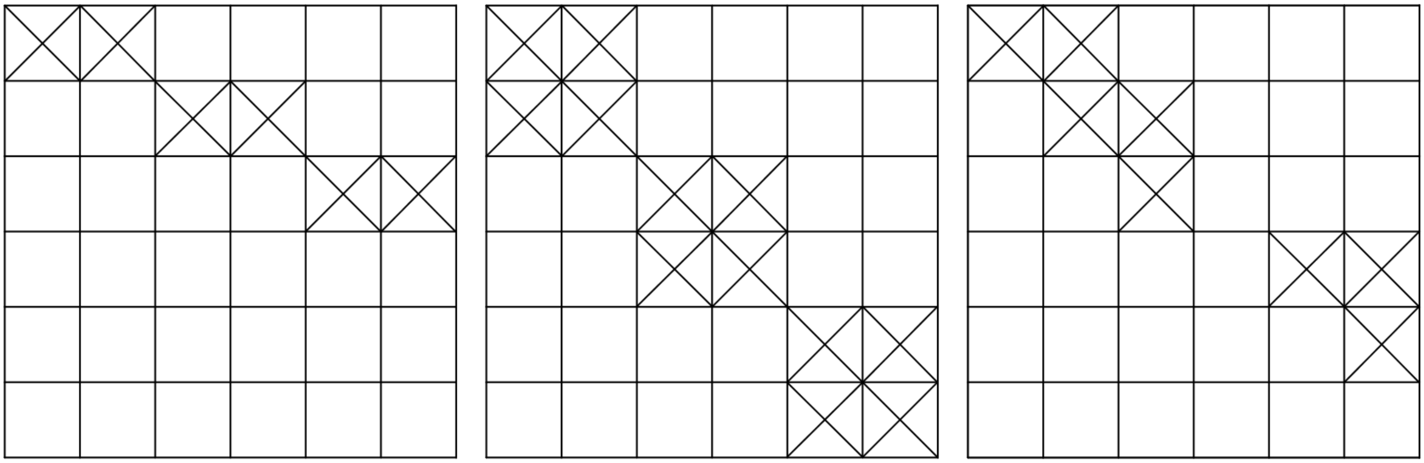
该解法需要使用$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$的化简技巧，答案的则是巧妙地添加了一个为0的项$(-1)^n\frac{n-n}{n!}$，进而，

$$Q_n = (n-1)!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n-k}{k!}$$

在之后的展开项中则分别是D_n, D_{n-1}的定义形式。

EX24

> What is the number of ways to place six nonattacking rooks on the 6-by-6 boards with forbidden positions as shown?



(a) (b) (c)

设r_k为在k个禁止位上摆放棋子的方法数，

EX24 Q(a)

显然，$r_0 = 1, r_1 = 6$，禁止位置的集合可以划分为3个独立的部分，每一部分最多只能放置一辆车。

因此，$r_2 = \binom{3}{2} \times 2^2 = 12, r_3 = \binom{3}{3} 2^3 = 8$。

禁止位置上无法摆放四辆及以上的车，因此，$r_i = 0, i \geq 4$。

综上，可以列表，

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	6	12	8	0	0	0

并且计算摆放的方法数。

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (-1)^k (n-k)! = 1 \times 6! - 6 \times 5! + 12 \times 4! - 8 \times 3! = 240$$

EX24 Q(b)

$$r_2 = 3 \times 2 + \binom{3}{2} \times 4^2 = 54$$
$$r_3 = \binom{3}{1} \times 2 \times \binom{2}{1} \times 4 + 4^3 = 112$$
$$r_4 = \binom{3}{2} \times 2^2 + \binom{3}{1} \times 2 \times 4^2 = 108$$
$$r_5 = \binom{3}{2} \times 2^2 \times 4 = 48$$
$$r + 6 = 2^3 = 8$$

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	12	54	112	108	48	8

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (-1)^k (n-k)! = 1 \times 6! - 12 \times 5! + 54 \times 4! - 112 \times 3! + 108 \times 2! - 48 \times 1! + 8 \times 0! = 80$$

EX24 Q(c)

将棋盘禁止位分为相互独立的F_1和F_2，分别求出F_1和F_2能摆放车的方法数，如下表

k	0	1	2	3
$F_1(k)$	1	5	6	1

k	0	1	2
$F_2(k)$	1	3	1

进而求出$r_k = \sum_{j=0}^{k} F_1(j)F_2(k-j)$，

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	8	22	24	9	1	0

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(-1)^k(n-k)! = 1 \times 6! - 8 \times 5! + 22 \times 4! - 24 \times 3! + 9 \times 2! - 1 \times 1! + 0 \times 0! = 161$$

EX25

> Count the permutations $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ of {1, 2, 3, 4, 5, 6}, where $i_1 \neq 1, 5, i_3 \neq 2, 3, 5; i_4 \neq 4$; and $i_6 \neq 5, 6$.

该问题等价于棋盘问题，可以把不等式转化为每一行（列）限制的序号，本题画出图像后可以发现，有4个大小为1的禁止块，2个大小为2的禁止块。

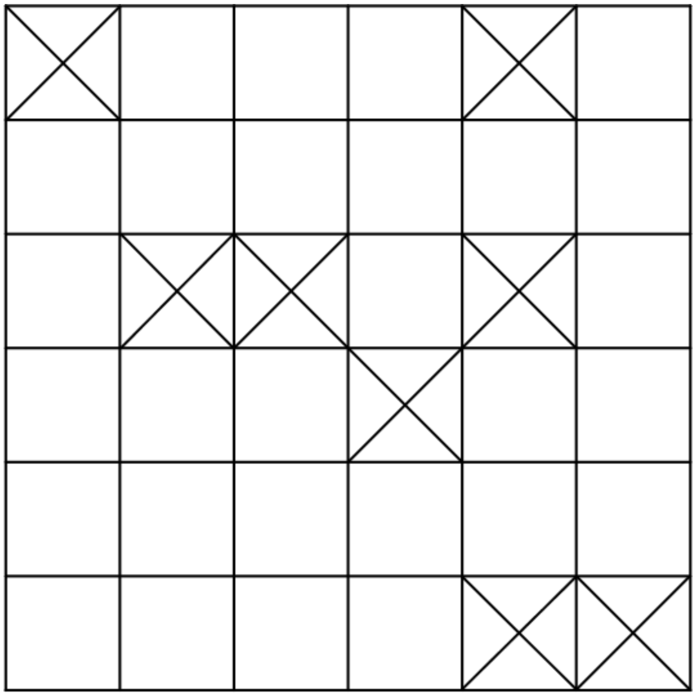
从行的角度来思考，最多放置4个车，因为只有4行有禁止位，所以$r_5 = r_6 = 0$。

对于r_2的计算方法是：先固定一个，寻找另一个可能的位置，因此$r_2 = 6 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 20$。

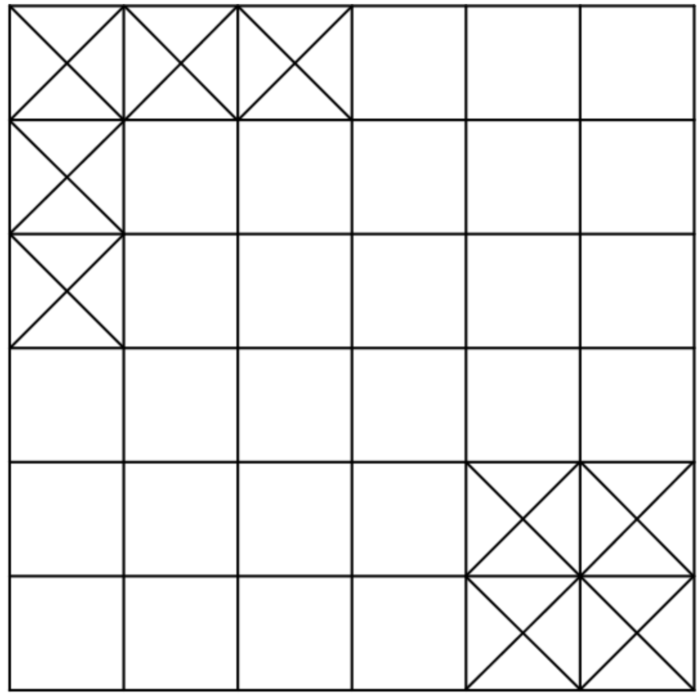
$$r_3 = (3 + 3 + 2 + 2) + (2 + 2 + 1) + (2) + (2) + (1) = 20$$
$$r + 4 = 2 + 2 + 2 + 1 = 7$$

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	1	8	20	20	7	0	0

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(-1)^k(n-k)! = 1 \times 6! - 8 \times 5! + 20 \times 4! - 20 \times 3! + 7 \times 2! - 0 \times 1! + 0 \times 0! = 134$$



EX 25



EX 26

EX25注

本题与其他禁止位放车问题的区别是：本题不太容易拆分成几个独立的部分。

EX26

> Count the permutations $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6$ of {1, 2, 3, 4,5, 6}, where $i_1 \neq 1,2,3; i_2 \neq 1; i_3 \neq 1; i_5 \neq 5,6$ and $i_6 \neq 5,6$.

题目转化过程同EX25，不过这次计算类似EX24。将棋盘禁止位置划分为F_1, F_2。

对于每一部分，先计算摆放车可能的种类数，

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$F_1(k)$	1	5	4	0

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$F_2(k)$	1	4	2	0

$$r_k = \sum_{i=0}^{n} F_1(i) \times F(k-i)$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
r_k	1	9	26	26	0	0	0

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (-1)^k (n-k)! = 1 \times 6! - 9 \times 5! + 26 \times 4! - 26 \times 3! = 108$$

EX27

> A carousel has eight seats, each representing a different animal. Eight girls are seated on the carousel facing forward (each girl ooks at another girl's back). In how many ways can the girls change seats so that each has a different girl in front of her? How does the problem change if all the seats are identical?

设8个位置的座位编号分别为$1,2,...,8$，并且i号座位面向i+1号座位（$1\le i\le 7$），8号座位面向1号座位。

第i个女孩分别坐在i号座位上，重排后坐到s_i号座位上，并且要求s_i不能面向s_{i+1}，（s_8不能面向s_1）。

记A_i表示排列$s_1s_2\cdots s_8$中s_i面向s_{i+1}（$1\le i\le 7$），A_8表示表示排列$s_1s_2\cdots s_8$中s_8面向s_1。

对于$|A_1|$，有8种方式决定s_1，s_2只能在前面，有1种方式，其余可以随意排列。因此$|A_1|=8\times 1\times 6!$。$|A_i|$同理。

对于$|A_1\cap A_2|$，有8种方式决定$s_1s_2s_3$；其余可以随意排列。因此$|A_1\cap A_2|=8\times 5!$，其余$|A_i\cap A_j|$同理。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_4}| =&|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\cdots+\sum|A_1A_2\cdots A_7A_8|\\
=&8!-\binom{8}{1}\times 8\times 6!+\binom{8}{2}\times 8\times 5!-\cdots+8\\
=&13000
\end{aligned}
$$

当所有座位都相同时，第一个选择座位的女孩只有1种选法，破环后，其余人选法不变，因此排列总数为$13000/8=1625$。

EX27注

参考答案给的符号有些歧义，A_i和A_s表示的含义不一样，但符号相同，如$|A_1|$对前者（$|A_{i=1}|$）来说，是s_1面向s_2的情况；对于后者（$|A_{s=1}|$）来说则是所有1个交集的情况$\sum|A_i|$。

EX28

> A carousel has eight seats, each representing a different animal. Eight boys are seated on the carousel but facing inward, so that each boy faces another (each boy looks at another boy's front). In how many ways can the boys change seats so that each faces a different boy? How does the problem change if all the seats are dentical?

第i个男孩坐在i号座位上，重排后坐到s_i号座位上。设A_i表示s_i与s_{i+4}面对面（$1\le i\le 4$），因此需要求所有i与i+4没有面对面的情况，即$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$。

对于$|A_1|$，有8种方式决定s_1，s_5只能在对面，有1种方式，其余可以随意排列。因此$|A_1|=8\times 1\times 6!$。$|A_2|,|A_3|,|A_4|$同理。

对于$|A_1\cap A_2|$，有8种方式决定s_1，s_5随之确定；有6种方式确定s_2，s_6也随之确定，其余可以随意排列。因此$|A_1\cap A_2|=8\times 6\times 4!$，其余$|A_i\cap A_j|$同理。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| =&|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\sum|A_iA_jA_k|+\sum|A_iA_jA_kA_u|\\
=&8!-\binom{4}{1}(8\times 6!)+\binom{4}{2}(8\times 6\times 4!)-\binom{4}{3}(8\times 6\times 4\times 2!)+\binom{4}{4}(8\times 6\times 4\times 2)\\
=&23040
\end{aligned}
$$

当所有座位都相同时，则变成了换排列，因此排列总数为$23040/8=2880$。

EX29

> A subway has six stops on its route from its base location. There are 10 people on the subway as it departs its base location. Each person exits the subway at one of its six stops, and at each stop at least one person exits. In how many ways can this happen?

如果没有任何限制，10个人一共有6^{10}种下车方案。设A_i表示没人在i车站下车，所以有$|A_i|=5^{10}$；对于$|A_i\cap A_j|=4^{10}$。同理，可以计算多个子集车站没人下车的情况。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_6}| =&|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\cdots+\sum|A_1A_2\cdots A_6|\\
=&6^{10}+(-1)^k\binom{6}{k}(6-k)^10\\
=&6^{10}-6\times 5^{10}+15\times 4^{10}-20\times 3^{10}+15\times 2^{10}-6\times 1^{10}+1\times 0^{10}\\
=&1165626
\end{aligned}
$$

EX30

> How many circular permutations are there of the multiset
>
> $$\{3\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c, 1\cdot d\},$$
>
> where, for each type of letter, all letters of that type do not appear consecutively?

设$A_i, i=1,2,3$分别表示出现了*aaa*、*bbbb*和*cc*，A_1可以当作aaa,b,b,b,b,c,c,d的**循环排列**，即$\frac{1}{8}\times\binom{8}{1\ 4\ 2}=105$。

set	size
A_1	105
A_2	60
A_3	280
$A_1\cap A_2$	12
$A_1\cap A_3$	30
$A_2\cap A_3$	20
$A_1\cap A_2\cap A_3$	3

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| =&|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\sum|A_iA_jA_k|\\ =&\frac{1}{10}\times\frac{10!}{3!\cdot4!\cdot2!\cdot1!}-(105+60+280)+(12+30+20)-3\\ =&1260-(105+60+280)+(12+30+20)-3\\ =&874\end{aligned}$$

EX30顺便一提

参考答案认为一个d本身就是所有的d连续出现。

Since d appears in the multiset with multiplicity one, it is vacuously true that for any circular permutation of the multiset, all occurrences of d will appear consecutively.

当然，最后解题时还是认为连续最起码要有一前一后的两项才算连续，所谓「连续」，参考EX17，甚至本题数据和结果都与这题一致。

EX31

> How many circular permutations are there of the multiset
>
> $$\{2\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\},$$
>
> where, for each type of letter, all letters of that type do not appear consecutively?

设$A_i, i=1,2,3,4$分别表示出现了*aa*、*bbb*、*ccccc*和*ddddd*，A_1可以当作$aa,b,b,b,c,c,c,c,d,d,d,d,d$的**循环排列**，即$\frac{1}{13}\times\binom{13}{1\ 3\ 4\ 5}=27720$。

set	size
A_1	27720
A_2	6930
A_3	2520
A_4	1260
$A_1\cap A_2$	1260
$A_1\cap A_3$	504

set	size
$A_1 \cap A_4$	280
$A_2 \cap A_3$	168
$A_2 \cap A_4$	105
$A_3 \cap A_4$	60
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	42
$A_1 \cap A_2 \cap A_4$	30
$A_1 \cap A_3 \cap A_4$	20
$A_2 \cap A_3 \cap A_4$	12
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$	6

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| =& |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i A_j| - \sum |A_i A_j A_k| + \sum |A_i A_j A_k A_u| \\
=& \frac{1}{14} \times \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} - (27720 + 6930 + 2520 + 1260) + (1260 + 504 + 280 + 168 + 105 + 60) - (42 + 30 + 20 + \\
=& 180180 - (27720 + 6930 + 2520 + 1260) + (1260 + 504 + 280 + 168 + 105 + 60) - (42 + 30 + 20 + 12) + 6 \\
=& 144029
\end{aligned}
$$

EX32-40说明

后面的题目似乎都是6.5小结莫比乌斯反演的练习题，~~因为不考，所以不写也不列给题目~~。

其中EX33是加星题目（*）；EX36是带有禁止位置的放车问题，虽然指明了用6.5中的解题方法。但用EX24中的方法也能很快做出答案（6种）。

重要补充&考后谈

EX32这题虽然带着**欧拉**的关键字，但老师似乎并不认为是6.5小结的题目，所以考了这道题。

毕竟是数学考试，不能没背就不会吧。姑且我在考场上，猜测了一下构造方法——正所谓，「向答案证明」，既然要用容斥原理，那我就把所有的连乘拆成累加，正好凑出了$(-1)^k$，只需要再去观察一下每一项究竟是什么含义，或者说是谁和谁的交集，大约就能才出来不少。

结果对不对不重要，重要的是猜题的过程。让我想起了我在「大学最后一场考试」那篇文章里提到的编造热膨胀系数，考试中的心理斗争很有趣，与今天很类似。